GENESE INSTRUMENTALE DU DEPLACEMENT EN GEOMETRIE DYNAMIQUE CHEZ DES ELEVES DE 6EME

Angela Maria Restrepo

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
ÉCOLE DOCTORALE DES MATHEMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION, INFORMATIQUE

THESE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SPÉCIALITÉ : MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
PAR

ANGELA MARIA RESTREPO

GENESE INSTRUMENTALE DU DEPLACEMENT EN GEOMETRIE DYNAMIQUE CHEZ DES ELEVES DE 6EME

DIRIGEE PAR : COLETTE LABORDE ET SOPHIE SOURY-LAVERGNE

SOUTENUE LE : 21 OCTOBRE 2008

DEVANT LE JURY COMPOSE PAR :
MME TERESA ASSUDE PROFESSEUR (RAPPORTEUR)
MME MARIE-JEANNE PERRIN PROFESSEUR (RAPPORTEUR)
MME MICHELE ARTIGUE PROFESSEUR (EXAMINATEUR)
M. FERDINANDO ARZARRELLO PROFESSEUR (EXAMINATEUR)
MME COLETTE LABORDE PROFESSEUR EMERITE IUFM GRENOBLE (DIRECTEUR)
MME SOPHIE SOURY-LAVERGNE MAITRE DE CONFERENCES IUFM GRENOBLE
(CO-DIRECTEUR)

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier à Mme. Colette Laborde et Mme. Sophie Soury-Lavergne pour m'avoir guidée dans cette merveilleuse étape de ma vie, pour m'avoir donné le goût de la recherche et m'avoir encouragée à chaque pas. Cette thèse est devenue ce qu'elle est aujourd'hui grâce à vos remarques et au travail en équipe dont j'ai tant profité.

Je remercie très particulièrement Mme. Teresa Assude et Mme. Marie-Jeanne Perrin d'avoir accepté d'être mes rapporteurs de thèse, pour leurs questions et leurs remarques si enrichissantes.

Je remercie aussi Mme. Michèle Artigue d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse, ainsi qu'à M. Ferdinando Arzarello.

Je tiens aussi à remercier Annie Bessot, pour toute son aide et son support, pour avoir répondu à mes multiples questions et doutes et m'avoir encouragée au cours de la rédaction de la thèse.

Je remercie tous les membres de l'équipe DIAM, Bernard, Alain, Zilora, Joris, Huong, et tous ceux qui ont collaboré en apportant un petit (ou un grand) grain de sable : Sylvia et son merveilleux sourire, Christophe, Armando, Julio, Ruth et tant d'autres ! A Marie, parce que ces années de thèse ensemble nous ont permis nous rapprocher.

A Aude Mory pour m'avoir permis de rentrer dans sa classe, avoir accepté de faire partie de ce projet et l'avoir enrichit. Aux élèves de Jean Vilar pour m'avoir permis de les observer et les filmer, pour leur enthousiasme et leur spontanéité et m'avoir montré leur joie lorsqu'ils apprenaient les mathématiques.

Je tiens à remercier Martine pour m'avoir accueillie chez elle, pour m'avoir donné non seulement un toit mais une famille en France. A Flo, mon petit frère… parce qu'on sait que cette étape n'est qu'une petite partie d'une très longue amitié qui a encore tant de choses à voir et à vivre… Tu vas tant me manquer !

A Cyril, Annamaria, Romain, Lara et Manu, ma famille grenobloise, c'est difficile de trouver les mots pour vous remercier… Merci du fond de mon cœur ! Pour m'avoir donné votre support inconditionnel et votre amitié ! Pour les noëls, les anniversaires, les soirées jeux, pour les cafés ou les petits dej ensemble. Je vous adore et j'emmène une partie de chacun de vous dans mon cœur !

A Alicia, mi compañerita, pour sa compagnie constante, pour son support jusqu'au dernier moment, pour ses mots… A Paulina, pour m'avoir donné des forces quand tu en avais plus besoin que moi ! A Sylvia pour le support constant et la force que tu m'as transmise du début à la fin ! Parce que vous étiez fières de moi et vous avez cru en moi quand je doutais le plus, votre support m'a permis d'aller jusqu'au bout.

Finalement, à mes parents, parce que leurs choix m'ont permis d'arriver jusqu'ici ; parce qu'ils ont accepté que leur « petite fille » vienne en France poursuivre ses rêves… C'est grâce à vous que je suis ici aujourd'hui ! MERCI !

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Dans le cadre du projet national MAGI (ERTe MAGI « Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique »), a été conçue et expérimentée une série de situations pour des élèves de Sixième permettant de les introduire au raisonnement déductif et à la différence entre les propriétés apparentes du dessin et la conservation des propriétés géométriques dans la figure au cours du déplacement. Cette recherche nous a permis de prendre conscience des difficultés d'appropriation du déplacement en géométrie dynamique (Restrepo, 2005 ; Soury-Lavergne, 2006 et 2007).

Le déplacement est un outil fondamental de la géométrie dynamique. Alors que son usage peut paraître aller de soi, il est apparu que l'utilisation et l'appropriation du déplacement ne sont pas évidentes ni pour les élèves, ni pour les enseignants.

Pour les élèves, comprendre et interpréter les effets obtenus par déplacement constitue une vraie difficulté. D'une part, ils n'analysent pas nécessairement les phénomènes observés d'un point de vue mathématique comme le voudrait l'enseignant. Ils peuvent simplement dire que « ça bouge » ou que « ça monte et ça descend », « ça s'agrandit ou aplatit ». D'autre part, les effets du déplacement sur les propriétés géométriques de la figure ne sont pas toujours perçus, ni compris par les élèves. Ils sont même parfois ignorés par des élèves qui se concentrent sur le fait de pouvoir bouger ou non, et cela indépendamment des effets sur la figure.

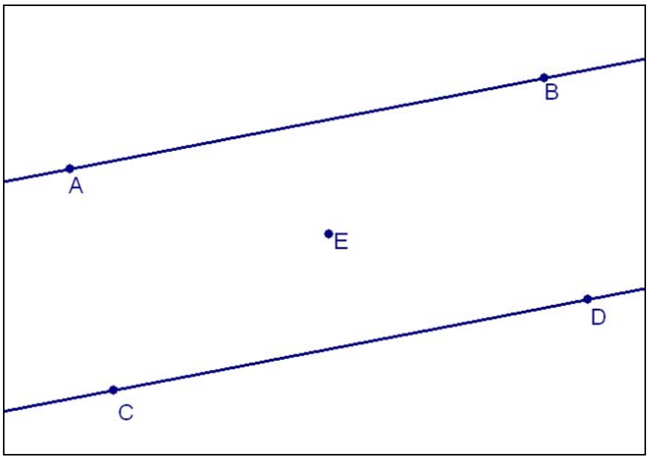
Du côté des enseignants, l'intégration de la géométrie dynamique ne va pas non plus de soi pour eux malgré l'ancienneté de la géométrie dynamique. Peu de manuels proposent des exercices qui s'appuient sur l'utilisation de la géométrie dynamique

Ainsi, en dépit de l'importance et la place qu'occupe le déplacement dans la géométrie dynamique, un nombre important d'exercices ne fait pas appel au caractère dynamique des figures dans les manuels et les textes spécialisés.

Dans *Les dossiers de l'ingénierie éducative hors série : Activités avec un logiciel de géométrie dynamique 6^e^, 5^e^,* on trouve des exercices où le déplacement n'apparaît pas :

Deuxième exercice : ouvrir le fichier Parallèles2 (chapitre sur les « Droites parallèles, droites perpendiculaires, 6^{è} »)

On obtient :



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

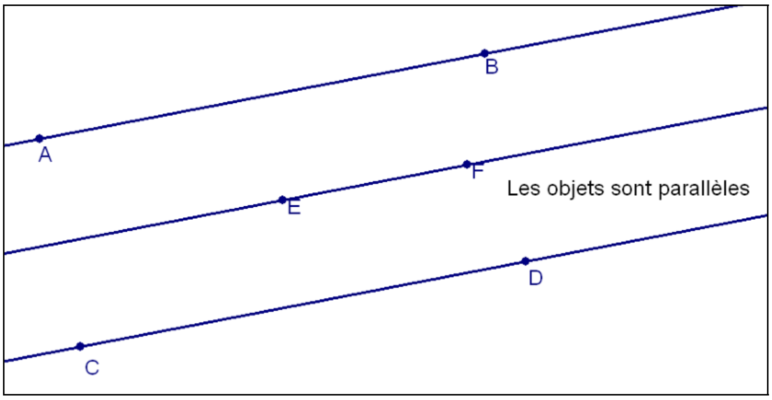
Il faut construire la parallèle à la droite (AB) et passant par le point E.

Placer un point (distinct de E) sur cette parallèle (outil Point sur objet) et le nommer F (outil Nom).

Que peut-on dire des droites (CD) et (EF) ?
Il semble que………..………………………………………………………...………..
……………..………………………………………………………………………….
Le vérifier par le menu test.

Propriété

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
La droite (EF) est parallèle à la droite (AB) et (EF) est ………..…….. à (CD).



Cet exercice fait donc appel au seul outil « menu test » et le déplacement est complètement passé sous silence.

Pourquoi les enseignants proposent-ils ce type d'exercice ? Est-ce parce que déplacer est difficile ou parce que son usage semble au contraire si évident, qu'il est inutile de demander aux élèves de déplacer quand ils utilisent la géométrie dynamique ? Mais est-ce aussi évident pour les élèves que pour les enseignants ?

Toutes ces questions nous ont amenée à conduire une recherche sur le processus d'appropriation du déplacement chez des élèves de Sixième.

Nous présenterons dans un premier temps notre problématique, les hypothèses de travail sur lesquelles repose notre travail de recherche, et les questions de recherche auxquelles nous avons tenté de répondre.

Nous présenterons dans un deuxième temps, au chapitre 2, la série de situations que nous avons conçue afin de pouvoir observer et soutenir la genèse instrumentale du déplacement, et qui nous ont permis d'étudier et d'observer les phénomènes relatifs à nos questions de recherche. Nous indiquerons les choix et les situations que nous avons retenues pour notre analyse et nous présenterons une analyse *a priori* en termes de stratégies.

Au chapitre 3, nous montrerons un premier niveau d'analyse que nous avons effectué, en termes de schèmes. Nous donnerons une description des schèmes d'utilisation construits par les élèves, schèmes d'usage et schèmes d'action instrumentée, en indiquant par quels binômes ils ont été utilisés et dans quelles situations ils sont apparus.

Finalement, dans le chapitre 4, nous essaierons de décrire la genèse instrumentale de chaque binôme en nous aidant de l'analyse *a priori* effectuée dans le deuxième chapitre et des schèmes décrits dans le troisième chapitre.

CHAPITRE I

LA GEOMETRIE DYNAMIQUE ET LE DEPLACEMENT

Dans une première partie, nous présenterons les utilisations données à la géométrie dynamique et le déplacement dans l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie.

Dans une deuxième partie, nous présenterons différents types de déplacement qui nous ont permis de proposer une classification des instruments déplacement selon le rôle du déplacement dans la finalité mathématique de la tâche.

PARTIE A : LA GEOMETRIE DYNAMIQUE ET LE DEPLACEMENT DANS L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

I. La géométrie dynamique et le déplacement dans l'apprentissage de la géométrie

La recherche portant sur l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie a beaucoup évolué au cours de ces années. On s'est intéressé à l'utilisation de la technologie pour l'apprentissage de la géométrie, puis à la création et l'intégration de tâches utilisant la géométrie dynamique dans l'enseignement, au rôle des rétroactions données par le logiciel et aux utilisations faites par les enseignants.

Dès l'apparition de la géométrie dynamique et au cours de ces différentes recherches, une remarque générale était que l'utilisation du déplacement n'était pas si facile, ni si évidente et transparente. Il doit être introduit de manière explicite et organisée par l'enseignant (Strässer, 1992).

Le déplacement constitue un élément essentiel de la géométrie dynamique, nous permettant de passer d'une géométrie statique dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des dessins dans des configurations particulières, à une géométrie dynamique dans laquelle les constructions conservent les propriétés géométriques au cours du mouvement. Cependant, l'appropriation du déplacement n'est pas évidente et les élèves, tout comme les enseignants, ont parfois du mal à l'utiliser et à comprendre ses effets.

Plus précisément, Bellemain et Capponi (1992) ont remarqué que la plupart des binômes préférait demander à l'enseignant de valider leur construction ou alors ils lui demandaient la permission avant de déplacer eux-mêmes. La mise en place du « contrat Cabri » prenait beaucoup de temps.

Rolet (1996) a observé que les étudiants préparant le concours pour devenir Professeurs des Ecoles donnaient plus d'importance aux propriétés spatiales contingentes du dessin (la position des points, l'orientation des segments) qu'aux propriétés géométriques de la figure. Ils utilisaient très rarement le déplacement pour valider leurs constructions, puisque pour eux les propriétés géométriques imposées lors de la construction suffisaient et qu'ils ne ressentaient pas le besoin de déplacer pour valider ce qu'ils ont construit. De même, elle a remarqué que lorsqu'ils déplaçaient, ils restaient dans un espace très limité de peur de « détruire » leur construction.

Le besoin d'utiliser le déplacement ne doit pas seulement venir de l'utilisateur, mais il doit aussi être demandé et stimulé par la situation même et celui qui la conçoit. Tapan (2006) a remarqué que les enseignants du secondaire ont aussi des problèmes d'appropriation du déplacement. Les tâches qu'ils proposent à leurs élèves lorsqu'ils utilisent la géométrie dynamique sont construites sur la base d'exercices en papier-crayon et donnent des fonctions très limitées au déplacement. La plupart de ces tâches utilisent alors le déplacement comme un moyen pour faire constater des propriétés[1] géométriques aux élèves ; alors que des situations où les élèves doivent utiliser le déplacement pour faire des conjectures à partir d'une construction géométrique, ou réaliser une construction et valider la stratégie utilisée, sont pratiquement inexistantes.

Toutes ces recherches convergent sur le fait que l'appropriation du déplacement est donc un processus long et complexe, qui doit être accompagné par l'enseignant et qui doit faire partie du « contrat Cabri ».

1 Par exemple on donne aux élèves un triangle ABC rectangle en A et on leur demande de mesurer AB, AC et BC et de comparer BC^2 et AB^2+AC^2, afin de les faire constater que l'égalité se maintient même lorsqu'on déplace

Concrètement, à quoi sert le déplacement dans la géométrie dynamique ? Comme nous verrons par la suite, le déplacement peut nous permettre de distinguer un simple dessin d'une figure géométrique. Il peut aussi nous permettre d'obtenir des rétroactions du milieu et construire des situations dans lesquelles les connaissances mathématiques des élèves pourront évoluer grâce à ces rétroactions.

I.1 Dialectique dessin/figure

Les représentations graphiques sont essentielles en géométrie, en particulier dans l'enseignement, bien que la réforme des mathématiques modernes ait voulu les éliminer de l'enseignement.

Elles permettent avant tout de *voir*, elles peuvent aussi permettre de conjecturer, d'expérimenter ou de vérifier une propriété démontrée. Mais une représentation peut être ambigüe et des informations qui sont *vues* ne sont pas forcément des propriétés de l'objet géométrique représenté, engendrant de mauvaises interprétations. C'est pour cela que la distinction entre *dessin* et *figure,* introduite par Parzysz (1988) puis reprise par Laborde et Capponi (1994), est importante à faire.

Parzysz (1988, p.80) définit la figure comme étant un objet théorique défini par un texte qui la décrit, un objet imaginaire, une idée. Alors que les dessins ne sont que des illustrations de la figure.

Laborde et Capponi (1994) ont repris cette idée et l'ont exprimé en s'appuyant sur le triangle référent, signifiant, signifié :

> « En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente. Le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. » (Laborde et Capponi 1994, p. 168)

Comme disent les auteurs par la suite, les interprétations pouvant être données à un dessin dépendent d'une part des connaissances mathématiques du sujet, et d'autre part, de la nature du dessin et de comment il est représenté. C'est de là que les ambigüités peuvent survenir et engendrer des problèmes d'interprétation.

Se détacher du dessin pour pouvoir accéder à la figure est une vraie difficulté et ce passage ne se fait pas de manière naturelle. Les élèves doivent apprendre à distinguer quelles propriétés de la figure théorique peuvent être lues sur le dessin, et lesquelles ne sont que des propriétés spatiales du dessin ne pouvant pas être prises en compte dans les hypothèses.

Duval (1994) souligne deux difficultés que rencontrent les élèves et qui les empêchent de comprendre le concept de figure géométrique et de la distinguer d'un dessin: la première vision du dessin et la capacité de discerner les éléments importants dans la figure qui vont permettre de résoudre le problème :

> « Mais, en réalité, pour beaucoup d'élèves, les figures ne fonctionnent pas du tout comme cet outil heuristique lors des phases de recherche. La simple vue d'une figure semble exclure le regard mathématique sur cette figure. Deux types de difficultés persistantes sont, en effet, couramment constatés, aux différents niveaux de la scolarité :
>
> - la résistance à se détacher des formes et des propriétés visuellement reconnues du premier coup d'œil : la figure constitue alors une donnée intuitive qui se suffit à elle-même et qui rend inutile ou absurde, toute exigence de démonstration.
> - l'incapacité à voir dans une figure, c'est-à-dire à y discerner des éléments de solution possibles à un problème posé : cela supposerait que l'attention se focalise sur certaines parties de la figure plutôt que sur d'autres, ou que la figure soit éventuellement enrichie de tracés supplémentaires. Or il y a tellement d'entrées possibles dans une figure que le choix de l'une d'elle paraît arbitraire, *et surtout ce choix semble présupposer que l'on connaisse déjà la solution cherchée !* » (Duval 1994, pp. 121-122)

Dans un environnement de géométrie dynamique tel que Cabri-géomètre, on ne travaille pas sur des dessins statiques, mais sur des représentations qui conservent les propriétés géométriques imposées lors de sa construction au cours du mouvement.

> « Le type de représentation graphique fourni par l'environnement diffère donc du dessin papier-crayon. » (Laborde et Capponi 1994, p. 175)

Le travail en géométrie dynamique introduit donc un nouvel objet à manipuler pour les élèves, une représentation dans laquelle les propriétés géométriques de la figure pouvant être lues sont celles qui se conservent au cours du déplacement, et les constructions pouvant être validées sont celles qui conservent les propriétés demandées au cours du déplacement. Ces éléments feront partie du « contrat Cabri ».

> « […] les logiciels de géométrie dynamique, Cabri ou GeoplanW, sont considérés comme des outils qui favorisent la distinction entre dessin et figure, fondement du travail géométrique (Laborde, 1999), le déplacement de points permettant de distinguer les connaissances spatiales des connaissances géométriques. Cabri ou GéoplanW doivent permettre d'appréhender le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie théorique en s'appuyant sur l'évolution du statut de la figure et de la validation (Kuzniak et Houdement, 2002) […] » (Grugeon-Allys 2008, p.74)

Le passage du dessin à la figure ne se fait pas naturellement ni automatiquement, mais se construit peu à peu et les logiciels de géométrie dynamique peuvent aider et assister les élèves à faire ce passage. En particulier, l'appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin statique d'une figure géométrique dynamique et faciliter le passage de l'un à l'autre. Cela nous amène à notre première hypothèse de travail :

Hypothèse de Travail 1 : L'appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin d'une figure géométrique et faciliter ce passage.

I.2 De GI à GII

Houdement et Kuzniak (2006, pp.180-181), en s'inspirant des travaux de Gonseth (1945-1955), ont défini trois paradigmes de la géométrie à partir des différents niveaux de pensée mobilisés dans chaque paradigme : intuition, expérience et raisonnement déductif.

La Géométrie I ou « géométrie naturelle » a pour source de validation la réalité, le sensible. L'intuition, l'expérience et la déduction s'exercent sur des objets matériels, réels, à l'aide de la perception et des instruments. Le dessin est objet d'étude et de validation. On privilégie l'espace intuitif et physique.

La Géométrie I correspond essentiellement à la géométrie de l'école primaire.

Dans la Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle » la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives basées dans un système axiomatique aussi précis que possible. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, les dessins ont ici un rôle de support, mais la validation doit passer par des propriétés géométriques et des démonstrations. L'intuition est liée aux figures et la déduction se fait par des démonstrations basées sur des axiomes. On privilégie les propriétés et les démonstrations.

La Géométrie II correspond essentiellement à la géométrie du collège et du lycée.

> « L'objectif est d'amener les élèves à passer d'une géométrie G1 portant sur des « dessins », la validation étant essentiellement d'ordre perceptif, à une géométrie G2 portant sur des figures, la validation s'appuyant sur des raisonnements construits sur des objets conceptuels. » (Grugeon & Duvert 2001, p.5)

Utiliser un logiciel de géométrie dynamique amène l'élève/utilisateur à travailler dans GII et à utiliser ses connaissances mathématiques. Cependant, un élève peut rester dans GI et travailler sur des dessins statiques, en les validant de manière perceptive. Le déplacement n'a pas de sens pour cet élève-là, à part créer des effets spatio-graphiques. L'élève continuera à raisonner sur une représentation statique et cherchera à revenir au dessin de départ. Si un élève au contraire cherche à obtenir une construction qui conserve les propriétés géométriques au cours du déplacement, il devra la construire avec des primitives géométriques. L'élève se place alors du côté de GII et mobilise ses connaissances mathématiques pour pouvoir faire une construction qui pourra être validée par le déplacement. L'intérêt d'utiliser les logiciels de géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie est donc d'inciter les élèves à faire le passage de GI vers GII et de les accompagner dans ce processus.

Ainsi, notre deuxième hypothèse de travail est :

> Hypothèse de Travail 2 : L'utilisation de la géométrie dynamique et l'appropriation du déplacement devraient inciter les élèves à passer d'une « géométrie naturelle » à une « géométrie axiomatique naturelle » et à mobiliser leurs connaissances mathématiques

I.3 Le déplacement comme rétroaction du milieu dans la Théorie de Situations Didactiques

Une hypothèse fondamentale de la didactique des mathématiques, fondée sur la théorie piagétienne, est que le sujet apprend en s'adaptant à un *milieu* (Brousseau, 1998) antagoniste producteur de contradictions et de déséquilibres. L'élève apprend alors en adaptant et en modifiant ses stratégies à la situation.

Dans Cabri-géomètre, le déplacement permet au sujet d'obtenir des rétroactions au cours de son activité. Lors d'une tâche de construction, le déplacement peut apporter, entre autres, des rétroactions pour invalider les constructions erronées :

> « L'évolution des procédures des élèves est due, comme prévue, en grande partie au déplacement. On a pu distinguer deux fonctions du déplacement dans cette évolution :
> - il disqualifie les procédures au jugé (regroupant ce qu'on appelle les usages au jugé et ceux mettant en jeu ou combinés avec des primitives géométriques), ce qui entraine les élèves à analyser le dysfonctionnement du Cabri-dessin et à le modifier en conséquence
> - il met visuellement en évidence des invariants géométriques et suscite ainsi la rectification de procédures erronées » (Laborde et Capponi 1994, p.194)

Ces deux fonctions du déplacement, non réductibles l'une à l'autre, offrent des rétroactions à différents niveaux : l'une permet d'invalider les constructions n'utilisant pas de propriétés géométriques, l'autre permet de mettre en avant les invariants géométriques de la figure.

Les rétroactions obtenues grâce au déplacement peuvent permettre au sujet d'évoluer dans ses stratégies. Cependant, pour pouvoir comprendre ces rétroactions et agir sur la stratégie à mettre en place, le sujet doit mobiliser ses connaissances mathématiques :

> « C'est parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une production du sujet. » (ibid., pp. 175-176)

L'environnement offre des rétroactions pertinentes qui permettent non seulement d'invalider les stratégies erronées des élèves, mais aussi de les faire évoluer. Ces caractéristiques, comme Laborde et Capponi le montrent, nous permettent de proposer Cabri comme un *milieu* (Brousseau, 1998) riche en rétroactions :

> « L'environnement Cabri-géomètre offre des possibilités d'organisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce contrôle [des rapports entre visuel et géométrique] pour trois raisons :
> - les phénomènes visuels prennent de l'importance de par la dimension dynamique du Cabri-dessin ;
> - ces phénomènes sont contrôlés par la théorie puisqu'ils sont le résultat d'une modélisation graphique d'un modèle analytique de propriétés géométriques ;
> - les possibilités sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objets et de façon précise. » (op. cit, p. 205)

L'organisation d'un milieu autour de Cabri et l'obtention de stratégies gagnantes va dépendre de la situation, des connaissances mathématiques nécessaires pour permettre à l'élève d'interpréter les rétroactions obtenues par le déplacement et des connaissances qu'on cherche à faire évoluer. Si les rétroactions ne peuvent pas être comprises par les élèves, le milieu ne peut pas jouer son rôle.

Notre troisième hypothèse de travail est donc la suivante :

Hypothèse de Travail 3 : La géométrie dynamique offre un *milieu* potentiellement riche en rétroactions qui peut permettre à l'élève d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie gagnante.

I.4 Difficultés d'appropriation et d'utilisation du déplacement par les élèves

L'appropriation du déplacement n'est ni évidente ni immédiate pour les élèves comme pour les enseignants. Comme disent Healy, Hoelzl, Hoyles et Noss (1994a, b), il faut apprendre aux élèves à faire des constructions qui ne peuvent pas être « messed up » :

> "[…] they should not be able to 'mess up' their drawings – that is if a basic point was dragged the drawing should keep its essential features. […] Our aim was to help them to see the necessity of making explicit the geometric relationships in their drawings in their drawings through the use of constructions such as parallel lines, perpendicular lines and midpoints." (Healy et al. 1994b, p. 13)

Certains élèves, de peur de « détruire » leur construction, préfèrent se restreindre à déplacer très localement (Rolet, 1996), d'autres vont même aller jusqu'à faire des constructions qui ne peuvent pas être déplacées en « punaisant » les points de base (Acosta, 2008).

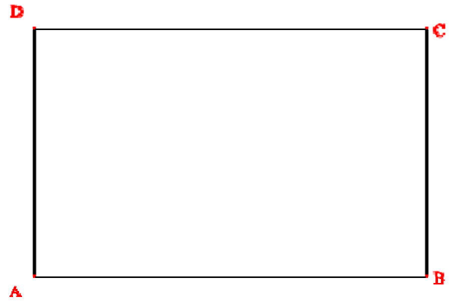
Le déplacement devrait être utilisé par les élèves de manière spontanée, en particulier pour valider leurs constructions, mais cela ne fait pas partie du contrat habituel. Avoir le contrôle de la validité des actions n'est pas naturel pour les élèves et cela demande de faire des changements explicites dans le contrat didactique.

> « […] Par exemple, dans la première séance sur les quadrilatères les élèves n'utilisent pas le déplacement pour invalider leurs constructions même si cela a été institutionnalisé dans les séances d'initiation mais, à la fin des séances sur ce thème, le déplacement était un moyen de validation/invalidation pour beaucoup d'élèves. » (Assude & Gélis 2002, p. 271)

Mais apprendre à déplacer signifie non seulement l'utiliser de manière spontanée pour valider sa construction ou savoir identifier les propriétés géométriques d'une figure donnée, mais signifie aussi déplacer tous les objets possibles. Il ne suffit pas de déplacer un ou deux points pour vérifier si une figure a ou n'a pas une certaine propriété. Une construction peut même être faite de manière à ce qu'un seul de ses points permette l'invalidation. Les exercices inclus dans les manuels demandent parfois de déplacer un ou deux points d'une construction, alors que les points proposés ne permettent justement pas de déterminer si la construction a été réalisée correctement ou pas. Par exemple :

Exercice N° 43 p.104 (Magnard 6ème)

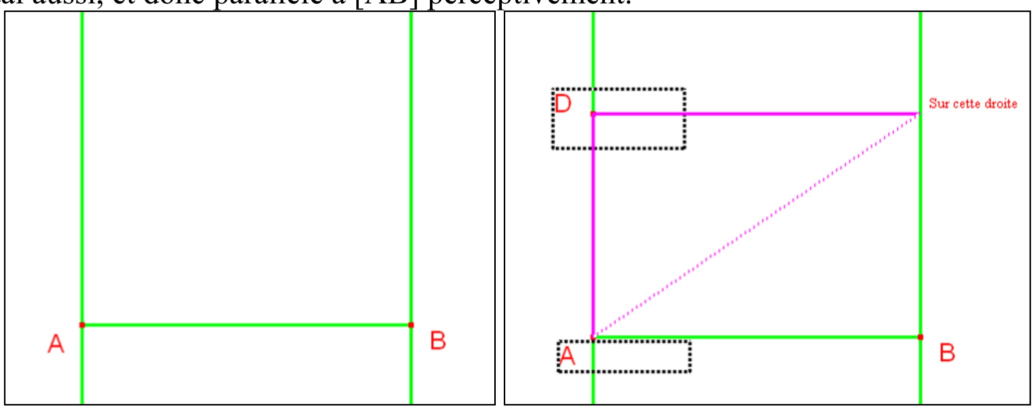
1) Place deux points A et B. Utilise les outils : « point », « segment », « droite perpendiculaire », « polygone » et « cacher/montrer » pour construire un rectangle ABCD.



2) Déplace le point A ou le point B.
Écris tes observations.

Le déplacement devrait permettre l'invalidation de constructions erronées, cependant, dans cet exercice, déplacer les points A et B peut ne pas être suffisant.

Par exemple, le déplacement de A ou B n'invalide pas la construction suivante : construire un segment [AB] horizontal et la perpendiculaire à [AB] passant par A, puis celle passant par B. Construire un rectangle ABCD en utilisant l'outil « polygone », mais en plaçant les points C et D sur les droites perpendiculaires de manière perceptive, de sorte que [CD] soit horizontal aussi, et donc parallèle à [AB] perceptivement.



Seul le déplacement des points C ou D permet d'invalider la construction.

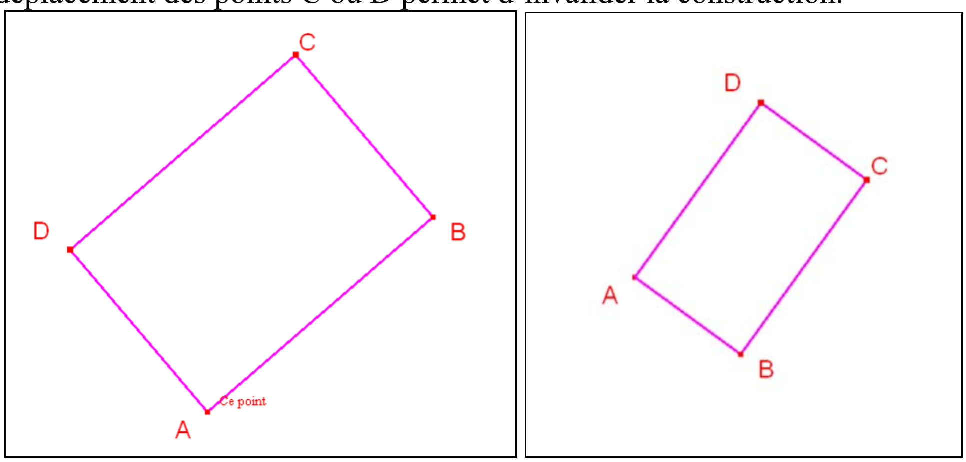


***Figure 1.** Déplacer A ou B ne permet pas d'invalider cette construction.*

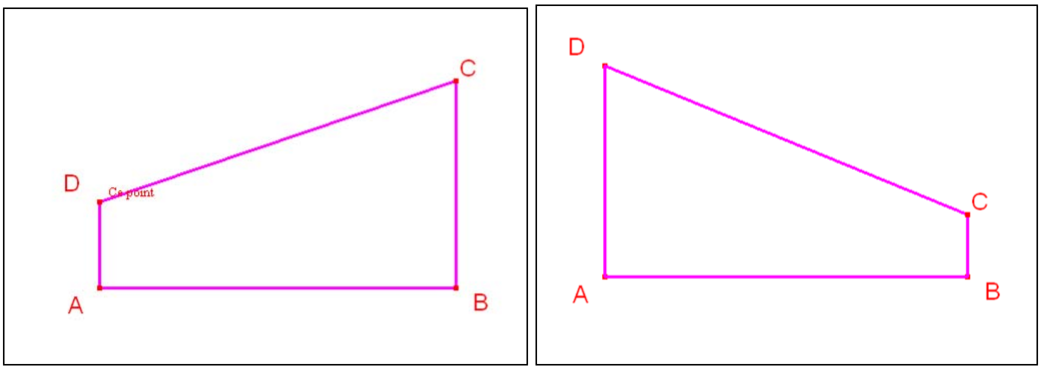


Figure 2. *Seul le déplacement de C ou D permet d'invalider cette construction*

Si le déplacement ne permet pas d'invalider une fausse construction, à quoi sert-il dans une telle tâche ? Quelles sont les attentes en termes d'objectifs d'apprentissage d'un enseignant qui pose ce problème à ses élèves ? Il paraît nécessaire enseigner aux élèves à déplacer non un ou deux points mais tous les points de la figure, afin de vérifier sa validité.

