



HAL
open science

Approche non locale d'un modèle élasto-plastique endommagable pour le calcul des structures en béton précontraint

Abbas Krayani

► **To cite this version:**

Abbas Krayani. Approche non locale d'un modèle élasto-plastique endommagable pour le calcul des structures en béton précontraint. Matériaux. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2007. Français. NNT: . tel-00334001

HAL Id: tel-00334001

<https://theses.hal.science/tel-00334001>

Submitted on 24 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2007

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

*Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes*

Spécialité : GENIE CIVIL

Présentée et soutenue publiquement par :

KRAYANI – ABBAS

le 11 décembre 2007
à l'École Centrale de Nantes

TITRE

CONTRIBUTIONS A LA MODELISATION NON LINEAIRE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON
ET DES OUVRAGES EN BETON ARME ET PRECONTRAIT

JURY

Président :	M. Rodrigue DESMORAT	Professeur	
Rapporteurs :	M. Djimédo KONDO M. Alain MILLARD	Professeur Professeur	Université de Lille I Ecole Polytechnique
Examineurs :	M. Frédéric DUFOUR M. Shahrokh GHAVAMIAN M. Gilles PIJAUDIER-CABOT	Maître de conférences, HDR Ingénieur-Chercheur Professeur	Ecole Centrale de Nantes NECS Université de Pau et des Pays de l'Adour

Table des matières

1	Analyse bibliographique	9
1.1	Introduction	10
1.2	Modélisation du comportement structurel du béton et approches existantes	12
1.2.1	Approches discontinues	12
1.2.2	Approches continues	13
1.2.3	Approches mixtes	14
1.3	Modèles d'endommagement	14
1.3.1	Modèles d'endommagement isotrope	15
1.3.2	Modèle de "La Borderie"	18
1.3.3	Modèles d'endommagement anisotrope	21
1.4	Modèles de plasticité	23
1.4.1	Critère de "Von Mises"	23
1.4.2	Critère de "Sheffield"	25
1.5	Couplage de l'endommagement et de la plasticité	29
1.5.1	Apports du couplage	29
1.5.2	Approches existantes pour le couplage	31
1.6	Etude des problèmes de localisation	32
1.7	Limiteurs de localisation	33
1.7.1	Généralités	33
1.7.2	Modèle non local intégral	33
1.7.3	Modèles avec effet du gradient	36
1.8	Effets d'échelle à la rupture des structures en béton	38
1.9	Conclusion	42
2	Implantation numérique du modèle élastoplastique endommageable non local	43
2.1	Introduction	44
2.2	Formulation mathématique du modèle non local	46

2.2.1	Plasticité	46
2.2.2	Endommagement	47
2.2.3	Régularisation du modèle	48
2.3	Identification des paramètres du modèle	49
2.4	Tests élémentaires	50
2.4.1	Traction	50
2.4.2	Compression	51
2.4.3	Essai triaxial confiné	52
2.5	Implantation du modèle dans un code aux éléments finis	54
2.5.1	Principe général de l'implantation	55
2.5.2	Résolution itérative par la méthode de Newton-Raphson	55
2.5.3	Intégration de la loi de comportement	57
2.5.4	Equilibre global	60
2.6	Validation des améliorations apportées au modèle	64
2.6.1	Validation de l'implantation – Etude de convergence	64
2.6.2	Validation de la régularisation	67
2.7	Conclusion	73
3	Etude industrielle	75
3.1	Introduction	76
3.1.1	Flexion trois points sur une poutre en béton armé	78
3.1.2	Poutre continue de grande hauteur	81
3.2	Etude industrielle	86
3.2.1	Description du test	86
3.2.2	Simulation numérique de la maquette PACE-1450-EXP	88
3.3	Conclusion	103
4	Modélisation non locale et effets de bord	107
4.1	Introduction	108
4.2	Modèles micromécaniques	110
4.2.1	Milieu infini élastique avec deux inclusions circulaires	110
4.2.2	Milieu semi-infini avec une seule inclusion	112
4.2.3	Généralisation du problème - milieu élastique semi-infini avec n inclusions circulaires	115
4.3	Modèle d'endommagement non local intégrale classique et modification en 1D	118
4.3.1	Modèle non local intégrale	118

4.3.2	Modification du modèle non local intégrale	120
4.3.3	Application (1D) - barre d'Hopkinson en traction	123
4.4	Modèle modifié 2D	127
4.4.1	Formulation non locale	127
4.4.2	Plaque en traction simple	128
4.4.3	Effet d'échelle	130
4.5	Conclusion	140
	Conclusions et perspectives	142
	Bibliographie	146

Introduction

Contexte industriel

Les ingénieurs sont souvent confrontés aux problèmes de sûreté et de durabilité d'ouvrages sensibles aux variations des propriétés de transfert (barrage ou enceintes de confinement de centrales nucléaires). Ces problèmes passent nécessairement par une meilleure connaissance du comportement des matériaux utilisés dans l'élaboration de ces ouvrages, ainsi que des phénomènes néfastes et accidentels pouvant survenir aux ouvrages au cours de leur vie.

Pour le système de confinement à double paroi de type 1300 MWe et 1450 MWe, l'étanchéité est principalement assurée par l'enceinte de confinement interne en béton précontraint biaxialement. Cette paroi constitue la troisième barrière protectrice, entre le milieu interne et l'extérieur, après la gaine de combustible et la cuve en acier du réacteur. Elle doit fournir des garanties d'étanchéité pendant sa durée de vie. L'étanchéité de cette troisième barrière est vérifiée lors des tests décennaux appelés "épreuves". Ceux-ci, consistent à mesurer le débit de fuite de gaz après la pressurisation de l'enceinte (en air sec et à température ambiante). Le débit mesuré doit être inférieur à un seuil défini par l'autorité de sûreté.

La perméabilité est le paramètre principal caractérisant l'aptitude des bétons à véhiculer un fluide. Elle est le paramètre central dans l'évaluation de l'étanchéité de la structure. Cette propriété de transfert va être influencée directement par l'histoire des sollicitations appliquées sur l'enceinte.

En service, les fuites observées pourraient provenir de fissures formées suite à l'augmentation des déformations de fluage et de la relaxation des câbles précontraints. Ces deux phénomènes constituent la principale cause des pertes de précontrainte qui peuvent entraîner l'apparition de sollicitation de traction. Néanmoins, ces types de sollicitation ne sont généralement pas assez significatifs pour produire une dégradation importante du béton. Lors des épreuves ou d'accidents éventuels, des dégradations peuvent s'accumuler et conduire à une fissuration qui accroît le taux de fuite. Ainsi, la connaissance de l'état mécanique du matériau et de son histoire de chargement (en tout point de la structure) est nécessaire pour évaluer l'étanchéité d'un ouvrage de confinement et par conséquent sa durabilité.

A titre d'illustration, dans la phase pré-pic, une faible dégradation de la rigidité du matériau peut

entraîner une grande variation du débit de fuite. Une dégradation de 10% de la raideur conduit à une augmentation de 20% à 30% de la perméabilité en compression (Picandet *et al.* (2001)). Une sensibilité des résultats en fonction de l'état de contrainte appliquée aux matériaux existe aussi.

Problème scientifique

Une méthodologie complète pour la simulation du comportement hydraulique des enceintes de confinement de centrales nucléaires a été proposée par Jason (2004). Basée sur le chaînage de calculs hydrique, mécanique puis hydraulique, elle a abouti à la proposition d'une carte de flux représentative de l'étanchéité. Une relation élasto-plastique endommageable a été développée pour reproduire le comportement mécanique du béton. Ce modèle a montré sa capacité à reproduire les pentes de déchargement expérimentales (bonne estimation de la dégradation du matériau), les changements de comportement volumique (en particulier l'évolution du coefficient de Poisson apparent en compression simple), la transition fragile - ductile avec le confinement, ainsi que la perte de rigidité initiale observée pour les fortes pressions hydrostatiques. Cependant, ce modèle pose les problèmes majeurs suivants :

- Une forte dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Cela est dû au phénomène de localisation de l'endommagement, typique des lois de comportement adoucissantes.
- La complexité de la définition des dérivées analytiques de la fonction seuil plastique empêchent l'obtention d'une convergence quadratique. Cela a un impact direct sur les temps d'étude et, par conséquent, sur l'exploitation industrielle de ce modèle.

Dans notre travail, le modèle élasto-plastique endommageable proposé par Jason (2004) est étendu en non local avec une méthode de régularisation introduite sur la partie responsable de l'adoucissement et donc de la localisation des variables. En outre, la problématique liée au choix de la méthode de résolution, ainsi que la technique d'approximation numérique utilisée pour réaliser la convergence quadratique sont étudiées.

Afin de mieux juger les améliorations apportées, une comparaison avec le modèle d'endommagement isotrope sur des structures soumises aux sollicitations de cisaillement sera effectuée. Ainsi, des calculs numériques seront réalisés sur une application industrielle d'une réplique exacte de la partie courante de l'enceinte de confinement d'une centrale nucléaire (des essais (PACE-1450-EXP) mis au point par EDF).

Les modèles régularisés montrent leurs efficacités à simuler les développements des fissures à l'intérieur d'une structure et suffisamment loin de ses surfaces libres. Cependant, l'amorçage de la fissure se fait très souvent à partir d'un bord libre. Il est prévu que l'effet de bord peut avoir une influence non négligeable sur la condition d'amorçage de la fissure. Or, le développement de la zone de microfissuration est diminué lorsque la fissure s'amorce à proximité du bord libre. Ce phénomène reste

problématique dans les modèles non locaux existants. Nous allons proposer, dans ce travail, des modifications du modèle d'endommagement non local intégral en prenant en considération l'effet du bord.

Organisation du mémoire

Ce mémoire de thèse s'articule autour de quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre, une analyse bibliographique de la modélisation du comportement du béton à l'échelle de la structure est présentée. Nous illustrons les différents modèles permettant de prédire le comportement à rupture. Les avantages et les inconvénients des différentes formulations sont étudiés. Le phénomène de localisation, typique des lois de comportement adoucissantes et les techniques de régularisation pour obtenir une réponse numériquement acceptable (indépendante du maillage) sont discutés.
- Le deuxième chapitre présente un modèle élasto-plastique endommageable non local pour décrire le comportement mécanique du béton. Pour éviter les problèmes numériques dus au phénomène de localisation, une méthode de régularisation est introduite dans la partie responsable de l'adoucissement (i.e. l'endommagement). L'implantation numérique du modèle dans un code aux éléments finis est abordée. Ainsi, une étude des méthodes de résolution itératives des problèmes locaux et globaux est entreprise, mettant en évidence les forces, ou les faiblesses, des algorithmes proposés (vitesse de convergence, choix des matrices de résolution).
- Le troisième chapitre étudie la capacité et les performances du modèle élasto-plastique endommageable non local à reproduire le comportement structurel classique et complexe du béton. La réponse du modèle développé est comparée avec les modèles d'endommagement isotropes afin de montrer l'amélioration apportée. Dans ce chapitre, les simulations des essais (PACE-1450-EXP) proposés par *EDF* et en cours de réalisation en partenariat avec l'Université de Karlsruhe (IfMB) sont présentées. Ces simulations ont pour but de préparer la confrontation des résultats numériques avec ceux des essais (en cours au moment de la rédaction de ce mémoire) afin de valider/invalidier les modèles actuellement disponibles dans *Code_Aster*. La modélisation des câbles dans les simulations est discutée.
- Enfin, le quatrième chapitre présente les modifications apportées au modèle non local classique afin de prendre en compte l'effet d'un bord libre. En se basant sur des arguments micromécaniques, qui tiennent compte des interactions et de l'évolution des microfissures, cette étude a permis l'élaboration d'une nouvelle loi d'interaction non locale avec modification de la fonction poids proche du bord.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale qui nous amène à fournir des éléments de perspectives.

Chapitre 1

Analyse bibliographique

Sommaire

1.1	Introduction	10
1.2	Modélisation du comportement structural du béton et approches existantes	12
1.2.1	Approches discontinues	12
1.2.2	Approches continues	13
1.2.3	Approches mixtes	14
1.3	Modèles d'endommagement	14
1.3.1	Modèles d'endommagement isotrope	15
1.3.2	Modèle de "La Borderie"	18
1.3.3	Modèles d'endommagement anisotrope	21
1.4	Modèles de plasticité	23
1.4.1	Critère de "Von Mises"	23
1.4.2	Critère de "Sheffield"	25
1.5	Couplage de l'endommagement et de la plasticité	29
1.5.1	Apports du couplage	29
1.5.2	Approches existantes pour le couplage	31
1.6	Etude des problèmes de localisation	32
1.7	Limiteurs de localisation	33
1.7.1	Généralités	33
1.7.2	Modèle non local intégral	33
1.7.3	Modèles avec effet du gradient	36
1.8	Effets d'échelle à la rupture des structures en béton	38
1.9	Conclusion	42

1.1 Introduction

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement non linéaire très complexe dû à son caractère hétérogène et quasi-fragile. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, cette hétérogénéité favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures. Un modèle mathématique représentant ces modes d'une manière fiable tout en restant simple d'utilisation, n'existe pas dans la littérature.

L'évolution du comportement du béton, soumis à la compression uniaxiale par exemple (figure 1.2), peut être divisée en trois zones. Une partie élastique, où le matériau retrouve sa configuration initiale s'il est déchargé. Ensuite une partie ascendante (écrouissage positif) de la courbe contrainte-déformation décrit le comportement non fissuré (présence uniquement de microfissures non visibles à l'œil nu), le déchargement durant cette phase montre la présence de déformations irréversibles. Enfin, une partie d'adoucissement (écrouissage négatif) où des microfissures coalescent en une ou plusieurs macrofissures (généralement visibles à l'œil nu). Celles-ci vont croître et se propager jusqu'à la rupture du matériau.

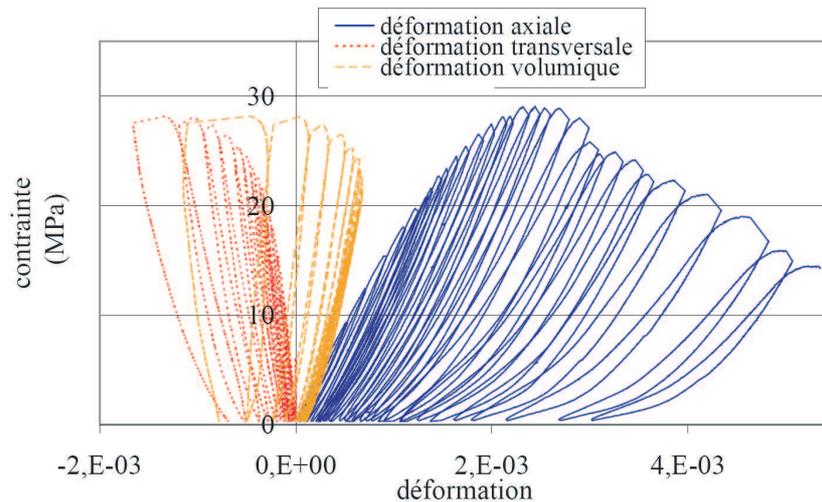


FIG. 1.1 – Réponse type en contrainte-déformation (axiale, transversale, volumique) d'une éprouvette cylindrique soumise à de la compression uniaxiale. Figure d'après Choinska (2006).

Pour modéliser ce comportement, plusieurs approches théoriques ont été établies dont les deux principales sont : l'approche discontinue et l'approche continue (paragraphe 1.2). Dans ce paragraphe, les avantages et les inconvénients de ces différentes méthodes sont présentés.

Les paragraphes 1.3 et 1.4 sont donc l'occasion de présenter plusieurs modèles basés sur cette approche et adaptés aux matériaux cimentaires (modèles d'endommagement, modèles de plasticité, ...). L'objectif est de mettre en évidence les avantages et les limitations des différentes formulations.

Ensuite, une attention particulière sera apportée à l'étude du couplage entre les différentes lois de comportement mécanique, et surtout, à l'évolution des dégradations du matériau (donc à l'endommagement). Le phénomène de localisation est aussi abordé dans ce paragraphe.

La nécessité d'introduire une technique de régularisation et le choix de l'approche pour l'obtention d'une réponse numériquement acceptable (dépendance au maillage) sont discutés dans le paragraphe 1.7.

Finalement, l'effet d'échelle observé dans les structures dans le cas des matériaux quasi-fragiles sera rappelé dans le paragraphe 1.8.

Ce chapitre ne prétend pas être exhaustif : son but est plutôt d'introduire des notions et des résultats qui seront utiles pour la suite du document.

1.2 Modélisation du comportement structurel du béton et approches existantes

1.2.1 Approches discontinues

Dans les approches discontinues, nous nous intéressons à la partie non linéaire du comportement dû à la présence d'une macrofissure. Pour cela, nous représentons la fissure explicitement par une discontinuité géométrique qui va se propager selon différents critères. Deux principaux critères peuvent être envisagés :

- Le modèle linéaire élastique dans lequel la propagation de la fissure a lieu lorsque le facteur d'intensité des contraintes dépasse une valeur limite intrinsèque au matériau. Cette approche est peu adaptée pour décrire le comportement à la rupture des structures en béton, à cause de la présence d'une zone de microfissuration *FPZ* (Fracture Process Zone) en pointe de fissure, dont la taille est non négligeable par rapport aux dimensions de la structure.
- Le modèle d'Hillerborg *et al.* (1976) qui utilise la notion de fissure fictive. C'est un modèle non linéaire dans lequel la fissure est modélisée en deux parties (figure 1.2) : la première correspond à la fissure physique (fissure réelle), pour laquelle la contrainte est nulle, la deuxième est la fissure fictive, pour laquelle la contrainte, non nulle, dépend de l'ouverture de la fissure. La fissuration commence à se propager, lorsque la contrainte en pointe de fissure atteint la contrainte maximale en traction, f_t .

L'un des avantages de telles méthodes est de représenter explicitement la fissure (pour obtenir, par exemple, son ouverture). Néanmoins, la position initiale et le trajet de la fissure doivent être connus a priori. Le maillage dans un calcul par éléments finis doit pouvoir la représenter, à chaque étape de sa propagation. Cela suppose généralement l'utilisation de techniques de remaillage automatiques qui rendent lourds et coûteux les calculs éléments finis. Les méthodes sans maillage "Meshless" (Belytschko *et al.* (1994) ou Askes (2000)) tendent à limiter la dépendance au maillage, mais elles nécessitent des ressources informatiques supérieures à celles d'une méthode éléments finis classique.

L'inconvénient des ces méthodes est double :

- la microfissuration n'est pas représentée explicitement,
- seulement la phase de propagation d'une macrofissure peut être simulée.

Ces approches sont alors difficilement applicables sur les structures complexes (enceinte de confinement, par exemple) où la fissuration n'est pas une donnée de problème.

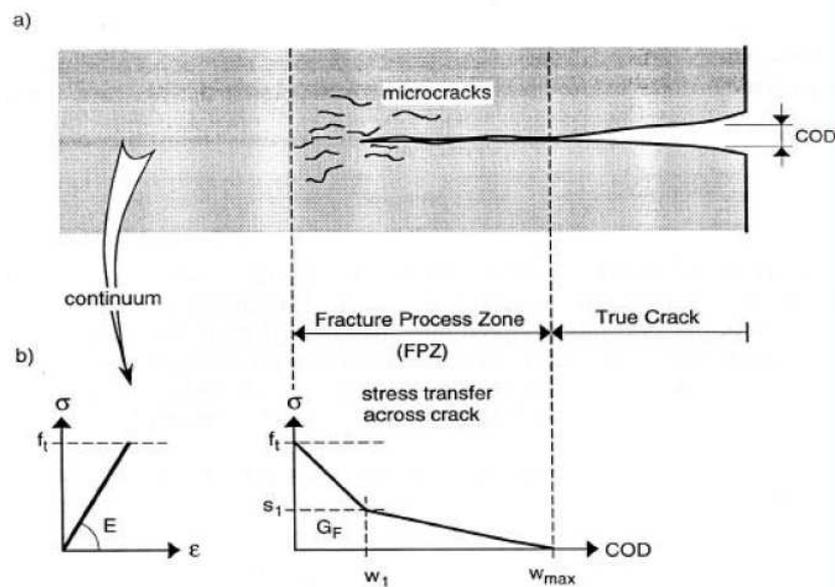


FIG. 1.2 – Modèle de fissure fictive de Hilleborg. Figure d'après Brühwiler et Sambridge (1996).

1.2.2 Approches continues

Les approches continues qui permettent une modélisation acceptable du comportement non linéaire des dégradations du béton, consistent à considérer ce matériau comme un milieu continu et à intégrer le comportement non linéaire du matériau dans la loi de comportement. On s'affranchit ainsi du caractère discontinu provoqué par la fissure, en homogénéisant la loi de comportement sur un domaine fini. Les dégradations sont prises en compte par l'intermédiaire de variables supplémentaires agissant sur les caractéristiques mécaniques ou sur les variables de base de la modélisation. La fissure est alors représentée par une zone de matériau totalement dégradée, qui reste continue au sens de la mécanique des milieux continus. Ainsi, les redistributions des contraintes, qui résultent de la concentration des déformations et de l'évolution de la dégradation, auront lieu dans une région appelée zone de microfissuration ou FPZ (*Fracture Process Zone*). L'évolution de la dégradation dans cette zone et l'évolution de son étendu déterminent la direction de propagation de la fissure. A titre d'exemple, nous pouvons citer, concernant ces approches, les modèles de fissuration répartie "smeared crack models" (Rots (1988) et de Borst *et al.* (2003)) ou les modèles d'endommagement (Mazars (1984) et Desmorat *et al.* (2007)).

Si des modèles utilisant la théorie des milieux continus sont capables de représenter le comportement mécanique du béton pendant différentes phases caractéristiques (élastique, écrouissage non linéaire positif et écrouissage non linéaire négatif), ils ne donnent aucune information sur l'évolution de la fissuration, son ouverture en particulier, qui est nécessaire dans le cadre d'un calcul hydraulique de

type écoulement de Poiseuille.

1.2.3 Approches mixtes

Approches discrètes et méthodes continues présentent des avantages et des inconvénients dans la description du comportement du béton. Dans le premier cas, la fissure est modélisée comme une entité géométrique mais la microfissuration n'est pas simulée explicitement, alors que les approches continues décrivent les micro et macrofissurations par une variable intermédiaire (l'endommagement) mais les caractéristiques de la macrofissuration ne sont pas obtenues. Les approches mixtes combinent à la fois les méthodes discontinues et continues pour s'affranchir de leurs limites en alliant leurs avantages. Mazars et Pijaudier-Cabot (1996) ont proposé une approche basée sur la combinaison entre le modèle d'endommagement (pour la phase de microfissuration diffuse) et la mécanique linéaire élastique de la rupture (pour traiter la macrofissuration). Néanmoins, ce modèle a été validé seulement dans le cas où le chemin de fissuration est connu. Une autre approche mixte consiste à combiner les modèles continus et l'approche de type *XFEM* (Extended Finite element method), elle a été récemment proposée par Simone *et al.* (2003) et utilisée aussi par Comi *et al.* (2004). Cette méthode est applicable jusqu'à présent seulement pour des cas tests bidimensionnels simples.

Dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons à l'étude du comportement de structures (des enceintes de confinement de centrales nucléaires dans notre cas) en béton en service où la rupture n'a pas eu lieu et où la fissuration n'est pas connue a priori. De ce fait, les approches continues semblent plus adaptées.

1.3 Modèles d'endommagement

La spécificité de ce type de modèle est qu'il doit simuler la perte de rigidité du matériau au cours du chargement. Une variable d'endommagement D , scalaire dans le cas isotrope, tensorielle sinon, est définie. Dans le cadre de l'isotropie, la relation contraintes-déformations s'écrit comme :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e \quad (1.1)$$

où E_{ijkl} et ε_{kl}^e sont respectivement les composantes du tenseur d'élasticité d'ordre 4 et du tenseur des déformations élastiques.

Dans la mécanique de l'endommagement, la notion de contrainte effective σ'_{ij} , introduite par Rabotnov en 1968, est considérée. Elle correspond à une contrainte du matériau non endommagé :

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(1 - D)} \quad (1.2)$$

Cet endommagement D peut également être décrit par une réduction de la surface résistante du matériau, par rapport à la charge appliquée. C'est le concept de surface effective (Lemaitre et Chaboche (1978)). L'endommagement est alors défini par :

$$D = \frac{S_d}{S} \quad (1.3)$$

où S_d est la surface occupée par les micro-défauts et S la surface totale. Si D est indépendant de l'orientation de la surface considérée (micro-défaut sphérique), la modélisation est dite isotrope. Dans le cas contraire, elle devient anisotrope.

1.3.1 Modèles d'endommagement isotrope

Mazars (1984) a entrepris de modéliser les phénomènes de dégradation du béton par l'introduction d'une seule variable scalaire d'endommagement D . Celle-ci agit sur le comportement du matériau en modifiant ses caractéristiques mécaniques de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.4)$$

On remarque ici que l'équation 1.4 correspond strictement à l'équation 1.1 car aucun phénomène irréversible n'est pris en compte. La variable d'endommagement D quantifie l'influence de la microfissuration et vaut 0 pour un matériau sain et 1 pour un matériau totalement endommagé. Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter les deux critères qui seront utilisés dans la suite de notre travail.

1.3.1.1 Critère de Mazars

L'endommagement du béton dans ce critère est piloté par une variable appelée " déformation équivalente " et qui traduit l'état local d'extension du matériau durant le chargement. Sa définition est :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (1.5)$$

dans laquelle

- ε_i est la déformation principale dans la direction i .
- $\langle \rangle_+$ désigne les crochets de *Mac Cauley*. Si la valeur entre crochets est négative, alors cet opérateur rend une valeur nulle. Sinon, la valeur est inchangée.

L'évolution de l'endommagement scalaire est définie à partir d'une fonction seuil :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}, k_d) = \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}) - k_d \quad (1.6)$$

Initialement, k_d vaut le seuil d'endommagement ε_{D_0} et prend la valeur maximale atteinte par ε_{eq} durant l'histoire du chargement :

$$k_d = \max_t(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{D_0}) \quad (1.7)$$

La figure 1.3 présente la trace de la surface seuil décrite en contraintes planes.

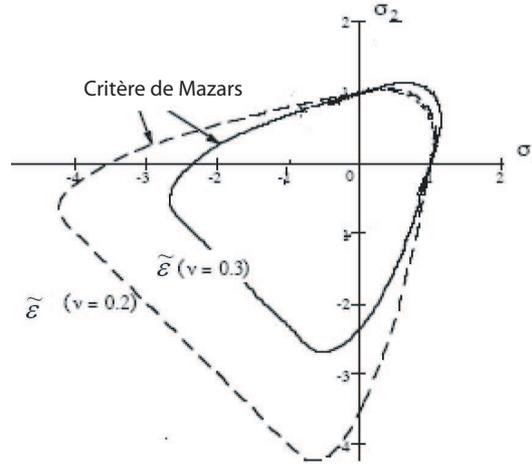


FIG. 1.3 – Modèle de Mazars, tracé de la surface seuil dans le plan des contraintes $\sigma_1 - \sigma_2$.

L'évolution de l'endommagement est déterminée par les conditions de Khun–Tucker :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}^e, k_d) \leq 0, \quad \dot{k}_d \geq 0, \quad \dot{k}_d g(\boldsymbol{\varepsilon}^e, k_d) = 0 \quad (1.8)$$

Pour représenter le comportement dissymétrique du béton, Mazars (1984) propose deux modes d'endommagement, D_t en traction et D_c en compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (1.9)$$

avec

$$D_{t,c} = 1 - \frac{1 - A_{t,c}}{\varepsilon_{eq}} + \frac{A_{t,c}}{\exp(B_{t,c}(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \quad (1.10)$$

et

$$\alpha_{t,c} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\langle \varepsilon_i^{t,c} \rangle \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\varepsilon_{eq}} \right)^\beta \quad (1.11)$$

A_t, B_t, A_c et B_c sont quatre paramètres du modèle. Les coefficients α_t et α_c représentent respectivement le couplage traction-endommagement et compression-endommagement. En traction pure $\alpha_t = 1$, $\alpha_c = 0$ et en compression pure $\alpha_t = 0$, $\alpha_c = 1$. L'exposant β est introduit pour diminuer la valeur de l'endommagement, lorsque le matériau est soumis au cisaillement. Les déformations $\langle \varepsilon_i^t \rangle$ et $\langle \varepsilon_i^c \rangle$ sont respectivement calculées à partir des contraintes principales de traction et de compression. Ce critère est souvent utilisé pour sa simplicité et sa précision relative à représenter la rupture en mode I et la réponse globale sous un chargement monotone. La figure 1.4 présente les réponses du modèle d'endommagement de Mazars dans les tests en traction et en compression.

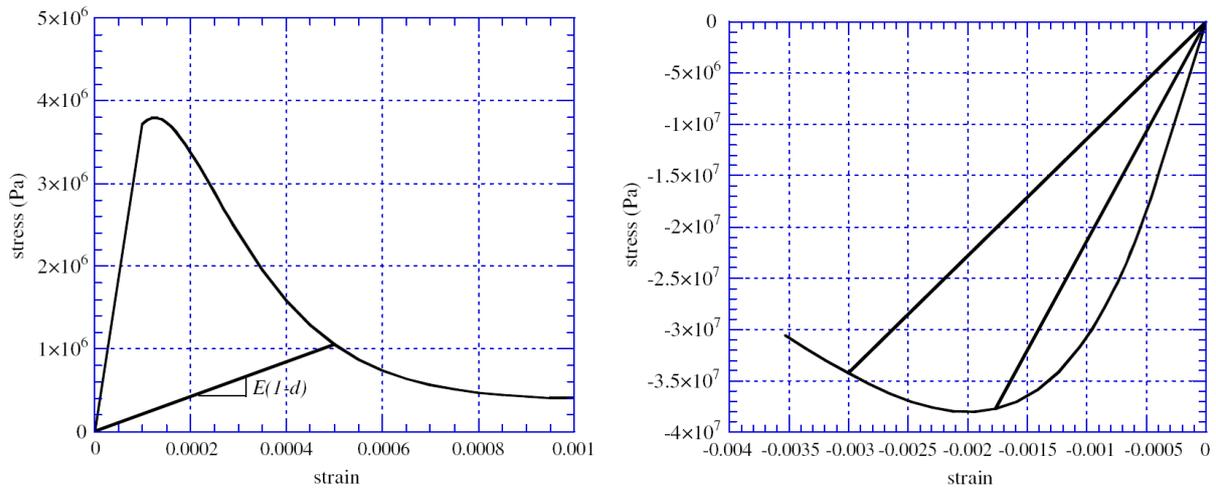


FIG. 1.4 – Réponse uniaxiale en traction (gauche) et compression (droite) du modèle d'endommagement de Mazars (d'après Mazars *et al.* (2006)).

Le calcul de l'opérateur tangent cohérent pour la méthode de Newton Raphson (voir description au paragraphe 2.5.3) nécessite les dérivées des coefficients α_t et α_c par rapport à l'incrément de déformation. Ces dérivées ne sont pas calculables analytiquement à cause de la présence de l'opérateur *Mac Cauley* qui n'est pas différentiable en zéro. Ces coefficients sont constants que dans le cas des chargements radiaux. La contribution de leurs dérivées dans l'opérateur tangent cohérent local est généralement négligeable (Jason *et al.* (2006)), mais la convergence quadratique n'est alors assurée que dans le cas de chargements proportionnels. En outre, l'expression de la déformation équivalente en fonction des déformations principales positives conduit à une condition stricte : l'endommagement se produit si et seulement s'il y a au moins une extension dans le repère principal des déformations.

1.3.1.2 Critère de "de Vree"

Ce critère garde la même méthodologie que dans le paragraphe précédent (résolution des équations (1.2), (1.41), (1.7) et (1.8) en particulier), mais il définit une nouvelle déformation équivalente ε_{eq} , appelée déformation équivalente de Von Mises modifiée (de Vree *et al.* (1995)), par :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)}I_1 + \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2}I_1^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2}J_2} \quad (1.12)$$

où I_1 et J_2 sont respectivement le premier et le deuxième invariant du tenseur de déformation, k est le rapport entre la résistance uniaxiale du matériau en compression f_c et en traction f_t . Ce modèle emploie une seule expression, dont la forme est similaire à celle du modèle de Mazars (relation (1.10)) pour l'évolution de l'endommagement :

$$D = 1 - \frac{1-A}{\varepsilon_{eq}} + \frac{A}{\exp(B(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \quad (1.13)$$

où A , B et ε_{D_0} sont les trois paramètres du modèle. Du point de vue numérique, ce modèle est plus simple que l'approche de Mazars. En effet, la déformation équivalente est une fonction directe des invariants des déformations et la relation ne nécessite le calage que de trois paramètres. De plus, les dérivées des contraintes par rapport aux déformations (opérateur tangent cohérent de la méthode de Newton-Raphson) peuvent être obtenues directement, contrairement au modèle de Mazars. La dissymétrie en traction et compression est aussi représentée par ce modèle. Néanmoins, l'allure des courbes en traction et en compression est similaire, contrairement à l'observation expérimentale où le comportement du béton est fragile en traction et ductile en compression. Ainsi, la définition de la déformation équivalente conduit à une forme elliptique (figure 1.5) de la surface de rupture, dans le cas d'un chargement biaxial, et si le paramètre k est choisi comme une valeur appropriée pour le béton, la résistance sous la contrainte traction/compression biaxiale est surestimée (Patzák et Jirázek (2004)). Par exemple, si k vaut 10 la contrainte maximale de traction qui peut être transmise sous les chargements proportionnels est deux fois supérieure à la résistance en traction uniaxiale, et si k vaut 15, la contrainte maximale de traction est 2,77 fois la résistance en traction uniaxiale. Par conséquent, la résistance au cisaillement du matériau est surestimée avec ce modèle (figure 1.6), ce qui est un inconvénient pour l'utilisation de ce modèle pour la simulation numérique de la rupture en mode II.

1.3.2 Modèle de "La Borderie"

Le Modèle de La Borderie (1991) est adapté à la description de certains phénomènes observés au cours de chargements cycliques (ou alternés) tels que : la diminution de la raideur du matériau (en-

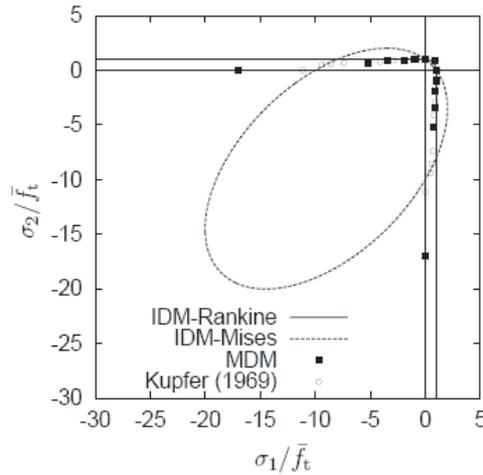


FIG. 1.5 – Surface de rupture sous chargement biaxial, pour différents modèles, comparée à la donnée expérimentale de Kupfer *et al.* (1969) (d'après Patzák et Jirázek (2004)). La réponse du modèle de Von Mises modifié est notée IDM-Mises.

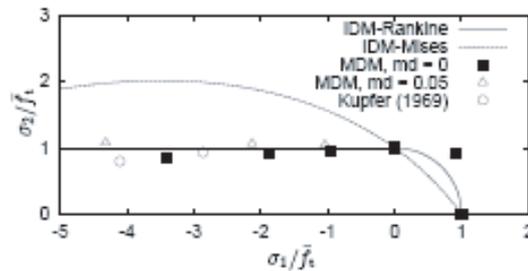


FIG. 1.6 – Enveloppe de la résistance dans la zone de l'état de contrainte traction-compression, pour différents modèles, comparée à la donnée expérimentale de Kupfer *et al.* (1969)(d'après Patzák et Jirázek (2004)). La réponse du modèle de Von Mises modifié est notée IDM-Mises.

dommagement), la restauration progressive de la raideur qui se produit à la fermeture de la fissuration et les déformations irréversibles (ou permanentes) ε^{an} , induites par l'endommagement (figure 1.7). Afin de simuler ce comportement, deux variables scalaires sont utilisées, D_1 pour l'endommagement en traction et D_2 pour l'endommagement en compression.

L'écriture 3D pour un endommagement fixé (D_1 , D_2 constants), conduit à la loi de comportement suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} \quad (1.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\boldsymbol{\sigma}^+}{E(1 - D_1)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^-}{E(1 - D_2)} + \frac{\nu}{E}(\boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{I}) \quad (1.15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1 - D_1)} F(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1 - D_2)} \mathbf{I} \quad (1.16)$$

où

- E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson et \mathbf{I} est le tenseur unité d'ordre 2.
- β_1 et β_2 sont des paramètres matériaux à identifier, permettant de décrire l'évolution des déformations anélastiques.
- $\boldsymbol{\sigma}^+$ et $\boldsymbol{\sigma}^-$ sont respectivement le tenseur des contraintes "de traction" et le tenseur des contraintes "de compression" (composés respectivement, dans le repère principal des termes positifs de la diagonale pour l'un et négatifs pour l'autre).
- $F(\boldsymbol{\sigma})$ est la fonction qui permet de gérer les effets d'ouverture et de refermeture des fissures.

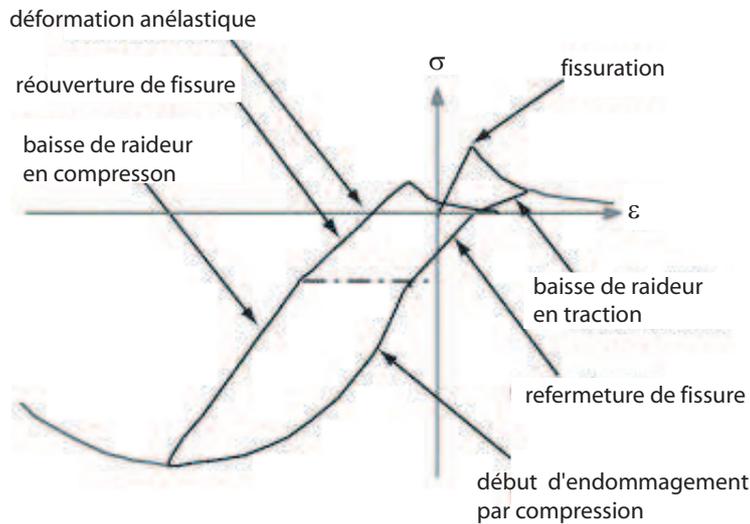


FIG. 1.7 – Réponse en traction-compression du modèle de La Borderie.

Il est à noter que si $D_1 = D_2 = D$, l'équation (1.15) est identique à l'équation (1.4) et si la déformation anélastique ($\boldsymbol{\varepsilon}^{an}$) n'est pas considérée ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), le modèle de Mazars et le modèle de La Borderie sont identiques (Mazars *et al.* (2006)). Contrairement au modèle d'endommagement présenté précédemment, ce modèle permet d'introduire une partie irréversible des déformations et l'effet unilatéral, selon le changement de signe de contrainte.

Toutefois, la difficulté de ce modèle réside dans sa formulation implicite qui impose de faire des itérations pour sa résolution. La loi de comportement doit être inversée à chaque itération. En revanche,

le tenseur de déformation anélastique reste toujours sphérique. Ceci implique que la déformation résiduelle ne dépend pas du cisaillement et peut aussi constituer une limitation du modèle, dans la mesure où le rôle du cisaillement peut être prépondérant dans la génération des déformations irréversibles (frottement des lèvres de la fissure). De ce fait, le modèle risque de conduire à une interprétation peu fidèle dans des cas dominés par le cisaillement.

1.3.3 Modèles d'endommagement anisotrope

D'un point de vue microscopique, les fissures et les vides se développent dans des directions dépendantes du chargement imposé. Généralement, une direction privilégiée est celle perpendiculaire à la direction de plus forte contrainte de traction. Ces directions privilégiées conduisent à une anisotropie macroscopique du matériau qui est fonction de l'histoire du matériau. Elle est induite par l'endommagement. La figure 1.8 montre les orientations privilégiées des fissures sur un essai de traction–compression du béton. Alors qu'en traction, les fissures se forment perpendiculairement à la direction de chargement, en compression, leurs directions deviennent parallèles.

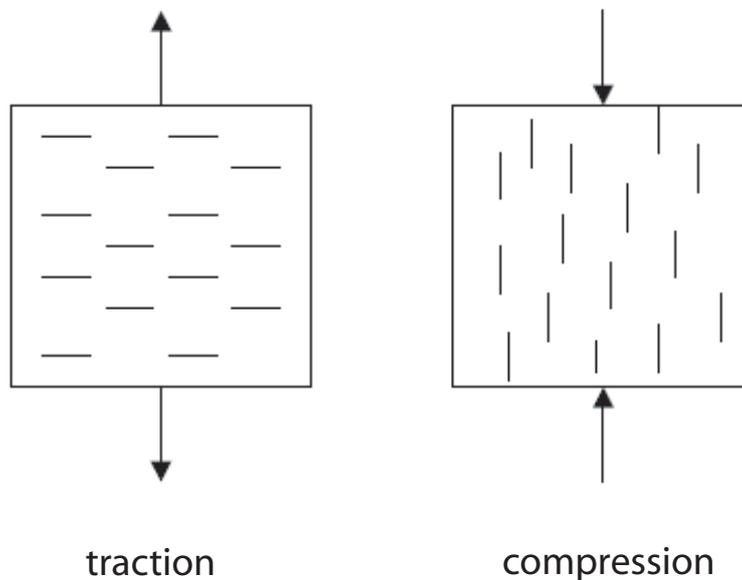


FIG. 1.8 – Mise en évidence de l'anisotropie du matériau. Essai de traction et de compression.

Dans les cas de structures simples, si les chargements appliqués sont proportionnels, on peut estimer que l'anisotropie, ainsi créée, n'aie que peu d'effets. Cependant, pour les chargements plus complexes et pour les matériaux anisotropes, cette modélisation n'est pas suffisante et il est indispensable de poser la question de la modélisation anisotrope.

Diverses extensions ont été proposées pour étendre la théorie de l'endommagement scalaire isotrope aux matériaux anisotropes et aux chargements complexes. Ce choix n'est pas toujours chose facile, tant d'un point de vue théorique, que dans sa mise en œuvre numérique.

La façon la plus générale de modéliser l'anisotropie et de considérer un tenseur d'endommagement d'ordre 4 M . Dans ce cas, la relation liant les contraintes effectives et réelles est donnée par la relation :

$$\sigma_{ij} = M(D)_{ijkl} \sigma'_{kl} \quad (1.17)$$

Cette approche, même si elle ne présente pas de difficultés théoriques, n'est pas raisonnable aux vues des possibilités expérimentales. L'ingrédient clé, de chaque modèle, est de définir une loi d'évolution du tenseur caractérisant la dégradation de matériau $M(D)$. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 4, les lois d'évolutions sont difficiles à établir vu le nombre important de composantes du tenseur.

La théorie des microplans représente une alternative à l'utilisation d'un tenseur d'ordre supérieur. Bažant (1985) a utilisé ce concept pour décrire la dégradation des matériaux fragiles comme le béton. La loi de comportement est discrétisée suivant un certain nombre de microplans. Sur chaque plan d'orientation \vec{n} , des relations uniaxiales reliant les composantes du vecteur déformation aux composantes du vecteur contrainte sont définies. Le paramètre qui caractérise l'endommagement sur chaque microplan est désormais un scalaire, sa valeur est différente d'un microplan à l'autre, ce qui conduit à une description anisotrope à l'échelle macroscopique.

Cependant, l'intégration de la loi de comportement dans le cas des modèles microplans reste encore problématique (dépendance de la réponse simulée au nombre de points d'intégration (Badel (2001))). Un travail numérique doit donc être encore envisagé pour améliorer le calcul de cette intégrale.

Une autre alternative est de choisir un tenseur d'endommagement d'ordre 2, dont seules les valeurs propres peuvent évoluer. Souvent, l'endommagement est calculé en fonction des extensions, son évolution est calculée dans la base propre des déformations (Fichant (1996), Desmorat *et al.* (2007), Badel *et al.* (2007)). Il est, en effet, probable que pour des trajets de chargement non complexes, les directions principales du tenseur d'endommagement et de déformation coïncident ; hypothèse beaucoup moins réaliste dans le cas de chargements complexes. Badel *et al.* (2007) utilisent l'anisotropie de l'endommagement pour la traction. Pour la compression, ils emploient une seule variable d'endommagement isotrope.

Peu d'études ont été menées sur les algorithmes de résolution (Kuhl *et al.* (2000)). En particulier, l'absence d'opérateur tangent cohérent pour la méthode de Newton-Raphson, soulève des questions sur les temps de calcul (vitesse de convergence non quadratique). Or, cette qualité numérique fait partie des points clés lorsque des études, utilisant des maillages complexes et des conditions particulières, sont envisagées.

1.4 Modèles de plasticité

Lorsqu'un matériau est endommagé sous des sollicitations extérieures puis déchargé, les microfissures ne se referment pas totalement. La rugosité des fissures formées durant le chargement empêchent le retour à l'état initial. Comme nous l'avons vu, les modèles d'endommagement isotrope ne sont pas appropriés pour décrire les déformations irréversibles : une contrainte nulle correspond à une déformation nulle (figure 1.4).

Dans la quasi-totalité des modèles, les déformations irréversibles sont qualifiées de plastiques et sont associées à la définition d'une fonction de charge (par analogie à la plasticité).

De nombreux modèles de plasticité associés avec les autres phénomènes non-linéaires ont été élaborés, afin de traiter les différents phénomènes liés au comportement complexe du béton déjà mentionné au début de ce chapitre. Parmi ces modèles, on peut citer le travail de Willam et Warnke (1974), Sfer *et al.* (2002) et Papanikolaou et Kappos (2007). Dans notre travail, le critère de plasticité doit remplir les trois objectifs suivants :

- le modèle doit reproduire les effets de plasticité associés au déchargement d'un essai soumis à des sollicitations cycliques : apparition de phénomènes irréversibles (vérifié a priori par toutes les lois de plasticité),
- le comportement volumique doit être correctement simulé avec l'apparition d'un changement de contractant vers dilatant, observé en compression simple (figure 1.9),
- pour des pressions de confinement très élevées, l'expérience montre une diminution de la rigidité élastique (figure 1.10). Cela nécessite une surface fermée selon le premier invariant. C'est l'objet des "cap model", (Di Maggio et Sandler (1971), Hofstetter et Simo (1993), Wu *et al.* (2004)). Une autre solution consiste à adopter une surface analytiquement fermée en tri-compression, ainsi la gestion des coins de raccordement (Gurson (1977), Burlion (1997)), qui sont des points singuliers où les dérivées ne peuvent pas être calculées, est simplifiée.

Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter les deux modèles qui seront utilisés dans la suite de notre travail.

