

Des multiples facettes des graphes circulants

Habilitation à diriger des recherches

Arnaud Pêcher

Université de Bordeaux 1 (LaBRI) & INRIA Sud-Ouest (RealOpt)

17 octobre 2008

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes parfaits

The diagram shows a central box labeled 'Graphes parfaits' with four red arrows pointing to the left towards the list items 'algorithmes', 'colorations', 'complexité', and 'structures' under 'Théorie des graphes'. A single red arrow points from the 'en nombres entiers' item in the 'Optimisation Combinatoire' section to the 'Graphes parfaits' box.

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes circulaires-parfaits

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes circulaires-parfaits

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes circulaires-parfaits

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

$\overline{K_{a/b}}$

Graphes quasi-adjoints

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes circulaires-parfaits

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

$\overline{K_{a/b}}$

Graphes quasi-adjoints

Graphes sans griffe

Combinatoire

Théorie des graphes

- algorithmes
- colorations
- complexité
- structures

Optimisation Combinatoire

Programmation linéaire

- en nombres entiers

Graphes circulaires-parfaits

Graphes parfaits

Cliques circulaires $K_{a/b}$

$\overline{K_{a/b}}$

Graphes quasi-adjoints

Graphes sans griffe

- 1 Les graphes parfaits, les bien nommés
- 2 Le polytope des stables des graphes sans griffe
- 3 Graphes circulaires-parfaits
- 4 En ce moment ...
- 5 Conclusion

Coloration d'un graphe

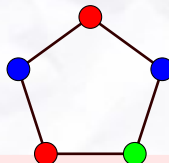
ω, χ

$\omega(G)$ = plus grande taille d'une clique du graphe G

$\chi(G)$ = nombre minimal de couleurs requis pour colorier G



$$P_4 : \omega(P_4) = \chi(P_4)$$



$$C_5 : 2 = \omega(C_5) < \chi(C_5) = 3$$

Graphe parfait - Berge 1961

Un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous graphe induit H , $\omega(H) = \chi(H)$.

Les théorèmes des graphes parfaits

Théorème (des graphes parfaits - Lovász 1972)

Un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous graphe induit H , $|H| \leq \omega(H)\alpha(H)$. Ainsi le complémentaire \overline{G} d'un graphe parfait est parfait.

Théorème (fort des graphes parfaits - Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas 2004)

Un graphe G est parfait si et seulement s'il ne contient pas de trous impairs et d'antitrous impairs induits.

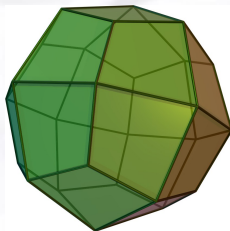
Théorème (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour et Vušković 2005)

Un graphe parfait est reconnaissable en temps polynomial.

Polytopes

polytope

Un polytope est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^n .



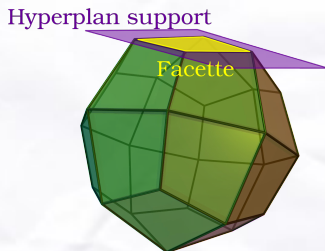
Source : Wikipedia Commons (GNU FDL)

Facettes

Facette

Face de dimension $n - 1$ du polytope

Une facette détermine un hyperplan $\sum_i a_i x_i = b$. Un point extrême du polytope appartenant à une facette F est appelé **racine** de F .



Polytope = intersection d'un nombre fini de demi-espaces
= solution système d'inéquations linéaires $Ax \leq \mathbf{b}$.

Problème d'optimisation

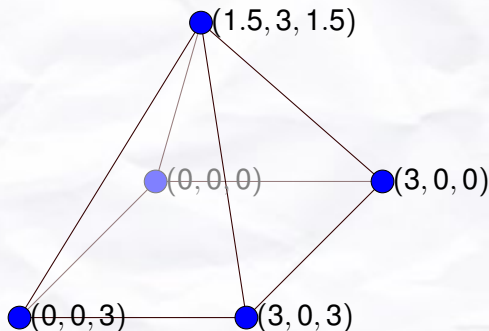
Problème linéaire d'optimisation

Etant donné une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Problème d'optimisation

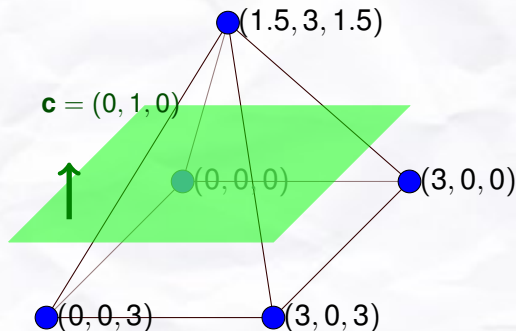
Problème linéaire d'optimisation

Etant donné une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Problème d'optimisation

