

Contribution à la modélisation et à l'étalonnage élasto-géométriques des manipulateurs à structure parallèle

Dominique Deblaise

▶ **To cite this version:**

Dominique Deblaise. Contribution à la modélisation et à l'étalonnage élasto-géométriques des manipulateurs à structure parallèle. Automatique / Robotique. INSA de Rennes, 2006. Français. NNT : . tel-00333308

HAL Id: tel-00333308
https://theses.hal.science/tel-00333308

Submitted on 22 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D 06-24

THESE

Présentée

devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes

en vue de l'obtention du

DOCTORAT spécialité **GENIE MECANIQUE**

Par : **Dominique DEBLAISE**

Le 05 décembre 2006

Contribution à la modélisation et à l'étalonnage élasto-géométriques des manipulateurs à structure parallèle

Directeur de Thèse : Eric RAGNEAU

Co-encadrant : Patrick MAURINE

Membres du jury :

PIERROT François	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
WENGER Philippe	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
HERNOT Xavier	Maître de Conférences	Examinateur
KHALIL Wisama	Professeur des Universités	Examinateur
LAPIERRE Olivier	Ingénieur	Examinateur
MAURINE Patrick	Maître de Conférences	Examinateur
RAGNEAU Eric	Professeur des Universités	Examinateur

A Michèle, Pierre et Hélène ;

A ma famille ;

A mes amis.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement Eric Ragneau qui, dans un contexte un peu particulier, a accepté d'être mon directeur de thèse. Sans son soutien cette thèse n'aurait pas pu être menée à son terme.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans Patrick Maurine qui, tout juste nommé à l'INSA, m'a proposé de travailler sur l'étalonnage des manipulateurs à structure parallèle. Il a su me guider et être présent tout au long de ces années. Pour tout cela, mais aussi pour ta gentillesse, je te dis : « Merci Patrick ! ».

Mes remerciements sont aussi adressés à :

- François Pierrot et Philippe Wenger qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail ;
- Wisama Khalil qui m'a fait l'honneur de présider le jury ;
- Olivier Lapierre et Xavier Hernot pour leur participation au jury de thèse.

Un grand merci à Cédric Baradat qui a participé activement à la remise en route et au premier étalonnage géométrique du Surgiscope®. C'est ta signature Cédric, qui est apposée au bas de la feuille sur laquelle le robot a fait son premier carré.

Merci à Xavier (encore toi !!), pour tes conseils avisés sur les éléments finis. Merci à Josselin Legeay pour le travail réalisé sur le premier modèle Castem® de la structure. Un grand merci à Vincent Nabat qui a accepté de présenter un article lors d'une conférence à Edmonton.

Je remercie également les enseignants du département Génie Mécanique et productique de l'IUT de Rennes :

- Françoise Ollier, Olivier Wong, Jacques Gardie et Christian Tanguy pour m'avoir permis d'effectuer mes travaux de recherche dans les meilleures conditions possibles ;
- Olivier Bartier, Gérard Mauvoisin et Jean-Luc Boulanger pour avoir pris en considération les contraintes liées à mon emploi du temps ;

ainsi que le directeur de l'IUT, Robert Labbé, pour avoir émis des avis favorables, qui m'ont permis d'obtentir des décharges d'enseignements.

Il me faut aussi remercier toutes les autres personnes de l'INSA qui ont contribué à ce que ces années se déroulent dans de bonnes conditions : Lili, Alexandrine, Véronique, Stéphanie, Gaël, Mathieu, Behnam, Sarik, Cungsheng, Mohamed, Sébastien, Dominique, Fréderic, Lionel, Sylvain, André, Eric, Jean-Guillaume , Marc et Christophe.

Enfin, ce mémoire de thèse n'aurait pu vu le jour sans le soutien et la patience de Michèle. Un grand merci à elle.

Table des matières

Introduction générale 1

Notations 3

Chapitre 1 : **Etat de l'art** 5
1.1 Architectures des manipulateurs industriels 5
1.1.1 Les manipulateurs à architecture sérielle 5
1.1.2 Les manipulateurs à architecture parallèle 8
1.2 Introduction de la problématique de recherche 12
1.2.1 Analyse de l'erreur de positionnement 12
1.2.2 Cas des manipulateurs à structure sérielle. 13
1.2.3 Cas des manipulateurs à structure parallèle 13
1.3 Etalonnage géométrique des manipulateurs à structure parallèle 14
1.3.1 Méthodes classiques d'étalonnage 14
1.3.2 Méthodes alternatives 17
1.3.3 Cartographie 19
1.4 Limitation de la modélisation et de l'étalonnage géométrique 19
1.5 Modélisation du comportement élastique d'une structure parallèle 21
1.5.1 Modélisation par éléments finis 21
1.5.2 Modélisation de la rigidité en utilisant la matrice jacobienne 22
1.6 Etalonnage élasto-géométrique 23
1.6.1 Etalonnage élasto-géométrique des structures sérielles 23
1.6.2 Etalonnage élasto-géométrique des structures parallèles 24
1.7 Conclusion sur l'état de l'art et contexte de l'étude 24

Chapitre 2 : **Modélisation géométrique et analyse de sensibilité d'une structure Delta** 27
2.1 Présentation de la structure étudiée 28
2.2 Modèle géométrique à 18 paramètres 30
2.2.1 Hypothèses 30
2.2.2 Paramétrage 30
2.2.3 Modèles géométriques 32
2.2.4 Modèle d'erreurs 37
2.3 Modélisation géométrique à 42 paramètres 38

2.3.1 Introduction 38
2.3.2 Paramétrage 39
2.3.3 Modélisation géométrique 45
2.3.4 Modèle d'erreurs 49
2.4 Etude de la sensibilité 51
2.4.1 Etude de sensibilité de la situation de la nacelle 51
2.4.2 Analyse de sensibilité de la situation de l'effecteur 55
2.5 Conclusion du chapitre 59

Chapitre 3 : **Modélisation élastique des manipulateurs parallèles. Application à une structure Delta** 61
3.1 Modélisation analytique par éléments finis 62
3.1.1 Hypothèses 62
3.1.2 Modélisation d'une structure quelconque 62
3.1.3 Matrice de rigidité d'une poutre 64
3.1.4 Assemblage des matrices de rigidité, des vecteurs force et déplacement nodaux 65
3.1.5 Relations de dépendance linéaire 67
3.1.6 Prise en compte des conditions aux limites 70
3.1.7 Etude énergétique 71
3.1.8 Conclusion 72
3.2 Modélisation élastique de la structure Delta avec des liaisons passives parfaites 73
3.2.1 Modélisation de la structure 73
3.2.2 Ecriture des matrice de rigidité dans les différents repères locaux 74
3.2.3 Ecriture des matrices de rigidité dans le repère de base 75
3.2.4 Assemblage des matrices de rigidité, des vecteurs force et déplacement nodaux 78
3.2.5 Relations de dépendance linéaire 79
3.2.6 Prise en compte des conditions aux limites 83
3.2.7 Validation du modèle 85
3.3 Modélisation élastique de la structure Delta intégrant une rigidité des liaisons passives 91
3.3.1 Modélisation de la rigidité d'une liaison passive de type rotoïde 91
3.3.2 Etude de la chaîne cinématique *i* 92
3.3.3 Etude de la structure complète 96
3.3.4 Expérimentations 99
3.3.5 Modèle de déformation élastique nominal 105
3.4 Conclusion du chapitre 105

Chapitre 4 : **Modélisation et étalonnage élasto-géométriques d'une structure Delta** 107
4.1 Modèle élasto-géométrique direct 108
4.2 Déformation sous le poids propre de la structure 108
4.2.1 Etude de la chaîne cinématique *i* 108
4.2.2 Etude de la structure complète 111
4.2.3 Cartographie de la déformation de la structure sous son propre poids 111
4.3 Modèle élasto-géométrique inverse approché 115
4.3.1 Hypothèse 115

4.3.2 Description du modèle élasto-géométrique inverse approché 115
4.3.3 Estimation de l'erreur commise en fonction de la masse de l'outillage 116
4.4 Etalonnage de la structure Delta 117
4.4.1 Introduction 117
4.4.2 Mesures expérimentales 117
4.4.3 Etude de la fonction d'erreur 120
4.4.4 Mesures relatives à la validation de l'identification d'un modèle 121
4.4.5 Identification des modèles géométriques 122
4.4.6 Identification des modèles élasto-géométriques 129
4.5 Estimation des temps de calcul des modèles élasto-géométriques 140
4.6 Conclusion 140

Conclusion générale 143

Références bibliographiques 147

Table des illustrations

Figure 1.1 –Manipulateur à architecture sérielle 6
Figure 1.2 – Le robot IRB 6600ID (ABB) : photo et graphe d'agencement 7
Figure 1.3 – Machine outil K2X 10 Five (HURON) : photo et graphe d'agencement 8
Figure 1.4 – Manipulateur à architecture parallèle 8
Figure 1.5 – Plate-forme originale de Gough : photo et graphe d'agencement 9
Figure 1.6 – Simulateur de houle MISTRAL (Symétrie, ECN) 9
Figure 1.7 – Hexapode M850-11 (Physik Instrumente) 9
Figure 1.8 – Robot FlexPicker (ABB) : photo et graphe d'agencement 10
Figure 1.9 – Machine-outil Variax (Gidding & lewis) 12
Figure 1.10 – L'Exechon concept 12
Figure 1.11 – Erreurs d'exactitude de pose et de répétabilité 12
Figure 2.1 – Surgiscope® (ISIS) : photo et graphe d'agencement 28
Figure 2.2 – Delta Clavel 29
Figure 2.3 – Delta Surgiscope® 29
Figure 2.4 – Réglage lors de l'assemblage des parallélogrammes 29
Figure 2.5 – Structure simplifiée du modèle à 18 paramètres 30
Figure 2.6 – Structure équivalente 30
Figure 2.7 – Points et repères caractéristiques 31
Figure 2.8 – Position des points B_i dans R_b 31
Figure 2.9 – Modes d'assemblage du robot Delta 35
Figure 2.10 – Postures de jambes du robot Delta 36
Figure 2.11 – Erreurs associées aux parallélogrammes 38
Figure 2.12 – Modélisation de Hayati modifiée 39
Figure 2.13 – Points et repères caractéristiques 40
Figure 2.14 – Expression des repères R_{A_i} dans R_b 41
Figure 2.15 – Expression des repères R_{B_i} dans R_{A_i} 41
Figure 2.16 – Situation de la nacelle dans R_b 42
Figure 2.17 – Expression des repères R_{C_i} dans R_n 43
Figure 2.18 – Position des points B_{ij} et C_{ij} 43
Figure 2.19 – Position estimée de la nacelle pour le MGI 47
Figure 2.20 – Indice de sensibilité μ_p. Sensibilité de la position de la nacelle aux paramètres dimensionnels 53

Figure 2.21 – Indice de sensibilité μ_p. Sensibilité de la position de la nacelle aux paramètres angulaires 53
Figure 2.22 – Indice de sensibilité μ_r. Sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres dimensionnels 54
Figure 2.23 – Indice de sensibilité μ_r. Sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres angulaires 55
Figure 2.24 – Structure Delta avec un outil 56
Figure 2.25 – Indice de sensibilité μ_p moyen. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels 57
Figure 2.26 – Indice de sensibilité μ_p moyen. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires 57
Figure 2.27 – Indice de sensibilité μ_p maximum. Sensibilité maximum de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels 57
Figure 2.28 – Indice de sensibilité μ_p maximum. Sensibilité maximum de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires 58
Figure 2.29 – Longueur d'outil optimale. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels 58
Figure 2.30 – Longueur d'outil optimale. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires 59
Figure 3.1 – Modélisation partielle d'une structure quelconque 63
Figure 3.2 – Effort nodal et déplacement nodal 63
Figure 3.3 – Liaison rotoïde 68
Figure 3.4 – Liaison prismatique 69
Figure 3.5 – Liaison rotule 69
Figure 3.6 – Modélisation de la chaîne cinématique i avec des liaisons passives parfaites 73
Figure 3.7 – Modélisation de la structure complète 74
Figure 3.8 – Repère associé au grand côté du parallélogramme 78
Figure 3.9 – Nœuds de la chaîne cinématique i 79
Figure 3.10 – Relations de dépendance linéaire prise en compte dans la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_i$ 83
Figure 3.11 – Déformation de la structure 86
Figure 3.12 – Dispositif de mesure 87
Figure 3.13 – Mesure expérimentale des déformations élastiques de la structure Delta. 88
Figure 3.14 – Modèle avec liaisons passives parfaites. Charge de $19,5\,kg$ 89
Figure 3.15 – Modèle avec liaisons passives parfaites. Charge de $38,2\,kg$ 90
Figure 3.16 – Rigidité d'une liaison rotoïde passive 92
Figure 3.17 – Mobilité d'une chaîne cinématique 92
Figure 3.18 – Modélisation d'une chaîne cinématique intégrant la rigidité des liaisons passives 94
Figure 3.19 – Sous-structure équivalente à la chaîne cinématique i 96
Figure 3.20 – Modélisation de la structure complète du Delta 97
Figure 3.21 – Liaisons rotoïdes passives 100
Figure 3.22 – Modèle avec rigidité dans les liaisons passives. Charge de $19,5\,kg$ 103
Figure 3.23 – Modèle avec rigidité dans les liaisons passives. Charge de $38,2\,kg$ 104
Figure 4.1 – Chargement nodal équivalent 109

Figure 4.2 – Modélisation du poids propre d'une chaîne cinématique 110
Figure 4.3 – Modélisation du poids propre de la structure 111
Figure 4.4 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1,4\ m$ 112
Figure 4.5 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1,2\ m$ 113
Figure 4.6 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1\ m$ 114
Figure 4.7 – Erreur maximale dans le volume de travail en fonction de la charge sur la nacelle 116
Figure 4.8 – Erreur moyenne dans le volume de travail en fonction de la charge sur la nacelle 116
Figure 4.9 – Site expérimental 118
Figure 4.10 – Artefact 119
Figure 4.11 – Mise en position d'une sphère 119
Figure 4.12 – Mesure d'une configuration articulaire 119
Figure 4.13 – « Mesure du défaut de planéité du marbre » 122
Figure 4.14 – Valeur identifiée de Rb 136

Liste des tableaux

Tableau 1.1 – Etalonnage d'une plate-forme de Stewart-Gough [Besnard 2001] 17
Tableau 2.1 – Paramètres géométriques du modèle 18 32
Tableau 2.2 – Paramètres géométriques du modèle 42 44
Tableau 2.3 – Simulation du modèle géométrique inverse à 42 paramètres 48
Tableau 3.1 – Paramètres géométriques et mécaniques de la poutre (u,v) 64
Tableau 3.2 – Paramètres géométriques et mécaniques de la chaîne cinématique i 75
Tableau 3.3 – Comparaison entre le modèle analytique et le modèle *CASTEM*® 86
Tableau 4.1– Observabilité des paramètres 124
Tableau 4.2 – Paramètres géométriques identifiés du modèle géométrique 18 124
Tableau 4.3 – Evaluation de l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres 125
Tableau 4.4 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle géométrique à 18 paramètres 126
Tableau 4.5 – Paramètres géométriques identifiés du modèle géométrique 42 127
Tableau 4.6 – Evaluation de l'identification du modèle géométrique à 42 paramètres 128
Tableau 4.7 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle géométrique à 42 paramètres 128
Tableau 4.8 – Sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres mécaniques 132
Tableau 4.9 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous son poids propre, aux variations des paramètres dimensionnels 132
Tableau 4.10 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous son poids propre, aux variations des paramètres angulaires 133
Tableau 4.11 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous un chargement de -500N ajouté à son poids propre, aux variations des paramètres dimensionnels 133
Tableau 4.12 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous un chargement de -500N ajouté à son poids propre, aux variations des paramètres angulaires 134
Tableau 4.13 – Paramètres géométriques identifiés du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres 135
Tableau 4.14 – Evaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres 136
Tableau 4.15 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres 137
Tableau 4.16 – Paramètres géométriques identifiés du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres 138

Tableau 4.17 – Evaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres 139
Tableau 4.18 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres 139
Tableau 4.19 – Critère de planéité V_4 pour les modèles élasto-géométriques découplé et couplé 140

Introduction générale

Dans le cadre de cette thèse, nous allons nous intéresser à l'amélioration de la précision de positionnement statique des manipulateurs à structure parallèle. Ce problème complexe est abordé sous un angle novateur qui aboutit à la définition d'une modélisation élasto-géométrique de ce type de structure. Les paramètres de ce modèle élasto-géométrique sont alors identifiés au cours d'une phase d'étalonnage.

Motivations

Les mécanismes à structure parallèle sont des mécanismes trouvant aujourd'hui des applications dans les domaines allant du médical à la machine-outil, en passant, entre autres, par la manutention rapide ainsi que la manutention précise. En contrepartie d'une cinématique complexe et d'un faible espace de travail, les manipulateurs à structure parallèle sont reconnus pour potentiellement offrir de très bonnes performances en termes de précision, de rigidité, de vitesse et d'accélération. Mais tous ces avantages ne sont que potentiels. En effet, un manipulateur à structure parallèle n'aura en pratique ces très bonnes caractéristiques que si tous les composants de la structure présentent un haut niveau de performance [Merlet 2002].

Dans bien des applications, ces mécanismes doivent être à la fois rapides et précis, ce qui nécessite en premier lieu de bonnes caractéristiques en termes de positionnement statique. L'obtention de ces caractéristiques passe inévitablement par une phase d'étalonnage complexe. Dans un premier temps, en réponse à une modélisation purement géométrique, cette phase d'étalonnage s'est limitée à l'identification des paramètres géométriques les plus influents. Cependant, la modélisation d'une structure, qu'elle soit parallèle ou bien sérielle, ne doit pas se limiter à une description purement géométrique, mais doit intégrer toutes les causes d'erreurs significatives possédant un caractère assignable. Parmi ces causes d'erreurs, certaines, des plus significatives, sont liées aux déformations élastiques au niveau des divers éléments et articulations de la structure. Afin de définir un modèle réaliste de celle-ci, la modélisation de son comportement élastique doit donc être couplée à la modélisation géométrique définissant ainsi le modèle élasto-géométrique. Les paramètres de ce modèle élasto-géométrique devant bien entendu être identifiés au cours d'une phase d'étalonnage.

Contributions

Etat de l'art. La problématique de recherche liée à la précision des manipulateurs à structure parallèle est introduite dans le cadre de ce premier chapitre. L'étude bibliographique qui y est présentée montre que les erreurs de positionnement statique de ces structures peuvent être dues à des erreurs d'origine géométrique mais aussi à des déformations élastiques non prises en considération dans le cadre d'une modélisation purement géométrique de ces dernières.
Dans ce contexte, les différentes contributions relatives aux travaux présentés dans cette thèse sont les suivantes :

Modélisation géométrique et analyse de sensibilité d'une structure Delta. Ce second chapitre permet d'introduire les deux modèles géométriques de la structure Delta utilisée dans le cadre de ces travaux de recherche. Pour le premier modèle, comportant 18 paramètres, la géométrie des parallélogrammes de la structure est considérée comme étant parfaite, alors que le second modèle, qui lui comporte 42 paramètres, intègre de possibles défauts de géométrie des parallélogrammes. Sur la base de ce second modèle, une étude originale liée à la sensibilité de la situation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques est effectuée. Cette étude montre qu'il existe une longueur de l'effecteur optimale qui minimise l'influence des variations de l'ensemble des paramètres géométriques.

Modélisation élastique des manipulateurs parallèles. Application à une structure Delta. Ce troisième chapitre présente une méthode d'analyse de la rigidité par éléments finis des manipulateurs à structure parallèle. Dans un premier temps, cette méthode est introduite dans un contexte général, puis elle est appliquée à la structure Delta étudiée. Une première modélisation du comportement élastique de la structure est réalisée sous l'hypothèse que les liaisons passives sont parfaites. Des validations expérimentales montrent les limites d'une telle modélisation pour laquelle la rigidité des différentes liaisons passives n'est pas prise en compte. Ainsi, une seconde étude intégrant une rigidité au niveau de ces liaisons est réalisée. De nouvelles validations expérimentales permettent alors de montrer la pertinence et la cohérence de ce second modèle.

Modélisation et étalonnage élasto-géométriques d'une structure Delta. Ce dernier chapitre permet de coupler les études réalisées au niveau des deux chapitres précédents, définissant ainsi les modèles élasto-géométrique direct et élasto-géométrique inverse approché de la structure Delta. L'étude de la déformation de celle-ci sous son propre poids est réalisée à partir du modèle élasto-géométrique direct proposé. Cette étude montre que la rigidité de la structure est fortement dépendante de la configuration étudiée. Différents étalonnages géométriques et élasto-géométriques sont ensuite réalisés. Les résultats de ces étalonnages montrent que la prise en compte des déformations élastiques permet de définir ainsi un modèle qui décrit de façon pertinente le comportement réel de la structure et ceci indépendamment de son chargement.

Il est à noter que toutes les méthodes développées au cours de ce travail se veulent générales et applicables à l'ensemble des structures parallèles existantes. Comme nous l'avons indiqué, elles ont été néanmoins mises en œuvre et validées sur la structure Delta du Laboratoire. Ceci a permis d'étudier les problèmes liés à la mise en œuvre des parallélogrammes dans les mécanismes et machines parallèles ainsi que leur influence sur la précision de positionnement statique.

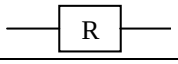
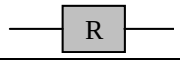
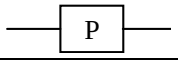
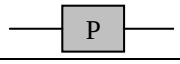
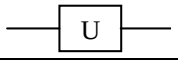
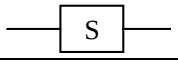
Notations

Dans le cadre de cette thèse les notations suivantes sont employées :

- les vecteurs et les matrices seront notés en gras, p. ex. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{K}$;
- le vecteur défini entre les points A et B sera noté $\overrightarrow{AB}$;
- $\boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{R}^{T}$ représentent respectivement la matrice inverse et la matrice transposée de $\boldsymbol{R}$;
- $\boldsymbol{0}_{i,j}$ correspond à la matrice nulle de dimension $i \times j$;
- $\boldsymbol{0}_{n}$ correspond à la matrice nulle de dimension $n \times n$;
- $\boldsymbol{I}_{n}$ correspond à la matrice identité de dimension $n \times n$;
- $\boldsymbol{diag}(\lambda_i)$ désigne la matrice diagonale de dimension $n \times n$ dont les termes diagonaux sont $\lambda_i, i \in \{1, \cdots, n\}$;
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sera noté $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$, et leur produit vectoriel $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Les graphes d'agencement

Ces graphes ont été proposés par F. Pierrot dans [Pierrot 1991]. Les conventions relatives à ces graphes sont les suivantes :

Liaison	Liaison passive	Liaison motorisée
Rotoïde		
Prismatique		
Cardan		
Sphérique		

Chapitre 1 : **Etat de l’art**

Sommaire

1.1 Architectures des manipulateurs industriels 5
1.2 Introduction de la problématique de recherche 12
1.3 Etalonnage géométrique des manipulateurs à structure parallèle 14
1.4 Limitation de la modélisation et de l’étalonnage géométrique 19
1.5 Modélisation du comportement élastique d’une structure parallèle 21
1.6 Etalonnage élasto-géométrique 23
1.7 Conclusion sur l’état de l’art et contexte de l’étude 24

Dans ce chapitre, après avoir présenté les différentes architectures des manipulateurs industriels, nous introduisons notre problématique de recherche qui est liée à l’amélioration de la précision de positionnement statique des manipulateurs à structure parallèle. En réponse à cette problématique, nous présentons un état de l’art concernant l’étalonnage géométrique de ce type de manipulateur. En nous appuyant sur des travaux réalisés sur des manipulateurs à structure sérielle et parallèle, nous dressons les limitations de la modélisation et de l’étalonnage purement géométriques des structures parallèles. En réponse à ces limitations, nous proposons un état de l’art relatif à la modélisation du comportement élastique de celles-ci. Enfin, nous présentons différents travaux réalisés dans le cadre d’un étalonnage intégrant simultanément les effets géométriques et élastiques que nous nommerons par la suite étalonnage élasto-géométrique.

1.1 Architectures des manipulateurs industriels

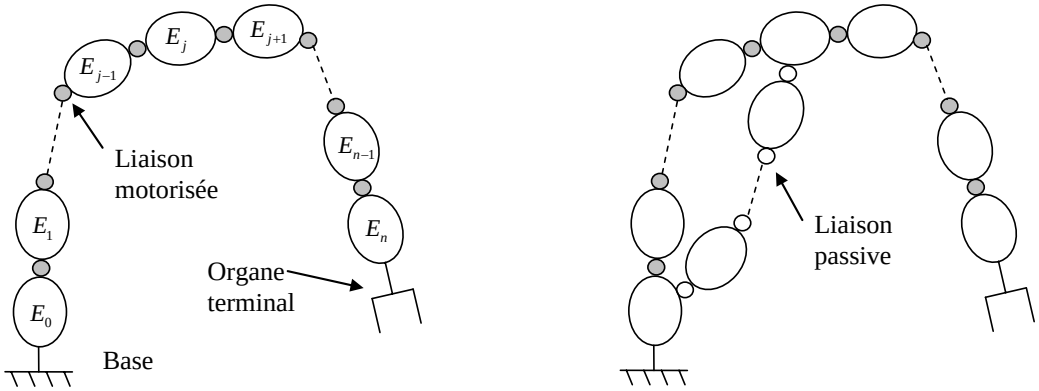
1.1.1 Les manipulateurs à architecture sérielle

L’objectif de ce paragraphe est de réaliser une présentation succincte des manipulateurs à architecture sérielle afin de pouvoir les comparer ultérieurement avec les manipulateurs à architecture parallèle. C’est dans ce cadre, qu’une introduction ainsi que deux exemples d’architectures sérielles sont proposés.

1.1.1.1 Introduction

Les manipulateurs à architecture sérielle sont les manipulateurs les plus répandus dans le milieu industriel. Ils sont caractérisés par l'existence d'une chaine cinématique unique entre l'organe terminal et la base. Suivant le degré de connexion des différents éléments, cette chaine cinématique peut être simple ou complexe [Khalil 1999].

- Elle est dite simple (Figure 1.1-a) si les éléments intermédiaires possèdent un degré de connexion égale à deux (l'élément E_j est lié aux éléments E_{j-1} et E_{j+1} par une articulation motorisée de type rotoïde ou prismatique), alors que l'organe terminal et la base possèdent un degré de connexion égal à un.
- Elle est dite complexe (Figure 1.1-b) si au moins un élément intermédiaire possède un degré de connexion supérieur à deux.



(a) Chaîne cinématique simple (b) Chaîne cinématique complexe

Figure 1.1 –Manipulateur à architecture sérielle

1.1.1.2 Exemples de manipulateurs à architecture sérielle

1.1.1.2.1 Robot manipulateur anthropomorphe

L'image associée à un robot manipulateur issu du monde industriel, est bien souvent une structure anthropomorphe à six degrés de libertés tendant à reproduire le bras de l'homme (Figure 1.2). Ce type de manipulateurs est très largement utilisé dans le monde industriel afin de remplacer l'homme dans la réalisation de taches répétitives généralement dangereuses ou pénibles (opérations d'assemblage ou de soudage de pièces par exemple).
Les avantages ainsi que les inconvénients de ce type d'architecture sont liés au fait que chaque élément de la structure (hormis le dernier élément) porte un actionneur agissant sur l'élément suivant. Cette caractéristique permet de définir un volume de travail important mais en contrepartie, les inconvénients suivants apparaissent :

- suivant la posture de l'organe terminal, les actions mécaniques auxquelles sont soumis les éléments proches de la base sont très importantes, ce qui a pour effet de limiter la charge embarquée ;

- la précision statique de l'organe terminal est fonction de la déformation ainsi que des erreurs géométriques de chacun des éléments. Pour les architectures sérielles, ces effets ont tendance à se cumuler, ce qui tend à altérer la précision statique ;
- les masses en mouvements sont importantes, ce qui pénalise la dynamique de ces structures.

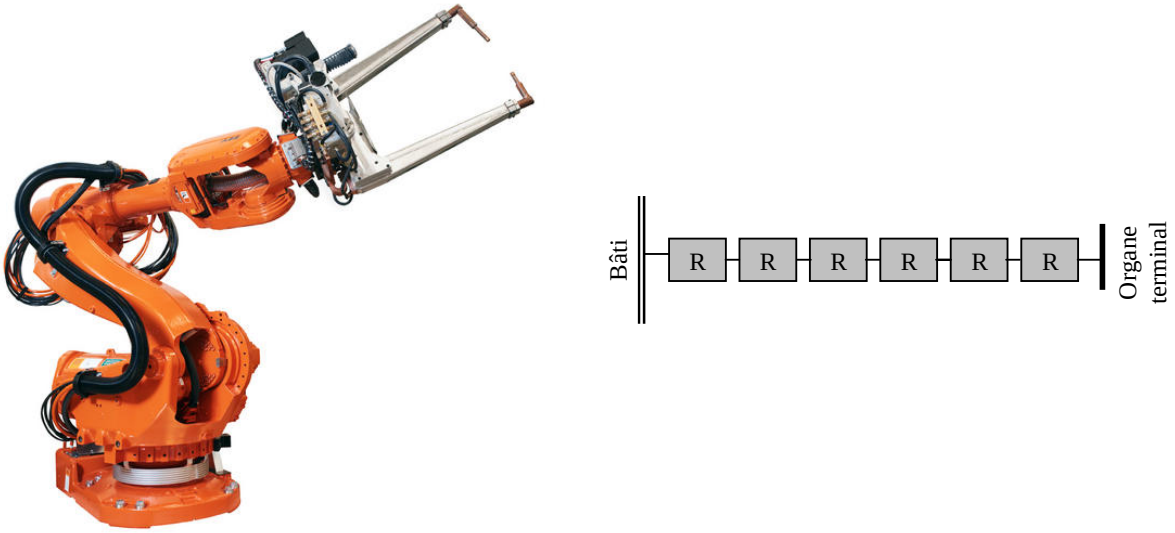


Figure 1.2 – Le robot IRB 6600ID (ABB) : photo et graphe d'agencement

1.1.1.2.2 Machine outil sérielle

Afin de répondre aux enjeux issus de l'avènement de l'Usinage Grande Vitesse (UGV), certains composants comme entre autres, les moteurs linéaires, les électro broches à paliers hydrostatiques et les commandes numériques, ont été fortement améliorés ces dernières années. Ceci a contribué à l'augmentation des performances des machines outils actuelles en termes de précision. Grâce à une très grande rigidité de la structure de la machine outil, des précisions de l'ordre de 10^{-3} *mm* sont aujourd'hui possibles. Mais cette très grande rigidité s'accompagne inévitablement d'un surdimensionnement des éléments conduisant à une augmentation de la masse des éléments mobiles, pénalisant ainsi les performances dynamiques des machines-outils sérielles.

Aujourd'hui, pour l'usinage de matériaux nécessitant des vitesses de coupe importantes, cette faible dynamique des machines-outils sérielles, ne permet pas la réalisation d'un usinage grande vitesse dans des conditions optimales.

De plus, la réduction du temps de cycle est une contrainte majeure dans le monde industriel actuel. Cette réduction du temps de cycle ne concerne pas uniquement le temps copeau, mais bien l'ensemble des temps improductifs, comme les temps de changement d'outil, ainsi que les temps de déplacement rapide. La réduction de tous ces temps n'est pas compatible avec des masses en mouvement importantes.

Un exemple de machine-outil UGV sérielle de type main droite / main gauche (ou arborescente) est donné à la Figure 1.3.

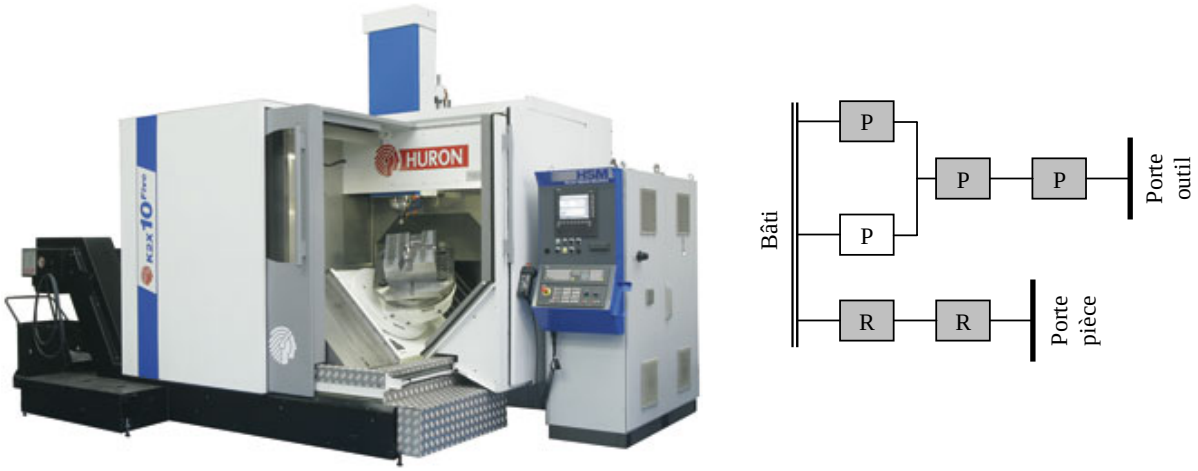


Figure 1.3 – Machine outil K2X 10 Five (HURON) :
photo et graphe d'agencement

1.1.2 Les manipulateurs à architecture parallèle

1.1.2.1 Introduction

Définition : « Un manipulateur parallèle est constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par n actionneurs simples » [Merlet 1997].
Un manipulateur à architecture parallèle est donc caractérisé par l'existence de plusieurs chaînes cinématiques, simples ou complexes, entre une base et un organe terminal (Figure 1.4).
Un historique concernant la robotique parallèle est disponible dans une revue online [Bonev 2003]. Cet historique fait apparaitre un projet de plate-forme mobile destiné à un cinéma « dynamique » [Gwinnett 1931] qui n'a jamais été construite. Le premier robot parallèle construit est à mettre à l'actif de W. L. G. Pollard ; il s'agit d'un mécanisme parallèle plan à cinq barres utilisé pour peindre des carrosseries de voitures.

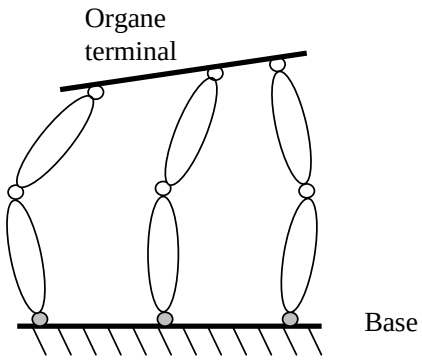
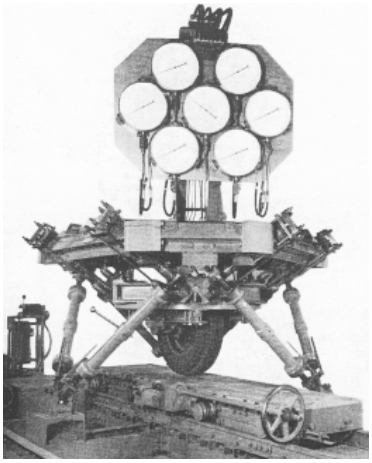


Figure 1.4 – Manipulateur à architecture parallèle

1.1.2.2 Les hexapodes

En 1947, une nouvelle structure portant le nom de plate-forme de Gough est inventée [Gough 1962]. Cette structure révolutionnaire, utilisée pour tester les pneumatiques (Figure 1.5), appartient à la famille des hexapodes. Elle est aujourd'hui connue sous le nom de plate-forme de Stewart.



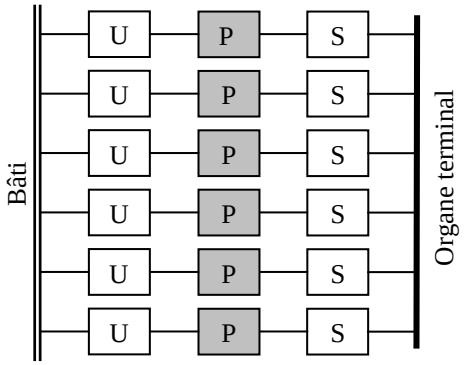


Figure 1.5 – Plate-forme originale de Gough : photo et graphe d'agencement

Mais, c'est dans le domaine de la simulation, que l'utilisation de ce type de mécanisme s'est fortement développée. Les capacités de mouvements rapides selon les six degrés de l'espace ont, dans un premier temps, permis de les utiliser comme simulateur de vol [Stewart 1965]. Aujourd'hui, ils sont utilisés pour la simulation de mouvements de tous genres, et on les retrouve par exemple pour simuler la houle (Figure 1.6) ou bien les différentes allures du cheval.
Les hexapodes sont aussi utilisés afin de positionner et orienter précisément des objets de masse importante. Dans ce type d'applications, la dynamique de la structure n'est pas un critère de première importance, ce qui importe, c'est de donner une position précise à un objet pouvant être massique. Dans l'exemple de la Figure 1.7, l'hexapode présenté permet de positionner une charge de $200\,kg$ suivant l'axe z avec une répétabilité de $\pm 1\,\mu m$ dans un volume de travail de $100\times100\times50\,mm^3$.



Figure 1.6 – Simulateur de houle MISTRAL (Symétrie, ECN)



Figure 1.7 – Hexapode M850-11 (Physik Instrumente)

1.1.2.3 Les structures de type Delta

La structure Delta [Clavel 1991] représente la seconde génération de robots parallèles pour laquelle les actionneurs sont fixes sur la base et les éléments mobiles sont légers. Ces caractéristiques permettent de définir la notion de robots parallèles légers. Les robots de cette famille présentent de très grandes performances en termes de vitesses et d'accélération.
Ce type de structure est utilisé pour des opérations de palettisation ou de conditionnement rapide. Il est possible de manipuler des charges de $1\,kg$ avec un temps de cycle de 0,4 seconde. Les accélérations nécessaires à ces applications peuvent atteindre les 10 G (Figure 1.8).

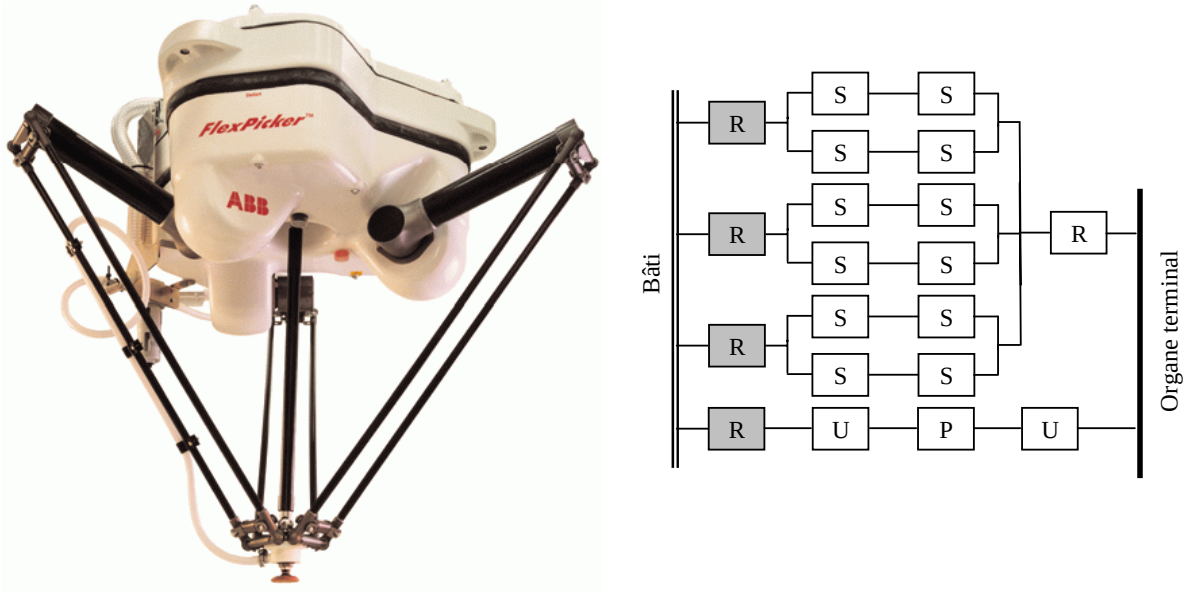


Figure 1.8 – Robot FlexPicker (ABB) : photo et graphe d'agencement

1.1.2.4 Les machines-outils à structure parallèle

La machine Variax [Sheldon 1995], construite en 1994 sur la base d'un hexapode, est la première machine-outil à structure parallèle (Figure 1.9). Avant l'abandon du projet, un unique exemplaire de cette machine a été commercialisé à l'Université de Nottingham. Depuis cette date, de nombreux prototypes ont été développés, mais très peu de machines sont actuellement utilisées dans le milieu industriel. Lorsque cela est le cas, ces machines réalisent principalement des opérations de perçage-lamage-taraudage, ne nécessitant que trois degrés de liberté [Terrier 2005].
Parmi les principales raisons de cette désaffection, il faut citer [Company 2000] :

- la méfiance des utilisateurs par rapport à ces nouvelles architectures de machines-outils qui bouleverse complètement les usages ;
- un ratio « empreinte au sol / volume de travail », en défaveur des architectures parallèles ;
- des procédures d'étalonnage plus complexe ;
- la présence d'articulations passives à plusieurs degrés de liberté ;

- des capacités d'orientation limitées à cause des singularités parallèles [Krut 2003] ;
- la présence de moteurs qui entraîne la production d'énergie thermique dans les corps en mouvement occasionnant des problèmes de dilatation.

Néanmoins, une étude comparative récente entre des machines-outils, respectivement à structure parallèle et à structure sérielle [Terrier 2004], a montré que les machines-outils à structure parallèle ont de réelles aptitudes pour le fraisage de formes complexes, ainsi que pour le fraisage à grande vitesse. Les résultats obtenus par certaines machines-outils à structure parallèle sont d'un niveau de qualité équivalent à ceux obtenus par des machines-outils à structure sérielle. Dans [Tlusty 1999] une étude comparative à caractère général est réalisée entre deux machines-outils fondées pour l'une, sur une structure hexapode dont les jambes ont une longueur variable, et pour l'autre sur un hexapode dont les jambes ont une longueur fixe. Cette étude montre qu'en termes de rigidité la structure possédant des jambes de longueur fixe présente un meilleur potentiel. Mais malgré tout, la rigidité d'une telle structure varie fortement dans l'espace de travail. L'auteur conclut, que sur la base d'une conception très rigoureuse, une machine-outil de ce type peut avoir, pour certaines applications spécifiques, des caractéristiques identiques aux machines-outils à structure sérielle.
Une tendance actuelle dans le monde de la machine-outil est de proposer des machines à structure hybride permettant de cumuler les avantages associés à chaque type de structure. Ainsi, la machine Verne de la société Fatronik [Martin 2006] utilise une table porte-outil sérielle procédant deux axes de rotations et une structure porte outil parallèle à trois degrés de liberté. Dans ce cas de figure, la structure sérielle est utilisée afin d'augmenter les capacités d'orientation de la pièce par rapport à l'outil. Une collaboration entre l'avionneur Piaggio Aero Industries et le PMARlab, le laboratoire de recherche en robotique de l'université de Gênes, a débouché sur l'étude d'une structure hybride permettant l'usinage de panneaux de grandes dimensions [Zoppi 2006]. Cette machine est composée d'une structure série à deux degrés de liberté, portant une structure parallèle possédant 4 degrés de liberté. Dans le même ordre d'idée, l'Exechon concept [Neumann 2006] [Puchtler 2006], est une nouvelle structure porte-outil à 5 degrés de liberté conçue à partie d'une structure parallèle possédant 3 degrés de libertés (2 rotations et 1 translation) à laquelle est associé un poignet série qui possède 2 degrés de libertés en rotation (Figure 1.10). Cette nouvelle structure est la remplaçante de la machine Tricept de Neos Robotics [Neumann 1988], structure qui représente à ce jour 70 % du marché des machines-outils à structure parallèle. L'avantage principal du l'Exechon est de ne posséder que 6 liaisons passives à l'origine de 10 degrés de liberté inactifs alors que la structure de la Tricept possédait 7 liaisons passives et 18 degrés de liberté inactifs. La limitation du nombre des liaisons passives permet de réduire les jeux dans les liaisons, d'augmenter la rigidité de la structure, d'en simplifier la conception et donc d'en réduire le coût [Neumann 2006]. De plus, il faut noter que l'Exechon est une machine apte à réaliser un auto-étalonnage géométrique à partir de trois codeurs redondants montés directement sur la structure.
Des états de l'art plus complets sur les machines-outils à structure parallèle sont disponibles dans [Thurneysen 2004] et [Majou 2004].



Figure 1.9 – Machine-outil Variax (Gidding & lewis)



Figure 1.10 – L'Exechon concept

1.2 Introduction de la problématique de recherche

1.2.1 Analyse de l'erreur de positionnement

Dans un repère donné, la pose de l'organe terminal d'un manipulateur est définie comme étant la combinaison de sa position et de son orientation. Après disparition de tous les phénomènes transitoires liés en particulier aux vibrations, la pose de l'organe terminal d'un manipulateur est sujette à des erreurs statiques résiduelles de positionnement et d'orientation [Vischer 1996].
Ces erreurs résiduelles peuvent être mises en évidence en réalisant l'expérience suivante :

- choisir une pose cible $\boldsymbol{p}_0$ située dans le volume de travail du manipulateur considéré ;
- avec le manipulateur réel, tenter d'atteindre N fois cette pose cible ;
- mesurer l'écart en position et en orientation de pose atteinte par rapport à la pose cible.

Les résultats obtenus font apparaître les deux types d'erreurs que sont l'exactitude de la pose et la répétabilité. Ces deux types d'erreurs peuvent être schématisés de la façon suivante :

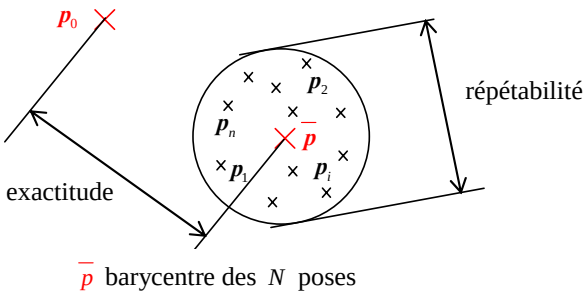


Figure 1.11 – Erreurs d'exactitude de pose et de répétabilité

La répétabilité est une grandeur caractéristique de la dispersion des poses atteintes [Mooring 1986]. Les écarts de poses à l'origine du défaut de répétabilité sont de nature aléatoire et sont causés entre-autres, par les réglages des asservissements et certains phénomènes non géométriques tels que l'hystérésis, les jeux ainsi que les frottements secs au sein les liaisons passives. La répétabilité d'une structure est une caractéristique qui est indépendante des erreurs de modélisation géométrique, c'est donc un phénomène subi difficile à corriger et compenser.
L'exactitude de pose est, quant à elle, définie comme étant l'écart entre la pose commandée et la moyenne des poses atteintes. Les écarts de poses à l'origine du défaut d'exactitude ont un caractère assignable et non plus aléatoire comme dans le cas du défaut de répétabilité. La modélisation de la structure, qui n'est bien souvent qu'une modélisation purement géométrique, est à l'origine des causes d'erreurs d'exactitude suivantes :

- les valeurs des paramètres intervenant dans la modélisation peuvent être erronées, du fait des erreurs issues de la fabrication et de l'assemblage de la structure ;
- le modèle de la structure peut ne pas prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques permettant de définir la pose atteinte. C'est le cas par exemple, des effets liés à la déformation élastique de la structure, ou bien des effets liés aux éventuelles variations de température qui provoquent une dilatation des différentes pièces constitutives de la structure.

Les problèmes d'exactitude de pose peuvent être en partie résolus par un étalonnage de cette structure. Cet étalonnage peut être géométrique ou bien, élasto-géométrique, suivant le modèle mis en œuvre pour décrire la structure.

1.2.2 Cas des manipulateurs à structure sérielle.

D'après Damak [Damak 2004], la répétabilité des robots sériels est comprise entre $0,03$ et $0,1\,mm$, alors que l'exactitude de pose peut être supérieure au millimètre. Des études réalisées sur les manipulateurs à structure sérielle [Judd 1990], [Caenen 1993], [Damak 1996], tendent à montrer que, tous les paramètres liés à l'exactitude de pose, n'ont pas la même influence sur la précision de la pose atteinte. Ainsi, les écarts de pose de l'organe terminal sont engendrés, selon leur importance, par :

- les offsets articulaires ;
- les erreurs dues à l'usinage et à l'assemblage des composants de la structure ;
- les erreurs d'origine non-géométriques.

Selon les travaux de Judd [Judd 1990], la contribution des erreurs géométriques dans les écarts de pose de l'organe terminal est de 95 %. Pour ce qui est de la contribution des erreurs non-géométriques, celle-ci peuvent devenir significatives si la charge transportée par le robot est importante [Nakamura 1995], [Damak 1996].

1.2.3 Cas des manipulateurs à structure parallèle

La grande majorité des travaux recensés sur l'amélioration de la précision statique des manipulateurs à structure parallèle se sont focalisés sur les problèmes liés à la contribution des erreurs géométriques. Vischer [Vischer 1996] a réalisé dans ces travaux de recherche, l'étalonnage géométrique d'une

structure parallèle de type Delta ainsi que celui d'une structure parallèle de type Argos. Murareci [Murareci 1997], Besnard [Besnard 2000], ainsi que Daney [Daney 2000], étudient plusieurs stratégies d'étalonnage d'une plate-forme de Gough. Renaud [Renaud 2003] quant à lui, étudie l'apport de la vision dans l'étalonnage géométrique des trois structures parallèles suivantes : les robots H4 [Pierrot 2001] et I4 [Krut 2003] développés au LIRMM, ainsi que le robot Orthoglide [Chablat 2003] développé à l'IRCCyN.

1.3 Etalonnage géométrique des manipulateurs à structure parallèle

Les bonnes caractéristiques en termes de précision des mécanismes à structure parallèle ne sont obtenues qu'après une phase d'étalonnage géométrique complexe. En effet, du fait des erreurs inhérentes à la fabrication et l'assemblage de la structure, les modèles nominaux ne sont pas réalistes. Le but de l'étalonnage géométrique est d'améliorer la connaissance des paramètres géométriques du manipulateur afin que les modèles géométriques décrivent, le plus fidèlement possible, le comportement réel de la structure.
Un étalonnage géométrique nécessite une redondance d'informations qui permet de confronter le modèle décrivant la structure au comportement réel de celle-ci. Les paramètres identifiés sont obtenus par la minimisation au sens des moindres carrés d'une fonction d'erreur qui permet de quantifier l'accord entre toutes ces informations redondantes.
Traditionnellement, la classification des méthodes d'étalonnage permet de définir trois stratégies différentes d'étalonnage [Daney 2000], [Renaud 2006] et [Rauf 2004] :

- les méthodes classiques d'étalonnage ;
- les méthodes d'étalonnage sous contraintes ;
- les méthodes d'auto-étalonnage.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons brièvement présenter ces différentes méthodes qui sont dans la littérature, principalement décrites au travers de l'étalonnage de la plate-forme de Gough.

1.3.1 Méthodes classiques d'étalonnage

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation des modèles géométriques de la structure à étalonner. Elles peuvent donc être définies à partir des modèles géométriques direct et inverse ou même utiliser le modèle implicite [Vischer 1996] qui correspond aux équations de fermeture de boucle.

1.3.1.1 Utilisation du modèle géométrique direct

L'utilisation du modèle géométrique direct dans une procédure d'étalonnage permet de confronter, la pose réellement atteinte $\boldsymbol{p}^r$ par l'organe terminal du manipulateur, à celle estimée par le modèle géométrique direct $\boldsymbol{p}^e = G_{mgd}\left(\boldsymbol{q}^r, \boldsymbol{\xi}\right)$ ($\boldsymbol{q}^r$ est le vecteur des variables articulaires et $\boldsymbol{\xi}$ celui des paramètres géométriques). L'erreur de positionnement ε_p est donnée en fonction des paramètres géométriques par :

$$\varepsilon_p = \boldsymbol{p}^r - \boldsymbol{p}^e = \boldsymbol{p}^r - G_{mgd}\left(\boldsymbol{q}^r, \boldsymbol{\xi}\right) \tag{1.1}$$

L'étalonnage consiste à agir sur les paramètres géométriques afin de rendre cette erreur la plus faible possible [Daney 2000].
L'usage de la relation non linéaire entre les variables articulaires et la position de l'organe terminal définie par le modèle géométrique direct permet de réaliser un étalonnage géométrique ne nécessitant pas la mesure de la pose complète (position et orientation) de l'organe terminal. Cette caractéristique de l'utilisation du modèle géométrique direct en est son principal avantage. En effet, cela peut permettre de s'affranchir de la mesure de l'orientation de l'organe terminal.
Cette technique, directement adaptée de l'étalonnage des structures à cinématique sérielle, est utilisée dans [Masory 1993] et [Oliviers 1995] pour une plate-forme de Gough. Vischer [Vischer 1996] a adapté cette méthode d'étalonnage à une structure Delta. Afin d'étalonner une structure parallèle de type Hexa linéaire, Rauf [Rauf 2004] utilise un dispositif de mesure spécifique fournissant trois mesures provenant de deux inclinomètres et d'un codeur rotatif. Dans [Baradat 2004], l'étalonnage d'une structure parallèle Delta est réalisé en n'utilisant qu'une seule information, correspondant à l'altitude de l'organe terminal par rapport à un marbre de métrologie. Pour cela, des cales étalons de différentes hauteurs sont utilisées. Besnard, dans [Besnard 1999] utilise deux inclinomètres afin d'étalonner une plate-forme de Gough.
Généralement, le modèle géométrique direct d'une structure parallèle est un modèle numérique. Ceci peut être à l'origine d'instabilités numériques lors de la phase d'étalonnage. Pour certaines configurations de mesure, il se peut que le modèle géométrique direct, évalué à chaque itération de l'algorithme, ne converge pas ou bien converge difficilement [Daney 2000], [Murareci 1997]. Du fait de cet inconvénient, Daney [Daney 2000] préconise l'utilisation du modèle géométrique inverse.

