



**HAL**  
open science

# Etude des propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés pour des problèmes de régression à phases multiples

Samira Benzekri

► **To cite this version:**

Samira Benzekri. Etude des propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés pour des problèmes de régression à phases multiples. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1989. Français. NNT: . tel-00332517

**HAL Id: tel-00332517**

**<https://theses.hal.science/tel-00332517>**

Submitted on 21 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Présentée à  
L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER \*GRENOBLE I\*

par  
BENZEKRI Samira

Pour obtenir le titre de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER  
\*GRENOBLE I\*  
"Mathématiques"

\*\*\*\*\*

## ETUDE DES PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES ESTIMATEURS DES MOINDRES CARRES POUR DES PROBLEMES DE REGRESSION A PHASES MULTIPLES

\*\*\*\*\*

Thèse soutenue le 6 Juin 1989 devant la commission d'examen

Président : M<sup>r</sup> B. VAN CUTSEM

Examineurs: M<sup>r</sup> A. ANTONIADIS  
M<sup>r</sup> F. BRODEAU  
M<sup>r</sup> P. CAZES  
M<sup>r</sup> J.L. SOLER

Thèse préparée au sein du Laboratoire TIM 3, Institut IMAG



# UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :  
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

### PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées

LAJZEROWICZ Jeanine  
LAJZEROWICZ Joseph  
LAURENT Pierre-Jean  
LEBRETON Alain  
DE LEIRIS Joël  
LHOMME Jean  
LLIBOUTRY Louis  
LOISEAUX Jean-Marie  
LUNA Domingo  
MACHE Régis  
MASCLE Georges  
MAYNARD Roger  
OMONT Alain  
OZENDA Paul  
PAYAN Jean-Jacques  
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude  
PERRIER Guy  
PIERRARD Jean-Marie  
PIERRE Jean-Louis  
RENARD Michel  
RINAUDO Marguerite  
ROSSI André  
SAXOD Raymond  
SENGEL Philippe  
SERGERAERT Francis  
SOUCHIER Bernard  
SOUTIF Michel  
STUTZ Pierre  
TRILLING Laurent  
VALENTIN Jacques  
VAN CUTSEM Bernard  
VIALON Pierre

Physique  
Physique  
Mathématiques Appliquées  
Mathématiques Appliquées  
Biologie  
Chimie  
Géophysique  
Sciences Nucléaires I.S.N.  
Mathématiques Pures  
Physiologie Végétale  
Géologie  
Physique du Solide  
Astrophysique  
Botanique (Biologie Végétale)  
Mathématiques Pures  
Physique  
Géophysique  
Mécanique  
Chimie Organique  
Thermodynamique  
Chimie CERMAV  
Biologie  
Biologie Animale  
Biologie Animale  
Mathématiques Pures  
Biologie  
Physique  
Mécanique  
Mathématiques Appliquées  
Physique Nucléaire I.S.N.  
Mathématiques Appliquées  
Géologie

#### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> Classe

ADIBA Michel  
ANTOINE Pierre  
ARMAND Gilbert  
BARET Paul  
BLANCHI J.Pierre  
BLUM Jacques  
BOITET Christian  
BORNAREL Jean  
BRUANDET J.François  
BRUGAL Gérard  
BRUN Gilbert  
CASTAING Bernard  
CERFF Rudiger  
CHIARAMELLA Yves  
COURT Jean  
DUFRESNOY Alain  
GASPARD François  
GAUTRON René  
GENIES Eugène  
GIDON Maurice  
GIGNOUX Claude  
GILLARD Roland  
GIORNI Alain  
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo  
GUIGO Maryse  
GUMUCHAIN Hervé  
GUTTON Jacques

Mathématiques Pures  
Géologie  
Géographie  
Chimie  
STAPS  
Mathématiques Appliquées  
Mathématiques Appliquées  
Physique  
Physique  
Biologie  
Biologie  
Physique  
Biologie  
Mathématiques Appliquées  
Chimie  
Mathématiques Pures  
Physique  
Chimie  
Chimie  
Géologie  
Sciences Nucléaires  
Mathématiques Pures  
Sciences Nucléaires  
Mathématiques Pures  
Géographie  
Géographie  
Chimie

HACQUES Gérard  
 HERBIN Jacky  
 HERAULT Jeanny  
 JARDON Pierre  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 KERCKHOVE Claude  
 LONGEQUEUE Nicole  
 LUCAS Robert  
 MANDARON Paul  
 MARTINEZ Francis  
 NEMOZ Alain  
 OUDET Bruno  
 PECHER Arnaud  
 PELMONT Jean  
 PERRIN Claude  
 PFISTER Jean-Claude  
 PIBOULE Michel  
 RAYNAUD Hervé  
 RICHARD Jean-Marc  
 RIEDTMANN Christine  
 ROBERT Gilles  
 ROBERT Jean-Bernard  
 SARROT-REYNAULD Jean  
 SAYETAT Françoise  
 SERVE Denis  
 STOECKEL Frédéric  
 SCHOLL Pierre-Claude  
 SUBRA Robert  
 VALLADE Marcel  
 VIDAL Michel  
 VIVIAN Robert  
 VOTTERO Philippe

Mathématiques Appliquées  
 Géographie  
 Physique  
 Chimie  
 Biochimie  
 Géologie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Thermodynamique CNRS - CRTBT  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie  
 Biochimie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique du Solide  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Mathématiques Pures  
 Chimie Physique  
 Géologie  
 Physique  
 Chimie  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 Géographie  
 Chimie

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

### PROFESSEURS de 1<sup>ère</sup> Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA. IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

## PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

### PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Immunologie	Hopital sud
COLOMB Maurice	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophthisiologie	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anestésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biochimie	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul		
TANCHE Maurice		
VIGNAIS Pierre		

**PROFESSEURS 2ème CLASSE**

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAUIROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophtalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Georges LESPINARD

Année 1988

## Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG	JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
BARRAUD Alain	ENSIEG	JOUBERT Jean-Claude	ENSPG
BAUDELET Bernard	ENSPG	JOURDAIN Geneviève	ENSIEG
BEAUFILS Jean-Pierre	ENSEEG	LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
BLIMAN Samuel	ENSERG	LESIEUR Marcel	ENSHMG
BLOCH Daniel	ENSPG	LESPINARD Georges	ENSHMG
BOIS Philippe	ENSHMG	LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG	LOUCHET François	ENSIEG
BOUVARD Maurice	ENSHMG	MASSE Philippe	ENSIEG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG	MASSELOT Christian	ENSIEG
BRUNET Yves	IUFA	MAZARE Guy	ENSIMAG
CAILLERIE Denis	ENSHMG	MOREAU René	ENSHMG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG	MORET Roger	ENSIEG
CHARTIER Germain	ENSPG	MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
CHENEVIER Pierre	ENSERG	OBLED Charles	ENSHMG
CHERADAME Hervé	UFR PGP	OZIL Patrick	ENSEEG
CHOVET Alain	ENSERG	PARIAUD Jean-Charles	ENSEEG
COHEN Joseph	ENSERG	PERRET René	ENSIEG
COUMES André	ENSERG	PERRET Robert	ENSIEG
DARVE Félix	ENSHMG	PIAU Jean-Michel	ENSHMG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG	POUPOT Christian	ENSERG
DEPORTES Jacques	ENSPG	RAMEAU Jean-Jacques	ENSEEG
DOLMAZON Jean-Marc	ENSERG	RENAUD Maurice	UFR PGP
DURAND Francis	ENSEEG	ROBERT André	UFR PGP
DURAND Jean-Louis	ENSIEG	ROBERT François	ENSIMAG
FOGGIA Albert	ENSIEG	SABONNADIÈRE Jean-Claude	ENSIEG
FONLUPT Jean	ENSIMAG	SAUCIER Gabrielle	ENSIMAG
FOULARD Claude	ENSIEG	SCHLENKER Claire	ENSPG
GANDINI Alessandro	UFR PGP	SCHLENKER Michel	ENSPG
GAUBERT Claude	ENSPG	SILVY Jacques	UFR PGP
GENTIL Pierre	ENSERG	SIRIEYS Pierre	ENSHMG
GREVEN Hélène	IUFA	SOHM Jean-Claude	ENSEEG
GUERIN Bernard	ENSERG	SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
GUYOT Pierre	ENSEEG	SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
IVANES Marcel	ENSIEG	TROMPETTE Philippe	ENSHMG
		VEILLON Gérard	ENSIMAG
		ZADWORNY François	ENSERG

Professeur Université des Sciences  
Sociales  
( Grenoble II )

BOLLIET Louis

**Personnes ayant obtenu le diplôme  
d'HABILITATION A DIRIGER  
DES RECHERCHES**

BECKER Monique  
BINDER Zdenek  
CHASSERY Jean-Marc  
CHOLLET Jean-Pierre  
COEY John  
COLINET Catherine  
COMMAULT Christian  
CORNUJOLS Gérard  
COULOMB Jean- Louis  
DALARD Francis  
DANES Florin  
DEROO Daniel  
DIARD Jean-Paul  
DION Jean-Michel  
DUGARD Luc  
DURAND Madeleine  
DURAND Robert  
GALERIE Alain  
GAUTHIER Jean-Paul  
GENTIL Sylviane  
GHIBAUDO Gérard  
HAMAR Sylvaine  
HAMAR Roger  
LADET Pierre  
LATOMBE Claudine  
LE GORREC Bernard  
MADAR Roland  
MULLER Jean  
NGUYEN TRONG Bernadette  
PASTUREL Alain  
PLA Fernand  
ROUGER Jean  
TCHUENTE Maurice  
VINCENT Henri

**Chercheurs du C.N.R.S**

**Directeurs de recherche 1ère Classe**

CARRE René  
FRUCHART Robert  
HOPFINGER Emile  
JORRAND Philippe  
LANDAU Ioan  
VACHAUD Georges  
VERJUS Jean-Pierre

**Directeurs de recherche  
2ème Classe**

ALEMANY Antoine  
ALLIBERT Colette  
ALLIBERT Michel  
ANSARA Ibrahim  
ARMAND Michel  
BERNARD Claude  
BINDER Gilbert  
BONNET Roland  
BORNARD Guy  
CAILLET Marcel  
CALMET Jacques  
COURTOIS Bernard  
DAVID René

DRIOLE Jean  
ESCUDIER Pierre  
EUSTATHOPOULOS Nicolas  
GUELIN Pierre  
JOURD Jean-Charles  
KLEITZ Michel  
KOFMAN Walter  
KAMARINOS Georges  
LEJEUNE Gérard  
LE PROVOST Christian  
MADAR Roland  
MERMET Jean  
MICHEL Jean-Marie  
MUNIER Jacques  
PIAU Monique  
SENATEUR Jean-Pierre  
SIFAKIS Joseph  
SIMON Jean-Paul  
SUERY Michel  
TEODOSIU Christian  
VAUCLIN Michel  
WACK Bernard

**Personnalités agréées à titre permanent  
à diriger des travaux de recherche  
(décision du conseil scientifique)**

E.N.S.E.E.G  
CHATILLON Christian  
HAMMOU Abdelkader  
MARTIN GARIN Régina  
SARRAZIN Pierre  
SIMON Jean-Paul

E.N.S.E.R.G

BOREL Joseph  
E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
PERARD Jacques  
REINISCH Raymond  
E.N.S.H.G

ROWE Alain  
E.N.S.I.M.A.G  
COURTIN Jacques

E.F.P.

CHARUEL Robert  
C.E.N.G

CADET Jean  
COEURE Philippe  
DELHAYE Jean-Marc  
DUPUY Michel  
JOUVE Hubert  
NICOLAU Yvan  
NIFENECKER Hervé  
PERROUD Paul  
PEUZIN Jean-Claude  
TAIB Maurice  
VINCENDON Marc

**Laboratoires extérieurs**

C.N.E.T  
DEVINE Rodericq  
GERBER Roland  
MERCKEL Gérard  
PAULEAU Yves

**A mes Parents**  
**A mes Soeurs et Frères**  
**A Rhita , Nora, Sofia et Mariam**  
**A ma Famille**  
**A la mémoire de ma tante Mama**  
**A mes Amis.**



*Ce travail a été réalisé au laboratoire TIM3, dans l'équipe de Statistiques qui a été dirigée par M<sup>r</sup> A.LEBRETON, professeur à l'Université JOSEPH FOURIER de Grenoble, à qui j'adresse mes remerciements pour m'avoir accueillie dans son laboratoire. ♣*

*Que M<sup>r</sup> B. VAN CUTSEM, professeur à l'Université JOSEPH FOURIER de Grenoble, sache combien je suis sensible et fière à l'interêt qu'il a porté à ce travail et à l'honneur qu'il me fait de présider le jury. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. ♣*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs P.CAZES, professeur à l'université PARIS IX DAUPHINE, et A.ANTONIADIS, professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, qui ont accepté de mobiliser leurs temps et leurs compétences pour rapporter ce travail. ♣*

*Je présente mes remerciements les plus sincères à M<sup>r</sup> J.L.SOLER, professeur à I.N.P.G, qui a bien voulu consacrer une partie de son temps pour juger ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de prendre part au jury. ♣*

*J'ai eu la chance d'avoir pour directeur de recherche M<sup>r</sup> F.BRODEAU, professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble. De notre longue collaboration, j'ai retiré un enrichissement qui dépasse de loin le cadre de ce travail. Je souhaite vivement que cette collaboration se poursuive. Qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance tant pour ses qualités humaines et scientifiques. ♣*

*Je remerciais jamais assez ma FAMILLE pour les nombreux soutiens qu'elle a su m'apporter. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude. ♣*

*Mes remerciements vont enfin à tous les professeurs de TIM3 et au service de reprographie de l'institut IMAG. ♣*



# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION GENERALE

### CHAPITRE I : PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES ESTIMATEURS DES MOINDRES CARRES NON-LINEAIRES

- I. Introduction
- II. Notations
- III. Rappels de quelques résultats de JENRICH
- IV. Consistance et normalité asymptotique des estimateurs des moindres carrés

### CHAPITRE II : CAS OU LES FONCTIONS DE REGRESSION DU MODELE APPROXIMATIF SONT REGULIERES

- I. Introduction
- II. Notations et hypothèses
- III. Résultats
  - III.1. Etude de la suite  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
  - III.2. Etude de la suite  $\{\theta_n - \theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$
  - III.3. Etude de la suite  $\{n^{1/2}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}]\}_{n \in \mathbb{N}}$
  - III.4. Choix du modèle

### CHAPITRE III : MODELE DE REGRESSION A PHASES MULTIPLES

- I. Présentation du modèle et hypothèses
- II. Construction de la suite  $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et notations
  - II.1. Construction de la suite  $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$
  - II.2. Notations
- III. Résultats
  - III.1. Consistance de la suite  $\{\theta'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
  - III.2. Etude de la suite  $\{n^{1/2}(\theta'_n - \theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

III.3. Etude de  $\{n^{1/2}(\theta'_n - \theta_{nm})\}_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $\{n^{1/2}(\theta_n - \theta_{nm})\}_{n \in \mathbb{N}}$

III.4. Etude de la suite  $\{n^{1/2}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}]\}_{n \in \mathbb{N}}$

III.5. Choix du modèle

## **CHAPITRE IV : TESTS**

Introduction

I. Etude de la suite  $\{n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{\min})\}_{n \in \mathbb{N}}$

II. Test d'adéquation

III. Test de comparaison

IV. Test du rapport des moindres carrés

IV.1. Introduction

IV.2. Etude du rapport des moindres carrés

**ANNEXE 1**

**ANNEXE 2**

**ANNEXE 3**

**ANNEXE 4**

**BIBLIOGRAPHIE**

# **INTRODUCTION GENERALE**



Nous envisageons dans notre travail un problème statistique classique des modèles de régression que l'on dit, avec rupture. Dans la littérature, l'étude de ces modèles s'articule autour de deux axes : Détection et estimation de la rupture et estimation des autres paramètres du modèle.

Les propriétés des différents estimateurs proposés dans la littérature font bien comprendre les difficultés inhérentes au modèle ( problèmes d'estimation des ruptures proches du début ou de la fin des observations ) : citons en particulier les travaux de FEDER [16] et HINKLEY [18](2).

Un des buts de notre travail est de présenter une procédure de décision pour le choix d'un modèle parmi deux modèles approximatifs de régression non linéaire. Nous appliquons par la suite cette procédure au cas particulier où l'un des deux modèles approximatifs est un ensemble de fonctions présentant une rupture.

Pour une suite  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments distincts de  $[0,1]$ , on considère le modèle de régression défini par :

$$X_i = f(t_i) + e_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

où

- \*  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance  $\sigma^2$ .
- \*  $f$  est une fonction réelle, inconnue, supposée continue sur  $[0,1]$ .

Le problème est alors d'estimer la fonction  $f$ . Pour ce faire, on l'approche par une classe de fonctions  $\mathcal{M} = \{ g(t, \theta), t \in [0,1], \theta \in \Theta \}$  telle que :

- $\Theta$  est un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ .
- $\forall \theta \in \Theta$ ,  $g(., \theta)$  est une fonction non linéaire continue sur  $[0,1]$ .

Citons comme exemples usuels de ces classes :

\* **Modèle de fonctions présentant une rupture :**

$$g(t, \theta) = \alpha + \beta_1(t - \tau)\mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) + \beta_2(t - \tau)\mathbb{1}_{] \tau, \infty[}(t),$$

où  $\mathbb{1}$  désigne l'indicatrice,  $\theta = (\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  et  $\beta_1 \neq \beta_2$ .

\* **Modèle de fonctions exponentielles :**

- $g(t, \theta) = a \times \exp(bt) + c$ , avec  $\theta = (a, b, c)$ .
- $g(t, \theta) = (at + d) \times \exp(bt) + c$ , avec  $\theta = (a, b, c, d)$ .

\* **Modèle de fonctions paraboliques :**

$$g(t, \theta) = at^2 + bt + c, \text{ avec } \theta = (a, b, c).$$

Zwanzig [36] a étudié le problème en considérant la classe des fonctions de la forme  $\mathcal{M} = \{g^n(t, \theta) = {}^t\alpha h^n(\cdot, \beta), \theta = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times B, p \geq 1\}$  où  $B$  est un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^q, q \geq 1$ .

Seulement dans son travail, Zwanzig s'est basé sur certaines conditions difficilement réalisables à savoir les hypothèses de convergence  $A_6, A_9$  et  $A_{11}$  de [36], d'ailleurs certains commentaires sur ces hypothèses de convergence, ont été faits par H. Bunke [6].

En parallèle d'autres auteurs se sont intéressés aux problèmes de ruptures dans un modèle de régression.

On peut citer Page [27], Quandt [29], Chernoff et Zacks [10], Hudson [19] et Smith [34] qui ont proposé des estimateurs, tant des instants de ruptures que des paramètres des différentes phases. Citons aussi les travaux de Hinkley [18] et Feder [16] à propos de la distribution asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance et de la normalité des estimateurs des moindres carrés. Sans oublier les travaux de J. Deshayes et D. Picard [14] qui ont élaboré des tests pour déceler l'existence d'une rupture dans un modèle de régression, à savoir les tests classiques suivants construits à l'aide des résidus récursifs [14](2) :

- Tests classiques basés sur les sommes cumulées : Ils consistent à rejeter l'hypothèse  $H_0$  - il n'y a pas de rupture - lorsqu'une marche aléatoire sort du domaine limité par deux fonctions continues.
- Test du rapport de vraisemblance.

Ils ont proposé des comparaisons asymptotiques de ces différents tests. Il s'est avéré que pour tout  $\alpha > 0$ , le test du rapport de vraisemblance est uniformément, exponentiellement optimal parmi les tests invariants, de niveau  $\alpha$ .

Dans notre travail, nous allons d'une part, estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés, et d'autre part, rechercher une classe de fonctions  $\mathcal{M}$  qui contient la meilleure approximation de la fonction  $f$ .

Pour tout entier  $n$  et tout  $t$  élément de  $[0,1]$ , on pose  $F_n(t) = (1/n) \sum_{i=1, n} \mathbb{1}_{[0,t]}(t_i)$ . Si la suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge ponctuellement vers une fonction continue et strictement croissante  $F$ , on définit alors les distances entre  $f$  et tout élément  $g$  de  $\mathcal{M}$  ( resp entre  $f$  et  $\mathcal{M}$  ) de la façon suivante :

$$[f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]^2 = \lim_n \int_{[0,1]} (f(t) - g(t, \theta))^2 dF_n(t) = \int_{[0,1]} (f(t) - g(t, \theta))^2 dF(t).$$

( resp  $\Delta_{\min} = \min_{\theta \in \Theta} [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]^2$  ).

Soit  $\theta_{\min}$  un élément de  $\Theta$  qui réalise  $\Delta_{\min}$ . La quantité  $\Delta_{\min}$  est appelée " erreur du modèle ".

Choisir le meilleur modèle  $\mathcal{M}$ , revient donc à choisir un modèle dont l'erreur est minimale.

Notons que le modèle est approximatif dans le sens où on ne sait pas s'il existe un élément  $\theta_0$  de  $\Theta$  tel que  $g(\cdot, \theta_0) = f(\cdot)$ . Si c'était le cas, le modèle serait adéquat ( $\Delta_{\min} = 0$ ).

On étudie le cas où la fonction de régression à estimer n'appartient pas nécessairement au modèle paramétrique utilisé. On considère deux cas, celui où cette fonction est régulière et celui où elle présente une rupture.

Cette étude utilise l'estimateur des moindres carrés et dégage les propriétés asymptotiques de cet estimateur de façon à pouvoir traiter les deux problèmes suivants :

- \* Adéquation du modèle
- \* Comparaison de deux modèles

Dans le chapitre 1, on rappelle certains résultats fondamentaux de Jenrich [21] concernant les propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés non linéaires.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés respectivement à l'étude du problème dans le cas où la fonction de régression est supposée régulière et dans le cas où elle présente une rupture.

On établit certains résultats concernant les lois asymptotiques des estimateurs des moindres carrés et on propose dans chaque cas, une statistique qui peut être utilisée dans un test en ce qui concerne le choix du modèle approximatif.

Dans le chapitre 4, on applique ces tests à certains cas particuliers usuels, à savoir le cas où la fonction de régression  $f$  est supposée être soit une fonction parabolique, soit une fonction exponentielle, soit une fonction présentant une rupture. De même, on y propose un nouveau test d'hypothèses que l'on baptise "test du rapport des moindres carrés".

Notons que dans le cas gaussien, le test du rapport des moindres carrés coïncide avec le test du maximum de vraisemblance.

Enfin, nous proposons des algorithmes permettant d'appliquer ces tests, ainsi que des exemples numériques.

On remarque que  $\sigma^2$  apparaît dans toutes les lois asymptotiques. Si  $\sigma^2$  était inconnue le travail aurait été plus complexe car  $\sigma^2$  n'est pas estimable dans des modèles inadéquats.

H.Bunke ([6], [7]) a proposé une méthode pour surmonter cette difficulté. ♣

CHAPITRE I

PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES  
ESTIMATEURS DES MOINDRES CARRES  
NON-LINEAIRES



## **I. INTRODUCTION**

Le but de ce chapitre est de rappeler des conditions d'existence et de normalité asymptotique des estimateurs des moindres carrés des paramètres d'une régression non linéaire. Pour ce faire, nous présentons brièvement les résultats de JENRICH [21] concernant ce sujet.

Pour une suite  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments distincts de  $[0,1]$ , on considère le modèle de régression défini par :

$$X_i = f(t_i, \theta) + e_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

On suppose que :

- a.  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t, \cdot)$  est une fonction continue sur un sous ensemble compact d'intérieur non vide  $\Theta$  d'un espace euclidien.
- b.  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance  $\sigma^2$ .

Chaque vecteur  $\theta_n$  qui minimise la quantité  $H_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1, n} (X_i - f(t_i, \theta))^2$  est appelé estimateur des moindres carrés basé sur les  $n$  premières valeurs de  $X_i$ .

## **II. NOTATIONS**

\* Soient  $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  et  $y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de nombres réels. On note :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_n &= (1/n) \sum_{i=1, n} (x_i \cdot y_i), \\ [x]_n &= (\langle x, x \rangle_n)^{1/2}. \end{aligned}$$

Si les suites  $\{\langle x, y \rangle_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\{[x]_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  admettent chacune une limite quand  $n$  tend vers l'infini, on notera alors :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \lim_n \langle x, y \rangle_n \\ [x] &= \lim_n [x]_n.\end{aligned}$$

\* Soient  $\mathfrak{X}$  un espace euclidien,  $\Theta$  un sous ensemble compact d'un espace euclidien,  $g$  et  $h$  deux fonctions définies sur le même ensemble  $\mathfrak{X} \times \Theta$  et soient  $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  et  $y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  deux suites d'éléments de  $\mathfrak{X}$ . Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  on note :

$$\langle g(x, \theta), h(y, \theta) \rangle_n = (1/n) \sum_{i=1, n} g(x_i, \theta) \times h(y_i, \theta)$$

et, si la suite  $\{\langle g(x, \theta), h(y, \theta) \rangle_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite uniforme par rapport à  $\theta$  quand  $n$  tend vers l'infini, on notera alors :

$$\langle g(x, \theta), h(y, \theta) \rangle = \lim_n \langle g(x, \theta), h(y, \theta) \rangle_n.$$

Notons que si  $g$  et  $h$  sont continues sur  $\Theta$ , alors  $\langle g(x, \cdot), h(x, \cdot) \rangle$ , comme étant la limite uniforme de fonctions continues sur  $\Theta$ , est aussi une fonction continue.

### **III. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS DE JENRICH.**

Soient  $\mathfrak{X}$  un espace euclidien,  $\Theta$  un sous ensemble compact d'intérieur non vide d'un espace euclidien et  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonctions de répartition définies sur  $\mathfrak{X}$  et qui converge complètement vers une fonction de répartition  $F$ .

#### **Théorème 1**

Si  $g$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathfrak{X} \times \Theta$ , alors  $\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x)$ .

**Démonstration**

Posons  $h_n(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x) - \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x)$ , alors la démonstration du théorème se ramène à démontrer que  $h_n(\theta)$  converge uniformément vers zéro pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ . Énonçons pour cela le résultat intermédiaire suivant:

**Lemme 1**

*Si  $g$  vérifie les conditions du théorème 1, alors  $\sup_{\theta \in \Theta} g(\cdot, \theta)$  est une fonction continue sur  $\mathfrak{X}$ .*

**Démonstration**

Comme pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $g(\cdot, \theta)$  est une fonction continue bornée sur  $\mathfrak{X}$ , alors :

$$\forall x_0 \in \mathfrak{X}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \forall x \in \mathfrak{X} \ |x - x_0| \leq \delta, |g(x, \theta) - g(x_0, \theta)| \leq \varepsilon.$$

On a donc pour tout  $x$  tel que  $|x - x_0| \leq \delta$  :

$$\begin{aligned} g(x_0, \theta) - \varepsilon \leq g(x, \theta) \leq g(x_0, \theta) + \varepsilon &\Rightarrow \sup_{\theta} g(x_0, \theta) - \varepsilon \leq \sup_{\theta} g(x, \theta) \leq \sup_{\theta} g(x_0, \theta) + \varepsilon \\ &\Rightarrow |\sup_{\theta} g(x, \theta) - \sup_{\theta} g(x_0, \theta)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat du lemme 1 ♣

Soit alors  $\theta_0$  un point quelconque de  $\Theta$  et  $V$  un voisinage quelconque de  $\theta_0$  contenu dans  $\Theta$ . Il est évident que :

$$\sup_{\theta \in V} h_n(\theta) \leq \int_{\mathfrak{X}} [\sup_{\theta \in V} g(x, \theta)] dF_n(x) - \int_{\mathfrak{X}} [\inf_{\theta \in V} g(x, \theta)] dF(x).$$

Comme  $g$  est une fonction bornée, il en est de même pour  $\sup_{\theta \in V} g(x, \theta)$ , qui d'après le lemme 1, est une fonction continue sur  $\mathfrak{X}$ .

Or d'après le théorème de HELLY-BRAY, on obtient l'inégalité suivante :

$$\limsup_n [ \sup_{\theta \in V} h_n(\theta) ] \leq \int_{\mathfrak{X}} [ \sup_{\theta \in V} g(x, \theta) - \inf_{\theta \in V} g(x, \theta) ] dF(x).$$

Si on pose  $d_V = \text{diamètre de } V$ , On remarque que pour tout  $x$  élément de  $\mathfrak{X}$  :

$$\lim_{d_V \rightarrow 0} [ \sup_{\theta \in V} g(x, \theta) - \inf_{\theta \in V} g(x, \theta) ] = 0.$$

D'après le théorème de Lebesgue, on obtient donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{pour tout voisinage } V \text{ de } \theta_0 \text{ tel que } d_V \leq \delta, \\ \limsup_n ( \sup_{\theta \in V} h_n(\theta) ) \leq \varepsilon.$$

En outre, comme  $\Theta$  est compact, et que évidemment l'ensemble des voisinages de tous les éléments de  $\Theta$  forme un recouvrement de  $\Theta$  par des ouverts, on peut donc en extraire un qui soit fini. Ainsi on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall \theta \in \Theta, \forall n \geq N, h_n(\theta) \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui entraîne que :

$$\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x) \leq \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x) + 2\varepsilon.$$

Le même procédé appliqué à la fonction  $(-g(\cdot, \cdot))$  entraîne que :

$$\int_{\mathfrak{X}} (-g(x, \theta)) dF_n(x) \leq \int_{\mathfrak{X}} (-g(x, \theta)) dF(x) + 2\varepsilon.$$

On obtient pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  et pour tout  $n$  suffisamment grand :

$$\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x) \leq \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x) + 2\varepsilon. \\ \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x) \geq \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x) - 2\varepsilon.$$

On en déduit donc que :

$\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF_n(x)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x)$ . 🍏

Nous énonçons le théorème suivant donné par Mickey [24] qui peut être démontré de la même façon que le précédent.

Soit  $g(.,.)$  une fonction définie sur  $\mathfrak{X} \times \Theta$  telle que :

- \*  $\forall x \in \mathfrak{X}$ ,  $g(x, \theta)$  est une fonction continue sur  $\Theta$ .
- \*  $\forall \theta \in \Theta$ ,  $g(x, \theta)$  est une fonction mesurable sur  $\mathfrak{X}$ .

On suppose que :

- \*  $\forall x \in \mathfrak{X}, \forall \theta \in \Theta, |g(x, \theta)| \leq h(x)$ , où  $h(.)$  est une fonction définie sur  $\mathfrak{X}$ , et intégrable par rapport à  $F$  dans  $\mathfrak{X}$ .

On a alors le résultat suivant :

### Théorème 2

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon d'une variable aléatoire  $X$  dont la fonction de répartition est  $F$ .

**P-p.s.  $(1/n) \sum_{i=1, n} g(X_i, \theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) dF(x)$ .**

Le résultat de ce théorème n'est autre qu'une conséquence de la loi forte des grands nombres.

### Remarque 1:

i. Soient  $g$  et  $k$  sont deux fonctions définies sur  $\mathfrak{X} \times \Theta$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres réels à laquelle est associée la suite de fonctions de répartition empiriques  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ . On définit  $\langle g(x, \theta), k(x, \theta') \rangle_n$  de la façon suivante :

$$\langle g(x, \theta), k(x, \theta') \rangle_n = \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) k(x, \theta') dF_n(x).$$

D'après le théorème 1, si  $g$  et  $k$  sont continues et bornées sur  $\mathfrak{X}_x \Theta$ , alors  $\langle g(x, \theta), k(x, \theta') \rangle_n$  converge uniformément par rapport à  $(\theta, \theta')$  vers une limite notée  $\langle g, k \rangle$  définie par :

$$\forall (\theta, \theta') \in \Theta^2, \langle g, k \rangle(\theta, \theta') = \int_{\mathfrak{X}} g(x, \theta) k(x, \theta') dF(x).$$

ii. Notons aussi que si  $\langle g, k \rangle$ ,  $\langle g, g \rangle$  et  $\langle k, k \rangle$  existent alors :  $[g(\cdot, \theta) - k(\cdot, \theta')]_n$  converge uniformément par rapport à  $(\theta, \theta')$  vers  $[g(\cdot, \theta) - k(\cdot, \theta')]$ .

Soit  $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres réels et soit  $e = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires vérifiant l'hypothèse b -§I-.

### lemme 2

*Si  $\langle x, x \rangle$  existe, alors P-p.s.  $\lim_n \langle x, e \rangle_n = 0$ .*

Ce résultat découle du théorème de CHOW [11].

### Remarque 2:

Si la suite  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est bornée, alors  $\langle x, x \rangle$  existe.

On peut étendre facilement le résultat du lemme 2 au cas suivant :

Soit  $g$  une fonction réelle définie sur  $\mathfrak{X}_x \Theta$ , telle que pour tout  $x$  élément de  $\mathfrak{X}$   $g(x, \cdot)$  est une fonction continue sur  $\Theta$  et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$   $g(\cdot, \theta)$  est une fonction mesurable par rapport à  $x$  dans  $\mathfrak{X}$  et soit  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{X}$ .

### Théorème 3

**Si pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$   $\langle g(x, \theta), g(x, \theta) \rangle$  existe, alors presque sûrement  $\langle g(x, \theta), e \rangle_n$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro.**

### Démonstration

Comme  $g$  est continue par rapport à  $\theta$  et que  $[g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]$  existe, alors d'après la remarque 1  $[g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]_n$  converge uniformément par rapport à  $(\theta, \theta')$  dans  $\Theta$  vers  $[g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]$ . On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall (\theta, \theta') \in \Theta^2, | [g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]_n - [g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')] | \leq \varepsilon/2. \text{-I}_1 \text{-}$$

Comme pour tout  $x$  élément de  $\mathfrak{X}$ ,  $g(x, \cdot)$  est une fonction continue sur  $\Theta$ , alors  $[g(x, \theta) - g(x, \theta')]_n$  est aussi une fonction continue par rapport à  $(\theta, \theta')$  dans  $\Theta^2$ .

On en déduit alors que  $[g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]$ , comme étant la limite uniforme par rapport à  $(\theta, \theta')$  d'une suite de fonctions continues sur  $\Theta^2$ , est aussi une fonction continue sur  $\Theta^2$ . Par conséquent, pour tout  $\theta'$  fixé dans  $\Theta$ ,  $[g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]$  est une fonction continue par rapport à  $\theta$  dans  $\Theta$ .

Ainsi, pour tout  $x$  élément de  $\mathfrak{X}$ , pour tout  $\theta'$  fixé, il existe un voisinage  $V_{\theta'}$  de  $\theta'$  tel que :

$$\forall \theta \in V_{\theta'}, [g(x, \theta) - g(x, \theta')] \leq \varepsilon/2.$$

Par conséquent, pour tout  $\theta'$  fixé, on déduit de -I<sub>1</sub> :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists V_{\theta'} / \forall n \geq N, \forall \theta \in V_{\theta'}, [g(x, \theta) - g(x, \theta')]_n \leq \varepsilon. \text{-I}_2 \text{-}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité de Cauchy, on obtient :

$$| \langle g(\cdot, \theta), e. \rangle_n | \leq [g(\cdot, \theta) - g(\cdot, \theta')]_n \times [e.]_n + | \langle g(\cdot, \theta'), e. \rangle_n |. \text{-I}_3 \text{-}$$

On peut majorer les deux termes du deuxième membre de -I<sub>3</sub>- de la façon suivante :

◦ La loi forte des grands nombres appliquée à la suite  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  entraîne que :

$$P\text{-p.s. } \lim_n [e.^2]_n = \sigma^2.$$

De plus grâce à -I<sub>2</sub>- on obtient : pour tout  $\theta'$  fixé,

P-p.s.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \exists V_{\theta'} / \forall n \geq N_1, \forall \theta \in V_{\theta'}, |g(x, \theta) - g(x, \theta')|_{n \times [e.]} \leq \varepsilon |\sigma|.$  ♦

◦ D'autre part, il résulte du lemme 2 que : pour tout  $\theta'$  fixé,

P-p.s.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_2, |< g(., \theta'), e.>_n| \leq \varepsilon.$  ♦

On en déduit donc que : pour tout  $\theta'$  fixé,

P-p.s.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N'' \in \mathbb{N}, \exists V_{\theta'} / \forall n \geq N'', \forall \theta \in V_{\theta'}, |< g(., \theta), e.>_n| \leq 2\varepsilon.$

Il est évident que la famille des voisinages  $\{V_{\theta'}\}_{\theta' \in \Theta}$ , forme un recouvrement de  $\Theta$  par des ouverts. Or comme  $\Theta$  est compact, on peut extraire un recouvrement fini. On obtient donc :

P-p.s.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall \theta \in \Theta, |< g(., \theta), e.>_n| \leq 2\varepsilon.$

On en déduit le résultat du théorème 3. 🍏

### Remarque 3:

Si  $g$  est une fonction continue sur le produit cartésien  $\mathfrak{X} \times \Theta$ , alors pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$   $< g(., \theta), g(., \theta) >$  existe.

Le résultat suivant est une autre forme du théorème central limite qui résulte facilement du théorème de EIKER [15] :

### Théorème 4

Si  $e$  vérifie l'hypothèse -b- et si  $< x, x >$  existe, alors  $n^{1/2} < x, e.>_n$  converge en loi vers la loi  $N(0, [x.]^2 \sigma^2)$ .

En utilisant un résultat de RAO [30], ce théorème peut être étendu au cas multivarié. D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 1**

Soit  $\{x_i, i=1, \dots, p\}$   $p$  suites de nombres réels telles que :  
 pour tout  $i, j = 1, \dots, p$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle$  existe. Si  $e$  vérifie l'hypothèse -b- alors,  
 $(n^{1/2})(\langle x_1, e \rangle_n, \dots, \langle x_p, e \rangle_n)$  converge en loi vers la loi  
 $N(0, \sigma^2(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1,p})$ .

Le lemme suivant montre que l'hypothèse -a- est suffisante pour montrer l'existence des estimateurs des moindres carrés dans le cas non-linéaire.

**Lemme 3**

Soient  $\Theta$  un sous ensemble compact d'un espace euclidien de dimension  $p$ ,  $Y$  un espace mesurable et  $Q$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $\Theta \times Y$ . Si pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $Q(\theta, \cdot)$  est une fonction mesurable et si pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  $Q(\cdot, y)$  est une fonction continue sur  $\Theta$ , alors il existe une fonction mesurable  $\hat{\theta}$  de  $Y$  dans  $\Theta$  telle que, pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  
 $Q(\hat{\theta}(y), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y)$ .

**Démonstration**

Soit  $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite croissante de sous ensembles finis de  $\Theta$  dont la limite est dense dans  $\Theta$ .

Pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}$ , on considère une fonction mesurable  $\tilde{\theta}_n = (\tilde{\theta}_{n1}, \dots, \tilde{\theta}_{np})$  de  $Y$  dans  $\Theta_n$ , telle que, pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  $Q(\tilde{\theta}_n(y), y) = \inf_{\theta \in \Theta_n} Q(\theta, y)$ .

Soit  $\hat{\theta}_1(y) = \liminf_n \tilde{\theta}_{n1}(y)$ , pour tout  $y$  élément de  $Y$ . On remarque que  $\hat{\theta}_1(\cdot)$  -comme étant la limite inférieure d'une suite de fonctions mesurables-est mesurable. Comme  $\Theta$  est compact, alors pour tout  $y$  fixé, la suite  $\{\tilde{\theta}_n(y)\}_n$  admet au moins un point d'accumulation  $\vartheta$  dans  $\Theta$  tel que  $\vartheta = (\hat{\theta}_1(y), \vartheta_2, \dots, \vartheta_p)$  et il existe une sous-suite  $\{\tilde{\theta}_{n_i}(y)\}_i$  de  $\{\tilde{\theta}_n(y)\}_n$  qui converge vers  $\vartheta$ . On a alors :

$$\inf_{(\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta} Q((\hat{\theta}_1(y), \theta_2, \dots, \theta_p), y) \leq Q(\vartheta, y).$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } Q(\theta(y), y) &= \lim_i Q(\check{\theta}_{ni}(y), y) \\
&= \lim_i (\inf_{\theta \in \Theta_{ni}} Q(\theta, y)) \\
&= \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y).
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que  $(\lim_n \Theta_n)$  est dense dans  $\Theta$ .

Ainsi, pour tout  $y$  élément de  $Y$  :

$$\inf_{(\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta} Q((\hat{\theta}_1(y), \theta_2, \dots, \theta_p), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y).$$

On considère à présent la fonction  $Q'$  à valeurs réelles définie sur  $\Theta \times Y$  telle que, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  et pour tout  $y$  élément de  $Y$  :

$$Q'(\theta, y) = Q((\hat{\theta}_1(y), \theta_2, \dots, \theta_p), y).$$

Comme  $\hat{\theta}_1(\cdot)$  est une fonction mesurable, alors pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $Q'(\theta, \cdot)$  est une fonction mesurable et pour tout  $y$  élément de  $Y$ , compte tenu des propriétés de  $Q$ ,  $Q'(\cdot, y)$  est une fonction continue sur  $\Theta$ .

On considère une fonction mesurable  $\check{\theta}_n = (\check{\theta}_1, \check{\theta}_{n2}, \dots, \check{\theta}_{np})$  de  $Y$  dans  $\Theta_n$ , telle que :

$$Q'(\check{\theta}_n(y), y) = \inf_{\theta \in \Theta_n} Q'(\theta, y).$$

En appliquant ce qui précède à  $Q'$  et en considérant une fonction mesurable  $\hat{\theta}_2(\cdot)$  telle que : Pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  $\hat{\theta}_2(y) = \lim \inf_n \check{\theta}_{n2}(y)$ , on obtient alors :

$$\inf_{(\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta} Q((\hat{\theta}_1(y), \hat{\theta}_2(y), \theta_3, \dots, \theta_p), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y).$$

Ainsi, en procédant de la même façon, on obtient des fonctions mesurables  $\hat{\theta}_1(\cdot), \dots, \hat{\theta}_p(\cdot)$  définies sur  $Y$  et à valeurs dans  $\Theta$  telles que :

$$\text{Pour tout } y \text{ élément de } Y \quad Q((\hat{\theta}_1(y), \dots, \hat{\theta}_p(y)), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y).$$

Ainsi  $\hat{\theta}(\cdot) = (\hat{\theta}_1(\cdot), \dots, \hat{\theta}_p(\cdot))$  est une fonction mesurable définie sur  $Y$  et à valeurs dans  $\Theta$  telle que :

Pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  $Q(\hat{\theta}(y), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y)$ . 

On considère à présent une fonction  $f$  à valeurs réelles définie sur  $Y \times \Theta$ , où  $\Theta$  est un sous ensemble compact et convexe d'un espace euclidien et  $Y$  est un espace mesurable.

Si  $f$  est telle que : pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$   $f(\cdot, \theta)$  est une fonction mesurable de  $Y$  dans  $\mathbb{R}$  et pour tout  $y$  élément  $Y$   $f(y, \cdot)$  est une fonction continûment différentiable de  $\Theta$  dans  $\mathbb{R}$  alors, on obtient le résultat suivant :

#### Lemme 4

*Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux fonctions mesurables définies dans  $Y$  et à valeurs dans  $\Theta$ , alors il existe une fonction mesurable  $\tilde{\theta}$  de  $Y$  dans  $\Theta$  telle que :*

1.  $f(y, \theta_1(y)) - f(y, \theta_2(y)) = (\partial f(y, \tilde{\theta}(y)) / \partial \theta) \times (\theta_1(y) - \theta_2(y))$ .
2.  $\tilde{\theta}(y)$  appartient au segment de droite joignant  $\theta_1(y)$  et  $\theta_2(y)$  pour tout  $y$  élément de  $Y$ .

#### Démonstration

Pour tout  $y$  élément de  $Y$  et tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , on pose :

- $D(y, \theta) =$  la distance entre  $\theta$  et le segment de droite joignant  $\theta_1(y)$  et  $\theta_2(y)$ .
- $Q(\theta, y) = |f(y, \theta_1(y)) - f(y, \theta_2(y)) - (\partial f(y, \theta) / \partial \theta) \times (\theta_1(y) - \theta_2(y))| + D(y, \theta)$ .

Il est facile de vérifier, grâce aux propriétés de  $f$  que :

- Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $Q(\theta, y)$  est une fonction mesurable par rapport à  $y$  dans  $Y$ .
- Pour tout  $y$  élément de  $Y$ ,  $Q(\theta, y)$  est une fonction continue sur  $\Theta$ .

Le lemme 3 s'applique et entraîne donc, l'existence d'une fonction mesurable  $\hat{\theta}$  de  $Y$  dans  $\Theta$  telle que :

$$\forall y \in Y, Q(\hat{\theta}(y), y) = \inf_{\theta \in \Theta} Q(\theta, y).$$

Or, pour tout  $y$  fixé, le théorème des accroissements finis entraîne que :

$$\exists \tilde{\theta}_y \in (\theta_1(y), \theta_2(y)) / f(y, \theta_1(y)) - f(y, \theta_2(y)) = (\partial f(y, \tilde{\theta}_y) / \partial \theta) \times (\theta_1(y) - \theta_2(y)).$$

Ce qui implique donc que :

$$\forall y \in Y, \exists \tilde{\theta}_y \in \Theta / Q(\tilde{\theta}_y, y) = 0.$$

Or, par définition même de  $\hat{\theta}$ , on a alors :

$$\forall y \in Y, \exists \tilde{\theta}_y \in \Theta / Q(\hat{\theta}(y), y) \leq Q(\tilde{\theta}_y, y) = 0.$$

Par conséquent :

$$\forall y \in Y, Q(\hat{\theta}(y), y) = 0.$$

Nous obtenons ainsi les deux résultats du lemme 4. 🍏

## **IV. CONSISTANCE ET NORMALITE ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS DES MOINDRES CARRES.**

### **IV.1. Notations et hypothèses**

#### **\* Notations**

$\forall t \in [0, 1], \forall \theta \in \Theta, \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ , on pose :

$$f_i(t, \theta) = (\partial f(t, \theta) / \partial \theta_i),$$

$$f_{ij}(t, \theta) = (\partial^2 f(t, \theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j),$$

$$a_{nij}(\theta) = \langle f_i(\cdot, \theta), f_j(\cdot, \theta) \rangle_n, \quad a_n(\theta) = ((a_{nij}(\cdot, \theta)))_{i,j},$$

$$a_{ij}(\theta) = \langle f_i(\cdot, \theta), f_j(\cdot, \theta) \rangle, \quad a(\theta) = ((a_{ij}(\cdot, \theta)))_{i,j}.$$

\* Hypothèses :

c. la suite des fonctions  $f = \{f(t_i, \cdot)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est telle que  $\langle f, f \rangle$  existe et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  la fonction  $H(\theta) = |f(\cdot, \theta_0) - f(\cdot, \theta)|^2$  admet un unique minimum en  $\theta = \theta_0$ .

d. Pour tous  $i, j = 1, \dots, p$ ,  $f_i$  et  $f_{ij}$  existent et sont continues sur  $\Theta$ .  
Pour tout  $g$  et tout  $h$  éléments de  $\{f, f_i, f_{ij}\}$ ,  $\langle g, h \rangle$  existe.

e. Le paramètre  $\theta_0$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$ , et la matrice  $a(\theta_0)$  est non singulière.

Remarquons que, sous les hypothèses a et c, la fonction  $H$  est continue.

## IV.2. Résultats

### Théorème 5

Sous les hypothèses a, b et c :

L'estimateur  $\theta_n$  ( resp  $\sigma_n^2 = H_n(\theta_n)$  ) est un estimateur consistant de  $\theta_0$  ( resp  $\sigma^2$  ).

### Démonstration :

La loi forte des grands nombres et le théorème 3 entraînent que  $[e.]^2 = \sigma^2$  et  $\langle f(\cdot, \theta) - f(\cdot, \theta_0), e. \rangle_n$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro. On en déduit alors que : La fonction  $H_n(\theta) = [f(\cdot, \theta_0) - f(\cdot, \theta) + e.]_n^2$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $H(\theta) + \sigma^2$ .

Notons  $\theta_n$  un élément de  $\Theta$  tel que :  $H_n(\theta_n) = \min_{\theta \in \Theta} H_n(\theta)$ . L'ensemble  $\Theta$  étant compact, alors la suite  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet au moins un point d'accumulation  $\tilde{\theta}$  tel qu'il existe une sous-suite  $\{\theta_{n_t}\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  de  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $\tilde{\theta}$ .

Or, d'après la continuité de  $H$  et la convergence uniforme par rapport à  $\theta$  de  $H_n$  vers  $(H+\sigma^2)$ . On en déduit alors que :

$$\text{P-p.s. } \lim_t H_{nt}(\theta_{nt}) = H(\tilde{\theta}) + \sigma^2.$$

Etant donné que  $\theta_{nt}$  est un estimateur des moindres carrés, alors :

$$H_{nt}(\theta_{nt}) \leq H_{nt}(\theta_0).$$

Un passage à la limite entraîne que :

$$H(\tilde{\theta}) + \sigma^2 \leq \sigma^2.$$

Par conséquent  $H(\tilde{\theta}) = 0$ . D'après l'hypothèse -c-, on déduit que  $\tilde{\theta} = \theta_0$ , ainsi :

$$\text{P-p.s. } \lim_t \theta_{nt} = \theta_0.$$

Le point d'accumulation de la suite  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant unique, on en déduit donc que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n \theta_n = \theta_0.$$

Ceci entraîne que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n H_n(\theta_n) = \sigma^2. \quad \blacktriangle$$

### **Théorème 6**

Sous les hypothèses a  $\rightarrow$  e,

$n^{1/2}(\theta_n - \theta_0)$  converge en loi vers  $N(0, \sigma^2 a(\theta_0)^{-1})$ .

### **Démonstration**

Comme  $\text{P-p.s. } \lim_n \theta_n = \theta_0$ , et que d'après l'hypothèse -e-  $\theta_0$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$ , alors :  $\text{P-p.s. } \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$   $\theta_n$  prend ses valeurs dans un voisinage compact et convexe de  $\theta_0$ .

Posons  $\theta_0 = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0p})$  et pour tout  $n \geq n_0$   $\theta_n = (\theta_{n1}, \dots, \theta_{np})$ .

D'après le lemme 4,  $\text{P-p.s.}$  il existe une fonction mesurable  $\tilde{\theta}_n$  à valeurs dans  $\Theta$  telle que pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} < f_i(\cdot, \theta_n), X \cdot f(\cdot, \theta_n) > - < f_i(\cdot, \theta_0), X \cdot f(\cdot, \theta_0) > = \\ \sum_{j=1, p} (< f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X \cdot f(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < f_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), f_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n) (\theta_{nj} - \theta_{0j}) \end{aligned}$$

où  $\tilde{\theta}_n$  est tel que  $\|\tilde{\theta}_n - \theta_0\| \leq \|\theta_n - \theta_0\|$ .

En multipliant les deux termes de l'égalité par  $(n^{1/2})$  et en utilisant l'hypothèse -a-, on obtient :

$$\begin{aligned} n^{1/2} < f_i(\cdot, \theta_0), e >_n = \\ \sum_{j=1, p} (( < f_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), f_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) > - < f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X \cdot f(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n) (n^{1/2}) (\theta_{nj} - \theta_0) \quad \text{-E-} \\ + n^{1/2} < f_i(\cdot, \theta_n), X \cdot f(\cdot, \theta_n) >_n ). \end{aligned}$$

Notons que  $< f_i(\cdot, \theta_n), X \cdot f(\cdot, \theta_n) >_n = (-1/2)(\partial H_n(\theta_n) / \partial \theta_i)$ .

Comme  $\theta_n$  est un estimateur des moindres carrés, alors P-p.s. il existe un entier N tel que, pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $i$  élément de  $\{1, \dots, p\}$  :  $(\partial H_n(\theta_n) / \partial \theta_i) = 0$ .

Ce qui entraîne que :

$$n^{1/2} < f_i(\cdot, \theta_n), X \cdot f(\cdot, \theta_n) >_n = 0.$$

Posons  $b_{nij} = < f_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), f_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X \cdot f(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n$ , l'équation -E- devient alors :

$$n^{1/2} < f_i(\cdot, \theta_0), e >_n = \sum_{j=1, p} b_{nij} (n^{1/2}) (\theta_{nj} - \theta_{0j}).$$

### Lemme 5

$$P\text{-p.s. } \lim_n b_{nij} = a_{ij}(\theta_0) .$$

### Démonstration

Pour tout  $i$  et tout  $j$  éléments de  $\{1, \dots, p\}$ ,

$$b_{nij} = < f_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), f_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), f(\cdot, \theta_0) - f(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), e >_n.$$

Comme  $\theta_n$  converge presque sûrement vers  $\theta_0$ , alors il en est de même pour  $\tilde{\theta}_n$  et donc le lemme 2 et l'hypothèse -d- entraînent que  $\langle f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), e \rangle_n$  converge presque sûrement vers zéro. De plus l'hypothèse -c- entraîne l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que :

$$|f(\cdot, \theta_0) - f(\cdot, \tilde{\theta})| \leq K \|\theta_0 - \tilde{\theta}\| \leq K \|\theta_0 - \theta_n\|.$$

On en déduit alors que  $\langle f_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), f_{ij}(\cdot, \theta_0) - f(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n$  converge presque sûrement vers zéro.

Enfin à l'aide de l'hypothèse -d- et à la convergence presque sûre de  $\tilde{\theta}_n$  vers  $\theta_0$ . On en déduit le résultat du lemme 5 ♣

L'hypothèse -e- et le lemme 5 entraîne que : P-p.s. il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , la matrice  $b_n = ((b_{nij}))_{i,j=1,\dots,p}$  est inversible. On peut alors écrire l'égalité -E- sous la forme suivante :

$$\text{P-p.s. } \forall n \geq N, n^{1/2}(\theta_n - \theta_0) = b_n^{-1} (n^{1/2} \langle f_i(\cdot, \theta_0), e \rangle_n)_{i=1,\dots,p}.$$

De plus le corollaire 1 et l'hypothèse -d- entraînent la convergence en loi du vecteur aléatoire  $(n^{1/2} \langle f_i(\cdot, \theta_0), e \rangle_n)_{i=1,p}$  vers la loi normale  $N(0, a(\theta_0)\sigma^2)$ .

On en déduit alors le résultat du théorème 6. ♣



**CHAPITRE II****CAS OU LES FONCTIONS DE  
REGRESSION DU MODELE  
APPROXIMATIF SONT  
REGULIERES**



## **I. INTRODUCTION**

Nous présentons dans cette partie une procédure de décision pour le choix d'un modèle parmi deux modèles approximatifs dans le cas où les fonctions de régression sont régulières.

Pour une suite  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments distincts de  $[0,1]$ , on suppose observer des réalisations indépendantes  $X_1, X_2, \dots$  d'un phénomène dépendant du temps, représenté par un modèle de régression défini par:

$$X_i = f(t_i) + e_i, \quad i \in \mathbb{N}^*,$$

où :

\*  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , supposées indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance  $\sigma^2$ .

\*  $f$  est une fonction, inconnue, supposée continue de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Le problème est alors d'estimer la fonction  $f$ . Pour ce faire, on l'approche par une classe de fonctions  $\mathcal{M} = \{g(t, \theta), t \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}$  telle que  $\Theta$  est un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^p, p \geq 1$ , et  $g(.,.)$  est une fonction continue sur  $[0,1] \times \Theta$ .

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction principale, ZWANZIG [36] a étudié le problème, seulement, dans son travail, il s'est basé sur certaines conditions difficilement réalisables. D'ailleurs certains commentaires à ce sujet, ont été fait par H.BUNKE [6].

En effet pour déterminer les lois asymptotiques des estimateurs de certains paramètres, certaines hypothèses, faites par ZWANZIG, concernant la vitesse de convergence ( $A_6, A_9, A_{11}$  [36]), reposent essentiellement sur le fait que :

$$\lim_n n^{1/2} |F_n - F| = 0.$$

Or il semble très difficile d'interpréter la signification de ces hypothèses dans des cas pratiques. D'autre part nous montrons que les résultats asymptotiques de ZWANZIG peuvent être obtenus sans aucune condition explicite sur  $F$  en se servant uniquement de  $\Delta_{nm}$  et  $\theta_{nm}$  que nous définissons dans le paragraphe suivant.

Nous nous baserons donc sur les travaux de ZWANZIG et de H.BUNKE tout en améliorant les conditions de travail.

## II. NOTATIONS ET HYPOTHESES

On considère le modèle approximatif suivant :

$$\mathcal{M} = \{ g(t, \theta), t \in [0, 1], \theta \in \Theta \}$$

tel que  $\Theta$  est un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , d'intérieur non vide, et que tout élément  $g$  de  $\mathcal{M}$ , est une fonction non linéaire continue sur  $[0, 1] \times \Theta$ . On note :

$$\Delta_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1, n} (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2 = [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]_n^2,$$

$$\Delta_{nm} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta),$$

$$\theta_{nm} \text{ un élément de } \Theta \text{ qui réalise : } \Delta_{nm} = \Delta_n(\theta_{nm}).$$

Si  $\Delta_n(\cdot)$  admet une limite quand  $n$  tend vers l'infini, on note :

$$\Delta(\theta) = \lim_n \Delta_n(\theta) = [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]^2,$$

$$\Delta_{\min} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta),$$

$$\theta_{\min} \text{ un élément de } \Theta \text{ qui réalise : } \Delta_{\min} = \Delta(\theta_{\min}).$$

Pour tout entier  $n$  et tout  $t$  élément de  $[0, 1]$ , on pose :

$$F_n(t) = (1/n) \sum_{i=1, n} \mathbb{1}_{[0, t]}(t_i).$$

Si  $e_1$  admet un moment d'ordre 4, on note :

$$\mu_3 = \mathbb{E}(e_1^3) \quad \text{et} \quad \mu_4 = \mathbb{E}(e_1^4).$$

Enfin, soient  $f, g, h, k$  des fonctions définies sur un ensemble  $A$  telles que :

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : A \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad k : A \rightarrow \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad K : A \rightarrow \mathcal{M}_{p \times q}.$$

Soit  $a = \{a_i\}_{i=1 \dots n}$ , une suite d'éléments de  $A$ . On note :

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle_n &= (1/n) \sum_{i=1, n} f(a_i) g(a_i). \\ [f(\cdot)]_n &= (1/n) \sum_{i=1, n} (f(a_i))^2. \\ \langle h(\cdot), k(\cdot) \rangle_n &= ((\langle h_i(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_n))_{i,j} \quad i=1 \dots p, j=1 \dots q. \\ \langle f(\cdot), K(\cdot) \rangle_n &= ((\langle f(\cdot), K_{ij}(\cdot) \rangle_n))_{i,j} \quad i=1 \dots p, j=1 \dots q. \end{aligned}$$

Les hypothèses suivantes sont imposées :

- H<sub>1</sub>**. Les variables aléatoires  $e_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont indépendantes et identiquement distribuées.
- H<sub>2</sub>**.  $f$  une fonction continue sur  $[0,1]$ .
- H<sub>3</sub>**.  $\theta_{\min}$  est unique et il appartient à l'intérieur de  $\Theta$ .
- H<sub>4</sub>**. la suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge ponctuellement vers une fonction  $F$  continue, strictement croissante sur  $[0,1]$ .
- H<sub>5</sub>**.  $\forall t \in [0,1]$ ,  $g(t, \cdot)$  est deux fois continûment différentiable et ses dérivées sont continues sur  $[0,1] \times \Theta$ .
- H<sub>6</sub>**. La matrice  $((\partial^2 \Delta_{\min} / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j}$  est inversible.

Sous l'ensemble de ces hypothèses, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  et pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,  $D^1(t, \theta)$  (respectivement  $D^2(t, \theta)$ ) désigne le vecteur des dérivées partielles d'ordre un (respectivement la matrice des dérivées partielles d'ordre deux) de  $g(t, \theta)$  par rapport à  $\theta$ .

Notons:

$$\begin{aligned} D^1(t, \theta) &= (d_i(t, \theta))_{i=1, p}, \quad \text{où } d_i(t, \theta) = \partial g(t, \theta) / \partial \theta_i, \\ D^2(t, \theta) &= ((d_{ij}(t, \theta)))_{i,j=1, p}, \quad \text{où } d_{ij}(t, \theta) = \partial^2 g(t, \theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j. \end{aligned}$$

### **III. RESULTATS**

Pour tout entier  $n$  et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , on pose :

$$H_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1,n} (X_i - g(t_i, \theta))^2.$$

Comme  $g$  est une fonction continue, alors il en est de même pour  $H_n(\theta)$ . Le lemme 3 du chapitre I s'applique et entraîne l'existence d'une application mesurable, notée  $\theta(\cdot)$ , de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\Theta$  telle que :

$$H_n(\theta(n)) = \inf_{\theta \in \Theta} H_n(\theta).$$

On peut donc définir un estimateur des moindres carrés, noté  $\theta_n$ , relatif à  $H_n$ .

#### **II.1. Etude de la suite $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$**

##### **Théorème 1**

Sous les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_4$  :

1. P-p.s.  $\lim_n \theta_n = \theta_{\min}$ .
2. P-p.s.  $\lim_n H_n(\theta_n) = \Delta_{\min} + \sigma^2$ .

##### **Démonstration**

C'est une simple adaptation du théorème 5 -chap I-, en effet :  
Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned} H_n(\theta) &= (1/n) \sum_{i=1,n} (X_i - g(t_i, \theta))^2 \\ &= (1/n) \sum_{i=1,n} (f(t_i) - g(t_i, \theta) + e_i)^2 \\ &= (1/n) \sum_{i=1,n} (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2 + (2/n) \sum_{i=1,n} (f(t_i) - g(t_i, \theta)) e_i \\ &\quad + (1/n) \sum_{i=1,n} (e_i)^2 \\ &= (1/n) \sum_{i=1,n} (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2 + 2 \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta), e \rangle_n + [e.]_n^2. \end{aligned}$$

On étudie séparément le comportement asymptotique de ces trois termes :

\* Comme  $g(.,.)$  est une fonction continue sur le compact  $[0,1] \times \Theta$ , on a grâce à l'hypothèse  $H_4$  et au théorème 1-chapI- la convergence uniforme par rapport à  $\theta$  de  $(1/n)\sum_{i=1,n} (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2$  vers  $\Delta(\theta) = \int_{[0,1]} (f(t) - g(t, \theta))^2 dF(t)$ .

\* Comme, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $f(.)$  et  $g(.,\theta)$  sont continues sur  $[0,1]$ , le théorème 3 -chap I- s'applique alors et entraîne que :  
P-p.s.  $\langle f(.) - g(.,\theta), e \rangle_n$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro.

\* En appliquant la loi forte des grands nombres à la suite  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ , on obtient la convergence presque sûre de  $[e.]_n^2$  vers  $\sigma^2$ .

On a donc :

P-p.s.  $H_n(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta) + \sigma^2$ .

On désigne par  $A$  un sous ensemble de  $\Omega$  tel que  $P(A) = 1$  et pour tout  $\omega$  élément de  $A$ ,  $H_n(\theta)(\omega)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta) + \sigma^2$ .

Comme  $\Theta$  est compact, alors pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$ , la suite  $\{\theta_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet au moins un point d'accumulation  $\hat{\theta}_\omega$  et il existe une sous suite  $\{\theta_{nt}(\omega)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  de  $\{\theta_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $\hat{\theta}_\omega$ .

On montre que pour tout  $\omega$  élément de  $A$ ,  $\lim_t H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) = \Delta(\hat{\theta}_\omega) + \sigma^2$ . En effet, pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$  on a :

$$|H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega) - \sigma^2| \leq |H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\theta_{nt}(\omega)) - \sigma^2| + |\Delta(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega)|.$$

Comme sur  $A$ ,  $H_n(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta) + \sigma^2$ , on en déduit alors que :

$$\forall \omega \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0 / \forall t \geq N_1 \quad |H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\theta_{nt}(\omega)) - \sigma^2| \leq \varepsilon/2.$$

De plus, comme d'une part  $\Delta(\theta)$  est une fonction continue sur  $\Theta$  et que d'autre part, pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$   $\lim_t \theta_{nt}(\omega) = \hat{\theta}_\omega$ , alors on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \exists N_2 > 0 / \forall t \geq N_2 \quad |\Delta(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega)| \leq \varepsilon/2.$$

On en déduit alors :

$$\forall \omega \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \max(N_1, N_2) / \forall t \geq N \quad |H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega) - \sigma^2| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall \omega \in A, \lim_t H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) = \Delta(\hat{\theta}_\omega) + \sigma^2.$$

Comme  $\theta_{nt}$  est un estimateur des moindres carrés, on a alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad H_{nt}(\theta_{nt}(\omega)) \leq H_{nt}(\theta_{\min}).$$

Un passage à la limite entraîne que :

$$\forall \omega \in A, \quad \Delta(\hat{\theta}_\omega) \leq \Delta(\theta_{\min}).$$

L'hypothèse  $H_3$  nous permet de conclure que pour tout  $\omega$  élément de  $A$ , les points d'accumulation de la suite  $\{\theta_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  coïncident avec  $\theta_{\min}$ . Ce qui entraîne alors que :

$$\forall \omega \in A, \quad \lim_n \theta_n(\omega) = \theta_{\min}. \quad \blacklozenge$$

On obtient donc :

$$\text{P-p.s.} \quad \lim_n \theta_n = \theta_{\min}. \quad \blacklozenge$$

Par conséquent :

$$\text{P-p.s.} \quad \lim_n H_n(\theta_n) = \Delta_{\min} + \sigma^2. \quad \blacklozenge \quad \blackapple$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite aléatoire  $\{\theta_n - \theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## II.2. Etude de la suite $\{\theta_n - \theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

### Théorème 2

Sous les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_4$

$$\text{P-p.s. } \lim_n (\theta_n - \theta_{nm}) = 0.$$

### Démonstration

Nous avons vu dans la démonstration du théorème 1 que  $\Delta_n(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta)$ . Donc d'après la compacité de  $\Theta$ , si  $\theta'$  est un point d'accumulation de la suite  $\{\theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  et si  $\{\theta_{nim}\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une sous suite de  $\{\theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $\theta'$ , on a alors :

$$\lim_i \Delta_{ni}(\theta_{nim}) = \Delta(\theta').$$

En outre, d'après la définition même de  $\theta_{nim}$ , on obtient :

$$\Delta_{ni}(\theta_{nim}) \leq \Delta_{ni}(\theta_{\min}).$$

Par un passage à la limite, on obtient :

$$\Delta(\theta') \leq \Delta(\theta_{\min}).$$

Grâce à l'hypothèse  $H_3$ , on en déduit que  $\theta' = \theta_{\min}$  et donc  $\lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}$ .

Par conséquent :

$$\text{P-p.s. } \lim_n \theta_{nm} = \lim_n \theta_n = \theta_{\min}. \quad \bullet$$

### Théorème 3

Sous les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_6$

$n^{1/2}(\theta_n - \theta_{nm})$  converge en loi vers la loi  $N(0, G^{-1} \Lambda G^{-1})$

où  $G = (1/2) ((\partial^2 \Delta(\theta_{\min}) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j=1,p}$ ,

et  $\Lambda = ((\sigma^2 < D^1(\cdot, \theta_{\min}), D^1(\cdot, \theta_{\min}) >))$ .

### Démonstration

On s'inspire de la démonstration du théorème 6 -chap I-. En effet, comme  $\theta_n$  converge presque sûrement vers  $\theta_{\min}$  et que  $\theta_{\min}$  appartient à l'intérieur de  $\Theta - H_3$ -, alors P-p.s. il existe un entier  $N$ , tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\theta_n$  prend ses valeurs dans un voisinage compact et convexe de  $\theta_{\min}$ . Or d'après le lemme 4 -chap I- il existe une application mesurable  $\tilde{\theta}_n$  à valeur dans  $\Theta$ , telle que, pour tout  $n \geq N$  et tout  $i$  élément de  $\{1, \dots, p\}$  :

$$\begin{aligned} < d_i(\cdot, \theta_n), X \cdot - g(\cdot, \theta_n) >_n - < d_i(\cdot, \theta_{nm}), X \cdot - g(\cdot, \theta_{nm}) >_n = \\ \sum_{j=1,p} (\theta_{nj} - \theta_{nmj}) [ < d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X \cdot - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n ] \end{aligned} \quad - 3.1-$$

avec  $\| \tilde{\theta}_n - \theta_{nm} \| \leq \| \theta_n - \theta_{nm} \|$ .

Or comme  $\theta_n$  est un estimateur des moindres carrés, on a :

$$P\text{-p.s. } \forall n \geq N, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \partial H_n(\theta_n) / \partial \theta_i = (1/2) < d_i(\cdot, \theta_n), X \cdot - g(\cdot, \theta_n) >_n = 0.$$

L'égalité -3.1- devient alors :

$$\begin{aligned} < d_i(\cdot, \theta_{nm}), e \cdot >_n + < d_i(\cdot, \theta_{nm}), f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}) >_n = \\ \sum_{j=1,p} (\theta_{nj} - \theta_{nmj}) [ < d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X \cdot - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n - < d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) >_n ] \end{aligned} \quad -3.2-$$

De plus, comme  $< d_i(\cdot, \theta_{nm}), f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}) >_n = (1/2) (\partial \Delta_n(\theta_{nm}) / \partial \theta_i) = 0$ , en multipliant les deux membres de l'égalité -3.2- par  $n^{1/2}$ , on obtient :

$$n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{nm}), e \rangle_n = \sum_{j=1, p} n^{1/2} (\theta_{nj} - \theta_{nmj}) [\langle d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n - \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X. - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n] \quad -3.3-$$

Posons :

$$\begin{aligned} Y_n &= (n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{nm}), e \rangle_n)_{i=1, p}, \\ Z_n &= (n^{1/2} (\theta_{nj} - \theta_{nmj}))_{j=1, p}, \\ G_n &= ((\langle d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n - \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X. - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n))_{i, j=1, p}. \end{aligned}$$

On a alors, P-p.s.  $\forall n \geq N$ ,

$$Y_n = G_n Z_n. \quad -3.4$$

Pour déterminer la loi asymptotique de  $Z_n$ , on va vérifier d'abord que la matrice  $G_n$  converge presque sûrement vers la matrice  $G$ .

Pour ce faire, on énonce les lemmes intermédiaires suivants :

### Lemme 1

$$P\text{-p.s. } \lim_n G_n = G.$$

### Démonstration

Pour tout  $i$  et tout  $j$  éléments de  $\{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned} G_{nij} &= \langle d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n - \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), X. - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n \\ &= \langle d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n - \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), f(\cdot) - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n - \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), e \rangle_n. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} A_{nij} &= \langle d_i(\cdot, \tilde{\theta}_n), d_j(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n \\ B_{nij} &= \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), f(\cdot) - g(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n \\ C_{nij} &= \langle d_{ij}(\cdot, \tilde{\theta}_n), e \rangle_n. \end{aligned}$$

On cherche alors les limites successives de ces trois quantités.

Pour tous  $i$  et  $j$  éléments de  $\{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned}
 * A_{nij} &= \int_{[0,1]} d_i(t, \theta_{\min}) d_j(t, \theta_{\min}) dF(t) \\
 &= (1/n) \sum_{k=1, n} d_i(t_k, \tilde{\theta}_n) d_j(t_k, \tilde{\theta}_n) - \int_{[0,1]} d_i(t, \theta_{\min}) d_j(t, \theta_{\min}) dF(t) \\
 &= \left[ (1/n) \sum_{k=1, n} [ d_i(t_k, \tilde{\theta}_n) d_j(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_i(t_k, \theta_{\min}) d_j(t_k, \theta_{\min}) ] \right] \\
 &\quad - \left[ \int_{[0,1]} d_i(t, \theta_{\min}) d_j(t, \theta_{\min}) dF(t) - (1/n) \sum_{k=1, n} d_i(t_k, \theta_{\min}) d_j(t_k, \theta_{\min}) \right]
 \end{aligned}$$

Or pour tout  $k$  élément de  $\{1, \dots, n\}$ , on peut faire la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
 &| d_i(t_k, \tilde{\theta}_n) d_j(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_i(t_k, \theta_{\min}) d_j(t_k, \theta_{\min}) | \\
 &\quad \leq | d_i(t_k, \tilde{\theta}_n) (d_j(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_j(t_k, \theta_{\min})) | + | d_j(t_k, \theta_{\min}) (d_i(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_i(t_k, \theta_{\min})) | \\
 &\quad \leq 2K \| \tilde{\theta}_n - \theta_{\min} \| \quad \text{-d'après l'hypothèse } H_5.
 \end{aligned}$$

Comme P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$ , on en déduit alors la convergence presque sûre du premier terme vers zéro. Le théorème de Helly-Bray entraîne la convergence du deuxième terme vers zéro. Par conséquent :

$$\text{P-p.s. } \lim_n A_{nij} = \int_{[0,1]} d_i(t, \theta_{\min}) d_j(t, \theta_{\min}) dF(t).$$

\* Par une transformation élémentaire, on obtient :

$$B_{nij} = \int_{[0,1]} d_{ij}(t, \theta_{\min}) (f(t) - g(t, \theta_{\min})) dF(t) = I_{n1} + I_{n2} + I_{n3}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_{n1} &= (1/n) \sum_{k=1, n} d_{ij}(t_k, \tilde{\theta}_n) (g(t_k, \theta_{\min}) - g(t_k, \tilde{\theta}_n)) \\
 I_{n2} &= (1/n) \sum_{k=1, n} (f(t_k) - g(t_k, \theta_{\min})) (d_{ij}(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_{ij}(t_k, \theta_{\min})) \\
 I_{n3} &= (1/n) \sum_{k=1, n} d_{ij}(t_k, \theta_{\min}) (f(t_k) - g(t_k, \theta_{\min})) - \int_{[0,1]} d_{ij}(t, \theta_{\min}) (f(t) - g(t, \theta_{\min})) dF(t).
 \end{aligned}$$

On étudie séparément le comportement asymptotique de ces trois termes.

◦ D'après l'hypothèse  $H_5$ , on peut majorer  $I_{n1}$  de la façon suivante :

$$|I_{n1}| \leq K \| \theta_{\min} - \tilde{\theta}_n \|^2.$$

Ce qui entraîne que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n I_{n1} = 0.$$

◦ Comme P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$  et que pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,  $g(t, \cdot)$  est deux fois continûment différentiable sur  $\Theta - H_5$ , alors :

$$\text{P-p.s. } \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n > N \quad |d_{ij}(t, \tilde{\theta}_n) - d_{ij}(t, \theta_{\min})| \leq \varepsilon.$$

Ceci entraîne que :

$$\text{P-p.s. } \forall n > N, |I_{n2}| \leq K\varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\text{P-p.s. } \lim_n I_{n2} = 0.$$

◦ Le théorème de HELLY-BRAY entraîne que  $I_{n3}$  converge vers zéro.

On en déduit alors que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n B_{nij} = \int_{[0,1]} d_{ij}(\theta_{\min})(f(t) - g(t, \theta_{\min})) dF(t).$$

\* Enfin, en ce qui concerne la limite de  $C_{nij}$ , on utilise la décomposition suivante:

$$C_{nij} = (1/n) \sum_{k=1, n} d_{ij}(t_k, \theta_{\min}) e_k + (1/n) \sum_{k=1, n} [d_{ij}(t_k, \tilde{\theta}_n) - d_{ij}(t_k, \theta_{\min})] e_k.$$

◦ En utilisant une propriété classique des variables aléatoires indépendantes [34], on a:

Si on pose  $u_k = (1/k^2) E [d_{ij}(t_k, \theta_{\min}) e_k]^2 = (1/k^2) d_{ij}(t_k, \theta_{\min})^2 \sigma^2$ , on remarque que la série de terme général  $u_k$  est une série convergente. On en déduit donc que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n (1/n) \sum_{k=1, n} d_{ij}(t_k, \theta_{\min}) e_k = 0.$$

◦ L'hypothèse  $H_5$  et le fait que P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$  entraînent que :

$$\text{P-p.s. } \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n > N \quad |d_{ij}(t, \tilde{\theta}_n) - d_{ij}(t, \theta_{\min})| \leq \varepsilon.$$

On peut donc majorer P-p.s. le deuxième terme de  $C_{nij}$  par  $\varepsilon(1/n) \sum_{k=1, n} |e_k|$ . la loi forte des grands nombres appliquée à  $\{|e_i|\}_{i \in \mathbb{N}}$  entraîne la convergence presque sûre du deuxième terme vers zéro. On en déduit alors que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n C_n = 0.$$

Par conséquent :

$$\text{P-p.s. } \lim_n G_n = G. \quad \clubsuit$$

Comme  $G$  est une matrice inversible, -hypothèse  $H_6$ - alors, P-p.s. il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $G_n$  est inversible.

L'égalité -3.4- peut s'écrire alors de la façon suivante :

$$\text{P-p.s. pour tout } n \geq N, \quad Z_n = G_n^{-1} Y_n. \quad \text{-3.5-}$$

### Lemme 2

$Y_n$  converge en loi vers la loi  $N(0, \Lambda)$ .

### Démonstration

$$\begin{aligned} Y_n &= (n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{nm}), e \cdot \rangle_n)_{i=1, p} \\ &= (n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{nm}) - d_i(\cdot, \theta_{\min}), e \cdot \rangle_n)_{i=1, p} + (n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{\min}), e \cdot \rangle_n)_{i=1, p} \end{aligned}$$

Le corollaire 1 -chapI- entraîne que  $(n^{1/2} \langle d_i(\cdot, \theta_{\min}), e \cdot \rangle_n)_{i=1, p}$  converge en loi vers la loi  $N(0, \Lambda)$ .

Il suffit donc de montrer que le premier terme de  $Y_n$  converge au moins en probabilité vers zéro. En effet :  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\mathbb{E} [ n^{1/2} < d_1(\cdot, \theta_{nm}) - d_1(\cdot, \theta_{\min}), e. >_n ] = 0 .$$

$$\mathbb{E} [ n^{1/2} < d_1(\cdot, \theta_{nm}) - d_1(\cdot, \theta_{\min}), e. >_n ]^2 = (\sigma^2/n) \sum_{k=1, n} ( d_1(t_k, \theta_{nm}) - d_1(t_k, \theta_{\min}) )^2 .$$

L'hypothèse  $H_5$  entraîne l'existence d'une constante  $K$  telle que :

$$\mathbb{E} [ n^{1/2} < d_1(\cdot, \theta_{nm}) - d_1(\cdot, \theta_{\min}), e. >_n ]^2 \leq K\sigma^2 \| \theta_{\min} - \theta_{nm} \|^2 .$$

Comme  $\lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}$ , on obtient alors la convergence en moyenne quadratique, donc en probabilité, du premier terme de  $Y_n$  vers zéro.

Par conséquent :

$Y_n$  converge en loi vers la loi  $N(0, \Lambda)$ . 🍏

De ces deux lemmes, on en déduit que :

$Z_n = n^{1/2}(\theta_n - \theta_{nm})$  converge en loi vers la loi  $N(0, G^{-1}\Lambda G^{-1})$ . 🍏

### 2.3 Etude de la suite $\{ n^{1/2} ( H_n(\theta_{\min}) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ) \}_{n \in \mathbb{N}^*}$

On se propose d'étudier la loi asymptotique de  $\{ n^{1/2} [ H_n(\theta_{\min}) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ] \}_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui nous sera utile dans le choix du modèle. Pour cela, on énonce le lemme intermédiaire suivant :

#### Lemme 3

*La constante  $c = \mu_4 - \sigma^4 + 4\mu_3 \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \mathbb{1} \rangle + 4\sigma^2 \Delta_{\min}$  est strictement positive.*

#### Démonstration

On pose :

$$A_m = \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \mathbb{1} \rangle .$$

Comme  $\Delta_{\min} \geq A_m^2$ , on peut donc majorer  $c$  de la façon suivante :

$$c \geq \mu_4 - \sigma^4 + 4\mu_3 A_m + 4\sigma^2 A_m^2 .$$

Or, par une transformation élémentaire on obtient :

$$\begin{aligned}\mu_4 - \sigma^4 + 4\mu_3 A_m + 4\sigma^2 A_m^2 &= \mathbb{E}[(e_1 + A_m)^4] - (\sigma^2 + A_m^2)^2 \\ &= \mathbb{E}[(e_1 + A_m)^4] - [\mathbb{E}(e_1 + A_m)^2]^2 \\ &= \text{Var}(e_1 + A_m)^2.\end{aligned}$$

On en déduit alors que  $c > 0$ .  $\clubsuit$

#### Théorème 4

Sous les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_6$

$n^{1/2} (H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm})$  converge en loi vers la loi  $N(0, c)$ .