Le besoin de déplacer ne doit pas seulement venir de l'élève/utilisateur, mais doit aussi être demandé et stimulé par la situation et par l'enseignant. Comme nous allons le voir par la suite, les tâches proposées généralement par les manuels et par les enseignants font appel à une utilisation du déplacement très limitée (voire inexistante, certains exercices ne demandent pas de déplacer et s'appuient sur les logiciels de géométrie dynamique pour obtenir des dessins « plus précis »). Il faut donc trouver des situations qui stimulent l'utilisation du déplacement et qui font appel à différents types de déplacements.

II. La géométrie dynamique et le déplacement dans l'enseignement de la géométrie

Nous allons regarder comment les potentialités reconnues de la géométrie dynamique, et en particulier du déplacement, dans l'apprentissage sont exploitées et mises en œuvre dans l'enseignement, d'abord dans les programmes et les manuels, puis dans les pratiques enseignantes.

II.1 Ce que disent les programmes et les manuels

Depuis plusieurs années, les programmes ont inclus l'utilisation des calculatrices et de l'ordinateur dans le cours de mathématique. L'environnement informatique est proposé comme une alternative au papier-crayon, qui peut permettre une meilleure conceptualisation aux élèves :

> « Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre. » (B.O. hors série n° 4 du 9 septembre 2004, p.12)

L'utilisation de l'ordinateur, et en particulier des logiciels de géométrie, devrait aussi permettre aux élèves de faire le passage du dessin à la figure, en explorant une construction afin de trouver ses propriétés géométriques :

> « Les situations dans lesquelles les élèves ont à identifier des propriétés et des figures simples dans une figure complexe à reproduire demandent un travail d'analyse qui est nécessaire aux élèves pour leurs apprentissages ultérieurs. Il s'agit d'une activité essentielle. Il en va de même de petits problèmes de type « construction » et « lieux géométriques ». L'usage d'outils informatiques permet aussi une mise en œuvre de ce travail d'analyse. *[B2i]* » (ibid., p.13)

Dans la pratique, peu d'enseignants mettent en œuvre ce type de situations par manque de temps, de connaissances instrumentales ou un manque d'éléments et de données leur permettant de mettre en œuvre des situations utilisant l'ordinateur.

> "I have to cover the whole syllabus," "I haven't got the time to let pupils resolve the problems," "it takes too long," "I can't waste my time with this kind of activities"; such complaints are frequently heard from teachers. These complaints can even be considered as an argument against teaching based on problem solving because "it requires a lot of time and gets in the way of covering the prescribed material." The recurrent theme of "lack of time" points to time as one of the main problems in classroom management. (Assude 2005, p.183)

Laborde (2001) caractérise le rôle de Cabri dans les tâches mises en œuvre par les enseignants suivant quatre catégories :

> "We propose to classify the tasks according to the role that the designer of a task attributes to Cabri and the degree of change that is anticipated. We distinguish *a priori* four types of roles:
> - Cabri is used mainly as facilitating material aspects of the task while not changing it conceptually;
> - Cabri is supposed to facilitate the mathematical task that is considered as unchanged: this is the case where Cabri is used as a visual amplifier (Pea, 1985) in the task of identifying properties; it is assumed that it is easier to observe that three lines always intersect in one point during the deformation of the diagram by the drag mode than in a static paper-and-pencil diagram;
> - Cabri is supposed to modify the solving strategies of the task due to the use of some of its tools and to the possibility that the task might be rendered more difficult;
> - The task itself takes its meaning or its 'raison d'être' from Cabri." (Laborde 2001, p.293)

Nous avons réalisé une petite étude de manuels de $6^{ème}$, en cherchant à voir quels manuels proposent des activités utilisant les logiciels de géométrie dynamique et pour ceux qui en proposent, quelles activités sont présentées. Une telle étude existe dans Caliskan (2006) pour des manuels plus anciens.

Les manuels étudiés sont :

- DIDIER
  Dimathème, Edition 2005
- HACHETTE
  Diabolo, Programme 2005
  Phare, Programme 2005
- HATIER
  Triangle, Programme 2005
  multi·math, Programme 2005
- MAGNARD
  Maths $6^{è}$, Edition 2005

Des six manuels étudiés, seulement deux proposent des activités utilisant un logiciel de géométrie dynamique : Phare et Magnard.

MANUEL PHARE

Le manuel **Phare** inclue une section « Exercices avec un logiciel de géométrie dynamique » dans les exercices proposés dans les chapitres de géométrie plane et dans le chapitre portant sur les angles.

CHAPITRE	NOMBRE TOTAL D'EXERCICES	GEOMETRIE DYNAMIQUE	%	FAISANT APPEL AU DYNAMISME
REGLE ET COMPAS	95	3	3,16%	3 sur 3
DROITES PERPENDICULAIRES ET PARALLELES	80	2	2,50%	2 sur 2
SYMETRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE	77	3	3,90%	2 sur 3
SYMETRIE ET FIGURES USUELLES	83	4	4,82%	3 sur 4
ANGLES	86	2	2,33%	2 sur 2

La plupart de ces exercices utilisent le dynamisme et demandent de déplacer un ou plusieurs points. Ces exercices contiennent des étapes de construction qui sont suivies par une question du type « Déplacer le point… et vérifier que… » ou « Qu'observe-t-on ? » ou encore « Quelle est la nature du quadrilatère/ triangle ? ».

Le déplacement est surtout utilisé pour demander aux élèves de constater une propriété géométrique (un peu plus de 75% des exercices). Aucune activité dans laquelle les élèves doivent faire des conjectures à partir d'une construction et les valider n'est proposée.

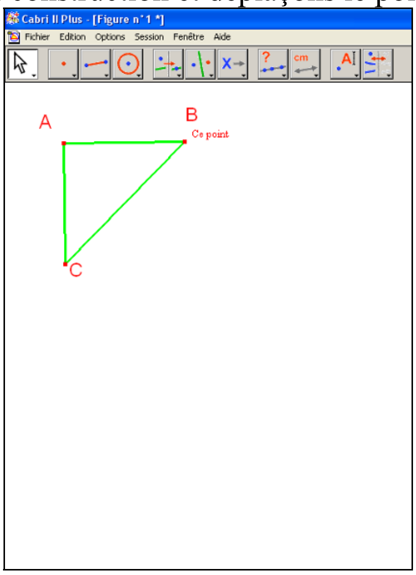
Un exemple d'exercice type proposé dans le manuel Phare est le suivant :

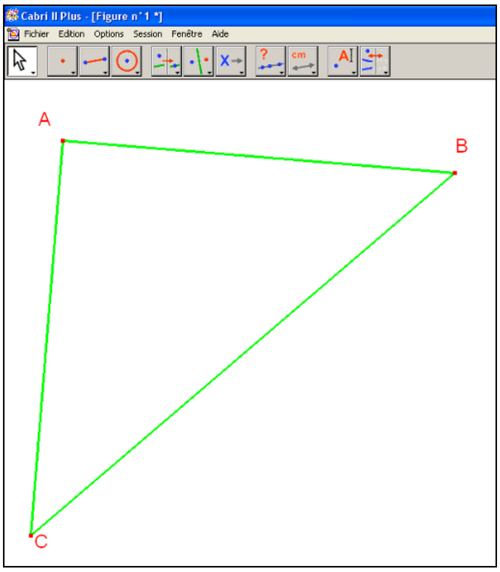
Exercice 69 p. 169 (Droites perpendiculaires et droites parallèles)

Construire un triangle rectangle isocèle

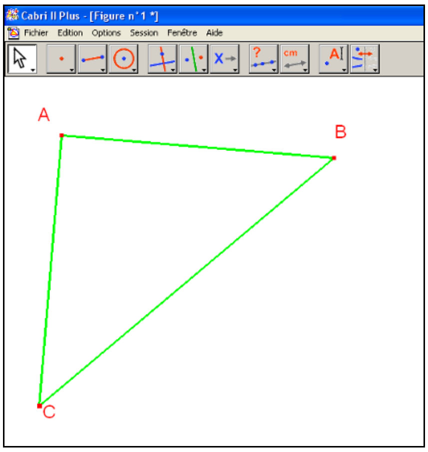
1. Placer deux points puis les nommer A et B.
2. Tracer la droite (AB).
3. Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point A. Nommer (d) cette droite.
4. Construire le cercle de centre A et passant par le point B.
5. Nommer C un des points d'intersection de la droite (d) avec le cercle.
6. Cacher les droites et le cercle, puis tracer les segments [AB], [AC] et [CB].
7. Déplacer le point B. Quelle est la nature du triangle ABC ?

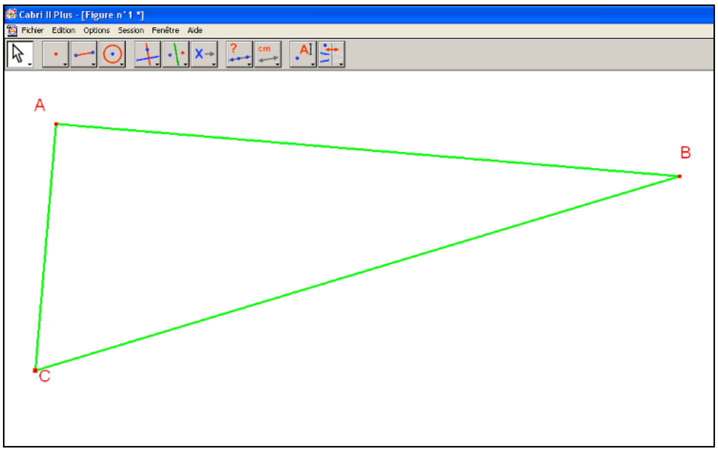
Faisons la construction et déplaçons le point B :





L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique et du déplacement dans cet exercice devrait permettre de faire beaucoup plus que se limiter à demander à un élève de constater et réécrire l'énoncé de l'exercice. Un élève sans connaissances instrumentales suffisantes peut faire une construction complètement erronée et ne pas savoir ce qu'il doit constater. De plus, si un élève ne construit pas le cercle de centre A passant par B, mais construit un cercle de centre A qui passe perceptivement par B, au moment de déplacer le point B, le triangle ne va pas rester isocèle ; l'élève sera-t-il capable d'invalider sa propre construction ?





MANUEL MAGNARD

Le manuel de maths de **Magnard** inclut aussi une section « Avec un logiciel » parmi les exercices proposés. La quantité d'exercices proposés dans cette section est plus importante que celle proposée dans le manuel Phare (Phare propose en moyenne trois exercices par chapitre utilisant la géométrie dynamique, alors que Magnard en propose un peu plus de 4 exercices par chapitre).

CHAPITRE	NOMBRE TOTAL D'EXERCICES	GEOMETRIE DYNAMIQUE	%	FAISANT APPEL AU DYNAMISME
FIGURES : PARALLELES ET PERPENDICULAIRES	65	6	9,23%	5 sur 6
FIGURES : LONGUEURS EGALES	90	6	6,67%	4 sur 6
SYMETRIE	62	4	6,45%	4 sur 4
PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	76	4	5,26%	3 sur 4
LES ANGLES	82	2	2,44%	1 sur 2

La plupart de ces exercices demande de déplacer un ou plusieurs points spécifiques : « Déplace C et vérifie que …», « Déplace le point A ou le point B », « Déplace certaines de ces droites pour obtenir… », « Déplace les points pour vérifier cette observation. ».

Comme dans le manuel Phare, la plupart des exercices qui demandent de déplacer, sont des exercices pour faire constater des propriétés aux élèves (environ 70%). Cependant dans Magnard, la variété des types de tâches proposées est plus large, ils demandent aussi de faire des conjectures, de valider leur propre construction ou de déplacer un ou plusieurs objets de la construction afin d'obtenir une configuration particulière.

Un exemple d'un exercice proposé par ce manuel est le suivant:

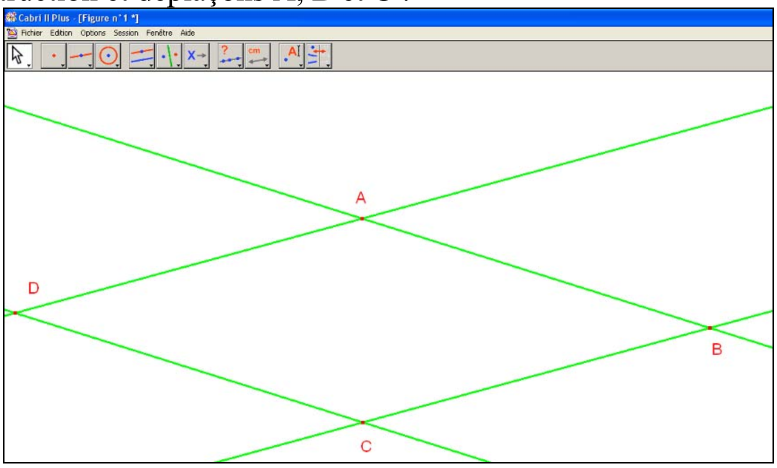
Exercice 70 page 130 (Figures : longueurs égales)

1. Place trois points A, B et C.

Trace les droites (AB) et (BC). Trace la parallèle à la droite (AB) passant par C et la parallèle à (BC) passant par A. Elles se coupent en D.

2. Est-il possible, en déplaçant les points A, B et C, de faire apparaître un dessin ressemblant à :
   - un rectangle ABCD ? un rectangle ACBD ?
   - un losange CDAB ? un losange CDBA ?
   - un carré BDCA ? un carré BADC ?

Faisons la construction et déplaçons A, B et C :



En déplaçant A, et en contrôlant un des angles, on peut obtenir un rectangle ABCD :

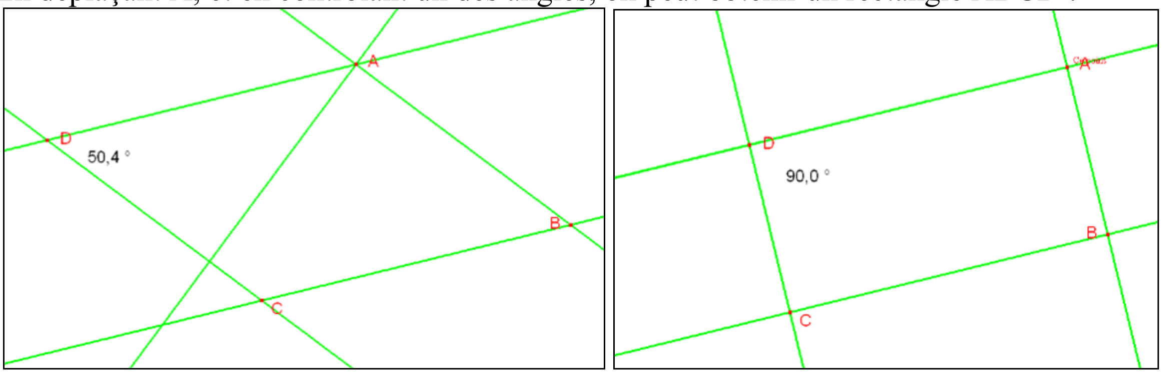
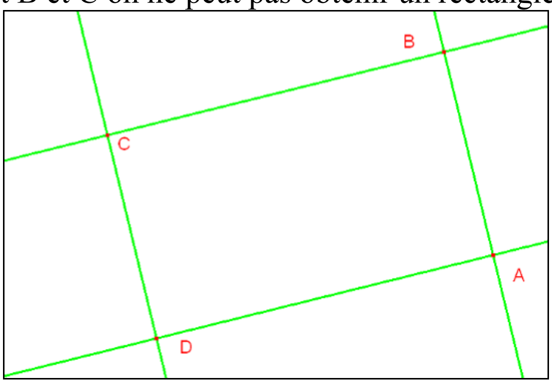


Figure 3. *On peut utiliser la mesure d'angle et déplacer un point jusqu'à obtenir 90,0°, ou tracer une perpendiculaire à un des côtés du parallélogramme (la perpendiculaire à AB passant par A) et déplacer un des points jusqu'à superposer un autre côté à cette perpendiculaire (AD se superpose avec la perpendiculaire).*

Mais même en déplaçant B et C on ne peut pas obtenir un rectangle ACBD :



En déplaçant A et B on peut obtenir un losange CDAB, mais on ne peut pas obtenir CDBA :

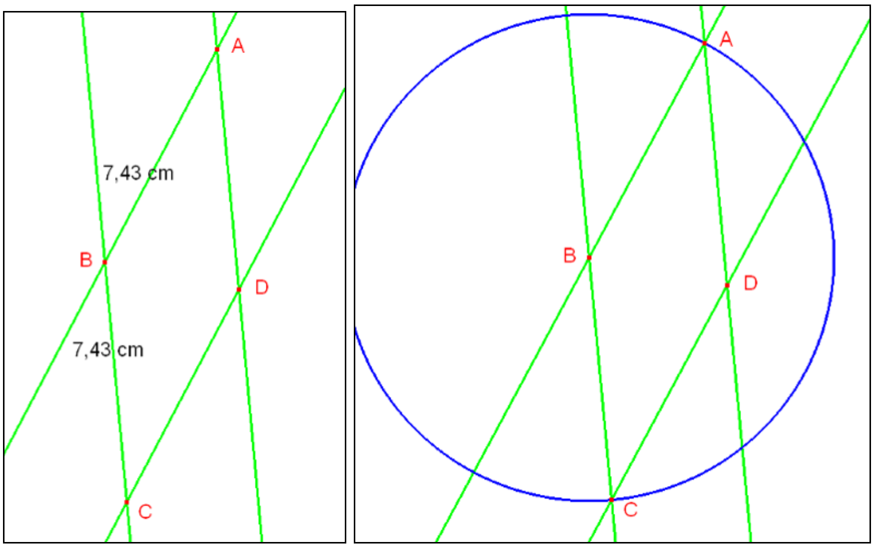


Figure 4. *On peut contrôler les côtés consécutifs de même mesure avec la longueur des côtés ou en traçant un cercle de centre un sommet (B) et passant par un des sommets non opposés (A), puis déplacer*

Finalement, on peut obtenir un carré BADC, mais on ne peut pas obtenir un carré BDCA :

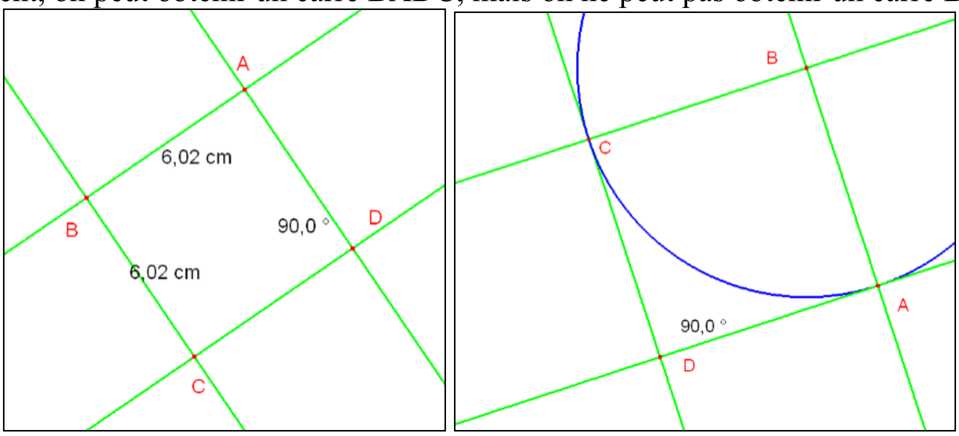


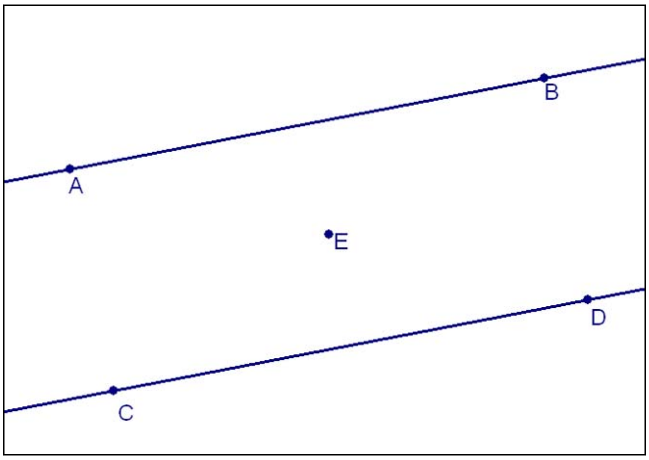
Figure 5. *Deux contrôles à effectuer : angle et mesure des côtés*

Cette brève analyse des manuels de 6^{è} nous a permis de voir d'une part que l'utilisation du déplacement qui est plus utilisée est celle de faire constater aux élèves une propriété déjà vue en cours ou leur faire remarquer la consigne de l'exercice ; d'autre part, que même si la plupart des exercices proposés demandent de déplacer, il reste encore quelques exercices « parasites » qui utilisent la géométrie dynamique pour faire des dessins « précis ».

Cela paraît peut-être surprenant, mais si on va regarder même dans des textes plus spécialisés, comme *Les dossiers de l'ingénierie éducative hors série : Activités avec un logiciel de géométrie dynamique 6^{e}, 5^{e}*, on trouve des exercices où le déplacement n'apparaît pas :

Deuxième exercice : ouvrir le fichier Parallèles2 (chapitre sur les « Droites parallèles, droites perpendiculaires, 6è »)

On obtient :



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Il faut construire la parallèle à la droite (AB) et passant par le point E.

Placer un point (distinct de E) sur cette parallèles (outil Point sur objet) et le nommer F (outil Nom).

Que peut-on dire des droites (CD) et (EF) ?

Il semble que…………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

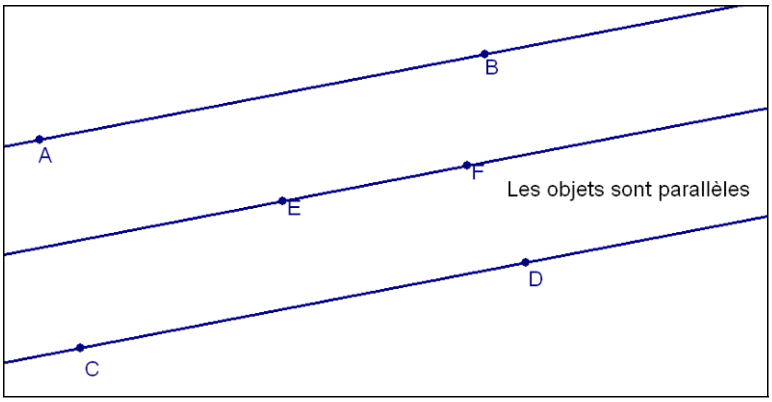
Le vérifier par le menu test.

Propriété

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

La droites (EF) est parallèle à la droite (AB) et (EF) est ……………….. à (CD).

Le seul outil du logiciel qui est utilisé est le « menu test ». Certes l'environnement apporte une économie dans les tracés et une réponse à la question « Ces deux droites sont parallèles ? », mais quel apprentissage peut être fait par les élèves ? Quel est l'intérêt d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique dans un tel exercice ?



Dans notre analyse nous avons vu aussi que le déplacement pour valider une construction est utilisé dans les exercices des manuels et qu'ils mentionnent les points à déplacer. Mais notre analyse rapide montre que ces points peuvent ne pas permettre d'invalider une construction faite au jugé.

Les programmes recommandent l'utilisation des environnements de géométrie dynamique pour l'identification de propriétés géométriques et la reproduction de figures, mais comme nous l'avons vu, cette tâche est pratiquement inexistante dans les manuels. Le premier décalage a donc lieu entre ce qu'indiquent les programmes et ce que proposent les manuels. Nous allons voir maintenant ce qui se passe du côté des enseignants.

II.2 Du côté des enseignants

L'appropriation d'un outil prend du temps et demande des connaissances spécifiques à cet outil. Cela nécessite une certaine expérience et une habitude de manipulation de l'outil. Nous allons illustrer cela, dans le cas du déplacement, par un exemple de Cardona (2006) :

Un enseignant demande à ses élèves de construire un rectangle avec le logiciel CabriJunior qui fonctionne sur une calculatrice. Un binôme lui apporte son travail et l'enseignant teste la construction qui semble rester un rectangle lors du déplacement. Il déplace tous les points de la figure qui peuvent être déplacés (A, B et D), mais il remarque alors que le déplacement du point A crée un effet inattendu : le rectangle est translaté, au lieu que le segment [AB] soit modifié.

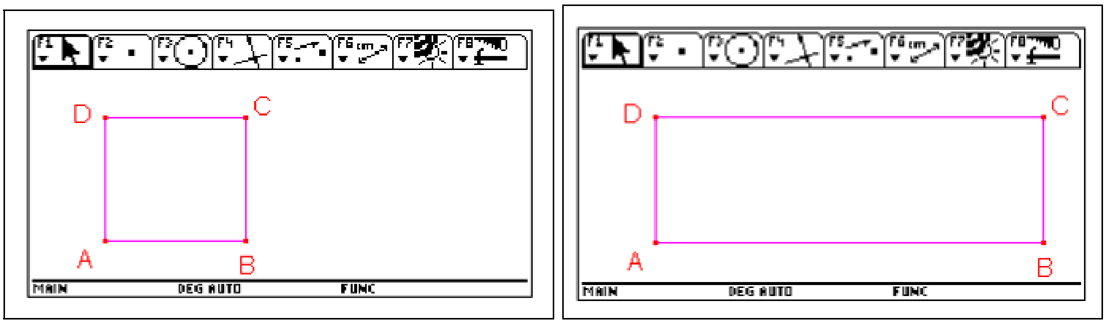


Figure 6. *Le point B se déplace sur l'horizontale en ne modifiant que la longueur du segment [AB]*

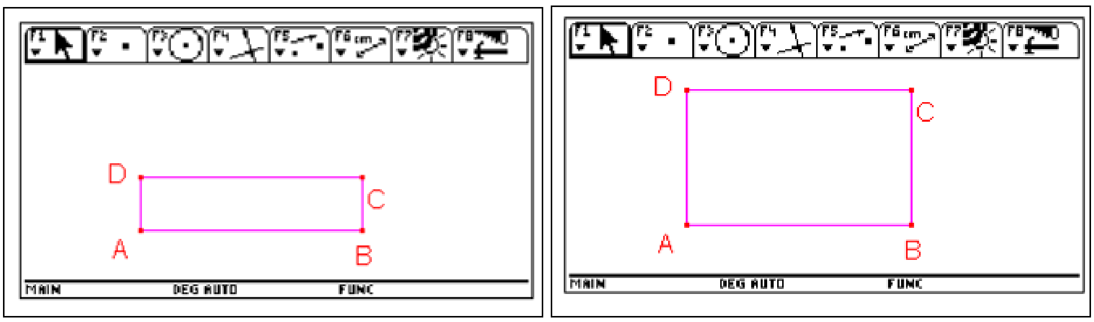


Figure 7. *Le point D se déplace sur une verticale, ne modifiant que la longueur du segment [AD]*

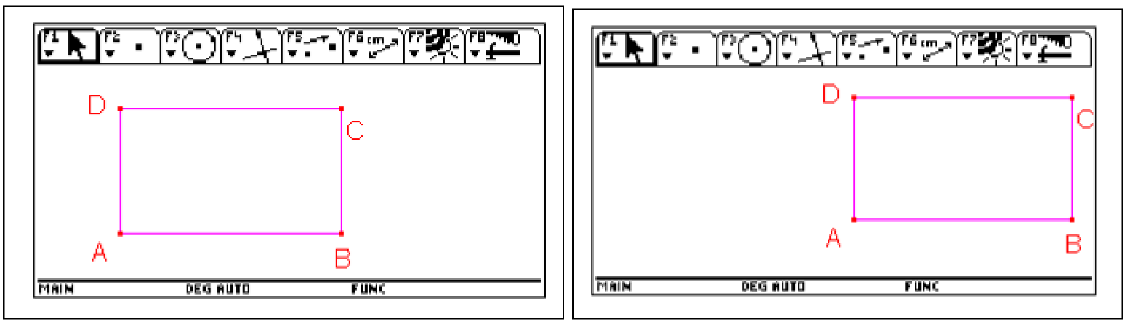
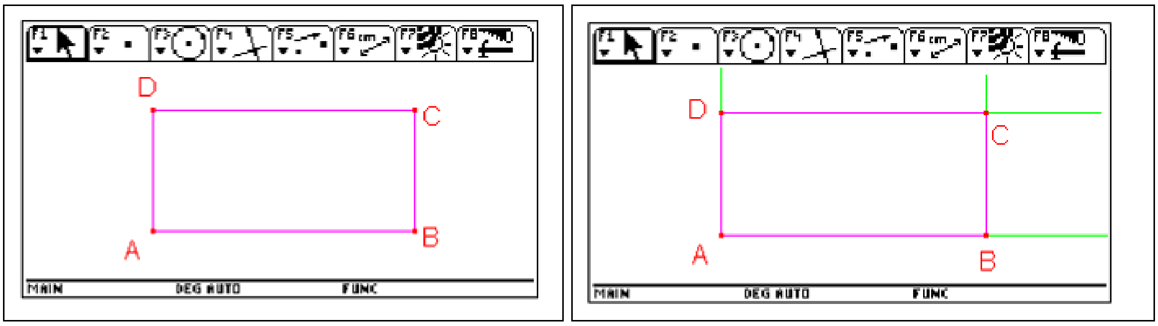


Figure 8. *Le déplacement du point A ne provoque que la translation du rectangle, sans modifier la taille ni la direction du segment [AB]*

L'enseignant décide alors d'utiliser l'outil « *Cacher/Montrer* » et il voit apparaître les demi-droites [AB), [AD), [BC) et [DC).



En déplaçant les demi-droites, il s’est rendu compte que la construction des élèves était faite de manière perceptive, par le tracé de demi-droites verticales et horizontales, puis d’un quadrilatère, puis en cachant les demi-droites. Cette construction ne pouvait être invalidée qu’en passant par l’outil « *Cacher/Montrer* », puis en déplaçant les demi-droites et pas les points A, B ou C, puisque Cabri conserve la distance entre deux points sur une droite, quand la droite est déplacée par translation, et les directions lors du déplacement.

Les élèves avaient construit une demi-droite [Ax) horizontale et une demi-droite [Ay) verticale. Ils ont placé un point B sur [Ax) et un point D sur [Ay). Puis ils ont tracé une demi-droite [Bz) verticale et une demi-droite [Dw) horizontale, et ils ont placé C à l’intersection de ces deux demi-droites.