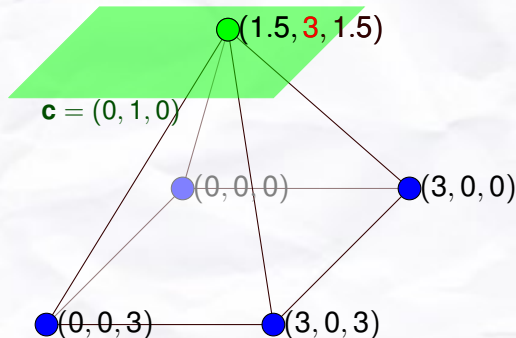
Problème linéaire d'optimisation

Etant donné une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



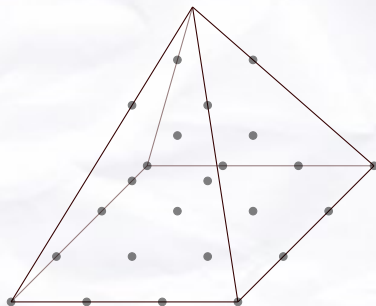
Optimisation en nombre entiers

Problème linéaire d'optimisation en nombre entiers

Etant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



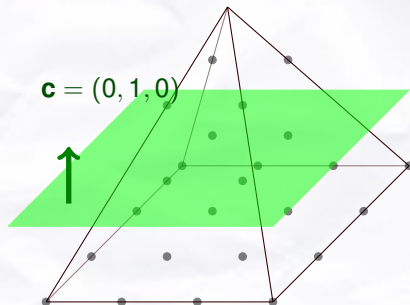
Optimisation en nombre entiers

Problème linéaire d'optimisation en nombre entiers

Etant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



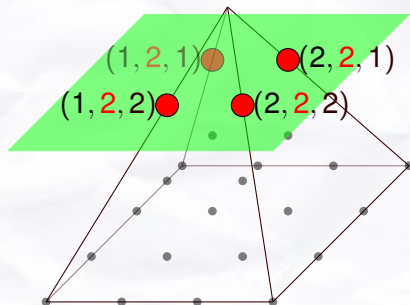
Optimisation en nombre entiers

Problème linéaire d'optimisation en nombre entiers

Etant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



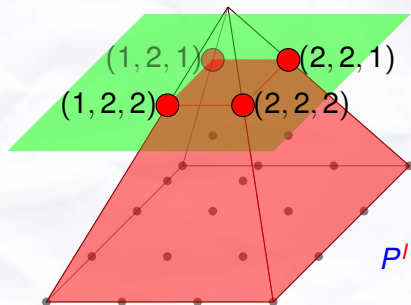
Optimisation en nombre entiers

Problème linéaire d'optimisation en nombre entiers

Etant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



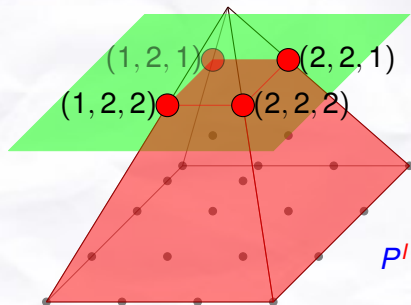
Optimisation en nombre entiers

Problème linéaire d'optimisation en nombre entiers

Etant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, un vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer

$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\max\{c \cdot x, Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\} = \max\{c \cdot x, A'x \leq b', x \in \mathbb{R}^n\}$$

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



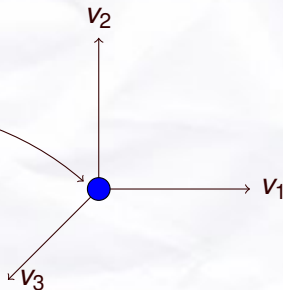
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$



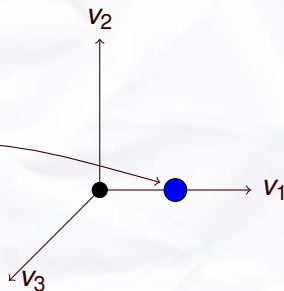
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$
$\{v_1\}$	$(1, 0, 0)$



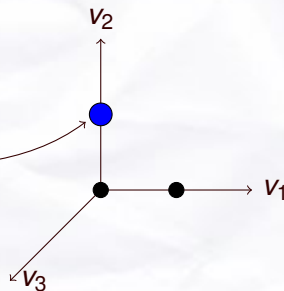
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