1.4.1 Critère de "Von Mises"

Le critère de Von Mises, l'une des fonctions seuils les plus simples à mettre en œuvre numériquement, s'applique bien aux aciers de construction. La surface seuil de plasticité associée s'écrit :

$$F = \sigma_{eq} - R - R_0 \quad (1.18)$$

où R est le paramètre d'écrouissage fonction de la déformation plastique cumulée κ et vaut initialement R_0 , le seuil de plasticité et σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, définie en fonction du

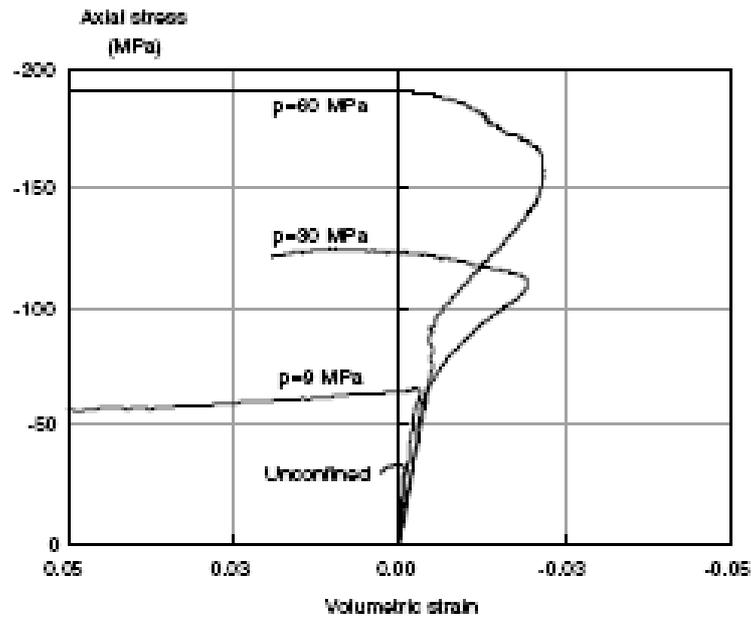


FIG. 1.9 – Comportement volumique lors d’un essai triaxial confiné (d’après Sfer *et al.* (2002)).

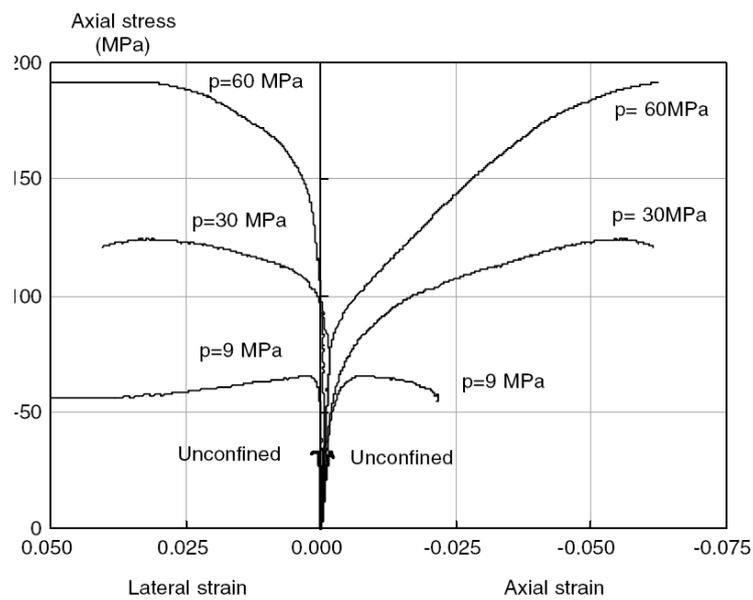


FIG. 1.10 – Perte de rigidité lors d’un essai triaxial confiné (d’après Sfer *et al.* (2002)).

second invariant des contraintes par :

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2J_2}}{\sqrt{3}} \quad (1.19)$$

La représentation graphique associée à cette surface dans le plan $(\sqrt{J_2}, I_1)$ est donnée dans la figure 1.11.

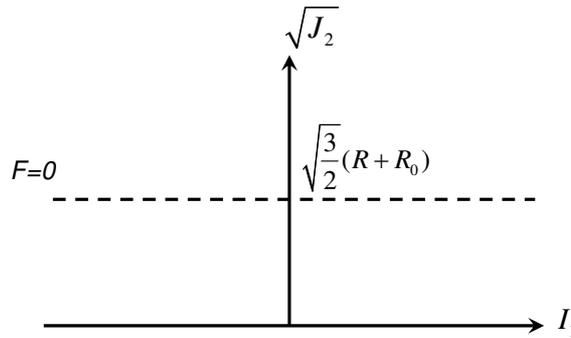


FIG. 1.11 – Représentation graphique de la surface seuil du modèle de Von Mises.

Ce modèle présente la particularité de proposer une solution analytique pour l'opérateur tangent cohérent lié au calcul de la dérivée des contraintes par rapport aux déformations. Néanmoins, ce critère est indépendant de la pression hydrostatique (ou du premier invariant du tenseur des contraintes I_1) qui est nécessaire pour prendre en compte les effets de confinement sous pression. La combinaison des premier et second invariants des contraintes conduit au critère de Drucker et Prager (1952). Il est à noter que l'inconvénient du critère de Drucker-Prager réside dans l'impossibilité de franchir le seuil de plasticité sous chargements hydrostatiques.

1.4.2 Critère de "Sheffield"

Le modèle présenté ici a pour but de reproduire les trois objectifs définis précédemment. La formulation du modèle est inspirée de Etse et Willam (1994) et modifiée par Crouch et Tahar (2000). L'originalité de ce modèle, comparé à l'approche fondée sur les "cap model" en plasticité, est l'utilisation d'une seule surface de plasticité et d'une seule variable interne, contrairement aux "cap model" qui sont constitués d'une fonction seuil résultant de l'association de deux ou trois (pour assurer la continuité) surfaces plastiques. Le modèle dans sa forme originale simule à la fois un écrouissage positif et négatif. Comme dans Jason (2004), nous allons présenter seulement la partie à écrouissage positif (car ce sera la seule à être utilisée dans la suite).

Formulation : La surface seuil dépend des trois invariants normalisés de contraintes $(\bar{\rho}, \bar{\xi}, \theta)$ et d'une seule variable interne k_h :

$$\bar{\xi} = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{3}r_c}, \quad \bar{\rho} = \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{r_c}, \quad \theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\sqrt{6} \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s} : \mathbf{s}}{(\mathbf{s} : \mathbf{s})^{3/2}} \right) \quad (1.20)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{s} respectivement les tenseurs des contraintes totales et déviatoriques. r_c est une constante du modèle qui quantifie, dans la formulation initiale, la résistance en compression du matériau.

F est définie à partir de trois fonctions \hat{k} , $\bar{\rho}_c$ et r :

$$F = \bar{\rho}^2 - \frac{\hat{k}(\bar{\xi}, k_h) \bar{\rho}_c(\bar{\xi})}{r^2(\bar{\xi}, \theta)} \quad (1.21)$$

La fonction d'érouissage, \hat{k} , quantifie l'évolution de la surface de charge avec la déformation plastique. Elle est donnée par :

$$\hat{k} = k^{2p} \left(1 - \frac{\bar{\xi}^2}{\xi_h^2} \right), \quad \text{où} \quad \xi_h = \frac{A}{1-k} \quad \text{et} \quad k = k_0 + (1-k_0) \sqrt{k_h(2-k_h)} \quad (1.22)$$

avec p , A et k_0 trois paramètres du modèle. L'invariant déviatorique, $\bar{\rho}_c$, est défini par

$$\bar{\rho}_c = \left(\frac{1}{6} \right)^\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-n + \sqrt{n^2 - 12\sqrt{3}n\bar{\xi} + 36} \right)^\gamma \quad (1.23)$$

dans lequel

$$n = \frac{3 \left(1 - \bar{f}_t^{\frac{2}{\gamma}} \right)}{\bar{f}_t + 2\bar{f}_t^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{et} \quad \bar{f}_t = \frac{r_t}{r_c} \quad (1.24)$$

où γ est une constante et r_t représente la résistance en traction dans la forme originale du modèle.

Enfin, r est la fonction de forme déviatorique initialement développée par Bhowmik et Long (1990), et correspond à un cas particulier de la surface elliptique de Willam et Warnke (1974)

$$r = \frac{2d_0}{d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_0d_2}} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{aligned}
 d_o &= c_1 \cos^2 \theta - c_2 \sin^2 \theta + c_3 \sin \theta \cos \theta, & c_0 &= \frac{(2 - \sqrt{3}B_1)(2B_0 - \sqrt{3}B_1)}{(B_1(1 + B_0) - \sqrt{3}B_0)}, \\
 d_1 &= 2(c_4 \sqrt{3} \cos \theta - c_5 \sin \theta), & c_1 &= 3 - c_0(1 + B_0)^2, \\
 d_2 &= B_0(4 - 3B_0c_0), & c_2 &= 1 + 3c_0(1 - B_0^2)^2, \\
 B_0 &= \frac{\bar{\rho}_e}{\rho_c}, & c_3 &= 2c_0\sqrt{3}(1 - B_0^2), \\
 B_1 &= \frac{\sqrt{3}(1 - \alpha)B_0}{1 + B_0} + \frac{2\alpha B_0}{\sqrt{3}}, & c_4 &= (1 + B_0)(1 - B_0c_0), \\
 \bar{\rho}_e &= \left(\frac{1}{3}\right)^\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-n + \sqrt{n^2 - 3\sqrt{3}n\bar{\xi} + 9}\right)^\gamma, & c_5 &= (1 - B_0)(1 - 3B_0c_0),
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

où α est un paramètre du modèle.

En utilisant les résultats de Etse et Willam (1994), l'évolution de la variable interne k_h est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_h &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^p : \varepsilon^p}}{\zeta(\sigma')} \quad \text{si } k_h < 1, \\
 \dot{k}_h &= 0 \quad \text{si } k_h = 1,
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

avec qui ζ dépend du premier invariant normalisé :

$$\begin{aligned}
 \zeta &= -A_h + \sqrt{A_h^2 - B_h\bar{\xi} + C_h} \quad \text{si } \bar{\xi} \leq 0, \\
 \zeta &= -A_h + \sqrt{A_h^2 + C_h} \quad \text{si } \bar{\xi} > 0,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

où A_h , B_h et C_h sont trois paramètres du modèle. Le modèle de plasticité nécessite donc au total la connaissance de 10 coefficients. Notons que l'Equation (1.28) suppose pour k_h des valeurs comprises entre 0 et 1. Pour $k_h = 1$, la surface seuil devient une surface limite pour laquelle aucun écrouissage n'est plus possible.

Propriétés de la surface seuil : La figure 1.12 montre la surface seuil initiale pour différentes valeurs de l'angle de Lode θ . En compression simple, $\theta = \pi/6$ alors que pour la traction simple θ vaut $-\pi/6$. Une valeur $\theta = 0$ est caractéristique par exemple d'un chargement hydrostatique. A partir de ces résultats, nous constatons que le comportement plastique n'est pas symétrique, ce qui est intéressant pour un béton. L'évolution de la surface seuil en compression simple pour différentes valeurs de k_h est illustrée sur la figure 1.13. Un écrouissage positif est mis en évidence : plus k_h est grand et plus le seuil de plasticité augmente.

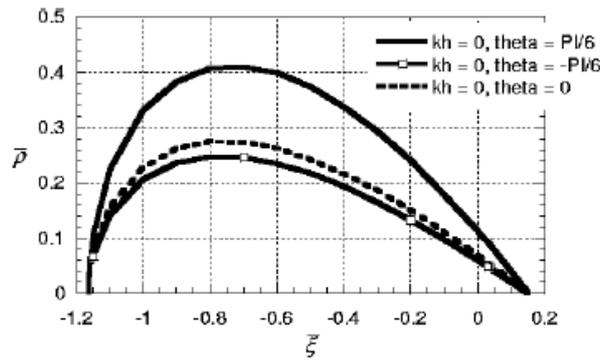


FIG. 1.12 – Représentation de la surface seuil pour différentes valeurs de l’angle de Lode (Jason (2004)).

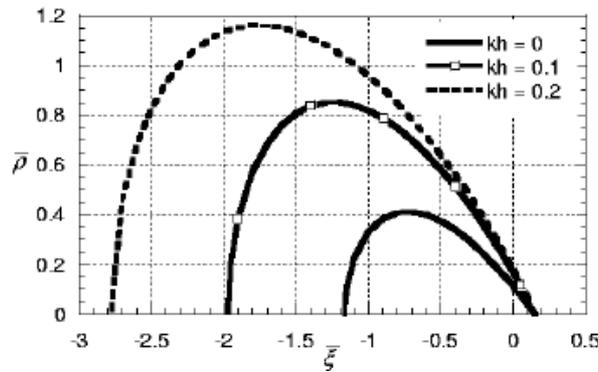


FIG. 1.13 – Représentation de la surface seuil pour différentes valeurs du k_h (Jason (2004)).

L’une des particularités de ce modèle est de présenter une surface de rupture à partir de laquelle l’écroutissage n’évolue plus. Ce seuil, illustré dans la figure 1.14, est caractérisé par une valeur de k_h égale à 1.

Sur les surfaces de plasticité et de rupture, cinq points caractéristiques peuvent être définis. En compression uniaxiale ($\theta = \pi/6$) et pour $\bar{\xi}$ donné (figure 1.15a), $\bar{\rho}$ vaut $\bar{\rho}_c$ sur la surface de rupture. Son intersection avec la droite de pente $-\sqrt{2}$ (-RAC2 sur la figure) permet de déterminer $\bar{\rho} = r_c$ ($\bar{\rho} = -\sqrt{2}\bar{\xi}$). En traction simple ($\theta = \pi/6$), $\bar{\rho}$ égale à $\bar{\rho}_e$ sur la surface de rupture (figure 1.15b) qui intersecte la droite de pente $\sqrt{2}$ pour $\bar{\rho} = r_t$ ($\bar{\rho} = \sqrt{2}\bar{\xi}$). Enfin, pour $\bar{\rho} = 0$, et quel que soit θ ou k_h , $\bar{\xi} = \xi$ (figure 1.15c).

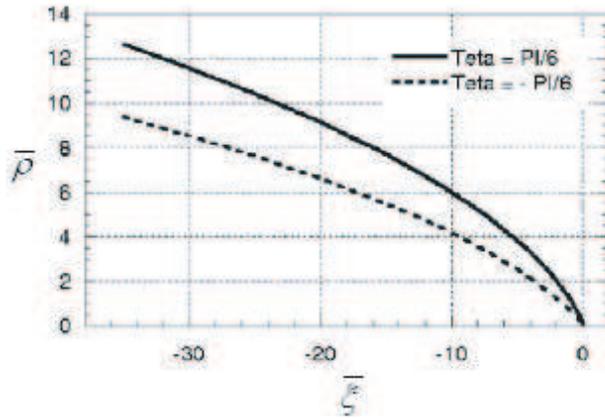


FIG. 1.14 – Représentation de la surface de rupture (Jason (2004)).

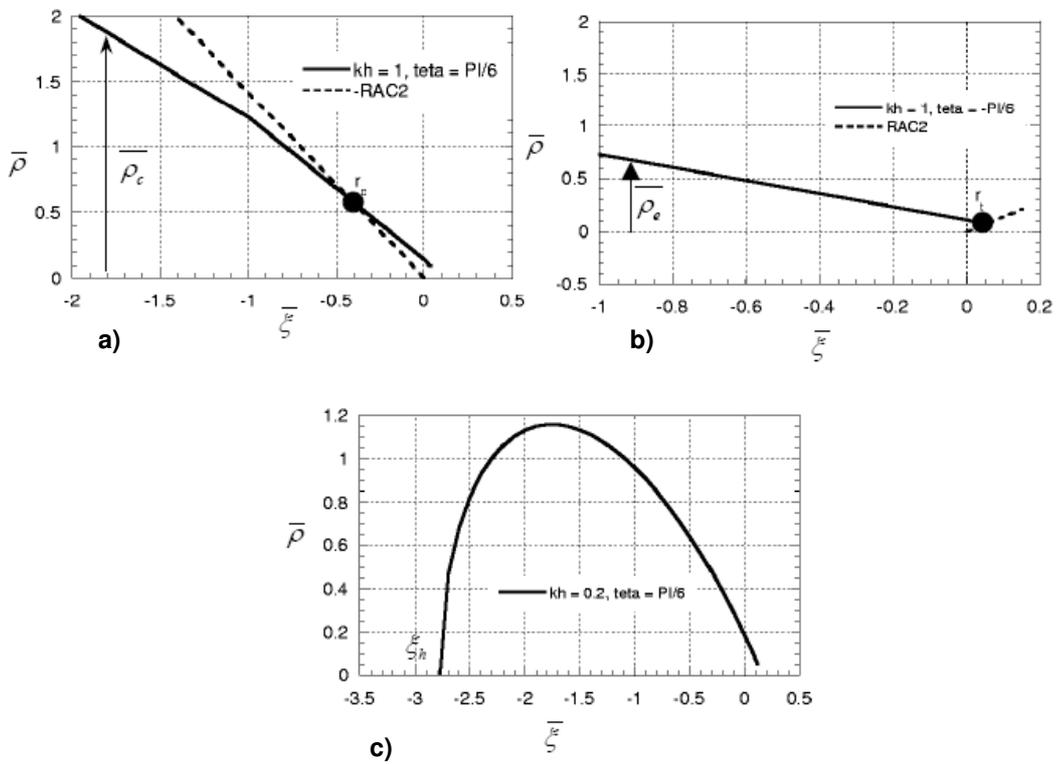


FIG. 1.15 – Points caractéristiques de la surface de rupture Jason (2004).

1.5 Couplage de l'endommagement et de la plasticité

1.5.1 Apports du couplage

Dans le contexte de notre étude, le comportement mécanique monotone (élasticité, écrouissage positif et adoucissement), doit bien évidemment être reproduit, mais une attention particulière est apportée à

la simulation du déchargement. Or, celui-ci quantifie généralement la valeur de l'endommagement expérimental et doit donc être simulé avec soin dans le cadre de problèmes couplés (couplage endommagement - perméabilité par exemple).

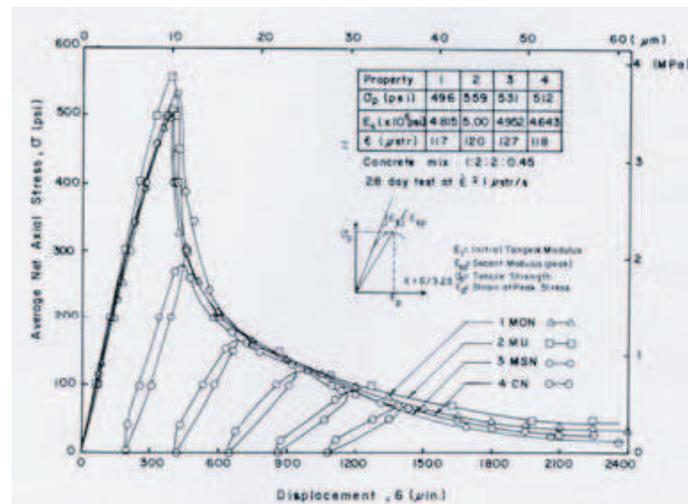


FIG. 1.16 – Comportement expérimental en traction (Gopalaratnam et Shah (1985)). Mise en évidence de la perte de rigidité et du développement de déformations irréversibles.

Deux phénomènes principaux caractérisant le comportement mécanique du béton en déchargement peuvent être observés : la diminution de la raideur élastique et le développement de déformations irréversibles (figure 1.16). D'une part, un modèle d'endommagement isotrope reproduit la diminution de rigidité élastique avec une pente de déchargement passant toujours par l'origine (figure 1.17-a) qui implique une surévaluation de la valeur d'endommagement par rapport à l'expérience. D'autre part, les modèles plastiques prennent en compte les phénomènes irréversibles. Néanmoins, la plasticité n'est pas capable de reproduire la diminution de raideur caractéristique de la formation d'une microfissuration et la pente de déchargement est toujours élastique (figure 1.17-b), contrairement à l'expérience.

Alors, la combinaison de la plasticité et de l'endommagement peut apporter une réponse aux limitations des deux formulations en alliant leurs avantages (Jason (2004)). La perte de rigidité est toujours associée au développement d'un endommagement et la plasticité reproduit les déformations irréversibles. La pente de déchargement (et donc la valeur d'endommagement) peut être calée sur des résultats expérimentaux (figure 1.17-c).

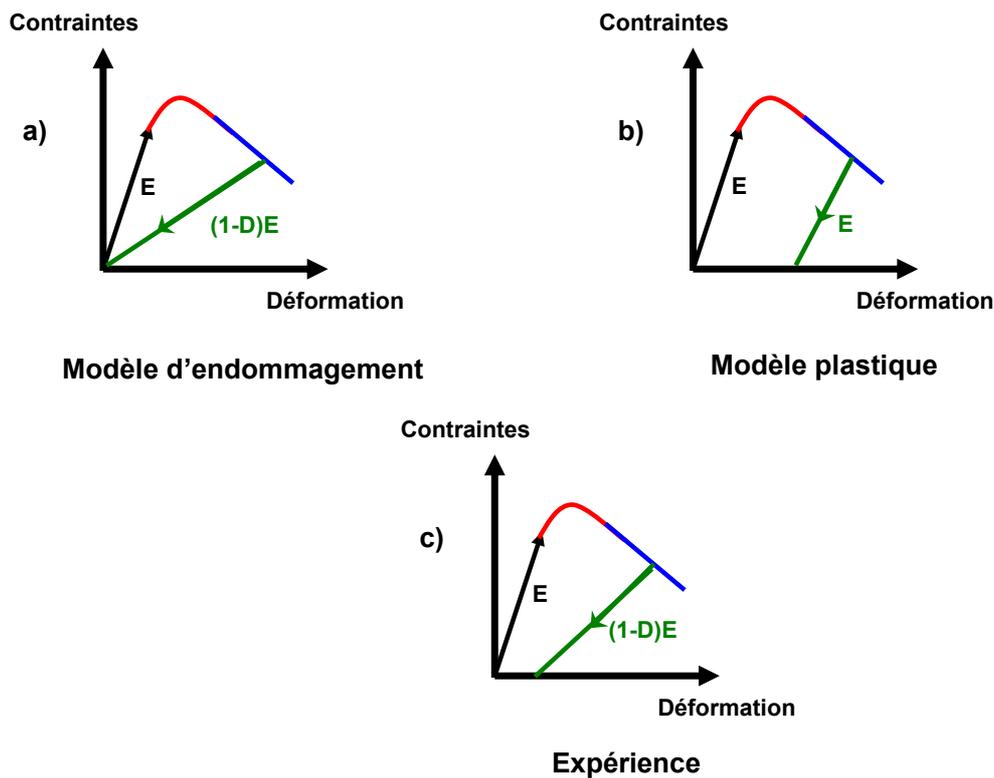


FIG. 1.17 – Pente de décharge dans le cas uniaxial. a) Endommagement, b) plasticité et c) expérience.

1.5.2 Approches existantes pour le couplage

Dans la littérature, il existe plusieurs approches pour combiner la plasticité à l'endommagement dans une seule et même relation constitutive. Le couplage entre la plasticité et l'endommagement a initialement été proposé pour les métaux dans les modèles dit de "rupture ductile" (voir, par exemple, Lemaitre et Chaboche (1991)). Cette approche considère que l'évolution de l'endommagement est pilotée par le développement des déformations. Krätzig et Pölling (2004) et Meschke et Lackner (1997) ont utilisé cette approche pour modéliser le comportement du béton en compression. Cette solution n'est pas appropriée pour les tests en traction simple où l'endommagement est plus important que la plasticité. Du point de vue phénoménologique, les déformations irréversibles dans le béton sont considérées comme le résultat du glissement des microfissures et de la friction interne. Si tel est le cas, l'endommagement doit avoir lieu avant le développement de la plasticité.

La deuxième possibilité est d'utiliser le concept de la contrainte effective. La surface seuil n'est plus exprimée en terme de contraintes totales, mais devient une fonction des contraintes effectives (contraintes dans le matériau non endommagé) (Simo et Ju (1987a), Simo et Ju (1987b), Ju (1989),

Mazars et Pijaudier-Cabot (1989), Lee et Fenves (1998)). Dans cette solution, l'endommagement peut être piloté en fonction de la déformation élastique (Jason (2004), Jason *et al.* (2006), Hansen et Phoenix (1992)) ou de la déformation plastique (Grassl et Jirasek (2006a), Grassl et Jirasek (2006b) et Grassl et Rempling (2007)) ou encore de la déformation totale (Wu *et al.* (2006) et Mediavilla *et al.* (2006)).

La dernière approche suppose un couplage dit fort car c'est la contrainte totale qui apparaît dans l'expression de la surface seuil, qui devient alors couplée à l'endommagement. Nous citerons à titre d'exemple Luccioni *et al.* (1996) et Armero et Oller (2000).

Il est à noter qu'il existe aussi d'autres modèles qui intègrent dans leur formulation un terme de déformation irréversible lié aux variables d'endommagement, sans pour autant introduire de variables supplémentaires. C'est par exemple le cas du modèle de La Borderie (1991) (déjà présenté ci-dessous) et celui de Halm et Dragon (1998).

Du point de vue numérique, l'implantation du modèle couplé dans un code d'éléments finis est plus facile à mettre en œuvre si l'approche en contrainte effective est utilisée, car ce choix permet de séparer simplement l'endommagement et la plasticité. Dans ce cas, la contrainte effective σ' doit vérifier les équations de plasticité, c'est-à-dire :

$$F(\sigma', \kappa) \leq 0 \tag{1.29}$$

avec F la surface seuil plastique et κ le vecteur des variables internes associées.

Puis l'endommagement est fonction de la déformation élastique, plastique ou totale selon le cas considéré. Finalement, la contrainte appliquée est calculée à partir de la relation suivante :

$$\sigma = (1 - D)\sigma' \tag{1.30}$$

1.6 Etude des problèmes de localisation

De nombreuses études ont abordé le problème de la localisation des déformations dans un milieu continu. La localisation peut être définie comme une zone où les déformations restent continues, mais se concentrent dans une bande de taille, très petite vis-à-vis de la structure, qui dépend des conditions de chargement. Ce phénomène de localisation conduit rapidement à la ruine de la structure. En pratique, la localisation se traduit de différentes façons. Pour les métaux, la bande de localisation se forme par des glissements de plans cristallins et par la formation de cavités. Pour les milieux granulaires, un réarrangement de grains peut être à l'origine de la localisation. Enfin, pour le cas qui nous intéresse, les matériaux hétérogènes quasi-fragiles, la bande de localisation est formée par une collection de microfissures. Cette bande de localisation, de dimension microstructurale, ne peut pas

être décrite correctement par les modèles continus classiques (Bažant (1976) et de Borst et Muhlhaus (1992), par exemple).

Simultanément, la localisation de l'endommagement rend le problème mathématique à résoudre mal posé, car l'adoucissement cause une perte d'ellipticité du système d'équations différentielles décrivant le processus de déformation (Benallal *et al.* (1993) et Peerlings *et al.* (1996a)). Finalement, les conditions initiales et les conditions aux limites, qui étaient correctement définies dans le cas elliptique, deviennent inadaptées pour le cas hyperbolique.

Numériquement, ces difficultés se traduisent par une forte dépendance des résultats par rapport à la finesse et à l'orientation du maillage dans un calcul éléments finis (Bažant et Pijaudier-Cabot (1988)). La taille de la zone de localisation devient fonction de la taille des éléments finis où le critère de localisation est atteint. Il en résulte une non-objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale, conduisant à dissiper de moins en moins d'énergie quand on raffine le maillage.

1.7 Limiteurs de localisation

1.7.1 Généralités

L'objectif des limiteurs de localisation, appelés également techniques de régularisation, est d'enrichir la description mécanique du milieu de manière à pouvoir décrire des états non homogènes de déformation, afin d'éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d'adoucissement. L'idée générale consiste à introduire une information spatiale, généralement sous la forme d'une longueur interne, liée aux interactions entre les défauts et donc à la microstructure du matériau. Plusieurs méthodes sont disponibles :

- théories non locales (Pijaudier-Cabot et Bažant (1987), Bažant et Pijaudier-Cabot (1988)).
- méthodes basées sur la formulation en gradient (Peerlings *et al.* (1996a)).
- modèles avec effets de vitesse (Sluys (1992), Burlion (1997)).
- modèles d'ordre supérieurs tels que Cosserat (Cosserat et Cosserat (1909)). Cette technique n'est pas valide pour des problèmes de localisation en mode I (de Borst (1991), de Borst *et al.* (1993a) et Dufour et Pijaudier-Cabot (2005)).

Dans les paragraphes suivants, nous allons détailler les deux types de modèles qui seront utilisés dans notre travail : les modèles non locaux basés sur une formulation intégrale, et les modèles gradients.

1.7.2 Modèle non local intégral

Un milieu non local est un milieu dans lequel au moins un champ de variable est sujet à une moyenne spatiale dans un voisinage fini d'un point (Bažant *et al.* (1984)). L'avantage d'un tel concept est qu'il

est applicable à tout type de modèle continu : modèles diffus (Bažant et Lin (1988) et Jirasek et Zimmermann (1998)), modèles d'endommagement (Bažant et Pijaudier-Cabot (1988), Rodriguez-Feran *et al.* (2005) et Desmorat *et al.* (2007)), modèles microplans (Bažant et Ožbolt (1990), Ožbolt et Bažant (1992) et Di Luzio (2007)) et modèles de plasticité (Strömberg et Ristinmaa (1996) et Jirasek et Rolshoven (2003)). Seule la variable responsable de l'adoucissement est considérée comme non locale, c'est-à-dire, selon le modèle utilisé, l'endommagement, la déformation plastique, etc. Par conséquent, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point, mais également de la déformation dans un certain voisinage décrit par un volume représentatif défini par une longueur caractéristique.

Pour les modèles d'endommagement défini par une déformation équivalente, la déformation équivalente non locale $\bar{\varepsilon}_{eq}$ s'écrit en tout point x de la structure :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \psi(x-s) \varepsilon_{eq}(s) d\Omega \quad (1.31)$$

où Ω est le volume de la structure, et $V_r(x)$ est le volume représentatif au point x défini par :

$$V_r(x) = \int_{\Omega} \psi(x-s) d\Omega \quad (1.32)$$

$\psi(x-s)$ est une fonction de pondération non locale. Celle-ci peut être choisie arbitrairement mais la forme la plus répandue est une Gaussienne :

$$\psi(x-s) = \exp\left(\frac{-4 \|x-s\|^2}{l_c}\right) \quad (1.33)$$

l_c est la longueur caractéristique du matériau, appelée plus généralement longueur interne pour un milieu non local. Bažant et Pijaudier-Cabot (1989) ont lié la longueur interne à la zone de microfissuration (figure 1.18). Si nous considérons que l'aire sous la courbe de "a" est le même que l'aire sous la courbe de "b" sur cette figure, la relation suivante peut être établie :

$$l_{FPZ} = \alpha l_c \quad (1.34)$$

avec $\alpha = 1,93$. l_{FPZ} est la largeur de la zone de microfissuration.

Bažant et Pijaudier-Cabot (1989) ont alors proposé une méthode permettant de déterminer la longueur interne expérimentalement en *délocalisant* l'endommagement. Ils ont déterminé ainsi la relation $l_c \cong 3.d_a$ où d_a est le diamètre du plus gros granulat présent dans le béton.

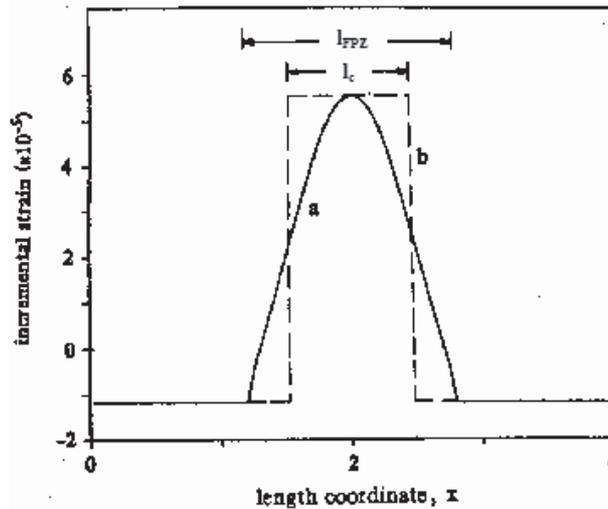


FIG. 1.18 – Profil de déformation obtenu analytiquement avec le modèle non local intégral (Pijaudier-Cabot et Bazant (1987)).

Comme la fonction poids est indépendante des conditions aux limites, les poids peuvent être calculés, une seule fois pour chaque maillage, en chaque point de Gauss avant de commencer le calcul. Ces poids sont alors stockés en mémoire dans la matrice de connectivité et sont utilisés pour tous les calculs effectués avec la même discrétisation. Si on choisit de construire une matrice tangente à partir de la loi de comportement incrémentale, on obtient une matrice de rigidité non symétrique dont la largeur de bande est beaucoup plus grande que celle de la matrice sécante (Pijaudier-Cabot et Huerta (1991)). Il y a deux raisons à cette non symétrie (figure 1.19) :

- le volume, où la moyenne est calculée, est tronqué proche du bord libre. Les interactions entre voisins sont donc différentes ;
- près de la frontière entre la région où l'endommagement croît et celle où il reste constant, les interactions entre voisins sont différentes (pas d'interaction si l'endommagement au point est constant).

La largeur de bande de l'opérateur tangent est à mettre directement en relation avec la taille du support de la fonction poids. Pour la Gaussienne, cette taille est infinie et la matrice de raideur est pleine. Pour des raisons numériques, le support est tronqué à partir de poids inférieurs à 1%. Toutefois, la fonction introduit une corrélation entre les vitesses de déformation en chaque point de Gauss. La mise en œuvre d'une procédure de résolution basée sur la raideur tangente de la structure nécessite donc une place mémoire et un temps d'inversion de la matrice beaucoup plus importants.

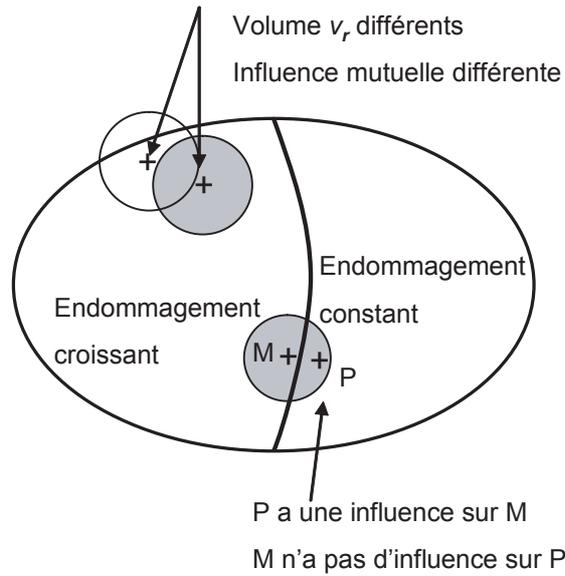


FIG. 1.19 – Source de non-symétrie de l'opérateur de raideur tangente.

1.7.3 Modèles avec effet du gradient

1.7.3.1 Formulation explicite

L'idée de ces modèles est d'augmenter l'ordre du développement limité permettant de calculer la déformation (Lasry et Belytschko (1988)) ou la déformation équivalente (Peerlings (1999)). Ainsi, la localisation est évitée en générant un champ de déformations régularisées.

La déformation équivalente non locale est liée à la déformation locale et à son laplacien par la relation :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} + c \nabla^2 \varepsilon_{eq} \quad (1.35)$$

où le paramètre c a la dimension d'une longueur au carré caractérisant le milieu hétérogène. Cette relation peut être déduite de la formulation intégrale (1.31) par une décomposition en série de Taylor de la déformation équivalente ε_{eq} en négligeant les termes d'ordre 4 et plus (Peerlings *et al.* (1996b)). Le calcul utilisant cette formulation conduit à une instabilité mécanique dans la phase d'écrouissage positive (Askes et Sluys (2000)). C'est pour cette raison qu'on lui préfère généralement une formulation implicite.

1.7.3.2 Formulation implicite

La forme implicite du modèle gradient peut être déduite de l'équation (1.35). En supposant $\nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} \approx \nabla^2 \varepsilon_{eq}$, on obtient :

$$\varepsilon_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq} - c \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial n} = n \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.37)$$

avec n le vecteur normal sortant sur $\partial\Omega$. Cette condition permet de retrouver la solution des problèmes homogènes où $\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}$ (Peerlings *et al.* (1996a)).

Une alternative pour cette formulation consiste à appliquer le même raisonnement, mais sous forme tensorielle, afin d'obtenir le tenseur des déformations non locales $\bar{\varepsilon}_{ij}$ au lieu de la déformation non locale scalaire $\bar{\varepsilon}_{eq}$. On obtient ainsi :

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} - c \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{ij} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.38)$$

$$\nabla \bar{\varepsilon} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } d\Omega \quad (1.39)$$

Cette approche est ensuite adaptée au modèle d'endommagement isotrope en remplaçant la déformation équivalente locale (2.6) par sa version non locale :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle_+)^2} \quad (1.40)$$

Ainsi, de façon identique au modèle d'endommagement scalaire, une surface de charge est donnée par la fonction :

$$g(\bar{\varepsilon}, k_d) = \bar{\varepsilon}_{eq}(\bar{\varepsilon}) - k_d \quad (1.41)$$

Il est notable que les deux formulations non locales, l'une basée sur l'approche intégrale, l'autre sur l'approche en gradient, sont exactement équivalentes dans le cas du milieu infini et pour une fonction de pondération spécifique (Peerlings *et al.* (2001)).

La relation entre la longueur interne l_c pour le modèle non local intégral et c pour les approches en gradient a été discutée par plusieurs auteurs. Jason (2004) a comparé les courbes force-déplacement, obtenues avec le modèle non local intégral et l'approche en gradient, sur les tests en flexion trois points. Il a trouvé :

$$\sqrt{c} \approx \frac{lc}{4} \quad (1.42)$$

Par contre, Dufour *et al.* (2008) ont déterminé les deux longueurs internes sur la largeur de la zone de microfissuration d'une barre en traction et ont obtenu :

$$\sqrt{c} \approx \frac{lc}{2,55} \quad (1.43)$$

Les modèles non locaux permettent de réaliser une modélisation cohérente de la rupture et du comportement adoucissant des matériaux cimentaires (de Borst *et al.* (1993b), Peerlings *et al.* (1996a) et de Borst (2002)), mais également d'autres matériaux quasi-fragiles comme les alliages métalliques (Leblond *et al.* (1994)), les composites (Geers *et al.* (1996)), les sols et roches, les polymères, les biomatériaux ou même les nanomatériaux (Bažant (2004)).

1.8 Effets d'échelle à la rupture des structures en béton

Alors que du point de vue de l'analyse par éléments finis, un modèle non local est développé afin d'éviter une localisation erronée de l'endommagement dans une bande d'épaisseur nulle, du point de vue mécanique, l'objectif principal d'un modèle non local est de reproduire l'effet d'échelle. La notion d'effet d'échelle, caractérise essentiellement la dépendance des performances mécaniques nominales des structures avec leur dimension caractéristique D .

Actuellement, nous pouvons distinguer dans la littérature trois théories de base pour l'effet d'échelle en mécanique du solide (Bažant et Planas (1998)) :

1. La théorie statistique de la distribution aléatoire des résistances locales (Weibull 1939).
2. La théorie liée au caractère fractal des surfaces de rupture dans laquelle nous pouvons distinguer deux variantes :
 - La fractalité *intrusive* du plan de fissuration, c'est-à-dire la nature fractale de la rugosité de surface (Carpenteri et al., (1995) ; Carpenteri (1994)).
 - La fractalité *lacunaire* représentant une distribution fractale de microfissures (Carpinteri et al. 1995c).

3. La théorie déterministe, liée à une redistribution des contraintes et à un relâchement de l'énergie engendré par une propagation stable des fissures larges (Bažant (1983) et Bažant (1984)).

Dans ce paragraphe seulement la théorie déterministe de Bazant sera étudié pour les raisons suivantes :

- Elle est introduit une taille caractéristique qui dépend de la taille de l'hétérogénéité.
- Elle a été vérifiée pour un grand nombre de données expérimentales, pour différents matériaux (béton, mortier, roches, céramiques, etc.), pour des échantillons entaillés ou non, de géométries différentes (poutres, cylindres) et soumis à diverses sollicitations mécaniques (flexion trois points, essais de compression, essais de fendage).
- Il est simple de déterminer ses paramètres à partir d'essais expérimentaux.

Bazant suggère que le phénomène d'effet d'échelle observé dans les structures, est dû à une propagation stable des fissures jusqu'à atteindre l'effort maximal, conjugué à une redistribution des contraintes et à un relâchement de l'énergie emmagasinée engendré par les fissures. Pour des petites structures, dont la taille n'est supérieure que de quelques fois celle de l'hétérogénéité (granulat), l'effet d'échelle est négligeable ; ainsi, la théorie de la plasticité ou de l'élasticité, basée sur la théorie de la résistance des matériaux (*RdM*), est suffisante pour estimer leur résistance nominale. Par ailleurs, pour des grandes structures, où l'échelle des hétérogénéités du matériau devient négligeable, le comportement de la structure s'approche de celui décrit par la mécanique élastique linéaire de la rupture (*MELR*). Dans ce cas, en l'absence de longueur interne, l'effet d'échelle structurel est caractérisé par une loi en puissance. Cependant, le comportement des structures de taille moyenne ne peut être décrit ni par la *RdM*, ni par la *MELR*, mais par une transition entre ces deux approches. Pour résoudre ce problème, Bazant (1984) a démontré analytiquement que la localisation des déformations due à un comportement adoucissant engendre un effet d'échelle sur la dissipation d'énergie des structures. Il a proposé une loi simple d'effet d'échelle (voir figure 1.20). Elle est décrite par un raccordement asymptotique dans un repère logarithmique contrainte-taille de structure, où une asymptote a une pente nulle (*RdM*), alors que l'autre a une pente de $-1/2$ (*MELR*). Cette loi permet de répondre à la question de l'estimation de la résistance nominale des structures, dont la taille caractéristique, ainsi que la taille caractéristique des hétérogénéités du matériau, sont définies. La résistance nominale σ_N s'écrit (Bažant (1984)) :

$$\sigma_N = \frac{B f'_t}{\sqrt{1 + \beta}}, \quad \beta = \frac{D}{D_0} \quad (1.44)$$

où β est appelé l'indice de fragilité "brittleness number" (Bažant et Pfeiffer (1987)), B est un paramètre dépendant de la géométrie de la structure, f'_t est la résistance à la traction du matériau introduite pour des raisons de dimension, D_0 est une dimension caractéristique, appelée taille de transition, et dépend de la géométrie, du matériau utilisé mais pas des dimensions de la structure.

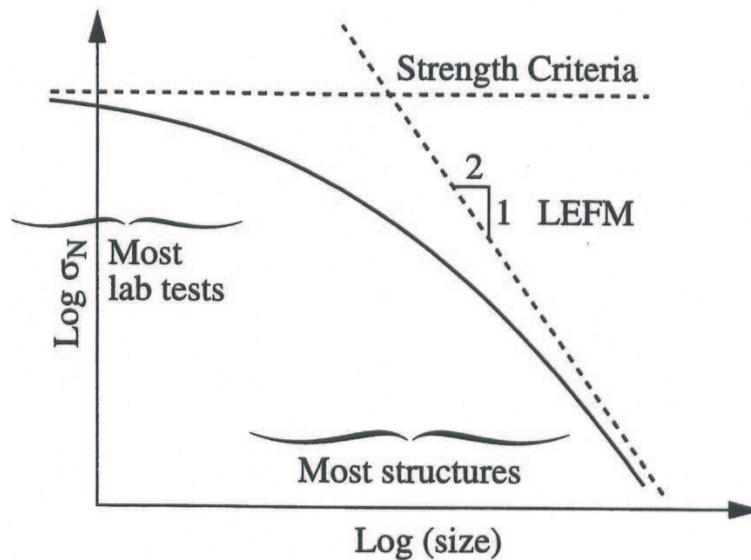


FIG. 1.20 – Loi d’effet d’échelle proposée par Bazant (pour des structures entaillées bidimensionnelles).

Cette loi n’est valable que pour les poutres entaillées dont la rupture a lieu à l’amorçage de la fissuration en tête de l’entaille. Cependant, dans certains cas, les structures quasi-fragiles se rompent dès l’amorçage de la fissuration à partir d’une surface plane. Ceci est observé sur des poutres non entaillées. La loi d’effet d’échelle dans ce cas peut se déduire en partant de la distribution des contraintes causées par la propagation d’une bande de microfissures induisant un comportement matériel adoucissant (figure 1.21-a).

On peut ainsi supposer que la rupture n’est pas causée par la contrainte maximale de traction atteinte sur la fibre inférieure, mais plutôt par la moyenne $\bar{\sigma}$ des contraintes induites dans une bande dont l’épaisseur est D_b (figure 1.21-b), c’est-à-dire :

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{I} \left(\frac{D}{2} - \frac{D_b}{2} \right) \tag{1.45}$$

où D est la hauteur de la poutre, M est le moment de flexion, et I le moment quadratique de la section. La contrainte nominale est aussi définie par l’expression :

$$\sigma_N = \frac{MD}{2I} \tag{1.46}$$

Nous avons alors

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left(1 - \frac{D_b}{D} \right)^{-1} \tag{1.47}$$

où $f_{r\infty}$ est la contrainte nominale à rupture pour une structure de taille infinie.

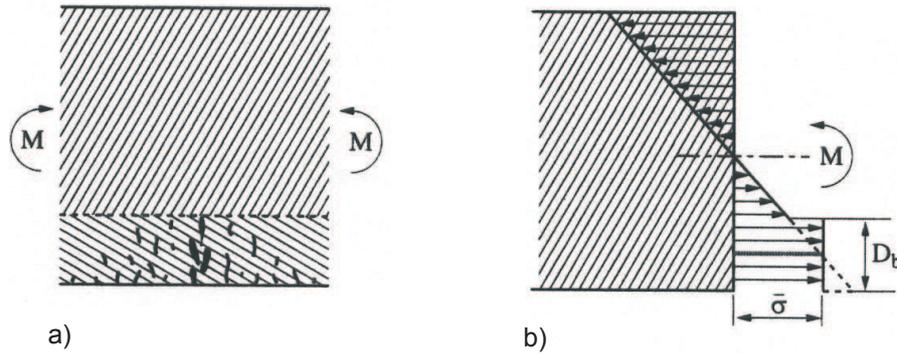


FIG. 1.21 – Approximation de la distribution des contraintes dues à la propagation d'une bande de microfissures (Bažant (2004)).

Cette relation n'est plus valable si $D < D_b$, et même si D est proche de D_b . Elle est valable seulement pour les grandes tailles de structure ($D \gg D_b$). Alors, une formule généralisée est proposée pour décrire la loi d'effet d'échelle pour les poutres non entaillées de petites et de grandes tailles (voir, par exemple, Bažant (1984)) :

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left(\frac{D + r(s+1)D_b}{D + rsD_b} \right)^{1/r} \quad (1.48)$$

où s et r sont deux constantes.

Bazant (Bažant (1995), Bažant (1997)) a proposé aussi une formule unique décrivant les deux cas et approximant les situations intermédiaires. Cette loi est appelée loi d'effet d'échelle "universelle" :

$$\sigma_N = Bf'_t \left[1 + \left(\frac{D}{D_0} \right)^r \right]^{-1/2r} \left[1 + s \frac{2l_f D_0}{(2\gamma l_f + D)(D + D_0)} \right]^{1/s} \quad (1.49)$$

où l_f est une épaisseur critique dans laquelle se développe des microfissures sur la face tendue d'une poutre non entaillée et γ est une constante. Bazant a suggéré que les valeurs de $r = s = 1$ sont les plus appropriées pour caler les expériences (figure 1.22). Cette figure montre l'évolution de la loi en

fonction de la profondeur d'entaille $\alpha_0 = \frac{a_0}{D}$.