#### Démonstration

$$\begin{aligned}H_n(\theta_n) &= [f(\cdot) + e. - g(\cdot, \theta_n)]_n^2 \\ &= [e.]_n^2 + [f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n)]_n^2 + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n), e. \rangle_n \\ &= [e.]_n^2 + [f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm})]_n^2 + [g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n)]_n^2 \\ &\quad + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}), g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) \rangle_n + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}), e. \rangle_n \\ &\quad + 2\langle g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n), e. \rangle_n \\ &= [e.]_n^2 + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}), e. \rangle_n + [f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm})]_n^2 \\ &\quad + [g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n)]_n^2 + 2\langle g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n), e. \rangle_n \\ &\quad + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n), g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) \rangle_n - 2[g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n)]_n^2. \\ &= [e.]_n^2 + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), e. \rangle_n \\ &\quad + 2\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n) + e., g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) \rangle_n \\ &\quad - [g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n)]_n^2 + \Delta_{nm} \\ &\quad + 2\langle g(\cdot, \theta_{\min}) - g(\cdot, \theta_{nm}), e. \rangle_n.\end{aligned}$$

Pour tout entier  $i$ , posons :

$$\begin{aligned} Z_i &= e_i^2 + 2 ( f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ) e_i - \sigma^2, \\ V_{n1} &= 2 n^{1/2} < f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n) + e., g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) >_n, \\ V_{n2} &= - n^{1/2} [ g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) ]_n^2, \\ V_{n3} &= 2 n^{1/2} < g(\cdot, \theta_{\min}) - g(\cdot, \theta_{nm}), e.>_n. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$n^{1/2} ( H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ) = (1/n^{1/2}) \sum_{i=1, n} Z_i + V_{n1} + V_{n2} + V_{n3}.$$

Les lemmes intermédiaires suivants permettent de trouver la loi asymptotique de  $n^{1/2} [ H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ]$ .

Avant d'énoncer ces lemmes, on rappelle le résultat suivant.

### Rappel [26]

Soit  $\{X_n, n \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires indépendantes admettant des moments d'ordre  $m > 2$ . On pose :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mathbb{E}(X_k), \\ \sigma_k &= \text{var}X_k, \\ h_{mk} &= \mathbb{E} |X_k - \mu_k|^m, \\ H_{mn} &= (\sum_{j=1, n} h_{mj})^{1/m}, \\ B_n &= (\sum_{k=1, n} \text{var}X_k)^{1/2}, \\ S_n &= [ \sum_{k=1, n} (X_k - \mu_k) ] / B_n. \end{aligned}$$

### Théorème de LIAPOUNOV

Si  $\lim_n [ H_{mn}/B_n ] = 0$ , alors  $S_n$  converge en loi vers la loi  $N(0,1)$ .

**Lemme 4**

$(1/n^{1/2})\sum_{i=1,n} Z_i$  converge en loi vers la loi  $N(0,c)$ .

**Démonstration:**

Comme les variables aléatoires  $e_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont i. i. d, centrées et que de plus  $\theta_{\min}$  n'est pas aléatoire, alors les variables aléatoires  $Z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont indépendantes, centrées et pour tout entier  $i$  :

$$\text{var}(Z_i) = \mathbb{E}(Z_i^2) = \mu_4 + 4\mu_3(f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min})) + 4\sigma^2(f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min})) - \sigma^4.$$

Posons  $B_n^2 = \sum_{i=1,n} \text{var}(Z_i)$ .

$$B_n^2 = n\mu_4 + 4n\mu_3 \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \mathbb{1} \rangle_n + 4n\sigma^2 [f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min})]_n^2 - n\sigma^4.$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction définie par  $\mathbb{1}(t) = 1$  pour tout  $t$  élément de  $\mathbb{R}$ .

Si on pose  $c_n = (1/n) B_n^2$ , on peut facilement montrer d'après ce qui précède que  $\lim_n c_n = c$ .

La continuité de  $g$  sur le compact  $[0,1] \times \Theta$  et l'hypothèse  $H_2$  entraîne l'existence d'une constante positive  $K$  telle que :

$$|Z_i| \leq e_i^2 + \sigma^2 + K|e_i|. \quad (*)$$

Pour tout entier  $i$ , posons :

$$Y_i = e_i^2 + \sigma^2 + K|e_i|, \text{ et pour tout } m > 2, \mathbb{E}(Y_i^m) = M_1.$$

Il est clair alors que les variables aléatoires  $Y_i$  sont indépendantes et de même loi.

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \sum_{i=1,n} \mathbb{E}|Z_i|^m \leq nM_1 \\ &\Rightarrow \left[ \sum_{i=1,n} \mathbb{E}|Z_i|^m \right] / B_n^m \leq (nM_1) / (nc_n)^{m/2} \\ &\leq n^{(1-m/2)} (M_1 / c_n^{m/2}). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_n c_n = c < \infty$ ,  $M_1 < \infty$  et  $m > 2$ , alors un passage à la limite entraîne que :

$$\lim_n [ \sum_{i=1,n} \mathbb{E} |Z_i|^m ] / B_n^m = 0.$$

Le théorème de LIAPOUNOV s'applique et entraîne que :

$$(1/(nc_n)^{1/2}) \sum_{i=1,n} Z_i \text{ converge en loi vers la loi } N(0,1).$$

Par conséquent :

$$(1/n^{1/2}) \sum_{i=1,n} Z_i \text{ converge en loi vers la loi } N(0,c).$$

### Lemme 5

$V_{n1}$  converge en probabilité vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

### Démonstration

Comme, d'après l'hypothèse  $H_5$ ,  $g$  est deux fois continûment différentiable, on peut alors faire un développement limité jusqu'à l'ordre deux de  $g$ .

Pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,

$$g(t, \theta_{nm}) - g(t, \theta_n) = {}^t(\theta_{nm} - \theta_n) D^1(t, \theta_n) + (1/2) {}^t(\theta_{nm} - \theta_n) D^2(t, \tilde{\theta}_n) (\theta_{nm} - \theta_n),$$

où  $\tilde{\theta}_n$  est tel que  $\| \theta_{nm} - \tilde{\theta}_n \| \leq \| \theta_{nm} - \theta_n \|$ .

Comme P-p.s.  $\lim_n \theta_n = \lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$  et que  $\theta_{\min}$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$ , alors P-p.s. il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $j=1, \dots, p$  :

$$(1/n) \sum_{i=1,n} (f(t_i) + e_i - g(t_i, \theta_n)) d_j(t_i, \theta_n) = 0.$$

D'où P-p.s. pour tout  $n \geq N$  :

$$n^{1/2} \langle f(\cdot) + e. - g(\cdot, \theta_n), g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n) \rangle =$$

$$(1/2) (n^{1/2}) {}^t(\theta_{nm} - \theta_n) \langle f(\cdot) + e. - g(\cdot, \theta_n), D^2(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n (\theta_{nm} - \theta_n).$$

On en déduit alors que P-p.s. pour tout  $n \geq N$  :

$$V_{n1} = (n^{1/2})^t (\theta_{nm} - \theta_n) [ \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n) + e., D^2(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n ] (\theta_{nm} - \theta_n).$$

On sait que, d'une part, d'après le théorème 2, P-p.s.  $\lim_n (\theta_{nm} - \theta_n) = 0$  et que d'autre part, d'après le théorème 3,  $(n^{1/2})^t (\theta_{nm} - \theta_n)$  converge en loi vers la loi  $N(0, G^{-1} \wedge G^{-1})$ . Par conséquent, pour montrer que  $V_{n1}$  converge en probabilité vers zéro, il suffit de montrer que le terme  $\langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n) + e., D^2(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n$  converge presque sûrement vers une limite finie. En effet, les hypothèses  $H_2$  et  $H_5$  entraînent l'existence d'une constante  $L$ , telle que, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  et tous  $i$  et  $j$  éléments de  $\{1, \dots, p\}$  les fonctions  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot, \theta)$ ,  $d_i(\cdot, \theta)$  et  $d_{ij}(\cdot, \theta)$  sont majorées en valeur absolue par  $L$ , de plus comme P-p.s.  $\lim_n \theta_n = \lim_n \theta_{nm} = \lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$  et que  $\theta_{\min}$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$ , on a alors : P-p.s.

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \lim_n \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_n) + e., D^2(\cdot, \tilde{\theta}_n) \rangle_n = \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}) + e., D^2(\cdot, \theta_{\min}) \rangle.$$

On en déduit alors le résultat du lemme 5. 🍏

### **lemme 6**

*$V_{n2}$  converge en probabilité vers zéro quant  $n$  tend vers l'infini.*

### **Démonstration**

L'hypothèse  $H_5$  entraîne l'existence d'une constante  $S$  telle que :

$$|g(\cdot, \theta_{nm}) - g(\cdot, \theta_n)| \leq S \|\theta_{nm} - \theta_n\|$$

$$\text{D'où } |V_{n2}| \leq S^t (\theta_{nm} - \theta_n) (n^{1/2}) (\theta_{nm} - \theta_n).$$

Le résultat du lemme 6 se déduit immédiatement des théorèmes 2 et 3. 🍏

**lemme 7**

$V_{n3}$  converge en probabilité vers zéro quant  $n$  tend vers l'infini.

**Démonstration**

Montrons que  $V_{n3}$  converge en moyenne quadratique vers zéro. En effet :

$$\mathbb{E}(V_{n3}) = 0, \quad \mathbb{E}(V_{n3})^2 = (4\sigma^2/n) \sum_{i=1,n} (g(t_i, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{nm}))^2.$$

La continuité de  $g$  sur  $[0,1] \times \Theta$  entraîne l'existence d'une constante  $K$ , telle que :

$$\mathbb{E}(V_{n3})^2 \leq 4\sigma^2 K \|\theta_{\min} - \theta_{nm}\|.$$

Comme  $\lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}$ , on obtient alors la convergence en moyenne quadratique, donc en probabilité, de  $V_{n3}$  vers zéro. 🍏

Par conséquent les lemmes 4, 5, 6 et 7 entraînent alors que :

$$(n^{1/2}) [H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}] \text{ converge en loi vers la loi } N(0,c). \quad \text{🍏}$$

**2.4. Choix du modèle**

On considère à présent deux modèles approximatifs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  tels que :

$$\mathcal{M}_1 = \{g_1(\cdot, \theta), \theta \in \Theta_1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = \{g_2(\cdot, \theta), \theta \in \Theta_2\}.$$

On notera  $(\cdot)_i$  toute quantité relative à  $\mathcal{M}_i$ ,  $i=1,2$ . On suppose que les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_6$  sont vérifiées pour les deux modèles  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et on fait en plus l'hypothèse suivante :

$$H_7. d^2 = [g_1(\cdot, \theta_{1\min}) - g_2(\cdot, \theta_{2\min})]^2 > 0.$$

$$\text{On pose } d_n^2 = [g_1(\cdot, \theta_{1\min}) - g_2(\cdot, \theta_{2\min})]_n^2.$$

### **Théorème 5**

Sous les hypothèses  $H_1 \rightarrow H_7$  :

$(n^{1/2})(1/2d_n) [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - (\Delta_{1nm} - \Delta_{2nm}) ]$  converge en loi vers la loi  $N(0, \sigma^2)$ .

### **Démonstration**

On adapte la démonstration du théorème 4 en posant, pour tout entier  $i$  et tout  $j=1,2$ :

$$\begin{aligned} Z_i &= 2e_i ( g_2(t_i, \theta_{2min}) - g_1(t_i, \theta_{1min}) ), \\ V_{n1}^j &= 2n^{1/2} < f(\cdot) + e - g_j(\cdot, \theta_{jn}), g_j(\cdot, \theta_{jnm}) - g_j(\cdot, \theta_{jn}) >_n, \\ V_{n2}^j &= -n^{1/2} [g_j(\cdot, \theta_{jnm}) - g_j(\cdot, \theta_{jn})]_n^2, \\ V_{n3}^j &= 2n^{1/2} < g_j(\cdot, \theta_{jm}) - g_j(\cdot, \theta_{jnm}), e >_n. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} n^{1/2} [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - (\Delta_{1nm} - \Delta_{2nm}) ] \\ = (1/n^{1/2}) \sum_{i=1, n} Z_i + V_{n1}^1 + V_{n2}^1 - V_{n1}^2 - V_{n2}^2 + V_{n1}^3 + V_{n2}^3 \quad \text{-5.1-} \end{aligned}$$

La continuité de  $g_1$  (resp  $g_2$ ) sur le compact  $[0,1] \times \Theta_1$  (resp  $[0,1] \times \Theta_2$ ) et la remarque 1 du chapitre 1 entraînent que :

$$P\text{-p.s. } \lim_n d_n^2 = \lim_n [g_2(\cdot, \theta_{2min}) - g_1(\cdot, \theta_{1min})]_n^2 = d^2.$$

Comme  $d^2 > 0$  - $H_7$ - alors il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ ,  $d_n^2 > 0$ . Il est clair que les variables aléatoires  $Z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont indépendantes, centrées et de variances :

$$\text{var}(Z_i) = 4\sigma^2 ( g_2(t_i, \theta_{2min}) - g_1(t_i, \theta_{1min}) )^2.$$

Posons :

$$\begin{aligned} B_n^2 &= \sum_{i=1, n} \text{var}(Z_i) \\ &= 4n\sigma^2 [g_2(t_i, \theta_{2min}) - g_1(t_i, \theta_{1min})]_n^2 \\ &= 4n\sigma^2 d_n^2. \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que la condition du théorème de LIAPOUNOV est vérifiée. On en déduit alors que :

$[(1/B_n)\sum_{i=1,n} Z_i ]$  converge en loi vers la loi  $N(0,1)$  quand  $n$  tend vers l'infini et donc:

$[(1/n^{1/2})(1/2d_n) \sum_{i=1,n} Z_i ]$  converge en loi vers la loi  $N(0,\sigma^2)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

En multipliant les deux termes de l'égalité -5.1- par  $(1/2d_n)$  et en appliquant les résultats des lemmes 5, 6 et 7, on déduit que :

$(n^{1/2})(1/2d_n)[ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - (\Delta_{1nm} - \Delta_{2nm}) ]$  converge en loi vers la loi  $N(0,\sigma^2)$ . ♣

**Remarque:**

Le résultat du théorème 5 sera utilisé dans le chapitre IV pour établir un test concernant le choix d'un modèle parmi deux modèles approximatifs. ♣



**CHAPITRE III**

**MODELE DE REGRESSION  
APPROXIMATIF A PHASES MULTIPLES**



## **I. PRESENTATION DU MODELE ET HYPOTHESES**

Pour des commodités d'exposition, on se limite au cas d'une seule rupture. On pose alors, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ ,  $\theta_1 = \tau$ ,  $(\theta_2, \dots, \theta_p) = \xi$ . On suppose qu'il existe un sous ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^{p-1}$  et deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a \leq b < 1$  et  $\Theta = [a, b] \times E$ .

On considère le modèle approximatif suivant :

$$\mathcal{M} = \{ g(t, \theta), t \in [0, 1], \theta \in \Theta \}$$

tel que, pour tout  $g$  élément de  $\mathcal{M}$ , on a :

Pour tout  $t$  élément de  $[0, 1]$ ,  $g(t, \cdot)$  est une application continue sur le sous ensemble compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^p$  et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $g(\cdot, \theta)$  est une application continue sur  $[0, 1]$  et deux fois continûment dérivable sauf en  $\tau$  où l'une au moins de ses dérivées est supposée présenter une discontinuité. On définit alors deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  coïncidant avec  $g$  sur les intervalles respectifs  $[0, \tau]$  et  $]\tau, 1]$ . On obtient alors : pour tout  $t$  élément de  $[0, 1]$  et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,

$$g(t, \theta) = g_1(t - \tau, \xi) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) + g_2(t - \tau, \xi) \mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t),$$

avec  $g_1(0, \xi) = g_2(0, \xi)$ .

On note :

$$\Delta_n(\theta) = [ f(\cdot) - g(\cdot, \theta) ]_n^2,$$

$$\Delta_{nm} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta),$$

$$\theta_{nm} \text{ un élément de } \Theta \text{ qui réalise : } \Delta_{nm} = \Delta_n(\theta_{nm}).$$

Si  $\Delta_n(\cdot)$  admet une limite quand  $n$  tend vers l'infini, on note :

$$\Delta(\theta) = \lim_n \Delta_n(\theta) = [ f(\cdot) - g(\cdot, \theta) ]^2,$$

$$\Delta_{\min} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta),$$

$$\theta_{\min} \text{ un élément de } \Theta \text{ qui réalise : } \Delta_{\min} = \Delta(\theta_{\min}).$$

Pour tout entier  $n$  et tout  $t$  élément de  $[0,1]$ , on pose :

$$F_n(t) = (1/n) \sum_{i=1, n} \mathbb{1}_{[0,t]}(t_i).$$

Enfin, si  $e_1$  admet un moment d'ordre 4, on note :

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \mathbb{E}(e_1^3) \quad \text{et} \quad \mu_4 = \mathbb{E}(e_1^4) \\ c &= \mu_4 - \sigma^4 + 4\mu_3 \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \mathbb{1} \rangle + 4\sigma^2 \Delta(\theta_{\min}). \end{aligned}$$

Les hypothèses suivantes sont imposées :

- A<sub>1</sub>.** Les variables aléatoires  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes et identiquement distribuées et de variance  $\sigma^2$ .
- A<sub>2</sub>.**  $f$  est une fonction continue sur  $[0,1]$ .
- A<sub>3</sub>.**  $\theta_{\min}$  est unique et il appartient à l'intérieur de  $\Theta$ .
- A<sub>4</sub>.** La suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge ponctuellement vers une fonction  $F$  continûment différentiable jusqu'à l'ordre un, strictement croissante sur  $[0,1]$  et telle qu'il existe une suite  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant :  

$$\lim_n \varepsilon_n = 0 \quad \text{et pour tout } t \text{ élément de } [0,1] \quad |F(t) - F_n(t)| \leq \varepsilon_n r(n),$$
où  $r(n) = 1/(n^\alpha)$ ,  $2/3 < \alpha < 1$ .
- A<sub>5</sub>.**  $g_1(\cdot, \cdot)$  ( resp  $g_2(\cdot, \cdot)$  ) est une fonction définie et continue sur  $[-b,0] \times E$  ( resp sur  $[0,1-a] \times E$  ).
- A<sub>6</sub>.**  $g_1$  et  $g_2$  sont continûment dérivables sur leurs domaines de définition jusqu'à l'ordre deux. De plus, pour  $i=1,2$ ,  $j,k=2,3,\dots,p$  les dérivées partielles  $(\partial^3 g_i(u, \xi) / \partial u \partial \xi_j^2)$ ,  $(\partial^3 g_i(u, \xi) / \partial u^2 \partial \xi_j)$ ,  $(\partial^4 g_i(u, \xi) / \partial u^2 \partial \xi_j \partial \xi_k)$  existent et sont continues.
- A<sub>7</sub>.** Il existe un nombre  $t_0 > 0$  tel que, pour tout  $t$ ,  $|t| < t_0$ ,  $E[\exp(te_1)] < \infty$ .
- A<sub>8</sub>.** La matrice  $((\partial^2 \Delta_{\min} / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j}$  est une matrice définie positive.

### **Remarque 1**

Il découle de l'hypothèse  $A_5$  que pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,  $g(t, \cdot)$  est continue sur  $\Theta$ . L'ensemble  $\Theta$  étant compact  $A_5$  et  $A_6$  entraînent l'existence d'une constante  $K > 0$ , telle que  $g_1$ ,  $g_2$  et leurs dérivées partielles qui existent, sont majorées en valeur absolue par  $K$ .

**Remarque 2**

\* L'hypothèse  $A_4$  entraîne que pour tous  $t$  et  $t'$  éléments de  $[0,1]$ , tels que  $t < t'$ ,  $\text{card} \{ i \in \{1, \dots, p\} / t \leq t_i \leq t' \} = o(nr(n)) + O(n(t'-t))$ .

\* L'hypothèse  $A_7$  n'est utilisée que pour la normalité asymptotique. Il semble difficile de ne pas imposer à la loi des variables aléatoires  $e_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , une condition de décroissance rapide à l'infini pour obtenir cette propriété.

\* Il découle de l'hypothèse  $A_7$  que  $e_1$  admet des moments de tout ordre.

\* L'hypothèse  $A_4$  implique que :

$$\lim_n n^{(1/2)} \sup_{t \in [0,1]} |F_n(t) - F(t)| = 0,$$

donc elle ne peut être satisfaite que si le statisticien maîtrise les  $t_i$ , cela exclut des  $t_i$  aléatoires.

\* Il est facile de vérifier que les conditions des théorèmes 1 et 2 du chapitre II sont satisfaites, par conséquent ces théorèmes peuvent être appliqués ici.

\* Enfin, on s'inspire des méthodes utilisées aux chapitres I et II en réalisant une approximation de toute fonction  $g$  de  $\mathcal{M}$  par une suite de fonctions  $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les conditions de régularité du chapitre II.

\* Nous montrons dans l'annexe 1 que ces hypothèses sont vérifiées dans certains cas particuliers où les fonctions de régression du modèle approximatif sont des fonctions polynomiales ou exponentielles.

## II. CONSTRUCTION DE LA SUITE $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ET NOTATIONS

### II.1. Construction de la suite $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

L'idée est de construire une fonction  $g^r$  deux fois continûment dérivable et coïncidant avec  $g_1$  et  $g_2$  en dehors d'un voisinage  $V_r$  de  $\tau$ .

On considère pour cela, une fonction  $h^r$  telle que :  
pour tout  $\xi$  élément de  $E$  et tout  $u$  tel que  $-r < u < r$ ,

$$h^r(u, \xi) = g_1(-r, \xi) + (u+r) \left[ \partial g_1(-r, \xi) / \partial u \right] + \left[ (u+r)^2 / 2 \right] \left[ \partial^2 g_1(-r, \xi) / \partial u^2 \right] + \sum_{i=1,3} (u+r)^{2+i} a_{ri}(\xi) \quad -2.1.1-$$

#### Proposition 1

- i) Il existe une constante positive  $H$  telle que, pour tout  $r$  vérifiant  $0 < r < r_0 < \min(1-a, b)$ , il existe une application  $g^r$  de  $[0,1] \times \Theta$  dans  $\mathbb{R}$ , deux fois continûment dérivable telle que :
- $$\forall t \in [0,1], \forall \theta \in \Theta, \quad |g(t, \theta) - g^r(t, \theta)| \leq Hr.$$
- ii) Il existe une constante  $C$  telle que :
- $$\forall i \in \{1,2,3\}, \forall r \in ]0, r_0], \forall \xi \in E \quad |a_{ir}(\xi)| \leq C r^{(-1-i)}.$$

#### Démonstration

La définition de  $h^r$  donnée par l'équation -2.1.1- entraîne que :

$$\begin{aligned} h^r(-r, \xi) &= g_1(-r, \xi) \\ \partial h^r(-r, \xi) / \partial u &= \partial g_1(-r, \xi) / \partial u \\ \partial^2 h^r(-r, \xi) / \partial u^2 &= \partial^2 g_1(-r, \xi) / \partial u^2. \end{aligned}$$

On impose à  $h^r$  les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} h^r(r, \xi) &= g_2(r, \xi) \\ \partial h^r(r, \xi) / \partial u &= \partial g_2(r, \xi) / \partial u \\ \partial^2 h^r(r, \xi) / \partial u^2 &= \partial^2 g_2(r, \xi) / \partial u^2. \end{aligned} \quad (S)$$

On obtient ainsi un système de trois équations à trois inconnues  $a_{1r}(\xi)$ ,  $a_{2r}(\xi)$ ,  $a_{3r}(\xi)$ . Un calcul élémentaire montre que le déterminant de ce système est  $\Delta_r(\xi) = 2(2r)^9$ . On a alors pour  $r \neq 0$ ,  $\Delta_r(\xi) \neq 0$  et donc le système admet une solution unique. En utilisant les hypothèses  $A_5$  et  $A_6$ , la résolution de (S) entraîne l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \forall r \in ]0, r_0], \forall \xi \in E \quad |a_{ir}(\xi)| \leq C r^{(-1-i)}. \quad -2.1.2-$$

On définit alors la fonction  $g^r$  par :

$$g^r(t, \theta) = g_1(t-\tau, \xi) \mathbb{1}_{[0, \tau-r]}(t) + h^r(t-\tau, \xi) \mathbb{1}_{] \tau-r, \tau+r ]}(t) + g_2(t-\tau, \xi) \mathbb{1}_{[\tau+r, 1]}(t)$$

La remarque 1 et la majoration précédente des  $a_{ir}(\xi)$  permettent d'obtenir le premier résultat de la proposition en comparant  $g^r(t, \cdot)$  d'une part à  $g_1(t, \cdot)$  sur  $[\tau-r, \tau]$  et d'autre part à  $g_2(t, \cdot)$  sur  $[\tau, \tau+r]$ .

L'hypothèse  $A_6$  et les relations précédentes permettent de vérifier facilement que  $g^r$  possède les propriétés de dérivabilité souhaitées. 🍏

### Remarque 3

Cette démonstration montre de plus que :

pour tous  $t$  élément de  $[0, 1]$ ,  $\theta$  élément de  $\Theta$  et  $r$  élément de  $]0, r_0]$ ,

$g^r(t, \cdot)$  et ses dérivées partielles d'ordre un et deux sont uniformément bornées par rapport à  $(t, \theta, r)$  par une constante encore notée  $K$ , sauf  $\partial^2 g^r(t, \theta) / \partial \tau^2$  pour laquelle on a une majoration par  $K/r$ . Or, c'est cette dernière majoration qui constitue d'une part la difficulté de ce chapitre et d'autre part la différence entre le chapitre précédent et celui-ci.

On considère alors la suite numérique décroissante  $\{r(n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie dans l'hypothèse  $A_4$  par :  $r(n) = 1/n^\alpha$ ,  $2/3 < \alpha < 1$ .

On définit la suite  $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall t \in [0, 1], \forall \theta \in \Theta, \forall n \in \mathbb{N}^*, g^n(t, \theta) = g^{r(n)}(t, \theta). \quad -2.1.3-$$

## II.2. Notations

On note :

- \*  $H_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1,n} (X_i - g(t_i, \theta))^2$ ,  $H'_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1,n} (X_i - g^n(t_i, \theta))^2$ .
- \*  $\theta_n$  (resp  $\theta'_n$ ) un estimateur des moindres carrés relatif à  $H_n(\cdot)$  (resp à  $H'_n(\cdot)$ ).
- \*  $\Delta_n(\theta) = [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]_n^2$ ,  $\Delta'_n(\theta) = [f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2$ .
- \*  $\Delta_{nm} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta)$ ,  $\Delta'_{nm} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta'_n(\theta)$ .
- \*  $\theta_{nm}$  un élément de  $\Theta$  qui réalise  $\Delta_{nm} = \Delta_n(\theta_{nm})$ .

Si  $\Delta_n(\cdot)$  admet une limite quand  $n$  tend vers l'infini, on pose :

- \*  $\Delta(\theta) = [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]^2$ .
- \*  $\Delta_{\min} = \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta)$ .
- \*  $\theta_{\min}$  un élément de  $\Theta$  qui réalise  $\Delta_{\min} = \Delta(\theta_{\min})$ .

## III. RESULTATS

### III.1 Consistance de la suite $\{\theta'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

#### Théorème 1

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_6$  :

$$\text{P-p.s. } \lim_n \theta'_n = \theta_{\min}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les résultats intermédiaires suivants :

#### Proposition 2

**P-p.s.**  $H'_n(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta) + \sigma^2$ .

**Démonstration :**

Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned}
 H'_n(\theta) &= [X. - g^n(.,\theta)]_n^2 \\
 &= [f(.) + e - g^n(.,\theta)]_n^2 \\
 &= [e.]_n^2 + [f(.) - g(.,\theta)]_n^2 + [g(.,\theta) - g^n(.,\theta)]_n^2 \\
 &\quad + 2 \langle f(.) - g(.,\theta), g(.,\theta) - g^n(.,\theta) \rangle_n + 2 \langle e., f(.) - g^n(.,\theta) \rangle_n \\
 &= [e.]_n^2 + [f(.) - g(.,\theta)]_n^2 + \langle 2f(.) - g(.,\theta) - g^n(.,\theta), g(.,\theta) - g^n(.,\theta) \rangle_n \\
 &\quad + 2 \langle e., f(.) - g^n(.,\theta) \rangle_n.
 \end{aligned}$$

Posons pour tout  $\theta$  élément  $\Theta$

$$\begin{aligned}
 R_{1n}(\theta) &= \langle 2f(.) - g(.,\theta) - g^n(.,\theta), g(.,\theta) - g^n(.,\theta) \rangle_n \\
 R_{2n}(\theta) &= 2 \langle e., f(.) - g^n(.,\theta) \rangle_n \\
 \Delta_n(\theta) &= [f(.) - g(.,\theta)]_n^2
 \end{aligned}$$

**Lemme 1**

$R_{1n}(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro.

**Démonstration :**

L'hypothèse  $A_2$  et les remarques 1 et 3 entraînent l'existence d'une constante  $K$  telle que :

pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  et tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,

$$|2f(t) - g(t,\theta) - g^n(t,\theta)| \leq 4K.$$

Grâce à la proposition 1, on obtient :

$$\text{pour tout } \theta \text{ élément de } \Theta, |R_{1n}(\theta)| \leq 4KHr(n).$$

En vertu du choix de la suite  $\{r(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et de la majoration précédente, on en déduit la convergence uniforme de  $R_{1n}(\theta)$  vers zéro. ♣

**Lemme 2**

*P-p.s.*  $R_{2n}(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro.

**Démonstration**

Comme  $f(\cdot)$  et  $g^n(\cdot, \cdot)$  sont continues et bornées sur leurs domaines de définition, alors  $[f(\cdot)]^2$  et  $[g^n(\cdot, \cdot)]^2$  existent et d'après la remarque 1 du chapitre I,  $[f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers une limite. Le théorème 3 du chapitre I s'applique et entraîne que :

*P-p.s.*  $R_{2n}(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro. 🍏

Enfin le théorème 1 -chap II- et la loi forte des grands nombres entraînent respectivement que :

$\Delta_n(\theta)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta)$ .

$[e.]_n^2$  converge presque sûrement vers  $\sigma^2$ .

Ceci nous permet d'obtenir le résultat de la proposition 2. 🍏

**Remarque 4**

$\Delta(\cdot)$ , comme étant la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur  $\Theta$ , est une fonction continue sur  $\Theta$ .

**Proposition 3**

$[f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  sur  $\Theta$  vers  $\Delta(\theta)$ .

**Démonstration**

Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  :

$$|[f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2 - \Delta(\theta)| \leq |[f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]_n^2 - \Delta(\theta)| + [g(\cdot, \theta) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2 + 2| \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta), g(\cdot, \theta) - g^n(\cdot, \theta) \rangle_n |.$$

Or d'après la proposition 1 on a Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  :

$$[g(\cdot, \theta) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2 \leq H^2(r(n))^2.$$

De plus l'hypothèse  $A_2$  et la remarque 1 entraînent l'existence d'une constante  $M$  telle que :

$$2 | \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta), g(\cdot, \theta) - g^n(\cdot, \theta) \rangle_n | \leq Mr(n)$$

et comme  $\lim_n r(n) = \lim_n (r(n))^2 = 0$ , on en déduit alors que ces deux termes tendent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Enfin comme  $[f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]_n^2$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta)$ , alors il en est de même pour  $[f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta)]_n^2$ . 🍏

### Démonstration du théorème 1

On adapte la démonstration du théorème 1 du chapitre 1. On désigne par  $A$  un sous ensemble de  $\Omega$  tel que  $P(A) = 1$  et pour tout  $\omega$  élément de  $A$ ,  $H'_n(\theta)(\omega)$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers  $\Delta(\theta) + \sigma^2$ .

Comme  $\Theta$  est compact, alors pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$ , la suite  $\{\theta'_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet au moins un point d'accumulation  $\hat{\theta}_\omega$  et il existe une sous suite  $\{\theta'_{nt}(\omega)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  de  $\{\theta'_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $\hat{\theta}_\omega$ .

On montre que pour tout  $\omega$  élément de  $A$ ,  $\lim_t H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) = \Delta(\hat{\theta}_\omega) + \sigma^2$ . En effet, pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$  on a :

$$\begin{aligned} |H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega) - \sigma^2| &\leq |H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\theta'_{nt}(\omega)) - \sigma^2| \\ &\quad + |\Delta(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega)|. \end{aligned}$$

La proposition 2 entraîne que :

$$\forall \omega \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0 / \forall t \geq N_1 \quad |H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\theta'_{nt}(\omega)) - \sigma^2| \leq \varepsilon/2.$$

De plus, comme d'une part  $\Delta(\theta)$  est une fonction continue sur  $\Theta$  et que d'autre part, pour tout  $\omega$  élément de  $\Omega$   $\lim_t \theta'_{nt}(\omega) = \hat{\theta}_\omega$ , alors on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \exists N_2 > 0 / \forall t \geq N_2 \quad |\Delta(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega)| \leq \varepsilon/2.$$

On en déduit alors :

$$\forall \omega \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \max(N_1, N_2) / \forall t \geq N \quad |H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) - \Delta(\hat{\theta}_\omega) - \sigma^2| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall \omega \in A, \lim_t H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) = \Delta(\hat{\theta}_\omega) + \sigma^2.$$

Comme  $\theta'_{nt}$  est un estimateur des moindres carrés, on a alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad H'_{nt}(\theta'_{nt}(\omega)) \leq H'_{nt}(\theta_{\min}).$$

Un passage à la limite entraîne que :

$$\forall \omega \in A, \quad \Delta(\hat{\theta}_\omega) \leq \Delta(\theta_{\min}).$$

L'hypothèse  $H_3$  nous permet de conclure que pour tout  $\omega$  élément de  $A$ , les points d'accumulation de la suite  $\{\theta'_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  coïncident avec  $\theta_{\min}$ . Ce qui entraîne alors que :

$$\forall \omega \in A, \lim_n \theta'_n(\omega) = \theta_{\min}. \quad *$$

On obtient donc :

$$\text{P-p.s.} \quad \lim_n \theta'_n = \theta_{\min}. \quad * \quad \bullet$$

### III.2. Etude de la suite $\{ n^{1/2} [\theta'_n - \theta_n] \}_{n \in \mathbb{N}^*}$

Nous énoncerons d'abord certains résultats préliminaires qui nous seront utiles dans l'étude de la suite  $\{ n^{1/2} [\theta'_n - \theta_n] \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Dans toute la suite, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , on désigne par :

$$J_n(\theta) = \{ i \in \mathbb{N}^* / t_i \in ]\tau - r(n), \tau + r(n)[ \}.$$

on a d'après l'hypothèse  $A_g$  :

$$\forall \theta \in \Theta, \text{card} [ J_n(\theta) ] = O(nr(n)).$$

Posons  $I_n(\theta) = {}^c J_n(\theta)$ .

#### Lemme 3

$$P\text{-p.s. } \lim_n n [ H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) ] = \lim_n n [ H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) ] = 0.$$

#### Démonstration

Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , on peut écrire :

$$H'_n(\theta) = [ f(\cdot) ]_n^2 + [ g^n(\cdot, \theta) ]_n^2 + [ e. ]_n^2 - 2 \langle f(\cdot), g^n(\cdot, \theta) \rangle_n + 2 \langle e., f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta) \rangle_n$$

et  $H_n(\theta) = [ f(\cdot) ]_n^2 + [ g(\cdot, \theta) ]_n^2 + [ e. ]_n^2 - 2 \langle f(\cdot), g(\cdot, \theta) \rangle_n + 2 \langle e., f(\cdot) - g(\cdot, \theta) \rangle_n$

Ainsi on a :

$$H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) = [ g^n(\cdot, \theta_n) ]_n^2 - [ g(\cdot, \theta_n) ]_n^2 - 2 \langle f(\cdot), g^n(\cdot, \theta_n) - g(\cdot, \theta_n) \rangle_n - 2 \langle e., g^n(\cdot, \theta_n) - g(\cdot, \theta_n) \rangle_n.$$

Par une transformation simple, on obtient :

$$\begin{aligned} n(H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) &= \sum_{i \in J_n(\theta_n)} [ (g^n(t_i, \theta_n))^2 - (g(t_i, \theta_n))^2 ] \\ &\quad - 2 \sum_{i \in J_n(\theta_n)} [ g^n(t_i, \theta_n) - g(t_i, \theta_n) ] e_i \\ &\quad - 2 \sum_{i \in J_n(\theta_n)} [ g^n(t_i, \theta_n) - g(t_i, \theta_n) ] f(t_i). \end{aligned}$$

L'hypothèse  $A_2$ , la proposition 1 et la remarque 3 entraînent l'existence d'une constante  $S > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} n | H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) | &\leq S r(n) [\text{card } J_n(\theta_n) + \sum_{i \in J_n(\theta_n)} | e_i |] \\ &\leq S r(n) [\text{card } J_n(\theta_n) + (n \text{ card } J_n(\theta_n))^{(1/2)} ((1/n) \sum_{i=1, n} e_i^2)^{(1/2)}]. \end{aligned}$$

Il découle de la loi forte des grands nombres appliquées à la suite aléatoire  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  que :

$$n | H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) | \leq O(nr(n)^{3/2}).$$

Le choix de la suite  $\{r(n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  entraîne que :

$$P\text{-p.s. } \lim_n n (H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) = 0. \spadesuit$$

Le deuxième résultat du lemme s'obtient de la même façon.  $\clubsuit$

Le lemme 3 et la majoration suivante :

$$| H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) | \leq | H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) | + | H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) |$$

ont pour conséquence le résultat suivant :

#### Lemme 4

$$P\text{-p.s. } \lim_n n (H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)) = 0.$$

Dans toute la suite, on pose, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  :

$$\begin{aligned} K_n(\theta) &= (1/2) ((\partial^2 H'_n(\theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} \\ \text{et } K(\theta) &= (1/2) ((\partial^2 \Delta(\theta_{\min}) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j}. \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) = {}^t(\theta_n - \theta'_n) (\partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i)_i + {}^t(\theta_n - \theta'_n) K_n(\theta_{n0}) (\theta_n - \theta'_n)$$

où  $\theta_{n0}$  appartient au segment de droite joignant  $\theta_n$  et  $\theta'_n$ . On peut définir  $\theta_{n0}$  en adaptant la démonstration du lemme 3 -chap I- comme étant une application mesurable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\Theta$ . Cette démonstration suppose que  $\Theta$  est en plus convexe. On peut limiter les valeurs de  $\theta_n$  et de  $\theta'_n$  à un voisinage convexe de  $\theta_{\min}$  puisque P-p.s.  $\lim_n \theta_n = \lim_n \theta'_n = \theta_{\min}$  et que  $\theta_{\min}$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$ . Il n'y a donc aucune restriction à imposer à  $\Theta$ . De même P-p.s. pour  $n$  suffisamment grand,  $\theta'_n$  appartient à l'intérieur de  $\Theta$  et ainsi :

$$\text{P-p.s. } \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i = 0.$$

On a alors dans ces conditions :

$$\text{P-p.s. pour } n \geq N, \quad n(H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)) = n^{(1/2)t}(\theta_n - \theta'_n)K_n(\theta_{n0})(\theta_n - \theta'_n)n^{(1/2)}.$$

### Théorème 2

sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$

$$\text{P-p.s. } \lim_n \| n^{1/2}(\theta_n - \theta'_n) \| = 0.$$

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur l'hypothèse  $A_9$  et les propositions 4 et 5 suivantes :

### Proposition 4

$$\text{P-p.s. } \lim_n K_n(\theta_{n0}) = K(\theta_{\min}).$$

On désigne par  $\{\lambda_{in}\}_{i=1,p}$  les valeurs propres de  $K_n(\theta_{n0})$ .

### Proposition 5

Il existe  $\lambda > 0$  tel que P-p.s. pour  $n$  suffisamment grand et pour tout  $i$  élément de  $\{1, \dots, p\}$   $\lambda_{in} \geq \lambda$ .

Montrons d'abord que si les propositions 4 et 5 sont vraies, alors le théorème 2 est vérifié.

En effet, soit  $L_n$  une matrice orthogonale telle que, pour  $n$  suffisamment grand  $K_n(\theta_{n0}) = L_n \Lambda_n L_n$ , où  $\Lambda_n$  est la matrice diagonale obtenue à partir des valeurs propres  $\{\lambda_{in}\}_{i=1,p}$  de  $K_n(\theta_{n0})$ .

On pose :

$$u_n = (u_{in})_{i=1,p} = n^{1/2} L_n (\theta_n - \theta'_n).$$

On a alors, pour  $n$  suffisamment grand :

$$n(H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)) = \sum_{i=1,p} \lambda_{in} (u_{in})^2 \geq \lambda \|u_n\|^2.$$

D'après le lemme 4, on obtient :

$$P\text{-p.s. } \lim_n \|u_n\| = \lim_n \|n^{1/2}(\theta_n - \theta'_n)\| = 0.$$

Le théorème 2 sera ainsi démontré. Le reste du paragraphe III.2 est en conséquence consacré aux démonstrations des propositions 4 et 5. Vue la longueur de ces démonstrations, nous nous proposons, pour faciliter la lecture, de les faire en deux sous paragraphes.

### **III.2.1. Démonstration de la proposition 4**

Pour tous  $i$  et  $j$  éléments de  $\{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} (1/2)(\partial^2 H'_n(\theta_{n0}) / \partial \theta_i \partial \theta_j) = & \langle \partial g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_k, \partial g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_j \rangle_n \\ & - \langle f(.) - g^n(., \theta_{n0}), \partial^2 g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\ & - \langle \partial^2 g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j, e. \rangle_n. \end{aligned} \quad \text{-3.1.1-}$$

On étudie séparément le comportement de chacun ces trois termes. On énonce pour cela les résultats intermédiaires suivants :

**Lemme 5**

$$P\text{-p.s. } \lim_n \langle \partial g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_k, \partial g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_j \rangle_n = \int_{[0,1]} (\partial g(t, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) (\partial g(t, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) dF(t).$$

**Démonstration**

$$\text{Posons } I_{kj}(\theta_{\min}) = \int_{[0,1]} (\partial g(t, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) (\partial g(t, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) dF(t).$$

On peut écrire :

$$\langle \partial g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_k, \partial g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_j \rangle_n - I_{kj}(\theta_{\min}) = V_{n1} + V_{n2},$$

où

$$V_{n1} = (1/n) \sum_{i=1, n} [ (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) ]$$

$$V_{n2} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [ (\partial g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k) (\partial g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_j) ] + (1/n) \sum_{i=1, n} ( \partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) ( \partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j ) - I_{kj}(\theta_{\min}).$$

On pose  $\delta(n) = |\tau_{\min} - \tau_{n0}|$ . Comme P-p.s.  $\lim_n \theta_n = \lim_n \theta'_n = \theta_{\min}$ , on a alors :  
 P-p.s.  $\lim_n \theta_{n0} = \theta_{\min}$  et donc la suite  $\{ \delta(n) \}_n$  converge vers zéro. On désigne par  $J_n$  l'ensemble des éléments  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $t_i$  appartient au segment fermé joignant  $\tau_{\min}$  et  $\tau_{n0}$ , et  $I_n = {}^c J_n$ . On a alors la majoration suivante :

$$\text{card } J_n = O(n \delta(n)).$$

On étudie séparément le comportement asymptotique des termes  $V_{n1}$  et  $V_{n2}$ .

\* Par une transformation élémentaire on obtient :

$$V_{n1} = (1/n) \sum_{i \in I_n} [ (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) ] + (1/n) \sum_{i \in J_n} [ (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k) (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) ].$$

Or,  $\forall \varepsilon > 0, \forall i \in I_n, \exists T > 0 / |(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_k) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k)| \leq T \|\theta_{n_0} - \theta_{\min}\|$ .

Par conséquent on peut majorer le premier terme de  $V_{n1}$  par  $K \|\theta_{n_0} - \theta_{\min}\|$ , où  $K$  est une constante positive. On en déduit alors que : P-p.s.

$$\lim_n (1/n) \sum_{i \in I_n} [(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j)] = 0.$$

Le deuxième terme de  $V_{n1}$  peut être majorer par  $(K/n)(2kn \delta(n) + 1)$ , ce qui nous permet de conclure que : P-p.s.

$$\lim_n (1/n) \sum_{i \in J_n} [(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_j) - (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j)] = 0.$$

On obtient alors :

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n1} = 0. \blacklozenge$$

\*En ce qui concerne  $V_{n2}$ , on remarque que, d'après le théorème de HELLY-BRAY, on a :

$$\lim_n (1/n) \sum_{i=1, n} (\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_j) = I_{kj}(\theta_{\min}).$$

Enfin il existe une constante  $K_2 > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} |(1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n_0})} [(\partial g^n(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_k)(\partial g^n(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_j) \\ - (\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_k)(\partial g(t_i, \theta_{n_0}) / \partial \theta_j)]| \leq (K_2/n) \text{card } J_n(\theta_{n_0}) \\ \leq K_2 O(nr(n))/n. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne donc :

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n2} = 0. \blacklozenge$$

D'où le résultat du lemme 5.  $\clubsuit$

La proposition suivante a pour but de préciser le comportement asymptotique du deuxième terme de -3.1.1-.

**Proposition 6**

$$\begin{aligned}
& \text{P-p.s. } \lim_n \langle f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n = \\
& \quad \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle + L(\theta_{\min}) \delta_{j,k}(1), \\
& \text{où } L(\theta_{\min}) = F'(\tau_{\min}) [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{\min})] [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial u - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial u] \\
& \text{et } \delta_{j,k}(1) = 1 \text{ si } j=k=1 \\
& \quad = 0 \text{ sinon}
\end{aligned}$$

**Démonstration**

Remarquons que dans le cas où  $j$  ou  $k$  sont différents de 1, on obtient facilement le résultat de la proposition 6. En effet, grâce à une transformation élémentaire, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned}
& \langle f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n - \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\
& = \langle f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j - \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\
& \quad + \langle f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j - \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\
& \quad + \langle g(\cdot, \theta_{\min}) - g^n(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\
& \quad + \langle g^n(\cdot, \theta_{\min}) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n \\
& \quad + \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n - \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j \rangle_n
\end{aligned}$$

et grâce aux propriétés de  $g^n$ ,  $g$  et  $f$ , on peut montrer que cette quantité tend P-p.s. vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

On ne traite donc que le cas délicat où  $j=k=1$ . Posons :

$$\langle f(\cdot) - g^n(\cdot, \theta_{n0}), \partial^2 g^n(\cdot, \theta_{n0}) / \partial \tau^2 \rangle_n = V_{n3} + V_{n4}$$

où

$$V_{n3} = (1/n) \sum_{i \in I_n(\theta_{n0})} [f(t_i) - g(t_i, \theta_{n0})] (\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

$$V_{n4} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [f(t_i) - g^n(t_i, \theta_{n0})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2).$$

On étudie séparément le comportement asymptotique de ces deux termes.

**Lemme 6**

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n3} = \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 \rangle.$$

### **Démonstration**

Par une transformation élémentaire on obtient:

$$\begin{aligned} V_{n3} = & (1/n) \sum_{i=1, n} [ f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) \\ & - (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [ f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) \\ & + (1/n) \sum_{i \in I_n(\theta_{n0})} [ g(t_i, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{n0}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) \\ & + (1/n) \sum_{i \in I_n(\theta_{n0})} [ f(t_i) - g(t_i, \theta_{n0}) ] [ ( \partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2 ) - ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) ]. \end{aligned}$$

\* Le théorème 1-chap I- entraîne que : P-p.s.

$$\lim_n (1/n) \sum_{i=1, n} [ f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) = \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 \rangle. \clubsuit$$

\* En vertu de la remarque 1, il existe une constante S telle que :

$$\begin{aligned} | (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [ f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) | & \leq S \text{ card } J_n(\theta_{n0}) / n \\ & \leq S O(nr(n)) / n. \end{aligned}$$

On en déduit alors que ce terme tend P-p.s. vers zéro quand n tend vers l'infini .♣

\* L'hypothèse  $A_5$  et la formule des accroissements finis entraînent l'existence d'une constante  $T \geq 0$  telle que :

$$| g(t_i, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{n0}) | \leq T \| \theta_{\min} - \theta_{n0} \|$$

Ce qui nous donne la majoration suivante :

$$\begin{aligned} | (1/n) \sum_{i \in I_n(\theta_{n0})} [ g(t_i, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{n0}) ] ( \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 ) | \\ \leq K T \| \theta_{\min} - \theta_{n0} \| (1/n) \text{card } I_n(\theta_{n0}) \\ \leq K T \| \theta_{\min} - \theta_{n0} \| \end{aligned}$$

et comme P-p.s.  $\lim_n \theta_{n0} = \theta_{\min}$ , on en déduit alors la convergence P-p.s. du troisième terme de  $V_{n3}$  vers zéro .♣

\* Enfin il découle de la remarque 1 que : P-p.s.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall i \in I_n(\theta_{n0}) |(\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2) - (\partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \tau^2)| \leq \varepsilon.$$

A partir de ce résultat on peut majorer le dernier terme de  $V_{n3}$  par  $K\varepsilon$  pour tout  $n \geq N$  .\*

Par conséquent :

$$P\text{-p.s. } \lim_n V_{n3} = \langle f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{\min}), \partial^2 g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \tau^2 \rangle. \clubsuit$$

### Lemme 7

$$P\text{-p.s. } \lim_n V_{n4} = F'(\tau_{\min}) [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{\min})] [\partial g_2(\theta, \xi) / \partial u - \partial g_1(\theta, \xi) / \partial u].$$

### Démonstration

Par une transformation élémentaire on obtient :

$$V_{n4} = \sum_{i=1,5} S_{ni}$$

où

$$S_{n1} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [f(t_i) - f(\tau_{\min})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

$$S_{n2} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [g(t_i, \theta_{n0}) - g^n(t_i, \theta_{n0})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

$$S_{n3} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [g(t_i, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{n0})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

$$S_{n4} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [g(\tau_{\min}, \theta_{\min}) - g(t_i, \theta_{n0})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

$$S_{n5} = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{n0})] (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2)$$

\* Comme P-p.s.  $\lim_n \tau_{n0} = \tau_{\min}$ ,  $\lim_n r(n) = 0$  et que  $f$  est une fonction continue alors:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall i \in J_n(\theta_{n0}) |f(t_i) - f(\tau_{\min})| \leq \varepsilon$$

et comme  $|\partial^2 g^n(\cdot, \cdot) / \partial \tau^2| < K/r(n)$ , on obtient alors la majoration suivante:

$$|S_{n1}| \leq K [ \text{card} J_n(\theta_{n0}) / (nr(n)) ] \varepsilon.$$

En vertu du fait que  $\text{card}J_n(\theta_{n0}) = O(nr(n))$ , on en déduit que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n S_{n1} = 0. \blacklozenge$$

\* La proposition 1 entraîne l'existence d'une constante  $H$  telle que :

$$|S_{n2}| \leq K [ \text{card}J_n(\theta_{n0}) / (nr(n)) ] H r(n)$$

et donc :

$$\text{P-p.s. } \lim_n S_{n2} = 0. \blacklozenge$$

\* En ce qui concerne  $S_{n3}$ , on utilise le fait que, d'une part pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,

$$|g(t, \theta_{\min}) - g(t, \theta_{n0})| \leq T \|\theta_{\min} - \theta_{n0}\|,$$

où  $T$  est une constante, et d'autre part  $\text{P-p.s. } \lim_n \theta_{n0} = \theta_{\min}$ , ce qui nous permet de conclure que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n S_{n3} = 0. \blacklozenge$$

\* comme  $g(\cdot, \theta_{\min})$  est une fonction continue, alors une méthode identique à celle utilisée pour  $S_{n1}$  nous permet d'avoir le résultat suivant :

$$\text{P-p.s. } \lim_n S_{n4} = 0. \blacklozenge$$

\* Enfin, seul le comportement de  $S_{n5}$  est délicat. On étudie pour cela le comportement de :

$$T_n = (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} (\partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \tau^2) = \int_{\tau_{n0-r}, \tau_{n0+r}} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial \tau^2) dF_n(t).$$

Posons :

$$T'_n = \int_{\tau_{n0-r}, \tau_{n0+r}} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial \tau^2) dF(t).$$

Or  $\forall t \in ]\tau_{n_0-r}, \tau_{n_0+r}[$ ,  $g^n(t, \theta_{n_0}) = h^{r(n)}(t - \tau_{n_0}, \xi_{n_0})$ , ce qui entraîne que :

$$\partial^2 g^n(t, \theta_{n_0}) / \partial \tau^2 = \partial^2 h^{r(n)}(t - \tau_{n_0}, \xi_{n_0}) / \partial t^2 = \partial^2 g^n(t, \theta_{n_0}) / \partial t^2.$$

On énonce les résultats intermédiaires suivants :

**Lemme 8**

$$\lim_n T'_n - T_n = 0$$

**Démonstration**

On remarque que par rapport à  $t$ , la fonction  $g^n$  est un polynôme, donc  $g^n$  est indéfiniment dérivable par rapport à  $t$ . On obtient, par intégration par parties :

$$T_n = [(\partial^2 h^{r(n)}(r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) F_n(\tau_{n_0} + r(n)) - (\partial^2 h^{r(n)}(-r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) F_n(\tau_{n_0} - r(n))] \\ - \int_{]\tau_{n_0-r}, \tau_{n_0+r}[} (\partial^3 h^{r(n)}(t - \tau_{n_0}, \xi_{n_0}) / \partial t^3) F_n(t) dt.$$

$$T'_n = [(\partial^2 h^{r(n)}(r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) F(\tau_{n_0} + r(n)) - (\partial^2 h^{r(n)}(-r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) F(\tau_{n_0} - r(n))] \\ - \int_{]\tau_{n_0-r}, \tau_{n_0+r}[} (\partial^3 h^{r(n)}(t - \tau_{n_0}, \xi_{n_0}) / \partial t^3) F(t) dt.$$

Donc

$$T_n - T'_n = (\partial^2 h^{r(n)}(r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) [F_n(\tau_{n_0} + r(n)) - F(\tau_{n_0} + r(n))] \\ - (\partial^2 h^{r(n)}(-r(n), \xi_{n_0}) / \partial t^2) [F_n(\tau_{n_0} - r(n)) - F(\tau_{n_0} - r(n))] \\ - \int_{]\tau_{n_0-r}, \tau_{n_0+r}[} (\partial^3 h^{r(n)}(t - \tau_{n_0}, \xi_{n_0}) / \partial t^3) [F_n(t) - F(t)] dt.$$

D'après l'hypothèse  $A_4$  et la définition de  $h^{r(n)}$ , on obtient la majoration suivante :

$$|T_n - T'_n| \leq 2Kr(n) \varepsilon_n + K\varepsilon_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\lim_n T_n - T'_n = 0. \blacktriangleleft$$

**Lemme 2**

$$\lim_n T'_n = F'(\tau_{\min}) [ \partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t ].$$

**Démonstration**

Posons  $\mathcal{A} = ]0, 1[$ ,

$\mathcal{D}$  : l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact contenu dans  $\mathcal{A}$ .

On montre qu'au sens des distributions,  $\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2$  converge vers  $[\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t]$ .

En effet, soit  $\varphi$  un élément quelconque de  $\mathcal{D}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= - \int_{[0,1]} (\partial g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{[0,1]} g^n(t, \theta_{n0}) \varphi''(t) dt. \end{aligned}$$

Or comme  $\lim_n \theta_{n0} = \theta_{\min}$  et que pour tout  $t$  élément de  $[0, 1]$  et pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned} |g^n(t, \theta) - g(t, \theta)| &\leq H r(n) \\ \text{et } |g^n(t, \theta)| &\leq K, \end{aligned}$$

où  $H$  et  $K$  sont des constantes, alors le théorème de Lebesgue entraîne que :

$$\lim_n \int_{[0,1]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt = \int_{[0,1]} g(t, \theta_{\min}) \varphi''(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \int_{[0,1]} g(t, \theta_{\min}) \varphi''(t) dt &= \int_{[0, \tau_{\min}]} g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) \varphi''(t) dt \\ &\quad + \int_{[\tau_{\min}, 1]} g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) \varphi''(t) dt. \end{aligned}$$

Par des intégrations par parties dans le sens inverse, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,1]} g(t, \theta_{\min}) \varphi''(t) dt \\
&= \left[ g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) \varphi'(t) \right]_{[0, \tau_{\min}]} - \int_{[0, \tau_{\min}]} (\partial g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t) \varphi'(t) dt \\
&\quad + \left[ g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) \varphi'(t) \right]_{[\tau_{\min}, 1]} - \int_{[\tau_{\min}, 1]} (\partial g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t) \varphi'(t) dt \\
&= \left[ (-\partial g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t) \varphi(t) \right]_{[0, \tau_{\min}]} + \int_{[0, \tau_{\min}]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&\quad + \left[ (-\partial g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t) \varphi(t) \right]_{[\tau_{\min}, 1]} + \int_{[\tau_{\min}, 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&= \left[ \partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t \right] \varphi(\tau_{\min}) + \int_{[0,1]} (\partial^2 g(t, \theta_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= \int_{[0, \tau_{n0} - r(n)]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&\quad + \int_{[\tau_{n0} + r(n), 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&\quad + \int_{[\tau_{n0} - r(n), \tau_{n0} + r(n)]} (\partial^2 h^{r(n)}(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

On étudie séparément le comportement asymptotique de ces trois intégrales.

\* Le théorème de la convergence dominée entraîne que :

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{[0, \tau_{n0} - r(n)]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= \int_{[0, \tau_{\min}]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
\text{et } \lim_n \int_{[\tau_{n0} + r(n), 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= \int_{[\tau_{\min}, 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or} \\
\int_{[\tau_{n0} - r(n), \tau_{n0} + r(n)]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= \int_{[0,1]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&\quad - \int_{[0, \tau_{n0} - r(n)]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\
&\quad - \int_{[\tau_{n0} + r(n), 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{n0}, \xi_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{[\tau_{n0}-r(n), \tau_{n0}+r(n)]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt &= [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] \varphi(\tau_{\min}) \\ &+ \int_{[0,1]} (\partial^2 g(t, \theta_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\ &- \int_{[0, \tau_{\min}]} (\partial^2 g_1(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt \\ &- \int_{[\tau_{\min}, 1]} (\partial^2 g_2(t - \tau_{\min}, \xi_{\min}) / \partial t^2) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $\varphi$  élément de  $\mathfrak{D}$ , on a :

$$\lim_n \int_{[\tau_{n0}-r(n), \tau_{n0}+r(n)]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi(t) dt = [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] \varphi(\tau_{\min}).$$

On suppose que  $n$  est suffisamment grand pour que l'intervalle  $[\tau_{n0}-r(n), \tau_{n0}+r(n)]$  soit contenu dans un sous ensemble  $[a, b]$  de  $\mathfrak{A}$ .

Soit alors  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{D}$  qui converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $F'$ . Par une transformation élémentaire, on obtient :

$$T'_n - [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] F'(\tau_{\min}) = I_{kn1} + I_{kn2} + I_{kn3},$$

où

$$\begin{aligned} I_{kn1} &= \int_{[\tau_{n0}-r(n), \tau_{n0}+r(n)]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) [F'(t) - \varphi_k(t)] dt \\ I_{kn2} &= \int_{[\tau_{n0}-r(n), \tau_{n0}+r(n)]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi_k(t) dt - \\ &[\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] \varphi_k(\tau_{\min}) \end{aligned}$$

$$I_{kn3} = [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] [\varphi_k(\tau_{\min}) - F'(\tau_{\min})].$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } |I_{kn1}| &\leq \|F' - \varphi_k\| (K/r(n)) (2r(n)) \\ &\leq (2K) \|F' - \varphi_k\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } |I_{kn3}| &\leq |\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t| \|F' - \varphi_k\| \\ &\leq (2K) \|F' - \varphi_k\|. \end{aligned}$$

Comme la suite  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $F'$ , on en déduit alors que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} / \forall k \geq K, |I_{kn1}| \leq \varepsilon/3, |I_{kn3}| \leq \varepsilon/3.$$

En ce qui concerne  $I_{kn2}$ , on sait d'après ce qui précède que pour tout  $k$  fixé :

$$\lim_n \int_{[\tau_{n0-r(n)}, \tau_{n0+r(n)}]} (\partial^2 g^n(t, \theta_{n0}) / \partial t^2) \varphi_k(t) dt = [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] \varphi_k(\tau_{\min}).$$

On en déduit alors que pour tout  $k$  fixé tel que  $k \geq K$  :

$$\lim_n I_{kn2} = 0.$$

Ceci entraîne que pour tout  $k$  fixé tel que  $k \geq K$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |I_{kn2}| \leq \varepsilon/3.$$

D'où le résultat du lemme 9. ♣

Les lemmes 8 et 9 ont pour conséquence le résultat suivant :

$$\lim_n T_n = [\partial g_2(0, \xi_{\min}) / \partial t - \partial g_1(0, \xi_{\min}) / \partial t] F'(\tau_{\min}).$$

On en déduit alors que :

$$P\text{-p.s. } \lim_n S_{n5} = F'(\tau_{\min}) [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{\min})] [\partial g_2(0, \xi) / \partial u - \partial g_1(0, \xi) / \partial u]. \clubsuit$$

Par conséquent :

$$P\text{-p.s. } \lim_n V_{n4} = F'(\tau_{\min}) [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{\min})] [\partial g_2(0, \xi) / \partial u - \partial g_1(0, \xi) / \partial u]. \clubsuit$$

### Remarque

\* On peut retrouver ce résultat par une méthode analytique en considérant la forme polynomiale de  $g^n$  définie dans §II. En effet :

$$T_n = \left( \frac{\partial^2 g_1(-r(n), \xi_{n0})}{\partial u^2} \right) [\text{card } J_n(\theta_{n0}) / n] \\ + \sum_{j=1,3} [(2+j)(1+j) (a_{rj}(\xi_{n0})/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} (t_i - \tau_{n0} + r(n))^j]$$

On peut montrer facilement que le premier terme de  $T_n$  tend vers zéro, et que d'une part :

$$\lim_n [1/(r(n))^{j+1}] \int_{\tau_{n0}-r, \tau_{n0}+r} (t - \tau_{n0} + r(n))^j dF_n(t) = 2^{(j+1)} F'(\tau_{\min}) / (j+1),$$

et que d'autre part :

$$P\text{-p.s. } \lim_n a_{r1}(\xi_{n0})(r(n))^2 = (1/4) (\partial g_2(0, \xi_{\min})/\partial u - \partial g_1(0, \xi_{\min})/\partial u)$$

$$P\text{-p.s. } \lim_n a_{r2}(\xi_{n0})(r(n))^3 = (-1/16) (\partial g_2(0, \xi_{\min})/\partial u - \partial g_1(0, \xi_{\min})/\partial u)$$

$$P\text{-p.s. } \lim_n a_{r3}(\xi_{n0})(r(n))^4 = 0.$$

On obtient alors:

$$P\text{-p.s. } \lim_n S_{n5} = F'(\tau_{\min}) [f(\tau_{\min}) - g(\tau_{\min}, \theta_{\min})] [\partial g_2(0, \xi)/\partial u - \partial g_1(0, \xi)/\partial u]. \clubsuit$$

\* Cette limite est nulle dans le où le modèle  $\mathcal{M}$  est adéquat - c.a.d pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$   $f(t) = g(t, \theta_{\min})$  - ou dans le cas où il n y a pas de rupture - c.a.d  $\partial g_1(0, \xi)/\partial u = \partial g_2(0, \xi)/\partial u$ .  $\clubsuit$

Enfin le lemme suivant permet de préciser le comportement asymptotique du troisième terme de -3.1.1.-.

### Lemme 10

$$P\text{-p.s. } \lim_n \langle \partial^2 g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j, e. \rangle_n = 0.$$

### Démonstration

Posons :

$$\langle \partial^2 g^n(., \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j, e. \rangle_n = V_{n5} + V_{n6} + V_{n7} + V_{n8}$$

où :

$$\begin{aligned}
V_{n5} &= (1/n) \sum_{i=1,n} [ (\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) ] e_i \\
V_{n6} &= (1/n) \sum_{i=1,n} [ \partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j ] e_i \\
V_{n7} &= -(1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [ \partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j ] e_i \\
V_{n8} &= (1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} [ \partial^2 g^n(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j ] e_i
\end{aligned}$$

On montre que ces quatres termes tendent P-p.s. vers zéro quand n tend l'infini.

$$\begin{aligned}
* V_{n5} &= (1/n) \sum_{i \in I_n} [ (\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) ] e_i \\
&\quad + (1/n) \sum_{i \in J_n} [ (\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) ] e_i
\end{aligned}$$

Comme P-p.s.  $\lim_n \theta_{n0} = \theta_{\min}$ , il découle de la remarque 1 que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall i \in I_n \quad |(\partial^2 g(t_i, \theta_{n0}) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 g(t_i, \theta_{\min}) / \partial \theta_k \partial \theta_j)| \leq \varepsilon.$$

Les remarques 1 et 3 conduisent alors à la majoration suivante :

$$\text{P-p.s. } \forall n \geq N, |V_{n5}| \leq \varepsilon (1/n) \sum_{i=1,n} |e_i| + 2K(1/n) \sum_{i \in J_n} |e_i|.$$

L'inégalité de Schwarz entraîne donc que :

$$\begin{aligned}
|V_{n5}| &\leq \varepsilon [ (1/n) \sum_{i=1,n} |e_i| ] + 2K [ (\text{card} J_n / n)^{(1/2)} ( (1/n) \sum_{i \in J_n} e_i^2 )^{(1/2)} ] \\
&\leq \varepsilon [ (1/n) \sum_{i=1,n} |e_i| ] + 2K [ 2k\delta(n) + (1/n) ]^{(1/2)} [ (1/n) \sum_{i \in J_n} e_i^2 ]^{(1/2)}
\end{aligned}$$

La loi forte des grands nombres appliquée à  $\{ |e_i| \}_{i \in \mathbb{N}}$  et à  $\{ e_i^2 \}_{i \in \mathbb{N}}$ , et le fait que  $\lim_n \delta(n) = 0$  entraînent que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n5} = 0. \spadesuit$$

\* En vertu du théorème 3 -chap I- et de la remarque 1, on a :

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n6} = 0. \spadesuit$$

\* La remarque 1 nous permet de faire la majoration suivante :

$$|V_{n7}| \leq K(1/n) \sum_{i \in J_n(\theta_{n0})} |e_i|$$

Un raisonnement identique à celui utilisé pour  $V_{n5}$  conduit à :

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n7} = 0. \spadesuit$$

Ainsi le résultat du lemme 10 est acquis si on démontre la proposition suivante qui constitue la difficulté principale.

### Proposition 7

$$\text{P-p.s. } \lim_n V_{n8} = 0.$$

### Démonstration

On ne traite ici que le seul cas délicat  $k = j = 1$ , les autres cas peuvent se traiter facilement à partir des lemmes précédents.

On utilise la structure polynomiale de  $g^n(\cdot, \cdot)$  telle qu'elle est définie dans le paragraphe II par :

$$\forall t \in ]\tau - r(n), \tau + r(n)[, \forall \theta \in \Theta, \theta = (\tau, \xi),$$

$$\begin{aligned} g^n(t, \theta) &= g_1(r(n), \xi) + (t - \tau + r(n)) (\partial g_1(-r(n), \xi) / \partial u) \\ &\quad + (t - \tau + r(n))^2 (\partial^2 g_1(-r(n), \xi) / \partial^2 u) + \sum_{i=1,3} (t - \tau + r(n))^{2+i} a_{ri}(\xi) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que :

$$\begin{aligned} V_{n8} &= (1/n) [ \partial^2 g_1(-r(n), \xi) / \partial^2 u ] [ \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} e_j ] \\ &\quad + (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} [ \sum_{i=1,3} (2+i)(1+i) (t_j - \tau + r(n))^i a_{ri}(\xi_{n0}) ] e_j \end{aligned}$$

Un développement de  $V_{n8}$  conduit, par des transformations élémentaires, à l'expression suivante, où les quantités  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes numériques :

$$\begin{aligned}
V_{n8} = & [ \partial^2 g_1(-r(n), \xi) / \partial^2 u ] [ (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} e_j ] \\
& + \sum_{i=1,3} [ a_i a_{ri}(\xi_{n0}) (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0})^i e_j ] \\
& + \sum_{i=1,3} [ b_i (r(n))^{i-1} a_{ri}(\xi_{n0}) (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0}) e_j ] \\
& + b_3 r(n) a_{r3}(\xi_{n0}) (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0})^2 e_j \\
& + \sum_{i=1,3} a_i (r(n))^i a_{ri}(\xi_{n0}) (1/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} e_j
\end{aligned}$$

### Lemme 11

$$P\text{-p.s. } \lim_n [ 1/(nr(n)) ] \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} e_j = 0.$$

Avant de démontrer ce lemme, on rappelle d'abord un résultat de [12] -théorème B- sur les sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

### Rappel : [12]

Soit  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers croissante telle que :

- \*  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \alpha_n \leq n.$
- \*  $\lim_n \alpha_n / (\log n) = 0.$
- \*  $\lim_n [\log(n/\alpha_n)] / [\log(\log n)] = \infty.$

### Théorème B

Soient  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et  $S_n = \sum_{i=1, n} X_i$ , telles que :

- i)  $E(X_1) = 0$  et  $E(X_1^2) = 1.$
- ii)  $\exists t_0 > 0 / \forall t' \mid t' \mid < t_0 \quad \Phi(t) = E(\exp t X_1) < \infty.$

Alors

$$\begin{aligned}
& P\text{-p.s. } \lim_N \max_{0 \leq n \leq N - \alpha_N} [S_{n+\alpha_N} - S_n] / [2\alpha_N \log(N/\alpha_N)]^{(1/2)} = 1 \\
& \text{et } P\text{-p.s. } \lim_N \max_{0 \leq n \leq N - \alpha_N} \max_{0 \leq k \leq \alpha_N} [S_{n+k} - S_n] / [2\alpha_N \log(N/\alpha_N)]^{(1/2)} = 1.
\end{aligned}$$

Signalons qu'il y a une inexactitude dans l'énoncé du théorème B donné dans [12] en ce qui concerne les hypothèses faites sur la suite  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

En effet l'hypothèse  $[\{\alpha_n/n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante ] ne peut être vérifiée compte tenu des autres hypothèses.

### Démonstration du lemme 11

On sait que  $\text{card } J_n(\theta_{n0}) \leq [2knr(n)] + 1$ , où  $[.]$  désigne la partie entière.

On pose :

$$\alpha_n = [2knr(n)] + 1 \equiv O(nr(n))$$

$$Z_n = \text{Max}_{0 \leq i \leq n - \alpha_n} \text{Max}_{0 \leq k \leq \alpha_n} | \sum_{j=1, k} (e_{i+j}/\sigma) |$$

$$A_n = nr(n) / (2\alpha_n \log(n/\alpha_n))^{(1/2)}$$

Les hypothèses du théorème B cité ci dessus, sont vérifiées grâce au choix de la suite  $\{r(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et aux hypothèses faites sur la suite aléatoire  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

On a alors d'après ce théorème :

$$\text{P-p.s. } \lim_n [ A_n / ( nr(n) ) ] Z_n = 1.$$

Le choix de  $r(n)$  entraîne que :

$$\lim_n 1/A_n = 0.$$

On en déduit alors que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n (1/nr(n)) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} e_j = 0. \clubsuit$$

La remarque 3 et le lemme 11 entraînent que P-p.s. le premier et le dernier terme de  $V_{n8}$  convergent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. ♣

**Lemme 12**

Pour tout  $i$  élément de  $\{1,2,3\}$ ,

$$P\text{-p.s. } \lim_n (1 / [n (r(n))^{1+i}]) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0})^i e_j = 0$$

**Démonstration**

On pose  $\{t'_j\}_{j \in J_n(\theta_{n0})}$  la suite ordonnée par ordre croissant de la suite  $\{t_j\}_{j \in J_n(\theta_{n0})}$ .

\* Si  $i = 1$  ou  $3$ , on remarque que la suite  $\{(t'_j - \tau_{n0})^i\}_{j \in J_n(\theta_{n0})}$  est une suite croissante, si on pose :

$$m = \min J_n(\theta_{n0}) \text{ et } M = \max J_n(\theta_{n0}),$$

on obtient alors par la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0})^i e_j &= \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t'_j - \tau_{n0})^i e_j \\ &= \sum_{j=m, M-1} [ \sum_{k=m, j} e_k ] [ (t'_j - \tau_{n0})^i - (t'_{j+1} - \tau_{n0})^i ] \\ &\quad + \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t'_M - \tau_{n0})^i e_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | (1 / [n (r(n))^{1+i}]) \sum_{j \in J_n(\theta_{n0})} (t_j - \tau_{n0})^i e_j | \\ \leq Z_n [ ( (t'_M - \tau_{n0})^i - (t'_m - \tau_{n0})^i ) + | (t'_M - \tau_{n0})^i | ] / [n (r(n))^{1+i}] \\ \leq Z_n [ 3(r(n))^i ] / [n (r(n))^{1+i}] \\ \leq 3 Z_n / [n r(n)]. \end{aligned}$$

D'après la démonstration du lemme 11, on en déduit alors le résultat souhaité. ♦

\* Dans le cas  $i = 2$ , après avoir effectué la transformation d'Abel, on majore séparément les termes pour lesquels  $t_j \leq \tau_{n0}$ , et ceux pour lesquels  $t_j \geq \tau_{n0}$ . On est conduit dans ce cas à une majoration par  $[4 Z_n / (nr(n))]$  qui permet de conclure de la même façon. ♦ 🍏

En vertu de ce lemme, on en déduit que P-p.s. les trois autres termes de  $V_{n8}$  convergent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. ♣

La proposition 7 est ainsi démontrée, ainsi que le lemme 16. ♣

Les lemmes 5 et 10 et la proposition 6 ont pour conséquence le résultat de la proposition 4. ♣

### III.2.2. Démonstration de la proposition 5

Soit  $m$  la plus petite valeur propre de  $K(\theta_{\min})$ . Comme  $K(\theta_{\min})$  est une matrice définie positive - $A_g$ -, alors  $m$  est strictement positive.

Soit  $X$  un élément de  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\|X\| = 1$  et soit  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < (m/2p)$ .

La proposition 4 entraîne que :

$$\text{P-p.s. } \exists N > 0 / \forall n \geq N, |{}^tX(K(\theta_{n0}) - K(\theta_{\min}))X| \leq \varepsilon \sum_{i,j=1,p} |X_i| |X_j|.$$

Dans ces conditions, on a :

$${}^tXK(\theta_{n0})X \geq {}^tXK(\theta_{\min})X - \varepsilon \sum_{i,j=1,p} |X_i| |X_j| \geq m - \varepsilon p \|X\| \geq m/2 > 0.$$

On en déduit immédiatement que pour  $\lambda = m/2$ , le résultat de la proposition 5 est obtenu. ♣

Le lemme 4, les propositions 4 et 5 et l'hypothèse  $A_g$  permettent de conclure que :

$$\text{P-p.s. } \lim_n \|n^{(1/2)}(\theta'_n - \theta_n)\| = 0. \quad \clubsuit$$

### III.3. Etude de $\{ n^{(1/2)} (\theta'_n - \theta_{nm}) \}_n$ et de $\{ n^{(1/2)} (\theta_n - \theta_{nm}) \}_n$

On pose  $G = K(\theta_{\min})$  et  $\Lambda = ((\sigma^2 < \partial g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_i, \partial g(\cdot, \theta_{\min}) / \partial \theta_j >))_{i,j}$ .

#### Proposition 8

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$

au sens de la convergence en loi,

$n^{(1/2)} (\theta'_n - \theta_{nm})$  converge vers  $N(0, G^{-1} \Lambda G^{-1})$ .

#### Démonstration

D'après le lemme 4 du chapitre I, si  $\Theta$  est convexe et si  $\theta(y)$  est une application mesurable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\Theta$ , alors il existe une application mesurable  $\tilde{\theta}_n(y)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\Theta$  telle que pour tout  $i$  élément de  $\{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned} < \partial g^n(\cdot, \theta(y)) / \partial \theta_i, y \cdot - g^n(\cdot, \theta(y)) >_n - < \partial g^n(\cdot, \theta_{nm}) / \partial \theta_i, y \cdot - g^n(\cdot, \theta_{nm}) >_n = \\ & \sum_{j=1, p} (\theta_j(y) - \theta_{nmj}) [ < \partial^2 g^n(\cdot, \tilde{\theta}_n(y)) / \partial \theta_i \partial \theta_j, y \cdot - g^n(\cdot, \tilde{\theta}_n(y)) >_n \\ & \quad - < \partial g^n(\cdot, \tilde{\theta}_n(y)) / \partial \theta_i, \partial g^n(\cdot, \tilde{\theta}_n(y)) / \partial \theta_j >_n ] \end{aligned}$$

De plus pour chaque  $y$ ,  $\tilde{\theta}_n(y)$  appartient au segment de droite joignant  $\theta(y)$  et  $\theta_{nm}$ . On applique ce résultat au cas où  $y = X$  et  $\theta(y) = \theta'_n(y)$ , ceci est justifié car, comme P-p.s.  $\lim_n \theta'_n = \lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}$ , on peut donc se limiter à un sous ensemble convexe et compact de  $\Theta$  contenant  $\theta_{\min}$ . Donc P-p.s. il existe une application mesurable  $\tilde{\theta}_n$  telle que P-p.s.  $\tilde{\theta}_n$  appartient au segment de droite joignant  $\theta'_n$  et  $\theta_{nm}$  et vérifiant l'égalité précédente.

Or, comme  $\theta'_n$  est un estimateur des moindres carrés, alors :

$$\text{P-p.s. } \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N \quad < \partial g^n(\cdot, \theta'_n) / \partial \theta_i, X \cdot - g^n(\cdot, \theta'_n) >_n = 0,$$

et par définition même de  $\theta_{nm}$ , on a aussi :

$$\forall n > N \quad \langle \partial g(\cdot, \theta_{nm}) / \partial \theta_i, f(\cdot) - g(\cdot, \theta_{nm}) \rangle_n = 0.$$

Si on pose :  $G_n = (( \langle \partial g^n(\cdot, \tilde{\theta}(y)) / \partial \theta_i, \partial g^n(\cdot, \tilde{\theta}(y)) / \partial \theta_j \rangle_n$   
 $- \langle \partial^2 g^n(\cdot, \tilde{\theta}(y)) / \partial \theta_i \partial \theta_j, X \cdot g^n(\cdot, \tilde{\theta}(y)) \rangle_n )_{i,j}$

alors par une transformation élémentaire on obtient : P-p.s.  $\forall n > N, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned} (n^{(1/2)} G_n(\theta'_n - \theta_{nm}))_i &= n^{(1/2)} \langle \partial g(\cdot, \theta_{nm}) / \partial \theta_i, e \cdot \rangle_n \\ &\quad - n^{(1/2)} / (n) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j \\ &\quad + n^{(1/2)} / (n) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j \\ &\quad + n^{(1/2)} / (n) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) (f(t_j) - g^n(t_j, \theta_{nm})) \\ &\quad - n^{(1/2)} / (n) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) (f(t_j) - g(t_j, \theta_{nm})) \end{aligned}$$

Or, comme P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$ , on obtient par une démonstration identique à celle de la proposition 6 :

$$\text{P-p.s. } \lim_n G_n = G = K(\theta_{\min}). \clubsuit$$

Il nous reste à montrer alors que le deuxième membre de l'égalité précédente converge en loi vers la loi  $N(0, \Lambda)$ . On énonce pour cela les lemmes intermédiaires suivants :

**Lemme 13**

$n^{(1/2)} (\langle \partial g(\cdot, \theta_{nm}) / \partial \theta_i, e \cdot \rangle_n)_{i=1,p}$  converge en loi vers la loi  $N(0, \Lambda)$ .

Comme P-p.s.  $\lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}$ , alors le résultat de ce lemme découle immédiatement du théorème 4 - chap I. ♣

**Lemme 14**

*Au sens de la convergence en probabilité :*

$$\lim_n (1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) (f(t_j) - g^n(t_j, \theta_{nm})) = 0$$

$$\lim_n (1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) (f(t_j) - g(t_j, \theta_{nm})) = 0$$

**Démonstration**

L'hypothèse  $A_2$  et la remarque 1 permettent de majorer les deux termes par  $[(1/n^{(1/2)})(2knr(n)+1)2K^2] = o(n^{(1/2)}r(n))$  et comme  $\lim_n n(r(n))^{3/2} = 0$ , on en déduit alors le résultat du lemme 14. ♣

**Lemme 15**

*Au sens de la convergence en probabilité :*

$$\lim_n (1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j = 0$$

$$\lim_n (1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j = 0.$$

**Démonstration**

Il suffit de montrer que l'un des deux termes converge en probabilité vers zéro, la démonstration sera analogue pour le second. Pour cela, on utilise le fait que  $\theta_{nm}$  n'est pas aléatoire. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j]^2 &\leq (K/n) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} \mathbb{E} (e_j)^2 \\ &\leq K\sigma^2 \text{card}(J_n(\theta_{nm})) / n \\ &\leq K\sigma^2 O(nr(n)) / n. \end{aligned}$$

Un passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini entraîne que :

$(1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g^n(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j$  converge en moyenne quadratique, donc en probabilité, vers zéro.