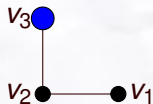
stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$
$\{v_1\}$	$(1, 0, 0)$
$\{v_2\}$	$(0, 1, 0)$



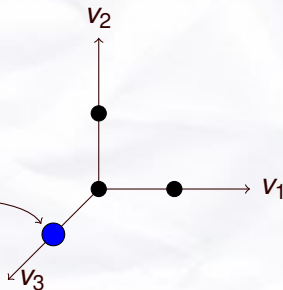
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$
$\{v_1\}$	$(1, 0, 0)$
$\{v_2\}$	$(0, 1, 0)$
$\{v_3\}$	$(0, 0, 1)$



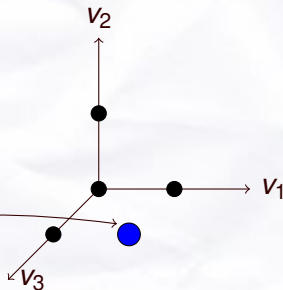
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$
$\{v_1\}$	$(1, 0, 0)$
$\{v_2\}$	$(0, 1, 0)$
$\{v_3\}$	$(0, 0, 1)$
$\{v_1, v_3\}$	$(1, 0, 1)$



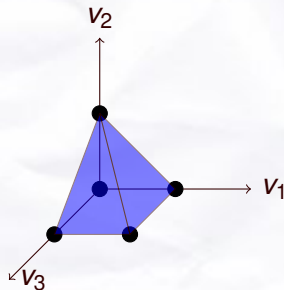
Polytope des stables

Polytope des stables $\text{STAB}(G)$

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$$



stable	(v_1, v_2, v_3)
\emptyset	$(0, 0, 0)$
$\{v_1\}$	$(1, 0, 0)$
$\{v_2\}$	$(0, 1, 0)$
$\{v_3\}$	$(0, 0, 1)$
$\{v_1, v_3\}$	$(1, 0, 1)$



Calcul d'un stable de poids maximum

Problème :

étant donné une pondération \mathbf{c} des sommets d'un graphe G , déterminer le poids maximal $\alpha(G, \mathbf{c})$ d'un stable.

Approche polyédrale (Grötschel, Lovász & Schrijver 1988)

Considérer le **polytope des stables** $\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq G \text{ stable}\}$ et déterminer son ensemble de facettes

$$\text{STAB}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^V : Ax \leq b\}$$

de manière à calculer $\alpha(G, \mathbf{c})$ par un programme linéaire :

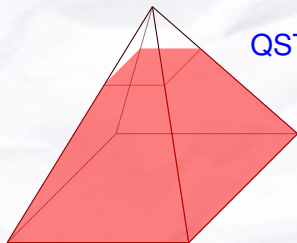
$$\alpha(G, \mathbf{c}) = \max \{c^T x, x \in \text{STAB}(G)\}$$

Observation : $\alpha(G) = \alpha(G, \mathbf{1})$

Polytope des contraintes de cliques QSTAB

polytope des contraintes des cliques QSTAB(G)

$$\text{QSTAB}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{+V} : \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, Q \text{ clique de } G \right\}$$



$$\text{QSTAB}' = \text{STAB}$$

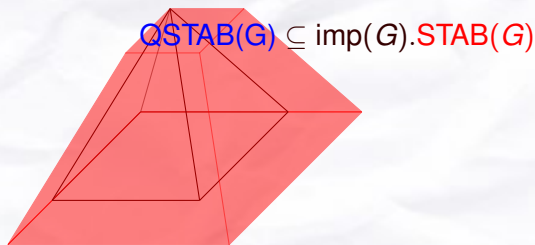
Ratio d'imperfection - Gerke et McDiarmid 2001

$$\text{imp}(G) = \min\{t \in \mathbb{R}^+, \text{QSTAB}(G) \subseteq t.\text{STAB}(G)\}$$

Polytope des contraintes de cliques QSTAB

polytope des contraintes des cliques QSTAB(G)

$$\text{QSTAB}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{+V} : \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, Q \text{ clique de } G \right\}$$



Ratio d'imperfection - Gerke et McDiarmid 2001

$$\text{imp}(G) = \min\{t \in \mathbb{R}^+, \text{QSTAB}(G) \subseteq t \cdot \text{STAB}(G)\}$$

Caractérisation polyédrale des graphes parfaits

Théorème (Chvátal, 1975)

Un graphe G est parfait si et seulement si $STAB(G)=QSTAB(G)$.