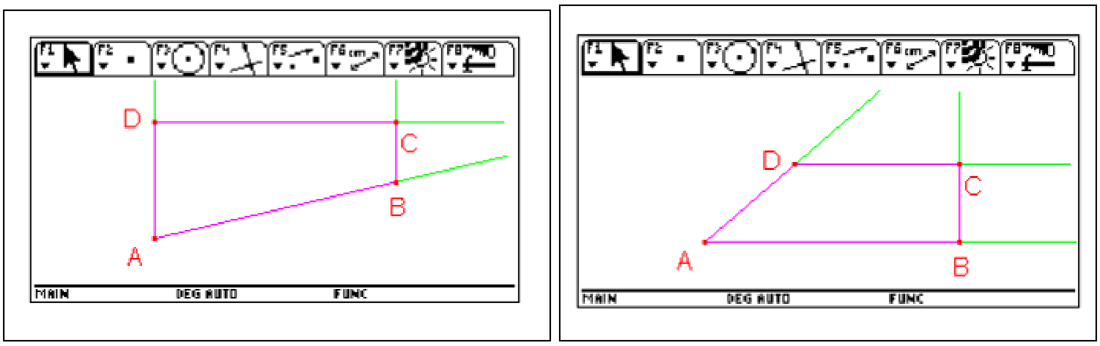


Figure 9. *Le déplacement des demi-droites, et pas celui des points A, B et C, provoque la déformation du quadrilatère et la non conservation des angles droits : ce n’est pas un rectangle.*

Grâce à sa pratique enseignante et à ses connaissances instrumentales, l’enseignant a pu invalider la construction faite au jugé par les élèves. L’anticipation du comportement du rectangle lorsqu’on déplace ses points lui a permis de passer par l’outil Cacher/Montrer pour voir quelle était la stratégie utilisée par les élèves.

L’étude des manuels que nous avons réalisée montre que l’utilisation du déplacement reste très limitée et l’utilisation la plus courante est celle de faire constater aux élèves des propriétés géométriques. Tapan (2006) avait fait cette même remarque lorsqu’elle s’était intéressée aux pratiques enseignantes et aux activités qu’ils utilisées en classe. La géométrie dynamique et le déplacement peuvent être utilisés dans des tâches très diverses comme nous allons le voir par la suite, mais les manuels n’exploitent pas ces potentialités.

PARTIE B : LES INSTRUMENTS DEPLACEMENT

I. Différentes utilisations du déplacement

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, l'appropriation du déplacement peut être problématique pour les élèves comme pour les enseignants. Les élèves, en général, utilisent très rarement le déplacement et ont du mal à comprendre les effets produits par celui-ci, comme remarquaient Balacheff et Soury-Lavergne (1996). Ils n'interprètent pas toujours géométriquement ce qui est observé selon les attentes de l'enseignant. L'élève peut donner une démonstration mathématique pour caractériser un objet géométrique, sans comprendre que c'est cela ce qui explique la relation de dépendance entre certains points de la figure. L'élève peut aussi se contenter de dire qu'une construction bouge vers le haut, vers le bas, qu'elle s'agrandit ou s'aplatit, en restant très descriptif et spatial, sans produire de raisonnement mathématique sous-jacent.

Pour les élèves ce n'est pas naturel de faire des constructions qui doivent être validées et encore moins qui conservent les propriétés géométriques au cours du déplacement (par tous les déplacements possibles). Cela fait partie des éléments à instaurer dans le « contrat Cabri » (une construction ne peut être validée que si elle conserve ses propriétés géométriques au cours du déplacement). Très souvent, on observe les élèves utiliser le déplacement pour ajuster afin d'obtenir un dessin ayant les propriétés demandées. Cette utilisation du déplacement, qui diffère par exemple d'une utilisation du déplacement pour observer des invariants, est souvent faite par les élèves dans une phase de recherche et d'exploration. Elle constitue une étape d'essai et erreur dans laquelle les élèves obtiennent des rétroactions du logiciel et adaptent leur stratégie à ce qui leur est demandé.

Nous allons voir que cette utilisation du déplacement réalisée par les élèves, n'est qu'une utilisation parmi d'autres. Les usages du déplacement peuvent être distingués suivant le rôle qu'il joue dans les stratégies de résolution de la tâche.

I.1 Différentes utilisations du déplacement dans une démarche de preuve et de conjecture

Arzarello, Olivero, Paola, Robutti (Arzarello et al. 2002 ; Olivero 2002) ont donné une catégorisation de différentes utilisations données au déplacement par les élèves lors d'une démarche de résolution d'un problème ouvert en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel que Cabri. Ces déplacements ont été utilisés essentiellement dans la recherche de conjectures et leur validation.

Voici la catégorisation qu'ils ont donnée :

- Le déplacement erratique (*wandering dragging*) : déplacement de manière aléatoire des points de base, sans plan précis, pour découvrir des configurations intéressantes ou des régularités de la figure.
- Le déplacement limité (*bound dragging*) : déplacement des points semi-déplaçables, c'est-à-dire des points qui se trouvent sur un objet et qui ne peuvent être déplacés que sur cet objet.
- Le déplacement guidé (*guided dragging*) : déplacer les points de base de la construction pour lui donner une forme particulière.
- Le déplacement du lieu muet (*Lieu muet dragging* or *dummy locus dragging*): déplacement d'un point de base pour que la construction *conserve* une certaine propriété géométrique ; le point déplacé suit une trajectoire, même si l'utilisateur n'en est pas conscient : le lieu n'est pas visible et ne 'dit' rien à l'utilisateur, qui ne voit pas forcément que le point se déplace suivant un lieu.

- Le déplacement linéaire (*line dragging*) : tracer de nouveaux points correspondant aux positions occupées par un point de la figure lorsque celle-ci conserve une certaine propriété et qu'elle suit une ligne (une droite, un cercle…).
- Le déplacement lié (*linked dragging*) : lier un point à un objet et le déplacer sur cet objet.
- Le déplacement pour valider une construction (*dragging test*) : déplacer des points déplaçables ou semi-déplaçables pour voir si la construction garde les propriétés apparentes de l'état initial. Si c'est le cas, alors la figure passe le test ; dans le cas contraire, si la figure ne passe pas le test, alors la construction n'était pas construite selon les propriétés géométriques attendues.

Ces différents déplacements ont été utilisés par les élèves à différents moments dans la résolution du problème ouvert et occupent alors une place différente dans le processus. Le regard, le raisonnement et le contrôle utilisés par les élèves ne se situent pas au même niveau. C'est la raison pour laquelle Arzarello et al. (2002, p. 69) ont classé ces différents déplacements selon le type de contrôle utilisé : ascendant, descendant ou abduction (voir le graphique ci-dessous).

Le processus ascendant va du dessin à la théorie, en explorant une situation, cherchant des régularités, des invariants, etc. Alors que le processus descendant va de la théorie au dessin, afin de valider ou invalider des conjectures, vérifier des propriétés, etc. L'abduction se situe entre les deux.

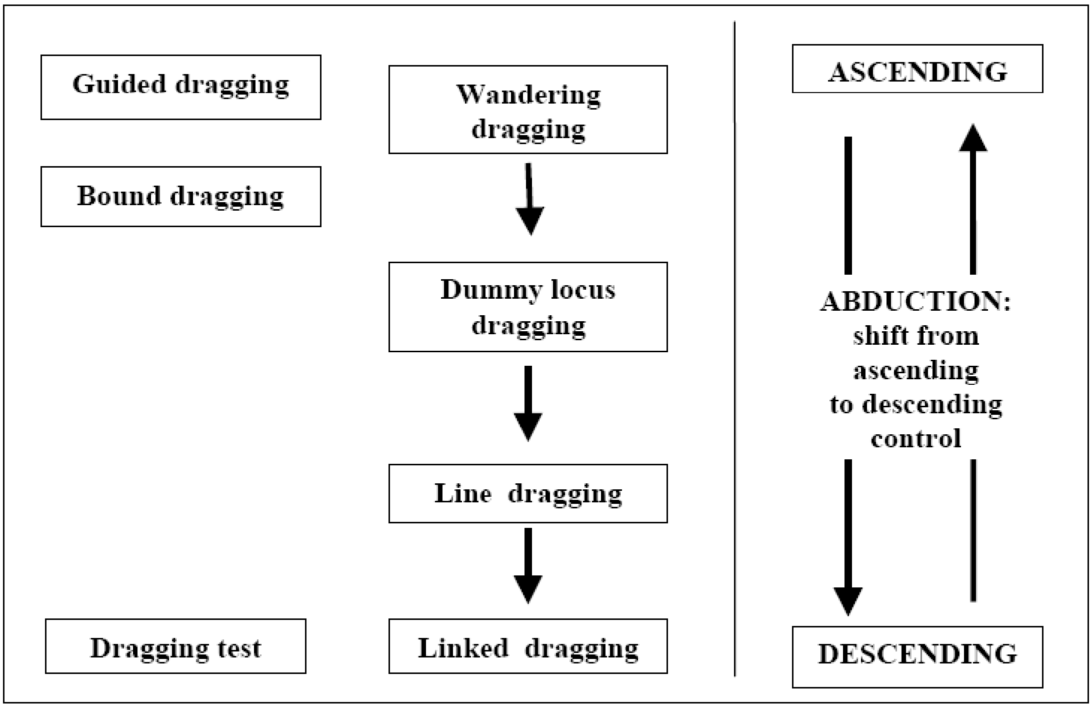


Figure 10. *Classification des différents déplacements selon la place occupée dans le processus de recherche de conjectures et la validation de celles-ci.*

Ce graphique nous donne une idée du rôle que joue le déplacement dans une démarche de preuve. Cependant, nous considérons que ce schéma se restreint à la démarche de preuve et ne constitue pas une analyse des différents déplacements qui peuvent être utilisés en général. Nous proposerons par la suite une classification plus générale, qui va au-delà de l'utilisation du déplacement dans une démarche de preuve.

I.2 Cinéma-déplacement vs. Photo-déplacement

Lorsqu'un élève/utilisateur déplace dans un logiciel de géométrie dynamique, il peut avoir deux types de regards différents : il peut avoir un regard discret et ne prendre en compte qu'un état initial et un état final, ou alors, il peut avoir un regard continu et observer les variations de la construction au cours du mouvement.

Pour décrire ces deux types de regards, Olivero (2002) a introduit les concepts de photo-déplacement et de cinéma-déplacement (film-déplacement).

Le photo-déplacement ou déplacement discret est :

> "Modalities which suggest a discrete sequence of images over time: the subject looks at the initial and final state of the figure, without paying attention to the intermediate instances. The aim is to get a particular figure." (Olivero 2002, p.141)

Le cinéma-déplacement ou déplacement continue est :

> "Modalities which suggest a film: the subject looks at the variation of the figure while moving and the relationships among the elements of the figure. The aim of dragging is the variation of the figure itself." (ibid., p.141)

Ces deux utilisations du déplacement dépendent en partie de la tâche demandée, puisque certaines tâches ne peuvent être traitées ou résolues qu'utilisant le cinéma-déplacement <u>ou</u> le photo-déplacement. Mais l'utilisation de l'un ou de l'autre dépend aussi du sujet et de la stratégie qu'il utilise pour résoudre la tâche.

Ces deux utilisations du déplacement, discret ou continu, ont chacune leurs caractéristiques et permettent de voir des éléments différents au cours de l'exploration de la figure.

Le photo-déplacement et le cinéma-déplacement sont des utilisations du déplacement peuvent permettre, selon la tâche à résoudre, de repérer des éléments différents. Une utilisation *discrète* du déplacement permet d'obtenir plusieurs dessins statiques et peut donc être plus naturelle pour les élèves, alors qu'une vision dynamique et *continue* peut être plus problématique.

Pour illustrer le photo-déplacement et le cinéma-déplacement, nous reprenons la situation donnée par Olivero dans sa thèse (Olivero 2002, p. 105) et les stratégies utilisées par les élèves.

Le problème ouvert donné aux élèves était le suivant :

You are given a quadrilateral ABCD. Construct the perpendicular bisectors of its sides: a of AB, b of BC, c of CD, d of DA. H is the intersection point of a and b, K of b and c, L of c and d, M of a and d.

Investigate how HKLM changes in relation to ABCD.

Prove your conjectures.

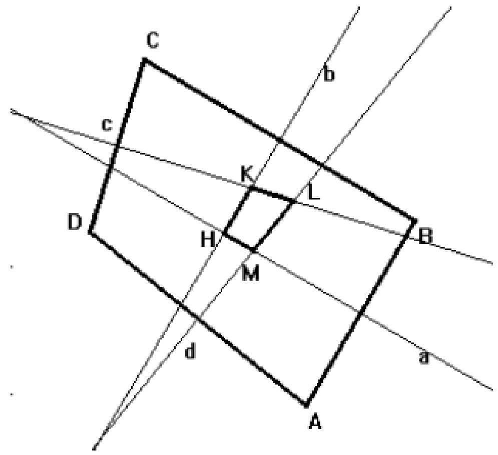


Figure 6.1. B&T. Perpendicular bisectors of a quadrilateral

Soit ABCD un quadrilatère. Construire les médiatrices des côtés du quadrilatère : a de AB, b de BC, c de CD, d de DA. H est le point d'intersection de a et b, K de b et c, L de c et d, M de a et d.
Chercher comment change HKLM en fonction de ABCD.
Démontrer vos conjectures.

Olivero donne comme exemple deux élèves qui ont deux manières différentes de travailler :

Bartolomeo, énonce la conjecture, selon laquelle HKLM est un point quand ABCD est un rectangle, et veut tester sa conjecture. Pour cela, il ne prend en compte que les configurations où ABCD est un rectangle. Il utilise le photo-déplacement pour observer des états spécifiques et pouvoir valider sa conjecture.

Tiziana au contraire, déplace et ne s'arrête que lorsqu'elle trouve une configuration particulière qui lui paraît intéressante, mais observe les états intermédiaires, de manière continue. Le cinéma-déplacement lui permet donc de voir des configurations qu'elle n'aurait peut-être pas réussi à avoir en papier-crayon.

I.3 Construction molles et constructions robustes

Dès l'apparition de la géométrie dynamique, et pendant plusieurs années, l'enjeu des tâches données aux élèves était d'obtenir des constructions robustes, c'est-à-dire qui conservaient toutes les propriétés géométriques au cours du déplacement. Cependant, Healy (2000) s'est rendu compte que de nombreux élèves passaient par des constructions ne comportant que certaines propriétés, puis cherchaient à partir de celles-ci comment obtenir les autres propriétés demandées. Du point de vue de l'apprentissage, cette stratégie ne devrait pas forcément être invalidée, puisqu'elle permet d'explorer la construction et de chercher les conditions pour obtenir la construction demandée. C'est ainsi qu'elle a introduit la distinction entre constructions *robustes* et constructions *molles*.

Les constructions molles, au contraire des constructions robustes, n'ont pas toutes les propriétés géométriques demandées, et le déplacement est utilisé pour obtenir la (ou les) propriété(s) manquante(s) de manière contingente.

Lorsqu'on construit un rectangle et qu'on le déplace, dans le cas d'une construction robuste, on s'attend à ce que la figure reste un rectangle au cours du déplacement. Cependant, on peut également obtenir un rectangle de façon molle en déplaçant un parallélogramme de façon à ce qu'il ait un angle droit et qu'il devienne alors un rectangle.

Ces deux utilisations du déplacement sont complémentaires, puisque la construction molle permet de construire une stratégie pour réussir à obtenir la construction robuste, et le déplacement n'a pas le même rôle dans ces deux types de constructions :

> « In robust constructions, dependency is demonstrated by the fact that a relationship remains invariant through dragging. During the dragging test attention can move from general to specific as a "family" of Cabri-drawings with the same geometrical make up is produced. In soft constructions, this is not the case. Instead dragging is part of construction not verification and students observe how the dependent property becomes evident at the point in which from the specific during thorough searches for the set of loci in which the given conditions are fulfilled." (Healy 2000, p.111)

A partir de ces définitions, le *déplacement mou* est défini comme le déplacement utilisé au cours du travail dans une construction molle.

Gousseau-Coutat (2006) s'est appuyé sur ce type de déplacement pour construire une ingénierie didactique autour de la notion de propriété géométrique au collège. Le but principal était de faire les élèves distinguer les hypothèses de la conclusion dans un théorème, laquelle est obtenue par déplacement.

Cette distinction a aussi été travaillée par Camargo, Samper et Perry (2007). Elles se sont servies du déplacement mou pour faire travailler les étudiants sur un problème ouvert dans lequel ils devaient émettre des conjectures et les démontrer. A l'aide de Cabri, ils pouvaient explorer une construction molle et trouver des conditions P qui permettent d'obtenir une propriété Q donnée. Elles ont remarqué que certains étudiants ont des problèmes à distinguer les hypothèses dans leur conjecture, les propriétés imposées lors de la construction ou obtenues par déplacement mou, de la conclusion, qui est le résultat qui doit être observé après avoir déplacé.

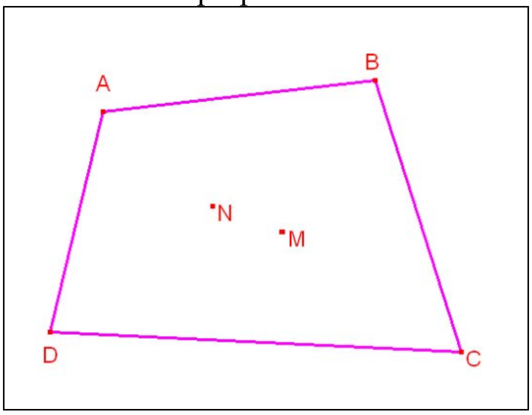
Le déplacement mou et le déplacement pour ajuster peuvent être parfois confondus, puisque les deux sont utilisés pour obtenir une propriété géométrique demandée. Cependant, l'intention avec laquelle ils sont utilisés n'est pas la même. Le déplacement mou implique des attentes par rapport à la configuration à obtenir, le but est d'obtenir une configuration particulière et analyser ses caractéristiques. On est conscient du fait que la construction sur laquelle on travaille n'est pas robuste (par rapport aux propriétés qu'on obtient en déplaçant) et que l'on n'a pas toutes les caractéristiques recherchées. Alors que lorsqu'on utilise le déplacement pour ajuster, on cherche à obtenir une construction robuste, mais n'étant pas capable de l'obtenir, on utilise le déplacement pour ajuster afin d'obtenir les propriétés géométriques manquantes, en pensant qu'elles pourraient être obtenues par déplacement (voir aussi Acosta, 2008).

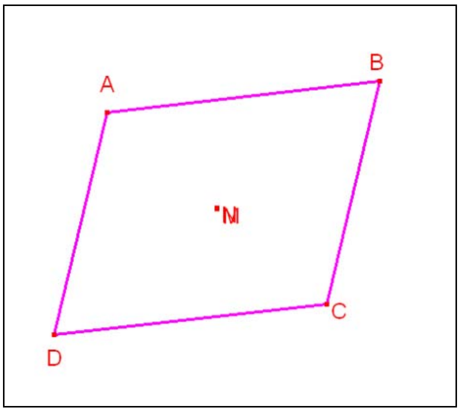
Pour illustrer le déplacement mou, nous reprenons une situation utilisée par Gousseau-Coutat dans sa thèse (Gousseau-Coutat 2006, pp. 68-72). Le problème donné est le suivant :

Constructions Déplacement	• **Construis un quadrilatère ABCD.** Sélectionne l'outil *polygones* de la boite *Lignes*. A chaque clic nomme les sommets A, B, C, D, reviens au point A pour terminer. • **Construis M milieu de [AC] et N milieu de [BD]** • **Déplace le point C pour que les points M et N soient confondus.**
Observations	Que devient ABCD ? --

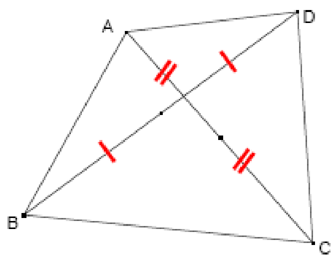
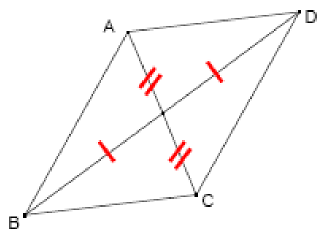
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

Cette tâche s'appuie sur l'utilisation du déplacement mou pour faire travailler les élèves sur l'identification et la différenciation des contraintes ou hypothèses, de la conclusion dans une propriété.





Les élèves devraient pouvoir arriver à une formulation proche de la propriété à institutionnaliser :

Si on construit …		Alors on observe …
Un quadrilatère ABCD tel que :  	Les diagonales se coupent en leur milieu	ABCD est un parallélogramme 

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

I.4 Trace et trajectoire

En géométrie dynamique, certains outils nécessitent l'utilisation du déplacement. L'outil « Trace » par exemple, permettant d'obtenir la trajectoire d'un point, est un de ces outils.

On peut obtenir la trajectoire du point attrapé et le déplacer :

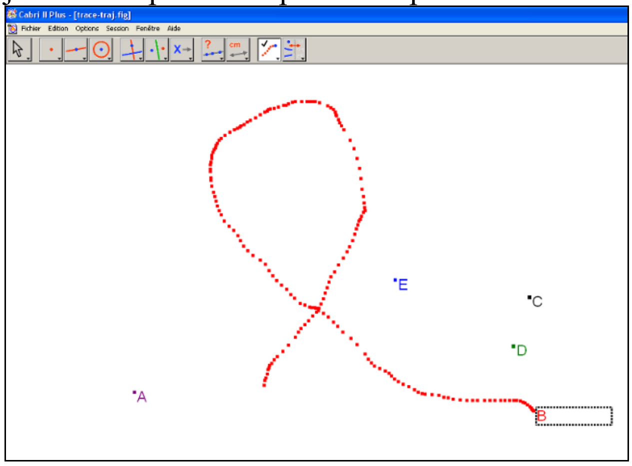


Figure 11. *On attrape et on déplace le point B et on obtient la trajectoire du point B en rouge.*

On peut déplacer un point et obtenir la trajectoire d'un autre point :

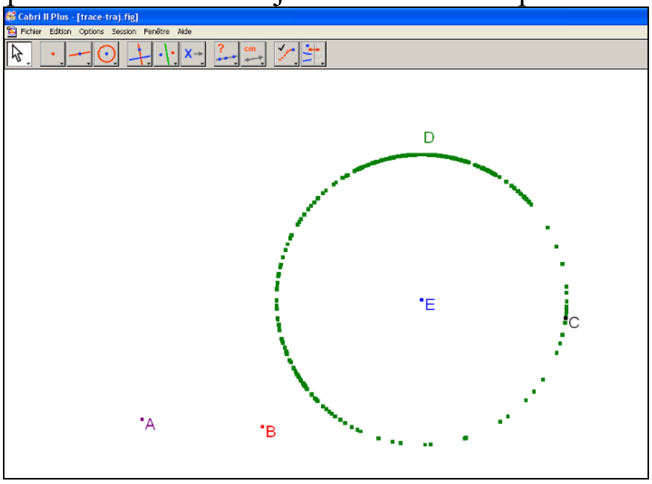


Figure 12. *On attrape le point B, on le déplace et on obtient la trajectoire du point D en vert.*

Ou on peut déplacer un point, obtenir sa trajectoire et celle d'un autre point :

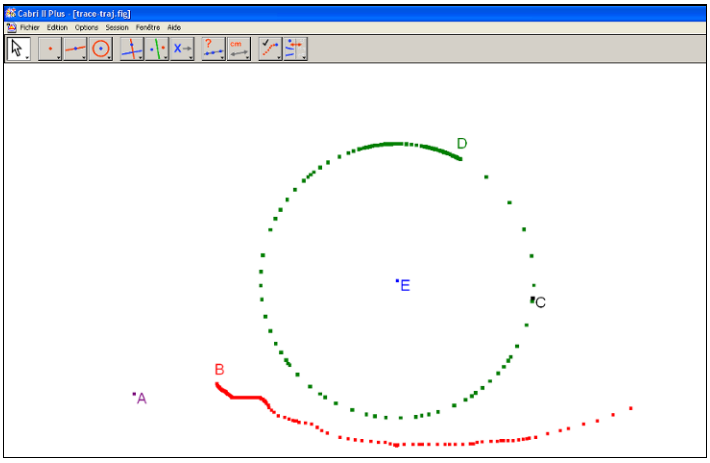


Figure 13. *On attrape B, on le déplace et l'on obtient la trajectoire du point B en rouge et celle du point D en vert.*

Un autre outil dans Cabri qui permet d'obtenir la trajectoire d'un point, mais qui est de nature différente, est le lieu géométrique :

> "“Trace” allows the user to instruct certain objects on screen to leave a trace when they are moved, either manually using the mouse or through the use of the “Animation” tool. The trace does not exist as an object of Cabri, only as a set of pixels highlighted on the screen. Roughly speaking then, in Cabri II, “Trace” emphasises a dynamic interpretation of the representation of a trajectory of a point, while “Locus” is characterised in a functional manner by a one-to-one correspondence between two points P and P', representing, at least implicitly, the image of a set of points for a certain application.” (Jahn 2002, p.79)

La trace permet donc de voir la trajectoire laissée par un point, c'est un objet *ponctuel*, après avoir réalisé un déplacement, alors que le lieu géométrique est un objet *global* qui peut être obtenu grâce au logiciel. Ces deux outils offrent deux aspects et deux visions assez différents de la trajectoire d'un point ; la trace ne peut pas être manipulée a posteriori, alors que le lieu géométrique permet de travailler dessus.

En mathématiques, la trajectoire d'un point est intéressante pour diverses raisons. Falcade (2006), par exemple, s'est appuyé sur l'utilisation de la trajectoire et son double signifié pour faire travailler les élèves sur la notion de fonction :

> « En fait, la trajectoire incorpore un double signifié, à la fois ponctuel et global, puisque elle est en même temps « une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et « un objet en soi ». » (Falcade 2006, p. 91)

Ces deux aspects de la trajectoire, successions de positions et objet géométrique global, ne sont pas toujours compris par les élèves.

I.5 Boîtes noires

Donner une définition en papier crayon de ce qu'est qu'une boîte noire résulte complexe car les boîtes noires n'ont du sens que dans un logiciel de géométrie dynamique. L'idée générale est de partir d'une figure initiale à laquelle on applique une macro pour obtenir un résultat ; les élèves explorent donc la figure initiale et la figure obtenue à travers la macro et essayent de découvrir quels sont les liens entre les deux. Ils peuvent faire des constructions supplémentaires, tracer des droites, mesurer des côtés ou des angles, afin de découvrir comment obtenir la deuxième figure à partir de la première (Charrière, 1996).

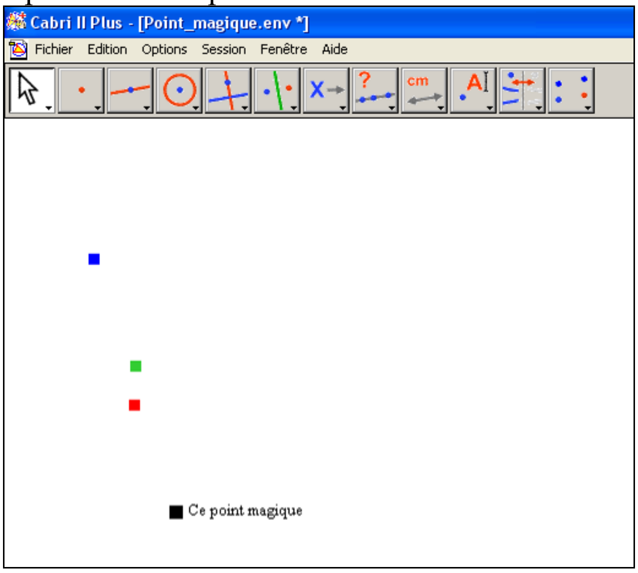
Montrons ceci à travers un exemple :

On demande aux élèves d'ouvrir le fichier « Point_magique.env ».

« Sur la figure Cabri, il y a un gros point noir et trois points (vert, rouge et bleu). Le point noir a été construit à partir des trois autres points. Le but de l'activité est de refaire cette construction en observant le modèle, notamment le déplacement des points.

Créez trois points (un rouge, un vert et un bleu) et reconstruisez le quatrième point. Il doit se comporter comme le modèle. Si vous pensez avoir trouvé, vous pouvez vérifier en appliquant la macro « Point magique » à vos trois points de départ.

Vous devez obtenir un « point magique » qui se superpose exactement avec celui que vous avez construit, y compris pendant les déplacements. »



Les élèves doivent donc explorer le déplacement des points bleu, vert et rouge, pour découvrir quel est le lien entre ces trois points et le point noir.

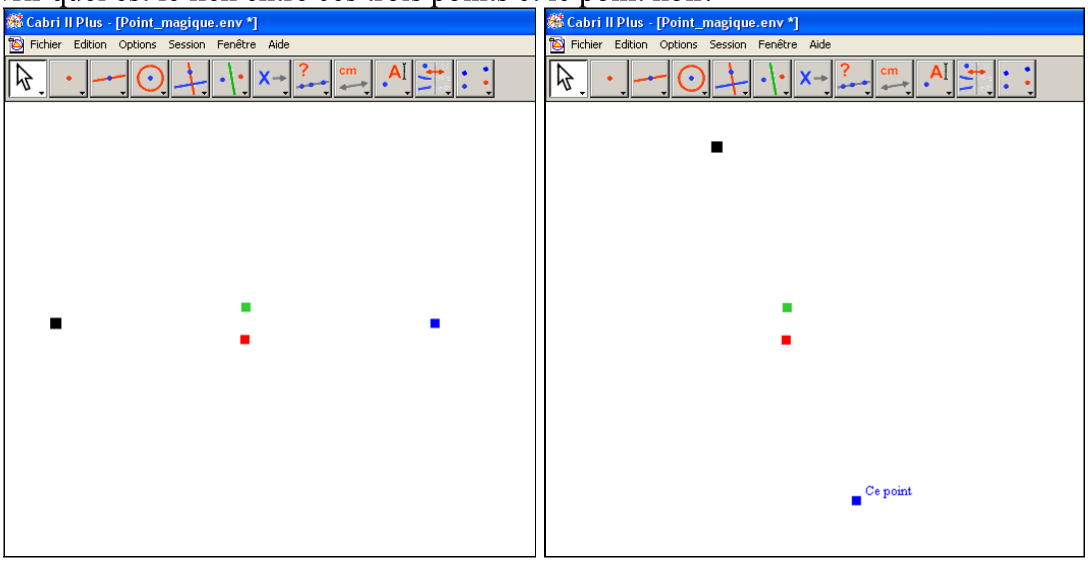


Figure 14. *Lorsqu'on déplace le point bleu, le point noir se comporte comme l'image du point bleu par une symétrie centrale*

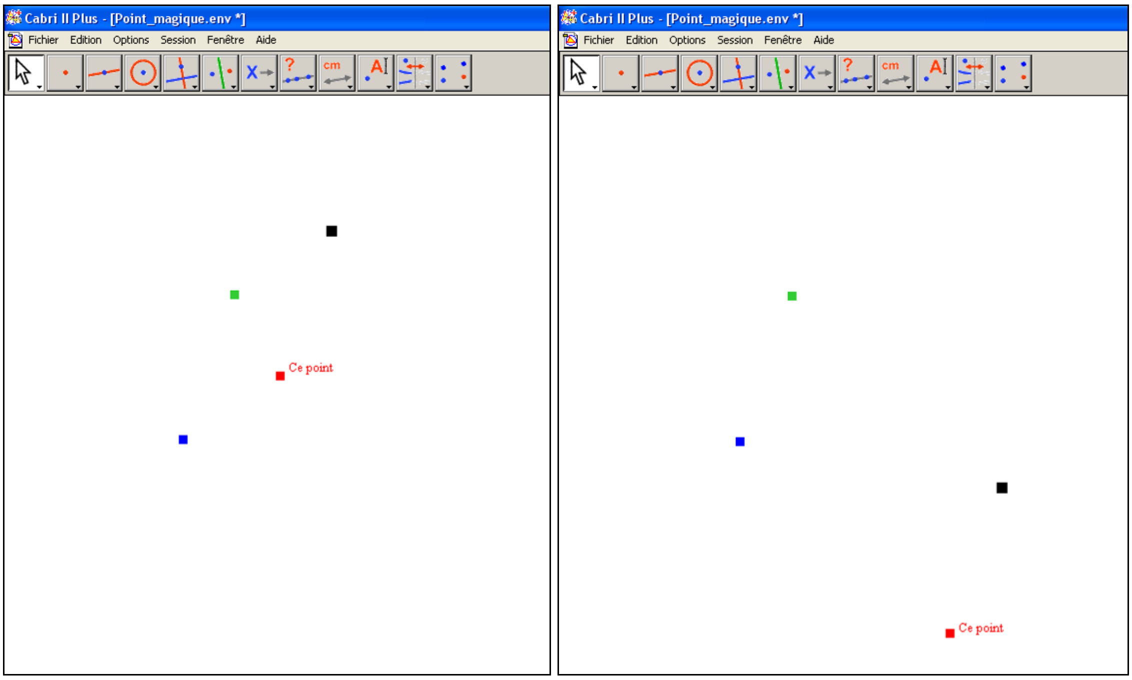


Figure 15*. Lorsqu'on déplace le point rouge (ou le point vert), le point noir est translaté en conservant toujours la même distance au point rouge.*

Ils peuvent tracer des droites ou des segments, mesurer des longueurs ou des angles, demander au logiciel si des droites sont par exemple parallèles.

