



HAL
open science

Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe

My Abdelfattah Barkatou

► **To cite this version:**

My Abdelfattah Barkatou. Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1989. Français. NNT: . tel-00332857

HAL Id: tel-00332857

<https://theses.hal.science/tel-00332857>

Submitted on 22 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

BARKATOU My Abdelfattah

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de l'**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**
(*arrêté ministériel du 23 novembre 1988*)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
ET AUX DIFFERENCES DANS LE CHAMP COMPLEXE**

Date de soutenance : 6 juin 1989

Composition du jury :

Président : **B. MALGRANGE**

Examineurs : **A. DUVAL
D. DUVAL
J. DELLA DORA
J. THOMANN**

Thèse préparée au sein du laboratoire TIM3.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Georges LESPINARD

Année 1988

Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG	JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
BARRAUD Alain	ENSIEG	JOUBERT Jean-Claude	ENSPG
BAUDELET Bernard	ENSPG	JOURDAIN Geneviève	ENSIEG
BEAUFILS Jean-Pierre	ENSEEG	LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
BLIMAN Samuel	ENSERG	LESIEUR Marcel	ENSHMG
BLOCH Daniel	ENSPG	LESPINARD Georges	ENSHMG
BOIS Philippe	ENSHMG	LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG	LOUCHET François	ENSIEG
BOUVARD Maurice	ENSHMG	MASSE Philippe	ENSIEG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG	MASSELOT Christian	ENSIEG
BRUNET Yves	IUFA	MAZARE Guy	ENSIMAG
CAILLERIE Denis	ENSHMG	MOREAU René	ENSHMG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG	MORET Roger	ENSIEG
CHARTIER Germain	ENSPG	MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
CHENEVIER Pierre	ENSERG	OBLED Charles	ENSHMG
CHERADAME Hervé	UFR PGP	OZIL Patrick	ENSEEG
CHOVET Alain	ENSERG	PARIAUD Jean-Charles	ENSEEG
COHEN Joseph	ENSERG	PERRET René	ENSIEG
COUMES André	ENSERG	PERRET Robert	ENSIEG
DARVE Félix	ENSHMG	PIAU Jean-Michel	ENSHMG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG	POUPOT Christian	ENSERG
DEPORTES Jacques	ENSPG	RAMEAU Jean-Jacques	ENSEEG
DOLMAZON Jean-Marc	ENSERG	RENAUD Maurice	UFR PGP
DURAND Francis	ENSEEG	ROBERT André	UFR PGP
DURAND Jean-Louis	ENSIEG	ROBERT François	ENSIMAG
FOGGIA Albert	ENSIEG	SABONNADIÈRE Jean-Claude	ENSIEG
FONLUPT Jean	ENSIMAG	SAUCIER Gabrielle	ENSIMAG
FOULARD Claude	ENSIEG	SCHLENKER Claire	ENSPG
GANDINI Alessandro	UFR PGP	SCHLENKER Michel	ENSPG
GAUBERT Claude	ENSPG	SILVY Jacques	UFR PGP
GENTIL Pierre	ENSERG	SIRIEYS Pierre	ENSHMG
GREVEN Hélène	IUFA	SOHM Jean-Claude	ENSEEG
GUERIN Bernard	ENSERG	SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
GUYOT Pierre	ENSEEG	SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
IVANES Marcel	ENSIEG	TROMPETTE Philippe	ENSHMG
		VEILLON Gérard	ENSIMAG
		ZADWORNÝ François	ENSERG

Professeur Université des Sciences
Sociales
(Grenoble II)

BOLLIET Louis

**Personnes ayant obtenu le diplôme
d'HABILITATION A DIRIGER
DES RECHERCHES**

BECKER Monique
BINDER Zdenek
CHASSERY Jean-Marc
CHOLLET Jean-Pierre
COEY John
COLINET Catherine
COMMAULT Christian
CORNUJOLS Gérard
COULOMB Jean- Louis
DALARD Francis
DANES Florin
DEROO Daniel
DIARD Jean-Paul
DION Jean-Michel
DUGARD Luc
DURAND Madeleine
DURAND Robert
GALERIE Alain
GAUTHIER Jean-Paul
GENTIL Sylviane
GHIBAUDO Gérard
HAMAR Sylvaine
HAMAR Roger
LADET Pierre
LATOMBE Claudine
LE GORREC Bernard
MADAR Roland
MULLER Jean
NGUYEN TRONG Bernadette
PASTUREL Alain
PLA Fernand
ROUGER Jean
TCHUENTE Maurice
VINCENT Henri

Chercheurs du C.N.R.S

Directeurs de recherche 1ère Classe

CARRE René
FRUCHART Robert
HOPFINGER Emile
JORRAND Philippe
LANDAU Ioan
VACHAUD Georges
VERJUS Jean-Pierre

**Directeurs de recherche
2ème Classe**

ALEMANY Antoine
ALLIBERT Colette
ALLIBERT Michel
ANSARA Ibrahim
ARMAND Michel
BERNARD Claude
BINDER Gilbert
BONNET Roland
BORNARD Guy
CAILLET Marcel
CALMET Jacques
COURTOIS Bernard
DAVID René

DRIOLE Jean
ESCUДИER Pierre
EUSTATHOPOULOS Nicolas
GUELIN Pierre
JOURD Jean-Charles
KLEITZ Michel
KOFMAN Walter
KAMARINOS Georges
LEJEUNE Gérard
LE PROVOST Christian
MADAR Roland
MERMET Jean
MICHEL Jean-Marie
MUNIER Jacques
PIAU Monique
SENATEUR Jean-Pierre
SIFAKIS Joseph
SIMON Jean-Paul
SUERY Michel
TEODOSIU Christian
VAUCLIN Michel
WACK Bernard

**Personnalités agréées à titre permanent
à diriger des travaux de recherche
(décision du conseil scientifique)**

E.N.S.E.E.G
CHATILLON Christian
HAMMOU Abdelkader
MARTIN GARIN Régina
SARRAZIN Pierre
SIMON Jean-Paul

E.N.S.E.R.G

BOREL Joseph

E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
PERARD Jacques
REINISCH Raymond
E.N.S.H.G
ROWE Alain
E.N.S.I.M.A.G
COURTIN Jacques

E.F.P.

CHARUEL Robert

C.E.N.G

CADET Jean
COEURE Philippe
DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIB Maurice
VINCENDON Marc

Laboratoires extérieurs

C.N.E.T
DEVINE Rodericq
GERBER Roland
MERCKEL Gérard
PAULEAU Yves

UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées

LAJZEROWICZ Jeanine
 LAJZEROWICZ Joseph
 LAURENT Pierre-Jean
 LEBRETON Alain
 DE LEIRIS Joël
 LHOMME Jean
 LLIBOUTRY Louis
 LOISEAUX Jean-Marie
 LUNA Domingo
 MACHE Régis
 MASCLE Georges
 MAYNARD Roger
 OMONT Alain
 OZENDA Paul
 PAYAN Jean-Jacques
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
 PERRIER Guy
 PIERRARD Jean-Marie
 PIERRE Jean-Louis
 RENARD Michel
 RINAUDO Marguerite
 ROSSI André
 SAXOD Raymond
 SENDEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 SOUTIF Michel
 STUTZ Pierre
 TRILLING Laurent
 VALENTIN Jacques
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre

Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Biologie
 Chimie
 Géophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Mathématiques Pures
 Physiologie Végétale
 Géologie
 Physique du Solide
 Astrophysique
 Botanique (Biologie Végétale)
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géophysique
 Mécanique
 Chimie Organique
 Thermodynamique
 Chimie CERMAV
 Biologie
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Physique
 Mécanique
 Mathématiques Appliquées
 Physique Nucléaire I.S.N.
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

PROFESSEURS de 2^{ème} Classe

ADIBA Michel
 ANTOINE Pierre
 ARMAND Gilbert
 BARET Paul
 BLANCHI J.Pierre
 BLUM Jacques
 BOITET Christian
 BORNAREL Jean
 BRUANDET J.François
 BRUGAL Gérard
 BRUN Gilbert
 CASTAING Bernard
 CERFF Rudiger
 CHIARAMELLA Yves
 COURT Jean
 DUFRESNOY Alain
 GASPARD François
 GAUTRON René
 GENIES Eugène
 GIDON Maurice
 GIGNOUX Claude
 GILLARD Roland
 GIORNI Alain
 GONZALEZ SPRINBERG Gérardo
 GUIGO Maryse
 GUMUCHAIN Hervé
 GUITTON Jacques

Mathématiques Pures
 Géologie
 Géographie
 Chimie
 STAPS
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Biologie
 Biologie
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Chimie
 Chimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Géographie
 Géographie
 Chimie

HACQUES Gérard
 HERBIN Jacky
 HERAULT Jeanny
 JARDON Pierre
 JOSELEAU Jean-Paul
 KERCKHOVE Claude
 LONGEQUEUE Nicole
 LUCAS Robert
 MANDARON Paul
 MARTINEZ Francis
 NEMOZ Alain
 OUDET Bruno
 PECHER Arnaud
 PELMONT Jean
 PERRIN Claude
 PFISTER Jean-Claude
 PIBOULE Michel
 RAYNAUD Hervé
 RICHARD Jean-Marc
 RIEDTMANN Christine
 ROBERT Gilles
 ROBERT Jean-Bernard
 SARROT-REYNAULD Jean
 SAYETAT Françoise
 SERVE Denis
 STOECKEL Frédéric
 SCHOLL Pierre-Claude
 SUBRA Robert
 VALLADE Marcel
 VIDAL Michel
 VIVIAN Robert
 VOTTERO Philippe

Mathématiques Appliquées
 Géographie
 Physique
 Chimie
 Biochimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Thermodynamique CNRS - CRTBT
 Mathématiques Appliquées
 Géologie
 Biochimie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique du Solide
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Mathématiques Pures
 Mathématiques Pures
 Chimie Physique
 Géologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 Géographie
 Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Immunologie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Anatomie-Pathologique	Hopital sud
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Hématologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anestésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biochimie	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul		
TANCHE Maurice		
VIGNAIS Pierre		

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

*A ma grand mère.
A mes parents.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur J. Della Dora, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui a dirigé mon travail et m'a judicieusement conseillé pendant ces trois années. J'ai pu apprécier durant toutes ces années ses qualités scientifiques et humaines.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur B. Malgrange, Directeur de recherches au CNRS, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'adresse toute ma gratitude à Madame A. Duval, Professeur à l'université de Lille, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse. L'intérêt avec lequel elle a suivi ce travail et son encouragement amical ont été pour moi d'une importance décisive pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Madame D. Duval, Professeur à l'université de Limoges, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et de m'avoir encouragé, conseillé et aidé durant l'élaboration d'une grande partie de cette thèse.

Je remercie Monsieur J. Thomann, Ingénieur principal à l'IN2P3, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements les plus vifs vont également à C. Dicrescenzo pour son aide et sa disponibilité, E. Tournier pour ses encouragements, F. Richard pour ses relectures, à P. Sénéchaud, G. Villard, Françoise Siebert-Roch, Jean-Louis Roch et G. Chen pour leur amitié. Merci aussi à tous les membres de l'équipe d'Algorithmique Parallèle et de Calcul Formel .

Que tous mes amis qui ont rendu mon séjour en France agréable reçoivent mes sincères remerciements.

Je remercie enfin, le personnel du service de reprographie de l'IMAG pour la réalisation matérielle de ce travail.

Table de Matières

Introduction	p.	1
------------------------	----	---

Première Partie SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DANS LE CHAMP COMPLEXE

Chapitre 1. Solutions formelles d'équations différentielles linéaires du second ordre dans le champ complexe	p.	7
--	----	---

1. Généralités	p.	7
2. Algorithmes de recherche des solutions formelles	p.	12
3. Exemples	p.	28

Chapitre 2. Algorithme de Newton rationnel pour le calcul des solutions formelles d'équations différentielles linéaire au voisinage d'un point singulier irrégulier	p.	37
---	----	----

0. Introduction	p.	37
1. Rappels	p.	39
2. Solutions formelles équivalentes	p.	44
3. Solutions formelles généralisées	p.	49
4. Algorithme de Newton rationnel	p.	51
5. Exemples	p.	64
6. Conclusion	p.	66
Appendice A	p.	67
Appendice B	p.	73

Deuxième Partie ETUDE DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DIFFERENCES LINEAIRES DANS LE CHAMP COMPLEXE

Chapitre 3. Application de la transformation de Pincherle aux équations aux différences linéaires dont les coefficients sont des polynômes Méthode de Ramis	p.	79
--	----	----

0. Introduction	p.	79
1. La transformée formelle de Pincherle	p.	80
2. Polygones de Newton	p.	82

3. Formation des solutions - Méthode directe	p.	82
4. Développements asymptotiques	p.	86
5. Indépendance des solutions	p.	88
6. Algorithmes	p.	88
7. Exemples	p.	94
Appendice : Méthode de Ramis	p.	97
Chapitre 4. Réduction d'un système aux différences linéaire à une seule équation aux différences - Méthode du vecteur cyclique	p.	103
1. Système linéaire aux différences associé à une équation aux différences	p.	103
2. Méthode de Birkhoff	p.	106
3. Vecteurs cycliques - Définition et propriétés	p.	110
4. Conclusion	p.	114
5. Exemples	p.	114
Chapitre 5. Résolution des systèmes linéaires aux différences par des séries de factorielles méromorphes	p.	121
1. Introduction	p.	121
2. Rappels sur les séries de factorielles	p.	122
3. Méthode de Frobenius	p.	125
Chapitre 6. Caractérisation des systèmes aux différences linéaires à singularité régulière	p.	141
1. Position du problème	p.	141
2. Réductibilité d'un système aux différences linéaire	p.	143
3. Algorithme de réduction	p.	149
4. Un exemple	p.	158
Chapitre 7. Formes réduites des systèmes linéaires aux différences	p.	163
1. Notations et définitions	p.	163
2. Matrices k -réductibles	p.	165
3. Critère de k -réductibilité	p.	166
4. Algorithme de calcul d'une forme réduite	p.	177
5. Un exemple	p.	185
Conclusion	p.	187
Bibliographie	p.	189

INTRODUCTION

Le travail présenté dans cette thèse est un travail algorithmique portant sur les équations différentielles et les systèmes d'équations aux différences dans le champ complexe au voisinage de points singuliers.

Ce travail se compose de deux parties. La **première partie** est consacrée à l'étude des solutions asymptotiques (ou formelles) d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients polynomiaux dans le champ complexe, c'est-à-dire d'équations de la forme :

$$(E) \quad A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_0(x)y = 0,$$

où les A_i sont des polynômes à coefficients dans le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels.

Il existe un algorithme, dit **algorithme de Newton**, qui permet de calculer un système fondamental de solutions formelles d'une équation différentielle (E) au voisinage d'un point singulier. Il a été étudié, dans une série d'articles, par J. Della Dora et E. Tournier [De – To 1], [De – To 2]. Cet algorithme est à la base du logiciel de calcul formel **DESIR** [To], dédié aux équations différentielles, développé par l'équipe de calcul formel de Grenoble sous la direction de J. Della Dora.

Le calcul des solutions formelles par cet algorithme présente une difficulté technique majeure : la manipulation des nombres algébriques. Ce problème engendre d'autres difficultés algorithmiques qui sont non triviales à résoudre dans le cas général des équations d'ordre n . La première version de **DESIR** n'en tenait pas compte.

Les équations différentielles les plus fréquemment rencontrées sont d'ordre 2. Nous nous sommes donc intéressés en premier lieu à ce cas là qui d'autre part, sur certains points, est techniquement plus simple.

Le **chapitre 1** est consacré à l'étude et à la réalisation d'un logiciel de résolution d'équation différentielle du second ordre. Ce logiciel **EDOL2** est écrit pour le système de calcul formel **REDUCE**. Ce que **EDOL2** apporte de nouveau par rapport aux logiciels déjà existant, est la possibilité d'obtenir les solutions formelles au voisinage de tous les points singuliers de l'équation. La réalisation de ce logiciel a été rendue possible grâce au système **D5** de calcul formel avec des nombres algébriques écrit par C. Dicrescenzo et D. Duval [Di – Du], [Du D.].

En étudiant l'algorithme de Newton, dans le but de l'améliorer, nous avons remarqué que :

- (i) les solutions formelles calculées par cet algorithme peuvent être regroupées en plusieurs classes d'équivalence,
- (ii) les éléments d'une même classe peuvent être calculés simultanément,
- (ii) les calculs peuvent être effectués dans des extensions algébriques plus petites que celles considérées habituellement dans l'algorithme de Newton classique.

Ces remarques nous ont conduit à écrire un nouvel algorithme, appelé **algorithme de Newton rationnel**, qui repose sur les mêmes principes que l'algorithme de Newton classique et qui permet d'obtenir simultanément les solutions formelles équivalentes. Ce travail s'inspire de celui de D. Duval sur les développements de Puiseux [Du D.].

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude et à la description de ce nouvel algorithme qui nous semble plus efficace que l'algorithme classique et mieux adapté au calcul formel.

La **deuxième partie** de la thèse est consacrée à l'étude des équations et des systèmes d'équations aux différences linéaires homogènes dans le champ complexe. De nombreux mathématiciens se sont intéressés à ce sujet. Parmi eux, on peut citer les noms de Pincherle [Pi], Mellin, Birkhoff, Trjitzinski [Bi – Tr], Adams [Ad], Galbrun [Ga 1], [Ga 2], Nörlund [No 2] et récemment Harris [Ha 3], Braaksma [Br], Immink [Im], Praagman [Pr], Ramis [Ra 4] et A. Duval [Du A.].

Il existe deux grandes méthodes pour étudier ce problème :

1) Utilisation de la transformation de Mellin (ou de ses variantes) : cette méthode s'applique aux équations aux différences à coefficients polynomiaux. Les solutions sont données sous forme de transformées intégrales. Leurs développements asymptotiques peuvent être calculés en utilisant la méthode du col [Du A.].

2) Méthodes directes : ces méthodes consistent simplement à adapter l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Le **chapitre 3** de la thèse se situe dans le cadre de 1). Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme qui permet de calculer une base de solutions asymptotiques d'une équation aux différences linéaire à coefficients polynomiaux, c'est-à-dire d'une équation de la forme :

$$(E) \quad A_m(z)u(z+m) + A_{m-1}(z)u(z+m-1) + \dots + A_0(z)u(z) = 0,$$

où les A_i sont des polynômes à coefficients complexes.

Cet algorithme a pu être élaboré à partir des travaux de J.P Ramis et A. Duval sur les équations aux différences [Ra 4], [Du A]. Il utilise l'algorithme de Newton rationnel introduit au chapitre 2. Ceci est nécessaire à une implantation efficace en calcul formel.

Nous avons implanté cet algorithme sur REDUCE. Nous donnons des exemples (à la fin du chapitre 3) traités par ce programme.

Les chapitres 4 à 7 sont consacrés aux systèmes d'équations aux différences linéaires.

Au **chapitre 4**, nous présentons une méthode, due à G. Birkhoff [Bi 2], qui permet de

ramener l'étude d'un système linéaire de n équations aux différences du premier ordre à coefficients rationnels à celle d'une seule équation aux différences linéaire d'ordre n à coefficients rationnels. Nous montrons que cette réduction peut se faire à l'aide d'un vecteur dit cyclique que l'on peut choisir polynomial. Grâce à ce dernier résultat, nous avons pu implanter cette méthode sur REDUCE. Cette méthode permet d'appliquer aux systèmes aux différences toutes les méthodes connues pour les équations aux différences (par exemple la méthode décrite au chapitre 3). Cependant on constate, sur des exemples, que la méthode paraît lourde. D'où l'intérêt de travailler directement sur les systèmes aux différences.

Les **chapitres 5, 6 et 7** se situent dans le cadre de 2). Ils sont consacrés à l'étude des systèmes aux différences linéaires à coefficients séries de factorielles méromorphes, c'est-à-dire aux systèmes de la forme :

$$S(q) \quad \delta w(z) = w(z+1) - w(z) = z^q A(z)w(z), \quad q \geq -1$$

où z est un nombre complexe, w un vecteur colonne à n composantes et $A(z)$ une matrice carrée d'ordre n admettant une représentation en série de factorielles convergente :

$$A(z) = A_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_{k+1}}{z(z+1)\dots(z+k)}, \quad \operatorname{Re}(z) > \mu,$$

les A_k sont des matrices constantes.

Le point $z = \infty$ est un point singulier régulier pour un système $S(q)$, si ce dernier admet un système fondamental de solutions de la forme :

$$(SF) \quad W(z) = S(z)z^R,$$

où R est une matrice constante et $S(z)$ est une matrice carrée d'ordre n admettant un développement en série de factorielles convergent dans un demi-plan $\operatorname{Re}(z) > b$ [Ha 2]. Ceci est le cas lorsque $q = -1$. Il existe une méthode, tout à fait analogue à la méthode de Frobenius pour les systèmes différentiels, qui permet de construire pour un système $S(-1)$ un système fondamental de solutions de la forme (SF). Cette méthode est présentée au **chapitre 5**.

Les systèmes $S(-1)$ ne sont pas les seuls systèmes à singularité régulière. Il peut arriver aussi qu'un système $S(q)$ avec $q > (-1)$ soit à singularité régulière. En fait, tout système à singularité régulière peut être ramené à un système $S(-1)$ par une transformation linéaire de la forme

$$w(z) = T(z) u(z)$$

où $T(z)$ est une matrice carrée d'ordre n de fonctions développables en série de factorielles convergente dans un demi-plan $\operatorname{Re}(z) > \lambda$ dont le déterminant n'est pas identiquement nul .

Par une telle transformation le système $S(q)$ devient :

$$\delta u(z) = (T^{-1}(z+1)z^q A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z)) u(z).$$

La question que l'on se pose alors est la suivante : comment caractériser les systèmes à singularité régulière ?

Le **chapitre 6** donne une réponse à cette question. Notre travail s'inspire de celui de Moser [Mo] : A tout système $S(q)$, nous associons le nombre rationnel

$$m(A) = q + 1 + \text{rang}(A_0)/n \geq 0,$$

et considérons le nombre

$$\mu = \text{Inf} ((T^{-1}(z+1)z^q A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z)).$$

Alors le système $S(q)$ est à singularité régulière si et seulement si $\mu \leq 1$.

Nous démontrons des résultats analogues à ceux de Moser et développons un algorithme qui construit une transformation T (polynomiale en z^{-1}) permettant de ramener un système $S(q)$, à singularité régulière, à un système $S(-1)$. Nous avons implanté cet algorithme sur REDUCE. Nous donnons un exemple traité sur ordinateur à la fin du chapitre 6.

Dans le **chapitre 7** nous étendons les résultats de A. Hilali et A. Wazner sur les formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires [Hi – Wa] au cas des systèmes aux différences linéaires à coefficients séries de factorielles méromorphes. Nous pensons que cette approche, une fois mise en place pour les systèmes aux différences, permettra d'établir des résultats analogues à ceux connus pour les systèmes différentiels.

Première Partie

SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DANS LE CHAMP COMPLEXE.

Chapitre 1

Solutions formelles d'équations différentielles linéaires du second ordre dans le champ complexe.

Introduction

Le but de ce chapitre est d'exposer un algorithme qui permet le calcul exact des solutions formelles d'équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre au voisinage de points singuliers réguliers ou irréguliers. Le cas des équations du second ordre est intéressant, parce que d'une part c'est le cas qu'on rencontre le plus souvent dans les applications et d'autre part il présente moins de difficultés algorithmiques que le cas général. Les méthodes que nous allons décrire se généralisent plus ou moins facilement au cas des équations d'ordre quelconque (voir [To]).

Les algorithmes que nous présentons dans ce chapitre ont été implanté sur le système de calcul formel REDUCE sous le nom de EDOL2. Ce que ce logiciel apporte de différent et de nouveau par rapport aux logiciels déjà existant, est la possibilité d'obtenir les solutions formelles au voisinage de tous les points singuliers de l'équation à résoudre. La réalisation de ce logiciel a été rendue possible grâce au système D5 de calcul formel avec des nombres algébriques écrit et développé par C. Dicrescenzo et D. Duval [Di – Du].

1. Généralités

Nous allons rappeler quelques résultats classiques de la théorie des équations différentielles.

1.1. Classification des singularités.

On considère des équations différentielles linéaires, ordinaires et homogènes d'ordre n de la forme

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x) y(x) = 0, \quad (1)$$

où les p_i sont des fonctions méromorphes de la variable complexe x .

Il est bien connu, depuis Lazarus Fuchs [Fu] (1866), que les seules singularités possibles de (1) sont celles des coefficients p_i , et que partout ailleurs dans \mathbb{C} les solutions sont analytiques. On distingue deux types de points singuliers : les points singuliers *réguliers* et les points singuliers *irréguliers* :

Définition. Un point x_0 ($x_0 \neq \infty$) est un point *singulier régulier* si toutes les fonctions $(x-x_0)^{n-i} p_i$ sont analytiques au voisinage de x_0 (l'une des fonctions p_i ne l'étant pas). Autrement, on dit que x_0 est un point *singulier irrégulier*.

Classification du point à l'infini

Pour que cette classification des points du plan soit complète, il faut dire comment classifier le point à l'infini. Pour cela, on utilise la transformation $x=1/t$, $d/dx = -t^2 (d/dt)$: la nature du point $x_0 = \infty$ est donnée par celle du point $t = 0$ pour l'équation transformée.

1.2. Nature des solutions.

Considérons une équation différentielle de la forme (1). Supposons qu'elle présente une singularité en 0 (on peut toujours se ramener à ce cas: par translation, pour les points à distance finie, ou par la transformation $x = 1/t$, pour le point à l'infini). La nature des solutions dépend de la nature de la singularité.

Si $x = 0$ est un point singulier régulier, il existe n solutions linéairement indépendantes de la forme:

$$y(x) = x^\mu \sum_{i=0}^{s-1} (\log(x))^i \varphi_i(x), \quad (2)$$

où les φ_i sont des séries de Taylor, le rayon de convergence de ces séries est au moins égal à la distance de 0 à la plus proche singularité des coefficients p_i . (voir par exemple [In])

Ces solutions peuvent être calculées en utilisant un algorithme dû à G. Frobenius [Fr] (1873). Cet algorithme permet de déterminer μ comme racine d'une équation algébrique à coefficients dans \mathbb{C} (dite équation indiciale), de déterminer la valeur de s , et de calculer par récurrence les coefficients des séries φ_i .

Si $x = 0$ est un point singulier irrégulier, les solutions sont d'une nature plus compliquée. La théorie classique montre qu'il existe un système fondamental de solutions de la forme :

$$y(x) = x^\lambda \sum_{i=0}^{s-1} (\log(x))^i \psi_i(x), \quad (3)$$

où les ψ_i sont des séries de Laurent

$$\Psi_i(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} x^k .$$

Mais il n'y a pas d'algorithme pour calculer les solutions sous la forme (3) (il est pratiquement impossible de travailler avec les séries de Laurent Ψ_i). Pour pouvoir effectivement calculer les solutions, on est obligé de passer par ce qu'on appelle les "solutions formelles" , que l'on sait calculer. Les solutions formelles décrivent parfaitement le comportement asymptotique des vraies solutions au voisinage de points singuliers. Ces solutions formelles peuvent être "resommées" pour retrouver les vraies solutions [Ra 1], [Ra 2], [Th 2].

La théorie classique (Fabry [Fa], Birkoff [Bi 3], etc.) nous donne un système fondamental de solutions formelles de la forme

$$e^{Q(1/t)} t^\mu \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i(t) (\log t)^i , \quad (4)$$

avec $t^r = x$ pour un entier r convenable, $Q \in \mathbb{C}[t]$, $\mu \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}^*$, et les $\varphi_i \in \mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}[[t]]$ désignant l'algèbre des séries formelles à une indéterminée sur \mathbb{C}

Ces solutions sont dites formelles car les séries qui interviennent dans (4) divergent généralement.

On dispose d'un algorithme, dit algorithme de Newton, qui permet de calculer une base de solutions formelles. Cet algorithme repose sur des travaux de Fabry [Fa] (1885). Il a été repris et développé dans un cadre algébrique par B. Malgrange [Ma 1].

1.3. Polygone de Newton-Ramis-Malgrange.

Le polygone de Newton (ou de Newton-Ramis-Malgrange) joue un rôle fondamental dans l'algorithme de recherche des solutions formelles d'un opérateur différentiel à singularité irrégulière.

Nous allons donner la définition du polygone de Newton dans le cadre général des opérateurs différentiels à coefficients séries formelles méromorphes.

Nous noterons $\mathbb{C}((x))$ ($= \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$) le corps des séries formelles méromorphes à une indéterminée sur \mathbb{C} . Pour $a = \sum \alpha_j x^j$ $a \in \mathbb{C}((x))$, $a \neq 0$ on pose $v(a) = \inf \{ j \mid \alpha_j \neq 0 \}$. Et pour $a = 0$ on pose $v(a) = +\infty$.

Nous considérons des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}((x))$ de la forme

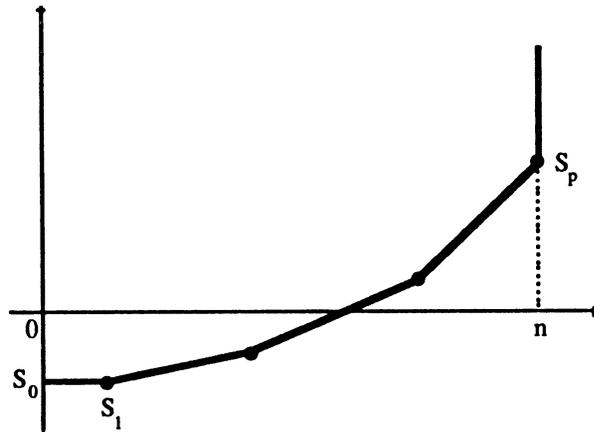
$$L = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i, \quad \partial = \frac{d}{dx}, \quad a_i = \sum_{j=v(a_i)}^{+\infty} \alpha_{i,j} x^j \in \mathbb{C}((x)), a_n \neq 0.$$

Le *polygone de Newton* de l'opérateur L est défini de la manière suivante :

On note $Q^+(u,v) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq u, y \geq v \}$, le deuxième quadrant de \mathbb{R}^2 translaté en (u,v) . On considère alors l'ensemble

$$M^+(L) = \bigcup_{\alpha_{i,j} \neq 0} Q^+(i, j-i).$$

Le polygone de Newton de L est l'enveloppe convexe inférieure de $M^+(L)$. Nous le noterons $N(L)$.



Le polygone $N(L)$ peut être décrit par la suite de ses sommets :

$$S_0 = (u_0, v_0), S_1 = (u_1, v_1), \dots, S_p = (u_p, v_p),$$

où les u_k et v_k sont des entiers vérifiant

$$\begin{aligned} u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_p = n, \\ v_0 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_p. \end{aligned}$$

On associera à $N(L)$ la suite strictement croissante des pentes

$$0 \leq \lambda_0 = \frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0} < \lambda_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} < \dots < \lambda_{p-1} = \frac{v_p - v_{p-1}}{u_p - u_{p-1}},$$

des diverses arêtes $A_0 = [S_0, S_1], \dots, A_{p-1} = [S_{p-1}, S_p]$.

On notera $l(\lambda_j)$ la longueur de la projection sur l'axe des abscisses de l'arête A_j de pente λ_j , et on l'appellera, par abus de langage, longueur de la pente λ_j .

Pour les opérateurs différentiels à coefficients séries formelles méromorphes, on peut donner la définition suivante :

Définition . L'opérateur L est dit à singularité régulière (en $x = 0$), si pour tout i , $v(a_i) - i \geq v(a_n) - n$. Sinon, L est dit à singularité irrégulière.

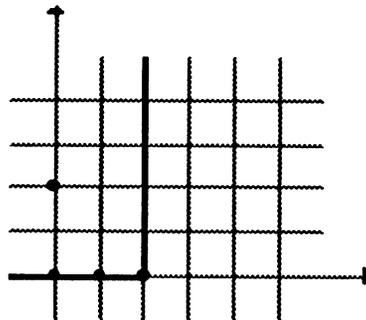
Cette définition est équivalente, dans le cas où l'opérateur L est à coefficients analytiques, à la définition donnée dans le paragraphe précédent.

La nature régulière ou irrégulière de l'opérateur L , se lit directement sur son polygone de Newton $N(L)$. En effet, on a la caractérisation suivante :

l'opérateur L est à singularité régulière en zéro, si et seulement si son polygone de Newton $N(L)$ n'a qu'une seule pente, égale à 0.

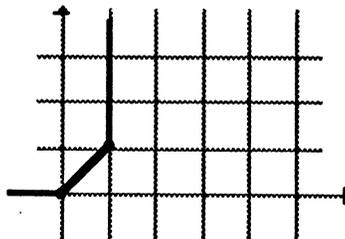
Exemples :

a) $L = x^2 \partial^2 + x \partial + (x^2 - v^2)$ (Bessel).



Dans cet exemple, l'opérateur L est à singularité régulière.

b) $L = x^2 \partial + 1$ (Euler)



Dans cet exemple, l'opérateur L est à singularité irrégulière.

2. Cas des équations du second ordre : Algorithmes de recherche des solutions formelles.

Nous allons maintenant restreindre notre domaine d'étude au cas d'un opérateur L du second ordre à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. Quitte à le multiplier par le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients, nous pouvons, sans perdre de généralité, le supposer à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, soit :

$$L = a_2(x)\partial^2 + a_1(x)\partial + a_0(x),$$

les $a_i(x)$ appartenant à $\mathbb{Q}[x]$, avec $a_2 a_0 \neq 0$.

Nous supposons que les a_i sont sans facteur commun. Les singularités de l'équation $L(y) = 0$, sont alors situées aux racines du polynôme a_2 et éventuellement à l'infini.

Soit ρ une singularité de L à distance finie, i.e. une racine du polynôme $a_2(x)$. Pour étudier les solutions formelles au voisinage de ρ , il faut d'abord déterminer ρ . Or le calcul numérique d'une racine d'un polynôme conduit dans la plupart des cas à une approximation de cette racine. Mais alors une valeur approchée de ρ est un point ordinaire pour l'équation différentielle et les solutions que l'on va calculer ne reflèteront pas le comportement au voisinage de la singularité. Il faudrait donc pouvoir calculer exactement avec ρ sans lui affecter de valeur numérique, en tenant compte de la seule information : " $a_2(\rho) = 0$ ".

Le système **D5** de calcul formel avec les nombres algébriques [Di – Du] nous offre cette possibilité. Nous ne présentons pas ici les principes de ce système, mais nous renvoyons à la thèse de D. Duval [Du D.]. Contentons nous de dire que **D5** est capable de prendre en compte l'instruction : "*soit a une racine quelconque de P(X)*".

Le système **D5** permet d'additionner, multiplier, tester l'égalité de deux nombres algébriques ou inverser un nombre algébrique non nul, sans jamais factoriser de polynômes (la factorisation pouvant s'avérer très coûteuse).

Si par exemple a est racine d'un polynôme $P(X)$ à coefficients dans \mathbb{Q} , de degré $d > 0$, le système **D5** représente tous les éléments de $\mathbb{Q}(a) = \{B(a)/C(a), B, C \in \mathbb{Q}[X], C(a) \neq 0\}$, par des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $< d$. Calculer dans $\mathbb{Q}(a)$ revient alors à calculer modulo P , i.e. dans l'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/(P(X))$.

Pour nous les racines ρ de a_2 sont données par la règle de calcul " $a_2(\rho) = 0$ ", valable pour toutes les racines de a_2 . Si on effectue la translation $t = x - \rho$, qui ramène la singularité ρ à l'origine, on obtient alors un nouvel opérateur à coefficients dans $K[t]$ (où $K = \mathbb{Q}(\rho)$).

Nous supposons dans la suite que cette translation est faite, c'est à dire que L possède une singularité en 0 ($a_2(0) = 0$). Les a_i sont des polynômes à coefficients dans K .

Pour i allant de 0 à 2, posons $\omega_i = v(a_i) - i$. Le polygone de Newton $N(L)$ peut être décrit par trois points: (i, ω_i) ($i=0,1,2$). Deux cas peuvent se présenter :

. Premier cas: $N(L)$ admet deux pentes entières :

$$0 \leq \lambda_0 = \max(0, \omega_1 - \omega_0) < \lambda_1 = \omega_2 - \omega_1.$$

. Deuxième cas: $N(L)$ présente une unique pente de longueur 2 :

$$\lambda_0 = \max(0, (\omega_2 - \omega_0)/2),$$

(cette pente pouvant être éventuellement nulle, dans ce cas la singularité est régulière).

2.1. Cas des singularités régulières: Algorithme de Frobenius.

Soit L un opérateur différentiel de degré 2. On suppose qu'il possède une singularité régulière en 0. Quitte à multiplier L par une puissance convenable de x , on peut écrire L sous la forme "canonique" :

$$L = x^2 b_2(x) \partial^2 + x b_1(x) \partial + b_0(x),$$

où les $b_i(x) \in K[x]$, avec $b_2(0) \neq 0$.

Description de l'algorithme

Première étape : Action de L sur x^μ :

On forme

$$L(x^\mu) = \mu(\mu - 1)b_2(x)x^\mu + \mu b_1(x)x^\mu + b_0(x)x^\mu,$$

que nous écrivons sous la forme

$$L(x^\mu) = x^\mu f(x, \mu),$$

$f(x, \mu)$ étant un polynôme (en x et μ) qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x, \mu) = f_0(\mu) + f_1(\mu)x + \dots + f_d(\mu)x^d,$$

où $d = \max \{ \text{degré}(b_i), i=0,1,2 \}$.

Si l'on note

$$b_i(x) = \sum_{j=0}^d b_{i,j} x^j, \quad (i = 0, 1, 2),$$

il est facile de voir que

$$f_j(\mu) = b_{2,j} \mu(\mu - 1) + b_{1,j} \mu + b_{0,j}, \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

Remarquons que

$$f_0(\mu) = b_{2,0} \mu(\mu - 1) + b_{1,0} \mu + b_{0,0}$$

est un polynôme de degré 2 en μ ($b_{2,0} = b_2(0) \neq 0$) à coefficients dans K .

Deuxième étape: Formation du développement des solutions:

L'algorithme de Frobenius consiste simplement à rechercher des solutions formelles sous la forme

$$y(x, \mu) = x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i, \quad (g_0 \neq 0), \quad (5)$$

On peut écrire formellement

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} g_i L(x^{i+\mu}) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} x^{i+\mu} \sum_{v=0}^i g_v f_{i-v}(\mu+v). \end{aligned}$$

Donc $y(x, \mu)$ satisfera l'équation $L(y)=0$ si les g_v vérifient les relations

$$(S) \quad \begin{cases} g_0 f_0(\mu) \\ g_1 f_0(\mu+1) + g_0 f_1(\mu) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_v f_0(\mu+v) + g_{v-1} f_1(\mu+v-1) + \dots + g_0 f_v(\mu) = 0. \end{cases}$$

(avec $f_j(\mu) = 0$, pour $j > d$).

On en déduit que μ doit être une racine de l'équation algébrique $f_0(\mu) = 0$. Cette équation est appelée *l'équation indicelle*.

D'une manière générale, étant donnés $g_0 \neq 0$ et μ quelconque, on peut chercher les g_v , $v \geq 1$, comme fractions rationnelles de μ de telle sorte que $y(x, \mu)$ soit solution de l'équation non

homogène

$$L(y(x,\mu)) = g_0 f_0(\mu) x^\mu. \quad (6)$$

En particulier, si μ est tel que $f_0(\mu+i) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$, alors les g_ν , $\nu \geq 1$, peuvent être déterminés d'une manière unique par le système linéaire (S) On obtient ainsi une solution formelle de l'équation (6) sous la forme (5). Dans toute la suite $y(x, \mu)$ désignera cette solution de l'équation non homogène (6).

Troisième étape : Description des solutions :

Soient μ_1 et μ_2 les deux racines (non nécessairement distinctes) de l'équation indicelle $f_0(\mu) = 0$. Supposons que $\text{Re}(\mu_1) \geq \text{Re}(\mu_2)$, alors $f_0(\mu_1 + i) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$, donc $y(x, \mu_1)$ est solution formelle de l'équation $L(y) = 0$. Ainsi, on a toujours au moins une solution formelle de l'équation $L(y) = 0$ de la forme (5).

a. Cas générique : Nous dirons que nous sommes dans le cas générique si μ_1 et μ_2 ne diffèrent pas d'un entier, (i.e. $(\mu_1 - \mu_2) \notin \mathbb{N}$).

Dans ce cas $y_1(x) = y(x, \mu_1)$ et $y_2(x) = y(x, \mu_2)$ sont deux solutions formelles linéairement indépendantes. Elles forment donc un système fondamental de solutions formelles pour L.

b. Cas non générique : $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}$.

Cas d'une racine multiple:

Considérons d'abord le cas simple où $\mu_1 = \mu_2$. Dans ce cas nous avons naturellement une première solution formelle $y_1(x) = y(x, \mu_1)$.

Pour obtenir une deuxième solution formelle, on dérive par rapport à μ les deux membres de l'équation (6) :

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = x^\mu g_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu) + x^\mu g_0 f_0(\mu) \log(x).$$

Comme

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu_1) = f_0(\mu_1) = 0,$$

on en déduit que

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} y(x, \mu) \right|_{\mu=\mu_1} = y(x, \mu_1) \log(x) + x^{\mu_1} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial g_i}{\partial \mu}(\mu_1) x^i$$

est une solution formelle de $L(y) = 0$.

L'existence du terme logarithmique dans $y_2(x)$ assure l'indépendance linéaire des deux solutions formelles $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Cas de racines qui diffèrent d'un entier non nul:

Supposons maintenant que $(\mu_1 - \mu_2) = n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, nous avons une première solution formelle $y_1(x) = y(x, \mu_1)$.

Reprenons l'équation récurrente qui donne les coefficients g_v . Elle s'écrit pour $v = n$:

$$f_0(\mu + n)g_n + f_1(\mu + n-1)g_{n-1} + \dots + f_n(\mu)g_0 = 0.$$

Si nous remplaçons μ par μ_2 dans cette équation, nous aurons

$$0.g_n = - \{ f_1(\mu_2 + n-1)g_{n-1} + \dots + f_n(\mu_2)g_0 \}. \quad (*)$$

En général, le deuxième membre de cette équation n'est pas nul et il est alors impossible de déterminer le coefficient g_n .

Afin de pouvoir obtenir une autre solution formelle nous utilisons la remarque suivante : g_0 étant arbitraire nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$g_0 = (\mu - \mu_2)c_0, \quad (c_0 \neq 0).$$

Par cette remarque, les $g_i(\mu_2)$, pour $0 \leq i \leq n-1$, deviennent nuls et par conséquent le deuxième membre de l'équation (*) devient aussi nul. On peut donc choisir $g_n(\mu_2)$ arbitrairement et déterminer récursivement les g_v , pour $v \geq n+1$. Nous aurons alors une solution formelle qui s'écrit

$$x^{\mu_2} \{ g_n x^n + g_{n+1} x^{n+1} + \dots \}.$$

Mais de toute évidence, g_n étant arbitraire cette solution sera proportionnelle à celle déjà trouvée et nous n'aurons pas avancé!

Pour déterminer une deuxième solution formelle, l'idée est d'avoir recours, encore une fois, à la dérivation par rapport au paramètre μ . Avec le nouveau choix de g_0 , l'équation (6) s'écrit

$$L(y(x, \mu)) = c_0 (\mu - \mu_2) f_0(\mu) x^\mu.$$

Remarquons que μ_2 est racine double de $(\mu - \mu_2) f_0(\mu)$, et donc si nous dérivons relativement à μ les deux membres de l'équation précédente puis remplaçons μ par μ_2 , nous aurons

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}(x, \mu)\Big|_{\mu=\mu_2}\right) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une deuxième solution formelle qui s'écrit

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(x, \mu)\Big|_{\mu=\mu_2} = x^{\mu_2} \left\{ (\log x) \sum_{v=0}^{\infty} g_v(\mu_2) x^v + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mu} g_v(\mu)\Big|_{\mu=\mu_2} x^v \right\}$$

et qui est indépendante de $y_1(x)$ à cause du terme logarithmique.

Remarque Les séries qui interviennent dans ces solutions sont convergentes dans un voisinage de 0 (pour une démonstration voir par exemple [In]).