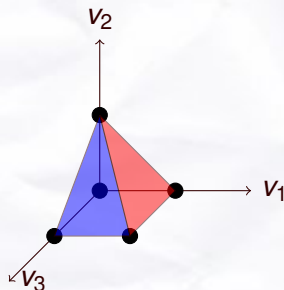
Corollaire : G parfait ssi $\text{imp}(G)=1$

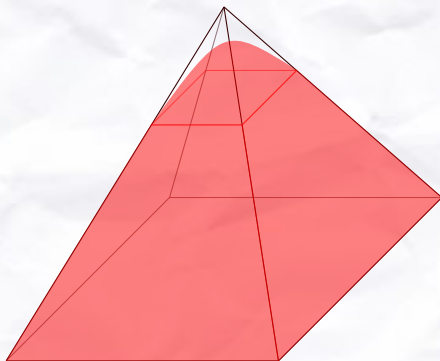


Contraintes cliques max.

$$x_{V_1} + x_{V_2} \leq 1$$

$$x_{V_2} + x_{V_3} \leq 1$$





$$\text{STAB}(G) \subseteq \text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$$

Théorème (Lovász, Grötschel et Schrijver 1981)

Pour tout graphe G , calculer le maximum d'une fonction linéaire sur le convexe $\text{TH}(G)$ est polynomial. Ainsi, pour un graphe parfait G , calculer $\omega(G)$, $\alpha(G)$, $\chi(G)$ est polynomial.

Synthèse

Pour tout graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes :


- G est parfait (tout sous-graphe induit G' de G est coloriable en $\omega(G')$ couleurs) ;
- pour tout sous-graphe induit G' de G , $|G'| \leq \omega(G')\alpha(G')$;
- G ne contient pas de trous impairs et d'antitrous impairs induits ;
- $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$;
- le convexe $\text{TH}(G)$ est un polytope ;
- ...

Plan

- 1 Les graphes parfaits, les bien nommés
- 2 **Le polytope des stables des graphes sans griffe**
- 3 Graphes circulaires-parfaits
- 4 En ce moment ...
- 5 Conclusion

Le cas des graphes sans griffe

graphe sans griffe

Un graphe est **sans griffe** s'il ne contient pas  comme sous-graphe induit.

Pour les graphes sans griffe, la détermination d'un ensemble stable de poids maximum est singulière car

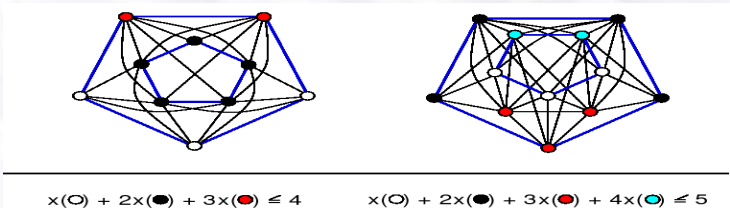
elle peut être effectuée en temps polynomial via des algorithmes combinatoires

- Minty 1980
- Sbihi 1980
- Nakamura and Tamura 2001

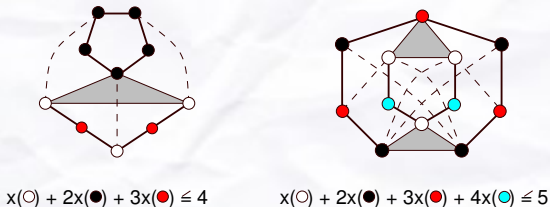
mais n'est pas comprise sur le plan polyédral car

- il peut y avoir des facettes très "complexes" ;
- aucune conjecture suffisamment précise n'a été formulée.

$\alpha = 3$: passage au complémentaire

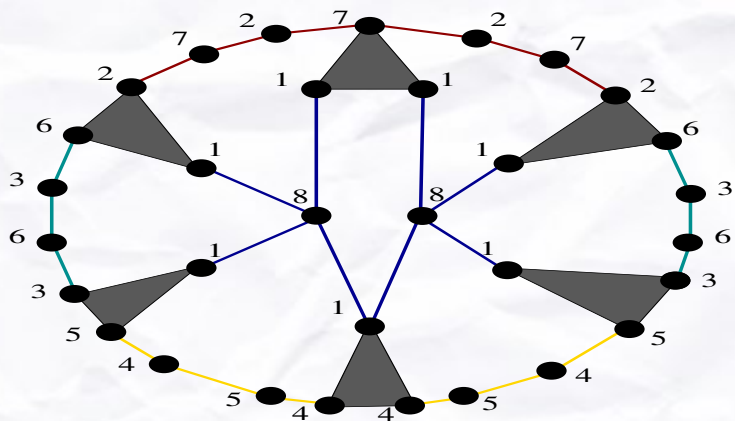


Il est plus facile de travailler dans le complémentaire :