D'une façon analogue, on obtient la convergence en probabilité de  $(1/n^{(1/2)}) \sum_{j \in J_n(\theta_{nm})} (\partial g(t_j, \theta_{nm}) / \partial \theta_i) e_j$  vers zéro.

D'où le résultat du lemme 15. ♣

Les trois lemmes précédents entraînent que :

$$\mathfrak{L}[\lim_n G_n n^{(1/2)}(\theta'_n - \theta_{nm})] = N(0, \Lambda). \clubsuit$$

Grâce à l'hypothèse  $A_8$ , on a :

$$\mathfrak{L}[\lim_n n^{(1/2)}(\theta'_n - \theta_{nm})] = N(0, G^{-1} \Lambda G^{-1}). \spadesuit \heartsuit$$

### **Théorème 3**

**Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$   
au sens de la convergence en loi,  
 $n^{(1/2)}(\theta_n - \theta_{nm})$  converge vers  $N(0, G^{-1} \Lambda G^{-1})$ .**

### **Démonstration**

On peut écrire :

$$n^{(1/2)}(\theta_n - \theta_{nm}) = n^{(1/2)}(\theta_n - \theta'_n) + n^{(1/2)}(\theta'_n - \theta_{nm}).$$

Le théorème 2 et la proposition 8 entraînent que :

$$\mathfrak{L}[\lim_n n^{(1/2)}(\theta_n - \theta_{nm})] = N(0, G^{-1} \Lambda G^{-1}). \spadesuit \heartsuit$$

### **III.4 Etude de la suite $\{H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$**

### **Théorème 4**

**Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$  :**  
 **$n^{(1/2)}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}]$  converge en loi vers la loi  $N(0, c)$  quand  $n$  tend vers l'infini.**

### Démonstration

On adapte la démonstration du théorème 4 -chap II-, faite dans le cas où il n'y a pas de rupture.

Nous allons montrer d'abord que  $n^{(1/2)} [ H'_n(\theta'_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ]$  converge en loi vers la loi  $N(0,c)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Comme : P-p.s.  $\lim_n n [ H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) ] = 0$  - lemme 3- on a :

$$\text{P-p.s. } \lim_n n^{(1/2)} [ H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) ] = 0,$$

par conséquent on obtiendra le résultat souhaité.

Par une tranformation élémentaire on a :

$$\begin{aligned} H'_n(\theta'_n) &= [ e. ]_n^2 + [ f(.) - g(.,\theta_{nm}) ]_n^2 + 2 \langle e., f(.) - g(.,\theta_{\min}) \rangle_n \\ &\quad + 2 \langle f(.) + e. - g(.,\theta_{nm}), g(.,\theta_{nm}) - g^n(.,\theta'_n) \rangle_n \\ &\quad + [ g(.,\theta_{nm}) - g^n(.,\theta'_n) ]_n^2 \\ &\quad + 2 \langle e., g(.,\theta_{\min}) - g(.,\theta_{nm}) \rangle_n. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} Z_i &= e_i^2 - \sigma^2 + 2 e_i ( f(t_i) - g(t_i, \theta_{\min}) ) \\ W_{n1} &= 2 n^{1/2} \langle f(.) + e. - g(.,\theta_{nm}), g(.,\theta_{nm}) - g^n(.,\theta'_n) \rangle_n \\ W_{n2} &= n^{1/2} [ g(.,\theta_{nm}) - g^n(.,\theta'_n) ]_n^2 \\ W_{n3} &= 2 n^{1/2} \langle e., g(.,\theta_{\min}) - g(.,\theta_{nm}) \rangle_n. \end{aligned}$$

On peut écrire alors :

$$n^{(1/2)} [ H'_n(\theta'_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm} ] = (1/n^{(1/2)}) \sum_{i=1,n} Z_i + W_{n1} + W_{n2} + W_{n3}.$$

Comme dans le cas sans rupture, on peut montrer d'une façon identique que, d'une part  $(1/n^{(1/2)}) \sum_{i=1,n} Z_{ni}$  converge en loi vers la loi  $N(0,c)$ , et que d'autre part  $W_{n3}$  converge en probabilité vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Il nous reste à montrer alors que  $W_{n1}$  et  $W_{n2}$  convergent en probabilité vers zéro. Enonçons pour cela les lemmes intermédiaires suivants :

**Lemme 16**

*$W_{n1}$  converge en probabilité vers zéro.*

**Démonstration**

$$\begin{aligned} \text{Posons } I_{n1} &= 2 n^{(1/2)} \langle f(\cdot) + e \cdot - g(\cdot, \theta_{nm}), g(\cdot, \theta_{nm}) - g^n(\cdot, \theta_{nm}) \rangle_n \\ \text{et } I_{n2} &= 2 n^{(1/2)} \langle f(\cdot) + e \cdot - g(\cdot, \theta_{nm}), g^n(\cdot, \theta_{nm}) - g^n(\cdot, \theta'_n) \rangle_n. \end{aligned}$$

On a alors :  $W_{n1} = I_{n1} + I_{n2}$ , on étudie séparément le comportement asymptotique de ces deux termes :

\* Etude de  $I_{n1}$  :

$$I_{n1} = 2 n^{(1/2)} / n \sum_{i \in J_n(\theta_{nm})} [ f(t_i) + e_i - g(t_i, \theta_{nm}) ] [ g(t_i, \theta_{nm}) - g^n(t_i, \theta_{nm}) ].$$

L'hypothèse  $A_1$ , la remarque 1 et la proposition 1 entraînent la majoration suivante:

$$| I_{n1} | \leq [ 2Hr(n) / n^{(1/2)} ] [ \sum_{i \in J_n(\theta_{nm})} (2K + | e_i | ) ]$$

où H et K sont des constantes positives, ce qui implique que :

$$| I_{n1} | \leq [ 2Hr(n) / n^{(1/2)} ] [ 2K(2knr(n) + 1) ] + 2Hr(n) [ (2knr(n)+1) ( \sum_{i=1, n} e_i^2 ) ]^{(1/2)}$$

L'application de la loi forte des grands nombres à  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et le choix de la suite  $\{r(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  permet de conclure la convergence presque sûre, donc en probabilité, de  $I_{n1}$  vers zéro. ♣

\* Etude de  $I_{n2}$ :

Un développement limité jusqu'à l'ordre deux entraine l'existence d'une fonction mesurable  $\tilde{\theta}_n$  telle que P-p.s.  $\tilde{\theta}_n$  appartient au segment de droite joignant  $\theta'_n$  et  $\theta_{nm}$  et vérifie :

$$g^n(.,\theta_{nm}) - g^n(.,\theta'_n) = t(\theta_{nm} - \theta'_n) (\partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_i)_{i=1,p} \\ + (1/2) t(\theta_{nm} - \theta'_n) ((\partial^2 g^n(.,\tilde{\theta}_n)/\partial\theta_i\partial\theta_j))_{i,j=1,p} (\theta_{nm} - \theta'_n).$$

$I_{n2}$  devient alors :

$$I_{n2} = 2 n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle f(.) + e.- g^n(.,\theta'_n), \partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_j \rangle_n)_{j=1,p} \\ + 2 n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle g^n(.,\theta'_n) - g(.,\theta_{nm}), \partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_j \rangle_n)_{j=1,p} \\ + n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle f(.) + e.- g(.,\theta_{nm}), \partial^2 g^n(.,\tilde{\theta}_n)/\partial\theta_i\partial\theta_j \rangle_n)_{i,j=1,p} (\theta_{nm} - \theta'_n).$$

Comme P-p.s.  $\langle f(.) + e.- g^n(.,\theta'_n), \partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_j \rangle_n = 0$ , on obtient alors : P-p.s.

$$I_{n2} = 2 n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle g^n(.,\theta'_n) - g(.,\theta_{nm}), \partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_j \rangle_n)_{j=1,p} \\ + n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle f(.) + e.- g(.,\theta_{nm}), \partial^2 g^n(.,\tilde{\theta}_n)/\partial\theta_i\partial\theta_j \rangle_n)_{i,j=1,p} (\theta_{nm} - \theta'_n).$$

De plus grâce au théorème 1, à la proposition 8 et aux majorations suivantes :

$$|g^n(.,\theta'_n) - g(.,\theta_{nm})| \leq |g^n(.,\theta'_n) - g(.,\theta'_n)| + |g(.,\theta'_n) - g(.,\theta_{nm})| \\ \leq Hr(n) + K\|\theta'_n - \theta_{nm}\|$$

on en déduit que :

$$P\text{-p.s. } \lim_n n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle g^n(.,\theta'_n) - g(.,\theta_{nm}), \partial g^n(.,\theta'_n)/\partial\theta_j \rangle_n)_{j=1,p} = 0.$$

En ce qui concerne le deuxième terme de  $I_{n2}$ , d'après la proposition 6 et le lemme 10, il est facile de vérifier que  $\langle f(.) + e.- g(.,\theta_{nm}), \partial^2 g^n(.,\tilde{\theta}_n)/\partial\theta_i\partial\theta_j \rangle_n$  converge presque sûrement vers une limite finie. De même le théorème 1 et la proposition 8 permettent de conclure que :

$$n^{(1/2)t}(\theta_{nm} - \theta'_n) (\langle f(.) + e.- g(.,\theta_{nm}), \partial^2 g^n(.,\tilde{\theta}_n)/\partial\theta_i\partial\theta_j \rangle_n)_{i,j=1,p} (\theta_{nm} - \theta'_n)$$

converge en probabilité vers zéro.

D'où la convergence en probabilité de  $I_{n2}$  vers zéro. ♣

Par conséquent  $W_{n1}$  converge en probabilité vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. 🍏

### Lemme 17

$W_{n2}$  converge en probabilité vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

### Démonstration

$$W_{n2} = n^{(1/2)} [ g(., \theta_{nm}) - g^n(., \theta'_n) ]_n^2$$

On peut majorer  $W_{n2}$  de la façon suivante :

$$W_{n2} \leq 2 n^{(1/2)} [ g(., \theta_{nm}) - g^n(., \theta_{nm}) ]_n^2 + 2 n^{(1/2)} [ g^n(., \theta_{nm}) - g^n(., \theta'_n) ]_n^2$$

Comme dans ce qui précède, nous aboutissons à la majoration suivante :

$$W_{n2} \leq 2 H^2 n^{(1/2)} (r(n))^2 + 2T n^{(1/2)} (\theta_{nm} - \theta'_n) (\theta_{nm} - \theta'_n)$$

où  $T$  et  $H$  sont des constantes positives. Ce qui nous permet d'obtenir facilement le résultat du lemme 17. 🍏

Les lemmes 16 et 17 ont pour conséquence le résultat du théorème 4. 🍏

### III.5 Choix du modèle

Comme dans le chapitre II, si on considère deux modèles approximatifs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  tels que :

$$\mathcal{M}_1 = \{ g_1(., \theta), \theta \in \Theta_1 \} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = \{ g_2(., \theta), \theta \in \Theta_2 \}.$$

On notera  $(.)_i$  toute quantité relative à  $\mathcal{M}_i$ ,  $i=1,2$ . On suppose que les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$  sont vérifiées pour les deux modèles  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et on fait en plus l'hypothèse suivante :

$$A_9. d^2 = [g_1(.,\theta_{1\min}) - g_2(.,\theta_{2\min})]^2 > 0.$$

On pose  $d_n^2 = [g_1(.,\theta_{1\min}) - g_2(.,\theta_{2\min})]_n^2$ .

### **Théorème 5**

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_9$  :

$(n^{1/2})(1/2d_n) [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - ( \Delta_{1nm} - \Delta_{2nm} ) ]$  converge en loi vers la loi  $N(0, \sigma^2)$ .

Ce résultat se démontre d'une façon identique que le théorème 5 du chapitre II. On peut envisager d'étudier le cas mixte : choix d'un modèle parmi un modèle de fonctions sans rupture et un modèle de fonctions présentant une rupture en utilisant la statistique  $T_n(.)$  définie comme dans le chapitre II par :

$$T_n( \Delta_{1nm} - \Delta_{2nm} ) = (n^{1/2})(1/2d_n) [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - ( \Delta_{1nm} - \Delta_{2nm} ) ].$$

Nous établissons dans le chapitre suivant un test de comparaison dont la statistique est obtenue à partir de  $T_n(.)$ . ♣



**CHAPITRE IV**

**TESTS**



## **INTRODUCTION**

Nous supposons observer  $n$  réalisations indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  d'un phénomène dépendant du temps, représenté par le modèle de régression défini comme dans le chapitre III par :

$$X_i = f(t_i) + e_i.$$

Soit  $\mathcal{M} = \{ g(t, \theta), t \in [0, 1], \theta \in \Theta \}$  une classe de fonctions. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les tests suivants :

- \* Test d'adéquation.
- \* Test de comparaison.
- \* Test du rapport des moindres carrés.

Nous appliquons ensuite ces tests à certains cas particuliers, à savoir le cas usuel où d'une part la fonction  $f$  est :

- une fonction parabolique,
- une fonction exponentielle,
- une fonction présentant une rupture

et d'autre part  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale  $N(0, \sigma^2)$ . Nous nous servons pour cela, des programmes que nous avons établis dans les annexes 2 et 3. Rappelons que ces programmes sont écrits en langage PASCAL.

Dans le premier paragraphe de ce chapitre nous établissons un résultat principal qui nous permet de construire, à l'aide des théorèmes 4 et 5 du chapitre III, les statistiques des tests d'adéquation et de comparaison.

Je tiens à signaler que dans les exemples numériques que nous avons cités dans ce chapitre, les observations  $e_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , issues d'une loi normale  $N(0, \sigma^2)$ , sont obtenues de la façon suivante :

On construit des simulations d'une loi normale  $N(0,1)$  à partir d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires proposé dans [1]. Ce générateur est défini par un algorithme congruentionnel mixte obtenu à partir de la suite récurrente :

$$Y(i+1) = (69.069 Y(i) + 1) \pmod{2^{32}}, \quad (*)$$

$$Y(0) = 3579.$$

A chaque itération le nombre aléatoire correspondant sur  $[0,1]$  est  $Y = Y(i)/2^{32}$ .

\* On construit donc deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  indépendantes et uniformément réparties sur  $[0,1]$ , à partir de ce générateur.

\* On utilisant la méthode de BOX et MULLER qui permet d'engendrer deux variables aléatoires indépendantes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  de loi  $N(0,1)$ , à partir de  $U_1$  et  $U_2$  par les formules suivantes :

$$\varepsilon_1 = (-2\ln U_1)^{1/2} \times \cos(2\pi U_2)$$

$$\varepsilon_2 = (-2\ln U_1)^{1/2} \times \sin(2\pi U_2)$$

On construit donc un échantillon  $\{U_i\}_i$  de taille  $(n/2)$ , d'une variable aléatoire  $U$  uniformément répartie sur  $[0,1]$  à partir du générateur (\*). La méthode de BOX et MULLER nous permet d'avoir un échantillon  $\{\varepsilon_i\}_{i=1,n}$  d'une variable aléatoire  $N(0,1)$ . Les variables aléatoires  $\{e_i\}_{i=1,n}$  sont alors obtenues en multipliant les  $\varepsilon_i$   $-i=1, \dots, n$  - par  $\sigma$ .

### **LE TUDE DE $[n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{min})]$**

On rappelle que :

$$\Delta_n(\theta) = \int_{[0,1]} (f(t) - g(t,\theta))^2 dF_n(t)$$

$$\Delta(\theta) = \int_{[0,1]} (f(t) - g(t,\theta))^2 dF(t).$$

Avant de faire cette étude on rappelle le résultat suivant :

**Rappel :**

Définition :

Etant donné une fonction réelle  $\alpha$ , définie et à variation bornée sur l'intervalle fermé borné  $[a,b]$  et une fonction  $f$  définie sur  $[a,b]$ , on appelle intégrale de STIELTJES de  $f$  par rapport à  $\alpha$ , le nombre, s'il existe, noté

$\int_{[a,b]} f(x)d\alpha(x)$ , ou  $\int_{[a,b]} f(x)\alpha(dx)$  et défini comme la limite de la somme  $\sum_{i=1,n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$ , où :

$a = x_0 \leq x_1 < \dots < x_n = b$  et  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,

lorsque  $\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$  tend vers zéro indépendamment des choix des  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Intégration par partie :

si  $\alpha$  est une fonction monotone sur  $[a,b]$ , on a la formule suivante :

$$(**) \int_{[a,b]} f(x)d\alpha(x) + \int_{[a,b]} \alpha(x)df(x) = [f(x)\alpha(x)]_{a,b} = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Cette formule est vraie si l'une des deux intégrales existe.

Si on pose  $h_\theta(t) = (f(t) - g(t,\theta))^2$ , il est clair que  $h_\theta(\cdot)$  est une fonction continue sur  $[0,1]$ . De plus comme pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $\Delta_n(\theta)$  et  $\Delta(\theta)$  existent, on peut alors appliquer la formule précédente (\*). On obtient donc :

$$\Delta_n(\theta) = \int_{[0,1]} h_\theta(t)dF_n(t) = [h_\theta(t)F_n(t)]_{0,1} - \int_{[0,1]} F_n(t)dh_\theta(t)$$

$$\Delta(\theta) = \int_{[0,1]} h_\theta(t)dF(t) = [h_\theta(t)F(t)]_{0,1} - \int_{[0,1]} F(t)dh_\theta(t).$$

Dans toute la suite on reprend les hypothèses du chapitre III. On fait en plus l'hypothèse suivante :

(a) :  $f$  est une fonction à variations bornées dans l'intervalle  $[0,1]$ .

Remarquons que, concrètement, cette hypothèse n'est nullement gênante dans les problèmes de régression.

### Proposition 1

$n^{1/2}(\Delta_n(\theta) - \Delta(\theta))$  converge uniformément par rapport à  $\theta$  vers zéro.

### Démonstration

Pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , d'après (\*\*), on a :

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\Delta_n(\theta) - \Delta(\theta)) &= n^{1/2} \int_{[0,1]} F(t) dh_\theta(t) - n^{1/2} \int_{[0,1]} F_n(t) dh_\theta(t) \\ &= \int_{[0,1]} n^{1/2} (F(t) - F_n(t)) dh_\theta(t). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $A_4$  on a :

Pour tout  $t$  élément de  $[0,1]$ ,  $|F(t) - F_n(t)| = o(r(n))$ , avec  $r(n) = n^{-\alpha}$  tel que  $2/3 < \alpha < 1$ .

On obtient alors la majoration suivante :

$$\forall \theta \in \Theta, |n^{1/2}(\Delta_n(\theta) - \Delta(\theta))| \leq n^{1/2} o(r(n)) \int_{[0,1]} |dh_\theta(t)|.$$

Le résultat de la proposition 1 est acquis si on montre que pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $\int_{[0,1]} |dh_\theta(t)| \leq K < \infty$ .

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ ,  $|\sum_{i=1,n}(h_{\theta}(t_i)-h_{\theta}(t_{i-1}))| \leq K$ , où  $\{t_i\}_{i=0,n}$  est une suite d'éléments de  $[0,1]$  telle que :

$$* 0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n = 1$$

$$* \lim_n \sup_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| = 0.$$

Or, pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$  on a :

$$\begin{aligned} h_{\theta}(t_i) - h_{\theta}(t_{i-1}) &= (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2 - (f(t_{i-1}) - g(t_{i-1}, \theta))^2 \\ &= [f(t_i) - g(t_i, \theta) + f(t_{i-1}) - g(t_{i-1}, \theta)] [f(t_i) - g(t_i, \theta) - f(t_{i-1}) + g(t_{i-1}, \theta)]. \end{aligned}$$

Compte tenu de la continuité de  $f$  et de  $g$  sur  $[0,1]$ , on a la majoration suivante :

$$|\sum_{i=1,n}(h_{\theta}(t_i) - h_{\theta}(t_{i-1}))| \leq K [\sum_{i=1,n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=1,n} |g(t_i, \theta) - g(t_{i-1}, \theta)|]$$

où  $K$  est une constante.

l'hypothèse (a) entraîne l'existence d'une constante  $M$  telle que :

$$\sum_{i=1,n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq M.$$

De plus d'après l'hypothèse  $A_6$ , on a pour tout  $\theta$  élément de  $\Theta$ , il existe une constante  $K$  telle que :

$$\forall t, t' \in [0,1] \quad |g(t, \theta) - g(t', \theta)| \leq K |t - t'|$$

Grâce au choix de la suite  $\{t_i\}_i$ , on obtient :

$$\sum_{i=1,n} |g(t_i, \theta) - g(t_{i-1}, \theta)| \leq K.$$

Par conséquent :

$$|\sum_{i=1,n}(h_{\theta}(t_i) - h_{\theta}(t_{i-1}))| \leq K.$$

Par un passage à la limite, on en déduit alors le résultat de la proposition 1. 🍏

**Théorème 1**

$$\lim_n n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{\min}) = 0.$$

**Démonstration**

Par définition, on a :

$$\Delta_{nm} = \Delta_n(\theta_{nm}) = \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta),$$

$$\Delta_{\min} = \Delta(\theta_{\min}) = \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta).$$

Or d'après la proposition 1, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall \theta \in \Theta, |n^{1/2}(\Delta_n(\theta) - \Delta(\theta))| \leq \varepsilon.$$

Ce qui entraîne donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \forall \theta \in \Theta, \quad n^{1/2}\Delta_n(\theta) &\leq n^{1/2}\Delta(\theta) + \varepsilon \\ \text{et } n^{1/2}\Delta(\theta) &\leq n^{1/2}\Delta_n(\theta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \forall \theta \in \Theta, \quad n^{1/2} \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta) &\leq n^{1/2} \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta) + \varepsilon \\ \text{et } n^{1/2} \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta) &\leq n^{1/2} \min_{\theta \in \Theta} \Delta_n(\theta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{\min})| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat du théorème 1. 🍏

## II. TEST D'ADEQUATION

Il consiste à tester l'hypothèse  $H_0 : \{ \Delta_{\min} = 0 \}$  - c.a.d  $\mathcal{M}$  est un modèle adéquat- contre  $H_1 : \{ \Delta_{\min} > 0 \}$ . Pour cela, on énonce le résultat suivant :

### Théorème 2

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$  et (a) :

$n^{(1/2)}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{\min}]$  converge en loi vers la loi  $N(0,c)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

### Démonstration

On a :

$$n^{(1/2)}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{\min}] = n^{(1/2)}[H_n(\theta_n) - \sigma^2 - \Delta_{nm}] + n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{\min}).$$

Comme  $\lim_n n^{1/2}(\Delta_{nm} - \Delta_{\min}) = 0$  -Théorème 1-, alors le résultat de ce théorème découle immédiatement du théorème 4 du chapitre III. 🍏

Ce théorème entraîne un test défini par la statistique suivante :

$$\mathfrak{A}_n = n^{(1/2)}[H_n(\theta_n) - \sigma^2] / (\mu_4 - \sigma^4)^{(1/2)}.$$

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_8$  et (a) et sous l'hypothèse  $H_0$ , la statistique  $\mathfrak{A}_n$  suit asymptotiquement une loi normale  $N(0,1)$ .

On considère le modèle de régression suivant :

$$X_i = f(t_i) + e_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

où :

- \* Les  $t_i, i=1, \dots, n$ , sont équidistants -  $t_i = i/n$  -.
- \*  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi normale centrées et de variance  $\sigma^2$ .

On sait que  $\mu_4 = 3 \sigma^4$ , ce qui entraîne que :

$$\mathfrak{A}_n = n^{(1/2)} [H_n(\theta_n) - \sigma^2] / (\sigma^2 \sqrt{2}).$$

Nous avons établi deux programmes d'adéquation dans l'annexe 3 permettant d'approcher le nuage  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  soit par un modèle  $\mathcal{M}_1$  soit par un modèle  $\mathcal{M}_2$  tels que :

$$\begin{aligned} * \mathcal{M}_1 &= \{g(t, \theta) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma\} \\ &\text{avec } \theta = {}^t(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \mathcal{M}_2 &= \{g(t, \theta) = \alpha + \beta_1(t - \tau)\mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) + \beta_2(t - \tau)\mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t)\} \\ &\text{avec } \theta = {}^t(\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2). \end{aligned}$$

Dans le cas d'une approximation par le modèle  $\mathcal{M}_2$ , l'estimateur de  $\tau$  est obtenu par le programme d'estimation donné dans l'annexe 2.

Ces deux programmes d'adéquation permettent de réaliser le test suivant :

$$\begin{aligned} &\text{tester } H_0 : \{ \Delta_{\min} = 0 \} \quad \circ \text{ modèle adéquat } \circ \\ &\text{contre } H_1 : \{ \Delta_{\min} > 0 \}. \end{aligned}$$

On utilise la statistique  $\mathfrak{A}_n$  qui, sous l'hypothèse  $H_0$ , suit une loi normale  $N(0,1)$ .

Pour un seuil de signification  $\alpha$  donné, on accepte l'hypothèse d'adéquation  $H_0$  si :

$$\mathfrak{A}_n \leq c_\alpha,$$

où  $c_\alpha = N^{-1}(1-\alpha)$  et où  $N(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normale  $N(0,1)$ .

## **EXEMPLES D'APPLICATION**

Dans les exemples suivants, nous allons faire les tests d'adéquation pour un seuil de signification  $\alpha$  fixé en faisant varier d'une part les simulations de la loi  $N(0;1)$  et d'autre part la variance  $\sigma^2$ , pour les fonctions suivantes que nous avons choisies d'une façon arbitraire :

$$* f_1(t) = t^2 - t + 1$$

$$* f_2(t) = \exp(2t)$$

$$* f_3(t) = \exp(t/2)$$

$$* f_4(t) = (1/2 - t)\mathbb{1}_{[0,1/2]}(t) + (t - 1/2)\mathbb{1}_{]1/2,1]}(t)$$

$$* f_5(t) = (1/2)(1/2 - t)\mathbb{1}_{[0,1/2]}(t) + (1/2)(t - 1/2)\mathbb{1}_{]1/2,1]}(t)$$

$$* f_6(t) = 0.4 - 0.3(t - 3/4)\mathbb{1}_{[0,3/4]}(t) + 0.6(t - 3/4)\mathbb{1}_{]3/4,1]}(t)$$

$$* f_7(t) = (1/2)(t - 1/2)\mathbb{1}_{[0,1/2]}(t) + (t - 1/2)\mathbb{1}_{]1/2,1]}(t)$$

$$* f_8(t) = (1/2)(t - 3/4)\mathbb{1}_{[0,3/4]}(t) + (t - 3/4)\mathbb{1}_{]3/4,1]}(t)$$

Prenons un seuil de signification  $\alpha = 5\%$  -  $c_\alpha = 1.645$  - et un échantillon de taille  $n=60$ . Les tableaux  $Ti.*$  correspondent au modèle issu de la fonction  $f_i$  et à des simulations différentes.

Pour des commodités d'exposition, nous ne présentons dans ce chapitre que quelques graphes explicatifs. Des graphes correspondants à d'autres simulations sont regroupés dans l'annexe 4.

**Exemple 1 : f est une fonction parabolique****TABLEAU 1.1 :  $f_1(t) = t^2 - t + 1$ .**

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.7 - 0.43(t - 33/60) & \text{si } t \leq 33/60 \\ 0.7 + 0.59(t - 33/60) & \text{si } t > 33/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 25.8$ on rejette $H_0$	$g(t, \theta) = 1.024t^2 - 1.02t + 1.003$ $\mathfrak{A}_n = -0.387$ on accepte $H_0$
$10^{-3}$ Figure 1.1	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.69 - 0.47(t - 8/15) & \text{si } t \leq 8/15 \\ 0.69 + 0.58(t - 8/15) & \text{si } t > 8/15 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 3.358$ on rejette $H_0$	$g(t, \theta) = 1.07t^2 - 1.07t + 1.01$ $\mathfrak{A}_n = -0.387$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure 1.2	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.69 - 1.05(t - 19/60) & \text{si } t \leq 19/60 \\ 0.69 + 0.35(t - 19/60) & \text{si } t > 19/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.950$ on accepte $H_0$	$g(t, \theta) = 1.24t^2 - 1.25t + 1.03$ $\mathfrak{A}_n = -0.387$ on accepte $H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.63 - 1.41(t - 19/60) & \text{si } t \leq 19/60 \\ 0.63 + 0.43(t - 19/60) & \text{si } t > 19/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.023$ on accepte $H_0$	$g(t, \theta) = 1.78t^2 - 1.79t + 1.10$ $\mathfrak{A}_n = -0.387$ on accepte $H_0$

**TABLEAU 1.2** :  $f_1(t) = t^2 - t + 1$ .

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.71 - 0.41(t - 34/60) & \text{si } t \leq 34/60 \\ 0.71 + 0.61(t - 34/60) & \text{si } t > 34/60 \end{cases}$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 20.74 \quad \text{on rejette } H_0$	$g(t, \theta) = 1.002t^2 - 1.006t + 1.002$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 9.21 \cdot 10^{-3} \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-3}$ Figure 1.3	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.70 - 0.40(t - 35/60) & \text{si } t \leq 35/60 \\ 0.70 + 0.64(t - 35/60) & \text{si } t > 35/60 \end{cases}$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 1.656 \quad \text{on rejette } H_0$	$g(t, \theta) = 1.007t^2 - 1.019t + 1.006$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 9.21 \cdot 10^{-3} \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-2}$ Figure 1.4	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.69 - 0.39(t - 38/60) & \text{si } t \leq 38/60 \\ 0.69 + 0.78(t - 38/60) & \text{si } t > 38/60 \end{cases}$ $\hat{\mathcal{A}}_n = -0.052 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 1.023t^2 - 1.063t + 1.020$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 9.21 \cdot 10^{-3} \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.77 - 1.04(t - 15/60) & \text{si } t \leq 15/60 \\ 0.77 + 0.05(t - 15/60) & \text{si } t > 15/60 \end{cases}$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 0.225 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 1.073t^2 - 1.199t + 1.063$ $\hat{\mathcal{A}}_n = 9.21 \cdot 10^{-3} \quad \text{on accepte } H_0$

**TABLEAU 1.3** :  $f_1(t) = t^2 - t + 1$ .

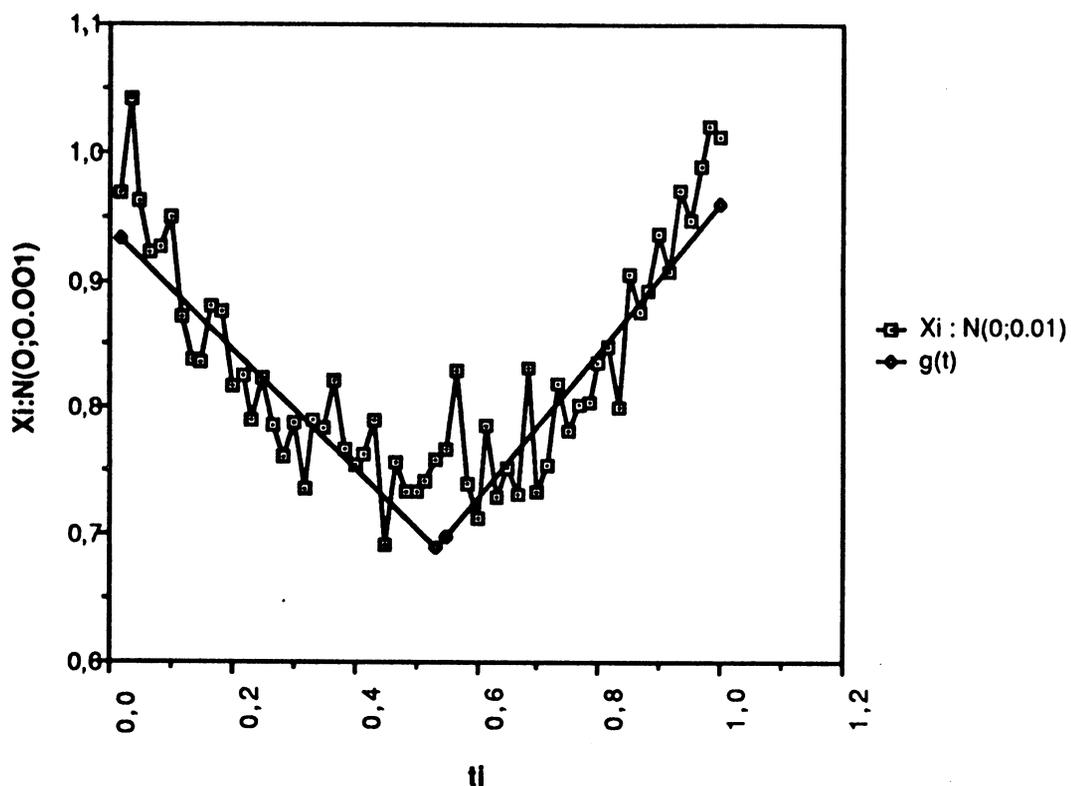
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$ Figure 1.5	$g(t, \theta) =$ $0.708 - 0.43(t - 33/60)$ si $t \leq 33/60$ $0.708 + 0.57(t - 33/60)$ si $t > 33/60$	$g(t, \theta) = 1.0001t^2 - 1.009t + 1.003$
	$\mathcal{A}_n = 18.48$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.6662$ on accepte $H_0$
$10^{-3}$ Figure 1.6	$g(t, \theta) =$ $0.703 - 0.53(t - 30/60)$ si $t \leq 30/60$ $0.703 + 0.48(t - 30/60)$ si $t > 30/60$	$g(t, \theta) = 1.0005t^2 - 1.028t + 1.011$
	$\mathcal{A}_n = 0.227$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.6662$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$	$g(t, \theta) =$ $0.69 - 0.64(t - 29/60)$ si $t \leq 29/60$ $0.69 + 0.42(t - 29/60)$ si $t > 29/60$	$g(t, \theta) = 1.001t^2 - 1.093t + 1.037$
	$\mathcal{A}_n = -0.859$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.6662$ on accepte $H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) =$ $0.66 - 0.92(t - 29/60)$ si $t \leq 29/60$ $0.66 + 0.29(t - 29/60)$ si $t > 29/60$	$g(t, \theta) = 1.005t^2 - 1.287t + 1.118$
	$\mathcal{A}_n = 0.225$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.6662$ on accepte $H_0$

**Remarque 1 :**

Le fait que  $\mathfrak{A}_n$  soit constante dans le cas d'une approximation par une parabole dans chaque tableau, est dû au fait que les  $e_i, i \in \mathbb{N}^*$ , sont de la forme  $e_i = \sigma \varepsilon_i$  comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre. Un calcul élémentaire montre en effet que le rapport  $(H_n(\theta_n) - \sigma^2) / \sigma^2$  est constant.

Remarquons aussi que d'une part, plus la variance  $\sigma^2$  est petite, plus la fonction parabolique approximative s'approche de la vraie fonction  $f$ . Ce qui est parfaitement normal. D'autre part, dès que la variance  $\sigma^2$  est supérieure à 0.1, les résultats du test d'adéquation sont intuitivement attendus. Les graphes que nous présentons dans la suite montrent bien cela.

### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

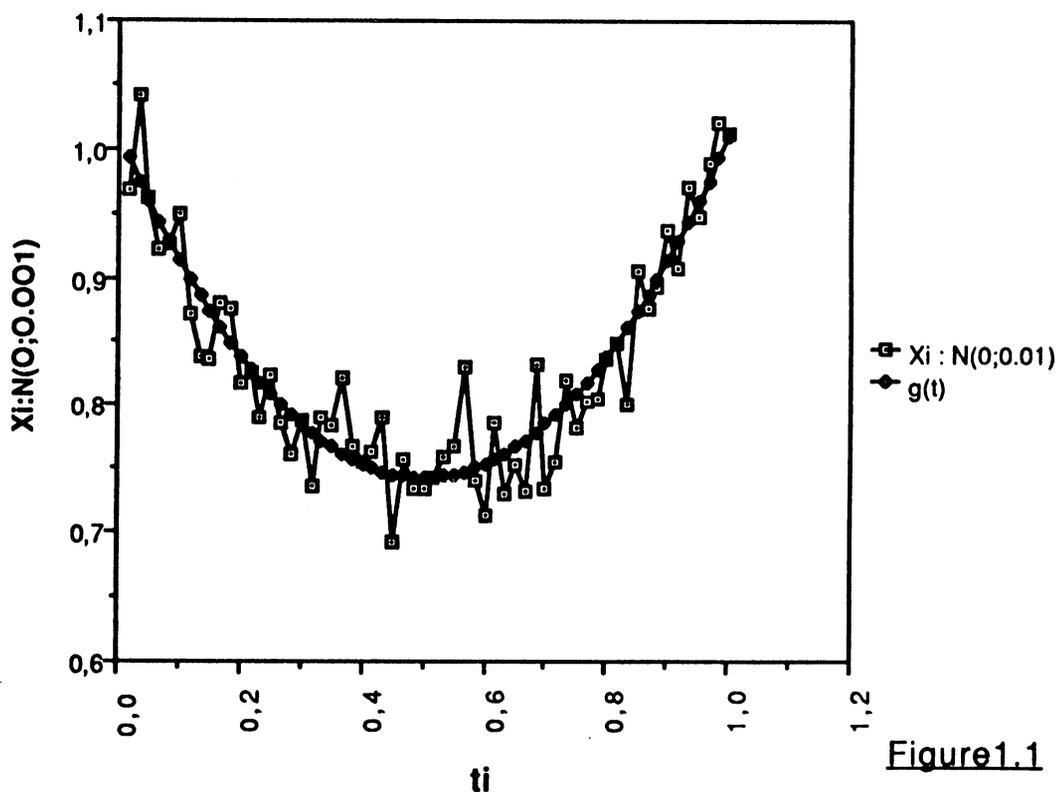
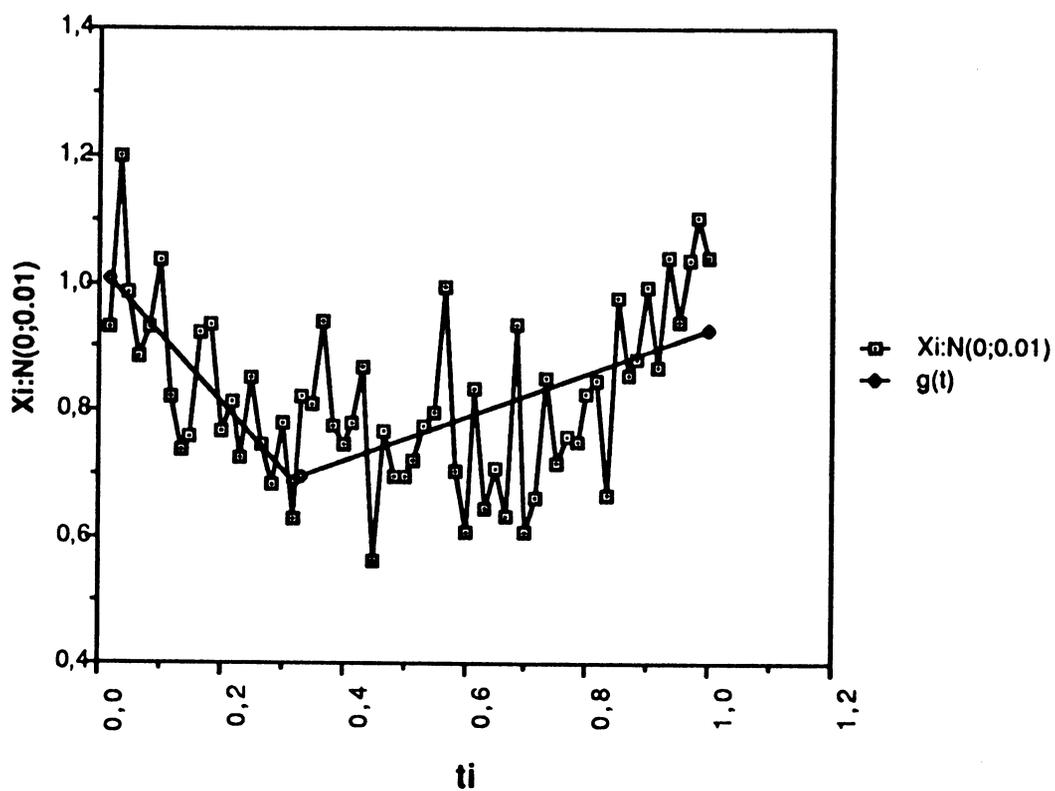


Figure 1.1

### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

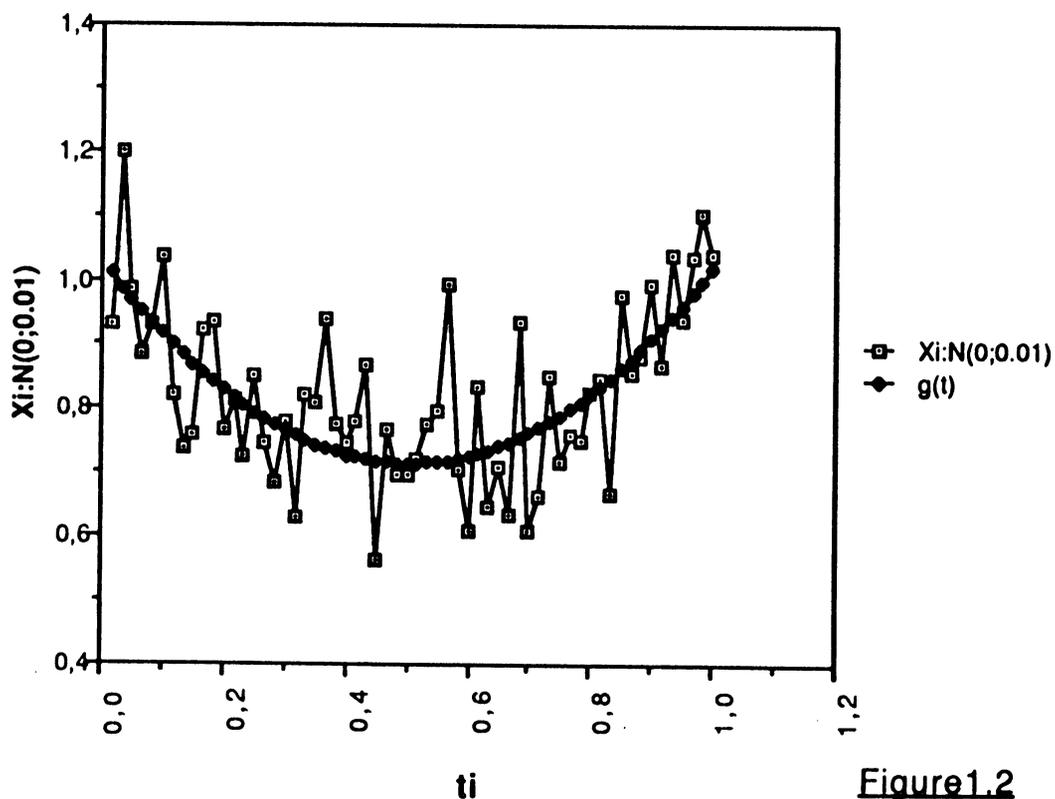


Figure 1.2

**Exemples 2 : f est une fonction exponentielle****TABLEAU 2.1 :  $f_2(t) = \exp(2t)$ .**

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-2}$ Figure2.1	$g(t, \theta) = \begin{cases} 2.73+3.37(t-33/60) & \text{si } t \leq 33/60 \\ 2.73+9.59(t-33/60) & \text{si } t > 33/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 6.18t^2 - 0.18t + 1.22$
	$\mathfrak{A}_n = 11.739$ on rejette $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 3.185$ on rejette $H_0$
$10^{-1}$ Figure2.2	$g(t, \theta) = \begin{cases} 2.46+2.95(t-33/60) & \text{si } t \leq 31/60 \\ 2.46+9.41(t-33/60) & \text{si } t > 33/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 6.71t^2 - 0.72t + 1.29$
	$\mathfrak{A}_n = 2.062$ on rejette $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 0.251$ on accepte $H_0$
$0.25$ Figure2.3	$g(t, \theta) = \begin{cases} 2.40+2.79(t-31/60) & \text{si } t \leq 31/60 \\ 2.40+9.57(t-31/60) & \text{si } t > 31/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 7.71t^2 - 1.19t + 1.35$
	$\mathfrak{A}_n = 0.967$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = -0.053$ on accepte $H_0$

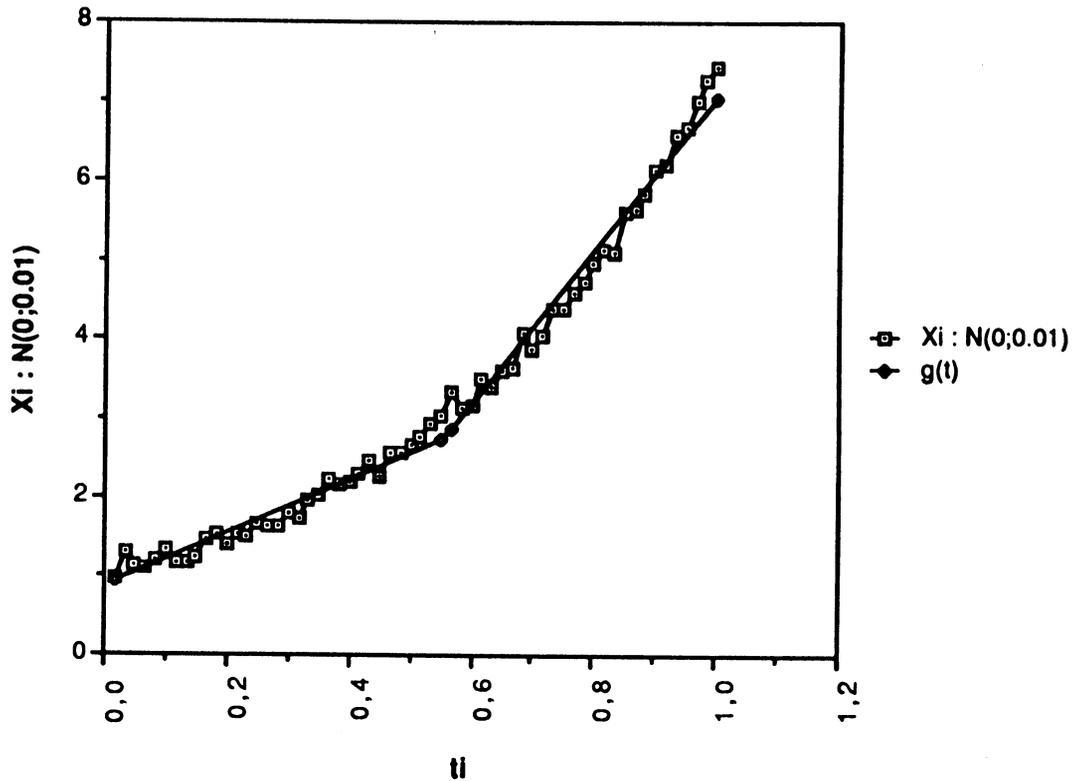
**TABLEAU 2.2** :  $f_2(t) = \exp(2t)$ .

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-2}$ Figure 2.4	$g(t, \theta) =$ $2.94 + 3.58(t - 35/60)$ si $t \leq 35/60$ $2.94 + 9.82(t - 35/60)$ si $t > 35/60$	$g(t, \theta) = 5.93t^2 - 0.02t + 1.22$
	$\mathcal{A}_n = 4.895$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = 1.633$ on rejette $H_0$
$10^{-1}$ Figure 2.5	$g(t, \theta) =$ $3.34 + 3.85(t - 39/60)$ si $t \leq 39/60$ $3.34 + 10.54(t - 39/60)$ si $t > 39/60$	$g(t, \theta) = 5.93t^2 - 0.22t + 1.30$
	$\mathcal{A}_n = 0.206$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.588$ on accepte $H_0$
0.25	$g(t, \theta) =$ $3.31 + 3.71(t - 39/60)$ si $t \leq 39/60$ $3.31 + 10.33(t - 39/60)$ si $t > 39/60$	$g(t, \theta) = 5.94t^2 - 0.38t + 1.37$
	$\mathcal{A}_n = -0.293$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.686$ on accepte $H_0$

**TABLEAU 2.3** :  $f_2(t) = \exp(2t)$ .

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
10 <sup>-2</sup> Figure2.6	$g(t,\theta) =$ $3.001+3.75(t-35/60)$ si $t \leq 35/60$ $3.001+9.86(t-35/60)$ si $t > 35/60$	$g(t,\theta) = 5.84t^2+0.18t+1.79$
	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 7.415$ on rejette $H_0$	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 2.972$ on rejette $H_0$
10 <sup>-1</sup> Figure2.7	$g(t,\theta) =$ $3.19+4.02(t-36/60)$ si $t \leq 36/60$ $3.19+10.0(t-36/60)$ si $t > 36/60$	$g(t,\theta) = 5.66t^2+0.44t+1.16$
	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 0.816$ on accepte $H_0$	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 0.296$ on accepte $H_0$
0.25	$g(t,\theta) =$ $2.06+2.58(t-24/60)$ si $t \leq 24/60$ $2.06+8.14(t-24/60)$ si $t > 24/60$	$g(t,\theta) = 5.51t^2+0.65t+1.15$
	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 0.752$ on accepte $H_0$	$\hat{\mathfrak{A}}_n = 0.120$ on accepte $H_0$

### Approximation du nuage $f_2(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_2(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

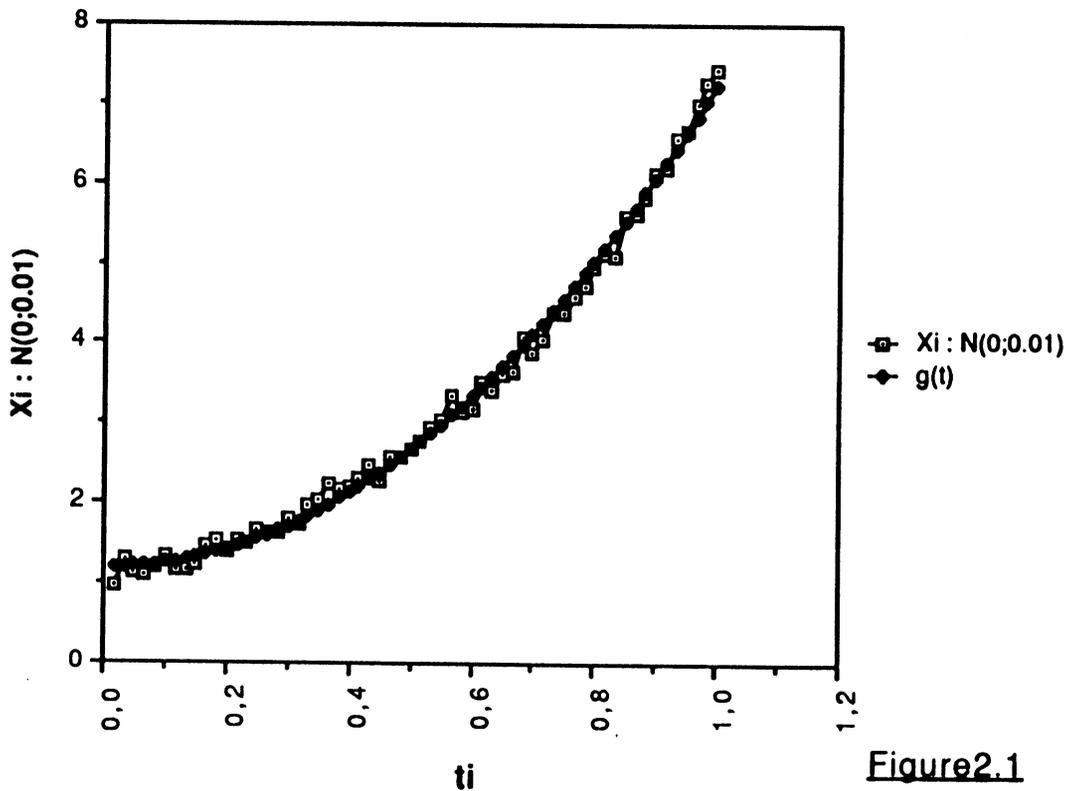
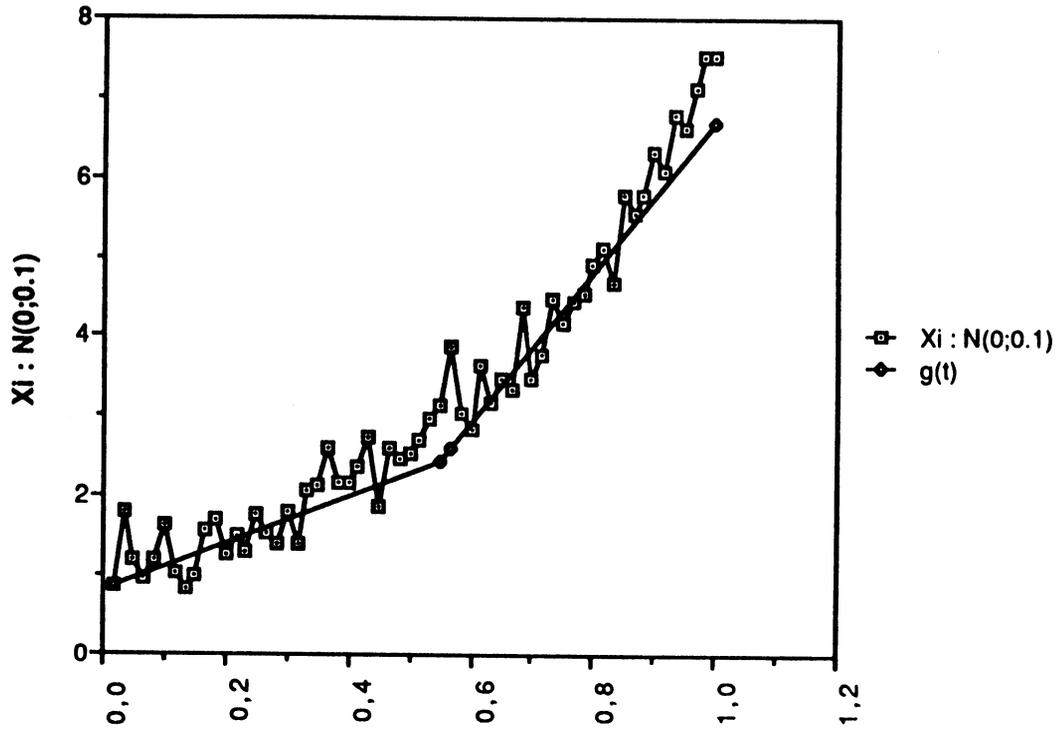


Figure2.1

Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par une parabole

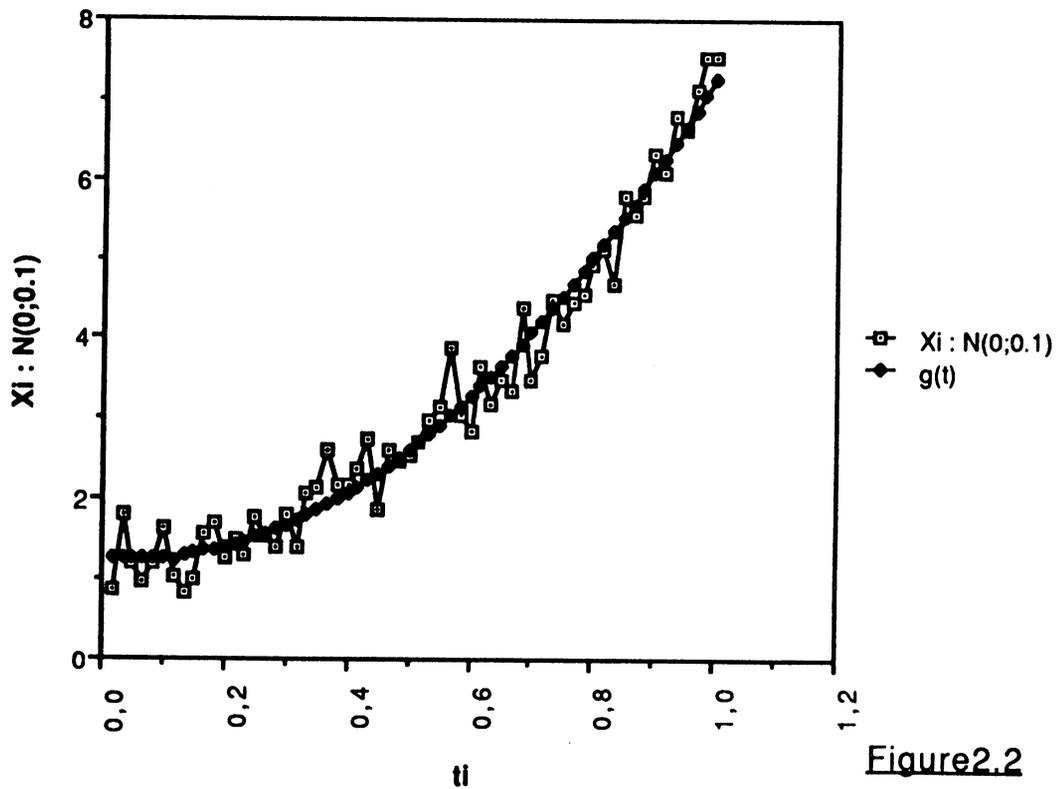
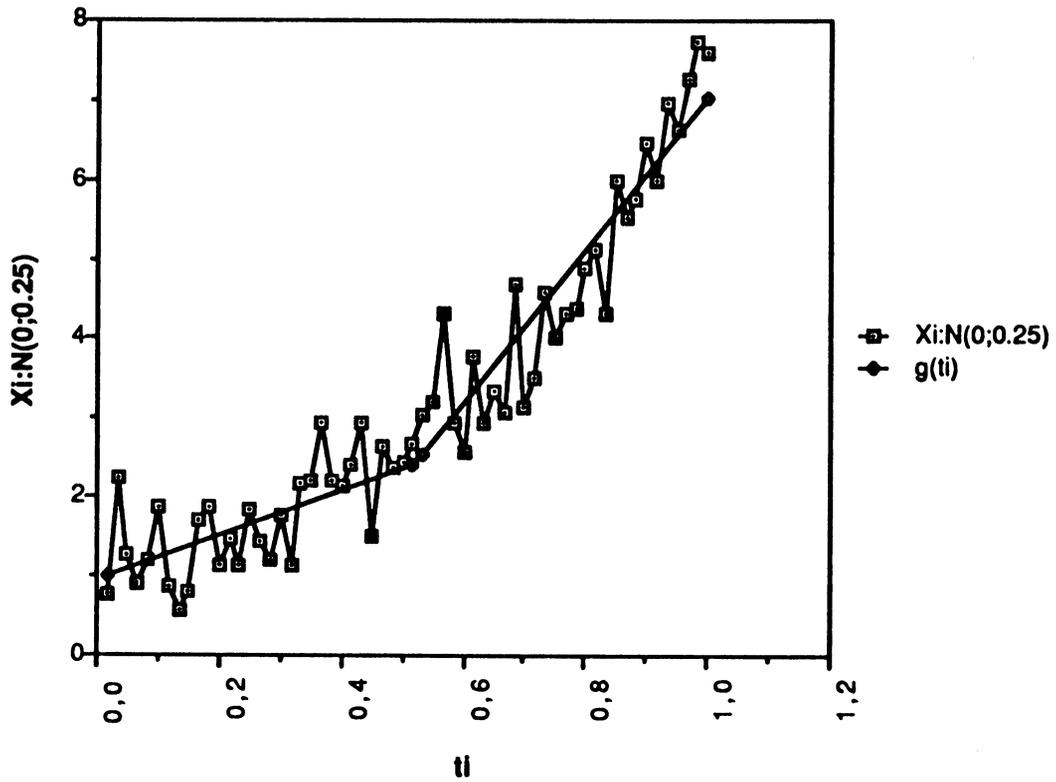


Figure2.2

### Approximation du nuage $f_2(t)+N(0;0.25)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_2(t)+N(0;0.25)$ par une parabole

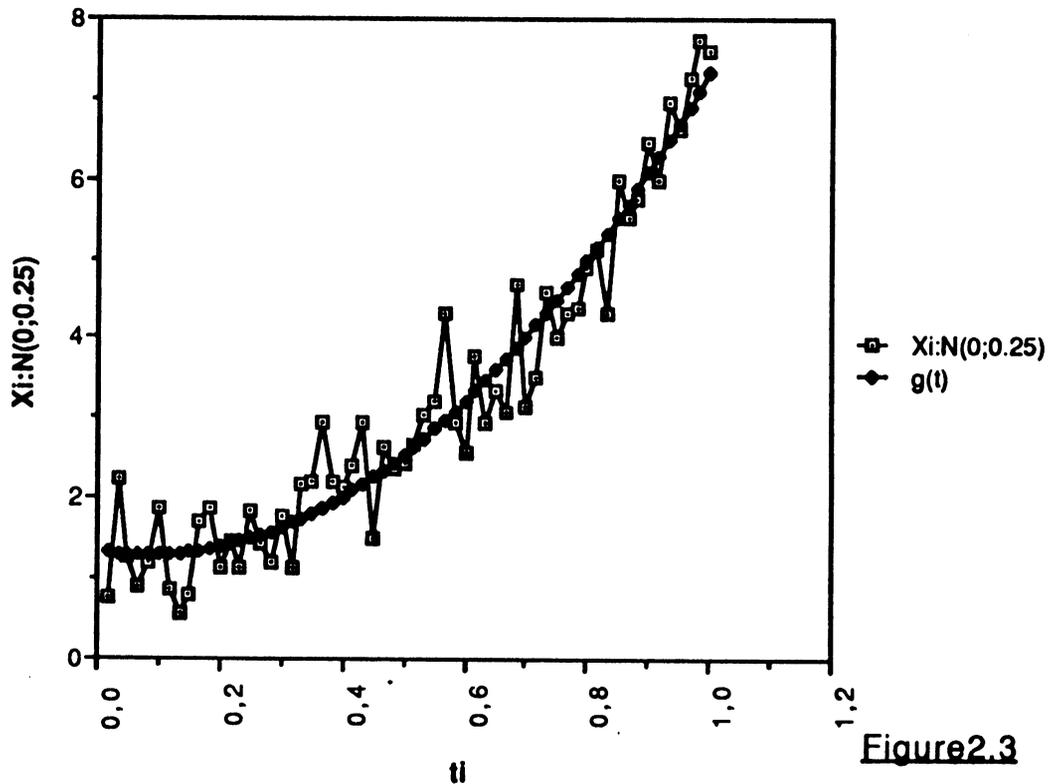


Figure 2.3

**TABLEAU 3.1 :  $f_3(t) = \exp(t/2)$ .**

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-6}$ Figure3.1	$g(t, \theta) =$ $1.31 + 0.57(t - 33/60)$ si $t \leq 33/60$ $1.31 + 0.74(t - 33/60)$ si $t > 33/60$	$g(t, \theta) = 0.164t^2 + 0.48t + 1.001$
	$\mathcal{A}_n = 59.28$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = 1.654$ on rejette $H_0$
$10^{-5}$ Figure3.2	$g(t, \theta) =$ $1.287 + 0.567(t - 31/60)$ si $t \leq 31/60$ $1.287 + 0.734(t - 31/60)$ si $t > 31/60$	$g(t, \theta) = 0.169t^2 + 0.47t + 1.002$
	$\mathcal{A}_n = 7.729$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.048$ on accepte $H_0$
$10^{-4}$	$g(t, \theta) =$ $1.284 + 0.561(t - 31/60)$ si $t \leq 31/60$ $1.284 + 0.74(t - 31/60)$ si $t > 31/60$	$g(t, \theta) = 0.186t^2 + 0.45t + 1.004$
	$\mathcal{A}_n = 1.151$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.311$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure3.3	$g(t, \theta) =$ $1.13 + 0.34(t - 19/60)$ si $t \leq 19/60$ $1.13 + 0.74(t - 19/60)$ si $t > 19/60$	$g(t, \theta) = 0.41t^2 + 0.23t + 1.03$
	$\mathcal{A}_n = -0.153$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.381$ on accepte $H_0$

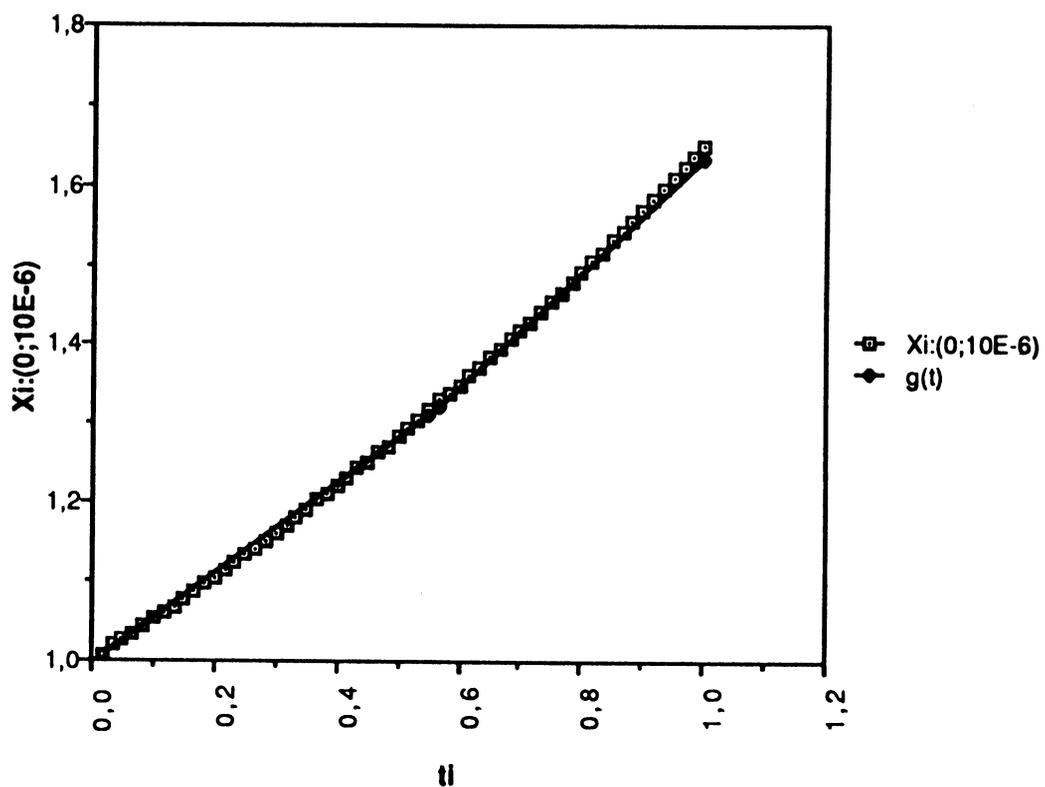
**TABLEAU 3.2** :  $f_3(t) = \exp(t/2)$ .

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-6}$ Figure3.4	$g(t,\theta) =$ $1.331+0.583(t-35/60)$ si $t \leq 35/60$ $1.331+0.750(t-35/60)$ si $t > 35/60$	$g(t,\theta) = 0.162t^2+0.483t+1.001$
	$\beta_n = 53.81$ on rejette $H_0$	$\beta_n = 2.252$ on rejette $H_0$
$10^{-5}$ Figure3.5	$g(t,\theta) =$ $1.330+0.581(t-35/60)$ si $t \leq 35/60$ $1.330+0.75(t-35/60)$ si $t > 35/60$	$g(t,\theta) = 0.163t^2+0.482t+1.002$
	$\beta_n = 4.564$ on rejette $H_0$	$\beta_n = 0.412$ on accepte $H_0$
$10^{-4}$	$g(t,\theta) =$ $1.35+0.583(t-37/60)$ si $t \leq 37/60$ $1.35+0.764(t-37/60)$ si $t > 37/60$	$g(t,\theta) = 0.164t^2+0.477t+1.003$
	$\beta_n = 0.172$ on accepte $H_0$	$\beta_n = 0.106$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure3.6	$g(t,\theta) =$ $1.07+0.626(t-8/60)$ si $t \leq 8/60$ $1.07+0.608(t-8/60)$ si $t > 8/60$	$g(t,\theta) = 0.185t^2+0.42t+1.021$
	$\beta_n = 0.122$ on accepte $H_0$	$\beta_n = 0.0176$ on accepte $H_0$

**TABLEAU 3.3** :  $f_3(t) = \exp(t/2)$ .

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-6}$ Figure 3.7	$g(t, \theta) =$ $1.31 + 0.576(t - 33/60)$ si $t \leq 33/60$ $1.31 + 0.739(t - 33/60)$ si $t > 33/60$	$g(t, \theta) = 0.161t^2 + 0.483t + 1.001$
	$\mathcal{A}_n = 46.665$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = 0.333$ on accepte $H_0$
$10^{-5}$	$g(t, \theta) =$ $1.309 + 0.573(t - 33/60)$ si $t \leq 33/60$ $1.309 + 0.738(t - 33/60)$ si $t > 33/60$	$g(t, \theta) = 0.161t^2 + 0.481t + 1.002$
	$\mathcal{A}_n = 3.306$ on rejette $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.656$ on accepte $H_0$
$10^{-4}$	$g(t, \theta) =$ $1.264 + 0.549(t - 29/60)$ si $t \leq 29/60$ $1.264 + 0.717(t - 29/60)$ si $t > 29/60$	$g(t, \theta) = 0.162t^2 + 0.475t + 1.005$
	$\mathcal{A}_n = -0.757$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.693$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure 3.8	$g(t, \theta) =$ $1.262 + 0.45(t - 30/60)$ si $t \leq 19/60$ $1.262 + 0.67(t - 30/60)$ si $t > 19/60$	$g(t, \theta) = 0.163t^2 + 0.393t + 1.038$
	$\mathcal{A}_n = -0.726$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.670$ on accepte $H_0$

Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par 2 demi droites



Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par une parabole

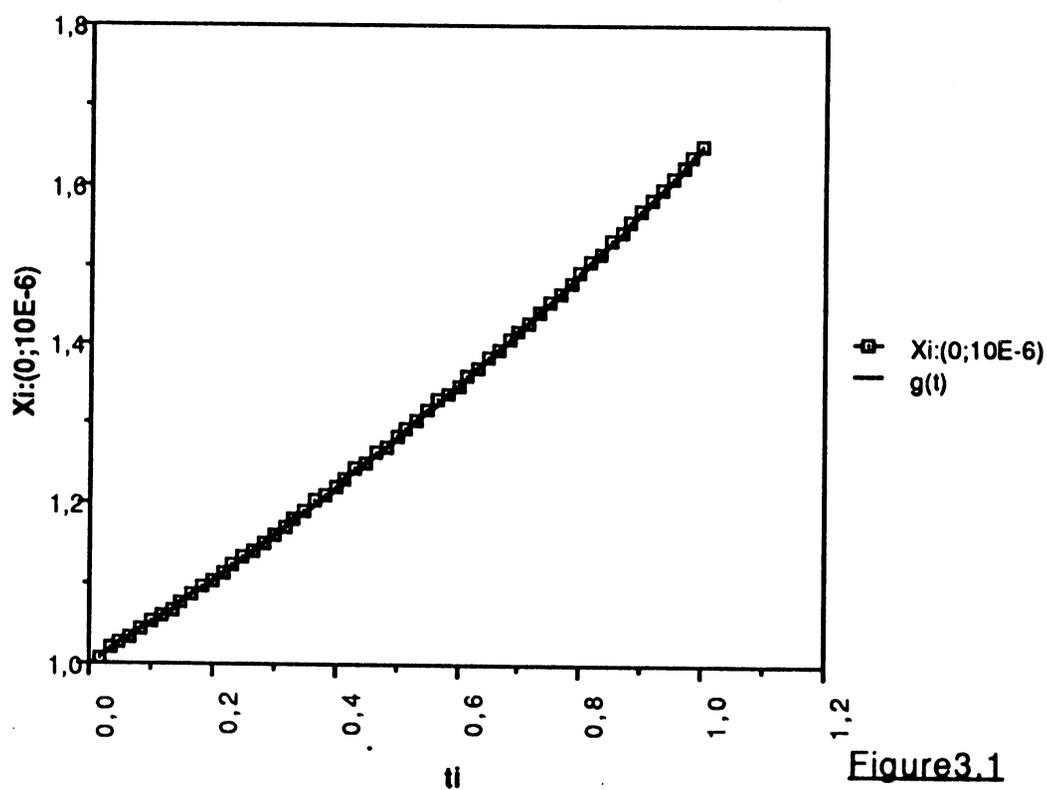
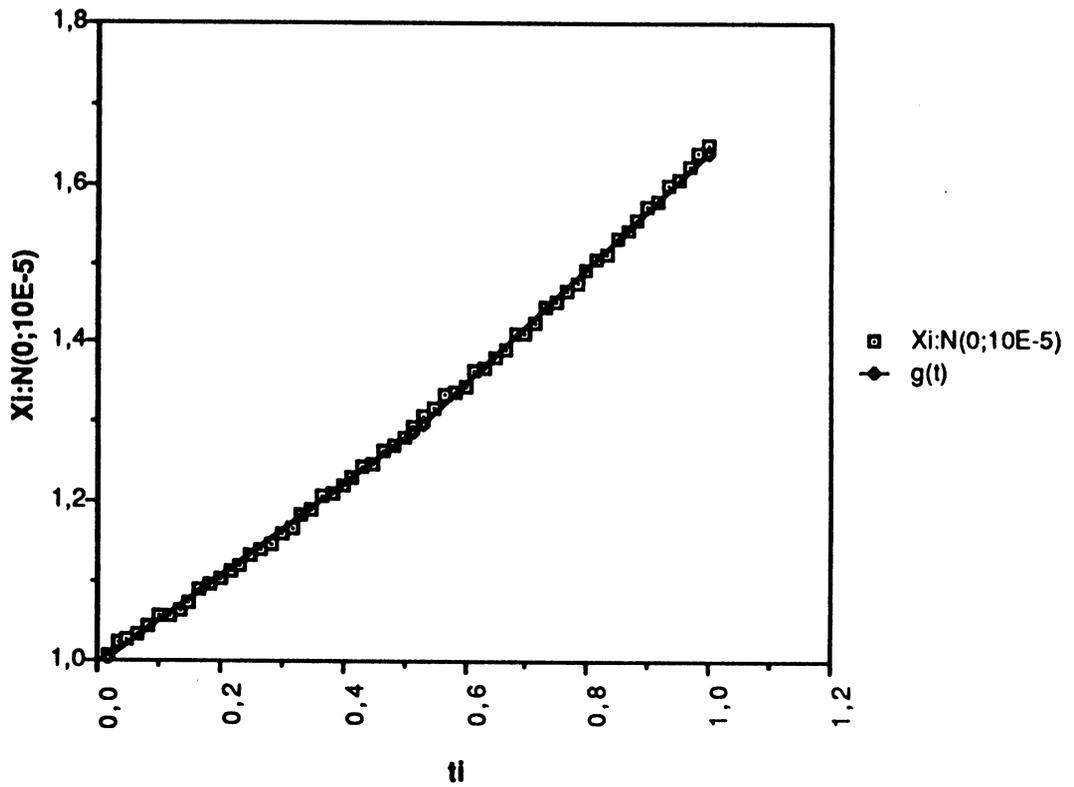
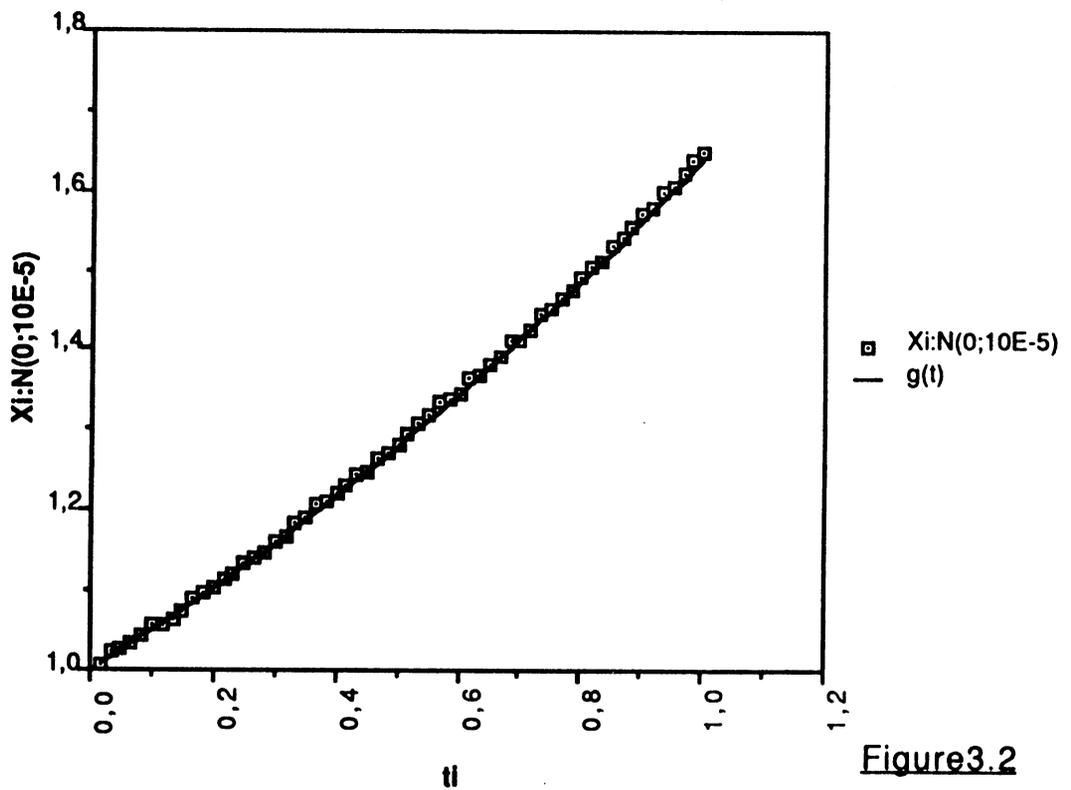


Figure3.1

**Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-5)$  par 2 demi droites**

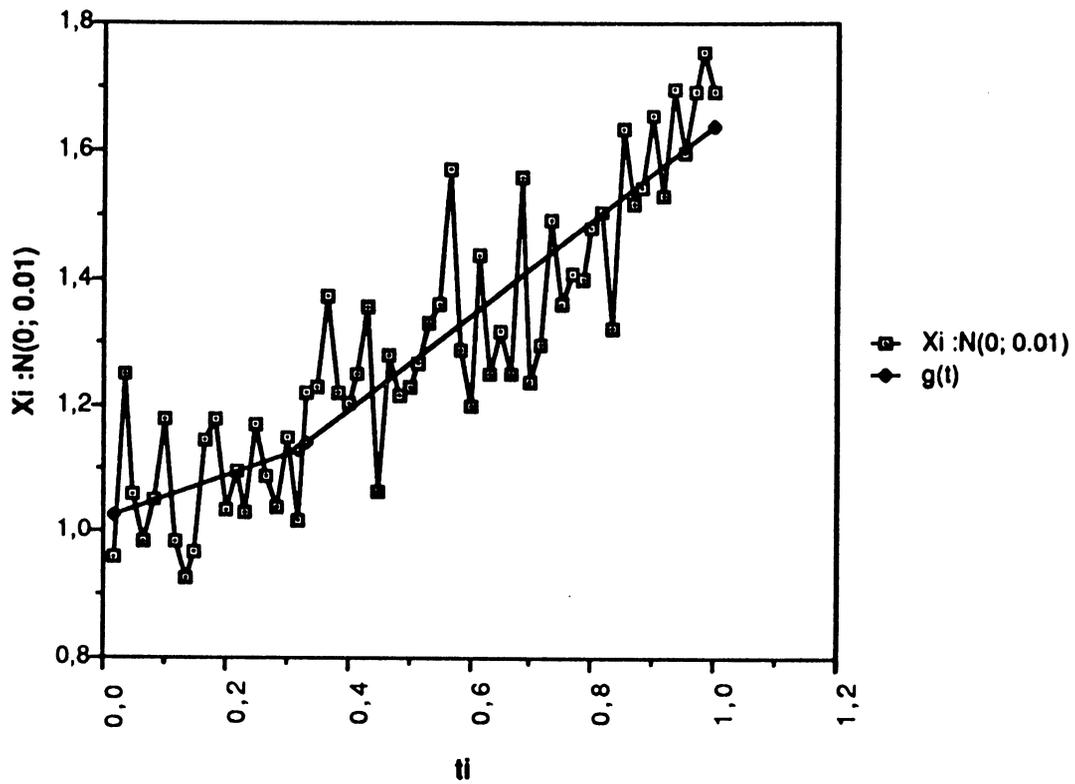


**Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-5)$  par une parabole**



**Figure 3.2**

### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

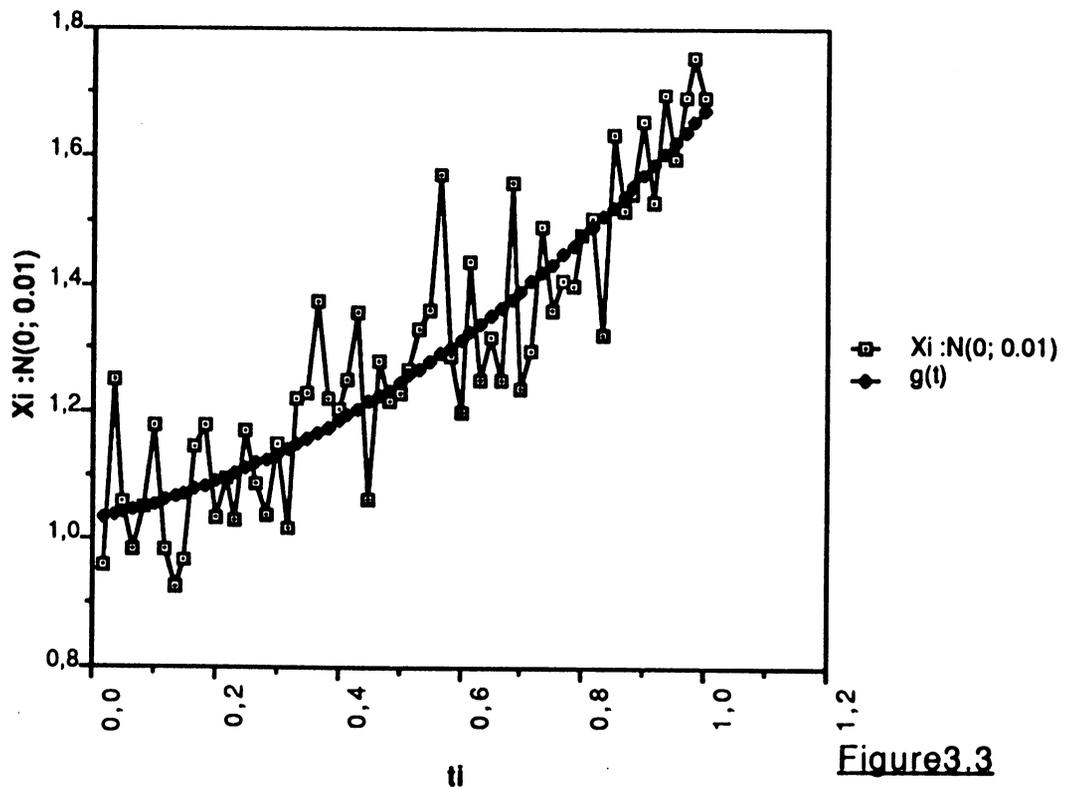


Figure3.3

**Remarque 2**

Remarquons que dans le cas où la fonction  $f$  est une fonction exponentielle, dès que la variance  $\sigma^2$  devient petite le test d'adéquation rejette les deux modèles. Ce qui est parfaitement cohérent.