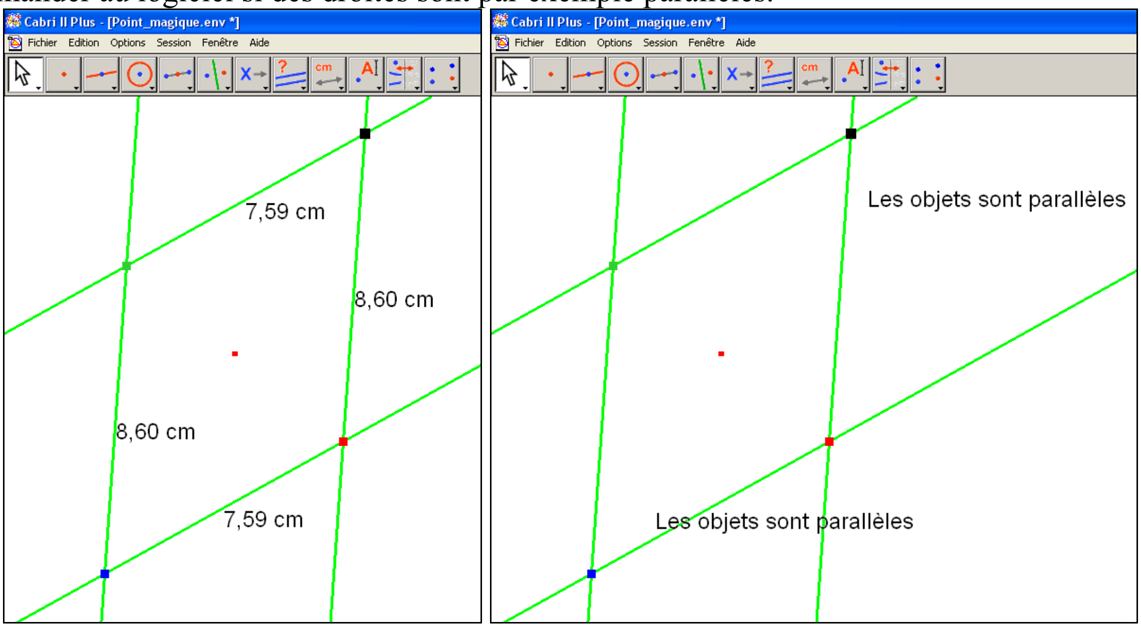


Figure 16. *Les droites sont parallèles deux à deux et les côtés opposés sont de même mesure : le quadrilatère forme donc un parallélogramme*

Après avoir tracé des droites, mesurer des côtés, avoir demandé au logiciel si les droites opposées étaient parallèles, les élèves peuvent conclure que le point noir, le point magique, est le quatrième sommet du parallélogramme.

Les élèves peuvent alors partir de trois points (bleu, vert et rouge), tracer un parallélogramme et vérifier, en utilisant la macro et le déplacement, la validité de leur construction.

Le déplacement permet dans un premier temps l'exploration de la construction, puis, la validation ou invalidation des conjectures et des stratégies.

I.6 Quelques conclusions

Les utilisations du déplacement sont très diverses. Arzarello et al. (2002) ont identifié les usages du déplacement lors d'une démarche de conjecture et de preuve. L'élève peut favoriser une certaine utilisation du déplacement selon la tâche qu'il cherche à résoudre et le stade dans lequel il se trouve (ascendant, descendant ou d'abduction). Afin de voir le rôle du déplacement d'une manière plus générale, nous donnerons une classification qui prend en compte certains des déplacements identifiés par Arzarello.

Olivero (2002) a observé qu'il y a deux types de regards possibles lorsqu'on déplace : le cinéma-déplacement, qui observe le mouvement en continu, et le photo-déplacement qui ne tient en compte qu'un état initial et un état final. Ces deux regards permettent d'observer et de repérer des choses différentes. L'un peut favoriser la recherche de caractéristiques de dessins dans des configurations particulières, alors que l'autre peut permettre l'identification de configurations auxquelles on ne s'attend pas forcément.

Le déplacement mou peut apparaître dans les stratégies des élèves comme une étape dans la recherche des conditions nécessaires pour obtenir une figure avec des propriétés spécifiques. Il peut aussi être exploité par les enseignants pour faire travailler les élèves sur la distinction entre hypothèses et conclusion dans une propriété géométrique.

Les boîtes noires n'ont du sens que dans un environnement de géométrie dynamique, puisque c'est grâce au déplacement qu'on peut explorer la construction et découvrir les propriétés géométriques qui la caractérisent afin de pouvoir la reconstruire. Le déplacement permet aussi la validation ou invalidation des conjectures et des stratégies utilisées faites pendant la phase de recherche, et la validation de la construction finale.

L'appropriation du déplacement est complexe. De plus, la multiplicité d'utilisations du déplacement complexifie certes son appropriation. Nous pensons qu'une introduction et une mise en place organisée et explicite du déplacement peut faciliter l'appropriation et l'utilisation opérationnelle du déplacement chez les élèves dans une démarche de résolution de problèmes.

II. L'approche instrumentale

Puisque il apparaît que l'usage du déplacement n'est pas spontané mais résulte d'un apprentissage, notre travail cherche à poursuivre deux objectifs : analyser les processus d'appropriation et d'usage du déplacement d'une part, identifier des conditions possibles dans l'enseignement favorisant cette appropriation. L'approche instrumentale apporte un cadre théorique pour décrire le processus d'appropriation.

II.1 Des potentialités d'un artefact à l'usage réel d'un élève utilisateur

La théorie de l'activité est issue principalement des travaux réalisés en Russie au 20ème siècle par des psychologues comme Vygotsky (1934, 1978) et Leontiev (1972, 1978). Ils se sont intéressés entre autres à étudier la médiation de l'activité par des artefacts. Ils ont distingué outil d'artefact, pour montrer que l'outil résulte d'une construction du sujet à partir de l'utilisation de l'artefact comme moyen pour accomplir une action.

Ces travaux seront repris par la suite par d'autres psychologues comme Engeström (1987), puis par Rabardel (1995).

Rabardel, en reprenant les travaux de Piaget et Vygostky, introduit la notion d'instrument, pour le différencier d'un artefact ou d'un outil et pour mettre en relief l'importance et la relation existant entre le sujet et l'artefact :

> « Nous pensons qu'il faut définir l'instrument comme une entité mixte, qui tient à la fois du sujet et de l'objet (au sens philosophique du terme) : l'instrument est une entité composite qui comprend une composante artefact (un artefact, une fraction d'artefact ou un ensemble d'artefacts) et une composante schème (le ou les schèmes d'utilisation, eux-mêmes souvent liés à des schèmes d'action plus généraux). Un instrument est donc formé de deux composantes :
> - d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
> - d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de ShSU (Schème Sociaux d'Utilisation) déjà formés extérieurement à lui. » (Rabardel 1995, p. 95)

L'instrument n'est donc pas donné au sujet, mais résulte d'une construction du sujet à partir de son interaction avec l'artefact. Un instrument dépend donc du sujet qui le construit et de la tâche qu'il cherche à résoudre :

> « An instrument cannot be confounded with an artifact. An artifact only becomes an instrument through the subject's activity. In this light, while an instrument is clearly a mediator between the subject and the object, it is also made up of the subject and the artefact. » (Béguin and Rabardel 2000, p. 175)

Artefact et schèmes sont associés, mais ils sont aussi indépendants, puisqu'un même schème d'utilisation peut être appliqué à un ou plusieurs artefacts, ainsi qu'un même artefact, associé à différents schèmes d'utilisation, peut donner lieu à une multiplicité d'instruments.

Dans Cabri, l'artefact « Pointer » est l'outil qui permet de déplacer les objets de base (points, droites, cercles, etc.). Le concepteur a conçu plusieurs artefacts qui permettent de déplacer et manipuler les constructions de différentes manières (Tourner, Dilater/Réduire, Tourner et dilater), mais il n'avait peut-être pas prévu qu'un même artefact, Pointer, donne lieu à un diversité d'usages chez un même élève. Comme nous l'avons vu, les usages donnés au déplacement sont multiples. Nous différencions donc l'artefact Pointer, des instruments déplacements qui peuvent être construits par l'élève/utilisateur et nous nous intéresserons à la construction d'instruments déplacement.

II.2 Le Concept de schème

Piaget donne une définition du concept de schème assez globale et générale :

> « […] les schèmes constituent des moyens du sujet à l'aide desquels il peut assimiler les situations et les objets auxquels il est confronté. […] Le schème, moyen d'assimilation, est en lui-même le produit de l'activité assimilatrice : l'assimilation psychologique, en sa forme la plus simple, n'étant que la tendance de toute conduite à se conserver. C'est l'assimilation reproductrice qui constitue les schèmes, ceux-ci acquérant leur existence dès qu'une conduite, si peu complexe soit-elle, donne lieu à un effort de répétition et se schématise ainsi. Le schème d'une action est donc l'ensemble structuré des caractères généralisables de l'action, c'est-à-dire qui permettent de répéter la même action ou de l'appliquer à de nouveaux contenus (Piaget & Beth 1961). » (Rabardel 1995, p. 79)

Vergnaud (1990), reprend cette définition et en s'appuyant sur ses travaux en didactique des mathématiques, donne une définition de schème plus fine :

> « Appelons « schème » *l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée*. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. » (Vergnaud 1990, P. 136)

Un schème sera intimement lié à la classe de situations à laquelle on s'intéresse. Ce sera en fonction de celle-ci que le sujet choisira la stratégie à mettre en place et que nous pourrons observer les schèmes construits par le sujet.

> « Le coupe conceptuel " schème-situation " est la clef de voûte de la psychologie cognitive et de la théorie de l'activité : pour cette raison simple que la connaissance étant adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent, et qu'ils s'adaptent à des situations. (…) C'est la recherche en didactique… (pour un exposé systématique voir la "Théorie des situations didactiques" (1998) de Guy Brousseau)… qui a permis de sortir le concept de situation des oubliettes du sens commun et d'en faire un concept scientifique et pratique, avec lequel il soit possible d'agir : notamment de produire des effets d'apprentissage et de prise de conscience, en manipulant certaines variables de

> situation. » (Vergnaud 2001, cité dans Brun 2007, p.68)

Pour Vergnaud

> « le schème est une totalité dynamique fonctionnelle – cela signifie en clair que le schème est une unité identifiable de l'activité du sujet, qui correspond à un but identifiable, qui se déroule selon un certain décours temporel (et donc une dynamique), et dont la fonctionnalité repose sur un ensemble d'éléments peu dissociables les uns des autres. » (Vergnaud 1996, p. 283)

Les schèmes peuvent évoluer au cours du temps et être adaptés par le sujet.

Selon Vergnaud, un schème comporte :

- les « règles » d'action de type « si condition alors action à faire » qui permettent de générer la suite des actions et de l'activité du sujet en fonction des valeurs prises par les variables de situations ;
- les « invariants opératoires » qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation et la prise d'informations sur la situation à traiter ;
- les « anticipations » et le « but » à atteindre, des effets à attendre et des étapes intermédiaires éventuelles qui permettent de rendre compte à la fois de la représentation du but à atteindre et des opérations de planification et de contrôle ;
- les « inférences » (raisonnements) qui permettent de calculer les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet, ce qui permet au sujet d'ajuster le schème aux caractéristiques spécifiques de la situation présente (Coulet 2007, pp.299) ;

Trois types d'invariants opératoires peuvent être distingués :

- des invariants de type « propositions » : susceptibles d'être vrais ou faux. Les théorèmes-en-acte sont de ce type ;
- des invariants de type « fonction propositionnelle » : briques indispensables à la construction des propositions. Ils ne sont pas évalués comme vrais ou faux, mais par leur pertinence ou non-pertinence dans la prise d'informations. Ils sont construits dans l'action. Ce sont des « concepts-en-acte » ou des « catégories-en-acte » ;
- des invariants de type « arguments » qui instancient les fonctions propositionnelles en propositions.

Selon Vergnaud, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte se construisent en étroite interaction.

Pour sa part, Rabardel porte attention aux schèmes liés à l'utilisation d'un artefact, construits par le sujet lors de son interaction avec l'artefact, qu'il appelle schèmes d'utilisation (Sh.U.). Ils concernent deux dimensions de l'activité :

> « - les activités relatives aux tâches "secondes", c'est-à-dire celles relatives à la gestion des caractéristiques et propriétés particulières de l'artefact. […] ;
> - les activités premières, principales, orientées vers l'objet de l'activité, et pour lesquelles l'artefact est un moyen de réalisation. […] » (Rabardel 1995, p.91)

Ce qui l'amène à distinguer deux types de schèmes d'utilisation à des niveaux différents :

> « - les **schèmes d'usage** (Sh.Us.) qui sont relatifs aux "**tâches secondes**". Ils peuvent, comme dans notre exemple, se situer au niveau de schèmes élémentaires (au sens de non décomposables en unités plus petites susceptibles de répondre à un sous but identifiable), mais ce n'est nullement nécessaire : ils peuvent eux-mêmes être constitués en totalités articulant un ensemble de schèmes élémentaires. Ce qui les caractérise, c'est leur orientation vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact ;
> - les **schèmes d'action instrumentée** (Sh.A.I.), qui consistent en totalités dont la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité. Ces schèmes, incorporent, à titre de constituants, les schèmes du premier niveau (Sh.Us.). Ce qui les caractérise, c'est qu'ils sont relatifs aux "**tâches premières**". Ils sont constitutifs de ce que Vygotsky appelait les "actes instrumentaux", pour lesquels il y a recomposition de l'activité dirigée vers le but principal du sujet du fait de l'insertion de l'instrument. Les schèmes de premier niveau (Sh.Us.) constituent, selon la terminologie de Cellérier, des modules spécialisés, qui coordonnés les uns aux autres mais aussi avec d'autres schèmes, s'assimilent et s'accommodent

> réciproquement pour constituer les schèmes d'action instrumentée (Sh. A. I.). » (op. cit., pp 91-92)

Les schèmes d'usage sont donc directement liés à l'artefact et à son utilisation, à son adaptation et aux modifications faites par le sujet, alors que les schèmes d'action instrumentée sont orientés vers le sujet et dépendent de l'activité dans laquelle ils s'insèrent, l'utilisation de ces schèmes dépend du but à atteindre.

Puisque nous nous intéressons à la construction d'instruments déplacements, nous étudierons les schèmes qui seront construits et les concepts-en-acte et théorèmes-en-acte sur lesquels ils reposent. Nous nous intéresserons en particulier et distinguerons les schèmes d'usages et d'action instrumentée, qui donneront lieu à des instruments déplacement de différente nature. Les instruments contenant des schèmes d'action instrumentée auront une finalité mathématique par rapport à la tâche à résoudre et ceux contenant des schèmes d'usage seront un moyen qui permettra de réaliser les premiers.

II.3 Genèses instrumentales : processus d'instrumentation et d'instrumentalisation

Les instruments, n'étant pas données au sujet, ils doivent être construits par le sujet et cette construction a lieu au cours des *genèses instrumentales*. Les genèses instrumentales sont des processus longs et complexes, qui prennent du temps et qui doivent être organisées.

Les genèses instrumentales sont constituées à la fois du processus d'*instrumentalisation* et d'*instrumentation* :

> « • Les **processus d'instrumentalisation** concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer ;
> • Les **processus d'instrumentation** sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc. » (Rabardel 1995, p.111)

Le processus d'instrumentation est tourné vers le sujet, alors que le processus d'instrumentalisation est orienté vers la composante artefactuelle de l'instrument.

C'est au sein du processus d'instrumentation que les schèmes d'utilisation vont émerger et évoluer.

> « Comprendre la genèse instrumentale suppose de saisir plusieurs articulations :
> […]
> - l'articulation entre deux types *de schèmes d'utilisation* : les *schèmes d'usage* […] et les *schèmes d'action instrumentée* […] ; un schème d'usage est ainsi le correspondant psychologique d'un *geste*, « grain » élémentaire de l'activité, un schème d'action instrumentée, le correspondant psychologique d'une *technique instrumentée.* » (Trouche 2003, p.16)

Nous nous intéresserons à la genèse instrumentale du déplacement, aux instruments déplacements qui seront construits au cours de cette genèse, ainsi qu'au processus d'instrumentation et aux schèmes d'utilisation construits.

II.4 L'approche instrumentale dans les recherches sur les usages des technologies

Avec l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, un ensemble de travaux en didactique des mathématiques à ce sujet a émergé. L'appropriation des nouvelles technologies s'est posée et certains se sont appuyés sur l'approche instrumentale. Nous citons de manière non exhaustive quelques travaux sur l'articulation entre mathématiques et technologies, en s'intéressant en particulier à l'apprentissage de la géométrie et l'utilisation du déplacement dans la géométrie dynamique. Ces recherches nous permettent de voir des difficultés rencontrées lorsqu'on s'intéresse aux genèses instrumentales et peuvent éclairer celles relatives à la géométrie dynamique.

Guin et Trouche (1999) ont étudié le passage de l'artefact à l'instrument à partir d'une étude sur l'intégration des calculatrices graphiques ou symboliques en classe. En particulier, ils se sont intéressés aux genèses instrumentales de ces calculatrices en classe de mathématique. Ils mettent en avant l'importance des connaissances antérieures du sujet et la dimension sociale des schèmes construits au cours de cette genèse instrumentale. Leur intérêt pour la dimension sociale les a emmené à décrire l'organisation de la classe et les rôles joués par l'enseignant et par les élèves au cours de la genèse instrumentale. Nous nous appuierons sur leurs travaux pour essayer de décrire le rôle de l'enseignant et des phases collectives dans les genèses instrumentales et les schèmes construits par les élèves.

Artigue (2002a, 2002b) a mené une étude des genèses instrumentales relatives aux Computer Algebra Systems (CAS) et des ingénieries didactiques qui ont permis leur introduction. Artigue reprend les travaux de Trouche et de Defouad (2000) et caractérise les connaissances mathématiques nécessaires à l'instrumentation des CAS.

Artigue souligne la complexité des genèses instrumentales et de son introduction et intégration en classe :

> "The results clearly show that the complexity of instrumental genesis has been widely under-estimated in research and innovation on TICE, until quite recently. The predominant role given to technology as a pedagogical tool, which I pointed out in the introduction, has certainly contributed to such an underestimation. Suggesting that instrumentation may be a complex and costly process does not fit visions that consider technology mainly as an easy tool for introducing students to mathematical contents and norms defined independently from it." (Artigue 2002a, p.53)

Les travaux de Artigue (2002a, 2002b), ainsi que ceux de Assude (2005, Assude & Gélis 2002) nous montrent que genèse instrumentale et construction de connaissances mathématiques ne peuvent pas être séparées, mais qu'au contraire, ces deux processus sont imbriquées :

> « La genèse instrumentale ne se fait pas d'un coup mais au fur et à mesure que le travail avance et notamment en lien avec des connaissances mathématiques. » (Assude & Gélis 2002, p. 271)

D'autres études ont été menées sur l'intégration de TIC en classe de mathématiques et aux genèses instrumentales qui avaient lieu non seulement du côté de l'élève mais aussi de l'enseignant. Haspekian (2005a, 2005b) par exemple s'est intéressée à l'intégration des tableurs dans l'enseignement des mathématiques et sa genèse instrumentale dans des classes de 5ème. Elle s'est intéressée à l'appropriation du côté des élèves et à l'utilisation proposée par les enseignants ainsi qu'aux problèmes qu'ils peuvent avoir pour soutenir cette genèse instrumentale.

Les travaux portant sur l'intégration des logiciels de géométrie dynamique et s'appuyant sur l'approche instrumentale sont nombreux. Gomes (1999) s'est intéressé aux processus d'instrumentation et d'instrumentalisation et aux schèmes construits par les élèves dans une même situation et avec deux systèmes d'instruments différents : dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement Cabri.

Quant aux études portant sur les genèses instrumentales du déplacement et ses différentes utilisations, nous avons déjà mentionné les travaux de Tapan (2006) sur la formation initiale des enseignants de mathématiques et leur utilisation de la géométrie dynamique et du déplacement. Elle a pu observer la genèse instrumentale des enseignants et leur appropriation du logiciel, les situations mises en place par les enseignants au cours de la genèse instrumentale et les types de déplacement qu'ils demandaient aux élèves d'utiliser. Ses travaux montrent ce que nous avons observé dans l'étude de manuels, l'utilisation du déplacement est limitée à l'illustration de propriétés géométriques.

Tous ces travaux montrent la complexité des genèses instrumentales et le temps qu'il faut pour pouvoir étudier les schèmes construits. Le déplacement est complexe et ses différents usages nécessitent un temps long d'appropriation.

Nous pensons qu'une introduction et une mise en place organisée et explicite du déplacement peut faciliter l'appropriation et l'utilisation opérationnelle du déplacement chez les élèves dans une démarche de résolution de problèmes :

Hypothèse de Travail 4 : La genèse instrumentale du déplacement est un processus long et complexe et demande une mise en place organisée sur le long terme

III. Les instruments Déplacement

En utilisant la définition d'*Instrument* donnée par Rabardel, nous nous intéresserons aux différents instruments *« Déplacement »* pouvant être construits en relation avec les schèmes d'utilisation émergeant dans les genèses instrumentales du déplacement.
Si l'on se place dans une approche instrumentale, étudier les processus d'appropriation du déplacement en géométrie dynamique revient donc à identifier la genèse instrumentale du déplacement, ou encore de façon plus précise la construction de schèmes d'utilisation par les élèves.

Classification des instruments déplacement

L'approche instrumentale nous montre que la classification proposée par Arzarello et al. (2002) comporte deux types de finalités : la finalité mathématique, du côté des tâches premières, et les usages de l'artefact, du côté des tâches secondes. Nous raffinons cette catégorisation en distinguant ces deux types de finalités et en les croisant.

Du côté des tâches secondes et des contraintes de l'artefact :

Dans Cabri il y a trois types de points : le point libre qui peut se déplacer partout ; le point sur objet, qui ne se déplace que sur l'objet (segment, droite, cercle) ; le point non attrapable, qui ne peut pas être attrapé et déplacé directement, mais qui dépend d'un autre point (point d'intersection, milieu). Ces trois types de points définissent des instruments déplacement caractérisés par des usages du déplacement.

Déplacement *libre* : déplacer un point libre partout dans l'écran.

Déplacement *contraint ou limité* (*bound dragging*) : déplacer des points semi-déplaçables, c'est-à-dire des points qui se trouvent sur un objet et qui ne peuvent être déplacés que sur cet objet (segment, droite, demi-droite…).

Déplacement *indirect* : les points non attrapables, ne pouvant pas être déplacés directement, ils ne peuvent être déplacés que par l'intermédiaire d'un autre en attrapant et déplaçant des points 'sources' à partir desquels sont définis les points non attrapables. Par exemple, le milieu I du segment [AB], ne peut pas être déplacé directement, mais en déplaçant les points A ou B, I sera déplacé de manière indirecte.

Du côté des tâches secondes, nous reprenons aussi le photo-déplacement et cinéma-déplacement définis par Olivero (2002). Nous considérons que ces déplacements se trouvent du côté des tâches secondes puisque comme les schèmes d'usage, ils représentent un geste, un usage du déplacement, et ils ne constituent pas le but principal du sujet, mais un moyen pour l'atteindre.

***Photo-déplacement* ou déplacement discret** :

> "Modalities which suggest a discrete sequence of images over time: the subject looks at the initial and final state of the figure, without paying attention to the intermediate instances. The aim is to get a particular figure." (Olivero 2002, p.141)

***Cinéma-déplacement* ou déplacement continu** :

> "Modalities which suggest a film: the subject looks at the variation of the figure while moving and the relationships among the elements of the figure. The aim of dragging is the variation of the figure itself." (ibid., p.141)

Du côté des tâches premières, la finalité mathématique amène à distinguer quatre catégories auquel s'ajoute le déplacement sans finalité mathématique : le déplacement non-finalisé, le déplacement pour ajuster, le déplacement mou, les déplacements exploratoires et les déplacements pour valider ou invalider.

Déplacement *non-finalisé mathématiquement* : le déplacement non-finalisé est celui d'un utilisateur qui n'a pas d'attentes a priori. Son but principal est d'obtenir des effets spatio-graphiques. Ce déplacement est utilisé pour commencer le travail sur une construction, sans plan précis, voir quels points sont déplaçables, lesquels non, sur quels objets ces points se déplacent et quels effets sont produits par le déplacement de ces points.
Nous distinguons ce déplacement du déplacement erratique décrit par Arzarello, la finalité et l'intention n'étant pas la même. Selon Arzarello, dans le déplacement erratique on cherche déjà des régularités de la figure ainsi que des configurations intéressantes.

Déplacement pour *ajuster* : le déplacement pour ajuster est utilisé par l'élève qui n'a pas les connaissances suffisantes pour construire une figure robuste et qui fait l'hypothèse que cette stratégie est suffisante pour avoir la bonne figure.

Déplacement *mou* ou déplacement *guidé* (*guided dragging*) : déplacer les points de base de la construction pour lui donner momentanément une forme ou des propriétés particulières.

Déplacements *exploratoires :*

1. **Déplacement pour *identifier les invariants* de la figure** : étant donnée une construction, on déplace les points de base afin de trouver ses invariants. Ainsi, on peut identifier les propriétés géométriques de la figure.

2. **Déplacement pour *constater les variations* au cours du mouvement** : on déplace les points d'une construction afin de comprendre les régularités dans la variation, voir quelles sont ses variations, ce qui change et ce qui se conserve.

3. **Déplacement pour trouver la *trajectoire* d'un point** : déplacer un point afin d'identifier sa trajectoire, l'objet géométrique décrit par ce point.

Déplacements pour *valider ou invalider* :

1. **Déplacement pour *valider une construction*** (*dragging test*) : déplacer tous les points déplaçables d'une construction pour voir si celle-ci conserve les propriétés apparentes à l'état initial. Si c'est le cas, alors la construction est validée ; dans le cas contraire, elle est invalidée, la construction n'avait pas été construite selon les propriétés géométriques demandées.
   Le sujet fait l'hypothèse que la construction est correcte et que grâce au déplacement celle-ci pourra être validée ; il est donc éventuellement surpris de trouver une position dans laquelle sa construction peut être invalidée.
   Pour pouvoir valider une construction, le déplacement doit être observé en continu et donc utiliser un cinéma-déplacement.

2. **Déplacement pour *invalider une construction*** : déplacer les points de base d'une construction pour trouver une position permettant de l'invalider.
   Le sujet fait l'hypothèse que la construction n'a pas été correctement construite et utilise le déplacement pour trouver une position permettant de l'invalider.
   Le but étant de trouver une configuration particulière de la figure, le déplacement est utilisé de manière discrète donc on utilise un photo-déplacement.

3. **Déplacement pour *valider une conjecture/propriété*** : déplacer les points de base d'une construction pour tester la validité d'une conjecture ou d'une propriété, faite par l'élève à partir de l'observation des invariants de la figure, ou bien qui a été donnée à l'élève. La conjecture/propriété est invalidée si l'on trouve une position dans laquelle elle n'est plus réalisée, cependant si l'on ne trouve pas de contre-exemple, elle doit être démontrée.

Dans les tableaux qui suivent nous croisons les instruments déplacement relevant des tâches premières et ceux relevant des tâches secondes.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3"></th><th colspan="9">Rôle du déplacement selon la finalité mathématique</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Déplacement non finalisé mathématiquement</th><th rowspan="2">Déplacement pour ajuster</th><th rowspan="2">Déplacement mou</th><th colspan="3">Déplacements exploratoires</th><th colspan="3">Déplacements pour valider ou invalider</th></tr>
<tr><th>Identification des invariants</th><th>Constater les variations</th><th>Identification la trajectoire</th><th>Valider une construction</th><th>Invalider une construction</th><th>Valider une conjecture/ propriété</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Usage de l'artefact</td><td>Déplacement libre</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Déplacement contraint ou limité</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Déplacement indirect</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 1. *Croisement des instruments déplacement relevant des tâches premières, selon la finalité mathématique, et ceux relevant des contraintes de l'artefact*

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3"></th><th colspan="9">Rôle du déplacement selon la finalité mathématique</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Déplacement non finalisé mathématiquement</th><th rowspan="2">Déplacement pour ajuster</th><th rowspan="2">Déplacement mou</th><th colspan="3">Déplacements exploratoires</th><th colspan="3">Déplacements pour valider ou invalider</th></tr>
<tr><th>Identification des invariants</th><th>Constater les variations</th><th>Identification de la trajectoire</th><th>Valider une construction</th><th>Invalider une construction</th><th>Valider une conjecture/ propriété</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Usage de l’artefact</td><td>Photo-déplacement</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cinéma-déplacement</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 2. *Croisement des instruments déplacement selon la finalité mathématique et du photo-déplacement ou cinéma- déplacement*

IV. Hypothèses de travail et questions de recherche

Nous avons vu les potentialités de la géométrie dynamique dans l’apprentissage et l’enseignement des mathématiques. Comme nous l’avons déjà dit, le passage du dessin à la figure ne se fait pas de manière naturelle ni automatique. Pour cela, les élèves doivent apprendre à distinguer les propriétés géométriques de la figure théorique qui peuvent être lues sur le dessin et lesquelles ne sont que des propriétés spatiales du dessin ne pouvant pas être prises comme hypothèses. Les logiciels de géométrie dynamique, tel que Cabri-géomètre, permettent de faire travailler les élèves sur des représentations dynamiques qui conservent les propriétés géométriques au cours du mouvement.

Nous pensons qu’une mise en place organisée et accompagnée par un logiciel de géométrie dynamique peut aider et assister les élèves à faire ce passage. L’appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin statique d’une figure géométrique et faciliter ce passage :

> « As already claimed by Strässer (1992), dragging offers a mediation between drawing and figure and can only be used as such at the cost of an explicit introduction and analysis organized by the teacher. » (Laborde et al. 2006, p.286)

Ce qui nous emmène à notre première hypothèse de travail :

Hypothèse de Travail 1 : L’appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin d’une figure géométrique et faciliter ce passage

Pour obtenir une construction qui puisse être validée en géométrie dynamique, c’est-à-dire qu’elle conserve les propriétés géométriques au cours du déplacement, l’élève doit se placer dans GII et mobiliser ses connaissances mathématiques. Nous faisons donc l’hypothèse que les logiciels de géométrie dynamique peuvent inciter les élèves à faire le passage de GI vers GII et les accompagner dans ce processus :

Hypothèse de Travail 2 : L’utilisation de la géométrie dynamique et l’appropriation du déplacement devraient inciter les élèves à passer d’une « géométrie naturelle » à une « géométrie axiomatique naturelle » et à mobiliser leurs connaissances mathématiques

Les travaux de Laborde et Capponi (1994) nous permettent de proposer Cabri comme un milieu riche en rétroactions :

Hypothèse de Travail 3 : La géométrie dynamique offre un milieu potentiellement riche en rétroactions qui peut permettre à l'élève d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie gagnante

L'approche instrumentale et les travaux en didactique des mathématiques sur l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement, nous montrent que les genèses instrumentales sont un processus long et complexe, qui demande une mise en place contrôlée et organisée. De plus, nous avons vu comment le déplacement peut s'avérer être une vraie difficulté pour les élèves.