1.3.1.2 Utilisation du modèle géométrique inverse

L'utilisation du modèle géométrique inverse permet de quantifier indirectement l'erreur de pose de l'organe terminal à travers l'erreur sur les variables articulaires. Pour une pose connue $\boldsymbol{p}^r$ de l'organe terminal, correspondant aux variables articulaires réelles $\boldsymbol{q}^r$ il est possible de calculer, grâce au modèle géométrique inverse, les variables articulaires estimées $\boldsymbol{q}^e$ en fonction du vecteur des paramètres géométriques : $\boldsymbol{q}^e = G_{mgi}\left(\boldsymbol{p}^r, \boldsymbol{\xi}\right)$. L'erreur sur les variables articulaires ε_q en fonction des paramètres géométriques est donnée par :

$$\varepsilon_q = \boldsymbol{q}^r - \boldsymbol{q}^e = \boldsymbol{q}^r - G_{mgi}\left(\boldsymbol{p}^r, \boldsymbol{\xi}\right) \tag{1.2}$$

L'étalonnage consiste à agir sur les paramètres géométriques afin de rendre cette erreur la plus faible possible [Daney 2000]. Le principal avantage de cette méthode consiste en un découplage de l'identification des paramètres géométriques. En effet, l'erreur sur les variables articulaires d'une chaîne cinématique est indépendante de l'erreur sur les variables articulaires des autres chaînes cinématiques. Pour chacune des chaînes cinématiques, le nombre de paramètres à identifier est donc limité, ce qui facilite la résolution du problème lié à l'identification de ces derniers. Par contre, cette méthode d'étalonnage s'accompagne de la mesure complète de la pose à savoir, la mesure de la position, mais aussi celle de l'orientation de l'organe terminal. Cette mesure nécessite généralement des dispositifs de mesure très onéreux. Zhuang dans [Zhuang 1995] réalise l'étalonnage d'une plate-forme de Gough, à l'aide d'un théodolite mesurant des cibles disposées sur l'organe terminal ainsi que sur le bâti de la structure. Dans [Zhuang 1998] cette méthode d'étalonnage est étendue à l'ensemble

des manipulateurs parallèles. Un système basé sur 4 lasers de poursuite est utilisé dans [Koseki 1998] pour étalonner une structure parallèle utilisée pour l'assemblage de composants électroniques.
La vision semble être une alternative aux dispositifs de mesures onéreux [Renaud 2005], [Renaud 2006].

1.3.1.3 Etalonnage sous contraintes

L'utilisation de contraintes d'origines mécaniques permet d'obtenir de nouvelles informations sur l'état de la structure à étalonner. Ces contraintes mécaniques peuvent consister :

- à fixer, successivement la longueur d'une jambe [Zhuang 1993], ou de plusieurs jambes simultanément [Geng 1994] ;
- à fixer l'orientation d'un segment [Khalil 1997], Maurine dans [Maurine 1999] adapte la méthode à la structure Hexa ;
- à fixer l'orientation de deux segments [Daney 1999] ;
- à contraindre l'organe terminal à décrire l'enveloppe d'une sphère de centre et de rayon fixés [Rauf 2001] ;
- à bloquer la position ou l'orientation de l'organe terminal [Daney 2000].

Dans tous les cas de figure, le système de blocage est un dispositif mécanique délicat à réaliser. Il doit être suffisamment rigide afin de ne pas perturber les mesures. Il ne doit permettre aucune mobilité de l'élément bloqué sans pour autant introduire de contraintes susceptibles de déformer élastiquement cet élément. De plus, Renaud dans [Renaud 2003] indique que la limitation des mouvements de la structure engendrée par le ou les blocages peut être à l'origine de problèmes liés à l'observabilité des paramètres.

1.3.1.4 Auto-étalonnage

L'auto-étalonnage est rendu possible par l'ajout de capteurs proprioceptifs redondants sur certaines articulations passives de la structure étudiée. Zhuang dans [Zhuang 1996] calcule pour chaque configuration, les variables articulaires de toutes les liaisons passives dont la différence avec les valeurs mesurées servent à établir les équations de contraintes. La méthode proposée nécessite au moins trois capteurs redondants placés sur des articulations passives. Murareci et Khalil dans [Murareci 1997] et [Khalil 1997] optimisent la méthode en ne calculant que l'état des liaisons passives instrumentées. Zhuang, dans [Zhuang 1997], utilise six capteurs redondants disposés sur trois liaisons cardan de la structure. L'identification des paramètres est alors obtenue par la minimisation de l'écart entre les mesures des longueurs des segments et leurs valeurs fournies par le modèle géométrique inverse, à partir du positionnement calculé par le modèle géométrique direct redondant (ce modèle permet d'obtenir le positionnement de la structure à partir de la mesure des variables articulaires liées aux capteurs redondants et des paramètres des trois segments sur-instrumentés) [Daney 2000]. Dans cette même référence, l'auteur remarque que les six capteurs redondants fournissent suffisamment d'informations pour étalonner indépendamment la partie sur-instrumentée de la structure. Ceci permet,

dans un premier temps, de n'identifier qu'un sous ensemble des paramètres de la structure, ce qui favorise la convergence des algorithmes d'optimisation.

1.3.1.5 Bilan des méthodes classiques d'étalonnage

Un bilan des différentes stratégies d'étalonnage présentées au paragraphe (1.3.1) est disponible dans [Besnard 2001]. Ce bilan est appliqué à une plate-forme de Stewart-Gough. Les critères permettant de comparer les identifications issues des différentes stratégies d'étalonnage, sont basés sur la décomposition QR de la matrice d'observation $\boldsymbol{W}$. Une nouvelle base b de paramètres géométriques indépendants permet de définir une matrice $\boldsymbol{W}_b$ de rang plein. Le nombre de paramètres identifiables correspond au rang de cette matrice, alors que son conditionnement permet de mesurer la sensibilité des paramètres identifiables à la méthode d'étalonnage. Le bilan de ces différentes stratégies d'étalonnage est donné dans le Tableau 1.1.

Conditions d'étalonnage		Nombre de paramètres identifiables	Conditionnement de $\boldsymbol{W}_b$
Mesure de la pose complète	Modèle géométrique inverse	42	350
	Modèle géométrique direct	42	800
Mesure de la position	Modèle géométrique direct	39	2000
Mesure de l'orientation	Modèle géométrique direct	36	2000
Sous contraintes	Blocage d'une liaison cardan	29	2500
	Blocage d'une liaison rotule	29	7500
	Blocage d'une liaison cardan, puis blocage d'une liaison rotule	30	700
Auto-étalonnage	Ajout de 6 capteurs proprioceptifs sur 3 liaisons cardans	30	350
	Ajout d'un capteur proprioceptif	30	1500

Tableau 1.1 – Etalonnage d'une plate-forme de Stewart-Gough [Besnard 2001]

Cette étude montre que pour identifier l'ensemble des paramètres géométriques d'une plate-forme de Stewart-Gough, il faut nécessairement une mesure complète de la pose de l'organe terminal. Dans ce cas de figure, l'identification des paramètres géométriques grâce au modèle géométrique inverse, permet d'obtenir les meilleurs résultats. Lorsqu'il est possible d'instrumenter la structure étudiée avec 6 capteurs supplémentaires, l'auto-étalonnage est une méthode rapide permettant d'identifier dans de bonnes conditions 30 paramètres géométriques.

1.3.2 Méthodes alternatives

Etalonnage par passage de singularité parallèle

A partir d'un exemple faisant référence à un mécanisme à cinq barres, Last dans [Last 2006] propose d'étalonner les mécanismes à structure parallèle en exploitant les informations redondantes qui

apparaissent lors du franchissement d'une singularité parallèle [Gosselin 1990b]. Cette méthode d'étalonnage nécessite donc de définir une technique permettant le franchissement en toute sécurité de ces singularités. Aux dires des auteurs, cette technique d'étalonnage constitue une première puisqu'elle ne nécessite aucun équipement spécifique, ce qui en fait une technique peu onéreuse. De plus, elle peut être apparentée à une technique d'auto étalonnage et peut ainsi être automatisée et répétée autant de fois que nécessaire. Les limitations de cette technique sont les suivantes :

- afin d'identifier n paramètres géométriques, la structure à étalonner doit présenter au moins n configurations singulières ;
- dans le cas où les seules mesures disponibles sont angulaires, la valeur d'un paramètre dimensionnel doit être fixée par avance ;
- dans le cas de figure où la singularité parallèle intervient lorsque deux barres sont alignées, les deux longueurs de barre sont combinaisons linéaires l'une de l'autre et donc, seule leur somme est identifiable.

Etalonnage avec une connaissance *a priori* de certains paramètres

Sato dans [Sato 2004] propose de réaliser l'étalonnage d'une plate-forme de Gough à partir de l'utilisation d'un artefact constitué d'un ensemble de sphères dont les rayons et les positions des centres sont connus. Dans cette étude, l'auteur suppose que le procédé de fabrication de la structure à étalonner est suivi en termes de contrôle qualité, ce qui lui permet de pouvoir estimer les valeurs nominales des différents paramètres géométriques ainsi que l'écart type de la variation de ces différents paramètres. L'auteur utilise donc la connaissance *a priori* des paramètres à identifier pour mettre en œuvre la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci couplée à un estimateur de plus grande vraisemblance [Maurine 1996] intégrant les erreurs sur le bruit de mesure ainsi que la connaissance *a priori* de ces paramètres, lui permet de déterminer de façon itérative les paramètres du modèle géométrique. Des simulations montrent la pertinence de la méthode proposée.

Méthodes algébriques

Des méthodes algébriques, ne faisant pas appel à des optimisations au sens des moindres carrés non-linéaires, ont été utilisées afin d'identifier les paramètres géométriques d'une structure parallèle. Innocenti [Innocenti 1995] fournit une solution analytique au problème de l'identification d'une plate-forme de Gough. Daney [Daney 2000] utilise des techniques d'élimination dialytique pour identifier algébriquement les paramètres géométriques. Ce même auteur, dans [Daney 2001], propose une méthode alternative à celles utilisant les modèles géométriques direct et inverse décrites aux paragraphes (1.3.1.1) et (1.3.1.2). Il propose de supprimer algébriquement les termes d'orientations dans les équations du modèle implicite. Ainsi, la phase de mesure est simplifiée car elle ne nécessite que la mesure de la position de l'organe terminal. La résolution est elle aussi simplifiée par l'usage d'un modèle dérivé du modèle géométrique inverse.

Analyse par intervalle

Les méthodes algébriques ne sont pas les seules alternatives aux méthodes de type moindres carrés non-linéaires. L'analyse par intervalle est l'une de ces méthodes alternatives, qui permet d'obtenir un intervalle solution qui inclut la valeur réel du paramètre. Cette méthode, contrairement aux méthodes d'identification classiques, permet de certifier la solution. Ainsi, toutes les validations expérimentales réalisées afin de confirmer les résultats de l'identification peuvent être supprimées.
Cette technique d'analyse par intervalle est utilisée dans [Daney 2004] afin de simuler l'étalonnage d'une plate-forme de Gough. Les conclusions de cette étude font apparaitre que les résultats fournis par une identification classique basée sur une méthode de type moindres carrés non-linéaires, ne sont pas inclus dans les intervalles solutions trouvés dans le cadre de la méthode proposée. Une autre étude concernant l'analyse par intervalle est réalisée dans [Daney 2006]. Dans cette nouvelle étude, les mesures nécessaires à l'étalonnage d'une plate-forme de Gough sont réalisées à partir d'un capteur de type vision qui permet d'explorer, avec une précision suffisante et un faible coût, un volume importants. Les conclusions de cette étude sont données au paragraphe (1.4) qui traite des limitations de l'étalonnage géométrique.
A notre connaissance, il n'existe pas de travaux relatifs à la mise en œuvre de ces méthodes sur des structures possédant des éléments en rotation telles que les structures Delta.

1.3.3 Cartographie

La cartographie des erreurs de pose d'un manipulateur, peut être une alternative intéressante à la mise en œuvre d'une procédure d'étalonnage qui peut être complexe à réaliser dans un contexte industriel. Le dispositif de mesure doit permettre d'obtenir des mesures tridimensionnelles dans tout le volume de travail de la structure étudiée. De plus, ce dispositif doit posséder une incertitude de mesure très faible, en accord avec la précision finale recherchée pour le procédé. C'est dans ce cadre qu'un artefact à été développé par Bringmann [Bringmann 2006] afin de réaliser la cartographie des erreurs de pose de la machine-outil Hexaglide.
Il faut noter que la cartographie des erreurs de pose intègre les erreurs d'origine géométrique ainsi que l'ensemble des erreurs d'origine non géométrique, à l'exception des erreurs liées à la température.

1.4 Limitation de la modélisation et de l'étalonnage géométrique

Afin que le jeu de paramètres identifiés soit réaliste vis-à vis du comportement réel de la structure étalonnée, il faut que le modèle utilisé lors de la phase d'indentification soit complet. Ce modèle doit tenir compte de toutes les causes significatives d'imprécision, qu'elles soient d'ordre géométrique ou non. Cette remarque de Damak [Damak 1996], adressée initialement à l'identification des paramètres des manipulateurs à structure sérielle, peut être étendue à l'identification des paramètres des manipulateurs à structure parallèle. Toujours selon Damak, quelque soit le type de structure considéré, l'élimination d'une ou plusieurs sources d'erreur risque d'engendrer un problème d'interprétation physique du résultat de l'identification. Dans [Renders 1991], l'erreur sur l'identification géométrique de la longueur d'un bras d'un manipulateur à structure série à 6 degrés de liberté est de $16,6\,mm$ alors que sa valeur nominale est de $100\,mm$. Dans [Deblaise 2004], l'identification des paramètres

géométriques d'une structure parallèle de type Delta a fourni des résultats ne correspondant pas à la structure réelle. Ainsi, l'erreur sur l'identification de la longueur de l'avant bras est supérieure à $5\,mm$ pour une longueur nominale de $950\,mm$. Dans [Renaud 2005], l'erreur sur l'identification de la longueur des barres de la structure parallèle I4 [Krut 2003] est supérieure à $20\,mm$ pour une longueur nominale de $1,001\,m$. De même, dans [Renaud 2006], l'erreur sur l'identification de la longueur des bras de la structure parallèle H4 [Pierrot 2001] est de plus de $7\,mm$ pour une longueur initiale de $480\,mm$. Dans cette dernière référence, l'auteur tente de justifier l'écart important entre la longueur identifiée et initiale des bras, par des erreurs d'origine géométrique au niveau des structures parallélogrammes. Ces erreurs seraient à l'origine d'une rotation de $0,1°$ de l'organe terminal. A notre sens, même si les erreurs liées à la géométrie des parallélogrammes peuvent dégrader la précision de la structure et avoir une influence sur l'identification de la longueur des bras, il n'en reste pas moins qu'une erreur de plus de $7\,mm$ ne peut uniquement s'expliquer par des défauts au niveau de la géométrie de ces derniers. Nous pensons que les déformations élastiques de la structure sous l'effet de son poids propre ainsi que les déformations élastiques au niveau des liaisons passives ont des effets importants sur l'erreur d'identification de ce paramètre.

C'est en ce sens qu'il faut noter que les trois études précédentes relatives aux structures Delta, H4 et I4 ont toutes les trois fourni des résultats d'identification faisant apparaître que certains paramètres dimensionnels sont surévalués de façon importante. Or, pour une structure dont la base est plus haute que l'organe terminal, trouver le modèle purement géométrique qui décrit au mieux cette structure soumise à des déformations élastiques, conduit inévitablement à surévaluer certaines dimensions.

Dans [Daney 2006], l'étalonnage expérimental d'une plate-forme de Gough est réalisé à l'aide d'un outil de vision. Dans un premier temps, deux procédures d'identification des paramètres géométriques sont réalisées à partir d'une optimisation au sens des moindres carrés non linéaires. Ces deux procédures d'identification se différencient par la prise en compte ou non des erreurs de mesure. Dans un second temps, les auteurs tentent de certifier les solutions des deux précédentes identifications par une méthode d'analyse par intervalle. Cette seconde étude montre, qu'au sens de l'analyse par intervalle, ce problème d'étalonnage ne possède pas de solutions. Après avoir émis et étudié les deux hypothèses suivantes :

- l'écart type associé au bruit de mesure est sous estimé ;
- les équations purement géométriques utilisées pour l'étalonnage de la structure ne correspondent pas à son modèle réel ;

les auteurs concluent que les hypothèses utilisées pour la modélisation cinématique sont trop fortes. Ainsi, les effets tels que les défauts et les jeux dans les liaisons, non intégrés dans le modèle utilisé pour l'identification des paramètres géométriques, ne peuvent finalement pas être négligés. Là encore, il nous semble que les déformations élastiques de la structure et des différentes liaisons ne doivent pas être négligées.

Ainsi, nous pensons que comme pour les structures sérielles, la prise en compte des déformations élastiques de la structure dans son ensemble doit permettre de définir un modèle plus complet afin d'améliorer la précision de positionnement statique des structures parallèles. C'est pour cette raison, que l'état de l'art sur la modélisation du comportement élastique de ces structures est introduit au paragraphe suivant.

1.5 Modélisation du comportement élastique d'une structure parallèle

La rigidité d'un mécanisme à structure parallèle est une caractéristique très importante qui a une influence directe sur la précision du mécanisme. Cette caractéristique est prise en compte dès le stade de la conception, voire de la pré-conception [Company 2002], jusqu'à l'étude du comportement réel d'une structure [Chanal 2005].
Diverses études, répertoriées dans [Majou 2004], ont été réalisées sur le sujet. Elles sont à l'origine de différents modèles de déformations élastiques, présentés dans la suite de ce chapitre.
Une classification introduite dans [Xi 2004] permet de classifier l'ensemble des méthodes de calcul de rigidité de la façon suivante :

- les méthodes basées sur une modélisation de type éléments finis conduisant à une matrice de rigidité qui dépend de la nature des éléments de la structure ;
- les méthodes basées sur la matrice jacobienne utilisée dans la définition d'une matrice de rigidité généralisée.

1.5.1 Modélisation par éléments finis

La modélisation par éléments finis du comportement élastique d'une structure est très performante. Cette modélisation, bien adaptée aux mécanismes complexes, permet de décrire de façon fidèle la géométrie de la structure. Ainsi, dans [Bouzgarrou 2004], l'étude de la rigidité du robot parallèle 3TR1 présenté dans [Gogu 2002] est réalisée à partir d'un couplage entre le modèle CAO de la structure et un code éléments finis. La contrepartie de la prise en compte de la finesse de la description de la structure est un temps de calcul important. De ce fait, ce type de modélisation, incontournable si l'on souhaite industrialiser une structure, ne peut être envisagé qu'à un stade avancé de la conception.
Dans [Clinton 1997], l'étude d'une plate-forme de Gough est réalisée sous l'hypothèse que les éléments ne sont soumis qu'à des sollicitations mécaniques de type traction / compression. Chaque élément est étudié individuellement puis, tous les éléments sont assemblés afin de réaliser l'étude de l'ensemble de la structure.
Une alternative à ce temps de calcul important est, lorsque cela est possible, de décrire la structure sous forme de poutres. Ceci a été réalisée dans [Corradini 2004].
Il faut aussi noter que ces méthodes par éléments finis permettent de modéliser d'une part, la rigidité des bras de la structure représentés par des poutres, et d'autre part, de modéliser la rigidité des différentes liaisons. Dans [Yoon 2004], la modélisation d'une liaison rotoïde est réalisée par l'étude de l'assemblage de deux roulements. Le formalisme adopté permet d'intégrer cette modélisation dans l'étude de la structure complète.
Dans [Dong 2005], une étude de type éléments finis est utilisée afin de déterminer les modèles cinématiques d'une structure parallèle ayant des articulations flexibles. La matrice de rigidité d'une poutre y est définie comme étant une matrice carrée de dimension 12.

1.5.2 Modélisation de la rigidité en utilisant la matrice jacobienne

1.5.2.1 Modèle de rigidité cinématique avec des éléments indéformables

La rigidité d'une structure est une caractéristique utilisée par bon nombre de chercheurs de la communauté roboticienne afin d'évaluer la qualité de sa conception. Mais très souvent, ces études se limitent à l'étude de la rigidité au niveau de ces actionneurs. Ces approches produisent des résultats peu fiables dans le cas ou les éléments de la structure sont soumis à des sollicitations de flexion [Company 2002] [Majou 2006]. Dans la suite de ce paragraphe, des travaux se limitant à l'étude de la raideur des actionneurs sont présentés.
Il semble que Gosselin soit à l'origine des premiers travaux réalisés sur la rigidité des mécanismes à structure parallèle. Dans [Gosselin 1990a], les cartographies de la rigidité d'une structure plane de type 3 R**P**R et d'une plate-forme de Gough sont réalisées en ne prenant en compte que la flexibilité des liaisons actionnées. Les autres éléments de la structure sont considérés comme étant indéformables. Pour une structure possédant des éléments uniquement sollicités en traction / compression telle que les hexapodes, ce modèle est acceptable [Majou 2004]. Par contre, ce modèle de rigidité n'est plus pertinent si les éléments de la structure subissent des sollicitations en flexion.
Dans [El-Khasawneh 1999], le modèle de raideur de Gosselin est repris pour calculer les raideurs cartésiennes maximale et minimale d'une plate-forme de Gough à partir du conditionnement de la matrice de raideur cinématique. Majou dans [Majou 2004], fait remarquer que l'utilisation du conditionnement pour déterminer les raideurs minimale et maximale n'a pas de sens physique pour les machines à structure parallèle à six degrés de liberté car la matrice jacobienne n'est pas homogène. Par contre cette procédure est adaptée aux machines parallèles à translation.

1.5.2.2 Modélisation de rigidité des éléments

Zhang et Gosselin dans [Zhang 2001], [Zhang 2002] et [Gosselin 2002] ont proposé une méthode de calcul de la rigidité d'une structure où les éléments flexibles sont remplacés par des éléments rigides auxquels sont associées des liaisons élastiques virtuelles localisées. Cette modélisation est reprise dans [Majou 2006] afin de définir de façon paramétrique les coefficients de la matrice de rigidité correspondant à la configuration isotrope. Cette étude permet d'analyser l'influence des différents paramètres dimensionnels sur la rigidité de la structure.
Dans [Huang 2002], l'estimation de la rigidité d'une machine-outil à structure parallèle et de son bâti est réalisée en deux temps. Dans un premier temps, l'étude de la rigidité de la structure parallèle est effectuée à partir d'une méthode utilisant la matrice jacobienne, alors que l'étude de la rigidité du bâti utilise une méthode de type éléments finis. Dans un second temps, le principe de superposition est utilisé afin de définir la rigidité de la structure complète. Des expérimentations sont réalisées pour trois configurations différentes de la structure. Les paramètres de rigidité estimés sont du même ordre de grandeur, mais toujours plus importants que ceux qui ont été mesurés. Ceci traduit le fait que la modélisation de la structure dans son ensemble est basée sur des hypothèses, qui ne permettent pas de prendre en considération toutes les causes de compliance de la structure.
Dans [Company 2005], la rigidité du H4 est étudiée dans le but d'obtenir une structure optimisée afin de l'industrialiser. La structure H4 possède deux particularités qui doivent être intégrées au modèle de rigidité :

- les barres ne sont pas uniquement soumises à des sollicitations de type traction / compression, mais aussi à de la flexion ;
- de plus, la plate-forme mobile n'est pas rigide du fait des deux liaisons rotoïdes qui la composent.

Dans cette méthode, une action mécanique virtuelle est appliquée au point extrémité de la structure. A partir de cette action mécanique extérieure, les chargements de tous les éléments de la structure sont définis. A partir de ce chargement, toutes les déformations sont évaluées, et à partir de l'hypothèse des petits déplacements, la déformation élastique du point extrémité de la structure est calculée. Des validations expérimentales permettent de fournir un ordre de grandeur réaliste vis-à-vis de la rigidité de la structure.

1.6 Etalonnage élasto-géométrique

1.6.1 Etalonnage élasto-géométrique des structures sérielles

Au cours des paragraphes précédants, nous avons montré les limitations d'une modélisation et d'un étalonnage purement géométriques. Dans le cadre de ce paragraphe, nous allons recenser différents travaux traitant de l'étalonnage élasto-géométrique. Il faut noter que ces travaux sont principalement appliqués aux structures sérielles.
Ainsi, dans [Caenen 1990], les étalonnages d'une structure sérielle sont réalisés à partir de deux modèles différents. Le premier modèle est purement géométrique, alors que second est un modèle élasto-géométrique. Les résultats de ces deux identifications font apparaître que la modélisation élasto-géométrique permet d'augmenter, de façon significative, la précision de la structure. Comparativement à la modélisation géométrique, le gain en termes de précision est d'environ 16 %. Par contre, avec des différences de l'ordre du dixième de millimètre pour les paramètres dimensionnels et de quelques centièmes de degrés pour les paramètres angulaires, les valeurs identifiées des paramètres géométriques sont, dans les deux cas, proches les unes des autres. Damak [Damak 1996] réalise l'étalonnage d'une structure série en deux temps. Dans un premier temps, les paramètres géométriques ayant la plus grande influence sont identifiés indépendamment les uns des autres, par essais successifs. Puis dans un second temps, des mesures relatives à la déformation de la structure et d'autres relatives à la déformation des articulations sont réalisées. Toutes ces mesures sont réalisées à partir d'un appareil spécifique comportant quatre inclinomètres. Khalil dans [Khalil 2002] réalise un étalonnage élasto-géométrique d'une structure série nommée PA-10. Les paramètres géométriques du modèle rigide, ainsi que des coefficients d'élasticité associés aux éléments et aux liaisons de la structure sont identifiés dans une même phase d'étalonnage. Les mesures nécessaires à l'identification de ces paramètres sont réalisées à partir d'un système optique. Afin de sensibiliser les paramètres élastiques de la modélisation, les mesures sont réalisées pour différents chargements de la structure. Lors de la phase d'identification, plusieurs modèles différents ont été étudiés, mais il semble que le nombre de configurations utilisées lors de la phase de mesure ne soit pas suffisant, ce qui fausse certainement les conclusions. Toutefois, il semble que le modèle le plus performant soit obtenu en identifiant une partie des paramètres géométriques ainsi que les paramètres élastiques associés aux liaisons de la structure. Comparativement à une identification purement géométrique, l'identification de ce modèle élasto-géométrique permet d'améliorer la précision de la structure d'environ 25 %. De plus, il faut noter que

la précision ne dépend pas du chargement, ce qui n'est bien entendu pas le cas lorsque l'on considère une identification purement géométrique. Meggiolaro dans [Meggiolaro 2005] réalise un étalonnage élasto-géométrique d'une structure série servant à positionner un patient pour le traitement du cancer par protonthérapie. Cette structure de taille importante porte le patient dont la masse peut varier fortement. La précision requise en termes de positionnement lors de la phase de traitement est inférieure à $0,5\,mm$. Ceci justifie pleinement l'étalonnage élasto-géométrique de cette structure. Après l'étalonnage de la structure, les erreurs résiduelles sont comprises dans une sphère de rayon $0,38\,mm$. L'originalité de ce travail vient du fait que les erreurs géométriques, ainsi que celles liées aux déformations élastiques de la structure sont modélisée par des approximations polynomiales.

1.6.2 Etalonnage élasto-géométrique des structures parallèles

A notre connaissance, peu d'études se sont attachées à l'étalonnage élasto-géométrique des manipulateurs à structure parallèle. Il faut toutefois noter les travaux intéressants de Ecorchard dans [Ecorchard 2005] sur une structure parallèle Delta. Ces travaux ont consisté à un auto-étalonnage géométrique corrigé des déformations élastiques de la structure. Ces déformations élastiques sont évaluées à partir d'un modèle comportant des éléments rigides auxquels sont associées des liaisons élastiques virtuelles localisées. Des simulations ont permis de montrer que trois codeurs redondants sont nécessaires et qu'ils doivent être placés sur les liaisons rotoïdes situées entre les parallélogrammes et la nacelle. Les résultats expérimentaux issus de ces travaux font apparaître que l'amélioration de la précision de positionnement statique de la structure est limitée d'une part, par la sensibilité des codeurs redondants et d'autre part, par la répétabilité de la structure liée à des problèmes d'hystérésis. Dans [Ota 2002], un modèle géométrique inverse compensé des effets de la gravité est proposé afin de modéliser l'HexaM, une machine-outil à structure parallèle. Sur la base de ce modèle, un étalonnage géométrique intégrant la compensation des effets de la gravité est alors réalisé. Des validations expérimentales montrent la pertinence de l'approche.

1.7 Conclusion sur l'état de l'art et contexte de l'étude

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons présenté les limitations d'une modélisation et d'un étalonnage purement géométriques des mécanismes à structure parallèle. Nous avons montré que dans bien des cas, cet étalonnage géométrique conduit à identifier des paramètres dont les valeurs ne sont pas en adéquation avec celles de la structure réelle. Nous avons vu que ceci est due à la modélisation de la structure qui ne permet pas une description réaliste de son comportement. C'est dans ce cadre d'étude que se situent les travaux développés ci-après, qui s'attachent à l'amélioration de la modélisation des mécanismes à structure parallèle. Dans ce contexte, tout au long de ce mémoire et sans diminuer le caractère général de nos travaux, nous nous appuierons sur l'étude du Surgiscope®, une structure parallèle Delta de grande taille utilisée en neurochirurgie et commercialisée par la société ISIS.

Les déformations élastiques, dues au poids propre de la structure ainsi qu'aux actions mécaniques extérieures, sont à l'origine d'erreurs qui ne sont pas prises en compte dans un étalonnage géométrique. Afin de modéliser ces déformations élastiques, et en nous appuyant sur l'étude de la structure Delta, nous allons montrer que la modélisation des structures parallèles par des éléments finis

de type poutre est, dans le cas des structures élancées, une alternative intéressante, tant en termes de temps de calcul, qu’en termes de facilité d’obtention du modèle de déformations élastiques.
Afin d’améliorer la modélisation de la structure Delta étudiée, nous allons dans le cadre du chapitre suivant proposer une modélisation de la structure qui intègre les sources d’erreurs liées aux possibles défauts de géométrie des parallélogrammes.

Chapitre 2 : **Modélisation géométrique et analyse de sensibilité d'une structure Delta**

Sommaire

2.1 Présentation de la structure étudiée 28
2.2 Modèle géométrique à 18 paramètres 30
2.3 Modélisation géométrique à 42 paramètres 38
2.4 Etude de la sensibilité 51
2.5 Conclusion du chapitre 59

Ce chapitre permet d'introduire les deux modélisations géométriques qui sont utilisées dans le cadre de cette thèse afin de modéliser une structure parallèle de type Delta. Le premier modèle est fondé sur l'hypothèse selon laquelle la géométrie des parallélogrammes de la structure Delta est parfaite, alors que le second modèle intègre de possibles défauts de géométrie. Sur la base du second modèle développé, une étude de sensibilité de la situation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques est effectuée. Cette étude de sensibilité, réalisée au stade de la conception d'un mécanisme, permet au concepteur, en accord avec le fabricant, de mieux cibler les éléments pour lesquels les tolérances des spécifications géométriques doivent être « serrées ou larges ».
Nos principales contributions dans ce chapitre, sont :

- le développement de modèles géométriques qui prennent en compte la géométrie complète des parallélogrammes d'une structure parallèle de type Delta ;
- une méthode d'analyse de sensibilité de la situation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques de ces modèles, qui intègre les erreurs de géométrie de ces parallélogrammes.

Bien que les travaux présentés dans ce chapitre soient appliqués à une structure Delta particulière, ils peuvent être facilement adaptés à toutes les structures parallèles de type Delta, et en particulier à l'ensemble des structures Delta linéaires.

2.1 Présentation de la structure étudiée

La structure servant de support aux différentes études réalisées dans ce document est un Surgiscope® développé par la société ISIS[1]. Cette structure Delta, associée à un poignet sériel à trois degrés de liberté, est utilisée en neurochirurgie pour positionner et orienter un microscope, un système de visée laser ainsi qu'un porte aiguille à biopsie (Figure 2.1). Dans la suite de ce document, seule la structure Delta du Surgiscope® est étudiée.

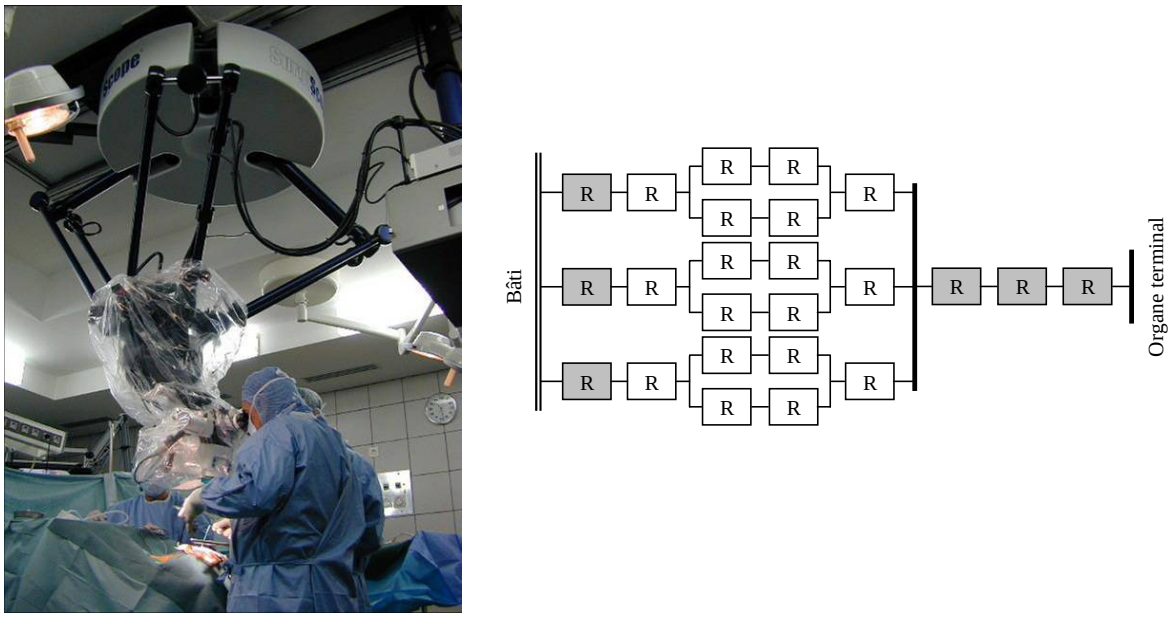


Figure 2.1 – Surgiscope® (ISIS) : photo et graphe d'agencement

Il est à noter que les chaînes cinématiques de la structure Delta initialement définie par les travaux de recherche de Clavel [Clavel 1991] (Figure 2.2), ne correspondent pas tout à fait à celles de la structure mise en œuvre pour la conception du Surgiscope® (Figure 2.3). En effet, les chaînes cinématiques sont modifiées de la façon suivante :

- deux liaisons rotoïdes sont introduites entre, respectivement, les petits côtés supérieurs des parallélogrammes et les bras, et les petits côtés inférieurs des parallélogrammes et l'organe terminal, appelé nacelle dans la suite du document ;
- toutes les liaisons rotules sont remplacées par des liaisons rotoïdes.

La cinématique de type liaison rotule entre les grands côtés des parallélogrammes et les bras de la structure Delta définie par Clavel est donc remplacée par une cinématique de type liaison cardan dans la structure Delta du Surgiscope®. La structure ainsi définie correspondant à celle présentée par Tsai en 1996 [Tsai 1996].

[1]http://www.isis-robotics.com

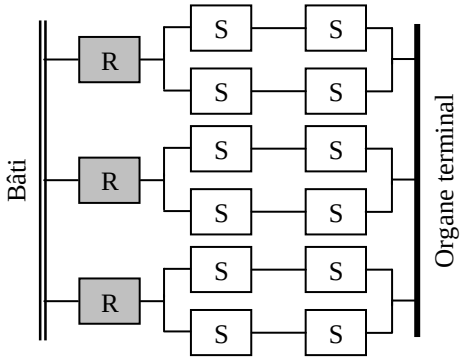


Figure 2.2 – Delta Clavel

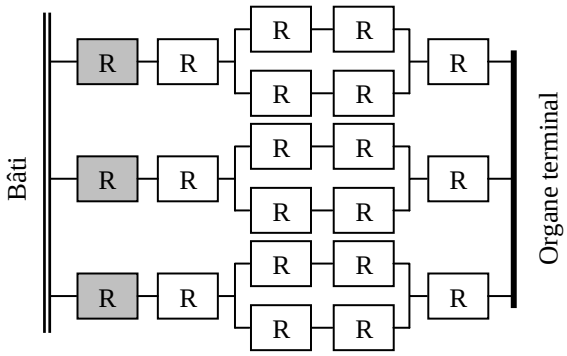


Figure 2.3 – Delta Surgiscope®

La structure Delta étudiée est hyperstatique et sa mobilité globale M peut être calculée par la formule de Grübler :

$$M = 6\left(l - n - 1\right) + \sum_{i=1}^{n} d_i \tag{2.1}$$

où l est le nombre total de solides du mécanisme (incluant la base), n le nombre total d'articulations et d_i le nombre de degrés de liberté de l'articulation i.

La formule de Grübler, appliquée à la structure Delta étudiée donne :

$$M = 6\left(17 - 21 - 1\right) + 21 = -9$$

Mais, grâce à l'arrangement spécifique des liaisons rotoïdes entre les petits et grands côtés des parallélogrammes, les contraintes imposées sont redondantes et la structure possède trois degrés de liberté en translation [Tsai 1999]. Sur la structure étudiée, ces conditions sont en partie réalisées par le blocage de liaisons rotoïdes supplémentaires (non représentées dans la Figure 2.3) lors de la phase s'assemblage des parallélogrammes (Figure 2.4). Ces liaisons permettent d'orienter, autour de l'axe des petits côtés, l'axe de la liaison rotoïde entre les petits et grands côtés des parallélogrammes. Sans ces liaisons supplémentaires, l'assemblage des parallélogrammes serait impossible sans introduire des contraintes internes trop importantes.

Finalement, dans le cadre de ces travaux de recherche, les hypothèses suivantes sont faites :

- la structure Delta étudiée est considérée comme isostatique ;
- sa mobilité externe est égale à trois.

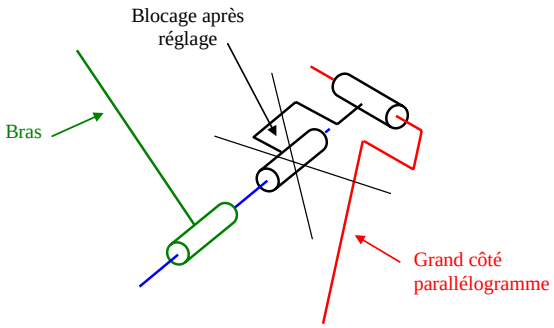


Figure 2.4 – Réglage lors de l'assemblage des parallélogrammes

2.2 Modèle géométrique à 18 paramètres [Deblaise 2004]

2.2.1 Hypothèses

Cette modélisation géométrique à 18 paramètres est réalisée en faisant les hypothèses que les parallélogrammes sont parfaits tant en termes de géométrie, que d'orientation par rapport au repère de base de la structure. Selon ces hypothèses, l'orientation de la nacelle qui est constamment assurée par les trois parallélogrammes demeure fixe. Ces hypothèses, qui correspondent à celles qui ont été posées également par [Sterneim 1987] et [Clavel 1991], permettent de remplacer chaque parallélogramme par une simple barre en liaison cardan respectivement avec le bras et la nacelle. Dans la suite de ce document, cette barre est appelée avant-bras. La modélisation d'une chaîne cinématique de la structure est donc modifiée comme indiqué à la Figure 2.5.

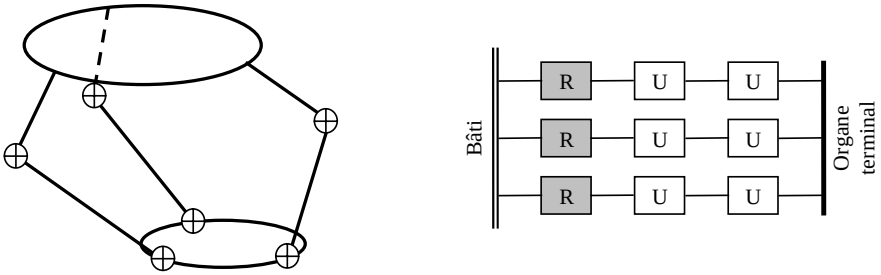


Figure 2.5 – Structure simplifiée du modèle à 18 paramètres

2.2.2 Paramétrage

2.2.2.1 Réduction de la nacelle en 1 point

Vischer [Vischer 1996] montre que pour une modélisation ne faisant pas intervenir de défauts géométriques au niveau des parallélogrammes, les rayons respectivement de la base et de la nacelle sont deux paramètres linéairement dépendants. En effet, la structure dont le rayon de base est donné par $R = R_b - R_n$, et où la nacelle est réduite en un point P, est équivalente à la structure précédemment décrite (Figure 2.6). Dans la suite de ce document, la modélisation géométrique de la structure Delta à 18 paramètres est réalisée en considérant la structure modifiée, avec une nacelle réduite en un point et un rayon de base $R = R_b - R_n$.

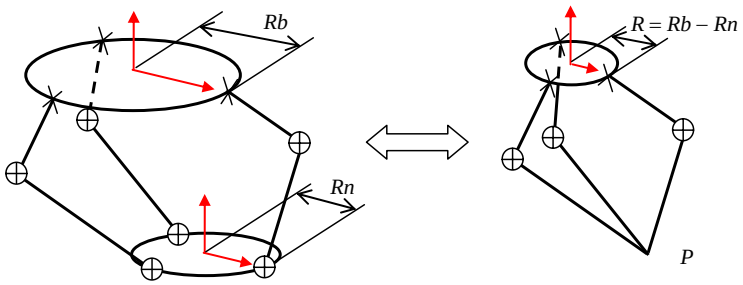


Figure 2.6 – Structure équivalente

2.2.2.2 Définition des points et des repères caractéristiques

Les différents repères, ainsi que les points caractéristiques et les paramètres de la chaîne cinématique i, sont définis successivement de la façon suivante (Figure 2.7) :

- B_i point milieu de la liaison cardan entre l'avant-bras et le bras de la chaîne cinématique i ;
- A_i projection du point B_i sur l'axe moteur de la chaîne cinématique i ;
- $R_b\left(O_b, \boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{y}_b, \boldsymbol{z}_b\right)$ repère attaché à la base
  - O_b centre du cercle circonscrit au triangle défini par les points A_i
  - $\boldsymbol{z}_b$ normal au plan défini par les points A_i
  - $\boldsymbol{x}_b$ suivant la droite $\left(O_b A_1\right)$;
- $R_{A_i}\left(A_i, \boldsymbol{x}_{A_i}, \boldsymbol{y}_{A_i}, \boldsymbol{z}_{A_i}\right)$ repère associé à la liaison motorisée de la chaîne cinématique i
  - $\boldsymbol{z}_{A_i}$ suivant l'axe de la liaison motorisée
  - $\boldsymbol{x}_{A_i}$ suivant la droite $\left(A_i B_i\right)$;

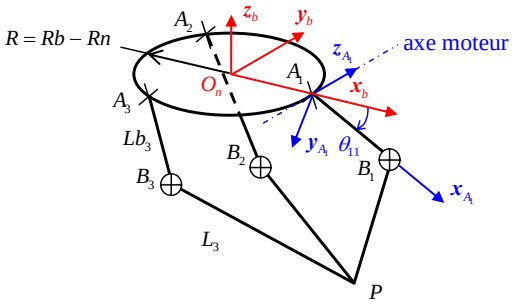


Figure 2.7 – Points et repères caractéristiques

2.2.2.3 Position des points B_i dans le repère de base R_b

La matrice de transformation homogène permettant de décrire la position du point B_i dans le repère de base R_b est définie de la façon suivante (Figure 2.8) :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{B_i} = Rot\left(\boldsymbol{z}_b, \gamma_{i1}\right) Trans\left(\boldsymbol{x}, Rb\right) Rot\left(\boldsymbol{x}, \alpha_{i1}\right) Rot\left(\boldsymbol{y}, \beta_{i1}\right) Rot\left(\boldsymbol{z}_{A_i}, \theta_{i1}\right) Trans(\boldsymbol{x}_{A_i}, Lb_i) \qquad (2.2) $$

Par construction du repère de base R_b, l'angle $\gamma_{11} = 0$.

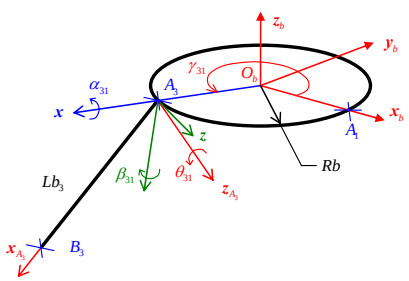


Figure 2.8 – Position des points B_i dans R_b

2.2.2.4 Bilan du paramétrage

Les valeurs nominales de l'ensemble des 18 paramètres géométriques du modèle sont données dans le Tableau 2.1.

	Paramètres dimensionnels			Paramètres angulaires			
Chaîne	Rayon (m)	$Lb_i\,(m)$	$L_i\,(m)$	$\theta_{i1}\,(rad)$	$\gamma_i\,(rad)$	$\alpha_{i1}\,(rad)$	$\beta_{i1}\,(rad)$
1	R (0,050)	$Lb_1\,(0{,}75)$	$L_1\,(0{,}95)$	θ_{11}		$\alpha_{11}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{11}\,(0)$
2		$Lb_2\,(0{,}75)$	$L_2\,(0{,}95)$	θ_{21}	$\gamma_{21}\left(2\pi/3\right)$	$\alpha_{21}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{21}\,(0)$
3		$Lb_3\,(0{,}75)$	$L_3\,(0{,}95)$	θ_{31}	$\gamma_{31}\left(4\pi/3\right)$	$\alpha_{31}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{31}\,(0)$

Tableau 2.1 – Paramètres géométriques du modèle 18

Les 18 paramètres géométriques peuvent être repartis de la façon suivante :

- les paramètres géométriques variables, que sont les variables articulaires, sont représentés par le vecteur :

$$\boldsymbol{q} = \left[\theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31}\right]^T \tag{2.3}$$

- les paramètres géométriques constants sont regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\xi}_{15}$:

$$\boldsymbol{\xi}_{15} = \left[R \quad Lb_1 \quad L_1 \quad \alpha_{11} \quad \beta_{11} \quad Lb_2 \quad L_2 \quad \alpha_{21} \quad \beta_{21} \quad \gamma_{21} \quad Lb_3 \quad L_3 \quad \alpha_{31} \quad \beta_{31} \quad \gamma_{31}\right]^T \tag{2.4}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\xi}_{18}$ regroupant l'ensemble des paramètres géométriques est défini de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\xi}_{18} = \left[\boldsymbol{q} \;\; \boldsymbol{\xi}_{15}\right]^T \tag{2.5}$$

Dans la suite de ces travaux, le modèle géométrique à 18 paramètres défini en considérant tous les paramètres géométriques à leur valeur nominale est appelé « modèle nominal 18 ».

2.2.3 Modèles géométriques

Les équations relatives aux calculs des modèles géométriques direct et inverse sont établies à partir des équations de fermeture de boucles, qui expriment que pour chaque chaîne cinématique i, la norme du vecteur $\overrightarrow{B_iP}$ est égale à la longueur de l'avant-bras L_i [Pierrot 1991] :

$$\left\|\overrightarrow{B_iP}\right\|^2 = {L_i}^2 \tag{2.6}$$

En développant cette expression, les trois équations suivantes sont obtenues $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered}\left(X + D_{1i} + D_{2i}\cos\theta_{i1} + D_{3i}\sin\theta_{i1}\right)^2 + \left(Y + D_{4i} + D_{5i}\cos\theta_{i1} + D_{6i}\sin\theta_{i1}\right)^2 + \\ \left(Z + D_{7i}\cos\theta_{i1} + D_{8i}\sin\theta_{i1}\right)^2 = {L_i}^2\end{gathered} \tag{2.7}$$

où :

$$\begin{aligned}
D_{1i} &= -R\cos\gamma_{i1} \\
D_{2i} &= -Lb_i\left(\cos\gamma_{i1}\cos\beta_{i1} - \sin\gamma_{i1}\sin\alpha_{i1}\sin\beta_{i1}\right) \\
D_{3i} &= Lb_i\sin\gamma_{i1}\cos\alpha_{i1} \\
D_{4i} &= -R\sin\gamma_{i1} \\
D_{5i} &= -Lb_i\left(\sin\gamma_{i1}\cos\beta_{i1} + \cos\gamma_{i1}\sin\alpha_{i1}\sin\beta_{i1}\right) \\
D_{6i} &= -Lb_i\cos\gamma_{i1}\cos\alpha_{i1} \\
D_{7i} &= Lb_i\cos\alpha_{i1}\sin\beta_{i1} \\
D_{8i} &= -Lb_i\sin\alpha_{i1}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

La mise en forme spécifique du système d'équations (2.7) en facilite l'usage dans le cadre de la définition des modèles géométriques direct et inverse.

2.2.3.1 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct exprime la position $\boldsymbol{p}$ du point P dans le repère de base R_b en fonction des variables articulaires $\boldsymbol{q}$ et des paramètres géométriques constants $\boldsymbol{\xi}_{15}$ de la structure. Le modèle géométrique direct est exprimé par :

$$\boldsymbol{p} = G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{15}\right) \tag{2.9}$$

Ce modèle est déduit du système d'équations (2.7) en exprimant ce dernier de la façon suivante :

$$\left(X + E_{1i}\right)^2 + \left(Y + E_{2i}\right)^2 + \left(Z + E_{3i}\right)^2 = {L_i}^2 \tag{2.10}$$

où :

$$\begin{aligned}
E_{1i} &= D_{1i} + D_{2i}\cos\theta_{i1} + D_{3i}\sin\theta_{i1} \\
E_{2i} &= D_{4i} + D_{5i}\cos\theta_{i1} + D_{6i}\sin\theta_{i1} \\
E_{3i} &= D_{7i}\cos\theta_{i1} + D_{8i}\sin\theta_{i1}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En développant l'expression (2.10), il vient :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2E_{1i}X + 2E_{2i}Y + 2E_{3i}Z + {E_{1i}}^2 + {E_{2i}}^2 + {E_{3i}}^2 - {L_i}^2 = 0 \tag{2.12}$$

Poser :

$$F_i = {E_{1i}}^2 + {E_{2i}}^2 + {E_{3i}}^2 - {L_i}^2 \tag{2.13}$$

permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
X^2 + Y^2 + Z^2 + 2E_{11}X + 2E_{21}Y + 2E_{31}Z + F_1 = 0 & (a) \\
X^2 + Y^2 + Z^2 + 2E_{12}X + 2E_{22}Y + 2E_{32}Z + F_2 = 0 & (b) \\
X^2 + Y^2 + Z^2 + 2E_{13}X + 2E_{23}Y + 2E_{33}Z + F_3 = 0 & (c)
\end{cases} \tag{2.14}$$

La soustraction des équations (2.14)(a) et (2.14)(b) d'une part, ainsi que celle des équations (2.14) (c) et (2.14)(a) d'autre part, donne :

$$\begin{aligned}
X &= G_1Y + G_2Z + G_3 \qquad (a) \\
Y &= K_1X + K_2Z + K_3 \qquad (b)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

où :

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{E_{21}-E_{22}}{E_{12}-E_{11}}, \quad G_2 = \frac{E_{31}-E_{32}}{E_{12}-E_{11}}, \quad G_3 = \frac{F_1-F_2}{2\left(E_{12}-E_{11}\right)} \\ K_1 &= \frac{E_{11}-E_{13}}{E_{23}-E_{21}}, \quad K_2 = \frac{E_{31}-E_{33}}{E_{23}-E_{21}}, \quad K_3 = \frac{F_1-F_3}{2\left(E_{23}-E_{21}\right)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

La substitution de l'expression de la variable X de l'équation (2.15)(a) dans l'équation (2.15)(b) donne :

$$Y = M_1 Z + M_2 \tag{2.17}$$

où :

$$M_1 = \frac{G_2 K_1 + K_2}{1 - G_1 K_1}, \quad M_2 = \frac{G_3 K_1 + K_3}{1 - G_1 K_1} \tag{2.18}$$

La substitution de l'équation (2.17) dans (2.15)(a) donne :

$$X = N_1 Z + N_2 \tag{2.19}$$

où :

$$N_1 = G_1 M_1 + G_2, \quad N_2 = G_1 M_2 + G_3 \tag{2.20}$$

La substitution des équations (2.17) et (2.19) dans l'équation (2.14)(a) donne :

$$Q_1 Z^2 + Q_2 Z + Q_3 = 0 \tag{2.21}$$

où :

$$\begin{aligned} Q_1 &= N_1^{\,2} + M_1^{\,2} + 1 \\ Q_2 &= 2M_1 M_2 + 2N_1 N_2 + 2E_{11} N_1 + 2E_{21} M_1 + 2E_{31} \\ Q_3 &= M_2^{\,2} + N_2^{\,2} + 2E_{11} N_2 + 2E_{21} M_2 + F_1 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Les deux racines de l'équation (2.21) sont :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{-Q_2 - \sqrt{Q_2^{\,2} - 4Q_1 Q_3}}{2Q_1} \qquad (a) \\ Z_2 &= \frac{-Q_2 + \sqrt{Q_2^{\,2} - 4Q_1 Q_3}}{2Q_1} \qquad (b) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ces deux solutions correspondent à deux modes d'assemblage différents [Chablat 1998]. La solution (b) est rejetée pour des raisons technologiques évidentes [Pierrot 1991] (Figure 2.9).

La substitution de l'équation (2.23)(a) dans les équations (2.17) et (2.19) permet donc de donner la solution du modèle géométrique direct :

$$\boldsymbol{p} = G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{15}\right) = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T = \begin{vmatrix} X = N_1 Z_1 + N_2 \\ Y = M_1 Z_1 + M_2 \\ Z = Z_1 \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

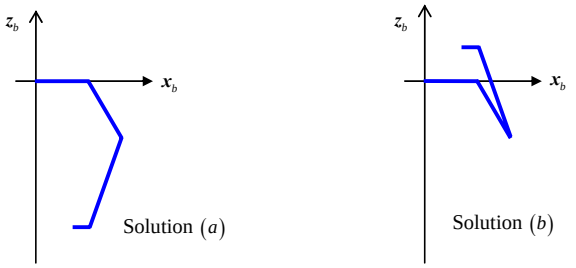


Figure 2.9 – Modes d'assemblage du robot Delta

Modèle géométrique direct nominal

Le modèle géométrique direct nominal est défini à partir du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{15n}$, qui correspond aux valeurs nominales des paramètres géométriques. Ce modèle géométrique direct nominal est exprimé de la façon suivante :

$$\boldsymbol{p} = G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{15n}\right) \tag{2.25}$$

2.2.3.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse exprime les variables articulaires $\boldsymbol{q}$ en fonction de la position $\boldsymbol{p}$ du point P et des paramètres géométriques fixes $\boldsymbol{\xi}_{15}$ de la structure. Il est représenté par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{q} = G_{18mgi}\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}_{15}\right) \tag{2.26}$$

Le modèle géométrique inverse est déduit du système d'équation (2.7) qui exprime que la norme du vecteur $\overrightarrow{B_iP}$ est égale à la longueur de l'avant-bras L_i.