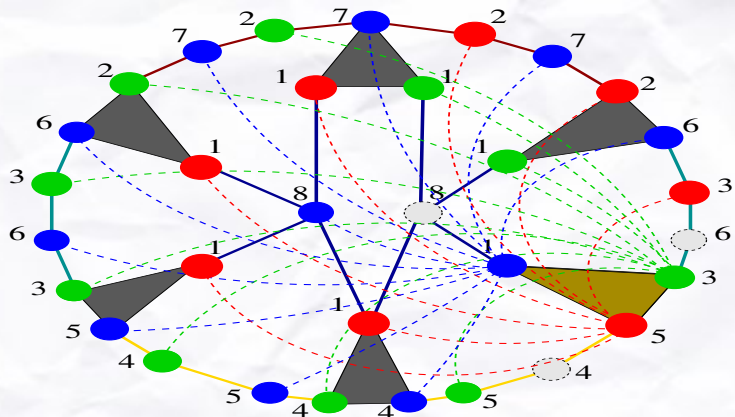
Observation : les racines sont des cliques du graphe complémentaire.

Une nouvelle facette : G_9



Arrêtes supplémentaires pour G_9

Un sous-ensemble des arêtes à ajouter déterminées par le programme linéaire :



Théorème (P., Pesneau, Wagler 2006)

Pour tout entier positif $b \geq 5$, il existe un graphe sans griffe G_b avec $\alpha(G_b) = 3$ tel que

$$\sum_{v \in V_1} x_v + 2 \sum_{v \in V_2} x_v + \dots + (b-1) \sum_{v \in V_{b-1}} x_v \leq b$$

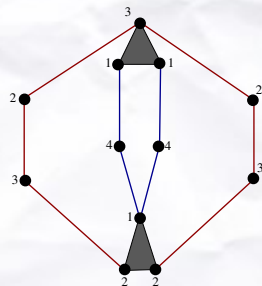
soit une facette de son polytope des stables où V_1, \dots, V_{b-1} sont non-vides.

Théorème (P., Pesneau, Wagler 2006)

Pour tout entier positif $b \geq 5$, il existe un graphe sans griffe G_b avec $\alpha(G_b) = 3$ tel que

$$\sum_{v \in V_1} x_v + 2 \sum_{v \in V_2} x_v + \dots + (b-1) \sum_{v \in V_{b-1}} x_v \leq b$$

soit une facette de son polytope des stables où V_1, \dots, V_{b-1} sont non-vides.



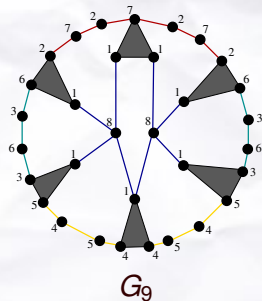
G_5 : "poisson dans un filet"

Théorème (P., Pesneau, Wagler 2006)

Pour tout entier positif $b \geq 5$, il existe un graphe sans griffe G_b avec $\alpha(G_b) = 3$ tel que

$$\sum_{v \in V_1} x_v + 2 \sum_{v \in V_2} x_v + \dots + (b-1) \sum_{v \in V_{b-1}} x_v \leq b$$

soit une facette de son polytope des stables où V_1, \dots, V_{b-1} sont non-vides.

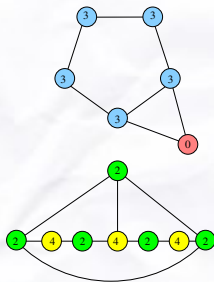


Un autre exemple

Question (Liebling, Oriolo, Spille, Stauffer 2004)

pour toute facette du polytope des stables d'un graphe sans griffe, les coefficients sont-ils toujours consécutifs ?

Non :

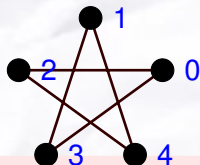


- 1 Les graphes parfaits, les bien nommés
- 2 Le polytope des stables des graphes sans griffe
- 3 Graphes circulaires-parfaits**
- 4 En ce moment ...
- 5 Conclusion

Colorations circulaires

(a,b) -coloration circulaire

Soient a et b tels que $a \geq 2b$. Une (a,b) -coloration circulaire d'un graphe G est une application $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, a-1\}$ telle que $b \leq |f(a) - f(b)| \leq a - b$.