2.2. Etude de l'équation indicelle : algorithme de recherche des racines dont la différence est entière.

Nous avons vu que pour former les développements des solutions au voisinage d'une singularité régulière nous sommes conduits à étudier les racines de l'équation indicelle.

Remarquons d'abord que cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$f_0(\mu) = \mu^2 + b(\rho)\mu + c(\rho) = 0 \quad (*)$$

où ρ est un nombre algébrique, racine d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ (non nécessairement irréductible), et $b(X), c(X) \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\text{Max}(d^{\circ}b, d^{\circ}c) < d^{\circ}P$.

Nous proposons une méthode permettant de tester si la différence des racines de l'équation indicelle est entière sans avoir à factoriser $P(X)$. Cette méthode consiste à chercher des conditions nécessaires sur les entiers n qui peuvent être différence des racines.

Désignons par μ_1 et μ_2 les deux racines de f_0 , (μ_1 et μ_2 dépendent évidemment de ρ).

Problème : La différence $(\mu_1 - \mu_2)$ est elle entière ?

Remarquons d'abord que

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 = [b(\rho)]^2 - 4c(\rho),$$

c'est un élément de $\mathbb{Q}[\rho]$. On peut le représenter par un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré inférieur strictement à celui de $P(X)$. On peut donc écrire

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 = D(\rho),$$

où $D(X) \in \mathbb{Q}[X]$, avec $d^{\circ}D < d^{\circ}P$.

Les ρ pour lesquels l'équation (*) admet une racine double sont les racines communes à $P(X)$ et $D(X)$.

Nous allons supposer que le p.g.c.d ($P(X)$, $D(X)$) = 1 (cela revient à remplacer P par $P / \text{p.g.c.d}(P, D)$). Dans ce cas l'équation (*) admet toujours deux racines distinctes.

Etant donné un entier $n > 0$, nous allons chercher des conditions nécessaires sur n pour qu'il existe une racine ρ de $P(X)$ telle que $D(\rho) = n^2$.

Posons

$$N(X) = m.D(X)$$

où m désigne le p.p.c.m des dénominateurs des coefficients de $D(X)$. $N(X)$ est un polynôme à coefficients entiers et donc le résultant de $P(X)$ et $N(X)$ est un entier. Nous avons le résultat suivant

Proposition. Si n est un entier, différence des racines de (*) pour une racine ρ de $P(X)$, alors

$$n^2 \text{ divise le résultant de } P(X) \text{ et } N(X). \quad (C1)$$

Démonstration Considérons $R(Y) =$ le résultant de $P(X)$ et $N(X) - Y$, considérés comme polynômes en X . C'est un polynôme en Y à coefficients dans \mathbb{Z} , dont le terme constant est exactement le résultant de $P(X)$ et $N(X)$.

Supposons qu'il existe ρ racine de $P(X)$ telle que $D(\rho) = n^2$, alors $N(\rho) - m.n^2 = 0$, ceci entraîne que p.g.c.d ($P(X)$, $N(X) - m.n^2$) est non constant ou encore que le résultant de $P(X)$ et $N(X) - m.n^2$ est nul. Autrement dit, $m.n^2$ est racine du polynôme $R(Y)$. Il suffit alors de remarquer que les racines entières d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} divisent son terme constant.

Nous allons maintenant donner une borne sur les entiers n qui peuvent être différence des racines de (*).

Notons

$$P(X) = p_0X^d + p_1X^{d-1} + \dots + p_d,$$

$$b(X) = b_0X^{d-1} + b_1X^{d-2} + \dots + b_{d-1},$$

$$c(X) = c_0 X^{d-1} + c_1 X^{d-2} + \dots + c_{d-1}.$$

Pour toute racine ρ de $P(X)$, on a :

$$|\rho| \leq M_p = 1 + \frac{\text{Max}(|p_1|, \dots, |p_d|)}{|p_0|}.$$

D'autre part, si μ est une racine de (*) alors

$$|\mu| \leq 1 + \text{Max}(|b(\rho)|, |c(\rho)|).$$

Donc si n est différence des racines de (*) alors

$$n \leq 2(1 + \text{Max}(|b(\rho)|, |c(\rho)|)).$$

On en déduit que

$$n \leq 2 + 2 \text{Max} \left(\sum_{i=0}^{d-1} |b_i| M_p^{d-1-i}, \sum_{i=0}^{d-1} |c_i| M_p^{d-1-i} \right). \quad (C2)$$

En conclusion, les entiers qui sont différence des racines de (*) vérifient les deux conditions (C1) et (C2).

Faire le test (d'appartenance) : $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbf{Z}$, se ramène donc à faire le test d'égalité : $(\mu_1 - \mu_2)^2 = n^2$, pour chaque entier n vérifiant les deux conditions (C1) et (C2), ce qui peut se faire en utilisant le système **D5**.

Remarque D'après la démonstration de la proposition précédente, pour décider si les racines de l'équation indicielle diffèrent d'un entier on peut se ramener au problème suivant : soit un polynôme R à coefficients entiers. Possède-t-il des racines entières ?

Deux méthodes pour résoudre ce problème peuvent être envisagées :

- 1) la première consiste à factoriser le polynôme R : cette méthode s'avère très "coûteuse" surtout lorsque le polynôme R est de degré élevé.
- 2) la deuxième méthode consiste à chercher des conditions nécessaires sur les entiers susceptibles d'être racines de R (comme nous l'avons fait plus haut). Cette méthode semble satisfaisante dans les exemples que nous avons traités. Mais elle se révèle lourde lorsque les coefficients du polynôme R sont grands.

En pratique, nous utilisons l'une ou l'autre de ces méthodes suivant la taille des coefficients et le degré du polynôme R .

2.3. Cas des singularités irrégulières: Algorithme de Newton.

Reprenons l'opérateur

$$L = a_2(x)\partial^2 + a_1(x)\partial + a_0(x),$$

et supposons qu'il possède une singularité irrégulière en 0.

2.3.1. Cas de deux pentes entières : Cas générique :

Nous allons d'abord étudier le cas, dit générique, où le polygone de Newton de L présente deux pentes distinctes. Ces deux pentes sont alors entières.

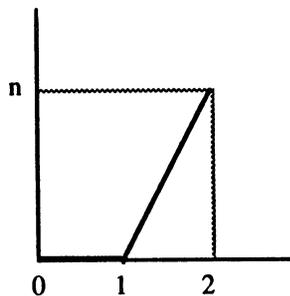
a. Calcul d'une solution formelle dans le cas d'une pente nulle :

Supposons tout d'abord que le polygone de Newton de L possède une pente nulle. Elle est forcément de longueur 1, sinon la singularité serait régulière. Dans ce cas l'opérateur L peut s'écrire sous la forme

$$L = x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + xb_1(x)\partial + b_0(x),$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_1(0)b_2(0) \neq 0$.

L'autre pente du polygone de Newton de L a donc pour valeur n .



Comme dans le cas de singularité régulière, on cherche une solution formelle sous la forme

$$y(x, \mu) = x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i, \quad (g_0 \neq 0),$$

On peut écrire formellement

$$L(y) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^{i+\mu} \sum_{v=0}^i g_v f_{i-v}(\mu+v),$$

où les f_i sont des polynômes en μ .

On peut déterminer récursivement les g_ν , $\nu \geq 1$, de telle sorte que $y(x, \mu)$ soit solution de l'équation non homogène

$$L(y(x, \mu)) = g_0 f_0(\mu) x^\mu,$$

où

$$f_0(\mu) = \mu b_1(0) + b_0(0).$$

L'équation $f_0(\mu) = 0$, s'appelle l'équation indiciale. C'est une équation en μ de degré 1.

Pour obtenir une solution formelle, il suffit de prendre

$$\mu = - \frac{b_0(0)}{b_1(0)},$$

(unique racine de l'équation indiciale).

Nous obtenons ainsi une solution formelle "régulière" de l'équation différentielle $L(y) = 0$.

Remarquons que μ est dans K et si on choisit g_0 dans K , les g_ν sont aussi dans K .

Remarque Insistons sur le fait qu'il s'agit d'une solution formelle et qu'il n'est pas question de parler de convergence. La série $\sum g_n x^n$ est en général divergente, comme le montre l'exemple suivant :

exemple Considérons l'opérateur

$$L = x^3 \partial^2 + x \partial - 2.$$

Cherchons une solution $y(x) = x^\mu \sum g_n x^n$. Nous avons

$$L(y) = x^\mu \sum_{n=0}^{+\infty} \{ g_n f_0(\mu+n) + g_{n-1} f_1(\mu+n-1) \} x^n,$$

avec

$$f_0(\mu) = \mu - 2, \text{ et } f_1(\mu) = \mu(\mu - 1).$$

En choisissant $\mu = 2$, nous obtenons la solution

$$y(x) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n,$$

où les g_n , $n \geq 1$, sont donnés par l'équation récurrente linéaire

$$f_0(n+2)g_n + f_1(n+1)g_{n-1} = 0,$$

qui s'écrit

$$g_n + (n+1)g_{n-1} = 0.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum g_n x^n$ est donc

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{n-1}}{g_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-1}{n+1} \right| = 0.$$

b. Calcul d'une solution formelle dans le cas de deux pentes strictement positives :

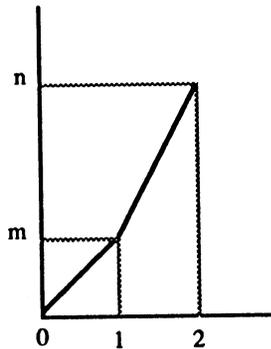
Supposons que $N(L)$ possède deux pentes distinctes strictement positives. Après normalisation éventuelle, l'opérateur L peut s'écrire sous la forme

$$L = x^{n+2} b_2(x) \partial^2 + x^{m+1} b_1(x) \partial + b_0(x),$$

avec $b_0(0)b_1(0)b_2(0) \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ et $n > 2m > 0$.

La condition $n > 2m$, nous assure l'existence de deux pentes différentes :

$$\lambda_0 = m < \lambda_1 = n - m.$$



Considérons la plus petite pente $\lambda_0 = m$, et posons

$$y = \exp\left(-\frac{a}{mx^m}\right) z,$$

où a est un nombre complexe non nul. Alors

$$y' = \exp\left(-\frac{a}{mx^m}\right) \left[z' + \frac{a}{x^{m+1}} z \right],$$

$$y'' = \exp\left(-\frac{a}{mx^m}\right) \left[z'' + \frac{2a}{x^{m+1}} z' + \left(\frac{a^2}{x^{2(m+1)}} + \frac{-(m+1)a}{x^{m+2}} \right) z \right].$$

Si on remplace y dans l'équation $L(y) = 0$, on obtient une nouvelle équation différentielle en z

$$L_{a,m}(z) = \{ x^{n+2} b_2(x) \partial^2 + x^{m+1} c_1(x) \partial + c_0(x) \} (z) = 0,$$

où

$$c_1(x) = b_1(x) + 2ax^n b_2(x),$$

$$c_0(x) = b_0(x) + ab_1(x) + \{ a^2 x^{n-2m} - (m+1)ax^{n-m} \} b_2(x).$$

L'équation, dite *équation caractéristique* associée à la pente m , est

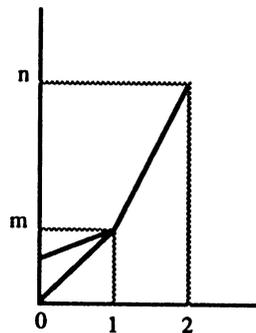
$$c_0(0) = b_0(0) + ab_1(0) = 0.$$

Cette équation est du premier ordre en a . Elle a une unique racine

$$a_m = - \frac{b_0(0)}{b_1(0)}.$$

Si $a \neq a_m$, le polygone de Newton de $L_{a,m}$ coïncide avec celui de L .

Si $a = a_m$, le polygone de Newton de l'opérateur $L_{a,m}$ a une pente entière p strictement inférieure à m , et une autre pente $\lambda_1 = n - m$. Il a la forme :



Ainsi, en choisissant $a = a_m$, on réduit la pente m à une pente p plus petite.

Posons $L^1 = L_{a_m, m}$. L'étape suivante de l'algorithme consiste à faire, dans l'équation $L^1(z) = 0$, le changement de fonction inconnue

$$z = \exp\left(-\frac{a}{px^p}\right) u,$$

former l'opérateur $L_{a,p}^1$, puis choisir a racine de l'équation caractéristique associée à la pente p. On itère ce processus jusqu'à obtenir un opérateur dont le polygone de Newton possède un côté de pente nulle (ce qui se fait en au plus m étapes). On se retrouve alors dans le premier cas traité, et on peut appliquer la méthode de Frobenius pour calculer la partie "régulière" de la solution cherchée.

On peut donc déterminer ainsi une première solution formelle, dite *normale*, de la forme :

$$y_1(x) = \exp\left(\frac{-a_m}{mx^m} + \frac{-a_{m-1}}{(m-1)x^{m-1}} + \dots + \frac{-a_1}{x}\right) x^{\mu_1} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i.$$

c. Calcul de la deuxième solution formelle :

Pour obtenir la solution formelle associée à la deuxième pente n-m, on procède de la même façon : On forme l'opérateur $L_{a,n-m}$. L'équation caractéristique associée à la pente n-m, est

$$b_1(0) + a b_2(0) = 0.$$

En choisit $a = \alpha_{n-m} = -b_1(0)/b_2(0)$, le nouveau polygone de Newton a deux pentes p_0 et p_1 telles que : $0 \leq p_0 < (n-m) = p_1$. On recommence ces transformations sur la pente la plus petite p_0 , jusqu'à la rendre nulle. On obtient ainsi une deuxième solution formelle de la forme :

$$y_2(x) = \exp\left(\frac{-\alpha_{n-m}}{(n-m)x^{n-m}} + \dots + \frac{-\alpha_1}{x}\right) x^{\mu_2} \sum_{i=0}^{+\infty} h_i x^i.$$

Il est clair que les deux solution obtenues sont linéairement indépendantes.

Remarque On peut remarquer que tous les exposants et coefficients intervenant dans cette construction sont dans K. Cela est important pour un code de calcul formel.

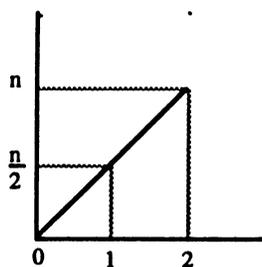
2.3.2 Cas d'une unique pente non nulle : cas dégénéré.

Nous allons supposer maintenant que le polygone de Newton de L possède une unique pente non nulle. Dans ce cas l'opérateur L peut s'écrire sous la forme

$$L = x^{n+2} b_2(x) \partial^2 + x^{m+1} b_1(x) \partial + b_0(x),$$

avec $b_0(0)b_2(0) \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ et $0 < n \leq 2m$.

On peut remarquer que soit la pente est entière (n est pair), soit elle est rationnelle (n impair).



Comme dans le cas générique on effectue le changement de fonction inconnue

$$y = \exp\left(-\frac{a}{(n/2)x^{n/2}}\right) z.$$

L'opérateur $L_{a,n/2}$ s'écrit

$$L_{a,n/2} = x^{n+2} b_2(x) \partial^2 + x^{n/2+1} c_1(x) \partial + c_0(x),$$

avec

$$c_1(x) = x^{m-(n/2)} b_1(x) + 2ax^n b_2(x),$$

$$c_0(x) = b_0(x) + ax^{m-(n/2)} b_1(x) + \{ a^2 - (n/2 + 1)ax^{n/2} \} b_2(x).$$

L'équation caractéristique est alors

$$c_0(0) = b_0(0) + ab_1(0) [x^{m-(n/2)}]_{|x=0} + a^2 b_2(0) = 0.$$

C'est une équation du second degré en a .

Deux cas sont alors à considérer :

a. Le cas dégénéré simple : $m \neq n/2$:

Dans ce cas l'équation caractéristique s'écrit

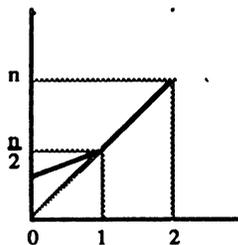
$$c_0(0) = b_0(0) + a^2 b_2(0) = 0.$$

Elle a deux racines distinctes. Il est alors essentiel de remarquer que

$$c_1(0) = 2ab_2(0) \neq 0.$$

Soit a_1 l'une des racines de l'équation caractéristique.

Supposons d'abord que n est pair. Le polygone de Newton de l'opérateur $L_{a_1, n/2}$ est alors de la forme



C'est à dire qu'il a une pente entière p_0 strictement inférieure à $n/2$ et une pente entière égale à $n/2$. Si la pente p_0 n'est pas nulle alors on peut comme dans le cas générique la réduire à une pente nulle. On obtient ainsi, une première solution formelle de la forme:

$$y(x) = \exp(Q(1/x)) x^\mu \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$$

avec degré (Q) = $n/2$.

On voit immédiatement que l'autre racine de l'équation caractéristique permet d'obtenir une deuxième solution formelle de la même forme que la précédente.

Si n est impair, on effectue d'abord la ramification

$$x = t^2,$$

$$x \frac{d}{dx} = \frac{1}{2} t \frac{d}{dt},$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{4} t^2 \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{4} t \frac{d}{dt}.$$

L'opérateur $L_{a_1, n/2}$ se transforme en un opérateur (en t et d/dt) dont le polygone de Newton présente une pente entière inférieure strictement à n et une autre de valeur n . On est donc ramené (par ramification) au cas précédent. On peut alors construire une solution formelle, dite *sous-normale*, de la forme

$$y(x) = \exp(Q(1/t)) t^\mu \sum_{i=0}^{\infty} g_i t^i$$

avec $x = t^2$, degré (Q) = n .

Correspondant à l'autre racine de l'équation caractéristique, on peut construire évidemment

une deuxième solution formelle qui aura la même forme.

b. Le cas hyperdégénéré : $m = n/2$:

Dans ce cas l'équation caractéristique s'écrit

$$c_0(0) = b_0(0) + ab_1(0) + a^2 b_2(0) = 0.$$

Il est alors très important de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial a} c_0(0) = b_1(0) + 2ab_2(0) = c_1(0).$$

Nous avons deux possibilités :

b.1. L'équation caractéristique a deux racines distinctes.

Les racines de l'équation caractéristique sont simples. Si a_1 désigne l'une de ces racines alors, d'après la remarque précédente, le coefficient $c_1(0)$ est non nul et donc le polygone de Newton de l'opérateur $L_{a_1, n/2}$ a une pente entière strictement inférieure à m et une pente entière égale à m . On se retrouve dans le cas générique. Nous avons donc deux solutions formelles de la forme:

$$y(x) = \exp(Q(1/x)) x^\mu \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$$

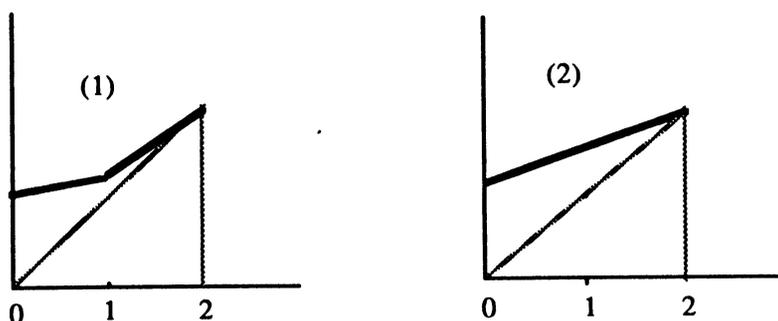
avec degré (Q) = $m = n/2$.

b.2. L'équation caractéristique admet une racine double.

Soit a_1 cette racine, on a

$$a_1 = -\frac{b_1(0)}{2b_2(0)}.$$

Dans ce cas le coefficient $c_1(0)$ est nul, le polygone de Newton de l'opérateur $L_{a_1, n/2}$ a l'une des deux formes suivantes:



Dans le premier cas (cas (1)), la pente s'est "cassée", on se retrouve dans un cas générique sans ramification et on a donc deux solutions formelles normales.

Le deuxième cas est un peu délicat : on a une unique pente $\lambda' < m$, et donc :

- soit il n'y a pas de point d'abscisse 1 sur la face du polygone et on se retrouve dans le cas dégénéré simple considéré au début. Donc, après ramification éventuelle, on retombe sur le cas générique.
- soit la pente est entière et il y a un point d'abscisse 1 sur la face du polygone et nous nous retrouvons donc dans le cas que nous sommes en train d'étudier. Mais il faut remarquer que d'une part on n'a pas introduit de ramification et d'autre part la pente a diminué. Donc en itérant le processus nous tomberons (après au plus m itérations), dans le pire des cas, sur une pente nulle de longueur 2, dans ce cas l'algorithme de Frobenius nous fournira les parties "régulières" des solutions.

3. Exemples

Nous avons écrit, sur le système de calcul formel **REDUCE**, un logiciel baptisé **EDOL2**, qui permet (dans le cas d'équations différentielles d'ordre 2) de calculer un système fondamental de solutions formelles au voisinage de singularités régulières ou irrégulières. Ce logiciel utilise le système **D5** de calcul formel avec des nombres algébriques.

Dans cette section nous présentons quelques exemples traités par EDOL2. Pour aider à la lisibilité de ces exemples, on note que l'on trouvera :

- l'appel du logiciel qui se fait par la commande **edol2()**;
- le dialogue interactif pour l'introduction des données,
- l'impression des solutions formelles de l'équation différentielle avec le nombre de termes demandés.

EXEMPLE 1

5: edol2();

**** INTRODUCTION DES DONNEES ****

L'equation est de la forme :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Donner les coefficients $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$.

5: x-1;x**4*(x+1)**2;x**5*(x+1)**2;

$$a_0(x) = x - 1$$

$$4 \quad 2$$

$$a_1(x) = x^4 * (x^2 + 2*x + 1)$$

$$5 \quad 2$$

$$a_2(x) = x^5 * (x^2 + 2*x + 1)$$

correction ?(oui;/ non;)

5: non;

1: Etude des singularites a distance finie.

2: Etude du point a l'infini.

0: Etude en zero.

Votre choix : 1/2/0 ?

5: 1;

Nombre de termes desires pour les solutions ?

5: 3;

**** EXECUTION ****

Les singularites a distance finie sont les racines de l'equation :

$$RO*(RO + 1) = 0.$$

Dans toute la suite la variable T est liee a la variable X par la relation :

$$T = X - RO.$$

=====

SOLUTION2

=====

$$E \quad (9T - 2) / (3\sqrt{T} * T) \quad 2$$

$$*T * (145/32 * \sqrt{T} * T + \sqrt{T}) + 561/128 * T + 11/4 * T$$

Time: 52530 ms

EXEMPLE 2

7:edol2();

** INTRODUCTION DES DONNEES **

L'equation est de la forme :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Donner les coefficients $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$.

7: x**3-x**2-1;x**2*(1-2*x);x**3;

$$a_0(x) = x^3 - x^2 - 1$$

$$a_1(x) = -x^2 * (2x - 1)$$

$$a_2(x) = x^3$$

correction ?(oui;/ non;)

7: non;

1: Etude des singularites a distance finie.

2: Etude du point a l'infini.

0: Etude en zero.

Votre choix : 1/2/0 ?

7: 2;

Nombre de termes desires pour les solutions?

7: 6;

** EXECUTION **

Dans toute la suite la variable T est liee a la variable X par la relation :

$$T = 1/X.$$

les developpements des solutions sont:

=====

SOLUTION1

=====

$$E \quad \frac{1}{T} \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2$$

$$E \quad * (1/518400 * T^6 + 1/14400 * T^5 + 1/576 * T^4 + 1/36 * T^3 + 1/4 * T^2 + T + 1)$$

=====

SOLUTION2

=====

$$E \quad \frac{1}{T} \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 4$$

$$E \quad * (1/518400 * \text{LOG}(T) * T^6 + 1/14400 * \text{LOG}(T) * T^5 + 1/576 * \text{LOG}(T) * T^4 + 1/36$$

$$\quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 6$$

$$\quad * \text{LOG}(T) * T^3 + 1/4 * \text{LOG}(T) * T^2 + \text{LOG}(T) * T + \text{LOG}(T) - 49/5184000 * T$$

$$\quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2$$

$$\quad - 137/432000 * T^5 - 25/3456 * T^4 - 11/108 * T^3 - 3/4 * T^2 - 2 * T)$$

Time: 31467 ms

EXEMPLE 3

9: edol2();

** INTRODUCTION DES DONNEES **

L'equation est de la forme :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Donner les coefficients $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$.

9: -4; (x+1); x*(x+2);

$$a_0(x) = -4$$

$$a_1(x) = X + 1$$

$$a_2(x) = X*(X + 2)$$

correction ?(oui;/ non;)

9: non;

1: Etude des singularites a distance finie.

2: Etude du point a l'infini.

0: Etude en zero.

Votre choix : 1/2/0 ?

9: 1;

Nombre de termes desires pour les solutions?

9: 8;

**** EXECUTION ****

Les singularites a distance finie sont les racines de l'équation :

$$RO*(RO + 2) = 0.$$

Dans toute la suite la variable T est liee a la variable X par la relation :

$$T = X - RO.$$

Pour RO racine de l'equation :

$$RO*(RO + 2) = 0,$$

les developpements des solutions sont:

=====

SOLUTION1

=====

2

$$2*T + 4*T*RO + 4*T + 1$$

=====

SOLUTION2

=====

$$\begin{aligned} & \text{SQRT}(T) * (627/8388608 * T^8 - 51/262144 * T^7 * RO - 51/262144 * T^7 + 35/65536 * \\ & T^6 - 13/8192 * T^5 * RO - 13/8192 * T^5 + 11/2048 * T^4 - 3/128 * T^3 * RO - \\ & 3/128 * T^3 + 7/32 * T^2 + 5/4 * T * RO + 5/4 * T + 1) \end{aligned}$$

Time: 26690 ms

EXEMPLE 4

11: edol2();

** INTRODUCTION DES DONNEES **

L'equation est de la forme :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Donner les coefficients $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$.

11: 1-2*x;x**2*(1+x**2)**2;x**3*(1+x**2);

$$a_0(x) = - (2 * X - 1)$$

$$a_1(x) = X^2 * (X^4 + 2 * X^2 + 1)$$

$$a_2(x) = X^3 * (X^2 + 1)$$

correction ?(oui;/ non;)

11: non;

1: Etude des singularites a distance finie.

2: Etude du point a l'infini.

0: Etude en zero.

Votre choix : 1/2/0 ?

11: 1;

Nombre de termes desirés pour les solutions?

11: 5;

** EXECUTION **

Les singularités à distance finie sont les racines de l'équation :

$$RO^2 + RO + 1 = 0.$$

Dans toute la suite la variable T est liée à la variable X par la relation :

$$T = X - RO.$$

Pour RO racine de l'équation :

$$RO = 0,$$

les développements des solutions sont:

=====

SOLUTION1

=====

$$- E \frac{(2 \cdot I)}{\sqrt{T}} \left[(366885/524288 \sqrt{T})^2 T^2 + 713/512 \sqrt{T} T - \sqrt{T} + 28831723/41943040 I^3 T^3 - 1067/8192 I^2 T^2 - 31/16 I T \right]$$

=====

SOLUTION2

=====

$$- E \frac{(2 \cdot I)}{\sqrt{T}} \left[(366885/524288 \sqrt{T})^2 T^2 + 713/512 \sqrt{T} T - \sqrt{T} - 28831723/41943040 I^3 T^3 + 1067/8192 I^2 T^2 + 31/16 I T \right]$$

 Pour RO racine de l'équation :

$$RO^2 + 1 = 0,$$

les développements des solutions sont :

=====
 SOLUTION1
 =====

$$T^5 (116653/153600 * RO - 106031/102400 * T^5 + 3073/3840 * T^4 * RO + 817/1024 * T^4 - 139/192 * T^3 * RO + 229/384 * T^3 - 3/8 * T^2 * RO - 13/16 * T^2 + 1/2 * T * RO - 1/4 * T + 1)$$

=====
 SOLUTION2
 =====

$$6109/15360 * LOG(T) * T^5 * RO - 36839/30720 * LOG(T) * T^5 + 23/24 * LOG(T) * T^4 * RO + 109/256 * LOG(T) * T^4 - 5/8 * LOG(T) * T^3 * RO + 25/32 * LOG(T) * T^3 - 1/2 * LOG(T) * T^2 * RO - 3/8 * LOG(T) * T^2 + LOG(T) * T * RO - 1/2 * LOG(T) * T - 545647/230400 * T^5 * RO + 322269/921600 * T^5 - 43/16 * T^4 * RO - 19865/9216 * T^4 + 91/32 * T^3 * RO - 89/48 * T^3 + 5/4 * T^2 * RO + 23/16 * T^2 - 9/2 * T * RO + 1/2 * T + 1$$

Time: 219759 ms

Chapitre 2

Algorithme de Newton rationnel pour le calcul des solutions formelles d'une équation différentielle linéaire en un point singulier irrégulier

Introduction

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0 \quad (0.1)$$

où les a_i sont des séries formelles à coefficients dans \mathbb{Q} . On suppose que l'origine est un point singulier de cette équation. On sait qu'elle admet n solutions formelles linéairement indépendantes, chacune d'elles s'écrivant :

$$y(t) = e^{Q(1/t)} t^\rho \phi(t) \quad (0.2)$$

avec $x = t^r$, r entier strictement positif, $\rho \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{A}[t]$ et $\phi \in \mathcal{A}[[t]][\log t]$ (\mathcal{A} désigne une clôture algébrique de \mathbb{Q} contenue dans \mathbb{C}).

Il existe un algorithme, dit algorithme de Newton, qui permet de construire ces solutions. Cet algorithme a été étudié, dans une série de rapports et d'articles (1981-1987), par J.Della Dora et E.Tournier [De – To 1], [De – To 2]. Il a été implanté, sur le système de calcul formel REDUCE, par E.Tournier [To].

En étudiant l'algorithme de Newton nous avons remarqué que:

- 1) les solutions calculées par cet algorithme peuvent être regroupées en plusieurs classes d'équivalence.
- 2) les éléments d'une même classe peuvent être calculés simultanément.

Ces remarques nous ont conduit à écrire un nouvel algorithme, appelé algorithme de Newton

rationnel, qui repose sur les mêmes principes que l'algorithme de Newton et qui permet le calcul simultané des solutions équivalentes. Ce travail s'inspire de celui de D. Duval sur les développements de Puiseux rationnels [Du D.].

Exemple Considérons l'équation différentielle d'ordre six

$$D(y) = x^9 y^{(6)} - 3x^6 y^{(4)} + 3x^3 y'' - y = 0,$$

Les six solutions formelles de l'équation $D(y) = 0$ calculées par l'algorithme de Newton sont:

$$y_1 = e^{2\sqrt{x}} x^{37/12} \left\{ 1 + \frac{935}{3888} \sqrt{x} + \dots \right\}$$

$$y_2 = e^{-2\sqrt{x}} x^{37/12} \left\{ 1 - \frac{935}{3888} \sqrt{x} + \dots \right\}$$

$$y_3 = e^{2\sqrt{x} + 6i\sqrt{2}/x^{1/4}} x^{89/24} \left\{ 1 + \frac{449 i\sqrt{2}}{288} x^{1/4} + \dots \right\}$$

$$y_4 = e^{2\sqrt{x} - 6i\sqrt{2}/x^{1/4}} x^{89/24} \left\{ 1 - \frac{449 i\sqrt{2}}{288} x^{1/4} + \dots \right\}$$

$$y_5 = e^{-2\sqrt{x} + 6\sqrt{2}/x^{1/4}} x^{89/24} \left\{ 1 - \frac{449 \sqrt{2}}{288} x^{1/4} + \dots \right\}$$

$$y_6 = e^{-2\sqrt{x} - 6\sqrt{2}/x^{1/4}} x^{89/24} \left\{ 1 + \frac{449 \sqrt{2}}{288} x^{1/4} + \dots \right\}$$

Ces solutions se regroupent en deux classes: $C_1 = \{ y_1, y_2 \}$ et $C_2 = \{ y_3, y_4, y_5, y_6 \}$.

Les solutions formelles généralisées données par l'algorithme de Newton rationnel sont

$$(x(t) = 4t^2, Y_1(t) = e^{1/t} t^{37/6} \left\{ 1 + \frac{935}{1944} t + \dots \right\})$$

qui représente les solutions de la classe C_1 , et

$$(x(t) = 5184 t^4, Y_2(t) = e^{-1/36t^2 + 1/t} t^{89/6} \left\{ 1 + \frac{449}{12} t + \dots \right\})$$

qui représente les solutions de la classe C_2 .

Dans ce chapitre nous définissons les solutions formelles généralisées et nous décrivons l'algorithme qui permet de les calculer. Nous montrons ensuite comment on peut reconstruire les solutions formelles classiques à partir de ces solutions formelles généralisées.

Notations. Soit K un corps, ($K = \mathbb{Q}$ ou \mathcal{K}), on notera :

$K[[x]]$ l'algèbre des séries formelles à une indéterminée sur K ,

$K((x)) (= K[[x]] [x^{-1}])$ le corps des séries formelles méromorphes à une indéterminée sur K ,

$\partial = d/dx$ la dérivation habituelle sur $K((x))$, définie par $\partial(x) = 1$, $\partial(x^{-1}) = -x^{-2}$,

$K((x))[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $K((x))$, i.e. l'ensemble des sommes finies $D = \sum a_i \partial^i$ ($a_i \in K((x))$) muni de l'addition évidente et de la multiplication définie par $\partial^i \partial^j = \partial^{i+j}$, $\partial.f = f\partial + \partial(f)$.

Pour $f = \sum \alpha_j x^j$, ($f \in K((x))$), on posera $v(f) = \inf \{ j \mid \alpha_j \neq 0 \}$. L'entier $v(f)$ est appelé valuation de f .

1. Algorithme de Newton classique - Rappels.

Nous nous contentons ici de rappeler quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Pour une étude détaillée de l'algorithme de Newton nous renvoyons à la thèse de E.Tournier [To].

1.1. Polynôme caractéristique.

Considérons l'opérateur différentiel D associé à l'équation (0.1) :

$$D = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (1.1)$$

Nous conviendrons de noter (lorsque $a_i(x) \neq 0$) :

$$a_i(x) = a_i^* x^{m_i} + \dots$$

où m_i est la valuation de a_i et a_i^* est le coefficient (non nul) de x^{m_i} dans $a_i(x)$ (les pointillés représentant des termes de degré plus élevé).

Nous noterons $N(D)$ le polygone de Newton de l'opérateur D défini ici comme étant

l'enveloppe convexe à pentes positives ou nulles de l'ensemble des points (i, ω_i) , $0 \leq i \leq n$
où $\omega_i = m_i - i$.

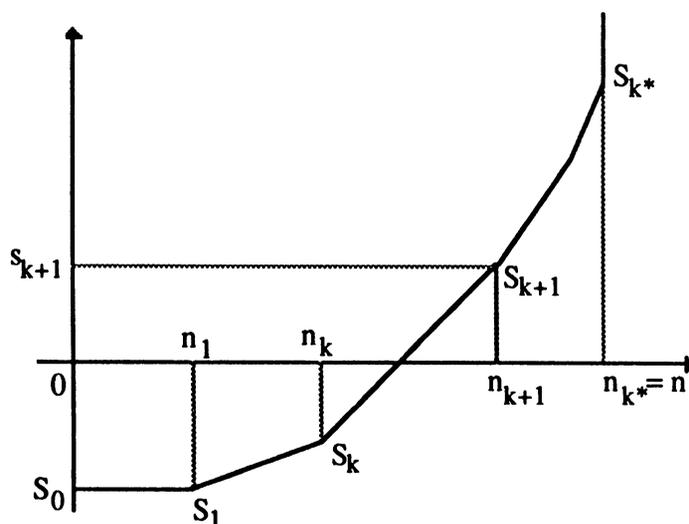


fig. 1

Le polygone de Newton $N(D)$ se décrit par la suite des sommets :

$$S_0 = (n_0, s_0), S_1 = (n_1, s_1), \dots, S_{k^*} = (n_{k^*}, s_{k^*}).$$

avec $n_0 = 0$, $n_{k^*} = n = \text{ordre de } D$ et $s_k = \omega_{n_k}$ pour $k = 0, 1, \dots, k^*$.

On a les inégalités

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k^*} = n, \\ s_0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{k^*}.$$

On a la suite des pentes

$$\lambda_0 = \frac{s_1 - s_0}{n_1 - n_0} < \lambda_1 = \frac{s_2 - s_1}{n_2 - n_1} < \dots < \lambda_{k^*-1} = \frac{s_{k^*} - s_{k^*-1}}{n_{k^*} - n_{k^*-1}}$$

et des arêtes associées $A_0 = [S_0, S_1], \dots, A_{k^*-1} = [S_{k^*-1}, S_{k^*}]$.

L'arête A_k a une projection sur l'axe des abscisses de longueur $l_k = n_{k+1} - n_k$.
On appellera l_k la *longueur* de l'arête A_k .

Naturellement nous avons :

$$l_0 + l_1 + \dots + l_{k^*-1} = n \quad (1.2)$$

Soit A_k une arête du polygone $N(D)$, de pente λ_k strictement positive :

$$\lambda_k = \frac{s_{k+1} - s_k}{n_{k+1} - n_k}.$$

Notons

$$\eta_k = \min_{0 \leq i \leq n} \{ \omega_i - i\lambda_k \},$$

$$M_k = \{ i \mid 0 \leq i \leq n \text{ et } \omega_i - i\lambda_k = \eta_k \}.$$

Nous avons

$$M_k = \{ i_0(k), i_1(k), \dots, i_{J_k}(k) \}$$

avec $n_k = i_0(k) < i_1(k) < \dots < i_{J_k}(k) = n_{k+1}$ et $1 \leq J_k \leq l_k$.

Nous allons maintenant étudier l'arête A_k , et pour simplifier les notations nous omettrons l'indice k lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Les points (i_j, ω_{i_j}) sont sur l'arête A_k , et vérifient

$$\lambda = \frac{\omega_{i_j} - \omega_{i_0}}{i_j - i_0} \quad (1.3)$$

On en déduit que si $\lambda = p/q$, avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$, alors $i_j - i_0$ est divisible par q .

Posons

$$d_j = \frac{i_j - i_0}{q} \quad (1.4)$$

pour $j = 0, 1, \dots, J$.

En particulier

$$d_J = \frac{l}{q}.$$

Définition. Le *polynôme caractéristique* associé à l'arête A_k est par définition

$$P_k(T) = a_{i_0}^* + a_{i_1}^* T^{qd_1} + \dots + a_{i_J}^* T^{qd_J} \quad (1.5)$$

c'est un polynôme en T (de degré l) et plus précisément un polynôme en T^q .

L'équation $P_k(T) = 0$, s'appelle *l'équation caractéristique* (ou *déterminante*) associée à l'arête A_k .

Soit a un nombre complexe non nul. Considérons l'opérateur D_1 obtenu en faisant, dans l'équation (0.1), le changement de fonction inconnue

$$y = \exp\left(\frac{-a}{\lambda x^\lambda}\right) z, \quad (1.6)$$

ce qui revient à remplacer (dans D) (d/dx) par $(d/dx + a/x^{\lambda+1})$.

Notons

$$D_1 = \sum_{j=0}^n b_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$$

Si l'on pose :

$$e_j = j + \text{Min}_{j \leq i \leq n} \{ m_i - i - \lambda(i-j) \}$$

alors

$$b_j(x) = b_j^* x^{e_j} + \dots$$

(les pointillés représentant des termes de degré plus élevé).

On a

$$b_0^* = a_{i_0}^* a^{i_0} + a_{i_1}^* a^{i_1} + \dots + a_{i_j}^* a^{i_j} = a^{i_0} P_k(a) \quad (1.7)$$

de sorte que b_0^* est nul si et seulement si a est une racine de $P_k(T)$.

Définissons le polynôme (de degré $i_j = n_{k+1}$) :

$$f(T) = \sum_{i \in M} a_i^* T^i = T^{i_0} P_k(T)$$

de sorte que

$$b_0^* = f(a).$$

De manière générale on a :

Lemme [To] : Pour $0 \leq j \leq n_{k+1}$ on a :

$$b_j^* = \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dT^j} (a). \quad (1.8)$$

La propriété (1.8) permet d'établir les résultats suivants:

1) Lorsque a n'est pas racine du polynôme caractéristique $P_k(T)$, le polygone de Newton de D_1 coïncide avec la droite d'équation $y = \lambda_k(x - n_k) + s_k$ sur le segment $[0, n_{k+1}]$ et avec $N(D)$ sur $[n_{k+1}, n]$. Ce polygone $N_0(D_1)$ a la forme suivante :

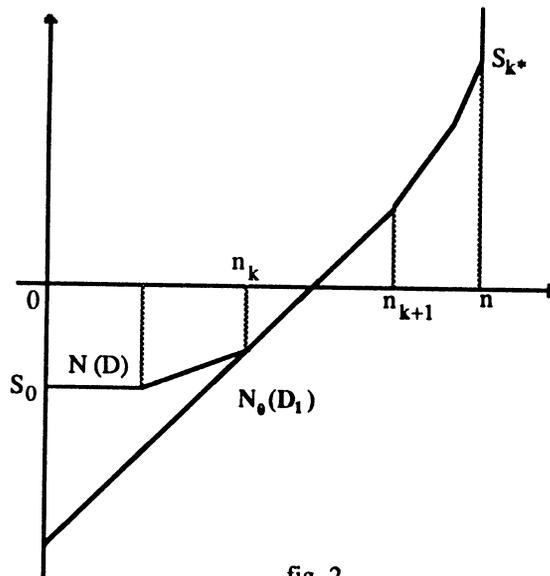


fig. 2

2) Lorsque a est racine $P_k(T)$, de multiplicité $m(a)$, le polygone de Newton de D_1 coïncide avec $N_0(D_1)$ sur le segment $[m(a), n]$, et est au-dessus de $N_0(D_1)$ sur $[0, m(a)]$.

1.2. Formation des solutions formelles.

Soit A_k une arête de $N(D)$ de pente strictement positive λ_k . A l'arête A_k correspondent l_k solutions formelles y_1, y_2, \dots, y_{l_k} chacune d'elles s'écrivant :

$$y_i(t) = e^{Q_i(1/t)} t^{\rho_i} \phi_i(t),$$

avec $x = t^{r_i}$, r_i étant un entier strictement positif appelé *ramification* de y_i , $\rho_i \in \mathfrak{A}$, $Q_i(1/t) \in \mathfrak{A}[1/t]$ (avec degré de $Q_i = \lambda_k r_i$) et $\phi_i \in \mathfrak{A}[[t]][\log t]$.

Pour calculer ces solutions formelles, on procède de la façon suivante [To] :
 On calcule d'abord un par un les coefficients du polynôme Q_i , en commençant par le coefficient de tête. Pour cela, on forme le polynôme caractéristique associé à A_k , on calcule a , racine de ce polynôme (a sera le coefficient du terme du plus haut degré de Q_i) et on construit l'opérateur $D_1 = D(\lambda_k, a)$. D'après ce qui précède, les pentes du polygone de Newton $N(D_1)$ sur le segment $[0, m(a)]$ sont inférieures strictement à λ_k ($m(a)$ étant l'ordre de multiplicité de la racine a). Pour déterminer le coefficient suivant de Q_i , on choisit l'une des arêtes de $N(D_1)$ sur $[0, m(a)]$, et on applique à nouveau le processus qu'on vient de décrire. On itère ce processus jusqu'à trouver un opérateur dont le polygone de Newton possède un côté de pente nulle de longueur ≥ 1 (ce qui se fait en un nombre fini d'itérations). On peut alors appliquer la méthode de Frobenius [Fr], [In] pour calculer ρ_i et ϕ_i .

Remarque 1. Si K désigne l'extension de \mathbb{Q} engendrée par les coefficients du polynôme Q_i et par le nombre algébrique ρ_i alors $\phi_i \in K[[t]][\log t]$. On appellera K le *corps des coefficients* de y_i . C'est une extension algébrique de degré fini de \mathbb{Q} .

2. Solutions formelles équivalentes

Soit A_k une arête de $N(D)$ de pente strictement positive λ_k . On suppose que $\lambda_k = p/q$, p et q étant premiers entre eux. Ici encore, puisque l'indice k est fixé, nous l'omettrons en général.