En posant :

$$\begin{aligned} S_{1i} &= 2\left(D_{2i}X + D_{1i}D_{2i} + D_{5i}Y + D_{4i}D_{5i} + D_{7i}Z\right) \\ S_{2i} &= 2\left(D_{3i}X + D_{1i}D_{3i} + D_{6i}Y + D_{4i}D_{6i} + D_{8i}Z\right) \\ S_{3i} &= L_i^{\,2} - \left(X + D_{1i}\right)^2 - \left(Y + D_{4i}\right)^2 - Z^2 - Lb_i^{\,2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

après simplification, le système d'équation (2.7) s'écrit :

$$S_{1i}\cos\theta_{i1} + S_{2i}\sin\theta_{i1} = S_{3i} \tag{2.28}$$

En posant :

$$t_i = \tan\frac{\theta_{i1}}{2} \tag{2.29}$$

l'équation (2.28) s'écrit sous la forme :

$$\left(S_{3i} + S_{1i}\right)t_i^{\,2} - 2S_{2i}t_i + \left(S_{3i} - S_{1i}\right) = 0 \tag{2.30}$$

Les deux racines de cette équation sont :

$$t_{i1} = \frac{S_{2i} + \sqrt{S_{1i}^{\,2} + S_{2i}^{\,2} - S_{3i}^{\,2}}}{S_{1i} + S_{3i}} \qquad t_{i2} = \frac{S_{2i} - \sqrt{S_{1i}^{\,2} + S_{2i}^{\,2} - S_{3i}^{\,2}}}{S_{1i} + S_{3i}} \tag{2.31}$$

Les deux solutions suivantes sont théoriquement possibles :

$$\begin{aligned} \theta_{i1,1} &= 2\arctan\left(t_{i1}\right) \qquad (a) \\ \theta_{i1,2} &= 2\arctan\left(t_{i2}\right) \qquad (b) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ces deux solutions correspondent à deux postures différentes qui définissent les modes de fonctionnement du robot [Chablat 1998]. La solution (b) est rejetée pour des raisons technologiques évidentes (Figure 2.10).

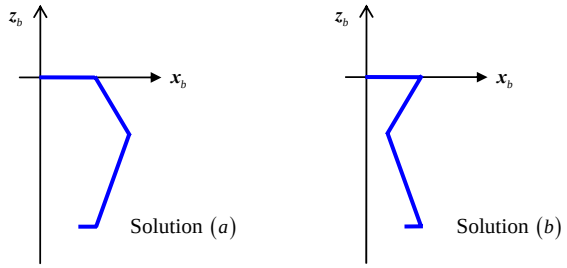


Figure 2.10 – Postures de jambes du robot Delta

Modèle géométrique inverse nominal

Le modèle géométrique inverse nominal est défini à partir du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{15n}$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{q} = G_{18mgi}\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}_{15n}\right) \tag{2.33}$$

2.2.3.3 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$, liant les variations de position de la nacelle $\delta\boldsymbol{p}$ aux variations des variables articulaires $\delta\boldsymbol{q}$, est obtenue en différenciant les trois équations de fermeture de boucles (2.7) du modèle nominal par rapport aux paramètres des vecteurs $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$. Afin de simplifier l'écriture de cette matrice, les trois équations de fermeture de boucles (2.7) sont réécrites de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_1 \;:\; \left(X + D_{11} + D_{21}\cos\theta_{11} + D_{31}\sin\theta_{11}\right)^2 + \left(Y + D_{41} + D_{51}\cos\theta_{11} + D_{61}\sin\theta_{11}\right)^2 \\ +\left(Z + D_{71}\cos\theta_{11} + D_{81}\sin\theta_{11}\right)^2 - {L_1}^2 = 0 \\ F_2 \;:\; \left(X + D_{12} + D_{22}\cos\theta_{21} + D_{32}\sin\theta_{21}\right)^2 + \left(Y + D_{42} + D_{52}\cos\theta_{21} + D_{62}\sin\theta_{21}\right)^2 \\ +\left(Z + D_{72}\cos\theta_{21} + D_{82}\sin\theta_{21}\right)^2 - {L_2}^2 = 0 \\ F_3 \;:\; \left(X + D_{13} + D_{23}\cos\theta_{31} + D_{33}\sin\theta_{31}\right)^2 + \left(Y + D_{43} + D_{53}\cos\theta_{31} + D_{63}\sin\theta_{31}\right)^2 \\ +\left(Z + D_{73}\cos\theta_{31} + D_{83}\sin\theta_{31}\right)^2 - {L_3}^2 = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

En différenciant les fonctions $F_1, F_2,$ et F_3 par rapport respectivement à $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$, la relation suivante entre l'erreur de position de la nacelle $\delta\boldsymbol{p}$ et les offsets $\delta\boldsymbol{q}$ des variables articulaires est obtenue :

$$\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{p} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{2.35}$$

où :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial p_x & \partial F_1/\partial p_y & \partial F_1/\partial p_z \\ \partial F_2/\partial p_x & \partial F_2/\partial p_y & \partial F_2/\partial p_z \\ \partial F_3/\partial p_x & \partial F_3/\partial p_y & \partial F_3/\partial p_z \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \partial F_2/\partial \theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \partial F_3/\partial \theta_{31} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\delta \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{bmatrix}^T \tag{2.38}$$

$$\delta \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{11} & \delta\theta_{21} & \delta\theta_{31} \end{bmatrix}^T \tag{2.39}$$

Le volume de travail considéré par la suite est défini de telle sorte qu'il soit exempt de toutes configurations singulières de type parallèle. La matrice $\boldsymbol{A}$ n'est donc pas singulière, et son inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ est définie dans tout le volume de travail considéré [Gosselin 1990b]. L'erreur de position du point P en fonction des offsets articulaires est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{q} \tag{2.40}$$

$\boldsymbol{J}$, la matrice jacobienne du modèle nominal est définie par :

$$\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \partial p_x/\partial \theta_{11} & \partial p_x/\theta_{21} & \partial p_x/\partial \theta_{31} \\ \partial p_y/\partial \theta_{11} & \partial p_y/\partial \theta_{21} & \partial p_y/\partial \theta_{31} \\ \partial p_z/\partial \theta_{11} & \partial p_z/\partial \theta_{21} & \partial p_z/\partial \theta_{31} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

2.2.4 Modèle d'erreurs

La relation entre l'erreur de position de la nacelle $\delta \boldsymbol{p}$, les variations des paramètres géométriques $\delta \boldsymbol{\xi}_{15}$, et les offsets articulaires $\delta \boldsymbol{q}$ est obtenue en différenciant les fonctions $F_1, F_2,$ et F_3 du système (2.34), par rapport respectivement à $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{\xi}_{15}$:

$$\boldsymbol{A}\delta \boldsymbol{p} + \boldsymbol{B}\delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}\delta \boldsymbol{\xi}_{15} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{2.42}$$

Les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, ainsi que les vecteurs $\delta \boldsymbol{p}$ et $\delta \boldsymbol{q}$ sont respectivement donnés par les expressions (2.36), (2.37), (2.38) et (2.39). La matrice $\boldsymbol{C}$ et le vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{15}$ sont donnés par :

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial R & \partial F_1/\partial Lb_1 & \partial F_1/\partial L_1 & \partial F_1/\partial \alpha_{11} & \partial F_1/\partial \beta_{11} & 0 & 0 & \\ \partial F_2/\partial R & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial F_2/\partial Lb_2 & \partial F_2/\partial L_2 & \\ \partial F_3/\partial R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial F_2/\partial \gamma_{21} & \partial F_2/\partial \alpha_{21} & \partial F_2/\partial \beta_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial F_3/\partial Lb_3 & \partial F_3/\partial L_3 & \partial F_3/\partial \gamma_{31} & \partial F_3/\partial \alpha_{31} & \partial F_3/\partial \beta_{31} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$$\delta \boldsymbol{\xi}_{15} = \begin{bmatrix} \delta R & \delta Lb_1 & \delta L_1 & \delta \alpha_{11} & \delta \beta_{11} & \delta Lb_2 & \delta L_2 \\ \delta \gamma_{21} & \delta \alpha_{21} & \delta \beta_{21} & \delta Lb_3 & \delta L_3 & \delta \gamma_{31} & \delta \alpha_{31} & \delta \beta_{31} \end{bmatrix}^T \tag{2.44}$$

L'expression (2.42) est réécrite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A}\delta \boldsymbol{p} + \boldsymbol{D}\delta \boldsymbol{\xi}_{18} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{2.45}$$

où :

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

$$\delta\boldsymbol{\xi}_{18} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{q} & \delta\boldsymbol{\xi}_{15} \end{bmatrix}^T \tag{2.47}$$

La matrice $\boldsymbol{D}$ (3×18) et le vecteur $\delta\boldsymbol{\xi}_{18}$ (18×1) regroupent les effets des offsets articulaires ainsi que les effets des variations des paramètres géométriques.

Comme énoncé précédemment, le volume de travail considéré est exempt de toutes configurations singulières de type parallèle. La matrice $\boldsymbol{A}$ n'est donc pas singulière. L'erreur de position de la nacelle en fonction de la variation des différents paramètres géométriques est définie par :

$$\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}_{18}\delta\boldsymbol{\xi}_{18} \tag{2.48}$$

$\boldsymbol{J}_{18}$, la matrice jacobienne des paramètres est définie par :

$$\boldsymbol{J}_{18} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \partial p_x/\partial\theta_{11} & \partial p_x/\partial\theta_{21} & \partial p_x/\partial\theta_{31} & \partial p_x/\partial R & \cdots & \partial p_x/\partial\beta_{31} \\ \partial p_y/\partial\theta_{11} & \partial p_y/\partial\theta_{21} & \partial p_y/\partial\theta_{31} & \partial p_y/\partial R & \cdots & \partial p_y/\partial\beta_{31} \\ \partial p_z/\partial\theta_{11} & \partial p_z/\partial\theta_{21} & \partial p_z/\partial\theta_{31} & \partial p_z/\partial R & \cdots & \partial p_z/\partial\beta_{31} \end{bmatrix}_{(3,18)} \tag{2.49}$$

2.3 Modélisation géométrique à 42 paramètres

2.3.1 Introduction

Vischer [Vischer 1996] a montré qu'un modèle complet de la structure Delta de Clavel [Clavel 1991] possède 138 paramètres. Mais l'amélioration de la précision apportée par un tel modèle n'est pas justifiable vis-à-vis de la complexité mathématique engendrée [Wang 1992]. C'est pour cette raison, qu'il présente deux modèles possédant respectivement 54 et 24 paramètres. Le modèle à 24 paramètres est développé selon l'hypothèse que les parallélogrammes sont parfaits, alors que le modèle à 54 paramètres intègre des erreurs de géométrie de ces parallélogrammes. Ces deux modèles sont développés en considérant l'hypothèse selon laquelle les liaisons passives sont parfaites, ce qui a permis de réduire le nombre de paramètres de 138 à 54 et 24 paramètres.

C'est à partir de cette hypothèse, qu'un modèle à 42 paramètres de la structure Delta étudiée est proposé dans ce chapitre. Afin de modéliser les orientations parasites dont est sujette la nacelle, ce modèle intègre des défauts géométriques au sein des structures parallélogrammes. Néanmoins, comme dans les travaux de recherche de Caro [Caro 2004], le parallélisme des axes des articulations rotoïdes entre les petits et grands côtés des parallélogrammes, est supposé respecté (Figure 2.11).

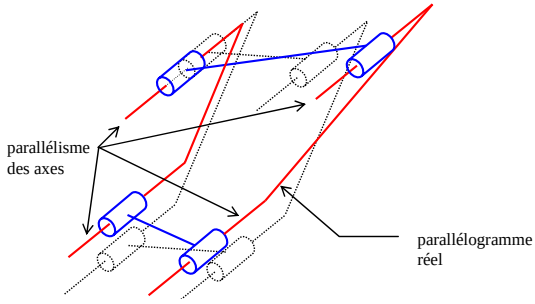


Figure 2.11 – Erreurs associées aux parallélogrammes

2.3.2 Paramétrage

2.3.2.1 Modèle d'Hayati modifié

La description géométrique utilisée est issue de la modélisation proposé par Hayati [Hayati 1983]. En effet, cette modélisation est bien adaptée pour la description de structures présentant deux liaisons rotoïdes consécutives dont les axes sont pratiquement parallèles. Elle est néanmoins modifiée, car les modèles géométriques développés au sein de ce chapitre seront réutilisés pour l'étude de la raideur de la structure. Dans le cadre de cette étude, il est nécessaire de définir des repères dont les axes $\boldsymbol{x}$ sont suivant les axes principaux des éléments flexibles. Ainsi, la définition de ces repères peut être en contradiction avec les règles de modélisation définies par Hayati. Par exemple, dans le cas de figure où l'axe d'une liaison rotoïde correspond à l'axe principal d'un élément flexible, le repère associé à la liaison est défini de telle façon que son axe $\boldsymbol{x}$ soit suivant l'axe de la liaison (Figure 2.12). La transformation homogène correspondant à cette modélisation est la suivante :

$$ {}^{n-1}\boldsymbol{T}_n = Rot\left(\boldsymbol{z}_{n-1},\theta_n\right)Trans\left(\boldsymbol{x},L_n\right)Rot\left(\boldsymbol{y},\beta_n\right)Rot\left(\boldsymbol{z},\theta_{1n}\right) \tag{2.50} $$

avec l'angle $\beta_n \approx -\dfrac{\pi}{2}$

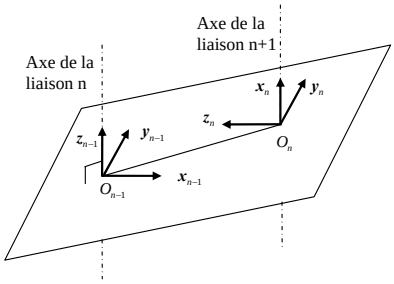


Figure 2.12 – Modélisation de Hayati modifiée

2.3.2.2 Définition des points et des repères caractéristiques

Les différents repères, ainsi que les points caractéristiques et les paramètres de la chaîne cinématique i, sont définis successivement de la façon suivante (Figure 2.13) :

- $R_{B_i}\left(B_i,\boldsymbol{x}_{B_i},\boldsymbol{y}_{B_i},\boldsymbol{z}_{B_i}\right)$ repère associé au petit côté supérieur du parallélogramme i en liaison rotoïde avec le bras i
  - B_i point milieu de l'axe du petit côté supérieur du parallélogramme
  - $\boldsymbol{x}_{B_i}$ suivant l'axe du petit côté supérieur du parallélogramme ;
- A_i projection du point B_i sur l'axe moteur de la chaîne cinématique i ;
- $R_b\left(O_b,\boldsymbol{x}_b,\boldsymbol{y}_b,\boldsymbol{z}_b\right)$ repère attaché à la base
  - O_b centre du cercle circonscrit au triangle défini par les points A_i
  - $\boldsymbol{z}_b$ normal au plan défini par les points A_i
  - $\boldsymbol{x}_b$ suivant la droite $\left(O_bA_1\right)$;

- $R_{A_i}\left(A_i, \boldsymbol{x}_{A_i}, \boldsymbol{y}_{A_i}, \boldsymbol{z}_{A_i}\right)$ repère associé à la liaison motorisée de la chaîne cinématique i
  - $\boldsymbol{z}_{A_i}$ suivant l'axe de la liaison motorisée
  - $\boldsymbol{x}_{A_i}$ suivant la droite $\left(A_iB_i\right)$;
- $R_{C_i}\left(C_i, \boldsymbol{x}_{C_i}, \boldsymbol{y}_{C_i}, \boldsymbol{z}_{C_i}\right)$ repère associé au petit côté inférieur du parallélogramme i en liaison rotoïde avec la nacelle
  - C_i point milieu de l'axe du petit côté inférieur du parallélogramme
  - $\boldsymbol{x}_{C_i}$ suivant l'axe du petit côté inférieur du parallélogramme ;
- $R_n\left(O_n, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{z}_n\right)$ repère associé à la nacelle
  - O_n centre du cercle circonscrit au triangle défini par les points C_i
  - $\boldsymbol{z}_n$ normal au plan défini par les points C_i
  - $\boldsymbol{x}_n$ suivant la droite $\left(O_nC_1\right)$;
- $R_{B_{ij}}\left(B_{ij}, \boldsymbol{x}_{B_i}, \boldsymbol{y}_{B_i}, \boldsymbol{z}_{B_i}\right)$ repère associé au petit côté supérieur du parallélogramme i, exprimé au point B_{ij} ($j = 1, 2$) ;
- $R_{C_{ij}}\left(C_{ij}, \boldsymbol{x}_{C_i}, \boldsymbol{y}_{C_i}, \boldsymbol{z}_{C_i}\right)$ repère associé au petit côté inférieur du parallélogramme i, exprimé au point C_{ij} ($j = 1, 2$).

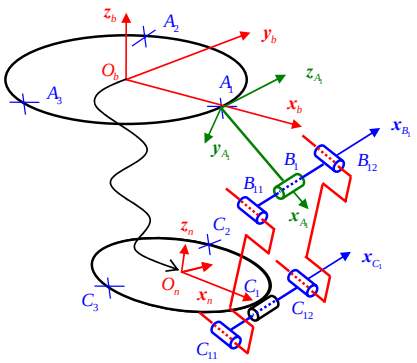


Figure 2.13 – Points et repères caractéristiques

2.3.2.3 Matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}$

La matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}$ permettant de décrire la situation du repère associé à la liaison motorisée de la chaîne cinématique i dans le repère de base R_b, est définie de la façon suivante (Figure 2.14) :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}} = Rot\left(\boldsymbol{z}_b, \gamma_{i1}\right) Trans\left(\boldsymbol{x}, Rb\right) Rot\left(\boldsymbol{x}, \alpha_{i1}\right) Rot\left(\boldsymbol{y}, \beta_{i1}\right) Rot\left(\boldsymbol{z}_{A_i}, \theta_{i1}\right) \tag{2.51} $$

Par construction du repère de base R_b, l'angle γ_{11} est tel que $\gamma_{11} = 0$.

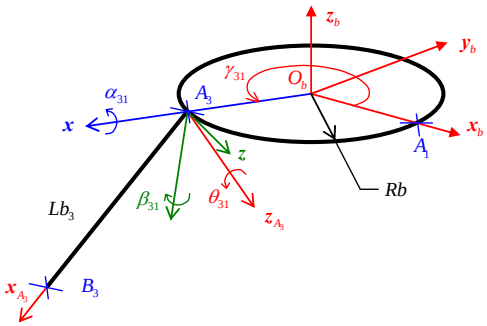


Figure 2.14 – Expression des repères R_{A_i} dans R_b

2.3.2.4 Matrice de transformation ${}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$

La matrice de transformation ${}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$ permettant de décrire la situation du repère associé au petit côté supérieur du parallélogramme i dans le repère R_{A_i} est définie de la façon suivante (Figure 2.15) :

$$ {}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}} = Trans\left(\boldsymbol{x}_{A_i}, Lb_i\right) Rot\left(\boldsymbol{y}, \beta_{i2}\right) Rot\left(\boldsymbol{z}, \theta_{i2}\right) \tag{2.52} $$

Cette matrice de transformation homogène est issue de la modélisation d'Hayati modifiée présentée au paragraphe (2.3.2.1). Il faut noter que la première rotation $Rot\left(\boldsymbol{z}_{A_i}, \theta_{i1}\right)$, est intégrée à la matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}$ précédemment définie.

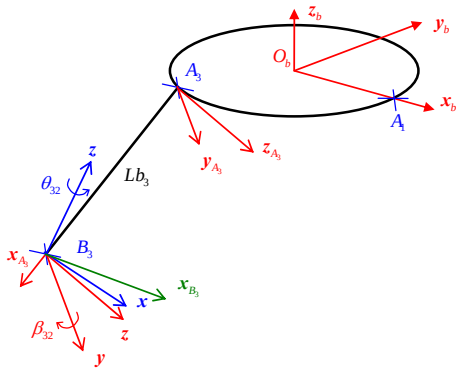


Figure 2.15 – Expression des repères R_{B_i} dans R_{A_i}

2.3.2.5 Matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}$

La matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}$ permet de décrire la position ainsi que l'orientation de la nacelle dans le repère de base de la structure. Le paramétrage Roulis Tangage Lacet (angles ϕ, ϑ et ψ) est choisi pour décrire l'orientation de la nacelle. La matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}$ est donc définie à partir des transformations homogènes suivantes (Figure 2.16) :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n} = Trans\left(\boldsymbol{x}_b, X\right) Trans\left(\boldsymbol{y}_b, Y\right) Trans\left(\boldsymbol{z}_b, Z\right) Rot\left(\boldsymbol{z}_b, \phi\right) Rot\left(\boldsymbol{y}, \vartheta\right) Rot\left(\boldsymbol{x}, \psi\right) \tag{2.53} $$

où les variables X, Y et Z sont les composantes du vecteur ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{O_n}$ donnant la position du point O_n dans le repère de base R_b.

Les orientations prises par la nacelle sont celles qui sont induites par les erreurs de géométrie des parallélogrammes. Elles restent d'amplitudes très faibles, ce qui permet de ne considérer que les effets du premier ordre dans l'écriture des matrices de rotation suivantes :

$$Rot(\boldsymbol{z}_b,\phi)=\begin{bmatrix}1 & -\phi & 0 & 0\\ \phi & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, Rot(\boldsymbol{y},\vartheta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \vartheta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\vartheta & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, Rot(\boldsymbol{x},\psi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\psi & 0\\ 0 & \psi & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Après simplification des termes du second ordre, la situation de la nacelle dans le repère de base, est donnée par :

$${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}=\begin{bmatrix}1 & -\phi & \vartheta & X\\ \phi & 1 & -\psi & Y\\ -\vartheta & \psi & 1 & Z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_n} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{O_n}\\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1\end{bmatrix} \quad (2.55)$$

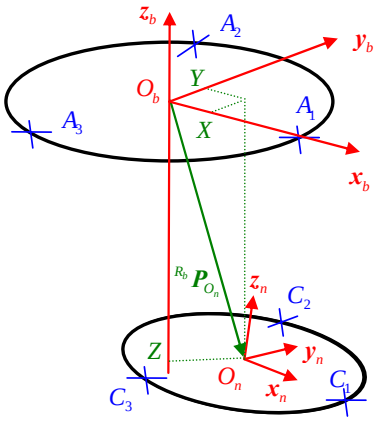


Figure 2.16 – Situation de la nacelle dans R_b

2.3.2.6 Matrice de transformation ${}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}}$

La matrice de transformation ${}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}}$ permettant de décrire la situation du repère associé au petit côté inférieur du parallélogramme i dans le repère de la nacelle R_n est définie de la façon suivante (Figure 2.17) :

$${}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}}=Rot(\boldsymbol{z}_n,\gamma_{i2})Trans(\boldsymbol{x},Rn)Rot(\boldsymbol{z},\theta_{i3})Rot(\boldsymbol{y},\beta_{i3}) \quad (2.56)$$

Par construction du repère de base R_n, l'angle γ_{12} est tel que $\gamma_{12}=0$.

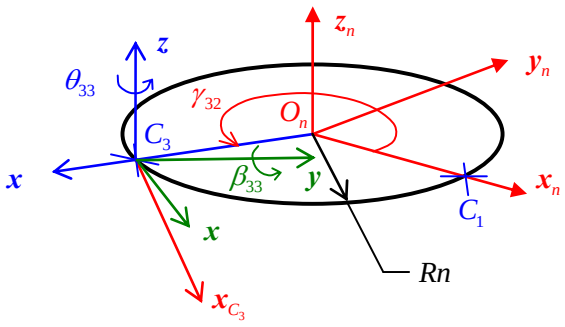


Figure 2.17 – Expression des repères R_{C_i} dans R_n

2.3.2.7 Matrices de transformation ${}^{R_{B_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_{ij}}}$ et ${}^{R_{C_i}}\boldsymbol{T}_{R_{C_{ij}}}$

Les matrices de transformation ${}^{R_{B_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_{ij}}}$ permettant de décrire les situations des repères $R_{B_{ij}}$ $(j=1,2)$ dans le repère R_{B_i} sont définies de la façon suivante (Figure 2.18) :

$$ {}^{R_{B_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_{ij}}} = Trans\left(\boldsymbol{x}_{B_i}, (-1)^j\, Lc_{i1}\right) \tag{2.57}$$

Les matrices de transformation ${}^{R_{C_i}}\boldsymbol{T}_{R_{C_{ij}}}$ permettant de décrire les situations des repères $R_{C_{ij}}$ $(j=1,2)$ dans le repère R_{C_i} sont définies de la façon suivante (Figure 2.18) :

$$ {}^{R_{C_i}}\boldsymbol{T}_{R_{C_{ij}}} = Trans\left(\boldsymbol{x}_{C_i}, (-1)^j\, Lc_{i2}\right) \tag{2.58}$$

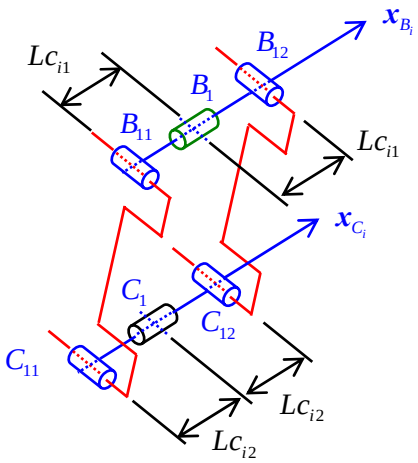


Figure 2.18 – Position des points B_{ij} et C_{ij}

2.3.2.8 Bilan du paramétrage

L'ensemble des 42 paramètres du modèle, ainsi que leur valeur nominale sont donnés dans le Tableau 2.2.

Paramètres dimensionnels					
Chaîne	Rayon (m)	$Lb_i\,(m)$	$L_{ij}\,(m)$	$Lc_{i1}\,(m)$	$Lc_{i2}\,(m)$
1	$Rb\,(0,25)$ $Rn\,(0,20)$	$Lb_1\,(0,75)$	$L_{11}\,(0,95)$ $L_{12}\,(0,95)$	$Lc_{11}\,(0,125)$	$Lc_{12}\,(0,125)$
2		$Lb_2\,(0,75)$	$L_{21}\,(0,95)$ $L_{22}\,(0,95)$	$Lc_{21}\,(0,125)$	$Lc_{22}\,(0,125)$
3		$Lb_3\,(0,75)$	$L_{31}\,(0,95)$ $L_{32}\,(0,95)$	$Lc_{31}\,(0,125)$	$Lc_{32}\,(0,125)$
Paramètres angulaires					
Chaîne	$\theta_{i1}\,(rad)$	$\gamma_{i1}\,(rad)$	$\alpha_{i1}\,(rad)$	$\beta_{i1}\,(rad)$	$\beta_{i2}\,(rad)$
1	θ_{11}		$\alpha_{11}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{11}\,(0)$	$\beta_{12}\left(-\pi/2\right)$
2	θ_{21}	$\gamma_{21}\left(2\pi/3\right)$	$\alpha_{21}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{21}\,(0)$	$\beta_{22}\left(-\pi/2\right)$
3	θ_{31}	$\gamma_{31}\left(4\pi/3\right)$	$\alpha_{31}\left(-\pi/2\right)$	$\beta_{31}\,(0)$	$\beta_{32}\left(-\pi/2\right)$
Chaîne	$\theta_{i2}\,(rad)$	$\theta_{i3}\,(rad)$	$\beta_{i3}\,(rad)$	$\gamma_{i2}\,(rad)$	
1	$\theta_{12}\,(0)$	$\theta_{13}\left(\pi/2\right)$	$\beta_{13}\,(0)$		
2	$\theta_{22}\,(0)$	$\theta_{23}\left(\pi/2\right)$	$\beta_{23}\,(0)$	$\gamma_{22}\left(2\pi/3\right)$	
3	$\theta_{32}\,(0)$	$\theta_{33}\left(\pi/2\right)$	$\beta_{33}\,(0)$	$\gamma_{32}\left(4\pi/3\right)$	

Tableau 2.2 – Paramètres géométriques du modèle 42

Les 42 paramètres géométriques peuvent être répartis de la façon suivante :

- les variables articulaires, qui sont des paramètres géométriques variables, sont regroupées dans le vecteur :

$$\boldsymbol{q} = \left[\theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31}\right]^T \tag{2.59}$$

- les paramètres géométriques constants sont regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_{39} = \big[& Rb \quad Rn \quad Lb_1 \quad L_{11} \quad L_{12} \quad Lc_{11} \quad Lc_{12} \quad \alpha_{11} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \beta_{13} \\ & Lb_2 \quad L_{21} \quad L_{22} \quad Lc_{21} \quad Lc_{22} \quad \alpha_{21} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \theta_{22} \quad \theta_{23} \quad \beta_{23} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \\ & Lb_3 \quad L_{31} \quad L_{32} \quad Lc_{31} \quad Lc_{32} \quad \alpha_{31} \quad \beta_{31} \quad \beta_{32} \quad \theta_{32} \quad \theta_{33} \quad \beta_{33} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{32}\big]^T\end{aligned} \tag{2.60}$$

2.3.3 Modélisation géométrique

Les équations relatives au calcul des modèles géométriques direct et inverse sont établies à partir des équations de fermeture de boucles, qui expriment que pour chaque chaîne cinématique i, la distance entre les points B_{ij} et C_{ij} est égale à la longueur L_{ij} du grand côté j $(j=1,2)$ du parallélogramme :

$$\left\| \overrightarrow{B_{ij}C_{ij}} \right\|^2 = {L_{ij}}^2 \tag{2.61}$$

La position ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{B_{ij}}$ des points B_{ij} dans le repère de base R_b est exprimée à partir des relations (2.51), (2.52) et (2.57) par :

$${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{B_{ij}}} = {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}\,{}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}\,{}^{R_{B_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_{ij}}} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_{ij}}} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{B_{ij}} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

De façon similaire, la position ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{C_{ij}}$ des points C_{ij} dans le repère de base R_b est exprimée à partir des relations (2.55), (2.56) et (2.58) par :

$${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{C_{ij}}} = {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}\,{}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}}\,{}^{R_{C_i}}\boldsymbol{T}_{R_{C_{ij}}} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{C_{ij}}} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{C_{ij}} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Finalement, les six équations de fermeture de boucles (2.61) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} H_{11}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{11},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{11}}^2 \\ H_{12}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{11},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{12}}^2 \\ H_{21}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{21},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{21}}^2 \\ H_{22}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{21},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{22}}^2 \\ H_{31}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{31},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{31}}^2 \\ H_{32}\left(X,Y,Z,\psi,\vartheta,\phi,\theta_{31},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{32}}^2 \end{cases} \tag{2.64}$$

Pour une géométrie donnée de la structure, ce système d'équations donne les relations liant, la position et l'orientation de la nacelle aux variables articulaires θ_{11}, θ_{12} et θ_{13}.

La dimension de l'espace des configurations articulaires correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique [Khalil 1999]. Dans le cas de la structure étudiée, la dimension de l'espace des configurations articulaires est de trois, le nombre de degrés de liberté est donc de trois. Ces degrés de liberté correspondent aux trois translations suivant les axes $\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{y}_b$ et $\boldsymbol{z}_b$ du repère de base. Il existe donc un couplage entre la position et l'orientation de la nacelle. Ce couplage se caractérise par le fait que pour une position quelconque dans l'espace de travail, l'orientation de la nacelle est subie, elle n'est pas contrôlable. Ceci est exprimé mathématiquement, par le fait que les angles ψ, ϑ et ϕ utilisés pour décrire l'orientation de la nacelle, peuvent être exprimés en fonction des autres paramètres du système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \psi = G_1(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}) \\ \vartheta = G_2(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}) \\ \phi = G_3(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}) \end{cases} \tag{2.65}$$

Les expressions des angles ψ, ϑ et ϕ (2.65), sont introduites dans le système d'équations (2.64). Ceci permet de définir le système d'équations suivant qui est fonction, de la position du centre du repère de la nacelle $O_n = \left[X\ Y\ Z\right]^T$, des variables articulaires $\boldsymbol{q}$ et des autres paramètres géométriques de la structure regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39}$:

$$\begin{cases} H_{11}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{11},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{11}}^2 \\ H_{12}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{11},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{12}}^2 \\ H_{21}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{21},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{21}}^2 \\ H_{22}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{21},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{22}}^2 \\ H_{31}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{31},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{31}}^2 \\ H_{32}\left(X,Y,Z,G_1\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_2\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),G_3\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right),\theta_{31},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{32}}^2 \end{cases} \quad (2.66)$$

Afin de simplifier les écritures, le système d'équations (2.66) est réécrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} K_{11}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{11}}^2 \\ K_{12}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{12}}^2 \\ K_{21}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{21}}^2 \\ K_{22}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{22}}^2 \\ K_{31}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{31}}^2 \\ K_{32}\left(X,Y,Z,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) = {L_{32}}^2 \end{cases} \quad (2.67)$$

Les modèles géométriques direct et inverse sont issus de la résolution de ce système d'équations.

2.3.3.1 Modèle géométrique inverse

Afin de simplifier les écritures suivantes, la position ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{O_n}$ de l'origine O_n du repère associé à la nacelle, est désignée par le vecteur $\boldsymbol{p}$.

Le modèle géométrique inverse exprime les variables articulaires $\boldsymbol{q}$ en fonction, de la position $\boldsymbol{p}$ et des paramètres géométriques $\boldsymbol{\xi}_{39}$. Le modèle géométrique inverse est exprimé de la façon suivante :

$$\boldsymbol{q} = G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{39}\right) \quad (2.68)$$

Pour une position de référence donnée par $\boldsymbol{p}^r = \left[X^r \quad Y^r \quad Z^r\right]^T$, il est possible de calculer les positions de référence des points ${C_{ij}}^r$. De même, pour une configuration articulaire estimée $\boldsymbol{q}^e = \left[{\theta_{11}}^e \quad {\theta_{21}}^e \quad {\theta_{31}}^e\right]^T$, les positions estimées des points ${B_{ij}}^e$ peuvent être calculées. La distance estimée ${L_{ij}}^e$ entre les points estimés ${B_{ij}}^e$ et les points de référence ${C_{ij}}^r$ (Figure 2.19) peut donc être définie comme étant une fonction k_{ij} des autres paramètres :

$${L_{ij}}^e = k_{ij}\left(\boldsymbol{p}^r,\boldsymbol{q}^e,\boldsymbol{\xi}_{39}\right) \quad (2.69)$$

Pour la configuration articulaire estimée, il est donc possible de définir l'erreur d'évaluation $\varepsilon_{L_{ij}}$, entre la longueur ${L_{ij}}^e$ estimée et le paramètre L_{ij} de la structure réelle :

$$\varepsilon_{L_{ij}} = {L_{ij}}^e - L_{ij} = k_{ij}\left(\boldsymbol{p}^r,\boldsymbol{q}^e,\boldsymbol{\xi}_{39}\right) - L_{ij} \quad (2.70)$$

Dans le cadre du modèle géométrique inverse, le but est d'agir sur la configuration articulaire estimée $\boldsymbol{q}^e$ afin de rendre ces erreurs $\varepsilon_{L_{ij}}$ les plus petites possibles et de définir ainsi la configuration articulaire solution $\boldsymbol{q}^s$. Ceci se traduit par :

$$\underset{\boldsymbol{q}^e=\boldsymbol{q}^s}{Min}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(\varepsilon_{L_{ij}}\right)\right)\right)=\underset{\boldsymbol{q}^e=\boldsymbol{q}^s}{Min}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(k_{ij}\left(\boldsymbol{p}^r,\boldsymbol{q}^e,\boldsymbol{\xi}_{39}\right)-L_{ij}\right)\right)\right) \tag{2.71}$$

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation non linéaire, où la solution $\boldsymbol{q}^s$ minimise le critère quadratique :

$$C\left(\boldsymbol{p}^r\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_L{}^T\boldsymbol{\varepsilon}_L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_{L_{ij}}{}^2\right) \tag{2.72}$$

avec : $\boldsymbol{\varepsilon}_L=\left[\varepsilon_{L_{11}}\quad\varepsilon_{L_{12}}\quad\varepsilon_{L_{21}}\quad\varepsilon_{L_{22}}\quad\varepsilon_{L_{31}}\quad\varepsilon_{L_{32}}\right]^T$.

Il faut noter que la convergence de ce problème d'optimisation non linéaire est d'autant plus rapide, que la configuration articulaire estimée $\boldsymbol{q}^e$ est proche de la solution $\boldsymbol{q}^s$. Une bonne estimation de $\boldsymbol{q}^e$ est obtenue à partir du modèle géométrique inverse nominal à 18 paramètres :

$$\boldsymbol{q}^e=G_{18mgi}\left(\boldsymbol{p}^r,\boldsymbol{\xi}_{15n}\right) \tag{2.73}$$

Cette optimisation non linéaire est réalisée en utilisant la fonction *lsqnonlin* de *Matlab*® qui utilise l'algorithme « large-scale : trust-region reflective Newton » [Coleman 1994] [Coleman 1996].

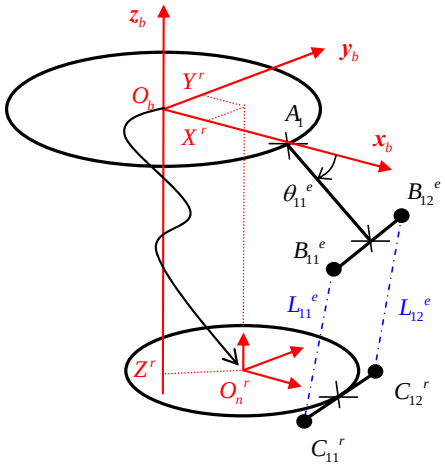


Figure 2.19 – Position estimée de la nacelle pour le MGI

Modèle géométrique inverse nominal

Le modèle géométrique inverse nominal est défini à partir du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39n}$, qui correspond aux valeurs nominales des paramètres géométriques. Ce modèle géométrique inverse nominal est exprimé de la façon suivante :

$$\boldsymbol{q}=G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}_{39n}\right) \tag{2.74}$$

Simulation du modèle géométrique inverse

Afin de valider le modèle géométrique inverse, tant en termes de temps de calcul, qu'en termes de fiabilité des résultats, une simulation est réalisée à partir de 975 points régulièrement répartis dans le volume de travail suivant :

$$\left(-0,35\,m \le X \le 0,35\,m \quad -0,3\,m \le Y \le 0,3\,m \quad -1,4\,m \le Z \le -1\,m\right).$$

Un vecteur d'erreur est arbitrairement choisi de façon à simuler une structure réelle intégrant des défauts géométriques.
Les variables articulaires correspondant aux points de la grille de travail sont alors calculées avec le modèle géométrique inverse à 42 paramètres. Les résultats de cette simulation sont donnés dans le Tableau 2.3. Ils font apparaître, pour l'ensemble des points de la grille de travail, l'erreur moyenne et l'erreur maximum sur les paramètres $\varepsilon_{L_{ij}}$, ainsi que le temps de calcul moyen d'une configuration.

Nombre d'itération de l'algorithme	$\varepsilon_{L_{ij}}$ moyen (μm)	$\varepsilon_{L_{ij}}$ maximum (μm)	Temps de calcul moyen (ms)
1	24	102	11,6
2	0,27	4,3	13,7
3	$9,8.10^{-4}$	$1,4.10^{-2}$	16,8

Tableau 2.3 – Simulation du modèle géométrique inverse à 42 paramètres

Cette simulation fait apparaitre que deux ou trois itérations sont nécessaires pour converger vers une solution tout à fait acceptable. Le choix du nombre d'itérations est fixé à 3, cela représente un bon compromis entre une précision sur les équations de fermeture de boucles inférieure au micromètre et un temps de calcul moyen de 16,8 ms (les simulations ont été réalisées sur un Pentium D à 3,20 GHz et 3,62 Go de RAM, à partir d'un code Matlab®).

2.3.3.2 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct exprime la position $\boldsymbol{p}$ de la nacelle, en fonction, des variables articulaires $\boldsymbol{q}$ et des autres paramètres géométriques $\boldsymbol{\xi}_{39}$. Le modèle géométrique direct est exprimé par :

$$\boldsymbol{p} = G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39}\right) \tag{2.75}$$

Le modèle géométrique direct est obtenu en utilisant la matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$ du modèle nominal, pour calculer de façon itérative une solution locale numérique à partir d'une méthode de Newton-Raphson [Merlet 1997].
La position souhaitée $\boldsymbol{p}^s$ de la nacelle correspondant aux variables articulaires $\boldsymbol{q}^s$, est déterminée par l'algorithme suivant :

- *étape 1* : à partir d'une position initiale $\boldsymbol{p}^0$ de la nacelle, calculer les variables articulaires correspondantes en utilisant le modèle géométrique inverse $\boldsymbol{q}^0 = G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{\xi}_{39}\right)$;
- *étape 2* : calculer l'écart $d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^s - \boldsymbol{q}^0$. Si $\left\|d\boldsymbol{q}\right\|$ est inférieur à un seuil fixé S, arrêter le calcul et afficher le résultat $\boldsymbol{p}^s = \boldsymbol{p}^0$, sinon :
- *étape 3* : calculer la position corrigé $\boldsymbol{p}^c = \boldsymbol{p}^0 + \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}^s - \boldsymbol{q}^0\right)$;
- *étape 4* : poser $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{p}^c$ et retourner à l'étape 1.

L'utilisation de cet algorithme ne permet pas de garantir la convergence du modèle géométrique direct vers la solution. Afin de limiter le risque de convergence vers une autre solution, l'estimée initiale doit être choisie proche de la solution [Daney 2000]. Dans le cas spécifique de la structure Delta, une estimée très proche de la solution est fournie par le modèle géométrique direct nominal à 18 paramètres. De plus, une étude proposée par Vischer [Vischer 1996] tend à montrer que les différents modes d'assemblages ne sont pas proches les uns des autres.
Des problèmes relatifs au changement de mode d'assemblage existent dans le cas du manipulateur parallèle plan de type 3-**RPR.** Pour un tel manipulateur, Innocenti et Parenti-Castelli [Innocenti 1992] ainsi que Wenger et Chablat [Wenger 1997] montrent qu'il est possible de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité parallèle. A notre connaissance, l'existence de tels problèmes n'a pas été montrée pour une structure parallèle de type Delta.
De plus, toutes les simulations réalisées ont systématiquement convergé vers une solution pertinente.

Modèle géométrique direct nominal

Le modèle géométrique inverse nominal est défini à partir du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39n}$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{p} = G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right) \tag{2.76}$$

Estimation du temps de calcul

L'estimation du temps de calcul moyen du modèle géométrique direct est réalisée à partir de la grille de travail utilisée dans le cadre de la simulation du modèle géométrique inverse. Ce temps de calcul moyen est de 50,1 ms.

2.3.4 Modèle d'erreurs

La relation entre l'erreur de position de la nacelle $\delta\boldsymbol{p}$, les variations des paramètres géométriques $\delta\boldsymbol{\xi}_{39}$, et les offsets des variables articulaires $\delta\boldsymbol{q}$ est obtenue en différenciant les six équations de fermeture de boucles (2.67) par rapport :

- aux paramètres du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39}$;
- aux paramètres du vecteur $\boldsymbol{q}$;
- aux paramètres du vecteur position de la nacelle $\boldsymbol{p}$.

En différenciant les six fonctions K_{ij} du système (2.67) par rapport respectivement à, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{\xi}_{39}$, la relation suivante entre l'erreur de position de la nacelle $\delta\boldsymbol{p}$, les offsets des variables articulaires $\delta\boldsymbol{q}$ et les variations des paramètres géométriques $\delta\boldsymbol{\xi}_{39}$ est obtenue :

$$\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{p} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{\xi}_{39} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{2.77}$$

où :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \partial K_{11}/\partial p_x & \partial K_{11}/\partial p_y & \partial K_{11}/\partial p_z \\ \partial K_{12}/\partial p_x & \partial K_{12}/\partial p_y & \partial K_{12}/\partial p_z \\ \partial K_{21}/\partial p_x & \partial K_{21}/\partial p_y & \partial K_{21}/\partial p_z \\ \partial K_{22}/\partial p_x & \partial K_{22}/\partial p_y & \partial K_{22}/\partial p_z \\ \partial K_{31}/\partial p_x & \partial K_{31}/\partial p_y & \partial K_{31}/\partial p_z \\ \partial K_{32}/\partial p_x & \partial K_{32}/\partial p_y & \partial K_{32}/\partial p_z \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \partial K_{11}/\partial \theta_{11} & \partial K_{11}/\partial \theta_{21} & \partial K_{11}/\partial \theta_{31} \\ \partial K_{12}/\partial \theta_{11} & \partial K_{12}/\partial \theta_{21} & \partial K_{12}/\partial \theta_{31} \\ \partial K_{21}/\partial \theta_{11} & \partial K_{21}/\partial \theta_{21} & \partial K_{21}/\partial \theta_{31} \\ \partial K_{22}/\partial \theta_{11} & \partial K_{22}/\partial \theta_{21} & \partial K_{22}/\partial \theta_{31} \\ \partial K_{31}/\partial \theta_{11} & \partial K_{31}/\partial \theta_{21} & \partial K_{31}/\partial \theta_{31} \\ \partial K_{32}/\partial \theta_{11} & \partial K_{32}/\partial \theta_{21} & \partial K_{32}/\partial \theta_{31} \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \partial K_{11}/\partial Rb & \partial K_{11}/\partial Rn & \partial K_{11}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{11}/\partial \beta_{13} \\ \partial K_{12}/\partial Rb & \partial K_{12}/\partial Rn & \partial K_{12}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{12}/\partial \beta_{13} \\ \partial K_{21}/\partial Rb & \partial K_{21}/\partial Rn & \partial K_{21}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{21}/\partial \beta_{13} \\ \partial K_{22}/\partial Rb & \partial K_{22}/\partial Rn & \partial K_{22}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{22}/\partial \beta_{13} \\ \partial K_{31}/\partial Rb & \partial K_{31}/\partial Rn & \partial K_{31}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{31}/\partial \beta_{13} \\ \partial K_{32}/\partial Rb & \partial K_{32}/\partial Rn & \partial K_{32}/\partial Lb_1 & \cdots & \partial K_{32}/\partial \beta_{13} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \partial K_{11}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{11}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{11}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{11}/\partial \gamma_{33} \\ \partial K_{12}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{12}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{12}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{12}/\partial \gamma_{33} \\ \partial K_{21}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{21}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{21}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{21}/\partial \gamma_{33} \\ \partial K_{22}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{22}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{22}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{22}/\partial \gamma_{33} \\ \partial K_{31}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{31}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{31}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{31}/\partial \gamma_{33} \\ \partial K_{32}/\partial Lb_2 & \cdots & \partial K_{32}/\partial \gamma_{22} & \partial K_{32}/\partial Lb_3 & \cdots & \partial K_{32}/\partial \gamma_{33} \end{bmatrix}_{(6,39)} \tag{2.80}$$

$$\delta\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{bmatrix}^T \tag{2.81}$$

$$\delta\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{11} & \delta\theta_{21} & \delta\theta_{31} \end{bmatrix}^T \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{39} = \big[& \delta Rb \;\; \delta Rn \;\; \delta Lb_1 \;\; \delta L_{11} \;\; \delta L_{12} \;\; \delta Lc_{11} \;\; \delta Lc_{12} \;\; \delta\alpha_{11} \;\; \delta\beta_{11} \;\; \delta\beta_{12} \;\; \delta\theta_{12} \;\; \delta\theta_{13} \;\; \delta\beta_{13} \\ & \delta Lb_2 \;\; \delta L_{21} \;\; \delta L_{22} \;\; \delta Lc_{21} \;\; \delta Lc_{22} \;\; \delta\alpha_{21} \;\; \delta\beta_{21} \;\; \delta\beta_{22} \;\; \delta\theta_{22} \;\; \delta\theta_{23} \;\; \delta\beta_{23} \;\; \delta\gamma_{21} \;\; \delta\gamma_{22} \\ & \delta Lb_3 \;\; \delta L_{31} \;\; \delta L_{32} \;\; \delta Lc_{31} \;\; \delta Lc_{32} \;\; \delta\alpha_{31} \;\; \delta\beta_{31} \;\; \delta\beta_{32} \;\; \delta\theta_{32} \;\; \delta\theta_{33} \;\; \delta\beta_{33} \;\; \delta\gamma_{31} \;\; \delta\gamma_{32} \big]^T \end{aligned} \tag{2.83}$$

L'expression (2.77) est réécrite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{p} + \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{\xi}_{42} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{2.84}$$

où :

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

$$\delta\boldsymbol{\xi}_{42} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{q} & \delta\boldsymbol{\xi}_{39} \end{bmatrix}^T \tag{2.86}$$

Comme énoncé précédemment, le volume de travail considéré est exempt de toutes configurations singulières de type parallèle, la matrice $\boldsymbol{A}$ n'est donc pas singulière. L'erreur de position de la nacelle en fonction de la variation des différents paramètres géométriques est définie par :

$$\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}_{42}\delta\boldsymbol{\xi}_{42} \tag{2.87}$$

où $\boldsymbol{J}_{42}$, la matrice jacobienne des paramètres est donnée par :

$$\boldsymbol{J}_{42} = -\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \partial p_x/\partial\theta_{11} & \partial p_x/\partial\theta_{21} & \partial p_x/\partial\theta_{31} & \partial p_x/\partial Rb & \cdots & \partial p_x/\partial\gamma_{32} \\ \partial p_y/\partial\theta_{11} & \partial p_y/\partial\theta_{21} & \partial p_y/\partial\theta_{31} & \partial p_y/\partial Rb & \cdots & \partial p_y/\partial\gamma_{32} \\ \partial p_z/\partial\theta_{11} & \partial p_z/\partial\theta_{21} & \partial p_z/\partial\theta_{31} & \partial p_z/\partial Rb & \cdots & \partial p_z/\partial\gamma_{32} \end{bmatrix}_{(3,42)} \tag{2.88}$$

La matrice jacobienne des paramètres $\boldsymbol{J}_{42}$, est facilement obtenue par un couplage entre les logiciels Maple® et Matlab®. Mais le fichier Matlab® généré est très volumineux (1,9 Mo pour environ 59000 lignes de code) ce qui ne permet pas d'en fournir une formulation détaillée.

2.4 Etude de la sensibilité

2.4.1 Etude de sensibilité de la situation de la nacelle

2.4.1.1 Introduction

L'objectif de cette étude est de déterminer la sensibilité de la situation de la nacelle aux variations des paramètres géométriques du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{42}$. Elle permet de quantifier l'influence d'un des paramètres de ce vecteur, sur la précision de position et d'orientation de la nacelle.

Une étude de sensibilité a été réalisée par Caro [Caro 2006] sur l'Orthoglide, manipulateur à structure parallèle à trois degrés de liberté en translation [Chablat 2003]. Cette étude est scindée en deux phases. Dans une première phase nommée « analyse de sensibilité cinématique », la matrice jacobienne de la structure simplifiée (parallélogrammes parfaits) est analysée. Dans la seconde phase, nommée « analyse de sensibilité vectorielle », une analyse complexe et spécifique à la structure étudiée, permet de prendre en compte la majorité des erreurs des parallélogrammes.

Il faut aussi noter l'étude complète d'un parallélogramme, fondée sur l'hypothèse des petits déplacements, réalisée dans [Savoure 2006]. Cette étude a permis, pour un parallélogramme, de déterminer analytiquement la matrice jacobienne liant l'erreur de position aux erreurs des paramètres géométriques. Cette étude doit pouvoir servir de base à une étude de sensibilité.

Dans le cadre de notre étude, la modélisation géométrique à 42 paramètres permet de réaliser une étude de sensibilité de la situation de la nacelle en prenant en compte les erreurs de géométrie au niveau des parallélogrammes.