C_5 : $(5, 2)$ -coloration circulaire

Nombre circulaire chromatique - Vince 1988

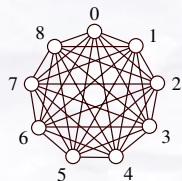
$\chi_c(G) = \inf \{a/b \mid G \text{ admet une } (a,b) \text{-coloration circulaire}\}$

$$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$$

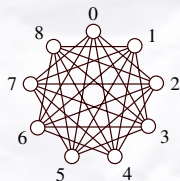
Cliques circulaires

clique circulaire

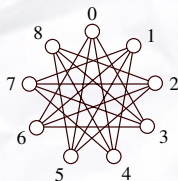
Soient a et b tels que $a \geq 2b$. Le graphe $K_{a/b}$ est le graphe avec pour sommets $\{0, 1, \dots, a-1\}$, et tel que ij est une arête ssi $b \leq |i-j| \leq a-b$.



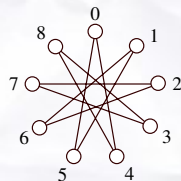
$K_{9/1}$



$K_{9/2}$



$K_{9/3}$



$K_{9/4}$

graphes homomorphes

$G \rightarrow H$ ssi $\exists f : V(G) \rightarrow V(H), \forall ij \in E(G), f(i)f(j) \in E(H)$.

Observation : G admet une (a, b) -coloration circulaire ssi $G \rightarrow K_{a/b}$.

Des graphes parfaits aux graphes circulaires-parfaits

Nombre circulaire chromatique (Vince, 1988)

$$\chi_c(G) = \inf \{a/b \mid G \rightarrow K_{a/b}\}$$

$$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$$

Nombre de clique circulaire (Zhu, 2000)

$$\omega_c(G) = \sup \{a/b \mid K_{a/b} \rightarrow G\}$$

$$\omega(G) = \lfloor \omega_c(G) \rfloor$$

$$\omega(G) \leq \omega_c(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Grphe circulaire-parfait (Zhu, 2000)

Un graphe G est **circulaire-parfait** ssi $\forall H \subseteq G, \chi_c(H) = \omega_c(H)$.

Exemples : graphes parfaits, cliques circulaires, graphes planaires extérieurs...

Des graphes parfaits aux graphes circulaires-parfaits

Nombre circulaire chromatique (Vince, 1988)

$$\chi_c(G) = \inf \{a/b \mid G \rightarrow K_{a/b}\}$$

$$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$$

Nombre de clique circulaire (Zhu, 2000)

$$\omega_c(G) = \sup \{a/b \mid K_{a/b} \rightarrow G\}$$

$$\omega(G) = \lfloor \omega_c(G) \rfloor$$

$$\omega(G) \leq \omega_c(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Grphe circulaire-parfait (Zhu, 2000)

Un graphe G est **circulaire-parfait** ssi $\forall H \subseteq G, \chi_c(H) = \omega_c(H)$.

Exemples : graphes parfaits, cliques circulaires, graphes planaires extérieurs...

Des graphes parfaits aux graphes circulaires-parfaits

Nombre circulaire chromatique (Vince, 1988)

$$\chi_c(G) = \inf \{ a/b \mid G \rightarrow K_{a/b} \}$$

$$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$$

Nombre de clique circulaire (Zhu, 2000)

$$\omega_c(G) = \sup \{ a/b \mid K_{a/b} \rightarrow G \}$$

$$\omega(G) = \lfloor \omega_c(G) \rfloor$$

$$\omega(G) \leq \omega_c(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Grphe circulaire-parfait (Zhu, 2000)

Un graphe G est **circulaire-parfait** ssi $\forall H \subseteq G, \chi_c(H) = \omega_c(H)$.

Exemples : graphes parfaits, cliques circulaires, graphes planaires extérieurs...

Le polytope des cliques circulaires

$CLI_c(G)$ - P. 2008

$$CLI_c(G) = \text{conv} \{1/\alpha(G')\chi_{G'}, G' \text{ clique circulaire première de } G\}$$

Graphe a -parfait

Un graphe G est dit a -parfait si et seulement si $CLI_c(G) = QSTAB(\overline{G})$.

Lemme

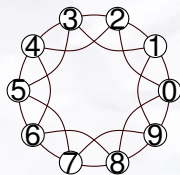
- (i) $\omega_c(G, \mathbf{w}) = \max \{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in CLI_c(G)\}$;
- (ii) $STAB(\overline{G}) \subseteq CLI_c(G) \subseteq QSTAB(\overline{G})$;

Observation : si G est parfait ou minimal imparfait alors G est a -parfait.

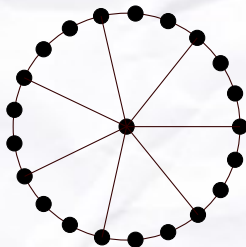
Graphes minimaux circulaires-imparfaits

Théorème (P., Wagler, Zhu 2005)

Les complémentaires des cliques circulaires $K_{(3a+1)/3}$, les “colliers de trous impairs”, les roues impaires et les antiroues impaires sont des graphes minimaux circulaires-imparfaits.