Nous avons vu que le polynôme caractéristique associé à l'arête A_k s'écrivait

$$P_k(T) = a_{i_0}^* + a_{i_1}^* T^{qd_1} + \dots + a_{i_j}^* T^{qd_j}.$$

Si on pose $U = T^q$, on obtient un nouveau polynôme (en U)

$$R_k(U) = a_{i_0}^* + a_{i_1}^* U^{d_1} + \dots + a_{i_j}^* U^{d_j}, \quad (2.1)$$

c'est un polynôme de degré $d_j = l/q$. On l'appellera le *polynôme caractéristique réduit* associé à l'arête A_k (ou à la pente λ_k).

A chaque racine b de $R_k(U)$, correspond un "paquet" de q racines de $P_k(T)$. Ces racines ont le même module $|b|^{1/q}$ et ont évidemment une même multiplicité égale à la multiplicité de b .

Notons \mathcal{S}_k l'ensemble des solutions formelles de D , associées à l'arête A_k , calculées par l'algorithme de Newton.

Soient a une racine du polynôme caractéristique $P_k(T)$, et y un élément de \mathcal{S}_k :

$$y(t) = e^{Q(1/t)} t^p \phi(t), \quad (x = t^r). \quad (2.2)$$

On dira que y est *associée* à a si le coefficient du terme du plus haut degré de Q est $(-a/\lambda)$, i.e. si $Q(1/t)$ s'écrit :

$$Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{-a}{\lambda t^r \lambda} + \dots$$

Si y est associée à a et si $b = a^q$, on dira aussi que y est *associée* à b .

Une étude soigneuse de l'algorithme permet de démontrer le résultat suivant [To]:

Lemme: Le nombre de solutions formelles de l'équation différentielle $D(y) = 0$ associées à une racine a de $P_k(T)$ est égal à la multiplicité de a en tant que racine de $P_k(T)$.

Par suite, le nombre de solutions formelles associées à b ($b = a^q$) est $qm(b)$, où $m(b)$ est la multiplicité de b en tant que racine de $R_k(U)$.

Soit ξ une racine de l'unité d'ordre r , on définit y^ξ par

$$y^\xi(t) = e^{Q(1/(\xi t))} t^p \phi^\xi(t), \quad (2.3)$$

où $\phi^\xi(t)$ est obtenue en remplaçant, dans toutes les séries qui apparaissent dans $\phi(t)$, t par ξt .

Remarquons que dans le cas où $\phi(t)$ ne comporte pas de terme logarithmique, on a

$$y^\xi(t) = \xi^{-p} y(\xi t).$$

Nous avons la proposition suivante (voir corollaire A.1 de l' appendice A):

Proposition 2.1. Si y appartient à \mathcal{S}_k alors $y^\xi, y^{\xi^2}, \dots, y^{\xi^{r-1}}$ sont aussi dans \mathcal{S}_k .

Par définition, on dira que ces solutions formelles sont *équivalentes*.

Remarquons que, si y est associée à une racine a du polynôme caractéristique P_k , alors y^ξ est associée à $a \cdot \xi^{-r\lambda_k}$ et puisque $(a \cdot \xi^{-pr/q})^q = a^q$, cela montre que y et y^ξ sont associées à une même racine du polynôme $R_k(U)$.

Soit b une racine de $R_k(U)$. On note $\mathcal{F}_{k,b}$ le sous ensemble de \mathcal{F}_k contenant les solutions formelles associées à b . En regroupant les solutions formelles équivalentes, on obtient une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}_{k,b}$. On en déduit une partition de $\mathcal{F}_{k,b}$ en classes d'équivalence

$$\mathcal{F}_{k,b} = C_{k,b,1} \cup C_{k,b,2} \cup \dots \cup C_{k,b,h_b}$$

Les éléments d'une même classe $C_{k,b,i}$ ayant même ramification $r_{k,b,i}$ et on a

$$\text{cardinal}(C_{k,b,i}) = r_{k,b,i} \cdot$$

Si $m(b)$ désigne la multiplicité de b alors

$$\sum_{i=0}^{h_b} r_{k,b,i} = \text{cardinal}(\mathcal{F}_{k,b}) = qm(b). \quad (2.4)$$

Si on note $Z(k)$ l'ensemble des racines distinctes de $R_k(U)$, on a

$$\sum_{b \in Z(k)} \sum_{i=0}^{h_b} r_{k,b,i} = \sum_{b \in Z(k)} qm(b) = q \frac{l_k}{q} = l_k. \quad (2.5)$$

Soit \mathcal{F} le système fondamental des solutions formelles de l'opérateur D , calculées par l'algorithme de Newton. En regroupant les solutions formelles équivalentes, on obtient une partition de \mathcal{F} en un nombre fini h ($1 \leq h \leq n$) de classes d'équivalence

$$\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_h$$

d'après les relations (2.5) et (1.2) on voit que

$$\sum_{i=1}^h r_i = n \quad (2.6)$$

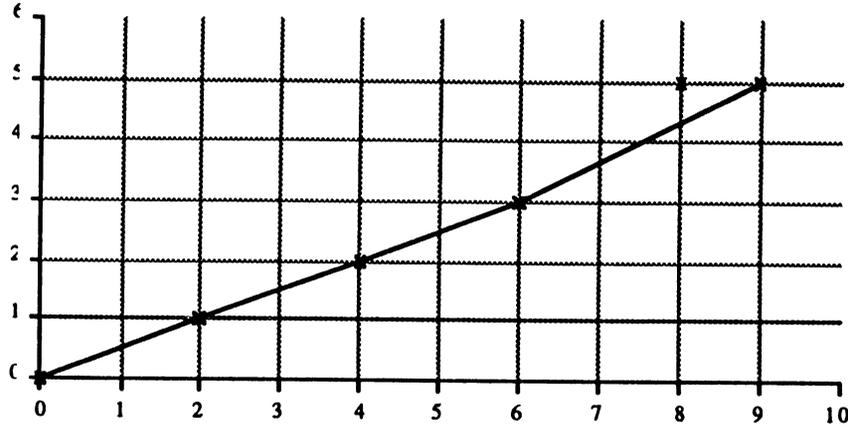
où r_i désigne l'indice de ramification des éléments de la classe C_i .

Exemple 2.1. Considérons l'équation différentielle d'ordre neuf

$$D(y) = x^{14} y^{(9)} - x^{13} y^{(8)} + x^9 y^{(6)} + 5x^6 y^{(4)} + 8x^3 y'' + 4y = 0,$$

Le polygone de Newton de D possède deux côtés de longueurs respectives 6 et 3 et de

pentres respectives $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_2 = 2/3$:



Le polynôme caractéristique associé à λ_1 est : $P_1(T) = 4 + 8T^2 + 5T^4 + T^6$. Le polynôme caractéristique réduit correspondant est : $R_1(U) = 4 + 8U + 5U^2 + U^3 = (U+1)(U+2)^2$.

Le polynôme caractéristique associé à λ_2 est : $P_2(T) = 1 + T^3$. Le polynôme caractéristique réduit correspondant est : $R_2(U) = 1 + U$.

Les neuf solutions formelles de D calculées par l'algorithme de Newton sont :

$$y_1(x) = \exp\left(\frac{-2i}{x^{1/2}}\right) x^{-9/4} \left(1 - \frac{1075}{16} i x^{1/2} + \dots\right),$$

$$y_2(x) = \exp\left(\frac{2i}{x^{1/2}}\right) x^{-9/4} \left(1 + \frac{1075}{16} i x^{1/2} + \dots\right),$$

$$y_k(x) = \exp\left(\frac{-2i\sqrt{2}}{\xi_k^2 x^{1/2}} - \frac{4}{\alpha \xi_k x^{1/4}}\right) x^{-13/8} \left(1 + \frac{1753}{32} \alpha \xi_k x^{1/4} + \dots\right),$$

où $\alpha = 3^{-1/2} 2^{1/4} e^{i\pi/4}$ et $\xi_k = e^{i2\pi\sigma(k)/4}$ avec $\sigma(k) = k-3$ pour $k = 3,4,5,6$,
et

$$y_k(x) = \exp\left(\frac{3}{\zeta_k^2 x^{2/3}} + \frac{5}{\zeta_k x^{1/3}}\right) x^{32/3} \left(1 - \frac{3583}{27} \zeta_k x^{1/3} + \dots\right),$$

où $\zeta_k = e^{i2\pi\sigma(k)/3}$ avec $\sigma(k) = k-7$ pour $k = 7,8,9$.

Ces solutions formelles se regroupent en trois classes d'équivalences :

$$C_1 = \{y_1, y_2\}, C_2 = \{y_3, y_4, y_5, y_6\} \text{ et } C_3 = \{y_7, y_8, y_9\}.$$

Les éléments de la classe C_1 sont associés à la racine -1 de $R_1(U)$, ont une ramification r_1 égale à 2, et un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(i)$.

Les éléments de la classe C_2 sont associés à la racine -2 de $R_1(U)$, ont une ramification r_2 égale 4, et un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(\alpha e^{i2\pi/4})$.

Les éléments de la classe C_3 sont associés à la racine -1 de $R_2(U)$, ont une ramification r_3 égale 3 et un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(e^{i2\pi/3})$.

On constate que $r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 4 + 3 = 9$ (cf. (2.6)).

Remarque 2. Les éléments de \mathcal{P}_k peuvent être rassemblés en plusieurs groupes possédant le même facteur $e^{Q(1/t)}$. A l'intérieur d'un tel groupe on ordonne les éléments de même manière que dans l'algorithme de Frobenius [In], c'est à dire :

$$\begin{aligned} & e^{Q(1/t)} W_0(t), \\ & e^{Q(1/t)} W_1(t), \\ & \dots \\ & e^{Q(1/t)} W_{\alpha-1}(t), \end{aligned}$$

avec $W_i(t) = t^{\rho_i} \{ w_{i,0}(t)\text{Log}^i(t) + \dots + w_{i,i-1}(t)\text{Log}(t) + w_{i,i}(t) \}$ ($x = t^r$)

où $\rho_i \in \mathbb{C}$ (les ρ_i sont des nombres algébriques sur \mathbb{Q} vérifiant $\rho_0 - \rho_i \in \mathbb{N}$), et les $w_{i,j}$ sont des séries formelles à coefficients algébriques sur \mathbb{Q} . De plus, ces séries vérifient la propriété suivante:

(P) Pour tout i' et pour tout $j' \leq i' - 1$: $w_{i',j'}$ est combinaison linéaire des séries $w_{i,j}$ telles que $0 \leq i \leq i' - 1$ et $0 \leq j \leq i' - 1$.

On appellera un tel groupe un *groupe logarithmique*.

Remarquons que les éléments d'un même groupe logarithmique ont la même ramification et sont associés à la même racine de l'équation caractéristique.

D'après la propriété (P), il est facile de voir que si $y = y_i$ appartient à un groupe logarithmique $\{y_0, y_1, \dots, y_{\alpha-1}\}$ alors

$$y_i(\xi t) = \xi^{\rho_i} y_i^\xi(t) + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j y_j^\xi(t)$$

(où les $\beta_j \in \mathbb{C}$).

Donc, si on remplace dans \mathcal{P} , chaque classe d'équivalence $C_i = \{ y(t), y^\xi(t), \dots, y^{\xi^{r_i-1}}(t) \}$

par l'ensemble $C_i = \{y(t), y(\xi t), y(\xi^2 t), \dots, y(\xi^{r_i-1} t)\}$, on obtient un autre système fondamental de solutions formelles de D (noté \mathcal{P}'). Il faut remarquer que les coefficients des séries qui apparaissent dans ces solutions formelles risquent de ne plus être algébriques.

3. Solutions formelles généralisées - Système de solutions formelles rationnelles.

Avant de donner la définition des solutions formelles généralisées, nous introduisons le lemme suivant:

Lemme 3.1. Soit $x = \Lambda t^r$ avec $\Lambda \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$ alors, pour $i = 1, 2, \dots$, on a

$$x^i \frac{d^i}{dx^i} = \frac{1}{r^i} \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}^{(r)} t^j \frac{d^j}{dt^j},$$

où les $\gamma_{ij}^{(r)}$ sont les nombres rationnels (dépendant uniquement de r) définis pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$ par :

$$\begin{cases} \gamma_{ii}^{(r)} = 1, \text{ pour } i \geq 0, \\ \gamma_{i0}^{(r)} = \gamma_{0i}^{(r)} = 0, \text{ pour } i > 0, \\ \gamma_{ij}^{(r)} = (j - (i-1)r) \gamma_{i-1,j}^{(r)} + \gamma_{i-1,j-1}^{(r)}, \text{ pour } 1 \leq j \leq i-1, \\ \gamma_{ij}^{(r)} = 0, \text{ pour } j > i. \end{cases} \quad (3.1)$$

La démonstration de ce lemme se fait par récurrence.

Considérons maintenant l'opérateur D donné par (1.1). Si on effectue le changement de variable $x = \Lambda t^r$, on obtient un nouvel opérateur (en t et d/dt) que l'on note $D_{\Lambda,r}$

$$D_{\Lambda,r} = \sum_{i=0}^n a_{\Lambda,r,i}(t) \frac{d^i}{dt^i} \quad (3.2)$$

où

$$a_{\Lambda,r,i}(t) = t^i \sum_{j=i}^n \frac{\gamma_{ji}^{(r)}}{r^j} (\Lambda t^r)^{-j} a_j(\Lambda t^r) \quad (3.3)$$

l'expression (3.3) découle du lemme précédent.

Définition.

Une *solution formelle généralisée* de l'équation différentielle $Dy = 0$, est une paire $(x(t), y(t))$ d'expressions de la forme:

$$\cdot x(t) = \Lambda t^r \quad \text{avec } \Lambda \in \mathfrak{A} \text{ (} \Lambda \text{ non nul) et } r \in \mathbb{N}^*$$

$$\cdot y(t) = e^{Q(\frac{1}{t})} t^\rho \phi(t) \quad \text{avec } Q(\frac{1}{t}) \in \frac{1}{t} \mathfrak{A}[\frac{1}{t}], \rho \in \mathfrak{A} \text{ et } \phi \in \mathfrak{A}[[t]][\text{Log}t],$$

. il est impossible d'écrire $y(t) = z(t^k)$ pour une expression z de la même forme que y , et k entier strictement supérieur à 1 (autrement dit, l'entier r est minimal).

. et $D_{\Lambda,r}(y(t)) = 0$. (autrement dit, $y(t)$ est solution formelle, au sens classique, de l'opérateur $D_{\Lambda,r}$ donné par (3.2)).

On appelle *corps des coefficients* de $(x(t), y(t))$ l'extension de \mathbb{Q} engendrée par Λ , ρ et par les coefficients de Q et des séries qui interviennent dans $\phi(t)$.

On verra que les solutions formelles généralisées fournies par l'algorithme de Newton rationnel (cf. §4) ont un corps des coefficients de degré fini sur \mathbb{Q} , et engendré par Λ , ρ et les coefficients de Q .

Soit $(x(t) = \Lambda t^r, y(t))$ une solution formelle généralisée de D , soit $\Lambda^{-1/r}$ une racine d'ordre r de Λ^{-1} dans \mathfrak{A} et ξ une racine de l'unité d'ordre r dans \mathfrak{A} , alors pour $0 \leq i \leq r-1$ l'expression $y_i(x) = y(\xi^i \Lambda^{-1/r} x^{1/r})$ est une solution formelle de D (au sens classique). Réciproquement toute solution formelle $y(x^{1/r})$ correspond à une solution formelle généralisée $(t^r, y(t))$, avec $\Lambda = 1$.

Considérons maintenant un ensemble fini de solutions formelles généralisées de D :

$$\mathfrak{E} = \{ (x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t)), \dots, (x_h(t), y_h(t)) \}.$$

Pour tout j de 1 à h , notons:

$$x_j(t) = \Lambda_j t^{r_j}$$

$$y_j(t) = e^{Q_j(1/t)} t^{\rho_j} \phi_j(t)$$

ξ_j = une racine de l'unité d'ordre r_j dans \mathfrak{A}

Λ_j^{-1/r_j} = une racine de Λ_j^{-1} d'ordre r_j dans \mathfrak{A} .

$$\Lambda_{ji} = \xi_j^i \Lambda_j^{1/r_j} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq r_j - 1$$

$$y_{ji}(t) = e^{Q_j\left(\frac{1}{\Lambda_{ji}t}\right) t^{\rho_j}} \phi_{ji}(t) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq r_j - 1,$$

où $\phi_{ji}(t)$ est obtenu en remplaçant t par $\Lambda_{ji}t$ dans toutes les séries qui apparaissent dans ϕ_j .

Définition. \mathfrak{X} est un *système de solutions formelles rationnelles* de D s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(i) Les expressions $\{ y_{ji}(x^{1/r_j}) \}$, pour $1 \leq j \leq h$ et $0 \leq i \leq r_j - 1$, forment n solutions linéairement indépendantes de D .

(ii) L'ensemble \mathfrak{X} est globalement stable sous l'action du groupe de Galois de \mathfrak{A}/\mathbb{Q} , ce qui signifie que pour toute paire $(x_j(t), y_j(t)) \in \mathfrak{X}$, et tout \mathbb{Q} -automorphisme σ de \mathfrak{A} , si $Q_{j,\sigma}(1/t)$ (resp. $\phi_{j,\sigma}(t)$) est obtenu en appliquant σ à tous les coefficients de $Q_j(1/t)$ (resp. à toutes les séries formelles qui apparaissent dans $\phi_j(t)$), alors la paire $(\sigma(\Lambda_j)t^{r_j}, e^{Q_{j,\sigma}(1/t) t^{\sigma(\rho_j)}} \phi_{j,\sigma}(t))$ est aussi dans \mathfrak{X} .

Nous allons prouver l'existence de systèmes de solutions formelles rationnelles de D , en décrivant un algorithme pour leur calcul.

Commençons par quelques propriétés de ces systèmes, qui se déduisent immédiatement de leur définition:

$$. 1 \leq h \leq n, \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^h r_j = n$$

. Si h^* désigne le nombre de classes de conjugaison dans \mathfrak{X} sous l'action du groupe de Galois de \mathfrak{A}/\mathbb{Q} , et si les éléments de \mathfrak{X} sont rangés de sorte que les $(x_j(t), y_j(t))$, $1 \leq j \leq h^*$, soient 2 à 2 non conjugués sur \mathbb{Q} , alors:

$$\sum_{j=1}^{h^*} r_j f_j = n$$

où f_j désigne le degré du corps des coefficients de $(x_j(t), y_j(t))$ comme extension de \mathbb{Q} .

4 Algorithme de Newton rationnel

Nous allons décrire une méthode, que nous appelons *algorithme de Newton rationnel*, qui permet de construire un ensemble fini de solutions formelles généralisées de D :

$$\{ (x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t)), \dots, (x_h(t), y_h(t)) \}$$

Nous montrerons, ensuite, que ces solutions forment un système de solutions formelles rationnelles, et nous indiquerons comment, à partir de ce système, on peut retrouver le système fondamental de solutions formelles de D donné par l'algorithme de Newton classique.

4.1. Polynôme caractéristique réduit.

Considérons une arête A_k de $N(D)$, de pente strictement positive $\lambda_k = p/q$, p et q étant premiers entre eux (on garde les notations du paragraphe 1). Ici encore, puisque l'indice k est fixé, nous l'omettrons lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soient u et v deux entiers vérifiant

$$up + vq = 1 \quad (4.1)$$

(si $q = 1$ on prend $(u,v) = (0,1)$).

Au lieu de faire le changement de variable classique (1.6) (cf § 1.1), on procède en deux étapes:

Etape1 On effectue le changement de variable $x = b^u t^q$, où b est un nombre complexe non nul à déterminer, l'opérateur D se transforme en l'opérateur :

$$D_{b^u, q} = \sum_{i=0}^n a_{b^u, q, i}(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

que l'on note pour simplifier :

$$\Delta = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) \frac{d^i}{dt^i} \quad (4.2)$$

avec (d'après (3.3)) :

$$\alpha_i(t) = t^i \sum_{j=i}^n \frac{\gamma_{ji}^{(q)}}{q^j} (b^u t^q)^{-j} a_j(b^u t^q). \quad (4.3)$$

Si l'on note μ_j la valuation de $\alpha_j(t)$ alors (d'après (4.3))

$$\mu_i - i \geq q \min_{j \geq i} \omega_j .$$

Pour i allant de 0 à n nous noterons (lorsque $\alpha_i(t) \neq 0$)

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^* t^{\mu_i} + \dots$$

les pointillés représentant des termes de degré plus élevé.

Examinons de près les exposants μ_i . Pour tout $i \in [0, n]$, il existe un $k_i \in [0, k^*-1]$ tel que $i \in [n_{k_i}, n_{k_i+1}]$. Notons i^* le plus grand entier appartenant à M_{k_i} tel que $i^* \leq i$ (pour les notations voir §1). Pour tout $j \geq i^*$ on a

$$\omega_j \geq \omega_{i^*} + \lambda_{n_{k_i}} (j - i^*),$$

et donc

$$\mu_i - i \geq q\omega_{i^*} + q\lambda_{n_{k_i}} (i - i^*). \quad (4.4)$$

En particulier si $i \in M_{k_i}$ (dans ce cas $i^* = i$) alors

$$\mu_i - i = q\omega_i, \quad (4.5)$$

et

$$\alpha_i^* = b^{u\omega_i} \frac{a_i^*}{q^i} \quad (4.6)$$

Des relations (4.4) et (4.5) découle le lemme suivant

Lemme 4.1. Le polygone de newton de l'opérateur Δ se déduit de celui de D par l'affinité $(i,j) \rightarrow (i, qj)$.

Etape 2 On effectue, dans l'équation $\Delta(y) = 0$, (Δ donné par (4.2)) le changement de fonction inconnue

$$y = \exp\left(\frac{-qb^v}{pt^p}\right) z, \quad (4.7)$$

on obtient alors un nouvel opérateur

$$\Delta(\lambda, b) = \Delta_1 = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) \left(\frac{d}{dt} + \frac{qb^v}{t^{p+1}} \right)^i, \quad (4.8)$$

qui s'écrit

$$\Delta_1 = \sum_{i=0}^n \beta_i(t) \frac{d^i}{dt^i}, \quad (4.9)$$

avec

$$\beta_i(t) = \alpha_i(t) + C_{i+1}^i \frac{qb^v}{t^{p+1}} \alpha_{i+1}(t) + \dots + C_n^i \left\{ \frac{(qb^v)^{(n-i)}}{t^{(p+1)(n-i)}} + \dots \right\} \alpha_n(t),$$

qui s'écrit sous la forme

$$\beta_i(t) = \{ \alpha_i^* t^{\mu_i} + \dots \} + C_{i+1}^i \frac{qb^v}{t^{p+1}} \{ \alpha_{i+1}^* t^{\mu_{i+1}} + \dots \} + \dots + C_n^i \left\{ \frac{(qb^v)^{(n-i)}}{t^{(p+1)(n-i)}} + \dots \right\} \{ \alpha_n^* t^{\mu_n} + \dots \},$$

pour $i = 0, 1, \dots, n$.

En particulier, on a

$$\beta_0(t) = \{ \alpha_0^* t^{\mu_0} + \dots \} + \frac{qb^v}{t^{p+1}} \{ \alpha_1^* t^{\mu_1} + \dots \} + \dots + \left\{ \frac{(qb^v)^{vn}}{t^{(p+1)n}} + \dots \right\} \{ \alpha_n^* t^{\mu_n} + \dots \}.$$

Considérons maintenant les coefficients $\beta_i(t)$. Pour tout i de 0 à n , nous noterons

$$\beta_i(t) = \beta_i^* t^{\varepsilon_i} + \dots$$

les pointillés représentant des termes de degré plus élevé.

D'après l'expression de $\beta_i(t)$, on voit que

$$\varepsilon_i - i = \min_{i \leq j \leq n} \{ \mu_j - j - p(j-i) \}.$$

Soit $0 \leq i \leq i_j = n_{k+1}$, il est clair que $\varepsilon_i = \min \{ \mu_j - (p+1)(j-i), i \leq j \leq n \}$ est atteint aux points $n_k \leq i_{s_i}, i_{s_i+1}, \dots, i_j = n_{k+1}$, où s_i désigne le plus petit entier s tel que $i \leq i_s$. On en déduit que pour tout $i \leq n_{k+1}$, on a :

$$\beta_i^* = \sum_{j=s_i}^J C_{i_j}^i (qb^v)^{j-i} \alpha_{i_j}^*$$

En particulier on a

$$\beta_0^* = \alpha_{i_0}^* (qb^v)^{i_0} + \alpha_{i_1}^* (qb^v)^{i_1} + \dots + \alpha_{i_j}^* (qb^v)^{i_j}$$

En vertu de (4.6) on a

$$\beta_i^* = \sum_{j=s_i}^J C_{i_j}^i (qb^v)^{i_j-i} b^{u\omega_{i_j}} \frac{a_{i_j}^*}{q^{i_j}},$$

soit , en tenant compte des égalités (1.3) :

$$\beta_i^* = (qb^v)^{-i} b^{(vi_0 + u\omega_{i_0})} \sum_{j=s_i}^J C_{i_j}^i a_{i_j}^* b^{(v + u\lambda)(i_j - i_0)}.$$

En remarquant que

$$(v + u\lambda) = (v + up/q) = (qv + up)/q = 1/q,$$

et en utilisant (1.4) , on peut écrire

$$\beta_i^* = (qb^v)^{-i} b^\theta \sum_{j=s_i}^J C_{i_j}^i a_{i_j}^* b^{d_j}, \quad (4.9)$$

avec $\theta = v i_0 + u \omega_{i_0}$.

En particulier

$$\beta_0^* = b^\theta \sum_{j=0}^J a_{i_j}^* b^{d_j}. \quad (4.10)$$

Définition. *Le polynôme caractéristique réduit* associé à l'arête A_k est par définition le polynôme $R_k(U)$ défini en (2.1) :

$$R_k(U) = a_{i_0}^* + a_{i_1}^* U^{d_1} + \dots + a_{i_j}^* U^{d_j},$$

il est de degré $d_j = l/q$, et toutes ses racines sont non nulles.

On a donc

$$\beta_0^* = b^\theta R_k(b),$$

de sorte que β_0^* est nul si et seulement si b est une racine de $R_k(U)$.

De manière générale, on a le résultat suivant

Lemme 4.2. Pour $i = 0, 1, \dots, n_{k+1}$, on a

$$\beta_i^* = \frac{b^{(-iv + \theta)}}{i!} \sum_{m=0}^i \delta_{im} b^m \frac{d^m R_k}{dU^m}(b), \quad (4.11)$$

où les δ_{im} sont des nombres rationnels avec $\delta_{ii} = 1$.

Remarque 3: Ce lemme s'interprète de la façon suivante : si b est racine de $R_k(U)$ de multiplicité i alors β_j^* est nul pour tout $j \leq i$ et β_{i+1}^* est non nul.

Démonstration Pour tout $i \leq n_{k+1}$, définissons le polynôme :

$$F_i(U) = \sum_{j=s_i}^J C_{ij}^i a_{ij}^* U^{dj},$$

de sorte que:

$$\beta_i^* = (qb^v)^{-i} b^\theta F_i(b).$$

Remarquons que, pour tout $i \leq n_{k+1}$, on a l'égalité (formelle) suivante:

$$F_i(U) = T^{-i\theta} \frac{T^i d^i f}{i! dT^i}(T), \quad (4.12)$$

où $T = U^{1/q}$ et $f(T)$ donné par

$$f(T) = a_{i_0}^* T^{i_0} + a_{i_1}^* T^{i_1} + \dots + a_{i_J}^* T^{i_J}.$$

En particulier

$$F_0(U) = T^{-i_0} f(T). \quad (4.13)$$

En utilisant le lemme 3.1 et la relation précédente, on voit que

$$T^i \frac{d^i f}{dT^i}(T) = q^i \sum_{m=1}^i \gamma_{im}^{(1/q)} U^m \frac{d^m}{dU^m}(U^{i_0/q} F_0(U)). \quad (4.14)$$

La formule de Leibniz nous donne

$$\frac{d^m}{dU^m} (U^{i_0/q} F_0(U)) = U^{(i_0/q - m)} \sum_{s=0}^m C_m^s [i_0/q]_{(m-s)} U^s \frac{d^s}{dU^s} (F_0(U)),$$

avec les notations: $[x]_j = x(x-1)\dots(x-j+1)$ pour $j \neq 0$ et $[x]_0 = 1$.

D'où

$$T^i \frac{d^i f}{dT^i} (T) = q^i U^{i_0/q} \sum_{m=0}^i \delta_{im} U^m \frac{d^m}{dU^m} (F_0(U)), \quad (4.15)$$

où

$$\delta_{im} = \sum_{j=m}^i \gamma_{ij}^{(1/q)} C_j^m [i_0/q]_{(j-m)}, \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, i.$$

En combinant les relations (4.12) et (4.15), on obtient

$$F_i(U) = \frac{q^i}{i!} \sum_{m=0}^i \delta_{im} U^m \frac{d^m F_0}{dU^m}(U). \quad (4.16)$$

On a donc (pour tout $i \leq n_{k+1}$)

$$\beta_i^* = (qb^v)^{-i} b^\theta F_i(b) = \frac{b^{(-iv + \theta)}}{i!} \sum_{m=0}^i \delta_{im} b^m \frac{d^m F_0}{dU^m}(b).$$

La démonstration du lemme est achevée.

Polygone de Newton de l'opérateur Δ_1 .

Lemme 4.3. Le polygone de Newton de Δ_1 coïncide avec celui de Δ sur le segment $[n_{k+1}, n]$.

Démonstration: Soit i un entier $\geq n_{k+1}$. Notons i' le plus grand entier $\leq i$, tel que le point $N = (i', \mu_{i'} - i')$ appartienne à $N(\Delta)$ et p' la pente du côté sur lequel se trouve le point N . Alors, pour tout $j \geq i'$, on a

$$\mu_j - j \geq \mu_{i'} - i' + p'(j - i').$$

En particulier, pour tout $j \geq i$

$$\mu_j - j - p(j - i) \geq \mu_{i'} - i' + p'(j - i') - p(j - i) = \mu_{i'} - i' + p'(i - i') + (p' - p)(j - i).$$

Puisque $p' \geq p$, on en déduit que

$$\mu_j - j - p(j - i) \geq \mu_{i'} - i' + p'(i - i'),$$

pour tout $j \geq i$.

D'où

$$\varepsilon_i - i \geq \mu_{i'} - i' + p'(i - i').$$

Autrement dit le point $(i, \varepsilon_i - i)$ est au-dessus de la droite de pente p' passant par N .

En particulier, si $i = i'$, i.e. si le point $(i, \mu_i - i) \in N(\Delta)$, alors

$$\varepsilon_i - i \geq \mu_i - i,$$

et comme $\varepsilon_i - i \leq \mu_i - i$, on en déduit que

$$\varepsilon_i - i = \mu_i - i.$$

Autrement dit, le point $(i, \mu_i - i)$ appartient aussi au polygone de Newton de l'opérateur Δ_1 . Ceci achève la démonstration du lemme.

On peut énoncer maintenant le résultat fondamental suivant, qui découle immédiatement des lemmes 4.2 et 4.3.

Proposition 4.1.

(i) Si le nombre b n'est pas racine du polynôme $R_k(U)$, alors le polygone de Newton de Δ_1 coïncide avec la droite $y = p_k(x - n_k) + (\mu_{n_k} - n_k)$ sur le segment $[0, n_{k+1}]$ et avec le polygone de Newton de Δ sur $[n_{k+1}, n]$ (voir fig 3). Nous noterons $N_0(\Delta_1)$ ce polygone.

(ii) Si b est racine de $R_k(U)$, de multiplicité $m(b)$, alors le polygone de Newton de Δ_1 , noté $N_1(\Delta_1)$, coïncide avec $N_0(\Delta_1)$ sur $[m(b), n]$. Par contre, il est au-dessus de $N_0(\Delta_1)$ sur $[0, m(b)]$, et il peut avoir plusieurs arêtes sur ce segment. Bien sûr, ces arêtes ont des longueurs entières de somme $m(b)$ (voir fig. 4).

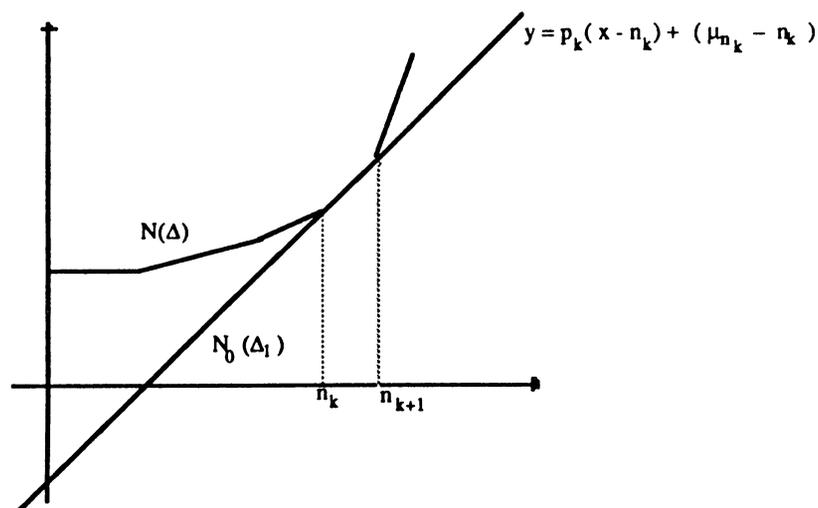


fig. 3.

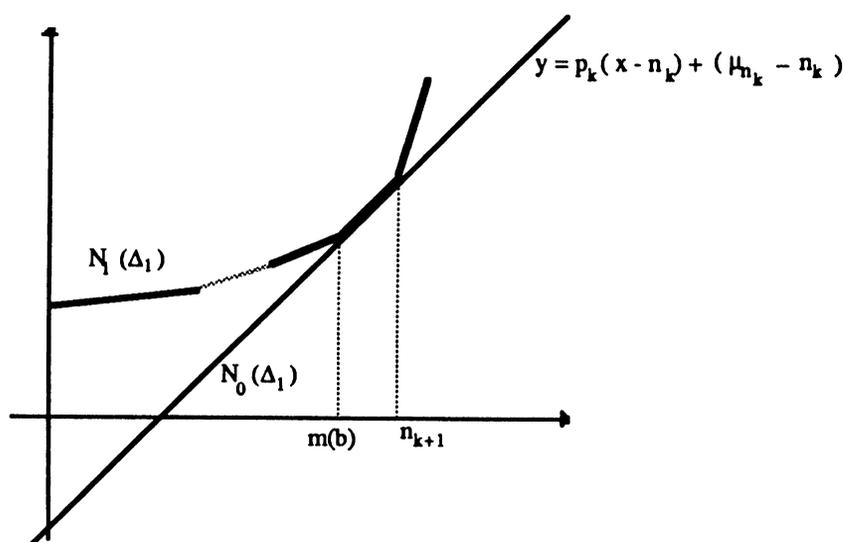


fig. 4.

Remarque 4. Il est très important de remarquer que lorsque $q > 1$ (i.e. lorsqu'on effectue une ramification) les pentes de $N_1(\Delta_1)$ sur le segment $[0, m(b)]$ ont chacune une longueur inférieure strictement à l_k . En effet, chacune de ses pentes a une longueur inférieure à $m(b) \leq (l_k / q)$.

4.2. Description et justification de l'algorithme.

On choisit une arête A de $N(D)$ de pente λ , deux cas sont à considérer:

(1) Premier cas : la pente λ est nulle.

Dans ce cas on utilise la méthode de Frobenius pour calculer les l solutions formelles classiques associées à A . (l étant la longueur de A)

(2) Deuxième cas : la pente λ est strictement positive

On suppose que la pente $\lambda = p/q$ avec $(p, q) = 1$. On calcule alors le polynôme caractéristique réduit $R(U)$ associé à λ , on choisit une racine b de ce polynôme, puis on forme l'opérateur $\Delta(\lambda, b)$ (défini en (4.8)). Remarquons que les coefficients de $\Delta(\lambda, b)$ sont eux même à coefficients dans $\mathbb{Q}(b)$. Afin de justifier l'algorithme, nous sommes conduit à considérer plusieurs situations :

(2.1) b est racine simple de $R(U)$.

Supposons que b soit racine simple de $R(U)$. Notons Δ_1 l'opérateur $\Delta(\lambda, b)$. D'après les

résultats que nous avons établis au paragraphe précédent (cf. proposition 4.1), le polygone de Newton de Δ_1 présente sur le segment $[0,1]$ une unique pente entière λ_1 inférieure strictement à p .

Il est important de remarquer que:

- (i) puisque $l(\lambda_1) = 1$, on n'introduira pas de nouvelle ramification,
- (ii) le polynôme caractéristique associé à la pente λ_1 et à l'opérateur Δ_1 est du premier degré. L'unique racine de ce polynôme, disons c , appartient à $\mathbb{Q}(b)$.

L'étape suivante consiste à former l'opérateur $\Delta_1(\lambda_1, c)$. Le polygone de Newton de cet opérateur aura une pente entière $\lambda_2 < \lambda_1$ sur le segment $[0,1]$ et ainsi de suite. On itérera ce processus jusqu'à trouver une pente nulle de longueur 1 (ce qui se fera au plus en p itérations). On est alors ramené au premier cas.

Remarquons que dans ce cas la solutions formelle généralisée obtenue aura comme ramification q et comme corps de coefficients $\mathbb{Q}(b)$.

(2.2). b est racine d'ordre $m(b) > 1$.

Notons Δ_1 l'opérateur $\Delta(\lambda, b)$. D'après la proposition 4.1, le polygone de Newton de Δ_1 présente sur le segment $[0, m(b)]$ un nombre fini de pentes (au plus $m(b)$) strictement inférieures à p ayant chacune une longueur inférieure à $m(b)$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq m(b), \quad \text{avec} \quad \sum l(\lambda_i) = m(b) \leq l(\lambda)/q.$$

Deux cas sont à distinguer :

(i) Pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $l(\lambda_i) < l(\lambda)$: On dit alors que l'on a "cassé" la pente λ (c'est le cas par exemple si $q > 1$).

On choisit une pente λ_i (on suppose que λ_i n'est pas nulle et que $l(\lambda_i) > 1$). On forme le polynôme caractéristique réduit correspondant. Si ce polynôme ne possède pas une unique racine de multiplicité $l(\lambda_i)$, la pente λ_i se "cassera" à son tour en plusieurs pentes de longueur inférieure strictement à $l(\lambda_i)$.

Donc, si le cas particulier où le polynôme caractéristique présente une unique racine d'ordre ≥ 2 ne se produit pas, la décroissance successive des longueurs des pentes nous conduira en un nombre fini d'étapes à une pente de longueur 1.

(ii) Il existe une unique pente λ_1 telle que $l(\lambda_1) = l(\lambda)$: Dans ce cas, $m(b) = l(\lambda)$, i.e. b est racine d'ordre $l(\lambda)$ de $R(U)$. Il faut remarquer que ce cas là ne peut se produire que si la pente λ est entière (i.e. $q = 1$). On n'introduit donc pas de nouvelle ramification. D'autre part, d'après la proposition 4.1, la pente λ_1 est strictement inférieure à λ . On a donc

diminué la pente λ .

On voit donc qu'à chaque étape de cet algorithme soit on "casse la pente", soit on "diminue la pente" sans introduire de nouvelle ramification. Cela montre qu'au bout d'un nombre finie d'étapes on trouvera un opérateur dont le polygone de Newton possède un côté de pente nulle auquel on peut appliquer l'algorithme de Frobenius.

En conclusion, l'algorithme que l'on vient de décrire donne un ensemble fini de solutions formelles généralisées :

$$\mathfrak{S} = \{ (x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t)), \dots, (x_h(t), y_h(t)) \}.$$

Nous allons montrer que cet ensemble forme un système de solutions formelles rationnelles.

Pour tout j de 1 à h , notons (comme au §3) :

$$x_j(t) = \Lambda_j t^{r_j} \quad (\text{l'entier } r_j \text{ est l'indice de ramification de } (x_j(t), y_j(t)))$$

$$y_j(t) = e^{Q_j(1/t)} t^{\rho_j} \phi_j(t)$$

ξ_j = une racine de l'unité d'ordre r_j dans \mathfrak{A}

Λ_j^{-1/r_j} = une racine de Λ_j^{-1} d'ordre r_j dans \mathfrak{A} .

$$\Lambda_{ji} = \xi_j^i \Lambda_j^{-1/r_j} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq r_j - 1$$

$$y_{ji}(t) = e^{Q_j\left(\frac{1}{\Lambda_{ji} t}\right)} t^{\rho_j} \phi_{ji}(t) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq r_j - 1,$$

où $\phi_{ji}(t)$ est obtenu en remplaçant t par $\Lambda_{ji} t$ dans toutes les séries qui apparaissent dans $\phi_j(t)$.

Proposition 4.2. Les expressions $y_{ji}(x^{1/r_j})$ pour $0 \leq j \leq h$ et $0 \leq i \leq r_j - 1$, forment n solutions formelles linéairement indépendantes de l'opérateur D .

Commençons par établir l'égalité suivante:

$$\sum_{j=1}^h r_j = n \quad (4.17)$$

Cette égalité découle du lemme suivant:

Lemme 4.4.

Soient A_k une arête de $N(D)$, de pente λ , et b une racine d'ordre $m(b)$ du polynôme caractéristique réduit associé à A_k . Soient $(x_{b,1}(t), y_{b,1}(t)), \dots, (x_{b,h_b}(t), y_{b,h_b}(t))$ les

solutions formelles généralisées associées à b . Pour $j = 1, \dots, h_b$ on note $r_{b,j}$ l'indice de ramification de $(x_{b,j}(t), y_{b,j}(t))$ alors:

$$\sum_{j=1}^{h_b} r_{b,j} = qm(b). \quad (4.18)$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est la suivante:

Si B_k désigne l'ensemble des racines distinctes du polynôme caractéristique réduit associé à A_k , l'égalité (4.18) entraîne l'égalité suivante:

$$\sum_{b \in B_k} \sum_{j=1}^{h_b} r_{b,j} = \sum_{b \in B_k} qm(b) = q \frac{l_k}{q} = l_k.$$

Autrement dit, si $S_D(A)$ désigne l'ensemble des solutions formelles généralisées de D associées à l'arête A de $N(D)$, de longueur $l(A)$, et si r_s est l'indice de ramification de s pour tout s de $S_D(A)$, alors

$$\sum_{s \in S_D(A)} r_s = l(A). \quad (4.19)$$

La démonstration du lemme se fait par récurrence sur l'ordre de $m(b)$:

Le résultat est vrai si $m(b) = 1$, dans ce cas on a une unique solution formelle généralisée de la forme

$$(x(t) = b^u t^q, y(t) = e^{Q(1/h)t^p} \sum_{i=0}^{\infty} g_i t^i).$$

Supposons le résultat vrai à l'ordre m , c'est à dire: pour tout opérateur L dans $\mathcal{A}[[x]][d/dx]$ et pour toute arête A de $N(L)$, si b est une racine du polynôme caractéristique réduit associé à A , d'ordre $m(b) \leq m$, alors les solutions formelles généralisées de L associées à b vérifient une égalité du type (4.18). L'égalité (4.19) est donc vraie pour toute arête de longueur $\leq m$.

Supposons maintenant que notre racine b soit d'ordre $m(b) = m+1$. Formons l'opérateur Δ_1 correspondant, deux cas peuvent se produire:

cas 1 Soit, après un nombre fini d'étapes on trouve une arête, de pente nulle, de longueur égale à $m(b)$, dans ce cas il est important de remarquer que du fait que l'arête ne se "casse" pas, la ramification ne change plus (cf. remarque 4.), on a donc $m(b)$ solutions formelles

généralisées de D de la forme

$$(x = b^u t^q, e^{Q(1/t)} \psi_0(t)), \dots, (x = b^u t^q, e^{Q(1/t)} \psi_{m(b)-1}(t)),$$

et on voit alors que:

$$\sum_{i=0}^{m(b)-1} q = qm(b).$$

cas 2 Soit, après un nombre fini d'itérations on trouve un opérateur L dont le polygone de Newton $N(L)$ possède, sur le segment $[0, m(b)]$, plusieurs arêtes, chacune d'elles ayant une longueur inférieure strictement à $m(b)$.