2.4.1.2 Sensibilité de la position de la nacelle aux paramètres géométriques

La sensibilité de la position de la nacelle est réalisée à partir de l'étude de la matrice jacobienne des paramètres $\boldsymbol{J}_{42}$ définie par l'expression (2.88). Cette matrice jacobienne lie l'erreur de position de la nacelle $\delta \boldsymbol{p}$ au vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{42}$ par la relation (2.87) : $\delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}_{42} \delta \boldsymbol{\xi}_{42}$.
Pour une configuration donnée de la structure $\boldsymbol{q}$, une erreur sur le $j^{ième}$ paramètre $\delta \xi_{42_j}$ du vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{42}$ engendre une erreur de position donnée par :

$$\begin{cases} \delta p_x = J_{42_{1j}} \delta \xi_{42_j} \\ \delta p_y = J_{42_{2j}} \delta \xi_{42_j} \\ \delta p_z = J_{42_{3j}} \delta \xi_{42_j} \end{cases} \tag{2.89}$$

où $J_{42_{ij}}$ $(i = 1,2,3)$ représente la composante correspondant à la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne de la matrice jacobienne des paramètres $\boldsymbol{J}_{42}$. Finalement l'erreur de position est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{p} = \sqrt{\delta p_x{}^2 + \delta p_y{}^2 + \delta p_z{}^2} = \delta \xi_{42_j} \sqrt{J_{42_{1j}}{}^2 + J_{42_{2j}}{}^2 + J_{42_{3j}}{}^2} \tag{2.90}$$

L'indice de sensibilité de la position de la nacelle à une erreur correspondant au $j^{ième}$ paramètre $\delta \xi_{42_j}$ du vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{42}$ peut donc être défini comme étant la norme de la $j^{ième}$ colonne de la matrice jacobienne des paramètres $\boldsymbol{J}_{42}$:

$$\mu_{p_j} = \sqrt{J_{42_{1j}}{}^2 + J_{42_{2j}}{}^2 + J_{42_{3j}}{}^2} \tag{2.91}$$

L'étude de sensibilité est réalisée à partir de 975 points régulièrement répartis dans le volume de travail suivant : $(-0,35\,m \le X \le 0,35\,m \quad -0,3\,m \le Y \le 0,3\,m \quad -1,4\,m \le Z \le -1\,m)$. La symétrie de la structure étudiée ainsi que le volume de travail considéré permettent de réduire l'étude aux paramètres d'une seule chaîne cinématique. Le choix se porte sur la seconde chaîne cinématique qui, contrairement à la première intègre les angles γ_{i1} et γ_{i2}. Le vecteur des paramètres étudié, qui inclut la variable articulaire θ_{21}, est donné par :

$$\boldsymbol{\xi}_{c2} = \left[\theta_{21} \quad Rb \quad Rn \quad Lb_2 \quad L_{21} \quad L_{22} \quad Lc_{21} \quad Lc_{22} \quad \alpha_{21} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \theta_{22} \quad \theta_{23} \quad \beta_{23} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22}\right]^T \tag{2.92}$$

On définit aussi le vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{c2}$, qui représente les variations des paramètres du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{c2}$. Pour chaque paramètre $\delta \xi_{c2_j}$ du vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{c2}$, les résultats de cette étude donnent la valeur moyenne et la valeur maximale de l'indice de sensibilité μ_{p_j}. (voir Figure 2.20 et Figure 2.21)

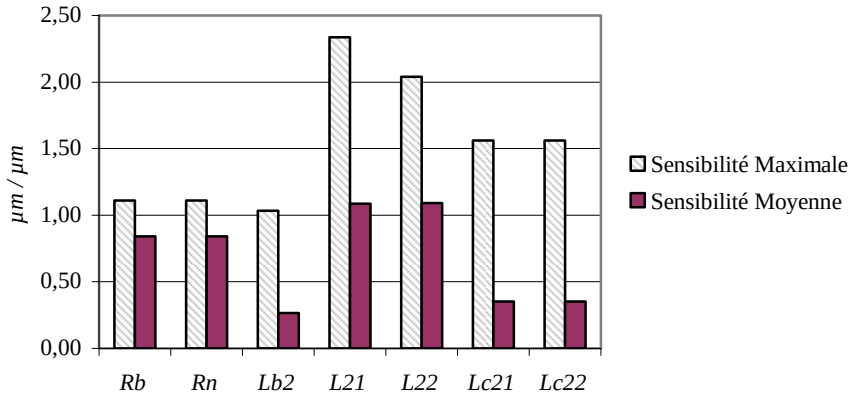


Figure 2.20 – Indice de sensibilité μ_p. Sensibilité de la position de la nacelle aux paramètres dimensionnels

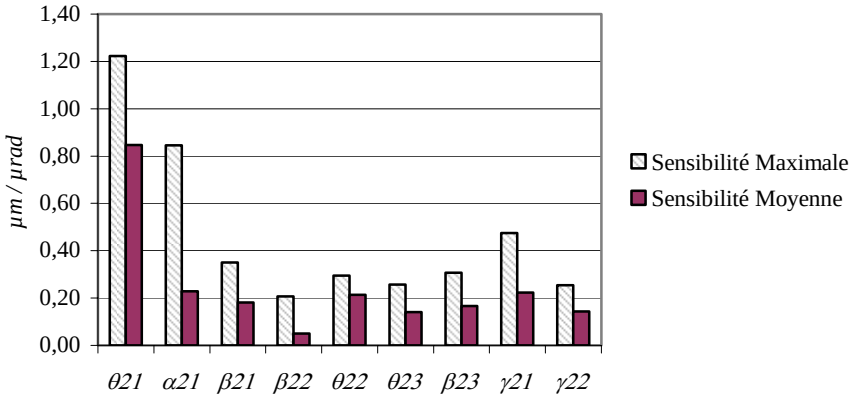


Figure 2.21 – Indice de sensibilité μ_p. Sensibilité de la position de la nacelle aux paramètres angulaires

2.4.1.3 Sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres géométriques

La sensibilité de l'orientation de la nacelle est obtenue à partir des équations (2.65) qui, pour une position de la nacelle, donnent les angles de rotation ψ, ϑ et ϕ en fonction des paramètres géométriques et des variables articulaires de la structure. En différenciant ces équations par rapport aux paramètres du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{42}$, la relation suivante entre l'erreur d'orientation de la nacelle $\delta \boldsymbol{r}$ et le vecteur $\delta\xi_{42}$ est obtenue :

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}_{r42} \delta \boldsymbol{\xi}_{42} \tag{2.93}$$

où :

$$\delta \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \delta\psi & \delta\vartheta & \delta\phi \end{bmatrix}^T \tag{2.94}$$

$$\boldsymbol{J}_{r42} = \begin{bmatrix} \partial G_1/\partial\theta_{11} & \partial G_1/\partial\theta_{21} & \partial G_1/\partial\theta_{31} & \partial G_1/\partial Rb & \cdots & \partial G_1/\partial\gamma_{32} \\ \partial G_2/\partial\theta_{11} & \partial G_2/\partial\theta_{21} & \partial G_2/\partial\theta_{31} & \partial G_2/\partial Rb & \cdots & \partial G_2/\partial\gamma_{32} \\ \partial G_3/\partial\theta_{11} & \partial G_3/\partial\theta_{21} & \partial G_3/\partial\theta_{31} & \partial G_3/\partial Rb & \cdots & \partial G_3/\partial\gamma_{32} \end{bmatrix}_{(3\times 42)} \tag{2.95}$$

Pour une configuration donnée de la structure q, une erreur sur le $j^{ième}$ paramètre $\delta\xi_{42_j}$ du vecteur $\delta\boldsymbol{\xi}_{42}$ engendre une erreur d'orientation donnée par :

$$\begin{cases} \delta\psi = J_{r42_{1j}}\delta\xi_{42_j} \\ \delta\vartheta = J_{r42_{2j}}\delta\xi_{42_j} \\ \delta\phi = J_{r42_{3j}}\delta\xi_{42_j} \end{cases} \tag{2.96}$$

L'erreur d'orientation peut être interprétée de la façon suivante :

$$\delta\boldsymbol{r} = \sqrt{\delta\psi^2 + \delta\vartheta^2 + \delta\phi^2} = \delta\xi_{42_j}\sqrt{J_{r42_{1j}}{}^2 + J_{r42_{2j}}{}^2 + J_{r42_{3j}}{}^2} \tag{2.97}$$

L'indice de sensibilité de l'orientation de la nacelle à une erreur correspondant au $j^{ième}$ paramètre $\delta\xi_{42_j}$ du vecteur $\delta\boldsymbol{\xi}_{42}$ peut donc être défini comme la norme de la $j^{ième}$ colonne de la matrice $\boldsymbol{J}_{r42}$:

$$\mu_{r_j} = \sqrt{J_{r42_{1j}}{}^2 + J_{r42_{2j}}{}^2 + J_{r42_{3j}}{}^2} \tag{2.98}$$

Sur la base du même volume de travail que celui précédemment défini, l'étude est restreinte aux seuls paramètres géométriques de la seconde chaîne cinématique. Ainsi, pour chaque paramètre $\delta\xi_{c2_j}$ du vecteur $\delta\boldsymbol{\xi}_{c2}$, les résultats de cette étude donnent la valeur moyenne ainsi que la valeur maximale de l'indice de sensibilité μ_{r_j}. Les résultats de l'étude de sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres dimensionnels ainsi qu'aux paramètres angulaires, sont donnés respectivement par la Figure 2.22 et la Figure 2.23.

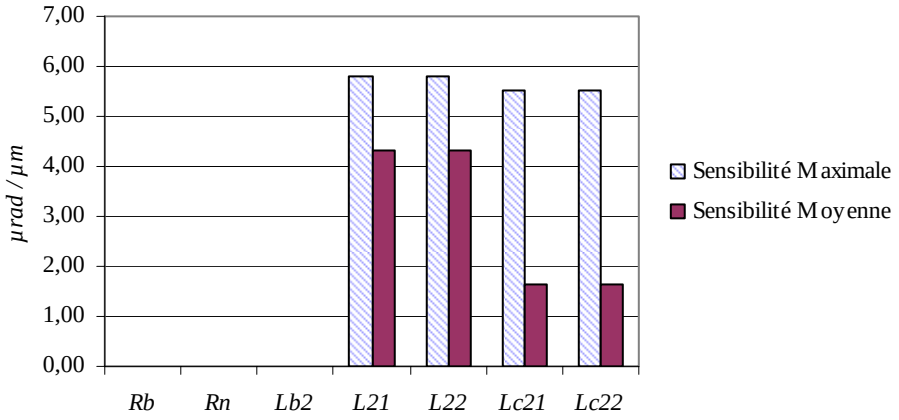


Figure 2.22 – Indice de sensibilité μ_r. Sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres dimensionnels

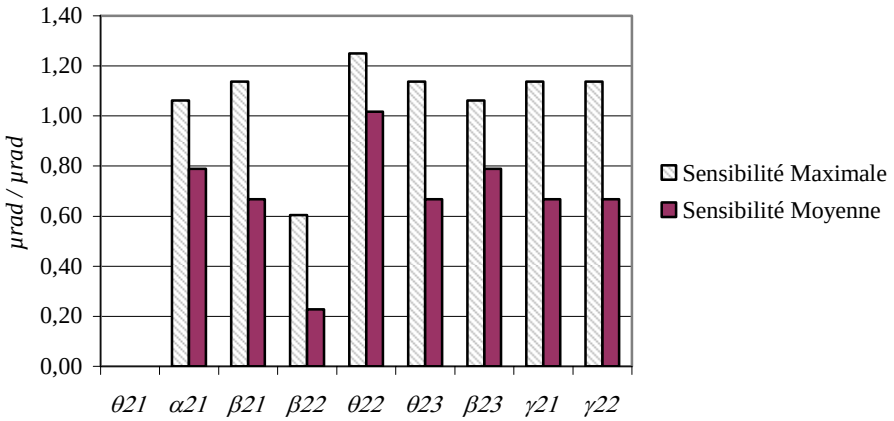


Figure 2.23 – Indice de sensibilité μ_r . Sensibilité de l'orientation de la nacelle aux paramètres angulaires

2.4.1.4 Conclusion

L'étude de sensibilité de la situation de la nacelle fait apparaître que la position de la nacelle est très sensible aux paramètres dimensionnels de la structure. Avec une valeur moyenne supérieure à un de l'indice de sensibilité μ_P, la longueur des grands côtés des parallélogrammes est le paramètre le plus influent. L'offset des variables articulaires est le seul paramètre angulaire ayant une influence importante sur la position de la nacelle.
L'orientation de la nacelle n'est quant à elle, pas sensible aux paramètres de rayon de base et de nacelle, ainsi qu'aux paramètres de longueur de bras et d'offset des variables articulaires. Par contre elle est sensible aux autres paramètres angulaires.

2.4.2 Analyse de sensibilité de la situation de l'effecteur

Il peut être très intéressant de réaliser une étude de sensibilité de la situation, non plus au niveau du repère de la nacelle, mais de celui de l'effecteur. En effet, c'est au niveau de l'effecteur que l'interaction entre l'environnement extérieur et la structure a lieu, et c'est donc à ce niveau que l'influence des erreurs de la structure a le plus d'importance.
Cette étude porte donc sur un ensemble constitué de la structure Delta, à laquelle un outil de longueur H est ajouté (Figure 2.24). Elle va permettre de déterminer l'influence de la longueur de cet outil, sur la sensibilité de la position de l'extrémité P de l'outil aux erreurs des paramètres géométriques de la structure Delta.

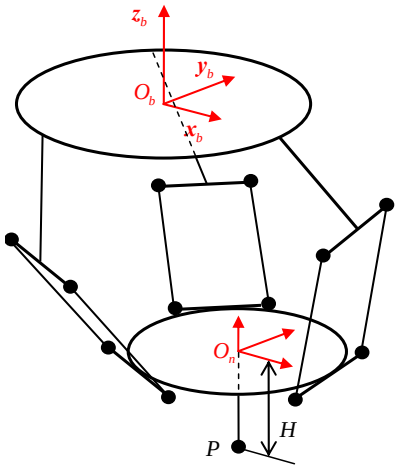


Figure 2.24 – Structure Delta avec un outil

Afin de réaliser cette étude, l'outil est supposé rigide et fixé sur la nacelle au point O_n, de telle façon que ces deux éléments ne forment plus qu'un seul corps.
L'expression de l'hypothèse des petits déplacements appliquée à cet ensemble donne :

$$\delta \boldsymbol{O_n} = \delta \boldsymbol{P} + \overrightarrow{O_n P} \times \delta \boldsymbol{r} \tag{2.99}$$

où :

- $\delta \boldsymbol{O_n}$ et $\delta \boldsymbol{P}$ sont respectivement les petits déplacements des points O_n et P ;
- $\delta \boldsymbol{r}$ est la rotation de la nacelle due aux erreurs des paramètres géométriques ;

En utilisant les matrices jacobiennes précédemment définies, l'expression (2.99) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{J}_{42} \delta \boldsymbol{\xi}_{42} = \delta \boldsymbol{P} + \widehat{\boldsymbol{O_n P}} \left(\boldsymbol{J}_{r42} \delta \boldsymbol{\xi}_{42} \right) \tag{2.100}$$

où $\widehat{\boldsymbol{O_n P}}$ représente la matrice de pré-produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{O_n P}$.
Finalement le déplacement du point P peut être exprimé en fonction du vecteur d'erreur $\delta \boldsymbol{\xi}_{42}$ de la façon suivante :

$$\delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}_{p42} \delta \boldsymbol{\xi}_{42} \tag{2.101}$$

avec :

$$\boldsymbol{J}_{p42} = \boldsymbol{J}_{42} - \widehat{\boldsymbol{O_n P}} \boldsymbol{J}_{r42} \tag{2.102}$$

Sur la base du même volume de travail que celui précédemment défini, l'étude est restreinte aux seuls paramètres géométriques de la seconde chaîne cinématique. Ainsi, pour chaque paramètre $\delta \xi_{c2_j}$ du vecteur $\delta \boldsymbol{\xi}_{c2}$, et pour différentes valeurs de longueur H de l'outil, les résultats de cette étude donnent la valeur moyenne de l'indice de sensibilité $\mu_p(H)$.

Les résultats de l'étude de sensibilité moyenne de la position de la pointe de l'outil aux paramètres dimensionnels ainsi qu'aux paramètres angulaires, sont donnés respectivement par la Figure 2.25 et la Figure 2.26. Les résultats de cette même étude, en termes de sensibilité maximale sont quant à eux, donnés par la Figure 2.27 ainsi que la Figure 2.28.

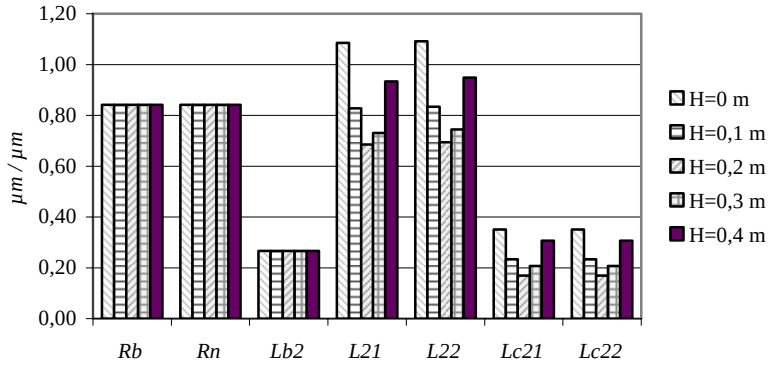


Figure 2.25 – Indice de sensibilité μ_p moyen. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels

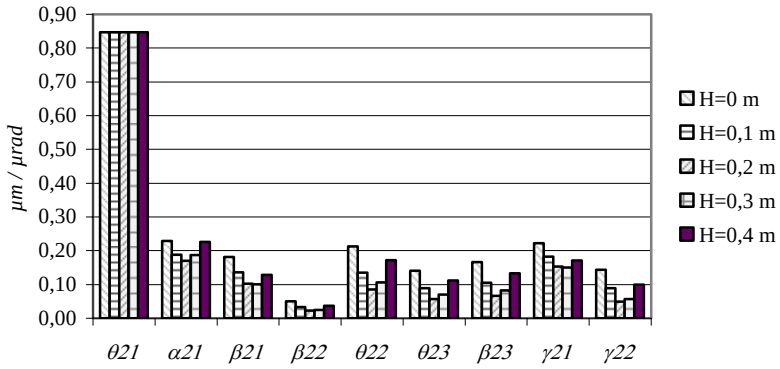


Figure 2.26 – Indice de sensibilité μ_p moyen. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires

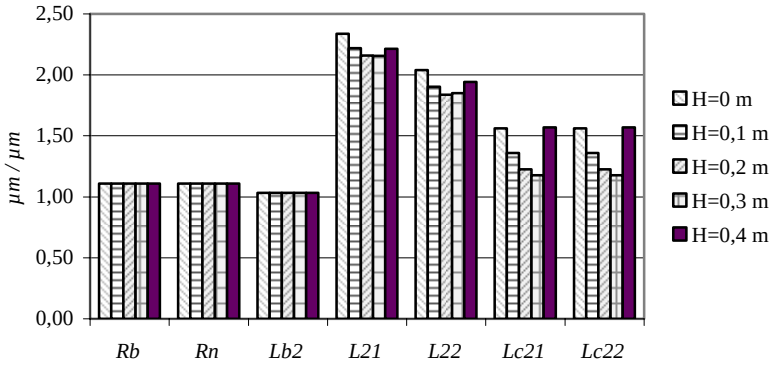


Figure 2.27 – Indice de sensibilité μ_p maximum. Sensibilité maximum de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels

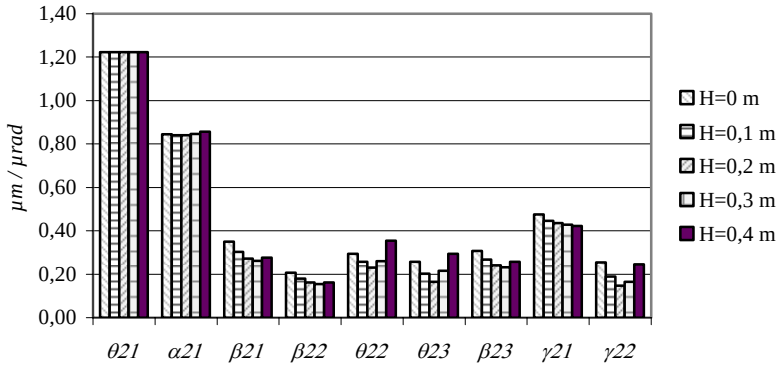


Figure 2.28 – Indice de sensibilité μ_p maximum.
Sensibilité maximum de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires

Cette étude montre que le paramètre H a une influence significative sur la sensibilité de la position de l'outil aux variations de l'ensemble des paramètres géométriques de la structure. De plus, pour l'ensemble des paramètres étudiés, l'indice de sensibilité μ_p est maximum pour des points appartenant à la frontière du volume de travail considéré. De ce fait, l'indice de sensibilité μ_p maximum n'est pas significatif.

En termes d'indice de sensibilité moyen, cette étude fait apparaître qu'il existe une longueur d'outil optimale H_{op}, qui minimise les effets des variations des paramètres géométriques L_{21}, L_{22}, Lc_{21}, Lc_{22}, α_{21}, β_{22}, θ_{22}, θ_{23}, β_{23} et γ_{21}. L'influence de ces paramètres est minimum pour une longueur d'outil comprise entre 0,1 et 0,3 m. Afin d'affiner la valeur de la hauteur optimale de l'outil, une étude similaire à la précédente est réalisée, en faisant varier plus finement la hauteur H de l'outil entre 0,19 et 0,27 m. Les résultats de cette nouvelle étude sont fournis par la Figure 2.29 et la Figure 2.30, ils font apparaître une longueur optimale H_{op} de l'outil de 0,23 m.

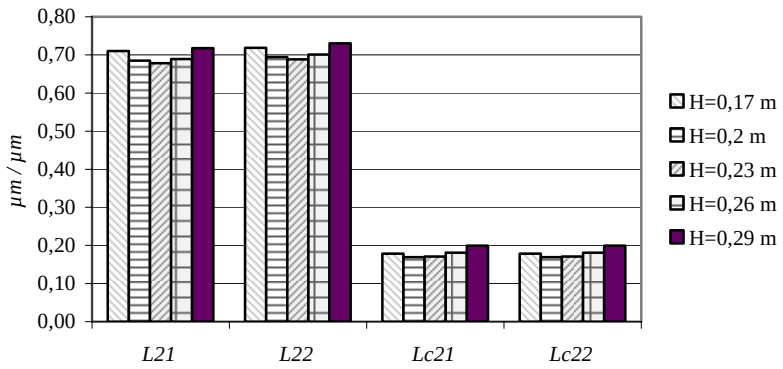


Figure 2.29 – Longueur d'outil optimale. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres dimensionnels

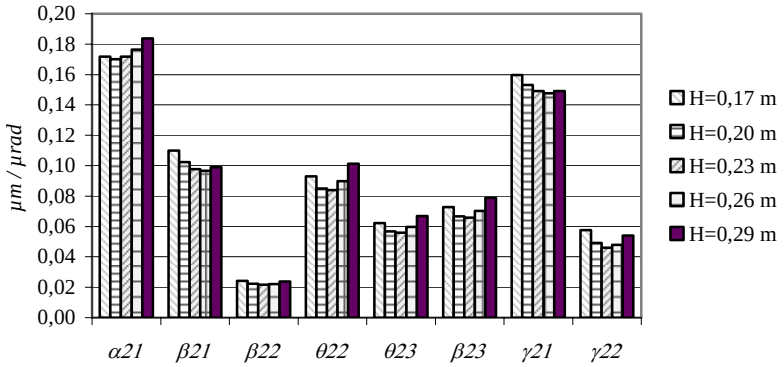


Figure 2.30 – Longueur d'outil optimale. Sensibilité moyenne de la position de l'extrémité de l'outil aux variations des paramètres angulaires

2.5 Conclusion du chapitre

Ce chapitre à permis d'introduire les différentes modélisations géométriques utilisées dans le cadre de cette thèse afin de modéliser une structure parallèle de type Delta. En particulier, une modélisation géométrique comportant 42 paramètres a permis de prendre en considération les possibles défauts de géométrie des parallélogrammes. Sur la base de cette modélisation, le modèle géométrique inverse a été obtenu par la résolution d'un système d'équations non linéaires, alors que le modèle géométrique direct à été obtenu de façon itérative.
Une étude de la sensibilité de la situation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques de la modélisation à 42 paramètres, a permis de déterminer l'influence de la variation des paramètres géométriques, sur la précision de position et d'orientation de l'effecteur. Cette étude qui a été réalisée en considérant la longueur de l'effecteur comme étant un paramètre, a permis de montrer :

- que les erreurs de position du point extrémité de l'effecteur, dues aux variations de l'ensemble des paramètres géométriques, sont fortement dépendantes de la longueur de cet effecteur ;
- qu'il existe une longueur de l'effecteur optimale qui minimise l'influence des variations de l'ensemble des paramètres géométriques. Cette caractéristique importante pourrait être prise en compte dès le stade de la conception d'un mécanisme afin par exemple, de déterminer la position optimale d'une broche par rapport à la nacelle de la structure.

A notre connaissance, l'existence d'une longueur optimale de l'effecteur, minimisant l'influence des variations des paramètres géométriques, n'a jamais été rapportée dans la littérature.
Cette caractéristique est-elle spécifique à la structure parallèle de Delta, ou bien, est-elle généralisable à l'ensemble des structures parallèles à 3 degrés de libertés utilisant des parallélogrammes, voire généralisable à l'ensemble des structure parallèle ? La question reste ouverte.

Chapitre 3 : **Modélisation élastique des manipulateurs parallèles. Application à une structure Delta**

Sommaire

3.1 Modélisation analytique par éléments finis 62
3.2 Modélisation élastique de la structure Delta avec des liaisons passives parfaites 73
3.3 Modélisation élastique de la structure Delta intégrant une rigidité des liaisons passives 91
3.4 Conclusion du chapitre 105

Ce chapitre présente une méthode analytique d'analyse de la rigidité des structures parallèles par éléments finis. Cette méthode est tout d'abord introduite dans un contexte général, puis elle est appliquée à la structure parallèle Delta du Surgiscope®. Deux modélisations différentes du comportement élastique de cette structure sont alors introduites. La première modélisation est fondée sur l'hypothèse que les liaisons passives sont parfaites, alors que la seconde intègre une rigidité limitée au niveau de ces liaisons. Des expérimentations sont menées sur la structure étudiée, permettant ainsi de valider les modélisations proposées.
Nos principales contributions dans ce chapitre, sont :

- l'adaptation, au domaine de la robotique parallèle, de techniques utilisées en analyse des structures par éléments finis. Ces techniques vont permettre de calculer de façon systématique les déformations élastiques d'un manipulateur à structure parallèle, sous un chargement mécanique extérieur donné ;
- la modélisation de la raideur des liaisons rotoïdes passives de la structure parallèle qui va permettre, après identification des paramètres de raideur de ces liaisons passives, de définir un modèle réaliste évaluant en temps réel les déformations élastiques de la structure.

3.1 Modélisation analytique par éléments finis

3.1.1 Hypothèses

Les structures étudiées dans le cadre de la modélisation proposée sont des structures comportant des éléments élancés, ce qui signifie qu'une de leurs dimensions est grande devant les deux autres. Ainsi, ces éléments peuvent être modélisés par des poutres déformables, pour lesquelles on peut appliquer les hypothèses de base de la résistance des matériaux [Goulet 1996] :

- géométrie des poutres : la longueur de la ligne moyenne est grande devant les dimensions des sections droites ;
- hypothèse de Barré de Saint-Venant : les résultats ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts intenses ;
- hypothèse de Bernoulli : les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent normales aux fibres après déformation ;
- les matériaux utilisés sont homogènes, isotropes et suivent une loi de comportement linéaire de type loi de Hooke.

3.1.2 Modélisation d'une structure quelconque

La modélisation d'une structure quelconque est réalisée en la discrétisant à partir de ses différents points caractéristiques, de façon à faire apparaître un ensemble de nœuds correspondant à ces points. Ces nœuds sont alors reliés entre eux par l'intermédiaire de différentes entités qui peuvent être :

- des poutres déformables ;
- des corps rigides indéformables ;
- des liaisons cinématiques.

Afin de supprimer toutes les possibilités de mouvements d'ensemble de la structure étudiée, des liaisons cinématiques sont définies entre certains nœuds de la structure et le bâti. Ces liaisons cinématiques caractérisent les conditions aux limites, et feront l'objet d'une étude particulière.
Tous ces éléments peuvent apparaître dans le cadre de la modélisation d'une structure quelconque. La modélisation partielle d'une telle structure est donnée à la Figure 3.1. Cette modélisation fait apparaître :

- une poutre déformable (d,e) en liaison avec le bâti ;
- deux poutres déformables (i,j) et (j,k) encastrées au niveau du nœud j ;
- un corps rigide indéformable (l,m) en liaison avec la poutre (j,k) au niveau des nœuds k et m.
- un repère local $R_{u,v}$ associé à chaque poutre déformable définie entre les deux nœuds u et v, construit de telle façon que son axe $\boldsymbol{x}_{u,v}$ soit suivant l'axe de la poutre ;
- le repère de base R_b associé au bâti.

Dans le cadre de cette modélisation, une action mécanique extérieure agissant sur la structure est nécessairement exprimée au niveau d'un nœud. Cette action mécanique, définie par une force nodale $\boldsymbol{F}_u$ agissant au nœud u, est exprimée par un vecteur à six composantes représentant la force et le moment :

$$\boldsymbol{F}_u = \begin{bmatrix} F_{x_u} & F_{y_u} & F_{z_u} & M_{x_u} & M_{y_u} & M_{z_u} \end{bmatrix}^T \tag{3.1}$$

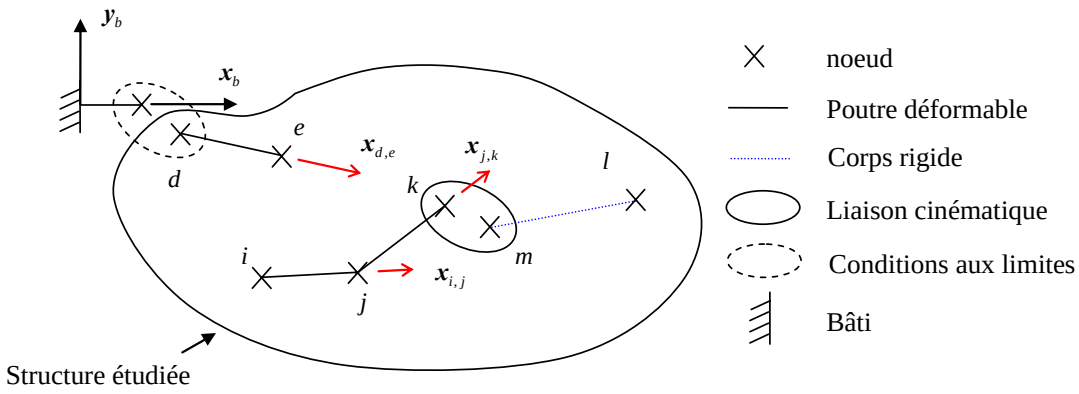


Figure 3.1 – Modélisation partielle d'une structure quelconque

Cette force nodale peut être exprimée, soit dans le repère de base de la structure $\left({}^{R_b}\boldsymbol{F}_u\right)$, soit dans un repère local $R_{u,\alpha}$ associé à une poutre déformable où à un corps rigide défini entre les nœuds u et α $\left({}^{R_{u,\alpha}}\boldsymbol{F}_u\right)$.

Les déplacements de la structure résultant de sa déformation élastique, sont eux aussi exprimés au niveau des nœuds. Le déplacement du nœud u est défini par le vecteur $\Delta\boldsymbol{X}_u$, appelé déplacement nodal (Figure 3.2). Ce vecteur, qui intègre les trois déplacements linéaires $d\boldsymbol{P}_u = \begin{bmatrix} u_u & v_u & w_u \end{bmatrix}^T$, ainsi que les trois rotations de section de la poutre $\boldsymbol{\delta}_u = \begin{bmatrix} \theta_{x_u} & \theta_{y_u} & \theta_{z_u} \end{bmatrix}^T$ est défini de la façon suivante :

$$\Delta\boldsymbol{X}_u = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{P}_u & \boldsymbol{\delta}_u \end{bmatrix}^T \tag{3.2}$$

Ce déplacement nodal $\Delta\boldsymbol{X}_u$ peut être exprimé, soit dans le repère de base de la structure $\left({}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u\right)$, soit dans un repère local $R_{u,\alpha}$ associé à une poutre où à un corps rigide défini entre les nœuds u et α $\left({}^{R_{u,\alpha}}\Delta\boldsymbol{X}_u\right)$.

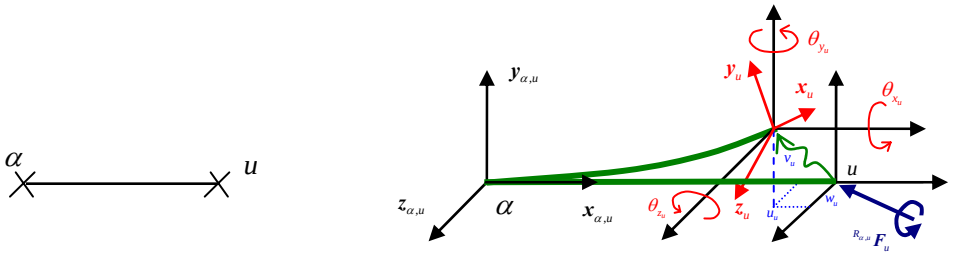


Figure 3.2 – Effort nodal et déplacement nodal

3.1.3 Matrice de rigidité d'une poutre

La matrice de rigidité ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}^{u,v}$ d'une poutre quelconque (u,v) définie par les nœuds u et v, exprimée dans le repère local $R_{u,v}$, dépend de différents paramètres géométriques et mécaniques. Tous ces paramètres sont fournis dans le Tableau 3.1.

Paramètres géométriques	Longueur (m)	$L_{u,v}$
	Aire de section droite (m^2)	$S_{u,v}$
Paramètres mécaniques	Module d'Young (N/m^2)	$E_{u,v}$
	Coefficient de Poisson	$\nu_{u,v}$
	Module de Coulomb (N/m^2)	$G_{u,v}=\dfrac{E_{u,v}}{2(1+\nu_{u,v})}$
	Moments quadratiques (m^4)	$Iy_{u,v}$
		$Iz_{u,v}$
	Moment polaire (m^4)	$J_{u,v}$

Tableau 3.1 – Paramètres géométriques et mécaniques de la poutre (u,v)

La matrice de rigidité ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}^{u,v}$ est une matrice carrée de dimension 12 définie de la façon suivante :

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}^{u,v}=\left[\begin{array}{c|c} {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{11}^{u,v} & {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{12}^{u,v} \\ \hline {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{21}^{u,v} & {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{22}^{u,v} \end{array}\right]_{(12\times12)} \tag{3.3}$$

où, en négligeant les efforts tranchants, les sous-matrices nodales de rigidité ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{11}^{u,v}$, ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{12}^{u,v}$, ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{21}^{u,v}$ et ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{22}^{u,v}$ sont définies par :

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{11}^{u,v}=\begin{bmatrix} \frac{E_{u,v}S_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_{u,v}J_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & \frac{4E_{u,v}Iy_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 \\ 0 & \frac{6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_{u,v}Iz_{u,v}}{L_{u,v}} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{12}^{u,v}=\begin{bmatrix} \frac{-E_{u,v}S_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-G_{u,v}J_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & \frac{2E_{u,v}Iy_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 \\ 0 & \frac{-6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_{u,v}Iz_{u,v}}{L_{u,v}} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{21}^{u,v} = \begin{bmatrix} \frac{-E_{u,v}S_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & \frac{6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-G_{u,v}J_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & \frac{2E_{u,v}Iy_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 \\ 0 & \frac{6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_{u,v}Iz_{u,v}}{L_{u,v}} \end{bmatrix} \tag{3.6} $$

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}_{22}^{u,v} = \begin{bmatrix} \frac{E_{u,v}S_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^3} & 0 & \frac{6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_{u,v}J_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_{u,v}Iy_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & \frac{4E_{u,v}Iy_{u,v}}{L_{u,v}} & 0 \\ 0 & \frac{-6E_{u,v}Iz_{u,v}}{{L_{u,v}}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_{u,v}Iz_{u,v}}{L_{u,v}} \end{bmatrix} \tag{3.7} $$

Afin de pouvoir exprimer la matrice de rigidité de la structure complète dans le repère de base, toutes les matrices de rigidité des différentes poutres doivent être exprimées dans ce même repère de base de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}^{u,v} = \left(\boldsymbol{P}^{u,v}\right)^{-1} {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}^{u,v}\boldsymbol{P}^{u,v} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{u,v} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{12}^{u,v} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{21}^{u,v} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{u,v} \end{array}\right]_{(12\times12)} \tag{3.8} $$

où $\boldsymbol{P}^{u,v}$, la matrice de passage est définie par :

$$ \boldsymbol{P}^{u,v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{u,v} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{R}^{u,v} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{R}^{u,v} & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{R}^{u,v} \end{bmatrix}_{(12\times12)} \tag{3.9} $$

$\boldsymbol{R}^{u,v}$ est la matrice définissant l'orientation du repère de base R_b dans le repère local $R_{u,v}$ de la poutre (u,v).

3.1.4 Assemblage des matrices de rigidité, des vecteurs force et déplacement nodaux

3.1.4.1 Assemblage des matrices de rigidité

Après avoir exprimé dans le repère de base toutes les matrices de rigidité des différentes poutres déformables mises en œuvre pour modéliser le comportement élastique de la structure, il faut procéder à l'assemblage de ces matrices afin de définir la matrice de rigidité de la structure complète. Cet assemblage est dépendant de la numérotation de l'ensemble des nœuds. Finalement, la matrice de rigidité complète est une matrice carrée de dimension $6n$, où n est le nombre total de nœuds de la structure.

Exprimées dans le repère de base, les matrices de rigidité des différentes poutres déformables de la partie étudiée de la structure définie à la Figure 3.1 sont données par : ${}^{R_b}\boldsymbol{K}^{d,e}$, ${}^{R_b}\boldsymbol{K}^{i,j}$ et ${}^{R_b}\boldsymbol{K}^{j,k}$. La

contribution de ces matrices au sein de la matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ de la structure complète exprimée dans le repère de base, est définie par :

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{K}_c = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccc} \cdots & & d & \cdots & e & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & m & \cdots & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{d,e} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{12}^{d,e} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{21}^{d,e} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{d,e} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{i,j} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{12}^{i,j} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{21}^{i,j} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{i,j} + {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{j,k} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{12}^{j,k} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{21}^{j,k} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{j,k} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0}_6 & \cdots & \boldsymbol{0}_6 & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0}_6 & \cdots & \boldsymbol{0}_6 & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \vdots \\ d \\ \vdots \\ e \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \\ m \\ \vdots \end{array}
\end{array}_{(6n\times 6n)}
\tag{3.10}
$$

La matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ est ainsi complétée selon la numérotation des différents nœuds. Par exemple, les sous-matrices nodales de la matrice de rigidité de la poutre (d,e) sont disposées de la façon suivante :

- ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{d,e}$ se trouve à l'intersection de la $d^{ième}$ ligne avec la $d^{ième}$ colonne ;
- ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{12}^{d,e}$ se trouve à l'intersection de la $d^{ième}$ ligne avec la $e^{ième}$ colonne ;
- ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{21}^{d,e}$ se trouve à l'intersection de la $e^{ième}$ ligne avec la $d^{ième}$ colonne ;
- ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{d,e}$ se trouve à l'intersection de la $e^{ième}$ ligne avec la $e^{ième}$ colonne.

La composante correspondant à l'intersection de la $j^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ fait apparaître la somme des deux sous-matrices nodales ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{22}^{i,j}$ et ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{11}^{j,k}$, cela permet de prendre en compte l'encastrement entre les deux poutres (i,j) et (j,k) au niveau du nœud j.

La prise en compte du corps rigide indéformable défini entre les nœuds l et m, fait apparaître les matrices $\boldsymbol{0}_6$ aux lignes et colonnes correspondant aux nœuds l et m.

Tous les autres termes de la matrice $\left({}^{R_b}\boldsymbol{K}_c\right)_{uv}$, ne correspondant pas à une poutre déformable définie entre deux nœuds u et v, font bien évidemment apparaître des matrices $\boldsymbol{0}_6$.

3.1.4.2 Assemblage des vecteurs force et déplacement nodaux

Les différents vecteurs exprimés dans le repère de base R_b, correspondant aux forces nodales agissant sur la structure, sont concaténés à partir de la numérotation des nœuds en un vecteur unique. Il en est de même pour les différents vecteurs correspondant aux déplacements nodaux.

Pour la structure étudiée possédant n nœuds, les vecteurs regroupant les forces nodales et les déplacements nodaux exprimés dans le repère de base, sont définis respectivement par :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_c = \begin{bmatrix} \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_d & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_e & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_i & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_j & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_k & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_l & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_m & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3.11) $$

$$ \begin{aligned} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c = \begin{bmatrix} \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_d & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_e & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_i & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_j \\ \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_k & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_l & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_m & \cdots \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.12) $$

3.1.5 Relations de dépendance linéaire

Les relations de dépendance linéaire sont utilisées pour décrire certaines conditions entre les déplacements nodaux, telles que :

- Les liaisons cinématiques modélisant les différentes liaisons passives d'une structure ;
- les mouvements de corps rigide, qui sont utilisés pour décrire les déplacements d'un solide considéré comme étant indéformable.

Il faut noter que les liaisons cinématiques modélisant les conditions aux limites ne sont pas prises en compte dans l'étude des relations de dépendance linéaire.
Les relations de dépendance linéaire couramment mises en œuvre au sein des mécanismes, et en particulier les mécanismes à structure parallèle, sont présentées dans la suite de ce paragraphe.

3.1.5.1 Liaison rotoïde

Soit ${}^{R_b}\boldsymbol{a}_{u,v} = \begin{bmatrix} a_{x_{u,v}} & a_{y_{u,v}} & a_{z_{u,v}} \end{bmatrix}^T$ le vecteur unitaire de l'axe d'une liaison rotoïde entre les nœuds u et v, exprimé dans le repère de base R_b. Les vecteurs unitaires ${}^{R_b}\boldsymbol{s}_{u,v} = \begin{bmatrix} s_{x_{u,v}} & s_{y_{u,v}} & s_{z_{u,v}} \end{bmatrix}^T$ et ${}^{R_b}\boldsymbol{n}_{u,v} = \begin{bmatrix} n_{x_{u,v}} & n_{y_{u,v}} & n_{z_{u,v}} \end{bmatrix}^T$ complètent le système de coordonnées orthonormé direct $\left(O_{u,v}, {}^{R_b}\boldsymbol{s}_{u,v}, {}^{R_b}\boldsymbol{n}_{u,v}, {}^{R_b}\boldsymbol{a}_{u,v}\right)$, où $O_{u,v}$ est un point de l'axe de rotation.

La liaison rotoïde ainsi définie fait apparaître que tous les déplacements des nœuds u et v sont identiques, sauf les rotations θ_{z_u} et θ_{z_v} qui sont indépendantes (Figure 3.3).

Ces cinq relations peuvent être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 & -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \hline \boldsymbol{0}_{2,3} & \boldsymbol{\Omega}_{u,v} & \boldsymbol{0}_{2,3} & -\boldsymbol{\Omega}_{u,v} \end{array}\right] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{P}_u \\ \boldsymbol{\delta}_u \\ d\boldsymbol{P}_v \\ \boldsymbol{\delta}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3,1} \\ \boldsymbol{0}_{2,1} \end{bmatrix} \quad (3.13) $$

où :

$$ \boldsymbol{\Omega}_{u,v} = \begin{bmatrix} s_{x_{u,v}} & s_{y_{u,v}} & s_{z_{u,v}} \\ n_{x_{u,v}} & n_{y_{u,v}} & n_{z_{u,v}} \end{bmatrix} \quad (3.14) $$

En posant :

$$ \boldsymbol{B}_{u,v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_{2,3} & \boldsymbol{\Omega}_{u,v} \end{bmatrix} \quad (3.15) $$

l'expression (3.13) s'écrit en fonction des déplacements nodaux ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u$ et ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v$ de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{u,v} & -\boldsymbol{B}_{u,v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u\\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}_{5,1} \tag{3.16}$$

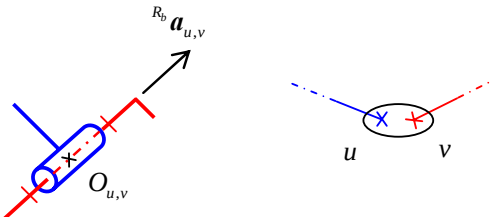


Figure 3.3 – Liaison rotoïde

3.1.5.2 Liaison prismatique

Soit ${}^{R_b}\boldsymbol{a}_{u,v}=\begin{bmatrix}a_{x_{u,v}} & a_{y_{u,v}} & a_{z_{u,v}}\end{bmatrix}^T$ le vecteur unitaire donnant la direction d'une liaison prismatique entre les nœuds u et v, exprimé dans le repère de base R_b. Les vecteurs unitaires ${}^{R_b}\boldsymbol{s}_{u,v}=\begin{bmatrix}s_{x_{u,v}} & s_{y_{u,v}} & s_{z_{u,v}}\end{bmatrix}^T$ et ${}^{R_b}\boldsymbol{n}_{u,v}=\begin{bmatrix}n_{x_{u,v}} & n_{y_{u,v}} & n_{z_{u,v}}\end{bmatrix}^T$ complètent comme pour le cas de la liaison rotoïde, le système de coordonnées $\left(O,{}^{R_b}\boldsymbol{s}_{u,v},{}^{R_b}\boldsymbol{n}_{u,v},{}^{R_b}\boldsymbol{a}_{u,v}\right)$, où O est un point quelconque.

La liaison prismatique ainsi définie fait apparaître que tous les déplacements des nœuds u et v sont identiques, sauf les translations w_u et w_v qui sont indépendantes (Figure 3.4).

Ces cinq relations peuvent être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}\boldsymbol{\Theta}_{u,v} & \boldsymbol{0}_{2,3} & -\boldsymbol{\Theta}_{u,v} & \boldsymbol{0}_{2,3}\\ \hline \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 & -\boldsymbol{I}_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}d\boldsymbol{P}_u\\ \boldsymbol{\delta}_u\\ d\boldsymbol{P}_v\\ \boldsymbol{\delta}_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{2,1}\\ \boldsymbol{0}_{3,1}\end{bmatrix} \tag{3.17}$$

où :

$$\boldsymbol{\Theta}_{u,v}=\begin{bmatrix}s_{x_{u,v}} & s_{y_{u,v}} & s_{z_{u,v}}\\ n_{x_{u,v}} & n_{y_{u,v}} & n_{z_{u,v}}\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

En posant :

$$C_{u,v}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{u,v} & \boldsymbol{0}_{2,3}\\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

l'expression (3.17) s'écrit en fonction des déplacements nodaux ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u$ et ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v$ de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{u,v} & -\boldsymbol{C}_{u,v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u\\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}_{5,1} \tag{3.20}$$

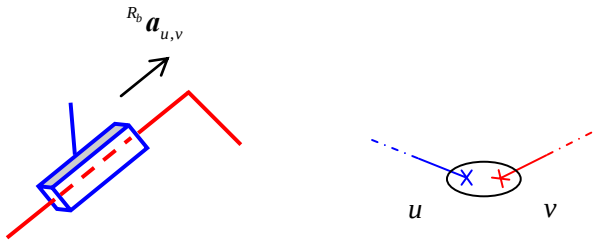


Figure 3.4 – Liaison prismatique

3.1.5.3 Liaison rotule

Soit le repère $R_{u,v}$ d'origine $O_{u,v}$, le centre d'une liaison rotule entre les nœuds u et v. Cette liaison rotule est caractérisée par des déplacements linéaires identiques et des rotations $\boldsymbol{\delta}_u$ et $\boldsymbol{\delta}_v$ indépendantes (Figure 3.5).
En posant :

$$\boldsymbol{D}_{u,v} = \begin{bmatrix} I_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

les trois relations de dépendance linéaire de la liaison rotule s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{u,v} & -\boldsymbol{D}_{u,v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{3,1} \tag{3.22}$$

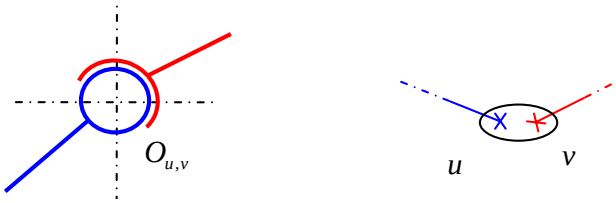


Figure 3.5 – Liaison rotule

3.1.5.4 Mouvement de corps rigide

Les relations de dépendance linéaire de type mouvement de corps rigide sont utilisées pour modéliser les petits déplacements d'un élément, supposé indéformable, défini entre les nœuds u et v. Ces six relations de dépendance linéaire, basées sur la théorie des petits déplacements [Bourdet 1987], s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}_u = \boldsymbol{\delta}_v \\ d\boldsymbol{P}_u = d\boldsymbol{P}_v + \hat{\boldsymbol{L}}_{u,v}\boldsymbol{\delta}_v \end{cases} \tag{3.23}$$

où $\hat{\boldsymbol{L}}_{u,v}$ est la matrice de pré-produit vectoriel définie par les composantes du vecteur $\overrightarrow{UV}$ qui lie les points définis par les nœuds u et v :

$$\hat{\boldsymbol{L}}_{u,v} = \begin{bmatrix} 0 & -(UV)_z & (UV)_y \\ (UV)_z & 0 & -(UV)_x \\ -(UV)_y & (UV)_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

La relation (3.23) peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{0}_3 & -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \hline -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 & \hat{\boldsymbol{L}}_{u,v} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} d\boldsymbol{P}_u \\ \boldsymbol{\delta}_u \\ d\boldsymbol{P}_v \\ \boldsymbol{\delta}_v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_{3,1} \\ \boldsymbol{0}_{3,1} \end{array}\right] \tag{3.25}$$

Finalement, en posant :

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & -\boldsymbol{I}_3 \\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{E}_{u,v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \hat{\boldsymbol{L}}_{u,v} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Les relations de dépendance linéaire associées à un mouvement de corps rigide sont réécrites de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{u,v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_u \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_v \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{6,1} \tag{3.28}$$

3.1.5.5 Assemblage des relations de dépendance linéaire

Toutes les relations de dépendance linéaire peuvent être regroupées en une seule expression donnée par :

$${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{0}_{m,1} \tag{3.29}$$

où ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c$ est la matrice exprimée dans le repère de base, qui regroupe les m relations de dépendance linéaire de la structure.

Le nombre total de relations de dépendance linéaire m est lié au nombre et au type des liaisons passives ainsi qu'au nombre de mouvements de corps rigides définis pour modéliser la structure. En posant N_1, N_2, N_3 et N_4 définis comme étant respectivement les nombres de liaisons rotoïdes, de liaisons prismatiques, de liaisons rotules et de mouvements de corps rigides, le nombre m de relations de dépendance linéaire est défini par :

$$m = 5\left(N_1 + N_2\right) + 3N_3 + 6N_4 \tag{3.30}$$

3.1.6 Prise en compte des conditions aux limites

La matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ de la structure complète est obtenue par assemblage des matrices de rigidité des différentes poutres mises en œuvre pour modéliser le comportement élastique de celle-ci. Cette matrice a un nombre de singularités qui correspond au nombre maximum de modes de déplacement d'ensemble de la structure possibles. La matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ de la structure libre est donc semi-définie positive. Les conditions d'appui, si elles sont en nombre suffisant, empêchent toute possibilité de déplacement d'ensemble de la structure et rendent donc la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ définie positive. Avant de résoudre le système des équations d'équilibre pour déterminer les déplacements inconnus, il faut donc prendre en compte ces conditions de déplacement imposé [Imbert 1979].

La prise en compte des conditions de déplacement imposé, correspondant à des conditions d'appui de type déplacement nul, s'effectue en supprimant dans la matrice de rigidité complète ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté fixés. Ce travail sur la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c$ permet de définir une nouvelle matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^*$ qui intègre effectivement ces conditions aux limites. Cette dernière matrice est une matrice carrée de dimension $(6n-p)$, où n est le nombre total de nœuds de la structure et p est le nombre de degrés de liberté fixés.

Pour les vecteurs force et les déplacements nodaux, la prise en compte des conditions aux limites est identique. Les lignes de ces deux vecteurs, correspondant aux degrés de liberté fixés sont supprimées, définissant ainsi les vecteurs ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^*$ et ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$ de dimension $(6n-p)$.

Pour la matrice des relations cinématiques ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c$ définie par l'expression (3.29), la prise en compte des conditions aux limites revient à supprimer les colonnes correspondant aux degrés de liberté fixés, définissant ainsi la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^*$ de dimension $(m, 6n-p)$

Finalement la relation effort/déplacement qui intègre les conditions aux limites est donnée par la relation :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^* = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* \tag{3.31} $$

Cette relation ne permet généralement pas de déterminer directement le vecteur ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$ regroupant l'ensemble des déplacements nodaux solutions. En effet, du fait de l'existence de liaisons passives dans les structures parallèles étudiées, la matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^*$ n'est pas inversible. C'est pour cette raison que les relations cinématiques correspondant aux liaisons passives sont intégrées sous la forme de relations de dépendance linéaire entre les différents déplacements nodaux.

3.1.7 Etude énergétique

A ce stade de l'étude, la problématique est résumée de la façon suivante, les déplacements nodaux solutions ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$ vérifient la relation effort/déplacement ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^* = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$ sous les contraintes exprimées par les relations de dépendance linéaire ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* = \boldsymbol{0}_{m,1}$, données par l'expression (3.29).

Ce problème revient à chercher les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale [Imbert 1979] :

$$ V = \frac{1}{2}\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^{*T\,R_b}\boldsymbol{K}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* - {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^{*\,R_b}\boldsymbol{F}_c^* \tag{3.32} $$

sous les mêmes contraintes à savoir : ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_c\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{0}_{m,1}$.

Cela revient à chercher les conditions d'extremum, sans contrainte, de l'énergie potentielle totale modifiée :

$$ V^* = V + \left[\,{}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^*\right]^T \boldsymbol{\lambda}_m \tag{3.33} $$

où le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_m = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_m\end{bmatrix}^T$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux m relations de dépendance linéaire.

Les conditions d'extremum de V^* s'écrivent :

$$ \begin{cases} \nabla_{\Delta X_c^*} V^* = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* - {}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^* + {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*T}\boldsymbol{\lambda}_m = \boldsymbol{0}_{6n-p,1} \\ \nabla_{\lambda} V^* = {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*\,R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* = \boldsymbol{0}_{m,1} \end{cases} \tag{3.34} $$

où ∇ est l'opérateur gradient.
L'expression (3.34) permet de définir le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^* & {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*T} \\ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^* & \boldsymbol{0}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* \\ \boldsymbol{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^* \\ \boldsymbol{0}_{m,1} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

En posant :

$${}^{R_b}\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_c^* & {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^{*T} \\ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_c^* & \boldsymbol{0}_m \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_c^* \\ \boldsymbol{\lambda}_m \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

$${}^{R_b}\boldsymbol{F}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_c^* \\ \boldsymbol{0}_{m,1} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

l'expression (3.35) est simplifiée de la façon suivante :

$${}^{R_b}\boldsymbol{K}_G \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_G \tag{3.39}$$

La prise en considération des conditions aux limites définies au paragraphe (3.1.6), rendent possible l'inversion de la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_G$. La solution du système d'équation (3.39) est donnée par :

$${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_G^{-1} \, {}^{R_b}\boldsymbol{F}_G \tag{3.40}$$

Le vecteur solution ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G$ intègre l'ensemble des déplacements nodaux de la structure, ainsi que le vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

3.1.8 Conclusion

La démarche à suivre afin de déterminer la déformation de l'ensemble d'une structure en réponse à un chargement extérieur donné peut être résumée de la façon suivante :

- écriture de la matrice de rigidité de chaque poutre dans son repère local ;
- expression de chaque matrice de rigidité dans le repère de base ;
- assemblage des matrices de rigidité dans le repère de base ;
- écriture des relations de dépendance linéaire ;
- prise en compte des conditions aux limites ;
- écriture du système d'équations global qui regroupe en un seul système les relations effort/déplacement et les relations de dépendance linéaire ;
- résolution du système d'équation global fournissant l'expression du vecteur ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G$.

3.2 Modélisation élastique de la structure Delta avec des liaisons passives parfaites [Deblaise 2006]

La méthode de modélisation du comportement élastique d'une structure, présentée dans le cas général au paragraphe précédent, est appliquée à la structure Delta du Surgiscope® dont les modèles géométriques ont été établis au second chapitre de ce mémoire.
Dans le cadre de cette première étude de la structure Delta, toutes les liaisons passives sont supposées parfaites, aucune action mécanique n'est transmissible suivant le(s) degré(s) de liberté des liaisons. Ainsi, ces liaisons, seront simplement modélisées par des relations de dépendance linéaire.
Afin de simplifier les écritures de l'ensemble des expressions qui vont suivre, la modélisation de la structure Delta est réalisée sur la base de ses modèles nominaux à 42 paramètres définis aux paragraphes (2.3.3.1) et (2.3.3.2). Il faut noter que cette simplification n'enlève rien au caractère général de la modélisation proposée.

3.2.1 Modélisation de la structure

La modélisation d'une chaîne cinématique de la structure (Figure 3.6), fondée sur le modèle nominal à 42 paramètres ne fait apparaître que trois types de poutre différents, à savoir :

- le bras (indice 1) en alliage d'aluminium, dont la matrice de rigidité exprimée dans son repère local est : ${}^{R_1}\boldsymbol{K}^1$;
- le demi petit côté du parallélogramme (indice 2) en acier, dont la matrice de rigidité exprimée dans son repère local est : ${}^{R_2}\boldsymbol{K}^2$;
- le grand côté du parallélogramme (indice 3) en alliage d'aluminium, dont la matrice de rigidité exprimée dans son repère local est : ${}^{R_3}\boldsymbol{K}^3$.

La notation indicielle fonction des nœuds est donc remplacée par une notation plus simple prenant en compte l'indice de la pièce.