$\overline{K_{10/3}}$



collier de trous impairs T_5^7



antiroue impaire AW_7

Un “théorème fort des graphes circulaires-parfaits” est improbable.

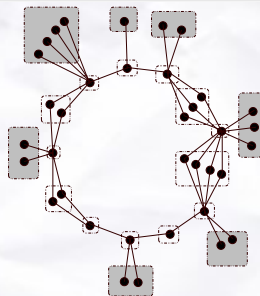
Graphes fortement circulaires-parfaits

Graphes fortement circulaires-parfaits

Un graphe circulaire-parfait est fortement circulaire-parfait si et seulement si son complémentaire est circulaire-parfait.

Théorème (Coulonges, P., Wagler 2005)

Les graphes fortement circulaires-parfaits sans triangle sont les graphes bipartis et les trous impairs entrelacés. Ils sont reconnaissables en temps polynomial et a-parfaits.



Théorème (Coulonges, P., Wagler 2005)

Il existe des graphes fortement circulaires-parfaits qui ne sont pas a-parfaits.

Complexité du calcul du nb circulaire chromatique

Théorème (Zhu 2005)

Pout tout sommet v d'un graphe circulaire-parfait, son voisinage est parfait.

fcp = fortement circulaire-parfait

	parfait	α -parfait et fcp	fcp	circulaire-parfait
$\omega(G)$	P	P	P	P
$\omega(G, w)$	P	P	P	P
$\chi(G)$	P	?	?	?
$\omega_c(G)$	P	?	?	?
$\omega_c(G, w)$	P	?	?	?
$\chi_c(G)$	P	?	?	?

Complexité du calcul du nb circulaire chromatique

Théorème (Zhu 2005)

Pout tout sommet v d'un graphe circulaire-parfait, son voisinage est parfait.

fcp = fortement circulaire-parfait

	parfait	α -parfait et fcp	fcp	circulaire-parfait
$\omega(G)$	P	P	P	P
$\omega(G, w)$	P	P	P	P
$\chi(G)$	P	P	?	?
$\omega_c(G)$	P	P	?	?
$\omega_c(G, w)$	P	P	?	?
$\chi_c(G)$	P	P	?	?

Complexité du calcul du nb circulaire chromatique

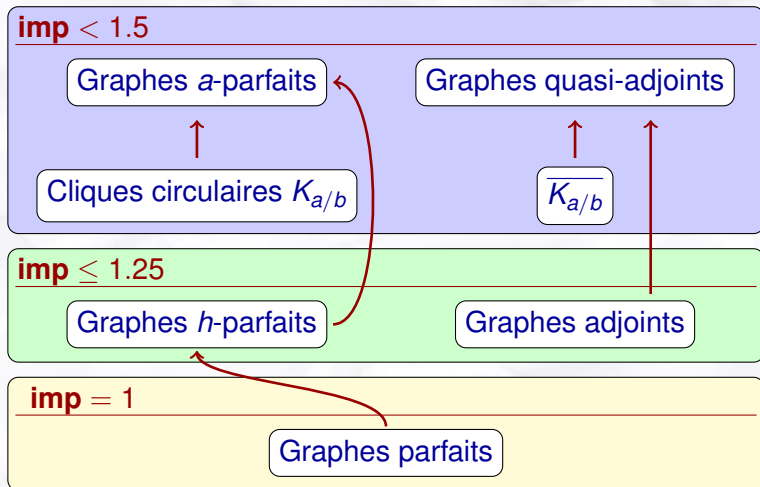
Théorème (Zhu 2005)

Pout tout sommet v d'un graphe circulaire-parfait, son voisinage est parfait.

fcp = fortement circulaire-parfait

	parfait	α -parfait et fcp	fcp	circulaire-parfait
$\omega(G)$	P	P	P	P
$\omega(G, w)$	P	P	P	P
$\chi(G)$	P	P	P	?
$\omega_c(G)$	P	P	P	?
$\omega_c(G, w)$	P	P	?	?
$\chi_c(G)$	P	P	P	?

Ratio d'imperfection de quelques familles de graphes



Coulonges, P. et Wagler 2005

Plan

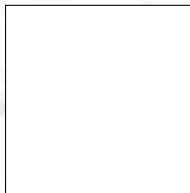
- 1 Les graphes parfaits, les bien nommés
- 2 Le polytope des stables des graphes sans griffe
- 3 Graphes circulaires-parfaits
- 4 En ce moment ...**
- 5 Conclusion

Problème du sac à dos bidimensionnel

Items



Conteneur

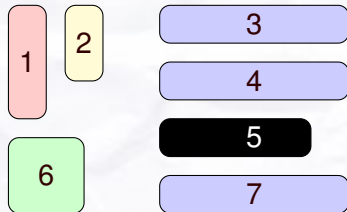


Problème

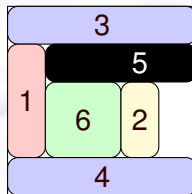
Sélectionner les items logeant dans le conteneur sans chevauchement et maximisant l'espace occupé.