De plus, d'après les valeurs de  $\mathfrak{A}_n$  il est préférable d'approcher ces exponentielles par des fonctions paraboliques que par des demi-droites. Le test de comparaison établi dans le paragraphe III permet de comparer ces deux classes de fonctions et d'en choisir la meilleure. Les graphes que nous avons présentés illustrent bien ces résultats.

**Exemples 3 : f est une fonction présentant une rupture**

**TABLEAU 4.1 :  $f_4(t) =$**

$$\begin{array}{ll} 1/2 - t & \text{si } t \leq 1/2 \\ t - 1/2 & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

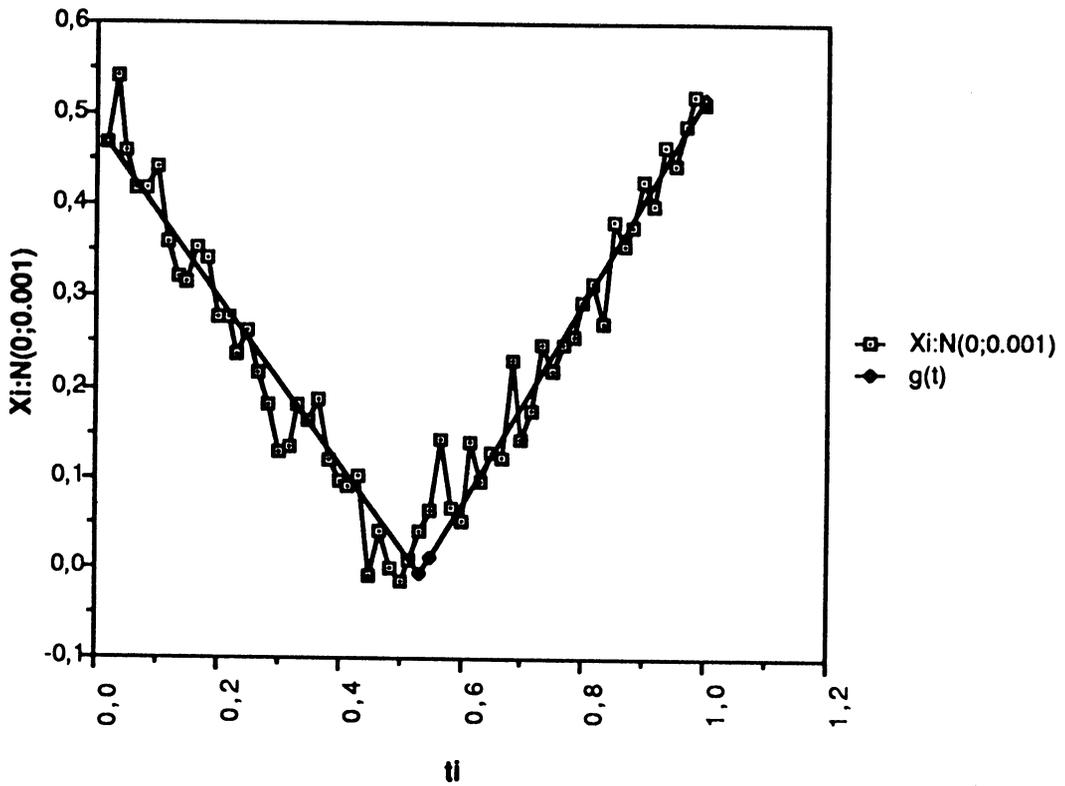
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure4.1	$g(t,\theta) = \begin{array}{l} -0.007-0.92(t-32/60) \text{ si } t \leq 32/60 \\ -0.007+1.12(t-32/60) \text{ si } t > 32/60 \end{array}$ $\mathfrak{A}_n = 1.044 \text{ on accepte } H_0$	$g(t,\theta) = 1.95t^2 - 1.96t + 0.576$ $\mathfrak{A}_n = 3.948 \text{ on rejette } H_0$
$10^{-2}$ Figure4.2	$g(t,\theta) = \begin{array}{l} -0.029-1.03(t-31/60) \text{ si } t \leq 31/60 \\ -0.029+0.35(t-31/60) \text{ si } t > 31/60 \end{array}$ $\mathfrak{A}_n = -0.265 \text{ on accepte } H_0$	$g(t,\theta) = 2.12t^2 - 2.13t + 0.599$ $\mathfrak{A}_n = -0.571 \text{ on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t,\theta) = \begin{array}{l} -0.044-2.18(t-19/60) \text{ si } t \leq 19/60 \\ -0.044+0.76(t-19/60) \text{ si } t > 19/60 \end{array}$ $\mathfrak{A}_n = -0.099 \text{ on accepte } H_0$	$g(t,\theta) = 2.66t^2 - 2.67t + 0.673$ $\mathfrak{A}_n = -0.601 \text{ on accepte } H_0$

**TABLEAU 4.2** :  $f_4(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2 - t & \text{si } t \leq 1/2 \\ t - 1/2 & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure 4.3	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.008 - 0.98(t - 31/60) & \text{si } t \leq 31/60 \\ -0.008 + 1.05(t - 31/60) & \text{si } t > 31/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.342 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 1.93t^2 - 1.95t + 0.58$ $\mathfrak{A}_n = 4.774 \quad \text{on rejette } H_0$
$10^{-2}$ Figure 4.4	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.025 - 0.99(t - 32/60) & \text{si } t \leq 32/60 \\ -0.025 + 1.11(t - 32/60) & \text{si } t > 32/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.034 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 2.07t^2 - 2.12t + 0.611$ $\mathfrak{A}_n = -0.399 \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.095 - 1.37(t - 30/60) & \text{si } t \leq 30/60 \\ -0.095 + 1.08(t - 30/60) & \text{si } t > 30/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.460 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 2.51t^2 - 2.66t + 0.709$ $\mathfrak{A}_n = -0.637 \quad \text{on accepte } H_0$

Approximation du nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$  par une parabole

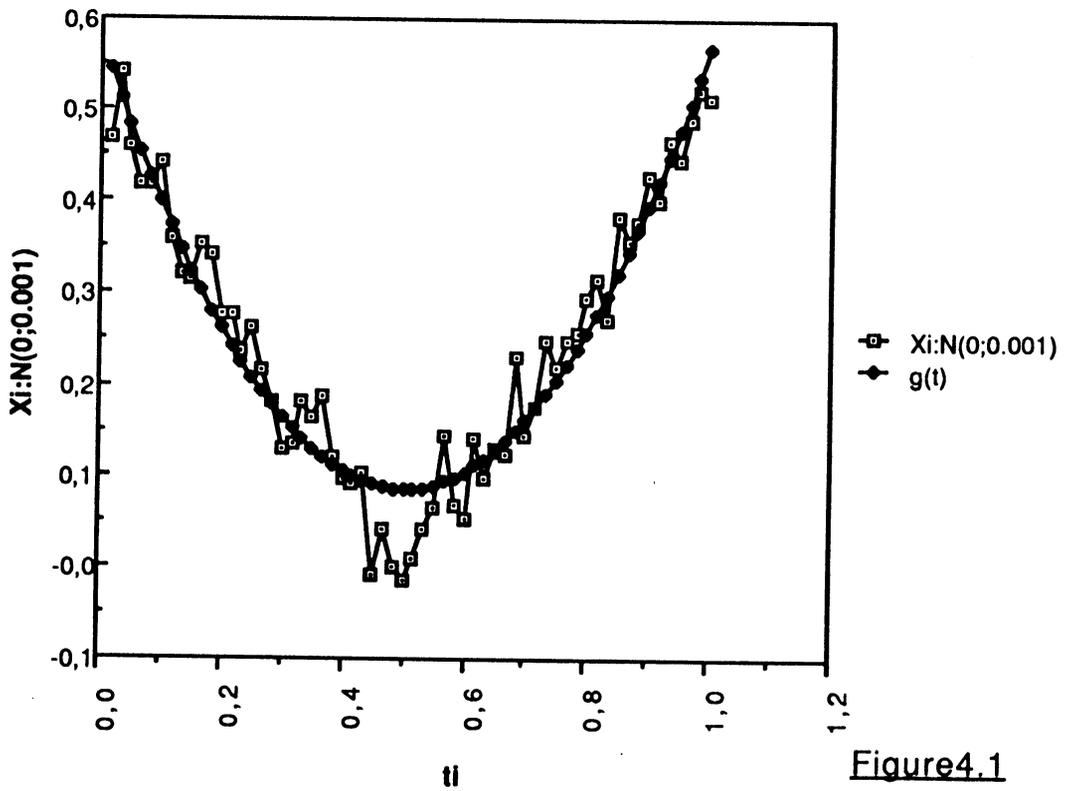
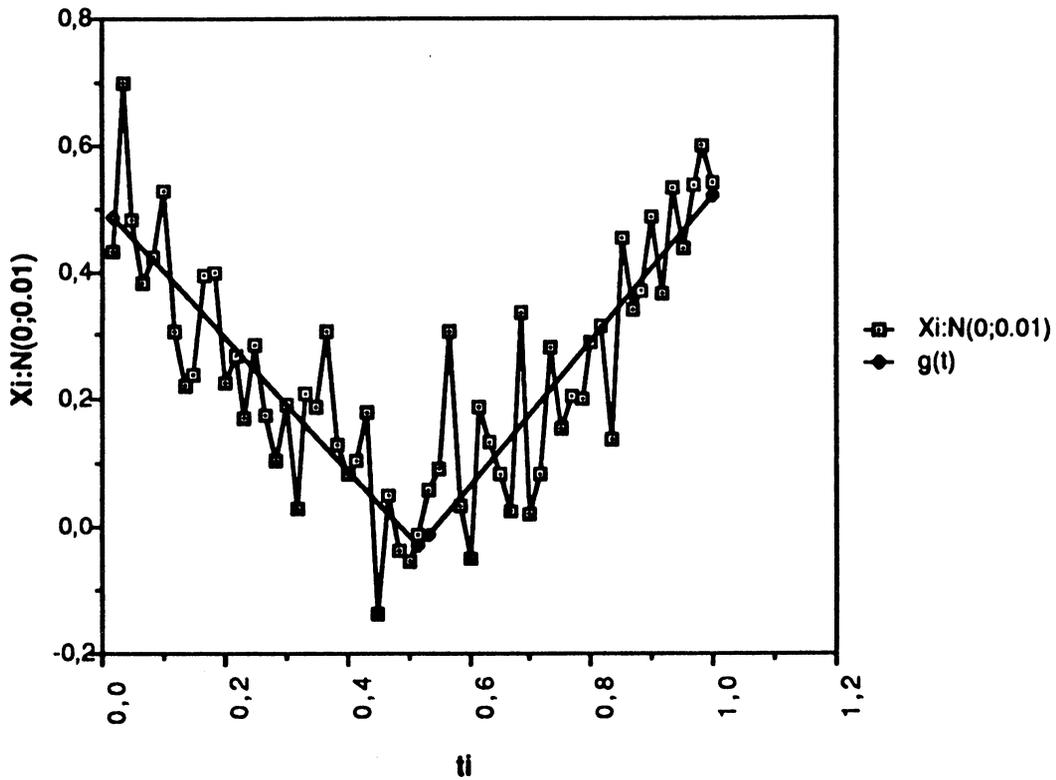
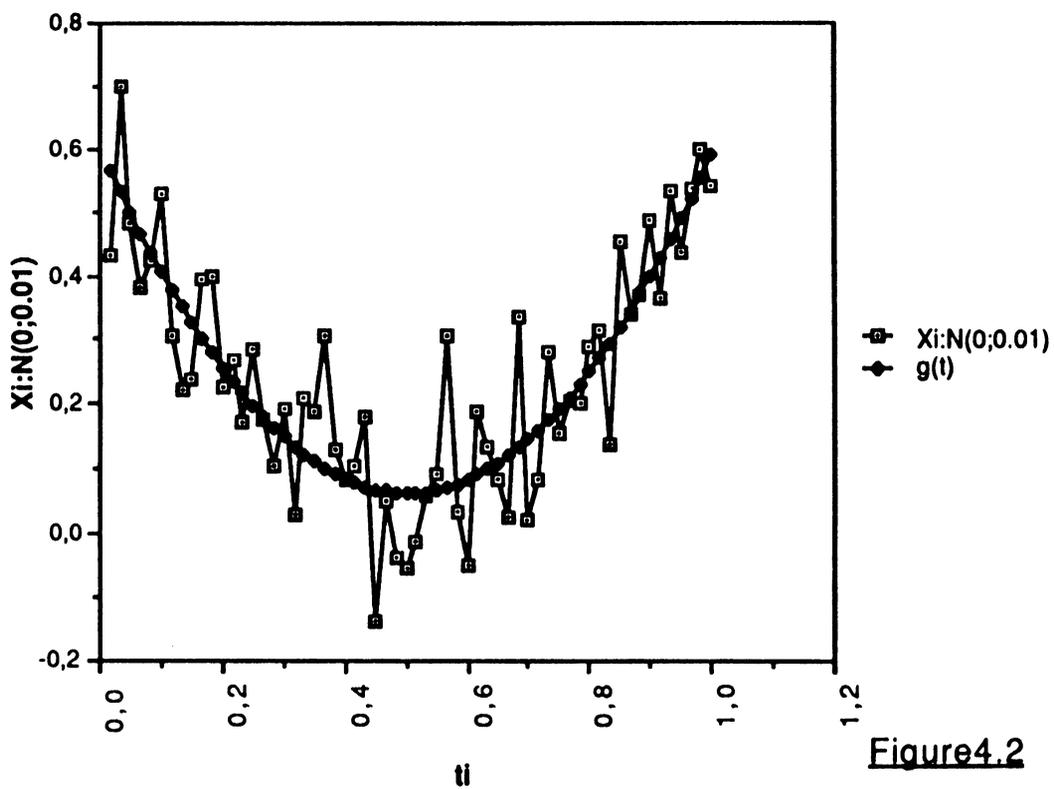


Figure4.1

### Approximation du nuage $f_4(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_4(t)+N(0;0.01)$ par une parabole



**Figure4.2**

**TABLEAU 5.1** :  $f_5(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2(1/2 - t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ 1/2(t - 1/2) & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

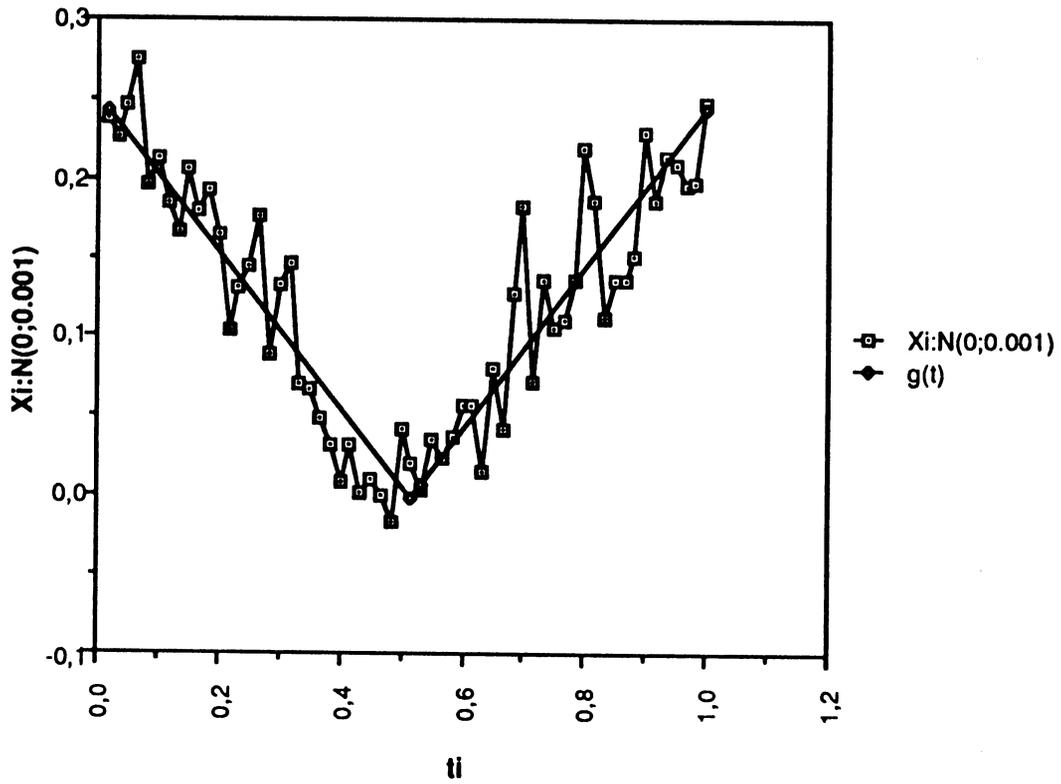
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure 5.1	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.002 - 0.46(t - 31/60) & \text{si } t \leq 31/60 \\ -0.002 + 0.55(t - 31/60) & \text{si } t > 31/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.508 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.938t^2 - 0.969t + 0.294$ $\mathfrak{A}_n = 2.146 \quad \text{on rejette } H_0$
$10^{-2}$ Figure 5.2	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.013 - 0.52(t - 33/60) & \text{si } t \leq 33/60 \\ -0.013 + 0.50(t - 33/60) & \text{si } t > 33/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.461 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.939t^2 - 1.03t + 0.32$ $\mathfrak{A}_n = -0.165 \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.046 - 0.87(t - 30/60) & \text{si } t \leq 30/60 \\ -0.046 + 0.31(t - 30/60) & \text{si } t > 30/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.675 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.943t^2 - 1.228t + 0.40$ $\mathfrak{A}_n = -0.546 \quad \text{on accepte } H_0$

**TABLEAU 5.2 :  $f_5(t) =$**

$$\begin{array}{ll} 1/2(1/2 - t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ 1/2(t - 1/2) & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure 5.3	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.002 - 0.41(t - 33/60) & \text{si } t \leq 33/60 \\ -0.002 + 0.53(t - 33/60) & \text{si } t > 33/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.358 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.872t^2 - 0.881t + 0.264$ $\mathfrak{A}_n = 2.373 \quad \text{on rejette } H_0$
$10^{-2}$ Figure 5.4	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.011 - 0.36(t - 34/60) & \text{si } t \leq 34/60 \\ -0.011 + 0.49(t - 34/60) & \text{si } t > 34/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.310 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.732t^2 - 0.751t + 0.223$ $\mathfrak{A}_n = 0.649 \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} -0.04 - 0.19(t - 40/60) & \text{si } t \leq 40/60 \\ -0.04 + 0.33(t - 40/60) & \text{si } t > 40/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 0.419 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.289t^2 - 0.342t + 0.096$ $\mathfrak{A}_n = 0.454 \quad \text{on accepte } H_0$

### Approximation du nuage $f_5(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_5(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

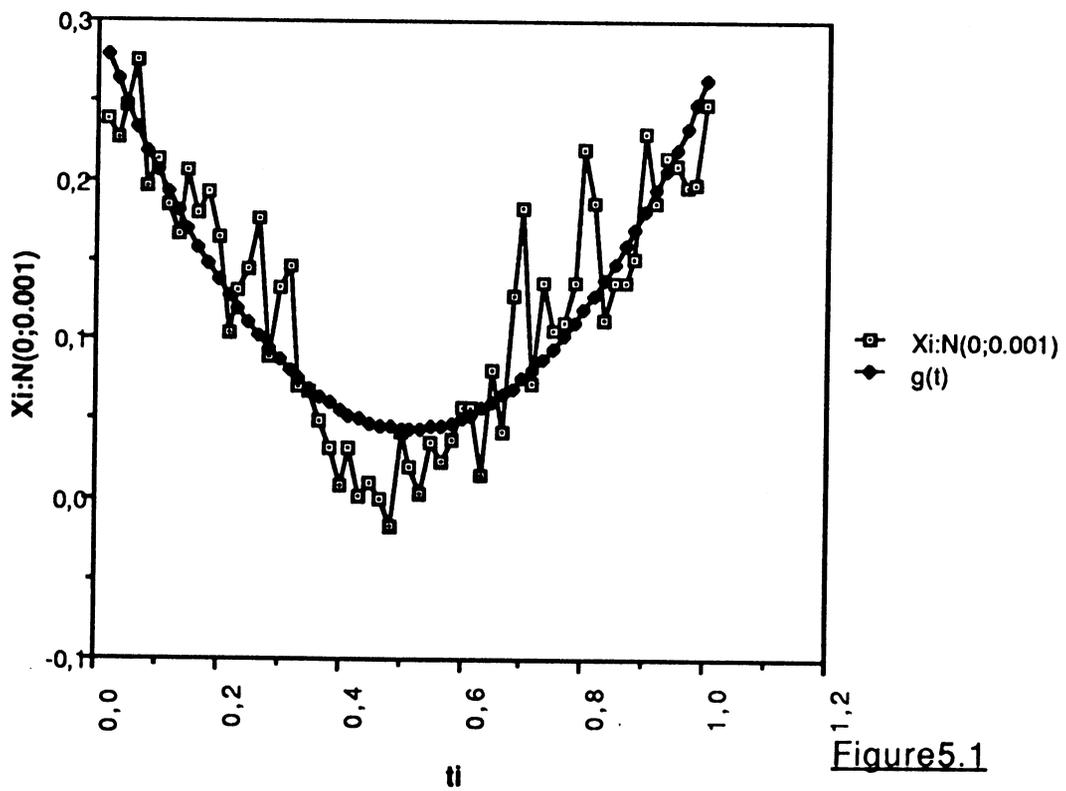
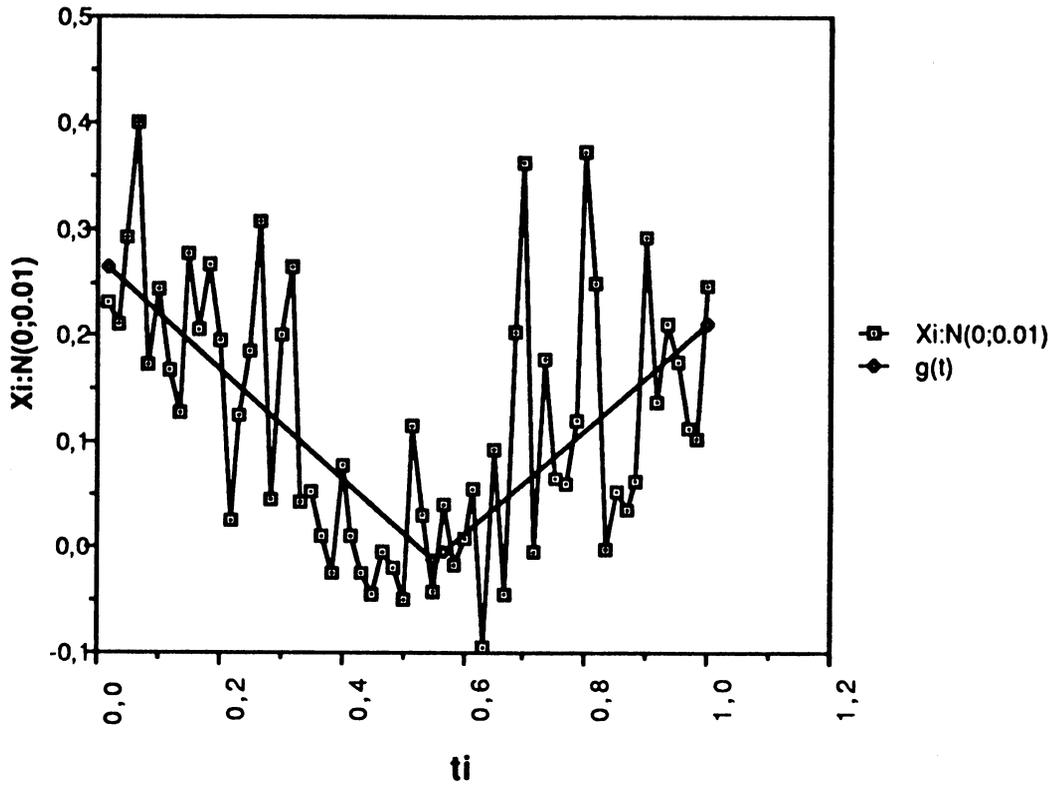


Figure5.1

Approximation du nuage  $f_5(t)+N(0;0.01)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_5(t)+N(0;0.01)$  par une parabole

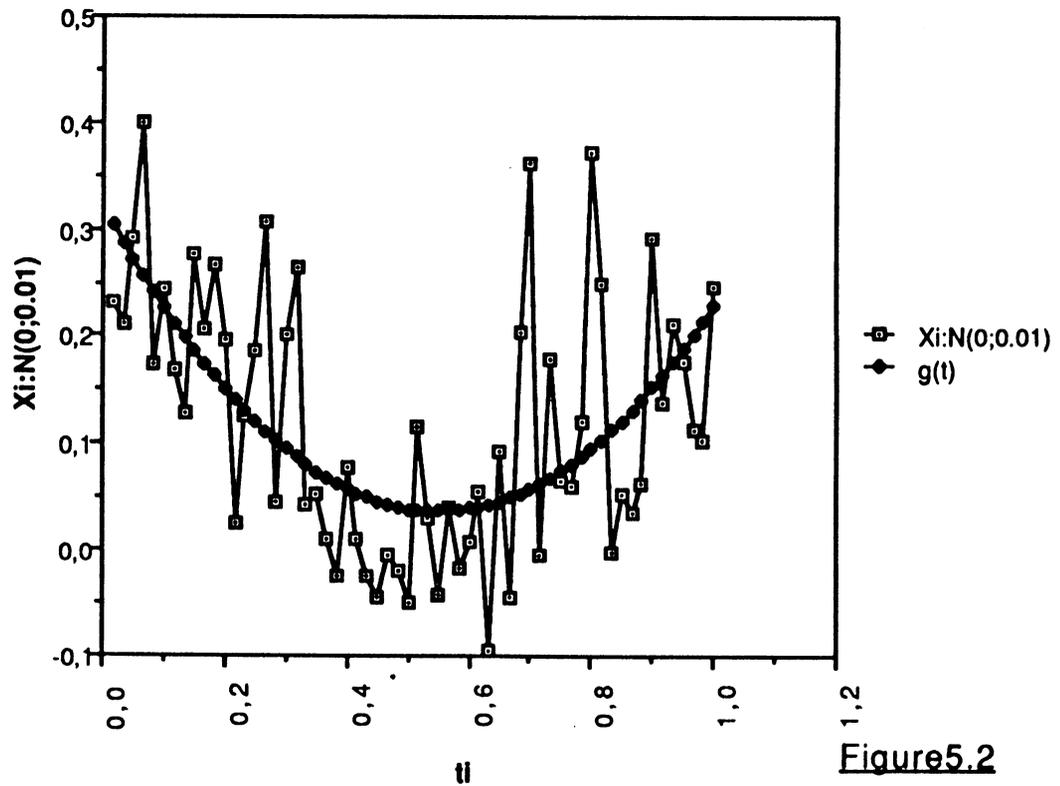


Figure5.2

**TABLEAU 6.1** :  $f_6(t) =$

$$\begin{array}{ll} 0.4-0.3(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/4 \\ 0.4+0.6(t - 3/4) & \text{si } t \geq 3/4 \end{array}$$

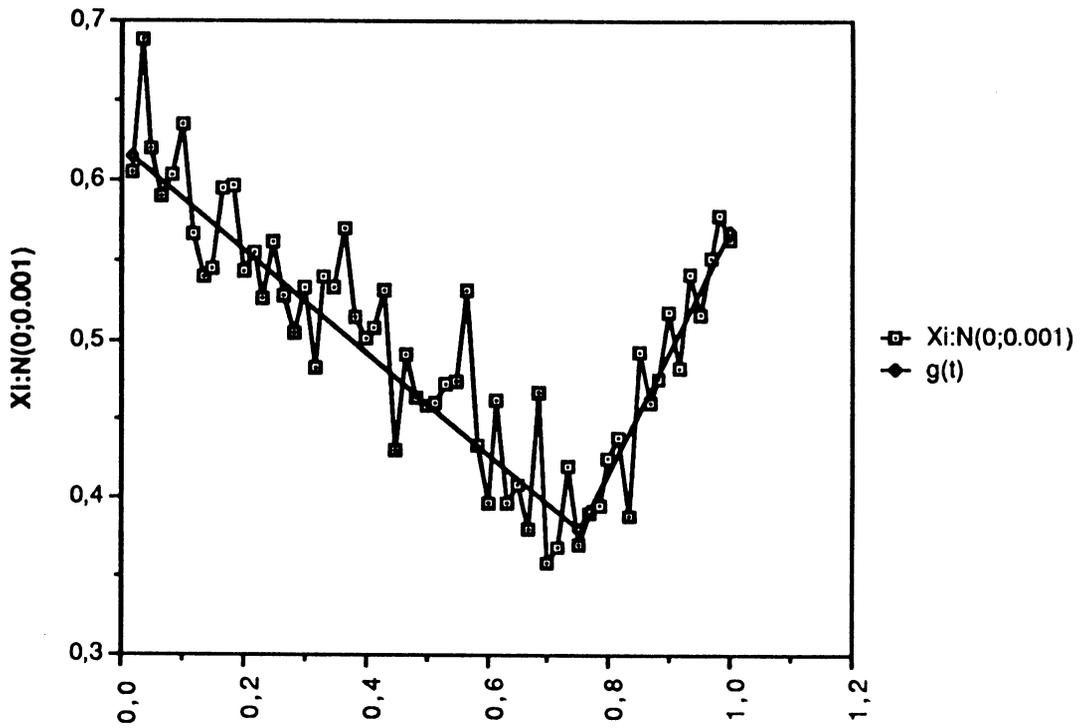
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure 6.1	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.38-0.32(t-45/60) & \text{si } t \leq 45/60 \\ 0.38+0.74(t-45/60) & \text{si } t > 45/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.565 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.574t^2 - 0.734t + 0.676$ $\mathfrak{A}_n = 4.083 \quad \text{on rejette } H_0$
$10^{-2}$ Figure 6.2	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.46-0.64(t-19/60) & \text{si } t \leq 19/60 \\ 0.46-0.005(t-19/60) & \text{si } t > 19/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = 1.341 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 0.744t^2 - 0.907t + 0.699$ $\mathfrak{A}_n = 0.391 \quad \text{on accepte } H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.4-1.005(t-19/60) & \text{si } t \leq 19/60 \\ 0.4+0.1(t-19/60) & \text{si } t > 19/60 \end{cases}$ $\mathfrak{A}_n = -0.077 \quad \text{on accepte } H_0$	$g(t, \theta) = 1.28t^2 - 1.45t + 0.773$ $\mathfrak{A}_n = -0.205 \quad \text{on accepte } H_0$

**TABLEAU 6.2 :  $f_{\sigma}(t) =$**

$$\begin{array}{ll} 0.4-0.3(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/4 \\ 0.4+0.6(t - 3/4) & \text{si } t \geq 3/4 \end{array}$$

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-3}$ Figure 6.3	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.38-0.32(t-46/60) & \text{si } t \leq 46/60 \\ 0.38+0.72(t-46/60) & \text{si } t > 46/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 0.503t^2 - 0.674t + 0.672$
	$\mathcal{A}_n = 0.042$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = 4.770$ on rejette $H_0$
$10^{-2}$ Figure 6.4	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.36-0.37(t-46/60) & \text{si } t \leq 46/60 \\ 0.36+0.87(t-46/60) & \text{si } t > 46/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 0.518t^2 - 0.718t + 0.686$
	$\mathcal{A}_n = -0.056$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = 0.879$ on accepte $H_0$
$10^{-1}$	$g(t, \theta) = \begin{cases} 0.6-0.18(t-8/60) & \text{si } t \leq 19/60 \\ 0.6+0.29(t-8/60) & \text{si } t > 8/60 \end{cases}$	$g(t, \theta) = 0.569t^2 - 0.854t + 0.729$
	$\mathcal{A}_n = 0.313$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = 0.220$ on accepte $H_0$

### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.001)$ par 2 demi droites



### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

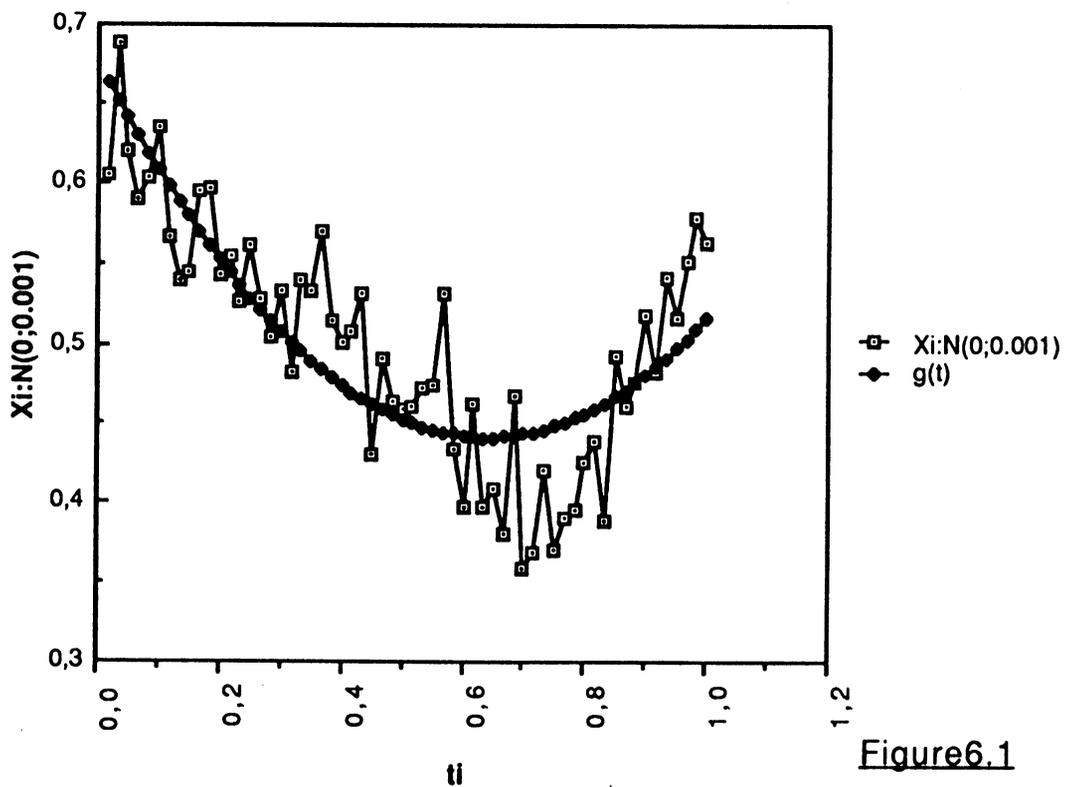
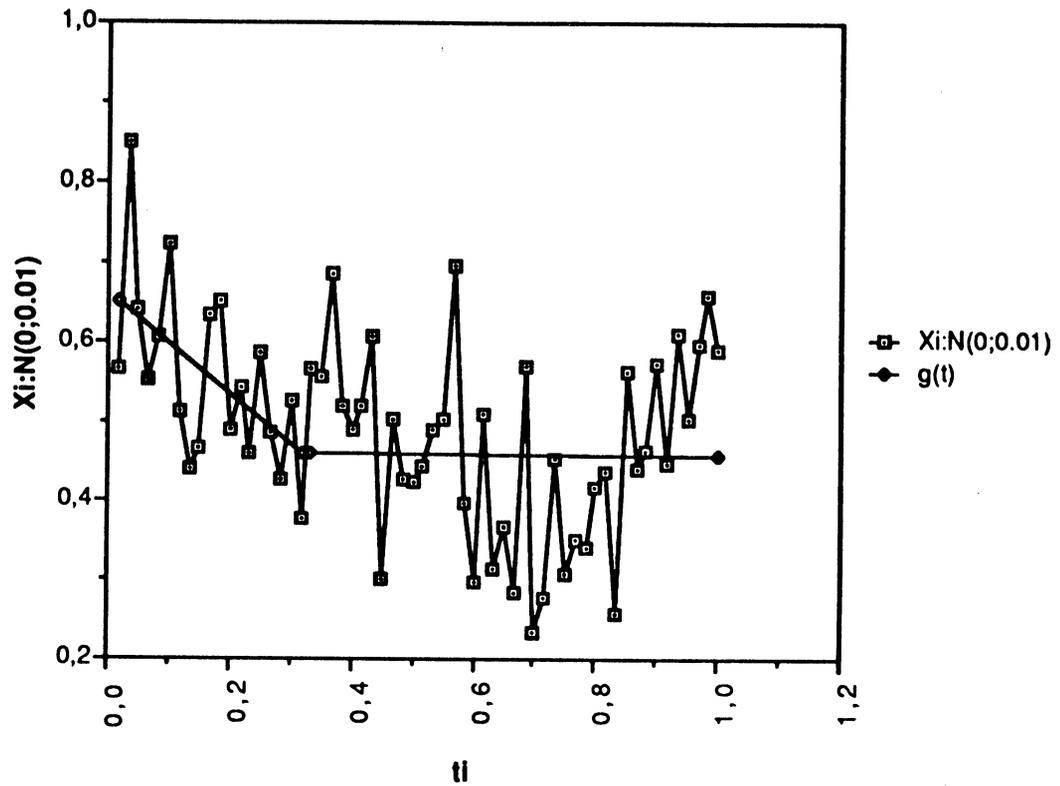


Figure 6.1

### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

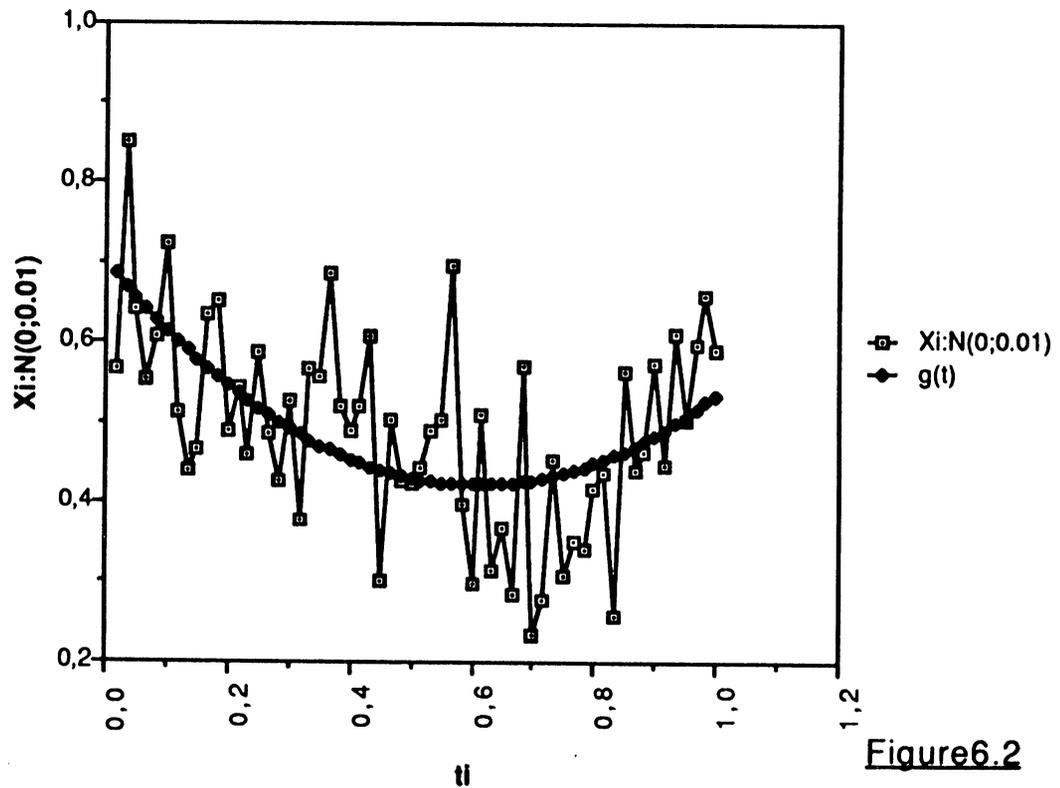


Figure 6.2

**TABLEAU 7.1** :  $f_7(t) =$

$$\begin{array}{ll} (1/2)(t - 1/2) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (t - 1/2) & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

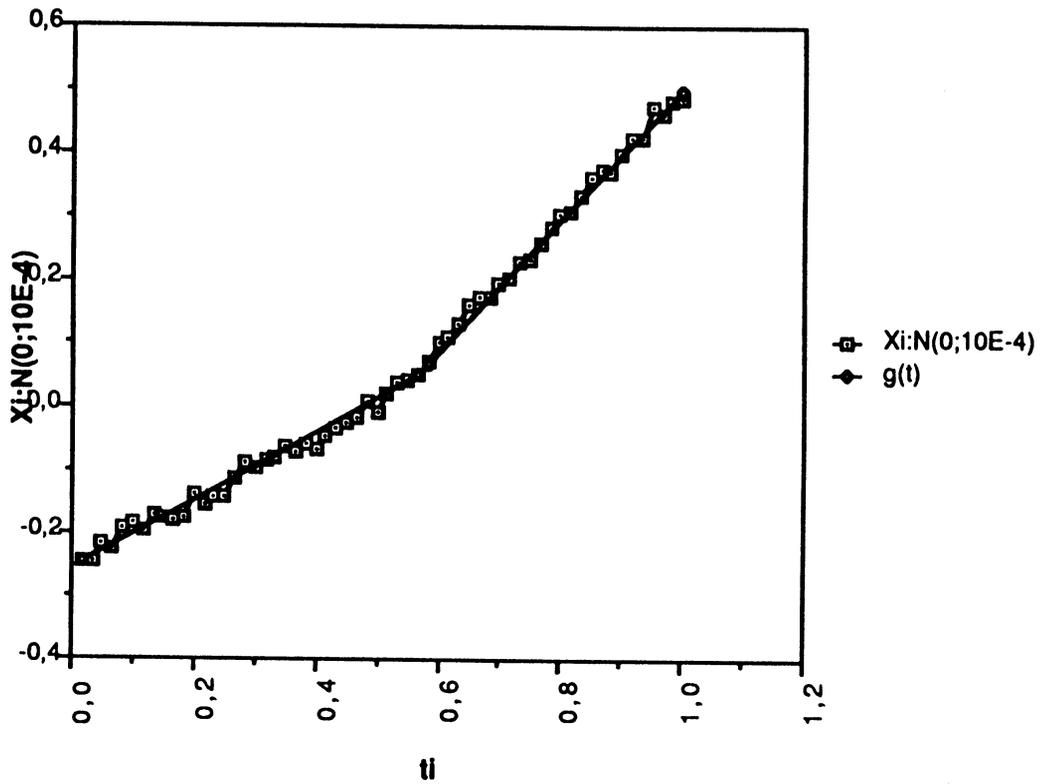
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$ Figure 7.1	$g(t, \theta) =$ $0.05 + 0.54(t - 34/60)$ si $t \leq 34/60$ $0.05 + 1.04(t - 34/60)$ si $t > 34/60$	$g(t, \theta) = 0.471t^2 + 0.273t - 0.231$
	$\mathfrak{A}_n = 1.431$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 3.881$ on rejette $H_0$
$10^{-3}$ Figure 7.2	$g(t, \theta) =$ $0.06 + 0.54(t - 35/60)$ si $t \leq 35/60$ $0.06 + 1.06(t - 35/60)$ si $t > 35/60$	$g(t, \theta) = 0.476t^2 + 0.259t - 0.227$
	$\mathfrak{A}_n = -0.165$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 0.262$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$	$g(t, \theta) =$ $-0.15 + 0.27(t - 15/60)$ si $t \leq 15/60$ $-0.15 + 0.79(t - 15/60)$ si $t > 15/60$	$g(t, \theta) = 0.492t^2 + 0.216t - 0.213$
	$\mathfrak{A}_n = 0.419$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = -0.007$ on accepte $H_0$

**TABLEAU 7.2 :**  $f_7(t) =$

$$\begin{array}{ll} (1/2)(t - 1/2) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (t - 1/2) & \text{si } t \geq 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$ Figure 7.3	$g(t, \theta) =$ $0.027 + 0.52(t - 32/60)$ si $t \leq 32/60$ $0.027 + 1.01(t - 32/60)$ si $t > 32/60$	$g(t, \theta) = 0.465t^2 + 0.274t - 0.228$
	$\mathfrak{A}_n = -0.660$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 2.047$ on rejette $H_0$
$10^{-3}$ Figure 7.4	$g(t, \theta) =$ $0.007 + 0.48(t - 30/60)$ si $t \leq 30/60$ $0.007 + 0.96(t - 30/60)$ si $t > 30/60$	$g(t, \theta) = 0.458t^2 + 0.264t - 0.216$
	$\mathfrak{A}_n = -1.868$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = -1.598$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$	$g(t, \theta) =$ $0.025 + 0.44(t - 30/60)$ si $t \leq 30/60$ $0.025 + 0.89(t - 30/60)$ si $t > 30/60$	$g(t, \theta) = 0.435t^2 + 0.231t - 0.18$
	$\mathfrak{A}_n = -1.868$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = -1.877$ on accepte $H_0$

Approximation du nuage  $f_7(t)+N(0;10E-4)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_7(t)+N(0;10E-4)$  par une parabole

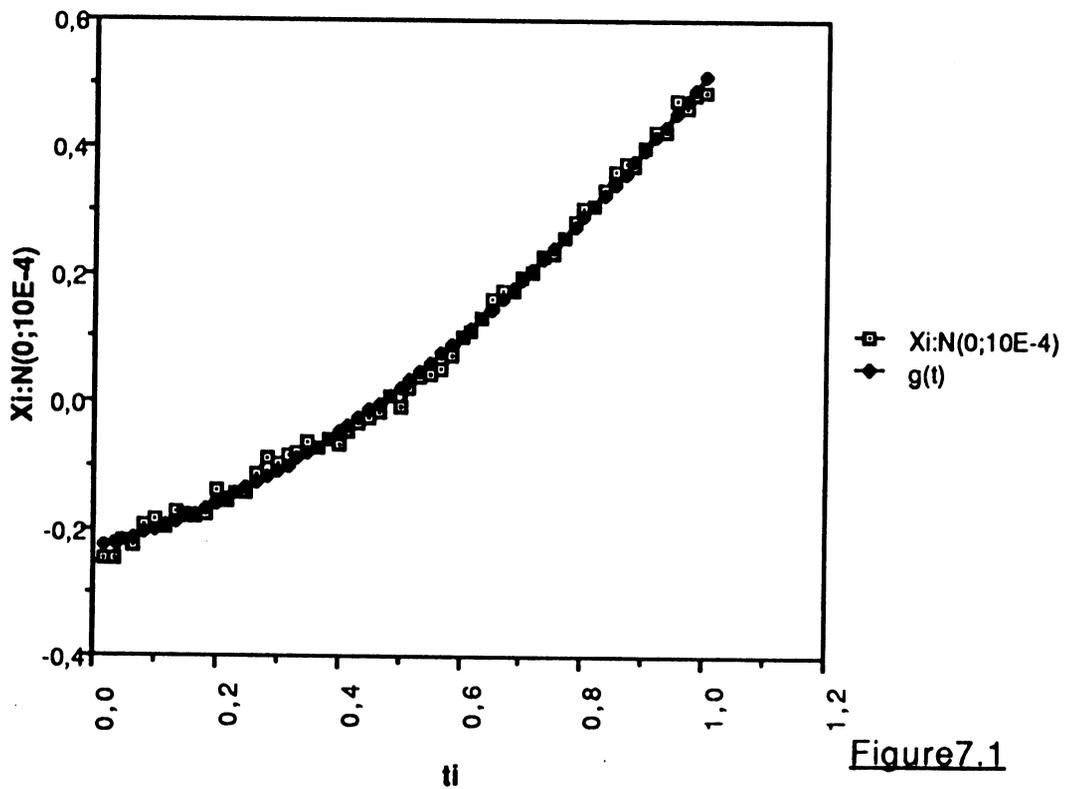
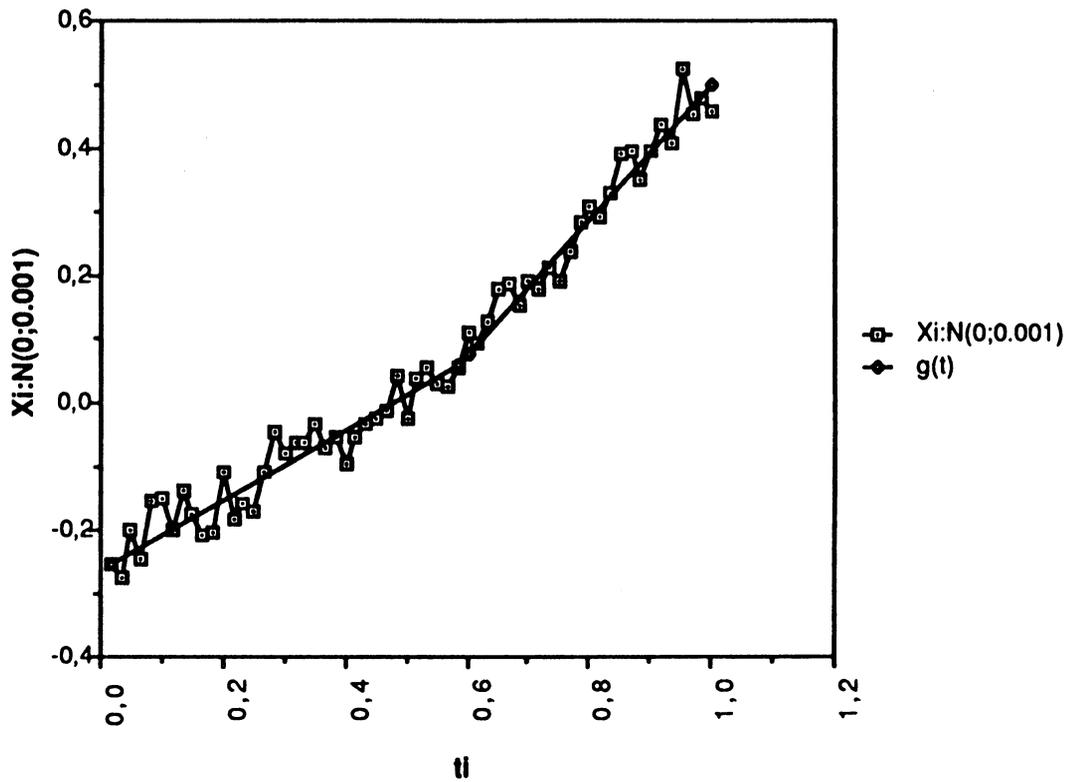
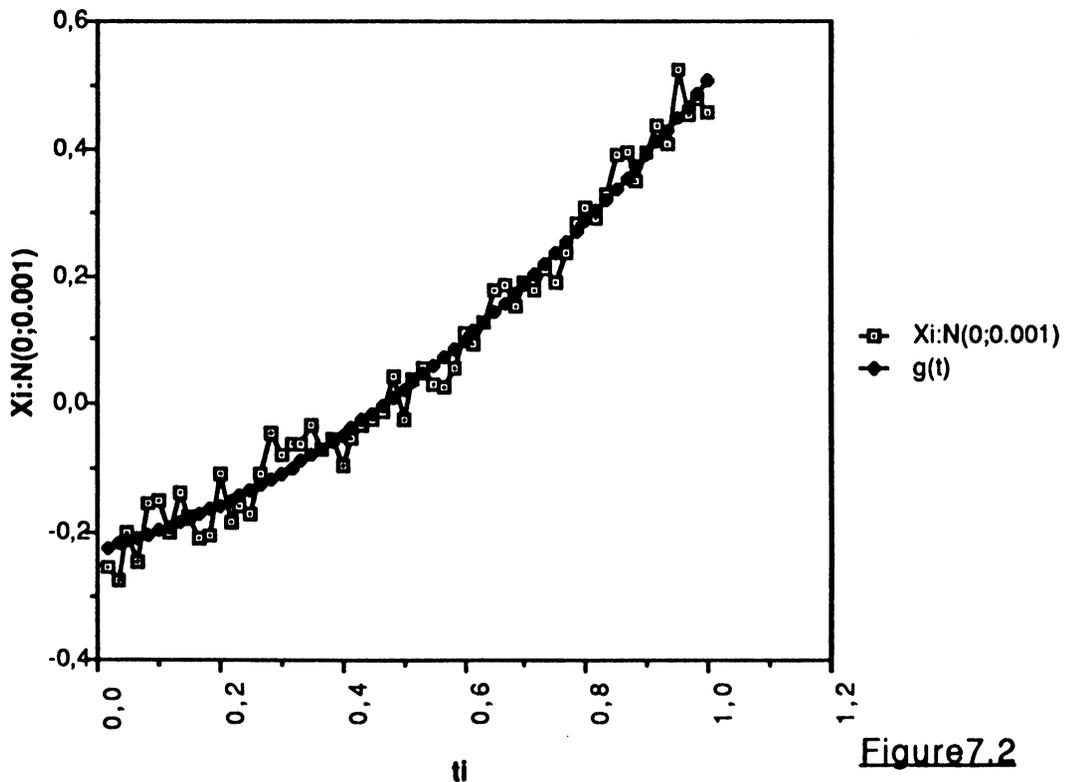


Figure7.1

**Approximation du nuage  $f_7(t)+N(0;0.001)$  par 2demi.droites****Approximation du nuage  $f_7(t)+N(0;0.001)$  par une parabole****Figure 7.2**

**TABLEAU 8.1** :  $f_g(t) =$

$$\begin{array}{ll} (1/2)(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/4 \\ (t - 3/4) & \text{si } t \geq 3/4 \end{array}$$

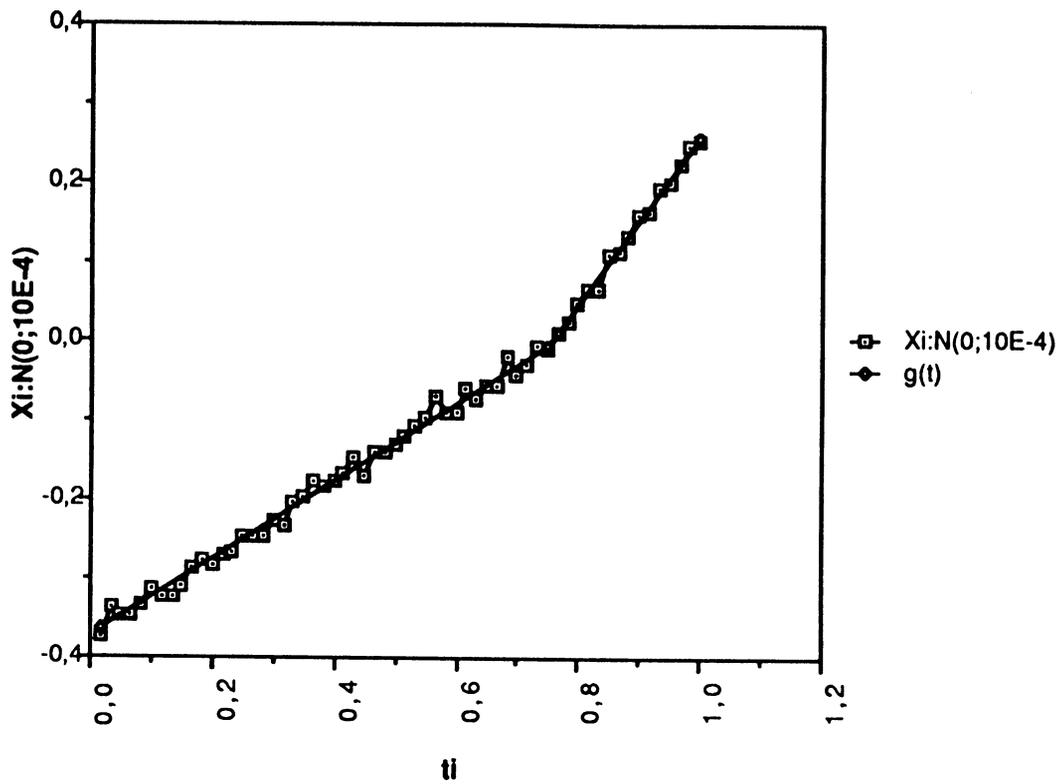
$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$ Figure8.1	$g(t, \theta) =$ $-0.0048 + 0.49(t - 45/60)$ si $t \leq 45/60$ $-0.0048 + 1.04(t - 45/60)$ si $t > 45/60$	$g(t, \theta) = 0.3t^2 + 0.277t - 0.348$
	$\mathcal{A}_n = -0.565$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = 11.37$ on rejette $H_0$
$10^{-3}$ Figure8.2	$g(t, \theta) =$ $-0.036 + 0.462(t - 43/60)$ si $t \leq 43/60$ $-0.036 + 1.046(t - 43/60)$ si $t > 43/60$	$g(t, \theta) = 0.35t^2 + 0.22t - 0.341$
	$\mathcal{A}_n = -1.868$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = 1.370$ on accepte $H_0$
$10^{-2}$	$g(t, \theta) =$ $-0.266 + 0.23(t - 19/60)$ si $t \leq 19/60$ $-0.266 + 0.68(t - 19/60)$ si $t > 19/60$	$g(t, \theta) = 0.52t^2 + 0.05t - 0.318$
	$\mathcal{A}_n = -1.868$ on accepte $H_0$	$\mathcal{A}_n = -0.027$ on accepte $H_0$

**TABLEAU 8.2** :  $f_g(t) =$

$$\begin{array}{ll} (1/2)(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/4 \\ (t - 3/4) & \text{si } t \geq 3/4 \end{array}$$

$\sigma^2$	Approximation par des demi-droites	Approximation par une parabole
$10^{-4}$ Figure 8.3	$g(t, \theta) =$ $-0.0034 + 0.491(t - 45/60)$ si $t \leq 45/60$ $-0.0034 + 1.019(t - 45/60)$ si $t > 45/60$	$g(t, \theta) = 0.227t^2 + 0.296t - 0.35$
	$\mathfrak{A}_n = -0.089$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 12.27$ on rejette $H_0$
$10^{-3}$ Figure 8.4	$g(t, \theta) =$ $-0.0004 + 0.478(t - 46/60)$ si $t \leq 46/60$ $-0.0004 + 1.1(t - 46/60)$ si $t > 46/60$	$g(t, \theta) = 0.282t^2 + 0.282t - 0.345$
	$\mathfrak{A}_n = -0.027$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 1.929$ on rejette $H_0$
$10^{-2}$ Figure 8.5	$g(t, \theta) =$ $-0.307 + 0.388(t - 9/60)$ si $t \leq 9/60$ $-0.307 + 0.55(t - 9/60)$ si $t > 9/60$	$g(t, \theta) = 0.298t^2 + 0.239t - 0.33$
	$\mathfrak{A}_n = -0.682$ on accepte $H_0$	$\mathfrak{A}_n = 0.420$ on accepte $H_0$

### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;10E-4)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;10E-4)$ par une parabole

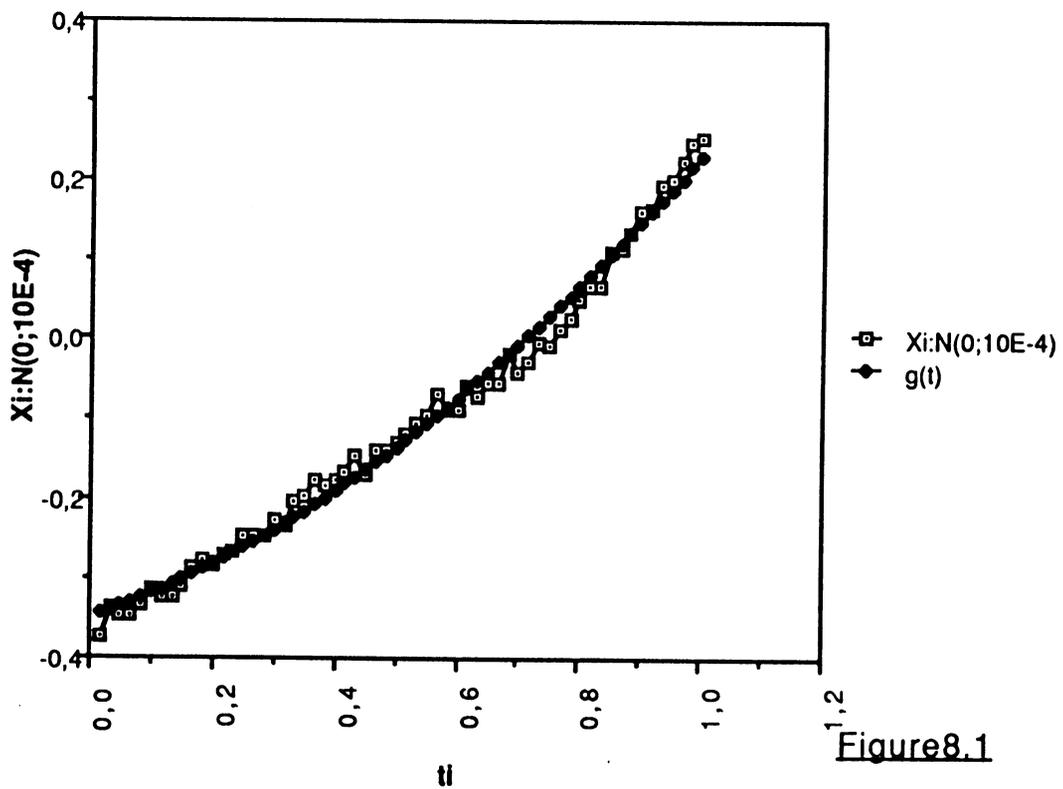
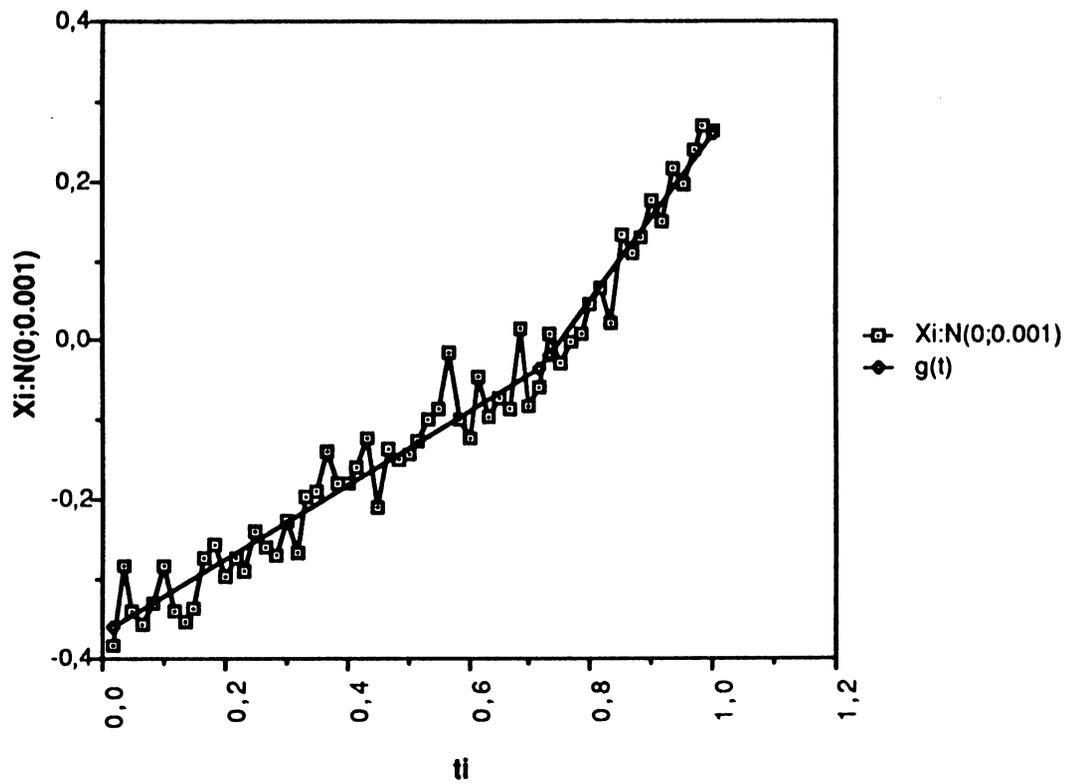


Figure 8.1

### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

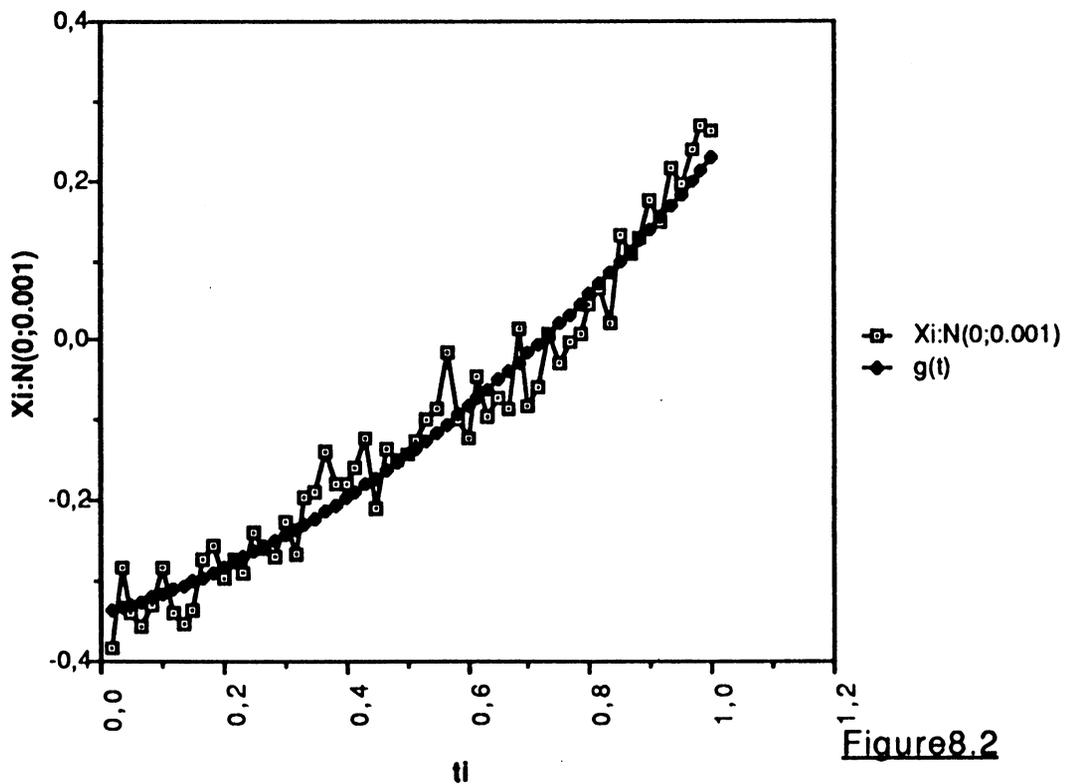


Figure 8.2

**Remarque 3**

Remarquons là aussi que dans le cas où la fonction  $f$  est linéaire par morceaux -exemple 3-, plus la variance  $\sigma^2$  est petite, plus la fonction approximative constituée de deux demi-droites s'approche de la vraie fonction. Dans ce cas le test d'adéquation accepte le modèle avec rupture et rejette le modèle parabolique. Ce qui est parfaitement normal.

**III. TEST DE COMPARAISON**

Le théorème 5 du chapitre III et le théorème 1 ont pour conséquence le résultat suivant :

**Théorème 3**

Sous les hypothèses  $A_1 \rightarrow A_9$  et (a) :

$(n^{1/2})(1/2d_n) [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - (\Delta_{1\min} - \Delta_{2\min}) ]$  converge en loi vers la loi  $N(0, \sigma^2)$ .

**Remarque :**

Le résultat de ce théorème peut être utilisé dans un test en ce qui concerne le choix d'un modèle parmi deux modèles approximatifs, en considérant la statistique  $C_n(\cdot)$  définie par :

Si on pose  $D = \Delta_{1m} - \Delta_{2m}$ ,

$$C_n(D) = (n^{1/2})(1/2\sigma d_n) [ H_{1n}(\theta_{1n}) - H_{2n}(\theta_{2n}) - D ].$$

Pour un seuil de signification  $\alpha$ , on pose  $c_\alpha = N^{-1}(1-\alpha)$  où  $N(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite. On peut utiliser la statistique  $C_n(0)$  dans les tests suivants :

\* **Premier test :** tester  $H_0 : D = 0$   
contre  $H_1 : D \neq 0$

Si  $|C_n(0)| \leq c_{\alpha/2}$ , alors on accepte  $H_0$  et donc il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles. Le problème est donc résolu.

\* Deuxième test : tester  $H_0 : D = 0$   
contre  $H_1 : D > 0$

Si  $C_n(0) \geq c_\alpha$ , on choisit le modèle  $\mathcal{M}_2$ .

\* Troisième test : tester  $H_0 : D = 0$   
contre  $H_1 : D < 0$

Si  $C_n(0) \leq -c_\alpha$ , on choisit le modèle  $\mathcal{M}_1$ .

On peut envisager d'étudier le cas mixte : choix d'un modèle parmi un modèle de fonctions sans rupture et un modèle de fonctions présentant une rupture.

Nous établissons dans l'annexe 3, un programme que nous appelons programme de Comparaison, basé sur la statistique  $C_n(0)$ . A l'aide de ce programme, nous proposons les deux applications suivantes :

### **EXEMPLES D'APPLICATION :**

On considère les modèles approximatifs suivants :

$$\mathcal{M}_1 = \{g(t, \theta) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \mid \theta = (\alpha, \beta, \gamma)\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{g(t, \theta) = \alpha + \beta_1(t-\tau)\mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) + \beta_2(t-\tau)\mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t) \mid \theta = (\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2)\}$$

Dans les tableaux suivants, nous allons faire le test de comparaison pour ces deux modèles, à un seuil de signification  $\alpha = 5\%$ , en faisant varier la variance  $\sigma^2$ . Nous reprenons les mêmes fonctions de régression que nous avons utilisées dans les exemples d'applications du test d'adéquation.  $c_{\alpha/2} = 1.960$ ,  $c_\alpha = 1.645$ .