A chacune de ces arêtes A' correspond un ensemble fini de solutions formelles généralisées de L et puisque la longueur $l(A')$ de A' est strictement inférieure à $m(b)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{s' \in S_L(A')} r_{s'} = l(A').$$

Or chaque solution formelle généralisée de L, disons $s' = (\Lambda t^{r_{s'}}, z(t))$, fournit une solution formelle généralisée de D de la forme $s = (x(t) = b^u \Lambda^q t^{qr_{s'}}, y(t))$, et réciproquement toute solution formelle généralisée de D associée à b est obtenue ainsi. On peut donc écrire:

$$\sum_{s \in S_{D,b}} r_s = \sum_{A'} \sum_{s' \in S_L(A')} qr_{s'} = q \sum_{A'} l(A') = qm(b),$$

où A' parcourt l'ensemble des arêtes de L sur $[0, m(b)]$, et $S_{D,b}$ désigne l'ensemble des solutions formelles généralisées de D associées à b.

La démonstration du lemme est achevée. L'égalité (4.17) se déduit des égalités (1.2) et (4.19).

Démonstration de la proposition 4.2

Considérons maintenant un élément $(x_j(t), y_j(t))$ de \mathfrak{E} . Le corollaire A.2, de l'appendice A, montre que les r_j expressions : $y_{ji}(x^{1/r_j})$, $0 \leq i \leq r_j - 1$, sont des solutions formelles de D calculées par l'algorithme de Newton classique. D'autre part l'égalité (4.17) montre que le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\{y_{ji}(x^{1/r_j}) \text{ pour } 0 \leq j \leq h \text{ et } 0 \leq i \leq r_j - 1\} \quad (*)$$

est exactement égale à n (ordre de D). Il en résulte que cet ensemble est identique à

l'ensemble des solutions formelles de D données par l'algorithme de Newton classique. On en déduit, en particulier, que les n expressions données par (*) sont linéairement indépendantes.

Pour montrer que l'ensemble \mathfrak{S} est un système de solutions formelles rationnelles de D , il reste à prouver que l'ensemble \mathfrak{S} est globalement stable sous l'action du groupe de Galois \mathfrak{A}/\mathbb{Q} . Ceci provient du fait que D est à coefficients dans $\mathbb{Q}[[x]]$ (cf remarque B.1 de l'appendice B).

En conclusion \mathfrak{S} est un système de solutions formelles rationnelles. Les classes d'équivalence des solutions formelles classiques correspondent bijectivement aux solutions formelles généralisées calculées par l'algorithme de Newton rationnel.

5. Exemples.

Exemple 5.1

Nous allons d'abord reprendre l'opérateur d'ordre neuf (cf. exemple 2.1, §2) :

$$D(y) = x^{14} y^{(9)} - x^{13} y^{(8)} + x^9 y^{(6)} + 5x^6 y^{(4)} + 8x^3 y'' + 4y = 0.$$

Nous avons vu que les solutions formelles classiques de D se regroupaient en trois classes d'équivalence C_1 , C_2 , et C_3 .

L'algorithme de Newton rationnel nous donne trois solutions formelles généralisées :

$$(x(t) = -t^2, y(t) = \exp(2/t) t^{-9/2} \{ 1 - \frac{1075}{16} t + \dots \}),$$

$$(x(t) = \frac{-t^4}{288}, y(t) = \exp(48/t^2 - 24/t) t^{-13/2} \{ 1 + \frac{1753}{64} t + \dots \}),$$

$$(x(t) = -t^3, y(t) = \exp(3/(2t^2) - 5/t) t^{32} \{ 1 + \frac{3583}{27} t + \dots \}),$$

correspondant respectivement aux classes C_1 , C_2 , C_3 .

Notons que ces solutions formelles généralisées ont un corps de coefficients égal à \mathbb{Q} .

Exemple 5.2

Considérons l'opérateur

$$D = 16(4-x)x^6 \partial^4 + 16(6-3x)x^5 \partial^3 + 4(8-30x-5x^2)x^3 \partial^2 + 4(-8+5x+x^2)x^2 \partial + 4 + 27x - 22x^2 - 4x^3.$$

Les solutions formelles calculées par l'algorithme de Newton classique sont:

$$xe^{i/\sqrt{x}}, xe^{i/\sqrt{x}} \text{Log}\sqrt{x}, xe^{-i/\sqrt{x}}, xe^{-i/\sqrt{x}} \text{Log}\sqrt{x}.$$

Nous avons deux classes d'équivalence:

$$C_1 = \{xe^{i/\sqrt{x}}, xe^{-i/\sqrt{x}}\} \text{ et } C_2 = \{xe^{i/\sqrt{x}} \text{Log}\sqrt{x}, xe^{-i/\sqrt{x}} \text{Log}\sqrt{x}\}.$$

L'algorithme de Newton rationnel nous donne deux solutions formelles généralisées:

$$(x(t) = -t^2, y_1(t) = t^2 e^{1/t}) \text{ et } (x(t) = -t^2, y_2(t) = t^2 e^{1/t} \text{Log}t).$$

La première redonne les solutions de la classe C_1 . La deuxième donne les solutions de la classe C_2 .

Les solutions formelles classiques ont un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(i)$, celui des solutions généralisées est égal à \mathbb{Q} .

Exemple 5.3. Soit

$$D = x^9 \partial^6 - x^6 \partial^4 - x^3 \partial^2 + 1$$

Les six solutions formelles calculées par l'algorithme classique sont:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2i/\sqrt{x}} x^{15/4} \left\{ 1 - \frac{3}{16i} \sqrt{x} + \dots \right\} \\ y_2 &= e^{-2i/\sqrt{x}} x^{15/4} \left\{ 1 + \frac{3}{16i} \sqrt{x} + \dots \right\} \\ y_3 &= e^{2/\sqrt{x} + 2i\sqrt{6}/x^{1/4}} x^{29/8} \left\{ 1 - \frac{135}{16i\sqrt{6}} x^{1/4} + \dots \right\} \\ y_4 &= e^{2/\sqrt{x} - 2i\sqrt{6}/x^{1/4}} x^{29/8} \left\{ 1 + \frac{135}{16i\sqrt{6}} x^{1/4} + \dots \right\} \\ y_5 &= e^{-2/\sqrt{x} + 2\sqrt{6}/x^{1/4}} x^{29/8} \left\{ 1 - \frac{135}{16\sqrt{6}} x^{1/4} + \dots \right\} \\ y_6 &= e^{-2/\sqrt{x} - 2\sqrt{6}/x^{1/4}} x^{29/8} \left\{ 1 + \frac{135}{16\sqrt{6}} x^{1/4} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Ces solutions se regroupent en deux classes : $C_1 = \{y_1, y_2\}$ et $C_2 = \{y_3, y_4, y_5, y_6\}$.

L'algorithme rationnel nous donne deux solutions qui correspondent respectivement à C_1 et C_2 :

$$(x(t) = -4t^2, Y_1(t) = e^{1/t} t^{15/2} \{ 1 + \frac{3}{8} t + \dots \})$$

et

$$(x(t) = 576 t^4, Y_2(t) = e^{-1/12t^2 + 1/t} t^{29/2} \{ 1 + \frac{135}{8} t + \dots \}).$$

Les solutions formelles classiques de y_1, y_2 ont un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(i)$, les quatre autres ont un corps de coefficients égal à $\mathbb{Q}(i\sqrt{6})$, celui des solutions généralisées est égal à \mathbb{Q} .

6. Conclusion :

L'algorithme présenté dans ce chapitre n'a pas encore été implémenté. Mais les opérations de bases sont du même type que celles utilisées dans l'algorithme de Newton classique; sa programmation ne présente pas de problèmes techniques nouveaux par rapport à l'algorithme classique.

L'algorithme de Newton rationnel présente deux avantages évidents par rapport à l'algorithme de Newton classique :

- . Les solutions formelles équivalentes sont calculées simultanément,
- . et les calculs sont effectués dans un plus petit corps .

Enfin, notons que cet algorithme rationnel nécessite aussi de travailler avec des extensions algébriques. Cependant il limite leurs degrés .

Appendice A

Soit L un opérateur différentiel à coefficients séries formelles :

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (\text{A.1})$$

où $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$ avec $a_0 a_n \neq 0$.

On note

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^j \quad (\text{A.2})$$

Soit ω un nombre complexe non nul, si on remplace, dans (A.1), x par ωx , on obtient un nouvel opérateur différentiel (noté L^ω) qui s'écrit

$$L^\omega = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad (\text{A.3})$$

où

$$b_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} x^j = a_i(\omega x) \omega^{-i} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \omega^{j-i} x^j \quad (\text{A.4})$$

Lemme A.1. Les polygones de Newton $N(L)$ et $N(L^\omega)$ coïncident. Si $\lambda > 0$ est la pente d'un côté de $N(L)$, si $P_\lambda(T)$ est le polynôme caractéristique correspondant pour L , alors le polynôme caractéristique $P_\lambda^\omega(T)$ pour L^ω est égal, à un facteur multiplicatif près, à $P_\lambda(\omega^\lambda T)$.

Démonstration En remarquant que le passage de l'opérateur L à l'opérateur L^ω échange $x^j(d/dx)^i$ et $\omega^{-i} x^j(d/dx)^i$, on voit que $N(L)$ et $N(L^\omega)$ coïncident.

Soit $\lambda > 0$, la pente d'un côté de $N(L)$. Si l'on note $(i_j, m_j - i_j)$, $0 \leq j \leq J$, les points qui se trouvent sur le côté de pente λ , alors

$$P_\lambda(T) = a_{i_0, m_0} + a_{i_1, m_1} T^{(i_1 - i_0)} + \dots + a_{i_J, m_J} T^{(i_J - i_0)},$$

et

$$P_\lambda^\omega(T) = \omega^{(m_0 - i_0)} a_{i_0, m_0} + \omega^{(m_1 - i_1)} a_{i_1, m_1} T^{(i_1 - i_0)} + \dots + \omega^{(m_J - i_J)} a_{i_J, m_J} T^{(i_J - i_0)}.$$

En remarquant que, pour tout j , $0 \leq j \leq J$, on a

$$(m_j - i_j) - (m_0 - i_0) = \lambda(i_j - i_0),$$

on obtient

$$P_\lambda^\omega(T) = \omega^{(m_0 - i_0)} P_\lambda(\omega^\lambda T).$$

Donc si a est racine de l'équation caractéristique $P_\lambda(T)$ alors $\omega^{-\lambda} a$ est racine du polynôme caractéristique $P_\lambda^\omega(T)$.

Soit $y(x)$ une solution formelle (non ramifiée) de L calculée par l'algorithme de Newton classique :

$$y(x) = e^{Q(1/x)} x^\rho \{ \varphi_s(x) + \varphi_{s-1}(x) \log x + \dots + \varphi_0(x) \log^s x \} \quad (\text{A.5})$$

où $\varphi_i \in \mathbb{C}[[x]]$, $\rho \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[x]$.

On définit y^ω par :

$$y^\omega(x) = e^{Q(1/\omega x)} x^\rho \{ \varphi_s(\omega x) + \varphi_{s-1}(\omega x) \log x + \dots + \varphi_0(\omega x) \log^s x \} \quad (\text{A.6})$$

Nous nous proposons de montrer la proposition suivante :

Proposition A.1 Si $y(x)$ est une solution formelle de L calculée par l'algorithme de Newton alors $y^\omega(x)$ est une solution formelle de L^ω calculée aussi par l'algorithme de Newton.

Démonstration Supposons d'abord que $N(L)$ possède une arête de pente nulle et de longueur $l_0 \geq 1$. On associe à l'opérateur L la suite des polynômes:

$$f_k(\mu) = \sum_{i=0}^n a_{i,k+i} [\mu]_i \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad (\text{A.7})$$

où

$$[\mu]_i = \mu(\mu-1)\dots(\mu-i+1).$$

$f_0(\mu) = 0$ est l'équation indiciale $[In]$ associée à l'opérateur L (c'est une équation de degré l_0).

De la même manière, on associe à L^ω , la suite :

$$f_{\omega,k}(\mu) = \sum_{i=0}^n b_{i,k+i} [\mu]_i \tag{A.8}$$

Remarquons que, pour tout k on a :

$$f_{\omega,k}(\mu) = \omega^k f_k(\mu) \tag{A.9}$$

En particulier, L et L^ω ont la même équation indicelle.

Les solutions formelles de L , associées au côté de pente nulle, se calculent par la méthode de Frobenius. Ces solutions sont de la forme:

$$\phi(x) = x^p \{ w_s(x,\rho) + w_{s-1}(x,\rho)\log x + \dots + w_0(x,\rho)\log^s x \}, \tag{A.10}$$

où ρ est une racine de l'équation indicelle, et les $w_r(x, \mu)$ sont donnés par

$$w_r(x,\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} g_v^{(r)}(\mu) x^v, \tag{A.11}$$

$g_v^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de $g_v(\mu)$ par rapport à μ . Les $(g_v(\mu))_{v=1,\dots,\infty}$ étant la solution du système (infini) linéaire triangulaire:

$$\begin{cases} f_0(\mu+1)g_1(\mu) + f_1(\mu)g_0(\mu) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_0(\mu+v)g_v(\mu) + f_1(\mu+v-1)g_{v-1}(\mu) + \dots\dots\dots + f_v(\mu)g_0(\mu) = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \tag{A.12}$$

($g_0(\mu)$ est choisi convenablement).

Les solutions formelles de L^ω , associées à l'arête de pente nulle, sont de la forme:

$$\psi(x) = x^p \{ w_s^\omega(x,\rho) + w_{s-1}^\omega(x,\rho)\log x + \dots + w_0^\omega(x,\rho)\log^s x \}, \tag{A.13}$$

où

$$w_r^\omega(x, \mu) = \sum_{v=0}^{\infty} g_{\omega, v}^{(r)}(\mu) x^v, \quad (\text{A.14})$$

$g_{\omega, v}(\mu)$ vérifiant le système obtenu en remplaçant, dans le système (A.12), f_k par $f_{\omega, k}$.

D'après les égalités (A.9), on voit que:

$$g_{\omega, v}(\mu) = \omega^v g_v(\mu) \quad (\text{A.15})$$

et par suite, on a

$$w_{\omega, r}(x, \mu) = w_r(\omega x, \mu), \quad (\text{A.16})$$

pour tout r .

D'où

$$\psi(x) = x^p \{ w_s(\omega x, \rho) + w_{s-1}(\omega x, \rho) \log x + \dots + w_0(\omega x, \rho) \log^s x \}. \quad (\text{A.17})$$

En conclusion, Si $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{l_0}$ désignent les solutions formelles de L (associées à l'arête de pente nulle), calculées par l'algorithme de Newton classique, alors les solutions formelles de L^ω (associées à l'arête de pente nulle), calculées par l'algorithme de Newton, sont $\phi_1^\omega, \phi_2^\omega, \dots, \phi_{l_0}^\omega$.

Considérons maintenant une arête A de $N(L)$ de pente $\lambda > 0$, soit y une solution formelle de L , associée à l'arête A , calculée par l'algorithme de Newton classique. Supposons que y soit donnée par (A.5). Nous allons montrer que l'expression y^ω définie en (A.6) est une solution formelle de L^ω , calculée aussi par l'algorithme de Newton classique. La solution formelle y s'écrit $y(x) = \exp(-a/(\lambda x^\lambda))\varphi(x)$, où a est une racine de l'équation caractéristique associée à l'opérateur L et à la pente λ , et φ est solution formelle de l'opérateur $L(\lambda, a)$, obtenu en remplaçant, dans L , d/dx par $(d/dx + a/x^{\lambda+1})$. D'après le lemme A.1, on sait que $\omega^{-\lambda} a$ est une racine de l'équation caractéristique associée à l'opérateur L^ω et à la pente λ . Il existe donc une solution formelle z de L^ω de la forme $z(x) = \exp(-\omega^{-\lambda} a/(\lambda x^\lambda))\psi(x)$, où ψ est solution formelle de l'opérateur $L(\lambda, \omega^{-\lambda} a)$.

Or

$$[L(\lambda, a)]^\omega = \sum_{i=0}^n a_i(\omega x) \left(\omega^{-1} \frac{d}{dx} + \frac{-\lambda a}{(\omega x)^{\lambda+1}} \right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i(\omega x) \omega^{-i} \left(\frac{d}{dx} + \frac{-\lambda \omega^{-\lambda} a}{x^{\lambda+1}} \right)^i = L^\omega(\lambda, \omega^{-\lambda} a).$$

Donc, si l'on écrit y sous la forme $y(x) = e^{Q(1/x)}\Phi(x)$, où $\Phi(x)$ est solution formelle "régulière" d'un opérateur L_0 , alors $z(x)$ s'écrit $z(x) = e^{Q(1/\omega x)}\Psi(x)$, où $\Psi(x)$ est solution formelle "régulière" de l'opérateur L_0^ω . On peut donc choisir $\Psi = \Phi^\omega$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

CONSEQUENCES:

1) Soit r un entier positif non nul, le changement de variable $x = t^r$ transforme L en l'opérateur L_r :

$$L_r = \sum_{i=0}^n c_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

avec

$$c_i(t) = t^i \sum_{j=i}^n \frac{\gamma_{ji}^{(r)}}{r^j} t^{-jr} a_j(t^r) \quad (\text{A.18})$$

où les $\gamma_{ij}^{(r)}$ sont donnés par les formules (3.1) du §3.

Considérons une solution formelle y (de L) de ramification r qui s'écrit

$$y(x) = z(t) = e^{Q(1/t)} t^p \{ \varphi_s(t) + \varphi_{s-1}(t) \log t + \dots + \varphi_0(t) \log^s t \},$$

avec $x = t^r$. ($z(t)$ est une solution formelle de L_r).

Soit ξ une racine de l'unité d'ordre r , on définit y^ξ par

$$y^\xi(x) = z^\xi(t) = e^{Q(1/\xi t)} t^p \{ \varphi_s(\xi t) + \varphi_{s-1}(\xi t) \log t + \dots + \varphi_0(\xi t) \log^s t \}.$$

corollaire A.1. Si y est calculée par l'algorithme de Newton alors y^ξ est une solution formelle de L calculée aussi par l'algorithme de Newton.

Démonstration: D'une part, dire que $y(x)$ est calculée par l'algorithme de Newton c'est dire que $z(t)$ est calculée par l'algorithme de Newton. Donc, d'après la proposition A.1,

$z^\xi(t)$ est une solution formelle de L_r^ξ donnée aussi par l'algorithme de Newton.

D'autre part, on a

$$L_r^\xi = \sum_{i=0}^n c_i(\xi t) \xi^{-i} \frac{d^i}{dt^i}$$

En remarquant que pour tout i

$$c_i(\xi t) = \xi^i c_i(t)$$

(égalité qui découle directement de la formule (A.18)), on voit que $L_r^\xi = L_r$.

Donc, $z^\xi(t)$ est une solution formelle de L_r calculée par l'algorithme de Newton.

2) Soient Λ un nombre complexe non nul et r un nombre entier positif, le changement de variable $x = \Lambda t^r$ transforme L en l'opérateur $L_{\Lambda,r}$

$$L_{\Lambda,r} = \sum_{i=0}^n c_{\Lambda,i}(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

avec

$$c_{\Lambda,i}(t) = t^i \sum_{j=i}^n \frac{\gamma_{ji}^{(r)}}{\Gamma^j} (\Lambda t^r)^{-j} a_j(\Lambda t^r) \quad (\text{A.19})$$

Soit $\Lambda^{-1/r}$ une racine d'ordre r de Λ^{-1} , alors:

$$c_{\Lambda,i}(\Lambda^{-1/r} t) \Lambda^{i/r} = c_i(t)$$

d'où

$$(L_{\Lambda,r})^{\Lambda^{-1/r}} = \sum_{i=0}^n c_{\Lambda,i}(\Lambda^{-1/r} t) \Lambda^{i/r} \frac{d^i}{dt^i} = L_r \quad (\text{A.20})$$

Soit $(x(t) = \Lambda t^r, y(t))$ une solution formelle généralisée de L calculée par l'algorithme de Newton rationnel. Alors, par définition, $y(t)$ est une solution formelle de $L_{\Lambda,r}$, calculée par l'algorithme de Newton classique. La proposition A.1 et l'égalité (A.20) montrent que $y^{\Lambda^{-1/r}}(t)$ est solution formelle de L_r donnée par l'algorithme de Newton. D'où le corollaire:

corollaire A.2: Soit $(x(t) = \Lambda t^r, y(t))$ une solution formelle généralisée de L calculée par l'algorithme de Newton rationnel, alors pour tout i de 0 à $r-1$, l'expression $y^{\xi^i \Lambda^{-1/r}}(x^{1/r})$ est une solution formelle de L donnée par l'algorithme de Newton classique.

Appendice B

Soit \mathfrak{A} une clôture algébrique de \mathbb{Q} . Considérons un opérateur différentiel L , à coefficients dans $\mathfrak{A}[[x]]$:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (\text{B.1})$$

avec $a_0 a_n \neq 0$.

Pour i allant de 0 à n , notons:

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^j \quad (\text{B.2})$$

Soit σ un \mathbb{Q} -automorphisme de \mathfrak{A} , on note $\sigma(L)$ l'opérateur :

$$\sigma(L) = \sum_{i=0}^n \sigma(a_i)(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (\text{B.3})$$

où $\sigma(a_i)$ est donné par:

$$\sigma(a_i)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(a_{i,j}) x^j \quad (\text{B.4})$$

Notons \mathcal{Y} (resp. \mathcal{Y}_σ) l'ensemble des solutions formelles de L (resp. $\sigma(L)$) calculées par l'algorithme de Newton classique.

Considérons y élément de \mathcal{Y} :

$$y(t) = e^{\frac{Q}{t}} t^\rho \varphi(t),$$

avec $x = t^r$, $Q \in \mathfrak{A}[t]$, $\rho \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathfrak{A}[[t]][\log(t)]$.

Définissons y_σ par

$$y_\sigma(t) = e^{Q_\sigma \left(\frac{1}{t}\right)} t^{\sigma(\rho)} \varphi_\sigma(t),$$

où $Q_\sigma(1/t)$ (resp. $\varphi_\sigma(t)$) est obtenu en appliquant σ à tous les coefficients de $Q(1/t)$ (resp. à toutes les séries formelles qui apparaissent dans $\varphi(t)$).

Nous nous proposons de démontrer la proposition

Proposition B.1 $\mathcal{Y}_\sigma = \{ y_\sigma / y \in \mathcal{Y} \}$.

Une conséquence immédiate, de ce résultat, est la suivante:

Si L est à coefficients dans $\mathbb{Q}[[x]]$, alors \mathcal{Y} est globalement invariant par σ .

D'abord, en remarquant que le passage à $\sigma(L)$ échange $a_{i,j} x^j (d/dx)^i$ et $\sigma(a_{i,j}) x^j (d/dx)^i$, on obtient le lemme :

Lemme B.1. Les polygones de Newton $N(L)$ et $N(\sigma(L))$ coïncident. Si $\lambda > 0$ est la pente d'un côté de $N(L)$, si $P(T)$ est le polynôme caractéristique correspondant pour L , alors le polynôme caractéristique pour $\sigma(L)$ est égal au polynôme $P_\sigma(T)$ obtenu en appliquant σ à tous les coefficients de $P(T)$.

Donc, si a est une racine du polynôme caractéristique $P(T)$ associé à l'opérateur L et à la pente λ alors $\sigma(a)$ est racine du polynôme caractéristique $P_\sigma(T)$ associé à l'opérateur $\sigma(L)$. De plus, il est facile de voir que $\sigma(L)(\lambda, a) = \sigma(L)(\lambda, \sigma(a))$. On en déduit que si y est une solution formelle de L qui s'écrit $y = e^{Q(1/t)}\phi(t)$, où ϕ est une solution formelle "régulière" d'un opérateur L_1 dont le polygone de Newton possède un côté de pente nulle, alors il existe une solution formelle z de $\sigma(L)$ qui s'écrit $z = e^{Q\sigma(1/t)}\psi(t)$ où ψ est une solution formelle "régulière" de l'opérateur $\sigma(L_1)$.

Il suffit donc, de supposer que $N(L)$ possède un côté de pente nulle et montrer le résultat pour les solutions formelles "régulières" de $\sigma(L)$.

Supposons que $N(L)$ possède un côté de pente nulle, de longueur $l_0 \geq 1$. Soit μ une indéterminée sur \mathcal{A} . En posant $\sigma(\mu) = \mu$, on définit un \mathbb{Q} -automorphisme (noté encore σ) de $\mathcal{A}(\mu)$. On associe à L la suite des polynômes $\{f_k(\mu), 0 \leq k < \infty\}$, donnée par (A.7). De la même manière, on associe à $\sigma(L)$ la suite des polynômes:

$$f_k^\sigma(\mu) = \sum_{i=0}^n \sigma(a_{i,k+i}) [\mu]_i$$

Pour tout entier k , on a :

$$f_k^\sigma(\mu) = \sigma(f_k(\mu)). \quad (\text{B. 5})$$

On en déduit, en particulier, que si ρ est une racine de l'équation indicelle associée à L alors $\sigma(\rho)$ est racine de l'équation indicelle associée à $\sigma(L)$.

Les solutions formelle "régulières" de $\sigma(L)$, sont de la forme:

$$\psi(x) = x^{\sigma(\rho)} \{ w_{\sigma,s}(x, \sigma(\rho)) + w_{\sigma,s-1}(x, \sigma(\rho)) \log x + \dots + w_{\sigma,0}(x, \sigma(\rho)) \log^s x \},$$

où

$$w_{\sigma,i}(x, \mu) = \sum_{v=0}^{\infty} g_{\sigma,v}^{(i)}(\mu) x^v,$$

$g_{\sigma,v}(\mu)$ vérifiant le système obtenu en remplaçant, dans le système (A.12), les f_k par les f_k^σ .

En vertu de (B.5), on a :

$$g_{\sigma,v}(\mu) = \sigma(g_v(\mu)), \quad \text{pour } v = 0, 1, \dots, \infty$$

et, par suite

$$w_{\sigma,i}(x, \mu) = \sigma(w_i(x, \mu)), \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, s.$$

où les w_i sont donnés par (A.11).

Cela montre que:

$$x^{-\sigma(\rho)} \psi(x) = x^{-\rho} \phi_\sigma(x),$$

où $\phi(x)$ est donné par (A.10).

En conclusion, si $\{ x^{p_1} \phi_1, x^{p_2} \phi_2, \dots, x^{p_{l_0}} \phi_{l_0} \}$ désigne l'ensemble des solutions formelles de L (associées à l'arête de pente nulle), calculées par l'algorithme de Newton, alors l'ensemble des solutions formelles de $\sigma(L)$ (associées à l'arête de pente nulle), calculées par l'algorithme de Newton, est $\{ x^{\sigma(p_1)} \phi_{\sigma,1}, x^{\sigma(p_2)} \phi_{\sigma,2}, \dots, x^{\sigma(p_{l_0})} \phi_{\sigma,l_0} \}$.

La démonstration de la proposition B.1 est achevée.

Remarque B.1. Si ξ (resp. ξ_σ) désigne l'ensemble des solutions formelles généralisées de L (resp. $\sigma(L)$) calculées par l'algorithme de Newton rationnel, on peut montrer, de la même manière que dans le cas classique, que

$$\xi_\sigma = \{ (x(t) = \sigma(\Lambda) t^r, y_\sigma(t)) / (\Lambda t^r, y(t)) \in \xi \}.$$

Deuxième Partie

ETUDE DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DIFFERENCES LINEAIRES HOMOGENES DANS LE CHAMP COMPLEXE.

Chapitre 3

Application de la transformation de Pincherle aux équations aux différences linéaires à coefficients polynomiaux Méthode de Ramis.

Introduction.

Nous présentons un algorithme pour le calcul d'une base de solutions asymptotiques d'une équation aux différences linéaire à coefficients polynomiaux, c'est à dire d'une équation la forme:

$$\Delta(g) = \sum_{i=0}^m \alpha_i(s)g(s+i) = 0$$

où s est un nombre complexe et les $\alpha_i(s)$ sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} .

Cet algorithme a pu être élaboré à partir des travaux de J.P. Ramis et A. Duval sur les équations aux différences (cf. Appendice)

Dans [Ra 4] Ramis montre que l'équation $\Delta g = 0$, possède une base de solutions (dans un espace convenable) constituée de m fonctions g_1, \dots, g_m holomorphes dans un demi-plan $\text{Re}(s) > N \geq 0$ et y admettant des représentations intégrales de la forme:

$$g_i(s) = \Gamma(s)^\sigma \int_{\gamma_i} x^{-s-1} \varphi_i(x) dx.$$

où : - $\sigma \in \mathbb{Z}$,

- φ_i est une fonction holomorphe dans un secteur V_i dans \mathbb{C} de sommet 0, plate en 0 (i.e admettant un développement asymptotique en 0 identiquement nul), solution d'un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux D obtenu à partir de Δ .

- γ_i est une demi-droite issue de 0 tracée dans V_i .

Ces solutions admettent lorsque $|s| \rightarrow \infty$ des développements asymptotiques qui peuvent être calculés à partir des intégrales ci-dessus, en utilisant les "formules de Stirling généralisées" pour les "fonctions Γ généralisées" obtenues par A. Duval [Du A.]. Ces développements constituent une base de solutions asymptotiques de Δ .

Notre but est le calcul effectif de cette base, malheureusement le choix des φ_i est souvent très difficile. Mais en réalité nous n'avons pas besoin des φ_i pour calculer les solutions asymptotiques recherchées, nous n'avons besoin que des invariants formels de D que nous savons calculer effectivement. La méthode est donc simple : on calcule les solutions formelles y_j de D , puis on forme les intégrales formelles :

$$\Gamma(s)^\sigma \int_{\gamma_j} x^{-s-1} y_j(x) dx.$$

(où les γ_j sont choisis convenablement).

On applique alors la méthode du col pour calculer des "développements asymptotiques" de ces intégrales formelles et on obtient ainsi p solutions asymptotiques de Δ dont certaines sont redondantes (i.e. $p \geq m = \text{ordre de } \Delta$). D'un point vue algorithmique il n'est pas évident d'éliminer cette redondance. On travaille alors avec les solutions formelles généralisées, introduites au chapitre précédent. Ceci permet d'obtenir exactement m solutions asymptotiques de Δ . Les résultats de Ramis nous assurent alors que ces m solutions forment une base de solutions asymptotiques de Δ .

Nous avons implanté cette méthode sur le système de calcul formel REDUCE. Nous donnons à la fin de cet article deux exemples traités sur ordinateur.

1. La Transformée formelle de Pincherle.

La transformée de Pincherle d'une fonction φ de la variable complexe x le long d'un chemin rectifiable γ de \mathbb{C} est la fonction :

$$P(\varphi)(s) = \int_{\gamma} x^{-s-1} \varphi(x) dx.$$

Cette transformation permet d'établir une correspondance entre équations aux différences algébriques linéaires et homogènes et équations différentielles algébriques linéaires et homogènes .

Considérons l'opérateur aux différences :

$$\Delta = \sum_{i=0}^m \alpha_i(s) \tau^i$$

où $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ et τ est l'opérateur de translation : $\tau(g)(s) = g(s+1)$.

On suppose que $\alpha_0(s) \neq 0$ et $\alpha_m(s) \neq 0$, on dit alors que Δ est d'ordre m .

Pour $0 \leq i \leq m$ on écrit $\alpha_i(s)$ sous la forme:

$$\alpha_i(s) = \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} (s+i)_j$$

où $n = \max \{ \text{degré} (\alpha_i(s)) \}$ pour $i = 0, 1, \dots, m$ et $(s)_p = s(s-1)\dots(s-p+1)$, $(s)_0 = 1$.

Par des intégrations par parties on montre que:

$$(*) \quad \Delta(P\varphi)(s) = [M(\varphi)]_{\gamma} + \int_{\gamma} x^{-s-1} (D\varphi)(x) dx$$

où :

. D est un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients polynomiaux :

$$D = \sum_{j=0}^n a_j(x) x^j \frac{d^j}{dx^j}$$

avec :

$$a_j(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_{i,j} x^{m-i}$$

. $M(\varphi)$ est la partie " toute intégrée " : c'est une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux des valeurs de φ et de ses dérivées aux "extrémités" de γ .

On dit que Δ est la *transformée formelle de Pincherle* de D . L'opérateur différentiel D est appelé la *transformée de Pincherle inverse* de Δ .

Remarque fondamentale: La formule (*) montre que si φ est une solution le long de γ (chemin convenable) de l'équation différentielle $D\varphi = 0$ telle que $[M(\varphi)]_\gamma = 0$ alors $f = P(\varphi)$ est une solution de l'équation aux différences $\Delta f = 0$, donnée par une formule intégrale, ce qui se prête bien à une étude asymptotique quand s tend vers l'infini.

2. Liens entre les Polygones de Newton de Δ et de D .

A l'opérateur aux différences Δ on associe son polygone de Newton $N(\Delta)$ défini comme étant l'enveloppe convexe des $m+1$ points $(i, -d^\circ(\alpha_i))$. A l'opérateur D (transformée de Pincherle inverse de Δ) on associe son polygone de Newton (en 0) $N_0(D)$ (l'enveloppe convexe à pentes positives des $n+1$ points $(j, v(a_j))$).

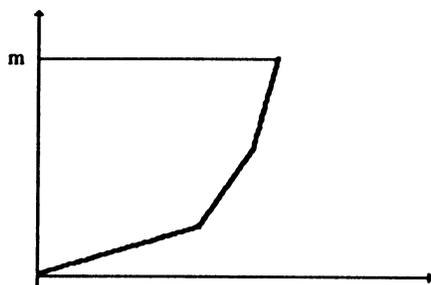
Proposition . On passe de $N(\Delta)$ à $N_0(D)$ par une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice suivie d'une translation verticale.

Une transformation de Poincaré c'est à dire un changement de variable $f(s) = \Gamma(s)^\sigma g(s)$ où $\sigma \in \mathbb{Z}$ convenable, permet de ramener le cas général au cas où $N(\Delta)$ à toutes ses pentes strictement positives. Dans ce dernier cas l'opérateur D possède les deux propriétés suivantes:

- (i) D n'a de singularités qu'en 0 et ∞ :
 - la singularité en ∞ étant régulière,
 - et la singularité en 0 étant irrégulière, sans partie régulière.
- (ii) $i(D)$ (i.e l'irrégularité de D) est égale à l'ordre m de Δ .
 ($i(D) = \sup(v(a_n) - v(a_p))$) = la "hauteur" de $N(D)$ (cf Appendice)).

3. Formation des solutions de Δ - Méthode directe.

Nous allons supposer que $N(\Delta)$ a toutes ses pente strictement positives. Dans ce cas D vérifie les conditions (i) et (ii) ci-dessus. Le polygone de Newton de D (en 0) a donc la forme suivante:



Pour toute arête A de $N_0(D)$ de pente λ_A , on note $l(A)$ (resp. $h(A)$) la longueur de la projection de A sur l'axe des abscisses (resp. sur l'axe des ordonnées), ($\lambda_A = h(A) / l(A)$). Nous avons naturellement l'égalité:

$$(1) \quad \sum_{A \text{ arête de } N(D)} h(A) = m = \text{ordre de } \Delta.$$

3.1. Solutions formelles généralisées de D - Rappels.

Nous rappelons ici quelques propriétés, démontrées au chapitre 2, qui seront utilisées dans ce chapitre.

Définition. 1) Une solution formelle généralisée de D est une paire $(x(t), y(t))$ d'expressions de la forme :

$$\cdot x(t) = \Lambda t^r \quad \text{avec } \Lambda \in \mathbb{C}^* \text{ et } r \in \mathbb{N}^* \text{ (} r \text{ est appelé la } \underline{\text{ramification}} \text{ de } (x(t), y(t)) \text{)}$$

$$\cdot y(t) = e^{Q(\frac{1}{t})} t^\rho \phi(t) \quad \text{avec } Q \in \frac{1}{t} \mathbb{C}[\frac{1}{t}], \rho \in \mathbb{C} \text{ et } \phi \in \mathbb{C}[[t]][\text{Log}t],$$

• et $D_{\Lambda, r}(y(t)) = 0$. (où $D_{\Lambda, r}$ est l'opérateur en t et d/dt obtenu en faisant dans D le changement de variable $x = \Lambda t^r$).

2) le degré de $(x(t), y(t))$ est par définition le degré du polynôme Q .

Il est clair d'après la définition ci-dessus qu'à chaque solution formelle généralisée de D de ramification r correspondent r solutions formelles classiques : $y_i(x) = y(\xi^i \Lambda^{-1/r} x^{1/r})$ pour $i = 0, 1, \dots, r-1$, où ξ désigne une racine de l'unité d'ordre r et $\Lambda^{-1/r}$ désigne une racine d'ordre r de Λ^{-1} .

Considérons maintenant une arête A de $N_0(D)$ de pente λ_A . Soit \mathfrak{S}_A l'ensemble des solutions formelles généralisées de D , associées à l'arête A , calculées par l'algorithme de Newton rationnel. Pour tout S de \mathfrak{S}_A notons r_S (resp. k_S) la ramification (resp. le degré) de S , alors :

$$(2) \quad k_S = r_S \lambda_A,$$

pour tout S de \mathfrak{S}_A .

Nous avons montré au chapitre 2, l'égalité suivante :

$$(3) \quad \sum_{S \in \mathfrak{S}_A} r_S = l(A).$$

On en déduit l'égalité:

$$(4) \quad \sum_{S \in \mathfrak{S}_A} k_S = \sum_{S \in \mathfrak{S}_A} \lambda_A r_S = \lambda_A l(A) = h(A).$$

Si \mathfrak{S} désigne l'ensemble des solutions formelles généralisées de D calculées par l'algorithme de Newton rationnel (cf. chapitre 2), et si k_S est le degré de S pour tout S de \mathfrak{S} , alors les égalités (1) et (4) impliquent l'égalité suivante:

$$(5) \quad \sum_{S \in \mathfrak{S}} k_S = \text{la hauteur de } N_0(D) = m \text{ ordre de } \Delta.$$

3.2 Solutions de Δ associées à une solution formelle généralisée $(x(t), y(t))$

Soit $(x(t) = \Lambda t^r, y(t) = e^{Q(1/t)} t^p \phi(t))$ une solutions formelle généralisée de D.

On pose

$$Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{q_k}{t^k} + \dots + \frac{q_1}{t}$$

avec $q_k \neq 0$.

On appelle secteurs de décroissance associés à Q (ou à $(x(t), y(t))$) les secteurs ouverts en t, d'ouverture π/k , dans lesquels $\text{Re}(q_k/t^k) < 0$. On note $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{k-1}$ ces secteurs. Pour $p = 0, 1, \dots, k-1$ on a :

$$\Sigma_p = \{ t / |\arg(t) - [\theta_k + (2p+1)\pi] / k| < \pi/(2k) \}$$

où $\theta_k = \arg(q_k)$.

On note V_p ($0 \leq p \leq k-1$) le secteur ouvert (inclus dans Σ_p), défini par

$$V_p = \{ t \mid |\arg(t) - [\theta_k + (2p+1)\pi]/k| < \pi/(2K_{\Lambda,r}) \},$$

où $K_{\Lambda,r}$ désigne l'invariant de Katz de $D_{\Lambda,r}$ (i.e la plus grande pente de $N(D_{\Lambda,r})$). Il est clair que $K_{\Lambda,r} = rK_0$, où K_0 désigne l' invariant de Katz de D .

Nous savons d'après le théorème fondamental des développements asymptotiques [Wa] qu'il existe une fonction $\varphi_p(t)$ holomorphe dans V_p telle que:

- . $\varphi_p(t)$ admet $\phi(t)$ comme développement asymptotique lorsque t tend vers 0 dans V_p .
- . $\exp(Q(1/t))t^p\varphi_p(t)$ est une vraie solution de $D_{\Lambda,r}$ dans V_p .

Soit γ_p une demi-droite issue de zéro tracée dans V_p , alors on a le

Théorème. Pour $\text{Re}(s)$ assez grand l'intégrale:

$$f_p(s) = \Lambda^{-s} \int_{\gamma_p} t^{-rs-1} e^{Q(\frac{1}{t})} t^p \varphi_p(t) dt$$

existe et est solution de l'équation aux différences $\Delta f = 0$.

Démonstration: D'une part , par des intégrations par parties on montre que:

$$\Delta(\Lambda^{-s} \int_{\gamma_p} t^{-rs-1} y(t) dt) = [M_{\Lambda,r}(y)]_{\gamma_p} + \int_{\gamma_p} t^{-rs-1} (D_{\Lambda,r}y)(t) dt$$

où $M_{\Lambda,r}(f)$ est une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux des valeurs de y et de ses dérivées aux extrémités de γ_p .

D'autre part l'intégrande de $f_p(s)$, holomorphe dans V_p , admet un développement asymptotique identiquement nul en 0 dans V_p et est à croissance modérée à l'infini. Ceci assure l'existence de $f_p(s)$ et la nullité de $M_{\Lambda,r}(\exp(Q(1/t))t^p\varphi_p(t))$ aux extrémités de γ_p .

On peut ainsi , à partir d'une solution formelle généralisée $(x(t),y(t))$ de degré k , Construire k solutions de l'opérateur aux différences $\Delta : f_1 , \dots , f_k$ définies et holomorphes dans un demi-plan $\text{Re}(s) > N_0$. L'égalité (5) (du § 3.1) montre alors que le nombre total des solutions de Δ que l'on peut fabriquer à partir d'un système de solutions formelles généralisées de D est exactement égal à l'ordre m de Δ .

Remarques: Naturellement nous ne savons pas calculer les φ_p , mais nous connaissons les développements asymptotiques des φ_p et nous allons à partir de ces développements calculer les développements asymptotiques des solutions f_p de Δ .

4. Développement asymptotique:

Le problème est de trouver un développement asymptotique lorsque s tend vers l'infini d'une intégrale de la forme:

$$f_p(s) = \Lambda^{-s} \int_{\gamma_p} t^{-rs-1} e^{Q\left(\frac{1}{t}\right)} t^p \varphi_p(t) dt$$

Pour cela on utilise la méthode du col. On se contente ici de donner les résultats (pour les démonstrations on renvoie à la thèse de A.Duval [Du A.]).

4.1. Cas non logarithmique.

On suppose que φ_p possède dans le secteur V_p , lorsque t tend vers 0, le développement asymptotique:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad (b_0 \neq 0)$$

On garde les notations des paragraphes précédents et on pose:

- $s = |s| e^{i\sigma}$ avec $\sigma \in]-\pi/2, \pi/2[$.
- $\sigma_0 = \pi k / (2K_{\Lambda, r})$ (où k est le degré de Q).

Les cols sont les zéros de $h'(t)$, où $h(t) = -rs \log t + Q(1/t)$. Cette fonction présente k cols admettant des développements en série convergents pour $|s|$ assez grand de la forme:

$$x_j = w_j + \sum_{i=2}^{\infty} c_i w_j^i$$

où :

$$w_j = \left(\frac{k |q_k|}{r |s|} \right)^{\frac{1}{k}} \exp \frac{i}{k} (\theta_k - \sigma + (2j+1)\pi)$$

pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Les coefficients c_i sont donnés par des formules explicites [Du A.].

Il est clair que w_p est dans le secteur ouvert Σ_p , on en déduit que pour $|s|$ assez grand le col x_p est aussi dans Σ_p , mais pour pouvoir appliquer la méthode du col il faut que x_p soit dans le secteur V_p (secteur dans lequel le développement asymptotique de φ_p est valable), pour cela il faut imposer la condition $|s| < \sigma_0$.

Théorème [Du A.].

L'intégrale $f_p(s)$ admet quand $s \rightarrow \infty$ avec $\sigma = \arg s \in] -\sigma_0 + \varepsilon, \sigma_0 - \varepsilon [$, un développement asymptotique de la forme:

$$f_p(s) \sim \Lambda^{-s} \left(\frac{2\pi}{rs} \right)^{\frac{1}{2}} w_p^{\rho - rs} \exp\left(\frac{-rs}{k} + \sum_{n=1}^k A_n w_p^{k-n} \right) \cdot \left(b_0 + \sum_{i \geq 1} D_i^{(p)} w_p^i \right)$$

Les coefficients A_n sont donnés par des formules explicites.

Remarque: Ce développement est valable dans un petit secteur de centre l'axe réel positif, mais c'est suffisant car dans la pratique on s'intéresse surtout aux valeurs entières de s .