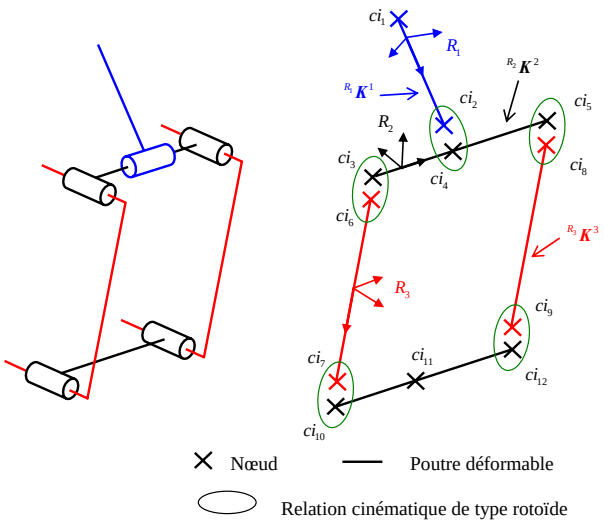


Figure 3.6 – Modélisation de la chaîne cinématique i
avec des liaisons passives parfaites

Afin de modéliser la structure complète, les trois chaînes cinématiques sont assemblées à la nacelle qui est considérée comme étant un corps indéformable. La nacelle est donc modélisée par des relations de dépendance linéaire de type mouvement de corps rigide. La modélisation de la structure complète faisant apparaître les nœuds ainsi que les éléments déformables et indéformables est donnée à la Figure 3.7. La numérotation des différents nœuds est effectuée à partir de la convention suivante :

- le nœud ci_j désigne $j^{ième}$ nœud de la $i^{ième}$ chaîne cinématique ;
- le nœud n_k désigne le $k^{ième}$ nœud de la nacelle.

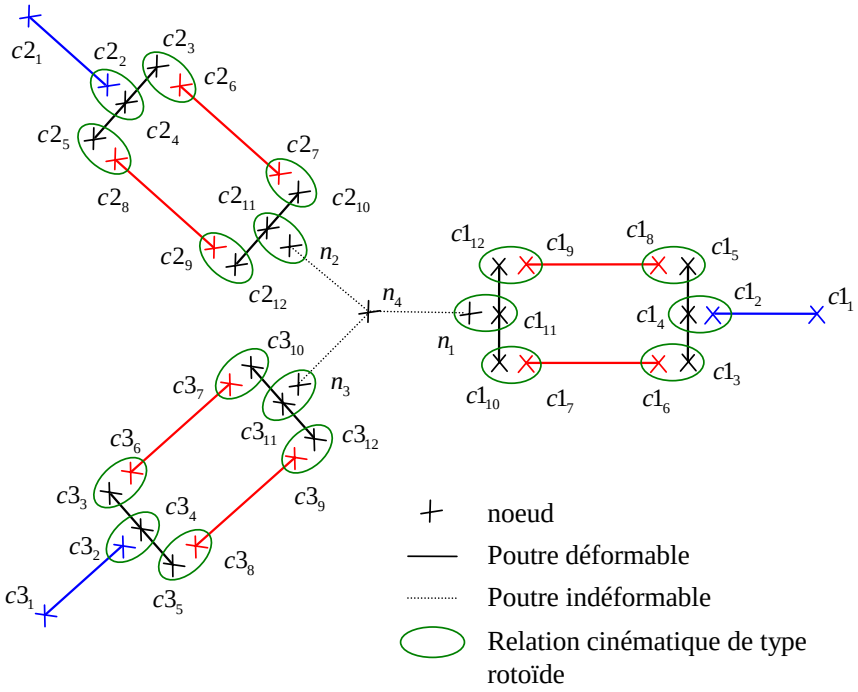


Figure 3.7 – Modélisation de la structure complète

3.2.2 Ecriture des matrice de rigidité dans les différents repères locaux

Les paramètres géométriques et mécaniques des différents éléments constitutifs d'une chaîne cinématique sont indiqués dans le Tableau 3.2.
Sur la base de ces différents paramètres, les matrices de rigidité ${}^{R_1}\boldsymbol{K}^1$, ${}^{R_2}\boldsymbol{K}^2$ et ${}^{R_3}\boldsymbol{K}^3$, exprimées dans leurs repères locaux respectifs sont définies comme indiqué au paragraphe (3.1.3).

	Bras	Demi-petit côté parallélogramme	Grand côté du parallélogramme
Longueur (m)	$Lb = 0,750$	$Lc = 0,125$	$L = 0,950$
Diam ext (m)	$\phi_{1ext} = 0,080$	$\phi_2 = 0,022$	$\phi_{3ext} = 0,032$
Diam int (m)	$\phi_{1\text{int}} = 0,070$		$\phi_{3\text{int}} = 0,028$
Aire de section droite (m^2)	$S_1 = \frac{\pi\left(\phi_{1ext}{}^2 - \phi_{1\text{int}}{}^2\right)}{4}$	$S_2 = \frac{\pi\phi_2{}^2}{4}$	$S_3 = \frac{\pi\left(\phi_{3ext}{}^2 - \phi_{3\text{int}}{}^2\right)}{4}$
Module d'Young (N/m^2)	$E_{al} = 70 \cdot 10^9$	$E_{ac} = 210 \cdot 10^9$	$E_{al} = 70 \cdot 10^9$
Coefficient de Poisson	$\nu_{al} = 0,33$	$\nu_{ac} = 0,28$	$\nu_{al} = 0,33$
Module de Coulomb (N/m^2)	$G_{al} = \frac{E_{al}}{2(1+\nu_{al})}$	$G_{ac} = \frac{E_{ac}}{2(1+\nu_{ac})}$	$G_{al} = \frac{E_{al}}{2(1+\nu_{al})}$
Moment quadratique (m^4)	$Iy_1 = Iz_1 = \frac{\pi\left(\phi_{1ext}{}^4 - \phi_{1\text{int}}{}^4\right)}{64}$	$Iy_2 = Iz_2 = \frac{\pi\phi_{2ext}{}^4}{64}$	$Iy_3 = Iz_3 = \frac{\pi\left(\phi_{3ext}{}^4 - \phi_{3\text{int}}{}^4\right)}{64}$
Moment polaire (m^4)	$J_1 = \frac{\pi\left(\phi_{1ext}{}^4 - \phi_{1\text{int}}{}^4\right)}{32}$	$J_2 = \frac{\pi\phi_{2ext}{}^4}{32}$	$J_3 = \frac{\pi\left(\phi_{3ext}{}^4 - \phi_{3\text{int}}{}^4\right)}{32}$

Tableau 3.2 – Paramètres géométriques et mécaniques de la chaîne cinématique i

3.2.3 Ecriture des matrices de rigidité dans le repère de base

3.2.3.1 Matrices de rigidité des bras

Pour la chaîne cinématique i, la matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}$ permettant de décrire la situation du repère associé à la liaison motorisée dans le repère de base a été donnée dans le paragraphe (2.3.2.3). Cette matrice de transformation peut être écrite sous la forme suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{A_i} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41} $$

où la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}}$ représente l'orientation du repère R_{A_i} relativement au repère de base R_b.

Finalement, en posant :

$$ {}_{i}\boldsymbol{P}^{1} = \begin{bmatrix} \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{A_i}}\right)^T \end{bmatrix}_{(12\times12)} \tag{3.42} $$

la matrice de rigidité du bras de la chaîne cinématique i, exprimée dans le repère de base est obtenue par la relation :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1} = \left({}_{i}\boldsymbol{P}^{1}\right)^{-1}\,{}^{R_1}\boldsymbol{K}^{1}\,{}_{i}\boldsymbol{P}^{1} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1}_{12} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.43} $$

3.2.3.2 Matrices de rigidité des demi petits côtés des parallélogrammes

Pour la chaîne cinématique i, les matrices de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}$ et ${}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$, respectivement définies dans les paragraphes (2.3.2.3) et (2.3.2.4) permettent de définir la matrice de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$ décrivant la situation du repère associé au demi petit côté supérieur du parallélogramme dans le repère de base. La matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$ est définie de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}} = {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{A_i}}\,{}^{R_{A_i}}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_{B_i}} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.44} $$

où la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}$ représente l'orientation du repère R_{B_i} relativement au repère de base R_b.

Finalement, en posant :

$$ {}_{i}\boldsymbol{P}^{2} = \begin{bmatrix} \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)^T & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)^T \end{bmatrix}_{(12\times12)} \tag{3.45} $$

la matrice de rigidité du demi petit coté du parallélogramme de la chaîne cinématique i, exprimée dans le repère de base est donnée par :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2} = \left({}_{i}\boldsymbol{P}^{2}\right)^{-1}\,{}^{R_2}\boldsymbol{K}^{2}\,{}_{i}\boldsymbol{P}^{2} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{12} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.46} $$

3.2.3.3 Matrices de rigidité des grand côtés des parallélogrammes

Le repère associé au grand côté du parallélogramme de la chaîne cinématique i est défini à la Figure 3.8 par :

Axe ${}_i\boldsymbol{x}_3$

L'axe $\boldsymbol{x}$ de la poutre associée au grand côté du parallélogramme peut être défini à partir des coordonnées des points ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{B_{ij}}$ et ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{C_{ij}}$ définies dans le paragraphe (2.3.3).

$$ {}_i\boldsymbol{x}_3 = \frac{{}^{R_b}\boldsymbol{P}_{C_{ij}} - {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{B_{ij}}}{\left\| {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{C_{ij}} - {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{B_{ij}} \right\|} \tag{3.47} $$

Axe ${}_i\boldsymbol{y}_3$

L'axe $\boldsymbol{y}$ de la poutre associé au grand côté du parallélogramme correspond à l'axe de la liaison rotoïde entre le petit et le grand côté du parallélogramme. Il est obtenu en effectuant le produit vectoriel entre l'axe ${}_i\boldsymbol{x}_3$ de l'expression (3.47) et l'axe $\boldsymbol{x}_{B_i}$ du repère R_{B_i}, qui correspond à la première colonne de la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}$. L'axe $\boldsymbol{x}_{B_i}$ est noté :

$$ \boldsymbol{x}_{B_i} = \left[\left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}} \right)_{11} \quad \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}} \right)_{21} \quad \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}} \right)_{31} \right]^T \tag{3.48} $$

et finalement :

$$ {}_i\boldsymbol{y}_3 = {}_i\boldsymbol{x}_3 \times \boldsymbol{x}_{B_i} \tag{3.49} $$

Axe ${}_i\boldsymbol{z}_3$

L'axe ${}_i\boldsymbol{z}_3$ est construit de telle façon que les axes ${}_i\boldsymbol{x}_3$, ${}_i\boldsymbol{y}_3$ et ${}_i\boldsymbol{z}_3$ définissent le repère orthonormé direct associé au grand côté du parallélogramme.

$$ {}_i\boldsymbol{z}_3 = {}_i\boldsymbol{x}_3 \times {}_i\boldsymbol{y}_3 \tag{3.50} $$

En posant :

$$ {}^{R_3}_{i}\boldsymbol{R}_{R_b} = \begin{bmatrix} \left({}_i\boldsymbol{x}_3 \right)_{11} & \left({}_i\boldsymbol{x}_3 \right)_{21} & \left({}_i\boldsymbol{x}_3 \right)_{31} \\ \left({}_i\boldsymbol{y}_3 \right)_{11} & \left({}_i\boldsymbol{y}_3 \right)_{21} & \left({}_i\boldsymbol{y}_3 \right)_{31} \\ \left({}_i\boldsymbol{z}_3 \right)_{11} & \left({}_i\boldsymbol{z}_3 \right)_{21} & \left({}_i\boldsymbol{z}_3 \right)_{31} \end{bmatrix} \tag{3.51} $$

$$ {}_i\boldsymbol{P}^3 = \begin{bmatrix} {}^{R_3}_{i}\boldsymbol{R}_{R_b} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & {}^{R_3}_{i}\boldsymbol{R}_{R_b} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & {}^{R_3}_{i}\boldsymbol{R}_{R_b} & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & {}^{R_3}_{i}\boldsymbol{R}_{R_b} \end{bmatrix}_{(12\times12)} \tag{3.52} $$

La matrice de rigidité du grand côté du parallélogramme de la chaîne cinématique i exprimée dans le repère de base est donnée par :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3 = \left({}_i\boldsymbol{P}^3 \right)^{-1} {}^{R_3}\boldsymbol{K}^3 \, {}_i\boldsymbol{P}^3 = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{12} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{22} \end{bmatrix} \tag{3.53} $$

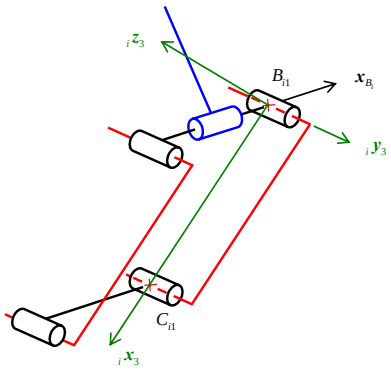


Figure 3.8 – Repère associé au grand côté du parallélogramme

3.2.4 Assemblage des matrices de rigidité, des vecteurs force et déplacement nodaux

3.2.4.1 Assemblage des matrices de rigidité

La matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_T$ de la structure complète est définie à partir des 40 nœuds de la modélisation donnée à la Figure 3.7. Elle peut être exprimée en fonction des matrices de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c$ de chacune des chaînes cinématiques de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_T = \begin{bmatrix} {}^{c1_1 \cdots c1_{12}} & {}^{c2_1 \cdots c2_{12}} & {}^{c3_1 \cdots c3_{12}} & {}^{n_1 \cdots n_4} \\ {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}_c & \boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72,24} \\ \boldsymbol{0}_{72} & {}^{R_b}_{2}\boldsymbol{K}_c & \boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72,24} \\ \boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72} & {}^{R_b}_{3}\boldsymbol{K}_c & \boldsymbol{0}_{72,24} \\ \boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24} \end{bmatrix}_{(240\times240)} \tag{3.54} $$

où la matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c$ de la chaîne cinématique i est complétée à partir de la numérotation des nœuds donnée à la Figure 3.9, de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} {}^{ci_1} & {}^{ci_2} & {}^{ci_3} & {}^{ci_4} & {}^{ci_5} & {}^{ci_6} & {}^{ci_7} & {}^{ci_8} & {}^{ci_9} & {}^{ci_{10}} & {}^{ci_{11}} & {}^{ci_{12}} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^1_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^1_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^1_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^1_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22} + {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22} + {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22} \end{bmatrix}_{(72\times72)} \tag{3.55} $$

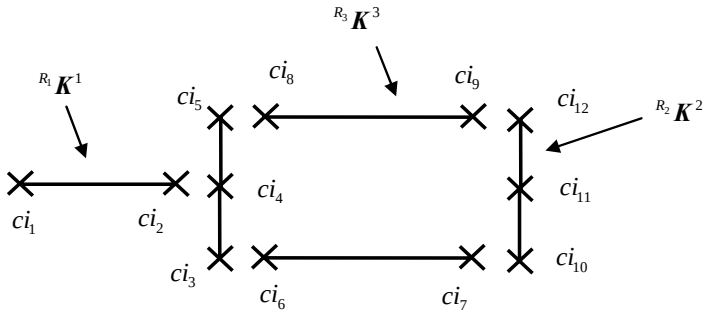


Figure 3.9 – Nœuds de la chaîne cinématique i

Remarque

La matrice de rigidité $^{R_b}\boldsymbol{K}_T$ de la structure complète est une matrice carrée creuse de grande dimension (240), comportant une très forte proportion de coefficients nuls. Si la structure des éléments non nuls est simple, des algorithmes spécifiques (fonction *sparse* sous *Matlab*®) permettent de réduire le temps de calcul de manière considérable. Ainsi, l'ordre de la numérotation des différents nœuds est important. C'est cet ordre qui conditionne le fait que les termes de la matrice de rigidité soient proches de la diagonale, définissant ainsi une structure simple qui facilite les traitements mathématiques ultérieurs.

3.2.4.2 Assemblage des vecteurs de force et de déplacement nodaux

L'assemblage des vecteurs de force et de déplacements nodaux réalisé à partir de la numérotation des nœuds permet de définir les deux vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_T = \Big[& {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c1_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c1_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c2_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c2_{12}} \\ & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c3_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c3_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \Big]^T_{(240,1)} \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_T = \Big[& {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c1_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c1_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c2_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c2_{12}} \\ & {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c3_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c3_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{n_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{n_4} \Big]^T_{(240,1)} \end{aligned} \tag{3.57}$$

3.2.5 Relations de dépendance linéaire

3.2.5.1 Liaisons rotoïdes entre les parallélogrammes et respectivement les bras et la nacelle

La modélisation de la structure étant réalisée à partir du modèle nominal à 42 paramètres, les caractéristiques des liaisons rotoïdes de la chaîne cinématique i entre, respectivement le bras et la nacelle sont identiques.

La matrice de transformation $^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{B_i}}$ décrivant la situation du repère associé aux petits côtés du parallélogramme de la chaîne cinématique i dans le repère de base, définie par l'expression (3.44), est utilisée pour déterminer les relations de dépendance linéaire des liaisons rotoïdes considérées. Cette matrice fait apparaître la matrice de rotation $^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}$, dont les colonnes correspondent aux divers axes

du repère associé au petit côté du parallélogramme. Les composantes des axes $\boldsymbol{y}_{B_i}$ et $\boldsymbol{z}_{B_i}$, nécessaires à l'écriture des relations de dépendance linéaire sont définies par :

$$\boldsymbol{y}_{B_i} = \begin{bmatrix} \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{12} & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{22} & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{32} \end{bmatrix}^T \tag{3.58}$$

$$\boldsymbol{z}_{B_i} = \begin{bmatrix} \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{13} & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{23} & \left({}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{B_i}}\right)_{33} \end{bmatrix}^T \tag{3.59}$$

Pour chacune des chaînes cinématiques, les relations de dépendance linéaire définissant les liaisons rotoïdes entre le parallélogramme et respectivement le bras et la nacelle, font intervenir des matrices notées $\boldsymbol{B}$, définies au paragraphe (3.1.5.1). Ces matrices sont indépendantes de la numérotation des nœuds car, pour la chaîne cinématique i, les liaisons rotoïdes étudiées ont des caractéristiques identiques. Ainsi, afin de simplifier les écritures, la désignation de ces matrices en fonction de la numérotation des nœuds est remplacée par la désignation ${}_i\boldsymbol{B}_1$, spécifique à chaque chaîne cinématique.
Toutes les liaisons rotoïdes, suivant les axes $\boldsymbol{x}_{B_i}$, entre les parallélogrammes et respectivement les bras et la nacelle se traduisent par les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} {}_1\boldsymbol{B}_1 & -{}_1\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c1_2} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c1_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \qquad \begin{bmatrix} {}_1\boldsymbol{B}_1 & -{}_1\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c1_{11}} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \tag{3.60}$$

$$\begin{bmatrix} {}_2\boldsymbol{B}_1 & -{}_2\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c2_2} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c2_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \qquad \begin{bmatrix} {}_2\boldsymbol{B}_1 & -{}_2\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c2_{11}} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \tag{3.61}$$

$$\begin{bmatrix} {}_3\boldsymbol{B}_1 & -{}_3\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c3_2} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c3_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \qquad \begin{bmatrix} {}_3\boldsymbol{B}_1 & -{}_3\boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c3_{11}} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \tag{3.62}$$

où les matrices ${}_i\boldsymbol{B}_1$ intervenant dans les relations de dépendance linéaire associées aux diverses liaisons rotoïdes sont définies par :

$$ {}_i\boldsymbol{B}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \hline \boldsymbol{0}_{2,3} & \begin{matrix} \boldsymbol{y}_{B_i}{}^T \\ \boldsymbol{z}_{B_i}{}^T \end{matrix} \end{array}\right] \tag{3.63}$$

3.2.5.2 Liaisons rotoïdes entre les petits et grands côtés du parallélogramme

Au sein de chacune des chaînes cinématique, les caractéristiques des liaisons rotoïdes entre les petits et grands côtés du parallélogramme sont identiques. L'axe de ces liaisons rotoïdes correspond à l'axe $\boldsymbol{y}_{3_i}$ du repère ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}_3$ associé au grand côté du parallélogramme de la chaine cinématique i, défini au paragraphe (3.2.3.3) ainsi que par la Figure 3.8.
Afin de simplifier l'écriture des différentes relations de dépendance linéaire, les matrices de type $\boldsymbol{B}$ intervenant dans la modélisation des liaisons rotoïdes entre les grands et les petits côtés des parallélogrammes, sont désignées par la matrice ${}_i\boldsymbol{B}_2$, spécifique à la chaîne cinématique i. Toutes ces relations de dépendance linéaire sont exprimées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} {}_i\boldsymbol{B}_2 & -{}_i\boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_3} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_6} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} & \begin{bmatrix} {}_i\boldsymbol{B}_2 & -{}_i\boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_5} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_8} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \\ \begin{bmatrix} {}_i\boldsymbol{B}_2 & -{}_i\boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_7} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{10}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} & \begin{bmatrix} {}_i\boldsymbol{B}_2 & -{}_i\boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_9} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{5,1} \end{cases} \tag{3.64}$$

où :

$${}_i\boldsymbol{B}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \hline \boldsymbol{0}_{2,3} & \begin{matrix} {}_i\boldsymbol{x}_3^T \\ {}_i\boldsymbol{z}_3^T \end{matrix} \end{array}\right] \tag{3.65}$$

3.2.5.3 Mouvements de corps rigide associés aux éléments de la nacelle

Les relations de dépendance linéaire entre les différents nœuds de la nacelle dépendent de la position de ses différents points caractéristiques. Les coordonnées de ces différents points (Figure 2.17) sont obtenues à partir des matrices de transformation ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}$ et ${}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}}$, respectivement définies aux paragraphes (2.3.2.5) et (2.3.2.6) par :

$${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}} = {}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}\,{}^{R_n}\boldsymbol{T}_{R_{C_i}} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_{C_i}} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_{C_i}} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

où le vecteur ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_{C_i}}$ donne la position des points C_i dans le repère de base R_b.

Dans ce repère de base, la position du point O_n, centre de la nacelle, est donnée par le vecteur ${}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_n}$, qui est défini à partir de la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n}$ de la façon suivante :

$${}^{R_b}\boldsymbol{T}_{R_n} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{R}_{R_n} & {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_n} \\ \boldsymbol{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{C_iO_n}$ reliant les différents points C_i au centre de la nacelle, sont définis par :

$$\overrightarrow{C_iO_n} = \begin{bmatrix} (C_iO_n)_x & (C_iO_n)_y & (C_iO_n)_z \end{bmatrix}^T = {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_n} - {}^{R_b}\boldsymbol{P}_{R_{C_i}} \tag{3.68}$$

Ceci permet d'écrire les relations de dépendance linéaire de type mouvements de corps rigide associés aux éléments de la nacelle :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{n_1,n_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_1} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{6,1} \tag{3.69}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{n_2,n_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_2} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{6,1} \tag{3.70}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{n_3,n_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_3} \\ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{6,1} \tag{3.71}$$

avec :

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & -\boldsymbol{I}_3 \\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$$\boldsymbol{E}_{n_1,n_4} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \hat{\boldsymbol{L}}_{n_1,n_4} \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

$$\boldsymbol{E}_{n_2,n_4} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \hat{\boldsymbol{L}}_{n_2,n_4} \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

$$\boldsymbol{E}_{n_3,n_4} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \hat{\boldsymbol{L}}_{n_3,n_4} \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

$\hat{\boldsymbol{L}}_{n_1,n_4}$, $\hat{\boldsymbol{L}}_{n_2,n_4}$ et $\hat{\boldsymbol{L}}_{n_3,n_4}$ sont respectivement les matrices des pré-produits vectoriels définies par les composantes des vecteurs $\overrightarrow{C_1O_n}$, $\overrightarrow{C_2O_n}$ et $\overrightarrow{C_3O_n}$ (voir paragraphe (2.3.2.6) pour la définition des points).

3.2.5.4 Assemblage de l'ensemble des relations de dépendance linéaire

Les 108 relations de dépendance linéaire sont assemblées de la façon suivante :

$$^{R_b}\boldsymbol{A}_T \; ^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T = \boldsymbol{0}_{108,1} \tag{3.76}$$

$^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T$ est le vecteur défini par l'expression (3.57), et $^{R_b}\boldsymbol{A}_T$, la matrice regroupant toutes les relations de dépendance linéaire. Cette matrice est définie par :

$$^{R_b}\boldsymbol{A}_T = \left[\begin{array}{c|c|c|cccc} \overset{c1_1\cdots c1_{12}}{^{R_b}\boldsymbol{A}_1} & \overset{c2_1\cdots c2_{12}}{\boldsymbol{0}_{25,72}} & \overset{c3_1\cdots c3_{12}}{\boldsymbol{0}_{25,72}} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \overset{n_1\cdots n_4}{\boldsymbol{0}_{25,6}} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\ \boldsymbol{0}_{25,72} & {^{R_b}\boldsymbol{A}_2} & \boldsymbol{0}_{25,72} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\ \boldsymbol{0}_{25,72} & \boldsymbol{0}_{25,72} & {^{R_b}\boldsymbol{A}_3} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\ \hline \boldsymbol{0}_{5,60}\ {}_1\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,72} & \boldsymbol{0}_{5,72} & -{}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,72} & \boldsymbol{0}_{5,60}\ {}_2\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,72} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_2\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,72} & \boldsymbol{0}_{5,72} & \boldsymbol{0}_{5,60}\ {}_3\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_3\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \hline \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E}_{37,40} \\ \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E}_{38,40} \\ \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,72} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{39,40} \end{array}\right]_{(108\times240)} \tag{3.77}$$

Elle fait apparaître les trois blocs horizontaux suivant :

- Le premier bloc regroupe toutes les relations de dépendance linéaire spécifiques à la chaîne cinématique i, sauf celles relatives à la liaison rotoïde entre le parallélogramme et la nacelle (Figure 3.10). L'ensemble de ces relations de dépendance linéaire permet de définir la matrice $^{R_b}\boldsymbol{A}_i$, qui fait apparaître les 25 relations prises en compte ainsi que les 12 nœuds de la chaîne cinématique considérée. Cette matrice est exprimée de la façon suivante :

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix}
{}^{ci_1}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_2}{}_i\boldsymbol{B}_1 & {}^{ci_3}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_4}-{}_i\boldsymbol{B}_1 & {}^{ci_5}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_6}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_7}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_8}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_9}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_{10}}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_{11}}\boldsymbol{0}_{5,6} & {}^{ci_{12}}\boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2
\end{bmatrix}_{(25\times 72)} \qquad (3.78)
$$

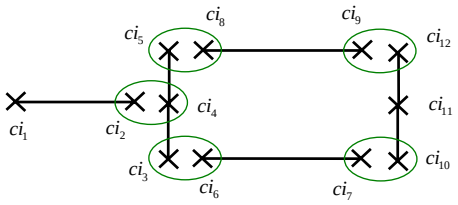


Figure 3.10 – Relations de dépendance linéaire prise en compte dans la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_i$

- Le second bloc regroupe les relations de dépendance linéaire spécifiques aux liaisons rotoïdes entre les parallélogrammes et la nacelle.
- Le dernier bloc regroupe les relations de dépendance linéaire de type mouvement de corps rigide associées aux éléments de la nacelle.

3.2.6 Prise en compte des conditions aux limites

Cette étude sur le comportement élastique de la structure Delta, est une étude réalisée en statique pour une configuration donnée de la structure. De ce fait, pour la configuration étudiée, toutes les chaînes cinématiques sont supposées encastrées sur la base au niveau des nœuds $c1_1$, $c2_1$ et $c3_1$ (Figure 3.7). La prise en compte des conditions aux limites s'effectue donc simplement, en supprimant dans la matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_T$ les six lignes et colonnes correspondant à ces nœuds, définissant ainsi la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_T^*$:

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{K}_T^* = \begin{bmatrix}
{}^{c1_2\cdots c1_{12}}{}^{R_b}_1\boldsymbol{K}_c^* & {}^{c2_2\cdots c2_{12}}\boldsymbol{0}_{72} & {}^{c3_2\cdots c3_{12}}\boldsymbol{0}_{72} & {}^{n_1\cdots n_4}\boldsymbol{0}_{72,24} \\
\boldsymbol{0}_{72} & {}^{R_b}_2\boldsymbol{K}_c^* & \boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72,24} \\
\boldsymbol{0}_{72} & \boldsymbol{0}_{72} & {}^{R_b}_3\boldsymbol{K}_c^* & \boldsymbol{0}_{72,24} \\
\boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24,72} & \boldsymbol{0}_{24}
\end{bmatrix}_{(222\times 222)} \qquad (3.79)
$$

La matrice ${}^{R_b}_i\boldsymbol{K}_c^*$ est la matrice de rigidité de la chaîne cinématique i qui intègre les conditions aux limites. Pour cette matrice, la prise en compte des conditions aux limites revient à supprimer la ligne et la colonne relatives au nœud ci_1. Cette matrice est donc définie de la façon suivante :

$$
{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^* = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} ci_2 & ci_3 & ci_4 & ci_5 & ci_6 & ci_7 & ci_8 & ci_9 & ci_{10} & ci_{11} & ci_{12} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^1_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^3_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{12} \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^2_{22}
\end{array}\right]_{(66\times 66)}
\end{array}
\tag{3.80}
$$

La prise en compte des conditions aux limites au niveau des vecteurs des forces et des déplacements nodaux s'effectue en supprimant les éléments correspondant aux nœuds $c1_1$, $c2_1$ et $c3_1$. Ceci permet de définir les vecteurs de forces ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_T^*$ et déplacements nodaux ${}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_T^*$ qui intègrent effectivement ces conditions :

$$
\begin{aligned}
{}^{R_b}\boldsymbol{F}_T^* = \Big[& {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c1_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c1_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c2_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c2_{12}} \\
& {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c3_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{c3_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \Big]^T_{(222,1)}
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_T^* = \Big[& {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c1_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c1_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c2_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c2_{12}} \\
& {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c3_2} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{c3_{12}} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{n_1} \quad \cdots \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\Delta X}_{n_4} \Big]^T_{(222,1)}
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

La prise en compte des conditions aux limites au niveau de la matrice des relations de dépendance linéaire s'effectue en supprimant, dans la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_T$ définie par l'expression (3.77), les colonnes correspondant aux nœuds $c1_1$, $c2_1$ et $c3_1$. Ceci permet de définir la nouvelle matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_T^*$:

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{A}_T^* = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} \multicolumn{3}{c}{c1_2\cdots c1_{12}} & \multicolumn{3}{c}{c2_2\cdots c2_{12}} & \multicolumn{3}{c}{c3_2\cdots c3_{12}} & \multicolumn{4}{c}{n_1\cdots n_4} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{3}{c}{{}^{R_b}\boldsymbol{A}_1^*} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \multicolumn{3}{c}{{}^{R_b}\boldsymbol{A}_2^*} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{25,66}} & \multicolumn{3}{c}{{}^{R_b}\boldsymbol{A}_3^*} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} & \boldsymbol{0}_{25,6} \\
\hline
\boldsymbol{0}_{5,54} & {}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,66} & & & \boldsymbol{0}_{5,66} & & & -{}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,66} & & & \boldsymbol{0}_{5,54} & {}_2\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,66} & & & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_2\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\boldsymbol{0}_{5,66} & & & \boldsymbol{0}_{5,66} & & & \boldsymbol{0}_{5,54} & {}_3\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_3\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E}_{37,40} \\
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E}_{38,40} \\
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{0}_{6,66}} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{0}_{6,6} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{39,40}
\end{array}\right]_{(108\times 222)}
\end{array}
\tag{3.83}
$$

Les matrices ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_i^*$ regroupent toutes les relations de dépendance linéaire spécifiques à la chaine cinématique i, sauf celles relatives à la liaison rotoïde entre le parallélogramme et la nacelle. Ces matrices ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_i^*$, qui font apparaître 25 relations et 11 nœuds, sont exprimées de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_i^* = \begin{bmatrix} {}^{ci_2} & {}^{ci_3} & {}^{ci_4} & {}^{ci_5} & {}^{ci_6} & {}^{ci_7} & {}^{ci_8} & {}^{ci_9} & {}^{ci_{10}} & {}^{ci_{11}} & {}^{ci_{12}} \\ {}_i\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} \\ \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & {}_i\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}_{5,6} & \boldsymbol{0}_{5,6} & -{}_i\boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}_{(25\times 66)} \tag{3.84} $$

La prise en compte des conditions aux limites permet donc de définir une nouvelle relation effort/déplacement, ainsi qu'un nouvel ensemble de relations de dépendance linéaire. Ces nouvelles relations sont formulées de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_T^* = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_T^* \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T^* \tag{3.85} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T^* \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T^* = \boldsymbol{0}_{108,1} \tag{3.86} $$

3.2.6.1 Ecriture du système d'équations global

L'ensemble des déplacements solutions ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T^*$ vérifie la relation effort/déplacement définie par l'expression (3.85), sous les contraintes exprimées par les relations de dépendance linéaire données par la relation (3.86).
L'étude énergétique réalisée au paragraphe (3.1.7) a permis de montrer que les déplacements élastiques solutions de ce problème sont identiques aux déplacements solutions de l'équation suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_G \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_G \tag{3.87} $$

où :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_T^* & {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T^{*T} \\ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T^* & \boldsymbol{0}_{108} \end{bmatrix}_{(330,330)} \tag{3.88} $$

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T^* & \boldsymbol{\lambda}_{108} \end{bmatrix}^T_{(330,1)} \tag{3.89} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_T^* & \boldsymbol{0}_{108,1} \end{bmatrix}^T_{(330,1)} \tag{3.90} $$

et où $\boldsymbol{\lambda}_{108}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux 108 relations de dépendance linéaire.

3.2.7 Validation du modèle

La validation du modèle de déformations élastiques proposé pour la structure Delta sous l'hypothèse que ses liaisons passives sont parfaites, est réalisée en deux temps. Dans un premier temps, les résultats obtenus par la mise en œuvre de ce modèle sont comparés avec ceux obtenus via un modèle réalisé sur un code éléments finis. Dans un second temps, des validations expérimentales sont réalisées sur la structure réelle du Delta afin de valider le modèle analytique proposé.

3.2.7.1 Comparaison à un code éléments finis

Un modèle développé à partir du code éléments finis *CASTEM*®, est utilisé pour simuler le comportement élastique réel de la structure. Tous les éléments de la structure sont modélisés par des poutres. L'hypothèse faite selon laquelle la nacelle est considérée comme infiniment rigide est satisfaite numériquement, en affectant aux poutres utilisées pour la modéliser, un module de Young 10^7 fois supérieur à celui de l'acier. Les résultats obtenus via le modèle programmé sous le logiciel *CASTEM*® sont alors comparés à ceux obtenus grâce au modèle analytique de la structure Delta pour laquelle des liaisons passives sont supposées parfaites.
A titre d'exemple, pour la configuration articulaire suivante : $\left[\theta_1 = 15° \quad \theta_2 = 45° \quad \theta_3 = 75°\right]$, l'effort ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} = \left[100\ N \quad 50\ N \quad -200\ N \quad 3\ Nm \quad -5\ Nm \quad 9\ Nm\right]^T$ est appliqué au niveau du nœud n_4, qui correspond au centre de la nacelle. Les résultats de cette simulation donnent les déplacements élastiques en translation et en rotation du repère affecté au nœud n_4 dus à cette sollicitation extérieure. Ces résultats sont donnés dans le Tableau 3.3 , ainsi qu'à la Figure 3.11.

	Déplacements					
	$dP_{n_4}\ (\mu m)$			$\delta_{n_4}\ (10^{-6} rad)$		
	u_{n_4}	v_{n_4}	w_{n_4}	$\theta_{x_{n_4}}$	$\theta_{y_{n_4}}$	$\theta_{z_{n_4}}$
Modèle analytique	-73,1	-418,4	-875,4	367,7	-1369,7	286,5
Modèle *CASTEM*®	-73,1	-418,4	-875,5	367,7	-1369,8	286,5

Tableau 3.3 – Comparaison entre le modèle analytique et le modèle *CASTEM*®

Ces résultats font apparaître une parfaite corrélation entre les deux modèles. D'autres simulations, effectuées pour d'autres couples de configurations et de chargements, ont permis de confirmer cette parfaite corrélation. Ces résultats issus de la comparaison entre le modèle analytique proposé et un modèle éléments finis, montrent la cohérence du modèle proposé.

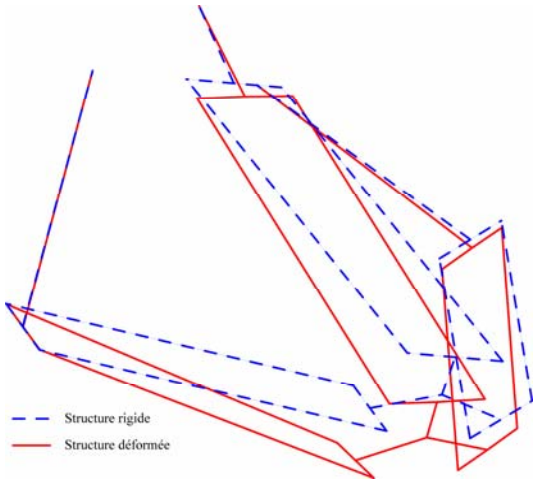


Figure 3.11 – Déformation de la structure

3.2.7.2 Validations expérimentales

Afin de poursuivre l'évaluation du modèle analytique proposé, des validations expérimentales sont réalisées. Pour un ensemble de configurations et de chargements donnés de la structure, ces validations expérimentales consistent en la comparaison entre, les résultats donnés par le modèle analytique, et les mesures des déformations élastiques réelles de la structure.

3.2.7.2.1 Dispositif de mesure

Afin de réaliser les mesures de déformations de la structure, un dispositif de mesure à été développé. Il est constitué de trois sphères de référence mises en position de façon isostatique sur un plateau (système ball-plate), et de six comparateurs embarqués sur la nacelle, qui vont permettre de mesurer les déplacements en translation et en rotation de la nacelle résultant de la déformation élastique de la structure due à l'application d'un torseur d'efforts extérieurs. Une représentation de ce dispositif de mesure est donnée à la Figure 3.12.
Un dispositif de mesure similaire est présenté dans [Mooring 1991].
Pour une configuration donnée du robot, l'expérimentation est réalisée de la façon suivante :

- mesure des valeurs indiquées par les six comparateurs sans chargement de la structure ;
- mesure de ces six valeurs, à la suite de l'application d'une force suivant l'axe de la gravité due à la dépose sur la nacelle d'un objet de masse M connue (Figure 3.13).

L'écart entres ces mesures permet de calculer les déplacements élastiques réels en translation et rotation de la nacelle résultant de ce chargement.
Les comparateurs numériques utilisés possèdent une résolution de $1\,\mu m$ et une erreur de justesse totale inférieur à $5\,\mu m$. L'incertitude globale de la mesure, est un paramètre très difficile à définir. Toutefois, avec le matériel utilisé cette incertitude est minimisée, et il est possible de l'estimer inférieur à $30\,\mu m$.

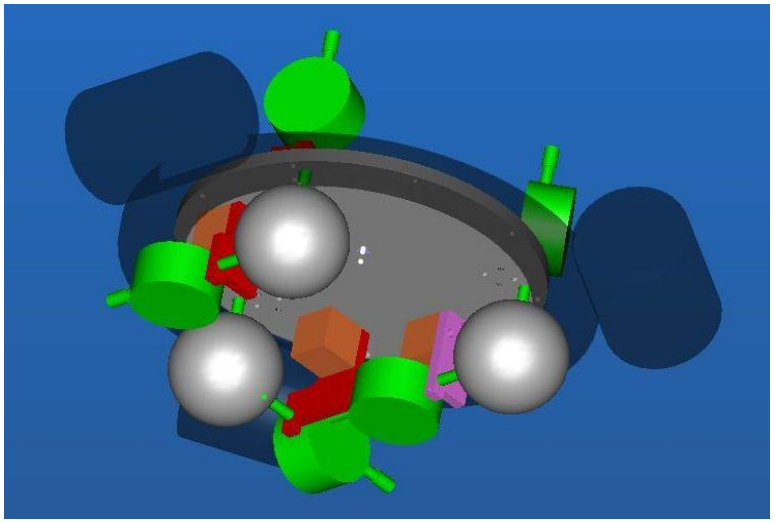


Figure 3.12 – Dispositif de mesure



Figure 3.13 – Mesure expérimentale des déformations élastiques de la structure Delta.

3.2.7.2.2 Résultats des validations expérimentales

Les validations expérimentales sont effectuées pour deux séries de mesures différentes :

- la première série, avec une charge de $19,5\,kg$ disposée sur la nacelle, est réalisée avec neuf points de mesure également répartis le long de la droite d'équation, dans le repère de base, $y=-x$ située dans le plan $z=1,3131\,m$, pour des valeurs de x comprises entre $-0,200$ et $0,200\,m$. Les résultats de cette série de mesure sont donnés à la Figure 3.14.
- la seconde série est réalisée avec une charge de $38,2\,kg$ et avec 10 points de mesure également répartis le long de la droite d'équation $y=\frac{1}{3}x$ située dans le plan $z=-1,401\,m$ pour des valeurs de x comprise entre $-0,270$ et $0,270\,m$. Les résultats de cette seconde série de mesure sont donnés à Figure 3.15.

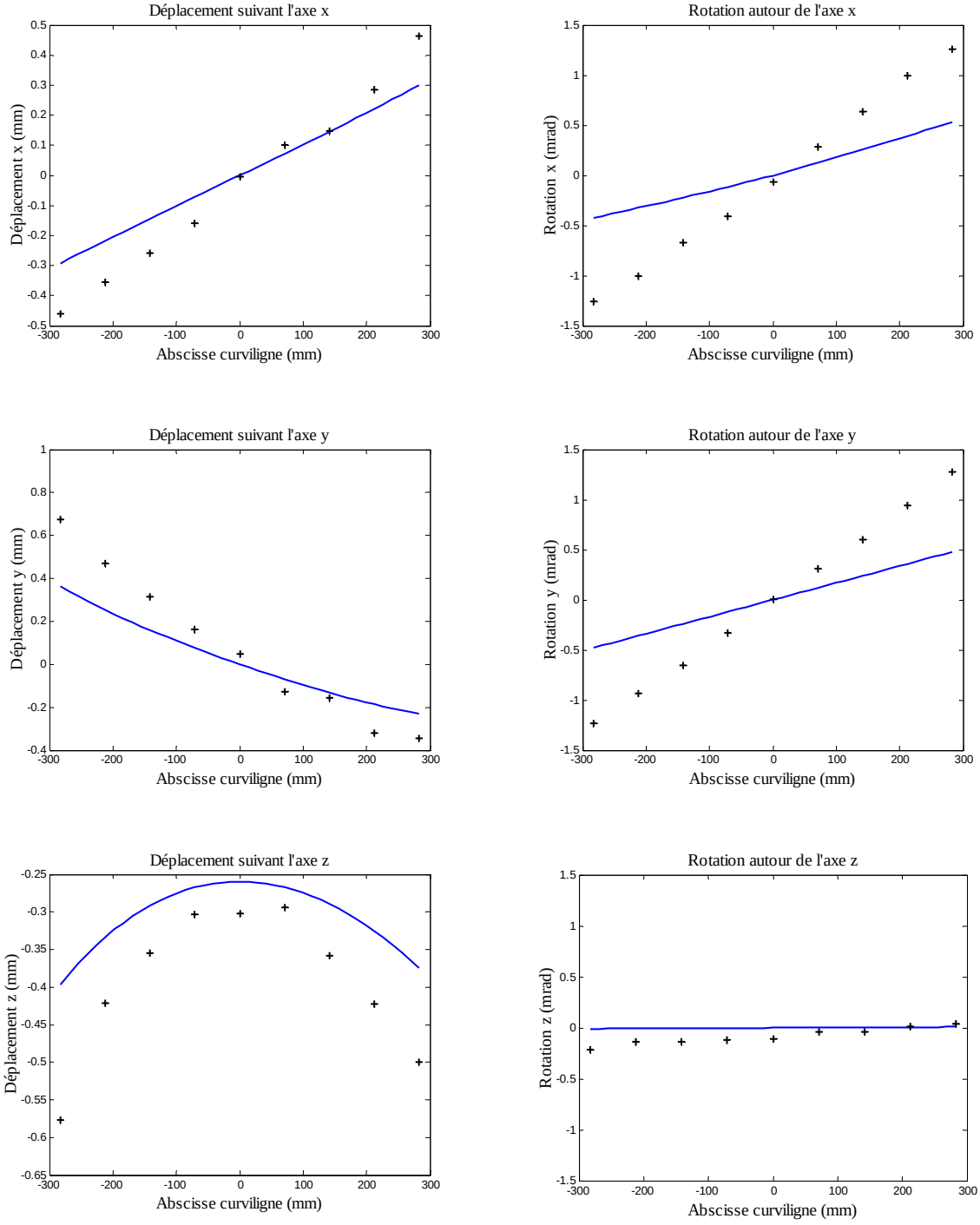


Figure 3.14 – Modèle avec liaisons passives parfaites.
Charge de $19,5\,kg$

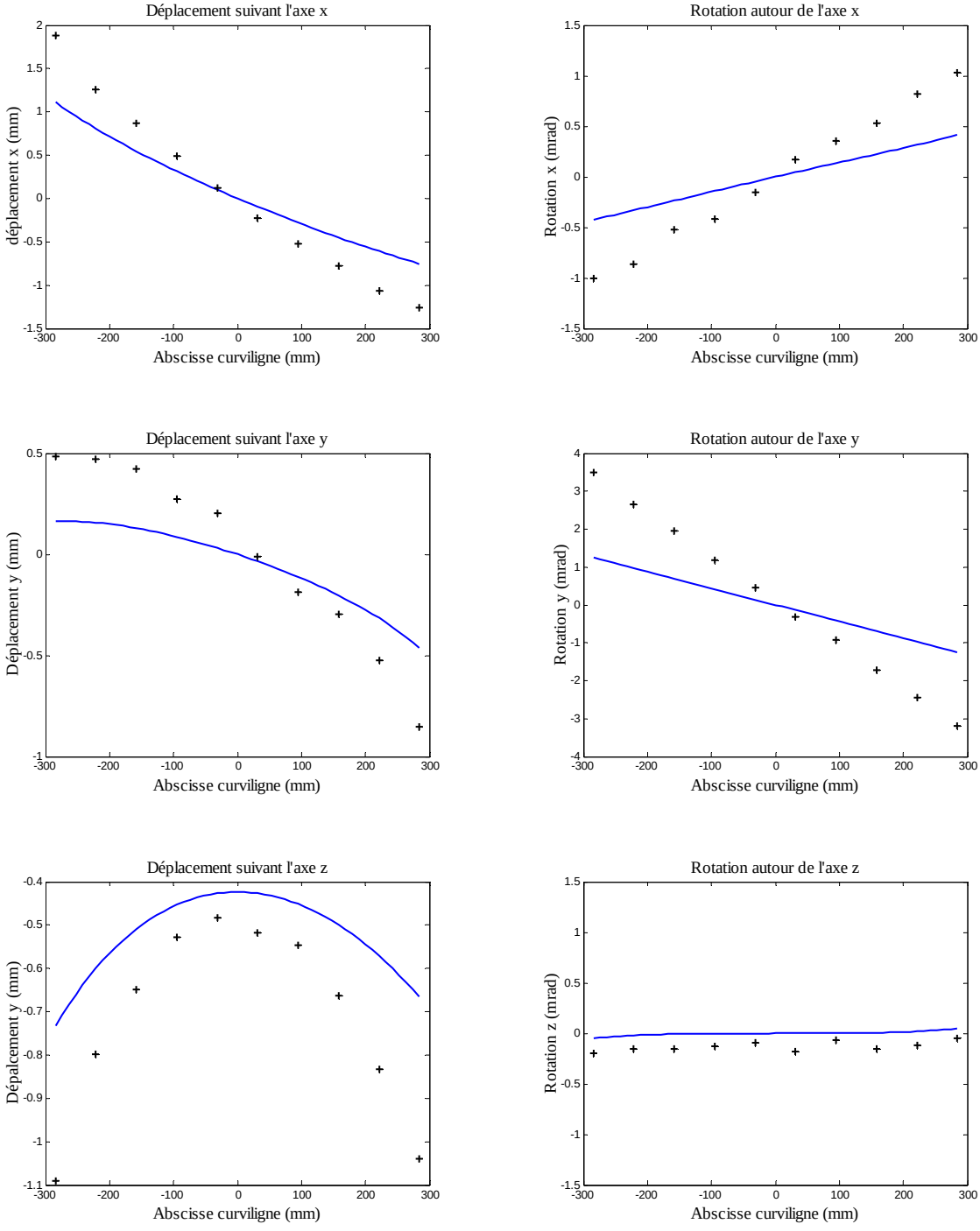


Figure 3.15 – Modèle avec liaisons passives parfaites.
Charge de $38,2\ kg$

Ces deux séries de mesures font apparaître que le modèle de raideur développé sur la base de liaisons passives parfaites, ne permet de fournir qu'un ordre de grandeur de la valeur des déplacements élastiques en translation et rotation de la nacelle lorsque celle-ci est soumise à un effort extérieur.
Les mesures concernant les rotations de la nacelle autour de l'axe z_b sont plus sensibles aux conditions expérimentales. En effet, avec un ordre de grandeur inférieur à $2\times10^{-4} rad$, les amplitudes des rotations mesurées autour de cet axe sont très faibles.
Il faut aussi remarquer que les déplacements en translation et rotation calculés par le modèle sont toujours plus faibles que les déplacements réels de la structure. Ceci signifie que la raideur de la structure évaluée par l'intermédiaire du modèle proposé est trop importante relativement à celle de la structure réelle.

3.3 Modélisation élastique de la structure Delta intégrant une rigidité des liaisons passives

Dans la précédente étude, le mouvement résultant d'une liaison passive est géré par une relation de dépendance linéaire qui n'introduit aucun paramètre de rigidité. Les liaisons passives possèdent donc une rigidité infinie. Ceci tend à rendre le modèle trop rigide vis-à-vis du comportement réel de la structure. Ainsi, afin de rendre le modèle de déformation élastique développé plus compliant, la prise en compte d'une rigidité au niveau des liaisons passives est proposée.

3.3.1 Modélisation de la rigidité d'une liaison passive de type rotoïde

Dans [Yoon 2004] une matrice de compliance, correspondant à une matrice diagonale de dimension 6×6, est introduite afin de modéliser le comportement d'un roulement. Suivant l'axe du roulement, cette matrice fait apparaitre un paramètre de compliance qui tend vers l'infini. La valeur de ce paramètre est fixé numériquement à $10^{8} rad/Nm$ de façon à rendre le calcul numérique stable. L'étude est ensuite étendue à une liaison rotoïde réalisée à partir de deux roulements. Cette nouvelle étude fait apparaitre une matrice de compliance ayant la même forme que celle initialement introduite.
Sur la base de ces travaux, la rigidité d'une liaison rotoïde est modélisée par une matrice de dimension 12×12 de façon à pouvoir être directement intégrée au formalisme de type élément fini précédemment utilisé.
Le repère $R_{u,v}$ associé à la liaison rotoïde définie entre les nœuds u et v est défini de telle façon que l'axe ${}^{R_{u,v}}\boldsymbol{x}$, soit suivant l'axe de la liaison (Figure 3.16). La matrice de rigidité ainsi définie, exprimée dans le repère local $R_{u,v}$ a la forme suivante :

$$ {}^{R_{u,v}}\boldsymbol{K}^{u,v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{diag}\left[K_a^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_{ar}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\right] & -\boldsymbol{diag}\left[K_a^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_{ar}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\right] \\ -\boldsymbol{diag}\left[K_a^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_{ar}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\right] & \boldsymbol{diag}\left[K_a^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_r^{u,v}\ K_{ar}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\ K_{rr}^{u,v}\right] \end{bmatrix}_{(12\times12)} \qquad (3.91) $$

Les paramètres $K_a^{u,v}$ et $K_r^{u,v}$ représentent les rigidités axiale et radiale en translation, alors que les paramètres $K_{ar}^{u,v}$ et $K_{rr}^{u,v}$ représentent les rigidités axiale et radiale en rotation.
Pour une liaison rotoïde passive, le paramètre $K_{ar}^{i,j}$ de rigidité axiale en rotation tend vers zéro. Le rapport entre le plus grand paramètre de raideur de la structure et $K_{ar}^{i,j}$, doit avoir un ordre de grandeur

de 10^{15}, de telle sorte que le paramètre $K_{ar}^{i,j}$ ne soit pas numériquement nul. Sa valeur sera donc fixée en fonction de celle des autres paramètres de façon à ce que le calcul soit stable.
La matrice ${}^{R_{i,j}}\boldsymbol{K}^{i,j}$, exprimée dans le repère local de la liaison, peut être obtenue, à l'aide de matrices de passage dans le repère de base, définissant ainsi la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}^{i,j}$.

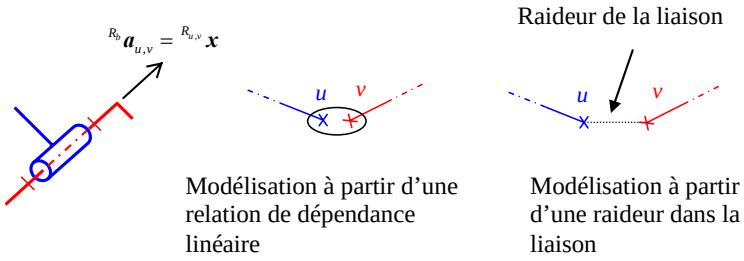


Figure 3.16 – Rigidité d'une liaison rotoïde passive

3.3.2 Etude de la chaîne cinématique *i*

L'étude du comportement élastique de la structure Delta intégrant une raideur dans les liaisons passives, peut être scindée en deux, de la façon suivante :

- dans un premier temps, l'étude du comportement élastique d'une chaîne cinématique est réalisée ;
- puis, dans un second temps, toutes les chaînes cinématiques sont assemblées afin d'étudier la structure complète.

En procédant ainsi, les différentes matrices manipulées sont de taille plus réduite que celles manipulées dans le cadre de l'étude précédente pour lequel l'assemblage de toute la structure se faisait en une seule phase. Le temps de calcul s'en trouve donc réduit de façon importante.
Il faut noter que dans le cadre de l'étude de la structure modélisée sous l'hypothèse de liaisons passives parfaites, il n'est pas possible d'étudier une chaîne cinématique indépendamment du reste de la structure. En effet, des mobilités non régies par des relations effort/déplacement subsistent suivant les axes de certaines liaisons (Figure 3.17). La matrice de rigidité de cette sous-structure ainsi définie, demeure singulière.