Tableau 1.4 :  $f_1(t) = t^2 - t + 1$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-4}$	-9.218	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-3}$	-4.073	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-2}$	-2.258	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-1}$	-1.329	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Figure 1.7

Figure 1.8

Tableau 1.5 ;  $f_1(t) = t^2 - t + 1$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-4}$	-7.144	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-3}$	-1.692	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-2}$	0.162	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-1}$	-1.011	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

**Tableau 1.6 :  $f_1(t) = t^2 - t + 1$**

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-4}$	-6.906	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-3}$	-1.065	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-2}$	0.697	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-1}$	1.036	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$**

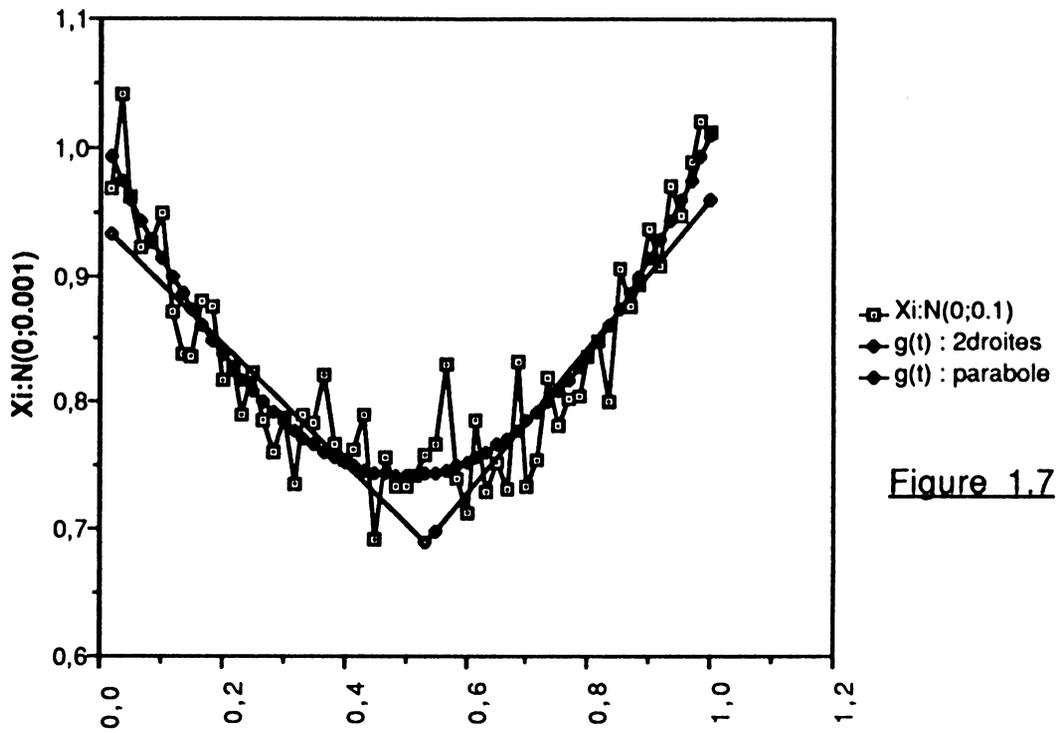


Figure 1.7

**Le modèle parabolique est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.1)$**

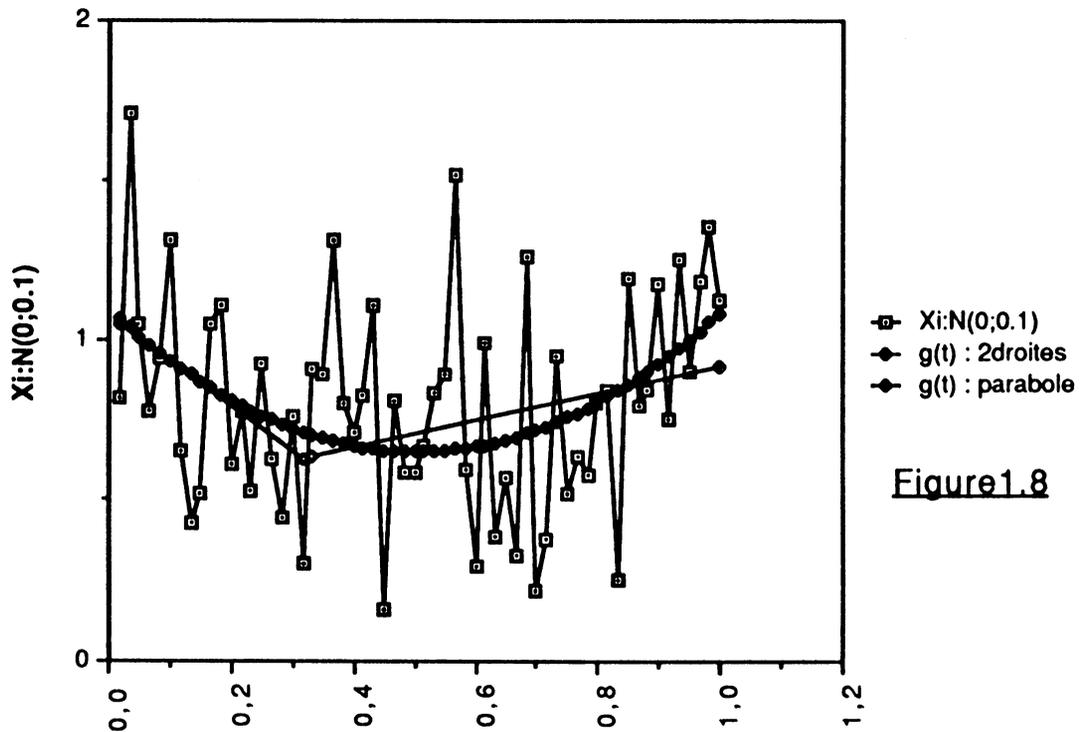


Figure1.8

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

Tableau 2.4 :  $f_2(t) = \exp(2t)$ 

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-2}$	-4.698	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-1}$	-2.582	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
0.25	-2.631	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
2	-1.719	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
3	-1.558	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_0$

Figure2.9

Tableau 2.5 :  $f_2(t) = \exp(2t)$ 

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-2}$	-1.993	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-1}$	-1.075	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
0.25	-0.842	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

Tableau 2.6 :  $f_2(t) = \exp(2t)$ 

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-2}$	-2.477	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
Figure2.12		On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-1}$	-0.895	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure2.13		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
0.25	-1.657	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
Figure2.14		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$

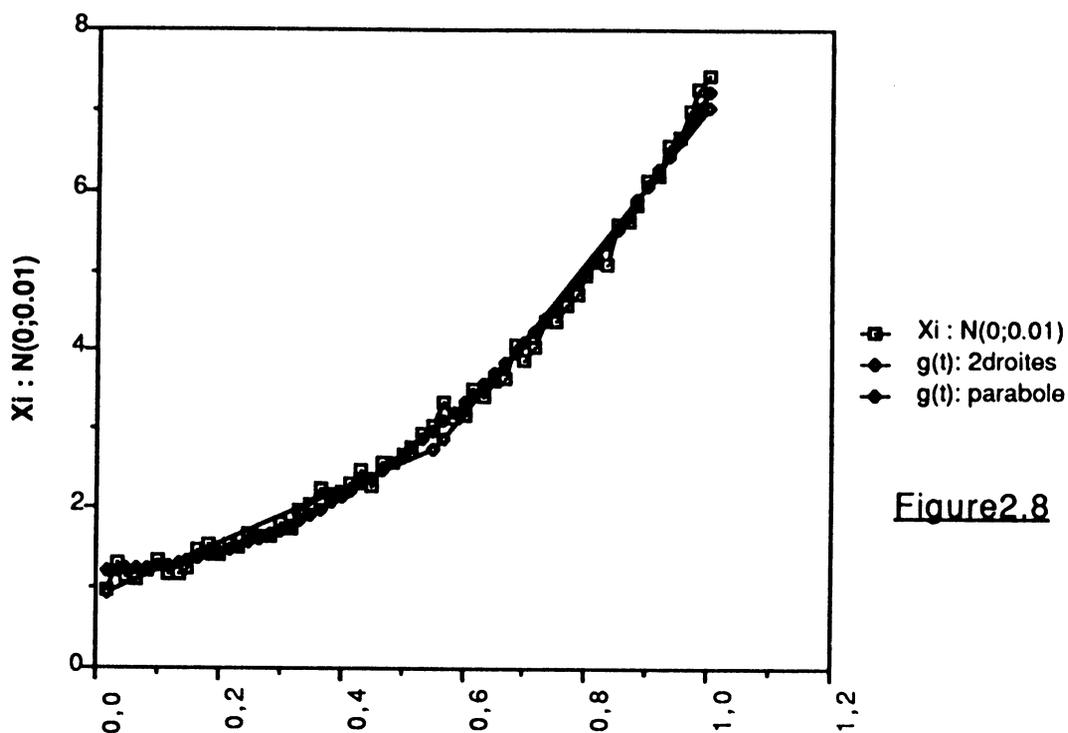


Figure 2.8

Le modèle parabolique est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;3)$

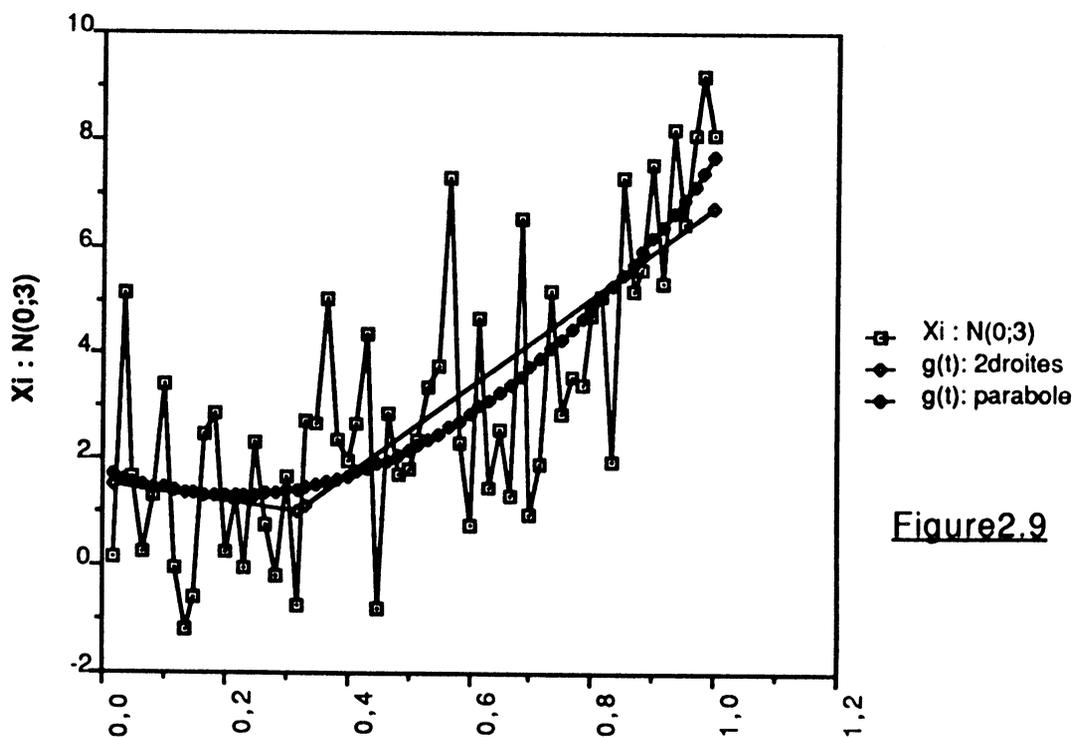


Figure 2.9

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

Tableau 3.4 :  $f_3(t) = \exp(t/2)$ 

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-6}$	-12.64	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-5}$	-5.472	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-4}$	-2.926	On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-2}$	-1.116	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Figure3.9

Figure3.10

Tableau 3.5 :  $f_3(t) = \exp(t/2)$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-6}$	-10.42	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-5}$	-2.643	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-4}$	-0.115	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-2}$	-0.526	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

Figure3.11

Figure3.12

Tableau 3.6 :  $f_3(t) = \exp(t/2)$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-6}$	-10.32	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
Figure3.13		On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-5}$	-2.789	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
		On rejette $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-4}$	0.143	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$	0.782	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure3.14		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;10E-5)$

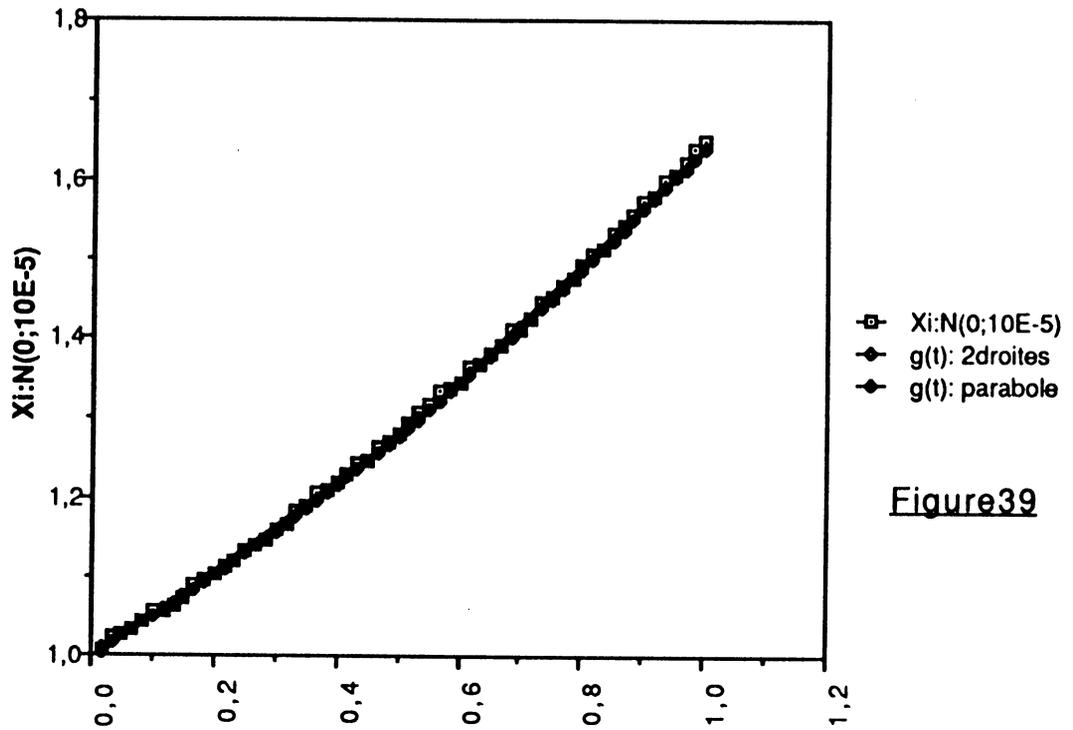


Figure39

Le modèle parabolique est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;0.01)$

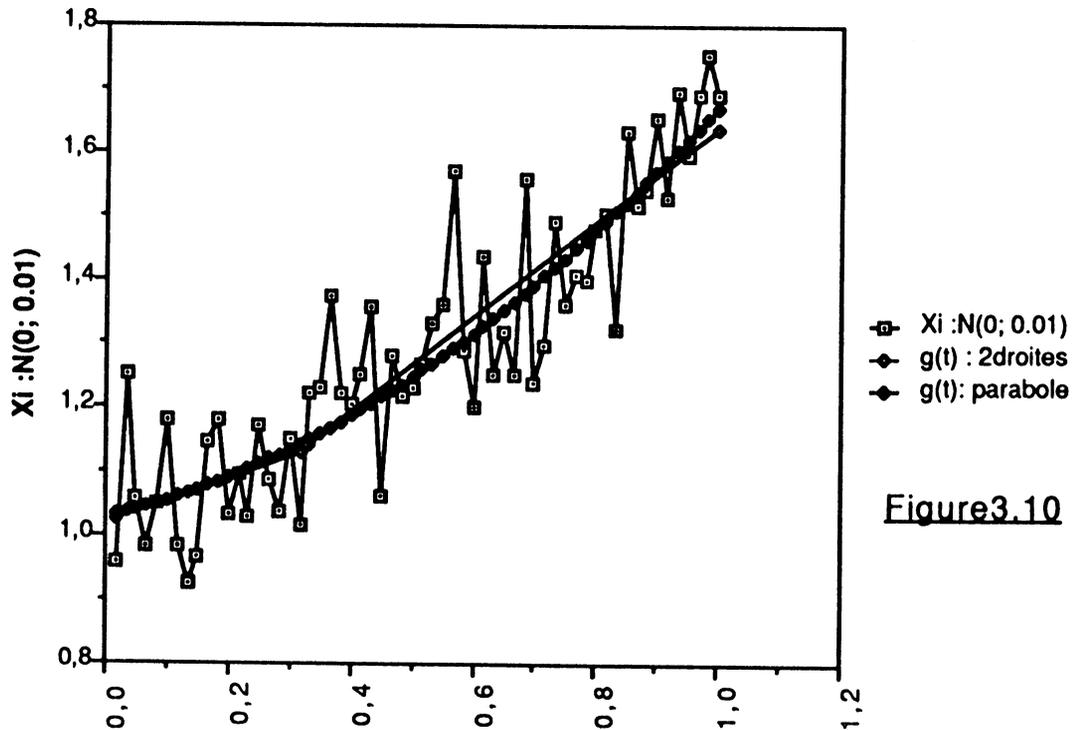


Figure3.10

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

Tableau 4.3 :  $f_4(t)=$

$$1/2 - t \quad \text{si } t \leq 1/2$$

$$t - 1/2 \quad \text{si } t > 1/2$$

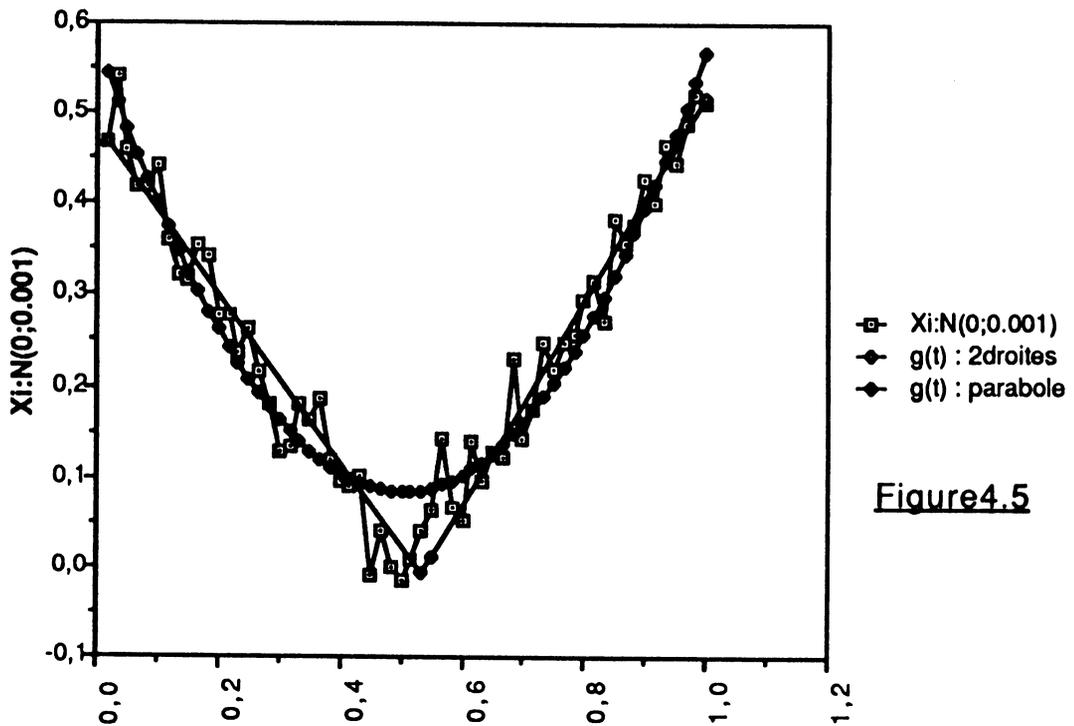
$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-3}$ Figure4.5	1.722	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
$10^{-2}$ Figure4.6	-0.543	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
		$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) < -1.645$
$10^{-1}$ Figure4.7	-1.740	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$

Tableau 4.4 :  $f_4(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2 - t & \text{si } t \leq 1/2 \\ t - 1/2 & \text{si } t > 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-3}$	2.678	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) > 1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-2}$	-0.776	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-1}$	-0.843	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

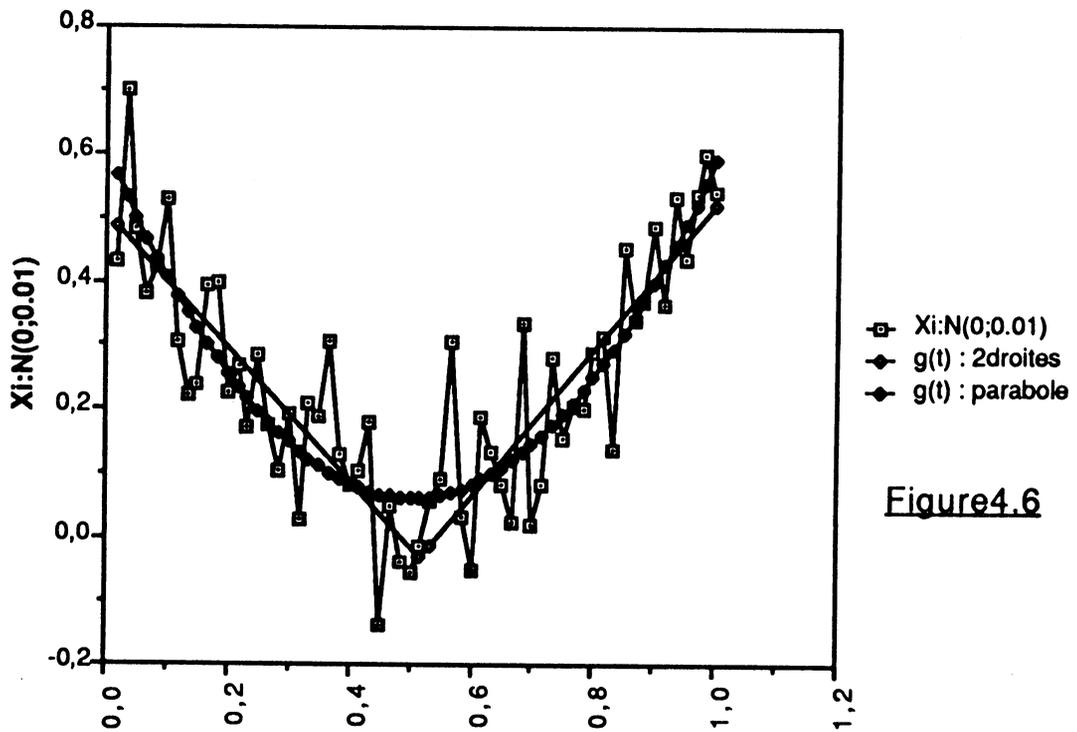
**Test de comparaison concernant le nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$**



**Figure 4.5**

**Le modèle avec rupture est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_4(t)+N(0;0.01)$**



**Figure 4.6**

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

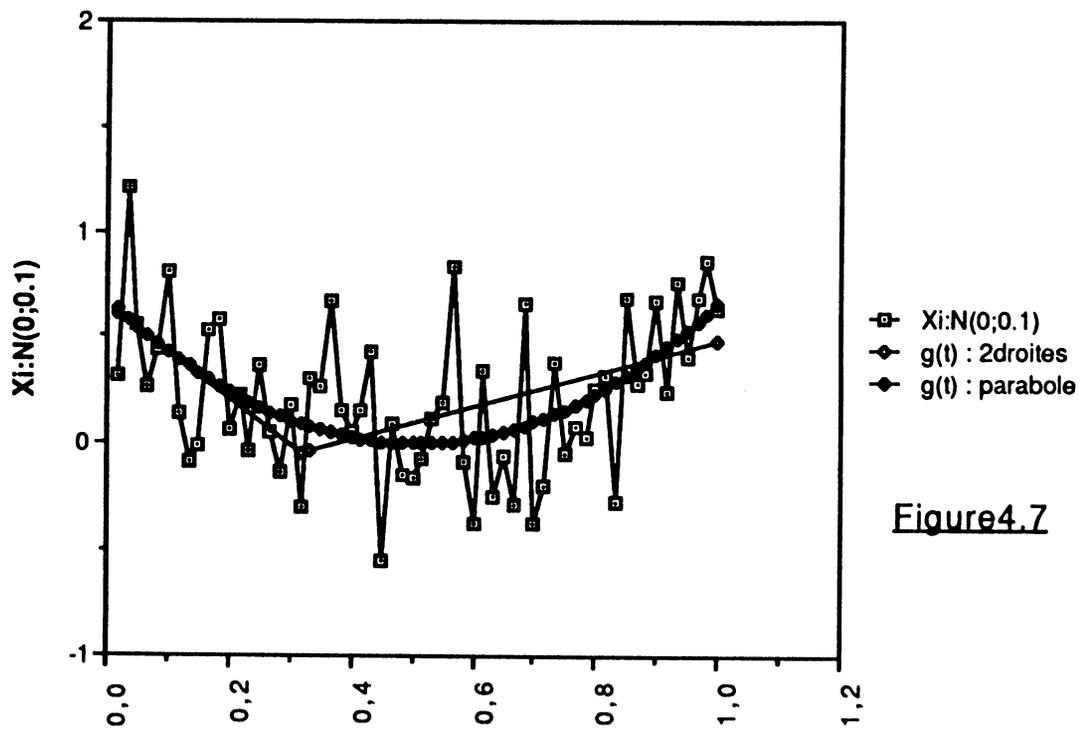
**Test de comparaison concernant le nuage  $f_4(t)+N(0;0.1)$** **Figure 4.7****Le modèle parabolique est préférable**

Tableau 5.3 :  $f_5(t) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1/2 - t) && \text{si } t \leq 1/2 \\ & \frac{1}{2}(t - 1/2) && \text{si } t > 1/2 \end{aligned}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-3}$	1.931	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure5.5		On accepte $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$	1.075	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure5.6		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
$10^{-1}$	1.165	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Tableau 5.4 :  $f_5(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2(1/2 - t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ 1/2(t - 1/2) & \text{si } t > 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-3}$	2.524	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure 5.7		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$	1.428	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure 5.8		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$
$10^{-1}$	0.451	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Test de comparaison concernant le nuage  $f_5(t)+N(0;0.001)$

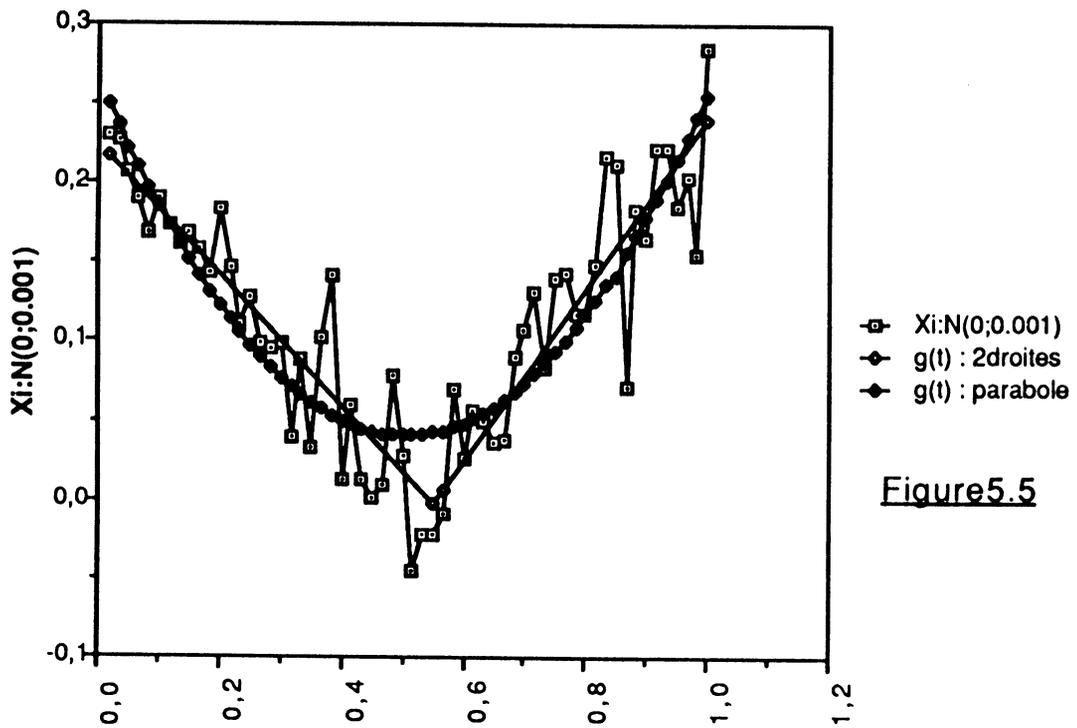


Figure 5.5

Le modèle avec rupture est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_5(t)+N(0;0.01)$

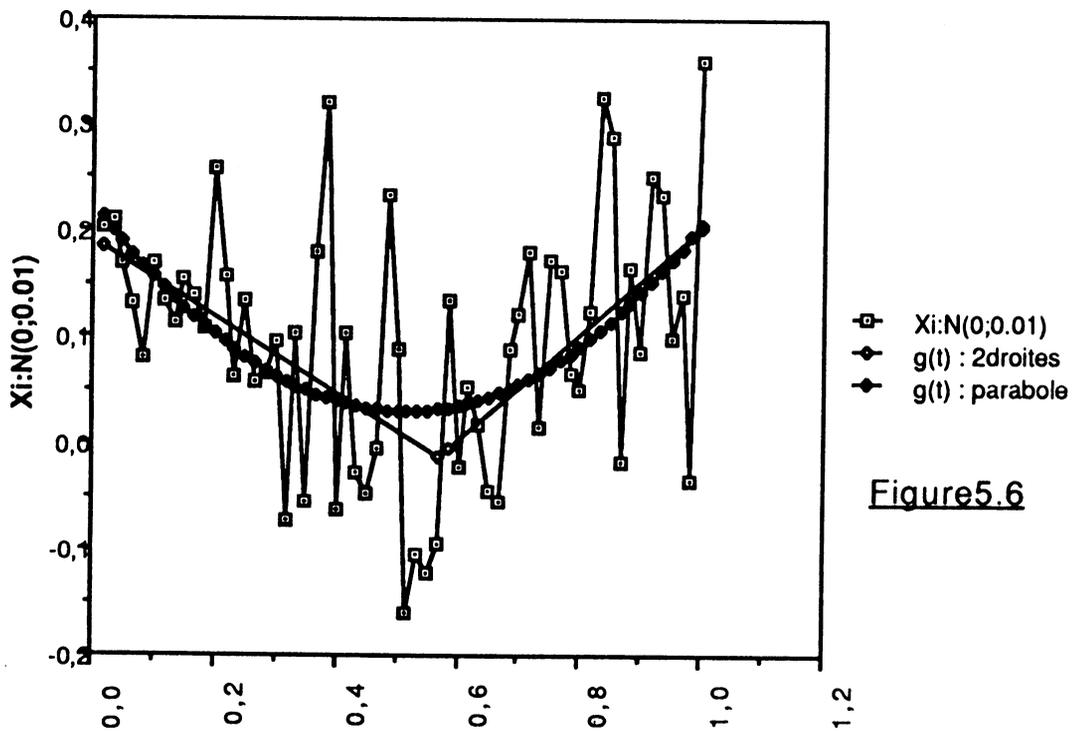


Figure 5.6

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

**Tableau 6.3 :**  $f_6(t) =$

$$\begin{aligned} & 0.4 - 0.3(t - 3/4) && \text{si } t \leq 3/4 \\ & 0.4 + 0.6(t - 3/4) && \text{si } t > 3/4 \end{aligned}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-3}$ Figure6.5	3.777	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) > 1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure6.6	-2.397	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < -1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_1$
$10^{-1}$ Figure6.7	-1.306	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

Tableau 6.4 :  $f_{\sigma}(t) =$

$$\begin{aligned} & 0.4 - 0.3(t - 3/4) && \text{si } t \leq 3/4 \\ & 0.4 + 0.6(t - 3/4) && \text{si } t > 3/4 \end{aligned}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-3}$	3.948	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure6.8		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$	2.017	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure6.9		On rejette $H_0$	On accepte $H_0$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-1}$	-0.419	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure6.10		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.001)$

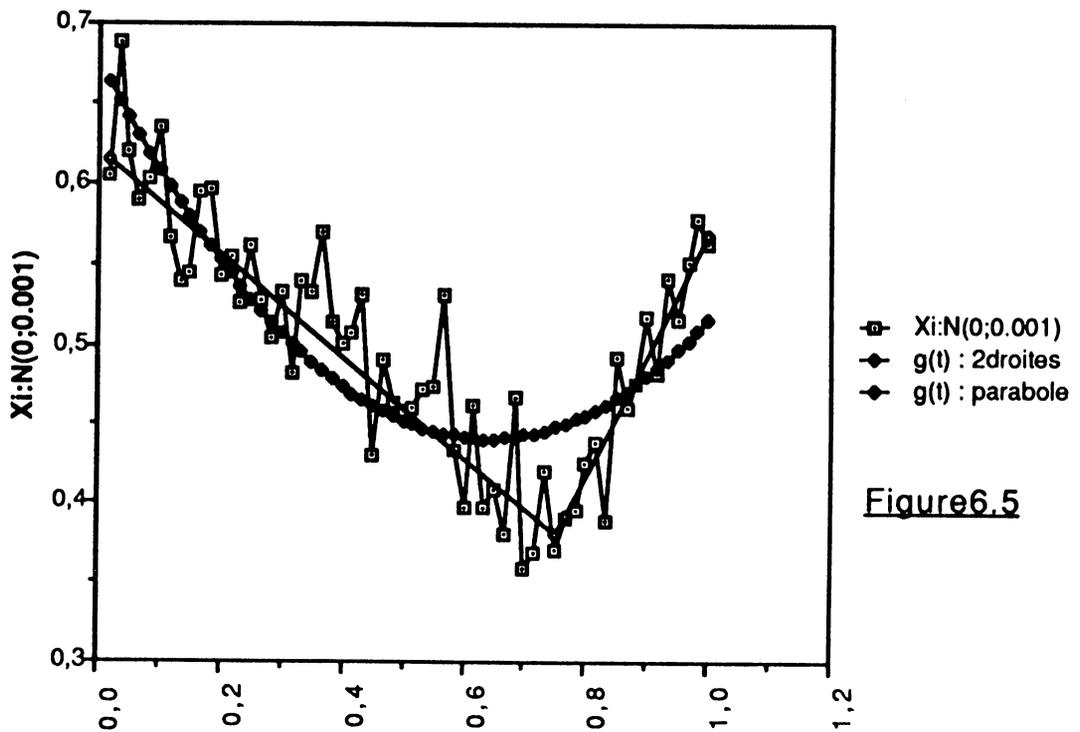


Figure6.5

Le modèle avec rupture est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.01)$

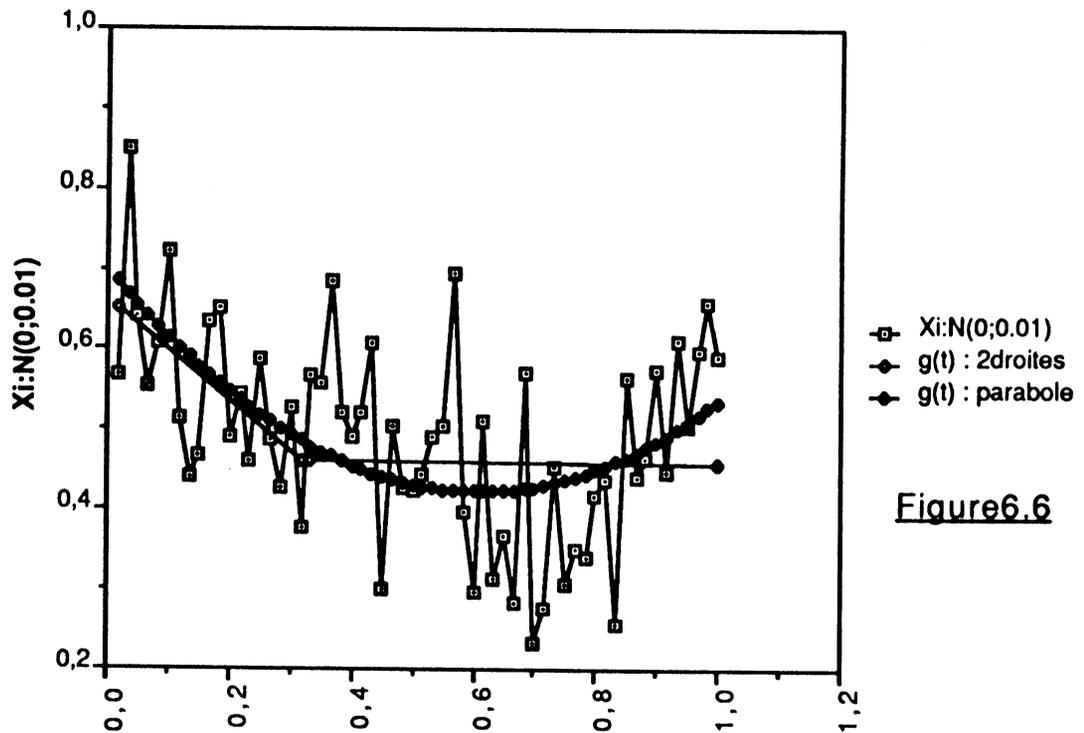
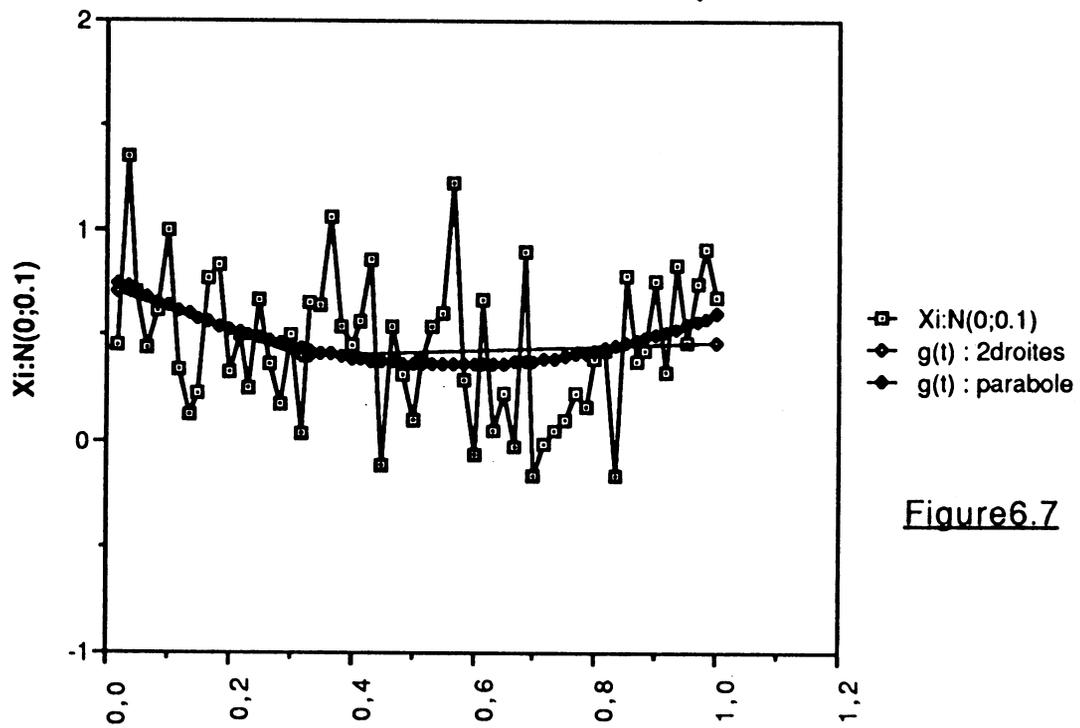


Figure6.6

Le modèle parabolique est préférable

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.1)$** **Figure6.7**

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

Tableau 7.3 :  $f_7(t) =$

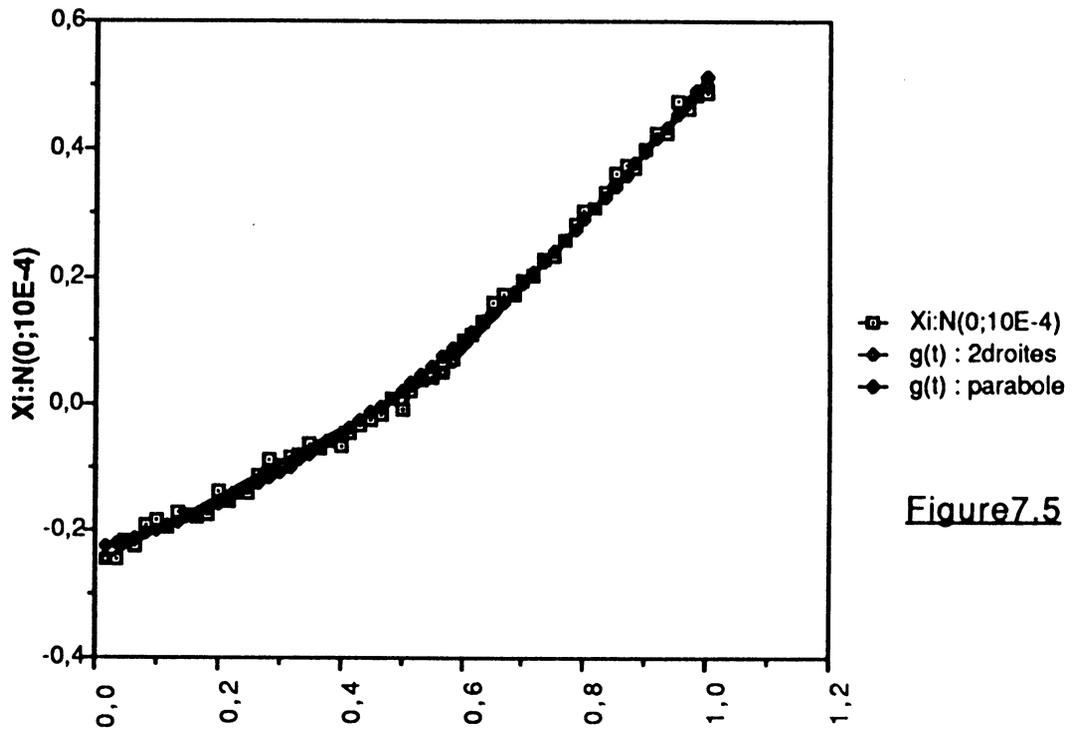
$$\begin{array}{ll} 1/2(t - 1/2) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (t - 1/2) & \text{si } t > 1/2 \end{array}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-4}$	1.761	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > 1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-3}$	0.903	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-2}$	-1.401	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

Tableau 7.4 :  $f_7(t) = \begin{cases} 1/2(t - 1/2) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (t - 1/2) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$

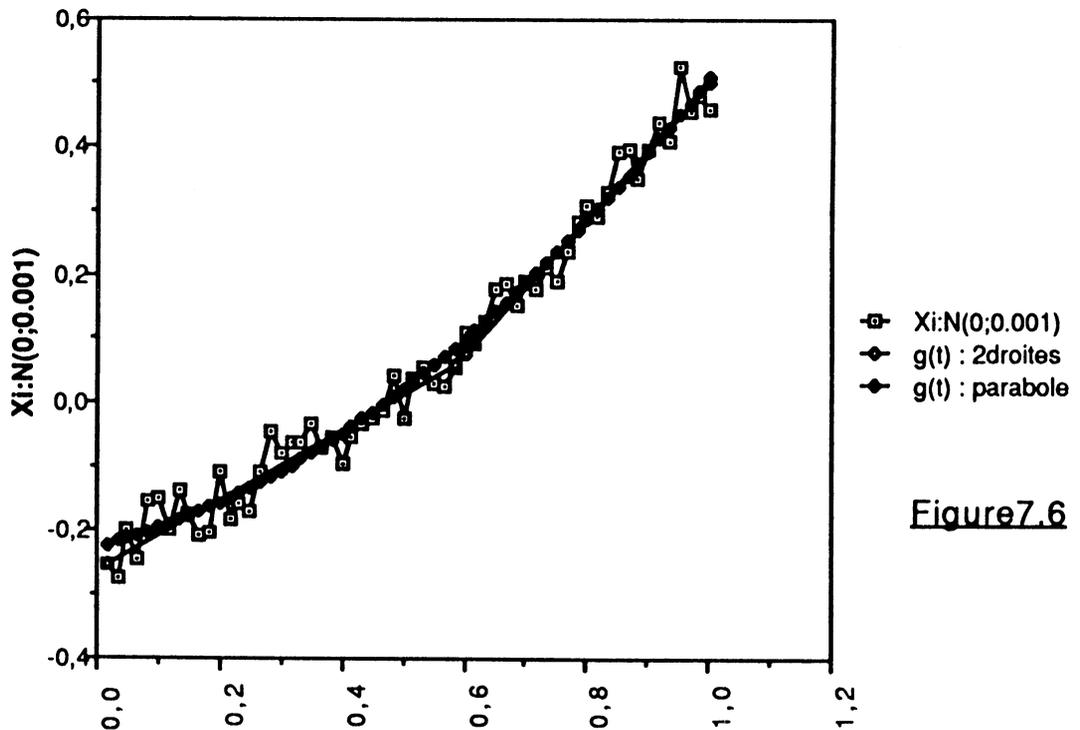
$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D \neq 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D > 0$	$H_0 : D = 0$ $H_1 : D < 0$
$10^{-4}$	2.118	$ C_n(0)  > 1.96$ On rejette $H_0$	$C_n(0) > 1.645$ On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-3}$	0.689	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$
$10^{-2}$	-0.072	$ C_n(0)  < 1.96$ On accepte $H_0$	$C_n(0) < 1.645$ On accepte $H_0$	$C_n(0) > -1.645$ On accepte $H_0$

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_7(t)+N(0;10E-4)$**



**Figure 7.5**

**Le modèle avec rupture est préférable**  
**Test de comparaison concernant le nuage  $f_7(t)+N(0;0.001)$**



**Figure 7.6**

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

Tableau 8.3 :  $f_g(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/4 \\ (t - 3/4) & \text{si } t > 3/4 \end{array}$$

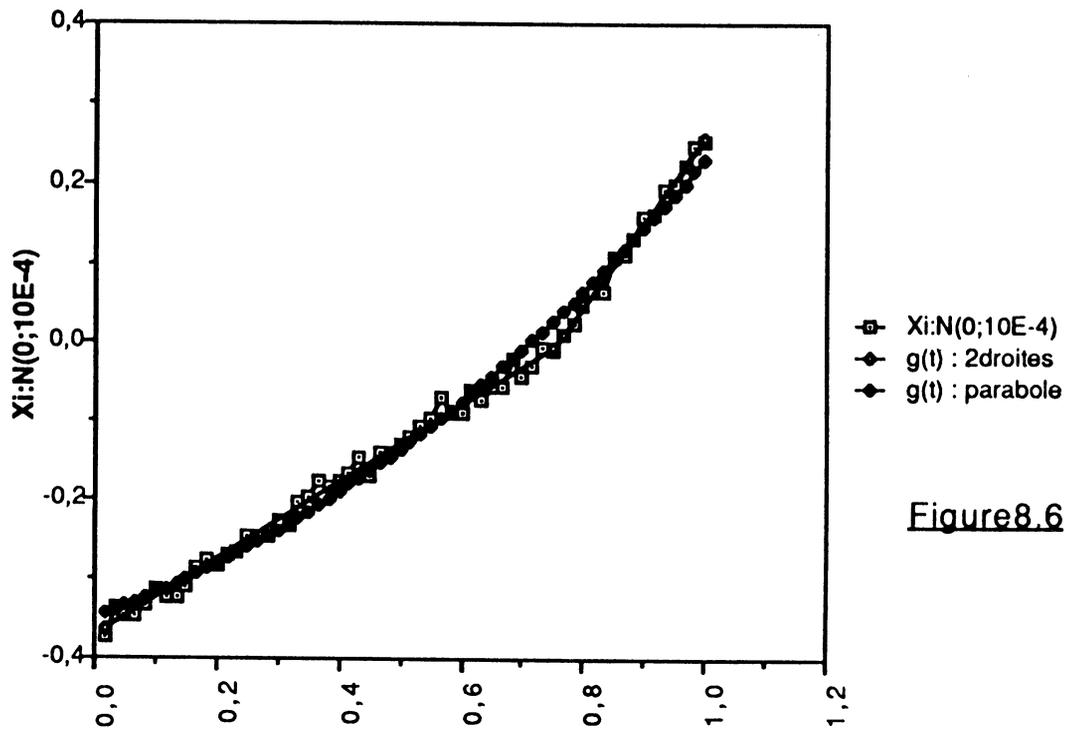
$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-4}$	5.926	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure8.6		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-3}$	2.519	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure8.7		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$	-1.688	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
Figure8.8		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

**Tableau 8.4 :**  $f_g(t) =$

$$\begin{array}{ll} 1/2(t - 3/4) & \text{si } t \leq 3/2 \\ (t - 3/4) & \text{si } t > 3/4 \end{array}$$

$\sigma^2$	$C_n(0)$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$	$H_0 : D = 0$
		$H_1 : D \neq 0$	$H_1 : D > 0$	$H_1 : D < 0$
$10^{-4}$ Figure8.9	6.421	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-3}$ Figure8.10	2.734	$ C_n(0)  > 1.96$	$C_n(0) > 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On rejette $H_0$	On accepte $H_1$ On choisit $\mathcal{M}_2$	On accepte $H_0$
$10^{-2}$ Figure8.11	-0.938	$ C_n(0)  < 1.96$	$C_n(0) < 1.645$	$C_n(0) > -1.645$
		On accepte $H_0$	On accepte $H_0$	On accepte $H_0$

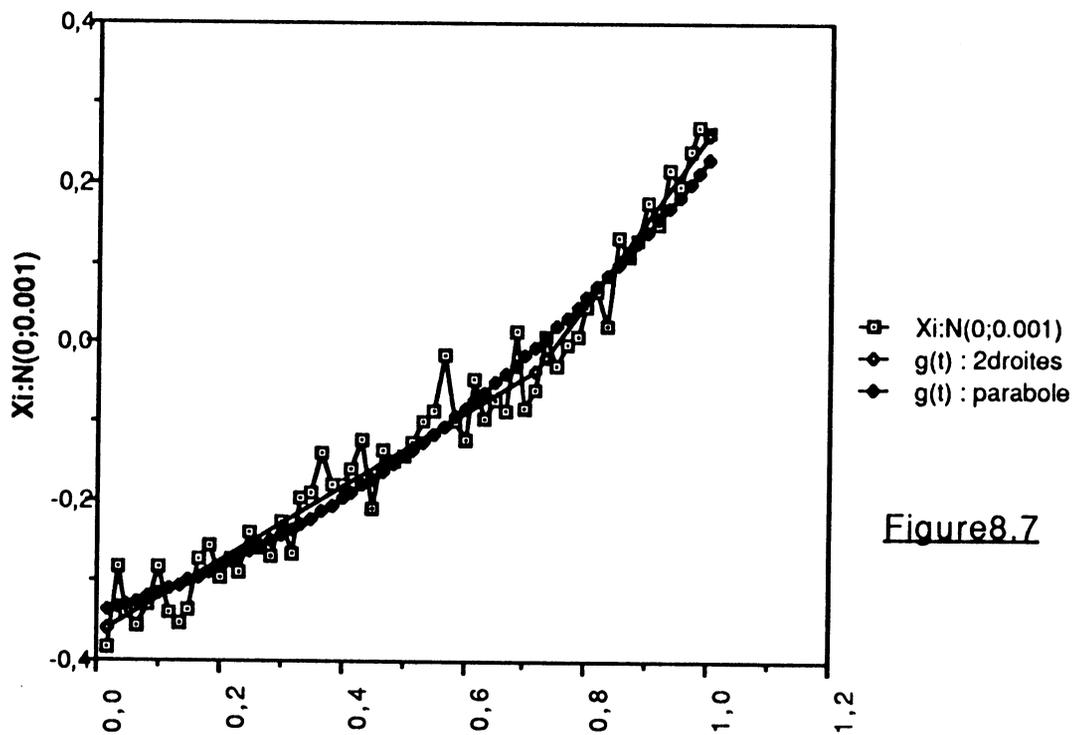
**Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;10E-4)$**



**Figure 8.6**

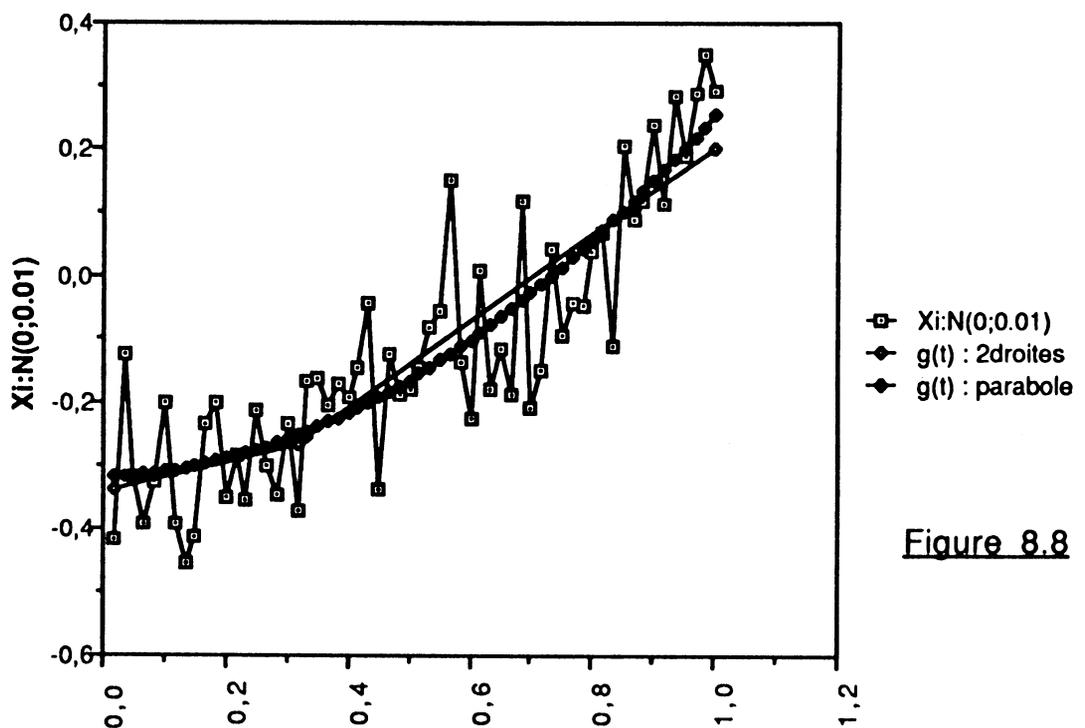
**Le modèle avec rupture est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;0.001)$**



**Figure 8.7**

**Le modèle avec rupture est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;0.01)$** **Figure 8.8****Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

## IV. TEST DU RAPPORT DES MOINDRES CARRES

### IV.1. Introduction

La fonction de régression  $f$  étant inconnue. Si après avoir fait le test d'adéquation, on accepte l'hypothèse qu'un modèle  $\mathcal{M} = \{ g(t, \theta), t \in [0, 1], \theta \in \Theta \}$  est un modèle adéquat - c.a.d qu'il existe un élément  $\theta$  de  $\Theta$  tel que :  $\forall t \in [0, 1], f(t) = g(t, \theta)$  -, on peut se proposer alors de tester l'hypothèse  $H_0 : \{ \theta \in \Theta_0 \}$  contre l'hypothèse  $H_1 : \{ \theta \in \Theta - \Theta_0 \}$  où  $\Theta_0$  un sous ensemble compact de  $\Theta$ .

Soit alors :

$$\begin{aligned} H_0 &: \{ \theta \in \Theta_0 \} \\ \mathfrak{H}(\Theta_0, \Theta) \\ H_1 &: \{ \theta \in \Theta - \Theta_0 \} \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} H_n[\Theta_0] &= \min_{\theta \in \Theta_0} H_n(\theta), \\ H_n[\Theta] &= \min_{\theta \in \Theta} H_n(\theta) = H_n(\theta_n) \end{aligned}$$

où  $\theta_n$  est l'estimateur des moindres carrés du paramètre  $\theta$ .

Nous envisageons d'étudier le test défini par la statistique  $\lambda_n[\mathfrak{H}]$  :

$$\lambda_n[\mathfrak{H}] = (H_n[\Theta_0] / H_n[\Theta])^{(-n/2)}$$

et que nous appelons "rapport du minimum des moindres carrés". Les valeurs de  $\lambda_n[\mathfrak{H}]$  appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ .

Notons que, d'une part dans le cas gaussien, le rapport du minimum des moindres carrés  $\lambda_n[\mathfrak{H}]$  correspond au rapport du maximum de vraisemblance et d'autre part, le principe de vraisemblance conduit à des procédures satisfaisantes dans de nombreux cas particuliers.

## IV.2. Etude du rapport du minimum des moindres carrés

Avant d'entamer notre étude, nous allons rappeler certains résultats du chapitre III, qui nous permettent d'une part de préciser les hypothèses de travail et d'autre part de trouver la loi asymptotique de  $[-2\log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$ .

### IV.2.1. Rappels

Dans le cas d'un modèle adéquat ( $\Delta_{\min} = 0$ ), sous l'ensemble des hypothèses  $\{A_i, i=1, \dots, 8\}$  données dans le chapitre III, nous avons obtenu les résultats suivants :

$$R_1. \text{P-p.s. } \lim_n H'_n(\theta'_n) = \sigma^2.$$

$$R_2. \text{P-p.s. } \lim_n \theta_n = \lim_n \theta'_n = \lim_n \theta_{nm} = \theta_{\min}.$$

$$R_3. \mathfrak{L}[\lim_n (n^{1/2}(\theta'_n - \theta_{\min}))] = N(0, \sigma^2 G^{-1}).$$

$$R_4. \text{P-p.s. } \lim_n (1/2)((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n)/\partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} = G = ((\partial g(\cdot, \theta_{\min})/\partial \theta_i, \partial g(\cdot, \theta_{\min})/\partial \theta_j))$$

$$R_5. \text{P-p.s. } \lim_n n(H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) = \lim_n n(H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)) = 0.$$

Rappelons également le résultat classiques que nous allons utiliser pour la détermination de la loi asymptotique de  $[-2\log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$ .

#### r. Théorème [26]

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  de loi normale  $N(m, \Lambda)$ , où  $\Lambda$  est une matrice définie positive. Soit  $M$  une matrice définie positive et  $Z$  la variable aléatoire défini par :

$$Z = \langle MX, X \rangle = {}^t X M X$$

La fonction caractéristique  $\varphi_Z$  de  $Z$  est définie par :

$$\forall t \in [0, 1], \varphi_Z(t) = \det(1_E - 2itM\Lambda)^{-1/2} \exp[ it \langle (1_E - 2itM\Lambda)^{-1} M m, m \rangle ].$$

Dans le cas où  $M = \Lambda^{-1}$  et  $m = 0$ , la variable aléatoire  $Z = {}^t X M X$  suit la loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté.

### IV.2.2. Cas d'une hypothèse simple

Dans ce cas nous avons à faire le test suivant :

$$\begin{aligned} H_0 : \{ \theta = \theta_0 \} \\ \mathfrak{H}(\theta_0, \Theta) \\ H_1 : \{ \theta \in \Theta \setminus \{ \theta_0 \} \} \end{aligned}$$

#### Théorème 4

Sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$[-2 \log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons, dans un premier temps,  $H'_n$  qui est deux fois continûment dérivable, nous montrons ensuite, que si  $\lambda'_n$  désigne le rapport  $(H'_n(\theta_0) / H'_n(\theta'_n))^{(-n/2)}$  alors  $[-2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}]]$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté. Nous montrons que ce résultat s'étend à  $[-2 \log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$ . Pour ce faire, nous énonçons les résultats intermédiaires suivants :

#### Proposition 2

Sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$[-2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}]]$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté

#### Démonstration

Un développement limité appliqué à  $H'_n(\theta_0)$  entraîne que :

$$\begin{aligned} H'_n(\theta_0) = H'_n(\theta'_n) + t(\theta_0 - \theta'_n)(\partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i)_{i=1,p} \\ + (1/2)t^2(\theta_0 - \theta'_n)((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j)_{i,j})(\theta_0 - \theta'_n) \end{aligned}$$

où  $\tilde{\theta}_n$  appartient au segment de droite joignant  $\theta_0$  et  $\theta'_n$ .

Or

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{P-p.s. } \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N, \partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i = 0.$$

De plus, comme d'après le résultat  $R_2$ , P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_{\min}$ , donc ici P-p.s.  $\lim_n \tilde{\theta}_n = \theta_0$ , sous l'hypothèse  $H_0$ , par une démonstration analogue à celle de la proposition 4 du chapitre III, on obtient :

$$\text{P-p.s. } \lim_n (1/2) ((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} = G.$$

Nous pouvons écrire  $H'_n(\theta_0)$  de la façon suivante : P-p.s.  $\forall n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} H'_n(\theta_0) &= H'_n(\theta'_n) + {}^t(\theta_0 - \theta'_n) G (\theta_0 - \theta'_n) \\ &\quad + (1/2) {}^t(\theta_0 - \theta'_n) [ ((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} - 2G ] (\theta_0 - \theta'_n). \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} A_n &= (1/ H'_n(\theta'_n)) {}^t(\theta_0 - \theta'_n) G (\theta_0 - \theta'_n), \\ B_n &= (1/2 H'_n(\theta'_n)) {}^t(\theta_0 - \theta'_n) [ ((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} - 2G ] (\theta_0 - \theta'_n), \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$-2 \log \lambda'_n[\mathcal{H}] = n \log (1 + A_n + B_n).$$

En vertu des résultats  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_4$  que nous venons de rappeler, il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \text{P-p.s. } \lim_n A_n &= 0, \\ \text{P-p.s. } \lim_n B_n &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne donc que : Pour un réel  $\alpha$  tel que  $\alpha < 1$ ,

$$\text{P-p.s. } \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N, |A_n + B_n| \leq \alpha.$$

Par conséquent, en développant en série entière  $[\log(1 + A_n + B_n)]$ , on obtient :

$$\text{P-p.s. } \forall n \geq N, \log(1 + A_n + B_n) = A_n + B_n + (A_n + B_n)^2 R(A_n + B_n),$$

avec  $|R(u)| \leq K$  pour tout  $u$  tel que  $|u| < \alpha$ .

Nous aboutissons, par conséquent, à la formule suivante :

$$\text{P-p.s. } \forall n \geq N, n \log(1 + A_n + B_n) = nA_n + nB_n + n(A_n + B_n)^2 R(A_n + B_n).$$

Pour déterminer le comportement asymptotique de  $[n \log(1 + A_n + B_n)]$  et donc celui de  $(-2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}])$ , nous énonçons les lemmes intermédiaires suivants :

### Lemme 1

$nA_n$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté.

### Démonstration

$$nA_n = (\sigma^2 / H'_n(\theta'_n)) (n^{1/2})^t (\theta_0 - \theta'_n) (G/\sigma^2) (\theta_0 - \theta'_n) (n^{1/2}).$$

Comme P-p.s.  $\lim_n H'_n(\theta'_n) = \sigma^2$  et que  $n^{1/2}(\theta_0 - \theta'_n)$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$  de loi normale  $N(0, \sigma^2 G^{-1})$  et comme la fonction qui à tout  $X$  fait correspondre  ${}^t X(G/\sigma^2)X$  est continue sur  $\mathbb{R}^p$ , on en déduit alors que :

$$nA_n \text{ converge en loi vers } {}^t X(G/\sigma^2)X.$$

Le résultat r permet de conclure que  $nA_n$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté. ♣

### Lemme 2

$nB_n$  converge en probabilité vers zéro.

**Démonstration**

$$nB_n = (1/2 H'_n(\theta'_n)) (n^{1/2})^t (\theta_0 - \theta'_n) [((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j}]^{-2G} (\theta_0 - \theta'_n) (n^{1/2}).$$

Comme  $(n^{1/2}(\theta'_n - \theta_0))$  converge en loi vers la loi normale  $N(0, \sigma^2 G^{-1}) -R_3-$  et que d'une part, P-p.s.  $\lim_n (1/2)((\partial^2 H'_n(\tilde{\theta}_n) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j} = G$  et que d'autre part, P-p.s.  $\lim_n H'_n(\theta'_n) = \sigma^2$ , on en déduit alors que :

$nB_n$  converge en probabilité vers zéro. ♣

De plus, il résulte des lemmes 1 et 2 que :

$$n(A_n + B_n)(A_n + B_n) R(A_n + B_n) \text{ converge en probabilité vers zéro.}$$

Par conséquent, on en déduit que  $(-2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}])$  converge en loi vers la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté. D'où le résultat de la proposition 2. ♣

**Proposition 3**

Sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$[-2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}] + 2 \log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$  converge en probabilité vers zéro, quant  $n$  tend vers l'infini.

**Démonstration**

Sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$$\begin{aligned} -2 \log \lambda'_n[\mathfrak{H}] + 2 \log \lambda_n[\mathfrak{H}] &= -2 \log [ (H'_n(\theta_0) / H'_n(\theta'_n))^{(-n/2)} ] + 2 \log [ (H_n(\theta_0) / H_n(\theta'_n))^{(-n/2)} ] \\ &= n ( \log H'_n(\theta_0) - \log H'_n(\theta'_n) ) + n ( \log H_n(\theta_0) - \log H_n(\theta'_n) ) \end{aligned}$$

Montrons que les deux termes de cette égalité convergent en probabilité vers zéro.

On énonce pour ce fait les lemmes intermédiaires suivants :

**Lemme 3**

$n(\log H'_n(\theta_n) - \log H'_n(\theta'_n))$  converge en probabilité vers zéro quant  $n$  tend vers l'infini.

**Démonstration**

Posons :  $c = \sigma^2$

$$G_n = \{\omega \in \Omega / H_n(\theta_n) > c/2\} \cap \{\omega \in \Omega / H'_n(\theta'_n) > c/2\}.$$

Le résultat  $R_1$  entraîne que :

$$\lim_n P(G_n) = 1.$$

En vertu du résultat  $R_5$ , nous avons :

$$\forall r > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \text{tq}, \forall n \geq N_1, P\{\omega \in \Omega / n|H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)| > r\} \leq \varepsilon/2.$$

De plus,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \text{tq}, \forall n \geq N_2, P({}^c G_n) \leq \varepsilon/2.$$

En outre, pour tout  $\omega$  élément de  $G_n$ ,

$$n |\log(H_n(\theta_n)) - \log(H'_n(\theta'_n))| \leq (2/c) n |H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)|.$$

On en déduit alors que pour tout  $R > 0$ ,

$$P[\{\omega \in \Omega / n |\log(H_n(\theta_n)) - \log(H'_n(\theta'_n))| > R\}] = P_{n1} + P_{n2},$$

$$\text{où } P_{n1} = P[\{\omega \in \Omega / n |\log(H_n(\theta_n)) - \log(H'_n(\theta'_n))| > R\} \cap G_n],$$

$$\text{et } P_{n2} = P[\{\omega \in \Omega / n |\log(H_n(\theta_n)) - \log(H'_n(\theta'_n))| > R\} \cap {}^c G_n].$$

Nous pouvons grâce à ce qui précède, majorer les deux termes  $P_{n1}$  et  $P_{n2}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 * \quad & \forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \text{ tq, } \forall n \geq N_1, \\
 & P_{n1} \leq P [ \{ \omega \in \Omega / n \mid \log(H_n(\theta_n)) - \log(H'_n(\theta'_n)) \mid > R \} ] \\
 & \leq P [ \{ \omega \in \Omega / n \mid H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) \mid > cR/2 \} ].
 \end{aligned}$$

Si on pose  $R=2\varepsilon/c$ , on obtient :

$$P_{n1} \leq \varepsilon/2. \clubsuit$$

$$* \quad \forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \text{ tq, } \forall n \geq N_2$$

$$\begin{aligned}
 P_{n2} & \leq P [ {}^c G_n ] \\
 & \leq \varepsilon/2. \clubsuit
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $N_3$  désigne le maximum de  $N_1$  et  $N_2$ , nous obtenons le résultat suivant :

$$\forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}^*, \text{ tq, } \forall n \geq N_3, \quad P_{n1} + P_{n2} \leq \varepsilon.$$

d'où le résultat du lemme 3. ♣

#### Lemme 4

$n(\log(H'_n(\theta_0)) - \log(H_n(\theta_0)))$  converge en probabilité vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Ce lemme se démontre aisément d'une façon identique au précédent. ♣

Les lemmes 3 et 4 entraînent le résultat de la proposition 3. ♣

Les propositions 2 et 3 ont pour conséquence le résultat suivant :

$[-2 \log \lambda_n[\mathfrak{H}]]$  converge en loi vers la loi  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté.

Le théorème 4 est ainsi démontré. ♣

Nous avons établi un programme \* Mcarrés\* donné dans l'annexe 3, qui nous permet d'appliquer le test du rapport des moindres carrés au cas particulier où  $f$  est supposée appartenir à une classe  $\mathcal{M}$  de fonctions présentant une rupture définie par :

$$\mathcal{M} = \{g(t, \theta) = \alpha + \beta_1(t - \tau) \mathbb{1}_{[0, \tau]} + \beta_2(t - \tau) \mathbb{1}_{] \tau, 1]}\}, t \in [0, 1], \theta = (\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2).$$



**ANNEXES**



## ANNEXE 1

Nous montrons dans cette partie que les hypothèses du chapitre III sont vérifiées dans certains cas particuliers .

On considère le modèle de régression suivant :

$$X_i = f(t_i) + e_i , i \in \mathbb{N}^* .$$

où  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance  $\sigma^2$  inconnue.

Dans un premier temps, on suppose que la fonction  $f$  est connue. Prenons par exemple une famille de fonctions paraboliques :

$$f(t) = at^2 + bt + c .$$

On suppose aussi que les  $t_i, i=1, \dots, n$ , sont équidistants \*  $t_{i+1} - t_i = 1/n$  \* et on ne considère que le nuage de points obtenu à partir de  $\{f(t_i), i=1, \dots, n\}$ .

On peut approcher la fonction  $f$  par une classe de fonctions :

$$\mathcal{M} = \{g(t, \theta) = \alpha + \beta_1(t - \tau)\mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) + \beta_2(t - \tau)\mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t)\}$$

avec  $\theta = (\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  .

### \*Existence et unicité de $\theta_{\min}$

#### 1. Existence

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}^4, \quad \Delta_n(\theta) &= [f(\cdot) - g(\cdot, \theta)]_n^2 \\ &= (1/n) \sum_{i=1, n} (f(t_i) - g(t_i, \theta))^2 \\ &= \int_{[0, 1]} (f(t) - g(t, \theta))^2 dF_n(t) . \end{aligned}$$

On sait que  $F_n$  converge ponctuellement vers une fonction de répartition  $F$ , telle que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = t \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) + \mathbb{1}_{]1, \infty]} .$$

Le théorème de Helly-Bray entraîne que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^4, \lim_n \Delta_n(\theta) = \int_{[0, 1]} (f(t) - g(t, \theta))^2 dt = \Delta(\theta) .$$

$\Delta(\theta)$  étant une fonction continue sur  $\mathbb{R}^4$ , est donc bornée et atteint ses bornes sur un sous ensemble compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^4$ . Par conséquent:

$$\exists \theta_{\min} \in \Theta / \Delta(\theta_{\min}) = \min_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta).$$

On peut donc prendre un sous ensemble compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^4$ , suffisamment grand, de sorte que  $\theta_{\min}$  appartienne à l'intérieur de  $\Theta$ .

## 2. Unicité

$$\Delta(\theta) = \int_{[0,1]} [ at^2 + bt + c - \alpha - \beta_1(t - \tau)\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t) - \beta_2(t - \tau)\mathbb{1}_{[\tau,1]}(t) ]^2 dt.$$

On sait que  $\theta_{\min}$  vérifie :  $\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \partial \Delta(\theta_{\min}) / \partial \theta_i = 0$ . On obtient, par un calcul élémentaire simple les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \circ \partial \Delta(\theta) / \partial \beta_1 = 0 &\Rightarrow \\ -\alpha(\tau^2/2) + \beta_1(\tau^3/3) &= \int_{[0,\tau]} f(t)(t - \tau) dt. \end{aligned} \quad \mathbf{E}_1$$

$$\begin{aligned} \circ \partial \Delta(\theta) / \partial \beta_2 = 0 &\Rightarrow \\ -\alpha((1-\tau)^2/2) + \beta_2((1-\tau)^3/3) &= \int_{[\tau,1]} f(t)(t - \tau) dt. \end{aligned} \quad \mathbf{E}_2$$

$$\begin{aligned} \circ \partial \Delta(\theta) / \partial \alpha = 0 &\Rightarrow \\ \alpha - \beta_1(\tau^2/2) + \beta_2((1-\tau)^2/2) &= \int_{[0,1]} f(t) dt. \end{aligned} \quad \mathbf{E}_3$$

$$\begin{aligned} \circ \partial \Delta(\theta) / \partial \tau = 0 &\Rightarrow \\ \beta_1 \left[ \int_{[0,\tau]} f(t) dt - \alpha\tau + \beta_1(\tau^2/2) \right] + \beta_2 \left[ \int_{[\tau,1]} f(t) dt - \alpha(1-\tau) - \beta_2((1-\tau)^2/2) \right] &= 0. \end{aligned} \quad \mathbf{E}_4$$

Les équations  $E_3$  et  $E_4$  entraînent que :

$$\alpha(1-\tau) + \beta_2((1-\tau)^2/2) = \int_{[\tau,1]} f(t) dt. \quad \mathbf{E}_5$$

$$\alpha\tau - \beta_1(\tau^2/2) = \int_{[0,\tau]} f(t) dt. \quad \mathbf{E}_6$$

◦ Les équations  $E_1$  et  $E_6$  entraînent que:

$$\beta_1 = (1/\tau^3) \left[ 12 \int_{[0,\tau]} f(t)(t-\tau)dt + 6\tau \int_{[0,\tau]} f(t)dt \right]. \quad E_7$$

◦ Les équations  $E_1$  et  $E_2$  entraînent que:

$$\alpha = (1/\tau^2) \left[ 6 \int_{[0,\tau]} f(t)(t-\tau)dt + 4\tau \int_{[0,\tau]} f(t)dt \right]. \quad E_8$$

◦ Les équations  $E_2$  et  $E_5$  entraînent que:

$$\beta_2 = (1/(1-\tau)^3) \left[ 12 \int_{[\tau,1]} f(t)(t-\tau)dt - 6(1-\tau) \int_{[\tau,1]} f(t)dt \right]. \quad E_9$$

$$\alpha = (1/(1-\tau)^2) \left[ 4(1-\tau) \int_{[\tau,1]} f(t)dt - 6 \int_{[\tau,1]} f(t)(t-\tau)dt \right]. \quad E_{10}$$

◦ Les équations  $E_8$  et  $E_{10}$  entraînent que:

$$\begin{aligned} (1/2\tau^2) \int_{[0,\tau]} f(t)(t-\tau)dt + (1/3\tau) \int_{[0,\tau]} f(t)dt \\ = (1/3(1-\tau)) \int_{[\tau,1]} f(t)dt - (1/2(1-\tau)^2) \int_{[\tau,1]} f(t)(t-\tau)dt. \end{aligned} \quad E_{11}$$

◦ En remplaçant  $f(t)$  par  $at^2 + bt + c$  dans l'équation  $E_{11}$ , on obtient par un calcul simple:

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad (a/72)(2\tau - 1) = 0.$$

Ceci entraîne donc que:

$$\tau_{\min} = 1/2.$$

Les équations  $E_7$ ,  $E_8$  et  $E_9$  entraînent que:

$$\alpha_{\min} = (5a/6)\tau_{\min}^2 + b\tau_{\min} + c = (5a/24) + (b/2) + c.$$

$$\beta_{\min 1} = a\tau_{\min} + b = (a/2) + b.$$

$$\beta_{\min 2} = a(1+\tau_{\min}) + b = (3a/2) + b.$$

On obtient donc :  $\theta_{\min} = {}^t(1/2, (5a/24) + (b/2) + c, (a/2) + b, (3a/2) + b)$ .  
D'où l'unicité de  $\theta_{\min}$ .

\* **La matrice  $((\partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j))_{i,j}$  est définie positive :**

Posons:

$$\Delta_{ij} = \partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j$$

$$\theta_{\min} = {}^t(\tau_{\min}, \alpha_{\min}, \beta_{\min 1}, \beta_{\min 2}).$$

Par un calcul élémentaire simple on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 2\beta_{\min 1}^2 \tau_{\min} - 2\beta_{\min 2}^2 \tau_{\min} + 2\beta_{\min 2}^2. & \Delta_{12} &= 2\beta_{\min 2} \tau_{\min} - 2\beta_{\min 1} \tau_{\min} - 2\beta_{\min 2}. \\ \Delta_{13} &= \beta_{\min 1} \tau_{\min}^2. & \Delta_{14} &= -\beta_{\min 2} (1 - \tau_{\min})^2. \\ \Delta_{22} &= 2. & \Delta_{23} &= -\tau_{\min}^2. & \Delta_{24} &= (1 - \tau_{\min})^2. \\ \Delta_{33} &= (2/3)\tau_{\min}^3. & \Delta_{34} &= 0. & \Delta_{44} &= (2/3)(1 - \tau_{\min})^3. \end{aligned}$$

Pour tout  $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$  élément de  $\mathbb{R}^4$  on a :

$$\begin{aligned} {}^tX ((\partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j))_{i,j} X &= x_1^2 \Delta_{11} + x_2^2 \Delta_{22} + x_3^2 \Delta_{33} + x_4^2 \Delta_{44} \\ &+ 2x_1 x_2 \Delta_{12} + 2x_1 x_3 \Delta_{13} + 2x_1 x_4 \Delta_{14} + 2x_2 x_3 \Delta_{23} \\ &+ 2x_2 x_4 \Delta_{24}. \end{aligned}$$

En remplaçant les  $\Delta_{ij}$  par leurs valeurs, on obtient par une transformation simple l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} {}^tX ((\partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j))_{i,j} X &= 2\tau_{\min} (\beta_{\min 1} x_1 - x_2 + (1/2)x_3 \tau_{\min})^2 \\ &+ 2(1 - \tau_{\min}) [\beta_{\min 2} x_1 - x_2 - (1/2)x_4 (1 - \tau_{\min})]^2 \\ &+ (1/6) x_3^2 \tau_{\min}^3 + (1/3)(1 - \tau_{\min})^3 x_4^2. \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^4, {}^tX ((\partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j))_{i,j} X > 0.$$

Par conséquent la matrice  $((\partial^2 \Delta(\theta_{\min})/\partial\theta_i \partial\theta_j))_{i,j}$  est une matrice définie positive. ♣

## ANNEXE 2

Nous consacrons cette partie à l'estimation des paramètres dans un modèle de régression à deux phases. Rappelons que ce problème a été traité par la méthode du maximum de vraisemblance par plusieurs auteurs, notamment HINKLEY [18](1), HUDSON [20] et QUANDT [29]. Nous envisageons de le traiter par la méthode des moindres carrés en s'inspirant des travaux de HINKLEY qui ont été repris avec soin par SAIDI [31], car, comme nous l'avons signalé dans l'introduction, dans le cas gaussien la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance coïncide avec la méthode des moindres carrés.

Nous reprenons l'expression du modèle de régression donnée par HINKLEY :

$$(*) \quad X_i = (\alpha_1 + \beta_1 t_i) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t_i) + (\alpha_2 + \beta_2 t_i) \mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t_i) + e_i, \quad i \in \mathbb{N},$$

avec

$$(c) \quad \tau = (\alpha_1 - \alpha_2) / (\beta_2 - \beta_1).$$

Remarquons que la contrainte non linéaire (c) assure la continuité de la fonction de régression. De plus en l'intégrant dans le modèle, les deux phases deviennent alors des fonctions non linéaires par rapport aux paramètres. On obtient donc :

$$(**) \quad X_i = \alpha + \beta_1 t_i \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t_i) + \beta_2 t_i \mathbb{1}_{] \tau, 1]}(t_i) + e_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Cependant, nous retiendrons dans cette annexe, la première forme (\*) du modèle, car elle est naturellement adaptée aux développements qui suivent. On pose :

$$H_n(\theta) = (1/n) \sum_{t_i \leq \tau} (X_i - \alpha_1 - \beta_1 t_i)^2 + (1/n) \sum_{t_i > \tau} (X_i - \alpha_2 - \beta_2 t_i)^2.$$

Estimer le paramètre  $\theta$  par la méthode des moindres carrés, consiste bien sûr à minimiser  $H_n(\theta)$  par rapport à  $\theta$ , sous la contrainte non linéaire (c). Il est clair que cette contrainte assure la continuité de  $H_n(\theta)$ . Par contre la fonction  $H_n(\theta)$  n'est pas dérivable, par rapport à  $\tau$ , aux différents points  $t_i$ . Par conséquent, la méthode classique de dérivation de la fonction  $H_n(\theta)$ , pour obtenir les estimateurs des moindres carrés, n'est pas applicable dans ce cadre. Il est donc nécessaire de contourner cette difficulté.

L'idée servant de base à l'estimation de  $\tau$  est la suivante :

Sans être trop restrictif, on peut faire l'hypothèse -H- que  $\tau \in [t_2, t_{n-2}]$ . En pratique cela signifie que l'on dispose d'au moins deux observations dans chaque phase. Si une procédure de détection a montré l'existence d'une rupture ne se trouvant pas aux bords, l'hypothèse H est des plus réaliste. Sous cette hypothèse, compte tenu de la nature ordonnée des  $t_i$ ,  $\tau$  se trouve entre deux observations consécutives de la variable de régression.

Ce point de vue introduit naturellement la famille d'hypothèses  $\{H(r)\}_{r \in \{2, \dots, n-2\}}$  où  $H(r)$  est l'hypothèse selon laquelle  $\tau \in [t_r, t_{r+1}[$ .

Sous l'hypothèse  $H(r)$ , la somme des moindres carrés s'écrit :

$$H_n(\theta) = (1/n) \sum_{i=1, r} (X_i - \alpha_1 - \beta_1 t_i)^2 + (1/n) \sum_{i=r+1, n} (X_i - \alpha_2 - \beta_2 t_i)^2$$

Pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , sous l'hypothèse  $H(r)$ , conditionnellement à  $\tau$  que l'on suppose fixé dans un premier temps, en omettant la dépendance par rapport à  $\tau$ , on note  $\hat{\alpha}_1(r)$ ,  $\hat{\beta}_1(r)$ ,  $\hat{\alpha}_2(r)$  et  $\hat{\beta}_2(r)$  les estimateurs des moindres carrés de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ .

On note :

$$\begin{aligned} r^* &= n-r, \\ T(r) &= (1/n) \sum_{i=1, r} t_i, & T^*(r) &= (1/n) \sum_{i=r+1, n} t_i, \\ X(r) &= (1/n) \sum_{i=1, r} X_i, & X^*(r) &= (1/n) \sum_{i=r+1, n} X_i, \\ C_{tt}(r) &= \sum_{i=1, r} (t_i - T(r))^2, & C_{tt}^*(r) &= \sum_{i=r+1, n} (t_i - T^*(r))^2, \\ C_{tX}(r) &= \sum_{i=1, r} (t_i - T(r))(X_i - X(r)), & C_{tX}^*(r) &= \sum_{i=r+1, n} (t_i - T^*(r))(X_i - X^*(r)). \end{aligned}$$

Par un calcul analytique simple, il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(r) &= X(r) - \hat{\beta}_1(r)T(r), \\ \hat{\alpha}_2(r) &= X^*(r) - \hat{\beta}_2(r)T^*(r). \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_r^2(\tau) &= \sum_{i=1, n} (X_i - X(n))^2 - (rr^*/n)(X(r) - X^*(r))^2 \\ &\quad + \hat{\beta}_1(r)[(rr^*/n)(X^*(r) - X(r))(T(r) - \tau) - C_{tX}(r)] \\ &\quad + \hat{\beta}_2(r)[(rr^*/n)(X(r) - X^*(r))(T^*(r) - \tau) - C_{tX}^*(r)]. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'estimateur des moindres carrés de  $\tau$ , sous l'hypothèse H, est l'estimateur qui réalise :

$$\min_{\tau} (\min_{H(r)} S_r^2(\tau)).$$

Ceci nous conduit alors à étudier les fonctions  $\{ S_r^2(\tau), 2 \leq r \leq n-2 \}$ . Comme  $S_r^2(\tau)$  a une expression assez compliquée puisqu'elle fait intervenir les estimateurs sous contrainte, l'idée de HINKLEY est de se ramener par le biais d'un calcul à étudier des fonctions notées  $Z_r^2(\tau)$  dont la manipulation est beaucoup moins complexe.

Pour ce faire, on introduit  $S_0^2$ , qui est n fois la variance résiduelle du modèle de régression à une seule droite :

$$S_0^2 = \sum_{i=1, n} (X_i - X(n))^2 - C_{tX}^2(n)/C_{tt}(n).$$

Pour tout r élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , on note  $\underline{\alpha}_1(r), \underline{\beta}_1(r), \underline{\alpha}_2(r)$  et  $\underline{\beta}_2(r)$  les estimateurs des moindres carrés sans contrainte de continuité des paramètres  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  et  $\beta_2$ . Ces estimateurs ne dépendent que du paramètre r. On obtient facilement :

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_1(r) &= C_{tX}(r)/C_{tt}(r), & \underline{\alpha}_1(r) &= X(r) - \underline{\beta}_1(r)T(r), \\ \underline{\beta}_2(r) &= C_{tX}^*(r)/C_{tt}^*(r), & \underline{\alpha}_2(r) &= X^*(r) - \underline{\beta}_2(r)T^*(r). \end{aligned}$$

On en déduit alors un estimateur naturel de  $\tau$  qui n'est autre que :

$$\underline{\tau}(r) = [\underline{\alpha}_1(r) - \underline{\alpha}_2(r)] / [\underline{\beta}_2(r) - \underline{\beta}_1(r)].$$

Pour tout r élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , on pose :

$$Z_r^2(\tau) = S_0^2 - S_r^2(\tau).$$

Comme  $S_0^2$  ne dépend pas de  $\tau$ , alors nous avons bien sûr l'équivalence suivante :

$$\text{Pour } \tau \in H(r), \min_{\tau} S_r^2(\tau) \Leftrightarrow \max_{\tau} Z_r^2(\tau)$$

On pose :

$$C(r) = C_{tt}(r) \times C^*_{tt}(r) + (rr^*/n)[T^2(r) \times C^*_{tt}(r) + T^{*2}(r) \times C_{tt}(r)],$$

$$D(r) = (rr^*/n)[ T(r) \times C^*_{tt}(r) + T^*(r) \times C_{tt}(r)],$$

$$E(r) = (rr^*/n)[ C_{tt}(r) + C^*_{tt}(r)].$$

La fonction  $Z_r^2(\tau)$  s'écrit alors : Pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ ,

$$Z_r^2(\tau) = \frac{(\beta_2(r) - \beta_1(r))^2 [ C(r) - D(r)(\underline{x}(r) + \tau) + E(r) \times \underline{x}(r) \times \tau ]}{C_{tt}(r)[C(r) - 2D(r)\tau + E(r)\tau^2]}$$

Un calcul simple donné d'une façon détaillée dans la thèse de SAIDI [31] montre que la dérivée de  $Z_r^2(\tau)$  s'annule en deux points :

$$\tau_0 = \underline{x}(r) \quad \text{et} \quad \tau_1 = [ C(r) - D(r)\underline{x}(r) ] / [ D(r) - E(r)\underline{x}(r) ],$$

avec

$$Z_r^2(\underline{x}(r)) = [ C(r) - 2D(r)\underline{x}(r) + E(r)\underline{x}^2(r) ] / [ (\beta_1(r) - \beta_2(r))/C_{tt}(n) ],$$

$$Z_r^2(\tau_1) = 0.$$

Il ressort de cette étude que pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ ,  $Z_r^2(\tau)$  a pour maximum, sur  $\mathbb{R}$ , la valeur  $\underline{x}(r)$ . En se basant sur ce résultat et sur la définition de l'estimateur des moindres carrés  $\tau_n$  de  $\tau$ , il s'ensuit les deux cas de figures notées (1) et (2) :

(1) :  $\tau_n$  peut être égal à un certain  $\underline{x}(r_0)$  qui réalise nécessairement les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) :  $\underline{x}(r_0)$  appartient à l'intervalle  $[t_{r_0}, t_{r_0+1}[$ .