4.2 Cas général.

On suppose que φ_p possède dans le secteur V_p , lorsque t tend vers 0, le développement asymptotique généralisé:

$$\sum_{v=0}^l \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{v,n} t^n \right) \log^v t$$

Théorème [Du A.]

L'intégrale $f_p(s)$ admet quand $s \rightarrow \infty$ avec $\sigma = \arg s \in] -\sigma_0 + \varepsilon, \sigma_0 - \varepsilon [$, un développement asymptotique de la forme:

$$f_p(s) \sim \Lambda^{-s} \left(\frac{2\pi}{rs} \right)^{\frac{1}{2}} w_p^{\rho - rs} \exp\left(\frac{-rs}{k} + \sum_{n=1}^k A_n w_p^{k-n} \right) \cdot \sum_{v=0}^l \log^v w_p \left(\sum_{i \geq 0} D_{i,v}^{(p)} w_p^i \right)$$

5. Indépendance des solutions .

Nous avons vu que l'on peut fabriquer m solutions de Δ holomorphes dans un demi-plan ($\operatorname{Re}(s) > N_0$). La question qui se pose naturellement est de savoir si ces solutions sont linéairement indépendantes. Puisqu'on connaît les développements asymptotiques de ces solutions, on peut essayer de montrer leur indépendance en utilisant la méthode exposée dans [No 2] qui consiste à ranger les solutions dans un ordre f_1, \dots, f_m tel que:

$$(*) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_h(s)}{f_{h+1}(s)} = 0. \quad \text{lorsque } s \text{ tend vers l'infini avec } \operatorname{Re}(s) > N_0$$

Cette méthode ne marche pas dans tous les cas, car il y a des situations où les solutions ne peuvent pas être rangées de manière à vérifier (*). Dans [Ra 4] J.P Ramis démontre (cf Appendice) l'existence dans tous les cas d'une base de solutions de Δ (dans un espace convenable) et montre aussi que les développements asymptotiques décrit plus haut forment une base de solutions asymptotiques de Δ , ce qui est très intéressant dans la pratique.

6 . Algorithme.

L'algorithme est formé de plusieurs étapes :

Etape 1

a) Calcul du polygone de Newton de $N(\Delta)$ de l'opérateur Δ .

b) Si $N(\Delta)$ possède une ou plusieurs pentes négatives ou nulles, on note p^* la plus petite de ces pentes et on effectue dans l'équation $\Delta u = 0$ le changement de variable $u(x) = \Gamma(x)^\sigma v(x)$, où σ est choisi de la façon suivante:

$$\sigma = \begin{cases} E(p^*) & \text{si } p^* \notin \mathbb{Z} \text{ (où } E(p^*) \text{ désigne la partie entière de } p^* \text{)} \\ p^* - 1 & \text{si } p^* \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Etape 2 Calcul de D (transformée de Pincherle inverse de Δ):

a) On écrit les α_i dans la base de Newton, c'est à dire sous la forme:

$$\alpha_i(s) = \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} (s+i)_j$$

où $(s)_i = s(s-1)\dots(s-i+1)$, et $(s)_0 = 1$.

b) On utilise le fait que la transformée de Pincherle de $(s+i)_j \tau^i$ est $t^{-i} \partial^j$.

Etape 3 Calcul des solutions formelles généralisées de D : On utilise l'algorithme de Newton rationnel décrit dans le chapitre 2.

Etape 4 Calcul des bissectrices $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ des secteurs de décroissance de chaque solution

$$(x(t) = \Lambda t^r, y(t) = e^{Q(1/t)} t^p \psi(t)).$$

Etape 5 Formation des intégrales (formelles) :

$$f_p(s) = \Lambda^{-s} \int_{\gamma_p} t^{-rs-1} e^{Q(\frac{1}{t})} t^p \psi(t) dt$$

et calcul des développements asymptotiques :

Nous avons donné (au paragraphe 4) la forme des développements asymptotiques que nous cherchons. C'est à partir des résultats de A. Duval [Du A.] que nous avons pu élaborer l'algorithme qui permet de calculer ces développements. Nous allons décrire en détail les différentes étapes de cet algorithme.

Le problème est de trouver un développement asymptotique (lorsque $s \rightarrow -\infty$) d'une intégrale de la forme :

$$I(s) = \int_0^{+\infty} x^{-s-1} e^{P(\frac{1}{x})} \varphi(x) dx$$

où :

. P est un polynôme de degré $p \geq 2$:

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x \quad \text{avec } \operatorname{Re}(a_p) < 0.$$

. $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans un petit secteur de centre l'axe réel positif et y admettant un développement asymptotique (lorsque x tend vers 0) de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0).$$

L'étude de ce type d'intégrales se fait par la méthode du col [Du A.] :

A- Les cols sont les zéros de la dérivée de la fonction $h(x) = \text{slog}(x) + P(1/x)$, ce sont donc les racines de l'équation implicite:

$$(1) \quad s = (1/x) P'(1/x)$$

qui peut s'écrire aussi :

$$(1') \quad w_j = x/f(x) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, p-1$$

où :

$$w_j = \left(\frac{p a_p}{s} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{p |a_p|}{|s|} \right)^{\frac{1}{p}} \exp \frac{i}{p} (\alpha_p - \sigma + 2j\pi)$$

$f(x)$ est la fonction analytique au voisinage de 0 :

$$f(x) = Q(x)^{1/p}$$

avec :

$$Q(x) = 1 + \sum_{k=2}^p [ka_k / (pa_p)] x^{p-k}.$$

On peut obtenir des développements de ces cols en séries convergentes (pour $|s|$ assez grand) en utilisant la formule d'inversion de Lagrange [De Br] et l'équation (1') :

$$x_j = w_j + \sum_{i=2}^{\infty} c_i w_j^i$$

où :

$$c_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (f(x)^i) \right]_{x=0}$$

B - La contribution dominante est fournie par celui des p cols qui est le plus proche de l'axe réel positif, soit x_0 . On écrit alors :

$$I(s) = \int_0^{2x_0} + \int_{2x_0}^{+\infty} = I_1(s) + I_2(s)$$

On montre que $I_2(s)$ est exponentiellement négligeable devant $I_1(s)$. $I(s)$ a donc le même développement asymptotique que $I_1(s)$.

C - $I_1(s)$ possède un développement asymptotique de la forme :

$$(A1) \quad I_1(s) \sim x_0^s e^{P(1/x_0)} (2\pi/(-sp))^{1/2} \left[b_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i (pa_p/s)^{i/p} \right]$$

Pour obtenir ce développement on procède de la façon suivante :

a) On effectue dans $I_1(s)$ le changement de variable : $x = x_0(1+t)$:

$$I_1(s) = x_0^s \int_{-1}^{+1} (1+t)^{s-1} e^{P\left(\frac{1}{x_0(1+t)}\right)} \varphi(x_0(1+t)) dt.$$

b) On développe $P(1/(x_0(1+t)))$ suivant les puissances de s :

$$P\left(\frac{1}{x_0(1+t)}\right) = P\left(\frac{1}{x_0}\right) + \frac{s}{p} \left(\frac{1}{(1+t)^p} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{p-1} (pa_p/s)^{1-j/p} g_j(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} (pa_p/s)^{j/p} h_j(t).$$

où les g_j et h_j sont des fonctions holomorphes de t , telles que $g_j(t) = O(t^2)$ et $h_j(t) = O(t^2)$.

D'où :

$$I_1(s) = x_0^s e^{P(1/x_0)} \int_{-1}^{+1} e^{sp(t) + r(s,t)} q(s,t) dt.$$

où :

- $p(t) = \log(1+t) + (1/p) (1/(1+t)^p - 1) = (p/2)t^2 + O(t^3)$
- $r(s,t) = \sum_{j=1}^{p-1} (s/pa_p)^{1-j/p} g_j(t)$
- $q(s,t) \sim b_0 + \sum_{i \geq 1} (pa_p/s)^{i/p} q_i(t).$

c) On écrit :

$$r(s, t) = s \left[\sum_{j=1}^{p-1} w^j \bar{g}_j(t) \right]_{w = \left(\frac{pa_p}{s}\right)^{1/p}}$$

$$q(s, t) = q_w(t) \sim b_0 + \sum_{i \geq 1} w^i q_i(t).$$

et on pose alors :

$$p_w(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{p-1} w^j \bar{g}_j(t)$$

d'où :

$$I_1(s) = x_0^s e^{P(1/x_0)} \int_{-1}^{+1} e^{sp_w(t)} q_w(t) dt.$$

d) La fonction $p_w(t)$ se comporte (pour $|w|$ assez petit) comme la fonction $p(t)$. On peut appliquer la méthode du col à l'intégrale $I_1(s)$: l'origine est un col et le segment $[-1, +1]$ est une ligne de descente, ainsi :

$$(A2) \quad \int_{-1}^{+1} e^{sp_w(t)} q_w(t) dt \sim 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \Gamma(i+1/2) \beta_i(w) / s^{i+1/2}$$

où $\beta_0(t) = q_w(0) / (-2p''_w(0))^{1/2}$, et où les β_i ($i \geq 1$) dépendent analytiquement de w pour $|w|$ assez petit.

e) On remarque que $sp''_w(0) = sp +$ termes d'ordre $1-1/p, 1-2/p, \dots, 1/p$ du développement de $(1/x_0)^2 P''(1/x_0)$ suivant les puissances de s .

f) On remplace w par $(pa_p/s)^{1/p}$ dans le développement (A2) puis on regroupe les termes.

D - La partie irrégulière du développement asymptotique est issue de :

$$x_0^s e^{P(1/x_0)}$$

Pour obtenir des développements explicites de ces quantités suivant les puissance de s , on utilise la formule d'inversion de Lagrange :

a) D'une part on a : $x^s = w e^{s \log(w/x)}$, où $w = (pa_p/s)^{1/p}$ (on supprime l'indice 0). Mais $F(x) = \log(w/x) = (1/p) \log(Q(x))$ est une fonction analytique de x au voisinage de 0 et la formule d'inversion de Lagrange en donne le développement en w :

$$F(x) = F(0) + \sum_{i=1}^{+\infty} d_i w^i$$

où :

$$d_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (F'(x) f(x)^i) \right]_{x=0} = \frac{1}{i \cdot i!} \left[\frac{d^i}{dx^i} (Q(x)^{i/p}) \right]_{x=0}$$

En particulier $d_p = 0$ puisque $Q(x)$ est de degré $p-1$. Donc :

$$x^s = (pa_p/s)^{s/p} \exp(s [d_1 (pa_p/s)^{1/p} + d_2 (pa_p/s)^{2/p} + \dots + d_{p-1} (pa_p/s)^{(p-1)/p}]) (1 + O(1/|s|^{1/p}))$$

b) D'autre part on a :

$$\frac{d}{dw} (P(1/x)) = (-1/x^2)'(1/x) \frac{dx}{dw} = (-s/x) \frac{dx}{dw} = -s \frac{d}{dw} (\log x)$$

Or $\log(x) = (1/p) \log(Q(x)) + \log(w)$, et à partir du résultat précédent on obtient la nouvelle contribution exponentielle.

Finalement :

$$x^s e^{P(1/x)} = (pa_p/s)^{s/p} \exp(s/p + \sum_{n=1}^{p-1} A_n (s/pa_p)^{1-n/p} + A_p) (1 + O(1/|s|^{1/p}))$$

où $A_n = (p^2 a_p / (p-n)) \cdot d_p$ (pour $n = 1, 2, \dots, p-1$).

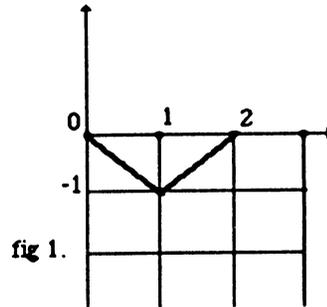
Mais cette méthode ne donne pas A_p , que l'on calcule en remarquant que c'est le coefficient de w^p dans le développement en w de $w^p P(1/x) = x^p P(1/x)/Q(x)$ qui est une fonction holomorphe au voisinage de 0, ce qui permet cette fois encore d'utiliser la formule de Lagrange.

7. Exemples

Exemple 1

$$\Delta_1(u) = u(s+2) - 2(s+1)u(s+1) + u(s) = 0.$$

Le polygone de Newton de Δ_1 est le suivant:



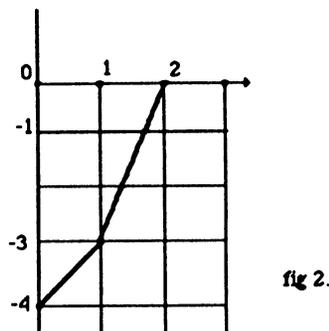
La plus petite pente négative est $p^* = (-1)$, on fait donc le changement de variable:

$$u(s) = \Gamma(s)^{(-2)}v(s)$$

On obtient l'équation aux différences:

$$\Delta(v) = v(s+2) - 2(s+1)^3v(s+1) + s^2(s+1)^2v(s) = 0.$$

dont le polygone de Newton est de la forme:



L'inverse de Pincherle de Δ est l'opérateur différentiel d'ordre 4 :

$$D = x^6\partial^4 + (8x^5 - 2x^4)\partial^3 + (14x^4 - 6x^3)\partial^2 + (4x^3 - 2x^2)\partial + 1.$$

Les solutions formelles généralisées de D sont :

$$(x_1(t) = t, y_1(t) = e^{-2t} t \{ 1 + (-5/8)t + \dots \})$$

$$(x_2(t) = (-27/2)^2 t^3, y_2(t) = e^{-27/(2t)} t \{ 1 + (-5/162)t + \dots \})$$

Les solutions asymptotiques de Δ sont :

$$v_1(s) = 2^{(-s)} (s/e)^s \sqrt{2\pi/s} (1 - 1/(6s) + \dots).$$

$$v_2(s) = 2^s (s/e)^{3s} \sqrt{2\pi/3s} (9/2s) (1 + 2/(9s) + \dots).$$

où \sqrt{x} désigne la racine carrée de x .

Les solutions asymptotiques de Δ_1 (opérateur initial) sont $u_i(s) = \Gamma(s)^{(-2)} v_i(s)$ ($i = 1, 2$).

or

$$\Gamma(s)^{(-2)} \sim (s/e)^{(-2s)} (s/2\pi) (1 - 1/(6s) + \dots),$$

d'où

$$u_1(s) = 2^{(-s)} (s/e)^{(-s)} \sqrt{s/2\pi} (1 - 1/(3s) + \dots).$$

$$u_2(s) = 2^s (s/e)^s \sqrt{2\pi/s} (3\sqrt{3}/(4\pi)) (1 + 1/(18s) + \dots).$$

Exemple 2:

$$\Delta(u) = u(s+3) - (s+2)_2 u(s+2) - (s+1)_3 u(s+1) + (s)_6 u(s) = 0.$$

l'inverse de Pincherle de l'opérateur aux différences Δ est :

$$D = x^9 \partial^6 - x^6 \partial^4 - x^3 \partial^2 + 1$$

Les solutions formelles généralisées de D sont :

$$(x(t) = -4t^2, Y_1(t) = e^{1/t} t^{15/2} \{ 1 + \frac{3}{8} t + \dots \})$$

et

$$(x(t) = 576 t^4, Y_2(t) = e^{-1/12t^2 + 1/t} t^{29/2} \{ 1 + \frac{135}{8} t + \dots \}).$$

Le seul secteur de décroissance associé à Y_1 est :

$$\Sigma_{11} = \{ t / \operatorname{Re}(t) < 0 \}.$$

Les secteurs de décroissance associés à Y_2 sont :

$$\Sigma_{21} = \{ t / -\pi/4 < \text{Re}(t) < \pi/4 \} \quad \text{et} \quad \Sigma_{22} = \{ t / 3\pi/4 < \text{Re}(t) < 5\pi/4 \}$$

Les solutions asymptotiques de Δ sont :

$$u_1(s) = (-4)^{-s} \int_0^{-\infty} t^{-2s-1} Y_1(t) dt$$

$$u_2(s) = (576)^{-s} \int_0^{+\infty} t^{-4s-1} Y_2(t) dt$$

$$u_3(s) = (576)^{-s} \int_0^{-\infty} t^{-4s-1} Y_2(t) dt$$

d'où :

$$u_1(s) = (-4)^{-s} e^{1/w} w^{-2s} \text{sqrt}(\pi/s) w^{15/2} (1 + 379/12 w + \dots)$$

avec $w = (1/2s)$

$$u_2(s) = (576)^{-s} e^{(-1/(12w^2) + 1/w + 3/2)} w^{-4s} \text{sqrt}(\pi/4s) w^{29/2} (1 + (-213/8)w + \dots)$$

avec $w = \text{sqrt}(1/(24s))$

$$u_3(s) = (576)^{-s} e^{(-1/(12w^2) + 1/w + 3/2)} w^{-4s} \text{sqrt}(\pi/4s) w^{29/2} (1 + (-213/8)w + \dots)$$

avec $w = -\text{sqrt}(1/(24s))$.

Appendice.

Méthode de Ramis.

Cette méthode repose sur quelques résultats assez récents de la théorie des équations différentielles linéaires à singularités irrégulières et, en particulier, sur les résultats que nous rappelons ci-dessous .

1. Rappels théoriques:

Considérons un opérateur différentiel :

$$D = \sum_{p=0}^n A_p \frac{d^p}{dx^p}$$

où les $A_p \in \mathbb{C}[x]$.

1.1. Indice d'irrégularité de D .

Définition . On appelle irrégularité de D (en 0) le nombre

$$i(D) = \sup_{0 \leq p \leq n} [(p - v(A_p)) - (n - v(A_n))]$$

où $v(A_p)$ désigne la valuation de A_p .

Théorème [Ma 2] L'application $D : \mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}\{x\} \rightarrow \mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}\{x\}$ a les deux propriétés suivantes:

- (i) D est surjective
- (ii) $\dim_{\mathbb{C}} \ker(D) = i(D)$.

1.2. Isomorphisme de Malgrange ([Ma 3]).

On appelle ainsi l'isomorphisme:

$$\mu : \mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}\{x\} \rightarrow H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$$

- S^1 cercle unité dans \mathbb{C} ,

- \mathfrak{A} est un faisceau sur S^1 fabriqué de la manière suivante: Soit U un ouvert de S^1 et V le secteur angulaire de \mathbb{C} associé à U (i.e. $\{ (\rho, \theta) / \rho > 0 \text{ et } \theta \in U \}$); on définit $\mathfrak{A}(U)$ comme étant l'ensemble des germes en 0 des fonctions holomorphes dans V , admettant en

0 un développement asymptotique de 'Taylor'. On définit alors \mathfrak{A} comme étant le faisceau associé au préfaisceau $U \rightarrow \mathfrak{A}(U)$.

- \mathfrak{A}_0 est le sous faisceau des $f \in \mathfrak{A}$ admettant un développement asymptotique identiquement nul à l'origine.

- $H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$ est le premier espace de cohomologie sur S^1 à valeurs dans \mathfrak{A}_0 : considérons un recouvrement $U = \{U_i\}_{i \in I}$ de S^1 par des ouverts connexes ($\neq S^1$) tels que les intersections des U_i trois à trois soient vides.

Un élément de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_0) = H^1(U, \mathfrak{A}_0)$ est une collection $(f_{ij})_{i,j \in I}$ telle que f_{ij} appartienne à $\mathfrak{A}_0(U_i \cap U_j)$.

Deux collections (f_{ij}) et (g_{ij}) sont identiques si et seulement si il existe $(f_i)_{i \in I}$ telle que :

- (i) $f_i \in \mathfrak{A}_0(U_i)$
- (ii) $f_{ij} - g_{ij} = f_j - f_i \quad \forall i, j \in I$.

Dans [Ma 3] Malgrange construit μ et montre que c'est un isomorphisme. En utilisant la transformée de Cauchy - Heine, Ramis [Ra 1] redémontre très simplement la surjectivité de μ .

a) Description de μ :

Soit $f \in \mathbb{C}[[x]]$, d'après le théorème de Borel-Ritt pour tout $i \in I$, il existe f_i appartenant $\mathfrak{A}_0(U_i)$ tel que f soit le développement asymptotique en 0 de f_i dans le secteur du plan complexe défini par U_i (on note $f_i \sim f$). On pose $f_{ij} = f_j - f_i \in \mathfrak{A}_0(U_i \cap U_j)$. La collection $(f_{ij})_{i,j \in I}$ définit un élément de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$ et il est facile de voir que cet élément ne dépend pas du choix particulier des f_i mais dépend uniquement de f . D'où une application

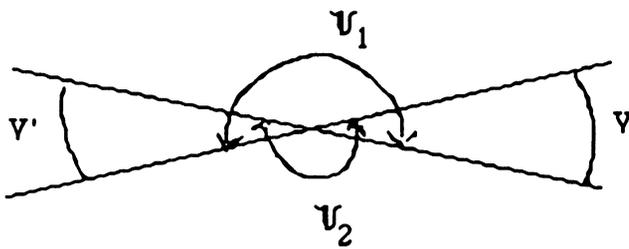
$$\mu : \mathbb{C}[[x]] \rightarrow H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$$

dont on voit aussitôt que le noyau est égal à $\mathbb{C}\{x\}$ (ensemble des séries convergentes en 0). Par passage au quotient on obtient une application injective

$$\mu : \mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}\{x\} \rightarrow H^1(S^1, \mathfrak{A}_0).$$

b) Description de μ^{-1} :

On se donne un secteur ouvert V et une fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_0(V)$ et on fabrique un élément de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$ qu'on appelle élément élémentaire et qu'on note (V, φ) de la façon suivante: On considère le recouvrement $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ représenté sur le dessin:



$$U_1 \cap U_2 = V \cup V'$$

(V, φ) est la classe de cohomologie du 1-cocycle défini par φ sur V et 0 sur V' . Bien sûr (V, φ) ne dépend pas de V' et la famille des (V, φ) où $\varphi \in \mathfrak{A}_0(V)$ engendre le \mathbb{C} -espace vectoriel $H^1(S^1, \mathfrak{A}_0)$. Il suffit puisque μ est linéaire injective de définir $\mu^{-1}(V, \varphi)$ tel que $\mu(\mu^{-1}(V, \varphi)) = (V, \varphi)$.

Soit γ un chemin d'origine 0 contenu dans V , la transformée de Cauchy-Heine:

$$H_\gamma \varphi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

est holomorphe pour $z \in \mathbb{C} - \gamma$ et peut être prolongée (en faisant "bouger" γ en laissant ses extrémités fixes) en une fonction holomorphe dans un secteur (de la surface de Riemann du logarithme) d'ouverture $2\pi + \text{ouverture}(V)$ telle que:

- (i) si $f_1 = H_\gamma \varphi|_{V_1}$ et $f_2 = H_\gamma \varphi|_{V_2}$ alors $(f_2 - f_1)|_V = \varphi$ et $(f_2 - f_1)|_{V'} = 0$.
- (ii) $H_\gamma \varphi$ admet un développement asymptotique en 0 dans V de la forme $\sum a_n z^n$

où
$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t^{-n-1} \varphi(t) dt \quad (\text{transformée de Pincherle})$$

et ce développement asymptotique (modulo $\mathbb{C}\{z\}$) ne dépend pas du chemin choisi dans V . On note $H\varphi$ ce développement et on pose $\mu^{-1}(V, \varphi) = H\varphi$. Il est clair à partir de la définition de μ^{-1} et de la propriété (i) ci-dessus que $\mu(H\varphi) = (V, \varphi)$.

L'isomorphisme μ induit un autre isomorphisme:

$$H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D}) \longrightarrow \text{Ker}(\mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]] / \mathbb{C}[x])$$

où $\mathfrak{A}_{0,D}$ désigne le sous faisceau des $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ telles que $D\varphi = 0$. Autrement dit, on a le

Théorème . $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D}) = i(D)$.

Remarque: On peut ajouter la propriété suivante à la description de μ^{-1} : Si (V, φ) est tel que $D\varphi = 0$ dans V alors $DH_{\gamma}\varphi(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, autrement dit $\mu^{-1}(V, \varphi) \in \text{Ker}D$.

En conclusion le \mathbb{C} -espace vectoriel $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$ possède une base de $i(D)$ éléments élémentaires (V_i, φ_i) tels que $\varphi_i \in \mathfrak{A}_0(V_i)$ et $D\varphi_i = 0$ dans V_i .

1.3 Bases privilégiées - Bases semi-canoniques. (cf. [Ra 3])

Définitions.

(i) Une base privilégiée de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$ est une base formée d'éléments élémentaires (V_i, φ_i) tels que $\varphi_i(x) = \exp(P_i(x^{-1/r})) \psi_i(x^{-1/r})$ où $P_i \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\psi_i = \sum_{v=1, \dots, l} x^{\alpha_v} \sum_{j=1, \dots, l_i} \psi_{vj}(x)(\log x)^j$, avec $\psi_{vj} \in \mathfrak{A}_0(V_i)$ et $D\varphi_i = 0$ dans V_i .

(ii) Une base privilégiée est dite semi-canonique si V_i contient une ligne singulière de P_i (i.e bissectrice d'un secteur de décroissance de P_i)

Théorème [Ra 3] Le \mathbb{C} -espace vectoriel $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$ possède une base semi-canonique.

Remarque Il est difficile de calculer effectivement une base semi-canonique (sauf dans le cas générique où $N(D)$ a une unique pente). Le choix d'une base privilégiée est possible dans tous les cas.

2. Formations des solutions de l'équation linéaire aux différences.

On se place dans le cas où $N(\Delta)$ a toutes ses pentes strictement positives, dans ce cas $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D}) = i(D) = m$ (ordre de Δ). Soient $(V_1, \varphi_1), \dots, (V_m, \varphi_m)$ les éléments d'une base de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$. L'opérateur D ayant une singularité régulière à l'infini, les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont d'une croissance modérée à l'infini et si $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ désignent des demi-droites issues de 0 tracées respectivement dans chaque V_i ($i = 1, \dots, m$) les intégrales :

$$g_i(s) = \int_{\gamma_i} t^{-s-1} \varphi_i(t) dt$$

sont définies et holomorphes pour $\operatorname{Re}(s) > N_1$ (N_1 un nombre réel positif convenable) et sont solutions de Δ dans ce demi-plan.

Définition. Une fonction f méromorphe sur \mathbb{C} est dite à croissance lente au plus exponentielle d'ordre 1 s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \lambda$, il existe des réels $C > 0$, $M \geq 0$ et α tels que pour tout x appartenant à \mathbb{C} vérifiant $\sigma_1 \leq \operatorname{Re}(x) \leq \sigma_2$ et $|\operatorname{Im}(x)| \geq M$ on ait $|f(x)| < C \exp(\alpha |\operatorname{Im}x|)$.

Soit \mathcal{U} l'ensemble des fonctions à croissance lente au plus exponentielle d'ordre 1, alors :

- (i) \mathcal{U} est un $\mathbb{C}(e^{i2\pi x})$ -espace vectoriel,
- (ii) $\mathcal{U} \cap \{ \text{fonctions périodiques de période 1} \} = \mathbb{C}(e^{i2\pi x})$,
- (iii) \mathcal{U} est stable par τ .

L'opérateur Δ induit sur \mathcal{U} un opérateur $\mathbb{C}(e^{i2\pi x})$ -linéaire. On note $\mathcal{U}_\Delta = \operatorname{Ker}(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U})$ cet espace de solutions méromorphes à croissance lente au plus exponentielle d'ordre 1 de l'équation $\Delta u = 0$. \mathcal{U}_Δ est un $\mathbb{C}(e^{i2\pi x})$ -espace vectoriel.

Théorème [Ra 4] La famille $\{ g_1, \dots, g_m \}$ est une base de \mathcal{U}_Δ .

Démonstration

- 1) m fonctions h_1, \dots, h_m de \mathcal{U} forment une base de solutions de Δ si et seulement si le déterminant de Casorati $C(h_1, \dots, h_m)$ n'est pas identiquement nul sur \mathbb{C} .
- 2) $C(g_1, \dots, g_m)$ n'est pas identiquement nul sur \mathbb{C} : $g_1(n), \dots, g_m(n)$ (pour $n \geq N_1$) forment une base du \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions de l'équation récurrente linéaire $\Delta|_{\mathbb{Z}}$, car ils sont l'image par μ^{-1} d'une base de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$ (en identifiant une série formelle avec la suite de ses coefficients). On n'en déduit que $C(g_1(n), \dots, g_m(n))$ n'est pas identiquement nul sur \mathbb{Z} .

Signalons pour terminer que dans [Ra 3] J.P Ramis démontre le

Théorème.

Si les fonctions g_1, \dots, g_m sont obtenues à partir d'une base semi-canonique de $H^1(S^1, \mathfrak{A}_{0,D})$ alors elles admettent, dans un secteur convenable contenant l'axe réel positif, des développements asymptotiques généralisés de la forme indiquée dans le paragraphe 4.

Chapitre 4

Réduction d'un système linéaire aux différences à une seule équation aux différences linéaire. Méthode du vecteur cyclique.

Nous présentons dans ce chapitre une méthode, due à G. Birkhoff [Bi 2], permettant de ramener un système linéaire de n équations aux différences du premier ordre à coefficients rationnels¹ à une seule équation linéaire aux différences d'ordre n à coefficients rationnels. Nous montrons ensuite que cette réduction peut se faire à l'aide d'un vecteur dit *cyclique* que l'on peut choisir polynomial. Ce résultat nous a permis d'implanter cette méthode sur REDUCE. Nous donnons quelques exemples à la fin du chapitre.

1. Système linéaire aux différences associé à une équation linéaire aux différences.

Soit une équation linéaire aux différences homogène d'ordre n :

$$a_0(z) \delta^n y(z) + a_1(z) \delta^{n-1} y(z) + \dots + a_n(z) y(z) = 0 \quad (1.1)$$

où les a_i appartiennent au corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(z)$ avec $a_0 a_n \neq 0$, δ désignant l'opérateur aux différences habituel : $\delta w(z) = w(z+1) - w(z)$.

Il est bien connu que l'équation (1.1) peut toujours être ramenée à un système aux différences linéaire et homogène du premier ordre . En effet, si on pose

¹ On pourrait également travailler avec des systèmes à coefficients séries de factorielles généralisées.

$$y_1(z) = y(z),$$

et pour $i = 2, \dots, n$

$$y_i(z) = \delta^{i-1} y(z),$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} \delta y_1 = y_2 \\ \delta y_2 = y_3 \\ \dots \\ \delta y_{n-1} = y_n \\ \delta y_n = \frac{-a_n}{a_0} y_1 + \dots + \frac{-a_1}{a_0} y_n, \end{cases}$$

qui s'écrit

$$\delta Y(z) = C(z)Y(z), \quad (1.2)$$

où

$$Y(z) = {}^t(y_1(z), \dots, y_n(z)),$$

$$\delta Y(z) = {}^t(\delta y_1(z), \dots, \delta y_n(z)),$$

et où $C(z)$ est la matrice compagnon

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \\ & & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \frac{-a_n(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_{n-1}(z)}{a_0(z)} & \dots & \dots & \dots & \frac{-a_1(z)}{a_0(z)} \end{pmatrix}$$

Remarquons que la matrice C appartient à $M_n(\mathbb{C}(z))$.

Il est clair que si y est solution de (1.1) alors le vecteur ${}^t(y, \delta y, \dots, \delta^{n-1}y)$ est solution de (1.2) et inversement si ${}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est solution de (1.2) alors $y(z) = y_1(z)$ est solution de (1.1).

On appellera le système (1.2) le *système aux différences compagnon associé* à l'équation (1.1).

Considérons maintenant un système aux différences linéaire et homogène du premier ordre :

$$\delta w(z) = A(z)w(z) \quad (1.3)$$

où A est une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C}(z))$ et $w = {}^t(w_1, \dots, w_n)$.

Soit T une matrice appartenant à $GL(n, \mathbb{C}(z))$, si on effectue le changement de variable

$$w(z) = T(z)u(z), \quad (1.4)$$

on obtient le nouveau système

$$\delta u(z) = B(z)u(z), \quad (1.5)$$

où

$$B(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) \quad (1.6)$$

appartient à $M_n(\mathbb{C}(z))$.

La transformation (1.4) établit une correspondance biunivoque entre les solutions² du système (1.3) et celles du système (1.5); de plus si U est une matrice fondamentale méromorphe³ du système (1.5), alors $W = TU$ est une matrice fondamentale méromorphe de (1.3).

Définition 1. Deux systèmes aux différences linéaires et homogènes d'ordre 1 :

$$\delta w(z) = A(z)w(z)$$

et

² Par solution on entend solution méromorphe.

³ Un système linéaire à coefficients rationnels admet toujours un système fondamental de solutions méromorphes (cf. [No 2] p.120).

$$\delta u(z) = B(z)u(z)$$

où A et B appartiennent à $M_n(\mathbb{C}(z))$, sont dits *équivalents* s'il existe une transformation $T \in GL(n, \mathbb{C}(z))$ telle que :

$$B(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z).$$

Dans les mêmes conditions nous dirons que les matrices A et B sont *équivalentes* par la transformation T .

2. Réduction d'un système linéaire de n équations à une seule équation linéaire d'ordre n - Méthode de Birkhoff.

Considérons un système aux différences linéaire et homogène du premier ordre :

$$\delta w(z) = A(z)w(z) \quad (2.1)$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C}(z))$ ($n \geq 2$) et $w = {}^t(w_1, \dots, w_n)$.

Ce système peut s'écrire sous la forme

$$w(z+1) = (I + A(z))w(z), \quad (2.2)$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n. Il est donc naturel d'associer au système (2.1) la matrice

$$\hat{A}(z) = I + A(z). \quad (2.3)$$

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\det \hat{A}(z)$ est non identiquement nul (dans le cas contraire on peut se ramener à un système à p équations ($p < n$) dont le déterminant en question est non identiquement nul).

Birkhoff, dans [Bi 2], propose une méthode permettant de réduire un système de la forme (2.1) à une seule équation (linéaire et homogène) aux différences d'ordre n.

L'idée est de chercher $y(z)$ sous la forme

$$y(z) = \lambda_1(z)w_1(z) + \lambda_2(z)w_2(z) + \dots + \lambda_n(z)w_n(z) \quad (2.4)$$

où les $\lambda_i(z)$ sont des fonctions (appartenant à $\mathbb{C}(z)$) arbitraires pour l'instant. En calculant successivement $\delta y(z)$, $\delta^2 y(z)$, ... , $\delta^n y(z)$ et en remplaçant à chaque étape $\delta w_i(z)$ par son expression (2.1), on obtient les (n+1) équations suivantes:

$$\begin{cases} y(z) = b_{01}(z)w_1(z) + \dots + b_{0n}(z)w_n(z) \\ \delta^2 y(z) = b_{11}(z)w_1(z) + \dots + b_{1n}(z)w_n(z) \\ \dots\dots\dots \\ \delta^n y(z) = b_{n1}(z)w_1(z) + \dots + b_{nn}(z)w_n(z) \end{cases} \quad (2.5)$$

où l'on a posé

$$(b_{01}, \dots, b_{0n}) = \Lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

et pour $i=1, \dots, n$

$$(b_{i1}, \dots, b_{in}) = \Lambda_i = \delta\Lambda_{i-1} + (\tau\Lambda_{i-1})A, \quad (2.6)$$

τ étant l'opérateur de translation : $\tau w(z) = w(z+1)$.

Ces relations peuvent s'écrire aussi sous la forme :

$$\Lambda_i = (\delta\Lambda_{i-1})\hat{A} + \Lambda_{i-1}A. \quad (2.6 \text{ bis})$$

Pour $k = 0, 1, \dots, n$, on pose

$$B_k = (b_{ij})_{0 \leq i \leq n, i \neq k \text{ et } 1 \leq j \leq n}$$

Ces matrices appartiennent à $M_n(\mathbb{C}(z))$, et on a d'après (2.6) la relation

$$B_0 = \delta B_n + (\tau B_n)A. \quad (2.7)$$

Il est facile de voir que le système (2.5) n'admet de solutions que si le déterminant

$$D(y) = \begin{vmatrix} y & b_{01} & \dots & b_{0n} \\ \delta^2 y & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^n y & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. Il en résulte une équation linéaire et homogène entre les différences successives de y :

$$b_n(z)\delta^n y(z) + b_{n-1}(z)\delta^{n-1} y(z) + \dots + b_0(z)y(z) = 0, \quad (2.8)$$

où

$$b_k(z) = (-1)^k \det B_k(z).$$

Proposition 1.

On peut choisir les $\lambda_i(z)$ comme étant des polynômes de degré $\leq (n-1)$ tels que

$$b_n(z) = (-1)^n \det B_n(z) \neq 0, \quad (2.9)$$

i.e. tels que l'équation (2.8) soit effectivement d'ordre n .

La démonstration de la proposition 1 résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme 1. Soit z_0 un point du plan complexe tel que $\det \hat{A}(z)$ soit défini et non nul aux point $z = z_0, z_0+1, \dots, z_0+n-2$. Soit $L \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice fixée arbitraire. Alors on peut trouver

$$\Lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}[z])^n,$$

tel que degré de $\lambda_i \leq n-1$ ($i = 1, \dots, n$), et

$$B_n(z_0) = L. \quad (2.10)$$

Les λ_i ($i = 1, \dots, n$) sont déterminés d'une manière unique par ces conditions.

Démonstration du lemme 4: Notons L_i ($i = 1, \dots, n$) les vecteurs lignes de la matrice L , la condition (2.10) s'écrit de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_0(z_0) = L_1 \\ \Lambda_1(z_0) = L_2 \\ \vdots \\ \Lambda_{n-1}(z_0) = L_n \end{array} \right.$$

En utilisant les relations (2.6 bis) on voit que les conditions précédentes sont équivalentes aux conditions suivantes :

⁴Cette démonstration est calquée sur celle donnée par Ramis dans le cas différentiel [Ra 5].

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_0(z_0) = L_1 \\ (\delta\Lambda_0)(z_0)\Phi_{22}(z_0) + \Lambda_0(z_0)\Phi_{21}(z_0) = L_2 \\ (\delta^2\Lambda_0)(z_0)\Phi_{33}(z_0) + (\delta\Lambda_0)(z_0)\Phi_{32}(z_0) + \Lambda_0(z_0)\Phi_{31}(z_0) = L_3 \\ \dots \\ (\delta^{n-1}\Lambda_0)(z_0)\Phi_{nn}(z_0) + (\delta^{n-2}\Lambda_0)(z_0)\Phi_{n,n-1}(z_0) + \dots + \Lambda_0(z_0)\Phi_{n1}(z_0) = L_n \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où les Φ_{ij} sont des fonctions algébriques de $\hat{A}, \delta\hat{A}, \dots, \delta^n\hat{A}$, avec

$$\Phi_{ii}(z) = \hat{A}(z+i-2)\hat{A}(z+i-3)\dots\hat{A}(z)$$

pour $i = 2, \dots, n$.

Par hypothèse les fonctions $\Phi_{ii}(z)$ sont définies et inversibles pour $z = z_0$, on en déduit que les conditions (2.11) considérées comme équations en

$$\Lambda_0(z_0), \delta\Lambda_0(z_0), \dots, \delta^{n-1}\Lambda_0(z_0)$$

admettent une solution unique.

On détermine ensuite les λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de façon unique (degré $\lambda_i \leq n-1$) en utilisant la formule

$$\Lambda_0(z) = \Lambda_0(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}(\delta\Lambda_0)(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)(z-z_0-1)\dots(z-z_0-n+2)}{(n-1)!}(\delta^{n-1}\Lambda_0)(z_0).$$

Cela achève la démonstration du lemme 1.

On peut maintenant supposer que la condition (2.9) est vérifiée.

Si l'on pose, pour $k = 0, 1, \dots, n$,

$$c_k = b_k \cdot b_n^{-1},$$

alors on a

$$(b_{n1}, \dots, b_{nn}) = c_0 (b_{01}, \dots, b_{0n}) + \dots + c_{n-1} (b_{n-1,1}, \dots, b_{n-1,n}),$$

d'où

$$B_0(z) = C(z)B_n(z), \quad (2.12)$$

avec

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -c_0(z) & -c_1(z) & \cdot & \cdot & \cdot & -c_{n-1}(z) \end{pmatrix}$$

Des relations (2.7) et (2.12) on déduit l'égalité

$$\delta B_n(z) + B_n(z+1)A(z) = C(z)B_n(z).$$

Si on pose

$$T^{-1}(z) = B_n(z),$$

on obtient la relation:

$$C(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z),$$

autrement dit les matrices C et A sont équivalentes par la transformation T . Remarquons enfin que C est la matrice du système compagnon associé à l'équation (2.8). D'où le

Théorème 1. Soit

$$(\Delta) \quad \delta w(z) = A(z)w(z),$$

où $A \in M_n(\mathbb{C}(z))$, un système linéaire d'ordre un. Il existe une équation linéaire aux différences

$$(E) \quad b_n(z)\delta^n y(z) + b_{n-1}(z)\delta^{n-1}y(z) + \dots + b_0(z)y(z) = 0,$$

d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, telle que le système compagnon d'ordre un associé à (E) soit équivalent à Δ .

3. Vecteurs cycliques - Définition et propriétés.

Considérons un système aux différences linéaire et homogène d'ordre un :

$$\delta w(z) = A(z)w(z) \tag{3.1}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C}(z))$ ($n \geq 2$). Soit Λ_0 un vecteur ligne non nul à n composantes:

$$\Lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ les vecteurs lignes définis à partir de Λ_0 de la manière suivante:

$$\Lambda_i = \delta\Lambda_{i-1} + (\tau\Lambda_{i-1}).A, \quad (3.2)$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Notons S_{Λ_0} la matrice

$$S_{\Lambda_0} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

appartenant à $M_n(\mathbb{C}(z))$.

Définition 2. Λ_0 est dit *vecteur cyclique* de la matrice A si $\det(S_{\Lambda_0})$ est non identiquement nul.

Si Λ_0 est un vecteur cyclique de la matrice A , on notera T_{Λ_0} (ou simplement T quand il n'y pas d'ambiguïté) la matrice inverse de S_{Λ_0} .

Rappelons les deux résultats essentiels du paragraphe précédent :

1) L'existence d'un vecteur cyclique polynomial (cf. proposition 1).

2) Si Λ_0 est un vecteur cyclique de la matrice A alors le système (3.1) peut être réduit à une équation scalaire aux différences linéaire et homogène d'ordre n , notée $E(\Lambda_0)$:

$$(E(\Lambda_0)) \quad b_n(z)\delta^n y(z) + b_{n-1}(z)\delta^{n-1}y(z) + \dots + b_0(z)y(z) = 0,$$

avec

$$b_n = (-1)^n \det(S_{\Lambda_0}),$$

$$b_0 = \det({}^t\Lambda_1, \dots, {}^t\Lambda_n),$$

et

$$b_k = (-1)^k \det({}^t\Lambda_0, {}^t\Lambda_1, \dots, {}^t\Lambda_{k-1}, {}^t\Lambda_{k+1}, \dots, {}^t\Lambda_n),$$

pour $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Si on note C la matrice compagnon associée à l'équation $E(\Lambda_0)$, on a

$$C(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z),$$

T étant l'inverse de S_{Λ_0} .

Remarque 1. Il est évident que pour une matrice A donnée il existe une infinité de vecteurs cycliques. En effet, si Λ_0 est un vecteur cyclique de A alors $\Lambda_0 P$ est aussi un vecteur cyclique de A , pour toute matrice P appartenant à $GL(n, \mathbb{C})$. A un système aux différences donné correspond donc une infinité d'équations aux différences.

Remarque 2. Si Λ_0 et ϑ_0 sont deux vecteurs cycliques de A ($\Lambda_0 \neq \vartheta_0$) et si $E(\Lambda_0)$ et $E(\vartheta_0)$ désignent respectivement les équations scalaires correspondantes à Λ_0 et ϑ_0 alors les systèmes associés à $E(\Lambda_0)$ et $E(\vartheta_0)$ sont équivalents (en effet ils sont tous les deux équivalents au même système $\delta w(z) = A(z)w(z)$). Inversement on a la proposition :

Proposition 2. Soient A et B deux matrices équivalentes par une matrice P appartenant à $GL(n, \mathbb{C}(z))$. Si Λ_0 est un vecteur cyclique de A alors $\vartheta_0 = \Lambda_0 P$ est un vecteur cyclique de B . De plus les coefficients des équations aux différences scalaires correspondants respectivement à Λ_0 et ϑ_0 sont égaux à un coefficient multiplicatif (appartenant à $\mathbb{C}(z)$) près.