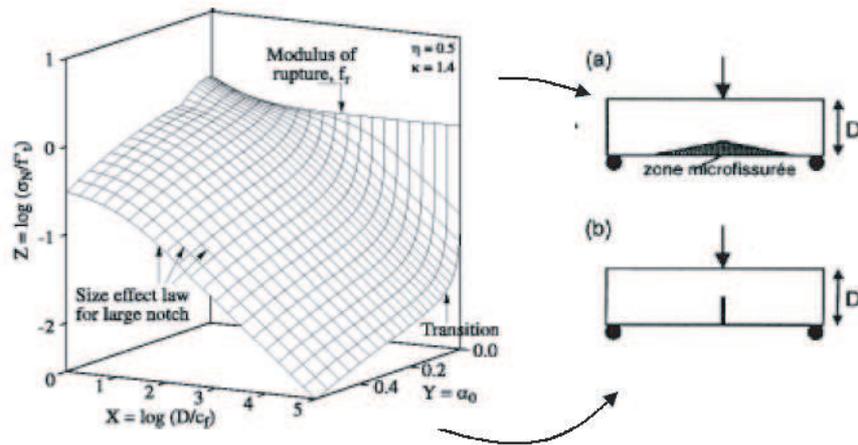


FIG. 1.22 – Loi universelle proposée par Bazant s’appliquant aux poutres sans entaille initiale (a) et avec entaille initiale (b).

1.9 Conclusion

Ce chapitre a pour but de donner les principaux éléments pour la suite du travail. Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes approches visant à modéliser le comportement des matériaux quasi-fragiles comme le béton. L’approche continue a été retenue dans ce travail car elle est la plus adaptée à l’étude du comportement structural du béton en service (des enceintes de confinement de centrales nucléaires dans notre cas) où la rupture n’a pas eu lieu et où la fissuration n’est pas connue a priori. Puis, divers modèles basés sur cette approche sont présentés.

Les modèles d’endommagement isotrope sont adaptés aux comportements fondamentaux du béton (traction, compression...). La plasticité est caractérisée par une surface seuil continue capable de représenter quantitativement l’évolution des déformations irréversibles. Néanmoins, ces deux formulations prises séparément ne sont pas totalement satisfaisantes. La première est incapable de reproduire le comportement volumique du béton et les pentes de déchargement. La seconde ne présente pas de diminution de raideur caractéristique de la formation d’une microfissuration et la pente de déchargement est toujours élastique. La combinaison de l’endommagement et de la plasticité est alors proposée pour reproduire le plus exactement possible la pente de déchargement mesurée expérimentalement. Celle-ci sera retenue dans la suite de ce travail.

La nécessité d’introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation de variables ainsi que le choix de l’approche pour l’obtention d’une réponse numériquement acceptable (dépendance au maillage) ont été discutés. Finalement, nous avons présenté la loi l’effet d’échelle de Bazant qui sera utilisée dans l’analyse de nos calculs.

Chapitre 2

Implantation numérique du modèle élastoplastique endommageable non local

Sommaire

2.1	Introduction	44
2.2	Formulation mathématique du modèle non local	46
2.2.1	Plasticité	46
2.2.2	Endommagement	47
2.2.3	Régularisation du modèle	48
2.3	Identification des paramètres du modèle	49
2.4	Tests élémentaires	50
2.4.1	Traction	50
2.4.2	Compression	51
2.4.3	Essai triaxial confiné	52
2.5	Implantation du modèle dans un code aux éléments finis	54
2.5.1	Principe général de l'implantation	55
2.5.2	Résolution itérative par la méthode de Newton-Raphson	55
2.5.3	Intégration de la loi de comportement	57
2.5.4	Equilibre global	60
2.6	Validation des améliorations apportées au modèle	64
2.6.1	Validation de l'implantation – Etude de convergence	64
2.6.2	Validation de la régularisation	67
2.7	Conclusion	73

2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 que le couplage de la plasticité et de l'endommagement dans une seule relation constitutive est une solution adéquate, pour estimer correctement la valeur d'endommagement mesurée expérimentalement.

Dans ce travail, le modèle élastoplastique endommageable proposé par Jason (2004) a été retenu. Basé sur le principe d'une contrainte effective plastique, il simule à la fois la diminution de la raideur élastique (endommagement) et l'évolution des déformations plastiques. Dans cette loi de comportement, l'évolution de l'endommagement est décrite par le modèle isotrope développé par Mazars (1984). La plasticité est décrite avec l'aide d'une surface seuil continue, inspirée de Etse et Willam (1994) et modifiée par Crouch et Tahar (2000) (voir chapitre 1).

Néanmoins, ce modèle pose trois problèmes majeurs.

- A cause de l'approche locale, des difficultés demeurent pour la modélisation de la rupture par localisation des déformations dans la phase adoucissante du matériau. L'opérateur tangent de raideur n'est plus défini positif. Par conséquent, les résultats numériques obtenus sont fortement dépendants du maillage (taille et orientation des éléments).
- Un autre problème rencontré concerne l'efficacité de l'algorithme itératif de résolution de la loi de comportement non linéaire. La complexité de la définition des dérivées analytiques de la fonction seuil empêchent l'obtention d'une convergence quadratique. L'opérateur tangent ne peut donc pas être écrit pour la résolution des équations d'équilibre global.
- En outre, la présence de singularités (dénominateur nul pour des valeurs caractéristiques de l'angle de Lode dans l'écriture des dérivées par exemple) nécessite un travail numérique supplémentaire.

Dans ce chapitre, un modèle élastoplastique endommagable non local est développé avec une méthode de régularisation introduite sur la partie responsable de l'adoucissement, et donc de la localisation des variables (paragraphe 2.2). Trois tests élémentaires avec différents chemins de chargement (traction, compression et triaxial) sont présentés au paragraphe 2.4 pour montrer la capacité du modèle, à reproduire des essais simples et mettre en évidence les améliorations apportées par l'introduction de la plasticité dans la loi d'endommagement.

L'implantation numérique du modèle dans un code aux éléments finis est abordée dans la partie 2.5. L'expression de l'opérateur tangent cohérent du modèle plastique endommageable non local est présentée. Une technique de différentiation numérique est appliquée pour intégrer la relation constitutive de la plasticité et obtenir une convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson au niveau du point de Gauss (intégration de la loi de comportement) et au niveau de l'élément (équation d'équilibre).

Enfin, le paragraphe 2.6 est consacré à la validation des améliorations apportées au modèle. Des tests de convergence sont d'abord réalisés afin de valider l'implantation du modèle et la performance

de la technique de différentiation numérique. Puis, la validation de la technique de régularisation introduite pour limiter le phénomène de localisation de l'endommagement est discutée sur l'exemple académique d'une barre soumise à une traction simple.

2.2 Formulation mathématique du modèle non local

Dans ce paragraphe, nous rappelons d'abord les équations constitutives de la plasticité et de l'endommagement proposées par Jason (2004). Puis, nous montrons comment l'approche non locale est intégrée dans le modèle. L'idée de base, qui peut être trouvée initialement dans Pijaudier-Cabot et Bažant (1987), sera suivie : la variable qui contrôle la phase d'adoucissement sera traitée comme non locale. Puisque dans notre cas, c'est l'endommagement qui amorce l'adoucissement en tension, la variable qui contrôle le développement de l'endommagement sera traitée comme non locale. Notons que l'insertion de l'approche non locale ne dépend pas, en principe, de la forme spécifique des équations constitutives. Evidemment, le problème aurait été beaucoup plus complexe si les deux mécanismes irréversibles du modèle (i.e. la plasticité et l'endommagement) étaient responsables de la phase adoucissante.

2.2.1 Plasticité

En considérant le concept des contraintes effectives, l'implantation numérique de la partie élastoplastique du modèle décrit dans le chapitre 1 suit la méthodologie de Pérez-Foguet *et al.* (2000b). Les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned}
 d\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p && \text{(décomposition des déformations)} \\
 \boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}^e && \text{(relation élastique en contrainte effective)} \\
 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda}\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\kappa}) && \text{(équation des flux)} \\
 \dot{\boldsymbol{\kappa}} &= \dot{\lambda}\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\kappa})
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont respectivement les déformations totales, élastiques et plastiques. $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique, \mathbf{m} le vecteur flux et \mathbf{h} le module plastique. $\boldsymbol{\kappa}$ désigne le vecteur des variables internes de la plasticité. Le modèle de "Sheffield" utilise une seule variable interne (équation (1.27) dans le chapitre 1), $\boldsymbol{\kappa}$ se réduit donc à une seule composante scalaire k_h .

Afin d'éviter un niveau de complexité supplémentaire, on se place dans l'hypothèse de la plasticité associée. \mathbf{m} est donc défini comme la dérivée de la surface seuil par rapport à la contrainte effective :

$$\mathbf{m} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{2.2}$$

En combinant les équations (2.1) et (1.28), le module plastique h est écrit dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} \quad \text{si } k_h \leq 1 \\
 h &= 0 \quad \text{si } k_h = 1
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'évolution du multiplicateur plastique est définie par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$F(\boldsymbol{\sigma}', k_h) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad F(\boldsymbol{\sigma}', k_h) \dot{\lambda} = 0, \tag{2.4}$$

Il faut noter que $F(\boldsymbol{\sigma}', k_h)$ est la fonction seuil donnée par l'équation (1.21) en remplaçant la contrainte totale par la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}'$.

2.2.2 Endommagement

Une fois calculée la nouvelle contrainte effective satisfaisant les équations de plasticité, on peut déduire les déformations élastiques et plastiques par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}' \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec \mathbf{E}^{-1} l'inverse du tenseur d'élasticité.

La loi d'endommagement de Mazars (1984) présentée au chapitre 1 est ensuite utilisée en remplaçant la déformation totale par sa composante élastique. Le calcul de D se fait donc à déformation plastique constante. La déformation équivalente qui quantifie l'extension du matériau durant le chargement est calculée en fonction des quantités élastiques :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i^e \rangle_+)^2} \tag{2.6}$$

où $\langle \varepsilon_i^e \rangle_+$ désigne les valeurs propres positives du tenseur de déformations élastiques. La fonction seuil d'endommagement s'écrit dans ce cas :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}^e, k_d) = \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) - k_d \tag{2.7}$$

La décomposition de la variable d'endommagement

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \tag{2.8}$$

$$D_{t,c} = 1 - \frac{1 - A_{t,c}}{\varepsilon_{eq}}(\varepsilon_e) + \frac{A_{t,c}}{\exp(B_{t,c}(\varepsilon_{eq}(\varepsilon_e) - \varepsilon_{D_0}))} \quad (2.9)$$

avec

$$\alpha_{t,c} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i^{t,c} \langle \varepsilon_i^e \rangle_+}{\varepsilon_{eq}} \right) \quad (2.10)$$

L'évolution de la variable d'endommagement D est finalement déterminée par les conditions de Kuhn–Tucker :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}^e, k_d) \leq 0, \quad \dot{k}_d \geq 0, \quad \dot{k}_d g(\boldsymbol{\varepsilon}^e, k_d) = 0 \quad (2.11)$$

Une fois la valeur de l'endommagement déterminée, on définit la nouvelle contrainte à partir de l'équation :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{\sigma}' \quad (2.12)$$

2.2.3 Régularisation du modèle

Comme toutes les lois adoucissantes, le modèle élastoplastique endommageable dans sa version locale pose des difficultés liées au phénomène de localisation de l'endommagement (voir chapitre 1). Pour traiter ces problèmes, une technique de régularisation doit être introduite sur les variables pilotant l'adoucissement. Addessi *et al.* (2002) et de Borst *et al.* (1999) ont proposé la régularisation par des formulations en gradient sur la partie endommagement. Dans le modèle plastique endommageable présenté par Grassl et Jirasek (2006b), la variable interne, fonction de la déformation plastique, qui contrôle l'endommagement est considérée comme non locale par une approche intégrale. Dans notre travail, l'approche régularisée en gradient (Peerlings *et al.* (1996a)) est choisie. Elle est basée sur le calcul d'un tenseur de déformations non locales $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ à partir du tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^e$:

$$\varepsilon_{ij}^e = \bar{\varepsilon}_{ij}^e - c \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{ij}^e \quad (2.13)$$

c est le paramètre gradient qui caractérise l'interaction non locale. La condition aux limites imposée sur $\partial\Omega$ de normale sortant \boldsymbol{n} est la suivante :

$$\nabla \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (2.14)$$

La déformation équivalente non locale est déterminée par :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \bar{\varepsilon}_i^e \rangle_+)^2} \quad (2.15)$$

où $\langle \varepsilon_i^e \rangle_+$ sont les valeurs propres positives du tenseur des déformations élastiques non locales. Enfin, l'expression de D , fonction explicite de la déformation élastique non locale, s'écrit :

$$D = D(\bar{\varepsilon}^e) \quad (2.16)$$

2.3 Identification des paramètres du modèle

Le modèle élastique plastique endommageable nécessite la connaissance de 17 paramètres. Deux paramètres sont utilisés pour la partie élastique (le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν), cinq pour l'endommagement (A_t , A_c , B_t , B_c et ε_{D0}) et dix pour la plasticité (r_c , r_t , p , A_h , B_h , C_h , γ , α , a , k_0).

Afin d'identifier complètement l'ensemble des paramètres du modèle, il est nécessaire de connaître le comportement à la fois en traction, en compression simple et en confinement. Une méthodologie de calage permettant de définir ces coefficients a été proposée par Jason *et al.* (2006) à partir de ces trois essais classiques.

Les paramètres d'élasticité sont définis à partir des pentes initiales des courbes contraintes-déformations axiales (pour E) et volumiques (pour ν).

Quatre coefficients prennent des valeurs constantes : $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.99$, $A_h = 7 \times 10^{-5}$ et $k_0 = 0.1$. A partir d'un essai de traction, les paramètres ε_{D0} , A_t , B_t pour l'endommagement et r_t pour la plasticité sont définis. ε_{D0} est obtenu à partir de la position du pic de contraintes et B_t à partir de la forme de la courbe contraintes-déformations en post-pic. A_t et r_t sont déterminés à partir de l'asymptote finale (contrainte résiduelle).

A partir d'un essai en compression cyclique, nous définissons les paramètres de plasticité r_c (seuil de plasticité parfaite), p et B_h qui quantifient l'évolution des déformations plastiques. Pour les paramètres d'endommagement : A_c est déterminé à partir de l'asymptote finale de la courbe contrainte-déformation et B_c est calé sur la forme de la courbe en post-pic.

Enfin, avec un chargement hydrostatique, nous obtenons a à partir du seuil initial de plasticité tandis que C_h est calé sur l'évolution des déformations plastiques.

2.4 Tests élémentaires

Dans ce paragraphe, nous allons montrer les réponses de la loi de comportement sur les applications élémentaires. Ces tests sont extraits de la thèse de Jason (2004) car la technique de régularisation n'a aucune influence sur les résultats des tests homogènes.

2.4.1 Traction

Le premier test élémentaire utilisée pour valider le modèle est un essai de traction simple. les résultats expérimentaux sont issus de Gopalaratnam et Shah (1985). La simulation est réalisée sur un élément cubique à 8 nœuds. Les paramètres du modèle utilisés sont présentés dans le Tableau 2.1. La figure 2.1

$E (Pa)$	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}	r_c	r_t
$3,125 \cdot 10^{10}$	0,2	2,75	1,1	2470	13000	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$120 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$
p	A_h	B_h	C_h	γ	α	a	k_0	
0,4	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,5	-1	0,1	

TAB. 2.1 – Paramètres du modèle d'endommagement et de plasticité pour l'essai en traction simple.

présente une comparaison entre résultats numérique et expérimentaux. La position du pic est correctement simulée. Le comportement post-pic, même s'il n'est pas totalement identique, est reproduit. Le modèle est alors adapté à la simulation d'essais de traction simple.

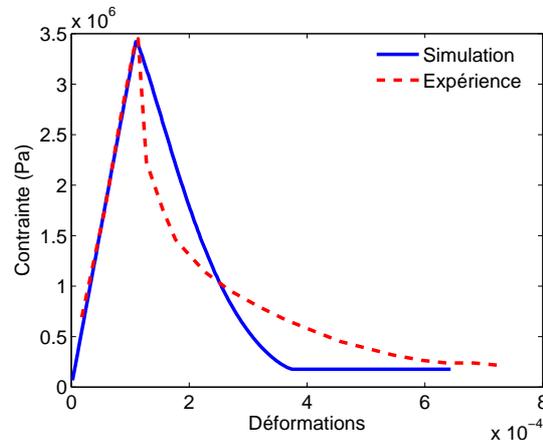


FIG. 2.1 – Courbes contraintes-déformation. Traction uniaxial.

Néanmoins, une valeur constante est obtenue pour une déformation de l'ordre de $3,6 \cdot 10^{-4}$. A ce niveau de chargement, la surface limite de plasticité est atteinte. La réponse effective devient plastique par-

faite et l'endommagement n'évolue plus à cause de la déformation élastique constante. Pour améliorer la réponse du modèle, une autre loi d'évolution de la variable d'écrouissage pourrait être proposée, sans une surface limite.

2.4.2 Compression

Un essai de compression cyclique est modélisé. La réponse du modèle est comparée aux résultats expérimentaux de Sinha *et al.* (1964). Le test est toujours réalisé sur un seul volume élémentaire. Les paramètres choisis pour cette simulation sont donnés dans le Tableau 2.2

$E (Pa)$	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}	r_c	r_t
$3,125 \cdot 10^{10}$	0,2	2,75	1,1	2470	13000	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$120 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$
p	A_h	B_h	C_h	γ	α	a	k_0	
0,4	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,5	-1	0,1	

TAB. 2.2 – Paramètres du modèle pour l'essai en compression cyclique.

La réponse du modèle est illustrée dans la figure 2.2. Le comportement caractéristique du modèle est simulé. Contrairement à ce qui est obtenu avec le modèle d'endommagement seul, les pentes de déchargement expérimentales et numériques sont cohérentes. L'endommagement produit de l'adoucissement, tandis que la plasticité est responsable du développement des déformations irréversibles.

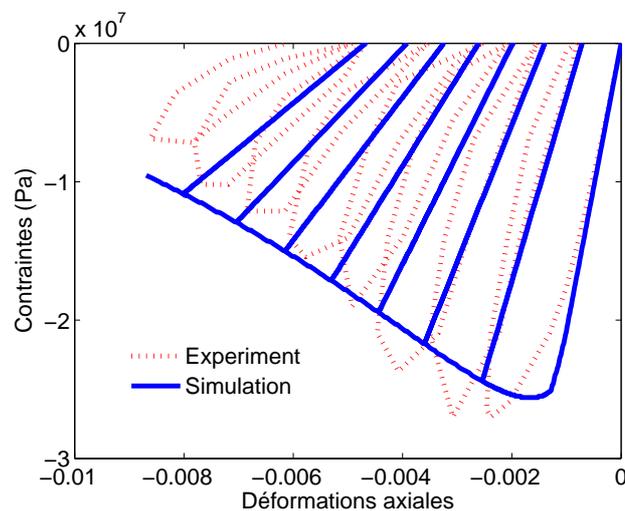


FIG. 2.2 – Courbes contraintes-déformation. Essai de compression cyclique.

La figure 2.3 montre la réponse volumique du modèle en compression. Contrairement au modèle d'endommagement seul, où les déformations volumiques restent négatives, le modèle plastique endommageable est capable de reproduire le changement d'un comportement contractant vers dilatatant, caractéristique de l'effet de plasticité, observé expérimentalement (Sfer *et al.* (2002) par exemple). Le volume de l'éprouvette diminue, puis augmente avec le chargement.

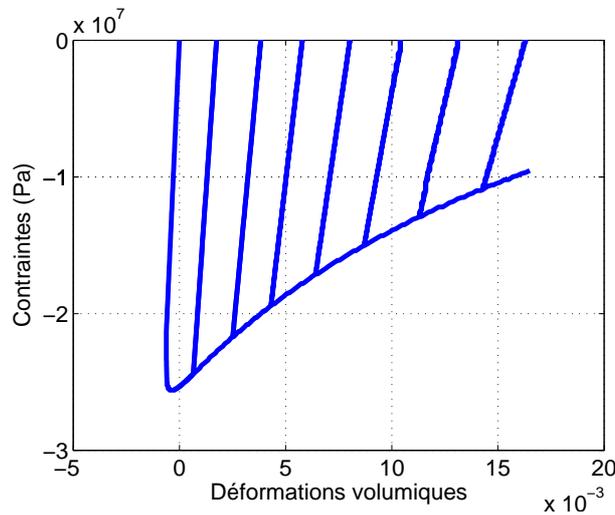


FIG. 2.3 – Courbes contraintes-déformation. Essai de compression cyclique.

2.4.3 Essai triaxial confiné

Il s'agit d'étudier la capacité du modèle à reproduire un essai triaxial. Les résultats numériques sont comparés à l'expérience (Sfer *et al.* (2002)) pour différents niveaux de confinement. Les paramètres du modèle (Tableau 2.3) sont calés à partir de la réponse en compression simple, de l'essai à $P = 1,5$ MPa et de celui à $P = 30$ MPa (seuil d'apparition de la plasticité en confinement).

E (Pa)	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}	r_c	r_t
$27,3 \cdot 10^{10}$	0,2	2,75	1,1	2600	15000	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$85 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$
p	A_h	B_h	C_h	γ	α	a	k_0	
0,4	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,5	-0,5	0,1	

TAB. 2.3 – Paramètres du modèle d'endommagement et de plasticité pour l'essai triaxial confiné

Pour les faibles pressions de confinement (figure 2.4), les réponses numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux. La transition fragile-ductile est aussi simulée. Avec l'augmentation de la

contrainte initiale, le rôle de l'endommagement est diminué et la plasticité devient plus importante.

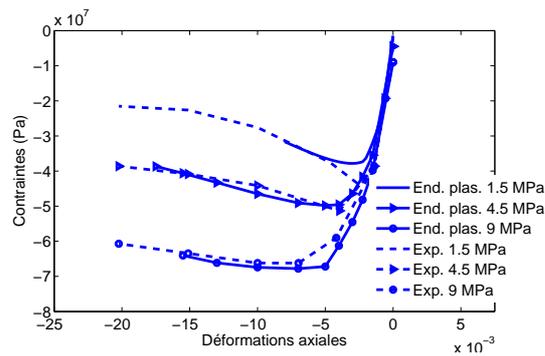


FIG. 2.4 – Essai triaxial confiné. Courbes contraintes axiales-déformations axiales pour les faibles pressions de confinement.

Des résultats acceptables sont aussi obtenus pour les fortes pressions de confinement (figure 2.5). La perte de rigidité, observée expérimentalement, est correctement reproduite.

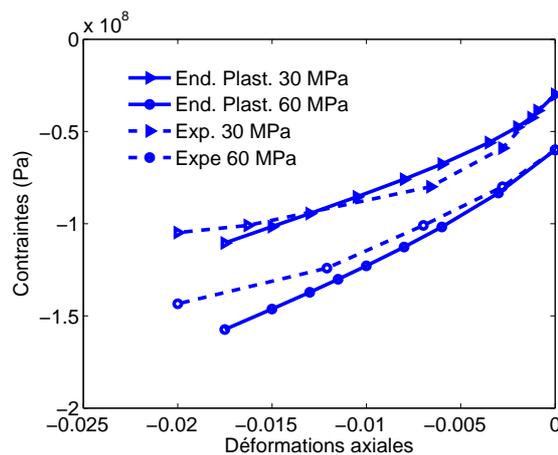


FIG. 2.5 – Essai triaxial confiné. Courbes contraintes axiales-déformations axiales pour les fortes pressions de confinement.

Si l'endommagement seul est considéré, une surestimation des contraintes dans le béton est obtenue (due à la définition de la déformation équivalente dans le modèle de Mazars). Par conséquent, la diminution de la pente initiale n'est pas reproduite pour les forts confinements (figure 2.6). Lors de la mise en pression hydrostatique, le modèle d'endommagement seul propose une évolution linéaire, alors que des non linéarités apparaissent avec la formulation plastique (figure 2.7).

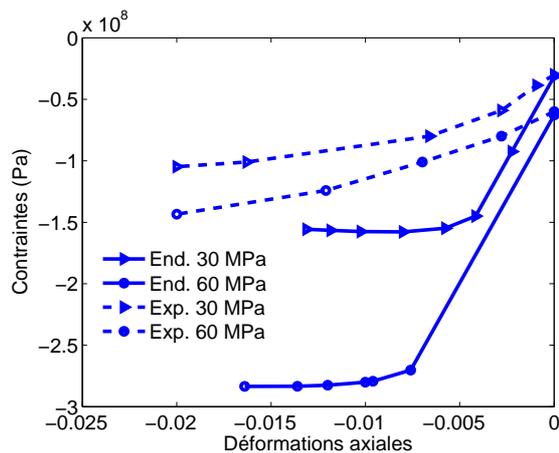


FIG. 2.6 – Courbes contraintes axiales-déformations axiales pour un essai triaxial confiné, comparaison entre expérience et simulation avec le modèle d’endommagement seul.

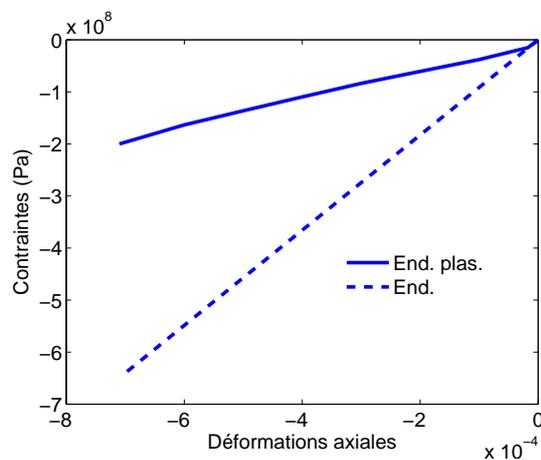


FIG. 2.7 – Mise en pression hydrostatique. Comparaison des modèles élastique endommageable et elasto-plastique endommageable.

2.5 Implantation du modèle dans un code aux éléments finis

Dans le contexte des grandes applications (3D), la capacité à reproduire le comportement expérimental du matériau n’est pas la seule étape pour évaluer la performance d’un modèle. La robustesse et l’efficacité des algorithmes de résolution des équations locales et globales sont aussi des qualités importantes. Sur des applications industrielles (enceintes de confinement de centrale nucléaire, par exemple) employant de gros maillages et des chargements complexes, l’efficacité de l’algorithme utilisé affecte directement la durée et le faisabilité des calculs.

Dans cette partie, nous présentons l'implantation numérique du modèle de comportement décrit au paragraphe 2.2. La problématique liée au choix de la méthode de résolution, ainsi que la technique d'approximation numérique utilisée pour réaliser la convergence quadratique sont étudiées.

2.5.1 Principe général de l'implantation

Le principe de résolution du modèle d'endommagement et de plasticité est présenté dans la figure 2.8 (Simo et Ju (1987b)). Le calcul se déroule en plusieurs étapes. A partir de l'état initial ${}^0\varepsilon$ (pas de chargement $k = 0$) ou d'un état convergé ${}^{k-1}\varepsilon$, une nouvelle déformation ${}^k\varepsilon_1$ correspondant au pas de chargement suivant est évaluée (étape 1). Une contrainte effective totale ${}^k\sigma'_i$ (contrainte du matériau non endommagé) est ensuite calculée par corrections successives à partir d'une prédiction élastique (${}^k\sigma'_i{}^j = {}^k\sigma'_i{}^{j-1} + E \cdot {}^k\Delta\varepsilon_i$) jusqu'à satisfaction des équations de plasticité (étape 2).

Une fois la contrainte effective connue, on déduit les déformations élastiques ${}^k\varepsilon_i^e$ et plastiques ${}^k\varepsilon_i^p$, puis la déformation élastique non locale ${}^k\bar{\varepsilon}_i^e$, la valeur de l'endommagement D et la contrainte finale ${}^k\sigma_i$ (étape 3). Si l'équilibre mécanique n'est pas vérifié ($\text{div}(\sigma) \neq 0$), une nouvelle évaluation des déformations est réalisée (étape 4). Une fois, l'équilibre atteint, le chargement est augmenté d'un nouveau pas et le processus continue.

Le schéma d'intégration de la loi de comportement se fait donc en deux phases principales. La contrainte effective est tout d'abord calculée à partir du processus plastique à endommagement constant. La décomposition des déformations élastique et plastique suit. Puis la valeur d'endommagement est évaluée explicitement à partir de la déformation élastique non locale. Finalement, la contrainte appliquée (réelle) est calculée à partir de la valeur de l'endommagement et de la contrainte effective (voir équation (2.12)).

Même si les deux phénomènes sont simulés conjointement par le modèle, ils ne sont pas fortement couplés. Cette approche permet une certaine simplicité numérique (implantation de la relation) et une liberté dans le choix des relations constitutives. Une surface seuil peut être choisie indépendamment du "module" endommagement et vice versa.

2.5.2 Résolution itérative par la méthode de Newton-Raphson

Nous présentons ici la méthode de résolution itérative qui sera retenue dans notre travail pour résoudre les équations d'équilibre. Le système d'équations non linéaires, qui gouverne les problèmes local et global, peut être mis en général sous la forme suivante :

$$A(x).x - b = 0 \tag{2.17}$$

La résolution de ce système non linéaire d'équations est réalisée à l'aide d'une procédure incrémentale et itérative, fondée sur un développement limité au premier ordre du système (2.17). Nous obtenons

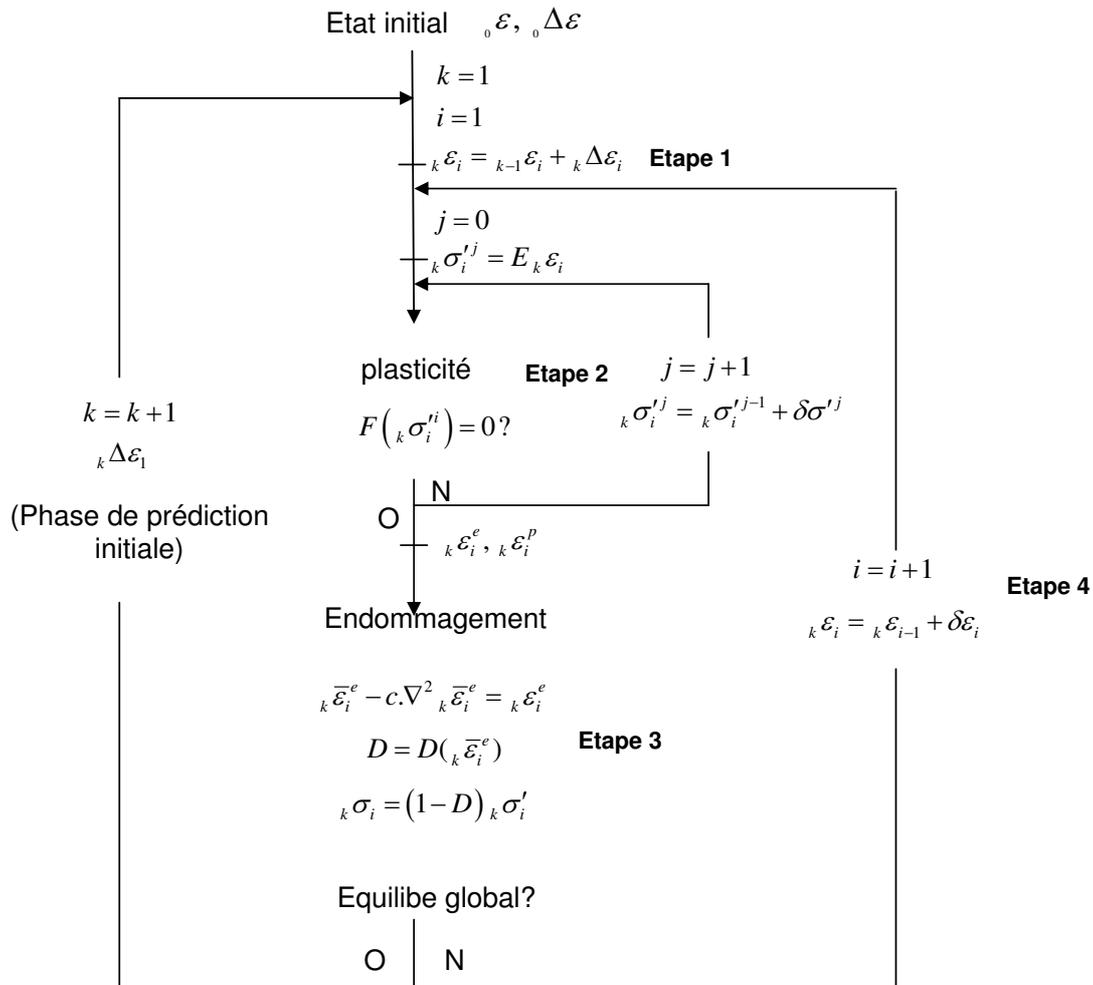


FIG. 2.8 – Schéma d’implantation du modèle élastique plastique endommageable non local.

alors le système suivant pour une itération i donnée :

$$A_i(x_{i-1})x_i = b \tag{2.18}$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i \tag{2.19}$$

où $A_i(x_{i-1})$ est l’opérateur tangent. Un choix typique pour résoudre ce système est la méthode de Newton-Raphson, parce qu’elle converge quadratiquement. Cette méthode consiste à recalculer la raideur $A_i(x_{i-1})$, ce qui revient à repartir à chaque itération avec un opérateur tangent à la courbe (figure 2.9).

Pour vérifier la convergence quadratique de cette méthode et s’assurer de la validité de l’opérateur

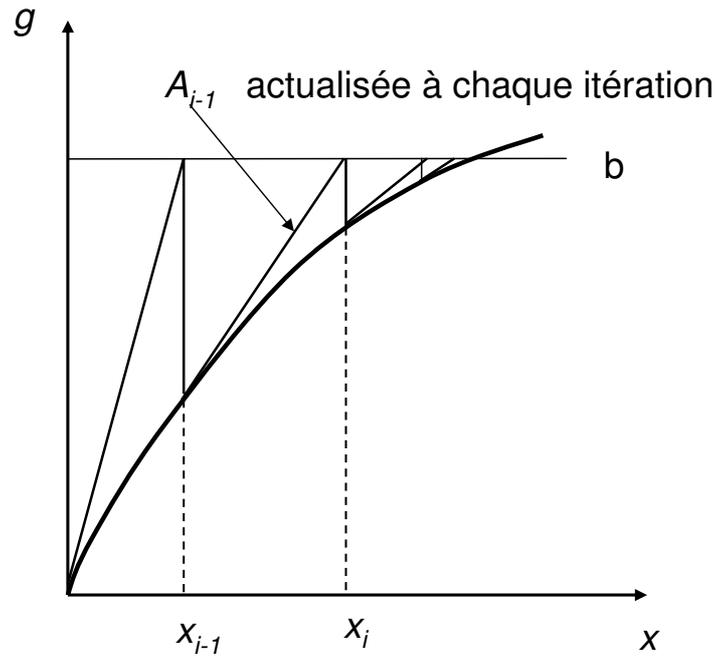


FIG. 2.9 – Méthode de Newton-Raphson .

tangent cohérent, nous calculons le résidu relatif pour un incrément donné en fonction de l'indice d'itération i

$$\left| \frac{b - A_i(x_{i-1})x_i}{b} \right| = r(i) \quad (2.20)$$

En passant d'une itération à la suivante, $\log(r(i))$ est divisé par 2. Le calcul itère jusqu'à avoir un résidu inférieur à une tolérance donnée.

2.5.3 Intégration de la loi de comportement

Contrairement au modèle d'endommagement explicite, l'intégration du problème de plasticité est implicite et nécessite une méthode itérative locale. Il s'agit dans ce cas de calculer pour une déformation totale donnée, la contrainte effective satisfaisant les équations de plasticité.

En utilisant un schéma d'Euler implicite, la discrétisation en temps (entre les pas de chargement t_{i-1} et t_i) des équations constitutives (2.1), selon la méthode de type "closest point projection", mène au système d'équations locales non linéaires suivant (Simo et Hugues (1998)), dans l'espace des contraintes effectives.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}'_i + \lambda \mathbf{E} \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}'_i, k_{h,i}) &= \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^p) \\
 k_{h,i} - \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}'_i, k_{h,i}) &= k_{h,i-1} \\
 F(\boldsymbol{\sigma}'_i, k_{h,i}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Les inconnues sont $\boldsymbol{\sigma}'_i, k_{h,i}$ et le multiplicateur plastique λ . Le système est ensuite linéarisé de manière à utiliser la méthode de Newton-Raphson. L'équation caractéristique s'écrit finalement :

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \delta \sigma^{j+1} \\ \delta k_h^{j+1} \\ \delta \lambda^{j+1} \end{pmatrix}_i = -\mathbf{R}^j \tag{2.22}$$

où $\delta \sigma^{j+1}, \delta k_h^{j+1}$ et $\delta \lambda^{j+1}$ sont respectivement les corrections appliquées sur les contraintes, la variable d'érouissage et le multiplicateur plastique. \mathbf{J} définit le jacobien du système :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{I}_{dim(\boldsymbol{\sigma}')} + \lambda_j \mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)_j \right) & \lambda_j \mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_h} \right)_j & \mathbf{E} \mathbf{m}_j \\ -\lambda_j \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)_j & \left(1 - \lambda_j \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial k_h} \right)_j \right) & -\mathbf{h}_j \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)_j & \left(\frac{\partial F}{\partial k_h} \right)_j & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

et \mathbf{R}^j le vecteur résidu à l'itération j .

$$\mathbf{R}^j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_i^j + \lambda^j \mathbf{E} \mathbf{m}^j(\boldsymbol{\sigma}'_i^j, k_{h,i}^j) - \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^p) \\ k_{h,i}^j - \lambda^j \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}'_i^j, k_{h,i}^j) - k_{h,i-1} \\ F(\boldsymbol{\sigma}'_i^j, k_{h,i}^j) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

La résolution de l'équation (2.22) s'écrit alors :

$$\delta \lambda^{j+1} = \frac{F(\boldsymbol{\sigma}'_i^j, k_{h,i}^j) - \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_i^j \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}^j}{\left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_i^j \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}^j \\ -\mathbf{h}^j \end{bmatrix}_i} \tag{2.25}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} + \lambda^j \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)_j & \lambda^j \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_h} \right)_j \\ -\lambda^j \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)_j & 1 - \lambda^j \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial k_h} \right)_j \end{pmatrix}_i \tag{2.26}$$

A partir de l'équation (2.25), les corrections sur les contraintes et la variable interne sont déduites par :

$$\begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}^{j+1} \\ \delta k_h^{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \left(-\mathbf{R}^j - \delta \lambda^{j+1} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^j \\ -\mathbf{h}^j \end{bmatrix} \right) \quad (2.27)$$

Le calcul s'itère jusqu'à obtenir un résidu \mathbf{R}^j inférieur à une tolérance donnée. Pour les besoins du calcul, on initialise les inconnues du système avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} {}_k \boldsymbol{\sigma}_i^{/0} &= \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{E}_k \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ {}_k k_{h,i} &= k_{h,i} \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans le cas d'une surface seuil convexe, la méthode s'interprète géométriquement comme la recherche du point qui minimise la distance entre la prédiction et la surface seuil convergée, d'où son appellation (Jirasek et Bažant (2001)).

2.5.3.1 Technique d'approximation par différentiation numérique

Les dérivées de l'équation constitutive de plasticité (équation (2.23)) sont nécessaires avec la méthode de Newton-Raphson, aussi bien pour obtenir la convergence quadratique au niveau des points de Gauss que dans la solution du problème d'équilibre mécanique global. Pour les modèles de plasticités simples, ces dérivées sont disponibles analytiquement (Simo et Ju (1985) et Simo et Hugues (1998)). Pour les modèles complexes (modèle de "MRS Lade" par exemple, Jeremić et Sture (1994)), ces dérivées sont difficiles à obtenir analytiquement.

Dans notre cas, les dérivées du vecteur flux \mathbf{m} et du module plastique \mathbf{h} , par rapport aux contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}'$ et à la variable interne k_h , représentent la dérivée seconde de la fonction seuil de l'équation. Ces dérivées peuvent être obtenues analytiquement, mais leur calcul numérique nécessite tant d'opérations, que dans certains cas, les erreurs d'arrondi peuvent s'accumuler et rendre le calcul imprécis. Afin d'éviter ces erreurs dans leur évaluation qui pourraient altérer la convergence de l'algorithme et empêcher l'obtention d'une convergence quadratique, une technique de différentiation numérique (Pérez-Foguet *et al.* (2000b) et Pérez-Foguet *et al.* (2000a)), est appliquée :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'_i} (\boldsymbol{\sigma}', k_h) = \frac{\mathbf{m} (\boldsymbol{\sigma}' + p \mathbf{e}_i, k_h) - \mathbf{m} (\boldsymbol{\sigma}' - p \mathbf{e}_i, k_h)}{2p} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_h} (\boldsymbol{\sigma}', k_h) = \frac{\mathbf{m} (\boldsymbol{\sigma}', k_h + p \mathbf{e}_i) - \mathbf{m} (\boldsymbol{\sigma}', k_h - p \mathbf{e}_i)}{2p} \quad (2.30)$$

dans laquelle e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unité et p est le pas de discrétisation. Les dérivées du module plastique par rapport aux contraintes $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ et à la variable d'écroutissage $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial k_h}$ sont calculées de la même manière. Ces dérivées sont ensuite utilisées pour résoudre les problèmes locaux et globaux.

Le choix du pas de discrétisation p est le point critique dans la différentiation numérique. En effet, les erreurs de troncature diminuent lorsque le pas de discrétisation tend vers à zéro. Les erreurs d'arrondi, par contre, augmentent comme le pas de discrétisation tend vers zéro. Par conséquent, il y a une valeur optimale du pas de discrétisation h^{opt} qui minimise l'addition des deux erreurs. Conformément aux recommandations de Pérez-Foguet *et al.* (2000a), le concept du pas de discrétisation relatif h_r est introduit, dans lequel le pas optimal peut être défini par la relation suivante :

$$h^{\text{opt}} = h_r^{\text{opt}} \max \{ |x|, \text{typ}_x \} \quad (2.31)$$

où h_r^{opt} est la valeur optimale du pas de discrétisation relatif, $|x|$ est la norme du tenseur des contraintes ou du module plastique et typ_x est la valeur typique de x utilisée pour éviter le choix d'une valeur nulle de h^{opt} (ou extrêmement petit) si x est nul (ou extrêmement petit). Les analyses numériques montrent que typ_x peut être choisi d'une façon plutôt arbitraire, parce qu'il a très peu d'influence sur les résultats (voir Pérez-Foguet *et al.* (2000b)). L'idée principale ici est que h_r^{opt} est une constante indépendante de x . La valeur optimale de h_r peut être approximée en fonction de la précision de machine "mecheps" et dépend du schéma d'approximation différentielle (Pérez-Foguet *et al.* (2000a)). Pour le cas du schéma centré d'ordre 2, l'approximation s'écrit :

$$h_r^{\text{opt}} = \sqrt[3]{\text{mecheps}} \quad (2.32)$$

2.5.4 Equilibre global

Une fois connue, pour une déformation donnée, la contrainte effective qui satisfait les équations de plasticité, l'équilibre mécanique global doit être vérifié. Les deux équations à résoudre simultanément sont l'équation d'équilibre mécanique $\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0$ (en l'absence de forces volumiques) et l'équation des déformations non locales de la méthode de régularisation (équation (2.13)) sur un domaine Ω . Ces équations doivent être complétées par les conditions aux limites sur le contour Γ .

La discrétisation de ces deux équations par la méthode des éléments finis conduit aux systèmes matriciels suivants (Peerlings *et al.* (1996a))

$$\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}^{\varepsilon\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

L'équation (2.33) est le système non linéaire de l'équation d'équilibre. Les forces nodales internes \mathbf{f}_{int} et externes \mathbf{f}_{ext} sont définies comme suit

$$\mathbf{f}_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\sigma} d\Omega \quad (2.35)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \tilde{p} d\Gamma \quad (2.36)$$

où \mathbf{N} et \mathbf{B} sont respectivement les matrices d'interpolation contenant les fonctions de forme associées au champ de déplacement et leur dérivées. Les vecteurs $\tilde{\sigma}$ et \tilde{p} contiennent respectivement les composantes du tenseur des contraintes σ et du vecteur de charge externe p .

L'équation (2.34) est la forme faible discrétisée de l'équation (2.13), dans laquelle

$$\mathbf{K}^{\varepsilon\varepsilon} = \int_{\Omega} \left(\tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} + c \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \right) d\Omega \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f}^{\varepsilon} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \varepsilon^e d\Omega \quad (2.38)$$

où $\tilde{\mathbf{N}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ sont les matrices d'interpolation contenant respectivement les fonctions de forme associées au champ de déformations non locales et leurs dérivées. $\tilde{\varepsilon}^e$ est le vecteur des inconnues nodales de la déformation élastique non locale ε^e . L'ordre des fonctions de forme associées aux déformations non locales est différent de celui des fonctions de forme associées aux déplacements, afin d'éviter les oscillations des contraintes (Peerlings (1999)).

La méthode de Newton-Raphson est maintenant appliquée pour la résolution des équations discrétisées (2.33) et (2.34). Ceci signifie qu'une nouvelle approximation de la solution est obtenue à chaque itération, en linéarisant le système d'équations autour de la solution approximative obtenue à l'itération précédente, et en résolvant le système linéaire résultant. Le calcul s'itère jusqu'à obtenir un résidu inférieur à une tolérance donnée. La convergence de ce processus est quadratique si la linéarisation est cohérente.

Les équations sont tout d'abord différenciées pour l'itération i :

$$\delta \mathbf{f}_{int,i} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,i-1} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K}^{\varepsilon\varepsilon} \delta \tilde{\varepsilon}_i^e - \delta \mathbf{f}_i^{\varepsilon} = \mathbf{f}_{i-1}^{\varepsilon} - \mathbf{K}^{\varepsilon\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_{i-1}^e \quad (2.40)$$

Basée sur l'équation (2.12) la variation incrémentale du vecteur colonne de la contrainte qui est nécessaire pour déterminer la matrice de rigidité, peut être formulée en fonction de la contrainte effective et de l'incrément de l'endommagement par :

$$\delta \tilde{\sigma}_i = (1 - D_{i-1}) \delta \tilde{\sigma}'_i - \delta D_i \tilde{\sigma}'_{i-1} \quad (2.41)$$

tandis que l'incrément de l'endommagement δD_i peut être exprimé en terme de $\delta \tilde{\varepsilon}_i^e$ par :

$$\delta D_i = (\partial D / \partial \bar{\varepsilon}^e)_{i-1} \tilde{\mathbf{N}} \delta \tilde{\varepsilon}_i^e \quad (2.42)$$

Donc, le chargement itératif des forces nodales internes, d'après l'équation (2.35), peut être écrit comme suit :

$$\delta \mathbf{f}_{int,i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (1 - D_{i-1}) (\partial \sigma' / \partial \varepsilon)_{i-1} \mathbf{B} d\Omega \delta \tilde{u}_i - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma'_{i-1} (\partial D / \partial \bar{\varepsilon}^e)_{i-1} \tilde{\mathbf{N}} d\Omega \delta \tilde{\varepsilon}_i^e \quad (2.43)$$

où $(\partial \sigma' / \partial \varepsilon)_{i-1}$ est l'opérateur tangent élasto-plastique exprimé à l'itération précédente. En remplaçant l'équation (2.43) dans l'équation (2.39), on obtient :

$$\mathbf{K}_{i-1}^{uu} \delta \tilde{u}_i + \mathbf{K}_{i-1}^{ue} \delta \tilde{\varepsilon}_i^e = f_{ext} - f_{int,i-1} \quad (2.44)$$

avec

$$\mathbf{K}_{i-1}^{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (1 - D_{i-1}) (\partial \sigma' / \partial \varepsilon)_{i-1} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.45)$$

$$\mathbf{K}_{i-1}^{ue} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma'_{i-1} (\partial D / \partial \bar{\varepsilon}^e)_{i-1} \tilde{\mathbf{N}} d\Omega \quad (2.46)$$

Le vecteur colonne $\delta \mathbf{f}^e$ dans l'équation (2.40) dépend de l'incrément du vecteur colonne de la déformation élastique locale $\delta \tilde{\varepsilon}^e$ qui peut être exprimé par :

$$\delta \tilde{\varepsilon}_i^e = \delta \tilde{\varepsilon}_i - \delta \tilde{\varepsilon}_i^p = (1 - \mathbf{C}_{i-1}^*) \mathbf{B} \delta \tilde{u}_i \quad (2.47)$$

où $\mathbf{C}^* = \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \varepsilon}$.