(ii) :  $Z_{r_0}^2(\underline{x}(r_0))$  est le maximum parmi les quantités  $Z_r^2(\underline{x}(r))$  pour  $\underline{x}(r) \in [t_r, t_{r+1}[$  et  $2 \leq r \leq n-2$ .

(2) :  $\tau_n$  peut coïncider avec une certaine observation  $t_{r_1}$ . l'indice  $r_1$  étant tel que :

$$\underline{x}(r_1) \in [t_{r_1}, t_{r_1+1}[ \text{ et } \underline{x}(r_1-1) \in [t_{r_1-1}, t_{r_1}[.$$

A la suite de l'étude faite par SAIDI [31](p:64,67), on présente l'algorithme de calcul de l'estimateur des moindres carrés de  $\tau$  :

### Algorithme de calcul de $\tau_n$ et description

On reprend l'algorithme donné par SAIDI. On donne d'abord deux remarques découlant de l'étude des fonctions  $Z_r^2(\tau)$  et utiles pour simplifier la recherche de l'estimateur des moindres carrés  $\tau_n$  de  $\tau$ .

#### Remarque 1

Si pour un indice  $r$  donné, on a  $t_r < \underline{x}(r) < t_{r+1}$  alors les deux éventualités  $\tau_n = t_r$  et  $\tau_n = t_{r+1}$  sont écartées.

Remarque 2 ( Elle est implicitement contenues dans (2) plus haut).

Pour que  $t_r$  soit une solution envisageable, il faut nécessairement que :

$$\underline{x}(r-1) \in [t_{r-1}, t_r[ \text{ et } \underline{x}(r) \in [t_r, t_{r+1}[.$$

#### Description de l'algorithme :

Pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , on détermine les estimateurs sans contrainte  $\alpha_1(r), \beta_1(r), \alpha_2(r)$  et  $\beta_2(r)$  . On en déduit alors  $\underline{x}(r)$  par :

$$\underline{x}(r) = [\alpha_1(r) - \alpha_2(r)] / [\beta_2(r) - \beta_1(r)].$$

Pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , tel que  $\underline{x}(r) \in [t_r, t_{r+1}[$ , on calcule  $Z_r^2(\underline{x}(r))$ . On déduit le maximum parmi toutes ces valeurs que l'on note Max1.

Pour tout  $r$  élément de  $\{2, \dots, n-2\}$ , tel que  $\underline{x}(r) \notin [t_r, t_{r+1}[$  et  $\underline{x}(r-1) \in [t_{r-1}, t_r[$ , on calcule les différents  $Z_r^2(t_r)$  et on en déduit leur maximum que l'on note Max2.

Il reste alors à comparer Max1 et Max2 pour en déduire l'estimateur des moindres carrés  $\tau_n$  de  $\tau$ .

Nous présentons le programme permettant d'estimer les paramètres du modèle de régression sous la contrainte (c) :

## Programme d'estimation

```
program estimation;
```

```
{**Ce programme calcule les estimateurs des paramètres d'un modèle de
régression avec rupture par la méthode des moindres carrés**}
```

```
type   vec=array[0..300] of real;
var    x,t,mx,mt,mxs,mts,tt,xt,tts,xts,ao,bo,a1,b1,g,c,d,e,bb0,bb1:vec;
       mx1,mt1,ttj,xtj,ttsj,xtsj:vec;
       i,j,n,r,ns,m1,m2:integer;
       u,v,gmax,xmax,af,bf,cf,tf,uo,vo,u1,v1,vari:real;
       tir : file of real;
```

```
PROCEDURE ALFA;
```

```
var    i,j:integer;
begin
  mx1[0]:=0; mt1[0]:=0; ttj[0]:=0; xtj[0]:=0; ttsj[0]:=0; xts[0]:=0; tts[0]:=0;
  mx[0]:=0; mt[0]:=0; tt[0]:=0; xt[0]:=0; mxs[0]:=0; mts[0]:=0;
  for i:=1 to n do
  begin
    mx1[i]:=mx1[i]+x[j];
    mt1[i]:=mt1[i]+t[j];
    mx[i]:=mx1[i]/i;
    mt[i]:=mt1[i]/i;
    for j:=1 to i do
    begin
      ttj[j]:=ttj[j-1]+sqr(t[j]-mt[i]);
      xtj[i]:=xtj[j-1]+(x[j]-mx[i])*(t[j]-mt[i]);
      xtsj[j]:=0;ttsj[j]:=0;
    end;
    tt[i]:=ttj[i];
    xt[i]:=xtj[i];
  end;
  for i:=1 to n-1 do
```

```

begin
  mxs[i]:=(mx1[n]-mx1[i])/(n-i);
  mts[i]:=(mt1[n]-mt1[i])/(n-i);
  for j:=i+1 to n do
    begin
      ttsj[j]:=ttsj[j-1]+sqr(t[j]-mts[i]);
      xtsj[j]:=xtsj[j-1]+(x[j]-mxs[i])*(t[j]-mts[i]);
    end;
  tts[i]:=ttsj[i];
  xts[i]:=xtsj[j];
end;
end;

```

PROCEDURE BETA;

```

var i:integer;
begin
  ALFA;
  (**Calcul des estimateurs sans contraintes**)
  for i:=2 to n-2 do
    begin
      bo:=xt[i]/tt[i];
      ao[i]:=mx[i]-(mt[i]*bo[i]);
      b1:=xts[i]/tts[i];
      a1[i]:=mxs[i]-(mts[i]*b1[i]);
      g[i]:=(a1[i]-ao[i])/(bo[i]-b1[i]);
      c[i]:=(tt[i]*tts[i])+(i*(n-i)*((sqr(mt[i])*tts[i])+(sqr(mts[i])*tt[i])))/n;
      d[i]:=( ((mt[i]*tts[i])+(mts[i]*tt[i]))*(i*(n-i)))/n;
      e[i]:=((tt[i]+tts[i])*(i*(n-i)))/n;
    end;
end;

```

PROCEDURE DELTA;

```

begin
  gmax:=0; m1:=0;
  u:=sqr((c[2]-(d[2]*x[2]))+(e[2]*g[2]*t[2]))*(bo[2]-b1[2]);
  v:=(c[2]-(2*d[2]*x[2])+(e[2]*sqr(t[2]))) *tt[n];
  xmax:=u/v; m2:=2;
  if (g[n-2]<t[n-1]) and (g[n-2]>=t[n-2]) then

```

```

begin
  u:=c[n-2]-(2*d[n-2]*g[n-2])+(e[2]*sqr(g[n-2]));
  v:=(sqr(bo[n-2]-b1[n-2]))/tt[n];
  gmax:=u*v;
  m1:=n-2
end;
end;

```

```
{***PROGRAMME PRINCIPAL***}
```

```

begin  { *Recherche de l'estimateur de taux* }
  writeln('entrer n');readln(n);
  writeln('entrer n');readln(n);
  writeln('entrer af');readln(af);
  writeln('entrer bf');readln(bf);
  writeln('entrer cf');readln(cf);
  writeln('entrer tf');readln(tf);
  writeln('entrer vari');readln(vari);
  assign(tir,' c:\simul\normal.dat');
  reset(tir);
  for i:=1 to 299 do read(tir,bb0[i]);
  close(tir);
  for i:=1 to n do
  begin
    bb1[i]:=sqrt(vari)*bb0[ns-1+i];
    t[i]:=i/n;
    x[i]:=af*sqr(t[i])+(bf*t[i])+cf+bb1[i];
    { * x[i]:=af*exp(bf*t[i])+cf+bb1[i];* }
    { * if (t[i]≤tf) then x[i]:=af+bf(t[i]-tf)+bb1[i]
      else x[i]:=af+cf(t[i]-tf)+bb1[i]; * }
  end;
  BETA;
  DELTA;
  i:=2;
  while i<n-2 do
  begin
    if(g[i]<t[i+1]) and (g[i]>=t[i]) then

```

```

begin
  u:=c[i]-(2*d[i]*g[i])+(e[i]*sqr(g[i]));
  v:=(sqr(bo[i]-b1[i]))/tt[n];
  u:=u*v;
  if u>gmax then
  begin
    gmax:=u;
    m1:=i;
  end;
  i:=i+1;
end
else
begin
  if(g[i+1]>=t[i+2]) and (g[i+1]<t[i+1]) then
  begin
    u:=sqr((c[i+1]-(d[i+1]*(g[i+1]+t[i+1]))+(e[i+1]*g[i+1]*t[i+1])));
    u:=u*sqr(bo[i+1]-b1[i+1]);
    v:=(c[i+1]-(2*d[i+1]*t[i+1])+(e[i+1]*sqr(t[i+1]))) * tt[n];
    u:=u/v;
    if u>xmax then
    begin
      xmax:=u;
      m2:=i+1
    end
    i:=i+2
  end
  else
  begin
    i:=i+1;
    u:=c[i]-(2*d[i]*g[i])+(e[i]*sqr(g[i]));
    v:=(sqr(bo[i]-b1[i]))/tt[n];
    u:=u*v;
    if u>gmax then
    begin
      gmax:=u;
      m1:=i;
    end;
    i:=i+1;
  end
end
end

```

```

end;
writeln('gmax= ',gmax,' m1= ',m1);writeln;
writeln('xmax= ',xmax,' m2= ',m2);writeln;
if gmax>xmax then
begin
  writeln('l estimateur de taux est :',g[m1]);writeln;
  writeln('l estimateur de taux est entre la ',m1,'ieme et la ',m1+1,'ieme
  observation');
  writeln;
  writeln('ao^=',ao[m1],' bo^=',bo[m1]);writeln;
  writeln('a1^=',a1[m1],' b1^=',b1[m1])
end
else
begin
  u:=(ao[m2]-a1[m2])+(bo[m2]-b1[m2])*t[m2];
v:=(n/(m2*(n-m2)))+((sqr(mt[m2]-t[m2]))/tt[m2])+((sqr(mts[m2]-t[m2]))/tts[m2]);
  u:=u/v;
  v:=(1/m2)+((sqr(mt[m2]))/tt[m2])-((mt[m2]*t[m2])/tt[m2]));
  uo:=ao[m2]-(u*v);
  vo:=bo[m2]-(u*((t[2]-mt[m2])/tt[m2]));
  v:=((mts[m2]*t[m2])/tts[m2])-((sqr(mts[m2]))/tts[m2])-(1/(n-m2));
  u1:=a1[m2]-(u*v);
  v1:=b1[m2]-(u*((mts[m2]-t[m2])/tts[m2]));
  writeln('l estimateur de taux est :',t[m2]);writeln;
  writeln('l estimateur de taux se trouve à la ',m2,'ieme observation');
  writeln; writeln;
  writeln('ao^= ',uo,' bo^= ',vo); writeln;
  writeln('a1^= ',u1,' b1^= ',v1)
end
end.

```

**Remarque :**

Pour appliquer le programme d'estimation à des données réelles, il suffit de modifier la partie (\*\*) du programme principal de la façon suivante :

```
begin
  { *Recherche de l'estimateur de taux* }
  writeln('entrer n');readln(n);
  for i:=1 to n do
  begin
    writeln('entrer t[' ,i, ']);readln(t[i]);
  end;
  for i:=1 to n do
  begin
    writeln('entrer X[' ,i, ']);readln(X[i]);
  end;
end;
```

**Exemple d'application :**

Pour un échantillon de taille  $n = 60$ , on suppose que les observations  $X_i, i=1 \dots n$ , sont obtenues à partir du modèle de régression suivant :

$$X_i = at_i^2 + bt_i + c + e_i,$$

où les  $e_i$  sont des observations simulées d'une loi normale  $N(0,0.25)$ .

Dans le cas particulier où :  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ , on estime une rupture à la 34<sup>ième</sup> observation et l'estimateur des moindres carrés  $\theta_n = (\tau_n, \alpha_{1n}, \beta_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n})$  de  $\theta$  est tel que :

$$\tau_n = 0.567,$$

$$\alpha_{1n} = 1.11, \beta_{1n} = 1.16,$$

$$\alpha_{2n} = 1.30, \beta_{2n} = -0.25.$$

**ANNEXE 3****\* PROGRAMMES D'ADEQUATION :****Approximation par deux demi-droites.**

program adéquation;

(\*\* Ce programme réalise le test d'adéquation par un modèle avec rupture\*\*)

```

type  vec=array [0..300] of real;
var   ST,STc,SXT,SX,SX2,Hn1,Hn2,e0,e1,X,t:vec;
      T1,T2,T1c,T2c,XT1,XT2:real;
      D0,Na,N1,N2,an,bn1,bn2,tn:real;
      Hn,Rn,s,vari,a,b,c,tf:real;
      i,n,r,ns:integer;
      tir : file of real;

```

PROCEDURE ALFA;

```

var   i:integer;
begin
  ST[0]:=0; STc[0]:=0; SXT[0]:=0; SX[0]:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      ST[i]:= ST1[i-1]+(t[i]-tn);
      STc[i]:= STc[i-1]+sqr(t[i]-tn);
      SXT[i]:= SXT[i-1]+(X[i]*(t[i]-tn));
      SX[i]:= SX[i-1]+X[i];
    end;
  T1:=ST[r];
  T1c:=STc[r];
  XT1:=SXT[r];
  T2:=ST[n]-ST[r];
  T2c:=STc[n]-STc[r];
  XT2:=SXT[n]-SXT[r];
  D0:=(T1c*(n*T2c-sqr(T2)))-((sqr(T1))*T2c);
  Na:=(T2c*((SX[n]*T1c)-(XT1*T1)))-(T2*T1c*XT2);
  N1:=(T2*((T1*XT2)-(T2*XT1)))+(T2c*((n*XT1)-(SX[n]*T1)));

```

```

        N2:=(T1c*((n*XT2)-(SX[n]*T2)))-(T1*((T1*XT2)-(T2*XT1)));
        an:=Na/D0;
        bn1:=N1/D0;
        bn2:=N2/D0;
end;

PROCEDURE BETA;

var i:integer;
begin
    Hn1[0]:=0; Hn2[0]:=0;
    for i:=1 to n do
        begin
            e1[i]:=sqrt(vari)*e0[ns-1+i];
            t[i]:=i/n;
            X[i]:=(a*sqr(t[i]))+(b*t[i])+c+e1[i];
            { * X[i]:=(a*exp(b*t[i]))+c+e1[i]; * }
            { * if (t[i]≤tf) then X[i]:=af+bf(t[i]-tf)+bb1[i]
                else X[i]:=af+cf(t[i]-tf)+bb1[i]; * }
        end;
    ALFA;
    for i:=1 to r do
        begin
            Hn1[i]:=Hn1[i-1]+sqr(X[i]-an-(bn1*(t[i]-tn)));
            Hn2[i]:=0;
        end;
    for i:=r+1 to n do
        begin
            Hn2[i]:=Hn2[i-1]+sqr(X[i]-an-(bn2*(t[i]-tn)));
        end;
    Hn:=(1/n)*(Hn1[r]+Hn2[n]);
end;

{ **PROGRAMME PRINCIPAL** }

begin
    writeln('entrer n' );readln(n);
    writeln('entrer ns' );readln(ns);
    writeln ('entrer r' );readln(r);

```

```

writeln ('entrer a' );readln(a);
writeln ('entrer b' );readln(b);
writeln ('entrer c' );readln(c);
writeln('entrer tf' );readln(tf);
writeln ('entrer vari' );readln(vari);
writeln ('entrer tn' );readln(tn);
writeln ('entrer le seuil s' );readln(s);
assign(tir,' c:\simu\normal.dat');
reset(tir);
for i:=1 to 299 do read(tir,e[i]);
close(tir);
BETA;
writeln('an^ = ' ,an); writeln;
writeln('bn1^ = ' ,bn1); writeln;
writeln('bn2^ = ' ,bn2); writeln;
Rn:=(sqrt(n))*((Hn-vari)/(vari*sqrt(2)));
writeln('Rn = ' ,Rn); writeln;
if (Rn≤s) then
  begin
    writeln('On accepte l hypothese H0' );
  end
else
  begin
    writeln('On rejette l hypothese H0);
  end
end.

```

Approximation par une parabole.

```
program parabole;
```

```
(** Ce programme réalise le test d'adéquation par un modèle parabolique**)
```

```
type  vec=array [0..300] of real;
var   X,Y,t,e0,e1,T1,T2,T3,T4,XT1,XT2,SX,Kn:real;
      D,Na,Nb,Nc,an,bn,cn,:real;
      Hn,Rn,s,vari,a,b,c,tf:real;
      i,n,ns:integer;
      tir : file of real;
```

```
PROCEDURE ALFA;
```

```
var   i:integer;
```

```
begin
```

```
  T1[0]:=0; T2[0]:=0; T3[0]:=0; T4[0]:=0;
```

```
  XT1[0]:=0; XT2[0]:=0; SX[0]:=0;
```

```
  for i:=1 to n do
```

```
    begin
```

```
      T1[i]:=T1[i-1]+t[i];
```

```
      T2[i]:=T2[i-1]+sqr(t[i]);
```

```
      T3[i]:=T3[i-1]+(t[i]*sqr(t[i]));
```

```
      T4[i]:=T4[i-1]+sqr(sqr(t[i]));
```

```
      SX[i]:= SX[i-1]+X[i];
```

```
      XT1[i]:= XT1[i-1]+(X[i]*t[i]);
```

```
      XT1[i]:= XT1[i-1]+(X[i]*sqr(t[i]));
```

```
    end;
```

```
  D:=(T4[n]*((n*T2[n])-sqr(T1[n])))-(T3[n]*((n*T3[n])-(T1[n]*T2[n])))
    +(T2[n]*((T1[n]*T3[n])-sqr(T2[n])));
```

```
  Na:=(XT2[n]*((n*T2[n])-sqr(T1[n])))-(XT1[n]*((n*T3[n])-(T1[n]*T2[n])))
    +(SX[n]*((T1[n]*T3[n])-sqr(T2[n])));
```

```
  Nb:=-(XT2[n]*((n*T3[n])-(T1[n]*T2[n])))+(XT1[n]*((n*T4[n])-sqr(T2[n])))
    -(SX[n]*((T4[n]*T1[n])-(T2[n]*T3[n])));
```

```
  Nc:=(XT2[n]*((T1[n]*T3[n])-sqr(T2[n])))
```

```
  -(XT1[n]*((T4[n]*T1[n])-(T2[n]*T3[n])))+(SX[n]*((T2[n]*T4[n])-sqr(T3[n])));
```

```

    an:=Na/D;
    bn:=Nb/D;
    cn:=Nc/D0;
end;

PROCEDURE BETA;

var i:integer;
begin
    Kn[0]:=0;
    for i:=1 to n do
    begin
        e1[i]:=si*e0[ns-1+i];
        t[i]:=i/n;
        X[i]:=(a*sqr(t[i]))+(b*t[i])+c+e1[i];
        { * X[i]:=(a*exp(b*t[i]))+c+e1[i];* }
        { * if (t[i]≤tf) then X[i]:=af+bf(t[i]-tf)+bb1[i]
            else X[i]:=af+cf(t[i]-tf)+bb1[i]; * }
    end;
    ALFA;
    for i:=1 to n do
    begin
        Y[i]:=(an*sqr(t[i]))+(bn*t[i])+cn;
        Kn[i]:=Kn[i-1]+sqr(X[i]-Y[i]);
    end;
    Hn:=(1/n)*(Kn[n]);
end;

{**PROGRAMME PRINCIPAL**}

begin
    writeln('entrer n ');readln(n);
    writeln('entrer ns ');readln(ns);
    writeln ('entrer a ');readln(a);
    writeln ('entrer b ');readln(b);
    writeln ('entrer c ');readln(c);
    writeln ('entrer vari ');readln(vari);
    writeln ('entrer tf ');readln(tf);

```

```
writeln ('entrer le seuil s' );readln(s);
assign(tir,' c:\simul\normal.dat');
reset(tir);
for i:=1 to 299 do read(tir,e[i]);
close(tir);
BETA;
writeln('an^ = ' ,an); writeln;
writeln('bn1^ = ' ,bn1); writeln;
writeln('bn2^ = ' ,bn2); writeln;
Rn:=(sqrt(n))*((Hn-vari)/(vari*sqrt(2)));
writeln('Rn = ' ,Rn); writeln;
if (Rn<=s) then
  begin
    writeln('On accepte l hypothese H0' );
  end
else
  begin
    writeln('On rejette l hypothese H0);
  end
end.
```

**\*PROGRAMME DE COMPARAISON**

```

program comparaison;
  (**Ce programme réalise le test de comparaison **)

type vec=array [0..300] of real;
var   T1,T2,T3,T4,X,e,t,SX,XT1,XT2,g1,H1,Fn:vec;
      D0,D1,D2,D3,an,bn,cn,H1n:real;
      TR1,TR1c,XTR1,SXR1,TR2,TR2c,XTR2,XTR2c,SXR2,g2,K1,K2:vec;
      DR1,Ne,N1,DR2,N2,en,dn1,dn2,H2n,Dn:real;
      a,b,c,tf,vari,tn,s,Rn:real;
      i,n,ns,r:integer;
      tir : file of real;

PROCEDURE ALFA;

  (*Calcul des estimateurs des moindres carrés*)
var   i:integer;
begin
  T1[0]:=0; T2[0]:=0; T3[0]:=0; T4[0]:=0; SX1[0]:=0; XT1[0]:=0; XT2[0]:=0;
  TR1[0]:=0; TR1c[0]:=0; XTR1[0]:=0; SXR1[0]:=0;
  TR2[0]:=0; TR2c[0]:=0; XTR2[0]:=0; SXR2[0]:=0;
  for i:=1 to n do
  begin
    T1[i]:=T1[i-1]+t[i];
    T2[i]:=T2[i-1]+sqr(t[i]);
    T3[i]:=T3[i-1]+(t[i]*sqr(t[i]));
    T4[i]:=T4[i-1]+sqr(sqr(t[i]));
    SX[i]:= SX[i-1]+X[i];
    XT1[i]:= XT1[i-1]+(X[i]*t[i]);
    XT2[i]:= XT1[i-1]+(X[i]*sqr(t[i]));
  end;
  D0:=(T4[n]*(n*T2[n]-sqr(T1[n]))
  -(T3[n]*(n*T3[n]-(T1[n]*T2[n])))
  +(T2[n]*((T1[n]*T3[n])-sqr(T2[n]))));
  D1:=(XT2[n]*((n*T2[n])-sqr(T1[n]))
  -(XT1[n]*((n*T3[n])-(T1[n]*T2[n])))
  +(SX[n]*((T1[n]*T2[n])-(n*T3[n])));

```

```

D2:=(XT2[n]*(( T1[n]*T2[n])-( n*T3[n])))
+(XT1[n]*((n*T4[n]) -sqr(T3[n])))
-(SX[n]*((T1[n]*T4[n])-( T2[n] *T3[n])));
D3:=(XT2[n]*((T1[n]*T3[n])-sqr(T2[n])))
-(XT1[n]*((T1[n]*T4[n])-(T2[n]*T3[n])))
+(SX[n]*((T2[n]*T4[n])-sqr(T3[n])));

an:=D1/D0;
bn:=D2/D0;
cn:=D3/D0;
for i:=1 to r do
begin
  TR1[i]:= TR1[i-1]+(t[i]-tn);
  TR1c[i]:= TR1c[i-1]+sqr(t[i]-tn);
  XTR1[i]:= XTR1[i-1]+(X[i]*t[i]);
  SXR1[i]:= SXR1[i-1]+X[i];
  TR2[i]:=0; TR2c[i]:=0; XTR2[i]:=0; SXR2[i]:=0;
end;
DR1:=sqr(TR1[r])-(r*(TR1c[r]));
Ne:=(XTR1[r]*TR1[r])-(SXR1[r]*TR1c[r]);
N1:=(TR1[r]*SXR1[r])-(r*XTR1[r]);
en:=Ne/DR1;
dn1:=N1/DR1;
for i:=r+1 to n do
begin
  TR2[i]:= TR2[i-1]+(t[i]-tn);
  TR2c[i]:= TR2c[i-1]+sqr(t[i]-tn);
  XTR2[i]:= XTR2[i-1]+(X[i]*t[i]);
  SXR2[i]:= SXR2[i-1]+X[i];
end;
DR2:=sqr(TR2[n])-((n-r)*(TR2c[n]));
N2:=(TR2[n]*SXR2[n])-((n-r)*XTR2[r]);
bn2:=N2/DR2;
end;

```

## PROCEDURE BETA;

```

var i:integer;
begin
  g1[0]:=0; H1[0]:=0; g2[0]:=0; K1[0]:=0; K2[0]:=0; Fn[0]:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      e1[i]:=sqrt(vari)*e0[ns-1+i];
      t[i]:=i/n;
      X[i]:=(a*sqr(t[i]))+(b*t[i])+c+e1[i];
      { * X[i]:=(a*exp(b*t[i]))+c+e1[i];* }
      { * if (t[i]≤tf) then X[i]:=af+bf(t[i]-tf)+bb1[i]
        else X[i]:=af+cf(t[i]-tf)+bb1[i]; * }
    end;
  alfa;
  for i:=1 to n do
    begin
      g1[i]:=(an*sqr(t[i]))+(bn*t[i])+cn;
      H1[i]:=H1[i-1]+sqr(X[i]-g1[i]);
    end;
  H1n:=H1[n]/n;
  for i:=1 to r do
    begin
      g2[i]:=en+(dn1*(t[i]-tn));
      K1[i]:=K1[i-1]+sqr(X[i]-g2[i]);
      K2[i]:=0;
    end;
  for i:=r+1 to n do
    begin
      g2[i]:=en+(dn2*(t[i]-tn));
      K2[i]:=K2[i-1]+sqr(X[i]-g2[i]);
    end;
  H2n:=(K1[r]+K2[n])/n;
  for i:=1 to n do
    begin
      Fn[i]:=Fn[i-1]+sqr(g1[i]-g2[i]);
    end;
  Dn:=Fn[n]/n;
end;

```

```
{***Programme principal***}
```

```
begin
```

```
  writeln('entrer n ');readln(n);
  writeln('entrer ns ');readln(ns);
  writeln('entrer r ');readln(r);
  writeln('entrer a ');readln(a);
  writeln('entrer b ');readln(b);
  writeln('entrer tf');readln(tf);
  writeln('entrer vari ');readln(vari);
  writeln('entrer tn ');readln(tn);
  writeln('entrer le seuil s ');readln(s);
  assign(tir,' c:\simu\normal.dat');
  reset(tir);
  for i:=1 to 299 do read(tir,e[i]);
  close(tir);
  beta;
  writeln('an = ',an);writeln;
  writeln('bn = ',bn);writeln;
  writeln('cn = ',cn);writeln;
  writeln('en = ',en);writeln;
  writeln('dn1 = ',dn1);writeln;
  writeln('dn2 = ',dn2);writeln;
  writeln('Dn = ',Dn);writeln;
  Rn:=((sqrt(n))*(H1n-H2n))/(2*(sqrt(Dn*sigma)));
  writeln('Rn = ',Rn);writeln;
  if (Rn<=s) then
  begin
    writeln('On accepte l hypothese H0.');
```

```
  end
```

```
  else
```

```
  begin
```

```
    writeln('On rejette l hypothese H0.');
```

```
  end
```

```
end.
```

**\*PROGRAMME DU RAPPORT DES MOINDRES CARRÉS :**

program mcarres

{\*\* Ce programme réalise le test du rapport des moindres carrés quand  $\theta_0=(t_0, a_0, b_{01}, b_{02})$  avec  $t[p] \leq t_0 \leq t[p+1]**$ }

type vec=array[0..100] of real;  
 var ST,STc,SXT,SX,e0,e1,X,T:vec;  
 Y1,Y2,Y3,Y4,g,H1,H2,K1,K2:vec;  
 T1,T2,T1c,T2c,XT1,XT2 t<sub>0</sub>,a<sub>0</sub>,b<sub>01</sub>,b<sub>02</sub>:real;  
 Hm,Na,N1,N2,D,an,bn1,bn2,Kn,Rn,tn,s:real;  
 i,j,n,p:integer;

PROCEDURE ALFA;

var i:integer;  
 begin  
 t[0]:=0; g[0]:=0; Y1[0]:=0; H1[0]:=0; H2[0]:=0;  
 for i:=1 to n do  
 begin  
 if (t[i]≤t<sub>0</sub>) then  
 begin  
 g[i]:=a<sub>0</sub>+(b<sub>01</sub>\*(t[i]-t<sub>0</sub>));  
 Y1[i]:=sqr(X[i]-g[i]);  
 H1[i]:=H1[i-1]+Y1[i];  
 H2[i]:=0;  
 end  
 else  
 begin  
 g[i]:=a<sub>0</sub>+(b<sub>02</sub>\*(t[i]-t<sub>0</sub>));  
 Y1[i]:=sqr(X[i]-g[i]);  
 H2[i]:=H2[i-1]+Y1[i];  
 H1[i]:= H1[i-1];  
 end;  
 end;  
 Hm:=(H1[n]+H2[n])/n;  
 end;

```

PROCEDURE BETA;
var i:integer;
begin
  ST[0]:=0; STc[0]:=0; SXT[0]:=0; SX[0]:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      ST[i]:= ST1[i-1]+(t[i]-tn);
      STc[i]:= STc[i-1]+sqr(t[i]-tn);
      SXT[i]:= SXT[i-1]+(X[i]*(t[i]-tn));
      SX[i]:= SX[i-1]+X[i];
    end;
  T1:=ST[p];
  T1c:=STc[p];
  XT1:=SXT[p];
  T2:=ST[n]-ST[p];
  T2c:=STc[n]-STc[p];
  XT2:=SXT[n]-SXT[p];
  D0:=(T1c*(n*T2c-sqr(T2))-((sqr(T1))*T2c);
  Na:=(T2c*((SX[n]*T1c)-(XT1*T1)))-(T2*T1c*XT2);
  N1:=(T2*((T1*XT2)-(T2*XT1)))+(T2c*((n*XT1)-(SX[n]*T1)));
  N2:=(T1c*((n*XT2)-(SX[n]*T2)))-(T1*((T1*XT2)-(T2*XT1)));
  an:=Na/D0;
  bn1:=N1/D0;
  bn2:=N2/D0;
end;

```

```

PROCEDURE DELTA;
var i:integer;
begin
  BETA;
  K1[0]:=0; K2[0]:=0;
  for i:=1 to p do
    begin
      g[i]:=an+(bn1*(t[i]-tn));
      Y4[i]:=sqr(X[i]-g[i]);
      K1[i]:=K1[i-1]+Y4[i];
      K2[i]:=0;
    end;
  for i:=p+1 to n do
    begin

```

```

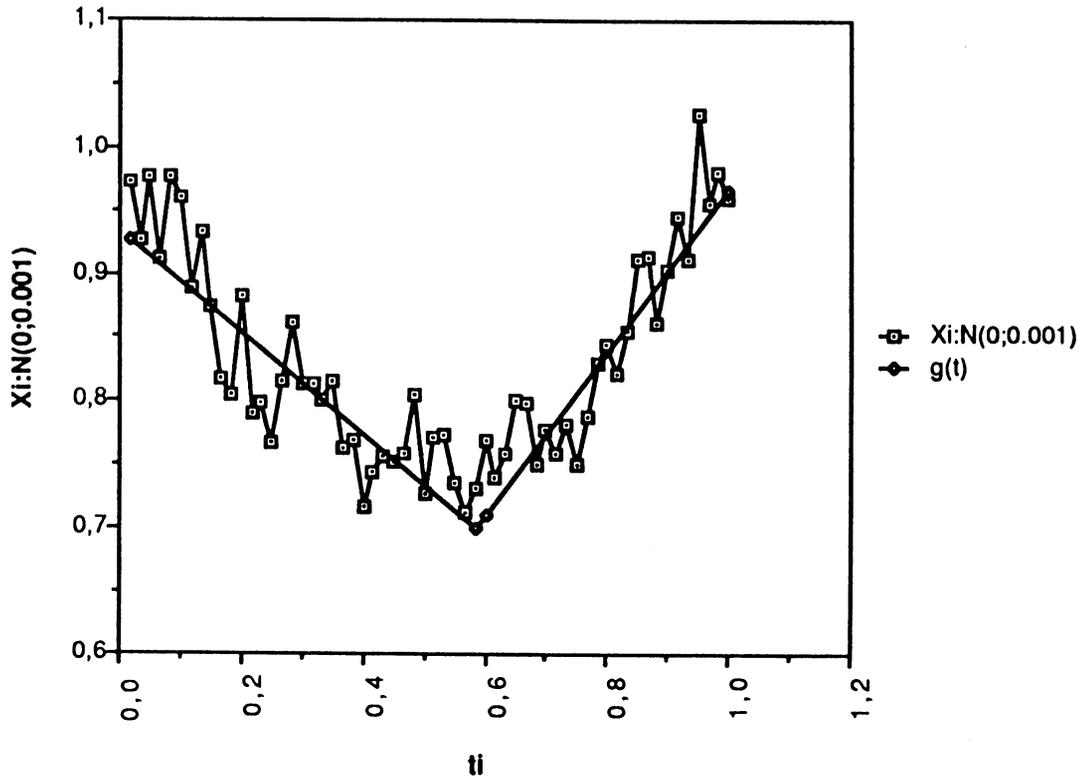
        g[i]:=an+(bn2*(t[i]-tn));
        Y4[i]:=sqr(X[i]-g[i]);
        K2[i]:=K2[i-1]+Y4[i];
    end;
    Kn:=(Kn1[p]+Kn2[n])/n;
end;
{**PROGRAMME PRINCIPAL**}
begin
    writeln('entrer n ');readln(n);
    writeln('entrer p ');readln(p);
    writeln('entrer t0 ');readln(t0);
    writeln('entrer a0 ');readln(a0);
    writeln('entrer b01 ');readln(b01);
    writeln('entrer b02 ');readln(b02);
    writeln('entrer tn ');readln(tn);
    writeln('entrer le seuil s ');readln(s);
    for i:=1 to n do
    begin
        writeln('entrer t[',i,']');readln(t[i]);
    end;
    for i:=1 to n do
    begin
        writeln('entrer X[',i,']');readln(X[i]);
    end;
    ALFA;
    DELTA;
    Rn:=n*((ln(Hm))-(ln(Kn)))
    writeln('an= ',an);writeln;
    writeln('bn1= ',bn1);writeln;
    writeln('bn2= ',bn2);writeln;
    writeln('Rn= ',Rn);writeln;
    if (R≤s) then
    begin
        writeln('On accepte l hypothese H0 ');
    end
    else
    begin
        writeln('On rejette l hypothese H0');
    end
end.

```

**ANNEXE 4**

**Exemple 1 :**  $f$  est une fonction parabolique

Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$  par une parabole

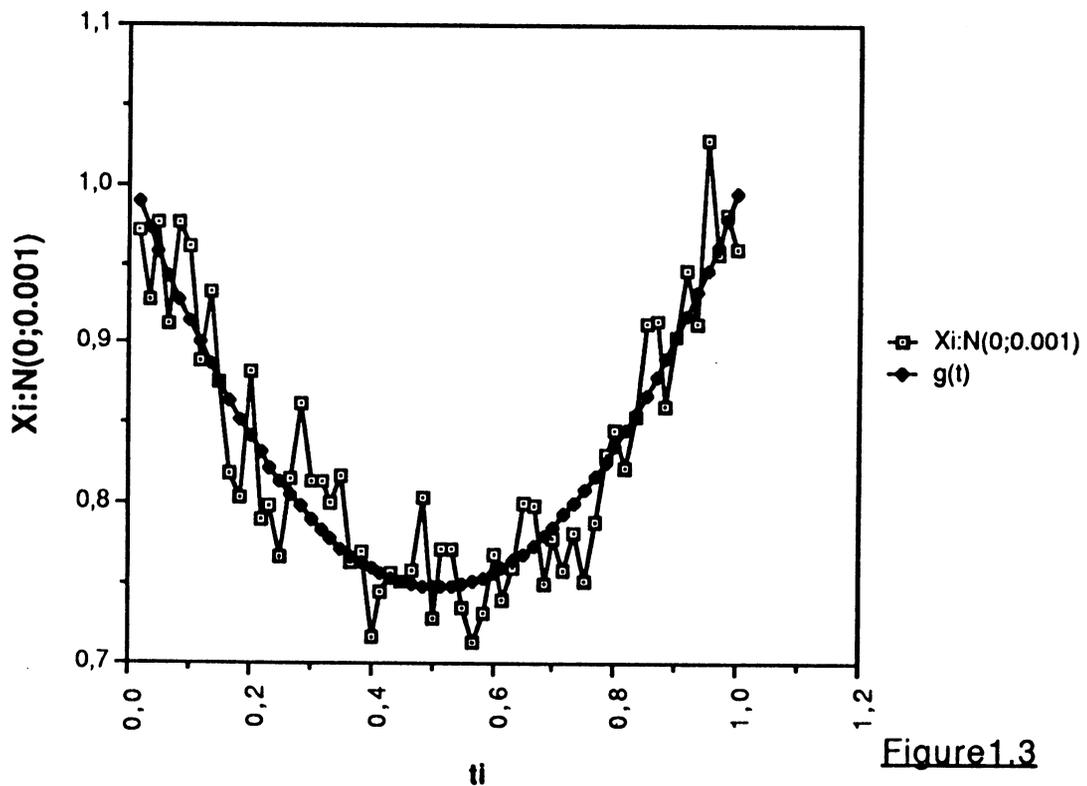
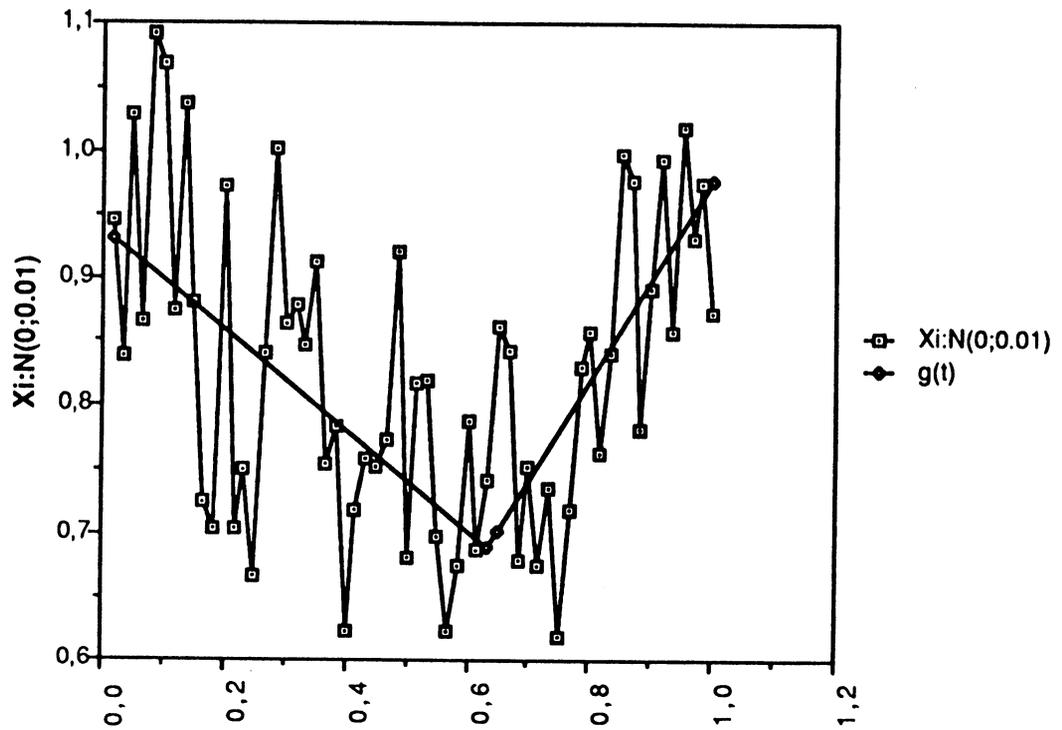


Figure 1.3

### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_1(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

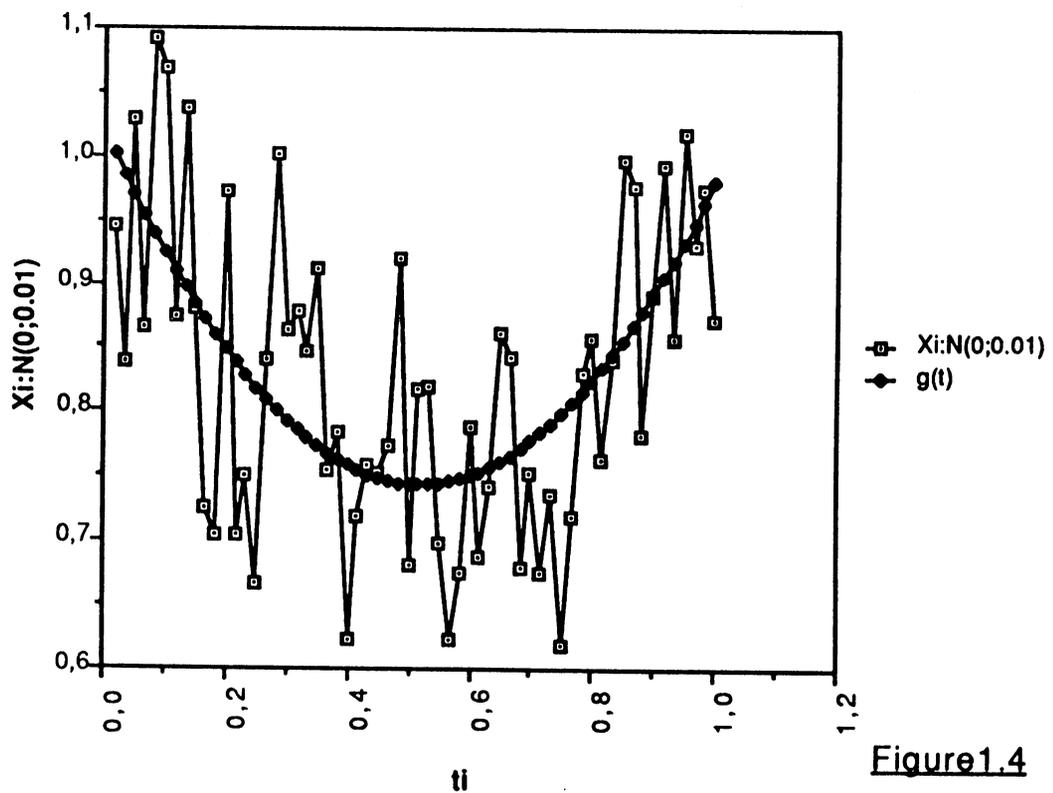
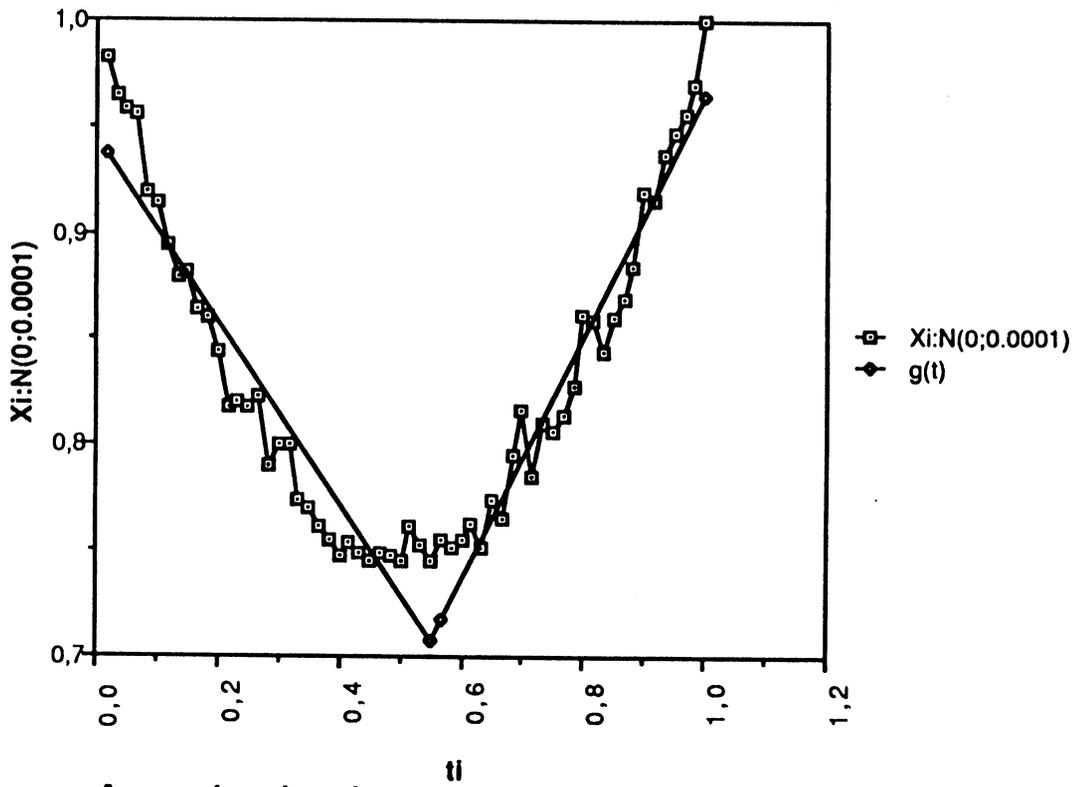


Figure 1.4

Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.0001)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.0001)$  par une parabole

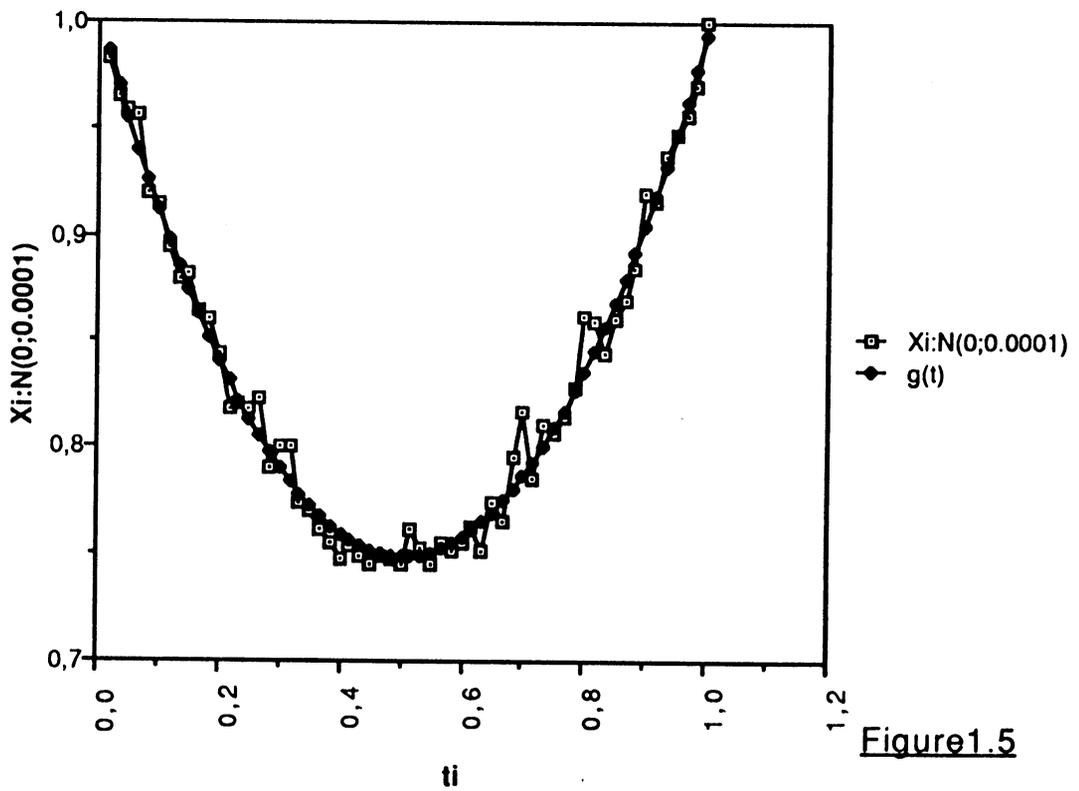
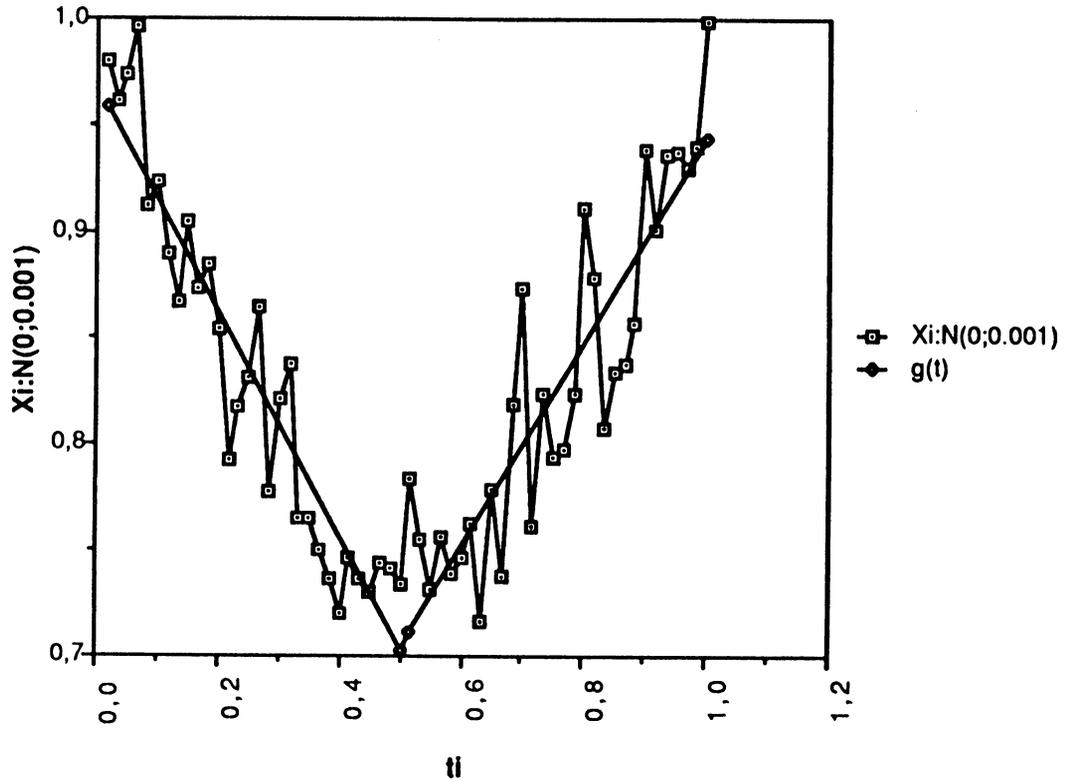


Figure1.5

Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$  par une parabole

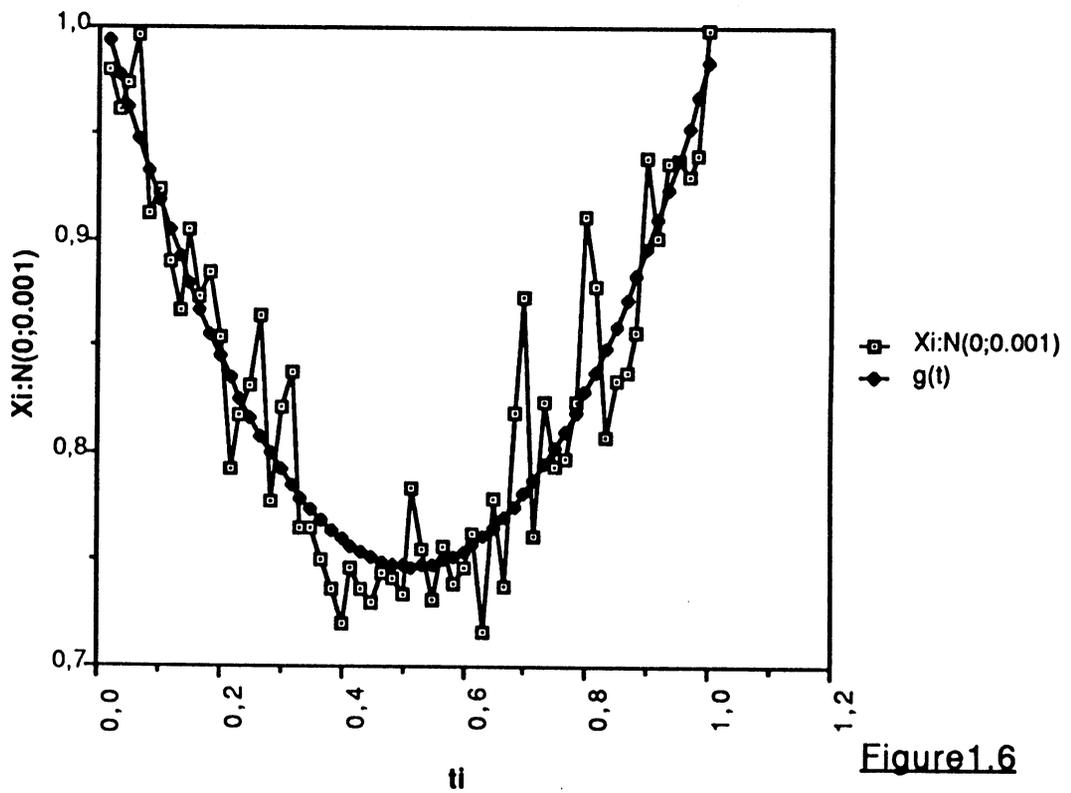


Figure 1.6

Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$

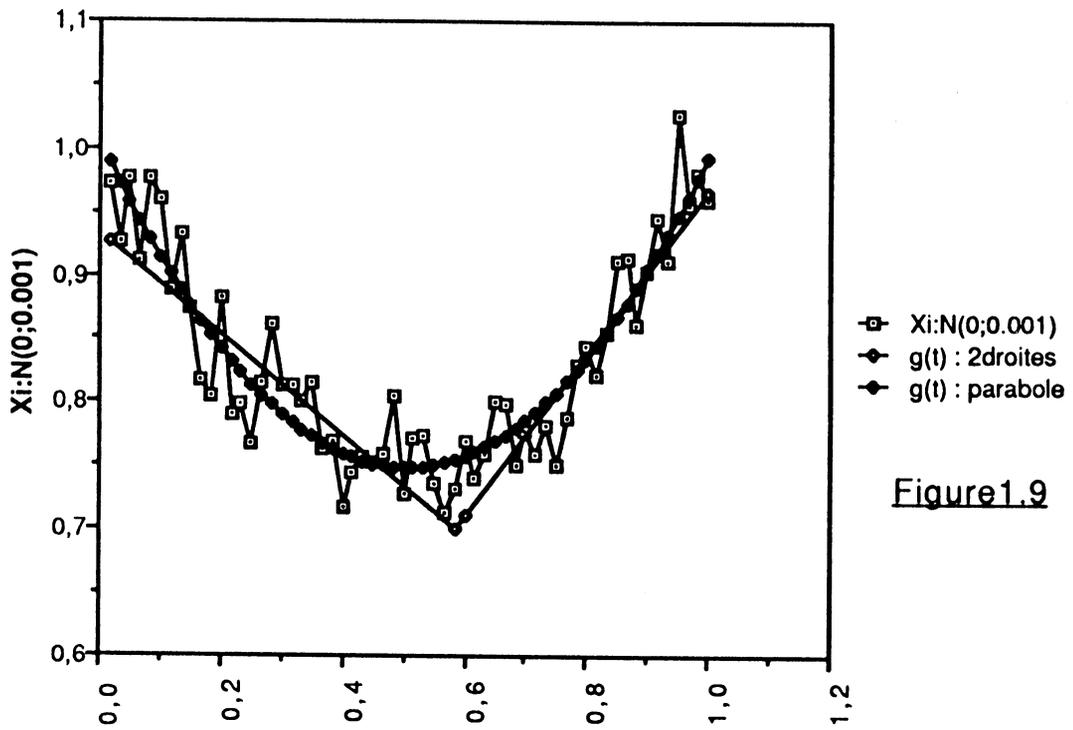


Figure 1.9

Le modèle parabolique est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.01)$

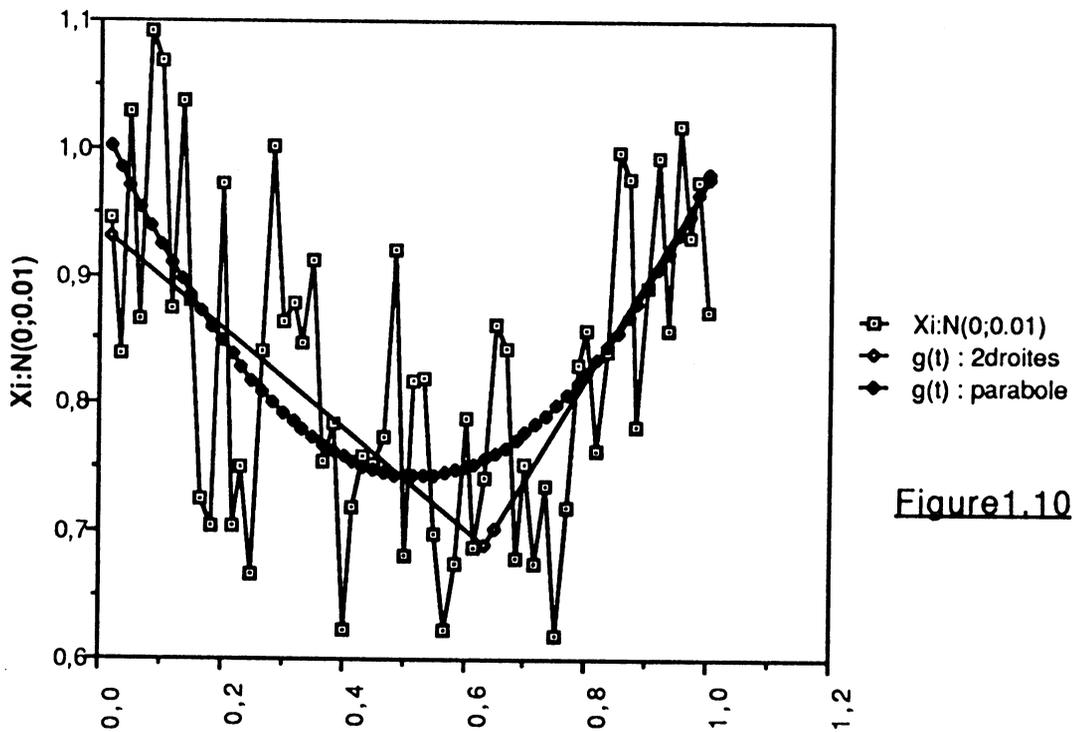
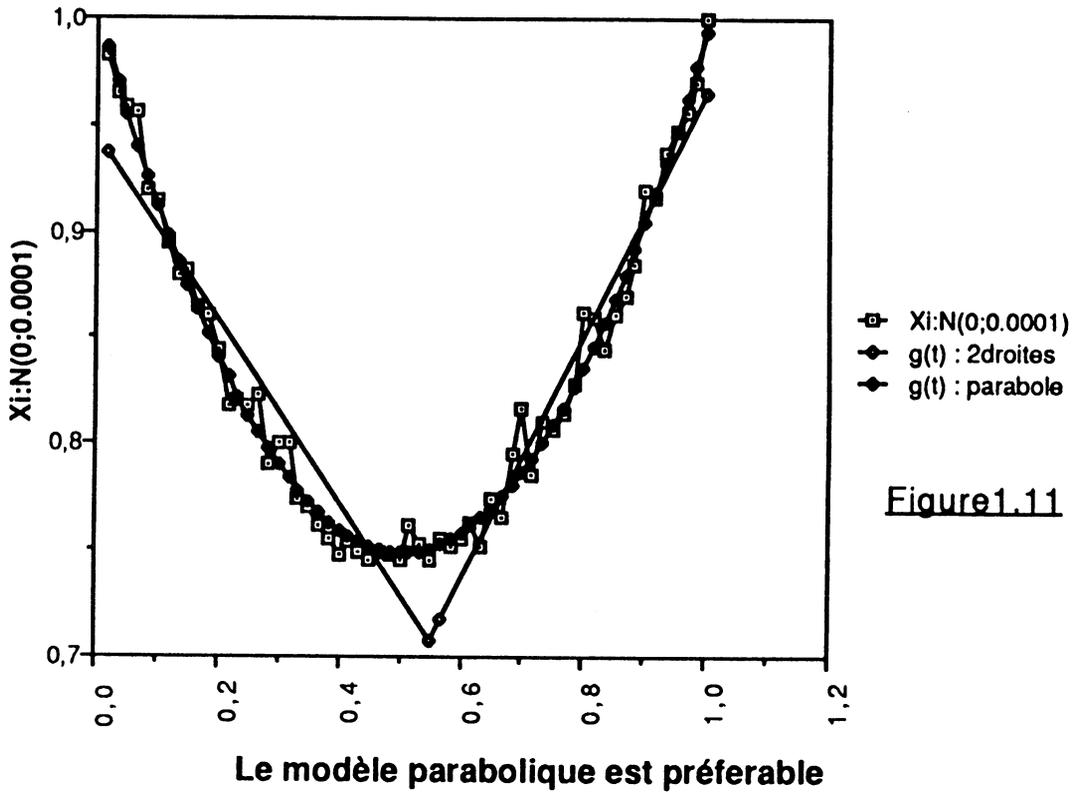


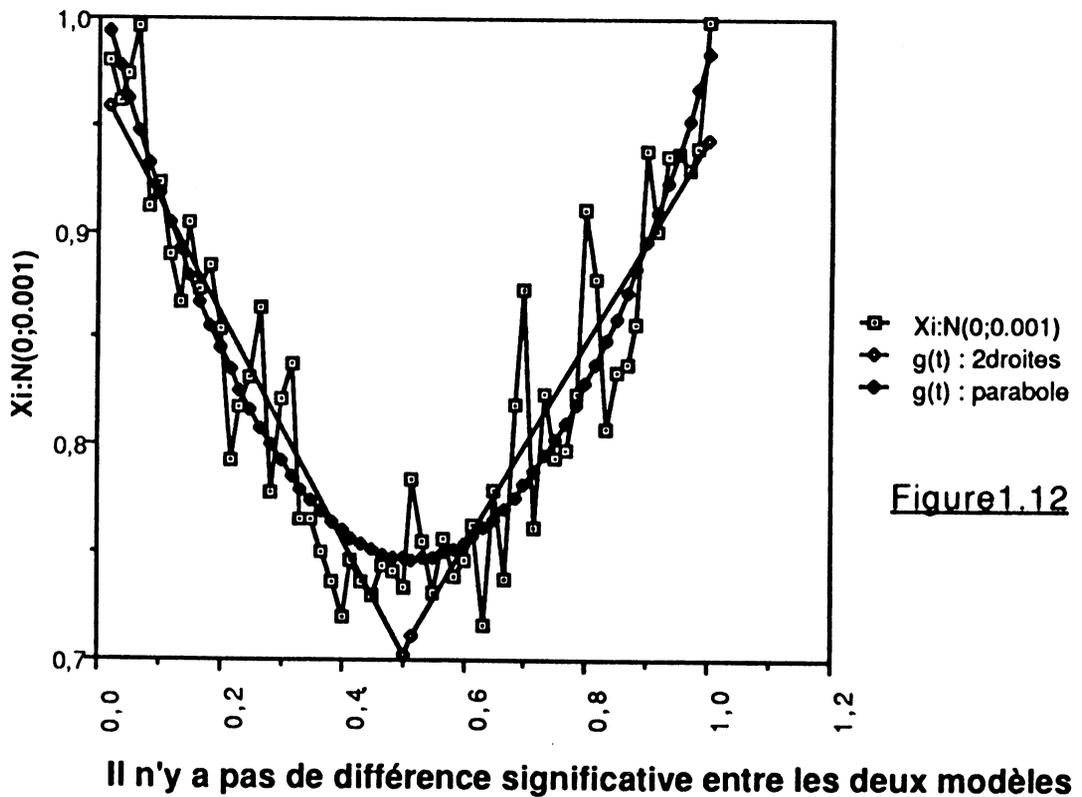
Figure 1.10

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.0001)$



Test de comparaison concernant le nuage  $f_1(t)+N(0;0.001)$



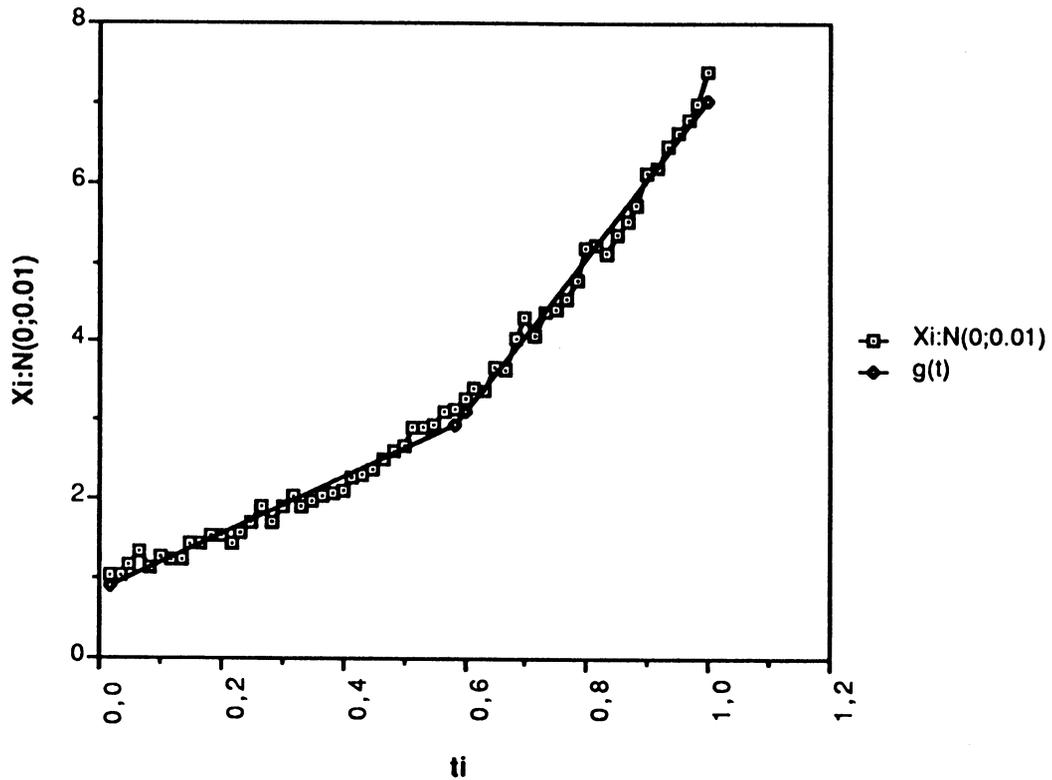
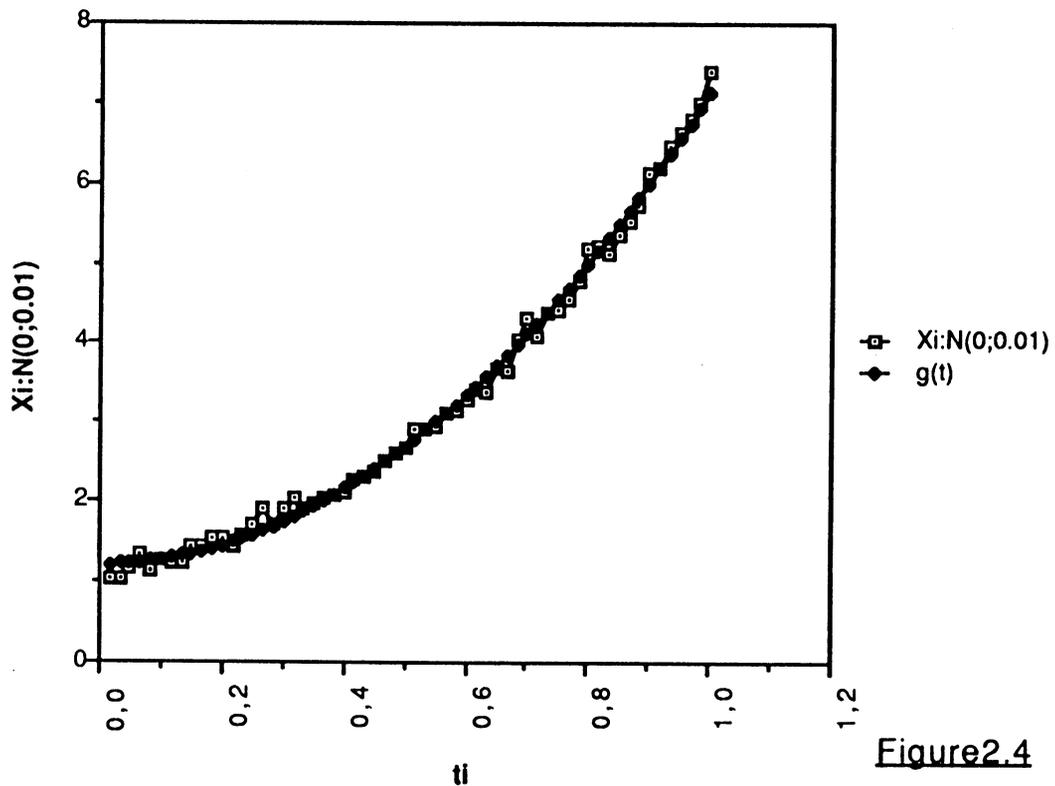
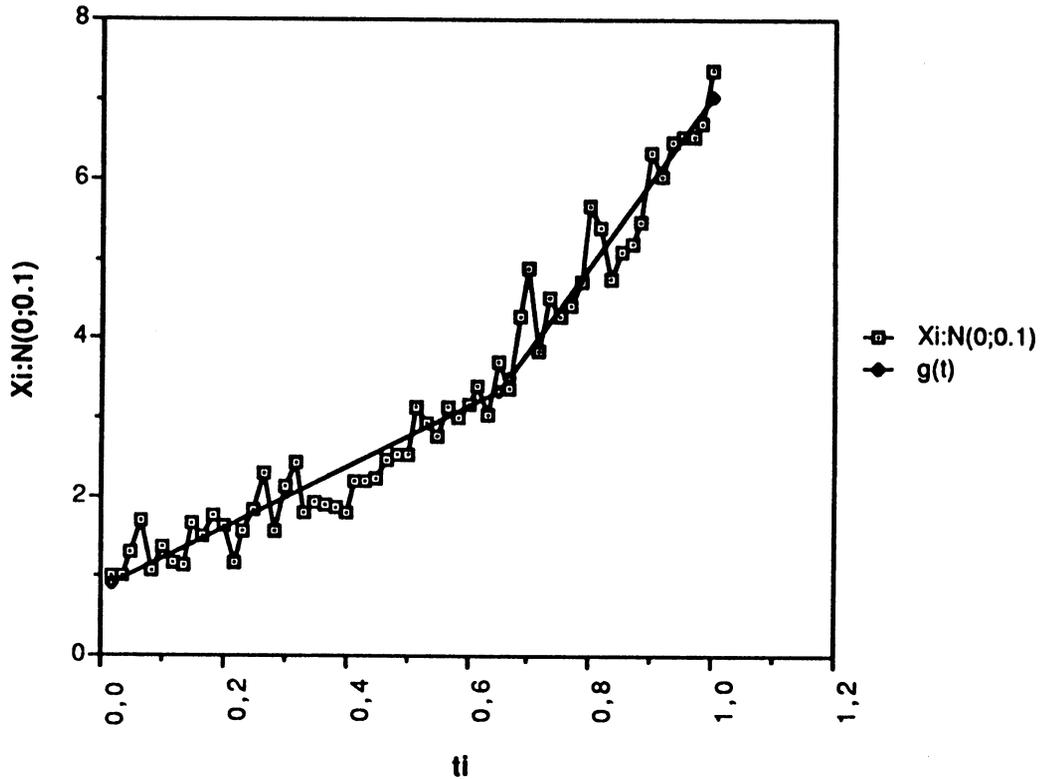
**Exemples 2 :  $f$  est une fonction exponentielle****Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$  par 2demi.droites****Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$  par une parabole**

Figure2.4

Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par une parabole

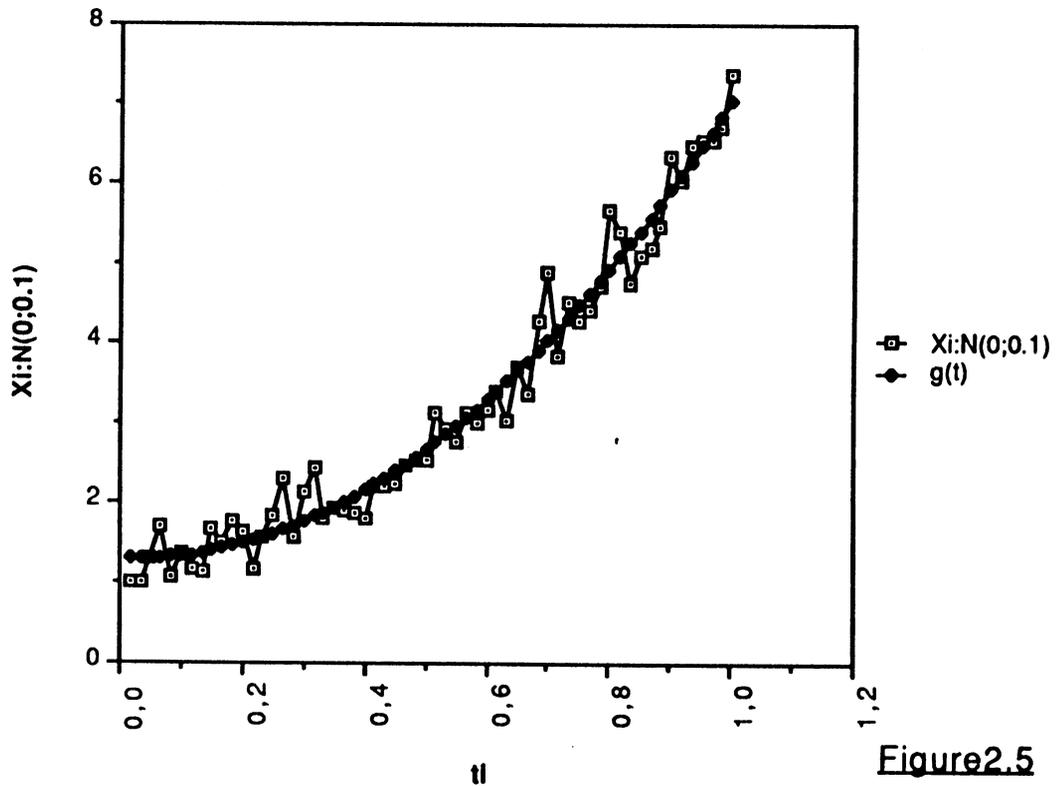
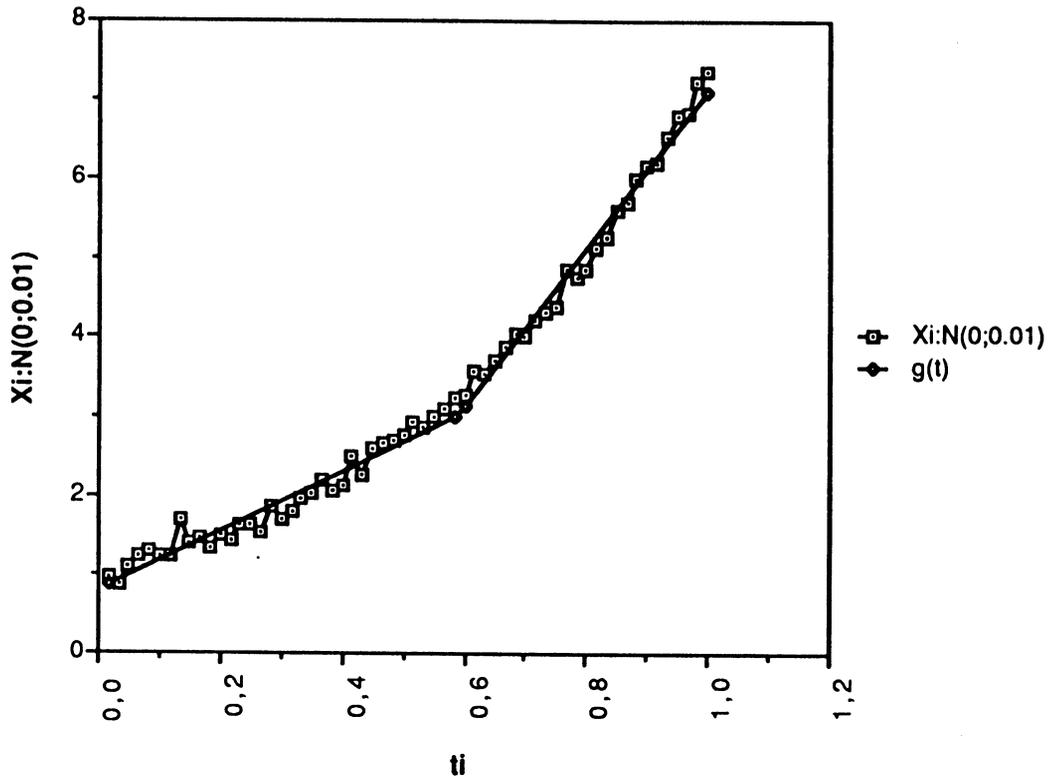


Figure2.5

Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$  par une parabole

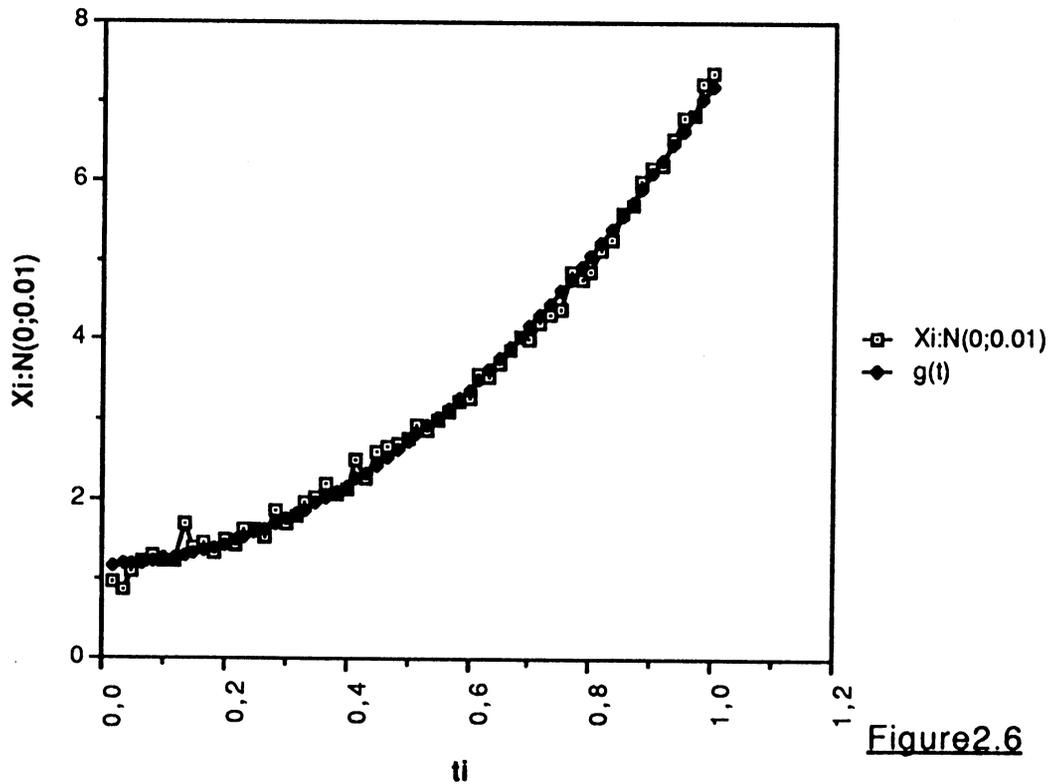
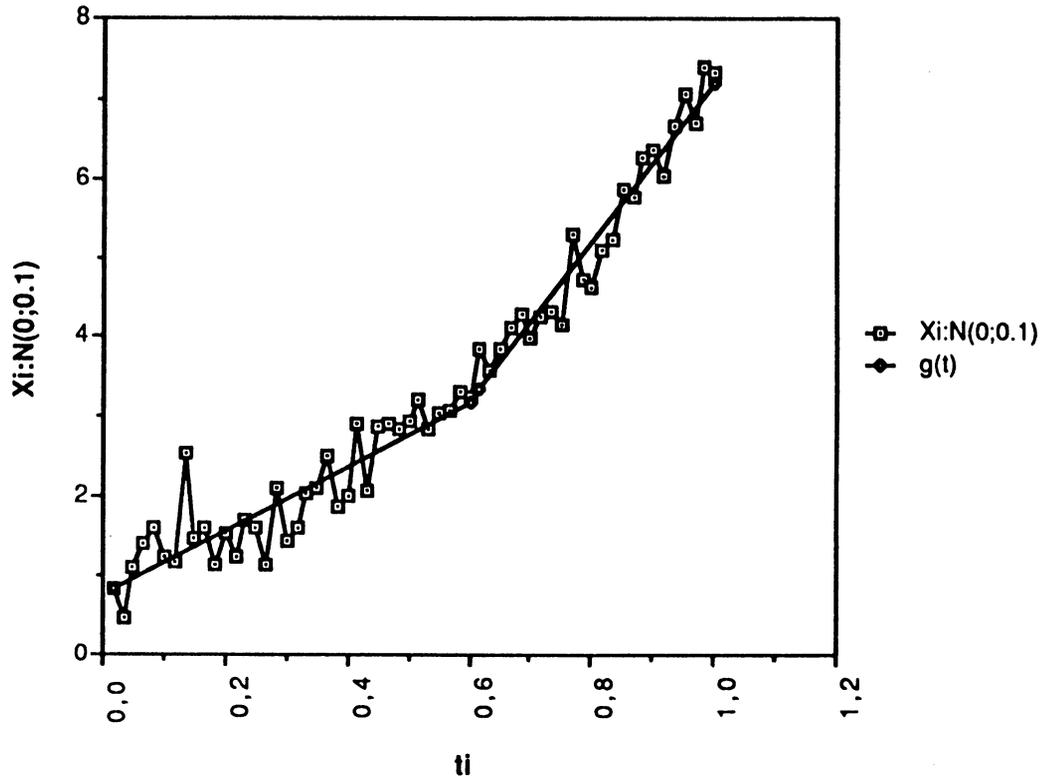