Démonstration Par hypothèse, on a

$$B = (\tau P^{-1})AP - (\tau P^{-1})\delta P.$$

Considérons les vecteurs

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \Lambda_0 P, \\ \vartheta_i &= \delta \vartheta_{i-1} + (\tau \vartheta_{i-1}) \cdot B, \quad (\text{pour } i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.2) on voit que, pour tout i

$$\vartheta_i = \Lambda_i P.$$

On en déduit que

$$S_{\vartheta_0} = S_{\Lambda_0} P,$$

S_{ϑ_0} désignant la matrice dont les lignes sont formées par les vecteurs $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$.

Il en résulte que

$$\det(S_{\vartheta_0}) = \det(S_{\Lambda_0}) \det(P).$$

Donc ϑ_0 est vecteur cyclique de B si et seulement si Λ_0 est vecteur cyclique de A.

Si on note b_k (resp. c_k) les coefficients de l'équation $E(\Lambda_0)$ (resp. $E(\vartheta_0)$) alors on a

$$b_k = c_k \cdot \det(P).$$

La démonstration de la proposition est achevée.

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut il existe une infinité de vecteurs cycliques, et selon le vecteur choisi on trouve des équations plus ou moins "compliquées" (cf. §5. exemple1).

Dans le cas particulier où la matrice A est à coefficients polynomiaux de degré inférieur à un certain entier m, si Λ_0 est un vecteur cyclique de A polynomial de degré inférieur à un certain entier p, alors les coefficients b_k de l'équation $E(\Lambda_0)$ sont des polynômes et on a

$$\text{degré} (b_k) \leq np + m (n(n+1)/2 - k).$$

Afin d'obtenir des coefficients relativement simples il faut choisir Λ_0 de degré le plus petit possible. Le théorème suivant donne une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'il existe des vecteurs cycliques constants.

Théorème 2. Si la matrice A_0 , dans le développement

$$A(z) = z^q \sum_{k=0}^{+\infty} A_k z^{-k},$$

est cyclique (i.e. son polynôme minimal coïncide avec son polynôme caractéristique), alors tout vecteur cyclique de A_0 est cyclique pour $A(z)$.

Démonstration D'une part, si Λ_0 est un vecteur non nul constant , la matrice S_{Λ_0} définie par (3.3) s'écrit

$$S_{\Lambda_0} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_0 A \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_0 A^{n-1} \end{pmatrix} = \text{diag}(1, z^q, \dots, z^{(n-1)q}) \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_0 N \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_0 N^{n-1} \end{pmatrix},$$

où $N = z^{-q} A$.

Donc

$$\det(S_{\Lambda_0}) = z^{qn(n-1)/2} \det \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_0 N \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_0 N^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que Λ_0 est cyclique pour A si et seulement si il l'est pour N .

D'autre part, pour tout i

$$N^i(z) = A_0^i + O(z^{-1}),$$

d'où

$$\det \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_0 N \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_0 N^{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_0 A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda_0 A_0^{n-1} \end{pmatrix} + O(z^{-1}).$$

Il en résulte que si Λ_0 est vecteur cyclique de A_0 alors il est cyclique pour N .

4. Conclusion.

Tout système de n équations aux différences du premier ordre à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ peut être réduit, à l'aide d'un vecteur cyclique, à une seule équation d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Nous avons montré qu'un tel vecteur peut toujours être choisi polynomial. Grâce à ce résultat il est possible, du point de vue du Calcul Formel, de mettre en œuvre cette méthode.

Du point de vue théorique l'intérêt de cette méthode est évident. Elle permet de transporter sur un système aux différences les notions applicables aux équations aux différences scalaires. Cependant du point de vue pratique, elle semble (voir les exemples ci-dessous) assez lourde et coûteuse!

5. Exemples.

Nous avons écrit un programme, sur REDUCE, qui teste si un vecteur donné Λ_0 est cyclique et qui retourne, le cas échéant, les coefficients b_i de l'équation aux différences correspondante et ceux de la transformation T_{Λ_0} permettant de passer du système à l'équation.

Dans ce paragraphe nous donnons deux exemples traités par ce programme. Pour aider

à la lisibilité de ces exemples, on note que l'on trouvera :

- l'appel du programme qui se fait par la commande `vecteur_cyclique()`;
- le dialogue interactif pour l'introduction des données,
- l'impression des coefficients b_i de l'équation scalaire et ceux de la transformation T.

Exemple 1.

Dans cet exemple on considère la matrice d'ordre 2

$$A(z) = \begin{pmatrix} (3z+4)/(z+2) & -(z+1)/(z+2) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

```
vecteur_cyclique();
```

Donner la taille de la matrice A du systeme

```
2;
```

Donner les coefficients de la matrice A du systeme par ligne

```
(3*z+4)/(z+2);-(z+1)/(z+2);1;-1;
```

Donner les composantes de votre vecteur

```
0;1;
```

```
vecteur(1) = 0
```

```
vecteur(2) = 1
```

```
correction ? ( oui;/ non; )
```

```
non;
```

Le vecteur choisi est cyclique,

les coefficients de l'equation associee sont :

```
b2 = -1
```

```
b1 = (2*(Z + 1))/(Z + 2)
```

```
b0 = (2*Z + 3)/(Z + 2)
```

Les coefficients de la transformation T sont :

```
T11 = 0
```

```
T12 = 1
```

$$T_{21} = 1$$

$$T_{22} = -1$$

autre essai?(oui;/ non;)

oui;

Donner les composantes de votre vecteur

1;0;

$$\text{vecteur}(1) = 1$$

$$\text{vecteur}(2) = 0$$

correction ? (oui;/ non;)

non;

Le vecteur choisi est cyclique,
les coefficients de l'equation associee sont :

$$b_2 = - (Z + 1)/(Z + 2)$$

$$b_1 = (2*(Z + 1))/(Z + 3)$$

$$b_0 = (2*Z^2 + 7*Z + 5)/(Z^2 + 5*Z + 6)$$

les coefficients de la transformation T sont :

$$T_{11} = 1$$

$$T_{12} = 0$$

$$T_{21} = (3*Z + 4)/(Z + 2)$$

$$T_{22} = - (Z + 1)/(Z + 2)$$

Exemple 2.

Dans cet exemple on considère la matrice d'ordre 4

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1/z & -2z & 0 & z \\ 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 2/z & 0 & 0 & -1/z \\ z & 2/z & 1/z & -3/z \end{pmatrix}$$

On peut remarquer, comme le montre cet exemple, que bien que l'ordre n soit faible (n = 4) et les coefficients de A soient simples , les coefficients bi de l'équation scalaire et la transformation T ont des expressions relativement "compliquées" :

vecteur_cyclique();

Donner la taille de la matrice A du systeme

4;

Donner les coefficients de la matrice A du systeme par ligne

1/z;-2*z;0;z;0;0;z**2;0;2/z;0;0;-1/z;z;2/z;1/z;-3/z;

Donner les composantes de votre vecteur

0;0;1;0;

vecteur(1) = 0

vecteur(2) = 0

vecteur(3) = 1

vecteur(4) = 0

correction ? (oui;/ non;)

non;

Le vecteur choisi est cyclique,

les coefficients de l'équation associée sont :

$$b_4 = - \frac{(2*(3*Z^6 + 6*Z^5 - Z^4 - 24*Z^3 - 67*Z^2 - 7*Z + 11))}{(Z^3 * (Z^3 + 4*Z^2 + 5*Z + 2))}$$

$$b3 = - (2*(6*Z^6 + 23*Z^5 + 2*Z^4 - 292*Z^3 - 642*Z^2 - 12*Z + 118))/(Z^3 * (Z^4 + 7*Z^3 + 17*Z^2 + 17*Z + 6))$$

$$b2 = (2*(3*Z^{10} + 24*Z^9 + 74*Z^8 + 68*Z^7 - 189*Z^6 - 602*Z^5 - 478*Z^4 + 340*Z^3 + 516*Z^2 - 271*Z - 185))/(Z^3 * (Z^5 + 9*Z^4 + 31*Z^3 + 51*Z^2 + 40*Z + 12))$$

$$b1 = - (2*(12*Z^{11} + 105*Z^{10} + 374*Z^9 + 606*Z^8 - 120*Z^7 - 2784*Z^6 - 6405*Z^5 - 7331*Z^4 - 3898*Z^3 - 113*Z^2 + 620*Z + 144))/(Z^3 * (Z^6 + 10*Z^5 + 40*Z^4 + 82*Z^3 + 91*Z^2 + 52*Z + 12))$$

$$b0 = (2*(6*Z^{12} + 48*Z^{11} + 112*Z^{10} - 104*Z^9 - 912*Z^8 - 878*Z^7 + 3148*Z^6 + 8764*Z^5 + 8797*Z^4 + 4063*Z^3 + 201*Z^2 - 404*Z - 50))/(Z^3 * (Z^6 + 10*Z^5 + 40*Z^4 + 82*Z^3 + 91*Z^2 + 52*Z + 12))$$

les coefficients de la transformation T sont :

$$T11 = 0$$

$$T12 = 0$$

$$T13 = 1$$

$$T14 = 0$$

$$T_{21} = 2/Z$$

$$T_{22} = 0$$

$$T_{23} = 0$$

$$T_{24} = -1/Z$$

$$T_{31} = -Z/(Z + 1)$$

$$T_{32} = - (2*(2*Z^2 + 1))/(Z*(Z + 1))$$

$$T_{33} = -1/(Z*(Z + 1))$$

$$T_{34} = (2*(Z^2 + 2))/(Z*(Z + 1))$$

$$T_{41} = (2*Z^4 + 4*Z^3 + 5*Z^2 - 3*Z - 3)/(Z^2*(Z^2 + 3*Z + 2))$$

$$T_{42} = (2*(Z^4 + 2*Z^3 + 3*Z^2 + 2*Z + 8))/(Z^2*(Z^2 + 3*Z + 2))$$

$$T_{43} = - (2*(2*Z^5 + 4*Z^4 + 3*Z^3 - Z^2 - 2*Z - 4))/(Z^2*(Z^2 + 3*Z + 2))$$

$$T_{44} = - (Z^4 + 2*Z^3 + 7*Z^2 + 10*Z + 25)/(Z^2*(Z^2 + 3*Z + 2))$$

Chapitre 5

Résolution des systèmes aux différences linéaires par des séries de factorielles méromorphes.

1. Introduction

Considérons un système linéaire de n équations aux différences d'ordre un de la forme :

$$\delta w(z) = z^{-1}M(z)w(z), \quad (1.1)$$

où $u(z)$ est un vecteur à n composantes, δ désigne l'opérateur aux différences

$$\delta u(z) = u(z+1) - u(z),$$

$M(z)$ est une matrice carrée d'ordre n admettant une représentation en série de factorielles

$$M(z) = M_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{k+1} k!}{z(z+1)\dots(z+k)}, \quad \operatorname{Re}(z) > \mu, \quad (1.2)$$

les $M_k \in M_n(\mathbb{C})$.

Les systèmes linéaires du type (1.1) sont analogues aux systèmes linéaires différentiels possédant une singularité de première espèce à l'infini [Co – Le]. Plusieurs méthodes utilisées, dans ce dernier domaine, s'appliquent également aux systèmes (1.1). En particulier, il existe une méthode, tout à fait similaire à la méthode de Frobenius pour les systèmes différentiels, qui permet de construire n vecteurs solutions, d'un système du type (1.1), linéairement indépendants de la forme

$$w_i(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\rho_i} \left\{ \varphi_{i0}(z) + \varphi_{i1}(z) \log\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + \varphi_{is_i}(z) \log^{s_i}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad (1.3)$$

où les s_i sont des entiers inférieurs à n , les ρ_i sont des nombres complexes (racines de l'équation caractéristique), et les φ_{ij} sont des vecteurs admettant des développements en séries de factorielles convergents pour $\text{Re}(z)$ assez grand.

Cette méthode est décrite dans [No 2] dans le cas d'une équation linéaire et homogène aux différences finies d'ordre n . Elle a été reprise ensuite par Harris [Ha 1] dans le cadre des systèmes linéaires du premier ordre.

Ce chapitre est consacré à l'étude et à la description de cette méthode.

2. Séries de factorielles - Rappels.

Nous allons brièvement rappeler quelques propriétés et théorèmes qui seront utilisés dans ce chapitre et dans les chapitres suivants. Pour plus de détails et pour les démonstrations nous renvoyons aux ouvrages classiques [No1] et [Milne Thomson].

2.1. Définitions et propriétés.

Une série de factorielles est une série de la forme

$$a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-[k]} \quad (2.1)$$

où les a_k sont des nombres complexes indépendants de la variable complexe z ,

$$z^{-[k]} = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+k-1)} \quad \text{et} \quad z^{-[0]} = 1.$$

Le domaine de convergence d'une série de factorielles est un demi-plan limité à gauche par une certaine droite $\text{Re}(z) = \lambda$, appelée droite de convergence ; le nombre λ s'appelle l'abscisse de convergence. La convergence est uniforme pour $\text{Re}(z) > \lambda^+ + \varepsilon$ où ε est un réel strictement positif arbitraire et $\lambda^+ = \max(0, \lambda)$.

La série (2.1) représente une fonction analytique $a(z)$, à l'intérieur du demi-plan de convergence à l'exception des points $0, -1, -2, \dots$ qui sont en général des pôles simples pour la fonction $a(z)$.

Il peut arriver que l'abscisse de convergence λ soit égale à $-\infty$; la série (2.1) converge alors dans tout le plan, exception faite des points $z = 0, -1, -2, \dots$, et elle représente une fonction méromorphe de z , admettant ces points pour pôles simples, ou pour points

réguliers.

Une fonction holomorphe au point $z = \infty$ peut être représentée par une série de factorielles convergente, mais la réciproque est en général fautive.

Le point à l'infini est en général un point singulier de la fonction $a(z)$. Mais cette fonction tend uniformément vers a_0 quand z tend vers l'infini en restant dans le demi-plan $\text{Re}(z) > \lambda + \epsilon$. D'une manière générale, on a les relations :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z^n \left[a(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-[k]} \right] = a_n, \quad n > 0, \quad \text{Re}(z) > \lambda + \epsilon. \quad (2.2)$$

Les zéros de la fonction $a(z)$, dans le demi-plan $\text{Re}(z) > \lambda + \epsilon$, sont en nombre fini. Cela résulte immédiatement des relations (2.2). On en déduit, en particulier, qu'une série de factorielles ne peut représenter la fonction identiquement nulle sans que tous ses coefficients soient nuls, et, par suite, que le développement (2.1) est unique.

2.2. Somme et produit de deux séries de factorielles - séries de factorielles inversibles.

La somme de deux séries de factorielles convergentes pour $\text{Re}(z) > \lambda$ se représente par une série de factorielles convergente pour $\text{Re}(z) > \lambda$. Le produit de deux séries de factorielles convergentes pour $\text{Re}(z) > \lambda$ se représente par une série de factorielles convergente pour $\text{Re}(z) > \lambda^+$.

Dans [Ha – Tu] Harris et Turritin prouvent le théorème suivant

Théorème 1. Si $G(t)$ est une fonction analytique au voisinage de l'origine et $F(z)$ une fonction admettant une représentation en série de factorielles convergente (sans terme constant) :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-[k]}; \quad f_0 = 0;$$

alors la fonction $G(F(z))$ peut être représentée par une série de factorielles convergente.

Un corollaire important de ce théorème est le suivant :

Corollaire 1. Si $a(z)$ possède un développement convergent de la forme (2.1) avec $a_0 \neq 0$, alors $1/a(z)$ se représente par une série de factorielles convergente.

Preuve: Prendre $G(t) = 1/(a_0+t)$ et $F(z) = a(z) - a_0$.

2.3. Application de l'opérateur aux différences finies δ .

Les séries de factorielles se prêtent avec beaucoup de facilité au calcul aux différences finies. En effet, si on applique l'opérateur δ à la série $a(z)$ définie en (2.1) on obtient

$$\delta a(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k a_k z^{-[k+1]}.$$

Si l'on applique l'opérateur δ n fois on trouve

$$\delta^n a(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1) a_k z^{-[k+n]}.$$

2.4. La transformation linéaire $(z, z + \omega)$ et son inverse.

Soit ω un nombre complexe quelconque. La fonction $a(z)$ définie par la série (2.1) admet une représentation de la forme

$$a(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z+\omega)(z+\omega+1)\dots(z+\omega+k-1)}, \quad (2.3)$$

où

$$b_k = C_k^0 a_k + C_k^1 \omega a_{k-1} + C_k^2 \omega(\omega+1) a_{k-2} + \dots + C_k^{k-1} \omega(\omega+1)\dots(\omega+k-1) a_1, \quad (2.4)$$

avec

$$C_k^j = \frac{k!}{j! (k-j)!}.$$

Si $\text{Re}(\omega) \geq 0$, la série (2.3) converge dans le demi-plan $\text{Re}(z) > \lambda^+$; si $\text{Re}(\omega) < 0$, la série (2.3) converge dans le demi-plan $\text{Re}(z+\omega) > \lambda^+$. La représentation de la série (2.1) sous la forme (2.3) s'appelle la transformation $(z, z+\omega)$.

Il est clair qu'à chaque série (2.3) correspond une et une seule série (2.1) et réciproquement. Supposons maintenant que la série (2.3) possède une abscisse de convergence $\lambda_\omega < \infty$. Que peut on dire de la convergence de la série (2.1) correspondante ? Le théorème suivant répond à cette question :

Théorème 2 [Ha – Tu],

Soit ω un entier positif. Si la fonction $a(z)$ est définie par la série (2.3) et si cette série possède une abscisse de convergence $\lambda_\omega < \infty$, alors $a(z)$ peut être représentée par une série de la forme (2.1) convergente pour $\text{Re}(z) > \max\{\omega - 1, \lambda_\omega + \omega\}$.

2.5. Le corps des séries de factorielles méromorphes.

Soit F l'ensemble des fonctions possédant un développement en série de factorielles convergent dans un demi-plan limité à gauche. Il est clair, d'après les propriétés énoncées plus haut, que F a une structure d'anneau unitaire, intègre et commutatif. Nous noterons K son corps de fractions. Tout élément de K s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(z) = z^m \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-[k]}, \quad f_0 \neq 0, \text{Re}(z) > b$$

où $m \in \mathbb{Z}$.

Les éléments de K sont appelés *séries de factorielles méromorphes*.

On appellera *série de factorielles méromorphe formelle* une série formelle de la forme

$$\hat{f}(z) = \sum_{k \geq k_0} \hat{f}_k z^{-[k]}, \quad (k, k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (2.5)$$

où $z^{-[k]} = (z-1)(z-2)\dots(z+k)$, pour $k < 0$.

On notera \hat{K} l'ensemble des séries de factorielles méromorphes formelles. \hat{K} est une \mathbb{C} -algèbre contenant K .

Notons que \hat{K} est isomorphe au corps $\mathbb{C}((1/z))$ des séries entières méromorphes formelles.

3. Méthode de Frobenius.

Considérons un système aux différences de type (1.1). Il est facile de voir que (1.1) peut être écrit sous la forme

$$(z-1)\delta_{-1}w(z) = A(z)w(z) \quad (3.1)$$

où δ_{-1} désigne l'opérateur aux différences

$$\delta_{-1}w(z) = w(z) - w(z-1),$$

et où $A \in M_n(F)$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans F).

Nous écrivons A sous la forme

$$A(z) = R + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{A_{s+1} s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \quad (3.2)$$

où $R, A_{s+1} \in M_n(\mathbb{C})$.

Notons L l'opérateur aux différences

$$L(w) = A(z)w(z) - (z-1)\delta_{-1}w(z). \quad (3.3)$$

Cherchons un développement de la forme

$$w(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho + v)} g_v \quad (g_0 \neq 0), \quad (3.4)$$

où les g_v sont des vecteurs et ρ est un nombre complexe, qui vérifie formellement l'équation $L(w) = 0$.

Sachant que

$$(-1)\delta_{-1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\omega)} = \omega \frac{\Gamma(z-1)}{\Gamma(z+\omega)},$$

on a

$$L \left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\omega)} I \right] = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\omega)} F(z, \omega)$$

où

$$F(z, \omega) = \omega I + A(z). \quad (3.5)$$

Si on applique l'opérateur L à la série formelle (3.4) on obtient

$$L(w(z)) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho + v)} F(z, \rho+v) g_v. \quad (3.6)$$

Puisque $A(z)$ est développable en une série de factorielles, $F(z, \omega)$ est aussi développable en une série de factorielles ; en transformant cette série par la transformation $(z, z + \omega)$, on

obtient¹

$$F(z, \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_s(\omega)}{(z+\omega)(z+\omega+1)\dots(z+\omega+s-1)}, \tag{3.7}$$

où les $F_s(\omega)$ sont des matrices polynômes en ω .

La substitution de ces développements dans l'équation (3.6) donne

$$\begin{aligned} L(w(z)) &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho + v)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_s(\rho + v)}{(z+\rho + v)\dots(z+\rho + v+s-1)} g_v \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho + v)} \sum_{s=0}^v F_s(\rho + v - s) g_{v-s}. \end{aligned}$$

Donc $w(z)$ sera solution formelle de (3.1) si le nombre ρ et les vecteurs g_v peuvent être choisis tels que

$$F_0(\rho)g_0 = (\rho I + R)g_0 = 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} F_0(\rho + 1)g_1 + F_1(\rho)g_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_0(\rho + v)g_v + F_1(\rho + v - 1)g_{v-1} + \dots + F_v(\rho)g_0 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Une première conséquence est que ρ doit être racine de l'équation algébrique

$$\det(\rho I + R) = 0. \tag{3.10}$$

Cette équation sera appelée *l'équation caractéristique*. C'est un polynôme en ρ de degré n . Elle possède donc n racines (distinctes ou non).

D'une manière générale, on peut déterminer les g_v , $v \geq 1$, comme fractions rationnelles de ρ de telle sorte que $w(z)$ soit solution de l'équation non homogène

$$L(w(z)) = (\rho I + R)g_0 \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho)} \tag{3.11}$$

En particulier, si ρ_1 est une racine de l'équation caractéristique (i.e., $-\rho_1$ est une valeur propre de R), g_0 est un vecteur propre de R associé à $-\rho_1$, et $\rho_1 + j$, $j \geq 1$, n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors les g_v peuvent être déterminés d'une manière unique par (3.9). Avec ce choix de ρ et g_0 on obtient une solution formelle de la forme

¹ On convient de remplacer, dans tout ce qui suit, un produit $(z+w)\dots(z+w+s-1)$ par 1 pour $s = 0$.

$$w(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_1 + v)} g_v .$$

Supposons maintenant qu'il existe une racine ρ_1 de l'équation caractéristique telle que $\rho_1 + k$, pour un certain entier k non nul, soit aussi racine de l'équation caractéristique. Reprenons l'équation (3.9) qui donne les coefficients g_v ; cette équation s'écrit pour $v = k$

$$F_0(\rho_1 + k)g_k = - \{ F_1(\rho_1 + k - 1)g_{k-1} + \dots + F_k(\rho_1)g_0 \} .$$

En général, cette équation n'admet pas de solution (puisque la matrice $F_0(\rho_1 + k)$ est singulière). On ne peut pas déterminer, dans ce cas, une solution formelle de la forme (3.4). Il faut donc chercher des solutions formelles qui s'écrivent sous une forme différente que celle donnée en (3.4). Nous sommes donc conduits à distinguer deux cas :

3.1. Cas générique : Les racines distinctes de l'équation caractéristique ne diffèrent pas d'un entier.

3.1.1. La matrice R possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

Soient $g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0n}$ ces n vecteurs, et soient $-\rho_1, -\rho_2, \dots, -\rho_n$ les valeurs propres correspondantes non nécessairement distinctes. Dans ce cas, on peut construire d'après ce qui précède n solutions formelles $w_i = w(\rho_i, g_{0i})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), où $w(\rho, g_0)$ désigne la série (3.4) dont les coefficients g_v sont déterminés par (3.9). Ces solutions formelles sont linéairement indépendantes car on a (formellement)

$$\det(w_1 w_2 \dots w_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_i)} \left\{ d_0 + \frac{d_1}{z} + \dots \right\},$$

où

$$d_0 = \det (g_{01} \ g_{02} \ \dots \ g_{0n}) \neq 0.$$

3.1.2. La matrice R ne possède pas n vecteurs propres linéairement indépendants.

Soit J la forme de Jordan de la matrice R

$$J = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_p),$$

où J_i désigne le bloc de Jordan d'ordre m_i associé à la valeur propre $(- \rho_i)$ ($i = 1, \dots, p$).

On a évidemment

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Notons que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes.

Nous allons montrer qu'à chaque bloc J_i correspond m_i solutions formelles linéairement indépendantes de l'équation $L(w) = 0$.

Soit P la matrice telle que

$$J = P^{-1}RP.$$

On notera $P_{i,j}$ la colonne, de P , d'indice $m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} + j$ (avec $m_0 = 0$). On posera

$$p_{i,j} = (-1)^{j-1} P_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \text{ et } i = 1, 2, \dots, p.$$

on a alors

$$\begin{cases} R p_{i,1} = -\rho_i p_{i,1} \\ R p_{i,j+1} = -\rho_i p_{i,j+1} - p_{i,j}, \quad j = 1, \dots, m_i - 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Puisque $\rho_i + k$, $k \geq 1$, n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut construire une solution formelle $w_{i,1} = w(\rho_i, p_{i,1})$. Pour obtenir une autre solution, on dérive par rapport au paramètre ρ l'expression $L(w(\rho, g_0))$:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} L(w(\rho, g_0)) = L\left[\frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho, g_0)\right] = (\rho I + R)g_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} + g_0 \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)}.$$

On en déduit que

$$L\left[\frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho_i, p_{i,1})\right] = p_{i,1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho_i)}.$$

Par ailleurs

$$L[w(\rho_i, p_{i,2})] = -p_{i,1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho_i)}.$$

Donc

$$w_{i,2} = \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho_i, p_{i,1}) + w(\rho_i, p_{i,2})$$

est une autre solution formelle de l'équation $L(w) = 0$.

De la même manière, en utilisant les dérivées successives de $L(w(\rho, g_0))$, on montre que l'on peut construire m_i solutions formelles

$$w_{i,j} = \sum_{s=0}^{j-1} \frac{1}{s!} \frac{\partial^s w}{\partial \rho^s}(\rho_i, p_{i,j-s}), \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.13)$$

correspondant à la chaîne (3.12).

Nous pouvons ainsi construire $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ solutions formelles de l'équation $L(w) = 0$.

Revenons à la série (3.4), il est clair que cette série peut s'écrire sous la forme

$$w(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} u(z),$$

où

$$u(z) = g_0 + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{g_{v+1}}{(z+\rho)(z+\rho+1)\dots(z+\rho+v)}.$$

La transformation linéaire $(z, z-\rho)$ nous permet d'écrire encore

$$u(z) = G_0 + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{G_{v+1}}{z(z+1)\dots(z+v)},$$

où $G_0 = g_0$. On en déduit que les séries (3.13) s'écrivent

$$w_{i,j}(z) = \sum_{s=0}^{j-1} \left\{ \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} \right] \Big|_{\rho = \rho_i} u_{i,j-s}(z) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

où

$$u_{i,k}(z) = p_{i,k} + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{p_{i,k,v+1}}{z(z+1)\dots(z+v)}.$$

En remarquant [No 2] que

$$z^p \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} \right) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z) \log \frac{1}{z} + \dots + \Omega_{s-1}(z) \left(\log \frac{1}{z} \right)^{s-1} + (1 + \Omega_s(z)) \left(\log \frac{1}{z} \right)^s, \quad (3.14)$$

où les $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ sont des séries de factorielles convergentes pour $\text{Re}(z) > 0$, $\text{Re}(z+\rho) > 0$, qui s'annulent pour $z = +\infty$, on voit que les solutions formelles $w_{i,j}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$w_{i,j}(z) = \left(\frac{1}{z} \right)^{\rho_i} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{1}{s!} \left(\log \frac{1}{z} \right)^s \hat{u}_{i,j-s}(z), \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

où

$$\hat{u}_{i,k}(z) = p_{i,k} + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\hat{p}_{i,k,v+1}}{z(z+1)\dots(z+v)}.$$

Remarque 1.

Si on note W (resp. Q) la matrice dont la colonne d'indice $m_0 + \dots + m_{i-1} + j$ (avec $m_0 = 0$) est formée par $w_{i,j}$ (resp. $\hat{u}_{i,j}$), alors on peut écrire

$$W(z) = Q(z) \text{diag}(z^{-J_1}, z^{-J_2}, \dots, z^{-J_p}),$$

où

$$z^{-J_i} = z^{-\rho_i} \begin{pmatrix} 1 & \log\left(\frac{1}{z}\right) & \dots & \frac{\log\left(\frac{1}{z}\right)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En remarquant que

$$z^{-J_i} = D_i z^{J_i} D_i^{-1},$$

où

$$D_i = \text{diag} \left((-1)^0, (-1)^1, \dots, (-1)^{m_i-1} \right),$$

on voit que

$$W(z)D = S(z) \operatorname{diag}(z^{J_1}, z^{J_2}, \dots, z^{J_p}) = S(z) z^J,$$

avec

$$S(z) = S_0 + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{S_{v+1} v!}{z(z+1)\dots(z+v)}, \quad (S_0 = P),$$

$$D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \dots, D_p).$$

On en déduit, en particulier, que

$$\det W(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\sum_{i=0}^n \rho_i} \left\{d_0 + \frac{1}{z} d_1 + \dots\right\}, \quad d_0 = \det(PD) \neq 0.$$

Donc W est une matrice fondamentale (formelle) de l'équation $L(w) = 0$.

En remarquant que

$$P z^J P^{-1} = z^J P P^{-1} = z^J,$$

on peut écrire encore

$$W(z)DP^{-1} = \left(I + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{W_{v+1} v!}{z(z+1)\dots(z+v)} \right) z^J.$$

Donc, lorsque les valeurs propres distinctes de R ne diffèrent pas d'un entier, le système (3.1) possède une solution fondamentale de la forme

$$\widehat{W}(z) = \left(I + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\widehat{W}_{v+1} v!}{z(z+1)\dots(z+v)} \right) z^R. \quad (3.15)$$

3.2. Cas général : Il existe des racines distinctes de l'équation caractéristique qui diffèrent d'un entier.

Dans ce cas on procède de la façon suivante : on regroupe les racines de l'équation caractéristique de manière que chaque groupe soit constitué par les racines qui sont égales modulo 1. Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ les racines distinctes d'un tel groupe, on suppose que

$$\operatorname{Re}(\rho_1) > \operatorname{Re}(\rho_2) > \dots > \operatorname{Re}(\rho_q).$$

Pour i allant de 1 à q , on pose

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{i-1} m_j,$$

où $m_j, j \neq 0$, désigne la multiplicité de la racine ρ_j et $m_0 = 0$.

Posons

$$f(\rho) = (\rho - \rho_2)^{\gamma_2} (\rho - \rho_3)^{\gamma_3} \dots (\rho - \rho_q)^{\gamma_q}. \quad (3.16)$$

En choisissant

$$g_0 = g_0(\rho) = f(\rho)c_0, \quad (c_0 \neq 0),$$

on peut, à partir de (3.9), déterminer les $g_v, v \geq 1$, comme fractions rationnelles de ρ sans pôle au voisinage des racines caractéristiques $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$. Ceci permet de calculer tous les $g_v(\rho_i)$. Pour chaque racine $\rho_i, i = 2, \dots, q$, on obtient donc une solution formelle de $L(w) = 0$, de la forme

$$w(\rho, f(\rho)c_0)|_{\rho = \rho_i}.$$

Mais ces solutions formelles ne sont pas indépendantes de celles calculées grâce à ρ_1 . En effet, regardons plus en détail les coefficients $g_v(\rho_2)$: puisque g_0 est de la forme

$$g_0 = (\rho - \rho_2)^{\gamma_2} \omega_0, \quad (\omega_0 \neq 0),$$

il en résulte que tous les vecteurs $g_v(\rho), v = 1, \dots, k - 1$ (avec $k = \rho_1 - \rho_2$), sont aussi de la forme

$$g_v(\rho) = (\rho - \rho_2)^{\gamma_2} \omega_v, \quad v = 1, \dots, k - 1.$$

On en déduit que

$$g_0(\rho_2) = g_1(\rho_2) = \dots = g_{k-1}(\rho_2) = 0.$$

Ainsi, d'après (3.9),

$$F_0(\rho_2 + k) g_k(\rho_2) = F_0(\rho_1) g_k(\rho_2) = 0,$$

autrement dit $g_k(\rho_2)$ est un vecteur propre de R associé à la valeur propre $(-\rho_1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
w(\rho, f(\rho)c_0)|_{\rho = \rho_2} &= \sum_{v=k}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_2 + v)} g_v(\rho_2) \\
&= \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_1)} g_k(\rho_2) + \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_1 + 1)} g_{k+1}(\rho_2) + \dots \\
&= \text{cste} \left(\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_1)} g_0(\rho_1) + \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_1 + 1)} g_1(\rho_1) + \dots \right),
\end{aligned}$$

donc $w(\rho, f(\rho)c_0)|_{\rho = \rho_2} = \text{cste } w(\rho_1, g_k(\rho_1))$. On n'obtient pas ainsi une nouvelle solution formelle, indépendante de celles correspondantes à ρ_1 , et il en est de même avec les autres racines ρ_2, \dots, ρ_q . Mais on peut, comme dans le cas générique, utiliser les dérivées successives de $w(\rho, f(\rho)c_0)$ par rapport à ρ . On a

$$L \left[\frac{\partial^s w}{\partial \rho^s} \right] = \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(f(\rho)(\rho I + R)c_0 \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} \right).$$

Comme ρ_2 est racine de $f(\rho)$ d'ordre γ_2 , les dérivées

$$\frac{\partial^s}{\partial \rho^s} w(\rho, f(\rho)c_0)|_{\rho = \rho_2}, \quad s = 0, 1, \dots, \gamma_2,$$

sont solutions formelles de l'équation $L(w) = 0$. Examinons ces solutions de plus près : en remarquant que ρ_2 est racine d'ordre γ_2 de $g_v(\rho)$ pour $v = 1, \dots, k-1$, on voit que

$$\frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(\sum_{v=0}^{k-1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho + v)} g_v(\rho) \right) |_{\rho = \rho_2} = 0, \quad s \leq \gamma_2 - 1.$$

Ceci permet de montrer que les solutions obtenues en substituant ρ_2 à ρ dans les dérivées successives de $w(\rho, f(\rho)c_0)$ jusqu'à l'ordre $\gamma_2 - 1$, sont des combinaisons linéaires des solutions calculées grâce à la racine ρ_1 . Pour $s = \gamma_2$, on a

$$L \left[\frac{\partial^{\gamma_2} w}{\partial \rho^{\gamma_2}} \right] |_{\rho = \rho_2} = (\rho_2 I + R)c_0 \gamma_2! \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \rho_2)},$$

donc si c_0 est un vecteur propre de R associé à la valeur propre $(-\rho_2)$, alors

$$\frac{1}{\gamma_2!} \frac{\partial^{\gamma_2}}{\partial \rho^{\gamma_2}} w(\rho, f(\rho)c_0)|_{\rho = \rho_2},$$

est une solution formelle indépendante des précédentes.

Pour obtenir toutes les solutions associées à ρ_2 (qui sont au nombre de m_2), on procède comme dans le cas générique : si J_s est un bloc de Jordan d'ordre p associé à la valeur propre $(-\rho_2)$, il existe p vecteurs $c_{0,1}, c_{0,2}, \dots, c_{0,p}$ tels que

$$\begin{cases} Rc_{0,1} = -\rho_2 c_{0,1} \\ Rc_{0,j+1} = -\rho_2 c_{0,j+1} - c_{0,j}, & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Grâce à ces vecteurs on peut déterminer p solutions

$$w_{2,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(\gamma_2 + i)!} \frac{\partial^{\gamma_2 + i}}{\partial \rho^{\gamma_2 + i}} w(\rho, f(\rho) c_{0,j-i})|_{\rho = \rho_2}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

A partir de cette étude, la démarche à suivre pour trouver les solutions associées aux autres racines ρ_2, \dots, ρ_q est évidente.

On obtient ainsi n solutions formelles, w_1, w_2, \dots, w_n , de l'équation $L(w) = 0$. En utilisant le développement (3.14) on montre que ces solutions sont de la forme :

$$w_i(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\rho_i} \left\{ \varphi_{i0}(z) + \varphi_{i1}(z) \log\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + \varphi_{is_i}(z) \log^{s_i}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad (3.17)$$

où les s_i sont des entiers inférieurs à n , les ρ_i sont les racines de l'équation caractéristique, et les φ_{ij} sont des vecteurs admettant des développements en séries de factorielles.

Ces solutions formelles sont linéairement indépendantes, en effet on a (cf. [Ha 1])

$$\det (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\sum_{i=0}^n \rho_i} \left\{ d_0 + \frac{1}{z} d_1 + \dots \right\}, \quad d_0 \neq 0.$$

En conclusion, nous disposons d'une méthode qui permet de calculer, pour un système aux différences du type (1.3), un système fondamental de solutions formelles de la forme (3.17). On montre, en utilisant la notion de série de factorielles *majorante* [No 2] [Ha 1], que toutes les séries φ_{ij} , qui interviennent dans ces solutions, sont convergentes pour $\text{Re}(z)$ assez grand. Les développements (3.17) représentent donc des vraies solutions.

Remarque 2. On peut définir une *solution formelle* du système (3.1) comme étant un vecteur, dont les coefficients sont de la forme

$$\sum_{j+k \leq m} \hat{f}_{jk} z^{\mu_j} \left(\log \frac{1}{z}\right)^k, \quad (j, k \in \mathbb{N}), \quad (3.18)$$

les μ_j sont des nombres complexes et les \hat{f}_{jk} sont des séries de factorielles méromorphes formelles, et qui vérifie formellement le système (3.1). On peut montrer alors que toutes les solutions formelles d'un système du type (3.1) sont en fait des vraies solutions [Ha 1].

Remarque 3. Il est évident que dans le cas où la matrice R possède des valeurs propres distinctes qui diffèrent d'un entier (cas non générique), la méthode de Frobenius conduit à des calculs lourds et coûteux. Mais il existe une méthode plus simple qui permet de ramener le cas général au cas générique où le calcul des solutions, par la méthode de Frobenius, est moins lourd. Cette méthode est basée sur le résultat suivant :

Théorème 3. Il existe une matrice $V \in GL(n, \mathbb{C}[z^{-1}])$, telle que la transformation $w = V \tilde{w}$ transforme le système (3.1) en un système équivalent

$$(z-1)\delta_1 \tilde{w}(z) = \left(\tilde{R} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\tilde{A}_{s+1} s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right) \tilde{w}(z),$$

où \tilde{R} n'a que des valeurs propres qui ne diffèrent pas d'un entier non nul.

Démonstration D'abord on regroupe les valeurs propres de R de manière que chaque groupe soit constitué par les racines qui sont égales modulo 1. Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ les racines distinctes d'un tel groupe, on suppose que

$$\operatorname{Re}(\rho_1) < \operatorname{Re}(\rho_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho_q),$$

avec

$$\rho_{i+1} - \rho_i = l_i \in \mathbb{N}^*,$$

$i = 1, 2, \dots, q-1$.

On note $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots, \rho_r$ les autres valeurs propres de R .

Quitte à appliquer à la matrice A une transformation constante P , on peut supposer, sans restreindre la généralité, que R est de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

où R_1 est une matrice carrée d'ordre m_1 (m_1 étant la multiplicité de ρ_1) ayant pour seule valeur propre ρ_1 ,

$$R_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_1 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \varepsilon_{m_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_1 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon_i = 0$ ou 1 .

Considérons la matrice diagonale

$$U(z) = \text{diag}((1/z)I_{m_1}, I_{n - m_1}).$$

Si on pose

$$w = U \tilde{w},$$

on obtient comme nouveau système

$$(z-1)\delta_{-1}\tilde{w}(z) = \left(\tilde{R} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\tilde{A}_{s+1} s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right) \tilde{w}(z),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left\{ U^{-1}(z-1)A(z)U(z) - (z-1)U^{-1}(z-1)\delta_{-1}U(z) \right\} \Big|_{z=\infty} \\ &= \left\{ U^{-1}(z-1) \left(R + \frac{A_1}{z} \right) U(z) - (z-1)U^{-1}(z-1)\delta_{-1}U(z) \right\} \Big|_{z=\infty} \end{aligned}$$

Décomposons la matrice A_1 de la même manière que R

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où A_{11} est une matrice carrée d'ordre m_1 . On trouve, après quelques calculs, que

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_1 + I_{m_1} & A_{12} \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $\rho_1 + 1, \rho_2, \dots, \rho_q, \rho_{q+1}, \dots, \rho_r$, chacune ayant la même multiplicité m_i initiale.

En répétant le même procédé l_1 fois, les valeurs propres deviennent

$$\rho_1 + l_1 = \rho_2, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_r.$$

On voit qu'au bout de $l_1 + l_2 + \dots + l_{q-1}$ étapes, on peut rendre toutes les valeurs propres, du groupe $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$, égales.

En appliquant le même processus aux autres groupes de valeurs propres distinctes qui diffèrent d'un entier, on obtient une matrice \tilde{R} dont les valeurs propres ne diffèrent pas d'un entier non nul.

Remarque 4. Le théorème 3 et la remarque 1 montrent que tout système linéaire de la forme (1.1) possède une matrice fondamentale de la forme

$$W(z) = S(z) z^{\hat{R}}, \quad (3.19)$$

où $S(z) \in M_n(F)$ et $\hat{R} \in M_n(\mathbb{C})$.

Exemple. On considère la matrice

$$A(z) = \begin{pmatrix} \frac{z+1}{z-1} & 0 & 0 \\ -\frac{z-3}{2(z-1)} & \frac{3z-1}{2(z-1)} & \frac{z-3}{2(z-1)} \\ -\frac{z-3}{2(z-1)} & \frac{z-3}{2(z-1)} & \frac{3z-1}{2(z-1)} \end{pmatrix} = R + O(z^{-1}),$$

où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La forme de Jordan de R est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$J = P^{-1}RP,$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de R sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$, (cas non générique). Pour se ramener au cas générique, on applique à A la transformation

$$T(z) = \text{diag}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z}, 1\right) P = \begin{pmatrix} 1/z & 1/z & 0 \\ 0 & 1/z & 1/z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\tilde{A}(z) = T^{-1}(z-1)A(z)T(z) - (z-1)T^{-1}(z-1)\delta_{-1}T(z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système

$$(z-1)\delta_{-1}\tilde{w}(z) = 2\tilde{w},$$

dont une matrice fondamentale est

$$\tilde{W}(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-2)} I = (z-2)(z-1)I,$$

où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

Une matrice fondamentale du système initial

$$(z-1)\delta_{-1}w(z) = A(z)w,$$

est

$$W(z) = T(z)\tilde{W}(z) = (z-2)(z-1)T(z).$$

Chapitre 6

Caractérisation des systèmes aux différences linéaires à singularité régulière

1. Position du problème.

Considérons un système de n équations linéaires aux différences :

$$\delta w(z) = A(z)w(z), \quad (1.1)$$

où $w(z)$ est un vecteur à n composantes et où A est une matrice carrée d'ordre n appartenant à $M_n(K)$

$$A(z) = z^q \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-[k]} \quad \text{Re}(z) > \mu, \quad (1.2)$$

où $q = q(A) \in \mathbb{Z}$ et les A_k sont des matrices constantes avec $A_0 \neq 0$.

Soit $T \in GL(n, K)$

$$T(z) = z^m \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^{-[k]} \quad \text{Re}(z) > \nu, \quad (1.3)$$

si on effectue le changement de variable

$$w(z) = T(z)u(z), \quad (1.4)$$

on obtient un nouveau système

$$\delta u(z) = B(z)u(z) \quad (1.5)$$

où

$$B(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z). \quad (1.6)$$

On dit que les systèmes (1.1) et (1.5) sont *équivalents*. Les matrices A et B sont dites *équivalentes* par la transformation T.