Alors l'équation (2.40) peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{K}_{i-1}^{\varepsilon u} \delta \tilde{u}_i + \mathbf{K}^{\varepsilon \varepsilon} \delta \tilde{\varepsilon}_i^e = \mathbf{f}_{i-1}^{\varepsilon} - \mathbf{K}^{\varepsilon \varepsilon} \tilde{\varepsilon}_{i-1}^e \quad (2.48)$$

avec

$$\mathbf{K}_{i-1}^{\varepsilon u} = - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T (1 - \mathbf{C}_{i-1}^*) \mathbf{B} d\Omega \quad (2.49)$$

La combinaison des équations (2.44) et (2.48) mène à nouveau à un système carré d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{i-1}^{uu} & \mathbf{K}_{i-1}^{u\varepsilon} \\ \mathbf{K}_{i-1}^{\varepsilon u} & \mathbf{K}_{i-1}^{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \tilde{u}_i \\ \delta \tilde{\varepsilon}_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{f}_{i-1}^{\varepsilon} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int,i-1} \\ \mathbf{K}^{\varepsilon\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_{i-1}^e \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

La procédure est répétée tant que le résidu reste supérieur à une tolérance donnée. Si la procédure de Newton-Raphson ne converge pas, elle est recommencée avec un plus petit incrément.

Le schéma de la figure 2.10 montre le principe de résolution itératif.

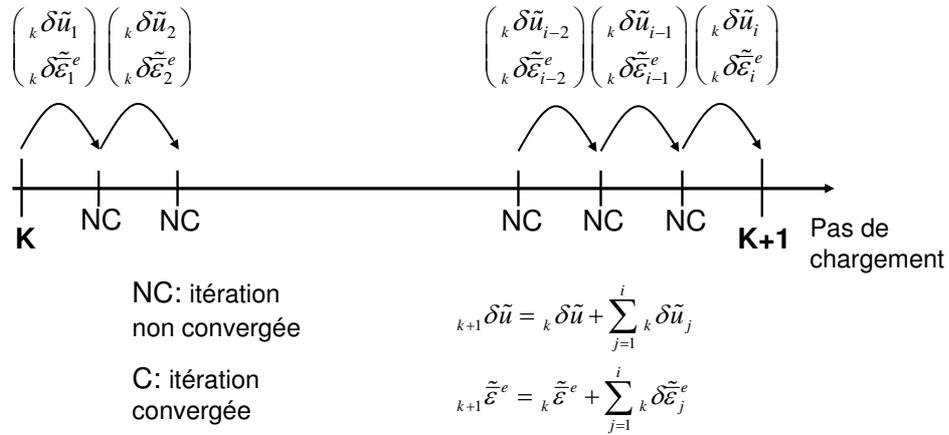


FIG. 2.10 – Principe de résolution du problème discrétisé.

L'utilisation de la méthode itérative de type Newton-Raphson nécessite la connaissance de la dérivée des contraintes et de la variable interne par rapport aux déformations pour le calcul de la matrice de résolution. Celle-ci sont exprimées en partant des équations constitutives du modèle de plasticité. En effet, en linéarisant l'équation (2.21) et après simplification, il vient :

$$\begin{pmatrix} d\sigma' \\ dk_h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{m} \\ {}_nh \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) & {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial k_h} \right) \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}}{\begin{bmatrix} {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) & {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial k_h} \right) \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{m} \\ {}_nh \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La dérivée de la contrainte effective par rapport à la déformation $\partial\sigma'/\partial\varepsilon$ peut alors être obtenue en extrayant le bloc 6×6 en haut à gauche de la matrice de l'équation (2.51). En linéarisant de la même

manière, on peut déduire de la matrice C^* en extrayant le premier bloc 6×6 de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{m} \\ {}_n h \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) & {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial k_h} \right) \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}}{\begin{bmatrix} {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) & {}_n \left(\frac{\partial F}{\partial k_h} \right) \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{m} \\ {}_n h \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Comme on vient de le voir, l'utilisation de la matrice tangente nécessite un calcul exact des dérivées des contraintes par rapport aux déformations. Dans le cas du modèle de Mazars et compte tenu de l'expression de D (équations (2.8) et (2.10)), une détermination analytique complète est difficile. Il s'agit donc d'être prudent dans la mesure où une erreur dans leur estimation conduit généralement à la perte de la convergence quadratique, voire à la divergence de la méthode. Compte tenu de la complexité du calcul de la dérivée de D par rapport aux déformations, on fait l'hypothèse d'un chargement élastique radial, c'est-à-dire :

$$d\alpha_t = d\alpha_c = 0 \quad (2.53)$$

Alors, il vient :

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{\varepsilon}^e} = \left(\alpha_t \frac{\partial D_t}{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}} + \alpha_c \frac{\partial D_c}{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial \bar{\varepsilon}^e} \quad (2.54)$$

Après calcul et simplification, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}^{e+}} = & - \left[\alpha_t \left(\frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_t)}{\bar{\varepsilon}_{eq}^2} + \frac{A_t B_t}{\exp(B_t (\bar{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_c \left(\frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_c)}{\bar{\varepsilon}_{eq}^2} + \frac{A_c B_c}{\exp(B_c (\bar{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \right) \right] \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_{kl}^{e+}}{\bar{\varepsilon}_{eq}} \cdot \beta_{kl} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où $\bar{\varepsilon}_{kl}^{e+}$ sont les composantes positives du tenseur élastiques des déformations non locales et $\beta_{kl} = 2 * (1 - \delta_{kl})$ avec δ_{kl} le symbole de Kronecker. L'hypothèse de radialité du chargement élastique définit le domaine de validité de cette expression . Dans les autres cas, la convergence quadratique de la méthode n'est plus assurée.

2.6 Validation des améliorations apportées au modèle

2.6.1 Validation de l'implantation – Etude de convergence

Dans ce paragraphe, la performance de la technique de différentiation numérique (Pérez-Foguet *et al.* (2000b) et Pérez-Foguet *et al.* (2000a)), employée pour résoudre le problème local et global, est

évaluée. Les résultats de convergence, en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson, sont analysées au niveau du point de Gauss (problème local), aussi bien qu'au niveau de l'élément (problème global). Puisque la partie endommageable du modèle demeure explicite, les résultats de convergence du problème local (i.e. l'intégration de la relation constitutive élastoplastique au niveau du point de Gauss) ne sont pas affectés par l'évolution de l'endommagement. La convergence locale est alors quadratique, si la relation constitutive plastique est correctement implantée.

Cependant, la convergence quadratique du problème global peut être obtenue seulement dans les cas de chargements élastiques radiaux (voir paragraphe 1.3.1.1). Dans les autres cas, les caractéristiques de convergence peuvent se détériorer. Afin de préserver la convergence quadratique, on peut remplacer, par exemple, l'expression de la déformation équivalente de Mazars avec celle de Von Mises modifiée, proposée par de Vree *et al.* (1995). Ce cas n'est pas étudié ici. Il constituera une des perspectives de notre travail.

Afin de valider la performance et l'efficacité de la différentiation numérique à remplir tous les objectifs numériques initialement fixés, la vitesse de convergence dans un essai en compression simple, est envisagée. Ainsi, seulement le comportement pendant l'écroutissement est étudié ($0 \leq k_h \leq 1$ et $D = 0$).

2.6.1.1 Problème local

La figure 2.11 montre les résultats de convergence locale obtenus avec la matrice tangente pour différentes valeurs du pas de discrétisation h_r (équation (2.32)) et au même niveau de chargement (variable d'écroutissement $k_h = 0,6$ dans ce test). Conformément aux recommandations de Pérez-Foguet *et al.* (2000a), nous avons pris h_r comme une puissance négative de 2 ($h_r = 2^{-k}$) au lieu de 10 ($h_r = 10^{-k}$), afin de réduire l'effet de l'erreur d'arrondi. La plage de pas relatif de discrétisation h_r qui donne la convergence quadratique est assez étendue. La convergence quadratique n'est perdue seulement si le pas relatif de discrétisation est assez loin de la valeur optimale. La meilleure convergence est obtenue pour $h_r = 10^{-3}$.

La vitesse de convergence locale pour différents pas de chargement (et donc différents niveaux de paramètre d'écroutissement k_h), avec la valeur optimale de pas relatif de discrétisation $h_r = 10^{-3}$ est illustrée dans la figure 2.12. Évidemment, tous les résultats de convergence sont quadratiques jusqu'à une tolérance stricte de 10^{-12} .

2.6.1.2 Problème global

Dans le problème global, l'approximation numérique des équations (2.29) et (2.30) sont employées pour calculer l'opérateur tangent élastoplastique dans la matrice tangente cohérente de l'équation (2.50). La figure 2.13 illustre les résultats de convergence au niveau global pour différentes valeurs du pas

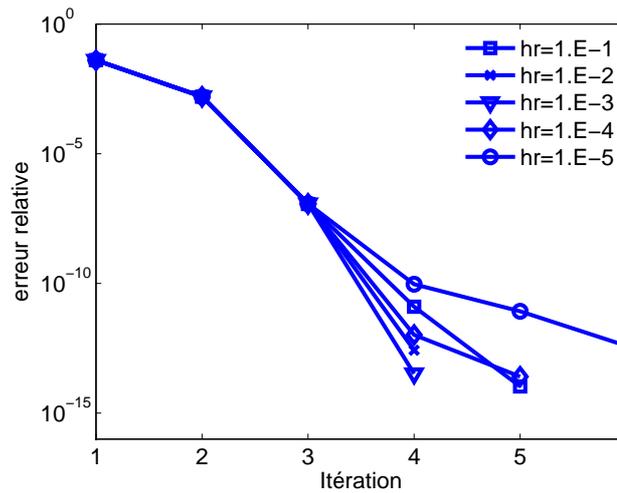


FIG. 2.11 – Convergence locale pour différentes valeurs de h_r au même niveau de chargement.

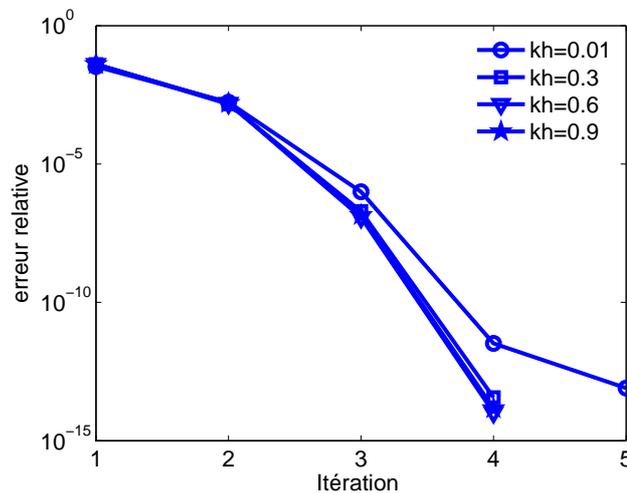


FIG. 2.12 – Convergence locale pour différents pas de chargement et une valeur constante de h_r .

relatif de discrétisation au niveau de la variable d'écrouissage $k_h = 0,6$. On retrouve les mêmes résultats précédemment énoncés, à savoir qu'une convergence quadratique est obtenue pour une vaste plage de pas relatifs de discrétisation. Pour une valeur adéquate de h_r entre 10^{-1} et 10^{-4} , les résultats de convergence sont très proches pour différents niveaux de chargement. La figure 2.14 présente la convergence globale pour différents niveaux de chargement k_h et une valeur constante du pas de discrétisation $h_r = 10^{-3}$ qui est la valeur optimale. Des résultats de convergence quadratique sont obtenus jusqu'à une tolérance de 10^{-10} . Ces vitesses de convergence représentent clairement une

amélioration par rapport au modèle utilisé par Jason (2004).

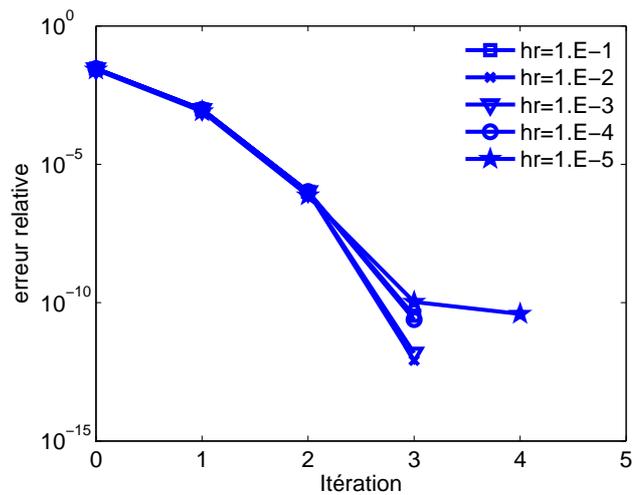


FIG. 2.13 – Convergence globale pour différentes valeur de h_r au même niveau de chargement.

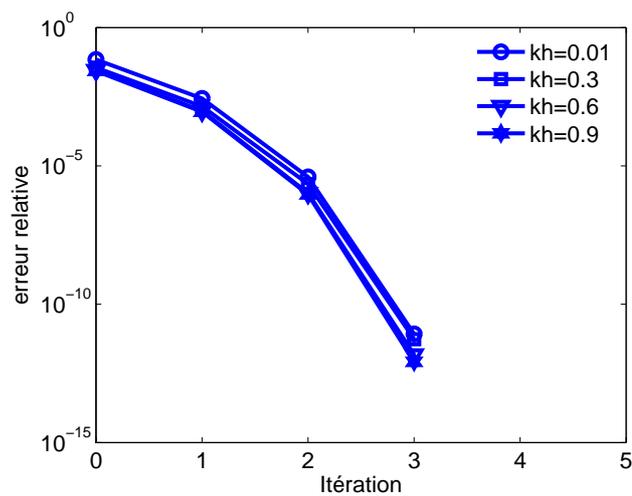


FIG. 2.14 – Convergence globale pour différents pas de chargement et une valeur constante de h_r .

2.6.2 Validation de la régularisation

Nous présentons maintenant la validation de la technique de régularisation introduite dans la relation constitutive d'endommagement, pour limiter la phénomène de localisation de l'endommagement.

Nous nous intéressons ici à un problème géométriquement $3D$ et mécaniquement $1D$ d'une barre soumise à une traction simple, sur une de ses extrémités, dont les caractéristiques sont présentées sur la figure 2.15. La barre a une longueur de 1 m et sa section est $2 \times 2\text{ cm}^2$.

Afin d'amorcer l'endommagement dans une zone bien définie à l'avance, nous créons au centre de la barre un défaut initial. Nous avons la possibilité de spécifier un seuil d'endommagement plus faible ou une rigidité plus faible afin d'accroître la déformation. Si, dans cette zone, nous prenons la rigidité plus faible que dans le reste de la barre, les éléments au centre seront plastifiés avant les autres éléments. Cette situation conduit à amorcer l'endommagement en dehors de la zone centrale. Pour cela, nous définissons une zone L_D dans laquelle le seuil initial d'endommagement est plus petit qu'ailleurs (figure 2.15-b).

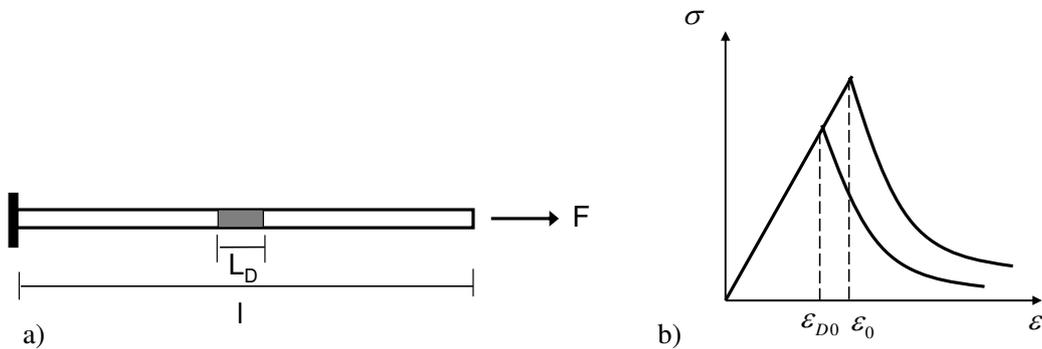


FIG. 2.15 – Géométrie et système de chargement d'une barre en traction simple avec un défaut au milieu.

Comme on vient de le voir, la plasticité, dans le modèle élastoplastique endommageable présenté dans les paragraphes précédents, ne joue un rôle important que pour une déformation de l'ordre $3 \cdot 10^{-4}$ qui correspond à une valeur d'endommagement proche de 0,96 (paragraphe 2.4.1). Nous ne pouvons alors pas tester l'influence de la plasticité dans la loi régularisée sur les tests en traction simple. Dans cet essai de traction uniaxiale, la forme exacte des équations de plasticité n'est pas importante pour vérification des propriétés du limiteur de localisation du modèle. Pour cela, la surface seuil de plasticité de Von Mises, définie au paragraphe 1.4.1, avec un écrouissage linéaire est combinée avec le modèle d'endommagement de Mazars, en gardant la même stratégie de couplage déjà présentée. Les paramètres mécaniques utilisés dans cette analyse sont reportés dans le Tableau 2.4 où la limite d'élasticité σ_y et le module d'écrouissage E_t sont les paramètres du modèle de plasticité.

Dans un premier temps, les propriétés de régularisation du modèle sont évaluées, en réalisant l'analyse avec plusieurs valeurs du paramètre non local c et un maillage constant de 80 éléments cubiques à 20 noeuds. Les figures 2.17 et 2.18 illustrent respectivement la réponse force-déplacement et le profil

E (Pa)	ν	A_t	B_t	ε_{D_0}	σ_y (Pa)	E_t (Pa)
$3,3 \cdot 10^{10}$	0,2	0,96	10000	$10,5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^{10}$

TAB. 2.4 – Paramètres pour l'endommagement et la plasticité avec le modèle élastoplastique endommageable nonlocal.

d'endommagement pour différentes valeurs du paramètre non local c .

Comme prévu, la ductilité, définie comme l'aire sous la courbe force-déplacement, et la largeur du profil d'endommagement final augmentent avec la longueur interne. Par ailleurs, pour une valeur nulle du paramètre de gradient c , la réponse de la version régularisée coïncide avec celle du modèle local pour lequel l'endommagement se localise dans l'élément central. La figure 2.16 illustre la distribution de l'endommagement sur la barre proche de la rupture pour un paramètre non local c égal à $0,002 \text{ m}^2$.

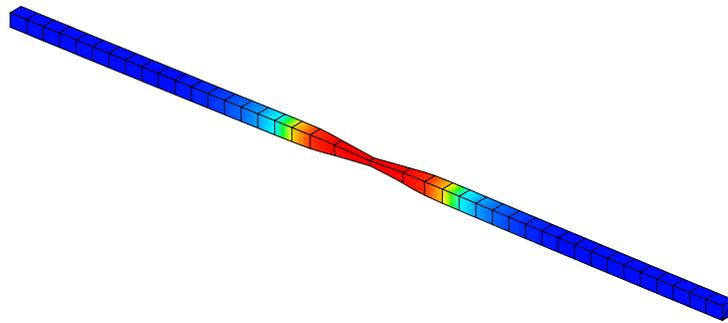


FIG. 2.16 – Profil de l'endommagement dans une barre en traction simple avec un défaut au milieu.

Pour étudier la capacité de la technique de régularisation vis-à-vis d'un raffinement du maillage, la barre est étudiée pour différents maillages de 11, 20, 40, 80 éléments dans la direction longitudinale de la barre et une valeur constante du paramètre $c = 0,002 \text{ m}^2$. La figure 2.19 présente les courbes force-déplacement obtenues pour les quatre maillages considérés. Pour un nombre suffisant d'éléments dans la "longueur" caractéristique, nous obtenons une solution indépendante du maillage. Nous remarquons aussi que la régularisation de la variable d'adoucissement (la seule responsable de la localisation) est suffisante pour traiter le phénomène de localisation.

Dans les tests étudiés jusqu'à présent, nous avons supposé que le matériau plastifie, puis s'endommage. Pour montrer l'influence de la plasticité sur l'évolution de l'endommagement, nous étudions aussi le cas où l'endommagement a lieu avant la plasticité. Les mêmes paramètres donnés au Tableau 2.4 sont utilisés, sauf la limite d'élasticité σ_y qui est prise égale à 3,51 MPa pour obtenir l'en-

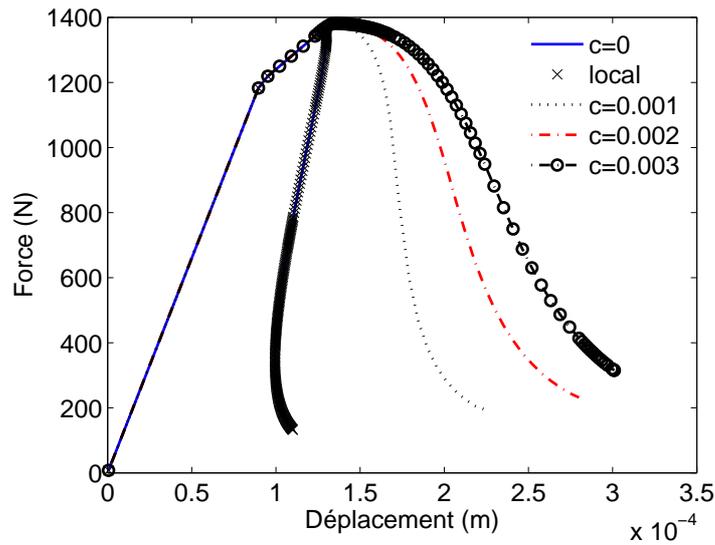


FIG. 2.17 – Courbes force-déplacement avec le modèle plastique endommageable non local pour différentes valeurs du paramètre non local c .

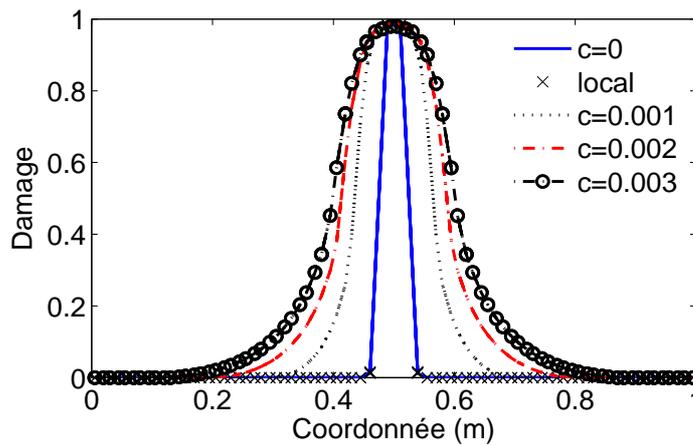


FIG. 2.18 – Profils d’endommagement le long de la barre avec le modèle plastique endommageable non local pour différentes valeurs du paramètre non local c .

dommagement avant la plasticité. Les résultats, des deux cas de plasticité avec des limites différentes, sont comparés avec celui du modèle d’endommagement seul, pour une valeur du paramètre non local $c = 0,003 \text{ m}^2$ et un maillage constant de 80 éléments dans la direction longitudinale de la barre. La figure 2.20 montre une réponse globale force-déplacement différentes pour les trois cas. Evidem-

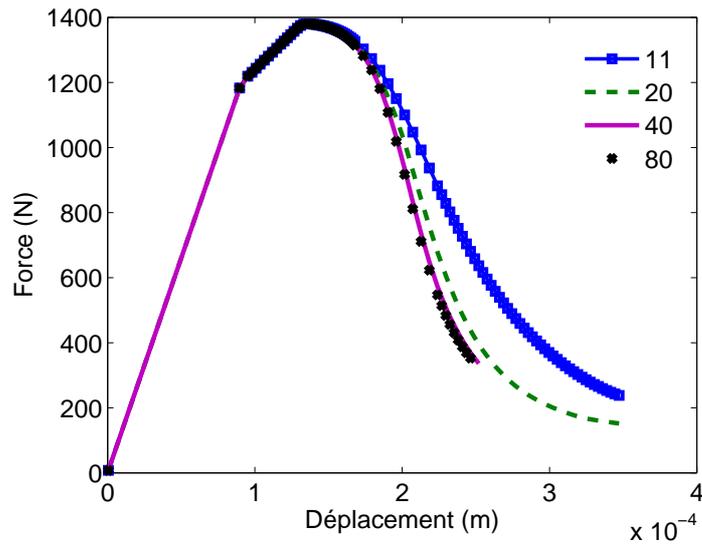


FIG. 2.19 – Courbes force-déplacement avec le modèle plastique endommageable non local pour différents maillages et une valeur constante du paramètre c .

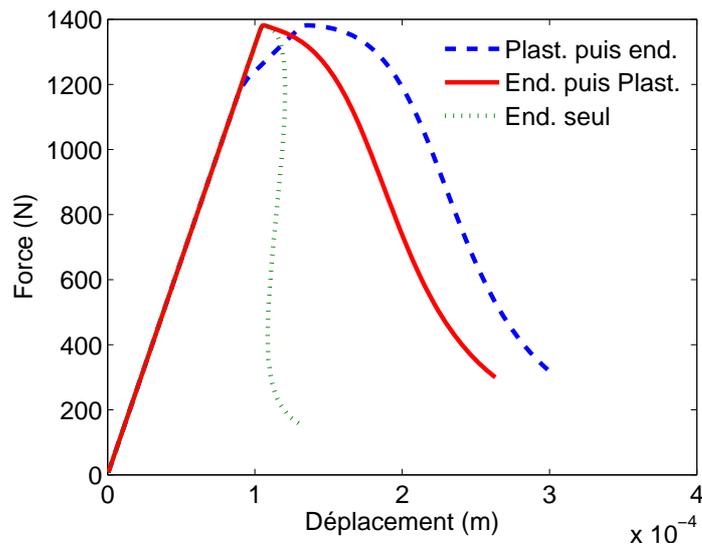


FIG. 2.20 – Courbes force-déplacement avec le modèle plastique endommageable non local (plasticité avant ou après endommagement) et le modèle d'endommagement seul.

ment, la réponse force-déplacement est différente. Avec le modèle d'endommagement seul, la variable d'endommagement est écrite en fonction de la déformation totale non locale $D = f(\bar{\varepsilon})$. L'introduction

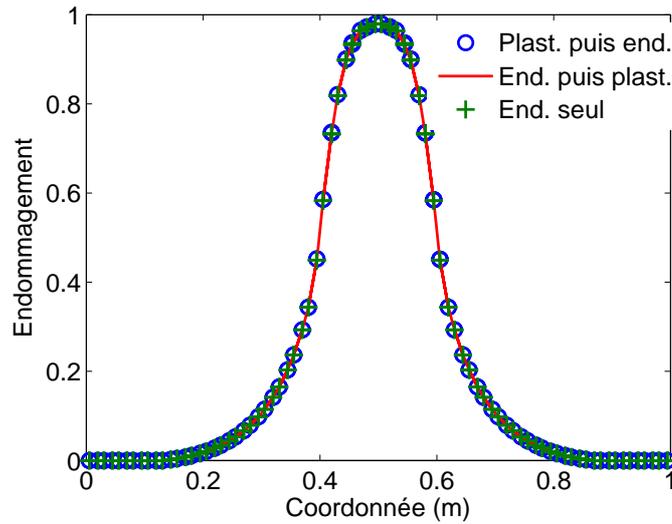


FIG. 2.21 – Profils d’endommagement le long de la barre avec le modèle plastique endommageable nonlocal (plasticité avant endommagement et endommagement puis plasticité) et le modèle d’endommagement seul.

de la plasticité change la vitesse de la localisation, car l’endommagement est non plus écrit en fonction de la déformation totale, mais uniquement en fonction de la déformation élastique $D = f(\bar{\varepsilon}^e)$. La localisation de l’endommagement est donc plus lente dans le dernier cas $D = f(\bar{\varepsilon}^e) < D = f(\bar{\varepsilon})$ et la ductilité est augmentée. Nous remarquons aussi que la localisation de l’endommagement est plus lente et la ductilité est plus importante, si la plasticité a lieu avant l’endommagement, parce que la déformation élastique dans ce cas est plus petite que celle où l’endommagement commence dans le cas où il commence avant la plasticité.

Néanmoins, l’introduction de la plasticité dans la relation constitutive d’endommagement n’a aucune influence sur le profil final d’endommagement si le mode de rupture n’est pas changé. La figure 2.21 illustre les profils d’endommagement pour les trois cas étudiés.

2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle élastoplastique endommageable non local, afin d'éviter les problèmes numériques dus au phénomène de localisation de l'endommagement dans la version locale proposée par Jason (2004). Dans ce modèle, basé sur le concept de contrainte effective, la plasticité est un processus d'écrouissage et l'adoucissement est contrôlé seulement par l'endommagement. Pour cela, la déformation élastique (qui contrôle l'endommagement) est considérée comme non locale. Elle est régularisée par une approche en gradient.

La validation du modèle sur des tests élémentaires a permis de mettre en avant plusieurs avantages de la formulation. En traction, le pic de contraintes est correctement simulé et l'évolution post-pic reproduite. En compression cyclique, les pentes de déchargement peuvent être calées par rapport à l'expérience. On retrouve ainsi une valeur raisonnable de l'endommagement. Le comportement volumique est acceptable avec un changement contractant puis dilatant caractéristique de la plasticité. La forme de la fonction plastique (fonction seuil en confinement) permet de reproduire les essais triaxiaux, après confinement sur une plage de pression étendue. Pour les faibles pressions hydrostatiques, les réponses numérique et expérimentale sont en accord. En particulier, la transition fragile/ductile est reproduite. Pour les forts confinements, une diminution de la pente initiale apparaît.

La loi de comportement est implantée dans un code aux éléments finis appelé *Code_Aster*, développé par EDF. En particulier, les opérateurs nécessaires à l'utilisation des méthodes itératives locale et globale de Newton-Raphson ont été définis. Les dérivées du vecteur flux m et du module plastique h ont été approximées par la technique de différentiation numérique. Le choix du pas de discrétisation ne représente aucune difficulté. Le concept du pas relatif de discrétisation h_r , proposé par Pérez-Foguet *et al.* (2000a), a été exploité. Cette méthode a montré son efficacité à remplir les objectifs numériques initialement fixés, notamment la convergence quadratique au niveau des points de Gauss et dans la solution du problème d'équilibre mécanique global, obtenue pour une plage assez étendue de h_r .

Finalement, les simulations effectuées sur une barre soumise à une traction simple ont montré que la régularisation en gradient introduite pour la variable (la déformation élastique) pilotant l'adoucissement est suffisante pour traiter le phénomène de localisation d'endommagement. Une solution indépendante du maillage a été obtenue pour un nombre suffisant d'éléments dans la longueur caractéristique. Finalement, nous avons vu que l'introduction de la plasticité, à la formulation d'endommagement, ne perturbe pas le profil final d'endommagement pour les chargements monotones, mais la ductilité augmente, car la variable d'endommagement est écrite seulement en fonction des déformations élastiques.

Chapitre 3

Etude industrielle

Sommaire

3.1	Introduction	76
3.1.1	Flexion trois points sur une poutre en béton armé	78
3.1.2	Poutre continue de grande hauteur	81
3.2	Etude industrielle	86
3.2.1	Description du test	86
3.2.2	Simulation numérique de la maquette PACE-1450-EXP	88
3.3	Conclusion	103

3.1 Introduction

La validation du modèle, sur les tests simples, n'est pas suffisante pour estimer la capacité du modèle et sa performance à simuler le comportement complexe du béton. Dans le cas particulier des structures en béton précontraint (enceinte de confinement de centrale nucléaire, par exemple), l'état de contrainte peut-être localement bi ou triaxiale. Dépendant du niveau de confinement, le mode de rupture peut changer du mode I au mode II (Sfer *et al.* (2002)). Cette transition du mode de rupture est difficilement représentée par les modèles d'endommagement scalaire classique (Grassl et Rempling (2007)).

En outre, les essais expérimentaux montrent que, la réponse volumique du béton en compression est initialement contractante, puis devient dilatante pour des niveaux de contrainte plus élevés (Sfer *et al.* (2002)). Ce phénomène est au-delà des capacités de la simulation des modèles d'endommagement isotropes existants, parce que selon la plupart d'entre eux, le coefficient de Poisson du matériau reste constant, que le matériau soit endommagé ou non. Ce chapitre présente la validation du modèle par la simulation de tests structurels et industriels.

L'applicabilité du modèle pour reproduire le comportement des structures classiques est d'abord étudiée (paragraphe 3.1.1). La flexion trois points sur une poutre en béton armé est simulée en comparant les résultats du modèle dans sa version locale et non locale.

Dans le paragraphe 3.1.2, la capacité du modèle à représenter la rupture en mode de cisaillement (mode II) dans les tests structurels complexes est testée sur une poutre continue en béton armé de grande hauteur. Une comparaison de la réponse du modèle développé avec les modèles d'endommagement scalaire est aussi envisagée, afin de montrer l'amélioration apportée par l'introduction de la plasticité dans la loi d'endommagement.

Le paragraphe 3.2 est consacré aux calculs préliminaires des essais (PACE-1450-EXP) mis au point par EDF, en cours de réalisation en partenariat avec l'Université de Karlsruhe (IfMB). La structure représente une réplique exacte de la partie courante de l'enceinte de confinement d'une centrale nucléaire 1450 MWe. L'objectif de notre étude numérique est de simuler les différentes étapes des essais PACE-1450-EXP, afin, notamment, de vérifier d'une part, si le mode de rupture envisagé induit par la gaine de précontrainte verticale dans la maquette peut être simulé, et d'autre part, si le niveau de charge à rupture est proche de celui estimé par des calculs simples. Dans un deuxième temps, ces simulations seront utilisées pour confronter les résultats avec ceux d'essais, afin de valider/invalidier les modèles actuellement disponibles dans *Code_Aster*. Les résultats d'essai n'étant pas disponibles au moment de la rédaction de ce rapport, cette comparaison n'a pas pu être effectuée.

Dans ce paragraphe, nous allons, tout d'abord, décrire brièvement l'installation expérimentale des essais, afin de préciser les données à prendre en compte pour réaliser les calculs : géométrie, propriétés matériaux, paramètres des modèles, conditions aux limites et chargements. Dans la simulation numérique, le béton est discrétisé par des éléments volumiques, les câbles successivement par des éléments

filaires $1D$, puis par des éléments volumiques $3D$ afin de comparer les deux approches. Pour simuler l'effet du vieillissement de l'enceinte de confinement au cours de sa vie, la précontrainte des câbles est diminuée progressivement durant les différentes configurations de chargement. Il est important de vérifier, pour chaque phase de chargement, que la contrainte en traction reste inférieure à un critère, dépendant de la résistance moyenne du béton utilisé. Ceci pour prendre en compte le fluage qui mène rapidement à la rupture pour des contraintes supérieures à 60 % de la résistance. Une étude comparative entre le modèle d'endommagement simple et le modèle élasto-plastique endommageable présenté dans le chapitre 2 est effectuée. Il s'agit, d'une part, de confronter les modèles à une application pré-industrielle, et d'autre part, de vérifier l'influence de l'introduction de la plasticité dans la loi d'endommagement.

3.1.1 Flexion trois points sur une poutre en béton armé

Le premier cas test concerne la simulation de l'essai classique de la poutre en béton armé soumise à la flexion simple. Cet exemple a pour but d'estimer la performance et la capacité du modèle élasto-plastique endommageable à représenter un comportement structural classique. L'application décrite ici, est extraite du benchmark proposé par Ghavamian (1999) et Ghavamian et Delaplace (2003). Les figures 3.1 et 3.2 décrivent les conditions aux limites, le chargement et la distribution des aciers dans la structure.

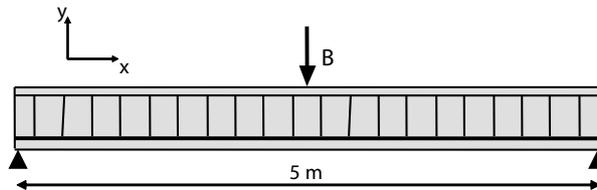


FIG. 3.1 – Flexion trois points d'une poutre en béton armé.

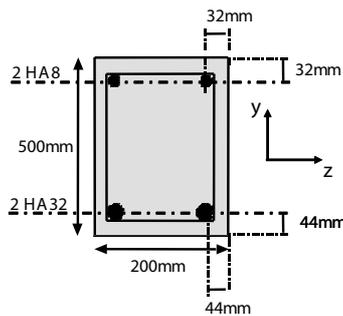


FIG. 3.2 – Coupe transversale : distributions des armatures dans la poutre.

La simulation numérique est réalisée en trois dimensions. L'éprouvette est discrétisée au moyen d'éléments cubiques à 20 nœuds pour la partie béton. Des éléments filaires 1D sont utilisés pour les barres longitudinales et les cadres transversaux. L'interface acier-béton est supposée parfaite. La double symétrie du problème permet de réaliser le calcul uniquement sur un quart de la poutre.

Les paramètres du modèle employé pour la partie béton sont présentés dans le tableau 3.1. La loi élasto-plastique de Von Mises avec écrouissage positif linéaire est utilisée pour la modélisation des armatures longitudinales et transversales. Les paramètres retenus pour les aciers sont les suivants : $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0$, $\sigma_e = 400 \text{ MPa}$ (seuil de plasticité), $E_T = 3245 \text{ MPa}$ (module plastique tangent). Il est à noter que tous ces coefficients sont extraits de la thèse de Jason (2004).

$E (Pa)$	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}	r_c	r_t
$2 \cdot 10^{10}$	0,2	2,75	1	2470	13000	$1 \cdot 10^{-5}$	$120 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$
p	A_h	B_h	C_h	γ	α	a	k_0	
0,4	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,5	-1	0,1	

TAB. 3.1 – Paramètres du modèle élasto-plastique endommageable pour la poutre en béton armé.

Dans un premier temps, la poutre est simulée avec la version locale du modèle et un maillage comportant 1440 éléments. L'évolution des profils d'endommagement pendant la simulation est illustrée dans la figure 3.3. L'endommagement dans la poutre en flexion est engendré par les tractions en partie inférieure. Il commence au milieu de la fibre inférieure de la poutre, et se propage tout le long de celle-ci. Grâce aux armatures longitudinales, une diffusion stable des fissures est observée le long de celles-ci.

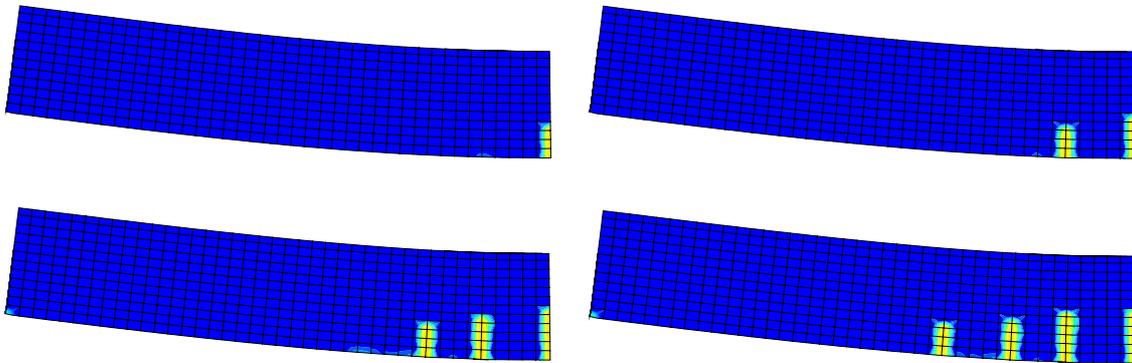


FIG. 3.3 – Développement des bandes d'endommagement dans la poutre en flexion trois points.

Néanmoins, la dépendance de la réponse à la densité du maillage (voir chapitre 2) n'est pas régularisée par la présence des aciers (Jason *et al.* (2001)). Le manque d'objectivité de la réponse simulée est lié à la localisation de l'endommagement, typique des lois de comportement adoucissantes. De plus, toutes les fissures formées sont en mode I, contrairement à ce qui est observé expérimentalement. Les essais expérimentaux (voir la figure 3.4, par exemple) montrent qu'une fissure principale en mode I apparaît tout d'abord au centre de la poutre, suivie d'une formation de fissures secondaires en mode mixte. Le modèle plastique endommageable dans sa version locale n'est pas capable de simuler correctement l'orientation des fissures dans les applications à traction dominante. Nous allons donc utiliser la version régularisée en gradient du modèle élasto-plastique endommageable.

Un maillage uniforme plus fin avec 3600 éléments, dont 100 éléments dans la section longitudinale, est alors employé afin d'obtenir une taille de maille égale à environ un tiers de la longueur caractéris-

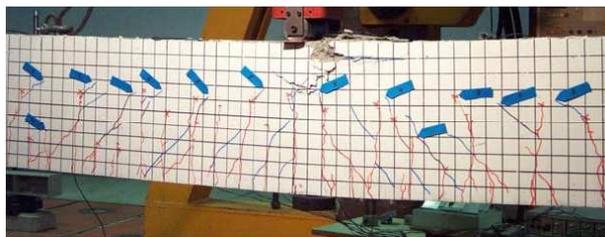


FIG. 3.4 – Poutre en flexion trois points. Profil de fissuration expérimental.

tique, qui correspond à un paramètre non local $c = 0,0003351 \text{ m}^2$ (Jason *et al.* (2001)). La figure 3.5 propose une comparaison entre la simulation numérique et le résultat expérimental. La partie élastique est correctement simulée et la phase non linéaire est relativement cohérente avec l'observation expérimentale. Nous remarquons aussi la présence de snap-back correspondant au développement de nouvelles bandes endommagées. La figure 3.6 illustre la distribution de l'endommagement et de la variable d'écrouissage plastique au dernier pas de chargement.

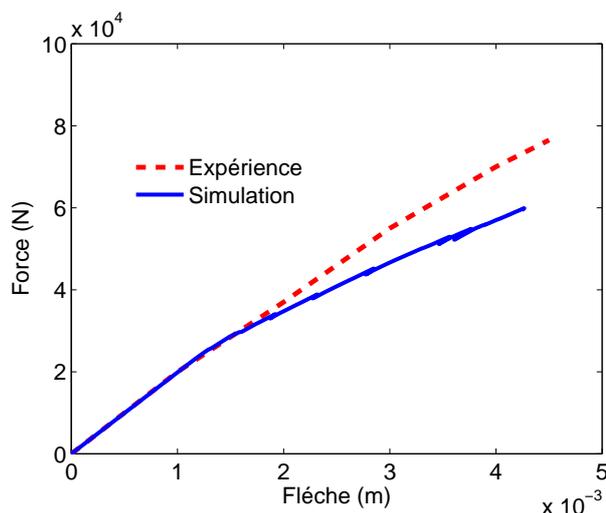


FIG. 3.5 – Comparaison de la réponse force-flèche entre la simulation numérique et l'expérience sur une poutre en flexion trois points.

Une bande principale d'endommagement est créée au milieu de la structure (mode I), puis plusieurs bandes secondaires, caractéristiques du rôle joué par l'acier, sont formées en mode mixte. Cette répartition de l'endommagement représente correctement la formation de fissures dans une poutre en flexion trois points (figure 3.4). La plasticité se développe sous la forme locale (partie non régularisée) et suit dans sa répartition la formation préalable de l'endommagement. En conclusion, le modèle régularisé est capable de reproduire correctement le mode de fissuration observé expérimentalement

pour ce test structurel classique de façon assez cohérente.

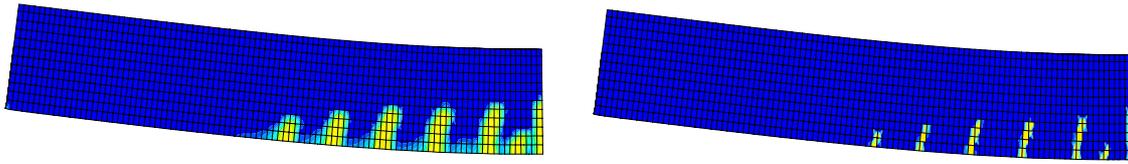


FIG. 3.6 – Distribution de l’endommagement (droite) et de la variable d’écrouissage (gauche) dans la poutre en béton armé avec la version non locale du modèle.

Il est à noter que le calcul a été arrêté pour une flèche de $4,27\text{ mm}$ pour des raisons informatiques (taille du disque de stockage). Il s’agit donc d’une limitation numérique de la technique de régularisation choisie. En effet, pour une finesse de maillage donnée et adaptée (au moins trois mailles dans une longueur interne), l’approche gradient nécessite des ressources informatiques plus importantes qu’une approche non locale intégrale (6 inconnues nodales supplémentaires à calculer). Toutefois, la bande de la matrice de raideur est plus large avec l’approche intégrale, il faut donc plus de temps pour l’inverser.

3.1.2 Poutre continue de grande hauteur

Les modèles d’endommagement scalaires ont montré leur efficacité dans le cas de rupture en extension (mode I) (Voir par exemple Le Bellégo *et al.* (2003) et Peerlings *et al.* (1998)). Les résultats numériques sur rupture en cisaillement sont plus rares, bien qu’un tel mode de rupture soit souvent très fragile.

Afin d’estimer les performances du modèle élasto-plastique endommageable et sa capacité à simuler correctement le mode de rupture du béton dans les structures complexes, une comparaison entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux est proposée sur une poutre continue en béton armé de grande hauteur (Asin (1992)) .

Le spécimen qui contient la quantité minimum d’armatures transversales a été choisi pour les simulations numériques. En effet, l’augmentation de la quantité des armatures transversales conduit à une augmentation de la ductilité de la rupture, car les armatures vont continuer à transmettre des efforts au travers de la fissure créée par cisaillement, cela justifie notre choix. Cependant, les armatures transversales n’ont pas été modélisées car *Code_Aster* impose une relation de contact parfaite acier-béton. Cela va accroître la ductilité de la rupture à cause de la surestimation des efforts repris par les armatures transversales contrairement aux constatations expérimentales. Les paramètres matériau du béton utilisés pour la simulation avec le modèle élasto-plastique endommageable sont listés dans le

tableau 3.2. Ils fournissent une réponse du modèle qui est conforme aux expériences en traction et en compression uniaxiale.

$E (Pa)$	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}	r_c	r_t
$3,47 \cdot 10^{10}$	0,2	2,75	1	2470	13000	$1 \cdot 10^{-4}$	$120 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$
p	A_h	B_h	C_h	γ	α	a	k_0	
0,4	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,5	-0,5	0,1	

TAB. 3.2 – Paramètres du modèle élasto-plastique endommageable.

De plus, une étude numérique comparative a été réalisée avec deux modèles d'endommagement scalaires pour mettre en avant l'amélioration apportée par l'introduction de la plasticité à la loi constitutive d'endommagement. Le premier modèle d'endommagement scalaire utilise la formulation d'endommagement classique définie par Mazars (1984) (tableau 3.3) et la définition de la déformation équivalente de Von Mises modifiée proposée par de Vree *et al.* (1995) est employée pour le second (tableau 3.4). Les paramètres des trois modèles sont calés de telle sorte à obtenir la même résistance en traction et en compression pour tous. Excepté pour le modèle de de Vree *et al.* (1995) pour lequel la fragilité en traction et en compression sont les mêmes. En effet, en compression uniaxiale, ce modèle donne une réponse plus fragile que les autres, car son allure est la même qu'en traction. C'est une imperfection de ce modèle (voir chapitre 2).

Les barres d'acier sont modélisées en utilisant une loi élasto-plastique de Von Mises avec écrouissage positif linéaire : $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_Y = 500$ MPa (seuil de plasticité) et $Et = 45$ GPa (module plastique tangent). L'interface acier-béton est supposée parfaite.