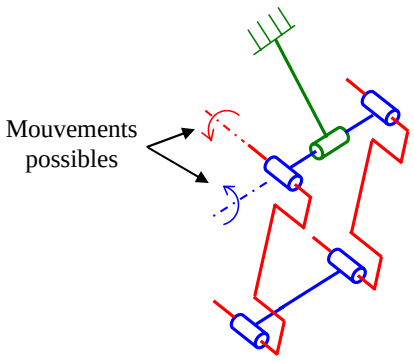


Figure 3.17 – Mobilité d'une chaîne cinématique

3.3.2.1 Modélisation de la chaîne cinématique i

La modélisation de la chaîne cinématique i est réalisée à partir de son modèle géométrique nominal. Toutes les liaisons rotoïdes passives identiques sont supposées avoir les mêmes paramètres de rigidité, ce qui implique que pour un type de liaison donné, les précontraintes sont identiques. Pour la chaîne cinématique étudiée, cette simplification permet de ne définir que les deux matrices de rigidité ${}^{R_2}\boldsymbol{K}^{r1}$ et ${}^{R_4}\boldsymbol{K}^{r2}$.

La matrice de rigidité ${}^{R_2}\boldsymbol{K}^{r1}$, est exprimée dans le repère local des liaisons rotoïdes définies entre le parallélogramme et respectivement le bras et la nacelle. La matrice de passage permettant de décrire la situation du repère local relativement au repère de base est identique à celle définie par l'expression (3.45). La matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}$ des liaisons rotoïdes de la chaîne cinématique i entre le parallélogramme et le bras, et entre le parallélogramme et la nacelle, exprimée dans le repère de base, est définie par :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1} = \left({}_{i}\boldsymbol{P}^{2}\right)^{-1} {}^{R_2}\boldsymbol{K}^{r1} {}_{i}\boldsymbol{P}^{2} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{12} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.92} $$

La matrice de rigidité ${}^{R_4}\boldsymbol{K}^{r2}$ est exprimée dans le repère local des liaisons rotoïdes définies entre les petits et les grands côtés du parallélogramme. La matrice de passage permettant de décrire la situation du repère local relativement au repère de base, est définie par :

$$ {}_{i}\boldsymbol{P}^{4} = \begin{bmatrix} \left({}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4}\right)^{T} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4}\right)^{T} & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4}\right)^{T} & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 & \left({}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4}\right)^{T} \end{bmatrix}_{(12\times12)} \tag{3.93} $$

La matrice de rotation ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4}$ est définie à partir des expressions (3.47), (3.49) et (3.50) de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{R}^{4} = \begin{bmatrix} \left({}_{i}\boldsymbol{y}_3\right)_{11} & \left({}_{i}\boldsymbol{z}_3\right)_{11} & \left({}_{i}\boldsymbol{x}_3\right)_{11} \\ \left({}_{i}\boldsymbol{y}_3\right)_{21} & \left({}_{i}\boldsymbol{z}_3\right)_{21} & \left({}_{i}\boldsymbol{x}_3\right)_{21} \\ \left({}_{i}\boldsymbol{y}_3\right)_{31} & \left({}_{i}\boldsymbol{z}_3\right)_{31} & \left({}_{i}\boldsymbol{x}_3\right)_{31} \end{bmatrix} \tag{3.94} $$

La matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}$ des liaisons rotoïdes de la chaîne cinématique i entre les petits et les grands côtés du parallélogramme exprimée dans le repère de base est définie par :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2} = \left({}_{i}\boldsymbol{P}^{4}\right)^{-1} {}^{R_2}\boldsymbol{K}^{r2} {}_{i}\boldsymbol{P}^{4} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{12} \\ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.95} $$

La modélisation ainsi définie est représentée à la Figure 3.18. Comparativement à la modélisation du paragraphe (3.2.1) donnée Figure 3.6, cette nouvelle modélisation fait apparaître une inversion entre les nœuds ci_{11} et ci_{12}. En effet, l'étude de la chaîne cinématique i qui prend en compte une raideur dans les liaisons passives ne fait pas apparaître de relations de dépendance linéaire. De ce fait, la relation effort/déplacement fournit directement le vecteur regroupant l'ensemble des déplacements solutions. Dans le cadre de la création de la sous-structure équivalente à la chaîne cinématique étudiée,

cette inversion dans la numérotation des nœuds permet d'utiliser directement la matrice de rigidité de la chaîne cinématique, sans avoir recourt à la définition d'une matrice de permutation.

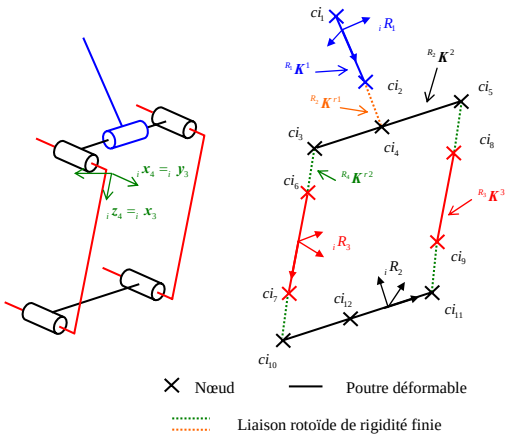


Figure 3.18 – Modélisation d'une chaîne cinématique intégrant la rigidité des liaisons passives

3.3.2.2 Assemblage des matrices de rigidité et prise en compte des conditions aux limites

Pour la chaîne cinématique i, la matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{*}_{c}$, qui intègre directement les conditions aux limites, est définie à partir de la modélisation prenant en compte la rigidité des liaisons rotoïdes passives définie à la Figure 3.18. L'étude est réalisée en statique pour une configuration donnée de la structure. De ce fait, pour la configuration étudiée, la chaîne cinématique i est supposée encastrée sur la base au niveau du nœud ci_1. Les six lignes et colonnes correspondant à ce nœud ci_1 ne sont pas prises en compte dans la matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{*}_{c}$. Cette matrice de rigidité est définie de la façon suivante :

$$
{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{*}_{c} = \begin{bmatrix}
 & ci_2 & ci_3 & ci_4 & ci_5 & ci_6 & ci_7 \\
ci_2 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{1}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{11} & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_3 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{11}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{12} & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{12} & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_4 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r1}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_5 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{2}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{11} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{21} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{3}_{11} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{3}_{12} \\
ci_7 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{3}_{21} & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{3}_{22}+{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{11} \\
ci_8 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{21} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_9 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_{10} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{r2}_{21} \\
ci_{11} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
ci_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6
\end{bmatrix}_{(66\times66)}
$$

(3.96)

La matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^*$ ainsi définie intègre l'inversion dans la numérotation des nœuds ci_{11} et ci_{12}.

Les vecteurs forces et déplacements nodaux intégrant les conditions aux limites sont définis par:

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_c^* = \left[\begin{array}{ccc} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_2} & \cdots & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_{12}} \end{array} \right]^T_{(66,1)} \tag{3.97} $$

$$ {}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{X}_c^* = \left[\begin{array}{ccc} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_2} & \cdots & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} \end{array} \right]^T_{(66,1)} \tag{3.98} $$

3.3.2.3 Ecriture du système d'équations

La modélisation de la chaîne cinématique, telle qu'elle est réalisée dans le cadre du paragraphe (3.3), ne fait apparaître aucune relation de dépendance linéaire. Chaque liaison rotoïde passive est modélisée par une matrice de rigidité qui permet de décrire la relation effort/déplacement relative aux nœuds de la liaison.

L'assemblage de toutes les matrices de rigidité a permis de définir la matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^*$ de l'ensemble de la chaîne cinématique étudiée. Cette dernière matrice prend en compte les conditions aux limites, elle est symétrique définie positive [Imbert 1979], et donc inversible.

Ainsi, l'ensemble des déplacements solutions ${}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$, vérifie la relation effort/déplacement suivante :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_c^* = {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^* \, {}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{X}_c^* \tag{3.99} $$

où : ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_c^*$, ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^*$ et ${}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{X}_c^*$ sont respectivement définis par les expressions (3.97), (3.96) et (3.98).

3.3.2.4 Création d'une sous-structure équivalente à la chaîne cinématique

Le nœud ci_{12} permet de lier la chaîne cinématique étudiée à la nacelle de la structure (Figure 3.18). Afin d'exprimer la rigidité équivalente ainsi que l'effort nodal équivalent au nœud ci_{12}, les partitions suivantes sont définies :

$$ {}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{X}_c^* = \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_R} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} \end{array} \right]^T \tag{3.100} $$

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_c^* = \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_R} & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_{12}} \end{array} \right]^T \tag{3.101} $$

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_c^* = \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_{12}} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_{12}} \end{array} \right]_{(66\times66)} \tag{3.102} $$

L'indice (R) regroupe les 60 composantes correspondant aux 10 nœuds désignés par $\left(ci_2 \;\; \cdots \;\; ci_{11} \right)$.

Ces partitions permettent de réécrire le système d'équation (3.99) de la façon suivante :

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_{12}} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_{12}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_R} \\ \hline {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_R} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_{12}} \end{array} \right] \tag{3.103} $$

En développant le système, il vient :

$$ \left\{ \begin{array}{l} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_R} \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_R} + {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_{12}} \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_R} \\ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_R} \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_R} + {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_{12}} \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_{12}} \end{array} \right. \tag{3.104} $$

A partir de ce système, il est possible d'exprimer le déplacement nodal ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}}$ du nœud ci_{12} en fonction des composantes de la matrice de rigidité ${}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}^{*}_{c}$, ainsi que des composantes du vecteur ${}^{R_b}_{i}\Delta\boldsymbol{F}^{*}_{c}$. La solution de ce système d'équations est donnée par :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{ci_{12}} = {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_{eq}^{-1}\,{}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_{eq} \tag{3.105} $$

où :

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{F}_{eq} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_{12}} - {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_R}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_R}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_R} \tag{3.106} $$

$$ {}^{R_b}_{i}\boldsymbol{K}_{eq} = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_{12}} - {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_{12},ci_R}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_R}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{ci_R,ci_{12}} \tag{3.107} $$

La sous-structure de la chaîne cinématique étudiée est illustrée à la Figure 3.19.

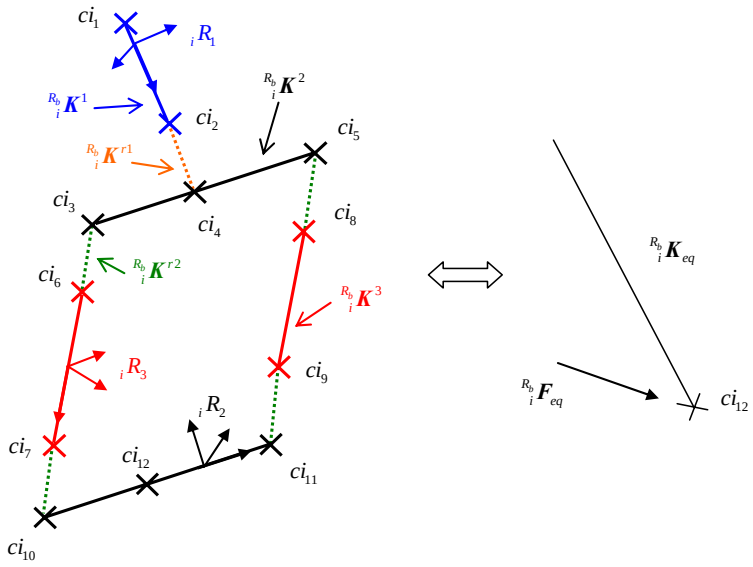


Figure 3.19 – Sous-structure équivalente à la chaîne cinématique i

3.3.3 Etude de la structure complète

3.3.3.1 Modélisation de la structure complète

Selon ce qui précède, l'étude des trois chaînes cinématiques permet donc de définir trois sous-structures équivalentes dont l'assemblage avec la nacelle aboutit à la modélisation complète du comportement élastique de la structure Delta. Cette modélisation complète, qui intègre les inversions entre les nœuds ci_{11} et ci_{12} (voir paragraphe (3.3.2.1)), est illustrée par la Figure 3.20.

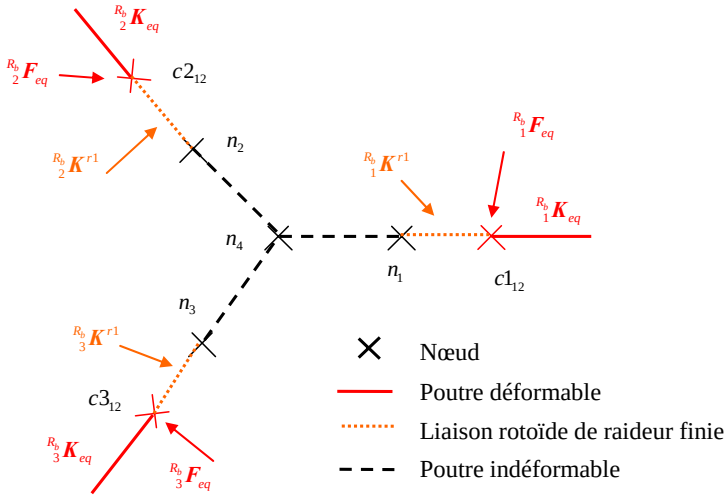


Figure 3.20 – Modélisation de la structure complète du Delta

3.3.3.2 Assemblage des matrices de rigidité

Sur la base de la modélisation décrite à la Figure 3.20, la matrice de rigidité de la structure complète est donnée par la relation :

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{K}_T = \begin{bmatrix}
{}^{c1_{12}} & {}^{c2_{12}} & {}^{c3_{12}} & {}^{n_1} & {}^{n_2} & {}^{n_3} & {}^{n_4} \\
{}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}_{eq} + {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{11} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{2}\boldsymbol{K}_{eq} + {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{11} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{12} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{3}\boldsymbol{K}_{eq} + {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{11} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{12} & \boldsymbol{0}_6 \\
{}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{21} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{21} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{22} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{21} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{K}^{r1}_{22} & \boldsymbol{0}_6 \\
\boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6
\end{bmatrix}_{(42\times42)} \tag{3.108}
$$

Les vecteurs de force et de déplacement nodaux sont définis de la façon suivante :

$$
{}^{R_b}\boldsymbol{F}_T = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{1}\boldsymbol{F}_{eq} & {}^{R_b}_{2}\boldsymbol{F}_{eq} & {}^{R_b}_{3}\boldsymbol{F}_{eq} & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_1} & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_2} & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_3} & {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \end{bmatrix}^T_{(42,1)} \tag{3.109}
$$

$$
{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c1_{12}} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c2_{12}} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{c3_{12}} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_1} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_2} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_3} & {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \end{bmatrix}^T_{(42,1)} \tag{3.110}
$$

3.3.3.3 Relations de dépendance linéaire

L'étude des relations de dépendance linéaire est identique à celle réalisée au paragraphe (3.2.5.3). En effet, que les liaisons rotoïdes soient considérées comme étant parfaites ou non, les relations de dépendance linéaire de type mouvement de corps rigides de la nacelle sont identiques. Ainsi, la matrice regroupant toutes les relations de dépendance linéaire est définie par :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T = \begin{bmatrix} \overset{c1_{12}}{\boldsymbol{0}_6} & \overset{c2_{12}}{\boldsymbol{0}_6} & \overset{c3_{12}}{\boldsymbol{0}_6} & \overset{n_1}{\boldsymbol{E}} & \overset{n_2}{\boldsymbol{0}_6} & \overset{n_3}{\boldsymbol{0}_6} & \overset{n_4}{\boldsymbol{E}_{n_1,n_4}} \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{E}_{n_2,n_4} \\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}_{n_3,n_4} \end{bmatrix}_{(18\times 42)} \tag{3.111} $$

où, les matrices $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_{n_1,n_4}$, $\boldsymbol{E}_{n_2,n_4}$ et $\boldsymbol{E}_{n_3,n_4}$ sont respectivement définies par les expressions (3.72), (3.73), (3.74) et (3.75).

Les 18 relations de dépendance linéaire sont donc assemblées en une seule relation de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T = \boldsymbol{0}_{18,1} \tag{3.112} $$

3.3.3.4 Ecriture du système d'équations global

L'ensemble des déplacements solutions ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T$ vérifie la relation effort/déplacement ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_T = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_T \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T$, sous les contraintes exprimées par les relations de dépendance linéaire (3.112) ${}^{R_b}\boldsymbol{A}_T \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T = \boldsymbol{0}_{18,1}$.

Les déplacements solutions de ce problème sont identiques aux déplacements solutions de l'équation suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{St} \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{St} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{St} \tag{3.113} $$

où :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{St} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_T & {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T{}^T \\ {}^{R_b}\boldsymbol{A}_T & \boldsymbol{0}_{18} \end{bmatrix}_{(60\times 60)} \tag{3.114} $$

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{St} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_T & \boldsymbol{\lambda}_{18} \end{bmatrix}^T \tag{3.115} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{St} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_T & \boldsymbol{0}_{18,1} \end{bmatrix}^T \tag{3.116} $$

où $\boldsymbol{\lambda}_{18}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux 18 relations de dépendance linéaire.

3.3.3.5 Déplacements solutions et matrice de rigidité de la structure complète du robot Delta

Afin d'exprimer les déplacements solutions au nœud n_4, relatif au centre de la nacelle, la matrice de permutation $\tilde{\boldsymbol{P}}$ est construite de la façon suivante :

$$ \tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{36} & \boldsymbol{0}_{36,18} & \boldsymbol{0}_{36,6} \\ \boldsymbol{0}_{6,36} & \boldsymbol{0}_{6,18} & \boldsymbol{I}_6 \\ \boldsymbol{0}_{18,36} & \boldsymbol{I}_{18} & \boldsymbol{0}_{18,6} \end{bmatrix}_{(60\times 60)} \tag{3.117} $$

Cette matrice de permutation permet de définir les partitions suivantes :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{\tilde{P}} = \tilde{\boldsymbol{P}}^T \, {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{St} = \left[{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_R \;\middle|\; {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \right]^T \tag{3.118} $$

$$ \boldsymbol{F}_{\tilde{P}} = \tilde{\boldsymbol{P}}^T \, {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{St} = \left[{}^{R_b}\boldsymbol{F}_R \;\middle|\; {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \right]^T \tag{3.119} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{\tilde{P}} = \tilde{\boldsymbol{P}}^{T}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{St}\tilde{\boldsymbol{P}} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,n_4} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,n_4} \end{array}\right]_{(60\times 60)} \tag{3.120} $$

où l'indice (R) désigne l'ensemble des 60 composantes sauf les six composantes relatives au nœud n_4 (composantes 37 à 42).

Ces nouvelles partitions permettent de réécrire le système d'équations (3.113) de la façon suivante :

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,n_4} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,R} & {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,n_4} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{R} \\ \hline {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{R} \\ \hline {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \end{array}\right] \tag{3.121} $$

En développant ce système il vient :

$$ \begin{cases} {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,R}\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{R} + {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,n_4}\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{R} \\ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,R}\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{R} + {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,n_4}\,{}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} \end{cases} \tag{3.122} $$

Il est ainsi possible d'exprimer le déplacement nodal ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4}$ du nœud n_4, en fonction des composantes de la matrice de rigidité ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{\tilde{P}}$ et des composantes du vecteur ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_{\tilde{P}}$. La solution de ce système d'équations est donnée par :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq} \tag{3.123} $$

où :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq} = {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} - {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,R}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,R}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{R} \tag{3.124} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq} = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,n_4} - {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{n_4,R}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,R}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{K}_{R,n_4} \tag{3.125} $$

En résumé :

La matrice de rigidité de la structure complète du robot Delta est définie par la matrice ${}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq}$ de dimension (6×6). Cette matrice lie les déplacements du nœud n_4 relatif au centre de la nacelle, au vecteur de force équivalent ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq}$.

3.3.4 Expérimentations

La prise en compte de la rigidité des liaisons passives pour mettre en œuvre la modélisation élastique de la structure Delta, nécessite de connaître la valeur des paramètres de rigidité des différentes liaisons passives. La valeur de ces différents paramètres introduit par l'expression (3.91) n'est pas connue. Par contre, à partir des choix technologiques effectués pour la réalisation de ces liaisons, il est possible de donner une estimation de l'ordre de grandeur de ces paramètres. Sur la base de ces estimations, et afin d'en affiner les valeurs, un étalonnage de ces paramètres peut être effectué.

3.3.4.1 Etalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives

3.3.4.1.1 Choix des paramètres à identifier

La matrice de rigidité des liaisons rotoïdes passives entre les parallélogrammes et les bras d'une part, et entre les parallélogrammes et la nacelle d'autre part (Figure 3.21), exprimée dans le repère local des liaisons est définie par :

$$ {}^{R_2}\boldsymbol{K}^{r1} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r1} & K_r^{r1} & K_r^{r1} & K_{ar}^{r1} & K_{rr}^{r1} & K_{rr}^{r1}\end{array}\right] & -\boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r1} & K_r^{r1} & K_r^{r1} & K_{ar}^{r1} & K_{rr}^{r1} & K_{rr}^{r1}\end{array}\right] \\ \hline -\boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r1} & K_r^{r1} & K_r^{r1} & K_{ar}^{r1} & K_{rr}^{r1} & K_{rr}^{r1}\end{array}\right] & \boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r1} & K_r^{r1} & K_r^{r1} & K_{ar}^{r1} & K_{rr}^{r1} & K_{rr}^{r1}\end{array}\right] \end{array}\right]_{(12\times12)} \tag{3.126} $$

La matrice de rigidité des liaisons rotoïdes passives entre les petits et grands côtés des parallélogrammes (Figure 3.21), exprimée dans le repère local des liaisons est définie par :

$$ {}^{R_4}\boldsymbol{K}^{r2} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r2} & K_r^{r2} & K_r^{r2} & K_{ar}^{r2} & K_{rr}^{r2} & K_{rr}^{r2}\end{array}\right] & -\boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r2} & K_r^{r2} & K_r^{r2} & K_{ar}^{r2} & K_{rr}^{r2} & K_{rr}^{r2}\end{array}\right] \\ \hline -\boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r2} & K_r^{r2} & K_r^{r2} & K_{ar}^{r2} & K_{rr}^{r2} & K_{rr}^{r2}\end{array}\right] & \boldsymbol{diag}\left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r2} & K_r^{r2} & K_r^{r2} & K_{ar}^{r2} & K_{rr}^{r2} & K_{rr}^{r2}\end{array}\right] \end{array}\right]_{(12\times12)} \tag{3.127} $$

Comme cela a été expliqué au paragraphe (3.3.1), les paramètres K_{ar}^{r1} et K_{ar}^{r2} ont des valeurs proches de zéro. Nous considérerons donc que ces paramètres ne sont pas à identifier. Leur valeur numérique est fixée à partir de celle du paramètre de raideur le plus influent de la structure, dont l'ordre de grandeur est de $10^8\ Nrad^{-1}$. Ainsi, de façon à ce que les calculs numériques soient stables, leur valeur sera fixée à :

$$ K_{ar}^{r1} = K_{ar}^{r2} = 10^{-7}\ mN/rad \tag{3.128} $$

L'ensemble des paramètres de rigidité des liaisons rotoïdes passives à identifier sont regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{K}^r$:

$$ \boldsymbol{K}^r = \left[\begin{array}{cccccc} K_a^{r1} & K_r^{r1} & K_{rr}^{r1} & K_a^{r2} & K_r^{r2} & K_{rr}^{r2}\end{array}\right]^T \tag{3.129} $$

Une estimation initiale de la valeur de ces paramètres est donnée par le vecteur ${}_0\boldsymbol{K}^r$:

$$ {}_0\boldsymbol{K}^r = \left[\begin{array}{l} {}_0K_a^{r1} = 10^6\ N/m \\ {}_0K_r^{r1} = 10^7\ N/m \\ {}_0K_{rr}^{r1} = 10^5\ Nm/rad \\ {}_0K_a^{r2} = 10^4\ N/m \\ {}_0K_r^{r2} = 10^6\ N/m \\ {}_0K_{rr}^{r2} = 10^4\ Nm/rad \end{array}\right] \tag{3.130} $$

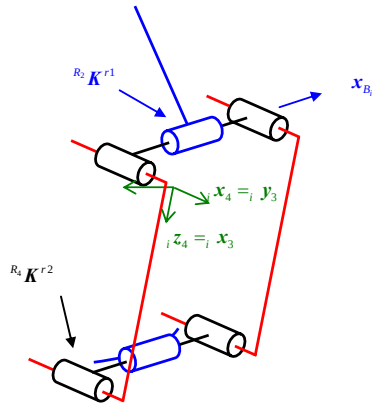


Figure 3.21 – Liaisons rotoïdes passives

3.3.4.1.2 Méthode d'étalonnage des coefficients de rigidité des liaisons rotoïdes passives

L'étude du comportement élastique de la structure Delta réalisée dans le cadre du paragraphe (3.3), permet de définir les déplacements en translation et en rotation du repère affecté au centre de la nacelle. Ces déplacements sont représentés par le vecteur ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4}$, qui est une fonction H_r :

- de la configuration articulaire $\boldsymbol{q}$ de la structure ;
- des sollicitations mécaniques extérieures ${}^{R_b}\boldsymbol{F}$ agissant sur la structure ;
- des six paramètres de rigidité des liaisons rotoïdes passives donnés par le vecteur $\boldsymbol{K}^r$ de l'expression (3.129) ;
- du vecteur des paramètres géométriques nominaux $\boldsymbol{\xi}_{39n}$;
- du vecteur des paramètres mécaniques nominaux, défini par le vecteur $\boldsymbol{\Gamma}_n$.

En considérant l'expression (3.123), cette fonction peut être définie de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = H_r(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}^r, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n) = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq} \tag{3.131}$$

Pour une configuration articulaire $\boldsymbol{q}_k$, et pour des conditions chargement de la structure données par les vecteurs ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_k$, une estimation ${}^{R_b}_{k}\Delta\boldsymbol{X}^e_{n_4}$ du déplacement du centre de la nacelle est fournie par :

$$ {}^{R_b}_{k}\Delta\boldsymbol{X}^e_{n_4} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^e_{n_4} & {}^{R_b}_{k}\boldsymbol{\delta}^e_{n_4} \end{bmatrix}^T = H_r(\boldsymbol{q}_k, {}^{R_b}\boldsymbol{F}_k, {}_0\boldsymbol{K}^r, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n) \tag{3.132}$$

où ${}_0\boldsymbol{K}^r$ est le vecteur défini par l'expression (3.130) qui correspond à une estimation initiale de la valeur des paramètres de rigidité des liaisons passives.
Expérimentalement, et comme cela a été expliqué au paragraphe (3.2.7.2.1), pour la même configuration articulaire $\boldsymbol{q}_k$ et les mêmes conditions de chargement de la structure ${}^{R_b}\boldsymbol{F}_k$, il est possible de mesurer les déplacements en translation et en rotation du repère affecté au centre de la nacelle. Le résultat de cette mesure est donné par le vecteur :

$$ {}^{R_b}_{k}\Delta\boldsymbol{X}^m_{n_4} = \begin{bmatrix} {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^m_{n_4} & {}^{R_b}_{k}\boldsymbol{\delta}^m_{n_4} \end{bmatrix}^T \tag{3.133}$$

Finalement, il est donc possible de définir l'erreur ${}_k\varepsilon_{dP_{n_4}}$ entre le déplacement en translation estimé et celui que l'on mesure directement :

$$ {}_k\boldsymbol{\varepsilon}_{dP_{n_4}} = \left\| {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^e_{n_4} - {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^m_{n_4} \right\| \tag{3.134}$$

Dans le cadre de l'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons rotoïdes passives, le but est d'agir sur la valeur des paramètres du vecteur $\boldsymbol{K}^r$ afin de rendre l'erreur ${}_k\varepsilon_{dP_{n_4}}$ la plus petite possible. La mesure de l'erreur entre les déplacements en translation estimé et mesuré de la nacelle est répétée pour un ensemble de N configurations articulaires du robot différentes $(N \geq 6)$. Le problème de l'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives se traduit par :

$$ \underset{\boldsymbol{K}^r = {}_s\boldsymbol{K}^r}{Min}\left(\sum_{k=1}^{N} \left({}_k\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} \right) \right) = \underset{\boldsymbol{K}^r = {}_s\boldsymbol{K}^r}{Min}\left(\sum_{k=1}^{N} \left(\left\| {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^e_{n_4} - {}^{R_b}_{k}d\boldsymbol{P}^m_{n_4} \right\| \right) \right) \tag{3.135}$$

Le vecteur ${}_s\boldsymbol{K}^r$ est le vecteur des paramètres solutions défini par :

$$ {}_s\boldsymbol{K}^r = \left[{}_s\boldsymbol{K}_a^{r1} \quad {}_s\boldsymbol{K}_r^{r1} \quad {}_s\boldsymbol{K}_{rr}^{r1} \quad {}_s\boldsymbol{K}_r^{r2} \quad {}_s\boldsymbol{K}_{rr}^{r2} \right]^T \tag{3.136} $$

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation non linéaire, où le vecteur solution ${}_s\boldsymbol{K}^r$ minimise le critère quadratique suivant :

$$ C\left(\boldsymbol{K}^r\right) = \frac{1}{2} {\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} {}_k\varepsilon_{\Delta X_{n_4}}{}^2 \tag{3.137} $$

avec : $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} = \left[{}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} \quad \cdots \quad {}_k\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} \quad \cdots \quad {}_N\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta X_{n_4}} \right]^T$.

Cette optimisation non linéaire est réalisée en utilisant la fonction *lsqnonlin* de *Matlab*®.

3.3.4.1.3 Résultats de l'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives

L'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives à été réalisé à partir de 38 configurations articulaires différentes reparties aléatoirement dans le volume de travail. Pour chacune de ces configurations articulaires, une charge de $19,5\,kg$ est disposée sur la nacelle.

Le vecteur ${}_s\boldsymbol{K}^r$ des paramètres solutions est donné par :

$$ {}_s\boldsymbol{K}^r = \begin{bmatrix} {}_s\boldsymbol{K}_a^{r1} = 327474 \ N/m \\ {}_s\boldsymbol{K}_r^{r1} = 75602592 \ N/m \\ {}_s\boldsymbol{K}_{rr}^{r1} = 54541 \ Nm/rad \\ {}_s\boldsymbol{K}_a^{r2} = 60163 \ N/m \\ {}_s\boldsymbol{K}_r^{r2} = 2866720 \ N/m \\ {}_s\boldsymbol{K}_{rr}^{r2} = 26062 \ Nm/rad \end{bmatrix} \tag{3.138} $$

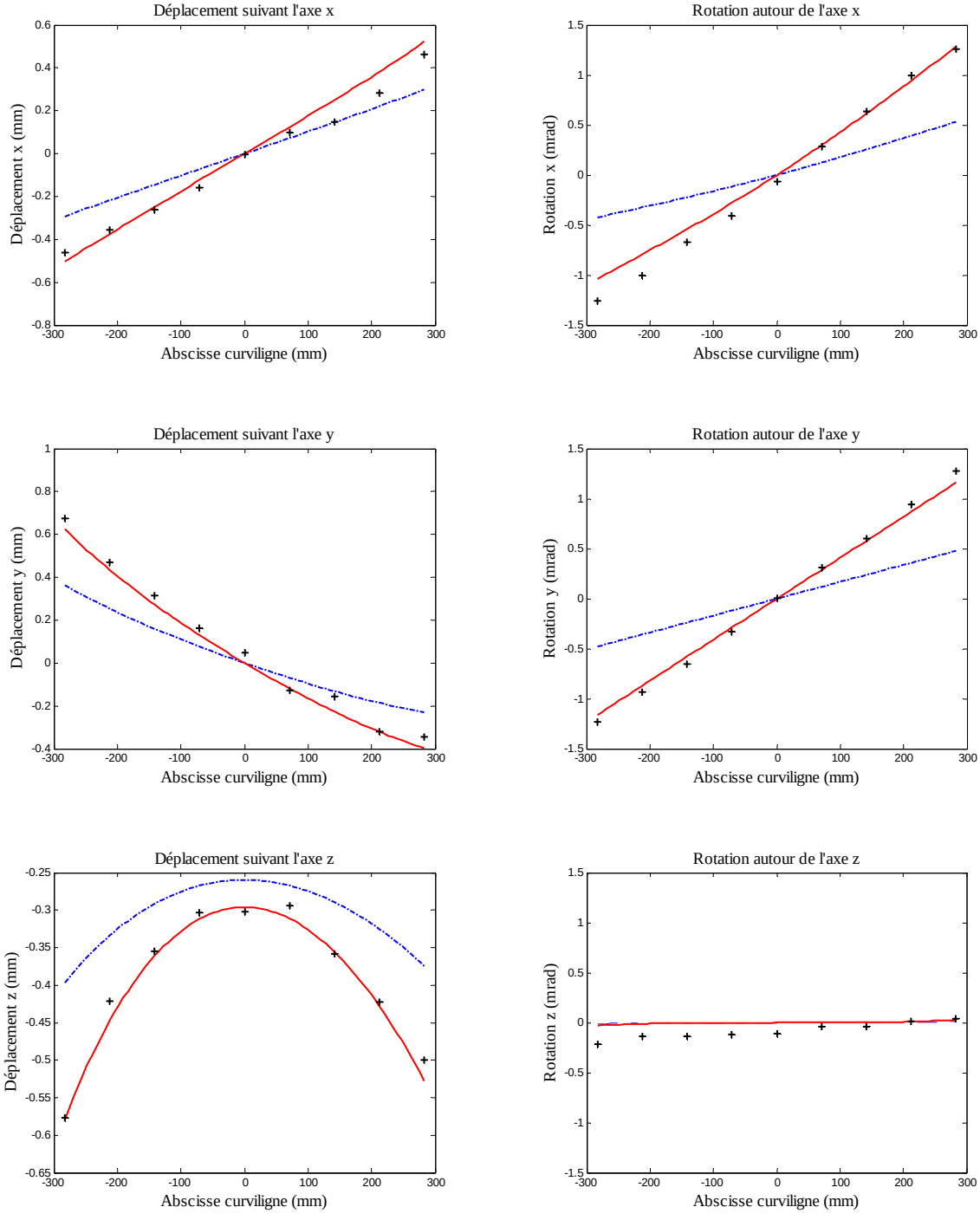
Ces résultats font bien apparaître deux ordres de grandeurs de raideurs différents, correspondant aux deux types de liaisons différentes mises en œuvre sur la structure.

3.3.4.2 Validations expérimentales

Les validations expérimentales sont similaires à celles qui ont été menées précédemment sans prendre en considération la rigidité des liaisons passives, cf. (3.2.7.2.2). Il est toutefois nécessaire de noter que ces validations sont réalisées à partir de configurations du robot Delta n'ayant pas été mises en œuvre pour la phase d'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives.

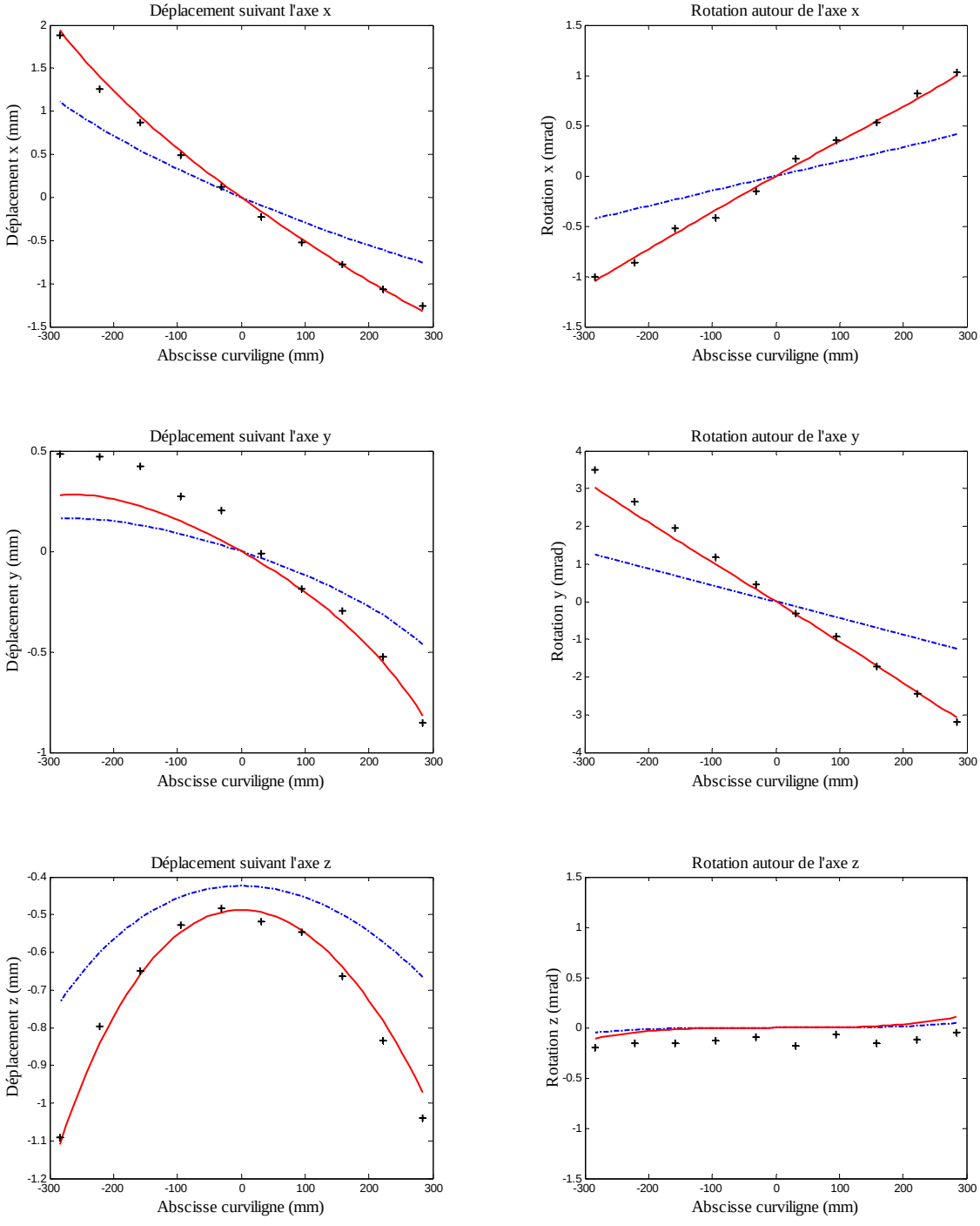
La première série de mesures (Figure 3.22) réalisée avec des conditions de chargement de la nacelle identiques à celles utilisées pour la phase d'étalonnage des paramètres de rigidité des liaisons passives, montre que la prise en compte de la rigidité des liaisons rotoïdes passives permet d'obtenir un modèle qui reflète bien le comportement élastique réel de la structure.

La deuxième série de mesures, réalisée avec un chargement de la nacelle correspondant à une masse de $38,2\,kg$, confirme la validité du modèle proposé (Figure 3.23). En effet, avec un chargement deux fois supérieur à celui utilisé pour étalonner les paramètres de rigidité des liaisons passives, les résultats sont, en termes de qualité, similaires à ceux obtenus via la première série de mesures. Seuls, certains déplacements en translation suivant la direction $\boldsymbol{y}_b$ font apparaître des écarts significatifs. Il semble cependant que ces écarts soient davantage liés à des erreurs de mesure plutôt qu'à une déficience du modèle proposé.



Droite $y = -x$ dans le plan $z = -1,3131\,(m)$

Figure 3.22 – Modèle avec rigidité dans les liaisons passives. Charge de $19,5\,kg$



Droite $y = x/3$ dans le plan $z = -1,4010\,(m)$

Figure 3.23 – Modèle avec rigidité dans les liaisons passives. Charge de $38,2\ kg$

3.3.5 Modèle de déformation élastique nominal

Le modèle de déformation élastique nominal de la structure Delta, qui exprime les déplacements ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4}$ en translation et en rotation du repère de la nacelle, peut être défini par une fonction H_n qui dépend :

- de la configuration articulaire $\boldsymbol{q}$ de la structure ;
- des sollicitations mécaniques extérieures ${}^{R_b}\boldsymbol{F}$ agissant sur la structure ;
- du vecteur des paramètres géométriques nominaux $\boldsymbol{\xi}_{39n}$;
- du vecteur des paramètres mécaniques nominaux, défini par le vecteur $\boldsymbol{\Gamma}_n$.

Cette fonction peut être écrite de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = \left[{}^{R_b}d\boldsymbol{P}_{n_4} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\delta}_{n_4} \right]^T = H_n\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq}{}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq} \tag{3.139} $$

3.4 Conclusion du chapitre

Au cours de ce chapitre, une méthode analytique fondée sur la mise en œuvre des éléments finis pour l'étude de la rigidité des structures parallèles a été présentée. Cette méthode se caractérise par le fait qu'elle est systématique et généralisable à toutes les structures à architecture parallèle dont les segments sont élancés. Cette dernière a été validée par des mesures expérimentales réalisées sur la structure Delta du Surgiscope® commercialisé par la société ISIS. Les résultats obtenus ont montré la pertinence de l'approche utilisée et il est à noter que la modélisation mise en œuvre qui est fondée sur la minimisation de l'énergie de déformation peut être appliquée aux structures hyperstatiques.
L'utilisation de ce type de modélisation peut être envisagée à plusieurs niveaux :

- Dés le stade de la conception d'une structure parallèle, un premier modèle, considérant les liaisons passives comme étant parfaites peut être développé. Ce modèle donne un ordre de grandeur tout à fait réaliste du comportement élastique de la structure.
- Un modèle considérant la rigidité des liaisons passives peut être utilisé, après étalonnage des ces paramètres de rigidités, pour prédire en temps réel les déformations élastiques de la structure. Dans le cas de la structure Delta étudiée, les temps de calcul de la déformation de la structure, pour un chargement et une configuration articulaire donnés, est d'environ 20 ms. Ces calculs sont réalisés sous Matlab® en utilisant la fonction dédiée à l'utilisation des matrices creuses qui permettent d'optimiser ces temps de calcul. Il semble donc tout à fait réaliste, qu'un modèle identique développé dans un autre langage de programmation de plus bas niveau (langage C) puisse permettre de réaliser les calculs de déformations en un temps inférieur à 10 ms afin de prévoir une mise en œuvre temps réel de ce dernier. Des travaux devraient être réalisés dans un futur proche afin d'implanter un modèle en langage C sur le contrôleur du Surgiscope®.

Chapitre 4 : **Modélisation et étalonnage élasto-géométriques d'une structure Delta**

Sommaire

4.1 Modèle élasto-géométrique direct 108
4.2 Déformation sous le poids propre de la structure 108
4.3 Modèle élasto-géométrique inverse approché 115
4.4 Etalonnage de la structure Delta 117
4.5 Estimation des temps de calcul des modèles élasto-géométriques 140
4.6 Conclusion 140

L'objectif de ce chapitre est de réaliser un étalonnage élasto-géométrique de la structure Delta du Surgiscope®. Dans un premier temps, la modélisation élasto-géométrique de la structure est réalisée. Cette modélisation permet de définir :

- le modèle élasto-géométrique direct ;
- un modèle élasto-géométrique inverse approché.

Le modèle élasto-géométrique direct est utilisé afin d'étudier les déformations élastiques de la structure sous son poids propre. Cette étude fait apparaître que ces déformations élastiques sont très fortement dépendantes de la position considérée dans l'espace de travail et que ces déformations élastiques peuvent être conséquentes.
Dans un second temps, des étalonnages géométriques et élasto-géométriques de la structure sont réalisés. Différents critères fondés sur des mesures expérimentales sont alors introduits. Ces critères vont permettre de déterminer la modélisation de la structure la plus réaliste, en termes de précision, vis-à-vis du comportement élasto-géométrique de la structure.

4.1 Modèle élasto-géométrique direct

Le modèle élasto-géométrique direct nominal de la structure Delta étudiée, est le modèle qui fournit la situation atteinte par le centre de la nacelle en fonction d'une part, des variables articulaires et des actions mécaniques extérieures agissant sur la structure et d'autre part, des vecteurs des paramètres géométriques et mécaniques nominaux. La situation atteinte par le centre de la nacelle intègre les déformations élastiques de la structure. Ce modèle élasto-géométrique direct nominal est donc défini de la façon suivante :

$$\boldsymbol{p} = G_{42megd}\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right) + H_n\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) \tag{4.1}$$

où $G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right)$ est le modèle géométrique direct nominal défini au paragraphe (2.3.3.2) et $H_n\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right)$ le modèle de déformation élastique nominal défini au paragraphe (3.3.5).

4.2 Déformation sous le poids propre de la structure

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer, pour une configuration donnée du robot dans l'espace de travail, la déformation élastique de la structure due au poids propre de ses éléments. Dans un premier temps, l'étude de la chaîne cinématique i, qui a été réalisée au paragraphe (3.3.2.4), est complétée de façon à prendre en compte la masse propre des éléments. Puis, dans un second temps, l'étude de l'assemblage des trois chaînes cinématiques avec la nacelle est elle aussi complétée afin d'intégrer le poids propre de la nacelle.

Dans le cadre de cette étude, les chargements mécaniques liés à la gravité peuvent être dus, soit à une charge concentrée, soit à une charge répartie. Les différents éléments de la structure ont été pesés sur une balance de précision dont la résolution est de $2.10^{-4}\ N$ soit une masse équivalente de $2\ gr$.

4.2.1 Etude de la chaîne cinématique i

4.2.1.1 Prise en compte des charges réparties

Il est possible, de définir un chargement nodal dont le travail virtuel est équivalent à un chargement réparti [Batoz 1990]. Ce chargement nodal fait apparaître une force ainsi qu'un moment au niveau de chacun des deux nœuds de la poutre pouvant être exprimés en fonction de la charge répartie f et de la longueur L de l'élément.

Pour la prise en compte d'un chargement reparti de type poids et dans le cas de figure ou l'axe de la poutre définie entre les nœuds u et v est normal à la direction de la gravité (Figure 4.1), les forces et moments nodaux équivalent sont exprimés de la façon suivante :

$$F_{z_u} = F_{z_v} = f\frac{L}{2} \tag{4.2}$$

$$M_{z_u} = -M_{z_v} = f\frac{L^2}{12} \tag{4.3}$$

Dans le cas de figure ou l'axe de la poutre n'est pas normal à celui de la gravité, les expressions (4.2) et (4.3) restent toutefois valide en considérant, non plus la charge répartie f, mais sa projection

suivant l'axe $\boldsymbol{z}_{u,v}$ normal à l'axe $\boldsymbol{x}_{u,v}$ de la poutre dans le plan défini par le vecteur de gravité $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{x}_{u,v}$.

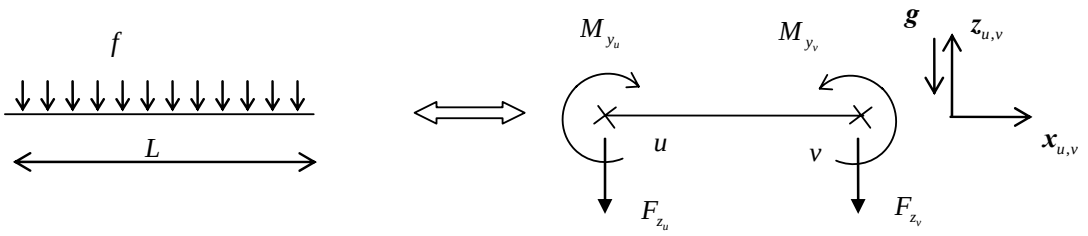


Figure 4.1 – Chargement nodal équivalent

4.2.1.2 Etude du poids propre des différents éléments de la chaîne cinématique

4.2.1.2.1 Etude du bras (A_iB_i)

Le poids propre du bras défini par le vecteur $\overrightarrow{A_iB_i}$ est pris en compte comme étant une charge uniformément répartie dont le poids linéique f_b est exprimé en N/m. Les forces nodales équivalentes au poids du bras sont données par :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_1} = \left[0 \quad 0 \quad F_{z_{ci_1}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_1}{}^T \right]^T \tag{4.4} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_2} = \left[0 \quad 0 \quad F_{z_{ci_2}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_2}{}^T \right]^T \tag{4.5} $$

où :

$$ F_{z_{ci_1}} = F_{z_{ci_2}} = -f_b \frac{Lb}{2} \tag{4.6} $$

$$ \boldsymbol{M}_{ci_1} = -\boldsymbol{M}_{ci_2} = \frac{Lb^2 \left\| \left[0 \quad 0 \quad f_b\right]^T \times \overrightarrow{A_iB_i} \right\|}{12 \left\| \overrightarrow{A_iB_i} \right\|^2} \left(\overrightarrow{A_iB_i} \times \left[0 \quad 0 \quad 1\right]^T \right) \tag{4.7} $$

4.2.1.2.2 Etudes des grands côtés du parallélogramme

Les forces nodales agissant aux nœuds ci_6, ci_7, ci_8 et ci_9 des grands côtés du parallélogramme sont composées :

- du chargement reparti qui correspond au poids propre de l'élément dont le poids linéique est f_p.
- d'un chargement concentré qui correspond au poids des divers éléments des liaisons rotoïdes entre les petits et grands côtés du parallélogramme. La masse m_1 de ces éléments est de $1,04\,kg$.

Les forces nodales agissant aux nœuds ci_6, ci_7, ci_8 et ci_9 sont définies par :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_6} = \left[0 \;\; 0 \;\; F_{z_{ci_6}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_6}{}^T \right]^T \qquad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_7} = \left[0 \;\; 0 \;\; F_{z_{ci_7}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_7}{}^T \right]^T \tag{4.8} $$

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_8} = \left[0 \;\; 0 \;\; F_{z_{ci_8}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_8}{}^T \right]^T \qquad {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_9} = \left[0 \;\; 0 \;\; F_{z_{ci_9}} \;\vdots\; \boldsymbol{M}_{ci_9}{}^T \right]^T \tag{4.9} $$

où :

$$ F_{z_{ci_6}} = F_{z_{ci_7}} = F_{z_{ci_8}} = F_{z_{ci_9}} = -f_p \frac{L}{2} - m_1 g \tag{4.10} $$

$$ \boldsymbol{M}_{ci_6} = \boldsymbol{M}_{ci_8} = -\boldsymbol{M}_{ci_7} = -\boldsymbol{M}_{ci_9} = \frac{Lb^2 \left\| \left[0 \;\; 0 \;\; p_b \right]^T \times \overrightarrow{B_i C_i} \right\|}{12 \left\| \overrightarrow{B_i C_i} \right\|^2} \left(\overrightarrow{B_i C_i} \times \left[0 \;\; 0 \;\; 1 \right]^T \right) \tag{4.11} $$

4.2.1.2.3 Etude du petit côté supérieur du parallélogramme

Le poids du petit côté supérieur du parallélogramme qui intègre celui des différents éléments de liaison rotoïde entre le bras et le parallélogramme est pris en compte comme étant une charge concentrée agissant au nœud ci_4. La masse de ces différents éléments est de $2,38\,kg$. La force nodale agissant au nœud ci_4 est définie par :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{ci_4} = \left[0 \;\; 0 \;\; -m_2 g \;\vdots\; \boldsymbol{0}_{1,3} \right]^T \tag{4.12} $$

4.2.1.2.4 Bilan du chargement

Le poids propre du petit côté inférieur du parallélogramme n'apparaît pas dans l'étude du poids de la chaîne cinématique, car cette action mécanique est intégrée au poids total de la nacelle. Le bilan du chargement nodal d'une chaîne cinématique, résultant du poids des différents éléments est donné à la Figure 4.2. Cette figure fait apparaître la sous-structure équivalente, l'effort nodal équivalent ainsi que la matrice de rigidité équivalente définies dans le chapitre précédent par les expressions (3.106) et (3.107).

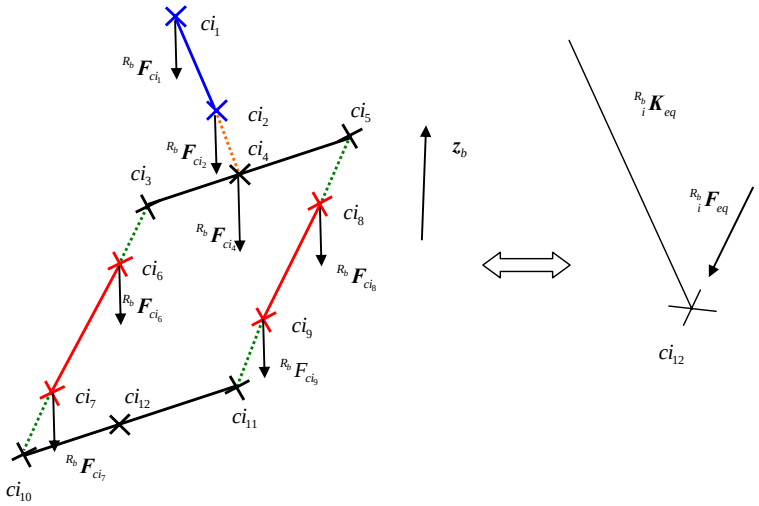


Figure 4.2 – Modélisation du poids propre d'une chaîne cinématique

4.2.2 Etude de la structure complète

Les trois sous-structures, modélisant les trois chaînes cinématiques, sont assemblées à la nacelle, dont le poids propre est modélisé par une charge concentrée agissant au nœud n_4 (Figure 4.3). La masse de la nacelle ainsi que celle des divers éléments constitutifs des liaisons rotoïdes entre la nacelle et les parallélogrammes est de $m_3 = 7,21\,kg$. Le poids total de la nacelle ainsi défini est pris en compte comme étant une charge concentrée agissant au nœud n_4. Cette charge concentrée est exprimée de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\boldsymbol{F}_{n_4} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -m_3 g & \boldsymbol{0}_{1,3} \end{array}\right]^T \tag{4.13} $$

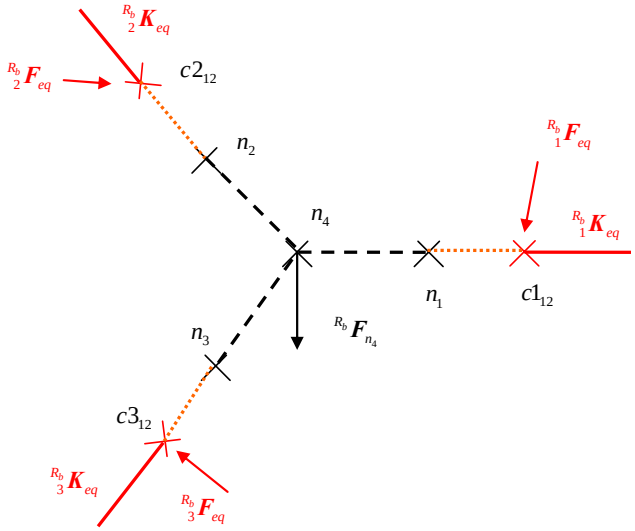


Figure 4.3 – Modélisation du poids propre de la structure

4.2.3 Cartographie de la déformation de la structure sous son propre poids

A partir de la modélisation définie à la Figure 4.3, le poids propre de la structure peu être intégré au modèle élasto-géométrique direct défini au paragraphe (4.1). Sur la base de ce modèle, il est possible d'étudier la déformation de la structure sous son propre poids. Les résultats de cette étude réalisée suivant trois plans d'altitudes différentes sont donnés aux Figure 4.4, Figure 4.5 et Figure 4.6. Ces résultats font bien apparaître que la déformation de la structure sous son propre poids est fortement dépendante de la configuration du robot envisagée. De plus, il faut noter que les déplacements du centre de la nacelle résultant de la déformation élastique de la structure sont conséquents et peuvent être supérieurs au millimètre. On retrouve bien sur ces figures la symétrie du robot.