Définition 1.1. [Ha 2]

On dira que le système (1.1) est à *singularité régulière* (au point $z = \infty$) s'il admet une matrice fondamentale de la forme :

$$W(z) = S(z) z^R \quad (1.7)$$

où R est une matrice constante et où S(z) admet une représentation en série de factorielles

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^{-[k]}, \quad \operatorname{Re}(z) > \lambda. \quad (1.8)$$

Sinon on dira que le système est à *singularité irrégulière*.

Les résultats obtenus au chapitre précédent montrent que les systèmes (1.1) pour lesquels $q(A) = -1$ sont à singularité régulière, mais cela est également possible lorsque $q(A) > (-1)$ (voir l'exemple ci-dessous). En effet pour que le système (1.1) soit à singularité régulière il faut et il suffit qu'il soit équivalent à un système

$$\delta u(z) = B(z)u(z)$$

avec $q(B) = -1$; i.e. il existe $T \in GL(n, K)$ telle que

$$B(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^{-[k]}. \quad (1.9)$$

Exemple. Considérons le système d'ordre 2 :

$$\delta w(z) = A(z)w(z)$$

où

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{(z+2)(2z+1)} & \frac{2z}{(2z+1)(z+2)} \end{pmatrix} = A_0 + O(z^{-1})$$

Une matrice fondamentale de ce système est

$$W(z) = S(z) z^R$$

où :

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1/z \\ 1/z & -1/z(z+1) \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système possède donc une singularité régulière malgré que $q(A) = 0$.

Si

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix}$$

alors

$$T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} \\ \frac{-2}{(z+2)(2z+1)} & \frac{2}{(z+2)(2z+1)} \end{pmatrix} = O(z^{-1}).$$

Malheureusement en pratique on ne sait pas décider directement sur un système (1.1) si la singularité est régulière. Le but de ce chapitre est de développer un algorithme qui permet de reconnaître la nature de la singularité d'un système (1.1) et calcule dans le cas d'une singularité régulière la transformation $T(z)$ qui réduit la matrice A du système à une matrice de la forme (1.9).

2. Réductibilité d'un système linéaire aux différences.

A tout système (1.1) nous associons le nombre rationnel :

$$m(A) = q+1 + r/n \geq 0 \quad (2.1)$$

où $0 \leq r = \text{rang}(A_0) \leq n$. (Si $q(A) < -1$ on pose $m(A) = 0$). $m(A)$ est appelé *ordre* de la matrice A . On appellera *rang de Moser* du système (1.1) le nombre :

$$\mu(A) = \text{Inf} \{ m(T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z)) \mid T \in \text{GL}(n, K) \} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.

Si $m(B) = q'+r'/n$ alors $m(B) \leq m(A)$ si et seulement si $(q', r') \leq (q, r)$ au sens lexicographique. On en déduit qu'il existe toujours une transformation $T \in \text{GL}(n, K)$ telle que

$$\mu(A) = m(T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z)).$$

Remarque 2.2. La singularité régulière est caractérisée par l'inégalité $\mu(A) \leq 1$.

Définition 2.1. On dira que le système (1.1) (ou la matrice A) est dit *réductible* si $m(A) > \mu(A)$.

Nous allons supposer dans ce qui suit que $m(A) > 1$ et regarder dans quelles conditions la matrice A est réductible.

Théorème 1. Si $m(A) > 1$, le système (1.1) est réductible si et seulement si le polynôme

$$B(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + z^{-q+1} A(z)) \}_1_{z=\infty} \quad (r = \text{rang}(A_0)) \quad (2.3)$$

est identiquement nul en λ .

Remarque 2.3. Le polynôme $B(\lambda)$ ne dépend que de A_0 et A_1 :

$$B(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + zA_0 + A_1) \}_1_{z=\infty} \quad (2.4)$$

La démonstration du théorème 1 repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 1.[Har 2] Soit $T(z)$ une matrice non singulière

$$T(z) = z^p \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^{[k]} \quad T_0 \neq 0, \text{Re}(z) > a.$$

Alors $T(z)$ peut être écrite sous la forme :

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z) \quad (2.5)$$

où $P(z)$ est une matrice polynôme en $1/z$ avec $\det P(z) \equiv 1$, $Q(z)$ définie par une série de factorielle

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^{[k]} \quad \det Q_0 \neq 0, \text{Re}(z) > b,$$

et

$$z^{-\alpha} = \text{diag} (z^{-\alpha_1}, \dots, z^{-\alpha_n})$$

où les α_i sont des entiers tels que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.

Lemme 2. Soit $A \in M_n(F)$

$$A(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots, \quad A_0 \neq 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $T \in GL(n, K)$ telle que

$$T^{-1}(z)A(z)T(z) = B(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots,$$

appartienne à $M_n(F)$ et satisfasse

$$r = \text{rang}(A_0) > \text{rang}(B_0)$$

est que

$$B(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + z^{-q+1} A(z)) \}_{z=\infty} \equiv 0.$$

De plus $T(z)$ peut être choisie de la forme (2.5) avec $\alpha_n - \alpha_1 = 1$.

Remarque. Nous ne donnons pas de démonstration de ce lemme : la démonstration de Moser (cf [Mo], lemme 2 p 387) dans le cas où A est une série entière reste valable dans le cas où A est une série de factorielles.

Démonstration du théorème 1.

a) Supposons que $A(z) = z^q (A_0 + A_1/z + \dots)$ satisfait

$$B(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + z^{-q+1} A(z)) \}_{z=\infty} \equiv 0.$$

D'après le lemme 2, il existe une matrice $T \in GL(n, K)$

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z) \text{ avec } \alpha_n - \alpha_1 = 1,$$

telle que

$$T^{-1}(z) A(z) T(z) = C(z) = z^q (C_0 + C_1/z + \dots)$$

avec $\text{rang}(C_0) < \text{rang}(A_0)$ ou encore $m(C) < m(A)$.

Posons

$$\begin{aligned} B(z) &= T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) \\ &= T^{-1}(z+1)T(z)C(z) + T^{-1}(z+1)T(z) - I. \end{aligned}$$

Nous avons

$$P^{-1}(z+1)P(z) = I + O(z^{-2}),$$

et

$$(z+1)^\alpha P^{-1}(z+1)P(z) z^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\alpha + \frac{1}{z^2} (z+1)^\alpha D(z) z^{-\alpha}$$

où $D(z) = O(1)$. Mais puisque $\alpha_n - \alpha_1 = 1$, on a

$$(z+1)^\alpha D(z) z^{-\alpha} = O(z)$$

Donc

$$T^{-1}(z+1)T(z) = I + O(z^{-1})$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} B(z) &= (I + O(z^{-1}))C(z) + O(z^{-1}) \\ &= z^q (C_0 + \dots) \quad (\text{car } q > -1). \end{aligned}$$

On en déduit que soit $C_0 \neq 0$ et alors $m(B) = m(C) < m(A)$, soit $C_0 = 0$ et alors $q(B) < q$.

On a donc

$$m(B) < m(A).$$

Ce qui prouve que $A(z)$ est réductible.

b) Réciproquement supposons qu'il existe $T(z)$ telle que

$$(*) \quad T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = B(z)$$

et $m(A) > m(B)$.

Ecrivons

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z).$$

Posons

$$\begin{aligned} \hat{A}(z) &= P^{-1}(z+1)A(z)P(z) - P^{-1}(z+1)\delta P(z) \\ \hat{B}(z) &= Q(z+1)B(z)Q^{-1}(z) + \delta Q(z)Q^{-1}(z). \end{aligned}$$

Puisque

$$\hat{A}_0 = P_0^{-1}A_0P_0 \quad \text{et} \quad \hat{B}_0 = Q_0^{-1}B_0Q_0$$

nous avons

$$m(\hat{A}) = m(A) > m(B) = m(\hat{B}).$$

D'autre part l'égalité (*) peut être écrite sous la forme :

$$z^\alpha \hat{A}(z) z^{-\alpha} = z^\alpha (z+1)^{-\alpha} \hat{B}(z) + z^\alpha (z+1)^{-\alpha} - I.$$

En remarquant que

$$z^\alpha (z+1)^{-\alpha} = I + O(z^{-1})$$

on voit que

$$m(z^\alpha (z+1)^{-\alpha} \widehat{B}(z) + z^\alpha (z+1)^{-\alpha} - I) \leq \max(1, m(\widehat{B})),$$

et comme

$$m(\widehat{A}) = m(A) > 1,$$

on en déduit que :

$$m(\widehat{A}) > m(z^\alpha \widehat{A}(z) z^{-\alpha}).$$

Donc (d'après le lemme 2)

$$\theta(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + z^{-q+1} \widehat{A}(z)) \}_{|_{z=\infty}} \equiv 0, \quad (r = \text{rang}(\widehat{A})).$$

D'autre part

$$P(z)\widehat{A}(z)P^{-1}(z) = P(z)P^{-1}(z+1)A(z) + P(z)P^{-1}(z+1) - I.$$

En utilisant

$$P(z)P^{-1}(z+1) = I + O(z^{-2}),$$

on voit que

$$P(z)\widehat{A}(z)P^{-1}(z) = z^q (A_0 + A_1/z + O(z^{-2})) + O(z^{-2})$$

et puisque $q > -1$ ($m(A) > 1$), on peut écrire

$$z^{-q+1}P(z)\widehat{A}(z)P^{-1}(z) = zA_0 + A_1 + O(z^{-1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \{ z^{-r} \det(\lambda I + zA_0 + A_1) \}_{|_{z=\infty}} \\ &= \{ z^{-r} \det(\lambda I + z^{-q+1}P(z)\widehat{A}(z)P^{-1}(z)) \}_{|_{z=\infty}} = \theta(\lambda) \end{aligned}$$

On en déduit que $B(\lambda) \equiv 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 2. Si $A(z)$ est réductible alors la réduction peut être obtenue à l'aide d'une matrice $T(z)$ de la forme :

$$T(z) = (P_0 + P_1/z) \text{diag}(1, \dots, 1, 1/z, \dots, 1/z)$$

où P_0 et P_1 sont des matrices constantes avec $\det P_0 \neq 0$.

Démonstration:

Puisque A est réductible il existe une transformation $T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z)$, avec $\alpha_n - \alpha_1 = 1$, telle que:

$$(*) \quad T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = B(z)$$

et $m(A) > m(B)$.

L'égalité (*) peut être écrite sous la forme :

$$(z+1)^\alpha P^{-1}(z+1)A(z)P(z)z^{-\alpha} - (z+1)^\alpha P^{-1}(z+1)\delta(P(z)z^{-\alpha}) = Q(z+1)B(z)Q^{-1}(z) - \delta Q(z)Q^{-1}(z)$$

Posons

$$C(z) = Q(z+1)B(z)Q^{-1}(z) - \delta Q(z)Q^{-1}(z).$$

Puisque Q_0 est inversible, on a

$$m(B) = m(C).$$

Si on pose

$$T_1(z) = P(z) z^{-\alpha}$$

on a

$$T_1^{-1}(z+1)A(z)T_1(z) - T_1^{-1}(z+1)\delta T_1(z) = C(z)$$

avec $m(A) > m(C)$.

On peut montrer que C_0 ne dépend que des deux premiers termes P_0 et P_1 de $P(z)$. Donc la transformation

$$T_2(z) = (P_0 + P_1/z) z^{-\alpha}$$

est telle que

$$T_2^{-1}(z+1)A(z)T_2(z) - T_2^{-1}(z+1)\delta T_2(z) = D(z)$$

avec $m(A) > m(C) = m(D)$.

Enfin puisque $\det P(z) \equiv 1$, alors $\det P_0 = 1$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 3. Soit $A(z) = z^q (A_0 + A_1/z + \dots)$ avec $A_0 \neq 0$ et $q \geq 0$, une condition nécessaire pour qu'il existe une matrice $T \in GL(n, K)$ telle que :

$$(*) \quad T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = B(z) = z^{q'} (B_0 + B_1/z + \dots)$$

avec $q' < q$ ($B_0 \neq 0$), est que A_0 soit nilpotente.

Démonstration: On écrit $T(z)$ sous la forme

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z)$$

et on pose :

$$\hat{A}(z) = z^{-q} P(z) P^{-1}(z+1) (A(z) + I)$$

$$\widehat{B}(z) = z^{-q} z^{\alpha} (z+1)^{-\alpha} Q(z+1)(B(z)+I)Q^{-1}(z).$$

l'égalité (*) s'écrit alors

$$z^{-\alpha} \widehat{B}(z) z^{\alpha} = P^{-1}(z) \widehat{A}(z) P(z)$$

on en déduit que (quelque soit z)

$$\det(\lambda I + \widehat{A}(z)) = \det(\lambda I + \widehat{B}(z)).$$

- Si $q = 0$ alors $q' < 0$, dans ce cas

$$\widehat{A}(z) = A_0 + I + O(z^{-1}) \quad \text{et} \quad \widehat{B}(z) = I + O(z^{-1})$$

on en déduit que

$$\det(\lambda I + A_0 + I) = \det(\lambda I + I) = (\lambda + 1)^n$$

donc A_0 est nilpotente.

- Si $q > 0$, alors

$$\widehat{A}(z) = A_0 + O(z^{-1}) \quad \text{et} \quad \widehat{B}(z) = O(z^{q'-q})$$

d'où

$$\det(\lambda I + A_0) = \det(\lambda I) = \lambda^n$$

i.e. A_0 est nilpotente.

Corollaire . Une condition nécessaire pour qu'un système de la forme (1.1) avec $q \geq 0$ soit à singularité régulière est que la matrice A_0 soit nilpotente.

3. Algorithme de réduction.

Considérons un système de la forme (1.1). Nous supposons que $m(A) > 1$ et que A est réductible. Nous allons donner un algorithme qui construit une transformation $T(z)$ telle que

$$m(T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z)) = \mu(A).$$

Remarquons d'abord que si P est une matrice constante inversible alors $m(P^{-1}AP) = m(A)$. Si r désigne le rang de la matrice A_0 , on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les r premières colonnes de A_0 sont linéairement indépendantes et les $n-r$ dernières colonnes sont toutes nulles. On peut donc écrire la matrice A_0 sous la forme :

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ A_0^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où A_0^{11} est une matrice carrée d'ordre r et A_0^{21} est une matrice à $n-r$ lignes et r colonnes.

Décomposons la matrice A_1 de la même manière :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^{11} & A_1^{12} \\ A_1^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où A_1^{11} et A_1^{22} sont des matrices carrées d'ordre r .

Introduisons quelques notations:

Pour tout entier $k \geq 2$, nous noterons I_k la matrice identité d'ordre k , 0_k la matrice carrée nulle d'ordre k , D_k et E_k les matrices diagonales d'ordre n définies respectivement par $D_k = \text{diag}(I_k, 0_k)$, et $E_k = I_n - D_k$.

Considérons le polynôme $B(\lambda)$ défini en (2.4) :

$$B(\lambda) = \{ z^{-r} \det(\lambda I + zA_0 + A_1) \}_1_{z=\infty}.$$

En remarquant que

$$z^{-r} = \det(z^{-1}D_r + E_{n-r}),$$

on peut écrire

$$B(\lambda) = \{ \det(\lambda I + zA_0 + A_1)(z^{-1}D_r + E_{n-r}) \}_1_{z=\infty}.$$

Puisque (d'après (3.1)) $A_0 E_{n-r} = 0$, on voit que

$$B(\lambda) = \det(A_0 + A_1 E_{n-r} + \lambda E_{n-r}).$$

Dans toute la suite nous noterons

$$G_\lambda(A) = A_0 + A_1 E_{n-r} + \lambda E_{n-r},$$

de sorte que

$$B(\lambda) = \det G_\lambda(A).$$

En utilisant les décompositions (3.1) et (3.2) de A_0 et A_1 on voit que

$$G_\lambda(A) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} + \lambda I_{n-r} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

La matrice A est réductible si et seulement si

$$\det G_\lambda(A) \equiv 0. \quad (3.4)$$

Remarque 3.1. Il est clair, d'après la forme de $G_\lambda(A)$, qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que A soit réductible est que la matrice A_0^{11} soit singulière. D'autre part une condition suffisante mais non nécessaire pour que A soit réductible est que la matrice rectangulaire $(A_0^{11} \ A_1^{12})$ ne soit pas de plein rang.

Nous allons maintenant donner un algorithme qui construit, suivant les cas qui se présentent, des transformations T permettant de réduire $m(A)$.

3.1. Cas où $\text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) < r$.

Proposition 1. Si A est réductible et si $\text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) < r$, alors la réduction s'obtient à l'aide de la transformation diagonale

$$T(z) = \text{diag}((1/z)I_r, I_{n-r}).$$

Démonstration: En effet il est facile de voir que:

$$\begin{aligned} B(z) &= T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) \\ &= z^q [B_0 + B_1/z + \dots] + (1/z) \text{diag}(I_r, 0) \end{aligned}$$

avec

$$B_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $q > (-1)$ et $\text{rang}(B_0) = \text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) < r$, alors $m(B) < m(A)$.

Exemple 1. Soit

$$A(z) = z \begin{pmatrix} 0 & 1/z^4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$r = 1, \quad m(A) = 5/2, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

A est réductible et puisque la première ligne de G_0 est nulle, on applique à A , en vertu de la proposition 1, la transformation

$$T_1(z) = \text{diag}(1/z, 1).$$

On obtient alors

$$A^{(1)}(z) = T_1^{-1}(z+1)A(z)T_1(z) - T_1^{-1}(z+1)\delta T_1(z) = \begin{pmatrix} 1/z & (z+1)/z^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $m(A^{(1)}) = 3/2$.

Les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites, on applique donc à $A^{(1)}$ la transformation

$$T_2(z) = \text{diag}(1/z, 1),$$

on obtient alors

$$A^{(2)}(z) = T_2^{-1}(z+1)A^{(1)}(z)T_2(z) - T_2^{-1}(z+1)\delta T_2(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} (2z+1)/z & (z+1)^2/z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $m(A^{(2)}) = 1$.

On en déduit que le système initial est à singularité régulière. La transformation qui permet de passer de A à $A^{(2)}$ est

$$T(z) = T_2(z)T_1(z) = \text{diag}(1/z^2, 1).$$

3.2. Cas où $\text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) = r$.

Nous allons d'abord étudier le cas où la matrice $G_0(A)$ est sous une forme particulière dite s -triangulaire avec condition de dépendance (s.t.c.d en abrégé). Nous montrerons ensuite que par une transformation constante on peut toujours se ramener à un système dont la matrice $G_0(A)$ est s.t.c.d.

Définition 3.1. La matrice $G_0(A)$ est dite s -triangulaire avec condition de dépendance si elle est de la forme:

$$G_0(A) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où :

U_1, U_2, V_1, W_2 sont de dimensions respectives $r \times (n-r-s)$, $r \times s$, $(n-r-s) \times r$, $(n-r-s) \times s$,
 W_1 et W_3 sont des matrices carrées d'ordres respectifs $(n-r-s)$ et s avec $1 \leq s \leq n-r$,
 W_3 est triangulaire supérieure à diagonale nulle,

et si elle vérifie la condition de dépendance

$$\text{rang}(A_0^{11} \ U_1) < r \quad (3.6)$$

Remarque 3.2. Si $G_0(A)$ est de la forme (3.5) alors

$$G_\lambda(A) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-s} & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 + \lambda I_s \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donc

$$\det G_\lambda(A) = \lambda^s \det \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-s} \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\det \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-s} \end{pmatrix} \equiv 0 \quad (3.8)$$

Nous noterons $G_0^{(s)}$ la matrice carrée d'ordre $n-s$

$$G_0^{(s)} = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Nous noterons $G_0^{(0)} = G_0(A)$.

Proposition 2. Si A est réductible et si $G_0(A)$ est s.t.c.d alors la réduction s'obtient à l'aide de la transformation

$$T(z) = \text{diag}((1/z)I_r, I_{n-r-s}, (1/z)I_s).$$

Démonstration En effet on a

$$\begin{aligned} B(z) &= T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) \\ &= z^q [B_0 + B_1/z + \dots] + (1/z) \text{diag}(I_r, 0, I_s) \end{aligned}$$

avec

$$B_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or d'après la condition (3.6), $\text{rang}(B_0) = \text{rang}(A_0^{11} \ U_1) < r$. Et puisque $q > (-1)$ on en déduit que $m(B) < m(A)$.

Proposition 3. Si A est réductible et si $\text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) = r$, alors il existe une transformation constante P qui transforme le système (1.1) en un système dont la matrice $G_0(P^{-1}AP)$ est s.t.c.d, s étant un entier compris entre 1 et $n-r$.

Démonstration.

Puisque A est réductible alors la matrice $G_0(A)$ est singulière. Soit $V_0 = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur ligne non nul vérifiant $V_0 G_0(A) = 0$. Puisque $\text{rang}(A_0^{11} \ A_1^{12}) = r$, le vecteur V_0 peut être choisi de sorte que l'une au moins de ses composantes v_i ($r < i \leq n$) soit non nulle. En appliquant éventuellement à la matrice A une permutation sur ses $n - r$ dernières lignes on peut supposer, sans restreindre la généralité que $v_n \neq 0$. Soit P_1 la matrice dont la $n^{\text{ème}}$ ligne est formée par le vecteur V_0 , les autres lignes étant celles de la matrice identité. Si on applique au système (1.1) la transformation $w(z) = P_1^{-1} u(z)$, on obtient le système

$$\delta u(z) = A^{(1)}(z)u(z) = (P_1 A(z) P_1^{-1})u(z) = z^q \left(\sum_{k=0}^{\infty} (P_1 A_k P_1^{-1}) z^{-[k]} \right) u(z).$$

En remarquant que P_1^{-1} est triangulaire inférieure, on voit que $A_0^{(1)} = P_1 A_0 P_1^{-1}$ est de la même forme (3.1) que A_0 . Un calcul simple permet de montrer que la dernière ligne de la matrice $G_0(A^{(1)})$ est nulle, i.e. que $G_0(A^{(1)})$ est de la forme (3.5) avec $s = 1$. Si la condition (3.6) n'est pas vérifiée on choisit un vecteur ligne non nul $V_1 \in \mathbb{C}^{n-1}$, dont la composante d'indice $n-1$ est non nulle, tel que $V_1 G_0^{(1)} = 0$ (un tel vecteur existe en vertu de (3.8) et du fait que (3.6) n'est pas vérifiée). Puis on applique la transformation P_2^{-1} , où P_2 est la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est identique à la $i^{\text{ème}}$ ligne de l'identité si $i \neq n-1$, et dont la $(n-1)^{\text{ème}}$ ligne est formée par le vecteur ligne $(V_1, 0)$. Il est facile de voir que la matrice $G_0(P_2 A^{(1)} P_2^{-1})$ est de la forme (3.5) avec $s = 2$.

La méthode à suivre est donc la suivante : tant que la condition de dépendance (3.6) n'est pas vérifiée et $s \leq n-r$, on réapplique le procédé décrit plus haut : i.e. on choisit un vecteur ligne $V_{s-1} \in \mathbb{C}^{n-s+1}$, dont la composante d'indice $n-s+1$ est non nulle, tel que $V_{s-1} G_0^{(s-1)}$ soit nul (un tel vecteur existe en vertu de (3.8) et du fait que (3.6) n'est pas vérifiée). Puis on applique la transformation P_s^{-1} , où P_s est la matrice carrée d'ordre n dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est identique à la $i^{\text{ème}}$ ligne de l'identité si $i \neq n-s+1$, et dont la $(n-s+1)^{\text{ème}}$ ligne est formée par le vecteur $(V_{s-1}, 0)$. Au cours de cette procédure, soit on rencontre un entier $s < n-r$ tel que la condition (3.6) soit vérifiée, soit on a $s = n-r$ et alors, en vertu de (3.8), $\det(A_0^{11}) = 0$, auquel cas on a nécessairement la condition (3.6).

Exemple 2. Soit

$$A(z) = z^2 \begin{pmatrix} 2/z^3 & -1/z & 0 & 1/z \\ 0 & 0 & 1/z & 0 \\ 1 & 0 & 1/z^3 & 0 \\ 0 & -2/z^3 & 1/z & 2/z^3 \end{pmatrix}$$

On a

$$r = 1, \quad m(A) = 3 + 1/4 = 13/4 \quad \text{et} \quad G_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matrice $G_\lambda(A)$ est singulière identiquement en λ , A est donc réductible.

La première ligne de $G_0(A)$ n'est pas nulle. On va mettre $G_0(A)$ sous forme s.t.c.d : le vecteur $V_0 = (0, -1, 0, 1)$ est tel que $V_0 G_0(A) = 0$, on forme donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on applique à A la transformation $T_1(z) = P^{-1}$. On obtient alors

$$A^{(1)}(z) = T_1^{-1} A(z) T_1 = z^2 \begin{pmatrix} 2/z^3 & 0 & 0 & 1/z \\ 0 & 0 & 1/z & 0 \\ 1 & 0 & 1/z^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/z^3 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $G_0(A^{(1)})$ est 1.t.d.c. On applique alors à $A^{(1)}$, en vertu de la proposition 2, la transformation

$$T_2(z) = \text{diag}(1/z, 1, 1, 1/z).$$

On obtient

$$\begin{aligned} A^{(2)}(z) &= T_2^{-1}(z+1) A^{(1)}(z) T_2(z) - T_2^{-1}(z+1) \delta T_2(z) \\ &= z \begin{pmatrix} (3z+2)/z^3 & 0 & 0 & (z+1)/z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3z+2)/z^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On voit que $m(A^{(2)}) = 1 + 1 + 2/4 = 5/2 < m(A)$.

En conclusion, les propositions 1, 2, et 3 nous fournissent un algorithme simple qui, étant donné

un système aux différences (1.1) avec $q(A) \geq 0$, calcule une matrice $T(z) \in GL(n, \mathbb{C}(1/z))$ qui transforme (1.1) en un système équivalent

$$\delta u(z) = B(z)u(z),$$

$$B(z) = T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) = z^{q(B)} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^{-[k]}, \quad (3.10)$$

où $q(B)$ est la valeur minimale de l'entier $q(A)$ lorsqu'on applique au système (1.1) toutes les transformations $T \in GL(n, K)$.

La singularité régulière est caractérisée par $q(B) = -1$.

Cet algorithme peut s'écrire comme suit,

. Algorithme de réductibilité

début

$q := q(A)$ (Calcul de l'ordre polaire de A)
 réductible := vrai (Variable booléenne vraie si A est réductible)

tant que ($q \geq 0$ et réductible) **faire**

début

$r := \text{rang}(A_0)$ (Calcul du rang de A_0 par la méthode de Gauss.
 Cette méthode donne par la même occasion une
 matrice P telle que PA_0P^{-1} soit sous la forme (3.1))

 calculer de G_λ

si $\det(G_\lambda) = 0$ **alors** réductible := faux

sinon

début

 mettre G_0 sous forme s.t.c.d.

 (On utilise l'algorithme ci-dessous)

 appliquer la transformation diagonale: $\text{diag}((1/z)I_r, I_{n-r-s}, (1/z)I_s)$

fin

$q := q(A)$

fin

fin

. Algorithme de calcul d'une forme s.t.c.d

Données: n (ordre de A), r (rang de A_0) et la matrice G_0 .

début

s:= 0

liees:= faux (*variable booléenne vraie si la condition de dépendance (3.6) est vraie*)

tant que ($s \leq n-r$ et liees = faux) **faire**

début

former la matrice $G_0^{(s)}$ (*définie en (3.9)*)

Résoudre par la méthode de Gauss le système $V_s G_0^{(s)} = 0$

Chercher s'il existe un vecteur V_s dont les n-s-r dernières composantes sont toutes nulles.

si trouvé alors liees:= vrai

sinon

début

choisir un vecteur V_s dont la (n-s)^{ème} composante est non nulle
(appliquer éventuellement une permutation sur les lignes de A)

appliquer la transformation constante dont la i^{ème} ligne est celle de l'identité si $i \neq n-s$, la (n-s)^{ème} ligne étant formée par $(V_s, 0)$

s:=s+1

fin

fin

fin

Nous avons implanter cet algorithme sur le système de calcul formel REDUCE. Nous donnons dans le paragraphe suivant un exemple traité sur ordinateur. Pour aider à la lisibilité de cet exemple, on note que l'on trouvera :

- . l'appel du programme qui se fait par la commande `algorithme_reductibilite()`;
- . le dialogue interactif pour l'introduction des données,
- . l'impression à chaque étape des entiers $q = q(A)$, $r = \text{rang}(A_0)$ et l'affichage de la matrice G_0 et de la transformation à effectuer,
- . l'impression de la transformation T et de la matrice B définie dans (3.10).

4. Un exemple.

3: algoreductibilite(); (*Nous reprenons l'exemple 2 ci-dessus*).

donner la taille du systeme

3: 4;

Donner les coefficients de votre matrice par ligne

3: 2/z;-z;0;z;0;0;z;0;z**2;0;1/z;0;0;-2/z;z;2/z;

$$\begin{bmatrix} 2/z & -z & 0 & z & \\ 0 & 0 & z & 0 & \\ & 2 & & & \\ z & 0 & 1/z & 0 & \\ 0 & -2/z & z & 2/z & \end{bmatrix}$$

correction ? (oui;? non;)

3: non;

etape 1

=====

$$q = 2, \quad r = 1$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

la premiere ligne de G0 est non nulle, un vecteur du noyau de la transposee de G0 est :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

On applique la transformation constante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

G0 est l.t.c.d

On applique la transformation diagonale : $\text{diag}((1/z)I1, I2, (1/z)I1)$

etape 2

=====

$$q = 1, r = 3$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les 3 premieres lignes de G0 sont liees, on applique la transformation diagonale : $\text{diag}((1/z)I3, I1)$

etape 3

=====

$$q = 1, r = 2$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

les 2 premieres lignes de G0 sont liees, on applique la transformation diagonale : $\text{diag}((1/z)I2, I2)$

etape 4

=====

$$q = 1, r = 1$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 &] \\ 1 & 0 & 0 & 0 &] \\ 0 & 1 & 0 & 0 &] \\ 0 & 0 & 1 & 0 &] \end{bmatrix}$$

la premiere ligne de G0 est nulle, on applique la transformation diagonale : $\text{diag}((1/z)I1, I3)$

etape 5

=====

$$q = 0, r = 3$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 &] \\ 1 & 0 & 0 & 0 &] \\ 0 & 1 & 0 & 0 &] \\ 0 & 0 & 1 & 0 &] \end{bmatrix}$$

les 3 premieres lignes de G0 sont liees, on applique la transformation diagonale : $\text{diag}((1/z)I3, I1)$

etape 6

=====

$$q = 0, r = 2$$

G0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 &] \\ 1 & 0 & 0 & 0 &] \\ 0 & 1 & 3 & 0 &] \\ 0 & 0 & 1 & 0 &] \end{bmatrix}$$

$$B(2,1) := (Z^5 + 5*Z^4 + 10*Z^3 + 10*Z^2 + 5*Z + 1)/Z^6$$

$$B(2,2) := (7*Z^5 + 20*Z^4 + 30*Z^3 + 25*Z^2 + 11*Z + 2)/Z^6$$

$$B(2,3) := 0$$

$$B(2,4) := 0$$

$$B(3,1) := 0$$

$$B(3,2) := (Z^2 + 2*Z + 1)/Z^3$$

$$B(3,3) := (3*Z^2 + 3*Z + 1)/Z^3$$

$$B(3,4) := 0$$

$$B(4,1) := 0$$

$$B(4,2) := 0$$

$$B(4,3) := 1/Z$$

$$B(4,4) := 0$$

Chapitre 7

Formes réduites des systèmes aux différences linéaires

Dans ce chapitre nous étendons les résultats de A. Hilali et A. Wazner sur les formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires [Hi – Wa] au cas des systèmes aux différences linéaires à coefficients séries de factorielles méromorphes. Nous pensons que cette approche, une fois mise en place pour les systèmes aux différences, permettra d'établir des résultats analogues à ceux connus pour les systèmes différentiels. En effet, dans le cas différentiel, elle donne lieu à une généralisation de la classification de la singularité et permet le calcul direct d'un certain nombre d'invariants (invariant de Katz [Ka], celui de Malgrange [Ma 2], invariants de Gérard et Levelt [Ge – Le], etc...).

1. Notations et Définitions.

On utilisera les notations habituelles suivantes :

F = l'anneau des séries de factorielles,

K = le corps des fractions de F ,

$M_n(K)$ = l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K ,

$GL(n,K)$ = le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans K .

- Valuation à l'infini :

Soit f un élément non nul de K , alors f s'écrit d'une manière unique sous la forme:

$$f = z^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-[k]} \quad \operatorname{Re}(z) > \mu$$

où $v \in \mathbb{Z}$, $f_k \in \mathbb{C}$ avec $f_0 \neq 0$. On appelle $(-v)$ la valuation de f et on note $v(f) = -v$. Avec la convention $v(0) = +\infty$, on définit une fonction valuation

$$\begin{aligned} v : K &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ f &\mapsto v(f) \end{aligned}$$

v a les propriétés suivantes :

$$\forall f, g \in K$$

$$\begin{aligned} v(fg) &= v(f) + v(g) \\ v(f+g) &\geq \inf (v(f), v(g)) \end{aligned}$$

(avec les conventions : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n \leq +\infty$ et $(+\infty) + n = +\infty$).

Soit u un vecteur non nul appartenant à K^n

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

On appelle valuation de u et on notera $v(u)$ l'entier :

$$v(u) = \inf \{ v(u_j) \mid j = 1, \dots, n \},$$

(si $u = 0$, on posera $v(u) = +\infty$).

On a les propriétés suivantes

$$\forall f \in K, \forall u, w \in K^n$$

$$\begin{aligned} v(f.u) &= v(f) + v(u) \\ v(u+w) &\geq \inf (v(u), v(w)) \end{aligned}$$

- Opérateurs τ et δ :

On notera τ l'opérateur de translation défini de la manière suivante : si f est un élément de K , on définit $\tau(f)$ par

$$\tau(f)(z) = f(z+1).$$

τ est une isométrie de K , i.e. un automorphisme de K qui vérifie $v(\tau(f)) = v(f) \forall f \in K$.

On notera δ l'opérateur aux différences :

$$\delta(f)(z) = f(z+1) - f(z).$$

On a les propriétés suivantes :

$$\forall a, b \in K$$

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta(ab) = \tau(a)\delta(b) + \delta(a)b.$$

(on dit que δ est une τ -dérivation).

- Matrices équivalentes :

$\forall A \in M_n(K)$, $\forall T \in GL(n, K)$, on notera A_T la matrice

$$A_T = \tau(T)^{-1}AT - \tau(T)^{-1}\delta(T)$$

Deux matrices A et B appartenant à $M_n(K)$ seront dites *équivalentes* s'il existe T appartenant à $GL(n, K)$ telle que $B = A_T$.

2. Matrices k -réductibles.

Soit $A \in M_n(K)$, une matrice non nulle, on peut toujours écrire A d'une manière unique sous la forme

$$A(z) = z^q \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-[k]} \quad \text{Re}(z) > \mu \quad (2.1)$$

où $q = q(A) \in \mathbb{Z}$ et les $A_k \in M_n(\mathbb{C})$ avec $A_0 \neq 0$.

On notera $N = z^{-q} A$ ($N \in M_n(F)$). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $n_i(A)$ le nombre de colonnes de la matrice N de valuation i . Remarquons que :

- . $n_0(A) \neq 0$ (car $A_0 \neq 0$),
- . $n_i(A) \leq n - (n_0(A) + \dots + n_{i-1}(A))$, pour $i \geq 1$.

Soit k un entier positif ou nul. On définit $m_k(A)$ de la manière suivante :

si $q \leq -1$, on pose $m_k(A) = 1$,

si $q \geq 0$, alors pour $k \in \{0, \dots, q\}$ on pose

$$m_k(A) = (q(A)+1, n_0(A), n_1(A), \dots, n_k(A)), \quad (2.2)$$

et pour $k \geq q+1$, on pose $m_k(A) = m_q(A)$.

On notera \mathfrak{L} l'ensemble

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}^i,$$

que l'on munira de l'ordre lexicographique noté \leq (cela ne créera aucune confusion) .

Si deux éléments u_1 et u_2 de l'ensemble \mathfrak{L} sont tels que $u_1 \leq u_2$ et $u_1 \neq u_2$ on écrira $u_1 < u_2$ ou $u_2 > u_1$.

Pour toute matrice A , nous définissons les invariants $\mu_k(A)$ ($k \in \mathbb{N}$) et μ^* par

$$\begin{aligned} \mu_k(A) &= \text{Inf} \{ m_k(A_T) \mid T \in GL(n, K) \} \\ \mu^*(A) &= \mu_q(A). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Définitions 2.1 Soit A une matrice telle que $q=q(A) \geq 0$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}$, alors A est dite ***k-réductible*** si $\mu_k(A) < m_k(A)$, autrement dit s'il existe $T \in GL(n, K)$ telle que $m_k(A_T) < m_k(A)$. Autrement on dit que A est ***k-irréductible***.

(ii) A est dite sous *forme réduite* (ou super-irréductible) si A est q -irréductible, i.e. si $m_q(A) = \mu^*(A)$.

Remarques 2.1.

- 1) A est 0-réductible si elle est réductible au sens de la définition 2.1 du chapitre 6.
- 2) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$,
- 3) $\forall k > q(A), \mu_k(A) = \mu^*(A)$.
- 4) Si A est k -réductible alors A est $(k+1)$ -réductible.
- 5) Si A est sous forme réduite alors A est k -irréductible ($\forall k \in \mathbb{N}$).

Nous supposons dans la suite que $q(A) \geq 0$ et nous allons voir sous quelles conditions A est k -réductible, k allant de 0 à $q(A)$.

3. Critère de réductibilité.

A toute matrice A de la forme (2.1), on associe des fonctions notées $\varphi_k(A, \lambda, z)$, k appartenant à \mathbb{N} , définies par

$$\varphi_k(A, \lambda, z) = z^{-r_k(A)} \det (z^{-q(A)+k+1} A(z) + \lambda I) \quad (3.1)$$

avec

$$r_k(A) = (k+1)n_0(A) + kn_1(A) + \dots + 2n_{k-1}(A) + n_k(A), \quad (3.2)$$

(où λ est un paramètre et I désigne la matrice identité d'ordre n).

Proposition 3.1 Les fonctions $\varphi_k(A, \lambda, z)$ sont des éléments de $F[\lambda]$: anneau des polynômes en λ à coefficients dans F .

Démonstration En écrivant $A(z) = z^{q(A)} N(z)$ où $N(z) \in M_n(F)$, il vient que

$$\varphi_k(A, \lambda, z) = z^{-r_k(A)} \det (z^{k+1} N(z) + \lambda I)$$

Notons c_j la colonne de N d'indice j (pour $j = 1, \dots, n$). Considérons la matrice

$$\varepsilon_k = \text{diag} (\varepsilon_{k,1}, \varepsilon_{k,2}, \dots, \varepsilon_{k,n})$$

où

$$\varepsilon_{k,j} = \max (0, k+1 - v(c_j))$$

La matrice $z^{-\varepsilon_k}$ appartient à $M_n(F)$ (car $\varepsilon_{k,j} \geq 0$) et on a (d'après la définition des n_i et r_k)

$$\det (z^{-\varepsilon_k}) = z^{-r_k(A)},$$

d'où

$$\varphi_k(A, \lambda, z) = \det (N(z) z^{(k+1)I - \varepsilon_k} + \lambda z^{-\varepsilon_k}).$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $N(z) z^{(k+1)I - \varepsilon_k}$ est égale à $(z^{(k+1) - \varepsilon_{k,j}} c_j)$, sa valuation est $(\varepsilon_{k,j} - (k+1 - v(c_j)))$ qui est toujours positive. On en déduit que la matrice $N(z) z^{(k+1)I - \varepsilon_k}$ appartient à $M_n(F)$. Donc $\varphi_k(A, \lambda, z) \in F[\lambda]$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $B_k(A, \lambda)$ le polynôme

$$B_k(A, \lambda) = \varphi_k(A, \lambda, z) |_{z=\infty} \quad (3.3)$$

Il est facile de voir que ce polynôme ne dépend que de A_0, A_1, \dots, A_{k+1} :

$$B_k(A, \lambda) = z^{-r_k(A)} \det (z^{k+1} (A_0 + A_1 z^{-[1]} + \dots + A_k z^{-[k]} + A_{k+1} z^{-[k+1]}) + \lambda I) |_{z=\infty}$$

Au chapitre précédent nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème. Si $m_0(A) > 1$, la matrice A est 0-réductible si et seulement si le polynôme $B_0(A, \lambda)$ est identiquement nul (en λ).

Nous nous proposons de généraliser ce théorème:

Théorème 3.1. Soit $k \in \{1, \dots, q(A)\}$. On suppose que $m_k(A) > 1$ et que A est $(k-1)$ -irréductible. Alors la matrice A est k -réductible si et seulement si le polynôme $B_k(A, \lambda)$ est identiquement nul.

Pour la démonstration de ce théorème nous aurons besoin des deux lemmes suivants:

Lemme 1.[Ha 2] Soit $T(z)$ une matrice non singulière appartenant à $GL(n, K)$

$$T(z) = z^p \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^{-k} \quad T_0 \neq 0, \operatorname{Re}(z) > a.$$

Alors $T(z)$ peut être écrit sous la forme :

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z) \quad (3.4)$$

où $P(z)$ est une matrice polynôme en $1/z$ avec $\det P(z) \equiv 1$, $Q(z)$ définie par une série de factorielle

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^{-k} \quad \det Q_0 \neq 0, \operatorname{Re}(z) > b,$$

et

$$z^{-\alpha} = \operatorname{diag} (z^{-\alpha_1}, \dots, z^{-\alpha_n})$$

où les α_i sont des entiers tels que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.

Lemme 2. Soit $A \in M_n(F)$

$$A(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots, \quad A_0 \neq 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Pour qu'il existe une matrice $T \in GL(n, K)$ telle que

$$T^{-1}(z)A(z)T(z) = B(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots,$$

appartienne à $M_n(F)$ et satisfasse

$$r_j(A) \geq r_j(B) \quad (\text{pour } j = 0, \dots, k-1)$$

et

$$r_k(A) > r_k(B),$$

il faut et il suffit que le polynôme $B_k(A, \lambda)$ soit identiquement nul.

De plus $T(z)$ peut être choisie de la forme (3.4) avec $\alpha_n - \alpha_1 = 1$.

Démonstration

1) La condition est nécessaire: en effet si $B = T^{-1}AT \in M_n(F)$ alors

$$\begin{aligned}\varphi_k(A, \lambda, z) &= z^{-r_k(A)} \det (z^{k+1} A(z) + \lambda I) = z^{-r_k(A)} \det (z^{k+1} B(z) + \lambda I) \\ &= z^{-r_k(A)+r_k(B)} \varphi_k(B, \lambda, z).\end{aligned}$$

et puisque $\varphi_k(B, \lambda, z) \in F$ et $(r_k(A) - r_k(B)) > 0$, on en déduit que

$$B_k(A, \lambda) \equiv 0.$$

2) La condition est suffisante :

a) Soit $f(\lambda, z) = \det (A(z) + \lambda I)$, le polynôme caractéristique de A . On peut écrire

$$f(\lambda, z) = a_0(z)\lambda^n + a_1(z)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z)\lambda + a_n(z) \quad (\text{a.1})$$

où les $a_i \in F$, avec $a_0(z) \equiv 1$. Pour tout i de 0 à n , notons $v_i = v(a_i)$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note s_j le plus grand entier tel que

$$z^{s_j} f (\lambda z^{-j-1}, z) \in F[\lambda]. \quad (\text{a.2})$$

On vérifie facilement que

$$s_j = \text{Min}_{0 \leq i \leq n} (v_i + (n-i)(j+1)). \quad (\text{a.3})$$

Notons que, par définition de s_j , on a (pour $i = 0, \dots, n$)

$$z^{s_j - (n-i)(j+1)} a_i \in F. \quad (\text{a.4})$$

b) La suite $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(s_{j+1} - s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante : en effet si on note i_j le plus petit entier, compris entre 0 et n , tel que

$$s_j = v_{i_j} + (n - i_j)(j+1),$$

alors

$$s_{j+1} \leq v_{i_j} + (n - i_j)(j+2) = s_j + n - i_j,$$

et

$$s_{j-1} \leq v_{i_j} + (n - i_j)j = s_j - (n - i_j).$$

On a donc (pour tout $j \geq 1$)

$$s_{j-1} \leq s_j \leq 2s_{j-1}$$

et

$$(s_{j+1} - s_j) \leq (s_j - s_{j-1}).$$

c) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi_j(A, \lambda, z) = z^{-r_j(A)+n(j+1)} \det(A(z) + \lambda z^{-j-1} I) = z^{-r_j(A)+n(j+1)} f(\lambda z^{-j-1}, z)$$

comme $\varphi_j(A, \lambda, z) \in F[\lambda]$, il vient que

$$0 \leq n(j+1) - r_j(A) \leq s_j \quad (\text{c.1})$$

D'autre part, dire que $B_k(A, \lambda) \equiv 0$, est équivalent à dire que

$$z\varphi_k(A, \lambda, z) = z^{-r_k(A)+n(k+1)+1} f(\lambda z^{-k-1}, z) \in F[\lambda].$$

On en déduit que

$$0 \leq n(k+1) - r_k(A) < s_k. \quad (\text{c.2})$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe $T \in GL(n, K)$ telle que $B = T^{-1}AT \in M_n(F)$ et satisfasse (pour $j = 0, \dots, k-1$)

$$r_j(B) \leq n(j+1) - s_j \leq r_j(A) \quad (\text{c.3})$$

et

$$r_k(B) \leq n(k+1) - s_k < r_k(A). \quad (\text{c.4})$$

d) Supposons d'abord que le polynôme minimal de A soit égal à son polynôme caractéristique $f(\lambda, z)$. Dans ce cas il existe une matrice $P \in GL(n, K)$ telle que

$$P^{-1}AP = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & (-1)^{n+1} a_n \\ 1 & 0 & & 0 & (-1)^n a_{n-1} \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

C est une matrice compagnon à coefficients dans F .