$E (Pa)$	ν	A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D_0}
$3,47 \cdot 10^{10}$	0,2	1,276	0,9	1768	8000	10^{-4}

TAB. 3.3 – Paramètres du modèle d'endommagement de Mazars.

$E (Pa)$	k	ν	A	B	ε_{D_0}
$3,47 \cdot 10^{10}$	10	0,2	0,9	8000	10^{-4}

TAB. 3.4 – Paramètres d'endommagement avec le modèle de Von Mises modifié.

La géométrie et le système de chargement sont présentés dans la figure 3.7. L'épaisseur de la poutre est de 0,15 m. Grâce à la symétrie, seulement la moitié (droite) du spécimen est simulée avec 3048

éléments cubiques à 8 nœuds (figure 3.8). A cause d'un espace mémoire vive limité à 2 Go, les simulations sont réalisées avec l'approche locale, car le modèle non local nécessite un maillage trop fin pour tenir compte de l'interaction non locale (approximativement trois éléments au minimum dans la longueur caractéristique).

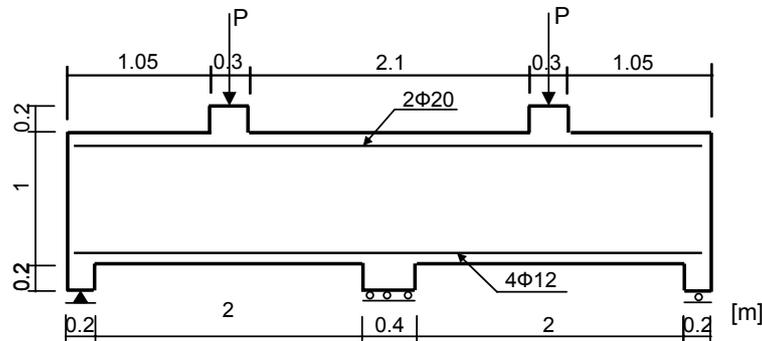


FIG. 3.7 – Geometrie et système de chargement de la poutre continue de grande hauteur.

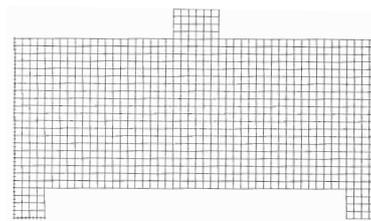


FIG. 3.8 – Maillage utilisé pour la demi-poutre.

Toutefois, un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques est observé. Il est à noter ici que le maillage est calé de telle sorte, que la taille d'un élément soit approximativement égale à la largeur de la bande d'endommagement.

La figure 3.9 compare les profils expérimentaux de fissuration et les profils numériques d'endommagement du modèle élasto-plastique endommageable pour différents niveaux de chargement. Comme observé expérimentalement, une bande d'endommagement (mode I) s'amorce d'abord au milieu de la travée (étape A). Une augmentation supplémentaire de la charge conduit à un développement de cette bande d'endommagement et la propagation de l'endommagement le long des armatures (mode I & II) s'étend vers les appuis (étape B). Puis une bande d'endommagement en mode II se forme soudainement (étape C). Finalement, une rupture fragile et violente de cisaillement a lieu (étape D). La charge ultime de rupture obtenue expérimentalement est de 1180 kN et la valeur numérique correspondante

est de 1285 kN, soit une erreur de 11 %. Cette anomalie peut être due à l'interface acier-béton supposée parfaite dans les calculs et au maillage qui impose la taille des fissures.

Cependant, le modèle prévoit plutôt bien la charge ultime et peut reproduire correctement le mode de rupture, malgré la polarisation possible du maillage inhérente à l'approche locale (où la zone endommagée suit plus facilement les orientations principales du maillage).

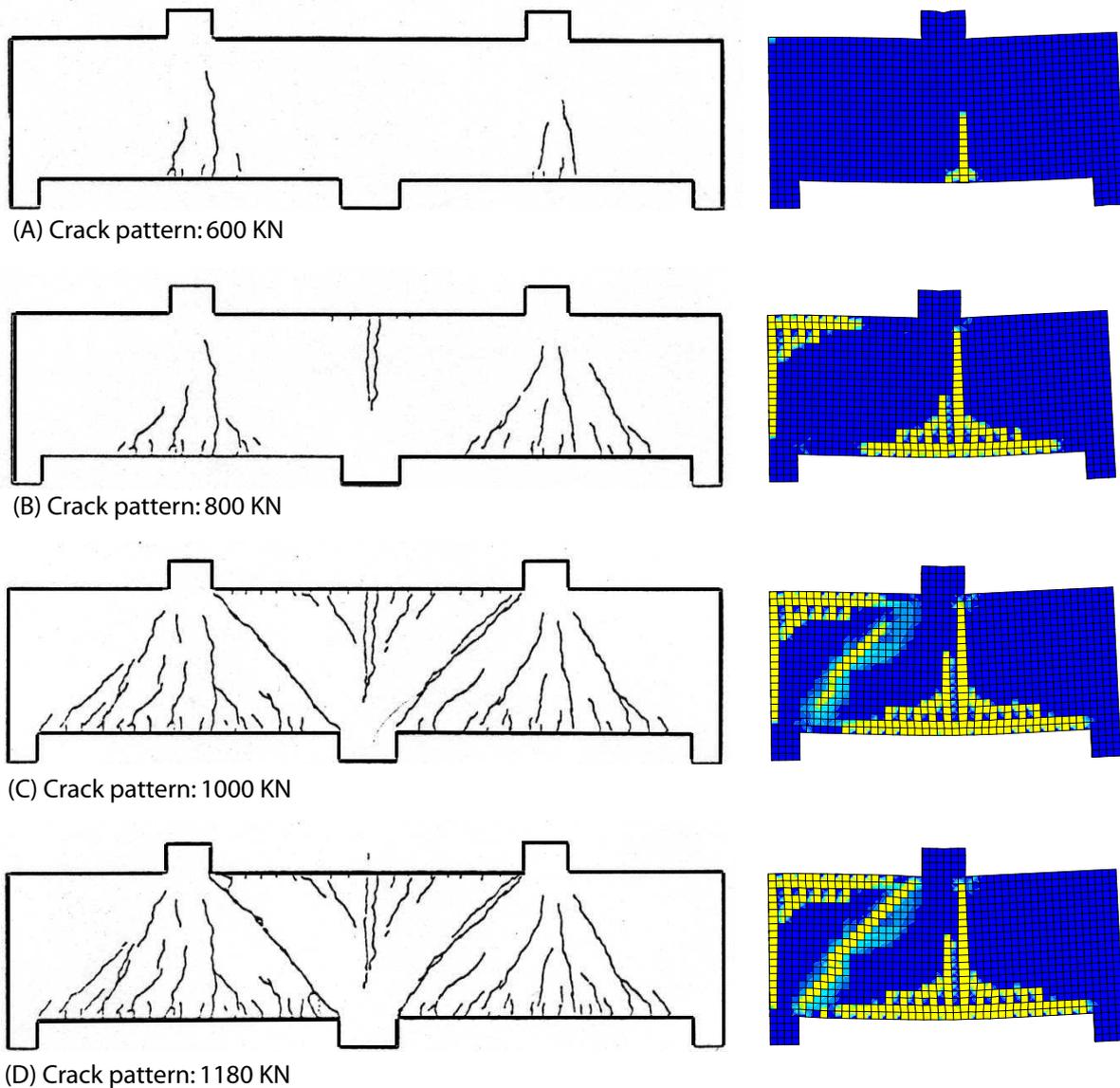


FIG. 3.9 – Développement de la fissuration dans la poutre continue. Comparaison expérience-simulation avec le modèle élasto-plastique endommageable.

En revanche, les deux modèles d'endommagement scalaires (Mazars (1984) et de Vree *et al.* (1995))

ne sont pas capables de reproduire le mode de rupture, ainsi que les charges ultimes observées dans les tests expérimentaux. La figure 3.10 montre les profils d'endommagement des deux modèles où la rupture est seulement en mode I. La figure 3.11 compare les courbes force-déplacement obtenues avec le modèle élasto-plastique endommageable et les deux modèles scalaires d'endommagement . Les charges au pic pour les modèles scalaires d'endommagement sous-estiment les données expérimentales car la rupture simulée est en mode I. Ces grandes différences peuvent être expliquées, pour le modèle de Mazars, par la déformation équivalente qui est seulement une fonction (voir équation 2.6) des déformations élastiques principales positives, ce qui signifie que l'endommagement est principalement dû aux microfissures en mode I, et pour le modèle de Von Mises modifié, par la résistance sous une contrainte de traction-compression biaxiale qui est surestimée (voir chapitre 1). L'introduction de la plasticité a donc une conséquence directe sur l'amélioration de la prédiction du mode de rupture dans le cas de la rupture en cisaillement.

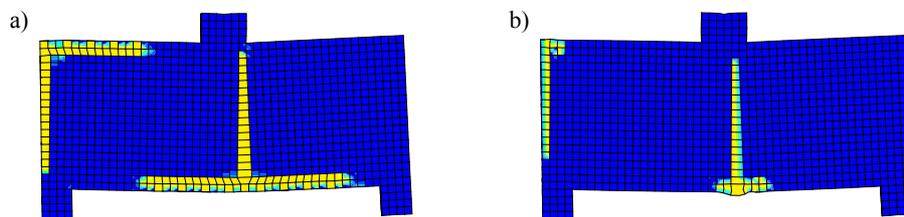


FIG. 3.10 – Endommagement dans la poutre avec le modèle de a) Mazars et de b) Von mises modifié.

Afin de vérifier ce point, nous avons décidé de simuler la même poutre mais avec, cette fois, des quantités d'armatures longitudinales plus élevées, surtout en partie inférieure, pour augmenter le confinement dans la poutre. Le maillage et les paramètres matériau pour le béton ne sont pas modifiés. Le ferrailage de la poutre pour les nouvelles simulations est illustré dans le tableau 3.5. La figure 3.12 montre les profils d'endommagement des deux modèles scalaires d'endommagement . Avec le modèle d'endommagement de Mazars, la rupture est en mode I quelle que soit la quantité d'armatures. En revanche, le modèle utilisant le critère “de Vree” représente la rupture en cisaillement (mode II) mais la poutre est sur-armée, ce qui ne correspond pas au cas réel. En conclusion, le modèle utilisant à la fois l'endommagement et la plasticité est capable de décrire correctement ce comportement structural complexe. Ce que les deux modèles d'endommagement scalaire considérés ne peuvent pas faire.

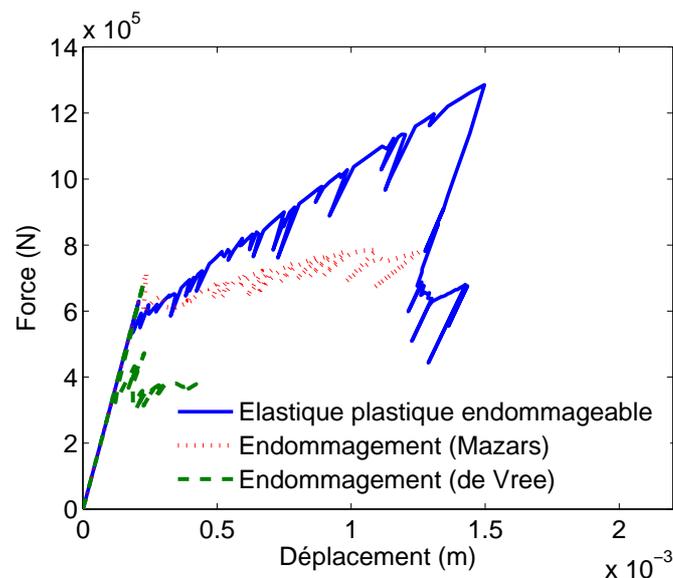


FIG. 3.11 – Courbes Force-déplacement. Comparaison entre le modèle élasto-plastique endommageable, Mazars et Von mises modifié.

Position	Section (mm^2)	Nb. et diamètre des barres
Haut	452	4 ϕ 12
Bas	2512	8 ϕ 20

TAB. 3.5 – Armatures longitudinales dans la poutre pour les nouvelles simulations.

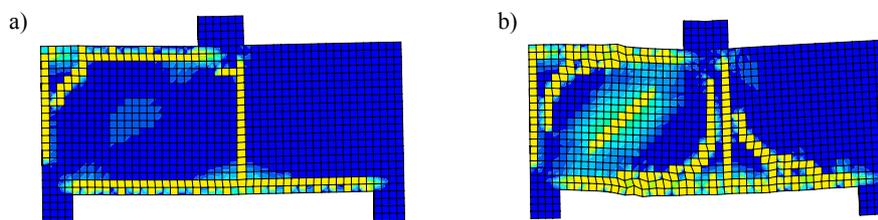


FIG. 3.12 – Endommagement dans la poutre sur-armée avec le modèle de a) Mazars et de b) Von mises modifié.

3.2 Etude industrielle

3.2.1 Description du test

La conception du spécimen est inspirée d'une vraie paroi interne d'une enceinte de confinement de centrale nucléaire 1450 *MWe*. Il s'agit d'un élément courbe en béton précontraint dont la géométrie

est représentée dans la figure 3.13. Le spécimen contient tous les éléments de l'enceinte : le béton, les aciers passifs verticaux et horizontaux, les épingles et les câbles de précontraintes verticaux et horizontaux. La taille minimale du spécimen (en termes de hauteur et de largeur) a été choisie pour satisfaire les conditions suivantes :

- Une zone d'observation adéquate doit rester disponible pour les mesures, et suffisamment loin des bords pour éviter toutes perturbations des points de chargement (des ancrages, par exemple).
- Les observations globales (déplacements, déformations, profils de fissuration, contraintes, etc.) et locales (amorçage de la fissuration, déformation dans les armatures, état de contrainte/déformation proche des câbles, etc.) sur le spécimen doivent rester le plus proche possible de celles qui seraient effectuées sur une partie courante de l'enceinte de confinement.

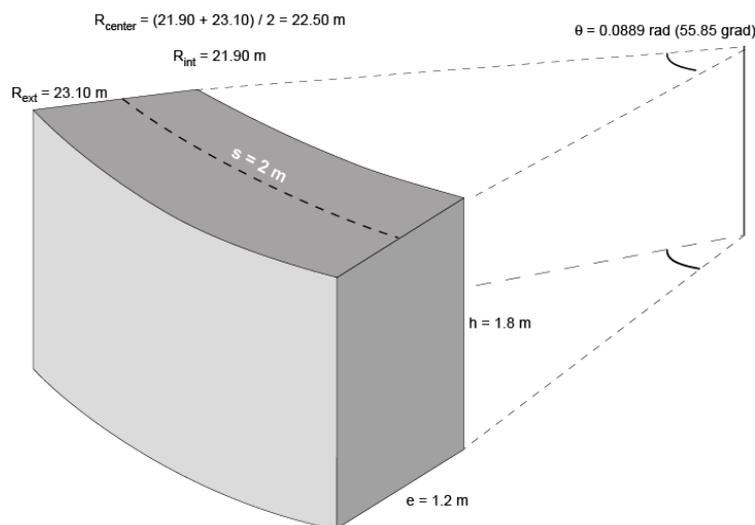


FIG. 3.13 – Géométrie et dimensions de la maquette PACE-1450-EXP.

Afin de respecter les détails dans la représentativité d'une paroi d'enceinte, le système expérimental suivant pour l'essai dénommé "PACE-1450-EXP" a été proposée (figure 3.14) :

- Le spécimen s'étend horizontalement avec sa concavité dirigée vers le haut.
- Les câbles horizontaux sont précontraints à l'aide des oreilles d'acier dans lesquelles ils sont ancrés.
- Comme il est impossible de précontraindre les trois câbles verticaux avec les installations disponibles à cause du bâti déjà existant, un seul câble non tendu mais injecté est utilisé dans la direction verticale pour maintenir la rigidité de l'espace créé par la gaine et pour reproduire l'effet d'inclusion. Cependant, une pression homogène est créée dans la direction verticale en plaçant des coussins d'air sur les deux surfaces.
- Une pression interne est appliquée sur la face supérieure du spécimen.
- Les 8 vérins hydrauliques étirent le spécimen dans la direction radiale.

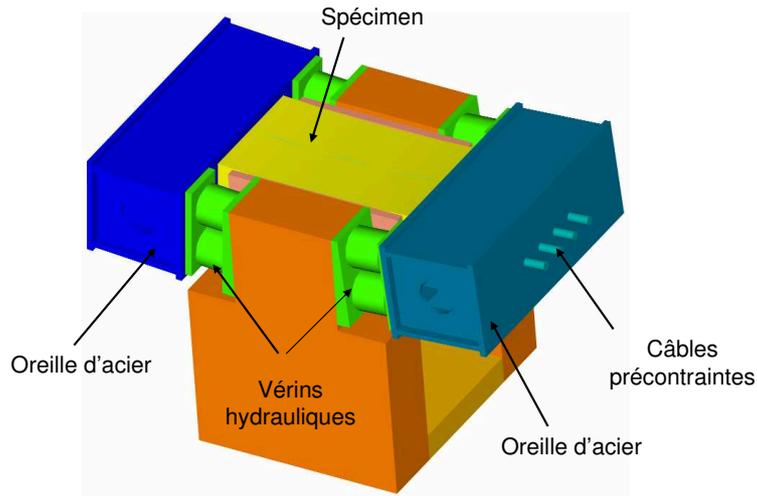


FIG. 3.14 – Vue de la maquette d’essai PACE-1450-EXP.

Notons que l’orientation (verticale/horizontale) se réfère à la position de PACE dans une enceinte, et non lors de l’essai où la maquette est “retournée”.

La campagne expérimentale consiste à réaliser un essai sous différentes configurations de chargement (appelées RUNs), correspondant à l’état de l’enceinte de confinement à différentes étapes durant son cycle de vie. Le chargement appliqué va produire un déplacement radial et une traction membranaire comme pour la vraie structure. Afin de tenir compte du fluage de l’enceinte au cours de sa vie, la précontrainte des câbles horizontaux est abaissée consécutivement de 100% dans le RUN 1 à 60% dans le RUN 4. L’objectif principal de ces essais est de mesurer l’amorçage et la propagation des fissures, ainsi que le débit de fuite radiale au travers de la paroi.

3.2.2 Simulation numérique de la maquette PACE-1450-EXP

Les dimensions, la géométrie, les propriétés matériaux et les conditions aux limites sont adoptées de la définition du programme expérimental. Le Volume Structurel Représentatif (VSR) contient 9 barres horizontales et 11 barres verticales (sur chaque face interne et externe), 4 câbles précontraints horizontaux, 1 câble non tendu vertical et 24 épingles uniformément réparties dans la structure. La figure 3.15 renseigne sur la distribution et les propriétés des aciers. Afin d’obtenir le même comportement de la partie courante sur les essais “PACE-1450-EXP” que dans l’enceinte, les conditions aux limites suivantes ont été choisies pour le VSR (figure 3.16 et figure 3.17) : la face SB est bloquée selon Oz (dans la direction verticale) et les rotations des faces SG et SD sont nulles. Les charges élémentaires appliquées à la maquette sont les suivantes :

Type	R (m)	e (cm)	D (mm)
Câbles horizontaux	22.50	40	84
Câble vertical	22.15	x	84
Barres horizontales interne	21.99	20	20
Barres horizontales externes	23.02	20	20
Barres verticales interne	21.99	18	25
Barres verticales externes	23.02	18	25
Cadres	x	x	12

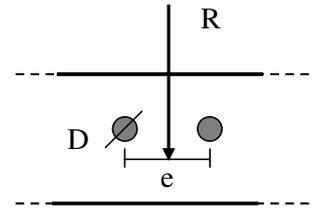


FIG. 3.15 – Géométrie et position des aciers dans la structure.

1. Le poids propre de la maquette (béton, armatures et câbles). Le poids propre a été retiré pour l'étude volumique afin de mieux analyser les résultats, car il implique une perte de symétrie du chargement.
2. Les forces de précontrainte des câbles horizontaux sur les faces latérales SG et SD . Chaque câble est initialement tendu par une force de 6,48 MN, puis diminuée selon l'étape de chargement (RUN).
3. Une pression constante dans la direction verticale égale à 1 MPa (sur la face SH).
4. Les sollicitations mécaniques modélisées par une pression radiale sur l'intrados du volume (face SI).

Ces charges élémentaires ont été combinées, afin de faire des combinaisons de charges correspondant à celles des RUNs définies expérimentalement.

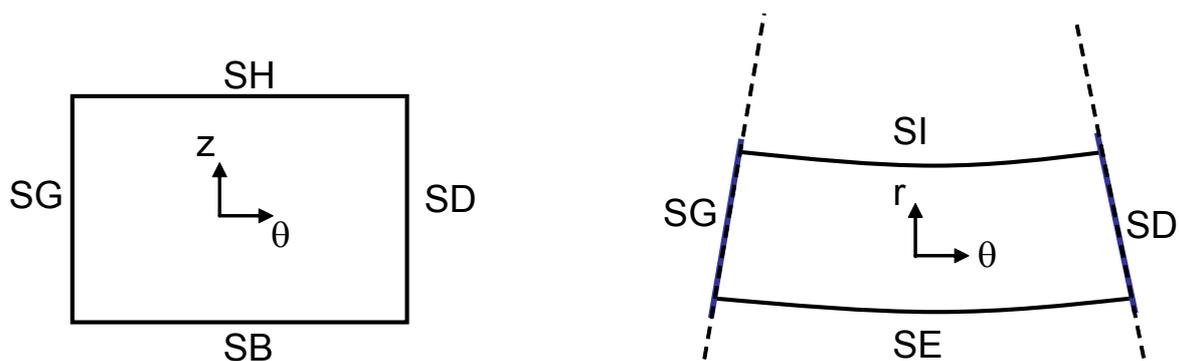


FIG. 3.16 – Définition des surfaces pour les conditions aux limites.

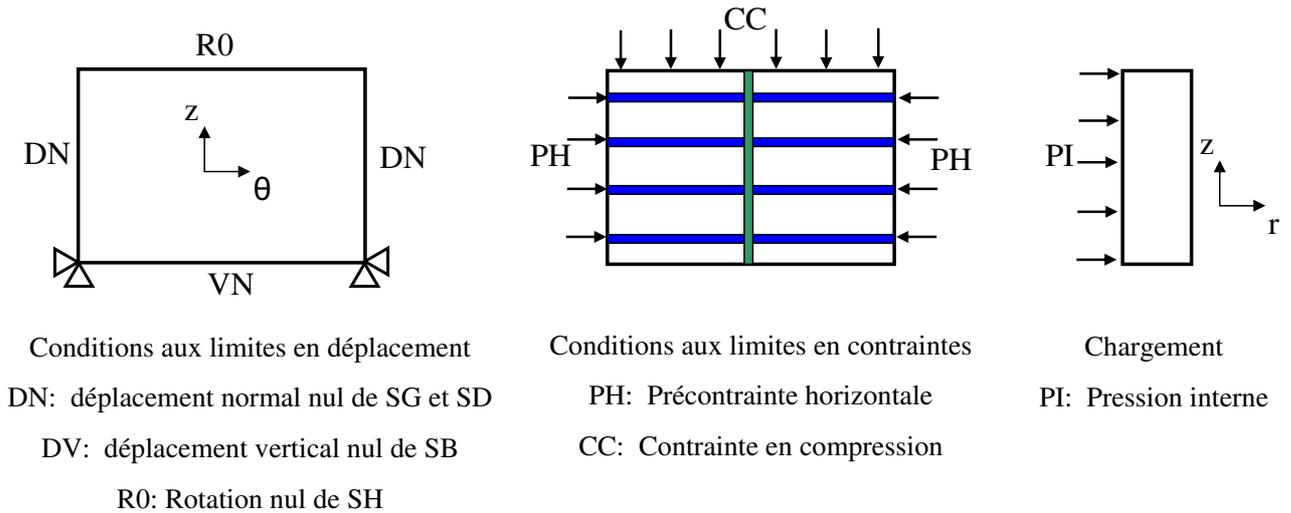


FIG. 3.17 – Conditions aux limites, état initial et chargement.

3.2.2.1 Modèles matériaux

Le béton La simulation est seulement réalisée avec le modèle d’endommagement de Mazars (1984), dans les calculs avec l’approche filaire pour les câbles. Le but de cette étude est de confronter un modèle d’endommagement simple pour un test pré-industriel et d’analyser l’influence de la discrétisation spatiale sur les résultats. Puis, une étude comparative entre le modèle d’endommagement et le modèle élasto-plastique endommageable sera envisagée, pour la simulation utilisant l’approche volumique pour les câbles. Il s’agit, d’une part, d’étudier le rôle des câbles précontraints et d’autre part, de montrer les avantages d’introduction de la plasticité dans la formulation d’endommagement pour les tests industriels. Les paramètres utilisés pour les deux modèles sont illustrés dans le tableau 3.6 et le tableau 3.7. Ces paramètres sont choisis afin que la résistance en traction et en compression soient égales à celles du béton B11 (Omar (2004)), bien que le béton de la maquette ne sera pas le B11. Seuls le module d’Young $E = 34$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,26$ ont été spécifiés dans le cahier des charges. Ultérieurement, ces valeurs devront être calées plus précisément sur des essais de compression et/ou traction réalisés sur des éprouvettes.

A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D0}
1,5	0,8	1390	10000	$1,05 \cdot 10^{-4}$

TAB. 3.6 – Paramètres du modèle d’endommagement seul.

A_c	A_t	B_c	B_t	ε_{D0}	r_c	r_t	γ
2,75	1,1	2470	14000	$1, 1.10^{-4}$	120.10^6	11.10^6	0,99
p	a	k_0	A_h	B_h	C_h	α	
0,4	-1	0,1	7.10^{-5}	2.10^{-2}	3.10^{-5}	0,5	

TAB. 3.7 – Paramètres du modèle d’endommagement et de plasticité

Remarque : la version non locale du modèle d’endommagement devrait être utilisée pour éviter une trop grande dépendance des résultats vis-à-vis du maillage, et pour s’assurer que le lieu d’amorçage et que la propagation de la fissuration soient correctement prédits. Toutefois, la version de *Code_Aster* employée ne permet pas de faire un maillage suffisamment fin. Les maillages les plus fins, réalisables dans le contexte actuel, ont des tailles de maille supérieures à la longueur caractéristique des modèles non locaux, ce qui rend inutiles ces derniers.

Le coulis Pour les calculs avec l’approche volumique pour les câbles, nous avons choisi arbitrairement des propriétés pour le coulis proches de celles du béton, tout en étant inférieures, à savoir $E = 10$ GPa et $\nu = 0, 2$.

Les aciers Les armatures passives et les câbles de précontrainte sont modélisés par une loi de type Von Mises à écrouissage linéaire. Les paramètres pour les armatures passives sont : $E = 200$ GPa, $\nu = 0, 3$, $\sigma_e = 500$ MPa (limite élastique) et ceux des câbles sont : $E = 190$ GPa, $\nu = 0, 3$, et $f_{prq} = 1860$ MPa. Les données fournies ici sont extraites du rapport d’essai fourni par EDF R&D.

3.2.2.2 Simulation numérique avec l’approche filaire pour les câbles

Le béton est modélisé par des éléments volumiques, alors que les armatures passives et surtout les câbles précontraints sont en éléments filaires (1D). Pour des raisons techniques, les nœuds des armatures passives doivent coïncider avec les nœuds du maillage béton. Par conséquent, leur position pourra varier légèrement en fonction de la finesse du maillage. En revanche, il n’est pas nécessaire de faire coïncider les nœuds des câbles et les nœuds du béton, car *Code_Aster* permet de créer des liaisons cinématiques entre eux.

La liaison acier-béton est supposée parfaite, sauf dans la phase de modification de la précontrainte. C’est une des différences entre les simulations numériques et les essais, pour lesquels les gaines ne seront pas injectées pour pouvoir modifier la charge.

Afin de quantifier le degré de confiance dans les résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale, une analyse de l’influence du maillage sur les résultats est réalisée. Pour cela, les résultats sont présentés

pour deux maillages de différentes densités, un maillage grossier constitué de 693 éléments et un maillage plus fin avec 4752 éléments (cubes avec 20 nœuds).

Les figures 3.18 et 3.19 montrent l'évolution de la pression (chargement) en fonction du déplacement d'un point situé sur la face interne du volume pour les deux maillages (fin et grossier). Ces deux courbes peuvent être divisées en huit étapes correspondant aux différents chargements :

- Le poids propre (p.p) du volume imposant un déplacement initial positif.
- La précontrainte avec une tension initiale dans chaque câble égale à 6,48 MN (100% précontrainte) qui implique un déplacement négatif.
- La tension dans les câbles horizontaux est abaissée à 10% de la précontrainte initiale.
- Une pression égale à 1 MPa est imposée dans la direction verticale et une pression radiale égale à 0,043 MPa est appliquée sur la surface interne du volume (RUN0).
- Les câbles sont tendus à 100% de précontrainte et la pression radiale augmente jusqu'à 0,43 MPa (RUN1).
- La pression radiale maximale reste constante et la tension des câbles est abaissée à 80% de précontrainte (RUN2).
- La pression radiale reste constante et la tension des câbles est abaissée à 60% de précontrainte (RUN3).
- Dans cette étape, la précontrainte ne change pas, mais la pression radiale augmente jusqu'à 0,6 MPa (RUN4).

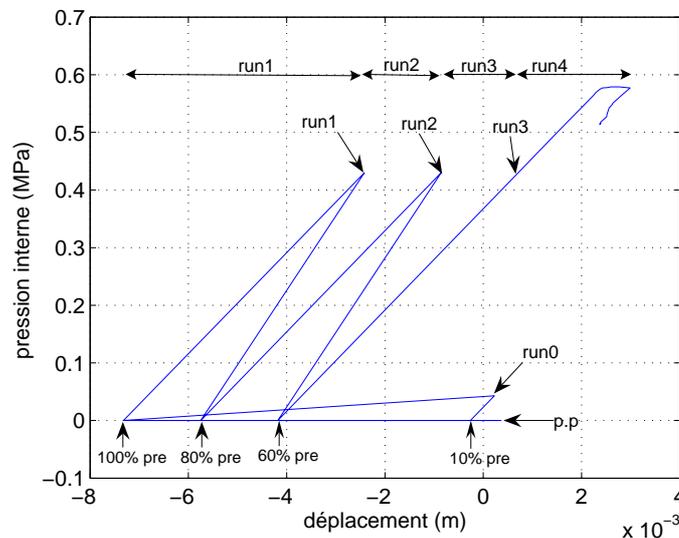


FIG. 3.18 – Evolution du déplacement en fonction de la pression interne pour le maillage grossier avec l'approche filaire du câble.

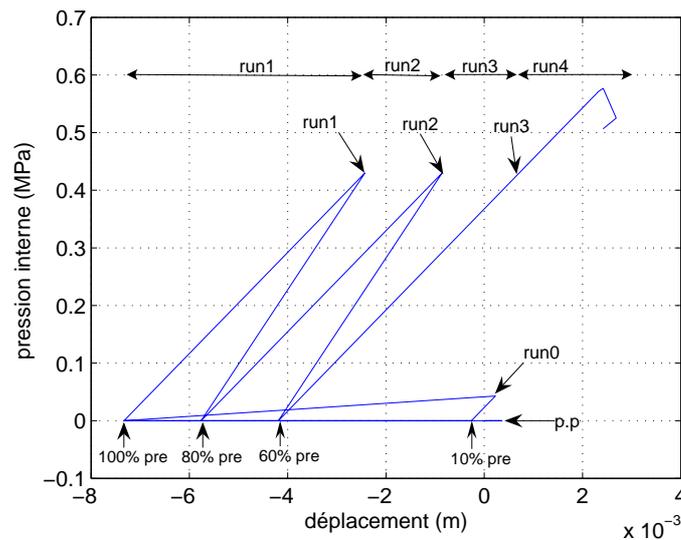


FIG. 3.19 – Evolution du déplacement en fonction de la pression interne pour le maillage fin avec l’approche filaire du câble.

Dans ces scénarii de chargement, nous avons toujours supposé une étape intermédiaire où la précontrainte existe seule sans aucun autre chargement extérieur. Cette hypothèse de travail explique pourquoi, par exemple, on va du point RUN0 au point RUN1 en passant par un point intermédiaire pour lequel seuls les 100% de précontrainte sont présents. Pour être plus précis, il faudrait connaître le phasage exact entre précontrainte et charge de pression externe.

Après la mise en tension des câbles (100% de précontrainte), on peut remarquer une localisation de l’endommagement autour des câbles de précontrainte (voir la figure 3.20).

Si dans un premier temps, ces faciès d’endommagement pouvaient laisser croire à des endommagements locaux dus à l’introduction des efforts de précontrainte dans les zones d’ancrage, les coupes effectuées dans le volume de PACE 1450 (voir la figure 3.21) pour le maillage fin nous montrent clairement que l’endommagement est dû aux effets de courbure.

Lors de la mise en précontrainte, la courbure des câbles entraînent des efforts horizontaux qui sont transmis aux mailles bétons qui “entourent” la maille du câble. Lorsque la taille du maillage tend vers zéro, à effort de précontrainte donné, les contraintes, et donc les déformations élastiques, tendent vers l’infini à cause de la force de précontrainte qui est distribuée sur un élément infiniment petit. Les figures 3.22 et 3.23 montrent respectivement les profils des contraintes σ_{xx} pour le maillage grossier et fin. Ceci explique pourquoi l’endommagement maximal est de 0,387 pour le maillage fin et seulement de 0,011 pour le maillage grossier. Il faut s’attendre à avoir un endommagement de 1 pour un maillage encore plus fin. De plus, les figures 3.21 et 3.24 montrent clairement que l’endommagement autour des

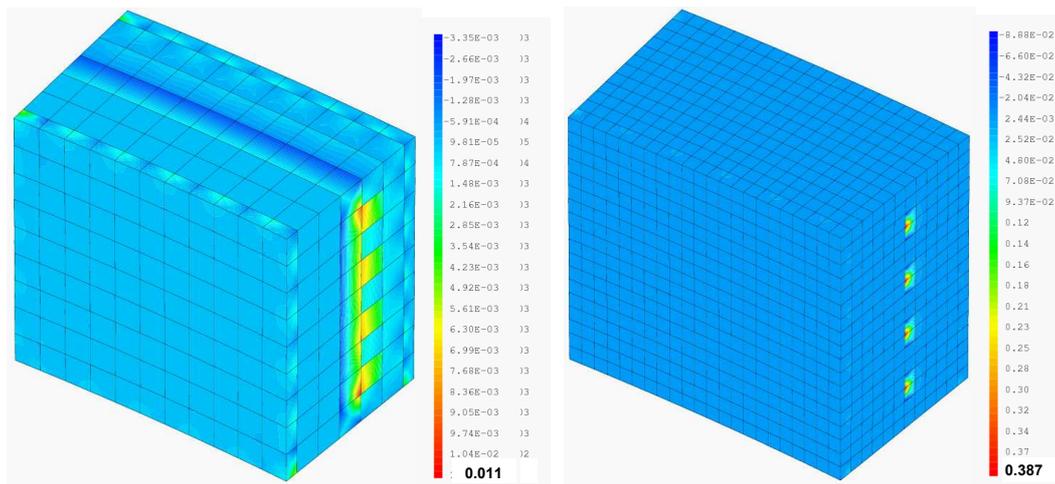


FIG. 3.20 – Profils d’endommagement de PACE 1450 après la mise en précontrainte pour le maillage grossier (a) et le maillage fin (b).

câbles est plus grand vers l’extrados (la face inférieure) de PACE, là où les tractions se développent. A la suite de la mise en précontrainte, l’endommagement n’évolue plus pendant les RUN0,1,2,3 et un comportement linéaire (non élastique à cause de l’endommagement dû à la précontrainte) est dominant. Puis, un comportement non linéaire dû au développement de l’endommagement apparaît au RUN4. Le déchargement partiel observé sur les courbes des figures 3.18 et 3.19 peut être expliqué par l’ouverture de la macrofissure en zone centrale de la maquette. La fin du RUN4 est obtenue par pilotage en longueur d’arc. Au vu de ces résultats, on peut conclure que le niveau de chargement visé pendant l’essai au RUN4 ne pourra pas être atteint, car la maquette rompra avant. Le profil d’endommagement à rupture est montré sur la figure 3.25.

Finalement, la coupe à la rupture présentée sur la figure 3.27 montre que l’endommagement dû à la mise en précontrainte n’a pas évolué, que l’endommagement est homogène dans toute la structure avec une valeur de l’ordre de 0,15, et que finalement une localisation “aléatoire” a entraîné la rupture de la maquette. Contrairement aux objectifs fixés, d’un point de vue numérique le câble vertical n’engendre pas de défaut géométrique capable d’amorcer la rupture. En effet, il est modélisé en $1D$, c’est-à-dire qu’il n’a un effet de rigidité (inclusion) que dans son axe. Au contraire d’après la figure 3.26, il semble que le défaut numérique le plus important soit d’abord les épingles qui amorcent la rupture globale, puis les erreurs d’arrondi numérique qui entraînent une rupture anti-symétrique dont la position semble aléatoire.

La résistance moyenne du béton B11 vaut $\bar{f}_t = 3,6$ MPa. Il faut donc vérifier, pour chaque phase de chargement que la contrainte en traction reste inférieure à 2,1 MPa.

Les résultats montrent que pour le maillage fin, pour lequel l’introduction de la précontrainte entraîne

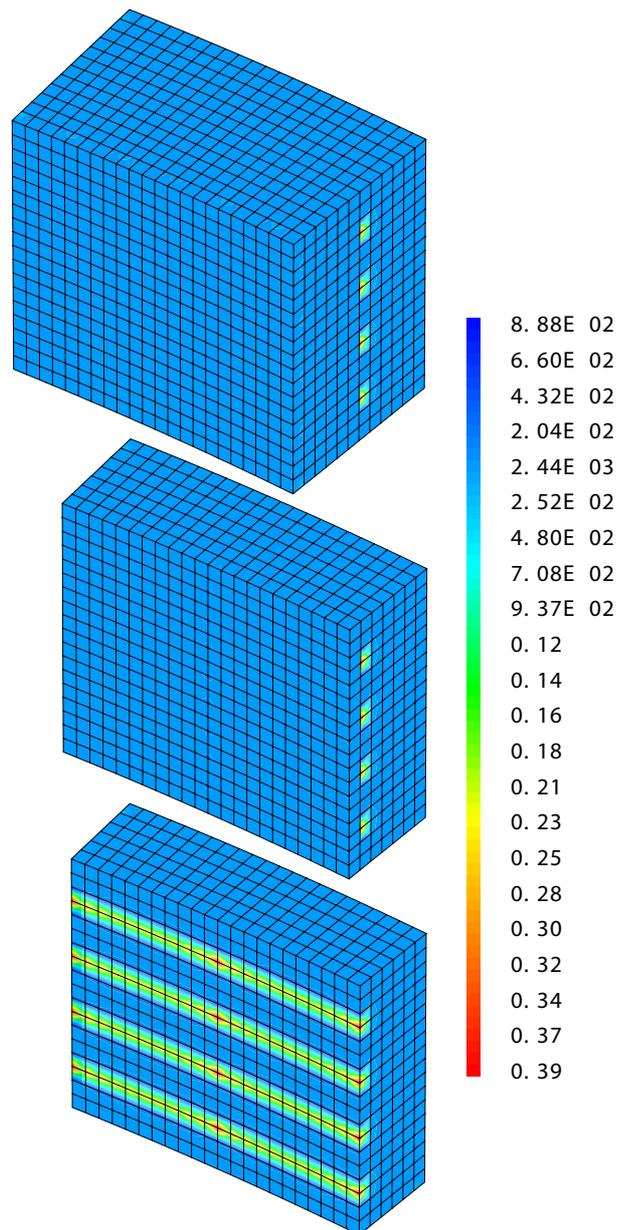


FIG. 3.21 – Profils vu de l'extérieur et dans deux coupes de l'endommagement de PACE 1450 après la mise en précontrainte pour le maillage fin.

de l'endommagement le long des câbles horizontaux, la limite de 2,1 MPa est dépassée avec 100% de précontrainte (2,83 MPa), ainsi que pour les Runs 1 et 2 avec respectivement des valeurs de 2,96 MPa et 2,45 MPa. Ces valeurs, atteintes dans les zones proches des câbles, dépendent fortement du maillage, il faut donc les considérer avec beaucoup de suspensions sur la représentativité de la

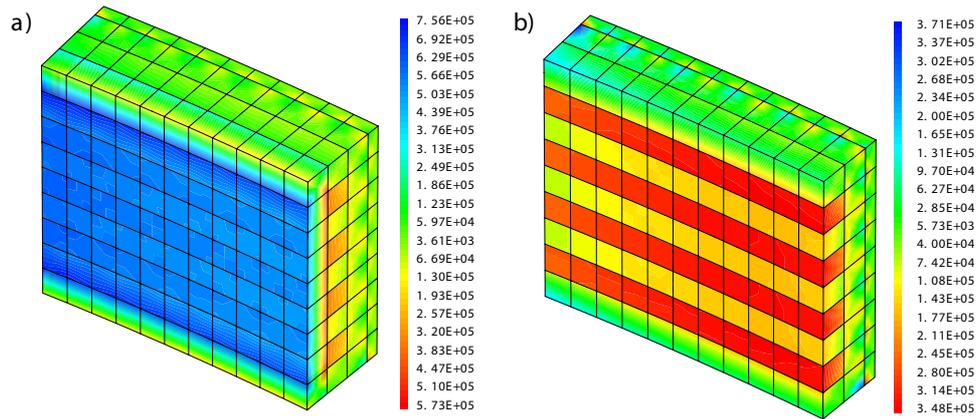


FIG. 3.22 – Profil de contrainte σ_{xx} de PACE 1450 après la mise en précontrainte pour le maillage grossier.

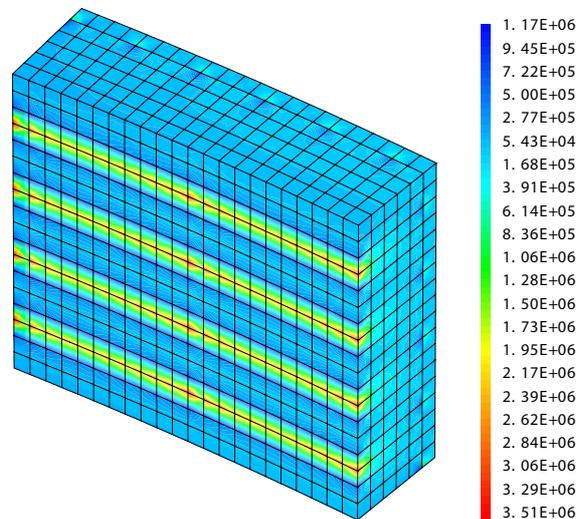


FIG. 3.23 – Profil de contrainte σ_{xx} de PACE 1450 après la mise en précontrainte pour le maillage fin.

réalité.

3.2.2.3 Simulation numérique avec l'approche volumique pour les câbles

La structure est modélisée en 3D et sa discrétisation spatiale est faite comme suit :

- La partie béton, le coulis autour des câbles et les câbles avec des cubes à 8 nœuds.
- Le câble introduisant les efforts avec des segments à 2 nœuds avec section quasi nulle.
- Les armatures passives avec des quadrangles à 4 nœuds sous forme de grille à la surface du maillage

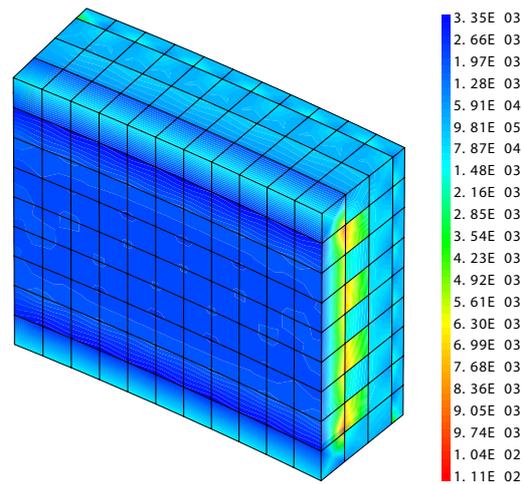


FIG. 3.24 – Profil dans une coupe de l'endommagement de PACE 1450 après la mise en précontrainte pour le maillage grossier.

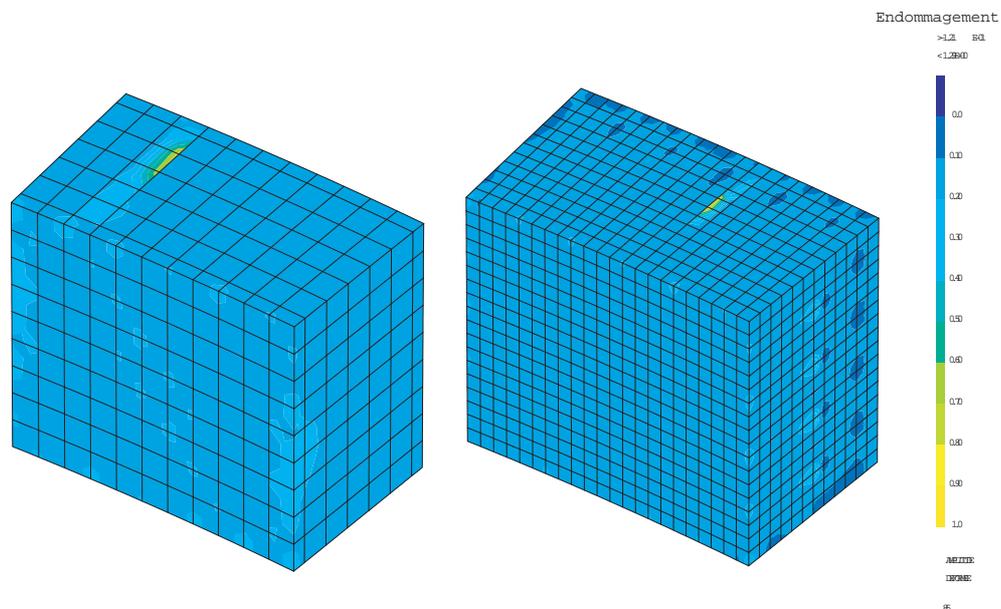


FIG. 3.25 – Profils d'endommagement de PACE 1450 lors de la mise en charge du RUN4 pour les deux maillages.

volumique.

- Le poids propre et les épingles ne sont pas pris en considération avec l'approche volumique pour les câbles.

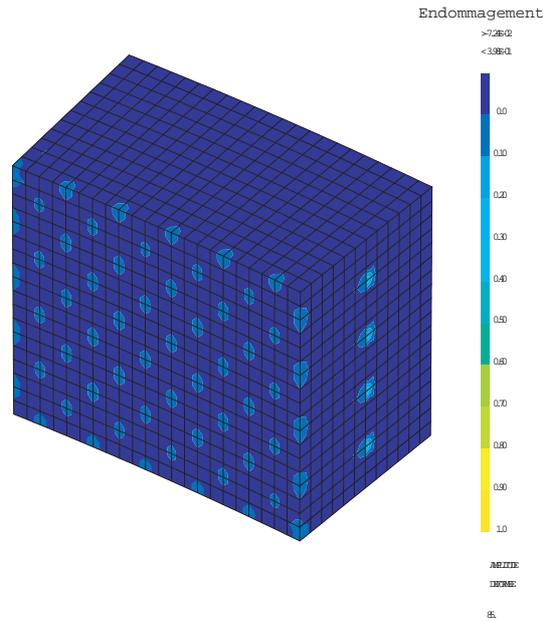


FIG. 3.26 – Profil d’endommagement de PACE 1450 lors de la mise en charge du RUN4 pour le maillage fin.