> « The instrumental genesis of the drag mode is a long process, and students construct several schemes of utilization that are influenced by former tools and may differ from the expected use by the designers environments. » (op. cit. , p.286)

De plus, la multiplicité d'instruments déplacement complexifie certes son appropriation. Nous pensons qu'une introduction et une mise en place organisée et explicite du déplacement peut faciliter l'appropriation et l'utilisation opérationnelle du déplacement chez les élèves dans une démarche de résolution de problèmes. Et que l'introduction et l'utilisation de différents types de déplacement peuvent faciliter cette mise en place :

Hypothèse de Travail 4 : La genèse instrumentale du déplacement est un processus long et complexe et demande une mise en place organisée sur le long terme

Notre intérêt étant centré sur la genèse instrumentale du déplacement et les difficultés dont nous avons parlé, nos deux grandes questions de recherche sont les suivantes :

Question de Recherche 1 : Quels instruments déplacement seront construits par les élèves au cours de la genèse instrumentale ?

Question de Recherche 2 : Est-ce que les élèves prennent en charge la validation de leurs constructions en déplaçant ?

CHAPITRE II

CHOIX ET ANALYSE A PRIORI DES SITUATIONS

Nous allons présenter la série de situations que nous avons conçue afin de pouvoir observer et soutenir la genèse instrumentale du déplacement. Comme nous le verrons, notre méthodologie relève à la fois d'une ingénierie didactique et de l'observation naturaliste. Nous présenterons nos choix pour l'ingénierie et les situations que nous avons retenues pour notre analyse.

I. ENTRE INGENIERIE DIDACTIQUE ET OBSERVATION NATURALISTE

L'ingénierie vise au développement d'une genèse instrumentale du déplacement par des élèves dans leur utilisation de la géométrie dynamique pour l'apprentissage de la géométrie, puisque notre travail est fondé sur l'hypothèse selon laquelle la géométrie dynamique offre un milieu potentiellement riche en rétroactions qui peut permettre à l'élève d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie gagnante.

Comme formulé dans notre quatrième hypothèse de travail, la genèse instrumentale du déplacement est un processus long et complexe et nécessite un accompagnement sur le long terme. Nous avons donc décidé de mettre en place une ingénierie didactique pendant une année scolaire nous permettant d'étudier et d'observer les phénomènes relatifs à nos questions de recherche.

La méthodologie que nous avons mise en place est mixte puisqu'elle relève à la fois de l'ingénierie didactique ainsi que de l'observation naturaliste. Le choix des situations proposées aux élèves et leur insertion dans la progression de l'année ont été conçus par le chercheur et l'enseignant, afin de concilier les objectifs de recherche que nous nous sommes fixés et les contraintes institutionnelles.

D'une part c'est une ingénierie didactique particulière, car elle ne vise pas l'étude du processus d'apprentissage d'un concept mathématique donné, mais la genèse instrumentale d'un outil pour l'apprentissage de la géométrie dans le cours de mathématiques. Les situations sont choisies en fonction du rôle que jour le déplacement dans les stratégies de résolution.

D'autre part, comme nous ne voulions pas intervenir sur le contenu mathématique mais sur l'organisation de l'apprentissage du contenu mathématique, le choix de contenus par l'enseignant devaient être respectés et pris en compte. De plus, ayant choisi de travailler tout au long de l'année scolaire et de manière à ce que Cabri fasse partie intégrale du cours de mathématiques, nos choix de situations devaient s'adapter au programme scolaire, ainsi qu'à l'organisation prévue par l'enseignant. Plus généralement, il est nécessaire que l'enseignant soit impliqué dans l'élaboration de l'ingénierie puisque la genèse instrumentale ne se fait pas sans enseignant et que son implication permet d'enrichir le processus d'instrumentation des élèves :

> "Therefore, we argue for strong teacher involvement in the instrumentation process and full recognition of the constraints and potential of the artefact as well as various profiles of student behaviour so as to design and implement appropriate mathematical activities. Teachers have to juggle all these parameters in order to enhance students' experimental processes of combining information and understanding tools." (Guin et Trouche 1999, p.224)

La méthodologie adoptée a donc recours en plus de l'ingénierie didactique à l'observation naturaliste.

Nous avons choisi de mener notre étude en classe de 6ème car un des objectifs principaux de cette classe est le passage de « l'identification perceptive (reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) ; » (B.O. hors série n° 4, 9 septembre 2004, p.6). Nos deux premières hypothèses de travail stipulent que l'appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin d'une figure géométrique et faciliter ce passage, et inciter donc les élèves à passer d'une « géométrie naturelle » à une « géométrie axiomatique naturelle ». Notre intérêt étant d'accompagner les élèves dans le passage du dessin à la figure géométrique, nous considérons la classe de 6ème un bon lieu d'observation puisque c'est là où se réalise le passage.

II. CHOIX DES DEPLACEMENTS ET DES SITUATIONS

Nous présentons les choix que nous avons faits lors de l'ingénierie, des situations mises en place, ainsi que des déplacements que nous avons cherché à intégrer dans la genèse instrumentale.

II.1 Choix des déplacements

La signification d'un concept mathématique ne peut être comprise pleinement et acquise que quand on présente et on fait utiliser le concept, et des concepts relatifs à celui-ci, dans une classe de situations assez large, comme dit Vergnaud :

> « Un concept ne prend pas sa signification dans une seule classe de situations, et une situation ne s'analyse pas à l'aide d'un seul concept. Il faut donc se donner comme objets de recherche des ensembles relativement larges de situations et de concepts, en classant les types de relations, les classes de problèmes, les schèmes de traitement, les représentations langagières et symboliques, et les concepts mathématiques qui organisent cet ensemble. » (Vergnaud 1990, p. 167)

De plus, le sujet construit la signification d'un concept au même temps qu'il construit des schèmes relatifs à celui-ci et à son utilisation dans une classe de situations :

> « Le sens est une relation du sujet aux situations et aux significations. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. Les schèmes, c'est-à-dire les conduites et leur organisation. Le sens de l'addition pour un sujet individuel c'est l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté, et qui impliquent l'idée d'addition, c'est aussi l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers qui représentent l'addition. » (ibidem, p. 158)

Par analogie à un concept mathématique, nous pouvons dire que la signification du déplacement ne sera complètement acquise et construite que si celui-ci est présenté et utilisé dans une multiplicité de contextes différents. Les élèves, en construisant des schèmes de déplacement, vont lui donner plusieurs significations. Or, les significations données au déplacement devraient se faire en lien avec la géométrie et permettre aux élèves de s'approprier le concept de figure géométrique.

Pour étudier et observer la mise en place de la genèse instrumentale du déplacement, nous avions deux possibilités : nous pouvions choisir un seul type de déplacement et le travailler de manière détaillée dans des classes de situations, ou bien, nous pouvions introduire plusieurs types de déplacements aux élèves et les présenter dans des situations de natures différentes.

Ayant peu d'éléments à propos de la genèse instrumentale du déplacement, nous avons choisi la deuxième solution, ce qui nous permettait d'avoir une vue d'ensemble plus globale, d'introduire le concept du déplacement dans des situations variées et ce qui rendait possible que les élèves construisent différents schèmes relatifs au déplacement.

De plus, les travaux montrent que le déplacement pour valider et invalider une construction pose des problèmes aux élèves et que son appropriation est lente et doit être introduite explicitement par l'enseignant (Strässer, (1992) ; Bellemain et Capponi (1992)). En prenant un seul type de déplacement, nous risquions d'avoir des élèves n'étant pas capables de se l'approprier et bloqués dans leur genèse instrumentale. En choisissant d'introduire plusieurs utilisations du déplacement, nous donnions plus de choix aux élèves et nous leur permettions de construire différents schèmes relatifs au déplacement et de lui attacher différentes significations en lien avec la géométrie.

A partir de la classification des instruments déplacement que nous avons donnée dans le premier chapitre (Partie B, §III), nous avons choisi certains types de déplacements qui devraient être utilisés a priori dans les situations que nous avons mises en place. Dans certaines situations ils seront demandés de manière explicite, dans d'autres ils feront partie de la stratégie de base des élèves. D'autres instruments déplacement peuvent être construits par les élèves dans la pratique.

Les déplacements retenus sont les suivants:

Du côté de l'usage de l'artefact, nous nous appuierons sur la distinction des trois types de points du logiciel : point libre, point sur objet et point non-attrapable, pour faire travailler les élèves sur la trajectoire de points, par exemple :

- **Déplacement *libre*** : déplacer un point libre partout dans l'écran.
- **Déplacement *contraint ou limité*** (*bound dragging*) : déplacer des points semi-déplaçables, c'est-à-dire des points sur objet qui ne peuvent être déplacés que sur cet objet (segment, droite, demi-droite…).
- **Déplacement *indirect*** : les points non attrapables, ne pouvant pas être déplacés directement, ils ne peuvent être déplacés que par l'intermédiaire d'un autre en attrapant et déplaçant des points 'sources' à partir desquels sont définis les points non attrapables.

Du côté du rôle du déplacement selon la finalité mathématique, nous avons choisi les suivants déplacements :

- **Déplacement *non-finalisé mathématiquement*** : ce déplacement apparaît généralement de manière spontanée chez les élèves, mais nous l'avons introduit explicitement à travers une situation d'exploration et d'initiation au logiciel ;
- **Déplacement pour *identifier les invariants* de la figure** : permet aux élèves d'explorer une construction et de chercher dans celle-ci quels sont les invariants, les propriétés géométriques qui la caractérisent, il incite les élèves à voir au-delà du dessin et chercher à caractériser la figure géométrique représentée ;
- **Déplacement pour *constater les variations* au cours du mouvement** : permet aux élèves d'identifier les variations au cours du déplacement et de ne pas s'arrêter aux états statiques ; les élèves doivent repérer les régularités dans la variation, voir ce qui change et ce qui se conserve ;
- **Déplacement pour trouver la *trajectoire* d'un point** : permet aux élèves d'identifier la trajectoire décrite par un point en le déplaçant, sans devoir passer par l'utilisation de l'outil « Trace » ; les élèves doivent regarder le déplacement du point mobile en continu, comme dans un film, pour pouvoir identifier l'objet géométrique représenté ;
- **Déplacement pour *valider une construction*** : permet aux élèves de vérifier que leur construction possède bien les propriétés géométriques demandées en déplaçant les points de la figure ; notre ingénierie cherche à mettre en place de manière effective l'utilisation du déplacement pour valider une construction, afin que les élèves le fassent de manière autonome sans demander à l'enseignant de le faire ;
- **Déplacement pour *invalider une construction*** : permet aux élèves de trouver par déplacement un contre-exemple, une position dans laquelle la construction peut être invalidée ;
- **Déplacement pour *valider une conjecture/propriété*** : permet aux élèves de vérifier visuellement que la conjecture/propriété est vraie en déplaçant les points de la figure, pour pouvoir après la démontrer;

Nous n'avons pas introduit de manière explicite le déplacement mou ou le déplacement pour ajuster. Le déplacement mou exige de nombreuses connaissances mathématiques et il apparaît en général dans des situations plus complexes que celles qui apparaissent pertinentes pour la classe de sixième. Nous n'avons pas non plus proposé de situations pour problématiser le déplacement pour ajuster, car en général il apparaît de manière spontanée dans les stratégies des élèves.

Notre intérêt sera centré en particulier sur l'utilisation du déplacement pour valider une construction, puisque d'après les travaux de Healy, Hoelzl, Hoyles et Noss (1994a, b) et de Bellemain et Capponi (1992), l'appropriation de celui-ci peut être problématique pour les élèves. Nous espérons que cet instrument sera construit et utilisé par les élèves de manière efficace à la fin de notre ingénierie.

II.2 Choix des situations

L'ingénierie que nous avons conçue devait s'adapter aux besoins de l'enseignant, en particulier au programme scolaire. Comme notre ingénierie ne porte pas sur l'apprentissage d'un concept mathématique, nous ne sommes pas intervenus sur le contenu mathématique mais sur l'organisation de l'apprentissage du contenu mathématique. Le choix des situations a donc été fait avec l'enseignant, de manière à trouver un équilibre entre ses objectifs d'apprentissage et nos objectifs de recherche. Nous avons cherché à mettre en place trois situations utilisant Cabri par séquence d'enseignement. Par exemple, pour étudier la notion de « Cercle », nous avons fait travailler les élèves sur trois situations portant sur ce sujet (« Pajérond », « Cercle » et « Kenny »).

Au total, nous avons mis en place quinze situations au cours de l'année scolaire, espacées de manière régulière, ce qui permettait la mise en place et l'observation de la genèse instrumentale pendant l'année scolaire. Les quinze situations ont été choisies suivant différents critères :

- elles s'adaptaient à la séquence d'apprentissage étudiée ;
- elles étaient de nature différente et donc permettaient d'introduire une nouvelle utilisation du déplacement ou de retravailler un déplacement déjà vu avant ;
- elles permettaient d'introduire une nouvelle notion dans le cours de mathématiques ou de la retravailler sous un autre angle.

L'ordre des situations était donné en partie par le thème traité en classe et par la complexité de la tâche et les objectifs et connaissances requises pour celle-ci. Pour ce qui est de l'ordre d'introduction des déplacements, cela dépend des connaissances mathématiques nécessaires pour pouvoir l'utiliser. Par exemple, le déplacement non-finalisé mathématiquement ne demande pas de vraies connaissances mathématiques, mais permet de se familiariser avec le logiciel et le déplacement ; alors que le déplacement pour identifier les invariants de la figure ou le déplacement pour valider une conjecture demandent des connaissances mathématiques plus fortes. Ils ont donc été introduits plus tard. Le déplacement pour constater les variations au cours du mouvement ou pour trouver la trajectoire d'un point peuvent être introduits assez tôt dans la genèse. Le déplacement pour valider une construction a été introduit dès le début et travaillé au cours de l'ingénierie, afin de permettre la construction de cet instrument et son utilisation de manière fonctionnelle.

Les situations ont été choisies ou conçues pour l'ingénierie :

- situations conçues dans le projet national MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique) qui avaient déjà été expérimentées et analysées ;
- situations créées par des formateurs de l'IUFM de Grenoble et de Valence ;
- situations adaptées à partir de situations ERMEL ;
- situations créées par l'enseignant ;
- situations créées par le chercheur spécifiquement pour notre ingénierie.

Au sein de ces situations nous pouvons repérer des types de tâches qui sont demandés, lesquels sont en lien direct avec le déplacement, notre ingénierie ayant été conçue autour de l'utilisation de celui-ci ; voici les types de tâches identifiés:

- Tâche d'exploration : les élèves explorent une construction qui leur est donnée dans Cabri en déplaçant les points de la figure ; dans un premier temps, les élèves peuvent commencer par utiliser le déplacement non-finalisé mathématiquement ; puis, s'ils cherchent à repérer des particularités de la construction, ils peuvent utiliser le déplacement pour identifier les invariants de la figure. Suivant la construction, ils peuvent aussi faire appel au déplacement pour trouver la trajectoire d'un point ;

- Tâche de construction : on demande aux élèves de réaliser une construction, à partir d'un énoncé, d'une consigne, d'un dessin ; pour vérifier la validité de la construction, les élèves doivent déplacer pour valider ou invalider la construction réalisée;
- Tâche d'identification des invariants : les élèves doivent explorer une construction et identifier quelles sont les propriétés géométriques de la figure représentée ; en géométrie dynamique ceci se traduit par l'identification des invariants au cours du déplacement ; les élèves peuvent aussi faire des conjectures et les valider ou invalider par déplacement ;
- Tâche de reconnaissance de propriétés dans une construction : on demande aux élèves si la construction satisfait ou non à une propriété géométrique donnée ; les élèves doivent d'abord reconnaître si la propriété est vérifiée dans une position statique de la figure (de façon instrumentée ou non) et ensuite vérifier qu'elle est conservée au cours du déplacement ;
- Tâche de reproduction « type boîte noire » : les élèves doivent explorer une figure, identifier ses propriétés géométriques et la reproduire de manière à ce qu'elle ait le même comportement au cours du déplacement ; pour identifier les propriétés géométriques de la figure à reconstruire les élèves doivent utiliser le déplacement pour identifier les invariants de la figure, puis, pour vérifier la validité de leur construction utiliser le déplacement pour valider une construction ;
- Programme de construction : on demande aux élèves d'écrire un programme de construction après avoir réalisé une construction ; ce type de tâche est assez classique en papier-crayon et peut être utilisé aussi avec Cabri ;
- Tâche d'identification des variations : on demande aux élèves de déplacer et d'observer et constater les variations au cours du mouvement, voir ce qui change et ce qui se conserve, repérer quelles sont les régularités dans la variation ;

Nous allons présenter dans le tableau 1 la liste complète des situations mises en place dans notre ingénierie, la date dans laquelle elles ont eu lieu, le type de tâche, le rôle principal du déplacement dans la résolution de la tâche et l'objectif mathématique.

Nom de la situation	Date	Type de tâche	Rôle du déplacement	Notion mathématique visée
Géo	10/10/2006	Exploration	Non-finalisé	Prise en main du logiciel et du déplacement
Pajérond	13/10/2006	Construction	Valider une construction	Milieu de deux points/segment
Cercle	13/10/2006	Construction	Valider une construction	Travail sur la notion de cercle
Kenny	14/11/2006	Construction/ Programme de Construction	Valider une construction	Milieu, cercle, programme de construction
Point, Segment, Droite	28/11/2006	Construction	Déplacement contraint ou limité ; identifier les variations	Différenciation de droite, segment et demi-droite
Alignement	05/12/2006	Construction	Valider une construction	Travail sur l'alignement et l'invalidation des tracés au jugé
Sur quel objet?	15/12/2006	Exploration et construction	Identifier la trajectoire	Identification de trajectoires comme objets géométriques
Symétrie axiale	16/01/2006	Exploration ; identification de variations	Identifier les variations au cours du déplacement	Apprendre à reconnaître les variations des objets symétriques
Quadrilatères	30/01/2007 06/02/2007	Identification d'invariants	Identifier les invariants ; Valider une conjecture	Travail sur les propriétés géométriques des quadrilatères
Le même triangle	02/03/2007	Identification d'invariants et reproduction type « boîte noire »	Identifier les invariants ; Valider une conjecture ; Valider une construction	Identifier les propriétés géométriques de la figure et la reproduire (tâche type boîte noire)
Toujours/ parfois vrai	13/03/2007 23/03/2007	Reconnaissance des propriétés dans une construction	Valider une conjecture/propriété ; Invalider une construction	Savoir différencier les vraies propriétés géométriques de la figure des propriétés apparentes
Construire le symétrique	27/04/2007	Identification des variations ; Construction	Identifier les variations ; Valider une construction	Construire le symétrique d'un point par rapport à une droite
Bonhomme	04/05/2007	Construction	Valider une construction	Compléter une figure par symétrie axiale
Une figure à main levée	11/05/2007	Reconnaissance des propriétés dans une construction	Valider une conjecture/propriété ; Invalider une construction	Identifier les propriétés géométriques de la figure
Rectangles à compléter	25/05/2007	Construction	Valider une construction	Travail sur l'alignement et les propriétés géométriques du rectangle (angles droits)

Tableau 3. *Tableau récapitulatif des quinze situations*

On peut constater la régularité avec laquelle les situations ont été mises en place, ainsi que la diversité des types de tâches et des déplacements mis en œuvre dans ces situations.

Ne pouvant pas étudier les quinze situations, nous avons retenus situations pour nos analyses ; elles ont été choisies selon les critères suivants :

- elles font appel à différentes utilisations du déplacement ;
- elles se sont déroulées à différents moments de l'année, ce qui nous permet d'observer la genèse instrumentale au cours de l'année scolaire, dès le début jusqu'à la fin ;
- elles sont de types assez différents, ce qui permet d'observer différents schèmes déplacement relatifs au type de tâche que les élèves ont à résoudre ;
- elles permettent d'observer des productions riches des élèves.

Les six situations que nous avons choisies sont :

- Géo ;
- Pajérond ;
- Sur quel objet ? ;
- Toujours/ parfois vrai ;
- Construire le symétrique ;
- Rectangles à compléter.

Nous avons repris les tableaux dans lesquels nous croisons les instruments déplacement relevant des tâches premières et ceux relevant des tâches secondes (voir chapitre I Partie B §III) et nous avons situé les six situations par rapport aux déplacements qui seront utilisés a priori par les élèves.

Dans le premier tableau, du côté des tâches secondes, nous ne prenons en compte que les déplacements définis par les contraintes de l'artefact :

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><th colspan="6">Rôle du déplacement selon la finalité mathématique</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Déplacement non finalisé mathémati-quement</td><td colspan="2">Déplacements exploratoires</td><td colspan="3">Déplacements pour valider ou invalider</td></tr>
<tr><td>Constater les variations</td><td>Identification la trajectoire</td><td>Valider une construction</td><td>Invalider une construction</td><td>Valider une conjecture/ propriété</td></tr>
<tr><th rowspan="3">Usage de l'artefact</th><td>Déplacement libre</td><td>Géo</td><td>Construire le symétrique</td><td></td><td>Construire le symétrique ; Rectangles à compléter</td><td>Toujours/ parfois vrai</td><td>Toujours/ parfois vrai</td></tr>
<tr><td>Déplacement contraint ou limité</td><td>Géo</td><td></td><td>Sur quel objet ?</td><td>Pajérond ; Rectangles à compléter</td><td>Toujours/ parfois vrai</td><td>Toujours/ parfois vrai</td></tr>
<tr><td>Déplacement indirect</td><td>Géo</td><td>Construire le symétrique</td><td></td><td></td><td>Toujours/ parfois vrai</td><td>Toujours/ parfois vrai</td></tr>
</table>

Tableau 4. *Les six situations choisies : rôle du déplacement selon la finalité mathématique*

Dans le deuxième tableau, nous reprenons les déplacements définis par Olivero (2002), le photo-déplacement et le cinéma-déplacement :

Photo-déplacement ou déplacement discret : utilisation discrète du déplacement au cours du temps, le sujet observe un état initial et un état final de la figure, sans faire attention aux états intermédiaires. L'objectif principal étant d'obtenir une forme particulière.

Cinéma-déplacement ou déplacement continu : utilisation continue du déplacement comme si c'était un film : le sujet observe les variations de la figure et les relations entre les éléments de la figure pendant qu'il déplace. L'objectif principal de ce déplacement est d'observer les variations de la figure.

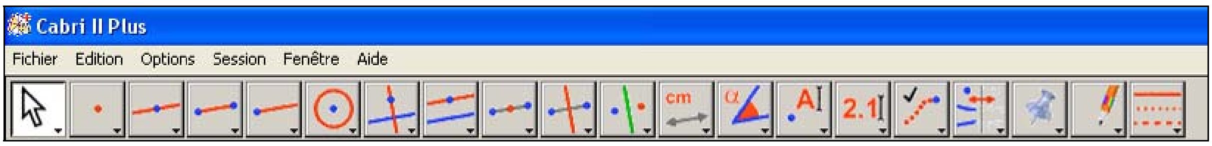
Bien que ces déplacements dépendent d'où se porte l'attention du sujet et ce qu'il regarde, certaines situations et certaines questions nécessitent une utilisation spécifique du déplacement. Par exemple, le déplacement pour identifier la trajectoire nécessite le cinéma-déplacement.

		Rôle du déplacement selon la finalité mathématique					
		Déplacement non finalisé mathématiquement	Déplacements exploratoires		Déplacements pour valider ou invalider		
			Constater les variations	Identification de la trajectoire	Valider une construction	Invalider une construction	Valider une conjecture/ propriété
Usage de l'artefact	Photo-déplacement	Géo			Pajérond ; Construire le symétrique ; Rectangles à compléter	Toujours/ parfois vrai	Toujours/ parfois vrai
	Cinéma-déplacement	Géo	**Construire le symétrique**	**Sur quel objet ?**	Pajérond ; Construire le symétrique; Rectangles à compléter	Toujours/ parfois vrai	Toujours/ parfois vrai

Tableau 5. *Classification des six situations : cinéma ou photo déplacement ?*

Comme nous pouvons voir dans ce tableau, les situations « Construire le symétrique » et « Sur quel objet ? » sont les seules situations qui nécessitent le cinéma-déplacement et que le photo-déplacement ne permet pas de résoudre. Ceci constitue donc une variable didactique qui devra être prise en compte : est-ce que le photo-déplacement suffit ou ne suffit pas pour résoudre la tâche ?

Finalement, en ce qui concerne la barre d'outils, au cours de l'ingénierie, nous avons limité les outils disponibles dans le logiciel. Nous avons gardé une barre d'outils linéaire (la même au cours de l'année scolaire), dans laquelle les outils disponibles sont tous visibles (pas de menu déroulant). Ceci permet de faciliter l'appropriation du logiciel et l'utilisation de la barre d'outils pour les élèves. Tous les outils dont ils n'avaient pas besoin ont été enlevés.



Dans certaines situations, nous avons enlevé l'outil « Cacher-montrer » pour éviter que les élèves ne voient les détails de la construction.

II.3 Déroulement des séances Cabri

Pour que le déplacement devienne un instrument pour l'apprentissage de la géométrie chez les élèves, c'était important que les séances Cabri fassent partie du cours de mathématiques. Elles ont permis d'introduire des notions de géométrie qui n'avaient pas encore été traitées en classe, ou de retravailler et compléter des concepts déjà vus en classe et de les approfondir.

Les séances avaient lieu en salle informatique en classe entière et les élèves travaillaient par binômes (environ 12 ordinateurs et 24 élèves par classe). Un des ordinateurs était branché à un vidéoprojecteur, permettant à l'enseignant de gérer les phases collectives.

Le déroulement général des séances Cabri était le suivant :

- une introduction de la séance ;
- une phase de recherche par binômes ;

- une phase collective ;
- une phase d'*institutionnalisation* (Brousseau, 1998) à la fois de connaissances mathématiques et de connaissances instrumentales.

La phase collective était organisée avec le principe de l'*élève-sherpa* :

> « La configuration repose sur l'attribution d'un rôle spécifique à un élève, l'élève-sherpa : c'est sa calculatrice qui est connectée à la tablette de rétroprojection. Il va servir ainsi de médiateur entre le professeur et la classe, de référence pour tous les acteurs de la situation.
> De nombreux modes d'exploitation de cette situation sont possibles, en fonction de plusieurs variables:
> – le temps pendant lequel l'élève-sherpa joue ce rôle (c'est le même élève qui joue le rôle de sherpa pendant toute la séquence d'enseignement, ou plusieurs élèves jouent ce rôle successivement);
> – le type d'élève qui est choisi pour jouer ce rôle (ce peut être un "bon" élève ou au contraire un élève en difficulté; ce peut être un élève dont l'instrumentalisation est riche ou au contraire peu développée);
> – l'autonomie qui est laissée à l'élève-sherpa (le professeur peut lui indiquer les gestes à réaliser sur sa calculatrice, ou le laisser libre d'agir à sa guise). » (Trouche 2004, p.191)

Dans notre cas, un même élève pouvait jouer le rôle de sherpa pendant toute la phase collective, ou bien plusieurs élèves venaient, chacun à leur tour, manipuler l'ordinateur connecté au vidéoprojecteur. L'élève-sherpa (ou les élèves) était choisi(s) par l'enseignant, qui en passant dans les rangs, avait pu observer les stratégies utilisées et désigner l'élève en fonction des éléments qu'il voulait faire partager au reste de la classe. Finalement, l'élève-sherpa était soit libre dans la manipulation, soit guidé par les indications données par un autre élève de la classe, lui aussi choisi par l'enseignant. Cette dernière configuration est intéressante pour deux raisons :

- elle oblige les élèves à i) expliciter les procédures mathématiques et à ii) utiliser un vocabulaire précis ;
- elle permet aussi de travailler l'instrumentation et l'instrumentalisation : l'élève qui donne les instructions doit être explicite sur ce qu'il veut qu'on déplace et ce qu'on doit observer ;

De façon générale, l'enseignant interrogeait d'abord un élève qui avait utilisé une stratégie erronée, laquelle était invalidée en groupe, puis, à travers les interventions et les stratégies utilisées par d'autres élèves, pouvoir arriver à la solution attendue. Ainsi, l'enseignant pouvait reprendre des éléments de cette phase collective pour les réinvestir dans l'institutionnalisation.

III. LES SITUATIONS : PRESENTATION ET ANALYSE A PRIORI

Nous allons présenter les six situations choisies pour nos analyses. Nous donnerons une description de la situation et une analyse a priori, en montrant les variables de la situation, le rôle du déplacement dans la situation et les stratégies attendues chez les élèves.

III.1 Géo

« Géo » est une situation de prise en main du logiciel. Elle a été conçue par Claude Fini, formateur à l'IUFM de Grenoble, pour être utilisée en cycle 3 à l'école primaire ou au début du collège. C'est une situation d'exploration dans laquelle il n'y a pas de but ou de concept mathématique à travailler, mais qui permet la familiarisation des élèves avec le logiciel et avec le déplacement.

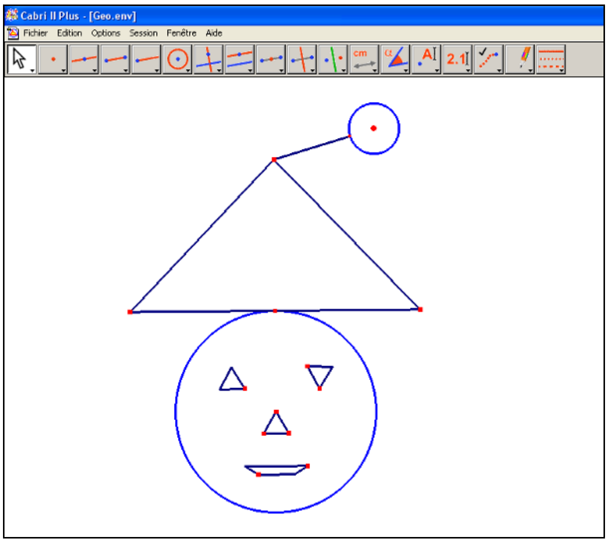


Figure 17. *« Géo »*

« Géo » a été introduite de manière volontaire comme une situation dans laquelle le déplacement n'a pas de finalité mathématique. Elle est centrée sur l'appropriation de l'artefact « pointeur » pour que les élèves apprennent à déplacer : sur quoi et comment on clique. Dans cette situation, la phase collective permettra d'une part, d'institutionnaliser comment on déplace, et d'autre part, d'introduire le principe de l'élève-sherpa.

III.1.1 Déroulement de la séance et analyse a priori

Après avoir laissé les élèves explorer le logiciel et les différents outils disponibles, ils doivent explorer la construction « Géo » et essayer de la modifier le plus possible. Ils doivent essayer de déplacer le plus d'objets possible (points, segments, etc.) et d'observer comment se déplacent ces objets.

Le déplacement joue deux rôles principaux dans cette situation :

- d'un côté, il permet aux élèves de commencer à acquérir des connaissances instrumentales, en se familiarisant avec les différents types de points existants dans Cabri : point libre, point sur objet et point non-attrapable ; les élèves peuvent donc commencer à construire des schèmes de déplacement des différents types de points du logiciel ;
- d'un autre côté, le déplacement des différents points permet d'amener le regard des élèves sur les effets graphiques créés sur les objets constitutifs de la construction ; deux types d'interprétation sont possibles et acceptables : « ça monte », « ça descend », « ça grandit », ou bien « ça bouge sur un cercle », « sur un segment ».