Considérons la matrice diagonale

$$D = \text{diag}(z^{\gamma_0}, z^{\gamma_1}, \dots, z^{\gamma_{n-1}})$$

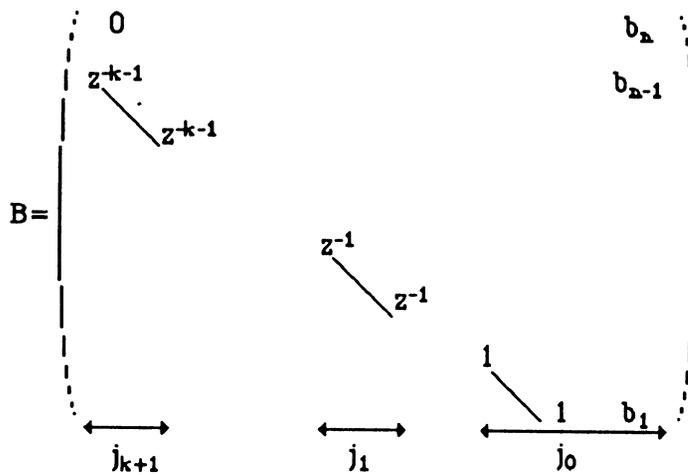
où les γ_i sont définis de la manière suivante :

$$\gamma_i = \begin{cases} -s_k + (k+1)i & \text{si } 0 \leq i \leq s_k - s_{k-1} \\ -s_{k-p} + (k-p+1)i & \text{si } s_{k-p+1} - s_{k-p} \leq i \leq s_{k-p} - s_{k-p-1} \text{ et } 1 \leq p \leq k-1 \\ -s_0 + i & \text{si } s_1 - s_0 \leq i \leq s_0 \\ 0 & \text{si } s_0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Définissons la matrice B par

$$B = D^{-1}CD$$

On vérifie immédiatement que la matrice B est de la forme



où

$$b_i = z^{\gamma_{n-i}} a_i$$

pour $i = 1, \dots, n$. Les j_p sont définis de la manière suivante :

$$j_p = \begin{cases} s_k - s_{k-1} & \text{si } p = k+1 \\ (s_{p-1} - s_{p-2}) - (s_p - s_{p-1}) & \text{si } 2 \leq p \leq k \\ s_0 - (s_1 - s_0) & \text{si } p = 1 \\ n - s_0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Il est clair d'après la définition des γ_i et d'après (a.4) que $b_i \in F$ (pour $i = 1, \dots, n$). Donc la matrice B appartient à $M_n(F)$.

Nous allons montrer que B vérifie les inégalités (c.3) et (c.4). Soit $p \in \{0, \dots, k\}$. La matrice B admet au moins $(j_{p+1} + \dots + j_{k+1})$ colonnes de valuation supérieure ou égale à $p+1$. Donc elle admet au plus $n - (j_{p+1} + \dots + j_{k+1})$ colonnes de valuation inférieure ou égale à p , autrement dit on a

$$n_0(B) + \dots + n_p(B) \leq n - (j_{p+1} + \dots + j_{k+1})$$

pour $p = 0, \dots, k$.

En remarquant que

$$\begin{cases} j_1 + j_2 + \dots + j_{k+1} = s_0 \\ j_{p+1} + \dots + j_{k+1} = s_p - s_{p-1}, \quad \text{pour } p=1, \dots, k, \end{cases}$$

il vient

$$\begin{cases} n_0(B) \leq n - s_0 \\ n_0(B) + n_1(B) \dots + n_j(B) \leq n - (s_j - s_{j-1}), \quad \text{pour } j=1, \dots, k. \end{cases}$$

En remarquant que

$$\begin{cases} r_0(B) = n_0(B) \\ r_j(B) = r_{j-1}(B) + n_0(B) + n_1(B) \dots + n_j(B), \quad \text{pour } j=1, \dots, k, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{cases} r_j(B) \leq n(j+1) - s_j \leq r_j(A) \quad \text{pour } j = 0, \dots, k-1, \\ r_k(B) \leq n(k+1) - s_k < r_k(A). \end{cases}$$

e) Cas général : A est quelconque, il existe alors $P \in GL(n, K)$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m)$$

où C_i (pour $i = 1, \dots, m$) est une matrice compagnon de dimension d_i à coefficients dans K ($d_1 + \dots + d_m = n$). Pour $i = 1, \dots, m$, on note $f_i(\lambda, z)$ le polynôme caractéristique de C_i . Les polynômes $f_i(\lambda, z)$ sont à coefficients dans le corps K . On a

$$f(\lambda, z) = \prod_{i=1}^m f_i(\lambda, z)$$

Puisque $f(\lambda, z) \in F[\lambda]$ et que son coefficient de tête est égal à 1, alors $f_i(\lambda, z) \in F[\lambda]$ ($0 \leq i \leq m$) (on utilise le lemme de Gauss, cf. par exemple [La] p. 127).

Soit $j \in \{0, \dots, k\}$, on note s_{ij} le plus grand entier tel que

$$z^{s_{ij}} f_i(\lambda z^{-j-1}, z) \in F[\lambda],$$

alors

$$s_j = \sum_{i=1}^m s_{ij}$$

D'après d), chaque matrice C_i est semblable à une matrice $B_i \in M_{d_i}(F)$ telle que

$$r_j(B_i) \leq (j+1)d_i - s_{ij}$$

pour $j = 0, \dots, k$.

Soit

$$B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m),$$

alors $B \in M_n(F)$ et on a

$$r_j(B) = \sum_{i=1}^m r_j(B_i) \leq (j+1) \sum_{i=1}^m d_i - \sum_{i=1}^m s_{ij} = (j+1)n - s_j$$

pour $j = 0, \dots, k$.

Ceci achève la démonstration de la première partie du lemme 2. Il nous reste à montrer que T peut être choisie de la forme (3.4) avec $\alpha_n - \alpha_1 = 1$. La démonstration de ce résultat est très longue et compliquée et nous l'omettrons.

Démonstration du Théorème 3.1

1) Supposons que

$$A(z) = z^q \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-[k]} \quad \text{Re}(z) > \mu$$

satisfasse la condition

$$B_k(A, \lambda) \equiv 0.$$

D'après le lemme 2, il existe une matrice $T \in GL(n, K)$.

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z) \quad \text{avec } \alpha_n - \alpha_1 = 1,$$

telle que

$$T^{-1}(z) A(z) T(z) = C(z) = z^q (C_0 + C_1/z + \dots)$$

avec

$$\begin{cases} r_j(C) \leq r_j(A) & \text{pour } j = 0, \dots, k-1. \\ r_k(C) < r_k(A) \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} B(z) &= T^{-1}(z+1)A(z)T(z) - T^{-1}(z+1)\delta T(z) \\ &= T^{-1}(z+1)T(z)C(z) + T^{-1}(z+1)T(z) - I. \end{aligned}$$

Nous avons

$$P^{-1}(z+1)P(z) = I + O(z^{-2}),$$

et

$$(z+1)^\alpha P^{-1}(z+1)P(z) z^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\alpha + \frac{1}{z^2} (z+1)^\alpha D(z) z^{-\alpha}$$

où $D(z) = O(1)$. Mais puisque $\alpha_n - \alpha_1 = 1$, on a

$$(z+1)^\alpha D(z) z^{-\alpha} = O(z).$$

Donc

$$T^{-1}(z+1)T(z) = I + O(z^{-1}).$$

Il vient alors

$$B(z) = (I + O(z^{-1}))C(z) + O(z^{-1}).$$

On a

$$q(B) \leq \max(q(C), -1).$$

Il y a deux possibilités :

- soit $q(C) < q(A)$, alors $q(B) < q(A)$ et donc A est k -réductible,
- soit $q(C) = q(A) = q$ et alors on a forcément $q(B) = q(C) = q$ (car par hypothèse $q(A) \geq 0$). Si c_i désigne la colonne d'indice i de la matrice C et d_i désigne la colonne d'indice i de la matrice $(I+O(z^{-1}))C$ alors on a

$$v(c_i) = v(d_i).$$

Il en découle que

$$n_j(B) = n_j(C)$$

pour tout $j \in \{0, \dots, q\}$.

D'où

$$r_j(B) = r_j(C)$$

pour $j = 0, \dots, q$.

On a donc

$$\begin{cases} r_j(B) \leq r_j(A) & \text{pour } j = 0, \dots, k-1. \\ r_k(B) < r_k(A) \end{cases}$$

Ce dernier système d'inégalités est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} n_j(B) \leq n_j(A) & \text{pour } j = 0, \dots, k-1. \\ n_k(B) < n_k(A) \end{cases}$$

On en déduit que

$$m_k(B) < m_k(A),$$

i.e que A est k -réductible.

2) Réciproquement , supposons qu'il existe $T \in GL(n, K)$ telle que

$$m_k(A_T) < m_k(A).$$

Notons

$$B = A_T.$$

nous avons

$$(q(B), n_0(B), n_1(B), \dots, n_k(B)) \leq_l (q(A), n_0(A), n_1(A), \dots, n_k(A))$$

Mais puisque A est, par hypothèse, $(k-1)$ -irréductible alors

$$\begin{cases} q(B) = q(A) \\ n_i(B) = n_i(A) & \text{pour } i=0, \dots, k-1 \\ n_k(B) < n_k(A) \end{cases}$$

Ecrivons

$$T(z) = P(z) z^{-\alpha} Q(z).$$

Posons

$$\begin{aligned} \hat{A}(z) &= P(z)P^{-1}(z+1)A(z) + P(z)P^{-1}(z+1) - I \\ \hat{B}(z) &= Q^{-1}(z)z^{\alpha}(z+1)^{-\alpha}Q(z+1)B(z) + Q^{-1}(z)z^{\alpha}(z+1)^{-\alpha}Q(z+1) - I. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} P(z)P^{-1}(z+1) &= I + O(z^{-2}) \\ Q^{-1}(z)z^{\alpha}(z+1)^{-\alpha}Q(z+1) &= Q^{-1}(z)(1+1/z)^{-\alpha}Q(z+1) = I + O(z^{-1}) \end{aligned}$$

et que $q(A) \geq 0$, on voit que

$$\begin{cases} q(\hat{A}) = q(A) \text{ et } q(\hat{B}) = q(B) \\ n_i(\hat{A}) = n_i(A) & \text{pour } i=0, \dots, q(A) \\ n_i(\hat{B}) = n_i(B) & \text{pour } i=0, \dots, q(B) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} r_j(\hat{B}) \leq r_j(\hat{A}) & \text{pour } j = 0, \dots, k-1. \\ r_k(\hat{B}) < r_k(\hat{A}) \end{cases}$$

D'autre part

$$T^{-1}\hat{A}T = \hat{B}.$$

Donc, d'après le lemme 2, on a

$$B(\hat{A}, \lambda) = \varphi_k(\hat{A}, \lambda, z)|_{z=\infty} \equiv 0.$$

Ecrivons

$$A(z) = z^q N(z)$$

où $N(z) \in M_n(F)$.

Notons c_j la colonne de N d'indice j (pour $j=1, \dots, n$). Considérons la matrice

$$\varepsilon_k = \text{diag} (\varepsilon_{k,1}, \varepsilon_{k,2}, \dots, \varepsilon_{k,n})$$

où

$$\varepsilon_{k,j} = \max (0, k+1 - v(c_j))$$

alors

$$\varphi_k(A, \lambda, z) = \det (N(z)z^{(k+1)I - \varepsilon_k} + \lambda z^{-\varepsilon_k})$$

D'autre part

$$\hat{A}(z) = z^q (I + z^{-2}D(z))N(z) + z^{-2}D(z)$$

où $D(z) = O(1)$.

D'où

$$\varphi_k(\hat{A}, \lambda, z) = \det (N(z)z^{(k+1)I - \varepsilon_k} + \lambda z^{-\varepsilon_k} + z^{-2}D(z)N(z)z^{(k+1)I - \varepsilon_k} + z^{-q+k-1}D(z)z^{-\varepsilon_k}).$$

En remarquant que la matrice $N(z)z^{(k+1)I - \varepsilon_k}$ appartient à $M_n(F)$ et que $k \leq q$, on obtient :

$$\varphi_k(\hat{A}, \lambda, z)|_{z=\infty} = \det (N(z)z^{(k+1)I - \varepsilon_k} + \lambda z^{-\varepsilon_k})|_{z=\infty} = \varphi_k(A, \lambda, z)|_{z=\infty}$$

Il en résulte que

$$B(A, \lambda) = \varphi_k(\hat{A}, \lambda, z)|_{z=\infty} \equiv 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Le théorème que nous venons de démontrer donne un critère simple de la k -réductibilité. Dans le paragraphe suivant nous donnons un algorithme¹ qui construit des transformations T permettant de réduire la quantité $m_k(A)$ lorsque la matrice A est k -réductible.

¹ Cet algorithme est calqué sur l'algorithme proposé par A. Hilali et A. Wazner pour le calcul d'une forme super-irréductible d'un système différentiel linéaire (cf. [Hil-Waz]).

4. Algorithme de calcul d'une forme réduite

Considérons la matrice définie dans (2.1)

$$A(z) = z^q \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-[k]}$$

Supposons que $q \geq 0$. Nous allons développer un algorithme qui permet de calculer une transformation $T \in GL(n, K)$ telle que la matrice A_T soit sous forme réduite.

Considérons un entier $k \in \{0, \dots, q\}$ (k fixé), et supposons que A est k -réductible. Si $k \geq 1$ nous supposons, en plus, que A est $(k-1)$ -irréductible. Nous allons décrire une méthode permettant de construire une transformation $T \in GL(n, K)$ qui réduit la quantité $m_k(A)$.

Pour j allant de 0 à q notons

$$\begin{aligned} p_j &= n_0 + n_1 + \dots + n_j \\ n'_j &= n - p_j. \end{aligned}$$

Quitte à changer A en $P^{-1}AP$ où $P \in GL(n, \mathbb{C})$ est une permutation des vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n , qui consiste à ordonner les colonnes de A par valuation croissante, on peut supposer, sans changer la généralité, que la matrice A est de la forme

$$A(z) = z^q N^{(k)}(z) z^{-\beta_k} \quad (4.1)$$

où

$$\beta_k = \text{diag}(0.I_{n_0}, 1.I_{n_1}, \dots, k.I_{n_k}, (k+1).I_{n'_k})$$

et où $N^{(k)}$ est une matrice appartenant à $M_n(F)$

$$N^{(k)}(z) = N_0^{(k)} + \frac{1}{z} N_1^{(k)} + \dots$$

Remarquons que les p_{k+1} premières colonnes de $N_0^{(k)}$ sont non nulles, les autres sont toutes nulles.

Introduisons la matrice

$$\alpha_k = (k+1).I - \beta_k$$

il est clair que

$$\det(z^{-\alpha_k}) = z^{-r_k}$$

il vient alors

$$\varphi_k(A, \lambda, z) = \det(N^{(k)}(z) + \lambda z^{-\alpha_k})$$

d'où

$$B_k(A, \lambda) = \det G_k(A, \lambda)$$

où

$$G_k(A, \lambda) = N_0^{(k)} + \lambda E_{n'_k}$$

avec

$$E_{n'_k} = \text{diag}(0, I_{n'_k})$$

L'hypothèse A est k-réductible est donc équivalente à

$$\det G_k(A, \lambda) \equiv 0.$$

La matrice $G_k(A, \lambda)$ est de la forme

$$G_k(A, \lambda) = \begin{pmatrix} R & U \\ V & W + \lambda I_{n'_k} \end{pmatrix}$$

où R est une matrice carrée d'ordre p_k .

La matrice $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ est formée par les p_k premières colonnes de la matrice $N_0^{(k)}$.

Une condition suffisante mais non nécessaire pour que $\det(G_k(A, \lambda))$ soit identiquement nul est que les p_k colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ soient linéairement dépendantes. Nous allons d'abord examiner ce cas.

4.1 Cas où les colonnes constantes de $G_k(A, \lambda)$ sont linéairement dépendantes

Remarquons d'abord que les p_{k-1} premières colonnes de la matrice $G_k(A, \lambda)$ sont linéairement indépendantes. En effet ces vecteurs ne dépendent pas de λ et forment les p_{k-1} premières colonnes de la matrice $G_{k-1}(A, \lambda)$ dont le déterminant n'est pas identiquement nul en λ . Si on note r le rang de la matrice $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ on a alors

$$p_{k-1} \leq r < p_k = p_{k-1} + n_k.$$

On en déduit que n_k est non nul. On peut donc écrire

$$r = p_{k-1} + r'$$

avec

$$0 \leq r' < n_k.$$

Nous allons montrer que l'on peut construire $T \in GL(n, K)$ de telle sorte que

$$(q(A_T), n_0(A_T), \dots, n_{k-1}(A_T), n_k(A_T)) \leq (q(A), n_0(A), \dots, n_{k-1}(A), r')$$

On en déduira que

$$m_k(A_T) < m_k(A).$$

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n_k-r'})$ une base du noyau de la matrice $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$. Appelons $e_1, e_2, \dots, e_{p_{k-1}}$ les p_{k-1} premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^{p_k} . Puisque les p_{k-1} premiers vecteurs colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, on en déduit que les vecteurs

$$e_1, e_2, \dots, e_{p_{k-1}}, v_1, v_2, \dots, v_{n_k-r'}$$

sont linéairement indépendants. On peut les compléter en une base de \mathbb{C}^{p_k} . Soit

$$\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{p_{k-1}}, e'_1, \dots, e'_{r'}, v_1, v_2, \dots, v_{n_k-r'})$$

cette nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^{p_k} à la base \mathfrak{B} . P est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} I_{p_{k-1}} & P_1 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

où P_2 est une matrice carrée d'ordre n_k avec $\det(P_2) \neq 0$.

Posons

$$T(z) = \begin{pmatrix} I_{p_{k-1}} & z^{-\eta_k} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n'_k} \end{pmatrix}$$

où

$$\eta_k = \text{diag}(k \cdot I_{n_0}, (k-1) \cdot I_{n_1}, \dots, 2 \cdot I_{n_{k-2}}, I_{n_{k-1}}).$$

T est évidemment inversible et on a

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} I_{p_{k-1}} & -z^{-\eta_k} P_1 P_2^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n'_k} \end{pmatrix}$$

On a

$$T^{-1}(z+1)T(z) = I + \begin{pmatrix} 0 & Q(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$Q(z) = \left(I_{p_{k-1}} - \left(\frac{z+1}{z} \right)^{-\eta_k} \right) z^{-\eta_k} P_1 = O(z^{-1})$$

d'où

$$T^{-1}(z+1)T(z) = I + O(z^{-1}).$$

On en déduit que

$$m_k(A_T) = m_k(T^{-1}AT).$$

Nous allons montrer que

$$m_k(T^{-1}AT) < m_k(A).$$

Lemme. Soit u un vecteur colonne de \mathbb{C}^{pk} , que nous écrivons sous la forme

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec $u_2 \in \mathbb{C}^{nk}$. Posons

$$w = \begin{pmatrix} z^{-\eta_k} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

alors le vecteur $z^{-q}Aw$ est de valuation supérieure ou égale à k . Si de plus

$$\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix} u = 0$$

alors

$$v(z^{-q}Aw) \geq k+1.$$

Démonstration : D'après (4.1) on a

$$z^{-q}Aw = N^{(k)}z^{-\beta_k}w = z^{-k}N^{(k)}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in z^{-k}F^n$$

D'autre part

$$N^{(k)}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{z=\infty} = N_0^{(k)}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc si

$$\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix} u = 0$$

alors

$$z^{-q}Aw \in z^{-k-1}F^n.$$

La démonstration du lemme est achevée.

Appelons $T_{(1)}, \dots, T_{(n)}$ les vecteurs colonnes de T et $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ ceux de A . Les vecteurs colonnes de AT sont $AT_{(1)}, \dots, AT_{(n)}$. D'après la structure de T , on

voit que

. si $1 \leq j \leq p_{k-1}$ ou $p_k < j \leq n$, alors

$$AT_{(j)} = A_{(j)}$$

.. si $p_{k-1} < j \leq p_{k-1} + r'$, alors $T_{(j)}$ est de la forme

$$T_{(j)} = \begin{pmatrix} z^{-\eta_k} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc d'après le lemme précédent

$$v(z^{-q}AT_{(j)}) \geq k.$$

... si $p_{k-1} + r' < j < p_k$, alors $T_{(j)}$ est de la forme

$$T_{(j)} = \begin{pmatrix} z^{-\eta_k} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \end{pmatrix} = 0$$

Donc toujours d'après le lemme précédent

$$v(z^{-q}AT_{(j)}) \geq k+1.$$

Donc la matrice $z^{-q}AT$ a

. exactement $n_i(A)$ colonnes de valuation i , pour $i = 0, \dots, k-1$

. au plus r' colonnes de valuation k .

Les autres colonnes sont de valuation supérieure ou égale à $k+1$.

Par ailleurs la matrice $T^{-1} \in M_n(F)$, donc, pour j allant de 0 à n , on a

$$v(T^{-1}AT_{(j)}) \geq v(AT_{(j)}).$$

On en déduit que

$$\begin{cases} n_0(T^{-1}AT) + n_1(T^{-1}AT) \dots + n_j(T^{-1}AT) \leq n_0(A) + n_1(A) \dots + n_j(A), & \text{pour } j=0, \dots, k-1, \\ n_0(T^{-1}AT) + n_1(T^{-1}AT) \dots + n_k(T^{-1}AT) \leq n_0(A) + n_1(A) \dots + n_{k-1}(A) + r'. \end{cases}$$

En remarquant que

$$q(T^{-1}AT) \leq q(A),$$

il vient

$$(q(T^{-1}AT), n_0(T^{-1}AT), \dots, n_{k-1}(T^{-1}AT), n_k(T^{-1}AT)) \leq (q(A), n_0(A), \dots, n_{k-1}(A), r').$$

Mais $r' < n_k$, donc

$$m_k(T^{-1}AT) < m_k(A).$$

4.2 Cas où les colonnes constantes de $G_k(A, \lambda)$ sont linéairement indépendantes.

Le problème se résout facilement dans le cas où la matrice $G_k(A, 0)$ a une forme particulière appelée forme s-triangulaire avec condition de dépendance. On peut montrer comme au chapitre 6 que l'on peut toujours se ramener à ce cas. Nous nous contenterons de donner les résultats sans preuves. Les démonstrations sont faciles et ne posent aucun problème à part qu'elles sont un peu longues. On se reportera pour plus de détails à l'article [Hi - Wa].

Définition 4.1 Soit $s \leq n'_k$ un entier positif. La matrice $G_k(A, 0)$ est dite s-triangulaire si elle est de la forme :

$$G_k(A, 0) = \begin{pmatrix} R & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où :

- U_1, U_2, V_1 et W_2 sont de dimensions respectives $p_k \times (n'_k - s)$, $p_k \times s$, $(n'_k - s) \times p_k$ et $(n'_k - s) \times s$.
- W_1 et W_3 sont des matrices carrées d'ordres respectifs $(n'_k - s)$ et s .
- W_3 est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Si de plus on a la condition

$$\text{rang}(R \ U_1) < p_k \quad (4.3)$$

on dira que la matrice $G_k(A, 0)$ est sous forme s-triangulaire avec condition de dépendance (on écrira $G_k(A, 0)$ est s.t.c.d).

Par exemple si les lignes constantes de la matrice $G_k(A, \lambda)$ sont linéairement dépendantes, i.e. si $\text{rang}(R \ U) < p_k$, alors $G_k(A, 0)$ est 0.t.c.d.

Proposition. Si A est k-réductible et si les vecteurs colonnes constants de $G_k(A, \lambda)$ sont linéairement indépendants alors il existe une transformation constante $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que la matrice $G_k(P^{-1}AP, 0)$ soit s.t.c.d, s étant un entier compris entre 0 et n'_k .

Cette proposition se démontre exactement comme la proposition 3 du chapitre 6.

On peut donc supposer que $G_k(A,0)$ est s.t.c.d. On considère la matrice diagonale

$$T_1 = \text{diag}(1/z, 1/z, \dots, 1/z, 1, 1, \dots, 1, 1/z, 1/z, \dots, 1/z)$$

où le $i^{\text{ème}}$ élément de la diagonale vaut 1 si $p_k+1 \leq i \leq p_k+n'_k$ et $1/z$ sinon.

On pose

$$A^{(1)} = T_1^{-1}AT_1.$$

Puisque

$$T_1^{-1}(z+1)T_1(z) = I + O(z^{-1})$$

alors

$$m_k(A_{T_1}) = m_k(A^{(1)}).$$

La quantité $m_k(A)$ ne peut donc être modifiée que par l'opération $T_1^{-1}AT_1$.

A étant $(k-1)$ -irréductible, on peut montrer, en examinant de près la matrice $A^{(1)}$, que

$$n_i(A^{(1)}) = n_i(A),$$

pour $i = 0, \dots, k-1$.

Soit $n_k(A^{(1)})$ le nombre de colonnes de la matrice $z^{-q}A^{(1)}$ de valuation k , alors on a deux possibilités :

- . Soit $n_k(A^{(1)}) < n_k(A)$, dans ce cas $m_k(A^{(1)}) < m_k(A)$, le problème est donc résolu.
- . Soit $n_k(A^{(1)}) \geq n_k(A)$, dans ce cas on montre (cf [Hi - Wa]) que la matrice $G_k(A^{(1)}, \lambda)$ est de la forme

$$G_k(A^{(1)}, \lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)} & U^{(1)} \\ V^{(1)} & W^{(1)} + \lambda I_{n'_k(A^{(1)})} \end{pmatrix}$$

où $R^{(1)}$ est une matrice carrée d'ordre $p_{k-1} + n_k(A^{(1)})$, avec

$$\text{rang} \begin{pmatrix} R^{(1)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix} < p_k \leq p_{k-1} + n_k(A^{(1)}) = p_k(A^{(1)}).$$

Les colonnes constantes de la matrice $G_k(A^{(1)}, \lambda)$ sont donc linéairement dépendantes. On est ramené au premier cas (cf. §4.1), on sait alors construire une transformation T qui réduit la quantité $m_k(A^{(1)})$. Si on pose

$$A^{(2)} = T^{-1}A^{(1)}T,$$

on a, d'après les résultats du paragraphe 4.1 :

$$n_k(A^{(2)}) \leq \text{rang} \begin{pmatrix} R^{(1)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix} - p_{k-1} < p_k - p_{k-1} = n_k(A).$$

On en déduit que

$$m_k(A^{(2)}) < m_k(A).$$

En conclusion, lorsque A est k -réductible on peut toujours construire une transformation T_k polynomiale en $1/z$ (de degré $\leq k+1$) telle que $m_k(A_{T_k}) < m_k(A)$.

Pour calculer une forme réduite d'une matrice A donnée, la démarche à suivre est la suivante :

En utilisant l'algorithme décrit plus haut, on calcule d'abord une matrice B 0-irréductible (équivalente à A). Puis, à partir de B , on calcule une matrice équivalente C 1-irréductible. Et on itère ce procédé jusqu'à obtenir une matrice $q(A)$ -irréductible.

5. Un exemple.

Soit

$$A(z) = z \begin{pmatrix} 1+z^{-2} & z^{-1} & -z^{-1} + z^{-2} & 0 \\ 1+z^{-1} & z^{-2} & z^{-3} + z^{-4} & z^{-1} + z^{-2} \\ z^{-1} & -z^{-1} & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-2} + z^{-5} + z^{-6} \end{pmatrix}.$$

On a $q = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 3$ et

$$\det(G_0(A, \lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3.$$

On en déduit que A est 0-irréductible.

Formons la matrice $G_1(A, \lambda)$:

$$G_1(A, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $G_1(A, \lambda)$ est singulière donc A est 1-réductible. Les colonnes de la matrice $G_1(A, 0)$ sont liées, et son noyau est réduit à l'unique vecteur ${}^t(0, 1, 1, 0)$. On applique donc à A la transformation :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient la nouvelle matrice

$$A^{(1)}(z) = T_1^{-1}A(z)T_1 = z \begin{pmatrix} 1+z^{-2} & z^{-1} & 0 & z^{-2} \\ 1 & z^{-1} + z^{-2} & z^{-1} + z^{-2} & z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} \\ 0 & 0 & z^{-2} + z^{-5} + z^{-6} & 0 \\ z^{-1} & -z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que l'entier n_1 a été réduit à 2. On forme à nouveau la matrice $G_1(A^{(1)}, \lambda)$:

$$G_1(A^{(1)}, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Les lignes constantes de cette matrice sont colinéaires, on applique alors à $A^{(1)}$ la transformation diagonale

$$T_2(z) = \text{diag}(z^{-1}, z^{-1}, z^{-1}, 1).$$

On obtient la matrice

$$A^{(2)}(z) = z \begin{pmatrix} 1+z^{-1} + z^{-2} + \dots & z^{-1} + z^{-2} & 0 & z^{-1} + z^{-2} \\ 1+z^{-1} & z^{-1} + 3z^{-2} + \dots & z^{-1} + 2z^{-2} + \dots & z^{-1} + 2z^{-2} + \dots \\ 0 & 0 & 2z^{-2} + z^{-3} + \dots & 0 \\ z^{-2} & -z^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'entier n_1 est passé d'une valeur initiale 2 à la valeur 3. Mais les colonnes de la matrice $G_1(A^{(2)}, 0)$ sont devenues colinéaires. Une base du noyau de cette dernière matrice est formée par les deux vecteurs ${}^t(1, -1, 0, 0)$ et ${}^t(0, 1, 0, -1)$. On applique donc à $A^{(1)}$ la transformation

$$T_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice

$$A^{(3)}(z) = z \begin{pmatrix} 1+2z^{-1}+\dots & z^{-2}+z^{-3} & 2z^{-3}+\dots & -z^{-4} \\ 0 & 2z^{-2}+\dots & 0 & 0 \\ -1-z^{-2} & -1-2z^{-2} & z^{-2} & z^{-3}+\dots \\ z^{-2} & 0 & -z^{-2}+\dots & z^{-2} \end{pmatrix}.$$

On constate que l'entier n_1 est réduit à 1. Les lignes constantes de la matrice $G_1(A^{(3)}, 0)$ sont colinéaires. On applique donc à $A^{(3)}$ la transformation diagonale

$$T_4(z) = \text{diag}(z^{-1}, z^{-1}, 1, 1).$$

On obtient alors

$$A^{(4)}(z) = z \begin{pmatrix} 1+3z^{-1}+\dots & z^{-2}+\dots & 2z^{-3}+\dots & -z^{-3}+\dots \\ 0 & 3z^{-2}+\dots & 0 & 0 \\ -z^{-1}-z^{-2}+\dots & -z^{-2}+\dots & z^{-2} & z^{-3}+\dots \\ -z^{-3} & 0 & -z^{-2}+\dots & z^{-2} \end{pmatrix}.$$

L'entier n_1 est réduit à 0 et on a

$$\det(G_1(A^{(4)}, \lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda+3) \neq 0.$$

La matrice $A^{(4)}$ est donc sous forme réduite et on a

$$\mu^* = (q+1=2, n_0=1, n_1=0).$$

CONCLUSION

En conclusion de ce travail nous allons énumérer les points qui nous semblent les plus importants dans cette thèse :

1. Equations différentielles :

. Nous avons développé un programme en REDUCE spécialisé dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 qui permet le calcul exact d'un système fondamental de solutions formelles au voisinage d'un point singulier. Ce programme permet d'étudier tous les points singuliers.

. Un nouvel algorithme pour le calcul des solutions formelles d'équations différentielles d'un ordre quelconque au voisinage de points singuliers irréguliers est présenté dans le chapitre 2. Cet algorithme nous semble plus efficace et mieux adapté au calcul formel que l'algorithme de Newton classique.

2. Systèmes d'équations aux différences linéaires :

. Nous avons développé un programme en REDUCE spécialisé dans le cas des équations aux différences à coefficients polynomiaux et qui permet d'obtenir un système fondamental de solutions asymptotiques. Ce programme permet aussi de traiter le cas des systèmes aux différences à coefficients rationnels. En effet nous avons montré au chapitre 4 que tout système peut être ramené à une équation scalaire à l'aide d'un vecteur cyclique que l'on peut choisir polynomial. Nous avons écrit un programme qui permet le passage d'un système à une équation.

. Nous nous sommes ensuite intéressés aux systèmes d'équations aux différences à coefficients séries de factorielles méromorphes. Un algorithme qui permet la caractérisation des systèmes aux différences à singularité régulière est présenté dans le chapitre 6. Cet algorithme est une étape nécessaire dans la résolutions des systèmes à singularité régulière. Nous l'avons implanté sur REDUCE.

. Enfin, le travail présenté dans le chapitre 7 peut être considéré comme un point de départ pour étudier les systèmes aux différences à singularité irrégulière.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ad] Adams R.C : *On the irregular cases of the linear ordinary difference equations.* Trans. A.M.S. vol 30 (1928) p.507-541.
- [Ba 1] Barkatou M. A. : *Rational Newton algorithm for computing formal solutions of linear differential equations.* International Symposium on Algebraic Computation. ISSAC (ITALY) - Juillet 1988 - à paraître
- [Ba 2] Barkatou M. A. : *Optimisation de DESIR pour les équations différentielles du second ordre.* CADE - 1988 à paraître dans procceding AC. Press.
- [Ba 3] Barkatou M. A. : *On the reduction of linear systems of difference equations.* International Symposium on Algebraic Computation. ISSAC (Portland, U.S.A.) - Juillet 1989 - à paraître
- [Ba – De 1] Barkatou M. A. , Della Dora J. : *Equations différentielles du second ordre dans le champ complexe.* Soumis à publication.
- [Ba – De 2] Barkatou M. A. , Della Dora J. : *Equations aux différences : étude algorithmique.* A paraître dans Discrete Mathematics. (actes du colloque de J. CARTIEF Septembre 1988)
- [Bi 1] Birkhoff G.D. : *General Theory of irregular linear difference equations.* Trans. A.M.S. 12 (1911), p. 243-284.
- [Bi 2] Birkhoff G.D. : *Formal Theory of irregular linear difference equations.* Acta Math. 54 (1930), p. 205-246.
- [Bi 3] Birkhoff G.D. : *Singular points of ordinary differential equations.* Trans. A.M.S. 10 (1909) p. 463-470.
- [Bi – Tr] Birkhoff G.D., Trjitzinsky W.J. : *Analytic Theory of singular difference equations.* Acta Math. 60 (1933), p. 1-89.
- [Br]Braaksma B.L.J. : *Introduction to the asymptotic theory of linear homogeneous difference equations.* Springer Lecture Notes in Math. n° 712 Berlin 1978 p. 1-19.
- [Co – Le] Coddington E.A. , Levinson N. : *Theory of ordinary differential equations,* Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).

- [Cop] Cope F. T. : *Formal solutions of irregular linear differential equations*. Am. J. Math. 58 (1936) p. 130-140.
- [Deli] Deligne P. : *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lectures Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag (1970).
- [De Br] De Bruijn N. G. : *Asymptotic Methods in Analysis*. North Holland Publishing C. O. 1961.
- [De – To 1] Della Dora J. , Tournier E. : *Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers*. RR n° 239 février 1981 IMAG.
- [De – To 2] Della Dora J. , Tournier E. : *An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogeneous differential equation at an irregular singular point*. EUROCAM 82, Springer Verlag, Lecture Notes in computer science 174, p 273-280.
- [De – Wa] Della Dora J. , A. Wasner A. : *Solutions formelles d'équations aux différences linéaires*, RR n° 510 Février 1985 - IMAG - TIM 3
- [Di – Du] Dicrescenzo C., Duval D : *Computations with algebraic numbers : The D5 method*. soumis à publication
- [Du A.] Duval A. : *Equations aux différences dans le champ complexe*, Thèse d'Etat Université de Strasbourg 1984. .
- [Du D.] Duval D. : *Diverses questions relatives au calcul formel avec nombres algébriques*. Thèse d'Etat - Faculté des Sciences de Grenoble 1987
- [Fa] Fabry M.E. : *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels*. Thèse, Paris, Gauthier-Villars.
- [Fr] Frobenius G. : *Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*. J. Reine Angew. Math. , t. LXXVI, 1873 p. 214-235.
- [Fu] Fuchs L. : *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*. J. Reine Angew. Math. , t. LXVI, 1866 p. 121-160.
- [Ga 1] Galbrun H. : *Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable*. Acta

Math. 36 (1913) p. 1-68.

- [Ga 2] Galbrun H. : *Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies.* Bull. S.M.F. 49 (1921) p. 206-241.
- [Ge – Le] Gerard R. , Levelt A.H.M. : *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires.* Ann. Inst. Fourier, 23,1 (1973), p. 157-195.
- [Ha 1] Harris, W.A : *Linear systems of difference equations,* Contributions to Differential Equations, vol 1 (1963), 489-518.
- [Ha 2] Harris, W.A : *Equivalent classes of difference equations,* Contributions to Differential Equations, vol. 2 (1963), 253-264.
- [Ha 3] Harris, W.A : *Analytic theory of difference equations.* Springer Lecture Notes in Math. n° 183 Berlin (1971) p. 46-58.
- [Ha 4] Harris, W.A : *Linear systems of difference equations with a regular singularity.* Proc. A.M.S. 19 (1968), p.1288-1236.
- [Ha – Tu] Harris, W.A , Turritin H.L : *Reciprocals of inverse factorial series,* Funkcial. Ekvac.6 (1964), 37-46.
- [Hi] Hilali A : *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier.* Thèse d'Etat - Faculté des Sciences de Grenoble - 1987
- [Hi – Wa] Hilali A. , Wazner A : *Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires.* Num. Math 50 (1987), p 429-449.
- [Im] Immink G. K. : *Asymptotics of analytic difference equations.* (Thèse) Groningen 1983.
- [In] Ince L.N.: *Ordinary differential equations,* Dover - New York - 1944.
- [Ka] Katz N. : *Nilpotent Connexions and monodromy theorem.* IHES, Pub. Math n° 39 (1970), p. 176-232.
- [La] Lang S. : *Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, INC.
- [Ma 1] Malgrange B.: *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières.* preprint Institut Fourier - 1981

- [Ma 2] Malgrange B : *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires.* L'Eseignement Math. 20 (1970), p 147-176.
- [Ma 3] Malgrange B :. *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers.* Equations différentielles et système de Pfaff. Lecture Notes 712, Springer Verlag 1979.
- [Milne Thomson] Milne Thomson L. M. : *The Calculus of finite difference.* MacMillan and Co.limited, London, 1933.
- [Mo] Moser J. K. : *The order of a singularity in Fuchs' theory.* Math. Z. Vol. 72, 1960, 379-398.
- [No 1] Nörlund N. E. : *Leçons sur les séries d'interpolation.* chap.6, Gauthiers Villars et Cie, Paris, 1926.
- [No 2] Nörlund N. E : *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies.* Gauthiers Villars et Cie, Paris 1929
- [No 3] Nörlund N. E : *Vorlesungen über Differenzenrechnung.* Springer Verlag Berlin 1924.
- [Pi] Pincherle S. : *Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle.* Acta. Math. 16 (1892) p. 341-363.
- [Poi] Poincare H. : *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies.* Am. j. of Math. 7 (1885) p. 1-56.
- [Pr] Praagman C. : *Meromorphic linear difference equations.* (Thèse)
- [Ra 1] Ramis J.P. : *Dévisage Gevry .* Astérisque S.M.F 59-60 (1978), p 173-204.
- [Ra 2] Ramis J.P. : *Développements asymptotiques Gevry, séries k-sommables et application aux équations différentielles et aux différences.* Preprint IRMA. Strasbourg (Mars1980).
- [Ra 3] Ramis J.P. : *Construction de bases privilégiées et semi-canoniques .* (communication personnelle).
- [Ra 4] Ramis J.P. : *Etude des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires.* (communication personnelle).

- [Ra 5] Ramis J.P. : *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*. Memoirs of the American Mathematical Society 48 (296) (march 1984).
- [Ra – Th 1] Ramis J.P. , Thomann J. : *Some comments about the numerical utilization of factorial series*. Numerical Methods in the study of critical phenomena, Springer-Verlag (1980).
- [Ri] Richard F. : *Représentations graphiques de solutions d'équations différentielles dans le champ complexe*. Thèse de l'université de Strasbourg (1988).
- [Ro] Robba P. : *Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles*. L'Enseignement Mathématique, XXVI, fasc. 3-4, p. 279-311.
- [Th 1] Thomann J. : *Séries 1-sommables, séries de factorielles généralisées et approximants de type Padé*. Séminaire IMAG n° 373, Grenoble 1981.
- [Th 2] Thomann J. : *Resommation des séries formelles*. soumis à publication.
- [To] Tournier E. : *Solutions formelles d'équations différentielles*.Thèse d'Etat - Faculté des Sciences de Grenoble - 1987
- [Tu] Turittin H.L. : *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighbourhood of an irregular singular point*. Acta Math. 93, (1965), p. 27-66.
- [Wa] Wasow W. : *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Interscience Publishers New-York 1965.

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'Arrêté du 23 novembre 1988 relatif aux Etudes doctorales

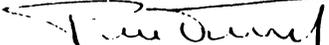
VU les rapports de présentation de Mesdames

- . Anne DUVAL , Professeur
- . Dominique DUVAL , Professeur

Monsieur BARKATOU My Abdelfattah

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme
de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité
" Mathématiques Appliquées "

Fait à Grenoble, le 18 mai 1989


Pour le Président de l'N.P.-G.
et par délégation,
le Vice-Président
P. VENNEREAU

Résumé :

Dans la première partie de cette thèse nous nous intéressons à la résolution formelle des équations différentielles linéaires dans le champ complexe. Nous présentons d'abord un logiciel qui permet d'obtenir les solutions formelles d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 au voisinage de tous les points singuliers. Nous montrons ensuite que l'algorithme de Newton, pour le calcul des solutions formelles d'équations différentielles d'ordre quelconque au voisinage de points singuliers, peut être modifié de façon à simplifier les calculs et à éviter certaines difficultés techniques.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des systèmes d'équations aux différences linéaires dans le champ complexe. Nous proposons d'abord un algorithme qui permet d'obtenir une base de solutions asymptotiques d'une équation récurrente linéaire à coefficients polynomiaux. Nous nous intéressons ensuite à l'étude des systèmes linéaires aux différences à coefficients séries de factorielles. Nous développons des algorithmes permettant de caractériser la singularité et de construire des transformations linéaires qui nous ramènent à des systèmes que l'on sait résoudre.

Mots-clés : Calcul formel, équation différentielle, solution formelle, points singuliers, solution formelle généralisée, système d'équations aux différences, vecteur cyclique, séries de factorielles.