Une étude similaire est réalisée dans [Hsu 2004] sur une machine outil à structure parallèle, où l'auteur évalue les déformations élastiques dues au poids des éléments mobiles de la structure dont la masse est de $182\,kg$. Cette étude fait apparaître que les amplitudes de ces déformations élastiques suivant les axes X, Y et Z sont respectivement de $9,9\,\mu m$, $7,3\,\mu m$ et $4,9\,\mu m$.

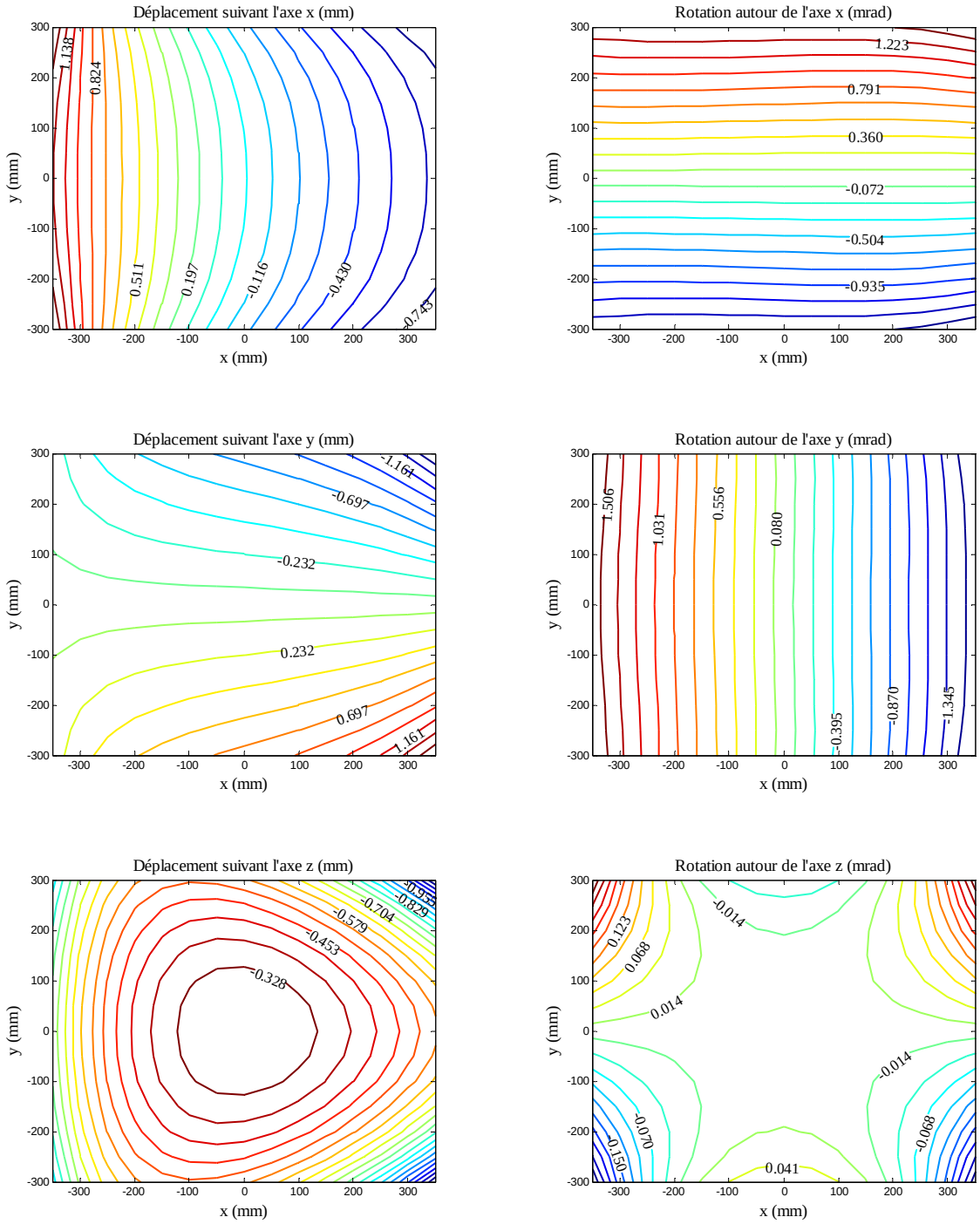


Figure 4.4 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1,4\ m$

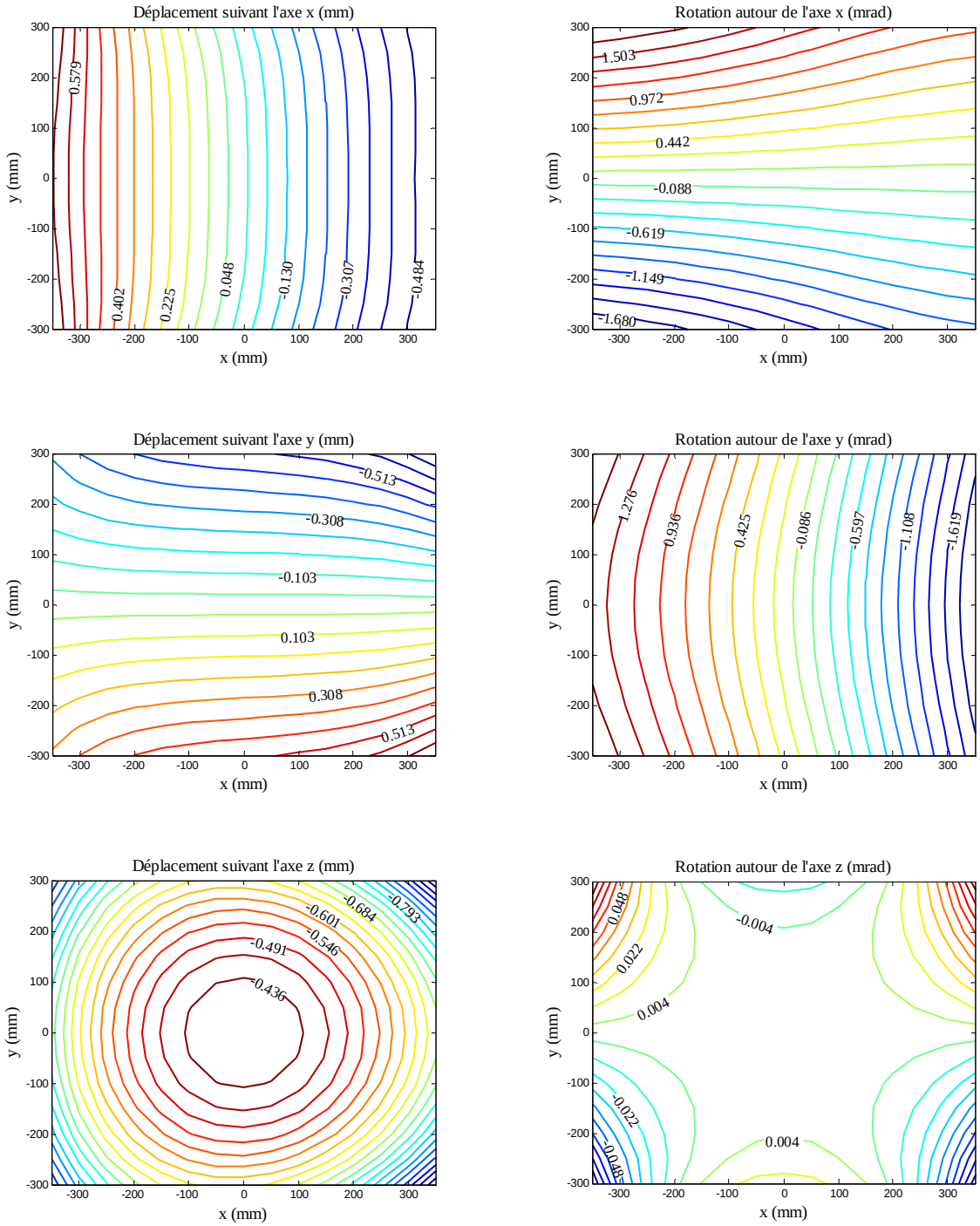


Figure 4.5 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1,2\ m$

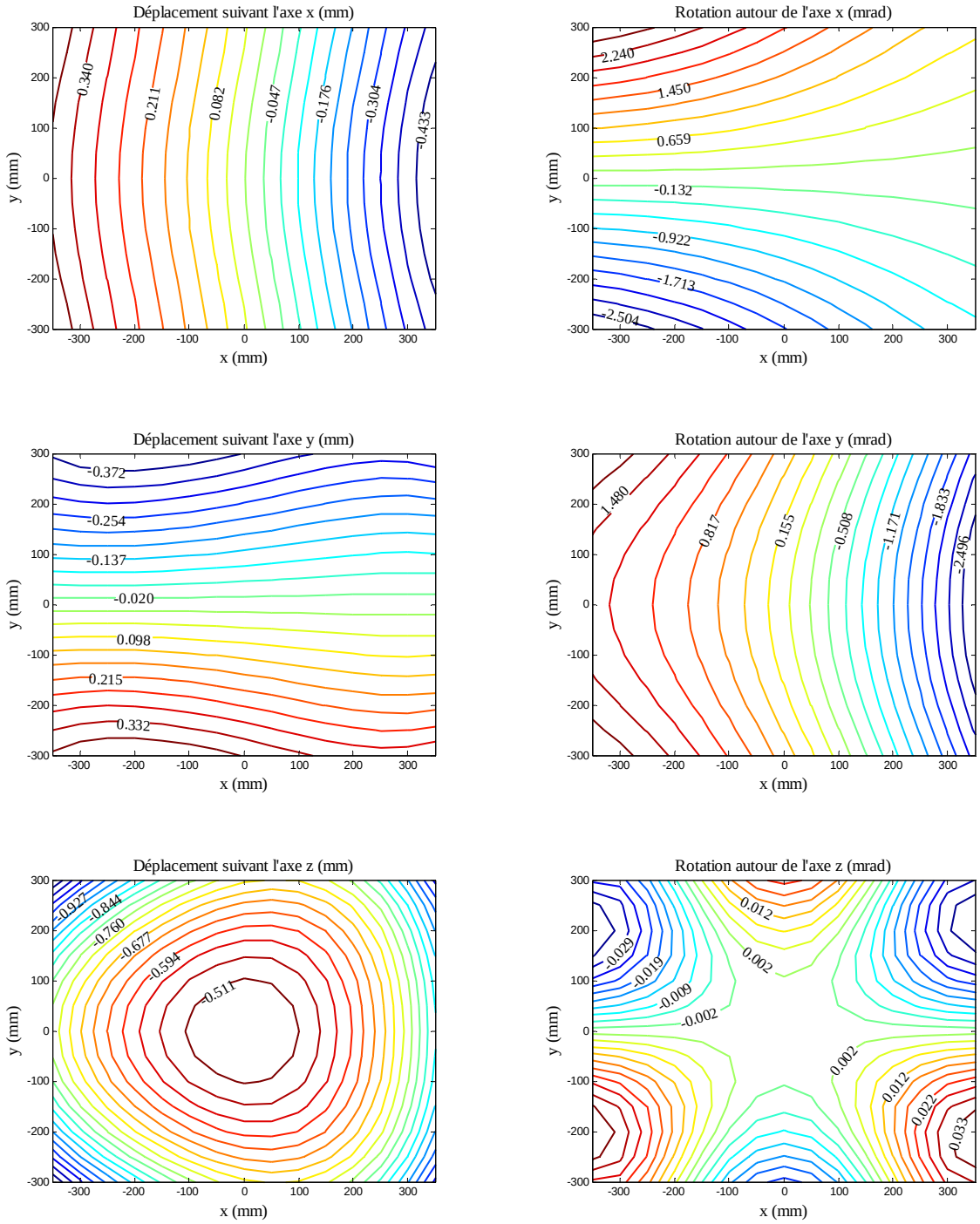


Figure 4.6 – Déplacement sous le poids propre de la structure dans le plan $z = -1\,m$

4.3 Modèle élasto-géométrique inverse approché

Le modèle élasto-géométrique inverse à 42 paramètres de la structure Delta est le modèle qui fournit les variables articulaires à partir d'un chargement donné et une situation réelle du repère lié au centre de la nacelle. Ce modèle ne peut pas être obtenu directement. En effet, pour un déplacement du centre de la nacelle et une rotation de celle-ci dus au chargement de la structure, il n'est pas possible de déterminer les variables articulaires. Il est toutefois possible de définir un modèle élasto-géométrique approché. Ce modèle est défini dans la suite de ce paragraphe.

4.3.1 Hypothèse

Afin de définir le modèle élasto-géométrique inverse approché, l'hypothèse suivante est faite :

- pour un chargement donné de la structure, les déplacements élastiques du centre de la nacelle pour deux configurations articulaires très voisines sont supposés identiques.

Cette hypothèse va permettre de fournir une approximation des variables articulaires correspondant à une situation de la nacelle qui intègre les déformations élastiques dues à son chargement.

4.3.2 Description du modèle élasto-géométrique inverse approché

A partir du chargement ${}^{R_b}\boldsymbol{F}$ agissant sur la structure et de la situation $\boldsymbol{p}$ du centre de la nacelle, l'algorithme permettant d'obtenir le modèle élasto-géométrique inverse approché est le suivant :

- les variables articulaires $\boldsymbol{q}_1$ correspondant à la situation $\boldsymbol{p}$ obtenue pour un robot infiniment rigide, sont données par le modèle géométrique inverse nominal :

$$\boldsymbol{q}_1 = G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right) \tag{4.14}$$

- le déplacement $\delta\boldsymbol{p}$ du centre de la nacelle est alors calculé à partir des variables articulaires estimées et du chargement ${}^{R_b}\boldsymbol{F}$ agissant sur la structure :

$$\delta\boldsymbol{p} = H_n\left(\boldsymbol{q}_1, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) \tag{4.15}$$

- la situation $\boldsymbol{p}$ du centre de la nacelle est alors corrigée de la déformation $\delta\boldsymbol{p}$ définissant ainsi la situation $\boldsymbol{p}_{cor}$ qui est une estimation de la situation, corrigée des déformations élastiques de la structure :

$$\boldsymbol{p}_{cor} = \boldsymbol{p} - \delta\boldsymbol{p} \tag{4.16}$$

- l'estimation des variables articulaires $\tilde{\boldsymbol{q}}$ qui correspondent à la situation initiale $\boldsymbol{p}$, sont alors données par le modèle géométrique inverse :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p}_{cor}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right) \tag{4.17}$$

Le modèle élasto-géométrique inverse peut mathématiquement être défini de la façon suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = G_{42megi}\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p} - H_{def}\left(G_{42mgi}\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}_{39n}\right), {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right), \boldsymbol{\xi}_{39n}\right) \tag{4.18}$$

4.3.3 Estimation de l'erreur commise en fonction de la masse de l'outillage

Une estimation de l'erreur commise dans le cadre du modèle élasto-géométrique inverse approché peut être fournie de la façon suivante :

- calculer les variables articulaires estimées $\tilde{\boldsymbol{q}}$ correspondant à la position $\boldsymbol{p}$;
- comparer la position initiale et la position donnée par le modèle élasto-géométrique direct correspondant aux variables articulaires estimées $\tilde{\boldsymbol{q}}$.

L'erreur commise peut donc être estimée par :

$$\varepsilon\left(\boldsymbol{p}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = \boldsymbol{p} - G_{42megd}\left(G_{42megi}\left(\boldsymbol{p}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right), {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) \tag{4.19}$$

Des simulations de l'erreur commise sont réalisées en faisant varier la valeur d'une charge disposée au centre de la nacelle. Les erreurs maximales ainsi que les erreurs moyennes sont estimées à partir de 975 points répartis dans le volume de travail suivant :
$\left(-0,35\,m \le X \le 0,35\,m \quad -0,3\,m \le Y \le 0,3\,m \quad -1,4\,m \le Z \le -1\,m\right)$

Les résultats de ces simulations en termes d'erreur maximale et d'erreur moyenne sont respectivement fournis à la Figure 4.7 et la Figure 4.8.

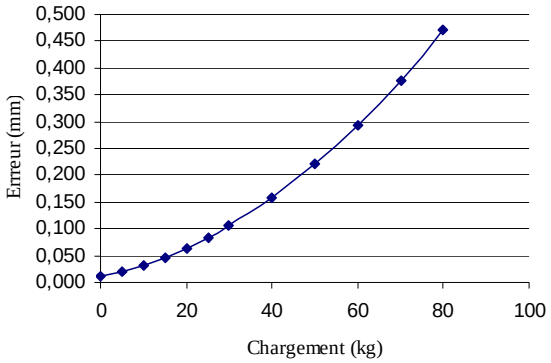


Figure 4.7 – Erreur maximale dans le volume de travail
en fonction de la charge sur la nacelle

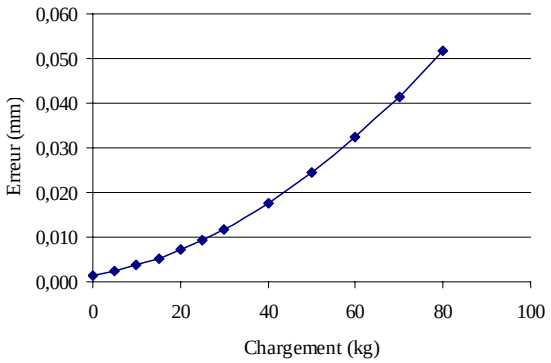


Figure 4.8 – Erreur moyenne dans le volume de travail
en fonction de la charge sur la nacelle

Ces figures font apparaître que l'erreur moyenne reste faible même sous un chargement important. Par exemple, sous un chargement correspondant à une masse de $80\,kg$ disposée au centre de la nacelle, l'erreur moyenne reste proche de $0,05\,mm$.

Sous ce même chargement, l'ordre de grandeur de l'erreur maximale commise par l'usage du modèle géométrique inverse approché est d'environ $0,5\,mm$. Mais il faut aussi noter que cette erreur maximale se produit pour des configurations se trouvant sur les limites du volume de travail considéré. L'erreur commise liée à l'utilisation du modèle élasto-géométrique inverse approché doit être comparée à la précision recherchée dans le cadre de l'application envisagée.

4.4 Etalonnage de la structure Delta

4.4.1 Introduction

L'objectif de ce paragraphe est de réaliser l'étalonnage, le plus pertinent possible, de la structure Delta du Surgiscope® étudiée au cours des chapitres précédents. Afin de pouvoir comparer les différentes modélisations les unes par rapport aux autres, l'identification des différents modèles géométriques et élasto-géométriques est réalisée à partir d'une série de mesures commune. Différents critères liés à la pertinence de l'identification sont alors introduits. Ces critères doivent permettre de comparer les résultats des différentes identifications afin de définir le modèle de la structure étudiée le plus précis possible en termes de précision de positionnement.

4.4.2 Mesures expérimentales

4.4.2.1 Description du site expérimental

La structure Delta étudiée est fixée à un bâti qui est considéré comme étant indéformable. Un marbre de métrologie, de classe 0 et de dimensions $1200\times800\times160\,(mm)$ complète le site expérimental (Figure 4.9).

La salle dans laquelle est placée la structure ne dispose pas d'une régulation de température permettant d'effectuer les mesures à la température de référence de $20°C$. Les problèmes liés à la variation de température au sein de la salle on été limités en effectuant les mesures avec des conditions de température les plus constantes possibles. De plus, il faut noter que les effets liés à la température ambiante peuvent être intégrés dans les modèles géométriques grâce à la prise en compte des coefficients de dilatation thermique des éléments de la structure [Maurine 2002]. Ainsi, la longueur L_T d'un élément à la température ambiante T peut être définie à partir de la température ambiante T_E régnant lors de la phase des mesures nécessaires à l'étalonnage. Cette longueur est exprimée de la façon suivante :

$$L_T = L_{T_E}\left(1+\alpha\left(T-T_E\right)\right) \tag{4.20}$$

où L_{T_E} et α correspondent respectivement, à la longueur étalonnée et au coefficient de dilatation thermique, exprimé en K^{-1}, de l'élément considéré.



Figure 4.9 – Site expérimental

4.4.2.2 Dispositif de mesure

L'étalonnage d'une structure robotisée requiert la connaissance des coordonnées articulaires $\boldsymbol{q}$ correspondant aux coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{p}$ du point piloté. La mesure des variables articulaires est assurée avec une bonne précision par les capteurs de position articulaire du robot [Khalil 1999]. Par contre, la mesure des coordonnées cartésiennes du point piloté nécessite des dispositifs de mesure coûteux. Une solution économiquement viable consiste alors à concevoir un dispositif de mesure qui va permettre de réaliser l'étalonnage de la structure à partir de mesures relatives. C'est dans ce but, qu'un dispositif de mesure présenté au paragraphe suivant à été conçu.

4.4.2.2.1 Description du dispositif de mesure [Deblaise 2005]

Le dispositif de mesure est constitué des deux parties indépendantes suivantes :

- La tête de mesure portant trois comparateurs à affichage numérique ayant chacun une course de mesure de $12,5\,mm$ et une résolution de $1\,\mu m$. Le système de mesure est mis en position sur la nacelle de telle façon que les directions de mesures des différents comparateurs soient alignées, aux erreurs de fabrications près, avec les axes $\boldsymbol{x}_b$, $\boldsymbol{y}_b$ et $\boldsymbol{z}_b$ du repère de base de la structure Delta. Les trois comparateurs sont reliés au PC de commande de la structure par des liaisons RS-232.
- Un artefact réalisé à partir d'une plaque dont les dimensions utiles sont de $267\times170\,mm$ (Figure 4.10). Treize alésages coniques sont réalisés sur l'artefact, ils permettent de mettre en position une sphère étalon dont le diamètre est de $76,2\,mm\,(\pm14\mu m)$ et dont la sphéricité est de $2\mu m$ (Figure 4.11). Des mesures réalisées sur une machine à mesurer tridimensionnelle ont permis de vérifier à la fois, la précision de la mise en position de la sphère dans les

différents alésages de l'artefact (répétabilité $< 5\ \mu m$) et de réaliser la métrologie de l'artefact qui définit les positions relatives du centre de la sphère pour les différentes positions étudiées.



Figure 4.10 – Artefact

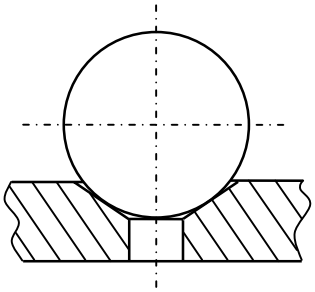


Figure 4.11 – Mise en position d'une sphère

4.4.2.2.2 Utilisation du dispositif de mesure

La nacelle de la structure est déplacée de façon à ce que les trois comparateurs de la tête de mesure viennent en contact avec la sphère située à la position P_i. Pour cette configuration i, les variables articulaires $\boldsymbol{q}_i = \left[\theta_{11_i} \quad \theta_{21_i} \quad \theta_{31_i}\right]^T$ ainsi que les informations $\boldsymbol{S}_i = \left[S_{X_i} \quad S_{Y_i} \quad S_{Z_i}\right]^T$ fournies par les comparateurs sont alors stockées (Figure 4.12). La nacelle est déplacée de façon à ce que les trois comparateurs de la tête de mesure viennent en contact avec la sphère située à la position P_j. Pour cette seconde configuration j, les vecteurs $\boldsymbol{q}_j$ et $\boldsymbol{S}_j$ regroupant respectivement les variables articulaires et les informations fournies par les comparateurs sont elles aussi enregistrées.
Il faut noter que, comme les variables articulaires sont définies au top codeur prés, pour une position supposée fixe de la nacelle, des petits déplacements subsistent. Ces petits déplacements ont un ordre de grandeur de quelques centièmes de millimètres. Afin de limiter les effets engendrés par ces petits déplacements, le résultat de la mesure d'une variable articulaire ou d'un comparateur correspond à la moyenne de dix mesures réalisées pendant une durée de dix secondes.

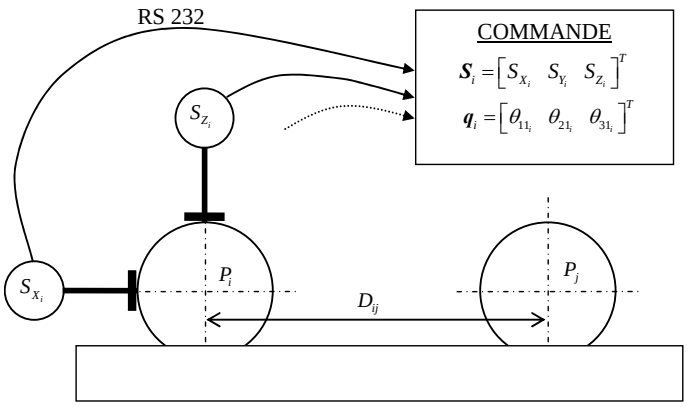


Figure 4.12 – Mesure d'une configuration articulaire

4.4.2.3 Etalonnage de la structure

4.4.2.3.1 Mesures relatives à l'étalonnage de la structure

L'étalonnage est réalisé à partir de 30 positions différentes de l'artefact dans le volume de travail du Surgiscope®. Pour chaque position de l'artefact, cinq mesures correspondant à cinq positions différentes de la sphère sont réalisées. Ces mesures permettent donc de définir 4 équations de distance. Ainsi, l'étalonnage de la structure est réalisé à partir de 150 mesures différentes qui fournissent 120 équations de distance.

4.4.2.3.2 Mesures relatives à la validation de l'étalonnage de la structure

Afin de valider l'étalonnage de la structure, 12 équations de distance sont utilisées. Ces 12 équations sont issues de trois positions différentes de l'artefact, autres que celles utilisées lors de la phase d'identification des paramètres. De plus, afin d'estimer le comportement des différents modèles identifiés, deux validations supplémentaires sont réalisées en chargeant la nacelle avec des masses de $23,7\,kg$ et $48,1\,kg$. Pour chacune de ces masses, 12 autres équations de distances sont aussi utilisées.

4.4.3 Etude de la fonction d'erreur

Les erreurs sur les paramètres géométriques sont identifiées à partir d'une redondance d'informations qui permet de confronter les différents modèles décrivant la structure au comportement réel de celle-ci. Les paramètres identifiés sont obtenus par la minimisation au sens des moindres carrés, d'une fonction d'erreur qui permet de quantifier l'accord entre toutes ces informations redondantes.
La fonction d'erreur utilisée est basée sur la comparaison entre :

- la distance étalonnée D_{ij} entre le centre des sphères P_i et P_j ;
- la distance calculée par le modèle géométrique direct à partir des variables articulaires et des informations comparateurs correspondant aux configurations i et j.

La fonction d'erreur est exprimée par :

$$\Lambda_{i,j}\left(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j, D_{ij}\right) = \left\|\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j\right\| - D_{ij} \tag{4.21}$$

où $\boldsymbol{p}_i$ et $\boldsymbol{p}_j$ sont respectivement les positions estimées du centre de la nacelle pour les configurations i et j.
Suivant le modèle à identifier et pour une configuration quelconque k, la position $\boldsymbol{p}_k$ estimée du centre de la nacelle est respectivement définie par :

$$\boldsymbol{p}_k = H_{18mgd}\left(G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{\xi}_{15}\right), \boldsymbol{S}_k\right) \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{p}_k = H_{42mgd}\left(G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{\xi}_{39}\right), \boldsymbol{S}_k\right) \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{p}_k = H_{42megd}\left(G_{42megd}\left(\boldsymbol{q}_k, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \xi_{39}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right), \boldsymbol{S}_k\right) \tag{4.24}$$

La fonction d'erreur est mise sous une forme quadratique de type moindres-carrés :

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Lambda} \tag{4.25}$$

où le vecteur $\boldsymbol{\Lambda}$ regroupe les équations de distance de la procédure d'étalonnage :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) = \left[\Lambda_{1,2} \quad \cdots \quad \Lambda_{i,j} \quad \cdots \quad \Lambda_{k,l} \right]^T \tag{4.26}$$

4.4.4 Mesures relatives à la validation de l'identification d'un modèle

4.4.4.1 Evaluation de l'optimisation

Afin d'évaluer le gain en termes de précision après identification et compensation des différents modèles, mais aussi pour comparer leur identification, nous allons utiliser des critères similaires à ceux définis dans les travaux de recherche de Renaud [Renaud 2003].
En notant $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$, le vecteur regroupant l'ensemble des N erreurs calculées, nous caractérisons la qualité de l'identification par deux critères :

- critère V_1 de l'erreur moyenne :

$$V_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| \Lambda_{i,j}^k (\boldsymbol{\xi}) \right| \tag{4.27}$$

- critère V_2 de l'erreur quadratique moyenne :

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Lambda}} \tag{4.28}$$

Ces deux critères seront utilisés en considérant :

- les configurations ayant servies à l'identification des modèles,
- les configurations servant à la validation de ces mêmes modèles.

4.4.4.2 Validation par un contrôle de planéité

Une seconde validation possible des différents modèles étalonnés est de réaliser une mesure qui s'apparente à la mesure du défaut de planéité du marbre (Figure 4.13). Cette validation est réalisée à partir de 40 points de mesures régulièrement répartis sur une surface de $700 \times 600\ mm^2$. De plus, ces mesures sont effectuées pour trois chargements différents de la nacelle.
Au sens de la norme NF E 04-552, le défaut de planéité associé à un nuage de points correspond à la plus petite distance t entre deux plans parallèles englobant ce nuage de points. Le calcul de cette distance t, au sens des moindres carrés, peut être réalisé de la façon suivante :

- détermination du plan des moindres carrés associé au nuage de points ;
- pour l'ensemble des points du nuage, calculer la distance D_i entre le plan des moindres carrés, et le point i considéré ;
- définition des distances $D_{\text{sup}1}$ et $D_{\text{sup}2}$ pour chaque côté du plan entre le point le plus éloigné du plan des moindres carrés et ce dernier ;

- le défaut de planéité est alors donné par :

$$t = D_{sup1} + D_{sup2} \tag{4.29}$$

A partir de la définition du plan des moindres carrés, il est possible de définir deux nouveaux critères qui permettent d'évaluer le gain en termes de précision après l'identification et la compensation des différents modèles :

- critère V_3 correspondant au défaut de planéité :

$$V_3 = t = D_{sup1} + D_{sup2} \tag{4.30}$$

- critère V_4 correspondant à l'écart quadratique moyen du nuage de points au plan des moindres carrés :

$$V_4 = \sqrt{\frac{1}{N}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}} \tag{4.31}$$

Le vecteur $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & D_i & \cdots & D_N \end{bmatrix}^T$ regroupe les distances des points au plan des moindres carrés et N est le nombre de points considérés.



Figure 4.13 – « Mesure du défaut de planéité du marbre »

4.4.5 Identification des modèles géométriques

4.4.5.1 Observabilité des paramètres

La fonction d'erreur mise en œuvre pour l'identification des modèles géométriques à 18 et 42 paramètres est la suivante :

$$F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda} \tag{4.32}$$

La composante $\Lambda_{i,j}$ du vecteur $\boldsymbol{\Lambda}$ est définie, à partir du modèle à identifier, de la façon suivante :

$$\Lambda_{i,j}\left(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{q}_j,\boldsymbol{\xi}_{15}\right)=\left\|H_{18mgd}\left(G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{\xi}_{15}\right),S_i\right)-H_{18mgd}\left(G_{18mgd}\left(\boldsymbol{q}_j,\boldsymbol{\xi}_{15}\right),S_j\right)\right\|-D_{ij} \tag{4.33}$$

$$\Lambda_{i,j}\left(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{q}_j,\boldsymbol{\xi}_{39}\right)=\left\|H_{42mgd}\left(G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{\xi}_{39}\right),S_i\right)-H_{42mgd}\left(G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}_j,\boldsymbol{\xi}_{39}\right),S_j\right)\right\|-D_{ij} \tag{4.34}$$

Les paramètres identifiables lors de la procédure d'identification sont déterminés par l'étude du rang de la matrice d'observation $\boldsymbol{W}$ utilisée pour identifier les erreurs sur les paramètres géométriques [Khalil 2002]. La matrice $\boldsymbol{W}$ est obtenue à partir de la linéarisation de l'ensemble des équations (4.33) et (4.34) mise en œuvre pour l'étalonnage, elle est définie par :

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,2},\boldsymbol{p}_{1,2},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,1},\boldsymbol{p}_{1,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,3},\boldsymbol{p}_{1,3},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,1},\boldsymbol{p}_{1,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,4},\boldsymbol{p}_{1,4},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,1},\boldsymbol{p}_{1,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,5},\boldsymbol{p}_{1,5},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{1,1},\boldsymbol{p}_{1,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\vdots\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,2},\boldsymbol{p}_{n,2},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,1},\boldsymbol{p}_{n,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,3},\boldsymbol{p}_{n,3},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,1},\boldsymbol{p}_{n,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,4},\boldsymbol{p}_{n,4},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,1},\boldsymbol{p}_{n,1},\boldsymbol{\xi}\right)\\
\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,5},\boldsymbol{p}_{n,5},\boldsymbol{\xi}\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{q}_{n,1},\boldsymbol{p}_{n,1},\boldsymbol{\xi}\right)
\end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Suivant le modèle considéré, le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ et la matrice $\boldsymbol{\psi}$ correspondent respectivement :

- aux vecteurs des paramètres $\boldsymbol{\xi}_{15}$ ou $\boldsymbol{\xi}_{39}$;
- aux matrices jacobiennes $\boldsymbol{J}_{18}$ du modèle 18, ou $\boldsymbol{J}_{p42}$ du modèle 42 évaluées pour la configuration du robot correspondant au point de mesure.

Les vecteurs $\boldsymbol{q}_{i,j}$ et $\boldsymbol{p}_{i,j}$ représentent respectivement les variables articulaires et la position du centre de la nacelle pour la $j^{ième}$ mesure de la $i^{ième}$ position de l'artefact.

Le système d'identification est réécrit de façon à ce que le vecteur des paramètres géométriques ne soit composé que de la base B des paramètres identifiables. Ce système est obtenu numériquement en utilisant une décomposition QR de la matrice d'observation $\boldsymbol{W}$. On définit ainsi, à partir des b paramètres indépendants, une nouvelle matrice $\boldsymbol{W}_b$ de rang plein [Besnard 2001].

Le bilan de cette étude d'observabilité, réalisée à partir des 120 équations de distances issues des 30 situations différentes de l'artefact, est donné dans le Tableau 4.1.

Hormis le paramètre Rn du rayon de la nacelle, tous les paramètres non identifiables du modèle 42 sont des paramètres relatifs aux parallélogrammes. A la vue des résultats de l'étude de sensibilité de la position de la nacelle aux variations des paramètres angulaires donnés à la Figure 2.21, les paramètres angulaires non identifiables sont ceux qui ont l'influence la plus faible sur la position de la nacelle. Il faut aussi noter que pour chaque parallélogramme, à l'exception du petit côté supérieur, tous les paramètres dimensionnels sont identifiables. Finalement, 14 paramètres associés aux parallélogrammes sont identifiables.

	Nombre de paramètres identifiables	Paramètres non, ou difficilement observables	Conditionnement de $\boldsymbol{W}_b$
Modèle 18	16	β_{21}, β_{31}	47
Modèle 42	27	Rn, Lc_{11}, β_{12}, θ_{13}, Lc_{21}, β_{21}, β_{22}, θ_{22}, θ_{23}, γ_{22}, Lc_{31}, β_{31}, β_{32}, θ_{33}, γ_{32}	364

Tableau 4.1– Observabilité des paramètres

4.4.5.2 Modèle géométrique à 18 paramètres

L'étude de l'observabilité des paramètres du modèle 18 montre que les paramètres β_{21} et β_{31} sont difficilement identifiables. En prenant en compte ces deux paramètres, le conditionnement de la matrice d'observation $\boldsymbol{W}$ est de 3775. Le modèle initial à 18 paramètres est donc réduit à un modèle à 16 paramètres pour lequel le conditionnement de la matrice d'observation est de 47.

4.4.5.2.1 Paramètres géométriques identifiés

Les résultats de cette identification géométrique, donnés dans le Tableau 4.2, font apparaître des écarts importants entre les valeurs de certains paramètres nominaux et leur valeur identifiée. A titre d'exemple, la valeur identifiée de L_3 est supérieure à $956\,mm$ alors que la valeur nominale n'est que de $950\,mm$.

Paramètre	Valeur nominale	Chaine cinématique 1	Chaine cinématique 2	Chaine cinématique 3
R	$50\ (mm)$	57,067		
Lb_i	$750\ (mm)$	754,090	754,715	753,053
L_i	$950\ (mm)$	953,655	954,512	956,709
θ_{i1}	$0\ (rad)$	0,002150	-0,003549	0,002030
α_{i1}	$-\pi/2\ (rad)$	-1,565027	-1,575492	-1,569600
β_{i1}	$0\ (rad)$	0,008185		
γ_{21}	$2\pi/3\ (rad)$		2,081059	
γ_{31}	$4\pi/3\ (rad)$			6,273054

Tableau 4.2 – Paramètres géométriques identifiés du modèle géométrique 18

4.4.5.2.2 Validation de l'étalonnage

Evaluation de l'identification

Les critères V_1 et V_2, définis par les expressions (4.27) et (4.28), permettent d'évaluer la fiabilité de l'identification. Dans un premier temps, ces deux critères sont évalués à partir des 150 configurations utilisées pour l'identification du modèle géométrique de la structure Delta. Dans un second temps, ces mêmes critères sont évalués à partir de trois séries de mesures correspondant chacune à 15 configurations différentes du Delta réalisées pour différents chargements de la nacelle (la première série de mesures, réalisée avec un chargement de $2,2\,kg$, correspond aux conditions de chargement de la structure lors de la phase d'identification. Les séries de mesures suivantes sont réalisées avec des chargements correspondant à des masses de $23,7$ et $48,1\,kg$). Ces mesures complémentaires ont été définies au paragraphe (4.4.2.3.2).
Les résultats de l'évaluation de l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres sont donnés dans le Tableau 4.3.

		Critère V_1		Critère V_2	
		$V_1(mm)$	Gain	$V_2(mm)$	Gain
Configurations utilisées pour l'identification	Modèle nominal	1,307	93,5 %	1,545	92,2 %
	Modèle identifié	0,085		0,120	
Validation 1. Charge : $2,2\,kg$	Modèle nominal	1,136	93,3 %	1,411	93,1 %
	Modèle identifié	0,076		0,097	
Validation 2. Charge : $23,7\,kg$	Modèle nominal	1,831	63,0 %	2,119	63,9 %
	Modèle identifié	0,678		0,764	
Validation 3. Charge : $48,1\,kg$	Modèle nominal	2,712	44,8 %	2,876	44,3 %
	Modèle identifié	1,496		1,603	

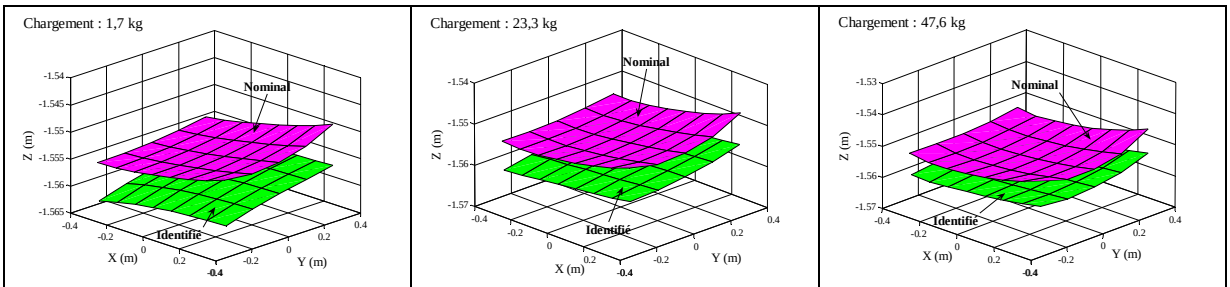
Tableau 4.3 – Evaluation de l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres

Evaluation du défaut de planéité du marbre

Les critères V_3 et V_4, définis par les expressions (4.30) et (4.31), permettent une évaluation de la fiabilité de l'identification par l'intermédiaire de la mesure du défaut de planéité du marbre. Ces critères sont évalués à partir de trois séries de mesures réalisées pour trois chargements différents de la nacelle ($1,7\,kg$, $23,3\,kg$ et $47,6\,kg$). Il faut noter que ces trois chargements sont différents de ceux utilisés dans le cadre de l'évaluation des critères V_1 et V_2 car la mesure du défaut de planéité ne nécessite qu'un comparateur. Pour une série de mesure correspondant à un chargement donné,

l'évaluation du défaut de planéité est réalisée à partir de 40 points de mesures régulièrement répartis sur la zone du marbre définie par : $(-350\,mm \le X \le 35\,mm \quad -300\,mm \le Y \le 300\,mm)$.

Les résultats relatifs à la mesure du défaut de planéité du marbre, à partir de l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres, sont donnés dans le Tableau 4.4.



Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain
Modèle nominal	2,566	50,1 %	Modèle nominal	4,060	78,3 %	Modèle nominal	5,937	60,5 %
Modèle identifié	1,280		Modèle identifié	0,882		Modèle identifié	2,347	
Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain
Modèle nominal	0,582	41,2 %	Modèle nominal	0,933	81,0 %	Modèle nominal	1,394	58,8 %
Modèle identifié	0,342		Modèle identifié	0,177		Modèle identifié	0,575	

Tableau 4.4 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle géométrique à 18 paramètres

L'évaluation de la mesure du défaut de planéité du marbre à partir de l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres fournis des résultats contradictoires. En effet, les évaluations des critères V_3 et V_4 à partir d'un chargement de $1,7\,kg$ sont moins bonnes que celles correspondant aux chargements de $23,3\,kg$ et $47,6\,kg$. Ces résultats sont difficilement explicables, d'autant plus inexplicables, que les évaluations des critères V_1 et V_2 (Tableau 4.3) sont tout à fait cohérentes, à savoir un gain important d'environ 93 % pour le chargement correspondant à celui de l'étalonnage, puis un gain qui diminue à mesure que le chargement augmente.

4.4.5.3 Modèle géométrique à 42 paramètres

L'étude de l'observabilité des paramètres réalisée au paragraphe (4.4.5.1) a permis de montrer que parmi les 42 paramètres du modèles, 15 sont difficilement, voire non identifiables. En réécrivant le modèle à partir de la base B des 27 paramètres identifiables, le conditionnement de la matrice d'observation de rang plein $\boldsymbol{W}_b$ est de 364.

4.4.5.3.1 Paramètres géométriques identifiés

Les résultats de cette identification géométrique sont donnés dans le Tableau 4.5. Ces résultats font apparaître, tout comme pour l'identification du modèle géométrique à 18 paramètres, des écarts importants entre les valeurs des paramètres identifiés, et les valeurs des paramètres nominaux.

Paramètre	Valeur nominale	Chaine cinématique 1	Chaine cinématique 2	Chaine cinématique 3
Rb	250 (mm)	251,956		
Lb_i	750 (mm)	747,390	746,874	747,268
L_{i1}	950 (mm)	954,008	952,962	955,365
L_{i2}	950 (mm)	950,662	954,772	953,676
Lc_{i2}	125 (mm)	125,126	125,480	125,857
θ_{i1}	0 (rad)	-0,000432	-0,006648	-0,009080
α_{i1}	$-\pi/2$ (rad)	-1,573106	-1,572699	-1,573517
β_{i1}	0 (rad)	0,000081		
θ_{i2}	0 (rad)	-0,003058		-0,019557
β_{i3}	0 (rad)	-0,001684	0,014784	-0,011467
γ_{21}	$2\pi/3$ (rad)		2,088386	
γ_{31}	$4\pi/3$ (rad)			4,188647

Tableau 4.5 – Paramètres géométriques identifiés du modèle géométrique 42

4.4.5.3.2 Validation de l'étalonnage

Evaluation de l'identification

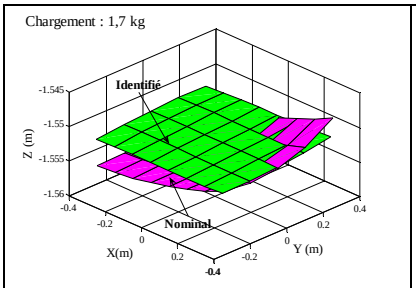
Les résultats de l'évaluation de l'identification du modèle géométrique à 42 paramètres, à partir des critères V_1 et V_2, sont donnés dans le Tableau 4.6.

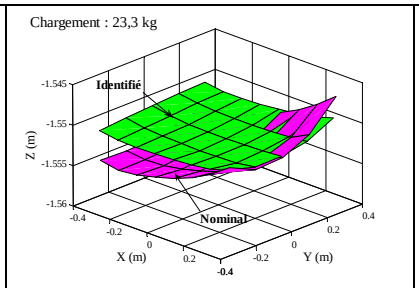
		Critère V_1		Critère V_2	
		$V_1(mm)$	Gain	$V_2(mm)$	Gain
Configurations utilisées pour l'identification	Modèle nominal	1,307	93,2 %	1,545	92,0 %
	Modèle identifié	0,089		0,123	
Validation 1. Charge : $2,2\ kg$	Modèle nominal	1,136	89,6 %	1,411	90,6 %
	Modèle identifié	0,118		0,132	
Validation 2. Charge : $23,7\ kg$	Modèle nominal	1,831	62,5 %	2,119	63,2 %
	Modèle identifié	0,686		0,780	
Validation 3. Charge : $48,1\ kg$	Modèle nominal	2,712	46,0 %	2,876	45,6 %
	Modèle identifié	1,464		1,564	

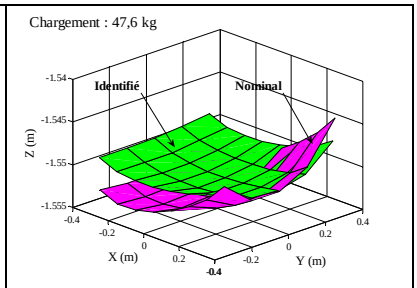
Tableau 4.6 – Evaluation de l'identification du modèle géométrique à 42 paramètres

Evaluation du défaut de planéité du marbre

Les résultats relatifs à la mesure du défaut de planéité du marbre, à partir de l'identification du modèle géométrique à 42 paramètres, sont donnés dans le Tableau 4.7.







Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain
Modèle nominal	2,566	71,3 %	Modèle nominal	4,060	53,8 %	Modèle nominal	5,937	36,8 %
Modèle identifié	0,736		Modèle identifié	1,877		Modèle identifié	3,751	
Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain
Modèle nominal	0,582	80,6 %	Modèle nominal	0,933	55,4 %	Modèle nominal	1,394	36,7 %
Modèle identifié	0,113		Modèle identifié	0,416		Modèle identifié	0,882	

Tableau 4.7 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle géométrique à 42 paramètres

4.4.5.4 Conclusion sur l'étalonnage géométrique

L'invraisemblance des résultats de l'identification des paramètres géométriques des modèles à 18 et 42 paramètres est liée au fait que ces deux modèles utilisés pour décrire la structure ne permettent pas de représenter tous les effets dégradant la précision de positionnement statique. En effet, ces modèles purement géométriques ne prennent pas en compte les déformations élastiques de la structure sous son poids propre alors même qu'il a été montré au paragraphe (4.2.3) que ces déformations pouvaient être de l'ordre du millimètre. Les valeurs d'erreurs importantes sur l'identification des paramètres géométriques ne peuvent nullement représenter des erreurs réelles. Ces dernières ne sont que le fruit d'une répartition sur les paramètres géométriques identifiés, des effets des sources d'erreurs non prises en compte [Damak 1996].
Par contre, l'identification des paramètres géométriques réalisés à partir des modèles 18 et 42 font apparaître un gain significatif en termes de précision de la structure dès lors qu'aucun chargement ne lui est appliqué. L'identification purement géométrique a permis de définir des modèles virtuels qui intègrent tous les phénomènes non modélisés et qui au final améliorent toutefois, la précision de positionnement statique de la structure.

4.4.6 Identification des modèles élasto-géométriques

4.4.6.1 Etude de la sensibilité du modèle élastique

4.4.6.1.1 Introduction

Dans le cadre de ce paragraphe, la modélisation élastique de la structure Delta, définie au paragraphe (3.4) est modifiée en intégrant certaines erreurs sur les paramètres géométriques. Afin de prendre en compte ces erreurs, toutes les matrices de passage mises en œuvre dans le calcul d'une part, des différentes matrices de rigidité exprimées dans le repère de base et d'autre part, des relations de dépendance linéaire, sont réécrites en intégrant des erreurs sur les paramètres géométriques du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39}$ introduit par l'expression (2.60).
Les déplacements en translation et en rotation du repère de la nacelle, représentés par le vecteur déplacement ${}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4}$, peuvent être définis comme étant une fonction H :

- de la configuration articulaire $\boldsymbol{q}$ de la structure ;
- des sollicitations mécaniques extérieures $\boldsymbol{F}$ agissant sur la structure ;
- de l'ensemble des paramètres mécaniques défini par le vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$;
- des paramètres géométriques du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{39}$ définis au chapitre 2.

Cette fonction peut être écrite de la façon suivante :

$$ {}^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = \left[{}^{R_b}d\boldsymbol{P}^{e}_{n_4} \quad {}^{R_b}\boldsymbol{\delta}^{e}_{n_4} \right] = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{F},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\xi}_{39}) = {}^{R_b}\boldsymbol{K}_{eq}{}^{-1}\,{}^{R_b}\boldsymbol{F}_{eq} \tag{4.36} $$

A partir de cette fonction, l'étude de la sensibilité du modèle de déformation élastique de la structure aux variations des paramètres géométriques et mécanique est réalisée à partir de 975 points régulièrement repartis dans le volume de travail suivant :

$$\left(-0,35\,m \le X \le 0,35\,m \quad -0,3\,m \le Y \le 0,3\,m \quad -1,4\,m \le Z \le -1\,m\right)$$

Les conditions de cette étude sont donc similaires à celles de l'étude de la sensibilité du modèle géométrique aux variations des paramètres géométriques décrite au chapitre (2.4). De ce fait, l'étude peut être réduite aux variations des paramètres du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{c2}$ qui regroupe les paramètres de la seconde chaîne cinématique et qui a été définie par l'expression (2.92). L'étude de la sensibilité du modèle élastique à la variation des différents paramètres est donc réduite à l'étude de la fonction $\tilde{H}$ définie de la façon suivante :

$$^{R_b}\Delta\boldsymbol{X}_{n_4} = \begin{bmatrix} ^{R_b}d\boldsymbol{P}^e_{n_4} & ^{R_b}\boldsymbol{\delta}^e_{n_4} \end{bmatrix} = \tilde{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{F},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\xi}_{c2}) = \tilde{H}(\boldsymbol{\omega}) \tag{4.37}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur regroupant l'ensemble des n paramètres considérés dans le cadre de cette étude de sensibilité.

La matrice jacobienne du modèle de déformation élastique, décrite par la fonction $\tilde{H}$, n'a pas pu être définie de façon explicite. Les termes de cette matrice jacobienne sont donc définis numériquement de la façon suivante :

$$\boldsymbol{J}_{\tilde{H}} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{p_x(\omega_1)-p_x(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_x(\omega_i)-p_x(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{p_x(\omega_n)-p_x(0)}{\omega_n}\right) \\ \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{p_y(\omega_1)-p_y(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_y(\omega_i)-p_y(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{p_y(\omega_n)-p_y(0)}{\omega_n}\right) \\ \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{p_z(\omega_1)-p_z(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_z(\omega_i)-p_z(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{p_z(\omega_n)-p_z(0)}{\omega_n}\right) \\ \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{\psi(\omega_1)-\psi(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{\psi(\omega_i)-\psi(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{\psi(\omega_n)-\psi(0)}{\omega_n}\right) \\ \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{\vartheta(\omega_1)-\vartheta(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{\vartheta(\omega_i)-\vartheta(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{\vartheta(\omega_n)-\vartheta(0)}{\omega_n}\right) \\ \lim\limits_{\omega_1\to 0}\left(\dfrac{\phi(\omega_1)-\phi(0)}{\omega_1}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{\phi(\omega_i)-\phi(0)}{\omega_i}\right) & \cdots & \lim\limits_{\omega_n\to 0}\left(\dfrac{\phi(\omega_n)-\phi(0)}{\omega_n}\right) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Sensibilité du déplacement en translation du centre de la nacelle aux variations des paramètres

Pour une configuration donnée de la structure, une erreur $\delta\omega_i$ sur le $i^{ième}$ paramètre du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ engendre une variation du déplacement en translation du centre de la nacelle donnée par :

$$\begin{cases} \delta p_x = \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_x(\omega_i)-p_x(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{1i}}\delta\omega_i \\ \delta p_y = \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_y(\omega_i)-p_y(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{2i}}\delta\omega_i \\ \delta p_z = \lim\limits_{\omega_i\to 0}\left(\dfrac{p_z(\omega_i)-p_z(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{3i}}\delta\omega_i \end{cases} \tag{4.39}$$

L'erreur $\delta\boldsymbol{p}$ sur le déplacement du centre de la nacelle est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{p} = \sqrt{\delta p_x{}^2 + \delta p_y{}^2 + \delta p_z{}^2} = \delta\omega_i \sqrt{\left(J_{\tilde{H}_{1i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{2i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{3i}}\right)^2} \tag{4.40}$$

L'indice de sensibilité du déplacement du centre de la nacelle à la variation du paramètre ω_i est défini par :

$$\mu_{p_i} = \sqrt{\left(J_{\tilde{H}_{1i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{2i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{3i}}\right)^2} \tag{4.41}$$

Sensibilité de la rotation de la nacelle aux variations des paramètres

Une erreur $\delta\omega_i$ sur le $i^{ième}$ paramètre du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ engendre une variation de rotation de la nacelle donnée par :

$$\begin{cases} \delta\psi = \lim\limits_{\omega_i \to 0}\left(\dfrac{\psi(\omega_i) - \psi(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{4i}}\delta\omega_i \\ \delta\vartheta = \lim\limits_{\omega_i \to 0}\left(\dfrac{\vartheta(\omega_i) - \vartheta(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{5i}}\delta\omega_i \\ \delta\phi = \lim\limits_{\omega_i \to 0}\left(\dfrac{\phi(\omega_i) - \phi(0)}{\omega_i}\right)\delta\omega_i = J_{\tilde{H}_{6i}}\delta\omega_i \end{cases} \tag{4.42}$$

Finalement, l'erreur $\delta\boldsymbol{r}$ sur la rotation de la nacelle est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{r} = \sqrt{\delta\psi^2 + \delta\vartheta^2 + \delta\phi^2} = \delta\omega_i \sqrt{\left(J_{\tilde{H}_{4i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{5i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{6i}}\right)^2} \tag{4.43}$$

L'indice de sensibilité de la rotation de la nacelle à la variation du paramètre ω_i est défini par :

$$\mu_{r_i} = \sqrt{\left(J_{\tilde{H}_{4i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{5i}}\right)^2 + \left(J_{\tilde{H}_{6i}}\right)^2} \tag{4.44}$$

4.4.6.1.2 Sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres mécaniques

La sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres mécaniques est obtenue à partir des expressions (4.40) et (4.43) pour un ensemble de paramètres ω_i correspondant aux paramètres les plus significatifs du vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$, a savoir, les modules de Young ainsi que les diamètres des différents éléments de la structure.