Les objets attrapables et déplaçables sont :

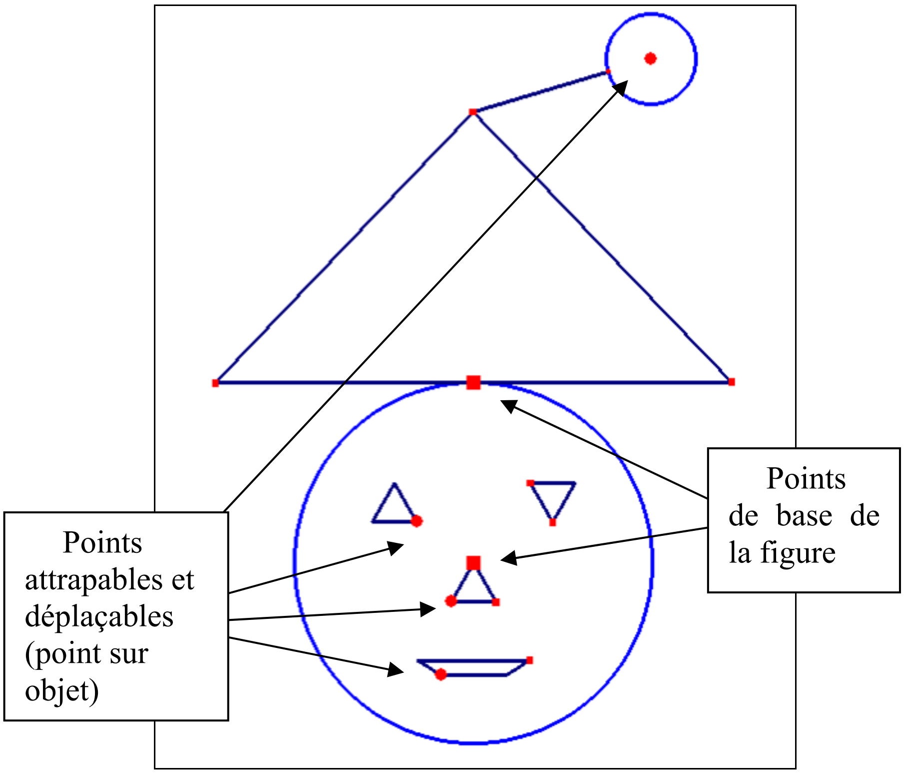


Figure 18. *Les deux points de base de la construction de Géo (représentés par des carrés ■) et les quatre points sur objet déplaçables (représentés par des ronds en gros ●) ; les autres points sont non-attrapables*

- le grand cercle peut être attrapé et translaté, et il fait translater tout Géo ;
- le centre du grand cercle qui est un des sommets du nez, est un point de base de la figure, il est donc libre et permet de modifier la taille et l'orientation de tout Géo ;
- le point de tangence du grand cercle et du triangle est aussi un point de base, donc libre, qui permet aussi de faire varier la taille et l'orientation de Géo ;
- le centre du petit cercle (le pompon) peut être déplacé sur un arc de cercle, il fait se déplacer tout le pompon;
- le sommet « visible » de l'œil gauche se déplace sur un cercle, en faisant tourner les deux yeux dans des sens opposés ;
- un autre sommet du nez, se déplace sur un arc de cercle, faisant tourner le nez et modifiant la taille du chapeau ;

  les deux derniers cas sont intéressants car ils modifient non seulement l'objet auquel ils appartiennent, le nez ou l'œil, mais permettent aussi de modifier un objet « extérieur », le chapeau ou l'autre œil ; les élèves doivent donc porter le regard ailleurs que là où ils déplacent ;
- un des sommets du trapèze de la bouche se déplace sur un segment, faisant varier la taille et la forme du trapèze et changer l'expression de la bouche.

(Voir dans les annexes les objets cachés sur lesquels se déplacent ces points)

Les objets non-attrapables sont :

- le petit cercle du pompon ;
- le segment reliant ce cercle au grand triangle et ses extrémités ;
- le grand triangle du chapeau et ses trois sommets ;
- les deux sommets « visibles » de l'œil droit ;
- le troisième sommet du triangle du nez ;
- les trois petits triangles (les yeux et le nez) ;
- le trapèze de la bouche et le deuxième sommet visible de celui-ci.

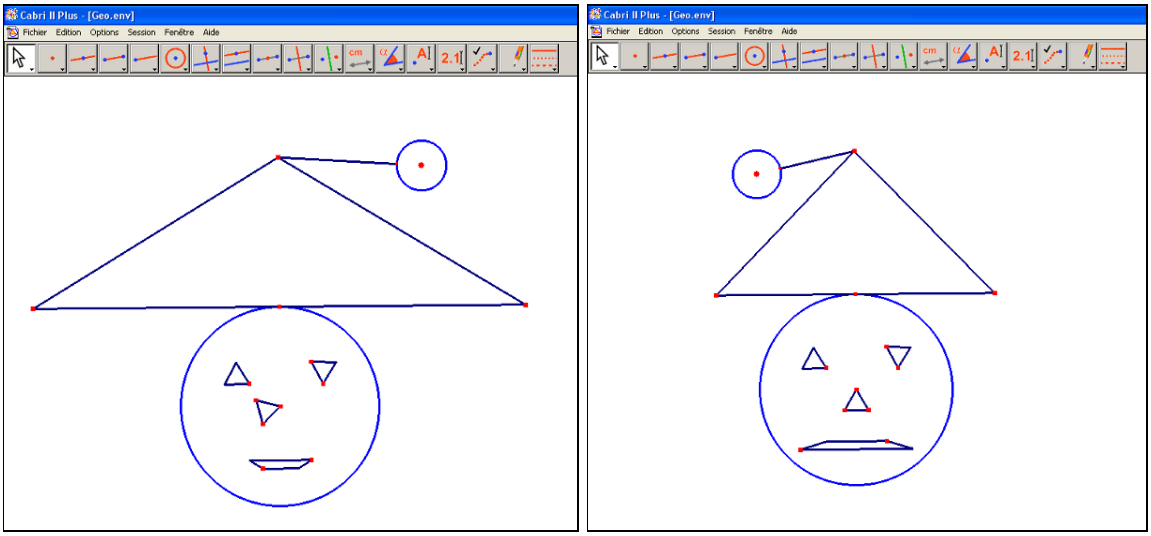


Figure 19. *Géo : on peut changer la forme de la bouche, faire bouger le pompon, le nez, les yeux et le chapeau et faire varier la taille de Géo.*

Les élèves ne vont pas s'arrêter au premier déplacement qu'ils trouveront, mais les variations de Géo peuvent être amusantes et les inciter à explorer davantage et à chercher tous les déplacements possibles. Bien que les élèves soient au début de leur genèse instrumentale, nous espérons que les élèves remarqueront la trajectoire décrite par les points.

Les élèves peuvent essayer de déplacer les points 'non-attrapables' et les formes géométriques non déplaçables. Puisque c'est la première fois que les élèves travaillent avec le logiciel, ils peuvent avoir du mal à comprendre pourquoi certains objets peuvent être déplacés et d'autres non.

Quelques interventions sont proposées à l'enseignant :

La consigne à donner aux élèves :

« Vous devez trouver les objets (points, cercles…) qui permettent de modifier Géo. Pour chacun d'eux, chercher comment il se déplace. »

Pendant la phase collective avec le vidéo projecteur :

- l'enseignant demande à un élève de citer un élément qui bouge en précisant ce qu'on attrape et ce qu'on observe ;
- un autre élève manipule cet élément.

Cette phase collective devrait permettre de s'assurer que les élèves savent déplacer : on clique et on laisse appuyée la souris, puis on déplace. Elle permet aussi d'introduire le principe de l'élève-sherpa : un élève choisi par l'enseignant qui manipule l'ordinateur vidéo-projeté et qui suit les indications données par un autre élève, lui aussi choisi par l'enseignant. Ceci obligera à l'élève qui donne les indications à expliciter : ce que l'élève déplace et ce qu'il observe.

III.1.2 Conclusions

Cette situation permet d'introduire et de familiariser les élèves avec le logiciel et avec le déplacement. Géo n'est pas une tâche géométrique, mais une tâche de familiarisation avec l'utilisation de la souris : « je clique, je garde la souris appuyée, je déplace », ce qui était un choix volontaire de notre part. Les élèves ne devaient pas faire des interprétations géométriques des effets produits lors des déplacements, mais pouvaient se limiter à constater les effets graphiques.

Le déplacement joue deux rôles principaux, le premier est donné par le déplacement des différents points de la figure (point libre, point sur objet et point non attrapable), ce qui peut permettre aux élèves de commencer à construire des connaissances instrumentales sur le déplacement et le comportement des différents points du logiciel.

Le deuxième, c'est de permettre aux élèves d'explorer la construction. Au début, les élèves peuvent déplacer dans le but d'observer ce qui peut ou ne pas être déplacé et les effets que ça crée ; puis, ils peuvent commencer à repérer des régularités et commencer à faire attention à ce qu'ils déplacent et l'effet produit par le déplacement d'un point en particulier. Le contrôle de ce qu'ils déplacent et comment ils déplacent peut donc changer : passer de « je déplace un point au hasard et j'observe ce que j'obtiens », à « je déplace CE point pour obtenir CET effet ».

III.2 Pajérond

« Pajérond » a été conçue par Yves Gourgaud, formateur à l'IUFM de Valence, elle a été reprise et analysée dans le cadre du projet national MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique). Elle peut être utilisée à l'école primaire en cycle 3 ou en début de collège. Nous l'avons intégrée dans la prise en main du logiciel lors de la 2ème séance.

Dans « Pajérond », les élèves doivent construire la roue manquante à un véhicule qui peut se déplacer (grâce à un point attaché) sur une route (droite dont l'inclinaison peut varier). La roue doit résister au déplacement et pour cela l'élève doit construire un cercle de centre fixe par rapport au véhicule (le milieu entre deux points de la carrosserie) et de rayon fixe, sans dépendre de points externes au véhicule.

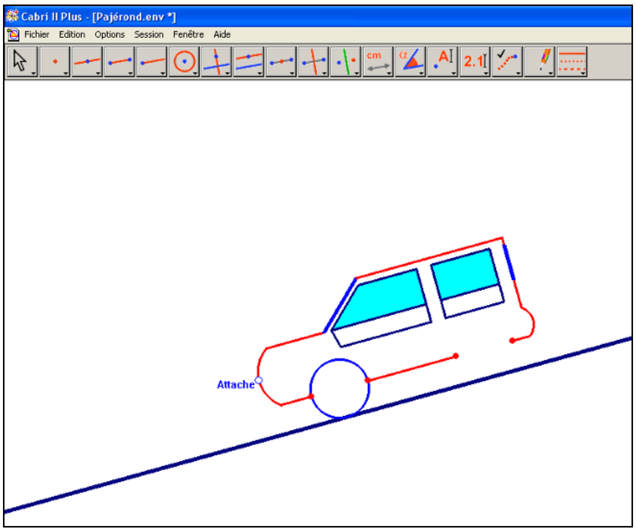


Figure 20. *Pajérond : une voiture avec une roue manquante*

Le travail mathématique est donc centré sur la notion de centre d'un cercle comme milieu de deux points diamétralement opposés. Les deux points de la carrosserie sont donnés pour que le centre du cercle soit construit explicitement comme milieu de ces deux points.

Au niveau instrumental, les élèves doivent apprendre à utiliser les outils :

- Milieu : milieu de segment ou de deux points
- Cercle : cercle de centre un point donné et passant par un point du cercle

Cette situation nous permet d'introduire l'invalidation de stratégies erronées par le déplacement, dans une situation facile à comprendre par les élèves et dont la validation ne passe pas par des connaissances mathématiques. Puisque notre ingénierie cherche à ce que les élèves s'approprient le déplacement, en particulier qu'ils l'utilisent spontanément et efficacement pour la validation de leurs stratégies, cette situation nous permet de l'introduire de manière simple, dans un contexte qui donne sens au déplacement, pour qu'ils puissent après le réutiliser dans d'autres situations de construction.

Les élèves ne mettent pas en cause le fait que la roue soit représentée par un cercle, ce qui leur permet d'entrer dans la situation. La situation évoquant la réalité, elle permet aux élèves d'anticiper le comportement de la voiture et de la roue. Ils peuvent donc invalider les stratégies erronées. Cabri offre donc un milieu potentiellement riche en rétroactions qui permet à l'élève d'invalider les stratégies erronées et de le soutenir dans la recherche d'une stratégie gagnante.

N'ayant pas un outil qui permette de construire un cercle de diamètre un segment d'extrémités deux points donnés dans Cabri, les élèves sont obligés de devoir passer par la construction explicite du centre du cercle, soit le milieu de ces deux points. Ceci constitue une variable didactique très importante.

Le déplacement ne permet pas forcément d'avoir la solution, il n'aide pas non plus à trouver la stratégie optimale. Cependant, il permet aux élèves de comprendre la situation et d'anticiper comment devrait se comporter la construction, ce qui n'est pas très souvent le cas dans des situations d'ordre plus mathématique. Grâce à cette anticipation, les élèves peuvent invalider leurs constructions et donner sens à l'invalidation des stratégies erronées ; ainsi, ils continuent à chercher la solution. Le déplacement facilite donc la dévolution du problème.

La dévolution du problème se passe en deux temps : dans un premier temps, grâce à l'invalidation des tracés au jugé, les élèves comprennent qu'ils doivent accrocher la roue à la voiture ; dans un deuxième temps, ils accrochent la roue à la voiture mais ça ne marche pas, ils voudraient que le cercle passe par les deux points visibles, mais en Cabri on ne peut le faire passer que par un seul point. D'où la nécessité de la construction du centre comme milieu de ces deux points.

III.2.1 Déroulement de la séance

Phase 1 : Découverte de la figure et détermination de la tâche (environ 5 minutes)

Les élèves ouvrent le fichier et découvrent le véhicule.

Un échange collectif devrait aboutir à : « Une roue manque ; On peut déplacer le véhicule en tirant sur le point Attache »

Phase 2 : Consigne et recherche (environ 10 à 15 minutes)

L'enseignant donne la consigne : « *Construisez la roue qui manque* ».

Il laisse les élèves chercher (ils essaient en général de tracer un cercle) et il n'intervient pas sur le fond (pas d'indication sur cercle, milieu, déplacement).

Cependant, pour exploiter les erreurs, il arrête les élèves après quelques essais infructueux, sans laisser trouver une solution valide.

Phase 3 : Phase collective (environ 10 à 15 minutes)

Des élèves viennent au poste pilote présenter leur essai de construction (l'enseignant ne faisant passer que ceux qui estiment avoir essayé une construction vraiment différente de la précédente)

Le but de cette mise en commun est d'invalider les essais par le déplacement. Il est souhaitable que l'on arrive à : *« Quand on déplace le véhicule, la roue doit rester attachée et ne pas se déformer ».*

L'essentiel est ici que les élèves explicitent la condition « *Placer le milieu des deux points de la carrosserie* ».

- Tracer le segment et avec l'outil « Milieu » construire le milieu du segment.
- Avec l'outil « Milieu » construire le milieu des deux points.

En plus de cette condition, la mise en commun devrait permettre aux élèves de formuler le constat suivant sur le plan mathématique :

- le centre du cercle doit être placé au milieu des deux points de la carrosserie.

Phase 4 : Nouvelle recherche (environ 10 minutes)

Les élèves construisent le milieu des deux points dans leur poste et travaillent sur la construction du cercle.

III.2.2 Analyse des stratégies possibles

Stratégie 1 :

La première stratégie consiste à construire un cercle au jugé, en choisissant comme centre un point au jugé, puis en ajustant la taille du cercle au jugé. Lorsqu'on déplace la voiture, celle-ci avance et la roue reste sur place.

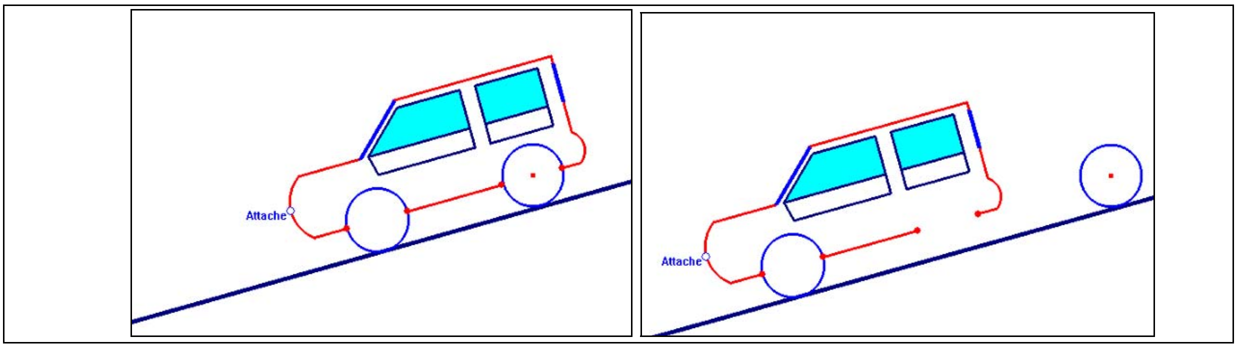


Figure 21. *Si l'on construit la roue perceptivement et que l'on fait rouler la voiture, la roue ne reste pas accrochée à la voiture*

Stratégie 2 :

Une fois que les élèves ont vu que la stratégie de base ne marche pas, ils vont vouloir « attacher » la roue à la voiture. Ils peuvent construire un cercle de centre un point au jugé, puis cliquer sur un des deux points de la carrosserie (« passant par ce point »). Lorsqu'on déplace la voiture, le centre du cercle reste statique, alors que le point d'attache de la carrosserie de la voiture avance avec, en faisant varier de taille du cercle.

Il ne suffit pas de construire le cercle passant par un des points d'accroche ; les élèves sont obligés de passer par la construction explicite du milieu

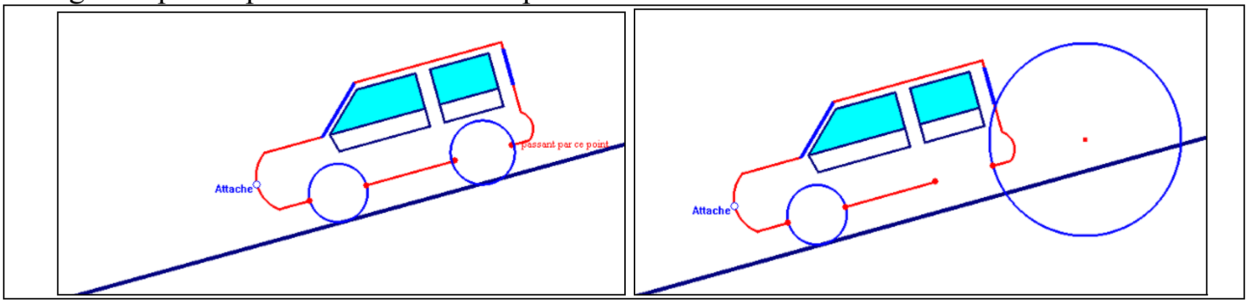


Figure 22. *Les élèves construisent la roue passant par un des points d'accroche, mais lorsque la voiture avance, la roue change de taille*

Stratégie 3 :

Stratégie gagnante : construction du centre du cercle comme milieu d'un segment ou de deux points ; puis construction du cercle en choisissant le rayon au jugé ou en passant par un des points de la carrosserie. Lorsqu'on déplace, le cercle conserve sa taille et se déplace avec la voiture.

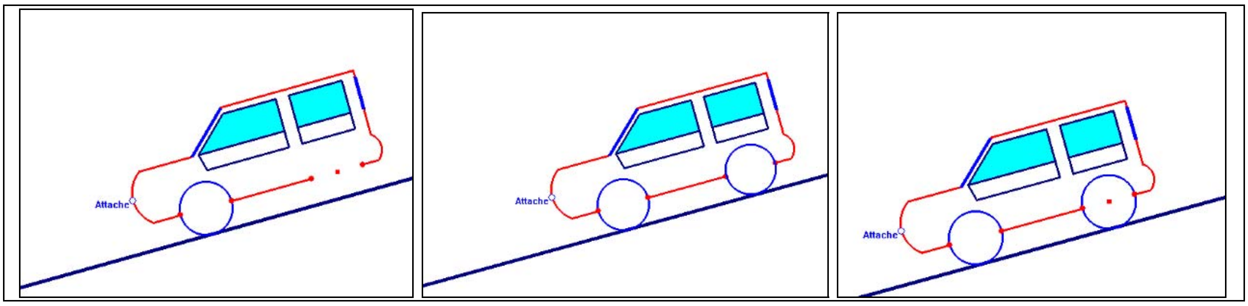


Figure 23. *Stratégie gagnante, passant par la construction explicite du milieu du cercle*

Stratégie 4 :

Par manque de connaissances instrumentales, les élèves peuvent construire le milieu des deux points, puis en essayant de construire le cercle au jugé, ils peuvent cliquer sur un point de la route (en réponse au message « Sur cette droite »). Lorsqu'on déplace, la roue se déforme et reste attachée au point de la route.

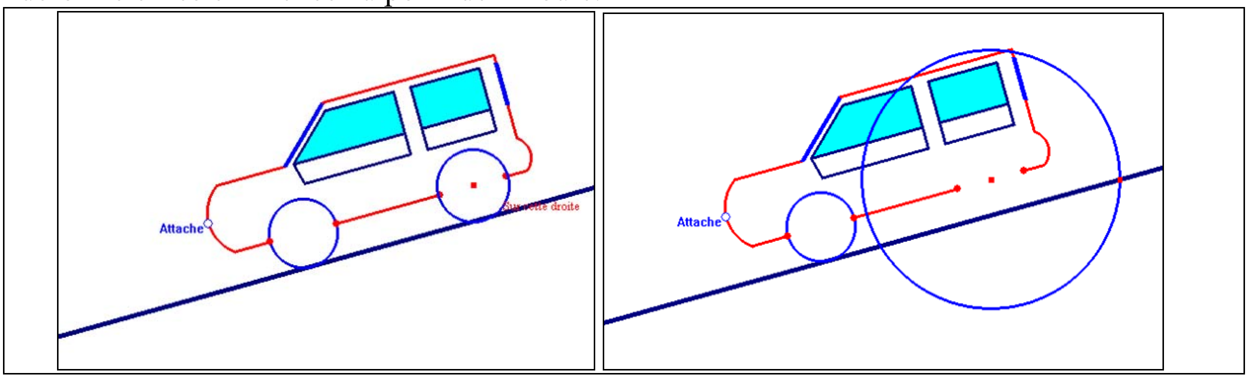


Figure 24. *En cliquant sur la route, la roue se déforme au déplacement*

III.2.3 Conclusions

« Pajérond » est la première situation de construction à laquelle les élèves ont été confrontés. Elle nous a permis d'introduire le déplacement pour valider une construction dans un contexte simple et facile à comprendre par les élèves donnant sens au déplacement.

Cette situation a deux variables fondamentales : la première, c'est les deux points visibles de la carrosserie ; n'ayant pas un outil qui permette de construire un cercle de diamètre un segment d'extrémités deux points donnés dans Cabri, les élèves sont obligés de devoir passer par la construction explicite du centre du cercle comme milieu de ces deux points. La deuxième variable, c'est le fait de donner un contexte au déplacement. Pajérond étant une situation simple et évoquant la réalité, elle permet aux élèves d'anticiper le comportement de la voiture et de la roue, et de pouvoir donc invalider les stratégies erronées. L'introduction du déplacement pour valider dans une situation simple comme Pajérond peut permettre aux élèves de se l'approprier et l'utiliser après dans d'autres situations plus complexes.

Comme nous l'avons dit, la dévolution du problème se fait en deux temps : dans un premier temps, les élèves comprennent que la roue doit être attachée à la voiture ; puis, dans un deuxième temps, et c'est là que se pose le vrai problème, les élèves doivent comprendre que, puisqu'on ne peut pas attacher la roue à deux points de la voiture mais à un seul, il faut passer par la construction du centre du cercle comme milieu des deux points de la carrosserie. Nous étudierons donc quels binômes font le passage du premier niveau de la dévolution au deuxième et comment ils cherchent à remplir cette condition.

Dans la recherche d'une solution, le déplacement pour ajuster peut apparaître dans les stratégies des élèves.

III.3 Sur quel objet ?

« Sur quel objet ?[2] » est une situation de communication (Brousseau, 1998) dans laquelle les élèves doivent utiliser le déplacement pour trouver la trajectoire de deux points, un point rouge et point vert, sans passer par l'utilisation de l'outil « Trace ».

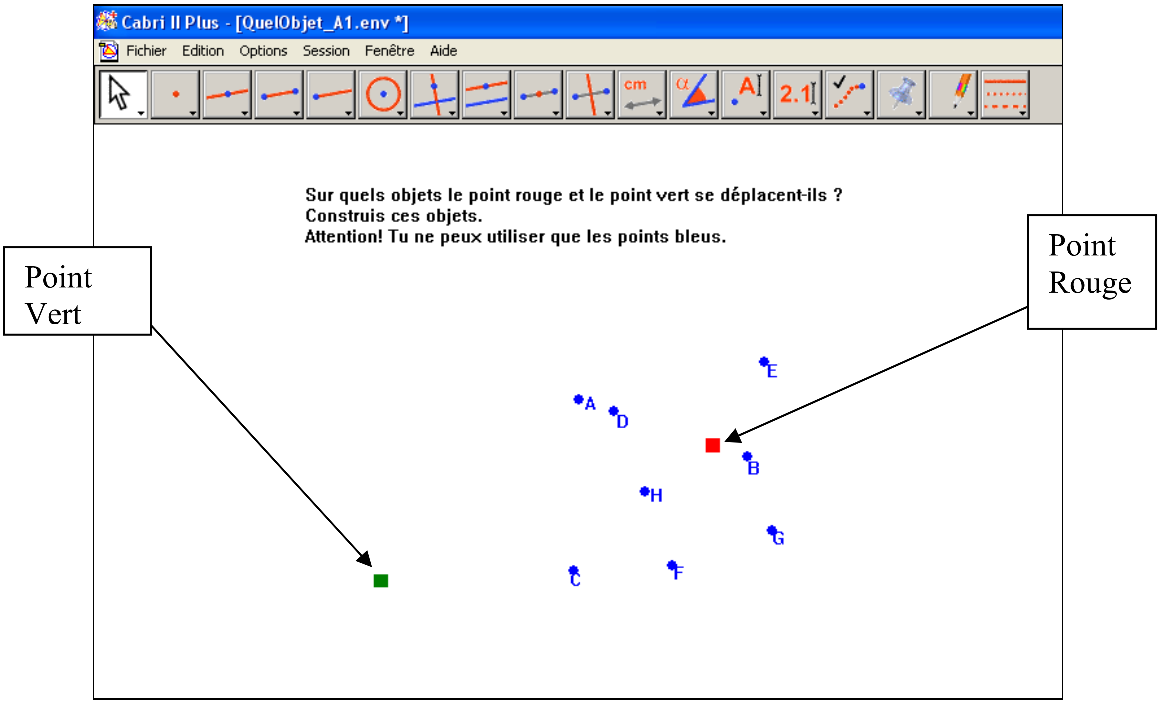


Figure 25. *Les élèves doivent déplacer le point rouge et le point vert, identifier leur trajectoire et caractériser l'objet géométrique qu'ils décrivent en fonction des points bleus*

Les élèves sont par binômes. Chaque binôme comporte un élève A émetteur et un élève B récepteur qui travaillent à l'ordinateur à tour de rôle sur des fichiers différents.

L'élève A travaille sur un fichier où il y a des point bleus, un point rouge et un point vert (comme dans la figure 8). L'élève A doit déplacer le point rouge et le point vert, trouver sur quel objet ils se déplacent, construire ces objets, puis rédiger un message qui permettra à B de construire ces mêmes objets en n'utilisant que les points bleus.

L'élève B travaille ensuite sur un fichier où il n'y a que des points bleus et doit utiliser le message écrit par A pour construire ce qui lui est demandé.

Les binômes valident ou invalident ensuite la construction en comparant les deux fichiers.

Ensuite les rôles sont échangés.

[2] « Sur quel objet ? » a été adaptée à partir d'une série de situations conçues par Claude Fini, formateur à l'IUFM de Grenoble

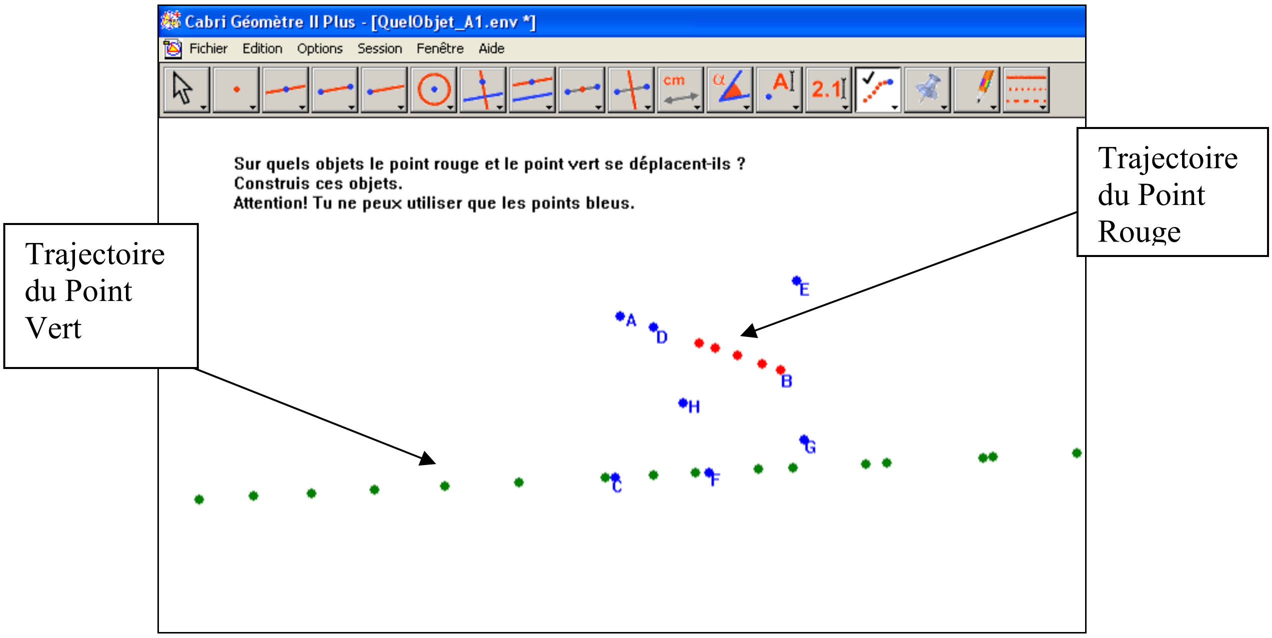


Figure 26. *Le point rouge se déplace sur le segment [DB] et le point vert sur la droite (CF).*

Du point de vue mathématique, cette situation permet de travailler les notions de segment, droite et demi-droite, par la visualisation d'une trajectoire rectiligne et le contraste entre fini et « infini ». Grâce à l'utilisation du logiciel, ils travaillent aussi sur la caractérisation formelle de ces objets et le vocabulaire correspondant, la droite passant par… et par…, ce qui n'est pas facile pour les élèves qui souvent dénomment une droite par un seul point. C'est pour cet objectif là que la situation de communication est intéressante. En effet, si il n'y a que l'élève A, l'utilisation du point mobile pour construire l'objet-trajectoire ne pourra pas être invalidée (voir analyse a priori ci-dessous). En revanche, le fait que l'objet-trajectoire doit être à reconstruire par un élève qui n'aura pas le point mobile (rouge ou vert) à l'écran, devrait permettre à l'élève A de ne pas utiliser le point mobile pour construire puis décrire l'objet-trajectoire.

Du point de vue de la genèse instrumentale, deux nouvelles utilisations du déplacement apparaissent dans cette situation :

- le déplacement pour trouver la trajectoire d'un point ; les élèves devraient pouvoir trouver la trajectoire des points rouge et vert sans passer par l'utilisation de l'outil « Trace » ;
- le cinéma-déplacement, qui n'est pas introduit de manière explicite, mais qui est nécessaire pour pouvoir identifier la trajectoire des points rouge et vert.

La reconnaissance et la caractérisation des trajectoires en fonction des points bleus demandent aux élèves de se détacher des points mobiles et de voir l'objet-trajectoire indépendamment du point qui se déplace dessus. Ceci demande un effort supplémentaire de la part des élèves puisque comme dit Bautier (1993, p.297), « Seul ce qui est tracé est digne d'attention, le reste n'existe pas ». Les élèves devront construire ces objets-trajectoire en fonction des points bleus en utilisant les outils du logiciel.