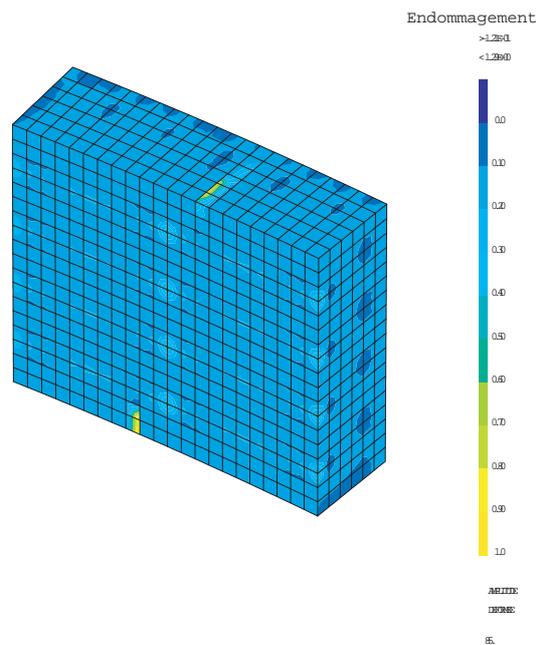


FIG. 3.27 – Profil d’endommagement en coupe de PACE 1450 à la rupture pour le maillage fin.

En raison de la symétrie, uniquement le quart de la maquette est modélisé. Le maillage utilisé est donné dans la figure 3.28 avec 17414 éléments cubiques à 8 nœuds. Afin de représenter au mieux la

	σ_{max}^+ (MPa) (maillage grossier)	σ_{max}^+ (MPa) (maillage fin)
100% de précontrainte	0,47	2,82
RUN0	0,11	0,32
RUN1	0,35	2,95
RUN2	0,25	2,44
RUN3	0,86	2,07

TAB. 3.8 – Valeurs maximales des contraintes pour les deux maillages.

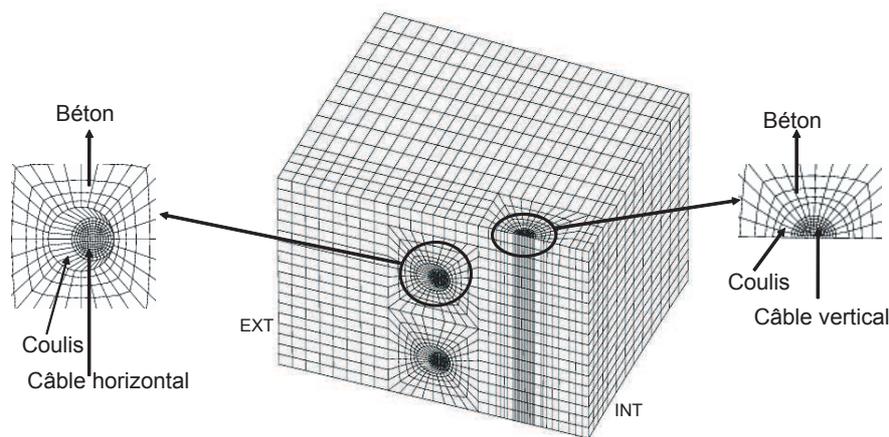


FIG. 3.28 – Maillage utilisé pour le quart de la maquette PACE-1450-EXP.

mise en place des câbles horizontaux sous tension, les éléments fins les représentant sont en contact avec les éléments béton. Là encore, dans les essais, le coulis n'est pas présent mais doit être modélisé en éléments fins pour assurer la continuité. Il n'a pas été possible de faire tourner le calcul avec un maillage plus fin pour voir l'influence de la discrétisation spatiale car nous étions déjà à la limite des 2Go de RAM disponible sur les serveurs de calculs en 32 bits.

Dans un premier temps, la simulation est réalisée avec le modèle d'endommagement seul (Mazars (1984)) afin de comparer les deux approches. Puis, le VSR est calculé avec le modèle élasto-plastique endommageable présenté dans le chapitre 2 pour confronter le modèle à une application pré-industrielle et montrer si l'introduction de la plasticité dans la relation constitutive de l'endommagement change le mode mécanique de dégradation. Les figures 3.29 et 3.30 montrent l'évolution de la pression (chargement) en fonction du déplacement d'un point situé sur la face interne du volume (similaire pour du calcul avec le câble filaire) avec respectivement le modèle d'endommagement seul et le modèle complet (plasticité et endommagement). Ces courbes peuvent aussi être divisées en huit

étapes correspondant aux différents chargements comme pour les figures 3.18 et 3.19.

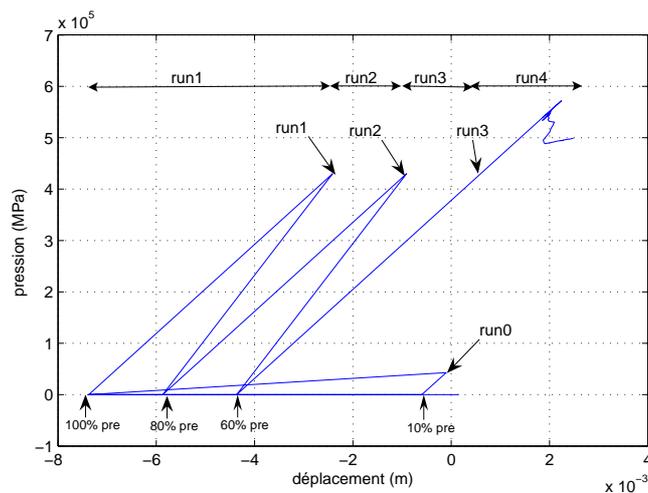


FIG. 3.29 – Evolution du déplacement en fonction de la pression interne avec le modèle d'endommagement seul.

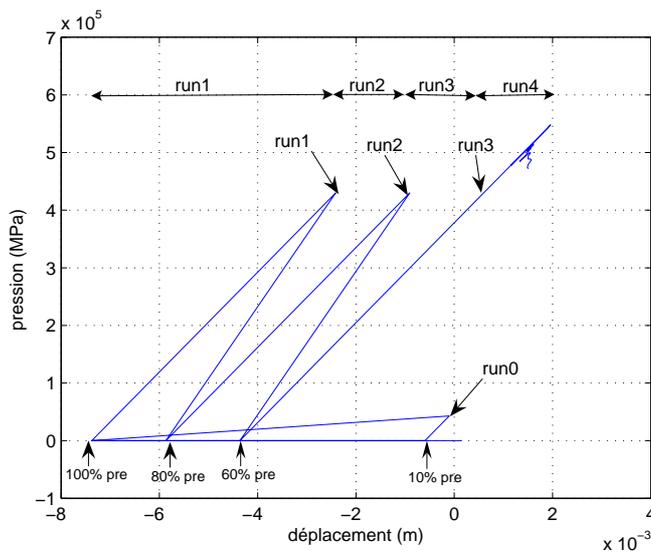


FIG. 3.30 – Evolution du déplacement en fonction de la pression interne avec le modèle élasto-plastique endommageable .

Après la mise en tension des câbles (100% de précontrainte), nous pouvons remarquer une localisation de l'endommagement autour des câbles de précontrainte, aussi bien les câbles horizontaux que le câble vertical avec le modèle d'endommagement (voir la figure 3.31).

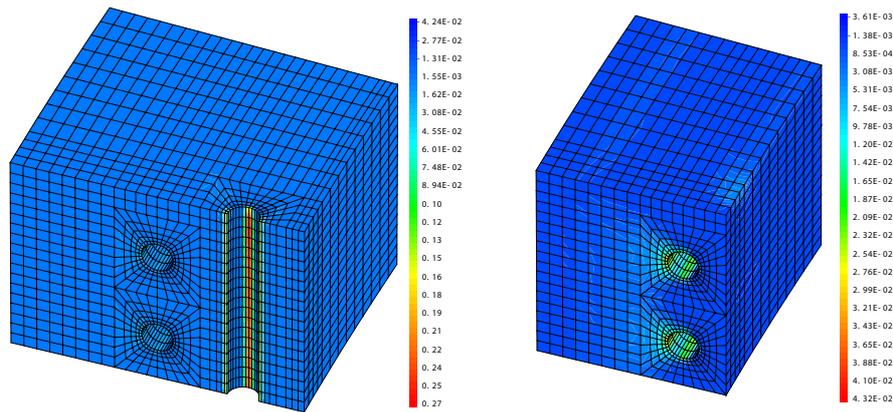


FIG. 3.31 – Profils d’endommagement dans le quart de la maquette (gauche) et dans une coupe après la mise en précontrainte (droite). Modèle d’endommagement seul.

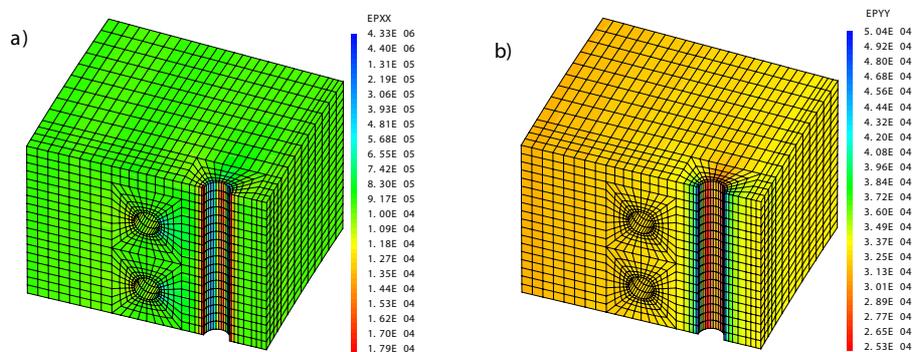


FIG. 3.32 – Profils de déformation ε_{xx} (a) et ε_{yy} (b) dans le quart de la maquette après la mise en précontrainte. Modèle d’endommagement seul.

Même si l’endommagement est présent autour des deux types de câbles, l’endommagement autour des câbles horizontaux reste très faible (0,04) comparé à celui autour du vertical (0,27).

Le premier est dû aux effets de courbure qui créent des efforts horizontaux repris par le coulis et transmis au béton d’où l’endommagement. Une valeur plus faible du module d’Young du coulis diminuera encore davantage cet endommagement en diminuant les efforts transmis directement par traction au béton. L’endommagement autour du câble vertical est dû aux efforts de compression par réaction sur les bords. Ces efforts dans la direction Y entraînent par effet d’arc autour de l’inclusion une élongation sur le plan de symétrie de PACE dans la direction X et une forte compression à cause de l’inclusion rigide au droit du câble, ce qui entraîne par effet de Poisson une élongation selon X (voir la figure 3.32). La figure 3.33 propose une comparaison des profils d’endommagement du modèle

isotrope simple avec celui du modèle élasto-plastique endommageable après la mise en précontrainte. Les deux profils sont identiques, néanmoins la valeur maximale de l'endommagement (0,35) obtenue par la loi de comportement complète est plus grande que celle (0,27) du modèle Mazars. Alors, la simulation avec le modèle élasto-plastique endommageable semble être plus pénalisante. Ceci peut être expliqué par le fait que le modèle d'endommagement sans plasticité représente mal les effets de confinement dans le béton (voir le test triaxial dans le chapitre 2).

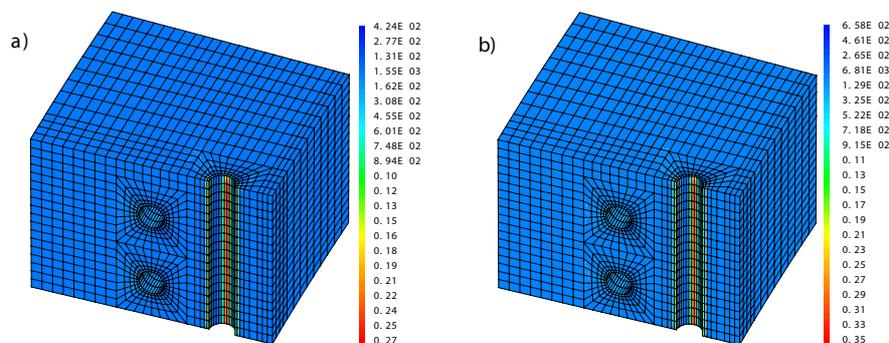


FIG. 3.33 – Profils d'endommagement après la mise en précontrainte. (a) Modèle de Mazars et (b) modèle élasto-plastique endommageable.

A la suite de la mise en précontrainte, l'endommagement n'évolue plus pendant les RUN0,1,2 et un comportement linéaire (non élastique) est dominant. Puis, un comportement non linéaire dû au développement de l'endommagement apparaît aux RUN3 et 4. Contrairement à l'approche filaire, l'endommagement augmente très légèrement au RUN3, mais n'est pas suffisamment significatif pour engendrer une non linéarité sur la réponse globale de la structure. Le profil d'endommagement au pic d'effort est montré sur la figure 3.34 avec les deux modèles.

Le déchargement partiel observé sur les courbes des figures 3.29 et 3.30 peut être expliqué par l'ouverture de la macrofissure en zone frontière du câble vertical. La fin du RUN4 est obtenue par pilotage par longueur d'arc. Au vu de ces résultats, on peut conclure que le niveau de chargement du RUN4 ne pourra pas être atteint, car la maquette rompra avant. Les figures 3.35 et 3.36 illustrent l'évolution des profils d'endommagement après le pic et jusqu'à rupture. Elles montrent clairement que la fissuration s'amorce et se propage à partir du câble vertical. Toutefois, la simulation du quart du VSR avec le modèle de Mazars présente la rupture en mode I. En revanche, le modèle plastique endommageable produit un mode mixte de rupture.

Les résultats montrent que la contrainte limite (2,1 MPa) est légèrement dépassée pour le niveau de précontrainte maxi (2,26 MPa) avec le modèle d'endommagement seul et elle est inférieure 2,08 MPa à la contrainte limite avec le modèle élasto-plastique endommageable (tableau 3.9).

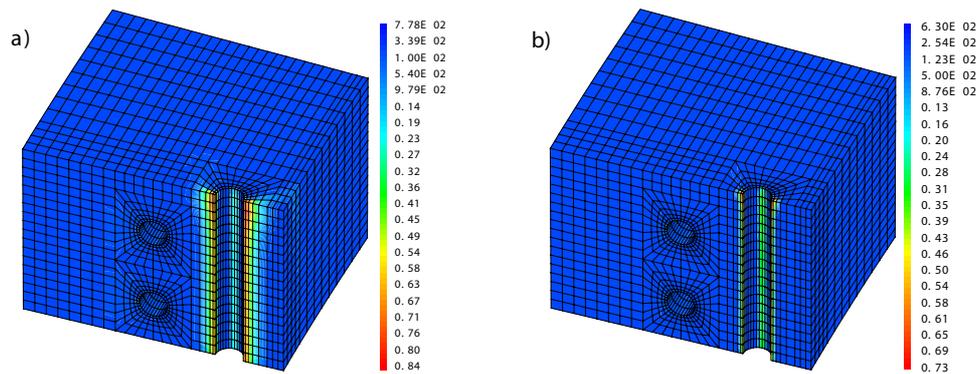


FIG. 3.34 – Profils d’endommagement de PACE-1450-EXP au pic. (a) Modèle de Mazars et (b) modèle élasto-plastique endommageable.

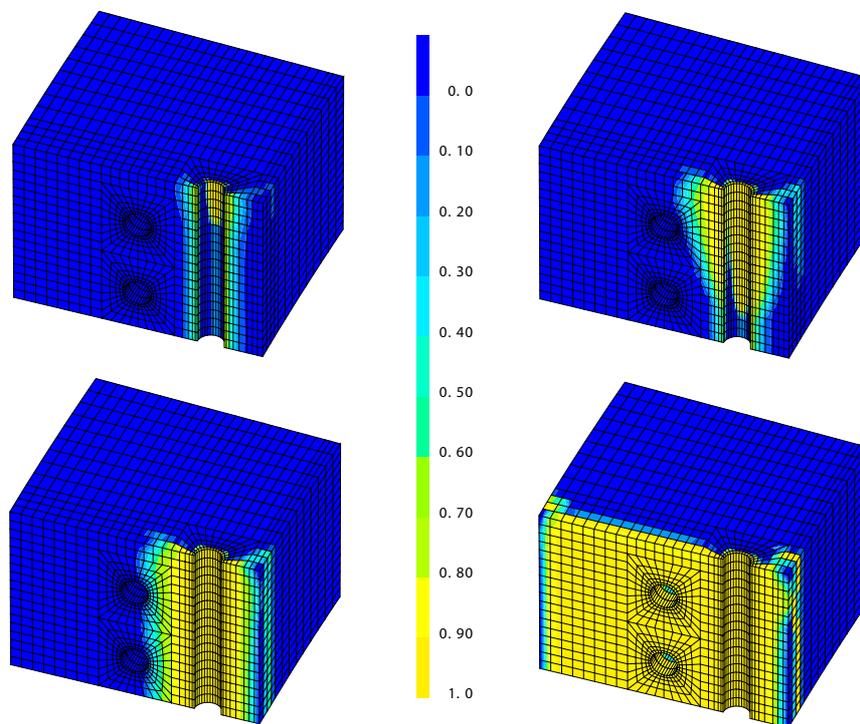


FIG. 3.35 – Profils d’endommagement de PACE 1450 lors de la mise en charge du RUN4 pour différents niveaux de chargement avec le modèle d’endommagement seul.

3.3 Conclusion

Nous avons vérifié dans ce chapitre la capacité et les performances du modèle elasto-plastique endommageable à reproduire le comportement structurel du béton.

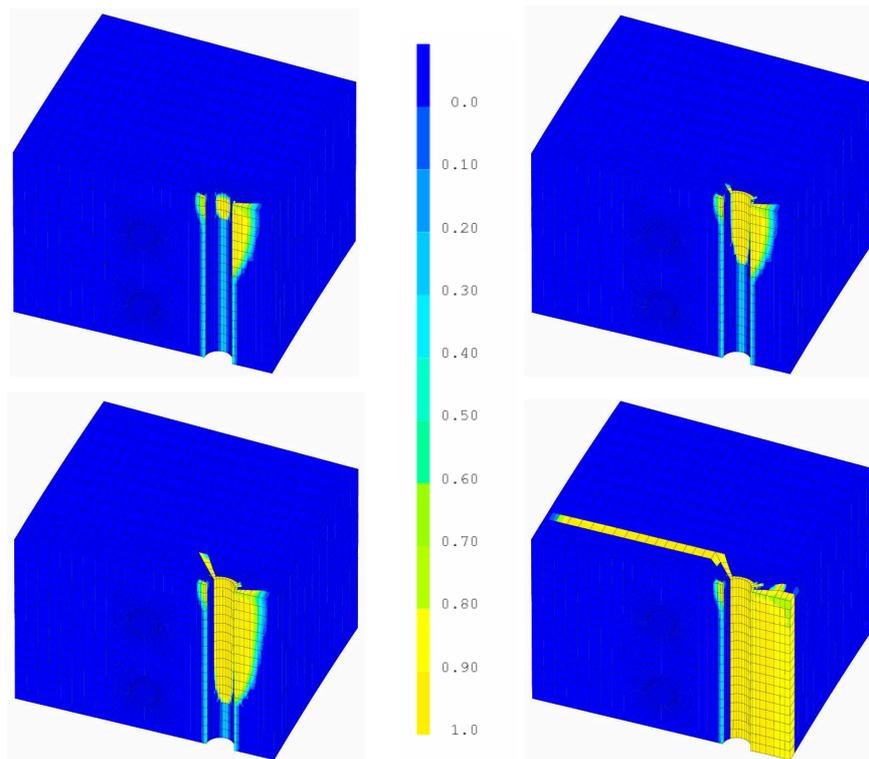


FIG. 3.36 – Profils d’endommagement de PACE 1450 lors de la mise en charge du RUN4 pour différents niveaux de chargement avec le modèle élasto-plastique endommageable.

	σ_{max}^+ (MPa) (End.)	σ_{max}^+ (MPa) (End. + plast.)
100% de précontrainte	2,26	2,08
RUN0	0,31	0,31
RUN1	0,71	0,7
RUN2	0,55	0,55
RUN3	1,04	1,12

TAB. 3.9 – Valeurs maximales des contraintes correspondant à différents chargements avec le modèle d’endommagement seul et le modèle complet.

Pour l’essai structurel classique (poutre en flexion trois points), la loi de comportement est capable de représenter la réponse du matériau, sous réserve d’utiliser le modèle régularisé, associé à un paramètre non local c adapté. Toutefois, la simulation avec le modèle gradient s’est heurtée aux limitations des

ressources informatiques disponibles pour les grandes structures.

La simulation de la poutre continue en béton armé de grande hauteur a permis de mettre en évidence les améliorations apportées par l'ajout de la plasticité à la loi d'endommagement. Le mode de rupture est correctement simulé et le chargement ultime obtenu est cohérent avec les résultats expérimentaux. Avec les deux modèles d'endommagement scalaire, la rupture est en mode I. Par conséquent, le chargement ultime est sous-estimé.

Concernant la simulation des essais (PACE-1450-EXP), nous pouvons constater les points suivants :

- Le calcul met en évidence l'importance des câbles de précontrainte (et des aciers passifs) dans la simulation de la rupture. Alors que pour la modélisation 1D, la représentation filaire du câble vertical ne jouait pas son rôle d'inclusion et donc d'amorçage de la fissuration, la représentation volumique montre clairement que la fissuration s'amorce et se propage à partir du câble vertical.
- L'évolution des contraintes maximales de traction lors des différents RUNs suit le niveau de chargement structurel. Ceci n'était pas le cas dans la représentation filaire, car des phénomènes de concentration de contrainte apparaissaient en fonction de la finesse du maillage et du mode d'introduction des efforts sur les éléments en béton. La représentation volumique permet de donner une surface de contact physique, entre le béton et le câble, alors qu'elle était purement numérique (taille des éléments) dans la représentation filaire.
- La dépendance forte de la réponse à la finesse du maillage a mis en évidence la nécessité d'utiliser une approche régularisée. Néanmoins, dans les conditions actuelles, la taille de la structure rend difficilement applicable la méthode, car elle aboutit à des maillages trop fins pour être raisonnablement utilisables (temps de calcul, capacité des machines...). L'étude non locale reste donc à réaliser.
- L'étude comparative entre le modèle d'endommagement et le modèle élasto-plastique d'endommagement a confirmé les remarques précédemment énoncées : le modèle de Mazars ne représente que le mode I de fissuration et l'introduction de la plasticité peut changer le mode de rupture global de la structure dépendant du niveau de confinement. Ceci doit être vérifié en non local.

Ces observations nécessitent une validation expérimentale, cela commencera bientôt, afin de valider le rôle des câbles de précontraintes, de leur méthode de modélisation et aussi les lois de comportement pour le béton.

Chapitre 4

Modélisation non locale et effets de bord

Sommaire

4.1	Introduction	108
4.2	Modèles micromécaniques	110
4.2.1	Milieu infini élastique avec deux inclusions circulaires	110
4.2.2	Milieu semi-infini avec une seule inclusion	112
4.2.3	Généralisation du problème - milieu élastique semi-infini avec n inclusions circulaires	115
4.3	Modèle d'endommagement non local intégrale classique et modification en 1D	118
4.3.1	Modèle non local intégrale	118
4.3.2	Modification du modèle non local intégrale	120
4.3.3	Application (1D) - barre d'Hopkinson en traction	123
4.4	Modèle modifié 2D	127
4.4.1	Formulation non locale	127
4.4.2	Plaque en traction simple	128
4.4.3	Effet d'échelle	130
4.5	Conclusion	140

4.1 Introduction

Les modèles régularisés d'endommagement montrent leurs efficacités à simuler les développements de fissures à l'intérieur d'une structure, suffisamment loin de ses surfaces libres. Cependant, l'amorçage de la fissure se fait très souvent à partir d'un bord libre. Il est prévisible que l'effet de bord doit avoir une certaine influence sur la condition de l'amorçage de la fissure, car le développement de la zone de microfissuration est diminué lorsque la fissure s'amorce à proximité du bord libre (Duan *et al.* (2006)).

Bazant (1990) a justifié la non localité de l'endommagement en se basant sur des arguments micromécaniques qui tiennent compte des interactions et de l'évolution des microfissures. On peut penser que ces interactions sont différentes proche du bord libre, comparées à celles observées dans le matériau suffisamment loin de ce bord. Or, ceci n'est pas pris en considération dans les formulations actuelles de l'endommagement non local gradient ou intégrale. Les effets de bord sont parmi les questions encore en suspens dans le cadre de la modélisation avec les modèles d'endommagement non locaux. Ceux-ci sont généralement ignorés ou arbitrairement traités. Dans le modèle intégrale, la formulation non locale est pénalisée et normalisée proche du bord (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987). Dans les modèles non locaux avec gradient, les composantes normales des variables régularisées sont contraintes d'être nulle sur le bord. De plus, les conditions de bord dans les modèles gradients sont les mêmes que celles induites par l'axe de symétrie. Du point de vue de l'interaction entre les défauts, ce n'est pas cohérent. Il est difficile d'admettre que l'interaction entre les défauts et une surface libre est la même que l'interaction entre les défauts dans un solide infini.

Ce chapitre a pour but de fournir un aperçu sur les effets de bord induits par la non localité, et de proposer des modifications de la formulation non locale dans le modèle intégral.

Nous allons commencer par quelques considérations générales basées sur des arguments micromécaniques similaires à ceux proposés par Bazant et montrer comment les interactions sont modifiées proche de la surface libre d'un solide (paragraphe 4.2).

Une étude critique des formulations non locales classiques est présentée au paragraphe 4.3.

Ensuite, le quatrième paragraphe propose de nouveaux modèles d'endommagement non locaux dans le cadre unidimensionnel, dans lesquels l'évolution des fonctions poids due aux interactions non locales est modifiée proche du bord libre. Les réponses des différentes formulations non locales classiques et modifiées proche du bord sont discutées, à partir d'un test de traction dynamique unidimensionnelle (barre d'Hopkinson).

Dans le paragraphe 4.4, une extension de la formulation non locale modifiée en deux dimensions est présentée. Les améliorations apportées par cette modification sont mises en évidence au travers de plusieurs applications : plaque en traction simple contenant des défauts dans différents cas et l'analyse des effets d'échelle sur des poutres homothétiques - entaillées et non entaillées - en flexion trois points.

Les comparaisons avec le modèle d'endommagement non local classique permettront de mieux juger la pertinence et l'originalité de notre proposition.

4.2 Modèles micromécaniques

Nous considérons dans la première partie de l'étude, un milieu constitué d'une matrice élastique linéaire isotrope (E_0, ν_0) dans laquelle existe un réseau de microfissuration répartie de façon aléatoire. Ces microfissures sont causées par un chargement extérieur donné. Nous supposons que le milieu étudié est suffisamment grand et que les fissures sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, pour pouvoir les assimiler à des inclusions circulaires de rigidité nulle. Nous cherchons à écrire l'évolution de la déformation équivalente du milieu homogène équivalent, sollicité par un état de contrainte σ_∞ . Le raisonnement ci-dessous étant essentiellement qualitatif, nous pourrions prendre σ_∞ isotrope pour fixer les idées.

4.2.1 Milieu infini élastique avec deux inclusions circulaires

Considérons d'abord le cas très simplifié d'un milieu élastique décrit sur la figure 4.1. Il contient deux inclusions circulaires de rigidité nulle. Ces deux inclusions notées S_1 et S_2 sont respectivement de diamètre a_1 et a_2 . Leur centre est situé à une distance r l'un de l'autre qui est supposée très grand par rapport aux diamètres a_1 et a_2 . En exploitant le principe de superposition dans un milieu élastique linéaire (Kachanov (1987)), il est possible de décomposer ce problème en deux sous-problèmes comme suit :

- Sous-problème I : Le solide est considéré sans aucune inclusion et chargé avec une force de traction $-\sigma_\infty$.
- Sous-problème II : Le solide est sans aucune contrainte extérieure, avec les deux inclusions qui sont chargées par une pression $P_1 = P_2 = -\sigma_\infty$, afin d'éliminer les contraintes sur les contours des deux inclusions calculées dans le sous-problème I.

Considérons maintenant le sous-problème II. De nouveau, nous pouvons appliquer le principe de superposition sous la forme présentée dans la figure 4.2.

Dans le sous-problème II-1, l'inclusion S_1 est seulement considérée. Elle est chargée par une pression inconnue \overline{P}_1 qui cause sur l'interface imaginaire de S_2 une pression p_{21} . Il en est de même pour le sous-problème II-1. Nous pouvons écrire par superposition :

$$\begin{aligned} P_1 &= \overline{P}_1 + p_{12} \\ P_2 &= p_{21} + \overline{P}_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour la simplicité, nous avons gardé seulement les forces normales (pression) dans notre développement bien que des forces normales et tangentielles soient développées dans les inclusions dans les sous-problèmes II-1 et II-2. La relation d'interaction entre les pressions est dérivée d'une analyse standard en élasticité. A une distance donnée r_i du centre de l'inclusion S_i , la pression a la forme

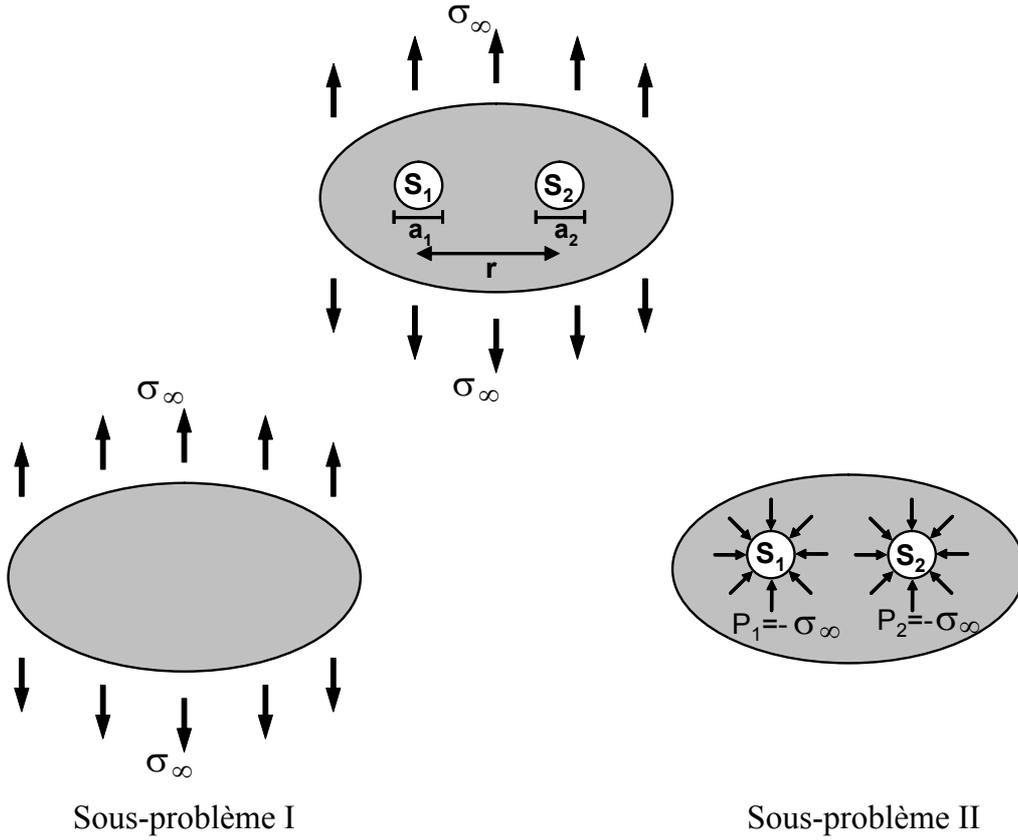


FIG. 4.1 – Méthode de superposition pour un solide avec deux inclusions circulaires.

suivante (Pijaudier-Cabot *et al.* (2004)) :

$$p_{12} \approx -\bar{P}_2 \times \frac{a_2^2}{r_2^2} \quad \text{et} \quad p_{21} \approx -\bar{P}_1 \times \frac{a_1^2}{r_1^2} \quad (4.2)$$

en posant $l_{12} \propto a_2/r$ et $l_{21} \propto a_1/r$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_{12}^2 \\ -l_{21}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

\bar{P}_1 et \bar{P}_2 sont obtenues en résolvant le système d'équations (4.3) :

$$\bar{P}_1 = -\sigma_\infty \left(\frac{1 + l_{12}^2}{1 - l_{21}^2 l_{12}^2} \right) \quad \text{et} \quad \bar{P}_2 = -\sigma_\infty \left(\frac{1 + l_{21}^2}{1 - l_{21}^2 l_{12}^2} \right) \quad (4.4)$$

Puisque les inclusions (ou vides) sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, $r \gg a_1, a_2$ et les pressions correspondantes sont supposées constantes sur les surfaces intérieures des inclusions. Les équations (4.4) peuvent alors être simplifiées :

$$\bar{P}_1 \approx -\sigma_\infty (1 + l_{12}^2) \quad \text{et} \quad \bar{P}_2 \approx -\sigma_\infty (1 + l_{21}^2) \quad (4.5)$$

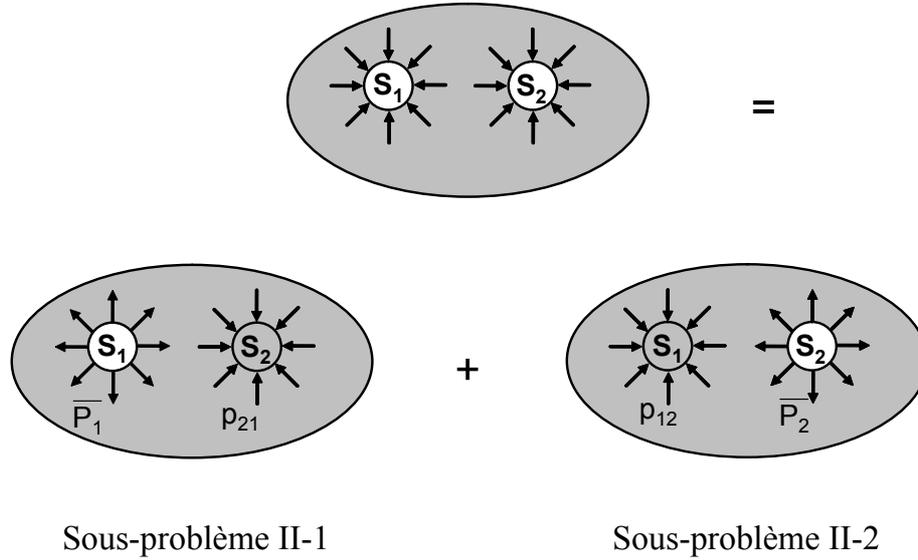


FIG. 4.2 – Méthode de superposition appliquée au sous-problème II.

Le champ de contrainte résultant dans le solide au point x du milieu isotrope infini est la somme de la contrainte à l'infini (sous-problème I), de la contrainte due à la pression à l'intérieur de l'inclusion S_1 (sous-problème II-1) et de la contrainte due à la pression à l'intérieur de l'inclusion S_2 (sous-problème II-2).

$$\sigma(x) \approx \sigma_\infty (1 + l_{x1}^2 + l_{x2}^2) \quad (4.6)$$

où $l_{x1} \propto a_1/r(x, 1)$, $l_{x2} \propto a_2/r(x, 2)$. $r(x, 1)$ et $r(x, 2)$ sont respectivement les distances entre le point x et l'inclusion 1 et, entre le point x et l'inclusion 2.

4.2.2 Milieu semi-infini avec une seule inclusion

Nous considérons maintenant que le solide élastique présenté dans le paragraphe précédent est scindé en deux morceaux (Figure 4.3). Nous supposons aussi que l'axe Γ qui sépare les deux morceaux est

situé symétriquement par rapport aux deux inclusions S_1 et S_2 . Nous nous intéressons ici seulement au demi-espace contenant l'inclusion S_1 . L'axe Γ devient alors un bord libre. Afin de déterminer les champs de contraintes, nous utilisons la même méthode de superposition approchée, mais maintenant, nous prenons en considération la présence d'une surface libre Γ .

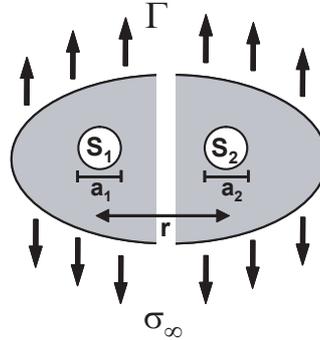


FIG. 4.3 – Milieu semi infini contenant une seule inclusion.

Nous cherchons à calculer les interactions entre la surface Γ et l'inclusion S_1 . Ce nouveau problème est décomposé en deux sous-problèmes (Figure 4.4). Dans le sous-problème I, le champ de contrainte à l'infini est maintenant supposé être tel que les conditions de surface libre Γ sont vérifiées. Nous avons besoin maintenant de superposer à ce champ de contrainte un autre champ, défini comme le sous-problème II, qui prend en compte la présence de l'inclusion. Mais, ce nouveau champ de contrainte ne doit pas modifier l'état de contrainte sur la surface libre Γ . Afin de satisfaire cette condition, on peut imaginer que les deux morceaux semi-infinis contenant les deux inclusions S_1 et S_2 , sont collés de nouveau. Pour annuler les effets des interactions le long de la ligne, il faut appliquer dans l'inclusion S_2 une pression opposée à celle à l'intérieur de l'inclusion S_1 . L'expression de la pression à l'intérieur de l'inclusion S_1 est similaire de celle donnée dans l'équation (4.1) :

$$P_1 = \bar{P}_1 + p_{12} \quad \text{et} \quad p_{12} \approx \bar{P}_1 \times \frac{a_1^2}{r^2} \quad (4.7)$$

En tenant compte des mêmes simplifications que dans le cas d'un milieu solide infini avec deux défauts, nous aurons, pour la pression \bar{P}_1 l'expression approchée suivante :

$$\bar{P}_1 \approx -\sigma_\infty (1 - l_{12}^2) \quad (4.8)$$

Le champ de contrainte résultant dans le solide au point x du milieu isotrope semi-infini, est maintenant :

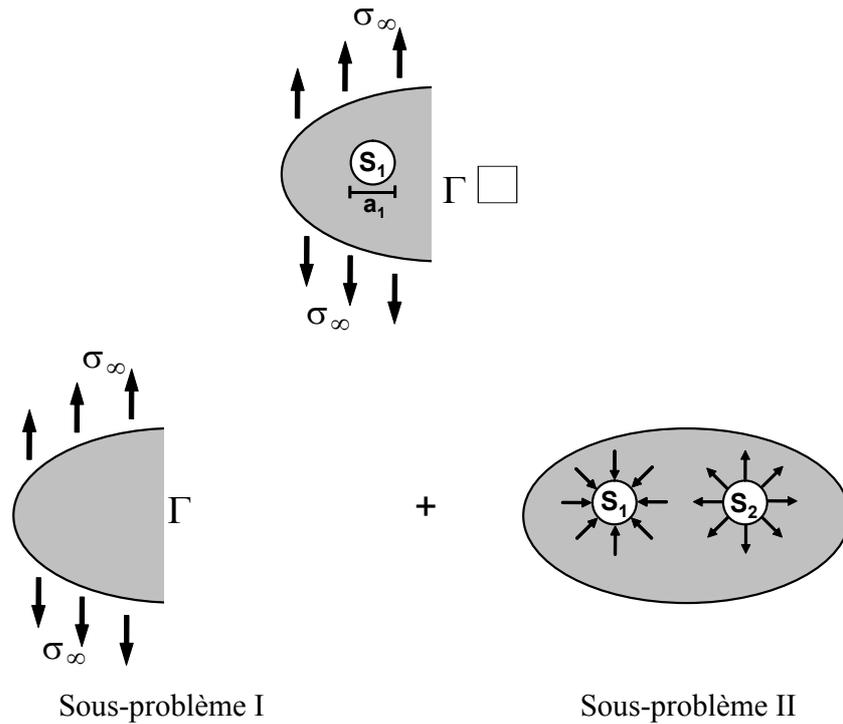


FIG. 4.4 – Méthode de superposition pour un solide avec une seule inclusion circulaire.

$$\sigma(x) \approx -\sigma_\infty (1 + l_{x1}^2 - l_{x2}^2) \quad (4.9)$$

Sur la surface Γ , le vecteur de contrainte correspondant aux effets des inclusions S_1 et S_2 est tel que la composante normale à la surface est exactement nulle. Ce cas peut également être déduit de la condition de symétrie. La somme des composantes tangentielles le long de la surface libre Γ , supposée être infiniment longue, s'annule aussi (mais c'est pour les champs de contrainte dûs aux inclusions pris séparément).

Par conséquent, les conditions de surface libre dans la superposition de ces nouveaux sous-problèmes I et II est *approximativement* vérifiée. Notons que dans le nouveau sous-problème II, le milieu élastique est considéré comme infini et le champ de contrainte résultant doit s'annuler sur la position imaginaire de la surface libre. En retour, il génère un état de contrainte dans le solide semi-infini considéré, qui est dû à l'interaction avec les inclusions S_1 et S_2 . Ce cas est équivalent à l'interaction entre la surface libre Γ et l'inclusion S_2 .

4.2.3 Généralisation du problème - milieu élastique semi-infini avec n inclusions circulaires

L'extension pour les cas où un milieu semi-infini contient n inclusions circulaires S_i ($i = 1$ à n), de diamètre a_i , et qui sont arbitrairement distribuées dans la matrice élastique, quel que soit les conditions aux limites sur la frontière du solide, suit les mêmes principes et les mêmes hypothèses des paragraphes précédents (Figure 4.4). Comme dans le cas d'un milieu infini avec deux inclusions (paragraphe 4.2.1), le chargement à l'infini σ_∞ est d'abord transformé en une distribution de contrainte normale $P_i = -(\sigma_\infty \cdot n_i)$ à l'intérieur de chaque inclusion S_i , où n_i est le vecteur normal au contour de chaque surface S_i . L'effet de la pression à l'intérieur de l'inclusion S_j sur l'inclusion S_i est écrit comme la somme de p_{ij} ($i \neq j$), où p_{ij} représente la pression normale à la position imaginaire de S_i qui est produite par S_j :

$$p_{ij} \propto -\overline{P}_j \times \frac{a_j^2}{r_{ij}^2} \quad (4.10)$$

où r_{ij} est la distance entre les centres des inclusions i et j , et \overline{P}_j est la pression agissante à la surface de chaque inclusion j . Cependant, cette pression produit une traction sur la surface libre Γ . Comme dans le cas d'un milieu semi-infini avec une inclusion (paragraphe 4.2.2), cette force doit s'annuler par la présence des inclusions S_k ($k = 1$ à n), localisées symétriquement au bord libre considéré, sollicitées par une pression opposée P_k ($P_k = -P_i$) et de diamètre a_k égal à a_i . Cette pression génère une pression normale p_{ik} sur la position imaginaire de S_i :

$$p_{ik} \propto -\overline{P}_k \times \frac{a_k^2}{r_{ik}^2} \quad (4.11)$$

où r_{ik} est la distance entre les centres des inclusions i et k , et \overline{P}_k est la pression agissante à la surface de chaque inclusion k . Notons que les deux équations précédentes ((4.10) et (4.11)) sont valables dans le cas des inclusions circulaires de faible dimension ou pour des petites fissures en deux dimensions, à condition qu'elles soient suffisamment éloignées l'une de l'autre.

La solution du problème à n inclusions est trouvée par superposition de n problèmes où chaque inclusion est considérée seule en milieu semi-infini et sollicitée par une distribution de contrainte normale inconnue :

$$P_i = \overline{P}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n p_{ij} + \sum_{k=1}^n p_{ik} \quad (4.12)$$

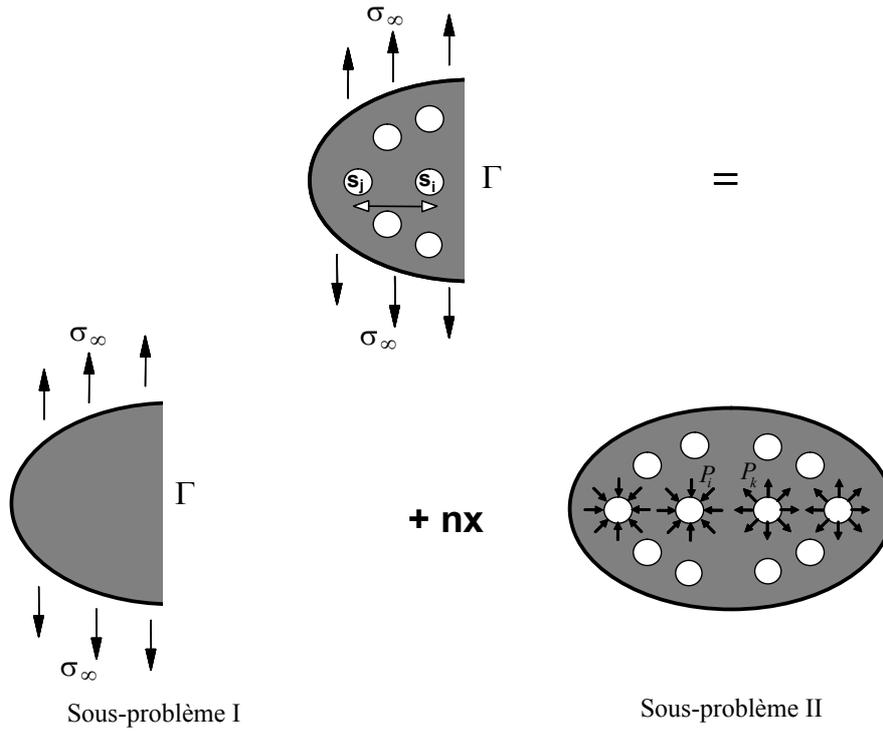


FIG. 4.5 – Méthode de superposition pour un solide avec n inclusions circulaires.

qui peut être écrite :

$$P_i = \bar{P}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n (l_{ij}^2 \times \bar{P}_i) + \sum_{k=1}^n (l_{ik}^2 \times \bar{P}_k) \quad (4.13)$$

avec $l_{ij}^2 \propto \frac{a_j}{r_{ij}}$ et $l_{ik}^2 \propto \frac{a_k}{r_{ik}}$. Parce que les vides sont suffisamment éloignés les uns des autres, les équations (4.5) et (4.8) peuvent être facilement généralisées en :

$$\bar{P}_i \approx P_i \left(1 + \sum_{j=1(j \neq i)}^n l_{ij}^2 - \sum_{k=1}^n l_{ik}^2 \right) \quad (4.14)$$

Sur le contour Γ_i de chaque vide, nous définissons :

$$\sigma_i = -\bar{P}_i \quad (4.15)$$

qui représente la contrainte volumique qui équilibre les forces normales appliquées à l'intérieur du vide i . Pour plus de simplicité, nous définissons aussi $l_{jj} = 0$. L'équation (4.15) devient alors :

$$\sigma_i = \sigma_\infty \left(1 + \sum_{j=1}^n l_{ij}^2 - \sum_{k=1}^n l_{ik}^2 \right) \quad (4.16)$$

Le champ de contrainte agissant dans le matériau est :

$$\sigma(x_m) = \sigma_\infty(x_m) + \sum_i \sigma_i(x_i) l_{im}^2 + \sum_k \sigma_k(x_k) l_{km}^2 \quad (4.17)$$

où $l_{im}^2 \propto a_i/r_{im}$ et $l_{im}^2 \propto a_i/r_{im} \cdot r_{im}$ et r_{km} sont respectivement les distances entre le point x_m et les centres des inclusions i et k . Nous avons également considéré que la contrainte à l'infini σ_∞ n'est pas nécessairement constante sur le corps (cas d'un chargement non homogène). A cause de la symétrie, nous avons $\sigma_k = -\sigma_i$ et en substituant l'équation (4.16) dans l'équation (4.17), nous obtenons

$$\sigma(x_m) = \sigma_\infty(x_m) + \sum_i \sigma_\infty(x_i) \left(1 + \sum_{j=1}^n l_{ij}^2 - \sum_{k=1}^n l_{ik}^2 \right) (l_{im}^2 - l_{km}^2) \quad (4.18)$$

Dans cette équation, les termes qui contiennent un produit de deux quantités négligeables par rapport à 1 ($l_{ij}^2 l_{im}^2$, $l_{ij}^2 l_{km}^2$, $l_{ik}^2 l_{im}^2$ and $l_{ik}^2 l_{km}^2$) seront négligés devant les autres termes. Notons que l'exposant 2 dans l'équation (4.18) est lié au fait que le problème est à deux dimensions. En 3D, cet exposant sera 3 dans toutes les équations ci-dessus. La contrainte agissant au point x_k due à la contrainte à l'infini se réduit à :

$$\sigma(x_m) \approx \sigma_\infty(x_k) + \sum \sigma_\infty(x_i) l_{ij}^2 - \sum \sigma_\infty(x_i) l_{ik}^2 \quad (4.19)$$

Loin de la surface libre, le troisième terme disparaît et nous retrouvons la même équation dérivée par Pijaudier-Cabot *et al.* (2004) qui est très similaire à celle dérivée par Bažant (1994) avec une fonction de l'influence plus simple ici.