Figure2.6

Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$  par une parabole

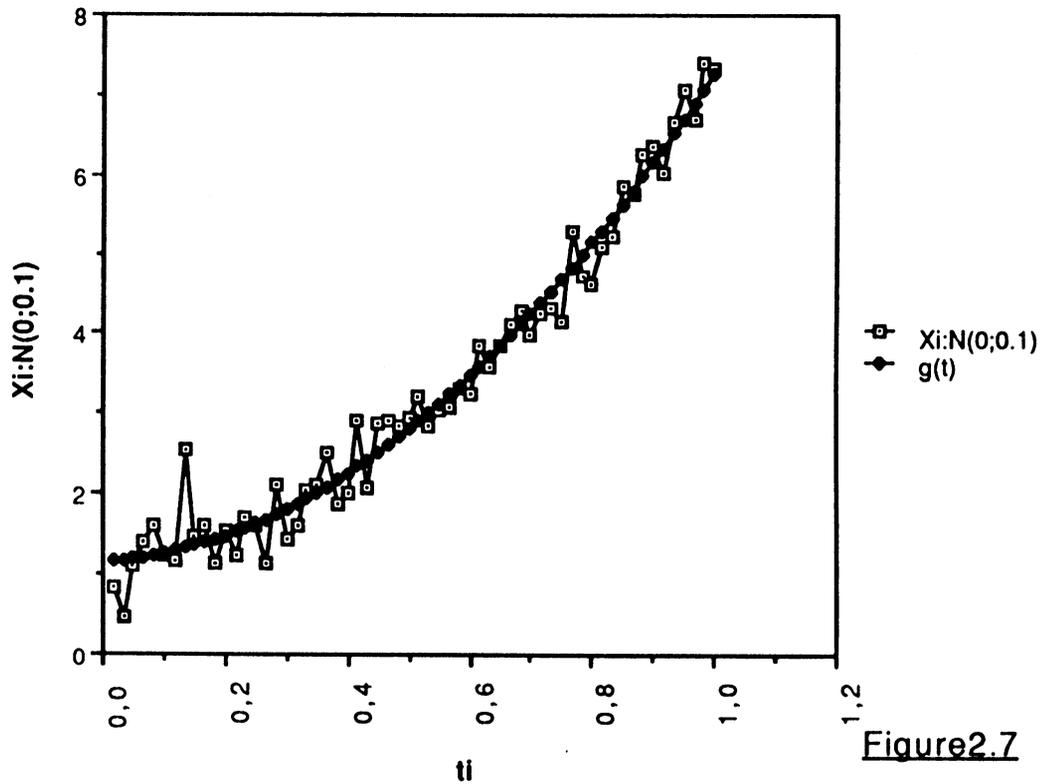


Figure2.7

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$

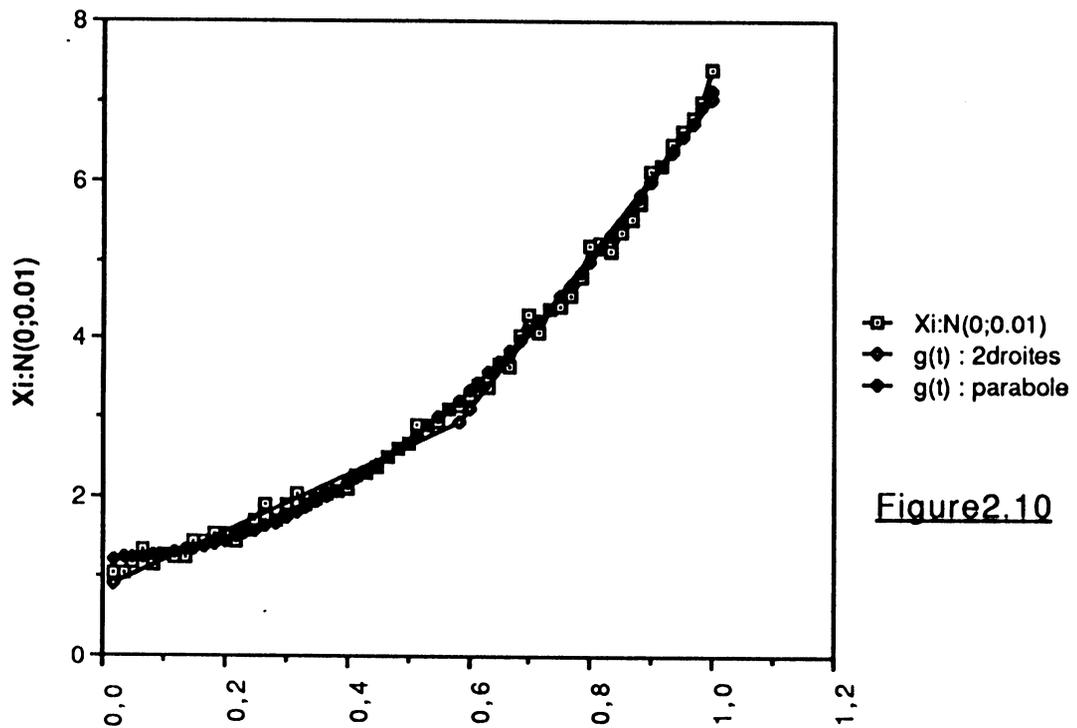


Figure2.10

Le modèle parabolique est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$

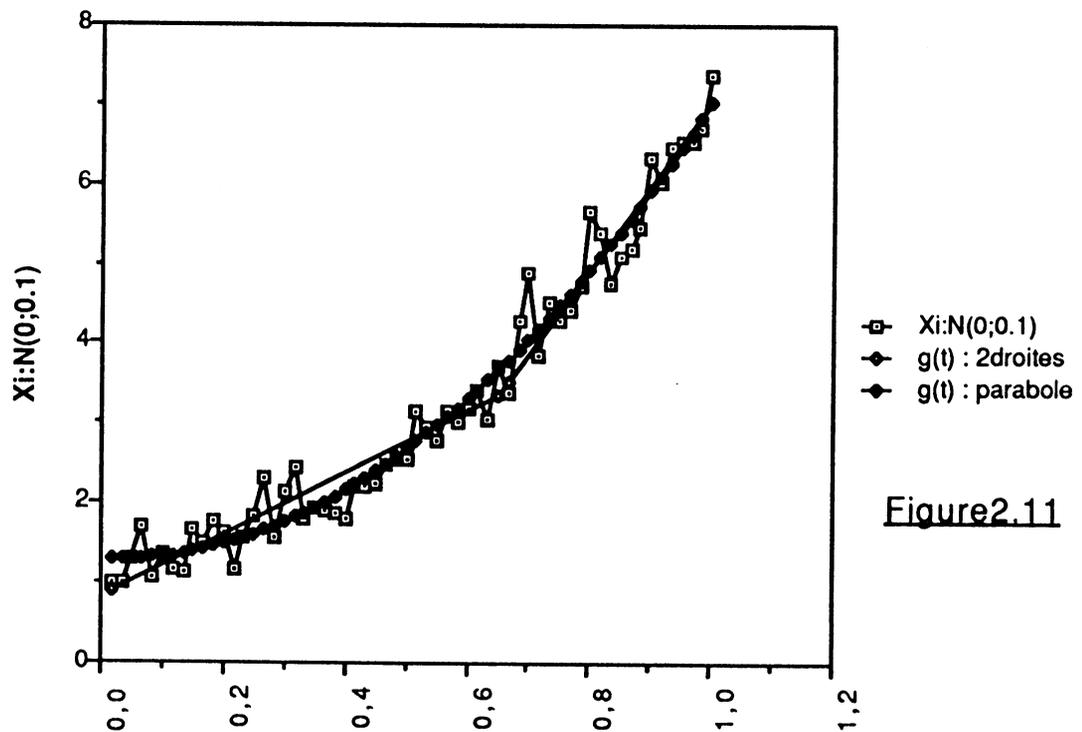


Figure2.11

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.01)$

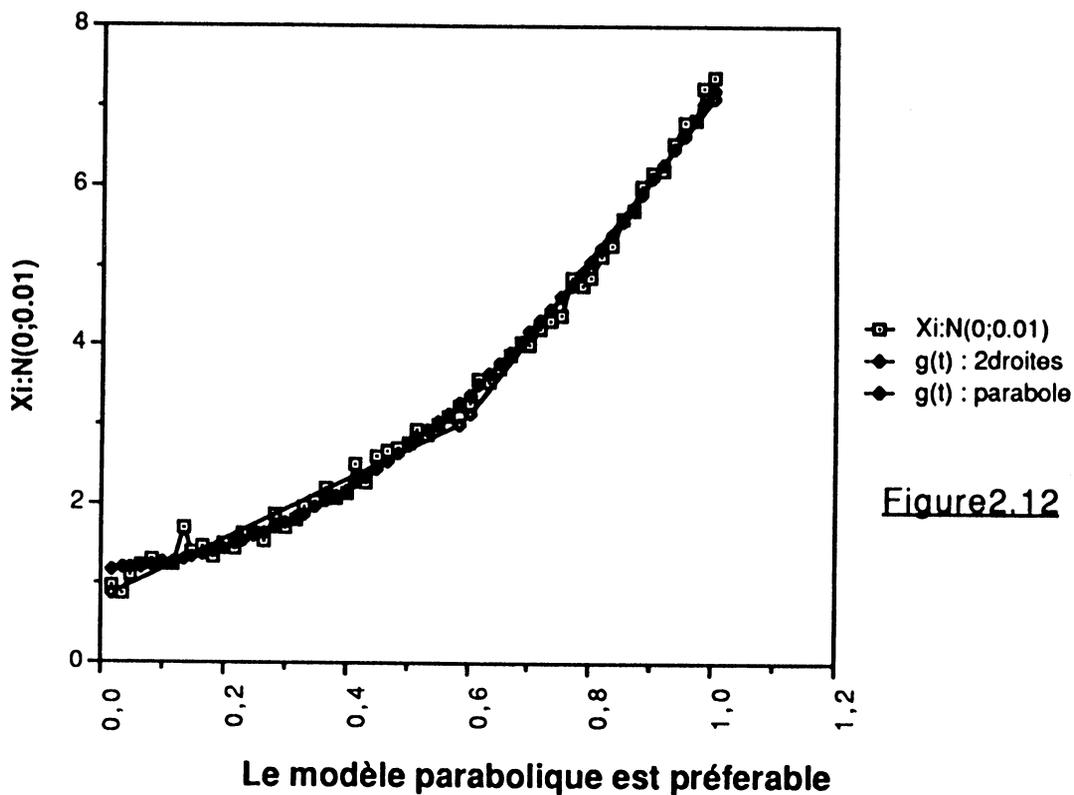


Figure 2.12

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.1)$

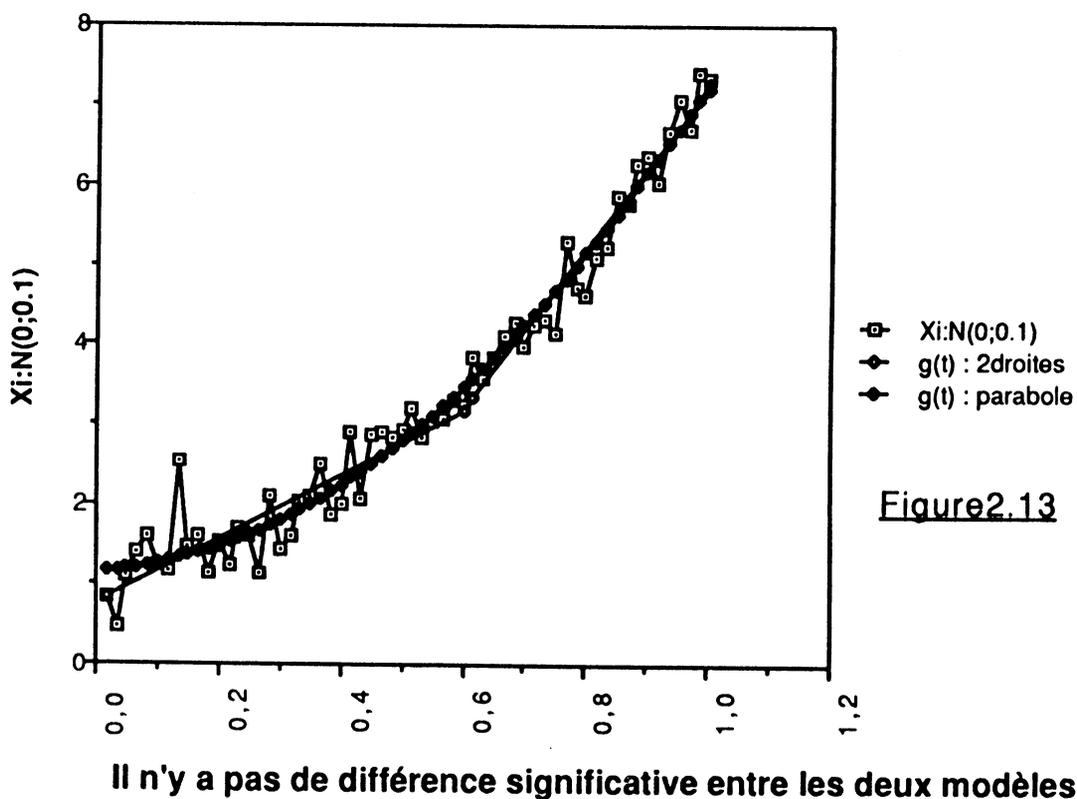


Figure 2.13

Test de comparaison concernant le nuage  $f_2(t)+N(0;0.25)$

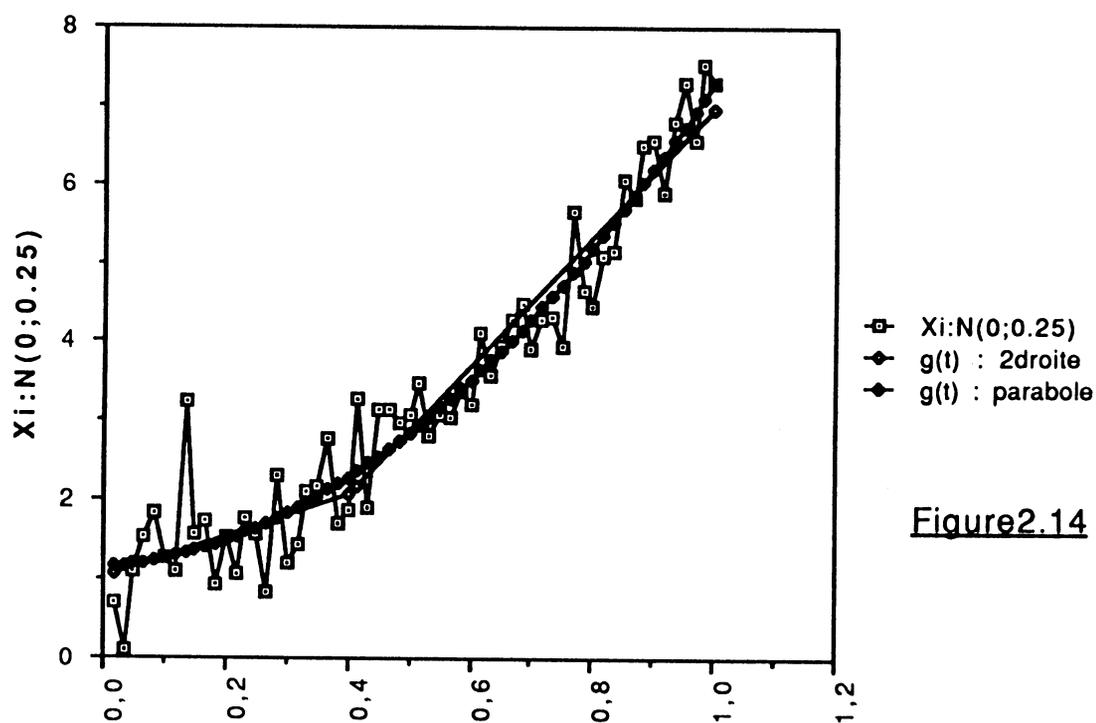
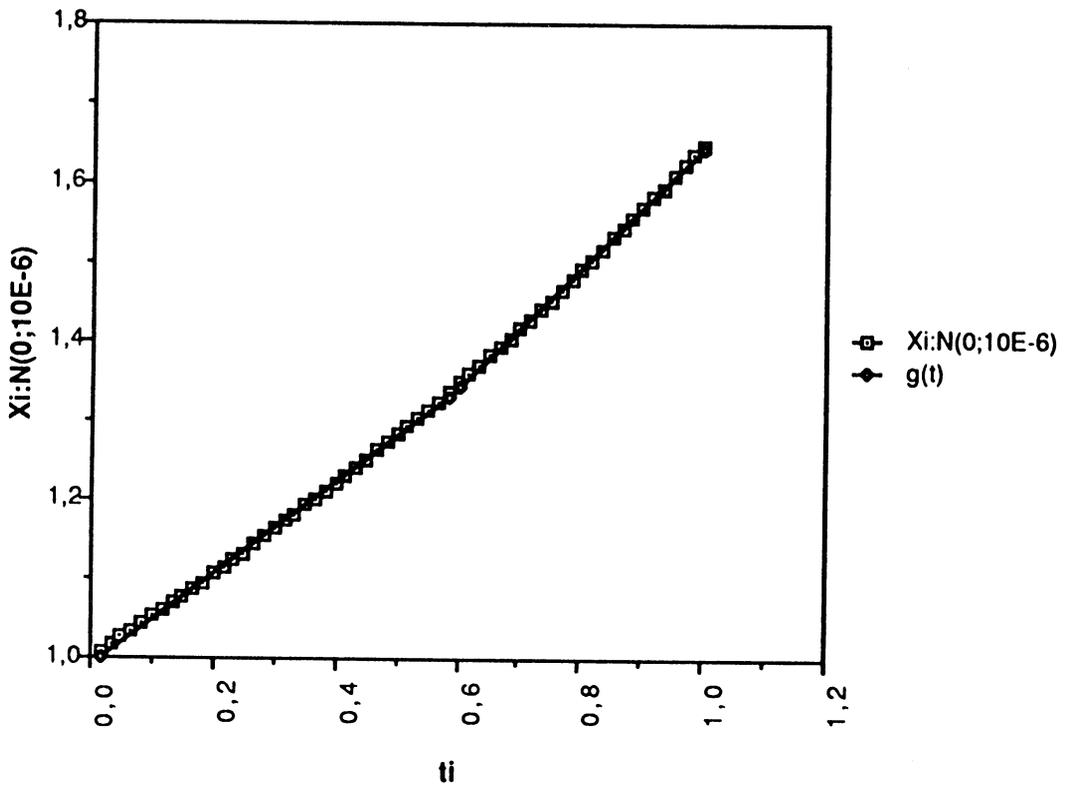


Figure 2.14

Le modèle parabolique est préférable

Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par 2demi.doites



Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par une parabole

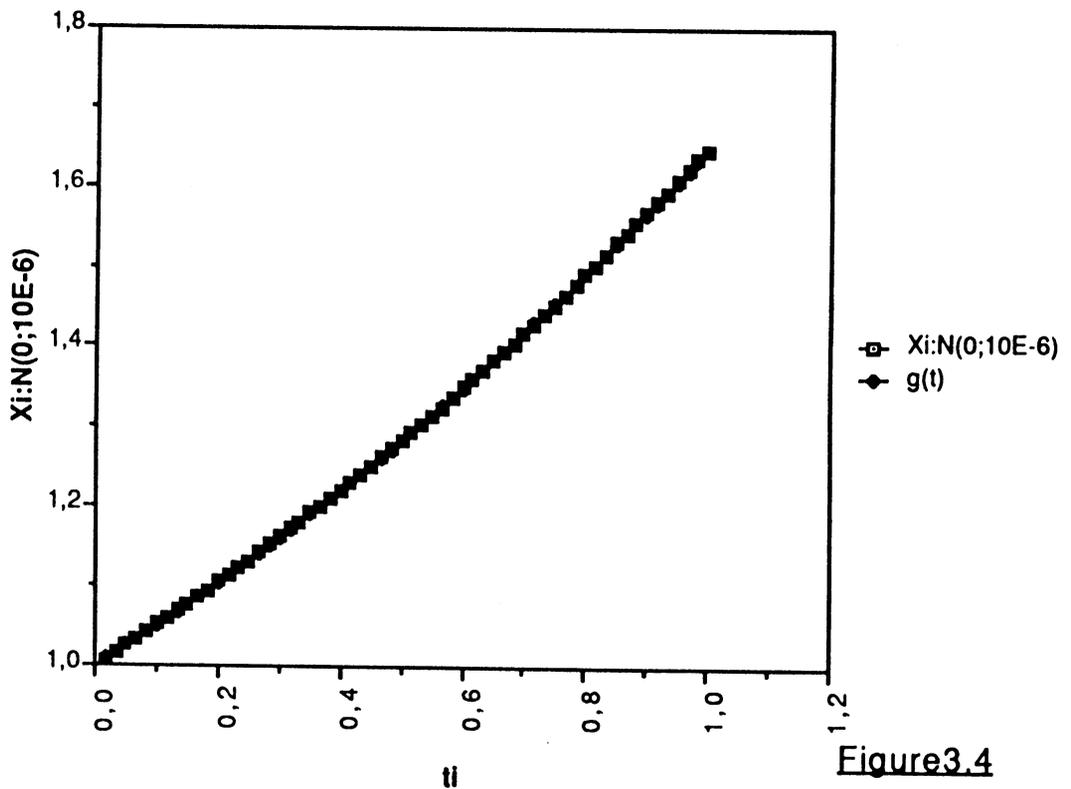
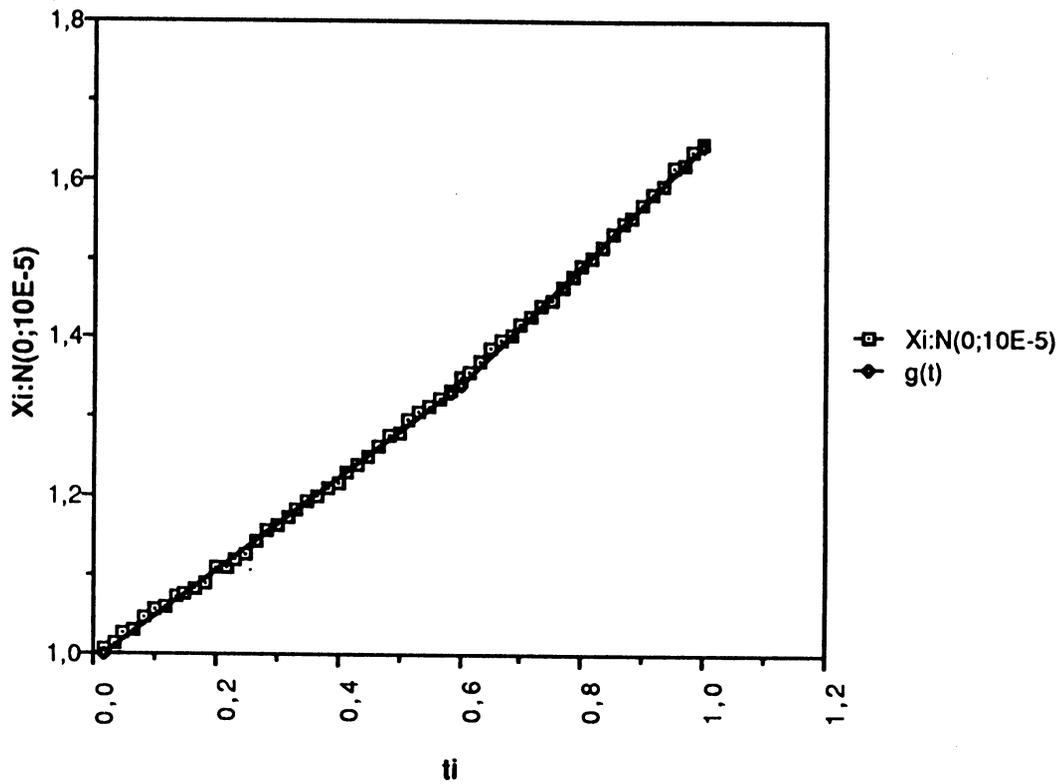


Figure3.4

### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0;10E-5)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0.10E-5)$ par une parabole

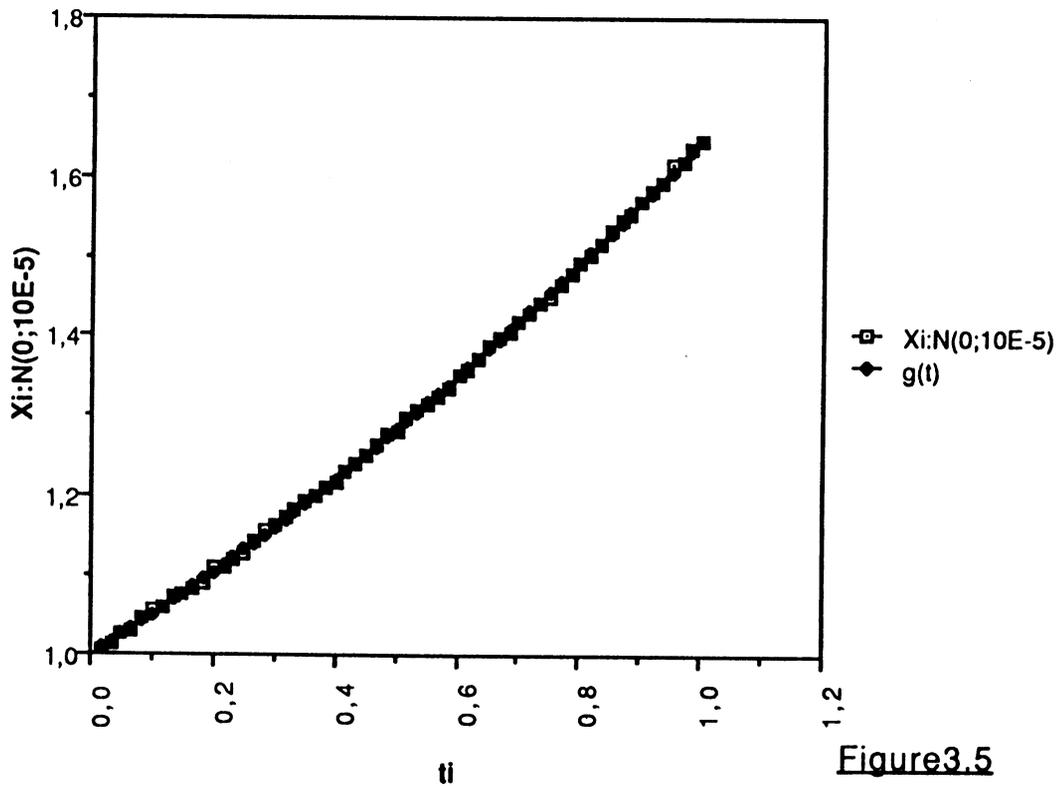
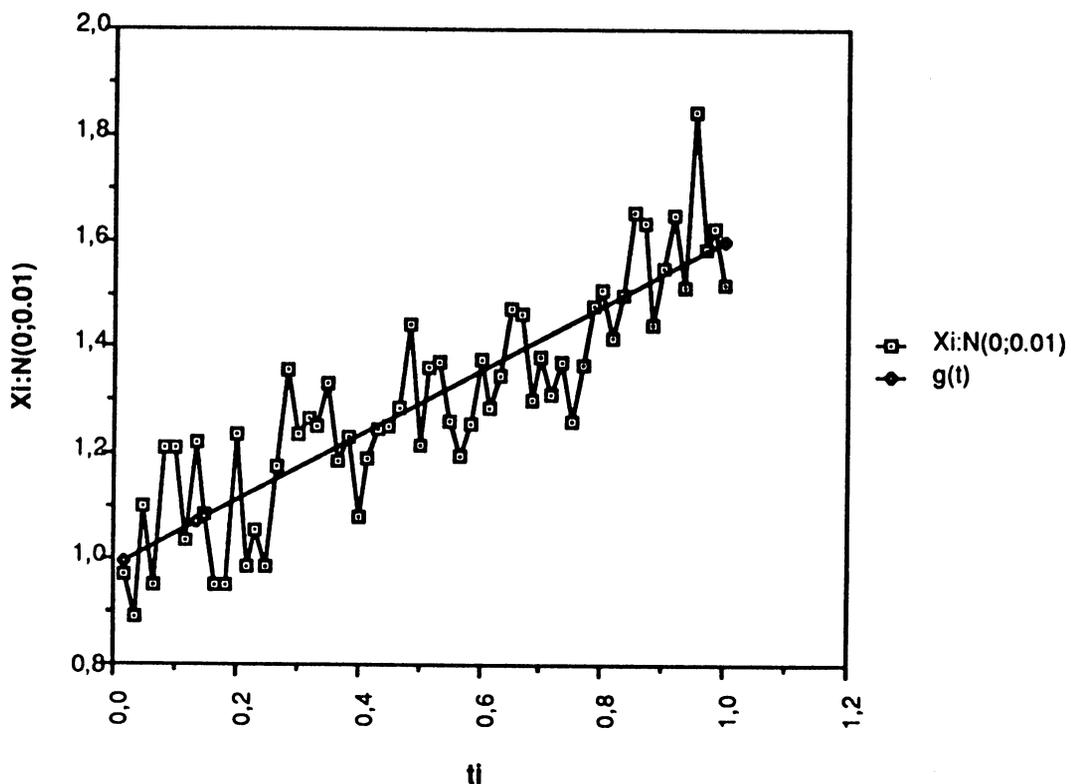


Figure3.5

Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;0.01)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;0.01)$  par une parabole

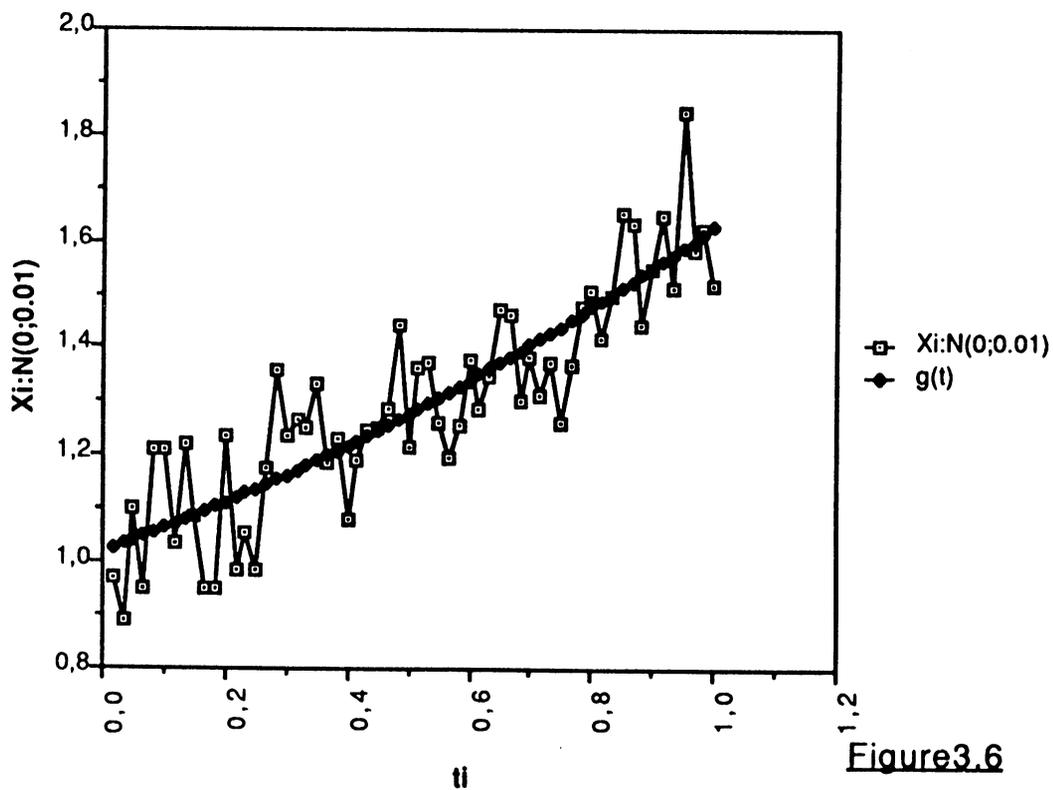
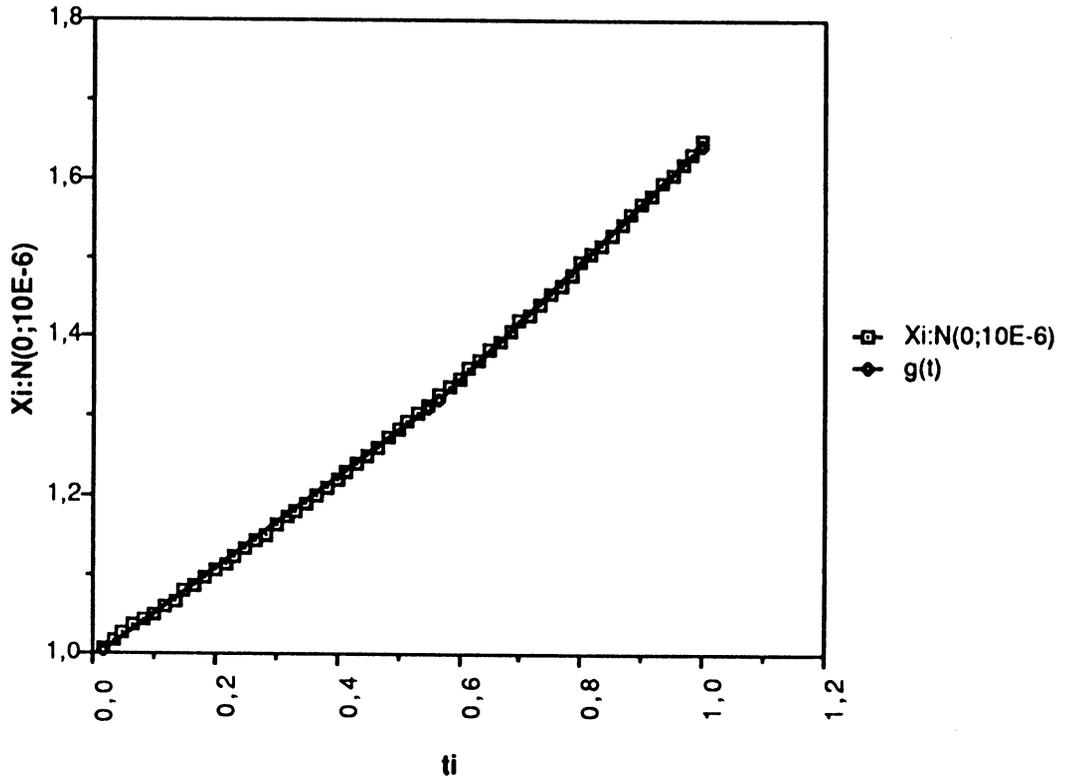


Figure3.6

Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$  par une parabole

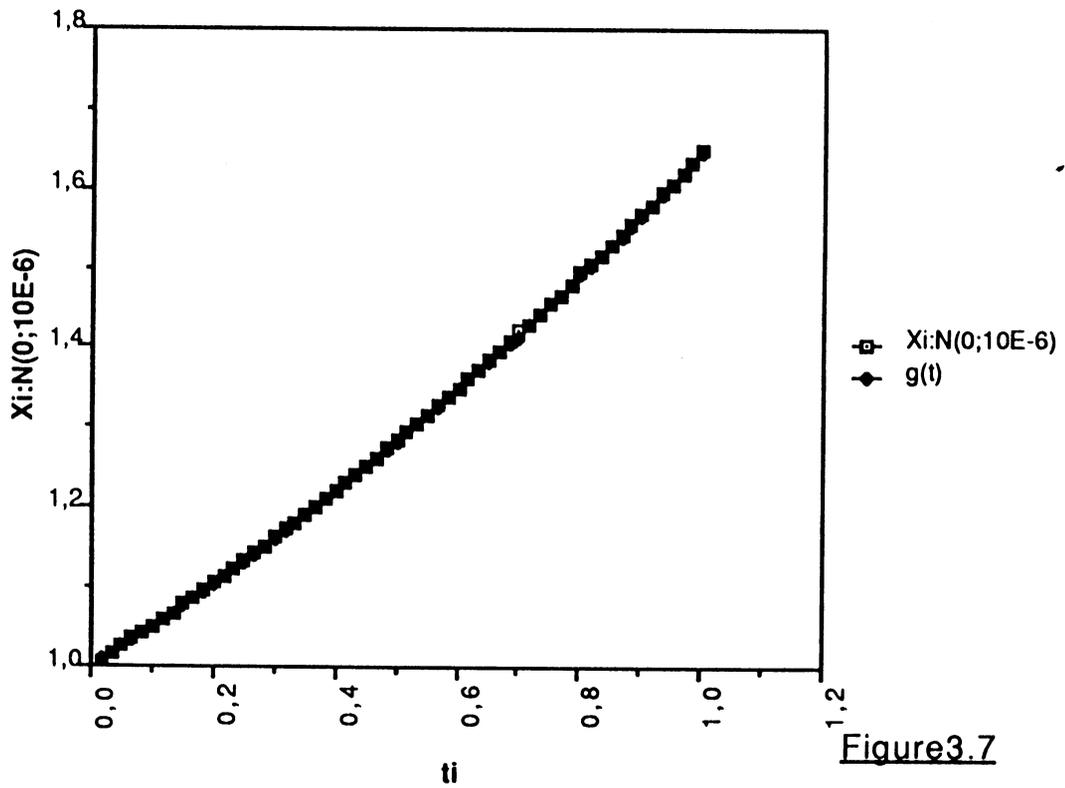
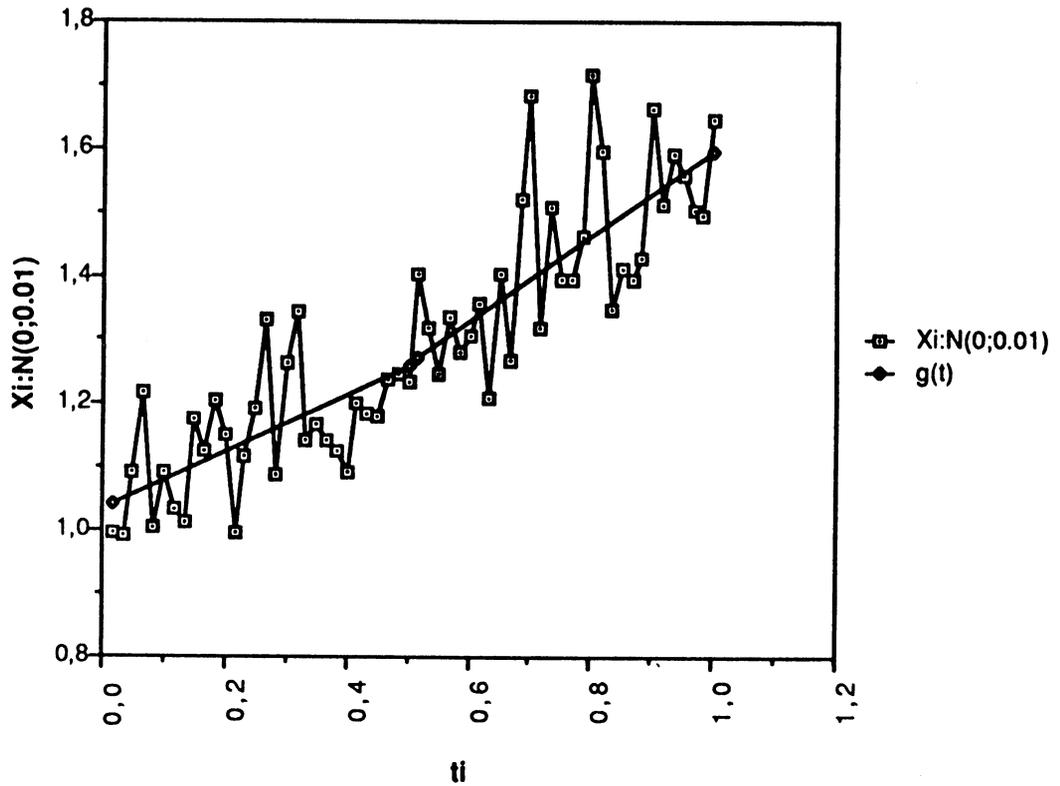


Figure3.7

### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_3(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

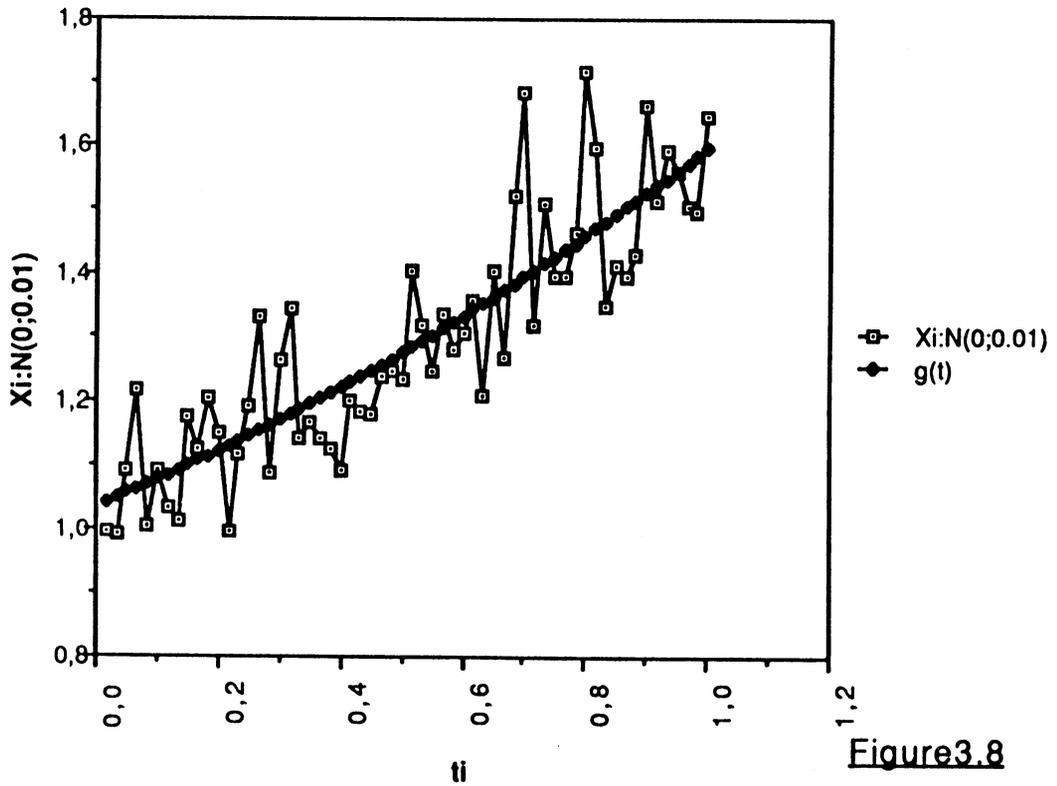


Figure 3.8

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;10E-5)$**

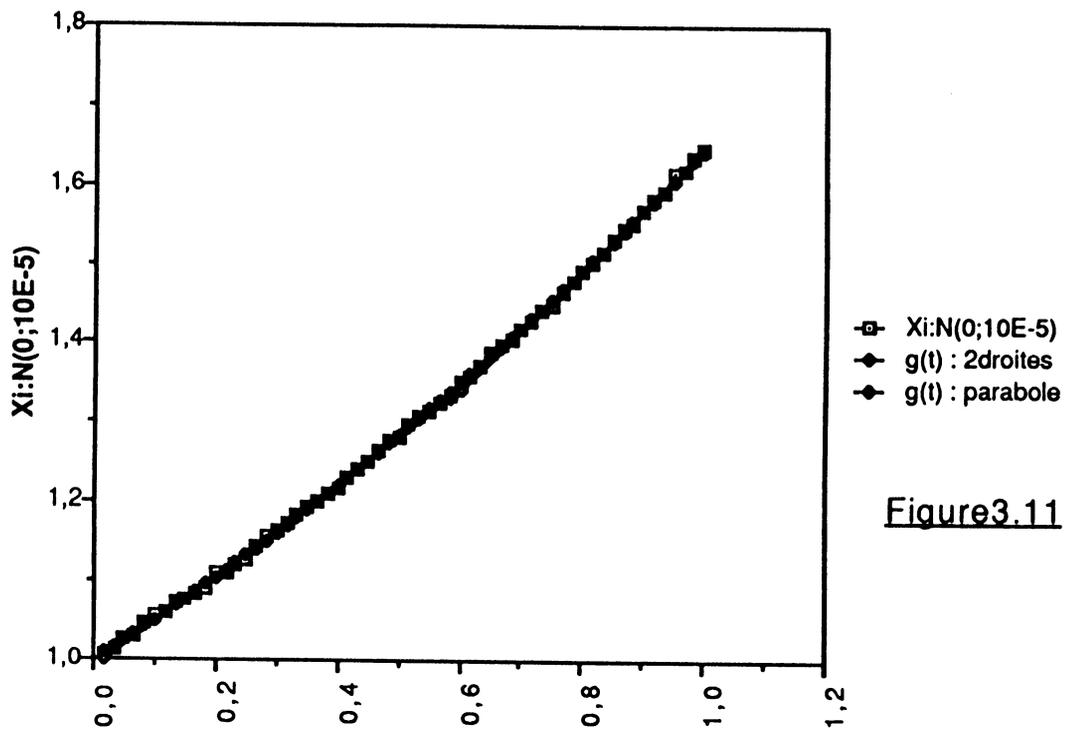


Figure 3.11

**Le modèle parabolique est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;0.01)$**

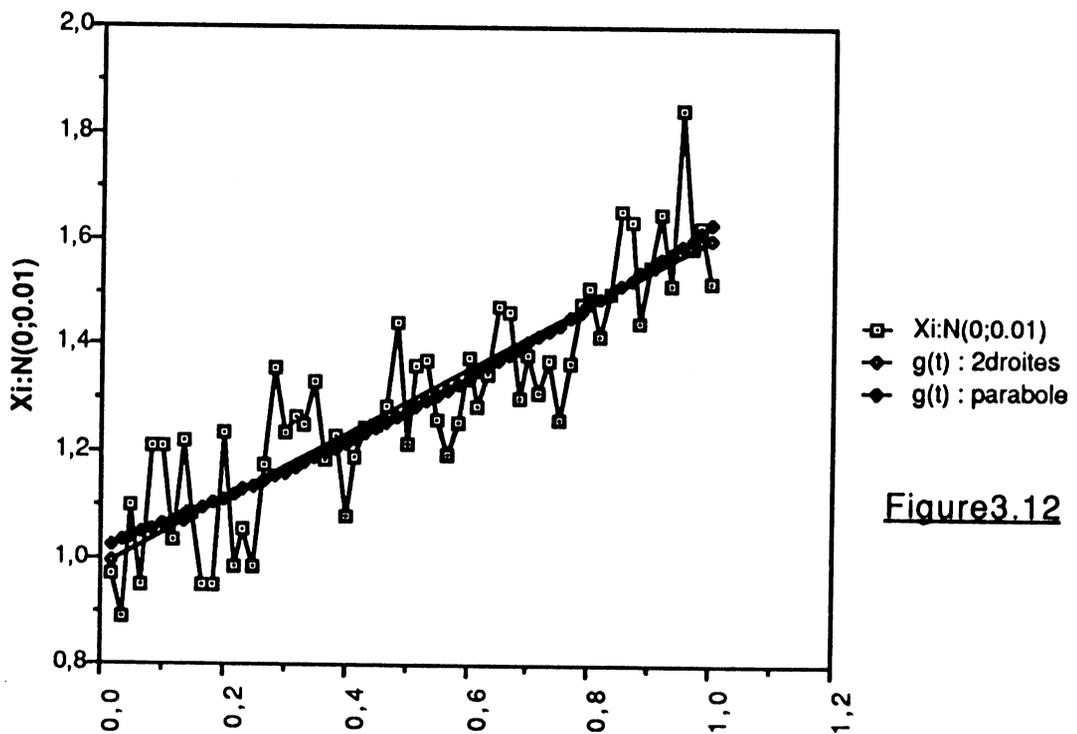
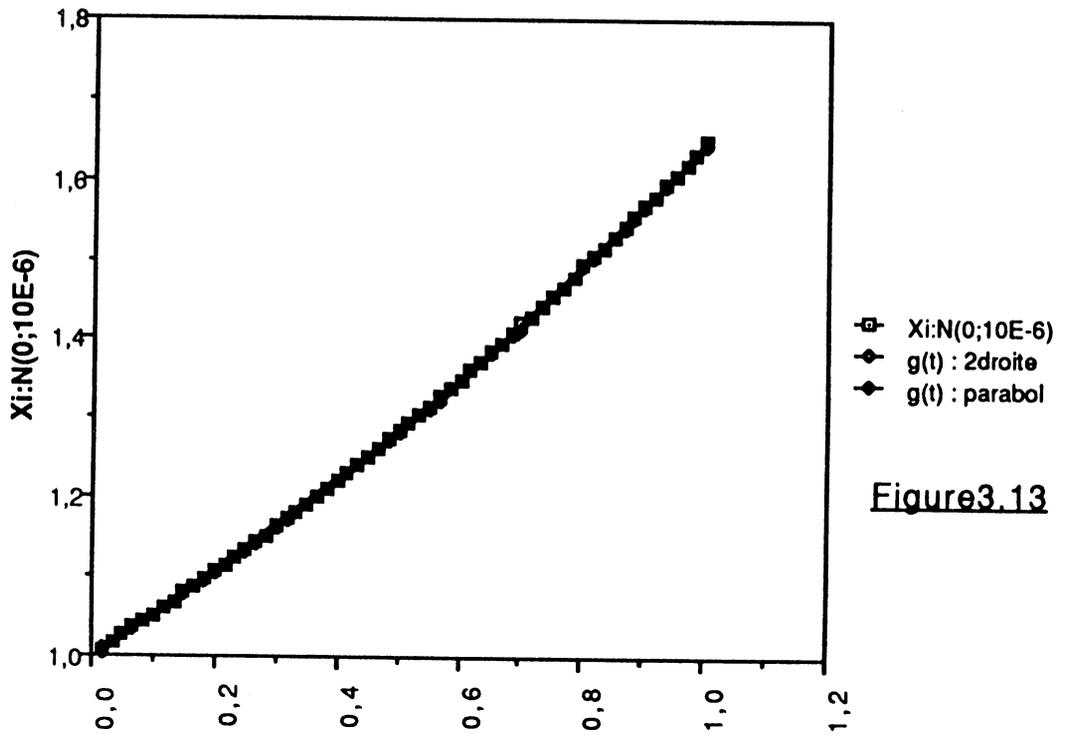


Figure 3.12

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

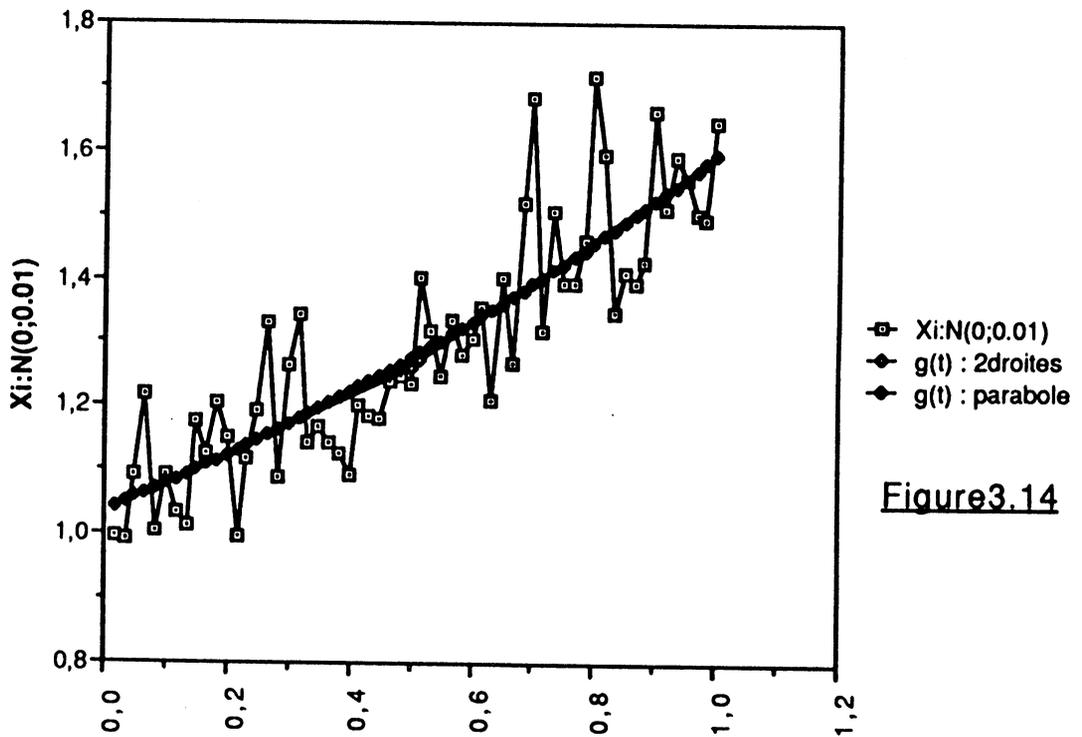
**Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;10E-6)$**



**Figure 3.13**

**Le modèle parabolique est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_3(t)+N(0;0.01)$**

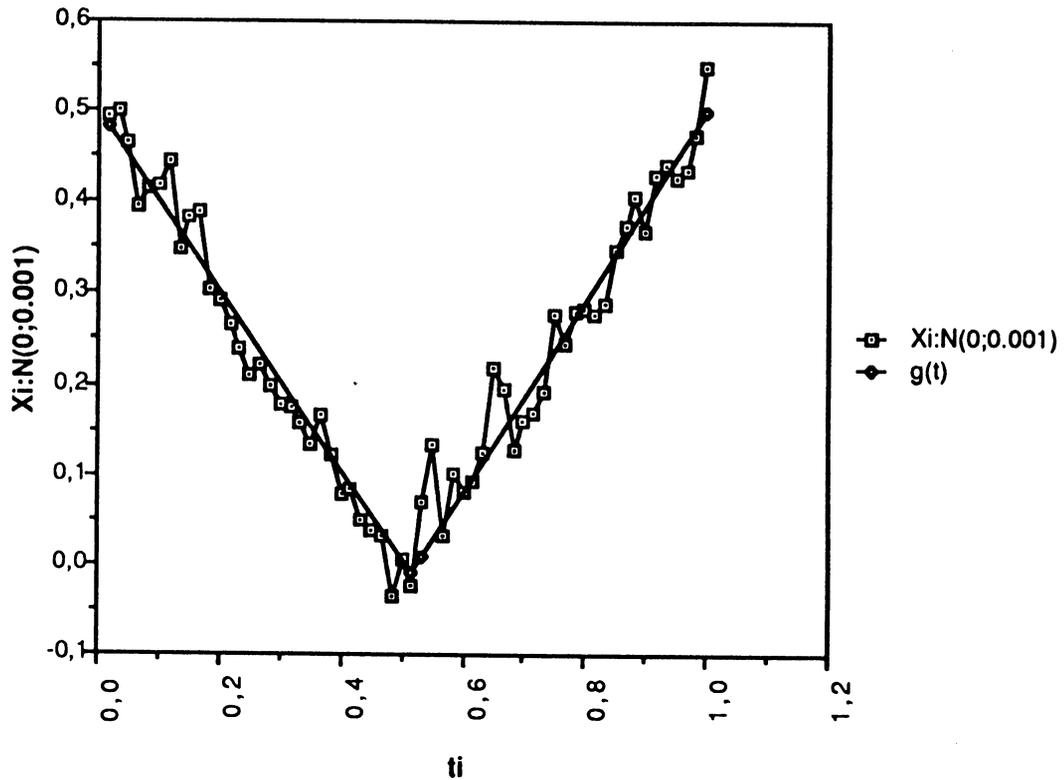


**Figure 3.14**

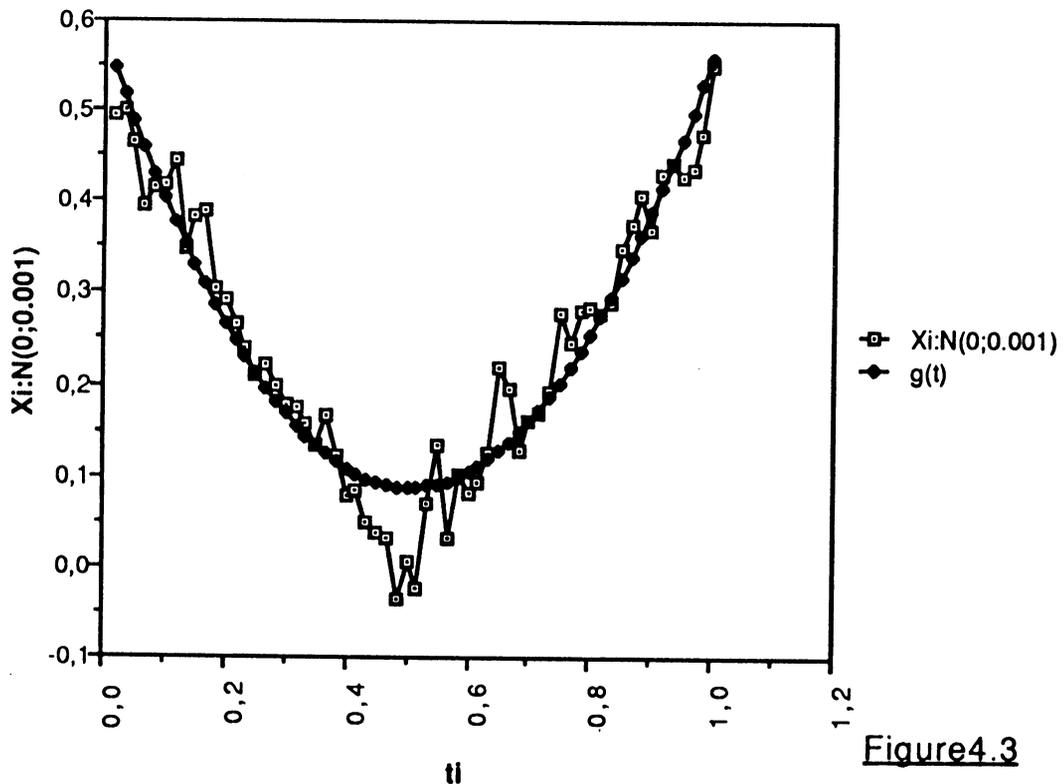
**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

**Exemple 3 : f est une fonction présentant une rupture**

**Approximation du nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$  par 2 demi.droites**

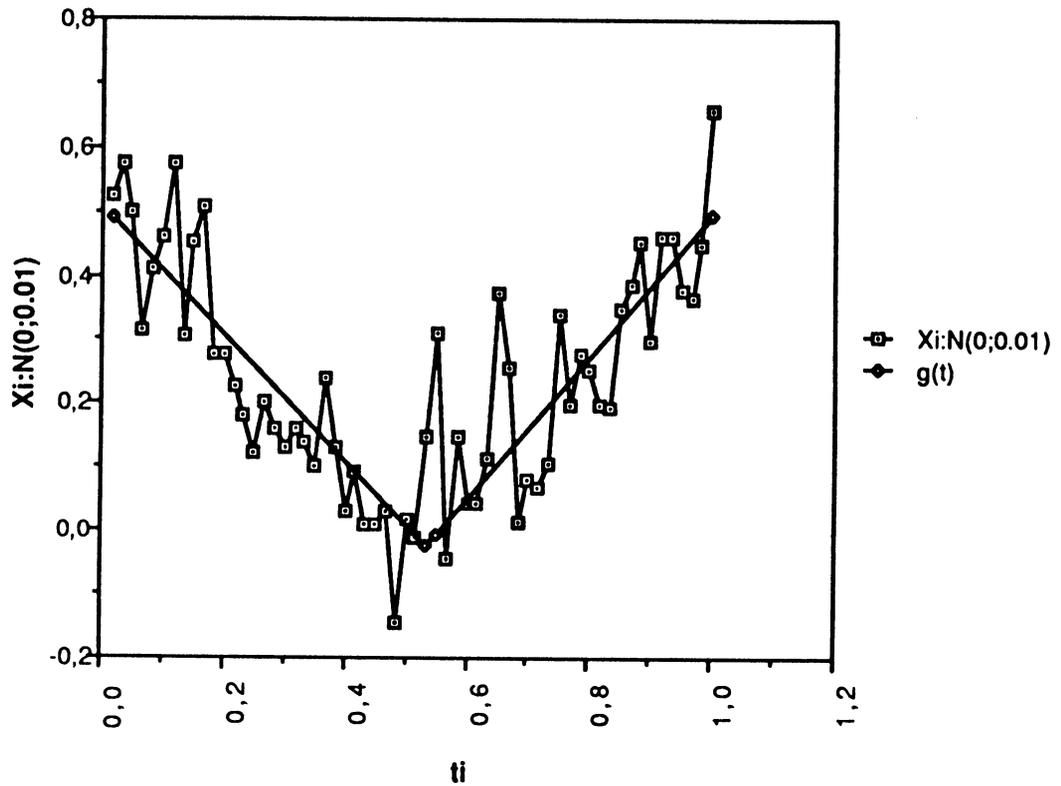


**Approximation du nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$  par une parabole**



**Figure4.3**

### Approximation du nuage $f_4(t)+N(0;0.01)$ par 2 demi.droites



### Approximation du nuage $f_4(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

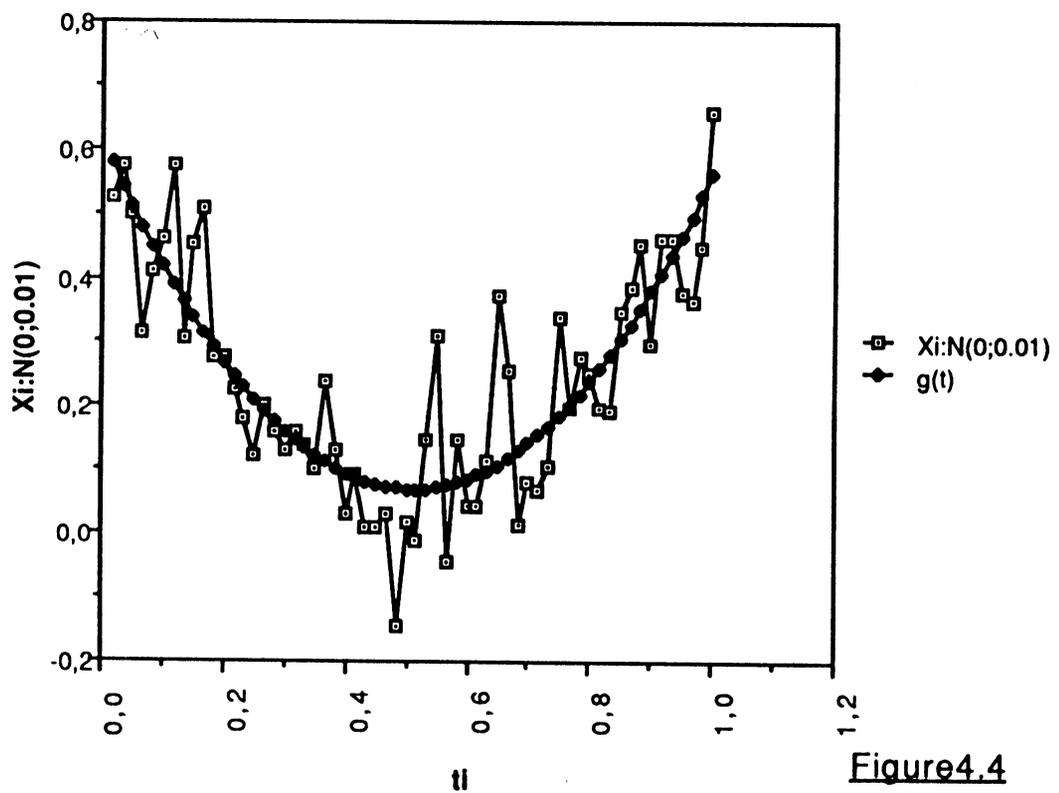


Figure4.4

Test de comparaison concernant le nuage  $f_4(t)+N(0;0.001)$

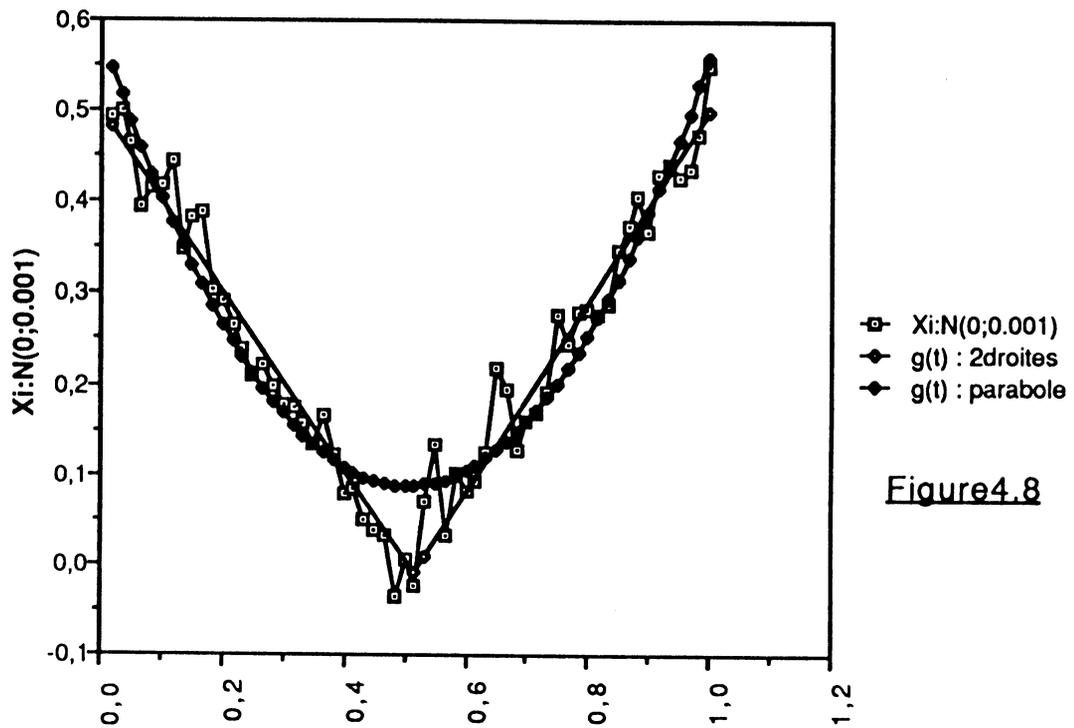


Figure4.8

Le modèle avec rupture est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_4(t)+N(0;0.01)$

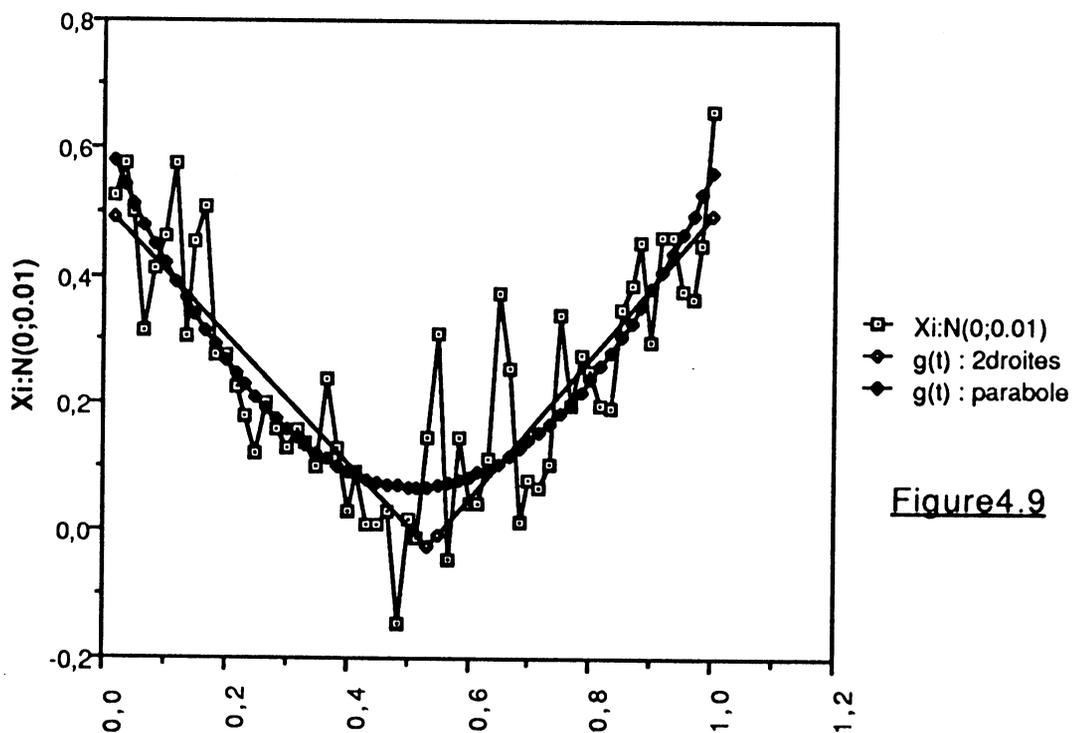
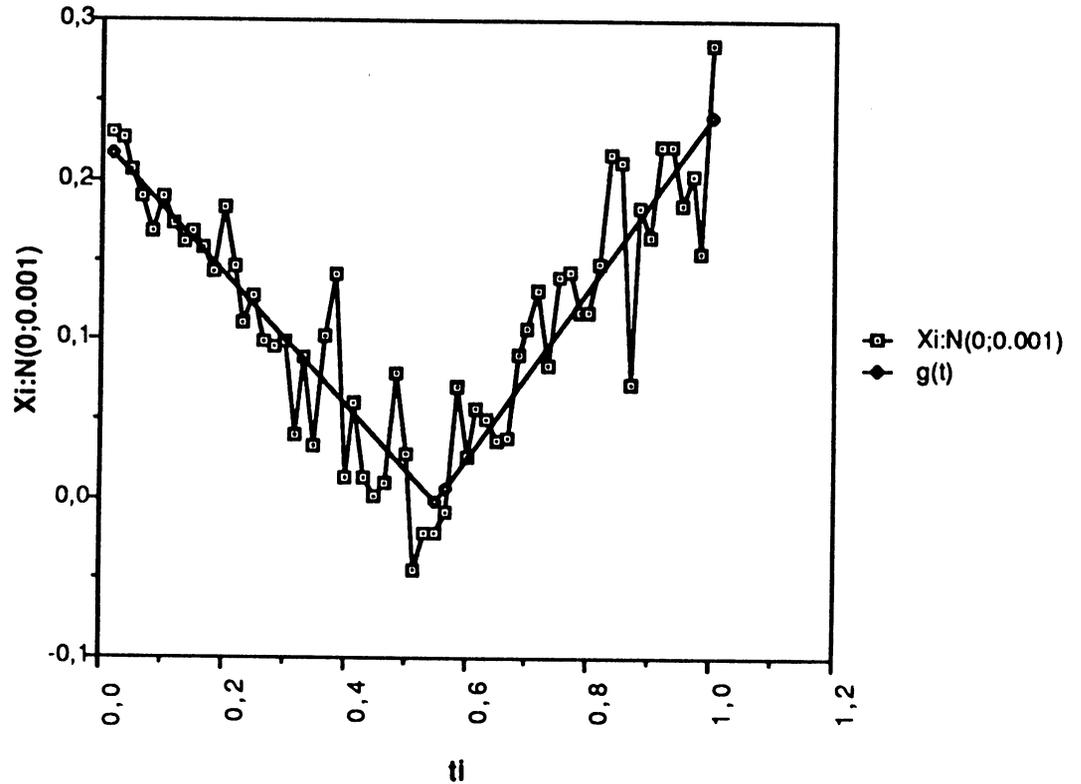


Figure4.9

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

Approximation du nuage  $f_5(t)+N(0;0.001)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_5(t)+N(0;0.001)$  par une parabole

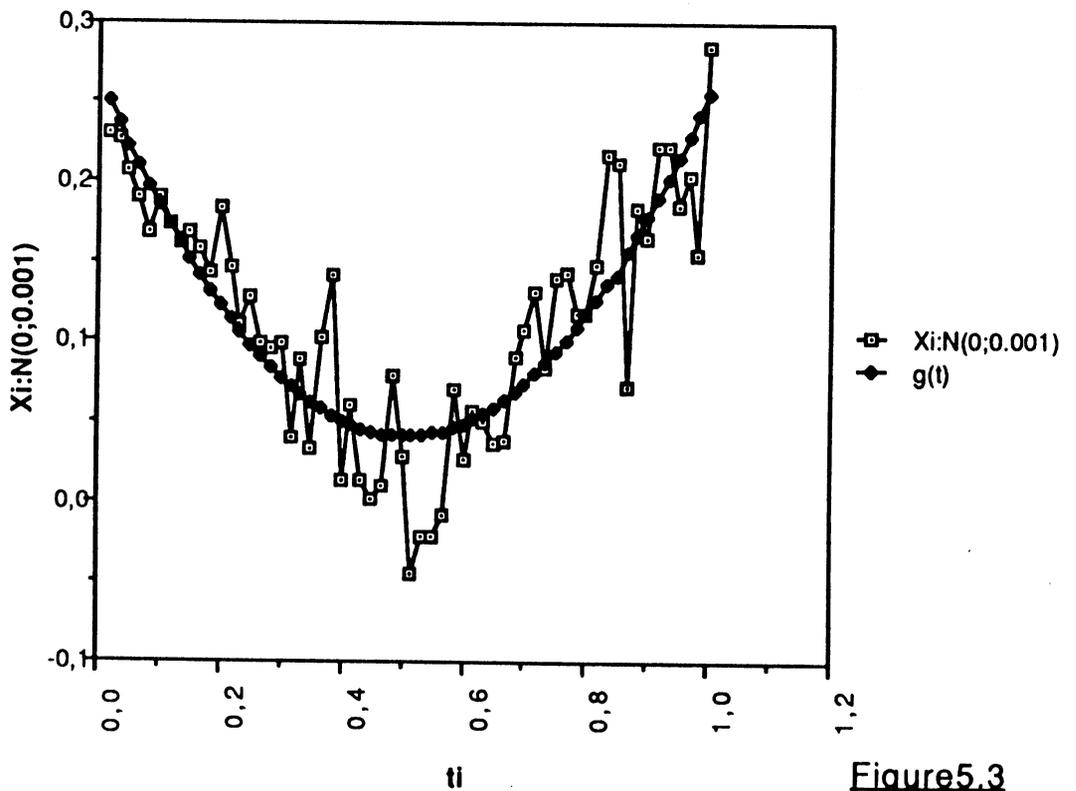
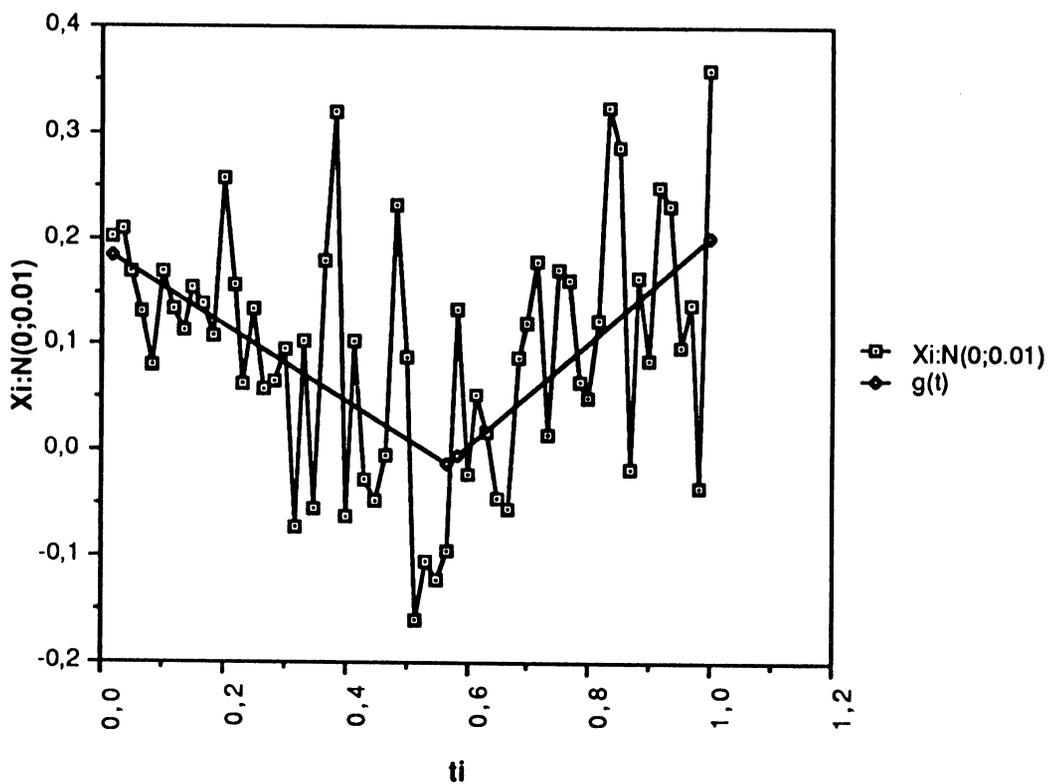