III.3.1 Déroulement de la séance

Les élèves travaillent à deux. Mais pendant que l'un travaille sur Cabri, l'autre fait une autre activité en autonomie

Phase 1 : Travail individuel des élèves A (environ 10 minutes) élèves B en autonomie
L'enseignant présente à la classe complète :

« Vous allez travailler en binôme. L'un des élèves sera A et l'autre sera B. On échangera les rôles ensuite.

A va travailler sur un fichier où il verra des points, certains en bleu, un en rouge, un en vert.

B va travailler sur un autre fichier où il ne verra que les points en bleu.

Pendant que B fera autre chose, l'élève A ouvrira son fichier. Il devra construire des objets puis écrire un message pour B qui devra pouvoir construire ces objets, mais uniquement avec les points bleus.

Pendant que A fera autre chose, l'élève B ouvrira son fichier. Il essaiera de construire les objets.

Quand il aura fini, A et B compareront leurs constructions. »

L'enseignant distribue les fiches.

Les élèves ouvrent le fichier « **QuelObjet_A1** » et suivent les instructions de la fiche.

En circulant, l'enseignant rappelle :

« Attention, les constructions ne doivent être faites ***qu'à partir*** *de points bleus. »*

L'utilisation de l'outil Trace peut être suggérée par l'enseignant.

Nom Prénom : Classe :

Date :

Sur quel objet ? Sujet A

Ouvre le fichier « Quel_Objet_A…. ».

➢ ***Observer un déplacement***

Déplace le point rouge et le point vert. Observe sur quel objet ils se déplacent.

➢ ***Construire une trajectoire***

A partir des points bleus, construis l'objet sur lequel se déplace le point rouge.
A partir des points bleus, construis l'objet sur lequel se déplace le point vert.

➢ ***Laisser un message***

Ecris un message pour l'élève B avec qui tu travailles.
Explique-lui comment construire ces deux objets, à partir des points bleus.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Figure 27. *Fiche à remplir par l'élève A et à donner à l'élève B.*

Phase 2 : Travail individuel des élèves B (environ 5 minutes) élèves A en autonomie

L'enseignant donne les messages des élèves A aux élèves B de leur binôme.
Les élèves complètent l'en-tête, ouvrent « **QuelObjet_B1** » et suivent la fiche.

Lorsqu'ils ont fini, ils appellent l'enseignant, qui demande à l'élève A de revenir.

Nom Prénom : Classe :

Date :

Sur quel objet ? Sujet B

Ouvre le fichier « Quel_Objet_B…. ».

➢ ***Construire un objet***

L'élève A avec qui tu travailles t'a laissé un message. Lis-le
Construis ce qui est décrit dans ce message.

Quand tu as fini, appelle le professeur. L'élève A avec qui tu travailles te rejoint.

➢ ***Contrôler une construction (en binôme)***

Laissez le fichier « Quel_Objet_B…. » ouvert . Ouvrez aussi le fichier « Quel_Objet_A…. ».

Déplacez le point rouge et observez.
La construction faite par l'élève B a-t-elle été réussie ? ....
Déplacez le point vert et observez.
La construction faite par l'élève B a-t-elle été réussie ? ....
En cas d'erreur, modifier le message écrit par l'élève A, d'une couleur différente.

Figure 28. *Fiche à remplir par l'élève B.*

Phase 3 : Phase de validation, travail en binôme (5 à 10 minutes)

Les élèves A et B se rassemblent devant leur poste. Ils comparent les deux fichiers et le travail fait par l'élève B par rapport au message de l'élève A.

Phase 4 : Changement des rôles (10 à 15 minutes)

Les rôles sont échangés. Même activité avec « **QuelObjet_A2** » et « **QuelObjet_B2** »

III.3.2 Analyse a priori

La phase 1 de travail individuel de l'élève A est celle qui nous intéresse le plus car c'est ici qu'apparaît le rôle du déplacement pour identifier la trajectoire d'un point. L'élève A doit déplacer le point rouge et le point vert, observer la trajectoire du point, associer à cette trajectoire un objet géométrique et le construire en n'utilisant que les points bleus, puis écrire un message à B qui lui permette de construire l'objet géométrique.

Travail individuel des élèves A

Nous faisons l'hypothèse que le déplacement des points rouge et vert ne devrait pas poser de problème et que la visualisation de la trajectoire rectiligne non plus. Par contre, associer à la trajectoire un objet géométrique et le caractériser seulement à partir des points bleus peut être un peu plus problématique. L'objet mobile « crée » sa trajectoire, mais en tant qu'objet géométrique, la trajectoire est déterminée indépendamment de l'objet mobile et donc dans Cabri aussi. La difficulté pour l'élève est de conceptualiser la trajectoire de deux façons différentes : la trajectoire de l'objet mobile A, l'ensemble des positions occupées par A dans le temps et par ailleurs, comme objet géométrique « segment », qui lui est déterminé dans Cabri par ses deux extrémités.

Trajectoire du point rouge (fichier A1) :

Segment [DB] (même analyse pour le segment [de] dans le fichier A2) **:**

Nous faisons l'hypothèse que l'identification de la trajectoire du point rouge à un segment ne devrait pas poser de difficulté, y compris l'utilisation du mot « segment ». Par contre, le tracé du segment [DB] peut poser quelques problèmes.

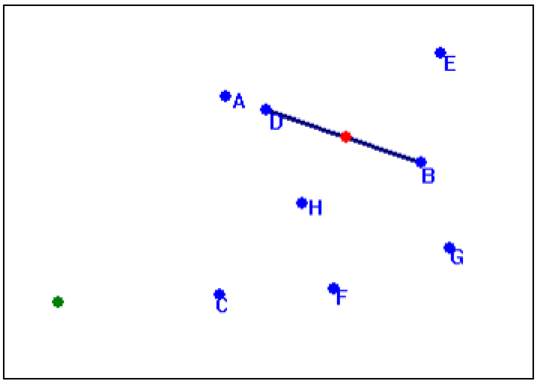


Figure 29. *Le point rouge se déplace sur le segment [DB]. Tracé correctement, celui-ci devient bleu.*

Stratégie « avec les points bleus » :

La consigne de n'utiliser que les points bleus est bien respectée mais il y a erreur sur les objets caractérisant la trajectoire. Par la proximité entre le point A et le point D, les élèves peuvent tracer le segment [AB] au lieu du segment [DB]. Cela peut venir soit du fait qu'ils pensent que la trajectoire du point rouge décrit le segment [AB], soit ils peuvent avoir des problèmes d'ordre instrumental. En effet par la proximité de ces deux points, lorsqu'on clique sur le point D, le logiciel propose : « Point D » ou « Point (point sur un objet) A ». Les élèves peuvent alors ne pas faire attention au message et cliquer accidentellement sur le point A, en traçant le segment [AB] au lieu de [DB].

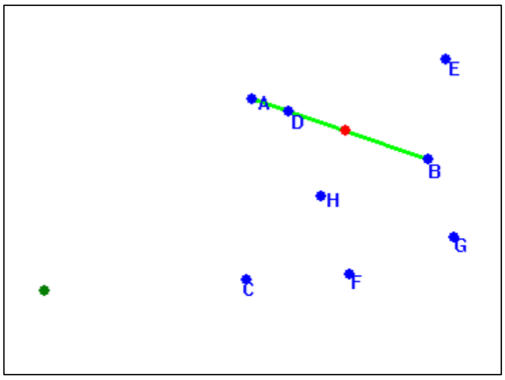


Figure 30. *Les élèves peuvent construire le segment [AB] au lieu de [DB]*

Rétroaction de Cabri : Seule la perception permet de voir lors du déplacement que le point rouge ne va jamais jusqu'au point A. Il faudrait donc que l'élève essaye de déplacer le point rouge jusqu'à A et ressente le fait qu'il est coincé en D. Cela correspond à une utilisation du déplacement pour valider une conjecture, qui est peu probable à ce stade là. Pour ceux qui ont eu une difficulté de manipulation, l'erreur peut être perçue et éventuellement corrigée.

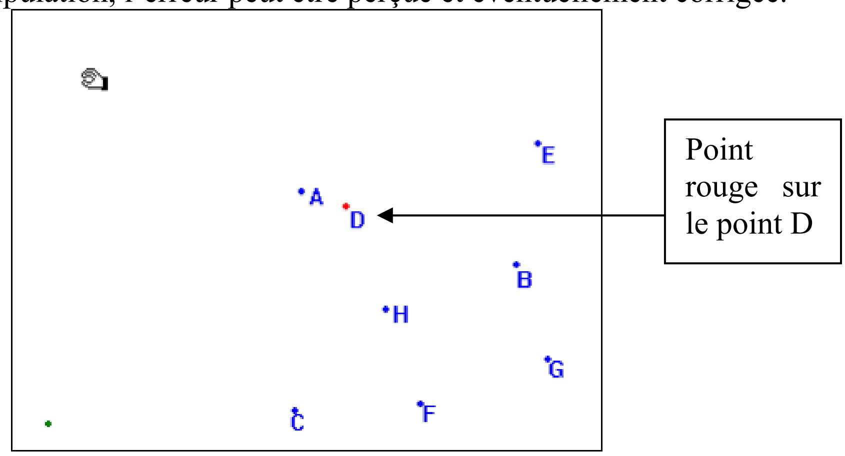


Figure 31. *Le point rouge ne peut jamais aller jusqu'au point A*

Ecriture du message pour l'élève B et rétroaction possible venant de la reconstruction par B :

L'élève A peut donc (i) avoir identifié correctement le segment [DB], même si sa construction n'est pas correcte ; il peut alors écrire un message :

1- utilisant un langage mathématique précis, permettant à l'élève B de faire une construction qui puisse être validée : « construis le segment [DB] » ou « trace le segment de D à B » ; l'utilisation des crochets, parenthèses, etc. n'étant pas ici le but principal ;
2- utilisant un langage plus commun comme « fais un trait de D à B », qui pourrait être interprété correctement par l'élève B ;
3- utilisant un langage plus descriptif comme « tu dois faire tout droit du point D au point B », ce qui pourrait être interprété par l'élève B par le tracé d'un segment ou d'une droite ; l'invalidation peut alors être faite visuellement par l'élève A dans la phase de validation ;
4- utilisant un langage spatial qui décrit le mouvement du point « le point rouge se déplace entre D et B », ce qui peut induire à B à placer un point perceptivement entre les points D et B ; l'utilisation du déplacement dans la phase de validation pourrait permettre l'invalidation de cette stratégie ;

L'élève A peut (ii) avoir identifié le segment [AB] comme la trajectoire décrite par le point rouge. Les messages seraient alors du même ordre que pour le segment [DB]. L'invalidation pourrait avoir lieu dans la phase de validation, lorsque les deux élèves se retrouvent, si en ouvrant le fichier dans lequel l'élève A a travaillé ils déplacent le point rouge et ils voient que la trajectoire décrite par le point n'est pas le segment [AB], mais le segment [DB].

Stratégie « utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire » :

Les élèves peuvent aussi avoir des difficultés pour caractériser la trajectoire du point rouge en n'utilisant que les points bleus. Ils se servent du point rouge pour décrire l'objet.

Ils construisent par exemple un segment qui dépend du point rouge, segment ayant comme extrémités le point rouge et D, ou B. Puis ils déplacent le point rouge pour « compléter » le segment. Le « déplacement pour ajuster » fait alors partie de la stratégie.

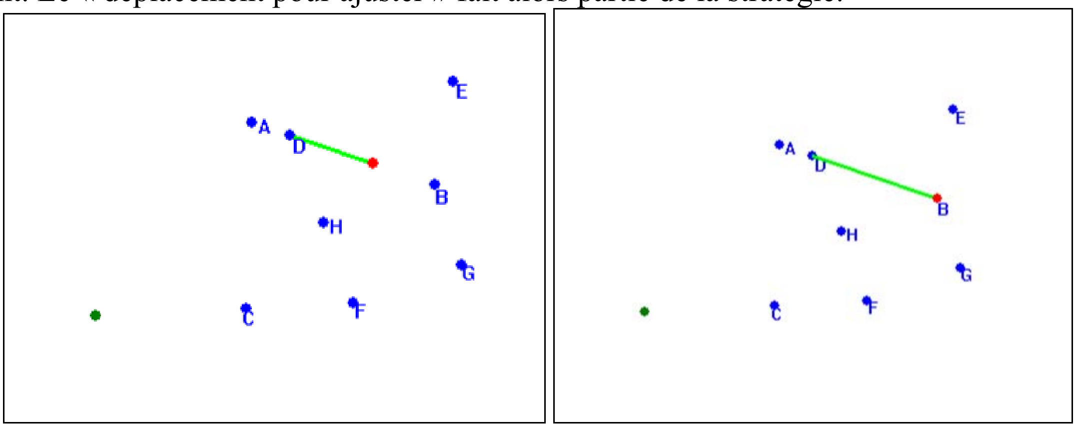


Figure 32. *Les élèves construisent le segment de D au point rouge et le déplacent pour « compléter » le segment*

Rétroaction de Cabri : le déplacement du point rouge permet de voir que le segment [DB] ne reste pas « complet ». Le déplacement permet alors d'invalider la construction ; l'erreur peut être perçue et éventuellement corrigée.

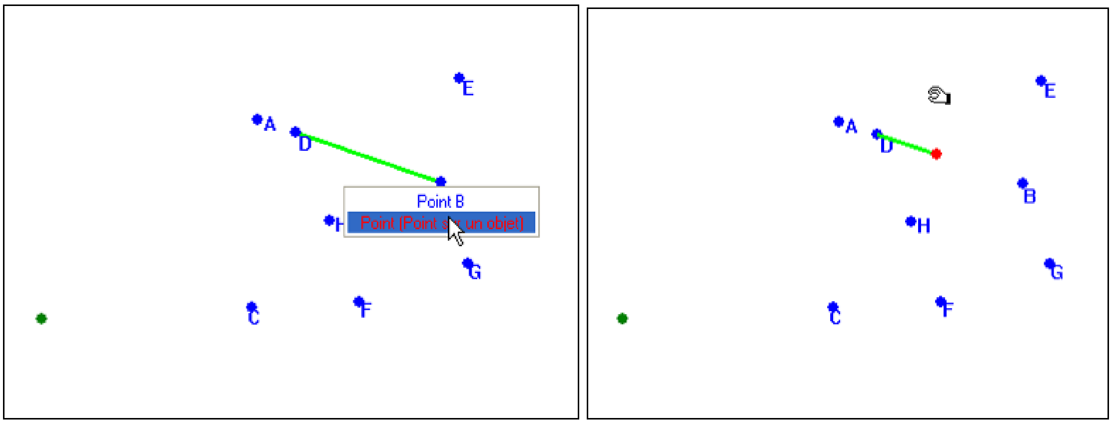


Figure 33. *Lorsqu'ils déplacent le point rouge, le segment [DB] n'est pas complet*

Ecriture du message pour l'élève B et rétroaction possible venant de la reconstruction par B :

L'élève A peut écrire un message :

1- décrivant le segment [DB] comme étant la trajectoire du point rouge ;
2- décrivant exactement ce qu'il a fait : « j'ai tracé un segment de D au point rouge et je l'ai déplacé » ; l'élève B ne pourra pas reconstruire l'objet, n'ayant que les points bleus ; la rétroaction viendra alors de l'élève B lui-même qui pourra lui montrer le fichier B sans point rouge ;
3- demandant d'abord de placer un point rouge « entre D et B », puis de faire le tracé de D à ce point là et le déplacer jusqu'à B ; dans ce cas-là le déplacement pour ajuster fait partie de la stratégie ; cette stratégie de construction ne pourrait être invalidée que par l'élève A qui connaît déjà le déplacement du point rouge et la trajectoire qu'il devrait suivre.

Stratégie « par morceaux » :

Dans cette stratégie, on retrouve l'utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire, mais en plus la trajectoire n'est pas identifiée à un unique objet géométrique, le segment [DB], mais à plusieurs morceaux : ils construisent alors un segment de D au point rouge et un autre segment du point rouge au point B.

Ici, aucune rétroaction de Cabri ne permet d'invalider la stratégie pour A, l'élève B ne pourra pas reconstruire l'objet.

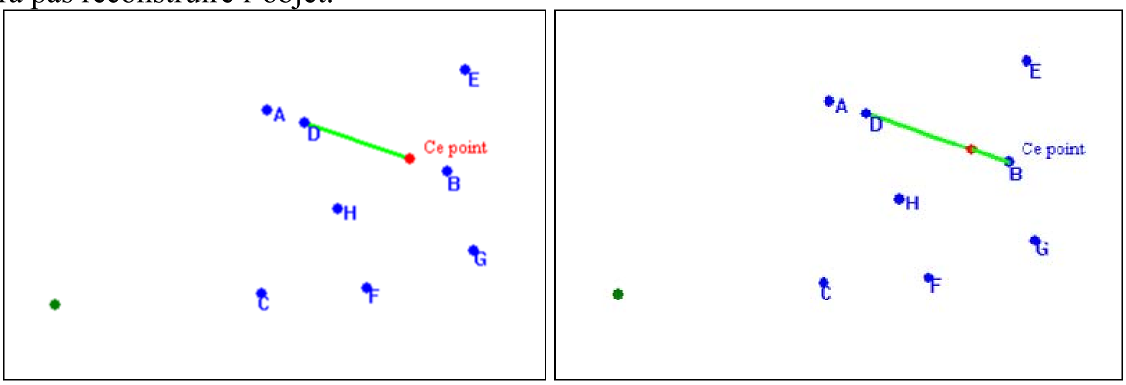


Figure 34. *Construction par morceaux : ils construisent deux segments, de D au point rouge et du point rouge à B.*

Stratégie « au jugé » :

Une autre stratégie repose sur les tracés au jugé. Dans le cas du segment, cette stratégie a moins de possibilité d'apparaître, le segment étant un objet connu par les élèves. Cependant, par manque de connaissances instrumentales, ils peuvent cliquer juste à côté D ou B, puis éventuellement ajuster par déplacement.

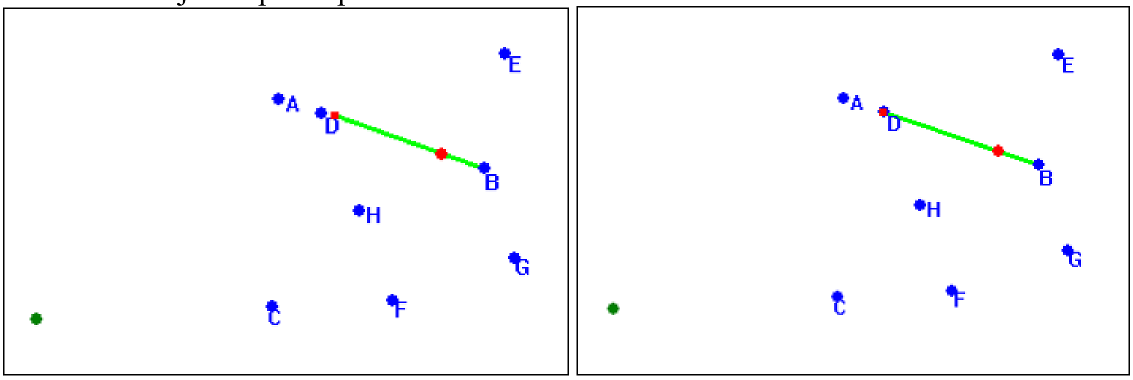


Figure 35. *Tracé d'un segment de B à un point « juste à côté » de D, puis utilisation du déplacement pour ajuster*

Le déplacement du point mobile ne permet pas d'invalider cette construction et le message décrivant la construction peut être réalisée par l'élève B sans invalidation.

Trajectoire du point vert (fichier A1) :
Droite (CF) :

L'identification de la trajectoire du point vert à la droite (CF) et sa caractérisation par les deux points en question peut donner lieu à différentes stratégies non gagnantes.

Les stratégies diffèrent sur :

- l'objet associé à la trajectoire (droite, demi-droite, segment) ;
- sur les points utilisés pour construire l'objet (aucun des points donnés, les points bleus, le point mobile, au jugé) ;
- sa construction et l'utilisation des outils, c'est-à-dire que l'outil « Droite » est utilisé perceptivement par l'élève mais dans l'action il ne le communique pas à Cabri.

Nous analyserons certaines stratégies pouvant être utilisées, mais nous les décrirons pas toutes.

Stratégie « avec les points bleus » :

La consigne de n'utiliser que les points bleus est bien respectée mais il y a erreur sur les objets caractérisant la trajectoire.

Ils peuvent identifier et construire correctement la droite (CF) :

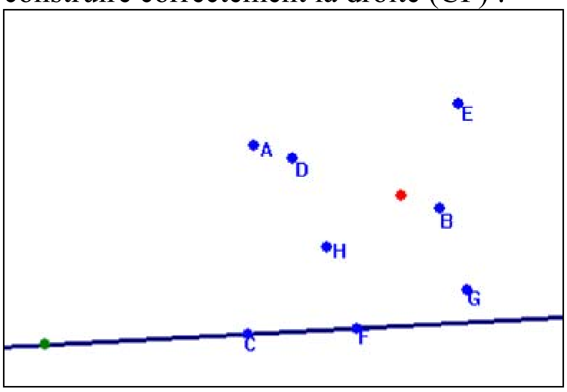
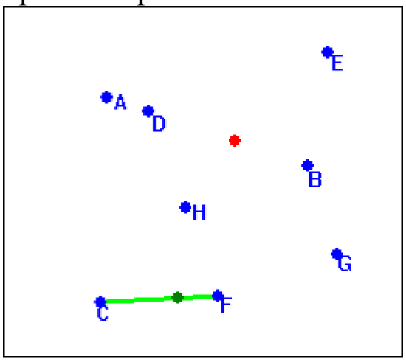


Figure 36. *Si la droite (CF) est tracée correctement, elle devient bleue*

Ecriture du message pour l'élève B et rétroaction possible venant de la reconstruction par B :

1- utilisant un langage mathématique précis, permettant à l'élève B de faire une construction qui puisse être validée : « construis la droite (CF) » ou « trace la droite qui passe par C et par F » ;
2- utilisant un langage mathématique correct, mais en ne caractérisant la droite que par un seul point « Trace la droite (C) (ou passant par C)» ; en fait, pour la plupart des élèves les droites et les demi-droites sont définies à partir d'un seul point ; l'élève B construira alors une droite passant par C, mais il pourra choisir la direction de celle-ci ; l'invalidation peut alors venir de l'élève A lorsqu'ils se retrouvent ;
3- utilisant un langage plus commun comme « fais une ligne par C et F », qui peut être interprété correctement par l'élève B ;
4- utilisant un langage plus descriptif comme « c'est tout droit et ça part d'un côté et de l'autre de C et de F » ou encore « ça va tout droit à droite de F et à gauche de C » ; ce type de messages, bien qu'imprécis pour nous, peut être compris et correctement interprété entre les élèves ;

Les élèves peuvent identifier la trajectoire rectiligne, mais ne pas l'associer à une droite. Ils peuvent par exemple rester sur le tracé d'un segment ou d'une demi-droite :



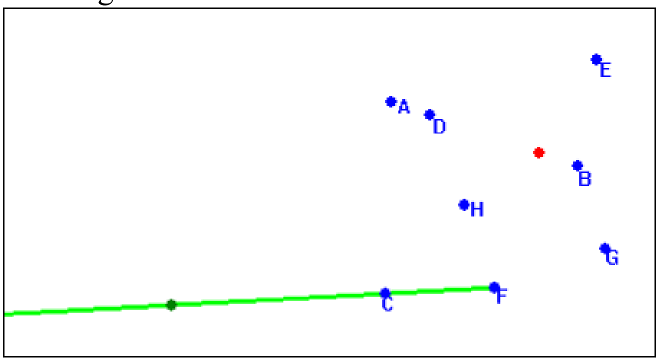


Figure 37. *Reconnaissance de trajectoire rectiligne, mais non reconnaissance l'objet « droite »*

Rétroaction de Cabri : Seule la perception permet de voir lors du déplacement que le point vert ne reste pas sur le segment [CF] ou la demi-droite [FC). Il faudrait donc que l'élève essaye de déplacer le point vert au-delà des points C et F et qu'il voit que le point vert peut aller au-delà. Le déplacement permettrait alors d'invalider la construction.

L'élève A peut écrire un message décrivant le segment (ou la demi-droite) construit(e) ; une invalidation peut être faite avec l'élève B pendant la phase de validation en ouvrant le fichier sur lequel a travaillé l'élève A en déplaçant le point vert.

Stratégie « utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire » :

Les élèves peuvent aussi avoir des difficultés pour caractériser la trajectoire du point vert en n'utilisant que les points bleus. Ils se servent alors du point vert pour décrire l'objet.

Les élèves peuvent identifier la droite décrite par la trajectoire, mais ne pas la tracer passant par C et par F, mais par le point vert :

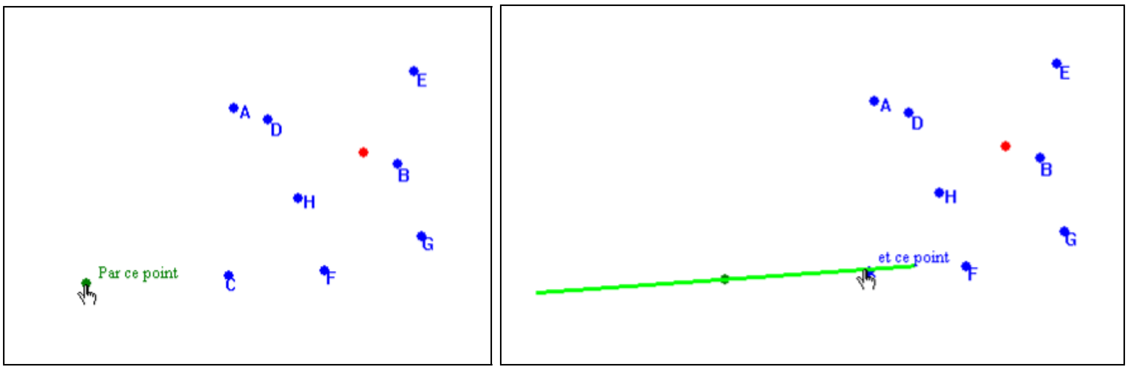


Figure 38. *Tracé de la droite passant par le point vert et par C ou F*

Dans ces cas-là, aucune rétroaction de Cabri ne permet d'invalider la stratégie de l'élève A. Le message envoyé à l'élève peut :

- utiliser le point vert et dans ce cas-là l'élève B ne pourra pas reproduire l'objet ;
- caractériser la droite à partir du point bleu par lequel cette droite a été tracée (la droite (C)) ; l'élève B construira alors une droite dont la direction sera certainement fausse ;
- caractériser la droite comme passant par C et par F ;

Stratégie « par morceaux » :

L'élève A peut aussi construire les demi-droites [FC) et [CF). Le déplacement du point vert ne permet pas d'invalider cette stratégie, ni la construction faite par l'élève B basée dans un message décrivant les deux demi-droites.

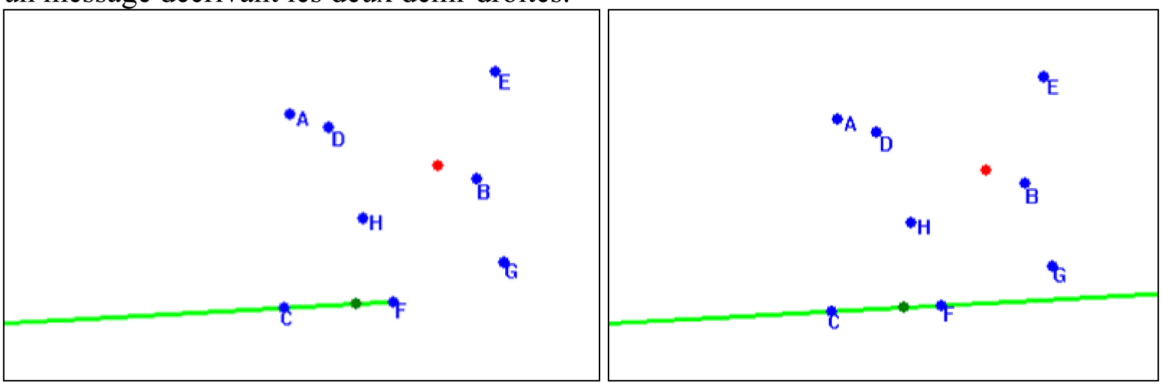


Figure 39*. Tracé des demi-droites [FC) et [CF)*

Stratégie « au jugé » :

La droite (CF) peut être identifiée, mais sa construction peut être faite de manière perceptive, en construisant la droite qui passe par C ou par F, puis choisissant la direction de la droite visuellement.

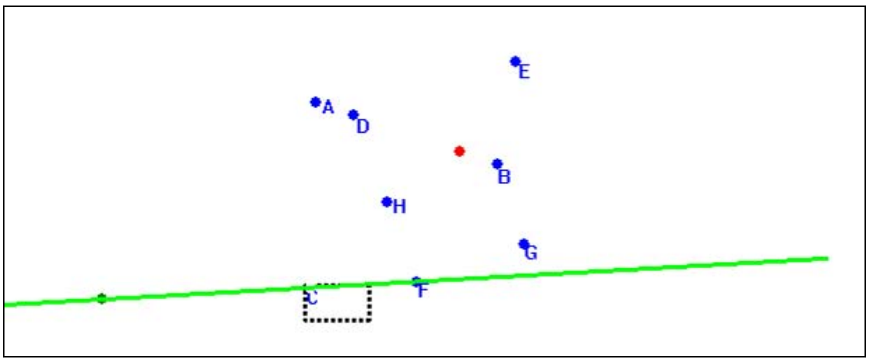


Figure 40. *Tracé de la droite passant par C et perceptivement passant par F*

Ce type de construction peut favoriser l'apparition de messages n'utilisant qu'une seule lettre pour décrire la droite tracée (droite (C) ou droite (F)).

Le déplacement du point vert ne permet pas l'invalidation de ces stratégies au jugé.

L'élève pourrait aussi construire un segment et des demi-droites de direction déterminé au jugé pour avoir la trajectoire complète.

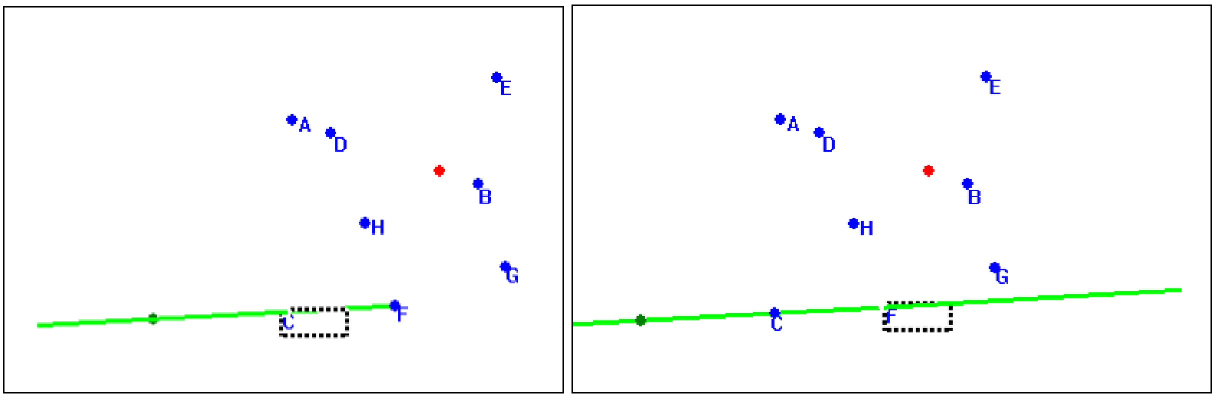


Figure 41. *Tracé du segment [CF], puis d'une demi-droite partant de C passant (perceptivement) par le point vert et d'une demi-droite partant de F et dont la direction est déterminée au jugé*

Le déplacement du point vert pourrait permettre l'invalidation de la construction (si la demi-droite à partir de F n'a pas la direction de (CF)). Cependant la description de cette construction doit tenir en compter le point vert, donc elle ne serait pas reproductible par l'élève B.