Sur le bord du solide, les contraintes dues aux interactions des inclusions ou des fissures s'annulent par la présence des inclusions symétriquement localisées et chargées par une pression opposée. Parce que les interactions disparaissent, on peut conclure que la réponse du matériau doit être locale sur cette surface libre. Proche du bord, l'intensité des termes d'interaction, qui apparaissent dans l'expression de la contrainte, est diminuée (les deuxième et troisième termes de l'équation (4.19)) mais ne s'annule pas. Il y a donc une couche limite dans le solide dans laquelle les interactions augmentent au fur et à mesure qu'on s'éloigne du bord, pour atteindre les interactions obtenues dans le cas d'un milieu infini. Il convient de souligner ici que le schéma des interactions entre vides est approché parce que nous avons considéré des pressions moyennes (les effets de cisaillement sont négligés), et la condition aux limites sur la frontière libre du solide est vérifiée uniquement en moyenne. Certains modèles plus précis pourraient être employés, mais ils ne changeront pas les résultats actuels : les interactions non locales dues à l'interaction entre les défauts (fissures ou vides) doivent disparaître sur la frontière d'un solide fini et augmenter progressivement pour les points situés plus loin de la surface libre.

4.3 Modèle d'endommagement non local intégrale classique et modification en 1D

4.3.1 Modèle non local intégrale

Dans les modèles d'endommagement non locaux, basés sur une formulation intégrale, la déformation locale équivalente ε_{eq} est remplacée par sa moyenne pondérée $\bar{\varepsilon}_{eq}$ (voir chapitre 1) :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \int_{\Omega} \Psi(x - \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

où Ω est le volume de la structure et $\Psi(x - \xi)$ est la fonction poids. La fonction poids dans l'équation (4.20) a les caractéristiques suivantes :

1. C'est une fonction positive, $\Psi(x - \xi) \geq 0$.
2. Elle a sa valeur maximale pour $x = \xi$ (e.g. $r = |x - \xi| = 0$).
3. C'est une fonction décroissante (jusqu'à zéro) avec la distance r . Les interactions non locales sont effectives seulement dans un petit, mais fini, voisinage du point x .

En outre, il est nécessaire que l'opérateur non local ne modifie pas le champ uniforme, c'est-à-dire que si le champ local est uniforme, le champ non local doit aussi être uniforme ($\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}$). Ceci signifie que la fonction poids doit satisfaire la condition normalisée :

$$\int_{\Omega} \Psi(x, \xi) d\xi = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (4.21)$$

Néanmoins, proche du bord, l'intégrale de l'équation (4.21) est pénalisée. Pour cette raison, la formulation non locale normalisée suivante a été proposée par Pijaudier-Cabot et Bažant (1987) :

$$\Psi(x, \xi) = \frac{\Psi_0(x, \xi)}{\Omega_r(x)} \quad \text{avec} \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \Psi_0(x, \xi) d\xi \quad (4.22)$$

où $\Omega_r(x)$ est le volume représentatif et $\Psi_0(x, \xi)$ est la fonction poids de milieu infini qui est souvent prise comme la fonction polynomiale en forme de cloche (bell shaped function Bažant et Ožbolt (1990))

$$\Psi_0(x - \xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|x - \xi\|^2}{R^2}\right) & \text{si } \|x - \xi\| \leq R \\ 0 & \text{si } \|x - \xi\| > R \end{cases} \quad (4.23)$$

ou comme la fonction Gaussienne :

$$\Psi_0(x - \xi) = \exp\left(-\frac{4\|x - \xi\|^2}{l_c^2}\right) \quad (4.24)$$

Dans les deux cas, l_c et R jouent le rôle d'une longueur interne qui contrôle l'interaction spatiale non locale de la déformation.

La fonction poids dans l'équation (4.22), notée ici *RWF*, n'est pas symétrique car généralement, proche de la frontière, $\Psi(x, \xi) \neq \Psi(\xi, x)$.

Une nouvelle formulation non locale symétrique, notée *SLC*, a été récemment proposée par Borino *et al.* (2003)

$$\Psi(x, \xi) = \left(1 - \frac{\Omega_r(x)}{\Omega_\infty}\right) \delta(x, \xi) + \frac{\Psi_0(x, \xi)}{\Omega_\infty} \quad (4.25)$$

où $\delta(x, \xi)$ est la fonction Dirac et $\Psi_0(x, \xi)$ est la fonction poids définie dans l'équation (4.23) ou (4.24). Ω_∞ est le volume représentatif dans le milieu infini de valeur constante. Le premier terme est un terme local qui est seulement activé proche du bord (figure (4.6) gauche), qui s'annule loin du bord ($\Omega_r(x) \rightarrow \Omega_\infty$) où on retrouve la fonction poids originale (équation 4.22). Le deuxième terme dans l'équation (4.25) est le terme non local classique supposé pour un milieu infini (figure (4.6) droite).

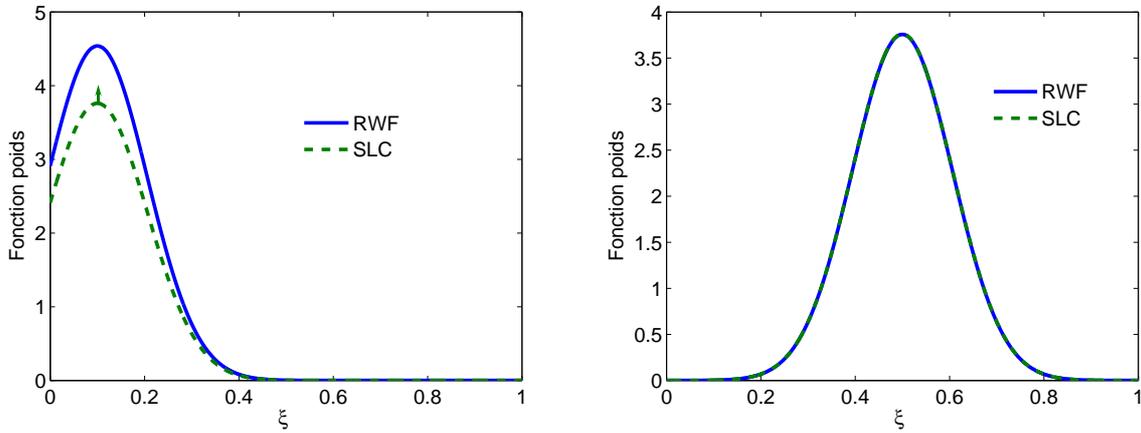


FIG. 4.6 – Comparaison des fonctions poids avec la formulation classique *RWF* et la formulation modifiée *CLS* (Borino *et al.* (2003)) pour un point situé proche du bord (gauche) et loin du bord (droit) dans un milieu unidimensionnel.

La figure 4.7 illustre les deux contributions de la formulation proposée pour une barre unidimensionnelle de longueur fixe avec un état uniforme de l'endommagement. Selon cette formulation modifiée, le calcul de la déformation équivalente non locale peut être reformulé comme suit (Polizzotto (2002)) :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \varepsilon_{eq}(x) + \frac{1}{\Omega_\infty} \int_{\Omega} \Psi_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) (\varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon_{eq}(x)) d\boldsymbol{\xi} \quad (4.26)$$

Le second terme de cette équation est clairement l'interaction non locale calculée comme l'intégrale de la différence entre les valeurs voisines. La déformation équivalente non locale est alors la somme de la déformation équivalente locale et de leurs interactions non locales.

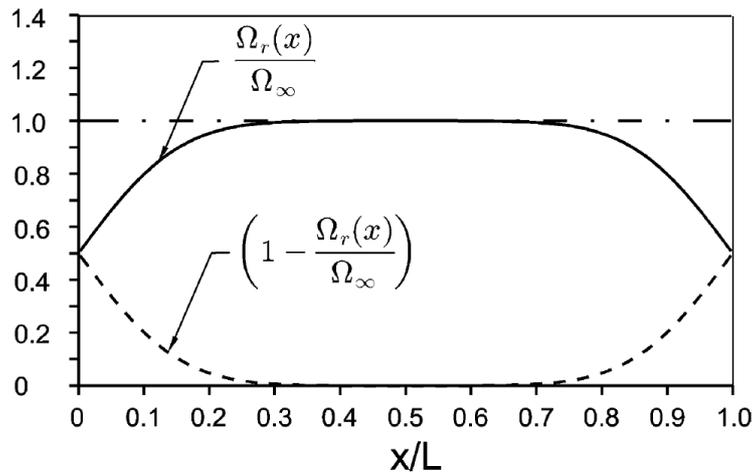


FIG. 4.7 – Diagramme montrant la contribution du premier terme local $\left(1 - \frac{\Omega_r(x)}{\Omega_\infty}\right) \delta(x, \xi)$ et le deuxième terme non local $\frac{\Omega_r(x)}{\Omega_\infty}$ pour une barre unidimensionnelle de longueur L pour l'état uniforme d'endommagement. Résultats obtenus en utilisant une fonction Gaussienne avec comme longueur interne $l_c = 0, 3L$ (d'après Borino *et al.* (2003)).

4.3.2 Modification du modèle non local intégrale

Pour des raisons de simplicité, nous considérons dans un premier temps une barre unidimensionnelle semi-infinie. Le système de coordonnées est tel que l'origine $x = 0$ est à l'extrémité de cette barre. Nous voulons calculer la moyenne non locale au point x situé proche de cette extrémité et incorporer dans la formulation l'effet du bord libre, deux approches sont proposées.

Une première possibilité est directement inspirée des considérations micromécaniques présentées au paragraphe 4.2. La nouvelle fonction poids notée maintenant comme $\Psi^*(x, \xi)$ devient :

$$\Psi^*(x, \xi) = \left(1 - \frac{\Omega_r(x)}{\Omega_\infty} + \frac{\Omega_r(x^*)}{\Omega_\infty}\right) \delta(x, \xi) + \frac{\Psi_0(x, \xi)}{\Omega_\infty} - \frac{\Psi_0(x^*, \xi)}{\Omega_\infty} \quad (4.27)$$

où x est le symétrique de x^* par rapport à l'extrémité (bord) de la barre. L'idée est d'étendre le solide à l'extérieur de la frontière libre avec une barre fictive qui a un état de déformation symétrique par rapport au bord. A chaque point x de la barre, la contribution non locale est l'expression classique (deuxième terme), moins une contribution due au point x^* (troisième terme). Le premier terme est la contribution locale dans cette formulation. Si x est situé exactement sur l'extrémité de la barre, la réponse du matériau est locale, puisque $x = x^* = 0$. Dans ce cas, le premier terme dans l'équation (4.27) vaut 1 ($\Omega_r(x) = \Omega_r(x_*)$) et les deuxième et troisième termes s'annulent. Pour un point suffisamment loin de l'extrémité, la contribution due au point x^* s'annule et cette formulation est parfaitement équivalente à la relation classique (équation (4.22)). La contribution des différents termes de l'équation (4.27) est illustrée dans la figure 4.8 sur une barre unidimensionnelle de longueur fixe L avec un état uniforme d'endommagement.

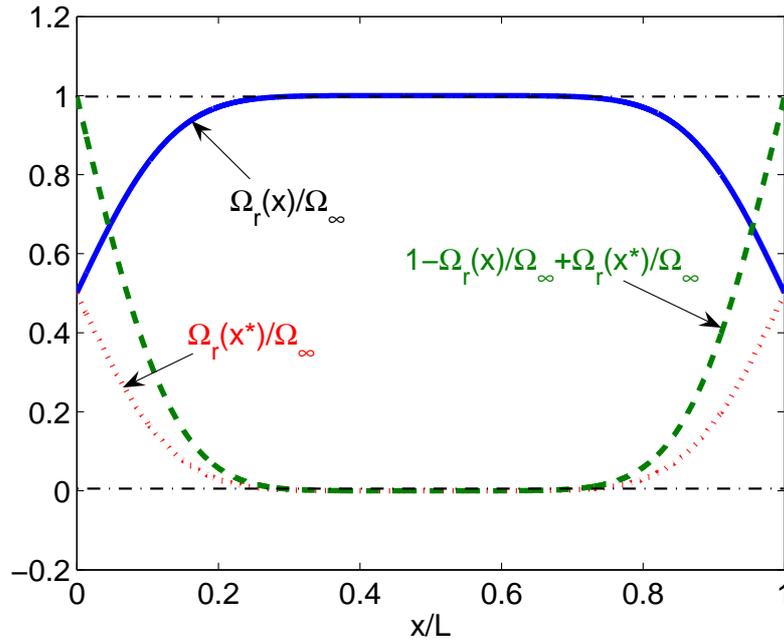


FIG. 4.8 – Diagramme montrant la contribution des différents termes de la fonction poids modifiée (équation (4.27)) pour une barre unidimensionnelle pour un état uniforme d'endommagement. Résultats obtenus en utilisant la Gaussienne (équation (4.24)) avec une longueur interne $l_c = 0,3L$.

La figure 4.9 montre la comparaison des fonctions poids avec la formulation classique *RWF* et la formulation modifiée notée ici *MCLS* (équation (4.27)) pour un point situé proche du bord (gauche) et loin du bord (droite) dans un milieu unidimensionnel.

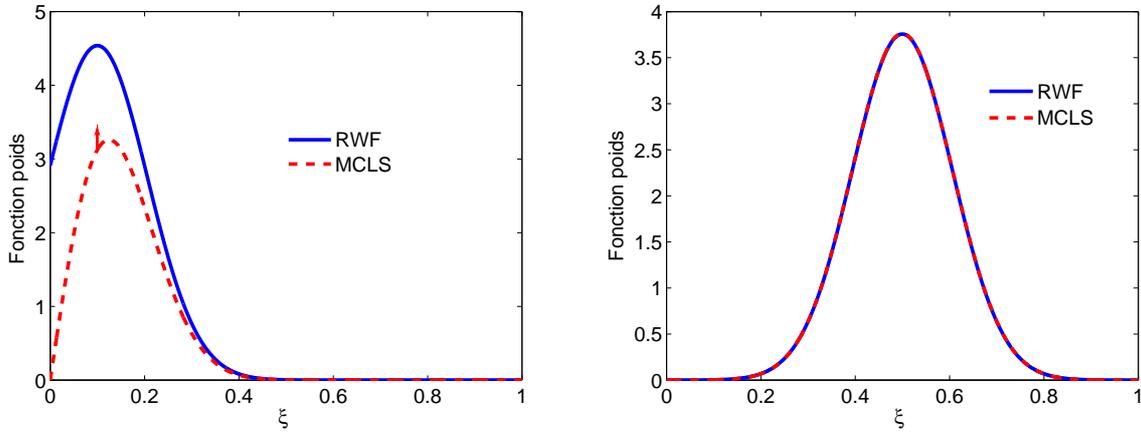


FIG. 4.9 – Comparaison des fonctions poids avec le formulation classique *RWF* (équation (4.22)) et la formulation modifiée *MCLS* (équation (4.27)) pour un point situé proche du bord (gauche) et loin du bord (droite) dans un milieu unidimensionnel.

Une deuxième possibilité étudiée dans ce travail utilise directement la formulation non locale originale de Pijaudier-Cabot et Bažant (1987) (équation (4.22)) dans laquelle une transformation du système de coordonnées, défini dans la fonction poids, est appliquée :

$$\|x - \xi\| = l_c \sqrt{(x - \xi)^2 / a^2} \quad (4.28)$$

où a diminue quand le point x s'approche du bord. a est le minimum entre la longueur interne l_c et la distance du point x à l'extrémité de la barre. Lorsque a est égal à la longueur interne, la formulation originale est retrouvée. Cette fonction poids modifiée est dénotée ici *ERF* et comparée avec la fonction poids classique *RWF* dans la figure 4.10.

Cette formulation alternative est proposée parce que son extension à des géométries $2D$ et $3D$ est très simple à manipuler. La première possibilité définie dans l'équation (4.27) nécessite la définition de la contrepartie symétrique, par rapport au bord du solide d'un point à l'intérieur de la structure (et suffisamment proche du bord). Dans le cas d'une structure en $2D$ avec des coins, par exemple, il existe plusieurs contreparties symétriques à proximité des coins et donc, la formulation n'est pas facile à étendre et à implanter dans un code aux éléments finis.

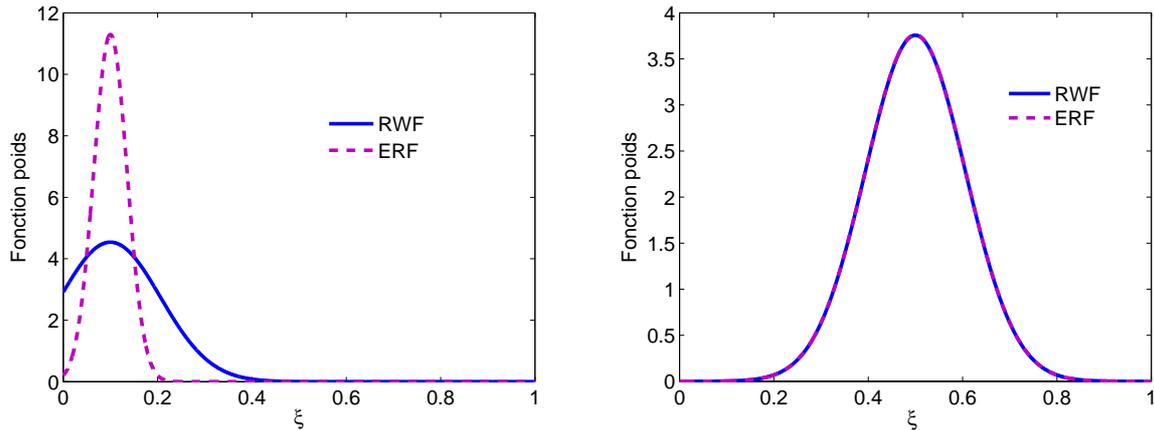


FIG. 4.10 – Comparaison des fonctions poids avec le formulation classique *RWF* (équation (4.22)) et la formulation modifiée *ERF* (équation (4.28)) pour un point situé proche du bord (gauche) et pour un point loin du bord (droite) dans un milieu unidimensionnel.

4.3.3 Application (1D) - barre d'Hopkinson en traction

Afin de comparer les formulations non locales initiales et modifiées, nous considérons un essai de traction dynamique unidimensionnelle (barre d'Hopkinson) présenté sur la figure 4.11. Cet exemple a été élaboré de façon à localiser la rupture proche de l'extrémité de la barre. Cela permet de prendre en considération la modification des interactions non locales dues à la présence du bord libre.

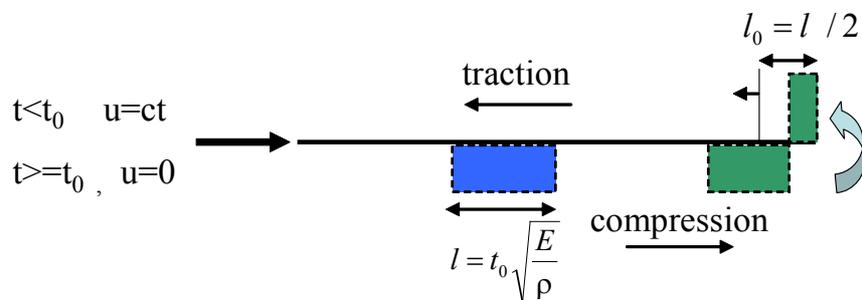


FIG. 4.11 – Principe du test dynamique en traction.

Lorsqu'un déplacement u est appliqué entre le temps $t = 0$ et t_0 sur une des extrémités de la barre, une onde en compression en forme de créneau se propage le long de cette barre. Arrivée au niveau du bord libre, l'onde incidente de compression est réfléchiée pour donner naissance à un créneau de traction. Ce dernier s'ajoute alors au créneau d'onde de compression incident. Si l'amplitude absolue

du créneau de compression est plus élevée que la résistance à la traction, la rupture est amorcée à une distance du bord libre égale à la moitié de la longueur du créneau de compression. En fonction de la durée de l'application du créneau incident, il est possible de choisir le lieu d'amorçage de la rupture dans la barre, plus ou moins proche du bord libre. La figure 4.12 montre la propagation du créneau d'onde à différents instants de calcul.

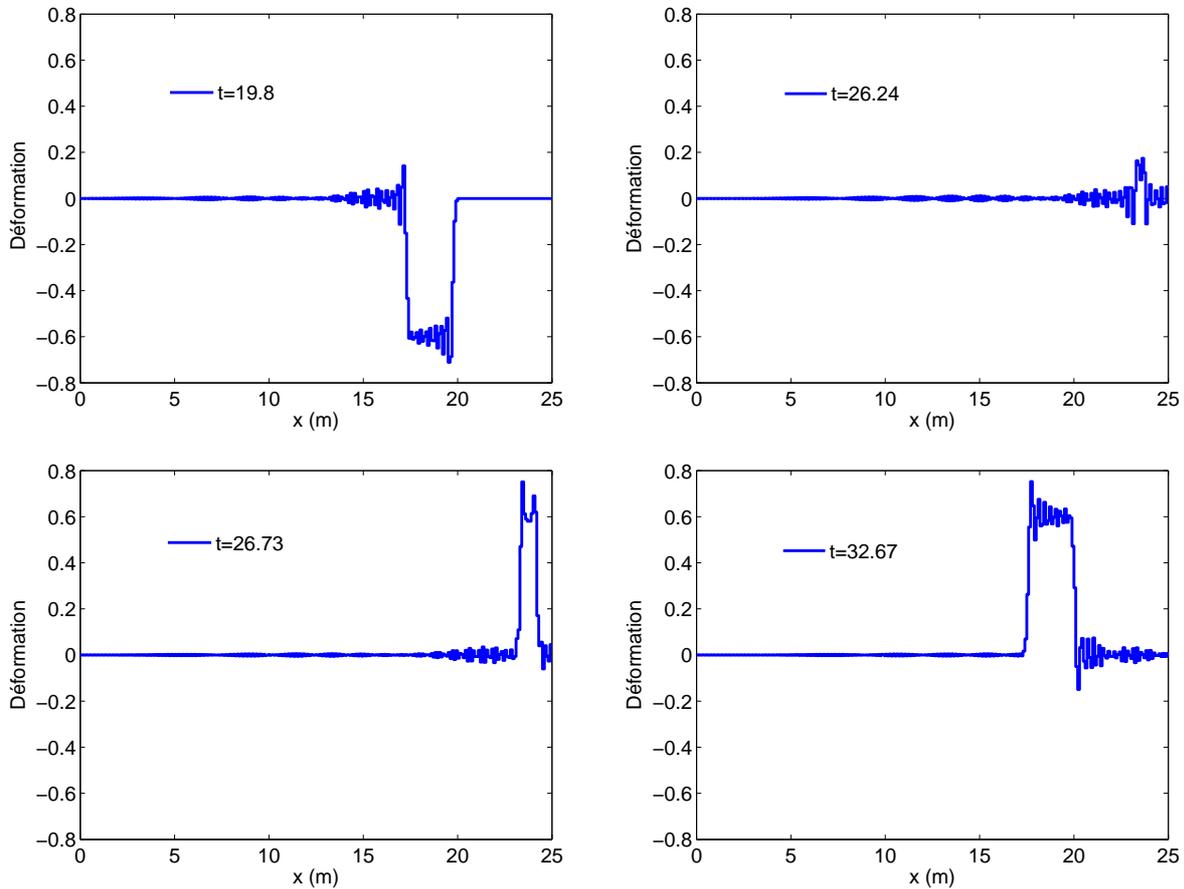


FIG. 4.12 – Propagation du créneau d'onde à différents instants de calcul en l'absence d'endommagement.

Dans notre exemple, la longueur de la barre est de 25 cm et sa section transversale est unitaire. La vitesse imposée sur l'extrémité gauche de la barre est prise égale à $c = 2,5$ mm/s. Les paramètres matériau sont le module d'Young $E = 1$ MPa et la masse volumique $\rho = 1$ kg/mm³.

Le modèle de Mazars (Mazars (1984)) est employé dans ce calcul avec les paramètres suivants : $A_t = 1$, $B_t = 2$, $\varepsilon_{D_0} = 1$. La longueur interne l_c vaut 3 cm. Les simulations sont réalisées avec un maillage régulier et constant de 250 éléments. L'intégration dans le temps se base sur un schéma

explicite en différences finies centrées. La longueur du créneau est calculée à partir de la relation suivante :

$$l = t_0 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.29)$$

et son amplitude est c/v avec v égal à la vitesse de propagation de l'onde élastique $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. La figure 4.13 montre le cas où l'endommagement est amorcé au centre de la barre (loin du bord). Les résultats obtenus avec les formulations classiques et modifiées sont très similaires. Si nous considérons que la rupture complète se produit là où l'endommagement est maximal, la barre est rompue en son centre en deux morceaux avec les différentes approches (figure 4.13).

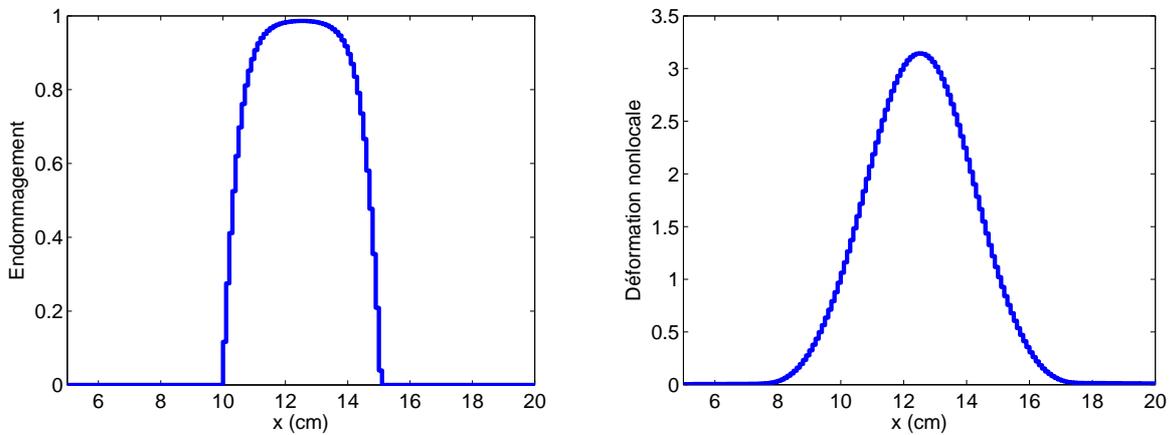


FIG. 4.13 – Profils d'endommagement (droite) et de déformation (gauche) avec les modèles classiques et modifiés lorsque la rupture s'amorce au centre de la barre.

Nous choisissons maintenant le cas où l'endommagement s'amorce proche du bord libre (extrémité droite de la barre) à une distance égale à $1,25 \text{ cm}$. Les résultats de plusieurs fonctions poids sont maintenant distincts. Selon la formulation originale notée **RWF** (figure 4.14), lorsque l'endommagement est suffisamment développé, ce dernier est maximal à l'extrémité de la barre. En fait, il est très difficile avec la formulation originale **RWF** d'obtenir un écaillage qui soit de l'ordre de la longueur interne du matériau. L'endommagement se développe initialement avec une valeur maximale à l'intérieur de la barre, mais quand il croît, la valeur maximale de l'endommagement est attirée vers l'extrémité de la barre et l'épaisseur de l'écaillage devient infiniment petite dans cette formulation. Avec la fonction poids modifiée **SLC** proposée par Borino *et al.* (2003), certaines améliorations sont observées par rapport à la formulation originale **RWF**. L'endommagement maximal n'est pas localisé

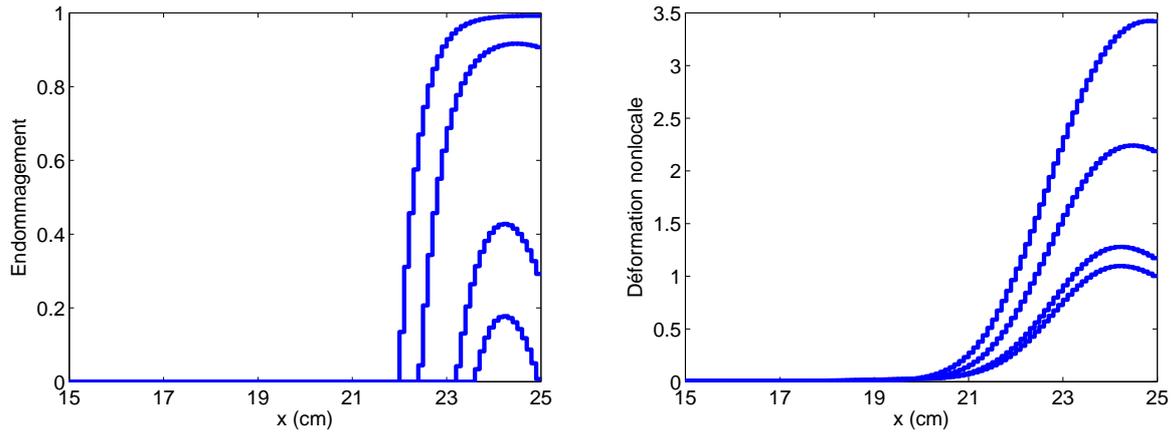


FIG. 4.14 – Profils d’endommagement (droite) et de déformation (gauche) avec **RWF** lorsque la rupture s’amorce à proximité du bord de la barre.

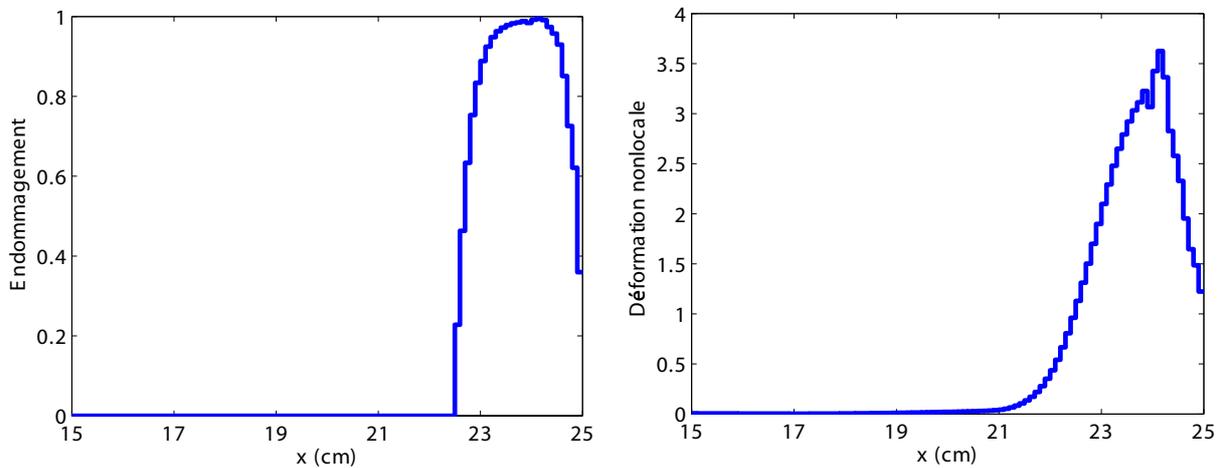


FIG. 4.15 – Profils d’endommagement (droite) et de déformation (gauche) avec **SLC** lorsque la rupture s’amorce à proximité du bord de la barre.

à l’extrémité de la barre (figure 4.15 gauche) à cause de la modification de la fonction poids à proximité de l’extrémité de la barre. La contribution non locale diminue, et par conséquent, la contribution locale devient plus prédominante dans la formulation (équation (4.25)). Cependant, ce cas n’est pas compatible avec les considérations micro-mécaniques présentées dans le paragraphe 4.2 car à l’extrémité de la barre, la réponse du matériau n’est pas locale. En fait, l’extrémité s’endommage alors qu’elle est sans contrainte.

Avec les formulations modifiées **MCLS** (figure 4.16) et **ERF** (figure 4.17) correspondant respecti-

vement aux équations (4.27) et (4.28), l'endommagement est maximal à l'intérieur de la barre où la traction s'amorce et il n'y a pas d'endommagement à l'extrémité où la déformation est locale seule pilote l'endommagement sur le bord. Nous observons également que les deux formulations modifiées fournissent des résultats très similaires.

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédente, l'approche **ERF** est beaucoup plus facile à manipuler dans les applications 3D. C'est la raison pour laquelle nous retenons cette formulation dans les autres cas d'étude traités par la suite.

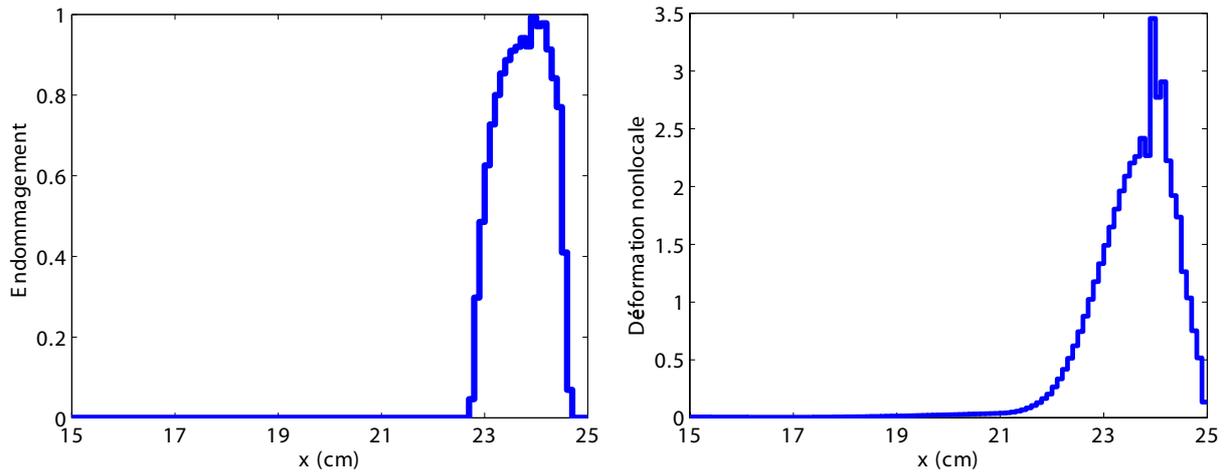


FIG. 4.16 – Profils d'endommagement (droite) et de déformation (gauche) avec **MLCS** lorsque la rupture s'amorce à proximité du bord de la barre.

4.4 Modèle modifié 2D

4.4.1 Formulation non locale

Dans le cas 2D, la fonction poids modifiée **ERF** devient :

$$\|x - \xi\| = l_c \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2/a^2 + (x_2 - \xi_2)^2/b^2} \quad (4.30)$$

Dans le système de coordonnées, l'indice 1 correspond au vecteur normal au bord le plus proche du solide et l'indice 2 correspond à la direction orthogonale au vecteur normal. a est le minimum entre la longueur interne et la distance du point à la surface libre la plus proche et b est supposé égal au minimum entre la longueur interne et la distance au bord du solide dans la direction orthogonale (figure 4.18). La même approche peut aisément être étendue au cas 3D.

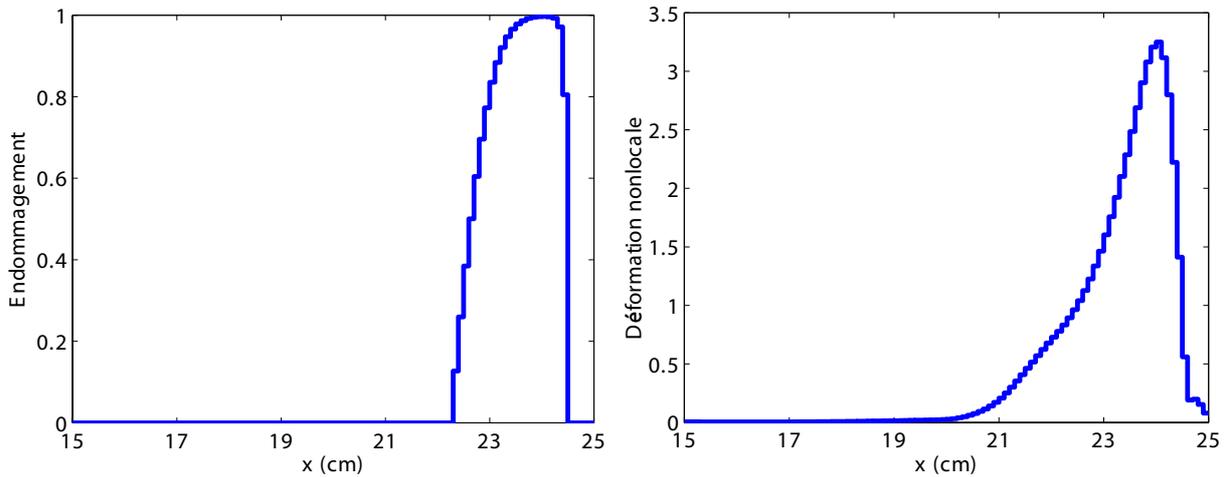


FIG. 4.17 – Profils d’endommagement (droite) et de déformation (gauche) avec **ERF** lorsque la rupture s’amorce à proximité du bord de la barre.

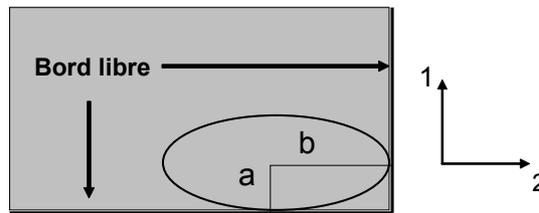


FIG. 4.18 – Effet du bord sur les interactions non locales dans la formulation *ERF* en 2D.

Dans le paragraphe suivant, nous allons mettre en évidence les améliorations apportées par la modification de la fonction poids au travers de deux exemples : une plaque en traction simple et l’analyse de l’effet d’échelle sur des poutres entaillées et non entaillées. Nous allons comparer les résultats issues de la formulation modifiée **ERF** (équation (4.30)) à ceux obtenus à l’aide de la fonction poids **RWF**. Toutes les simulations sont réalisées avec le code éléments finis *Castem*.

4.4.2 Plaque en traction simple

Nous allons traiter la simulation d’un essai en traction simple sur une plaque contenant des défauts permettant de localiser l’endommagement dans une zone bien définie. La figure 4.16 illustre la géométrie de la plaque, le système de chargement ainsi que la position des défauts considérés dans les différents cas. Les défauts sont assimilés à un matériau complètement pré-endommagé.

Les calculs sont réalisés avec l’hypothèse des contraintes planes et la dimension de la plaque est

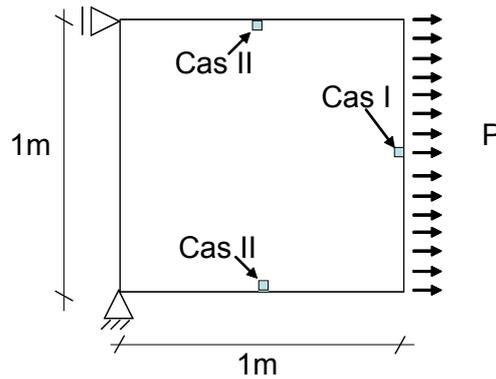


FIG. 4.19 – Plaque en 2D : géométrie, conditions aux limites, système de chargement et positions des défauts dans trois cas différents.

$1 \times 1 \text{ m}^2$. Le même maillage régulier de 25×25 éléments quadratiques est utilisé dans tous les calculs présentés ici. Les paramètres suivants sont retenus dans cette analyse : $E = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\nu = 0,0$, $A_t = 0,95$, $B_t = 9000$, $A_c = 1,25$, $B_c = 1000$. La longueur interne est prise égale à $0,2 \text{ cm}$.

Dans le cas I, le défaut est situé sur le bord droit de la plaque. D'un point de vue numérique, en ce qui concerne le traitement de la fonction poids, il n'y a pas de différence entre une surface libre et une surface soumise à un chargement. La figure 4.20 montre les profils d'endommagement au pic (haut) et à la rupture (bas) pour les formulations **RWF** et **ERF**. Comme attendu, l'endommagement est maximum au niveau du bord droit pour les deux approches. Néanmoins, la réponse mécanique de la plaque est fortement influencée par l'expression de la fonction poids. Avec la formulation **RWF**, la zone d'endommagement est contrôlée par la longueur interne l_c . De plus, la ductilité doit augmenter avec l_c . Pour la formulation **ERF**, l'endommagement est localisé à proximité du bord droit de la plaque puisque les interactions non locales diminuent et sont supposées s'annuler sur la frontière. La réponse globale obtenue est très proche de celle issue de l'approche locale (figure 4.21).

La figure 4.22 montre les profils d'endommagement pour les deux approches dans le cas II. L'endommagement s'amorce à proximité de la pointe de l'entaille (éléments initialement endommagés) pour les modèles **RWF** et **ERF**. Cet endommagement se propage vers le centre de la plaque jusqu'à rupture. Cependant, nous observons des différences entre les cartes d'endommagement proche de l'entaille. Avec la formulation **RWF**, le matériau est complètement endommagé entre la pointe de l'entaille et le bord libre. Ce n'est pas le cas avec la formulation **ERF**. Ceci est, comme nous l'avons déjà évoqué, dû à la diminution des interactions proche du bord. Cette faible différence dans les profils d'endommagement induit un faible écart dans les réponses force-déplacement pour les deux modèles (figure 4.23).

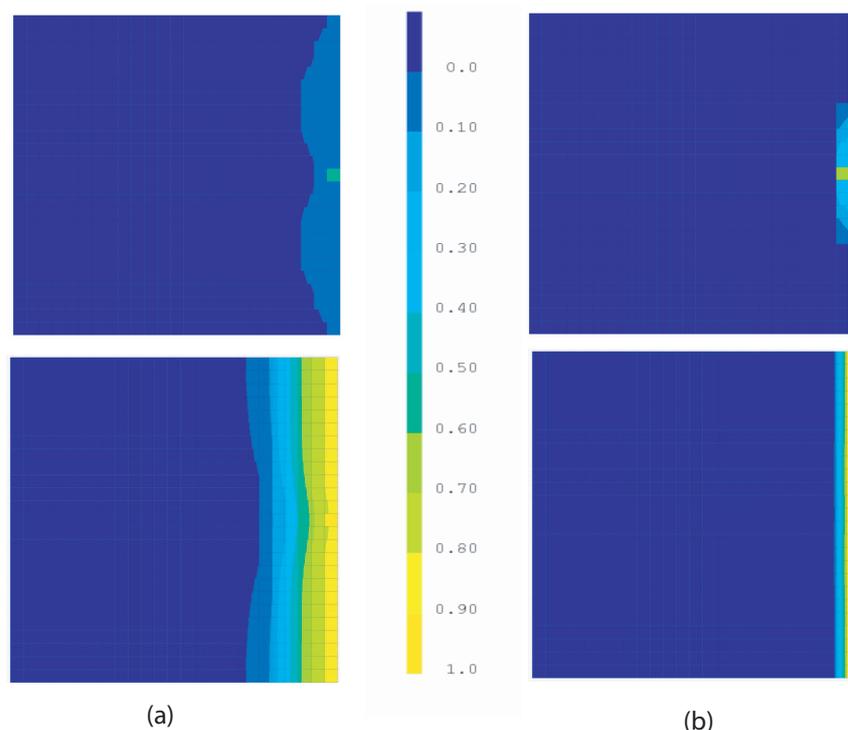


FIG. 4.20 – Profils d’endommagement dans le cas I avec (a) **RWF** et (b) **ERF**.

Deux principaux cas permettent de mettre en évidence les différences entre les approches **RWF** et **ERF**.

- Le premier est le cas où la fissure se propage vers la surface libre. La zone de microfissuration est contrainte par le bord du spécimen et l’énergie nécessaire pour la propagation de la fissure est modifiée. La surface libre du spécimen limite le développement de la zone de microfissuration et entraîne alors une énergie de fissuration et une résistance réduites (Duan *et al.* (2003), Duan et Hu (2004), Duan *et al.* (2006), Hu et Duan (2004)).
- Le deuxième cas est typiquement trouvé dans des échantillons où la fissure s’amorce à partir de la surface libre. L’état de l’apparition et de la propagation de cette fissure devrait dépendre fortement de la moyenne de calcul de l’endommagement à proximité de cette surface libre.

Nous allons nous concentrer dans les exemples suivants sur le deuxième cas, ainsi nous allons aussi envisager les tests d’effet d’échelle dans des spécimens non entaillés.

4.4.3 Effet d’échelle

Une comparaison numérique qualitative entre l’approche classique (**RWF**) et l’approche modifiée (**ERF**) est réalisée sur deux groupes de poutres homothétiques en flexion trois points. Pour chaque cas,

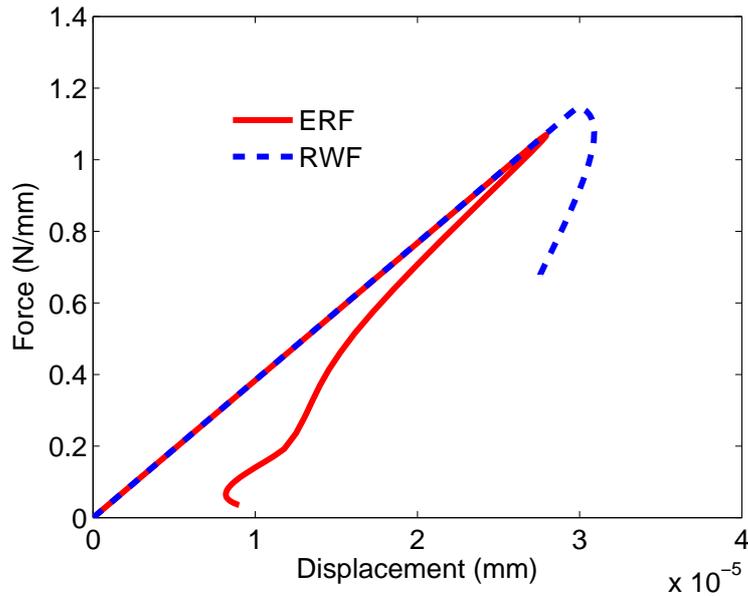


FIG. 4.21 – Courbes force-déplacement pour le cas I.

les spécimens avec plusieurs hauteurs $D = 80, 160, 320$ mm sont respectivement identifiés comme petit, moyen et grand. Dans le premier groupe, les poutres, pour les trois dimensions, sont entaillées avec une entaille, d'une profondeur égale à $0,2 D$, située au milieu (figure 4.24). Dans le deuxième groupe, les poutres ne sont pas entaillées, elles ont cependant la même géométrie et le même système de chargement que la poutre entaillée. Le but de cette étude est de mettre en évidence l'influence de la fonction poids sur le comportement mécanique des structures et sur les effets d'échelles dans les deux cas envisagés.