Les résultats de cette étude de sensibilité sont donnés dans le Tableau 4.8.

Les diamètres des différents éléments sont connus avec une bonne précision. De ce fait, l'incertitude sur ces paramètres n'aura que très peu d'influence sur les déformations élastiques de la structure. A la vue de ces résultats, la sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres mécaniques ne sera pas prise en compte dans l'identification des modèles élasto-géométriques. De plus, la prise en compte de ces erreurs lors des phases d'identification introduirait inévitablement des paramètres supplémentaires qui seraient difficilement identifiables.

	Translation du centre de la nacelle		Rotation de la nacelle	
	Sensibilité Max	Sensibilité Moyenne	Sensibilité Max	Sensibilité Moyenne
E_{al}	0,000	0,000	0,000	0,000
E_{ac}	0,000	0,000	0,000	0,000
$\phi_{1\text{ext}}$	0,111 $(\mu m/\mu m)$	0,053 $(\mu m/\mu m)$	0,054 $(10^{-6} rad/\mu m)$	0,026 $(10^{-6} rad/\mu m)$
$\phi_{1\text{int}}$	0,076 $(\mu m/\mu m)$	0,036 $(\mu m/\mu m)$	0,037 $(10^{-6} rad/\mu m)$	0,018 $(10^{-6} rad/\mu m)$
$\phi_{3\text{ext}}$	0,048 $(\mu m/\mu m)$	0,017 $(\mu m/\mu m)$	0,273 $(10^{-6} rad/\mu m)$	0,043 $(10^{-6} rad/\mu m)$
$\phi_{3\text{int}}$	0,040 $(\mu m/\mu m)$	0,014 $(\mu m/\mu m)$	0,171 $(10^{-6} rad/\mu m)$	0,026 $(10^{-6} rad/\mu m)$
ϕ_2	0,042 $(\mu m/\mu m)$	0,016 $(\mu m/\mu m)$	0,090 $(10^{-6} rad/\mu m)$	0,042 $(10^{-6} rad/\mu m)$

Tableau 4.8 – Sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres mécaniques

4.4.6.1.3 Sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques

La sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques est obtenue à partir des expressions (4.40) et (4.43) pour l'ensemble des paramètres ω_i correspondant au vecteur ξ_{c2}. Afin d'observer l'influence du chargement de la structure sur la sensibilité de sa déformation aux variations des paramètres géométriques, l'étude de sensibilité est réalisée pour deux valeurs de chargement différentes. Pour la première valeur de chargement, seul le poids propre de la structure est pris en considération. Pour la seconde valeur, une charge de -500 N qui s'ajoute au poids propre de la structure est appliquée au centre de la nacelle.

Etude de la sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques pour la première valeur de chargement

Les résultats de cette première étude de sensibilité sont donnés dans le Tableau 4.9 et le Tableau 4.10.

	Translation du centre de la nacelle		Rotation de la nacelle	
	Sensibilité Max $\mu_p(\mu m/\mu m)$	Sensibilité Moyenne $\mu_p(\mu m/\mu m)$	Sensibilité Max $\mu_r(10^{-6} rad/\mu m)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r(10^{-6} rad/\mu m)$
Rb	0,015	0,002	0,009	0,002
Rn	0,025	0,006	0,019	0,008
Lb_2	0,005	0,001	0,007	0,003
L_{21}	0,021	0,005	0,074	0,019
L_{22}	0,017	0,005	0,077	0,019
Lc_{21}	0,028	0,004	0,087	0,015
Lc_{22}	0,029	0,004	0,087	0,017

Tableau 4.9 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous son poids propre, aux variations des paramètres dimensionnels

	Déplacement du centre de la nacelle		Rotation de la nacelle	
	Sensibilité Max $\mu_r\left(\mu m/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r\left(\mu m/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Max $\mu_r\left(10^{-6} rad/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r\left(10^{-6} rad/10^{-6} rad\right)$
θ_{21}	0,012	0,002	0,008	0,004
α_{21}	0,010	0,001	0,007	0,003
β_{21}	0,004	0,001	0,015	0,003
β_{22}	0,002	0,000	0,005	0,001
θ_{22}	0,002	0,000	0,005	0,001
θ_{23}	0,004	0,001	0,018	0,004
β_{23}	0,002	0,001	0,005	0,002
γ_{21}	0,007	0,002	0,015	0,004
γ_{22}	0,004	0,001	0,018	0,004

Tableau 4.10 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous son poids propre, aux variations des paramètres angulaires

Etude de la sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques pour la seconde valeur du chargement

Les résultats de cette seconde étude de sensibilité sont donnés dans le Tableau 4.11 et le Tableau 4.12.

	Translation du centre de la nacelle		Rotation de la nacelle	
	Sensibilité Max $\mu_p\left(\mu m/\mu m\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_p\left(\mu m/\mu m\right)$	Sensibilité Max $\mu_r\left(10^{-6} rad/\mu m\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r\left(10^{-6} rad/\mu m\right)$
Rb	0,068	0,011	0,040	0,007
Rn	0,111	0,024	0,086	0,034
Lb_2	0,024	0,005	0,031	0,013
L_{21}	0,095	0,021	0,320	0,082
L_{22}	0,072	0,021	0,334	0,082
Lc_{21}	0,123	0,017	0,381	0,067
Lc_{22}	0,129	0,019	0,403	0,073

Tableau 4.11 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous un chargement de -500N ajouté à son poids propre, aux variations des paramètres dimensionnels

	Déplacement du centre de la nacelle		Rotation de la nacelle	
	Sensibilité Max $\mu_r\left(\mu m/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r\left(\mu m/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Max $\mu_r\left(10^{-6} rad/10^{-6} rad\right)$	Sensibilité Moyenne $\mu_r\left(10^{-6} rad/10^{-6} rad\right)$
θ_{21}	0,050	0,008	0,036	0,017
α_{21}	0,043	0,006	0,032	0,014
β_{21}	0,018	0,005	0,065	0,015
β_{22}	0,008	0,001	0,022	0,005
θ_{22}	0,008	0,001	0,022	0,005
θ_{23}	0,017	0,004	0,078	0,018
β_{23}	0,009	0,003	0,022	0,010
γ_{21}	0,029	0,007	0,066	0,016
γ_{22}	0,017	0,006	0,076	0,018

Tableau 4.12 – Sensibilité de la déformation de la structure, sous un chargement de -500N ajouté à son poids propre, aux variations des paramètres angulaires

Bilan de l'étude de sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques

A la vue des résultats donnés dans les tableaux précédents, la sensibilité de la déformation de la structure aux variations des paramètres géométriques est très faible. Il faut noter que cette sensibilité croît lorsque le chargement de la structure augmente. Il est toutefois difficile d'affirmer que ces variations sont ou non détectables par les dispositifs de mesure utilisés. Par conséquent, il est difficile de conclure sur l'existence d'un couplage réel entre le modèle de déformation élastique et le modèle géométrique.

Afin d'étudier ces deux cas de figure, à savoir le couplage ou le découplage entre le modèle de déformation et le modèle géométrique, deux stratégies différentes d'identification seront étudiées dans la suite de ce chapitre :

- la première identification sera réalisée en considérant que ces deux modèles sont découplés et le modèle de déformation sera donc établi à partir de ces paramètres nominaux ;
- La seconde identification sera réalisée en considérant un couplage entre ces deux modèles.

4.4.6.2 Identification du modèle élasto-géométrique découplé à 42 paramètres

4.4.6.2.1 Modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres

Le modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres G^d_{42megd} est un modèle utilisé dans le cadre de l'étalonnage de la structure Delta. Ce modèle prend en considération le découplage entre les comportements élastique et géométrique. Il est défini par :

$$\boldsymbol{p} = G^d_{42megd}\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\xi}_{39}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39}\right) + H_n\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39n}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) \tag{4.45}$$

Remarque

L'identification des paramètres du modèle élasto-géométrique direct découplé revient à identifier le modèle géométrique direct corrigé des déformations élastiques de la structure évaluées par le modèle de déformation élastique nominal.

4.4.6.2.2 Paramètres géométriques identifiés

Les résultats de cette identification sont donnés dans le Tableau 4.13. Globalement, ces résultats font apparaître des valeurs identifiées qui sont plus proches des valeurs nominales des paramètres que celles obtenues dans le cadre d'une identification purement géométrique. Cela montre l'influence de la prise en compte des déformations élastiques de la structure. Les modèles élasto-géométriques découplés sont donc plus réalistes vis-à-vis du comportement réel de la structure.
La valeur identifiée du rayon de base Rb $(254{,}570\,mm)$ diffère de plus de $4\,mm$ de sa valeur nominale $(250\,mm)$. Cet écart peut être justifié par la définition des points A_i qui correspondent à la projection des points B_i sur l'axe moteur de la chaîne cinématique i. Ces différents paramètres ont été définis au paragraphe (1.3.2.1). Il est possible d'admettre qu'un faible écart dans la position des points B_i puisse engendrer une erreur plus importante dans la position des points A_i et ainsi augmenter la valeur du rayon de base (Figure 4.14).

Paramètre	Valeur nominale	Chaine cinématique 1	Chaine cinématique 2	Chaine cinématique 3
Rb	$250\ (mm)$	254,570		
Lb_i	$750\ (mm)$	750,430	751,660	751,134
L_{i1}	$950\ (mm)$	951,215	949,110	951,029
L_{i2}	$950\ (mm)$	951,138	951,275	950,921
Lc_{i2}	$125\ (mm)$	123,967	123,579	123,668
θ_{i1}	$0\ (rad)$	0,003273	0,000068	-0,000630
α_{i1}	$-\pi/2\ (rad)$	-1,570124	-1,571322	-1,568833
β_{i1}	$0\ (rad)$	-0,000621		
θ_{i2}	$0\ (rad)$	-0,006391		-0,003551
β_{i3}	$0\ (rad)$	-0,000645	0,011190	-0,006904
γ_{21}	$2\pi/3\ (rad)$		2,090275	
γ_{31}	$4\pi/3\ (rad)$			4,186491

Tableau 4.13 – Paramètres géométriques identifiés du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres

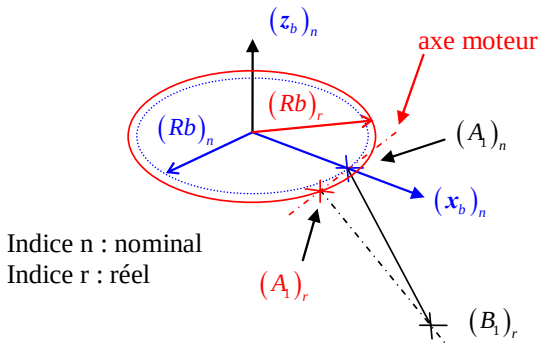


Figure 4.14 – Valeur identifiée de Rb

4.4.6.2.3 Validation de l'étalonnage

Evaluation de l'identification

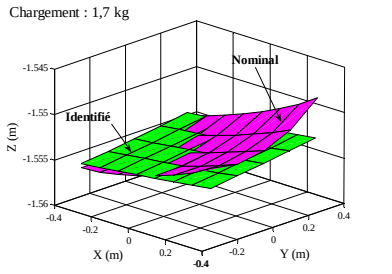
Les résultats, basés sur les critères V_1 et V_2 issus de l'évaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres, sont donnés dans le Tableau 4.14.

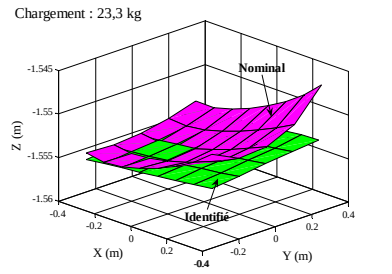
		Critère V_1		Critère V_2	
		$V_1(mm)$	Gain	$V_2(mm)$	Gain
Configurations utilisées pour l'identification	Modèle nominal	1,307	96,3 %	1,545	94,7 %
	Modèle identifié	0,049		0,082	
Validation 1. Charge : 2,2 *kg*	Modèle nominal	1,136	95,1 %	1,411	95,1 %
	Modèle identifié	0,056		0,069	
Validation 2. Charge : 23,7 *kg*	Modèle nominal	1,831	95,0 %	2,119	94,3 %
	Modèle identifié	0,092		0,120	
Validation 3. Charge : 48,1 *kg*	Modèle nominal	2,712	94,2 %	2,876	93,0 %
	Modèle identifié	0,157		0,200	

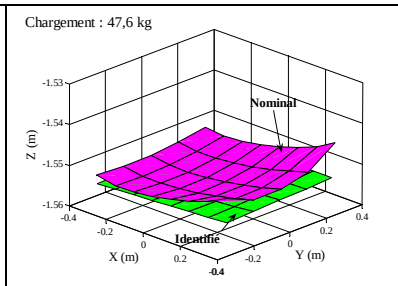
Tableau 4.14 – Evaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres

Evaluation du défaut de planéité du marbre

Les résultats relatifs à la mesure du défaut de planéité du marbre, à partir du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres, sont donnés dans le Tableau 4.15.







Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain
Modèle nominal	2,566	93,3 %	Modèle nominal	4,060	95,3 %	Modèle nominal	5,937	93,8 %
Modèle identifié	0,171		Modèle identifié	0,190		Modèle identifié	0,370	
Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain
Modèle nominal	0,582	93,0 %	Modèle nominal	0,933	95,3 %	Modèle nominal	1,394	93,2 %
Modèle identifié	0,041		Modèle identifié	0,044		Modèle identifié	0,095	

Tableau 4.15 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres

Bilan de l'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres

L'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres permet d'obtenir un modèle qui reflète bien le comportement réel de la structure et ceci indépendamment de son chargement. Les valeurs des critères V_1 et V_2 qui quantifient la qualité de l'identification des paramètres ainsi que celles des critères V_3 et V_4 qui quantifient la mesure de la planéité du marbre permettent de définir un gain supérieur à 93 % et ce quelques soient les conditions de chargement de la structure.

4.4.6.3 Identification du modèle élasto géométrique couplé à 42 paramètres

4.4.6.3.1 Modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres

Le modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres est un modèle utilisé dans le cadre de l'étalonnage de la structure Delta. Ce modèle prend en considération le couplage entre les comportements élastique et géométrique. Il est défini par :

$$\boldsymbol{p} = G^{c}_{42megd}\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) = G_{42mgd}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}_{39}\right) + H_n\left(\boldsymbol{q}, {}^{R_b}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}_{39}, \boldsymbol{\Gamma}_n\right) \tag{4.46}$$

4.4.6.3.2 Paramètres géométriques identifiés

Les résultats de cette identification sont donnés dans le Tableau 4.16. Ces résultats de l'identification des paramètres du modèle élasto-géométrique direct couplé confirment que la prise en compte des déformations élastiques de la structure permet de définir un modèle plus réaliste vis-à-vis du comportement réel de la structure. Par contre, ces résultats ne permettent pas réellement de conclure

sur le bien-fondé du couplage du modèle géométrique et du modèle de déformation élastique de la structure.

Paramètre	Valeur nominale	Chaine cinématique 1	Chaine cinématique 2	Chaine cinématique 3
Rb	$250\ (mm)$	254,176		
Lb_i	$750\ (mm)$	750,362	751,642	751,026
L_{i1}	$950\ (mm)$	951,109	949,045	951,194
L_{i2}	$950\ (mm)$	951,142	951,408	950,963
Lc_{i2}	$125\ (mm)$	124,105	123,709	123,826
θ_{i1}	$0\ (rad)$	0,003245	-0,001436	-0,000725
α_{i1}	$-\pi/2\ \ (rad)$	-1,569211	-1,571240	-1,569318
β_{i1}	$0\ (rad)$	0,000455		
θ_{i2}	$0\ (rad)$	-0,005573		-0,002041
β_{i3}	$0\ (rad)$	-0,001513	0,010821	-0,005863
γ_{21}	$2\pi/3\ \ (rad)$		2,089420	
γ_{31}	$4\pi/3\ \ (rad)$			4,185571

Tableau 4.16 – Paramètres géométriques identifiés du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres

4.4.6.3.3 Validation de l'étalonnage

Les résultats, basés sur les critères V_1 et V_2 issus de l'évaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres sont donnés dans le Tableau 4.17.

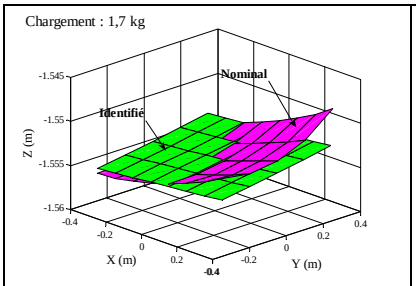
		Critère V_1		Critère V_2	
		$V_1(mm)$	Gain	$V_2(mm)$	Gain
Configurations utilisées pour l'identification	Paramètres nominaux	1,307	96,3 %	1,545	94,7 %
	Paramètres identifiés	0,049		0,082	
Validation 1. Charge : $2,2\ kg$	Paramètres nominaux	1,136	95,1 %	1,411	95,2 %
	Paramètres identifiés	0,056		0,068	
Validation 2. Charge : $23,7\ kg$	Paramètres nominaux	1,831	95,4 %	2,119	94,7 %
	Paramètres identifiés	0,084		0,113	

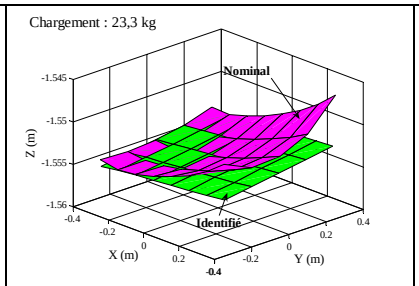
		Critère V_1		Critère V_2	
		$V_1(mm)$	Gain	$V_2(mm)$	Gain
Validation 3. Charge : 48,1 kg	Paramètres nominaux	2,712	94,2 %	2,876	93,0 %
	Paramètres identifiés	0,157		0,202	

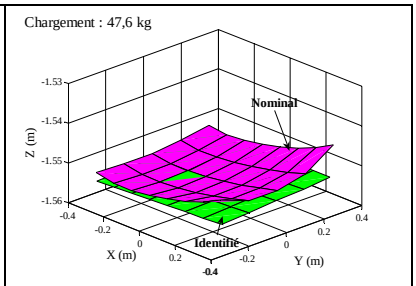
Tableau 4.17 – Evaluation de l'identification du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres

Evaluation du défaut de planéité du marbre

Les résultats relatifs à la mesure du défaut de planéité du marbre, à partir du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres, sont donnés dans le Tableau 4.18.







Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain	Critère V_3 (mm)		Gain
Modèle nominal	2,566	95,8 %	Modèle nominal	4,060	96,4 %	Modèle nominal	5,937	94,8 %
Modèle identifié	0,109		Modèle identifié	0,146		Modèle identifié	0,308	
Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain	Critère V_4 (mm)		Gain
Modèle nominal	0,582	95,4 %	Modèle nominal	0,933	95,9 %	Modèle nominal	1,394	93,5 %
Modèle identifié	0,027		Modèle identifié	0,038		Modèle identifié	0,091	

Tableau 4.18 – Mesure de la planéité du marbre à partir du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres

Bilan de l'identification du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres

Tout comme dans le cadre de l'identification du modèle élasto-géométrique direct découplé, l'identification du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres permet d'obtenir un modèle qui reflète bien le comportement réel de la structure et ceci indépendamment de son chargement.

4.4.6.4 Conclusion sur l'étalonnage élasto-géométrique

L'identification des paramètres géométriques de la structure par l'intermédiaire d'une modélisation élasto-géométrique permet d'obtenir un modèle plus réaliste vis-à-vis de la structure réelle. En effet, les paramètres ainsi identifiés sont proches de leur valeur nominale.
De plus, quelque soit le chargement de la structure, toutes les mesures réalisées afin de valider les différents modèles ont permis de montrer la pertinence des modèles élasto-géométriques identifiés.
Les valeurs des critères V_1 et V_2 données dans le Tableau 4.14 et dans le Tableau 4.17 ne permettent pas de différencier les modèles élasto-géométrique couplé et découplé. Par contre, les mesures relatives à la planéité du marbre font apparaître de petites différences, résumées dans le Tableau 4.19, permettant de choisir la modélisation élasto-géométrique couplée comme étant la plus pertinente.

	Chargement : $1,7\ kg$		Chargement : $23,3\ kg$		Chargement : $47,6\ kg$	
	Critère V_4	Gain	Critère V_4	Gain	Critère V_4	Gain
Modèle élasto-géométrique découplé	0,041	93,0 %	0,044	95,3 %	0,095	93,2 %
Modèle élasto-géométrique couplé	0,027	95,4 %	0,038	96,1 %	0,091	93,5 %

Tableau 4.19 – Critère de planéité V_4 pour les modèles élasto-géométriques découplé et couplé

4.5 Estimation des temps de calcul des modèles élasto-géométriques

L'estimation du temps de calcul moyen des modèles élasto-géométriques direct et inverse approchés, est réalisée à partir d'une grille de 975 points régulièrement répartis dans le volume de travail suivant : $(-0,35\ m \le X \le 0,35\ m \quad -0,3\ m \le Y \le 0,3\ m \quad -1,4\ m \le Z \le -1\ m)$. Cette simulation, réalisée sur un Pentium D à 3,20 GHz et 3,62 Go de RAM avec un code de programmation Matlab®, donne les résultats suivants :

- modèle élasto-géométrique direct : 82,8 ms ;
- modèle élasto-géométrique inverse approché : 117,6 ms.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en œuvre la modélisation géométrique à 42 paramètres, ainsi que le modèle de déformation élastique de la structure Delta du Surgiscope®, respectivement présentées aux chapitres 2 et 3. Dans un premier temps, les modèles élasto-géométrique direct, et élasto-géométrique inverse approché de cette structure ont été introduits.
Une étude de la déformation de la structure sous son propre poids à été réalisée. Cette étude à mis en évidence ces déformations peuvent être importantes, et qu'elles ne doivent pas être négligées.
Plusieurs stratégies d'identification des paramètres géométriques ont été étudiées. A savoir :

- l’identification des paramètres géométriques des modèles géométriques à 18 et 42 paramètres ;
- l’identification des paramètres géométriques du modèle élasto-géométrique direct découplé à 42 paramètres ;
- l’identification des paramètres géométriques du modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres.

Les résultats de ces identifications ont fait apparaître :

- que les modélisations purement géométriques permettent d’améliorer la précision statique de la structure, lorsque celle-ci n’est pas chargée. En cas de chargement, le gain en termes de précision statique décroit à mesure que le chargement augmente (avec un petit bémol pour la mesure du défaut de planéité réalisée à partir du modèle géométrique à 18 paramètres) ;
- que les modélisations élasto-géométriques permettent d’améliorer la précision statique de la structure, que celle-ci soit chargée ou non. Le gain résultant d’une identification des paramètres géométriques des modèles élasto-géométrique est supérieur à 93 % quelque soit la configuration de chargement. Le modèle élasto-géométrique direct couplé à 42 paramètres est légèrement plus performant que le même modèle découplé. Cela traduit la faible influence de la variation des paramètres géométriques sur le comportement élastique de la structure. Il faut aussi noter que l’identification des paramètres géométriques, dans le cadre d’une modélisation élasto-géométrique, fournit des résultats réalistes vis-à-vis de la structure réelle. Cela montre la pertinence de la modélisation élasto-géométrique.

Conclusion Générale

Traditionnellement, la description des manipulateurs à structure parallèle est réalisée à partir d'un modèle purement géométrique dont les paramètres sont identifiés au cours d'une phase d'étalonnage dite géométrique. Même si les conditions de chargement d'une structure sont similaires à celles de la phase d'étalonnage et que le modèle identifié améliore sa précision de positionnement statique, il n'en demeure pas moins que ce modéle n'est pas réaliste vis-à-vis de la géométrie réelle de cette structure [Renaud 2006]. A ce sujet, les récents travaux de Daney [Daney 2006] sur l'étalonnage d'une plate-forme de Gough illustrent bien ce problème. Celui-ci traduit le fait qu'une modélisation purement géométrique ne suffit pas à décrire le comportement réel de ces mécanismes qui sont inévitablement soumis à des déformations élastiques dues aux forces de gravité et aux actions mécaniques extérieures. En réponse à ce problème nous avons proposé une modélisation non plus géométrique, mais élasto-géométrique qui intègre de fait, les déformations élastiques de la structure considérée. Les paramètres de ce dernier modèle sont alors identifiés au cours d'une phase d'étalonnage élasto-géométrique. Au cours de ces travaux de recherche nous avons montré que, comparativement à un étalonnage purement géométrique, cet étalonnage élasto-géométrique permet de définir un modèle dont les paramètres identifiés sont bien plus proches de ceux de la structure réelle. De plus, il faut noter que cette modélisation élasto-géométrique permet d'améliorer la précision de positionnement statique de la structure, que celle-ci soit chargée ou non. Dans ce contexte, les méthodes développées, bien que présentant un caractère général, se sont en grande partie appuyées sur l'étude d'une structure Delta dont les erreurs de géométrie relatives aux parallélogrammes ont elles aussi été modélisées. Les études menées ont montré que sous un chargement significatif du Delta, la mise en œuvre d'un étalonnage élasto-géométrique permet d'obtenir un gain en termes de précision de positionnement statique supérieur à 93 %. Dans les mêmes conditions de chargement, un étalonnage purement géométrique ne permettait d'obtenir qu'une amélioration de 45 %.

Contributions

Modélisation géométrique. Nous avons présenté une modélisation géométrique originale de la structure Delta qui, sous l'hypothèse que les liaisons sont cinématiquement parfaites, prend en compte l'ensemble des défauts géométriques possibles des parallélogrammes. Cette modélisation qui fait intervenir 42 paramètres, permet de considérer les rotations parasites de la nacelle dues aux erreurs sur

les paramètres géométriques. Le caractère général de cette modélisation doit permettre d'en étendre son usage à toutes les structures parallèles à base de parallélogrammes.

Etude de sensibilité. Sur la base de la modélisation géométrique à 42 paramètres, nous avons réalisé une étude de la sensibilité de la situation de l'organe terminal aux variations de tous les paramètres géométriques. Cette étude montre que les longueurs des parallélogrammes ainsi que les valeurs des offsets articulaires sont les paramètres ayant le plus d'influence sur la position de l'organe terminal. Cette étude confirme aussi que les seuls paramètres ayant une influence sur l'orientation de l'organe terminal sont les paramètres susceptibles de modifier la situation des parallélogrammes tant en termes de position et d'orientation qu'en termes de géométrie.
Nous avons effectué une étude originale liée à la sensibilité de la situation, non plus de l'organe terminal, mais de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques. Cette étude, qui à notre connaissance n'a jamais été réalisée, montre qu'il existe une longueur de l'effecteur optimale qui minimise l'influence de la variation d'un paramètre géométrique donné. Les résultats de cette étude montrent aussi que la longueur optimale de l'effecteur reste pratiquement identique et ce quelque soit le paramètre géométrique considéré. De plus il faut noter que cette étude possède un caractère général qui doit permettre d'en étendre l'usage à toutes les structures parallèles à base de parallélogrammes. Pour toutes ces structures, cette étude permet de définir la position optimale de l'effecteur par rapport à l'organe terminal.

Modélisation élastique des manipulateurs à structure parallèle. Nous avons développé une méthode analytique d'étude de la rigidité des structures parallèles par éléments finis. Cette méthode possède un caractère général qui permet de l'étendre à l'étude de toutes les structures possédant des éléments élancés. Nous avons appliqué cette méthode à l'étude du comportement élastique de la structure Delta. Cette étude a été réalisée en deux temps. Dans un premier temps, nous avons considéré les liaisons passives comme étant cinématiquement parfaites et infiniment rigides. Dans un second temps, nous avons introduit de la compliance au niveau de toutes les liaisons passives. Les validations expérimentales qui ont été menées ont permis de vérifier la pertinence et la validité de la modélisation proposée.

Modélisation élasto-géométrique. A partir des modèles géométriques (direct et inverse) à 42 paramètres et du modèle élastique, nous avons développé un modèle élasto-géométrique direct ainsi qu'un modèle élasto-géométrique inverse approché. Le modèle élasto-géométrique direct est utilisé afin de déterminer la déformation élastique de la structure sous son poids propre. Cette étude confirme que la rigidité de la structure est fortement dépendante de la position étudiée.

Etude de sensibilité du modèle de déformation élastique. Une étude de sensibilité de la déformation élastique de la structure aux variations des paramètres géométriques et mécaniques les plus influents (modules de Young et diamètres des éléments de la structure) a été réalisée. Cette étude fait apparaître :

- que l'influence de la variation des paramètres mécaniques peut être négligée ;
- que l'influence de la variation des paramètres géométriques est très faible. Il est toutefois difficile de conclure sur l'existence d'un couplage significatif entre le modèle de déformation élastique et le modèle géométrique. De ce fait nous avons défini dans un premier temps, un modèle élasto-géométrique découplé pour lequel la modélisation du comportement élastique

de la structure est évaluée à partir des valeurs nominales des paramètres géométriques. Puis dans un second temps, nous avons défini un modèle élasto-géométrique couplé pour lequel cette modélisation élastique est évaluée à partir des valeurs identifiées des paramètres du modèle élasto-géométriques.

Etalonnage élasto-géométrique. Afin de trouver la modélisation de la structure Delta fournissant les meilleurs résultats en termes de précision de positionnement statique, plusieurs stratégies d'identification des paramètres géométriques ont été comparées. Ses différentes stratégies sont les suivantes :

- identification des paramètres du modèle géométrique ;
- identification des paramètres du modèle élasto-géométrique découplé ;
- identification des paramètres du modèle élasto-géométrique couplé.

Les résultats de ces différentes identifications montrent l'importance de la prise en compte des déformations élastiques de la structure. En effet, le comportement réel de cette dernière, quel qu'en soit son chargement, est particulièrement bien décrit par les modèles élasto-géométriques. Par contre, il nous a été plus difficile de conclure sur l'apport du couplage entre le modèle géométrique et le modèle de déformation de la structure, même si les résultats sont légèrement meilleurs lorsque ce couplage est pris en compte.

Perspectives

Dans l'état actuel d'avancement de nos travaux, une évaluation sous le logiciel Matlab® du modèle élasto-géométrique direct de la structure Delta étudiée nécessite un temps de calcul moyen de 80 ms. Il semble donc tout à fait réaliste, qu'un modèle identique développé dans un autre langage de programmation de plus bas niveau (langage C par exemple) puisse permettre une mise en œuvre en temps réel de ce dernier pour des mouvements réalisés en quasi statique, voire pour des mouvements présentant une faible dynamique.

Au regard de ce temps de calcul, cette étude permet d'envisager de nombreuses perspectives quant à l'amélioration de la précision de positionnement statique des manipulateurs parallèles. En effet, nous avons montré qu'un étalonnage élasto-géométrique permet d'obtenir, quelles que soient les conditions de chargement de la structure, un modèle présentant de très bonnes caractéristiques en termes de précision de positionnement statique. Ainsi, pour des applications où le chargement de la structure est susceptible de varier, cette modélisation doit pouvoir être avantageusement mise à profit.

A terme, il semble possible d'envisager que ce genre de modèle puisse être appliqué aux machines-outils à structure parallèle. Cette modélisation permettrait de compenser en partie les problèmes liés à la rigidité de ces structures et ainsi combler le gap existant avec les machines-outils à structure sérielle.

Références bibliographiques

[Baradat 2004] C. Baradat, D. Deblaise, E. Bazin and P. Maurine, "*Artefact based calibration of parallel kinematics machines*", 35th International Symposium on robotics, Paris, France, 23-26 mars 2004.

[Batoz 1990] J. L. Batoz and G. Dhatt, "*Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2. Poutres et plaques*", Hermes, Paris, 1990.

[Besnard 2000] S. Besnard, "*Etalonnage géométrique des robots série et parallèles*", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, septembre 2000.

[Besnard 1999] S. Besnard and W. Khalil, "*Calibration of parallel robot using two inclinometers*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1758-1763, Detroit, Michigan, 10-15 mai 1999.

[Besnard 2001] S. Besnard and W. Khalil, "*Identifiable parameters for parallel robots kinematic calibration*", IEEE International Conference on Robotic and Automation, pp. 2859-2866, Séoul, Korée, 21-26 mai 2001.

[Bonev 2003] L. Bonev, "*The tue origin of parallel robots* ", in www.parallemic.org/Reviews/Review007.html, 2003.

[Bourdet 1987] P. Bourdet, "*Contribution à la mesure tridimensionnelle : Modèle d'identification géométrique des surfaces, métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles*", thèse de doctorat, Université de Nancy 1, 1987.

[Bouzgarrou 2004] B. C. Bouzgarrou, J. C. Fauroux, G. Gogu and Y. Heerah, "*Rigidity analysis of t3r1 parallel robot with uncoupled kinematics* ", 35th International Symposium on Robotics, Paris, France, 23-26 mars 2004.

[Bringmann 2006] B. Bringmann, "*3d error compensation for parallel kinematics*", 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, pp. 531-546, Chemnitz, Allemagne, 25-26 avril 2006.

[Caenen 1993] J. L. Caenen, "*Contribution à l'identification de paramètres géométriques et non géométriques d'un modèle de robot. Application à l'amélioration de la précision de positionnement statique*", thèse de doctorat, Université de Valenciennnes et du Haut-Cambresis, 1993.

[Caenen 1990] J. L. Caenen and J. C. Angue, "*Identification of geometric and non geometric parameters of robots*", IEEE Internationale Conference on Robotics and Automation, pp. 1032-1037, Cincinnati, mai 1990.

[Caro 2004] S. Caro, "*Conception robuste de mécanismes*", thèse de doctorat, Ecole Centale de Nantes, Université de Nantes, décembre 2004.

[Caro 2006] S. Caro, P. Wenger, B. Fouad and D. Chablat, "*Sensitivity analysis of the orthoglide: A three-dof translational parallel kinematic machine*", Transaction of the ASME, vol. 128, pp. 392-402, mars 2006.

[Chablat 2003] D. Chablat and P. Wenger, "*Architecture optimization of a 3-dof parallel mechanism for machining applications, the orthoglide*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 19, (3), pp. 403-410, 2003.

[Chablat 1998] D. Chablat and P. Wenger, "*Working modes and aspects in fully parallel manipulators*", IEEE International Conference on Robotics & automation, pp. 1964-1969, Louvain, Belgique, mai 1998.

[Chanal 2005] H. Chanal, E. Duc, P. Ray and J.-Y. Hascoët, "*Comparaison du comportement en usinage de deux machines à structure parllèle*", 17ième Congrès Français de Mécanique, Troyes, France, septembre 2005.

[Clavel 1991] R. Clavel, "*Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté*", thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1991.

[Clinton 1997] C. M. Clinton, G. Zhang and A. J. Wavering, "*Stiffness modeling of a stewart-platform-based milling machine*", Transaction NAMRI / SME vol. 115, pp. 335-340, 1997.

[Coleman 1996] T. F. Coleman and Y. Li, "*An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds* ", SIAM Journal on Optimization, vol. 6, pp. 418-445, 1996.

[Coleman 1994] T. F. Coleman and Y. Li, "*On the convergence of reflective newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds*", Mathematical Programming, vol. 67, (2), pp. 189-224, 1994.

[Company 2000] O. Company, "*Machines-outils rapides à structure parallèle. Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts.*" thèse de doctorat, Universite Montpellier II, décembre 2000.

[Company 2002] O. Company and F. Pierrot, "*Modeling and design issues of a 3-axis parallel machine-tool*", Mechanism and Machine Theory vol. 37, pp. 1325-1345, 2002.

[Company 2005] O. Company, F. Pierrot and J. C. Fauroux, "*A method for modeling analytical stiffness of a lower mobility parallel manipulator*", IEEE International Coference on Robotics and Automations, pp. 3232-3237, Barcelone, Espagne, 2005.

[Corradini 2004] C. Corradini, J. C. Fauroux, S. Krut and O. Company, "*Evaluation of a 4 degree of freedom parallel manipulator stiffness*", 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, IFToMM, Tianjin, Chine, avril 2004.

[Damak 1996] M. Damak, "*Théorie et instrumentation pour l'étalonnage statique des robots : Vers une programmation hors-ligne industriellement plus efficace*", thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, centre de Lille, juillet 1996.

[Damak 2004] M. Damak, J. Grosbois and P. De Smet, "*Vision robot based absolute accuracy measurement*", 35th International Symposium on robotics, Paris, France, 23-26 mars 2004.

[Daney 2000] D. Daney, "*Etalonnage géométrique des robots parallèles*", thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, février 2000.

[Daney 1999] D. Daney, "*Self calibration of gough platform using leg mobility constraints*", 10th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 104-109, Oulu, Finland, 20-24 juin 1999.

[Daney 2006] D. Daney, N. Andreff, G. Chabert and Y. Papegay, "*Interval method for calibration of parallel robots: Vision-based experiments*", Mechanism and Machine Theory, vol. 41, pp. 929-944, 2006.

[Daney 2001] D. Daney and I. Z. Emiris, "*Robust parallel robot calibration with partial information*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3262-3267, Seoul, Corée, 2001.

[Daney 2004] D. Daney and A. Neumaier, "*Interval methods for certification of the kinematic calibration of parallel robots*", IEEE International Conference on robotics and Automation, pp. 1913-1918, Nouvelle Orléans, Louisiane avril 2004.

[Deblaise 2004] D. Deblaise, C. Baradat, P. Maurine and V. Arakelian, "*Improvementof positionning accuracy of delta parallel robot*", 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Varsovie, Pologne, 15-21 août 2004.

[Deblaise 2006] D. Deblaise, X. Hernot and P. Maurine, "*A systematic analytical method for pkm stiffness matrix calculation*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4213-4219, Orlando, Floride, 15-19 mai 2006.

[Deblaise 2005] D. Deblaise and P. Maurine, "*Effective geometrical calibration of a delta parallel robot used in neurosurgery*", IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1313-1318, Edmonton, Alberta, Canada, 2-6 août 2005.

[Dong 2005] W. Dong, Z. Du and L. Sun, "*Conceptional design and kinematics modeling of a wide-range flexure hinge-based parallel manipulator*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4042-4047, Barcelone, Espagne, avril 2005.

[Ecorchard 2005] G. Ecorchard and P. Maurine, "*Self-calibration of delta parallel robots with elastic deformation compensation*", IEEE Intelligent Robots and Systems, pp. 1283-1288, Edmonton, Canada, 2-6 août 2005.

[El-Khasawneh 1999] B. S. El-Khasawneh and P. M. Ferreira, "*Computation of stiffness and stiffness bound for parallel link manipulators*", International Journal of Machine Tools & Manufacture, vol. 39, pp. 321-342, 1999.

[Geng 1994] Z. Geng and L. S. Haynes, "*An effective kinematics calibration method for stewart platform*", ISRAM, pp. 15-17, Hawaï, août 1994.

[Gogu 2002] G. Gogu, "*Structural synthesis of parallel robotic manipulators with decoupled motion*", Internal Report ROBEA MAX - CNRS, 2002.

[Gosselin 1990a] C. Gosselin, "*Stiffness mapping for parallel manipulator*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, pp. 377-382, juin 1990.

[Gosselin 1990b] C. Gosselin and J. Angeles, "*Singularity analysis of closed-loop kinematic chains*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, (3), pp. 281-290, june 1990.

[Gosselin 2002] C. Gosselin and D. Zhang, "*Stiffness analysis of parallel mechanisms using a lumped model*", International Journal of Robotics and Automation vol. 17, (1), pp. 17-27, 2002.

[Gough 1962] V. E. Gough and S. G. Whitehall, "*Universal tyre testing machine*", FISITA 9thInternational Technical Congress, pp. 117-137, mai 1962.

[Goulet 1996] J. Goulet and J. P. Boutin, "*Aide mémoire de résistance des matériaux*", Dunod, Paris, 1996.

[Gwinnett 1931] J. E. Gwinnett, "*Amusement device*", 20 janvier 1931, n° US Patent N° 1,789,680,

[Hayati 1983] S. Hayati, "*Robot arm geometrical link parameter estimation*", IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1477-1483, San Antonio Texas, 14-16 décembre 1983.

[Hsu 2004] W. Y. Hsu and J. S. Chen, "*Error analysis and auto-calibration for a cartesian-guided tripod machine tool*", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 24, pp. 899-909, 2004.

[Huang 2002] T. Huang, X. Zhao and D. J. Whitehouse, "*Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 18, (1), pp. 50-58, février 2002.

[Imbert 1979] J. F. Imbert, "*Analyse des structures par éléments finis*", Cepadues Edition, Toulouse, 1979.

[Innocenti 1995] C. Innocenti, "*Algorithms for kinematic calibration of fully-parallel manipulators*". Dans J. P. Merlet and B. Ravani, éditeurs, *Computational kinematics*, pp 241-250, Kluwer, 1995.

[Innocenti 1992] C. Innocenti and V. Parenti-Castelli, "*Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulatorrs*", Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, ASME, 1992.

[Judd 1990] R. Judd and A. Knasinski, "*A technique to calibrate industrial robots with experimental verification*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, (1), pp. 20-30, février 1990.

[Khalil 2002] W. Khalil and S. Besnard, "*Geometric calibration of robots with flexible joints and links*", Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 34, (4), pp. 357-379, 2002.

[Khalil 1999] W. Khalil and E. Dombre, "*Modélisation identification et commande des robots*", Hermes, Paris, 1999.

[Khalil 1997] W. Khalil and O. D. Murareci, "*Autonomous calibration of parallel robots*", 5th IFAC Symposium on Robot Control, pp. 425-428, Nantes, France, 1997.

[Koseki 1998] Y. Koseki, T. Arai, K. Sugimoto, T. Takatuji and M. Goto, "*Design and accuracy evaluation of high-speed and high precision parallel mechanism*", IEEE International Conference on Robotics & Automation pp. 1340-1345, Louvain, Belgique, may 1998.

[Krut 2003] S. Krut, "*Contribution à l'étude des robots parallèles légers, 3t-1r et 3t-2r, à fort débattements angulaires*", thèse de doctorat, Université de Montpellier II, Montpellier, novembre 2003.

[Krut 2003] S. Krut, O. Company, M. Benoit, H. Ota and F. Pierrot, "*I4: A new parallel mechanism for scara motions*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1875-1880, Taipei, Taiwan, 15-18 septembre 2003.

[Last 2006] P. Last and J. Hesselbach, "*A new calibration strategy for a class of parallel mechanism*", ARK, pp. 331-338, Ljubljana, 26-29 juin 2006.

[Majou 2004] F. Majou, "*Analyse cinétostatique des machines parallèles à translations*", thèse de doctorat, Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec et Ecole Centrale de Nantes septembre 2004.

[Majou 2006] F. Majou, C. Gosselin, P. Wenger and D. Chablat, "*Parametric stiffness analysis of the orthoglide*", Mechanism and Machine Theory, vol. In Press, (Disponible en ligne), 30 mai 2006.

[Martin 2006] Y. S. Martin, M. Giménez, M. Rauch and J.-Y. Hascoët, "*Verne - a new 5-axes hybrid architecture machining center*", 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, pp. 657-676, Chemnitz, 25-26 avril 2006.

[Masory 1993] O. Masory, J. Wang and H. Zhuang, "*On the accuracy of a stewart platform - part ii: Kinematic calibration and compensation*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 725-731, Atlanta, 2-6 mai 1993.

[Maurine 1996] P. Maurine, "*Développement et mise en oeuvre de méthodologies d'étalonnage de robots manipulateurs industriels*", thèse de doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, décembre 1996.

[Maurine 1999] P. Maurine, K. Abe and M. Uchiyama, "*Toward more accurate parallel robots*", IMEKO-XV, 15th World Congress of International Measurement Confederation, X, pp. 73-80, Osaka, Japon, 1999.

[Maurine 2002] P. Maurine, D. Deblaise, M. Quina and E. Ragneau, "*Improving the accuracy of delta parallel robots involved in the design of new fast machine tools*", 33rd International Symposium on Robotics, Stockholm, Suède, 7-11 octobre 2002.

[Meggiolaro 2005] M. A. Meggiolaro, S. Dubowsky and C. Mavroidis, "*Geometric and elastic error calibration of a high accuracy patient positioning system*", Mechanism and Machine Theory, vol. 40, pp. 415-427, 2005.

[Merlet 1997] J. P. Merlet, "*Les robots parallèles*", Hermes, Paris, 1997.

[Merlet 2002] J. P. Merlet, "*Still a long way to go on the road for parallel mechanisms*", ASME 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Montréal, 29 september-2 october 2002.

[Mooring 1986] B. Mooring and T. J. Pack, "*Determination and specification of robot repeatability*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1017-1023, San Francisco, avril 1986.

[Mooring 1991] B. Mooring, Z. Roth and M. Driels, "*Fundamentals of manipulator calibration*", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[Murareci 1997] O. D. Murareci, "*Contribution à la modélisation géométrique et l'étalonnage des robots séries et parallèles*", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, mars 1997.

[Nakamura 1995] H. Nakamura, K. Itaya, K. Yamamoto and T. Koyama, "*Robot autonomous error calibration method for off line programming system*", International Conference on Robotics and Automation 2, pp. 1175-1783, Nagoya, Japon, 1995.

[Neumann 2006] K. E. Neumann, "*Exechon concept*", 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar pp. 787-802, Chemnitz, 25-26 avril 2006.

[Neumann 1988] K. E. Neumann, "*Robot*", 22 mars 1988, n° 4,732,525, U. Patent.

[Oliviers 1995] M. P. Oliviers and J. R. R. Mayer, "*Global kinematic calibration of a stewart platform*", ASME Dynamic Systems and Control Division, vol. 57, (1), pp. 129-136, 1995.

[Ota 2002] H. Ota, T. Shibukawa, T. Tooyama and M. Uchiyama, "*Forward kinematic calibration and gravity compensation for parallel-mechanism-based machine tools*", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K - Journal of Multi-Body Dynamics, vol. 216, (1), pp. 39-49, 2002.

[Pierrot 1991] F. Pierrot, "*Robots pleinement parallèles légers : Conception, modélisation et commande*", thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1991.

[Pierrot 2001] F. Pierrot, F. Marquet, O. Company and T. Gil, "*H4 parallel robots: Modeling, design and preliminary experiments*", International Conference on Robotics and Automation pp. 3256-3261, Seoul, Corée, 2001.

[Puchtler 2006] T. Puchtler, "*Kinematic transformation for the exechon concept in the sinumerik 840d*", 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar pp. 803-812, Chemnitz, 25-26 avril 2006.

[Rauf 2004] A. Rauf, S. G. Kim and J. Ryu, "*Complete parameter identification of parallel manipulators with partial pose information using a new measurement device*", Robotica, vol. 22, (6), pp. 689-695, novembre 2004.

[Rauf 2001] A. Rauf and J. Ryu, "*Fully autonomous calibration of parallel manipulators by imposing position constraint*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2389-2394, Séoul, Corée, 2001.

[Renaud 2003] P. Renaud, "*Apport de la vision pour l'identification géométrique de mécanisme parallèles*", thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, septembre 2003.

[Renaud 2006] P. Renaud, "*Simplifying the kinematic calibration of parallel mechanisms using vision-based metrology*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 22, (1), pp. 12-22, février 2006.

[Renaud 2005] P. Renaud, N. Andreff, P. Martinet and G. Gogu, "*Kinematic calibration of parallel mechanisms: A novel approach using leg observation*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 21, (4), pp. 529-538, août 2005.

[Renders 1991] J. M. Renders, E. Rossignol, M. Becquet and R. Hanus, "*Kinematic calibration and geometrical parameter identification for robots*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 7, (6), pp. 721-732, décembre 1991.

[Sato 2004] O. Sato, K. Shimojima, R. Furutami and K. Takamasu, "*Artefact calibration of parallel mechanism, kinematic calibration with a priori knowledge*", Measurment Science and Technology, vol. 15, pp. 1158-1164, 2004.

[Savoure 2006] L. Savoure, P. Maurine, D. Corbel and S. Krut, "*An improved method for the geometrical calibration of parallelogram-based parallel robots*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 769-776, Orlando, Floride, 15-19 mai 2006.

[Sheldon 1995] P. C. Sheldon, "*Six axis machine tool*", 14 février 1995, United States Patent n° 5,388,935, G. Lewis.

[Sterneim 1987] F. Sterneim, "*Computation of the direct and inverse geometric models of the delta 4 parallel robot*", Robotersysteme, vol. 3, pp. 199-203, 1987.

[Stewart 1965] D. Stewart, "*A platform with six degrees of freedom*", Proceding of the IMechE, Part 1-15, pp. 371-386, 1965.

[Terrier 2005] M. Terrier, A. Dugas and J.-Y. Hascoët, "*Machines-outils à structure parallèle et usinage à grande vitesse*", Mécanique & Industries, vol. 6, (4), pp. 431-437, juillet - août 2005.

[Terrier 2004] M. Terrier, A. Dugas and J.-Y. Hascoët, "*Qualification of parallel kinematics machines in high-speed milling on free form surfaces*", International Journal of Machine Tools & Manufacture, vol. 44, (8), pp. 865-877, 2004.

[Thurneysen 2004] M. Thurneysen, "*Méthode systématique de conception de cinématiques parallèles*", thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausane, 2004.

[Tlusty 1999] J. Tlusty, J. Ziegert and S. Ridgeway, "*Fundamental comparison of the use odf serial and parallel kinematics for machines tools*", Annals of the CIRP vol. 48, (1), pp. 351-356, 1999.

[Tsai 1999] L.-W. Tsai, "*Robot analysis : The mechanics of serial and parallel manipulators*", John Wiley & Sons, New York, 1999.

[Tsai 1996] L.-W. Tsai, G. Walsh and R. Stamper, "*Kinematics of a novel three dof translational platform*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3446-3451, Minneapolis, Minnesota, avril 1996.

[Vischer 1996] P. Vischer, "*Improving the accuracy of parallel robots*", thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996.

[Wang 1992] Wang, "*Workspace evaluation and kinematic calibration of Stewart platform*", thèse de doctorat, Florida Atlantic University, 1992.

[Wenger 1997] P. Wenger and D. Chablat, "*Uniqueness domains in the workspace of parallel manipulators* ", Syroco' 97, 2, pp. 431-436, Nantes, septembre 1997.

[Xi 2004] F. Xi, D. Zhang, C. M. Mechefske and S. Y. T. Lang, "*Global kinetostatic modelling of tripod-based parallel kinamtic machine*", Mechanism and Machine Theory, vol. 39, pp. 357-377, 2004.

[Yoon 2004] W. K. Yoon, T. Suehiro, Y. Tsumaki and M. Uchiyama, "*Stiffness analysis and design of a compact modified delta parallel mechanism*", Robotica, vol. 22, pp. 463-475, 2004.

[Zhang 2001] D. Zhang and C. Gosselin, "*Kinetostatic modeling of n-dof parallel mechanisms with a passive constraining leg and prismatic actuators*", Journal of Mechanical Design, vol. 123, pp. 375-381, septembre 2001.

[Zhang 2002] D. Zhang and C. Gosselin, "*Kinetostatic modeling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators*", Mechanism and Machine Theory, vol. 37, pp. 599-617, 2002.

[Zhuang 1997] H. Zhuang, "*Self-calibration of parallel mechanisms with a case study on stewart platforms*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 13, (3), pp. 387-397, juin 1997.

[Zhuang 1996] H. Zhuang and L. Liu, "*Self-calibration of a class of parallel manipulators*", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 994-999, Minneapolis, Minnesota avril 1996.

[Zhuang 1995] H. Zhuang, O. Masory and J. Yan, "*Kinematic calibration of a stewart platform using pose measurements obtained by a single theodolite*", IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systmes, pp. 329-334, Pittsburgh, Pennsylvannie, 1995.

[Zhuang 1993] H. Zhuang and Z. Roth, "*Method for kinematic calibration of stewart platforms* ", Journal of Robotic Systems, vol. 10, (3), pp. 391-405, 1993.

[Zhuang 1998] H. Zhuang, J. Yan and O. Masory, "*Calibration of stewart platforms and other parallel manipulators by minimizing inverse kinematic residuals*", Journal of Robotic Systems, vol. 15, (7), pp. 395-405, 1998.

[Zoppi 2006] M. Zoppi, L. Bruzzone and R. Molfino, "*A parallel hybrid machine for automated manufactering of body panels of the aircraft piaggio p180*", 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar pp. 721-731, Chemnitz, 25-26 avril 2006.

Titre :

« Contribution à la modélisation et à l'étalonnage élasto-géométrique des manipulateurs à structure parallèle »

Résumé :

Dans le but d'améliorer la précision de positionnement statique des manipulateurs à structure parallèle, nous proposons pour ces structures un modèle qui n'est plus uniquement géométrique, mais élasto-géométrique. Les paramètres de ce modèle sont identifiés au cours d'une phase d'étalonnage dédiée. Ces stratégies de modélisation et d'étalonnage sont appliquées à une structure parallèle Delta. La modélisation géométrique faisant intervenir 42 paramètres, intègre de possibles défauts de géométries des parallélogrammes. Le modèle de déformation élastique proposé est fondé sur une analyse de la rigidité des structures parallèles par éléments finis qui, grâce à 6 paramètres préalablement identifiés, prend en compte la raideur des liaisons passives de la structure. Des validations expérimentales montrent que l'identification des paramètres de ce modèle élasto-géométrique permet d'accroître la précision de positionnement statique de la structure, et ce, quel qu'en soit son chargement.

Mots clé :

Robots parallèles, structures parallélogrammes, étude de sensibilité, rigidité, déformations élastiques, étalonnage élasto-géométrique, robot parallèle Delta.

Title:

« Contribution to the elasto-geometrical modeling and calibration of parallel manipulators »

Abstract:

With the aim of improving the static accuracy of parallel manipulators, we propose a model, not only geometrical, but elasto-geometrical whose parameters are identified during a calibration step. These strategies of modeling and calibration are applied to a Delta parallel structure. The geometrical modeling based on 42 parameters includes some possible errors on the parallelogram geometries. The proposed stiffness model is based on a finite element model for which 6 parameters are introduced to take into account all passive joint stiffness. Some experimental validations show that the parameters identification of this elasto-geometrical model allows to increase, whatever the loads, the global static positioning accuracy of the structure.

Keywords:

Parallel robot, parallelogram loop, sensitivity analysis, stiffness, elastic deformation, élasto-geometrical calibration, Delta parallel robot.