Problème du sac à dos bidimensionnel

Items



Conteneur



Problème

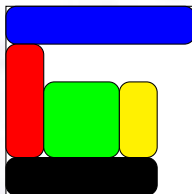
Sélectionner les items logeant dans le conteneur sans chevauchement et maximisant l'espace occupé.

Modélisation par des graphes

S.P. Fekete and J. Schepers

An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing (2007)

Conteneur

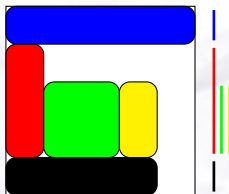


Modélisation par des graphes

S.P. Fekete and J. Schepers

An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing (2007)

Conteneur

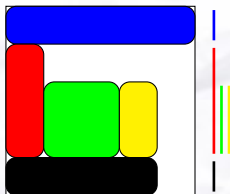


Modélisation par des graphes

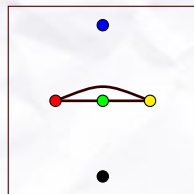
S.P. Fekete and J. Schepers

An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing (2007)

Conteneur



Graphe G_1

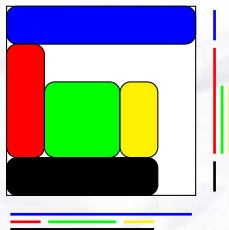


Modélisation par des graphes

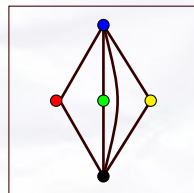
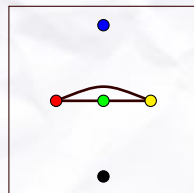
S.P. Fekete and J. Schepers

An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing (2007)

Conteneur



Graphes G_1, G_2

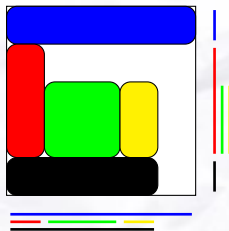


Modélisation par des graphes

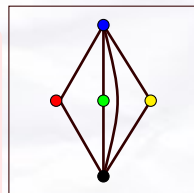
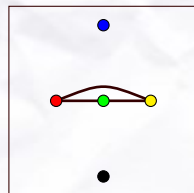
S.P. Fekete and J. Schepers

An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing (2007)

Conteneur



Graphes G_1, G_2



Propriétés de G_i :

- 1 G_i est un graphe d'intervalle ;
- 2 $\alpha(G_i, \mathbf{w}) \leq 1$;
- 3 si $e \in E(G_i)$ alors $e \notin E(G_{i+1})$.

Théorème (Gilmore et Hoffman 1964)

Un graphe est un graphe d'intervalle ssi il existe un ordre des cliques maximales tel que pour tout sommet, les cliques maximales le contenant sont consécutives selon cet ordre.

Tester l'existence de (G_1, G_2) :

- Programmes linéaires
- Algorithmes combinatoires : traduction matricielle

	Q_1	Q_2	Q_3
v_1	1	0	0
v_2	0	1	0
v_3	0	1	0
v_4	0	1	0
v_5	0	0	1

G_1

	Q_1	Q_2	Q_3
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	1
v_5	1	1	1

G_2

Plan

- 1 Les graphes parfaits, les bien nommés
- 2 Le polytope des stables des graphes sans griffe
- 3 Graphes circulaires-parfaits
- 4 En ce moment ...
- 5 Conclusion**

Conclusion

Positionnement thématique : interface théorie des graphes / programmation mathématique - *participation au projet INRIA RealOpt*

Principaux résultats :

- Colorations de graphes
 - graphes (fortement) circulaires-parfaits : structures, cas sans triangle
 - graphes partitionnables : singularité
 - graphes quasi-adjoints
- Méthodes polyédrales
 - graphes (fortement) circulaires-parfaits : STAB, CLI_c
 - inégalités des familles de cliques : Conjecture Ben Rebea, force, extension aux graphes sans griffe
 - ratio d'imperfection

Encadrement doctoral :

- Sylvain Coulonges (avec A. Raspaud) : “Graphes circulaires-parfaits”
- Cédric Joncour (avec F. Vanderbeck & P. Pesneau) : “Graphes pour les problèmes de placement”