La taille des éléments a été maintenue constante dans la zone de microfissuration, et est assez petite comparée à la longueur interne (au moins 3 fois plus petite). Les simulations sont réalisées en contraintes planes. Grâce à la symétrie, uniquement la moitié de la poutre est modélisée. Le modèle d'endommagement scalaire développé par Mazars (1984) (voir chapitre 1) est utilisé pour ces simulations dont les paramètres retenus sont : $E = 3,85 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu = 0,24$, $A_t = 0,95$, $A_c = 1,25$, $B_t = 9200$, $B_c = 1000$ et $\varepsilon_{D_0} = 3 \cdot 10^{-5}$. Les calculs sont réalisés avec deux longueurs internes différentes égales à 40 mm et 70 mm.

4.4.3.1 Effet d'échelle sur poutres entaillées

Nous étudions d'abord l'effet d'échelle sur des poutres entaillées. Avec le modèle d'endommagement local, l'amplification de la contrainte due à l'entaille est beaucoup plus grande que celle issue du

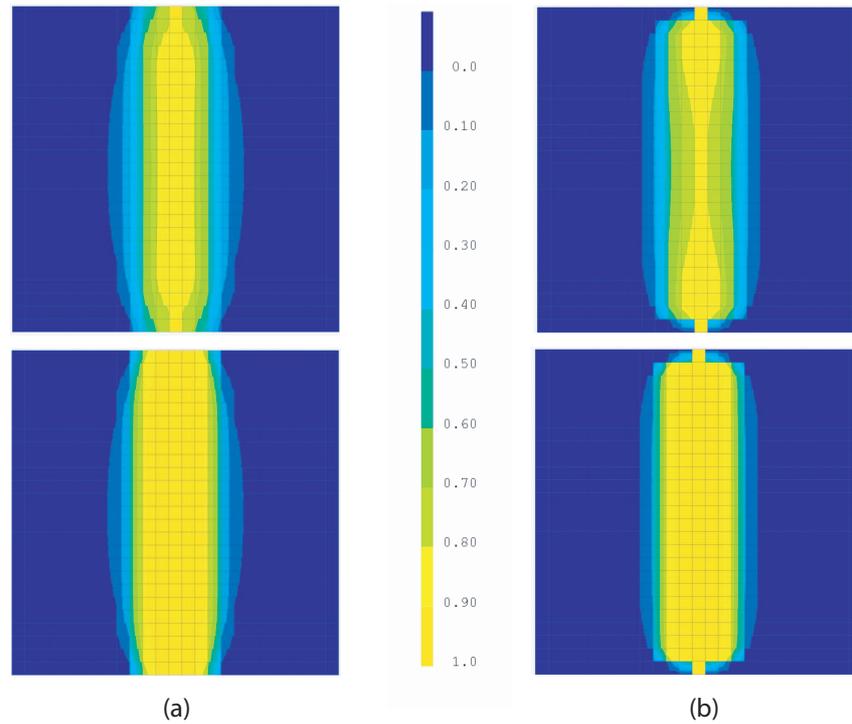


FIG. 4.22 – Profils d’endommagement dans le cas II avec (a) **RWF** et (b) **ERF**.

modèle d’endommagement non local classique. En tenant compte du fait que le modèle non local modifié (**ERF**) considère que lorsque le point s’approche du bord les interactions non locales diminuent, certaines différences sont alors attendues.

La figure 4.25 montre les réponses force-déplacement pour les trois dimensions avec les deux formulations **RWF** et **ERF** et pour une longueur interne de 40 mm. Les forces ultimes P_u correspondantes sont regroupées dans le tableau 4.1.

Pour chaque taille de spécimen, la contrainte nominale est calculée à partir de la relation suivante (voir chapitre 1) :

$$\sigma_N = c_n \frac{P_u}{0,8Db} \quad (4.31)$$

où c_n est une constante prise égal à 0,8 ici (pas d’influence de ce paramètre sur l’analyse d’effet d’échelle) et b est l’épaisseur de la poutre égale à 1 dans le calcul $2D$. Les résultats numériques sont interprétés à l’aide de la loi d’effet d’échelle de Bazant (1984). Cette loi s’écrit dans le cas des poutres entaillées homothétiques en flexion trois points sous la forme (voir chapitre 1) :

$$\sigma_N = \frac{Bf'_t}{\sqrt{1+\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{D}{D_0} \quad (4.32)$$

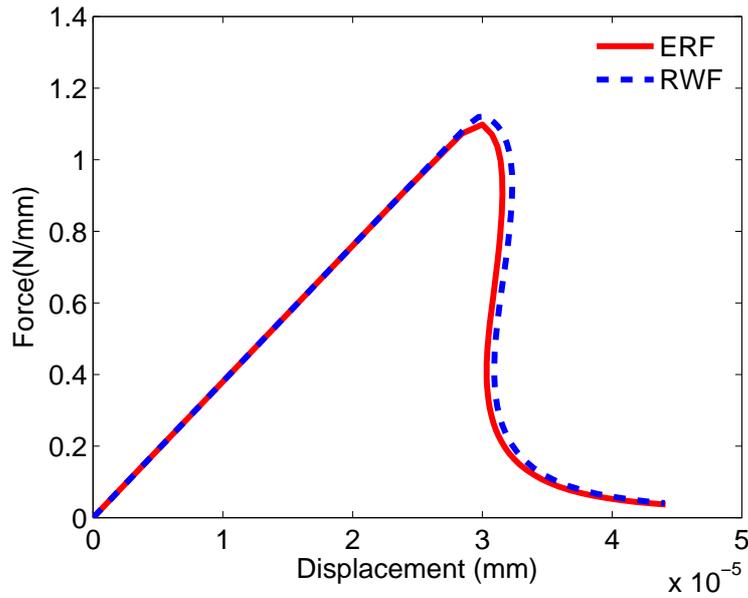


FIG. 4.23 – Courbes force-déplacement pour le cas II.

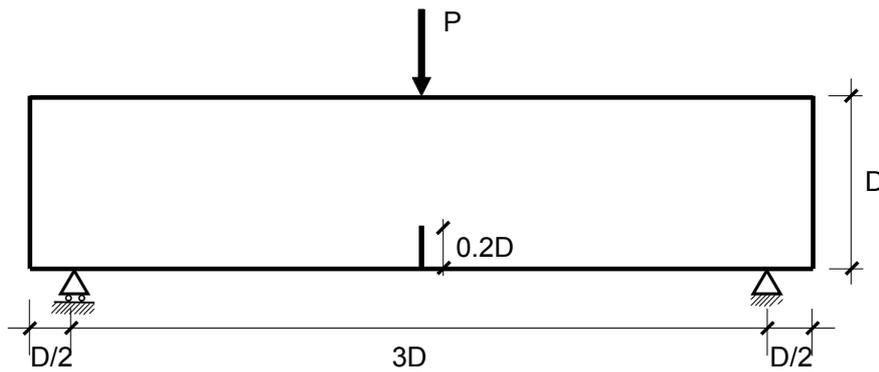


FIG. 4.24 – Poutre entaillée en flexion trois points : géométrie et système de chargement.

B est un paramètre dépendant de la géométrie de la structure, f'_t est la résistance à la traction du matériau et D_0 est une dimension caractéristique. Pour calculer les valeurs de Bf'_t et D_0 , l'équation (4.32) peut être algébriquement réarrangée pour réaliser une régression linéaire du premier ordre :

$$\frac{1}{(\sigma_N)^2} = aD + c \quad (4.33)$$

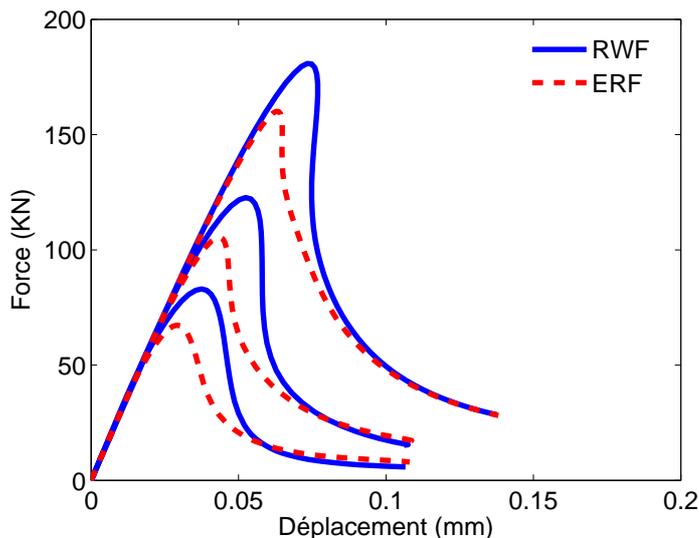


FIG. 4.25 – Courbes force-déplacement pour les trois tailles de poutre entaillée avec les formulations (**RWF**) et (**ERF**) et pour $l_c = 40$ mm.

avec

$$D_0 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad Bf'_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \quad (4.34)$$

Le tableau 4.2 regroupe les résultats obtenus sur les différentes tailles et pour les deux formulations. Les résultats obtenus avec les deux formulations **RWF** et **ERF** sont illustrés à travers la courbe logarithmique d'effet d'échelle (figure 4.26). Ceux-ci sont bien reproduits avec la loi d'effet d'échelle de Bazant (équation (4.32)). La résistance est d'autant moins importante que la structure est grande.

Taille	Hauteur D (mm)	P_u kN (RWF)	σ_N (MPa) (RWF)	P_u kN (ERF)	σ_N (MPa) (ERF)
Petite	80	83,02	1,0377	67,22	0,8415
Moyenne	160	122,68	0,7668	105,48	0,6592
Grande	320	180,82	0,5650	160,04	0,5001

TAB. 4.1 – Résultats numériques pour les trois tailles de la poutre entaillée avec *RWF* et *ERF* pour $l_c = 40$ mm.

L'influence de la modification dans le modèle non local est très sensible sur la réponse force-déplacement. Les pics d'effort sont très différents pour les trois tailles. Au pic, l'endommagement a lieu seulement

	RWF	ERF
Bf'_t	2,167	1,332
D_0	23,28	52,48

TAB. 4.2 – Bf'_t et D_0 de la poutre entaillée de différentes tailles avec *RWF* et *ERF* pour $l_c = 40$ mm.

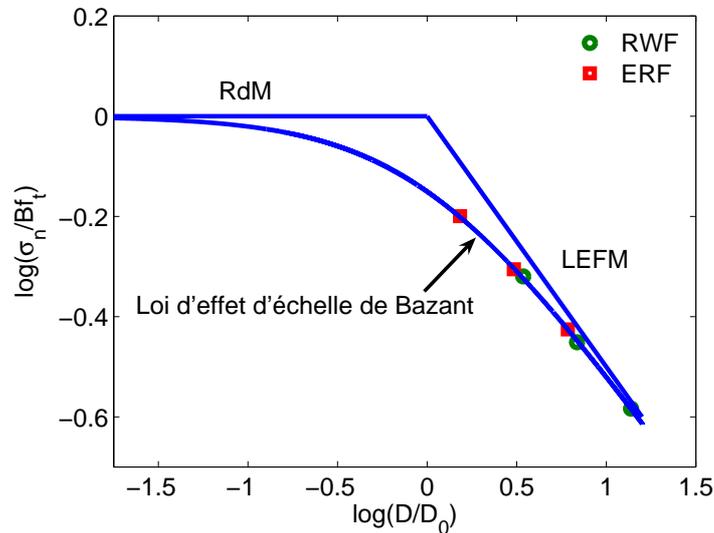


FIG. 4.26 – Effet d'échelle sur la contrainte nominale de la poutre entaillée avec les formulations (**RWF**) et (**ERF**) et pour $l_c = 40$ mm.

à proximité du fond de l'entaille où la modification du modèle non local est importante. De tels résultats, montrant une grande sensibilité de la réponse mécanique des échantillons à la fonction poids, ont déjà été obtenus, par exemple par Jirasek *et al.* (2003). Le problème est maintenant d'être capable de discriminer les deux formulations non locales (classique et modifiée) sur la base de preuves expérimentales. Une étude complète est au-delà de la portée de ce travail. Néanmoins, nous pouvons donner quelques idées préliminaires.

- La difficulté est, soit à partir de techniques expérimentales de caractériser précisément la taille et la forme de la zone de microfissuration, soit d'être capable de discriminer entre les deux formulations avec des tests structurels supplémentaires. Les techniques d'émission acoustique (voir par exemple Haidar *et al.* (2005)) fournissent certaines mesures de l'évolution de la zone de microfissuration. Cependant, la précision, de l'ordre du centimètre, est un peu trop faible pour étudier la forme de la zone de microfissuration dans une couche limite d'une taille de l'ordre de la longueur interne (quelques centimètres).

- Une deuxième possibilité est de reproduire expérimentalement le test d'écaillage modélisé dans l'étude unidimensionnelle dans ce chapitre.
- Une troisième possibilité concerne l'analyse de l'effet d'échelle. A partir des calculs de l'effet d'échelle présentés dans cette partie, il est possible de calibrer le modèle d'endommagement. La procédure a été décrite en détails dans Le Bellégo *et al.* (2003). Par conséquent, nous obtiendrons différents ensembles de paramètres matériau, y compris la longueur interne dans le modèle avec les formulations d'endommagement non locales classique et modifiée. Nous prévoyons que, à la suite de la calibration, les deux modèles s'ajustent de façon satisfaisante aux réponses expérimentales de force-déplacement. Cependant, les deux modèles calibrés devraient être comparés à partir des différents tests de l'effet d'échelle.

4.4.3.2 Effet d'échelle sur poutres non entaillées

Nous considérons maintenant le cas d'une poutre non entaillée. Les réponses force-déplacement pour les trois tailles et avec les deux formulations **RWF** et **ERF** sont illustrées dans la figure 4.27 pour $l_c = 40$ mm et la figure 4.28 pour $l_c = 70$ mm.

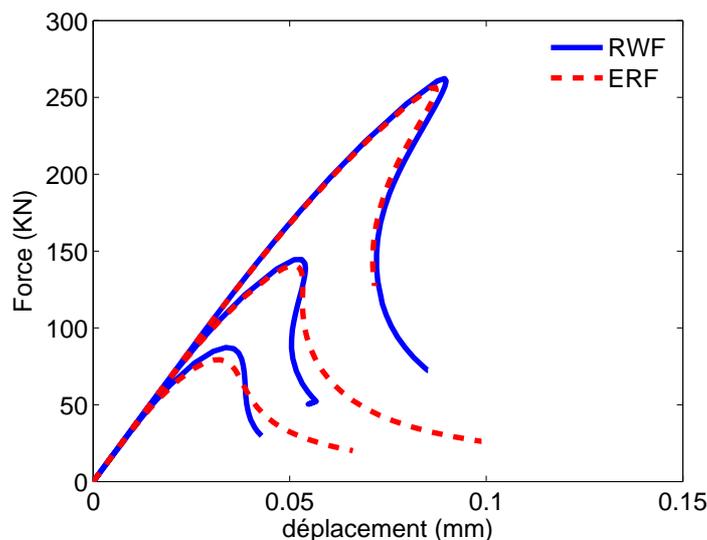


FIG. 4.27 – Courbes force-déplacement pour les trois tailles de poutre non entaillée : comparaison entre le formulation classique (**RWF**) et la formulation modifiée (**ERF**), pour $l_c = 40$ mm.

Nous remarquons sur ces figures que l'influence de la fonction non locale modifiée **ERF** est plus significative pour le petit spécimen et qu'elle s'accroît avec l'augmentation de la longueur interne. Dans la formulation **ERF**, la réduction des interactions proche du bord se traduit par une réduction

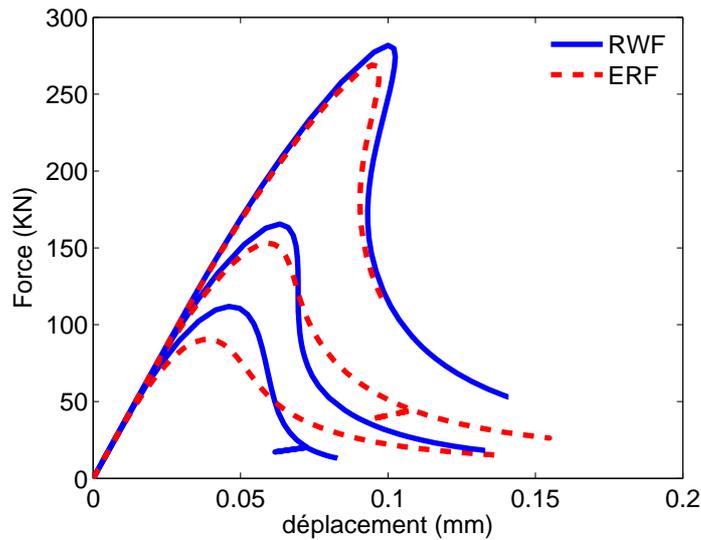


FIG. 4.28 – Courbes force-déplacement pour les trois tailles de poutre non entaillée : comparaison entre le formulation classique (**RWF**) et la formulation modifiée (**ERF**), pour $l_c = 70$ mm.

de la capacité de charge, comme dans le cas des poutres entaillées. Il est à noter que lorsque une fissure se propage, elle forme un nouveau bord dans le solide et la formulation non locale devrait tenir compte de cet effet supplémentaire. Cette situation ne sera pas traitée dans ce travail. Elle constituera une des perspectives de notre travail.

La contrainte nominale est maintenant obtenue par la relation suivante :

$$\sigma_N = c_n \frac{P_u}{bD} \quad (4.35)$$

Les forces ultimes P_u pour les trois dimensions avec les deux formulations **RWF** et **ERF** sont listées dans le tableau 4.3 pour $l_c = 40$ mm et le tableau 4.4 pour $l_c = 70$ mm.

Taille	Hauteur D (mm)	P_u (kN) (RWF)	σ_N (MPa) (RWF)	P_u (kN) (ERF)	σ_N (MPa) (ERF)
Petite	80	87,296	1,09	79,242	0,99
Moyenne	160	144,488	0,903	140,486	0,88
Grande	320	262,26	0,82	256,52	0,8

TAB. 4.3 – Résultats numériques pour les trois tailles de la poutre non entaillée avec **RWF** et **ERF** pour $l_c = 40$ mm.

Taille	Hauteur D (mm)	P_u (kN) (RWF)	σ_N (MPa) (RWF)	P_u (kN) (ERF)	σ_N (MPa) (ERF)
Petite	80	111,94	0,6996	90,432	1,13
Moyenne	160	165,488	0,5172	153,03	0,956
Grande	320	281,76	0,4402	269	0,84

TAB. 4.4 – Résultats numériques pour les trois tailles de la poutre non entaillée avec *RWF* et *ERF* pour $l_c = 70$ mm.

Nous appliquons maintenant la loi d'effet d'échelle de Bazant et Planas (1998) pour le cas des poutres non entaillées (voir chapitre 1),

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left(1 - \frac{D_b}{D}\right)^{-1} \quad \text{pour} \quad (D \gg D_b) \quad (4.36)$$

où D_b et $f_{r\infty}$ sont des constantes. La première est l'épaisseur de la couche limite dans laquelle l'endommagement est distribué avant que la fissure ne commence à localiser et la deuxième est la résistance à la traction du matériau pour un spécimen de taille infinie. D_b et $f_{r\infty}$ sont obtenus par une régression linéaire comme pour le cas des poutres entaillées (tableau 4.5).

	RWF ($l_c = 40$ mm)	ERF ($l_c = 40$ mm)	RWF ($l_c = 70$ mm)	ERF ($l_c = 70$ mm)
$f_{r\infty}$	0,76	0,762	0,397	0,394
D_b	24,43	18,83	35,0767	24,8

TAB. 4.5 – $f_{r\infty}$ et D_b pour les poutres non entaillées avec différentes longueurs internes.

Comme observé dans la figure 4.29, l'effet d'échelle obtenu avec la formulation non locale classique **RWF** et celle modifiée **ERF** sont en bon accord avec la relation d'effet d'échelle de Bazant (équation (4.36)). Ce qui est important, cependant, c'est que les deux formulations ne sont pas équivalentes. Pour chaque valeur de la longueur interne, le tableau 4.5 montre que la résistance du matériau pour un spécimen de taille infinie $f_{r\infty}$ n'est pas changée, mais l'épaisseur de la couche limite D_b diminue. Cela s'explique par une prise en compte de l'influence de l'effet du bord différente dans les deux formulations. Dans la formulation classique, la non localité sur le bord fournit une couche limite de l'endommagement distribué plus grande que celle calculée par la formulation modifiée, où la non localité diminue à proximité du bord. Par conséquent, les points résultants en utilisant la formulation **ERF** sont décalés vers la droite de la courbe logarithmique d'effet d'échelle, comparés à ceux issus de la formulation classique **RWF**.

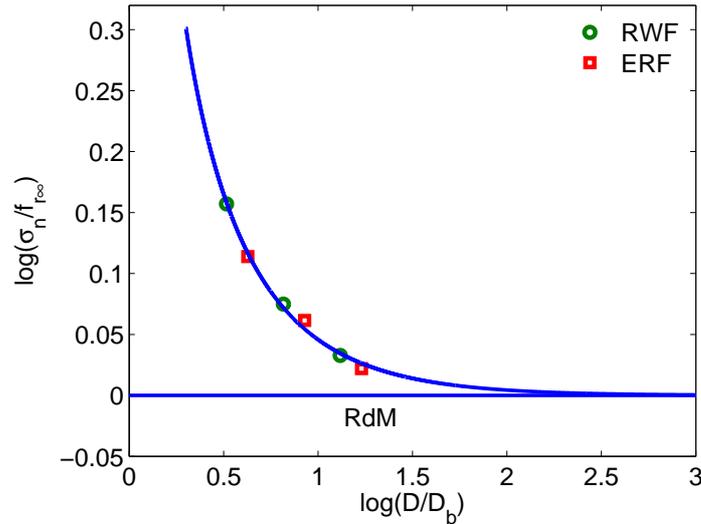


FIG. 4.29 – Effet d’échelle sur des poutres non entaillées : comparaison entre les formulations **RWF** et **ERF**.

Il est aussi important de montrer l’influence de la longueur interne sur ces résultats d’effet d’échelle. Pour cela, nous avons tracé les résultats de l’effet d’échelle obtenus avec la formulation **ERF** pour les deux valeurs de la longueur interne $l_c = 40$ mm et $l_c = 70$ mm sur le même graphe. Nous constatons que la couche limite D_b de l’endommagement distribué augmente lorsque la longueur interne augmente, et dans le même temps, la résistance à la traction $f_{r\infty}$ pour un spécimen de taille infinie devient aussi plus grande.

L’évaluation de la pertinence de la formulation non locale modifiée afin de prendre en compte l’effet du bord peut alors être menée comme suit :

- Dans une première étape, les formulations classique et modifiée pourraient être calibrées à l’aide des données expérimentales de l’effet d’échelle sur des spécimens entaillés.
- La deuxième étape pourrait être la comparaison avec les prédictions d’effet d’échelle sur les mêmes spécimens, mais sans entaille. Si la formulation modifiée permet de mieux représenter les effets d’échelle par rapport à la modélisation classique, on peut conclure sur la pertinence de la modification.

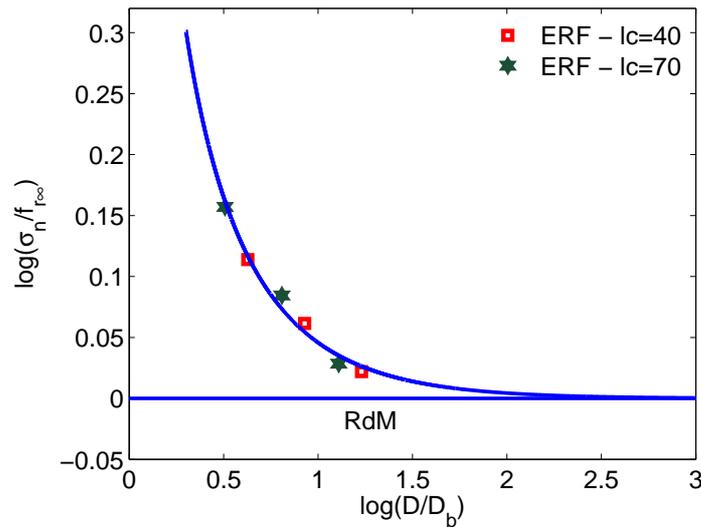


FIG. 4.30 – Effet d’échelle sur des poutres non entaillées : influence de la longueur interne avec la formulation **ERF**.

4.5 Conclusion

Ce chapitre vise à donner un aperçu amélioré sur des effets de bord dans le cadre de la modélisation de l’endommagement non local. Nous avons montré que, sur la frontière d’un solide, la réponse du matériau devrait être locale. Il existe une couche limite dans laquelle la non localité se développe à partir du bord libre vers l’intérieur du solide. Ceci n’est pas pris en considération dans les formulations actuelles de l’endommagement non locales, gradient ou intégrale.

Nous avons présenté deux modifications du modèle d’endommagement non local compatibles avec les résultats issus de la micromécanique. La première est une modification de la fonction poids à proximité du bord. La seconde redéfinit le système associé à la fonction poids, quand la moyenne pondérée est calculée proche du bord. La dernière modification est facile à mettre en œuvre dans la formulation non locale déjà implantée dans les codes de calculs actuels. Les deux formulations fournissent, au moins dans un exemple unidimensionnelle, des résultats très semblables.

Dans l’essai d’écaillage unidimensionnel présenté dans ce chapitre, nous avons montré que, pour un écaillage d’épaisseur finie, les formulations modifiées fournissent des résultats plus réalistes que ceux obtenus à l’aide de la formulation non locale classique.

Les calculs 2D montrent que nous pouvons observer des différences non négligeables entre les formulations classique et modifiée. Elles correspondent aux cas où l’endommagement s’amorce proche ou sur le bord libre du solide. Or, ceci est courant dans de nombreux problèmes de rupture et est mis

en évidence sur des essais d'effet d'échelle.

La simulation numérique des spécimens entaillés et non entaillés de différentes tailles et leur comparaison avec des expériences devraient fournir certaines validations expérimentales sur la pertinence de la modification du modèle non local, le modèle étant calibré sur des données de test pour les spécimens entaillés, puis évalué sur les données de test spécimens non entaillés.

Conclusions et perspectives

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation du comportement structurel du béton sous sollicitations mécaniques. Dans la première partie de ce mémoire, une relation élasto-plastique endommageable non locale a été développée pour estimer le plus précisément possible la valeur de l'endommagement, afin de l'intégrer dans des modèles couplés. En plus des avantages du modèle d'endommagement (simple et adapté aux chargements de traction), l'introduction de la plasticité, dans la formulation d'endommagement scalaire, a permis de reproduire les pentes de déchargement expérimentales, le changement de comportement volumique (en particulier l'évolution du coefficient de Poisson apparent en compression simple), la transition fragile - ductile en confinement, ainsi que la perte de rigidité initiale observée pour les fortes pressions hydrostatiques.

La méthode de régularisation en gradient a été introduite sur la partie responsable de l'adoucissement pour éviter les problèmes numériques dus au phénomène de localisation de l'endommagement. La performance du modèle régularisé a été validée. Des résultats indépendants de la discrétisation spatiale du maillage ont été obtenus pour un nombre suffisant d'éléments dans la largeur de la zone de microfissuration. Les différentes simulations effectuées ont montré la capacité du modèle à reproduire les comportements structurels classiques (poutre armée en flexion trois points) et complexes (poutre continue en béton armé de grande hauteur). Les comparaisons avec des modèles d'endommagement scalaires ont permis de mettre en évidence les améliorations apportées par l'introduction de la plasticité : le mode de rupture est correctement simulé (mode I et mode mixte), et le chargement ultime obtenu est en bon accord avec les résultats expérimentaux (poutre continue en béton armé de grande hauteur). Cependant, nous avons vu que la plasticité ne perturbe pas le profil d'endommagement pour les chargements monotones.

L'implantation numérique du modèle elasto-plastique endommageable non local a été discutée. En particulier, les opérateurs tangents cohérents pour les algorithmes de résolution des équations non linéaires de plasticité et les équations d'équilibre globales ont été écrits. Les études de convergence réalisées ont montré l'efficacité de la différentiation numérique de la relation constitutive de la plasticité et une allure de convergence quadratique pour la méthode de Newton-Raphson au niveau du point de Gauss (problème local) et au niveau de l'élément (problème global).

Finalement, le modèle a été appliqué aux essais (PACE-1450-EXP) proposés par *EDF* et en cours

de réalisation en partenariat avec l'Université de Karlsruhe (IfMB), comprenant toutes les composantes de l'enceinte de confinement : béton, aciers passifs et précontraints. Ces simulations ont mis en évidence l'importance du rôle joué par les câbles précontraints dans l'amorçage et la propagation de l'endommagement, aussi la méthode de discrétisation a été discutée (1D ou 3D). L'étude a montré aussi la formulation de bandes d'endommagement en mode mixte, alors que le modèle d'endommagement scalaire ne représente que le mode I.

Le calcul avec les modèles non locaux montre que l'évolution de l'endommagement sur le bord est plus lente à l'intérieure de la structure, alors qu'expérimentalement, la fissure est plus ouverte sur le bord. Nous avons alors proposé des modifications du modèle d'endommagement non local intégral en prenant en considération l'effet de bord. Notre justification a été basée sur des arguments micro-mécaniques dans lesquels les interactions entre les microfissures sont diminuées proche du bord libre. Nous avons montré que les formulations modifiées fournissent des résultats plus réalistes par rapport à ceux obtenus à l'aide de la formulation non locale classique. Cependant, la comparaison de la simulation numérique avec des résultats expérimentaux (effet d'échelle sur des poutres entaillées et non entaillées) est nécessaire afin de mieux juger la pertinence de la modification du modèle non local.

Nos différentes études laissent en suspens plusieurs questions auxquelles on pourra répondre par l'amélioration de certains points :

- Le modèle régularisé est actuellement difficile à utiliser pour les structures de grandes tailles (poutre de grande hauteur et enceinte de confinement par exemple). Le maillage doit, en effet, être très fin pour employer ce modèle qui nécessite des ressources informatiques non encore disponibles pour que le calcul soit réalisable (temps de calcul, capacité mémoire...). L'augmentation des moyens de calcul permettrait de réaliser des études plus poussées.
- L'hypothèse de radialité du chargement définit le domaine de validité de l'opérateur tangent global du modèle. Dans les autres cas, la convergence quadratique de la méthode n'est plus assurée (e.g. changement du signe des déformations pour les conditions de chargement non proportionnel). Cela a un impact direct sur les temps d'étude et, par conséquent, sur l'exploitation industrielle de ce modèle. Afin de préserver la convergence quadratique en tout point, l'expression de la déformation équivalente de Mazars devrait être remplacée par une autre expression plus adaptée (par exemple l'expression de la déformation équivalente de Von Mises modifiée proposée (de Vree *et al.* (1995))) dans laquelle le calcul des dérivées des contraintes par rapport aux déformations (l'opérateur tangent cohérent de la méthode de Newton Raphson) est direct contrairement au modèle de Mazars.
- Concernant le calcul des essais (PACE-1450-EXP) au chapitre 2, nous avons vu que les résultats numériques obtenus dépendent fortement de la méthode de discrétisation des câbles précontraints et ainsi du modèle utilisé. En l'absence de résultats expérimentaux, il est impossible de confronter

le modèle au test industriel et de valider la méthode de modélisation du câble précontraint.

Bibliographie

- D. ADDESSI, S. MARFIA et E. SACCO : A plastic nonlocal damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1291–1310, 2002.
- F. ARMERO et S. OLLER : A general framework for continuum damage models. i. infinitesimal plastic damage models in stress space. *International Journal of Solids and Structures*, 37:7409–7436, 2000.
- M. ASIN : Behavior of statically indeterminate deep beams. *In Progress in Concrete research*, volume 3, pages 45–58, Delft University of technology, 1992.
- H. ASKES : *Advanced spatial discretisation strategies for localisation failure. Mesh adaptivity and meshless Methods*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geoscience, 2000.
- H ASKES et L. J. SLUYS : Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:379–390, 2000.
- P. BADEL, V. GODARD et J.-B. LEBLOND : Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5848–5874, 2007.
- P.B. BADEL : *Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.
- Z. P. BAŽANT : Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 105:331–344, 1976.
- Z. P. BAŽANT : Size effect in blunt fracture : concrete, rock, metal. *Journal of Engineering Mechanics*, 110:518–535, 1984.
- Z. P. BAŽANT : Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 11:559–582, 1985.

- Z. P. BAŽANT : Why continuum damage is nonlocal : Micromechanics arguments. *Journal of Engineering Mechanics*, 117:1070–1087, 1990.
- Z. P. BAŽANT : Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions. *Journal of Engineering Mechanics*, 120:593–617, 1994.
- Z. P. BAŽANT : Scaling of quasibrittle fracture and the fractal question. *ASME Journal of Materials and Technology*, 117:361–367, 1995.
- Z. P. BAŽANT : Scaling of quasibrittle fracture : Asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 83:1–40, 1997.
- Z. P. BAŽANT : *Introduction aux effets d'échelle sur la résistance des structures*. 2004.
- Z. P. BAŽANT, T.B. BELYTSCHKO et T.P. CHANG : Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 110:1666–1692, 1984.
- Z. P. BAŽANT et F.P. LIN : Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 114(12):2493–2510, 1988.
- Z. P. BAŽANT et J. OŽBOLT : Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(11):2485–2505, 1990.
- Z. P. BAŽANT et P.A. PFEIFFER : Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Materials Journal*, 84:463–480, 1987.
- Z. P. BAŽANT et G. PIJAUDIER-CABOT : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 55:287–294, 1988.
- Z. P. BAŽANT et G. PIJAUDIER-CABOT : Measurement of the characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:755–767, 1989.
- Z. P. BAŽANT et J. PLANAS : *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-Brittle Materials*. Boca Raton and London, 1998.
- Z.P. BAŽANT : *Pager Symposium on Mechanics of Geomaterials ; Rocks, Concretes, Soils.*, chapitre Fracture in concrete and reinforced concrete, pages 281–316. Northwestern University, 1983.
- T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU et L. GU : Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256, 1994.

- A. BENALLAL, R. BILLARDON et G. GEYMONAT : Bifurcation and rate-independent materials. *In* CISM Lecture Notes 327, éditeur : *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44. Springer, 1993.
- S.K. BHOWMIK et J.H. LONG : A general formulation for a cross-sections of yield surfaces in octahedral planes. pages 795–803, Elsevier, 1990.
- G. BORINO, B. FAILLA et F. PARINELLO : A symmetric nonlocal damage theory. *International Journal of Solids and Structures*, 40:3621–3645, 2003.
- J. BRÜHWILER et M. SAMBRIDGE : A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 379:655–660, 1996.
- N. BURLION : *Etude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- M. CHOINSKA : *Effets de la température, du chargement mécanique et de leurs interactions sur la perméabilité du béton de structure*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2006.
- C. COMI, S. MARIANI et U. PEREGO : An extended finite element strategy for the analysis of crack growth in damaging concrete structures. *In Proceedings of European Congress on computational methods in Applied Sciences and Engineering*, 2004.
- E. COSSERAT et F. COSSERAT : *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- R.S. CROUCH et B. TAHAR : Application of a stress return algorithm for elasto-plastic hardening-softening models with high yield surface curvature. *In Proceedings of European Congress on computational methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, 2000.
- R. de BORST : Simulation of strain localization : A reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8:317–332, 1991.
- R. de BORST : Fracture in quasi brittle materials : a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:95–112, 2002.
- R. de BORST et H.B. MUHLHAUS : Gradient dependent plasticity formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:521–539, 1992.
- R. de BORST, J. PAMIN et M.G.D. GEERS : On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics A : Solids*, 18:939–962, 1999.

- R. de BORST, J. J.C. REMMERS, A. NEEDLEMAN et Abellan M.A. : Discrete vs smeared crack models for concrete fracture : bridge the gap. *In Proceedings EUROCC 2003*, pages 3–17, 2003.
- R. de BORST, H.B. SLUYS, L.J. Muhlhaus et J. PAMIN : Fundamental issues in finite element analyses of localisation of deformation. *Engineering Computations*, 10:99–121, 1993a.
- R. de BORST, A.H. VAN DEN BOOGAARD et L.J. SLUYS : Computational issues in time-dependent deformation and fracture of concrete. *In Z.P. BAŽANT et I. CAROL, éditeurs : Proc. 5th Int. RILEM Symp. on Creep and Shrinkage of Concrete*, pages 309–325, Barcelona, 1993b. E&FN Spon, London.
- J.H.P. de VREE, W.A.M. BREKELMANS et A. VAN : Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581–588, 1995.
- R. DESMORAT, F. GATUINGT et F. RAGUENEAU : Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:1539–1560, 2007.
- G. DI LUZIO : A symmetric over-nonlocal microplane model m4 for fracture in concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 44:4418–4441, 2007.
- F.L. DI MAGGIO et I.S. SANDLER : materials models for granular soils. *Journal of Engineering Mechanics*, 97:935–950, 1971.
- D.C. DRUCKER et W. PRAGER : Soil mechanics and plasticity analysis of limit design. 10(2):157–162, 1952.
- K. DUAN et X.Z. HU : Specimen boundary induced size effect on quasi-brittle fracture. *Strength, Fracture and complexity*, 2(2):47–68, 2004.
- K. DUAN, X.Z. HU et H.F. WITTMANN : Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:2257–2268, 2003.
- K. DUAN, X.Z. HU et H.F. WITTMANN : Scaling of quasi-brittle fracture : Boundary and size effect. *Mechanics of Materials*, 38:128–141, 2006.
- F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Numerical modeling of concrete flow : Homogeneous approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(4):395–416, 2005. doi :10.1002/nag.419.
- F. DUFOUR, G. PIJAUDIER-CABOT, M. CHOINSKA et A. HUERTA : Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. 2008.

- G. ETSE et K.J. WILLAM : Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *JEM, ASCE*, 106(9):1013–1203, 1994.
- S. FICHANT : *Endommagement et anisotropie induite du béton de structure. Modélisation approchée*. Thèse de doctorat, ENS de cachan, 1996.
- M.G.D. GEERS, T. PEIJTS et W. A. M. BREKELMANS : Experimental monitoring of strain localisation and failure of composite materials. *Composite Science and Tech.*, 56:1283–1290, 1996.
- S. GHAVAMIAN : Evaluation tests on models of non linear behavior of cracking concrete using three dimensional modeling. Rapport technique, benchmark EDF/R&D, CR-MMN 99/232, 1999.
- S. GHAVAMIAN et A. DELAPLACE : Modèles de fissuration de béton, projet meca. *Revue Française de Génie Civil*, 7, 2003.
- V.S. GOPALARATNAM et S.P. SHAH : Softening response of plain concrete in direct tension. *ACI Journal*, pages 310–323, May-June 1985.
- P. GRASSL et M. JIRASEK : Damage plastic model for concrete failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:7166–7196, 2006a.
- P. GRASSL et M. JIRASEK : Plastic model with non local damage applied to concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(1):71–90, 2006b.
- P. GRASSL et R. REMPLING : Influence of volumetric-deviatoric coupling on crack prediction in concrete fracture tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 74(1):71–90, 2007.
- A. L. GURSON : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Engineering Materials and Technology*, 99:2–15, 1977.
- K. HAIDAR, G. PIJAUDIER-CABOT, J.-F. DUBÉ et A. LOUKILI : Correlation between internal length, fracture process zone and size effect in mortar and model materials. *Materials and Structures*, 38:201–210, 2005.
- D. HALM et A. DRAGON : An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17:439–460, 1998.
- N. R. HANSEN et S. L. PHOENIX : thermodynamically consistent theories for elastoplasticity coupled with damage. *Journal of the Physics and Mechanics of Solids*, 142:53–67, 1992.

- A. HILLERBORG, M. MODEER et P. E. PERTERSSON : Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *CCR*, 6:773–782, 1976.
- G. HOFSTETTER et J.C. SIMO : A modified cap model : closest point solution algorithm. *Computers and Structures*, 46:203–214, 1993.
- X.Z. HU et K. DUAN : Influence of fracture process zone height on fracture energy of concrete. *Cement and Concrete Research*, 34:1321–1330, 2004.
- L. JASON : *Relation endomangement-perméabilité pour les bétons : application au calcul de structures*,. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- L. JASON, S. GHAVAMIAN, G. PIJAUDIER-CABOT et A. HUERTA : Benchmarks for the validation of a non local damage model. *Revue Française de Génie Civil*, 2001.
- L. JASON, A. HUERTA, G. PIJAUDIER-CABOT et S. GHAVAMIAN : An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7077–7092, 2006.
- B. JEREMIĆ et S. STURE : Imlicite integrations rules in plasticity : Theory and implementation. Technical report, report to nasa marshall space flight center, contract : Nas8-38779, University of Colorado, Boulder, 1994.
- M. JIRASEK et Z. P. BAŽANT : *Inelastic analysis of structures*. Wiley publishers, 2001.
- M. JIRASEK et s. ROLSHOVEN : Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 41:1553–1602, 2003.
- M. JIRASEK, s. ROLSHOVEN et P. GRASSL : Size effect on fracture energy induced by nonlocality. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:635–670, 2003.
- M. JIRASEK et T. ZIMMERMANN : Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(3):277–284, 1998.
- J. W. JU : Energy based coupled elastoplastic damage models at finite strains. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:2508–2526, 1989.
- M. KACHANOV : Elastic solids with many cracks - a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 23:23–43, 1987.
- W. KRÄTZIG et R. PÖLLING : An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers and Structures*, 82:1201–1215, 2004.

- E. KUHL, E. RAMM et R. de BORST : An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:87–103, 2000.
- H.B. KUPFER, H.K. HILSDORF et H. RUSCHE : Behavior of concrete under biaxial stresses. *J. Am. concr. Inst.*, 66:656–666, 1969.
- C. LA BORDERIE : *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1991.
- D. LASRY et T. BELYTSCHKO : Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24:581–597, 1988.
- C. LE BELLÉGO, J.-F. DUBÉ, G. PIJAUDIER-CABOT et B. GÉRARD : Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22:33–46, 2003.
- J.B. LEBLOND, G. PERRIN et X. DEVAUX : Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalisation. *Journal of Applied Mechanics*, 61:236–242, 1994.
- J. LEE et G. L. FENVES : Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 124:892–900, 1998.
- J. LEMAITRE et J. L. CHABOCHE : Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de mécanique appliquée*, 2:317–365, 1978.
- J. LEMAITRE et J. L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1991.
- B. LUCCIONI, S. OLLER et R. DANESI : Coupled plastic damaged model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:81–89, 1996.
- J. MAZARS : *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture de béton de structure*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1984.
- J. MAZARS, P. KOTRONIS, F. RAGUENEAU et G. CASAUX : Using multifiber beams to account for shear and torsion : Applications to concrete structural elements. *International Journal of Solids and Structures*, 195:7264–7281, 2006.
- J. MAZARS et G. PIJAUDIER-CABOT : Continuum damage theory-application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 115:345–365, 1989.
- J. MAZARS et G. PIJAUDIER-CABOT : From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3327–3342, 1996.

- J. MEDIAVILLA, R.H.J. PEERLINGS et M.G.D. GEERS : A nonlocal triaxiality-dependent ductile damage model for finite strain plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4617–4634, 2006.
- G. MESCHKE et R. LACKNER : Anisotropic modelling of cracked concrete based on plasticity damage theory. In D.R.J. Owen et AL., éditeur : *Computational Plasticity*, pages 1543–1550, Barcelona, 1997. CIMNE.
- M. OMAR : *Déformations différées du béton : Etude expérimentale et modélisation numérique de l'interaction fluage-endommagement*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- J. OZBOLT et Z. P. BAŽANT : Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 118:1365–1386, 1992.
- V. K. PAPANIKOLAOU et A. J. KAPPOS : Confinement-sensitive plasticity constitutive model for concrete in triaxial compression. *International Journal of Solids and Structures*, 44:7021–7048, 2007.
- B. PATZÁK et M. JIRÁZEK : Adaptivity resolution of the localized damage in quasi-brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 130:720–732, 2004.
- R. H. J. PEERLINGS : *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- R. H. J. PEERLINGS, R. de BORST, W. A. M. BREKELMANS et J. H. P. de VREE : Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:937–953, 1996a.
- R. H. J. PEERLINGS, R. de BORST, W. A. M. BREKELMANS, J. H. P. de VREE et I. SPEE : Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 15(6):937–953, 1996b.
- R. H. J. PEERLINGS, R. de BORST, W. A. M. BREKELMANS et M.G.D. GEERS : Gradient enhanced damage modelling of concrete fracture. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 3:323–342, 1998.
- R. H. J. PEERLINGS, M.G.D. GEERS, R. de BORST et W. A. M. BREKELMANS : A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua damage modelling of concrete fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7723–7746, 2001.

- A. PÉREZ-FOGUET, A. RODRIGUEZ-FERRAN et A. HUERTA : Numerical differentiation for local and global tangent operators in computational plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:159–184, 2000a.
- A. PÉREZ-FOGUET, A. RODRIGUEZ-FERRAN et A. HUERTA : Numerical differentiation for non-trivial consistent tangent matrices : an application to the mrs-lade model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:277–296, 2000b.
- V. PICANDET, A. KHELIDJ et G. BASTIAN : Effect of axial compressive damage on gas permeability of ordinary and high performance concrete. *Cement and Concrete Research*, 31:1525–1532, 2001.
- G. PIJAUDIER-CABOT et Z. BAŽANT : Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1512–1533, 1987.
- G. PIJAUDIER-CABOT, K. HAIDAR et J.-F. DUBÉ : Non-local damage model with evolving internal length. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:633–652, 2004.
- G. PIJAUDIER-CABOT et A. HUERTA : Finite element analysis of bifurcation in nonlocal strain-softening solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90:509–919, 1991.
- C. POLIZZOTTO : Remarks on some aspects of nonlocal theories in solid mechanics. *In Proceedings of the 6th Congress of Italian Society for Applied and Industrial Mathematics (SIMAI)*, Cagliari, Italy, May 2002.
- A. RODRIGUEZ-FERRAN, I. MORATA et A. HUERTA : A new damage model based on non-local displacements. *Int. J. Numer. Anal. Math. Geomech.*, 29:473–493, 2005.
- J. C. ROTS : *Computational Modelling of Concrete Fracture*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 1988.
- D. SFER, I. CAROL, R. GETTU et G. ETSE : Study of the behavior of concrete under triaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(2):156–163, 2002.
- J. C. SIMO et T.J.R. HUGUES : *Computational inelasticity*. pages 795–803, Berlin, 1998. Springer-Verlag.
- J. C. SIMO et J. W. JU : Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101–118, 1985.
- J. C. SIMO et J. W. JU : Strain and stress-based continuum damage models-i. formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23:821–840, 1987a.

- J. C. SIMO et J. W. JU : Strain and stress-based continuum damage models-ii. computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 23:841–869, 1987b.
- A. SIMONE, G.N. WELLS, K.H. GERSTLE et L.J. SLUYS : From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:4581–4607, 2003.
- B.P. SINHA, K. H. GERSTLE et L.G. TULIN : Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. *journal of the American Concrete Institute*, pages 195–211, 1964.
- L.J. SLUYS : *Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 1992.
- L. STRÖMBERG et M. RISTINMAA : Fe-formulation of a nonlocal plasticity theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:127–144, 1996.
- K. WILLAM et E. P. WARNKE : Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *In IABSE Seminar on Concrete Structures subjected to triaxial stresses*, volume III-1, 1974.
- J. Y. WU, J. LI et R. FARIA : An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 43:583–612, 2006.
- W. WU, X. LI, R. CHARLIER et F. COLLIN : A thermo-hydro-mechanical constitutive model and its numerical modelling for unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*, 31:155–167, 2004.