Figure5.3

### Approximation du nuage $f_5(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_5(t)+N(0;0.1)$ par une parabole

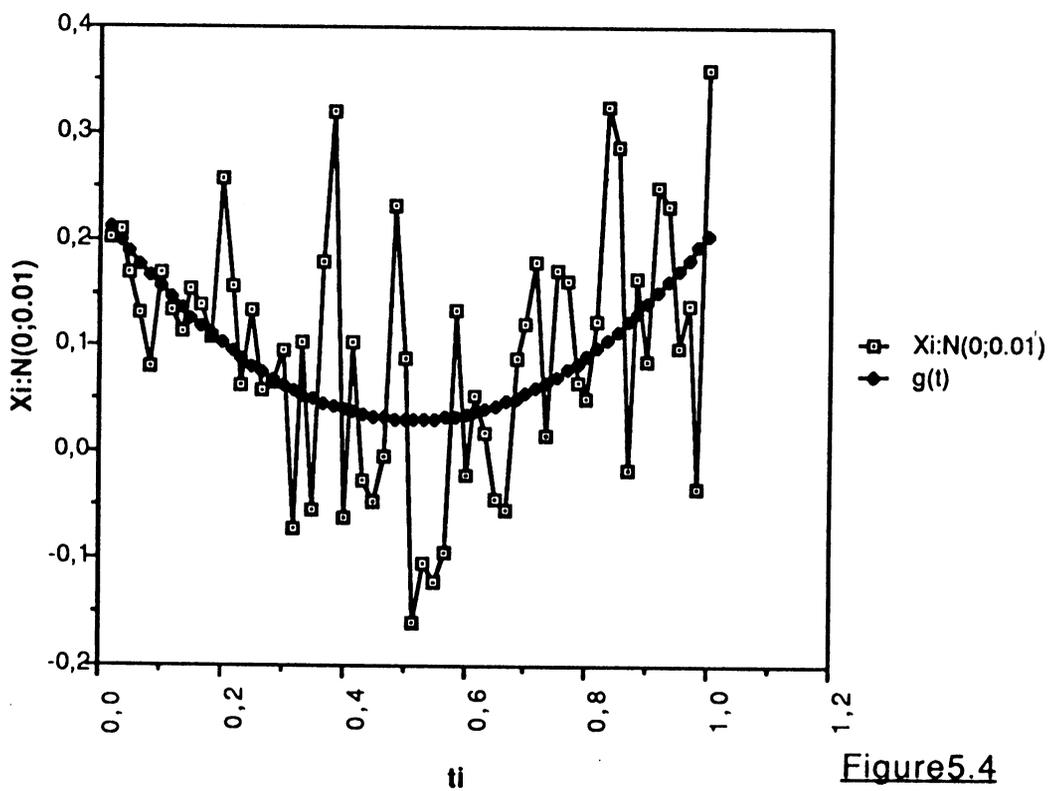


Figure 5.4

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_5(t)+N(0;0.001)$**

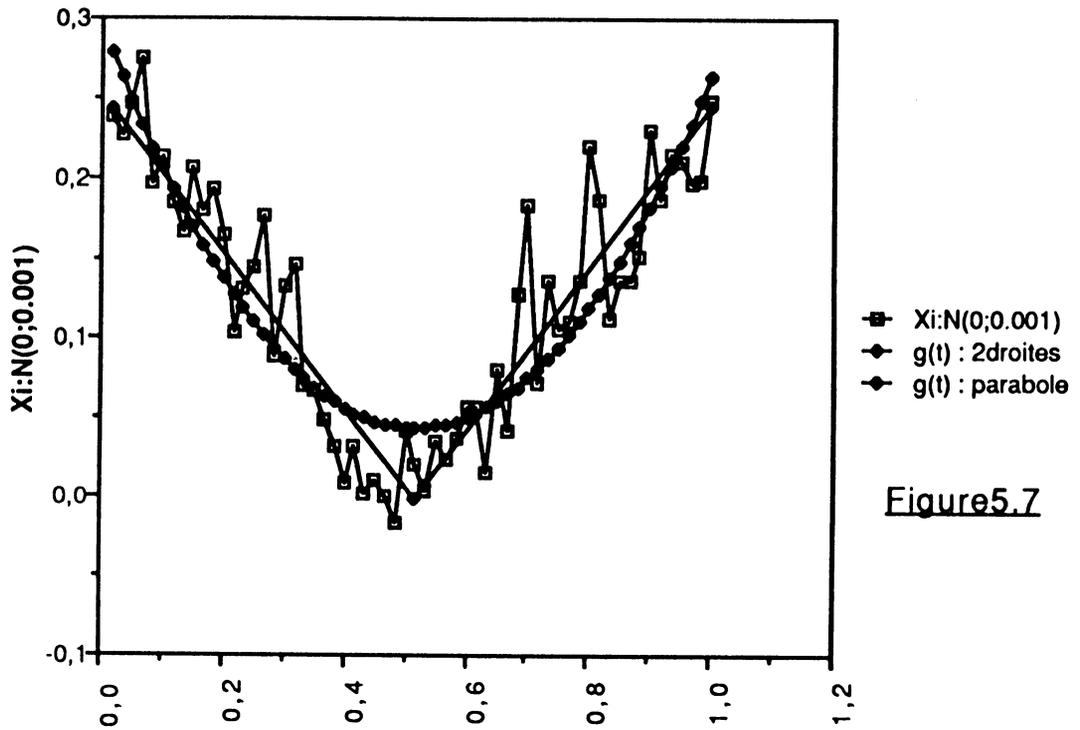


Figure 5.7

**Le modèle avec rupture est préférable**

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_5(t)+N(0;0.01)$**

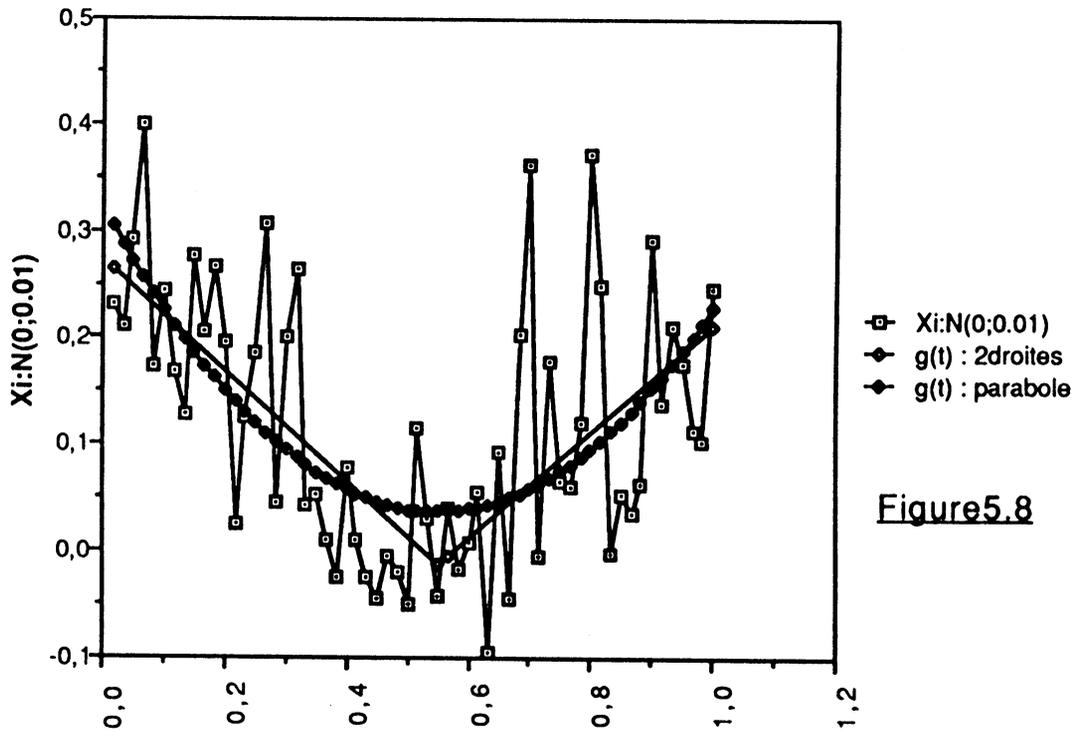
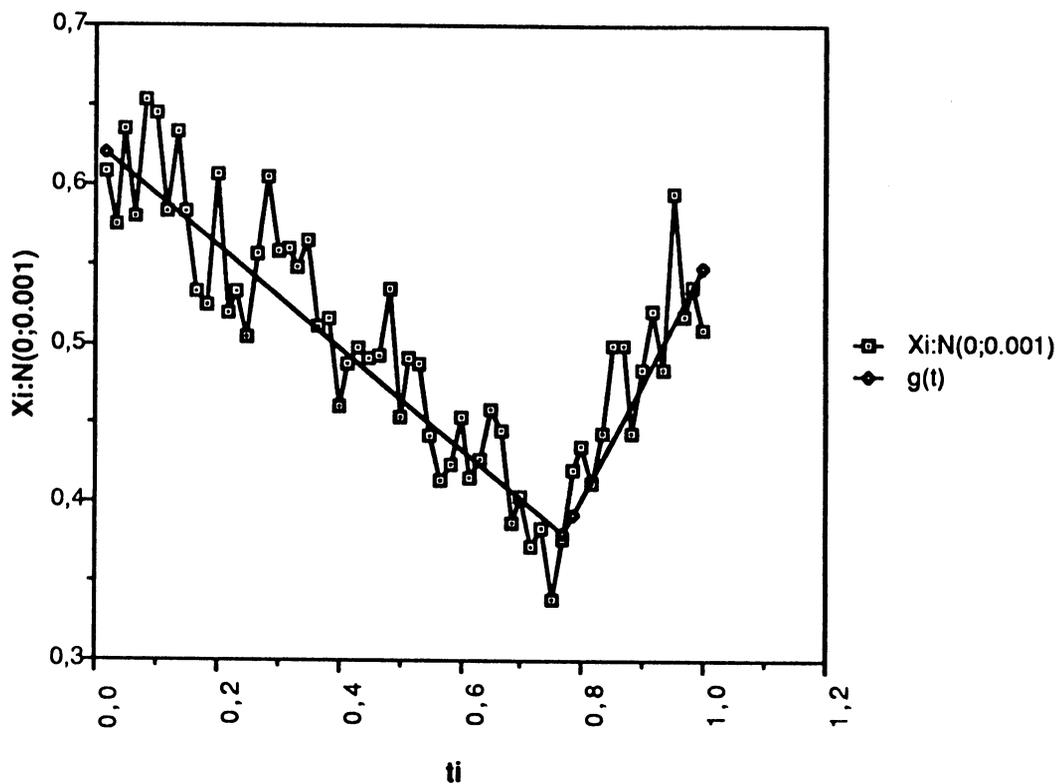


Figure 5.8

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_6(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

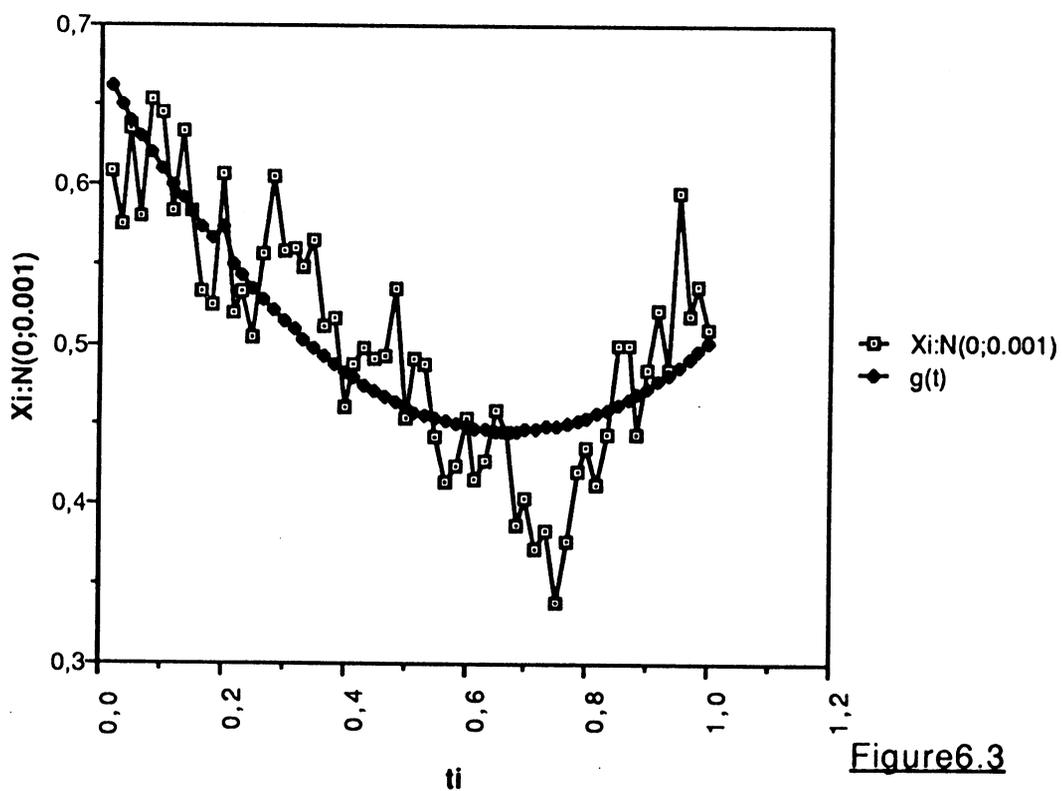
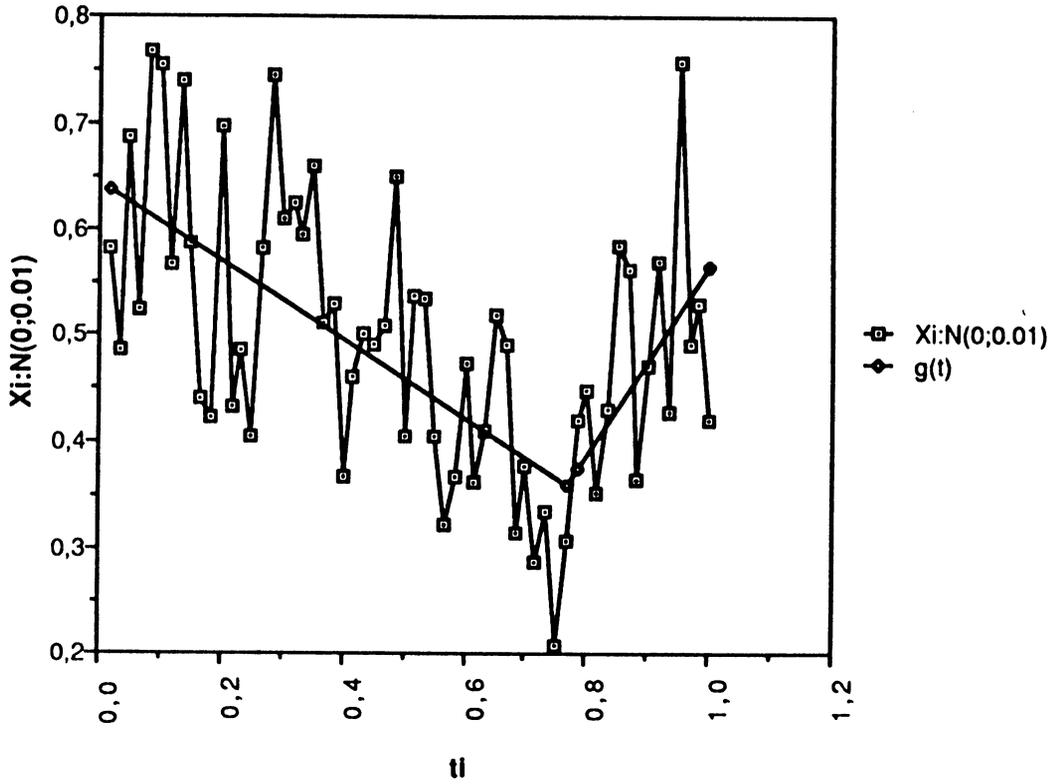


Figure6.3

Approximation du nuage  $f_6(t)+N(0;0.01)$  par 2demi.droites



Approximation du nuage  $f_6(t)+N(0;0.01)$  par une parabole

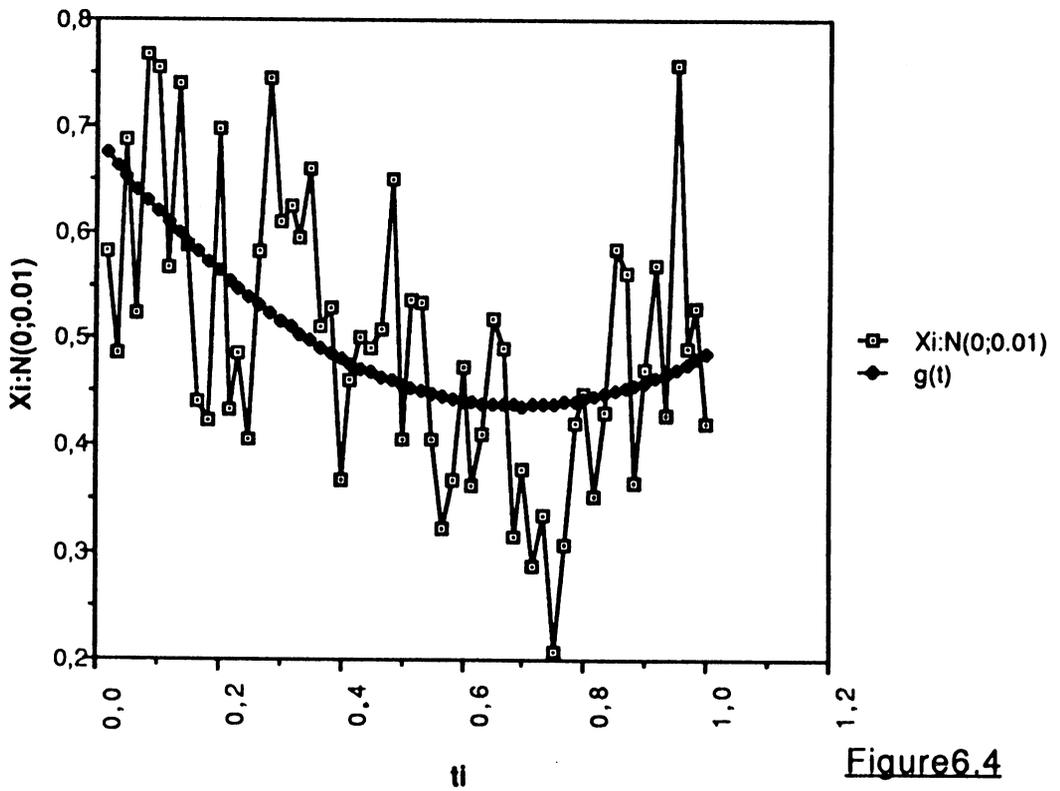
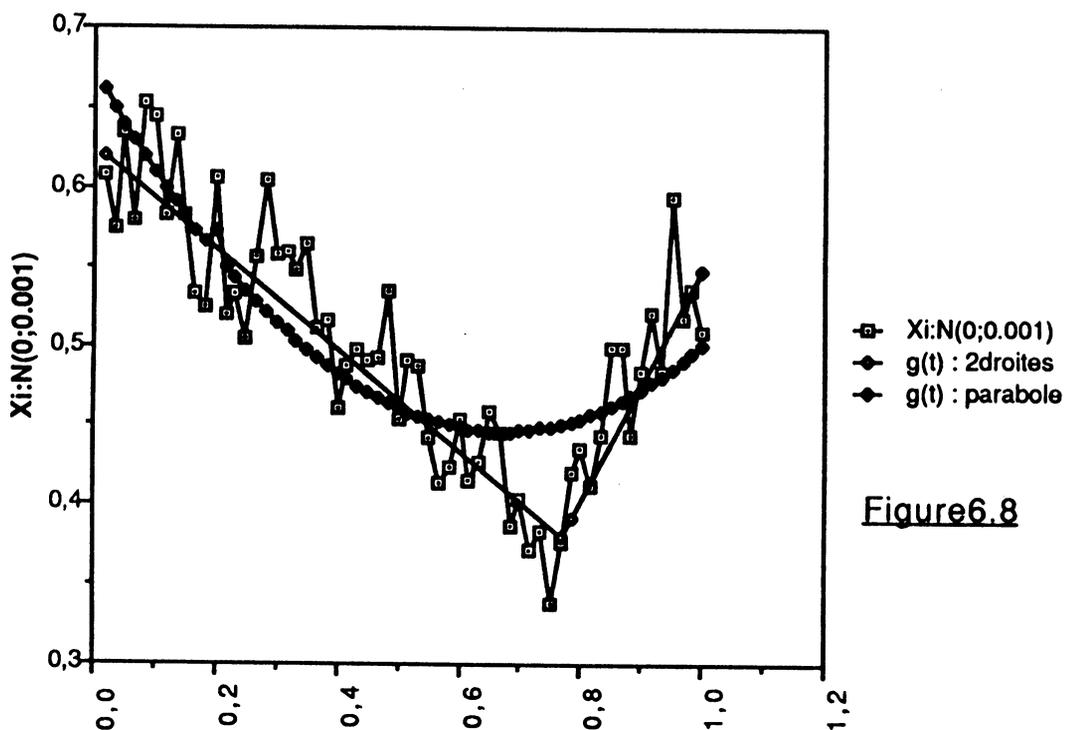


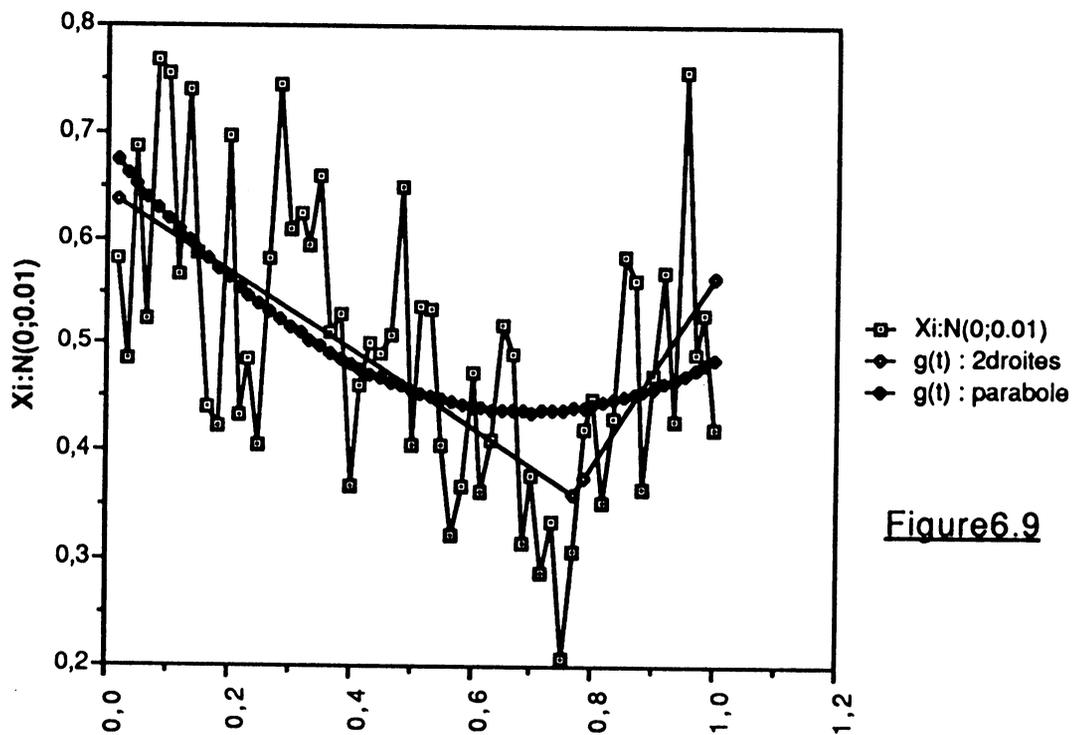
Figure6.4

Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.001)$

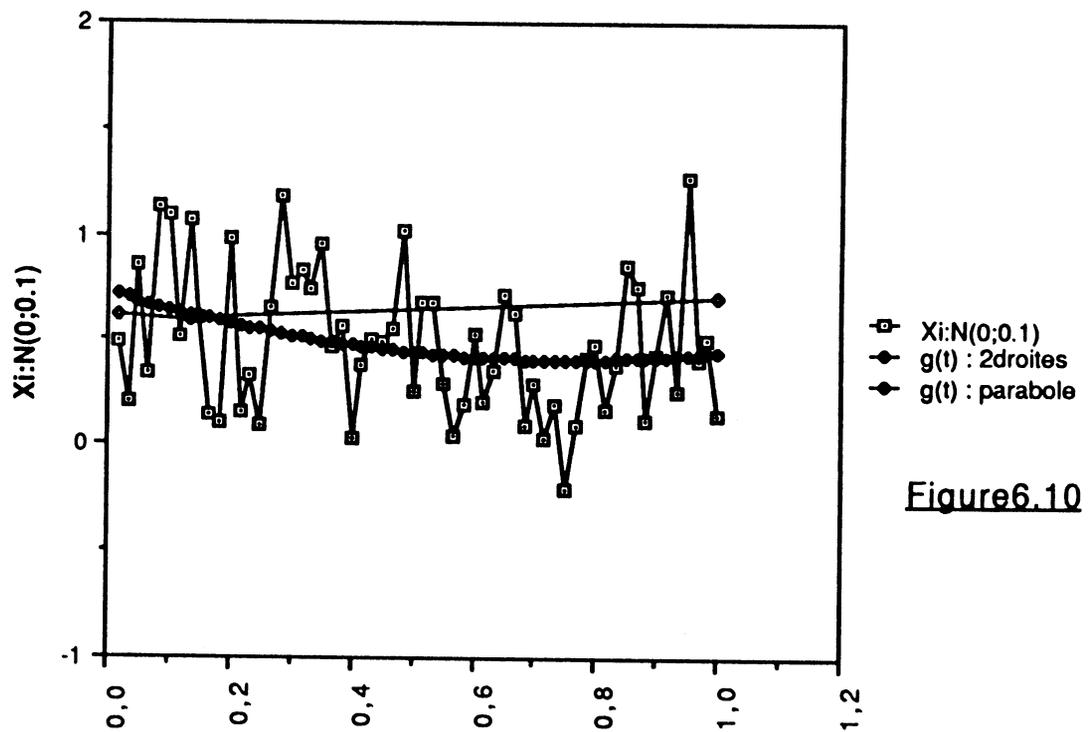


Le modèle avec rupture est préférable

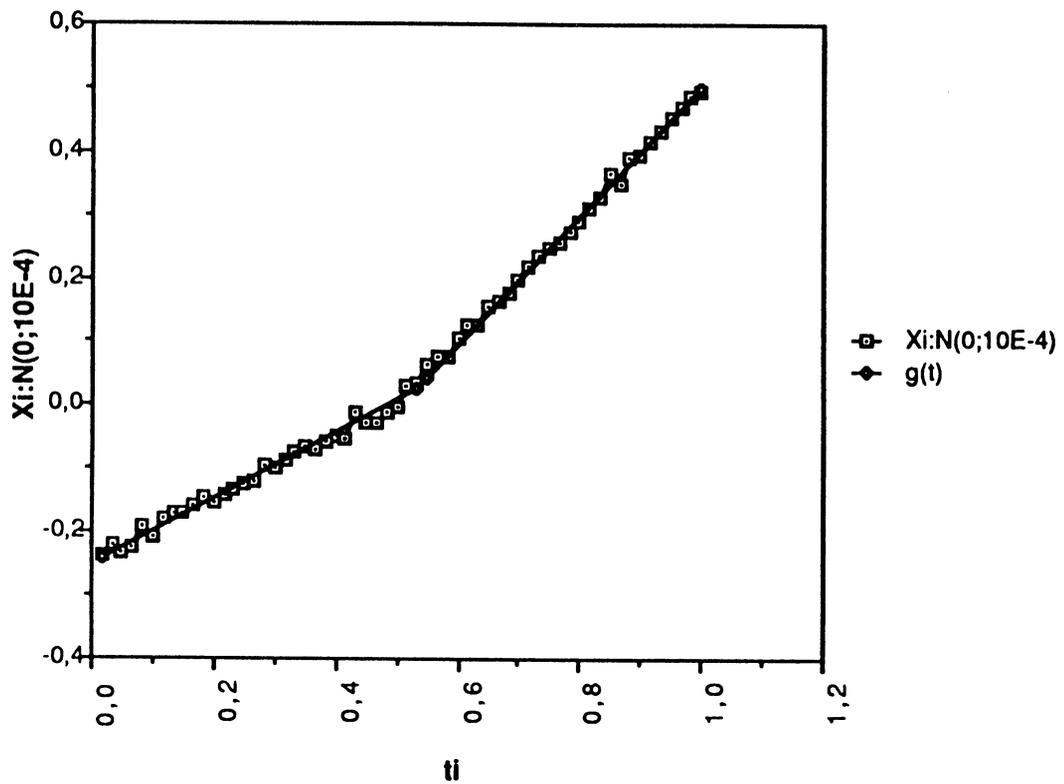
Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.01)$



Le modèle avec rupture est préférable

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_6(t)+N(0;0.1)$** **Figure 6.10****Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

### Approximation du nuage $f_7(t)+N(0;10E-4)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_7(t)+N(0;10E-4)$ par une parabole

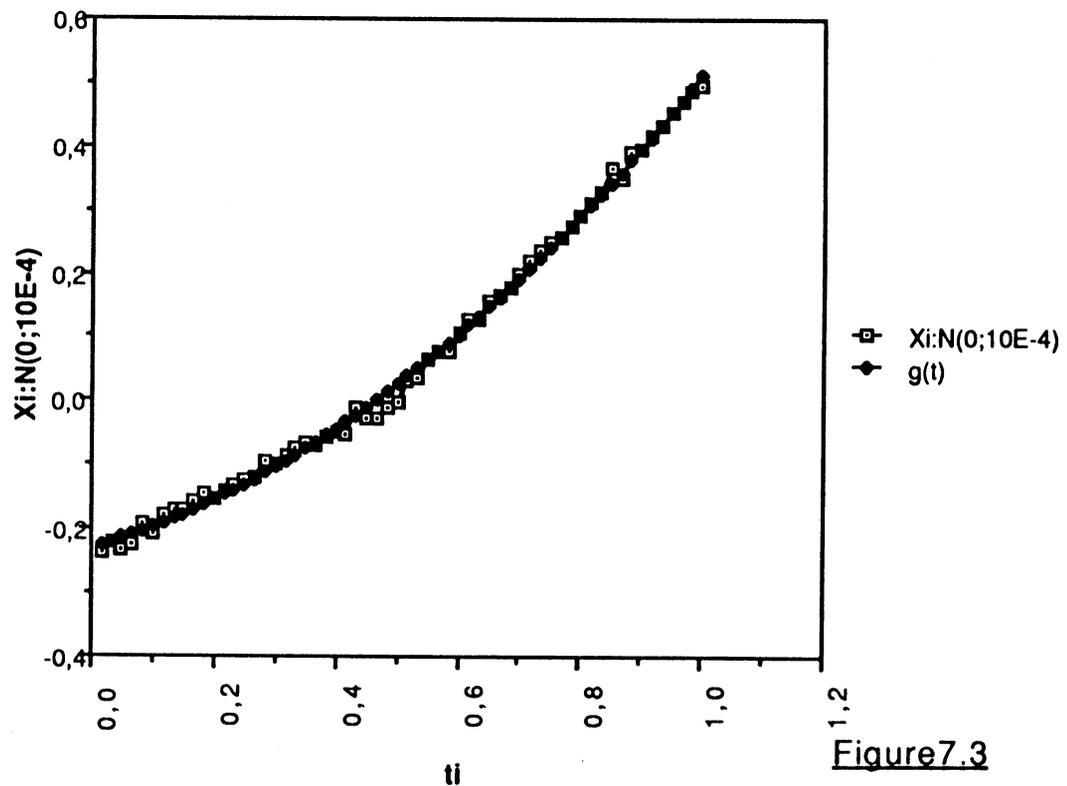
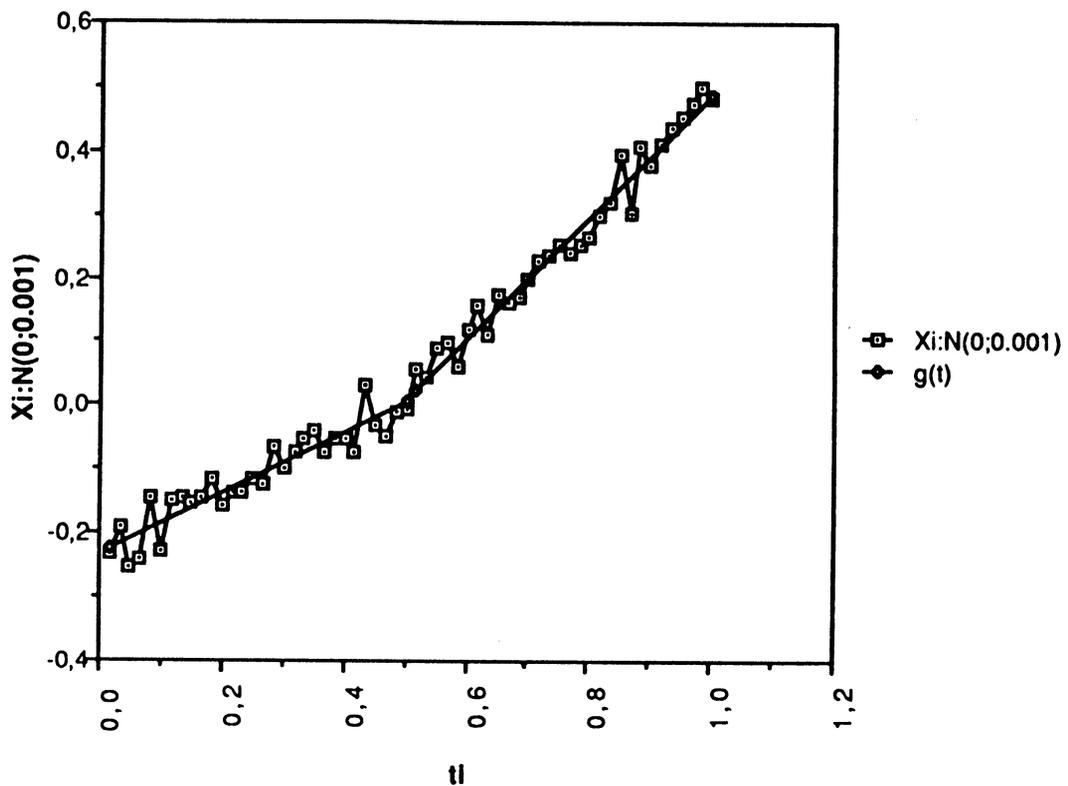


Figure 7.3

### Approximation du nuage $f7(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f7(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

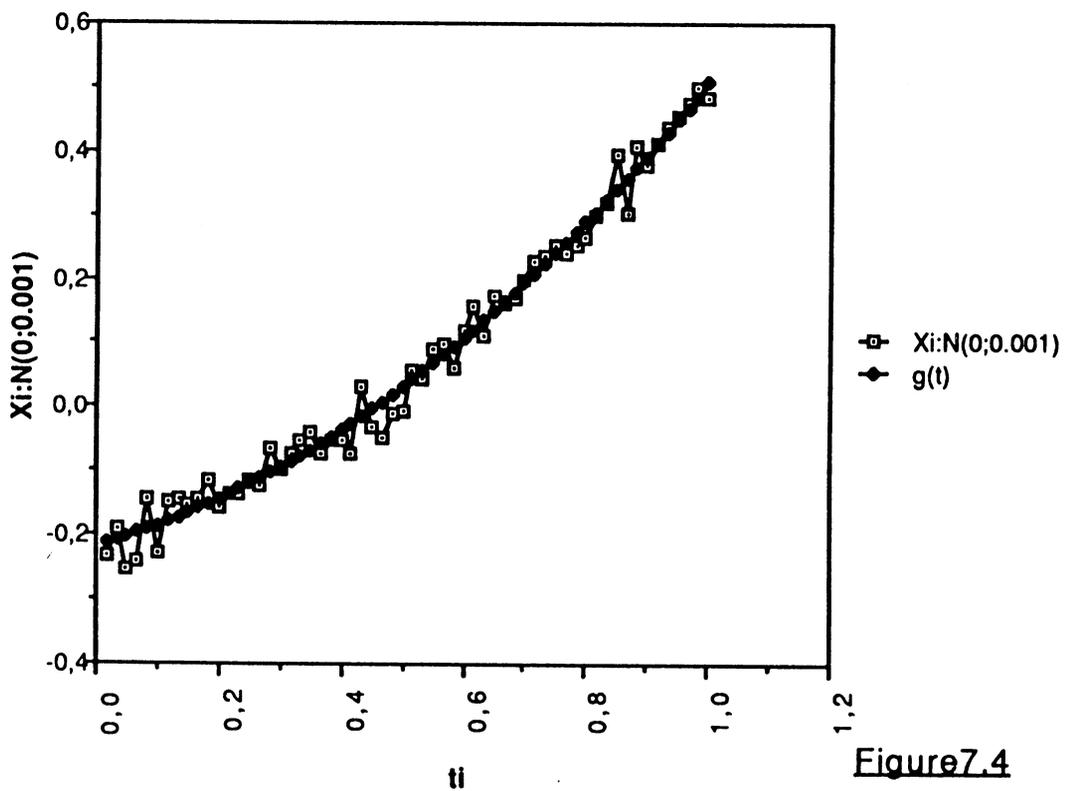


Figure 7.4

Test de comparaison concernant le nuage  $f7(t)+N(0;10E-4)$

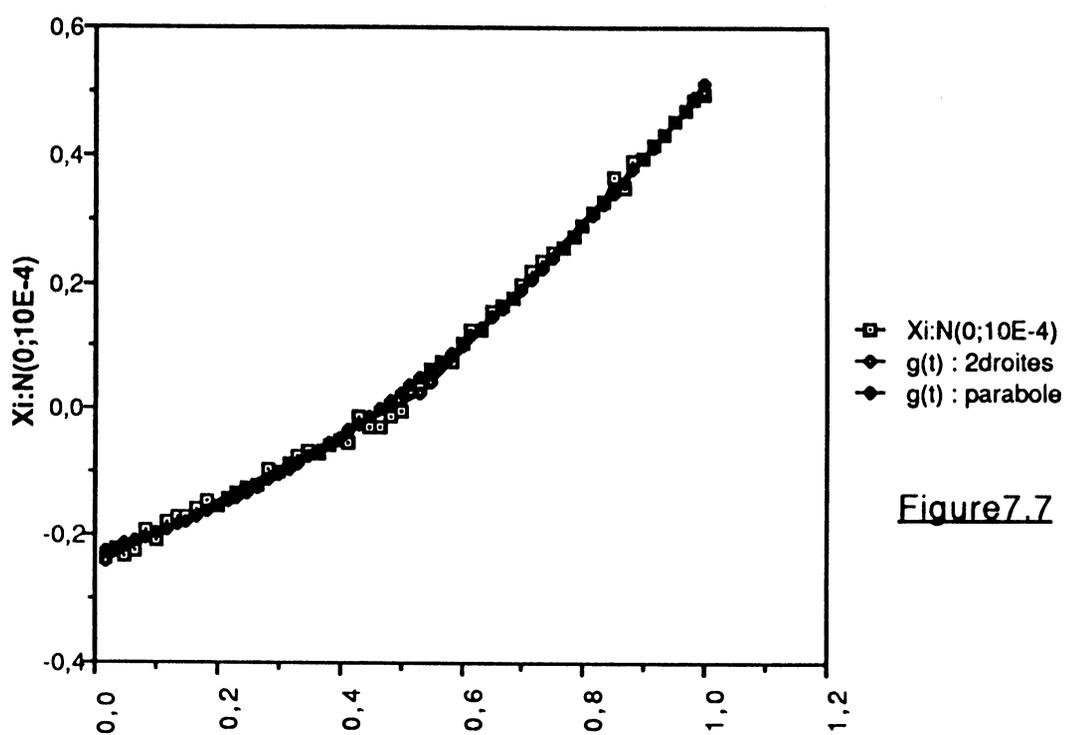


Figure7.7

Le modèle avec rupture est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f7(t)+N(0;0.001)$

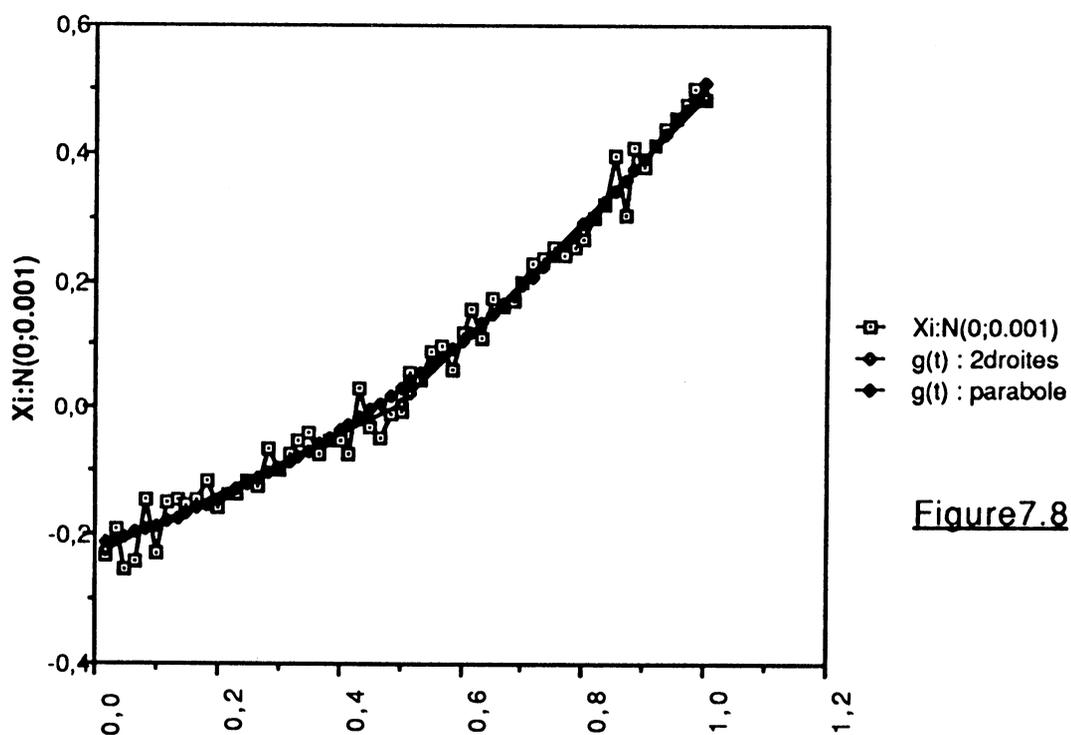
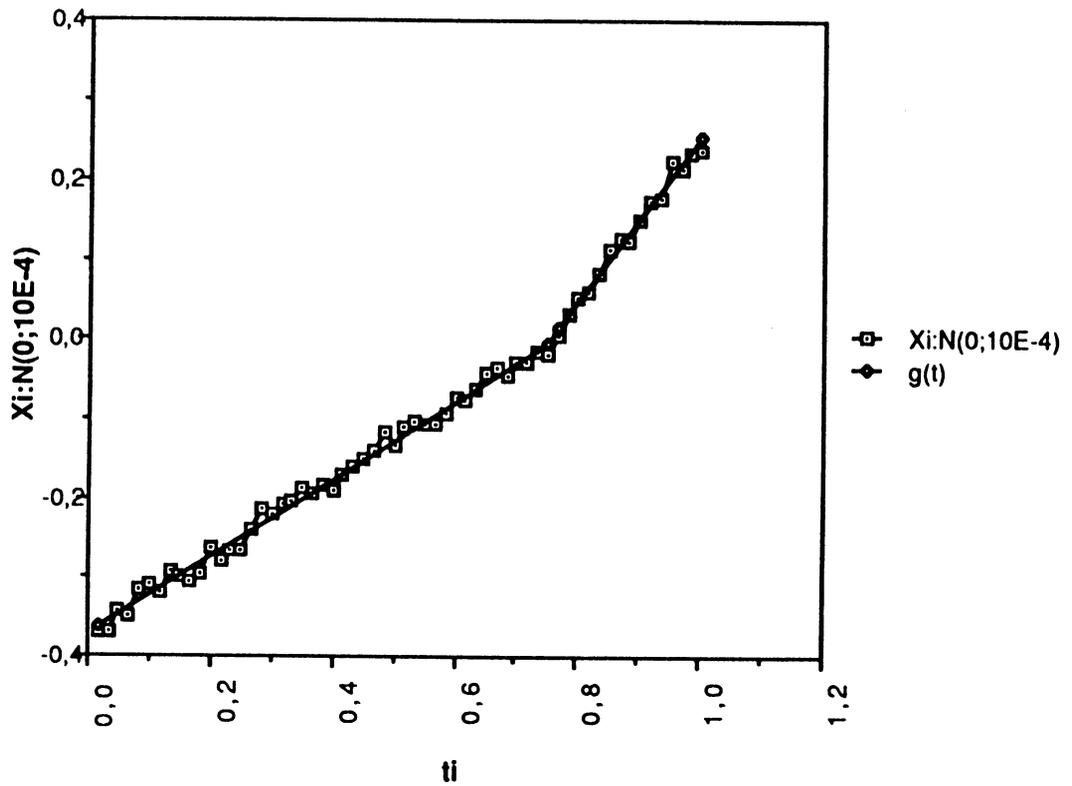


Figure7.8

Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles

### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;10E-4)$ par 2demi.doites



### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;10E-4)$ par une parabole

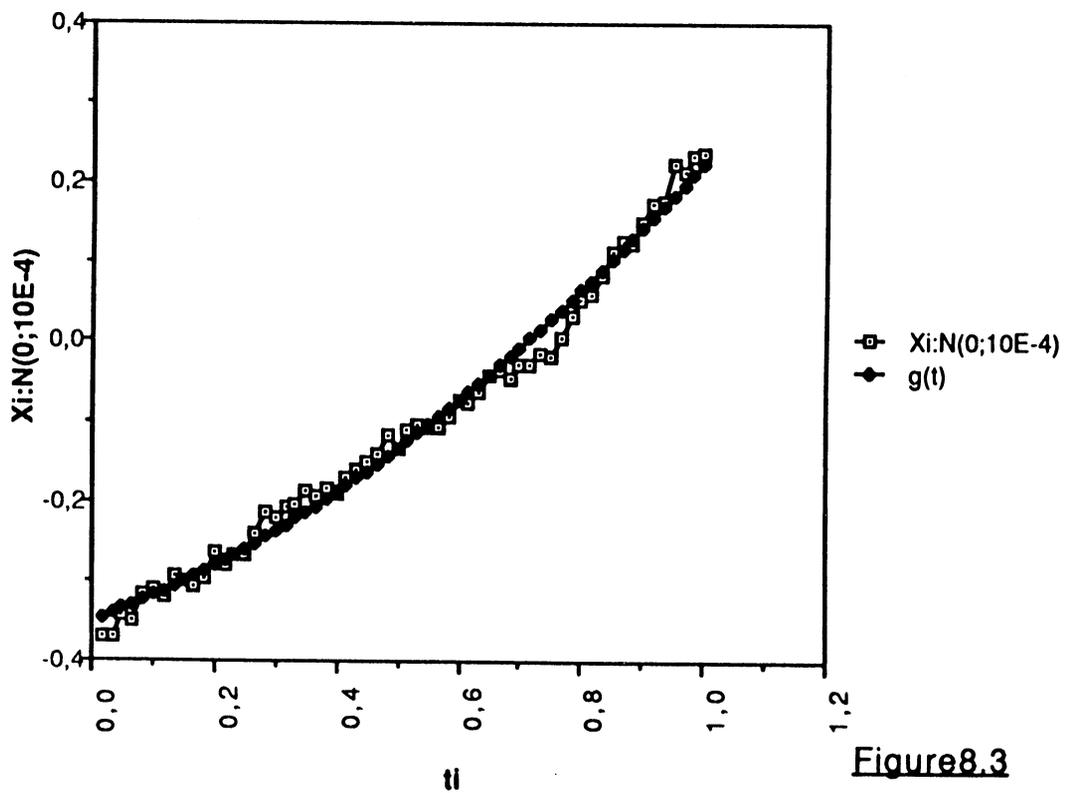
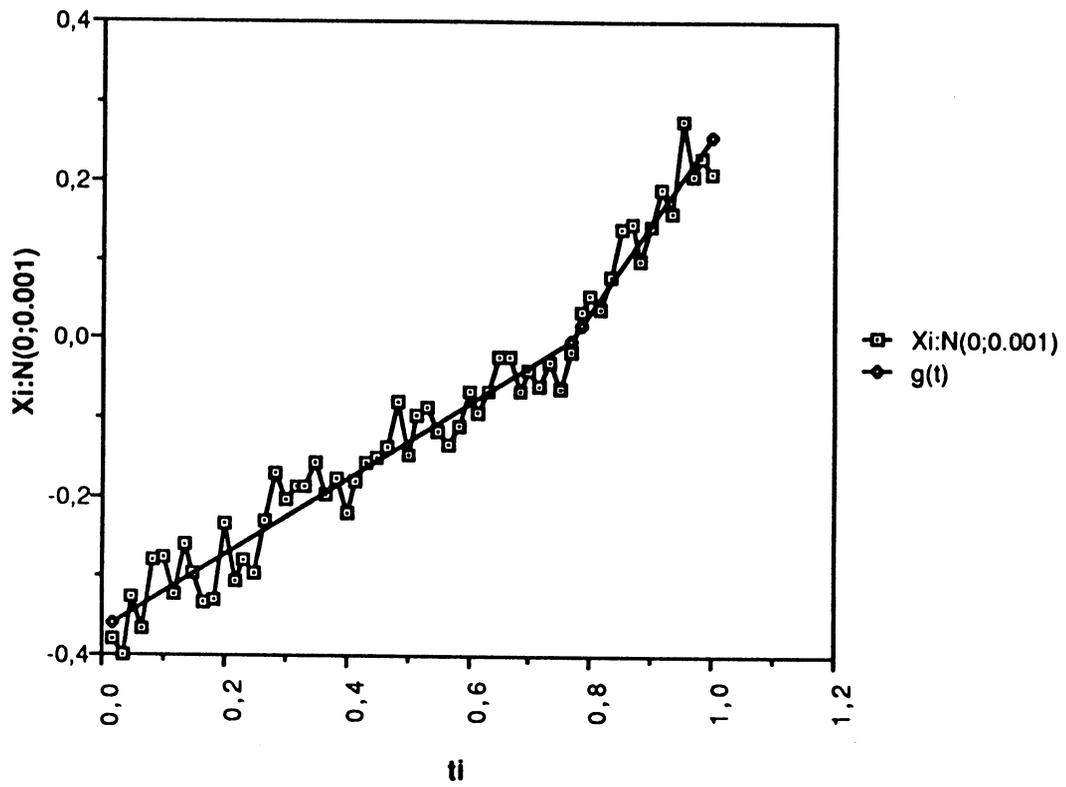


Figure 8.3

### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.001)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.001)$ par une parabole

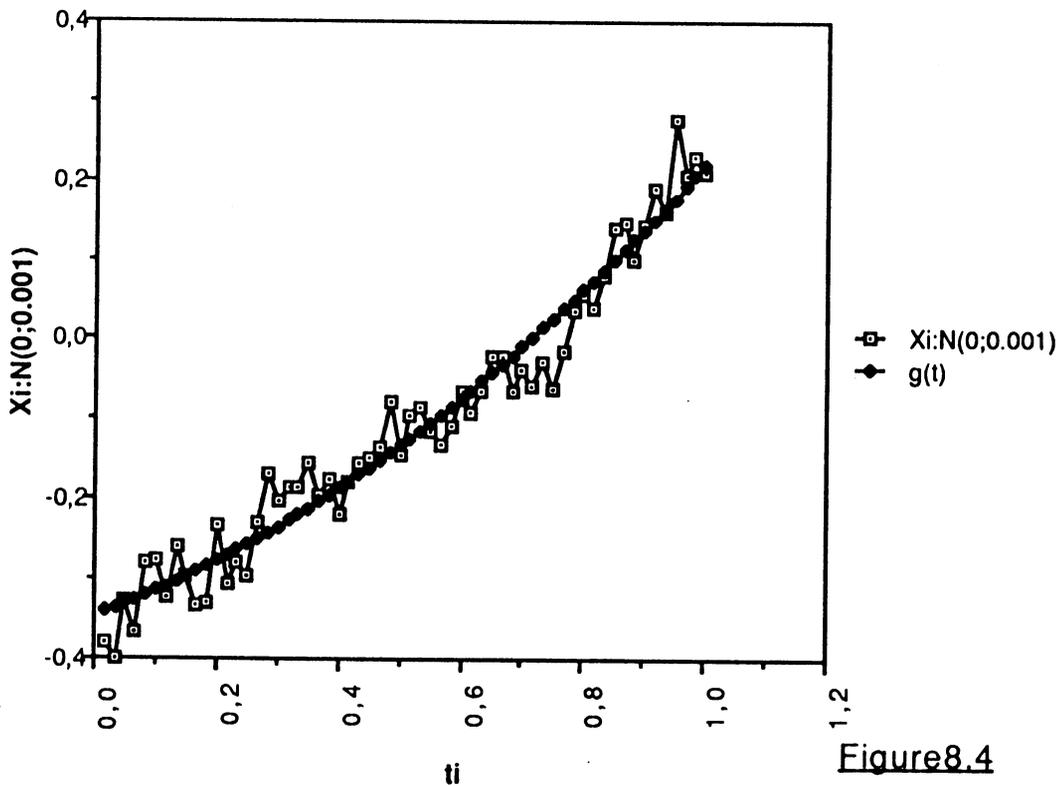
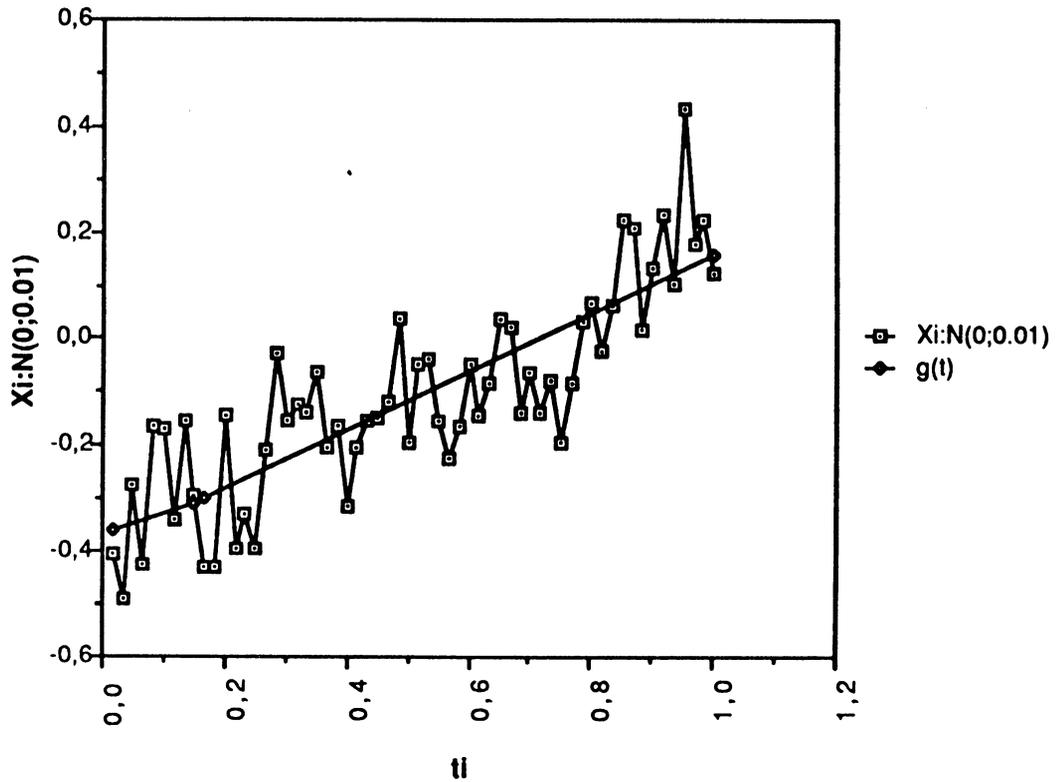


Figure 8.4

### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.01)$ par 2demi.droites



### Approximation du nuage $f_8(t)+N(0;0.01)$ par une parabole

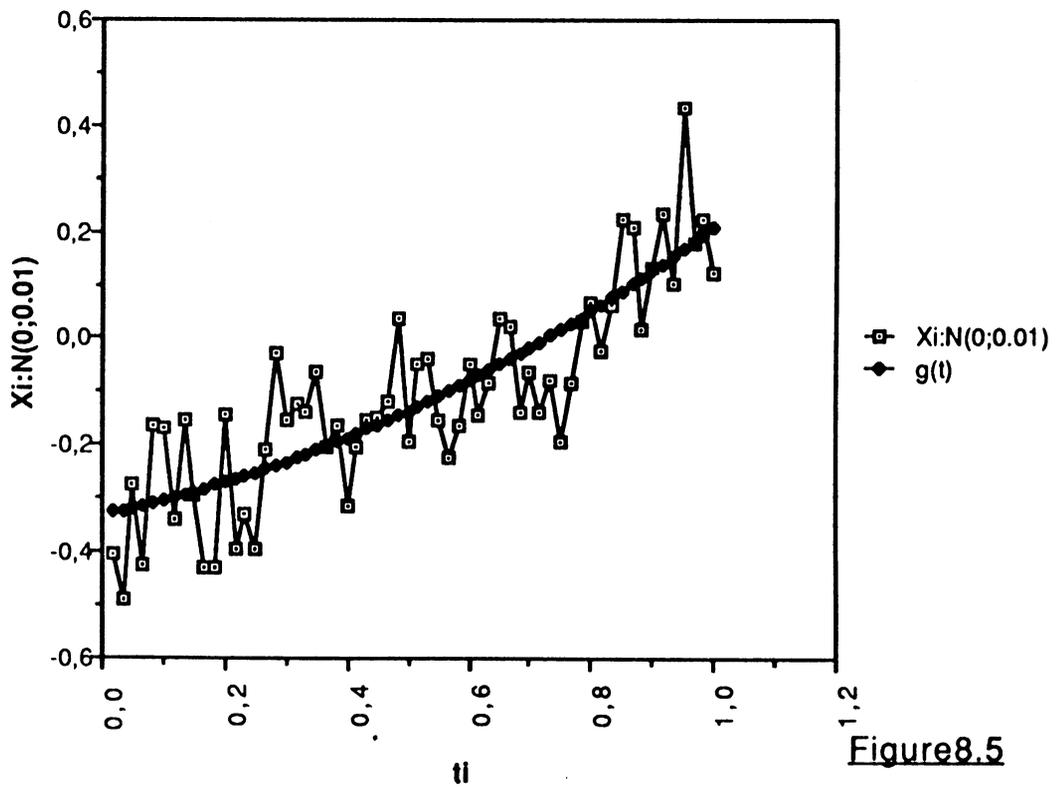


Figure 8.5

Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;10E-4)$

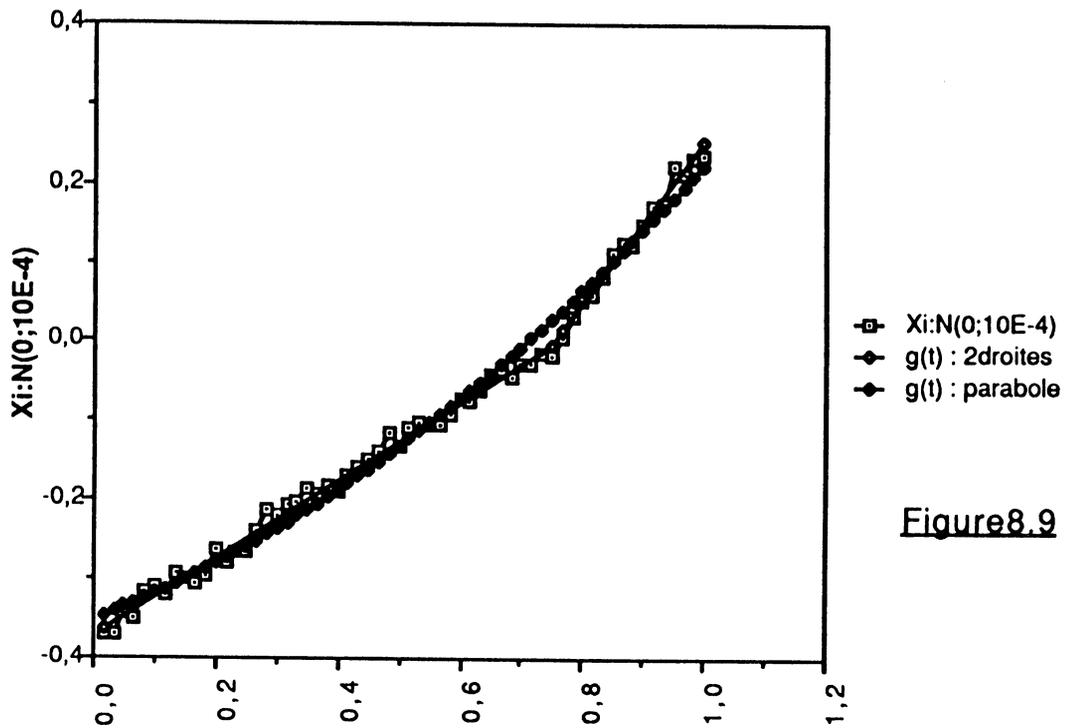


Figure 8.9

Le modèle avec rupture est préférable

Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;0.001)$

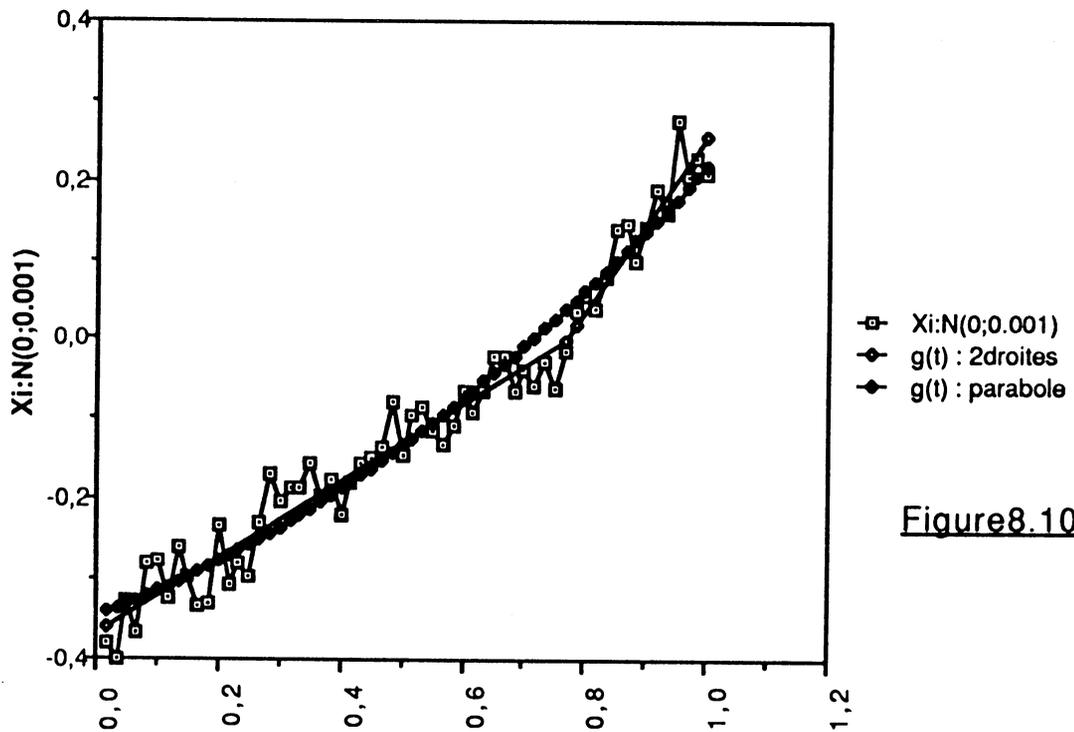
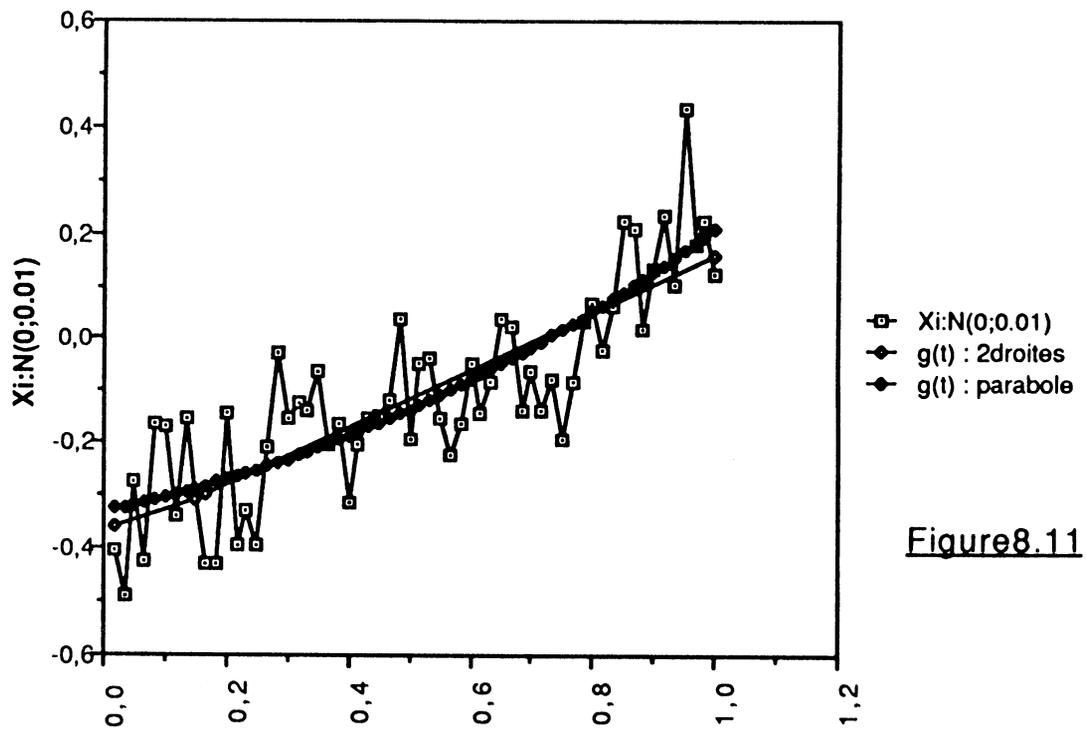


Figure 8.10

Le modèle avec rupture est préférable

**Test de comparaison concernant le nuage  $f_8(t)+N(0;0.01)$** **Figure 8.11**

**Il n'y a pas de différence significative entre les deux modèles**

**BIBLIOGRAPHIE**



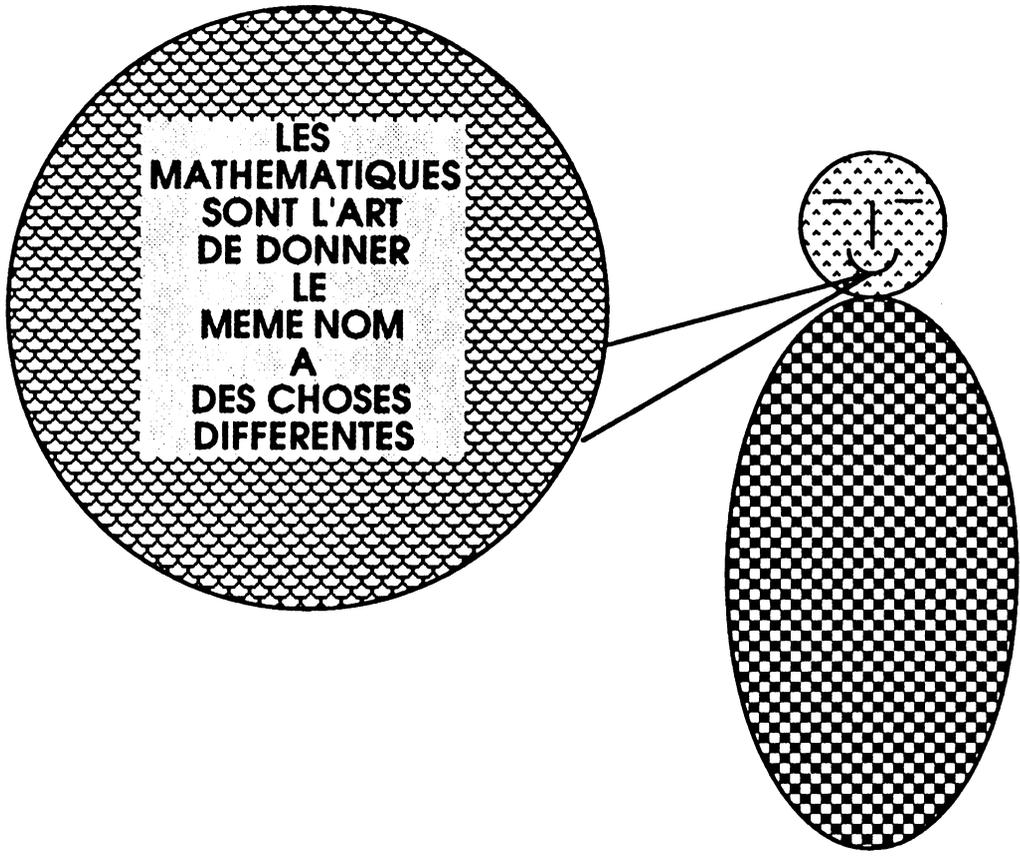
- [1] ANTONIADIS. A, BERRUYER. J, FILHOL. A : (1986)  
Multidétecteurs bidimensionnels.  
Simulation d'un spectre avec un ou plusieurs pics de Bragg.  
Institut MAX VON LAUE-PAUL LANGEVIN.
- [2] BENVENISTE. A, BASSEVILLE. M, MOUSTAKIDES. G : (1986)  
The asymptotic local approach to change detection and model validation.  
INRIA. sep 86, N° 564.
- [3] BHATTACHARYYA. B. B, RICHARDSON. G. D : (1986)  
Consistent estimators in non linear regression for a non compact  
parameter space.  
ANNALS OF STATISTICS, vol14, N°4, 1591–1596.
- [4] BRODEAU. F : (1985)  
Etude des propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés  
pour des problèmes de régression à phases multiples.  
STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNEES, vol 10, N°3, 1 – 25.
- [5] BROWN. R. L, DURBIN. J, EVANS. J. M : (1975)  
Techniques for testing the consistency of regression relationships over  
time.  
J. ROY. STATIST. SOC, ser B, vol37, N°1, 149 – 195.
- [6] BUNKE. H : (1981)  
A note on parameter estimation in inadequate nonlinear regression models.  
MATH OPERATIONSFORSCH STATIST, Ser Statistics, vol12, N°1,  
7–11.
- [7] BUNKE. H, HENSCHKE. K, STRUBY. R, WISOTZKI. C : (1977)  
Parameter estimation in regression models.  
MATH OPERATIONS FORSCH STATIST, Ser Statistics, vol8, N°1,  
23–40
- [8] BURKHOLDER. D. L : (1966)  
Martingale transforms.  
ANNALS OF MATH. STATISTICS, 37, 1494–1504.
- [9] CAMPILLO. F :  
Testing for a change-point in linear systems with incomplete observation.  
INIRA, Valbonne.

- [10] CHERNOFF. H, ZACK : (1966)  
 Estimating the current mean of normal distribution wich is subjected to  
 changing time.  
 ANNALS OF STATISTICS, 35, 999–1018.
- [11] CHOW. Y. S : (1967)  
 On a strong law of large numbers for martingales.  
 ANNALS OF MATH. STATISTICS, 38, 610.
- [12] CSÖRGO. M & STEINBACH. M : (1981)  
 Improved erdos-renyi and strong approximation laws for increments of  
 partial sums.  
 ANNALS OF PROBABILITY, vol9, N°6, 988-996.
- [13] COX. D. R : (1977)  
 Nonlinear models, residuals and transformations.  
 MATH OPERATIONS FORSCH STATIST, Ser Statistics, vol8, N°1,  
 3–22.
- [14] DESHAYES. J, PICARD. D :
- (1)(1981) :  
 Convergence du processus à double indices : application aux tests  
 de rupture dans un modèle.  
 C. R. Acad Sc. PARIS.
- (2)(1982) :  
 Tests de rupture de régression : comparaison asymptotique  
 Preprint de l'université d'ORSAY 79T23.
- (1984) :
- (3) : Application aux tests de rupture de régression.  
 Exposé N°5, Université d'Orsay.
- (4) : Lois asymptotiques des tests et estimateurs de rupture dans un modèle  
 statistique classique.  
 ANN. INST. HENRI POINCARÉ, vol20, N°4, 309–327.
- (5) : Principe d'invariance sur le processus de vraisemblance.  
 ANN. INST. HENRI POINCARÉ, vol20, N°1, 1–20.
- [15] EICKER. F : (1963)  
 Central limit theorems for families of sequences of random variables.  
 ANNALS OF MATH. STATISTICS, 34, 439–446.

- [16] FEDER. P. I : (1975)  
(1) : On asymptotic distribution theory in segmented regression  
problemes - identified case.  
ANNALS OF STATISTICS, vol3, N°1, 49–83.  
(2) : The log-likelihood ratio in segmented regression.  
ANNALS OF STATISTICS, vol3, N°1, 84–97.
- [17] HAWKINS. D. M : (1977)  
Testing a sequence of observations for a shift in location.  
J. A. S. A. vol72, N°357, 180 – 186.
- [18] HINKLEY. D. J :  
(1) : (1969)  
Inference about the intersection in two-phase regression.  
BIOMETRIKA, vol56, N°3, 495–504.  
(2) : (1970)  
Inference about the change-point in a sequence of random variables.  
BIOMETRIKA, vol7, N°12, 1–17.  
(3) : (1971)  
Inference in two-phase regression.  
J. A. S. A, vol66, N°336, 736–743.
- [19] HUBER. P. J : (1977)  
Robust methods of estimation of regression coefficients.  
MATH OPERATIONS FORSCH STATIST, Ser Statistics, vol8, N°1,  
41–53
- [20] HUDSON. D. J : (1966)  
Fitting segmented curves whose join points have to be estimated.  
AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION JOURNAL, 1097–1124.
- [21] JENRICH. R. I : (1969)  
Asymptotic properties of non linear least squares estimators.  
ANNALS OF MATH. STATISTICS, vol2, 633–643.
- [22] LOEVE. M :  
Probability theory I.  
4<sup>e</sup>Edition.

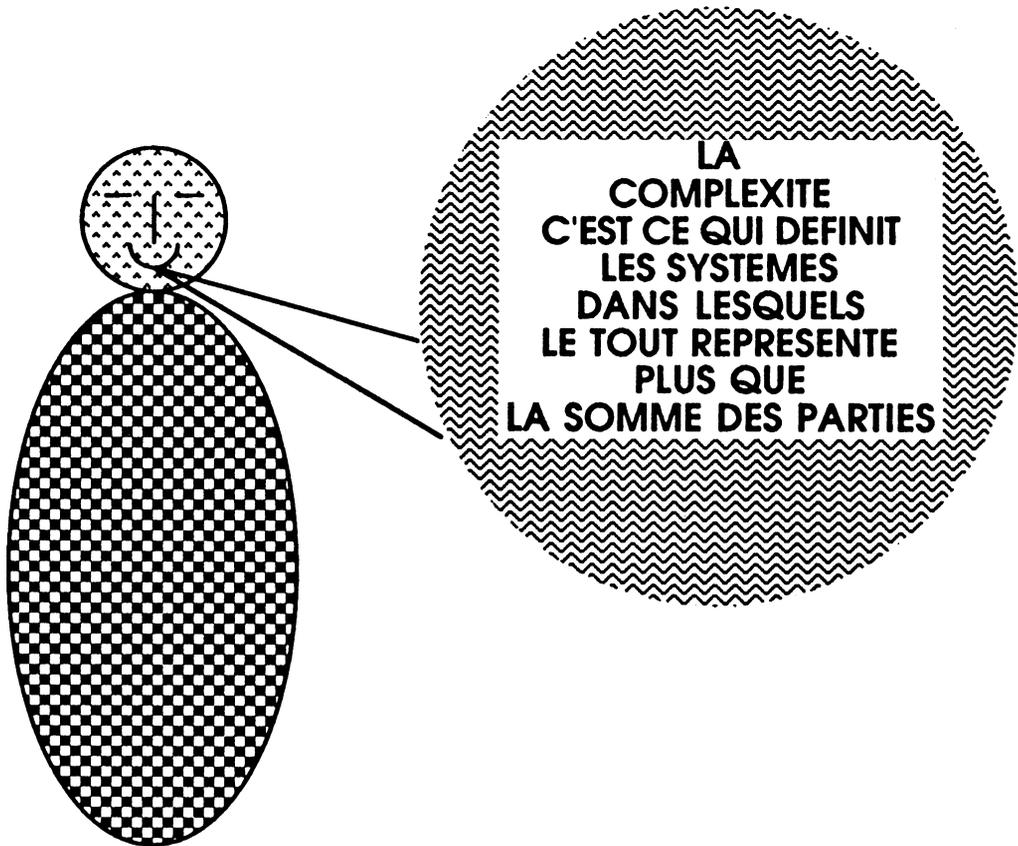
- [23] LUBRANO. M :  
 Numerical analysis for switching regression models in a classical and a bayesian framework.  
 GRQE. EH. ESS.
- [24] MICKEY. M. R, MUNDLE. P. M, WALKER. D. N, GLINSKI. A. M : (1963)  
 The criteria for pearson type III distributions.  
 Aeronautical research laboratoires office of aerospace reasech, wright  
 patterson air force base ARL 63-100, dayton, Ohio.
- [25] MORAN. P. A. P : (1970)  
 On asymptotically optimal tests of composite hypotheses.  
 BIOMETRIKA, 57, 1, 47-55.
- [26] OUVRARD. J. Y : (1981-82)  
 Probabilite. ( cours polycopié -M.A.F- U.S.M.G.)  
 2<sup>e</sup> edition.
- [27] PAGES. R. S : (1954)  
 Continuous inspection schemes.  
 BIOMETRIKA, N°41, 100-114.
- [28] PARAKASA, RAO. BL. S : (1983)  
 Asymptotic theory for non linear least squares estimator for diffusion  
 processes.  
 MATH OPERATIONS FORSCH STATIST, Ser Statistics, Berlin14, N°2,  
 195-209.
- [29] QUANDT. R. E :  
 (1) : (1958)  
 The estimation of the parameters of a linear system obeying two  
 separate regimes.  
 J. A. S. A, N°53, 873-880.
- (2) : (1960)  
 Tests of the hypotheses that a linear régression system obeys two  
 separate regimes.  
 J. A. S. A, vol 55, N°290, 324 - 330.
- [30] RAO. C. R : (1965)  
 Linear statistical inference and its application.  
 Wiley. New York.

- [31] SAIDI. Y : (1986)  
Methodes appliquées de détection et d'estimation de rupture dans des modèles de régression.  
Thèse -Université Scientifique et Médicale de Grenoble-.
- [32] SAMUEL S. WILKS : (1962)  
Mathematical statistics.
- [33] SERFLING. R. J :  
Approximation theorems of mathematical statistics.
- [34] SMITH. A. F. M : (1975)  
Abayesian approach to inference about a change point in a sequence of random variable.  
BIOMETRIKA, N°62, 407–416.
- [35] WILLIAM. FELLER : (1966)  
An introduction to probability theory and its applications  
vol II.
- [36] ZWANZIG. S : (1980)  
The choice of approximative models in nonlinear regression.  
MATH OPERATIONS FORSCH STATIST, Ser Statistics, vol11, N°1,  
23–47.



**LES  
MATHÉMATIQUES  
SONT L'ART  
DE DONNER  
LE  
MEME NOM  
A  
DES CHOSES  
DIFFÉRENTES**

H.POINCARÉ



**LA  
COMPLEXITÉ  
C'EST CE QUI DÉFINIT  
LES SYSTÈMES  
DANS LESQUELS  
LE TOUT REPRÉSENTE  
PLUS QUE  
LA SOMME DES PARTIES**

G.COWAN

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT INGENIEUR,  
DOCTORAT DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

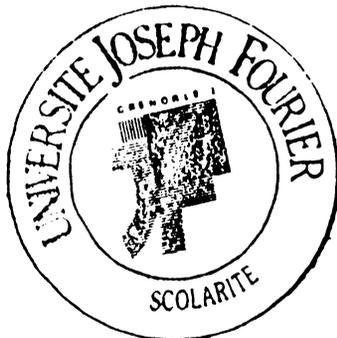
Vu les rapports de M<sup>r</sup>..ANTONIADIS....ANESTIS.....

M<sup>r</sup>..C.A.Z.E.S.....P.....

M<sup>lle</sup>...BENZEMRI.....SAMIAA.....est autorisé(e)  
à présenter une thèse en vue de l'obtention du DOCTORAT....DE.....  
..L'..UNIVERSITE....JOSEPH..FOURIER...GRENOBLE.1.....

Grenoble, le **25 MAI 1989**.....

Le Président de l'Université  
Joseph Fourier - Grenoble 1



Le Président,

*(Signature)*  
A. NEMOZ