Trajectoire du point rouge (fichier A2) :

Demi-droite [fa) :

L'identification de la demi-droite [fa) devrait se faire par opposition ou contraste avec le segment, limité par deux points, et la demi-droite qui n'a pas de limite.

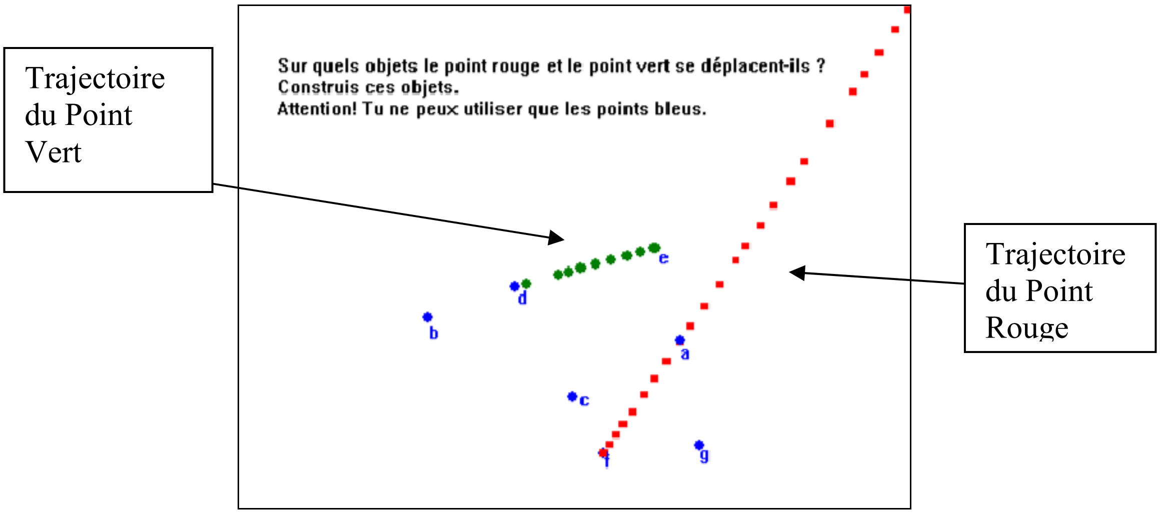


Figure 42. *Fichier « **QuelObjet_A2** » : le point vert décrit un segment, le segment [de], et le point rouge décrit une demi-droite, la demi-droite [fa).*

Stratégie « avec les points bleus » :

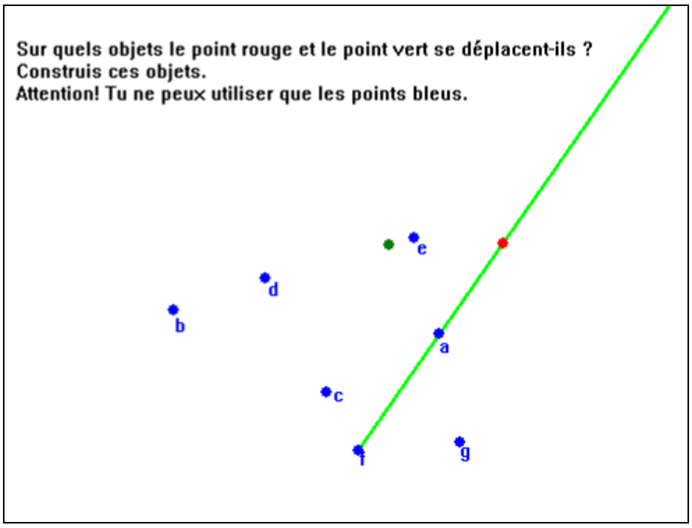


Figure 43. *La demi-droite [fa) correctement tracée ne change pas de couleur*

Comme dans le cas du segment et de la droite, même si la demi-droite est correctement identifiée et construite, il peut y avoir des erreurs dans l'écriture du message pour l'élève B et des rétroactions possibles venant de la reconstruction par B. Cependant nous faisons l'hypothèse que lors des changements des rôles le langage utilisé sera plus précis :

1- utilisant un langage mathématique précis, permettant à l'élève B de faire une construction qui puisse être validée : « construis la demi-droite [fa) » ;
2- utilisant un langage mathématique correct, mais en ne caractérisant la demi-droite que par un seul point « Trace la demi-droite f (ou à partir de f)» ; l'élève B construira alors une demi-droite à partir de f, mais il pourra lui donner une direction quelconque ; l'invalidation peut alors venir de l'élève A lorsqu'ils se retrouvent ;
3- utilisant un langage descriptif comme « c'est tout droit et ça part de f et ça continue après a » ou encore « ça va tout droit de f et en haut de a » ;

Les élèves peuvent identifier la trajectoire rectiligne, mais ne pas l'identifier à une demi-droite et tracer le segment [fa] ou la droite (fa) :

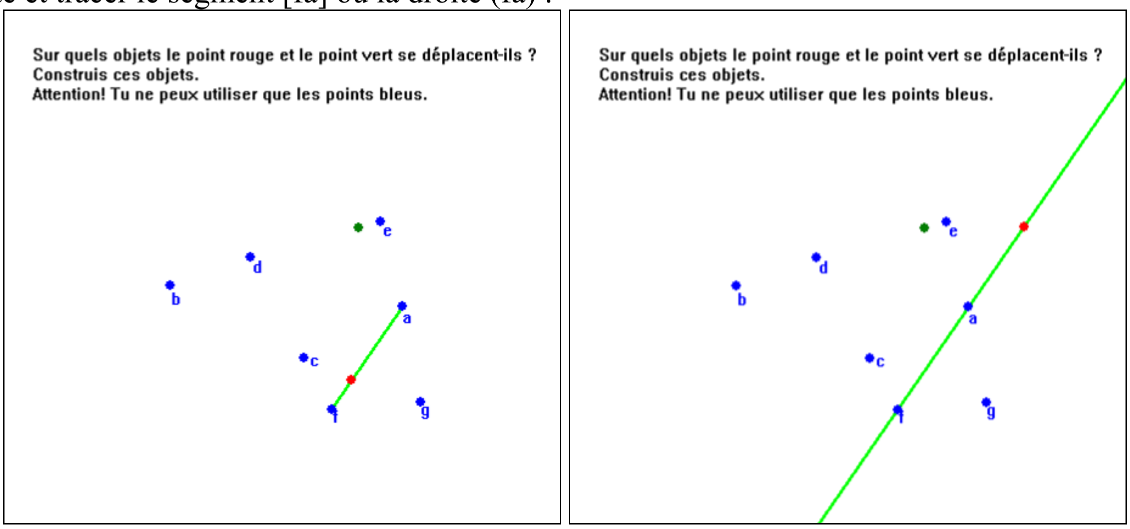


Figure 44. *Tracé du segment [fa] ou la droite (fa)*

Dans les deux cas, le déplacement du point rouge devrait permettre de voir que le point rouge ne va que jusqu'au point f (et donc invalider le tracé de la droite) et au-delà du point a (et donc invalider le tracé du segment). Il faudrait donc que l'élève essaye de déplacer le point rouge et ressente le fait qu'il est coincé en f, mais pas en a.

Stratégie « utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire » :

Les élèves peuvent ne pas caractériser la trajectoire du point rouge en n'utilisant que les points bleus et se servir de point mobile pour le faire.

Ils peuvent tracer la demi-droite à partir du point f et passant par le point rouge. Le déplacement du point rouge peut permettre invalider cette construction si les élèves le déplacent jusqu'au point f, dans le cas contraire, le déplacement du point rouge ne permet pas l'invalidation de la construction.

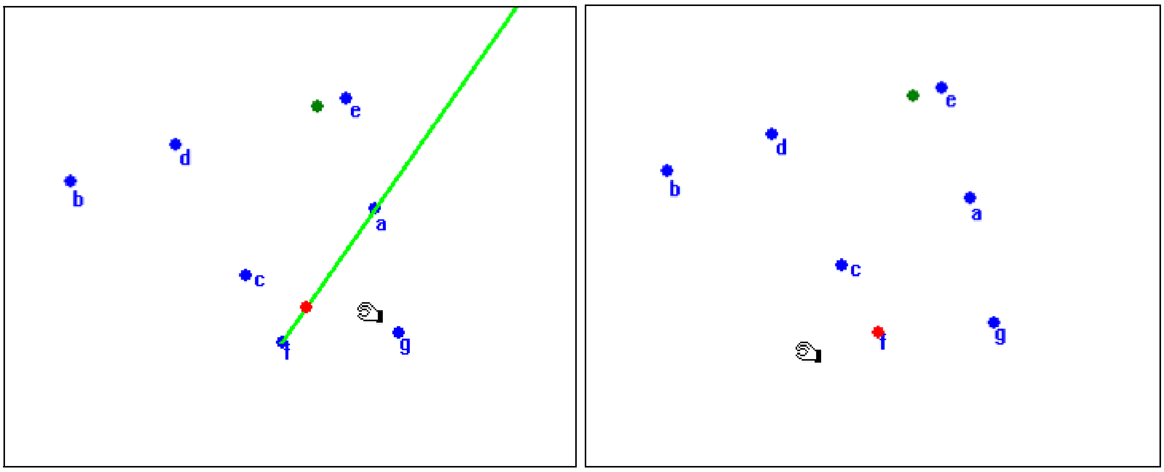


Figure 45. *Le déplacement du point rouge jusqu'au point f fait disparaître la demi-droite ; ce n'est que lorsque le point rouge est sur le point f que la construction peut être invalidée*

L'élève B ne pourra pas reproduire l'objet.

Stratégie « par morceaux » :

Les élèves peuvent identifier la trajectoire rectiligne et essayer de la reconstruire par « morceaux », traçant par exemple le segment [fa] et le segment de a au point rouge. La utilise les points bleus concernés et le point mobile, elle combine donc ces deux stratégies.

L'élève B ne pourra pas reconstruire qu'une partie de l'objet représenté.

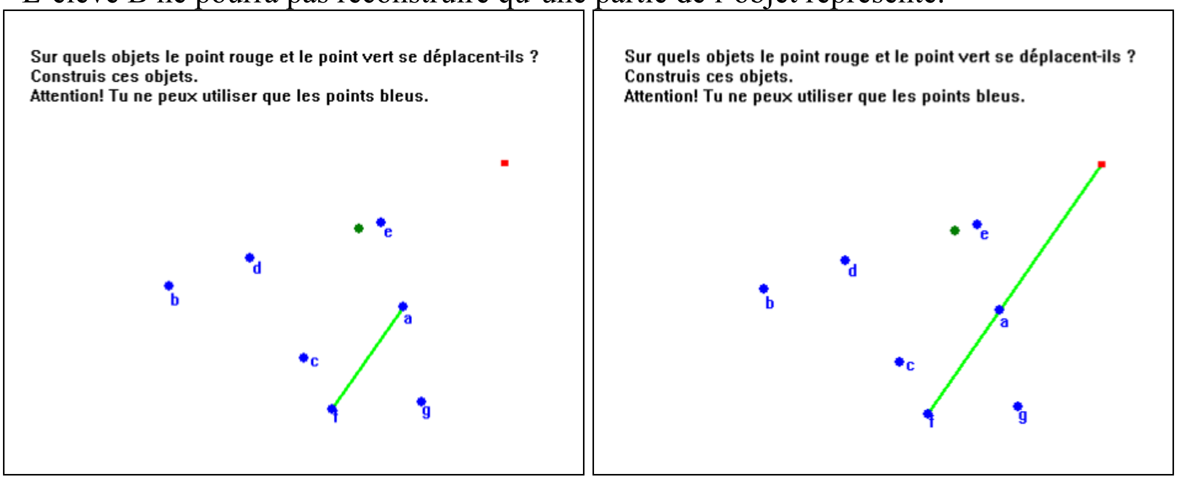


Figure 46. *Tracé des segments [fa] et du point a au point rouge*

Le déplacement du point rouge pourrait être utilisé pour prolonger la trajectoire laissée par le point rouge.

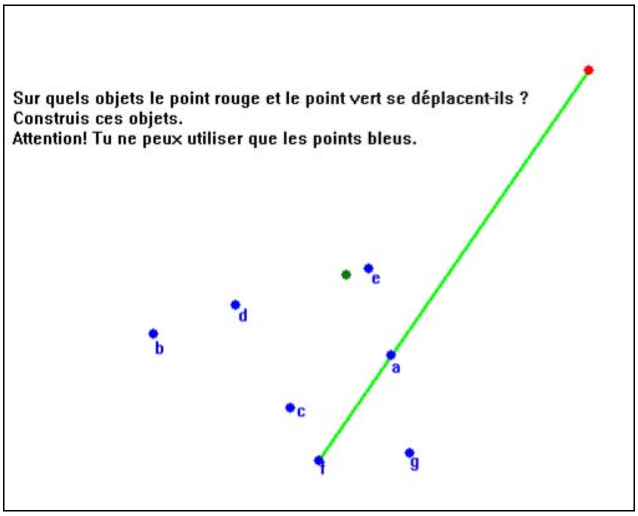


Figure 47. *Les élèves peuvent déplacer le point rouge pour prolonger le segment entre a et le point rouge*

Pour certains élèves, au contraire, ça peut provoquer un changement de stratégie, en particulier en déplaçant le point rouge sur le segment [fa].

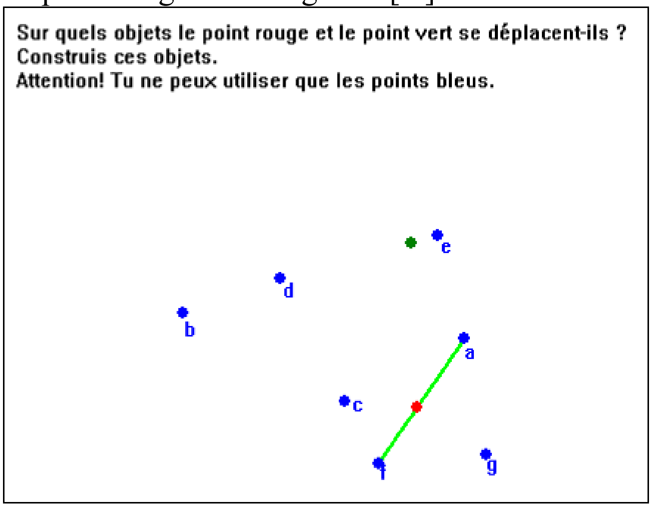


Figure 48. *En déplaçant le point rouge sur le segment [fa], on « perd » une partie de la trajectoire*

Si les élèves associe la trajectoire du point rouge à une demi-droite, mais ne la caractérise pas correctement, une autre construction par morceaux consisterait à tracer le segment [fa], puis la demi-droite à partir du point a et passant par le point rouge.

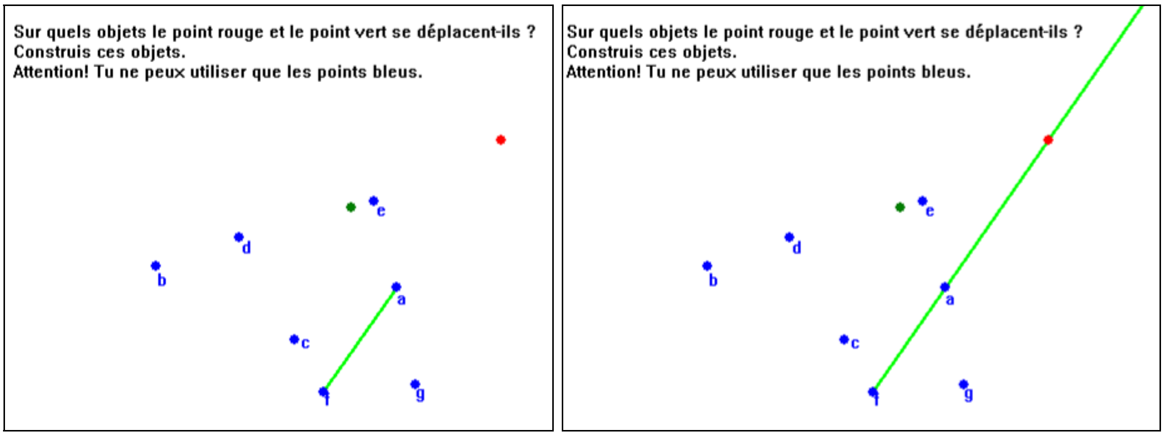


Figure 49. *Construction du segment [fa] et de la demi-droite à partir du point a et passant par le point rouge.*

Le déplacement du point rouge peut permettre l'invalidation de la construction en déplaçant le point rouge sur le segment [fa]. La demi-droite change de sens, mais le point rouge ne peut être déplacé que jusqu'au point f.

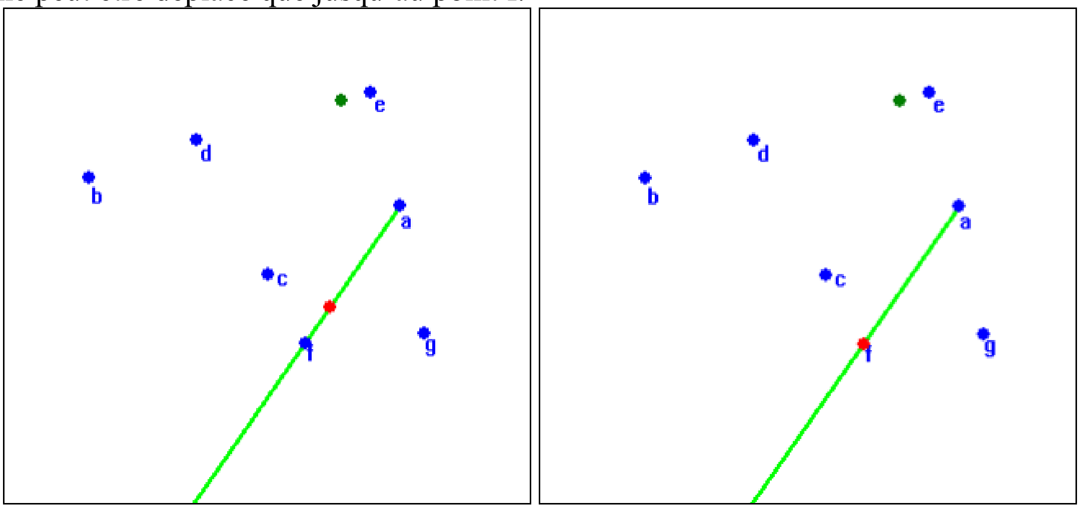


Figure 50. *En déplaçant le point rouge sur le segment [fa], la demi-droite partant de a et passant par le point rouge change de sens, mais le point rouge ne peut être déplacé que jusqu'au point f*

Stratégie « au jugé » :

Les élèves peuvent aussi réaliser le tracé de la demi-droite [fa) au jugé, en cliquant d'abord sur le point f, mais en choisissant la direction de la demi-droite perceptivement pour qu'elle passe par le point a et le point rouge :

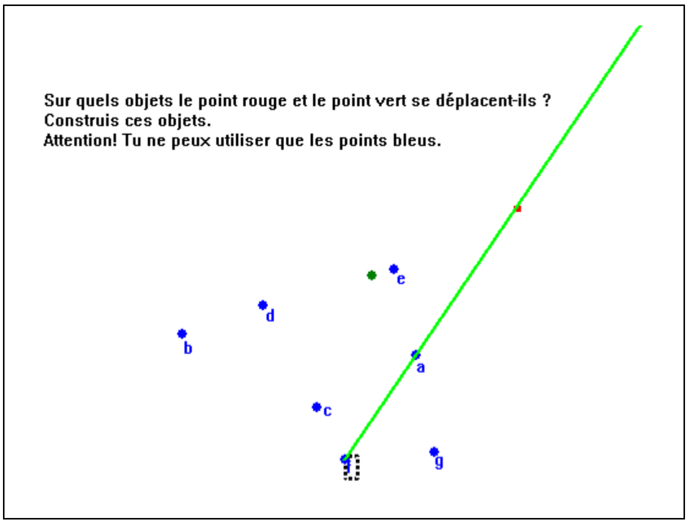


Figure 51. *Tracé de la demi-droite au jugé*

Sur l'outil « Trace » et les messages de type spatio-graphique :

De manière générale, que ce soit pour le segment, la droite ou la demi-droite, l'élève A peut rester dans des descriptions de type spatio-graphique pour indiquer où se trouve le point mobile en question. Il peut utiliser des formulations de type « place un point entre le point D et le point B » ou « le point rouge se trouve au-dessus du point a ».

Ces formulations peuvent indiquer que l'élève A n'a pas pu identifier la trajectoire du point mobile et qu'il n'a pas pu construire d'objet. L'identification de la trajectoire d'un point nécessite à la fois l'observation de la «succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et la reconnaissance de l'« un objet en soi ». Si l'élève ne prend en compte que certaines positions occupées par le point et sans les associer comme une succession qui représente un objet géométrique, l'élève peut avoir du mal à reconnaître l'objet en soi.

Pour ces élèves-là, l'utilisation de l'outil « Trace » peut être suggérée par l'enseignant. Il permet de changer de stratégie, en faisant apparaître la trajectoire, laquelle reste à reconstruire. L'introduction de l'outil trace change la situation en partie seulement, puisqu'elle facilite l'identification de l'objet à associer à la trajectoire, mais ne change pas la tâche de construction de cet objet à partir des points bleus.

III.3.3 Conclusions

« Sur quel objet ? » s'appui sur la notion de trajectoire d'un point pour faire travailler les élèves sur les notions de segment, droite et demi-droite. Cette situation s'appui aussi sur l'utilisation du déplacement contraint de points sur une trajectoire rectiligne et le contraste entre un déplacement très limité et un déplacement qui ne s'arrête qu'au bout de l'écran.

Du point de vue de la genèse instrumentale du déplacement, les élèves sont introduits à une nouvelle utilisation du déplacement : le déplacement pour trouver la trajectoire d'un point, qui nécessite à la fois un autre type de déplacement : le cinéma-déplacement, puisque les élèves doivent observer le déplacement du point en continu.

Pour identifier la trajectoire des points rouge et vert, les élèves doivent d'abord déplacer ces points et reconnaître l'objet non représenté qui se constitue grâce à l'observation de l'ensemble de positions que ces points peuvent prendre ; puis, les élèves doivent caractériser la trajectoire comme un objet qui dépend d'autres points et non pas des points mobiles. Cette caractérisation met en jeu les deux aspects de la trajectoire, d'abord comme «succession de positions d'un point qui bouge dans le temps », puis comme « un objet en soi » qui doit être défini par d'autres points que ceux qui se baladent dessus.

L'identification de la trajectoire paraît évidente. Nous faisons l'hypothèse que la reconnaissance de la trajectoire rectiligne sera faite, mais le passage à la caractérisation en fonction des autres points peut poser des problèmes, en particulier pour la droite et la demi-droite puisque pour la plupart des élèves, une droite ne dépend que d'un seul point.

Dans notre analyse, nous avons donné quatre types de stratégies pouvant être utilisées par les élèves :

- Stratégie « avec les points bleus » : peut donner lieu à une construction correcte, mais à des messages utilisant un langage non mathématique ;
- Stratégie « utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire » : peut utiliser le déplacement du point mobile pour ajuster et « compléter » la trajectoire ;
- Stratégie « par morceaux » : utilise aussi le point mobile ; dans le cas du segment, on obtient tout le segment, mais l'objet ne pourra pas être reconstruit par l'élève B ; dans le cas de la droite et la demi-droite, les élèves peuvent combiner leur construction avec des segments et des demi-droites ;
- Stratégie « au jugé » : l'élève peut utiliser les points bleus et faire une construction au jugé, ou utiliser d'autres points pour faire sa construction.

Ces quatre types de stratégies nous permettront d'analyser les actions des élèves.

Nous pourrons observer l'utilisation donnée au déplacement par les élèves lorsqu'ils essayent d'identifier la trajectoire des points rouge et vert. En particulier, observant les limites de leur exploration et les inférences qu'ils font.

III.4 Toujours/parfois vrai

« Toujours/parfois vrai » a été conçue par Claude Fini et Sophie Soury-Lavergne dans le cadre du projet national MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique). Elle fait partie d'une séquence d'apprentissage portant sur la notion de propriété géométrique et sur la validité d'une propriété en géométrie dynamique.

« Toujours/ parfois vrai » est centrée sur l'invalidation du dessin statique et des propriétés spatiales apparentes par la recherche de dessins contre-exemples permettant de les invalider.

Du point de vue mathématique, cette situation permet de montrer aux élèves la différence entre un dessin statique avec des propriétés spatiales apparentes, et une figure avec des propriétés géométriques qui se conservent au cours du déplacement. Comme formulé dans nos hypothèses de travail, l'appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de faire cette distinction et faciliter ce passage.

Du point de vue de la genèse instrumentale, le déplacement joue donc un rôle fondamental dans cette situation, puisqu'il permettra d'identifier les propriétés géométriques de la figure de celles qui ne sont qu'apparentes.

Les élèves disposent de 3 figures qui sont toutes placées dans une position initiale telle que : $(GD)\perp(BC)$, $(GD)//(FE)$ et $(GF)//(BC)$.

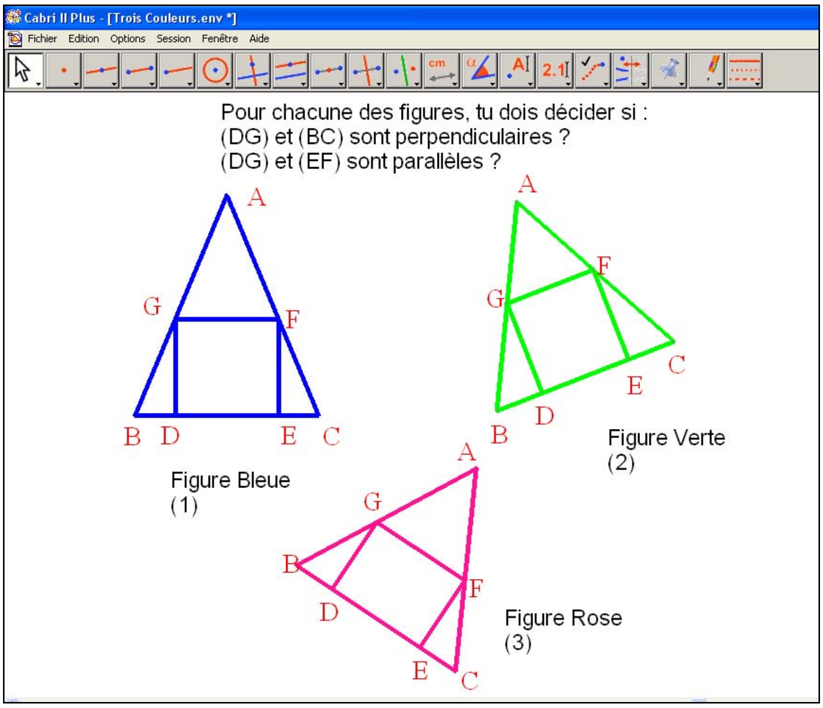


Figure 52. *Toujours/ parfois vrai qui ont l'air d'avoir les mêmes propriétés géométriques*

Lorsqu'on déplace les points de ces figures, les propriétés ne sont plus toujours vérifiées.

L'objectif est d'amener les élèves à la difficulté de décider si une propriété est vraie quand elle l'est parfois et qu'elle ne l'est plus d'autres fois.

Les élèves doivent remplir un tableau pour chaque figure en répondant par « oui » ou par « non » pour les propriétés (DG)⊥(BC) et (DG)//(EF).

Nom Prénom : Classe : Date :

Activité "TROIS COULEURS"

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		

Figure Rose	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		

Figure 53. *Fiche élève : la ligne grisée est à remplir ensuite avec la question : (GF) et (BC) sont-elles parallèles ?*

L'objectif étant de susciter chez les élèves la prise de conscience du fait que voir une propriété sur le dessin ou sur quelques positions de la figure ne suffit pas. Le but étant d'arriver à la conclusion que :

- une propriété est vraie si elle l'est toujours dans la figure, le « toujours » étant lié au déplacement dans Cabri.
- une propriété est fausse dès qu'on trouve une position pour laquelle elle n'est pas vérifiée.

La conclusion est apportée par l'enseignant comme moyen pour sortir d'une difficulté à décider et ne pas avoir à dire « ça dépend ».

Du point de vue de la genèse instrumentale du déplacement, cette situation permet de mettre en place l'invariant opératoire lié à la notion de propriété géométrique dans un logiciel de géométrie dynamique : « Les propriétés géométriques doivent se conserver au cours du déplacement ».

III.4.1 Déroulement de la séance

Phase 1 : Exploration des figures par les élèves, repérage des propriétés de parallélisme et de perpendicularité (15 min)

Les élèves ouvrent le fichier Cabri « Toujours/ parfois vrai » qui contient 3 figures dans des positions initiales identiques.

Les élèves travaillent en binôme, explorent les figures Cabri et décident pour chaque figure de la validité de chaque propriété. Ils doivent remplir, sur la fiche élève, un tableau pour chaque figure à propos des propriétés (GD) ⊥ (BC), (GD)//(FE). L'enseignant observe et rappelle au bout d'un moment qu'il faut déplacer les points des figures.

Nom Prénom : Classe : Date :

TROIS COULEURS

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(GD) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(GD) et (FE) sont-elles parallèles ?		

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(GD) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(GD) et (FE) sont-elles parallèles ?		

Figure Rose	Réponse	Note les points que tu déplaces
(GD) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		
(GD) et (FE) sont-elles parallèles ?		

Phase 2 : Débat (20 min)

L'objectif du débat est d'introduire les élèves à :

- la règle du tiers exclu : « En mathématique, une propriété est soit vraie soit fausse »
- les conditions pour qu'une propriété soit vraie : « Il faut qu'elle le soit dans tous les cas » ; en particulier en géométrie dynamique, une propriété est vraie si elle se conserve au cours du déplacement.
- le contre-exemple : « Si une seule fois la propriété n'est pas vérifiée, alors on dit qu'elle est fausse ».

L'enseignant fait un bilan au tableau pour la figure bleue, en mettant en couleur les paires de droites concernées. Il fait s'exprimer les élèves et demande un vote pour la propriété (DG)//(EF), en interrogeant les élèves. La réponse "ÇA DEPEND" peut surgir. Il doit laisser s'installer l'ambiguïté et permettre plusieurs votes avec changement d'avis des élèves. Les élèves oscillent entre oui, non et "ça dépend" et prennent conscience que plusieurs réponses sont possibles suivant la position de la figure.

En reprenant les interventions et les arguments des élèves, l'enseignant peut alors leur proposer la façon mathématique de trancher comme moyen de se mettre d'accord. Il dit : « En mathématique, pour qu'une propriété soit vraie il faut qu'elle le soit toujours, dans tous les cas. Si une seule fois la propriété n'est pas vérifiée, alors on dit qu'elle est fausse ».

III.4.2 Analyse a priori

Les trois figures sont d'abord constituées d'un triangle ABC, dont les points B et C sont punaisés (ce qui fixe le segment [BC]). Ensuite :

- La figure Bleue (1) : Les points D et E appartiennent au segment [BC], le point G est à l'intersection de la perpendiculaire à [BC] passant par D et du segment [AB], le point F est un point du segment [AC].
- La figure Verte (2) : Le triangle est isocèle en A. Le point D appartient au côté [BC] et le point G appartient au côté [AB]. La droite parallèle à [BC] passant par G coupe le côté [AC] en F. La droite parallèle à (DG) passant par F coupe [BC] en E.
- La figure Rose (3) : Le point D appartient au segment [BC], le point G est à l'intersection de la perpendiculaire à [BC] passant par D et du segment [AB]. Le point E est le symétrique de D par rapport au milieu du segment [BC]. Le point F est à l'intersection de la perpendiculaire à [BC] passant par E et du segment [AC].

Les segments [DG], [GF] et [EF] sont construits et les droites cachées.

Stratégies

La figure bleue, par rapport à la verte et la rose, a un avantage : elle est dans une position qui peut faciliter aux élèves la reconnaissance de la perpendicularité (le segment [BC] est horizontal et [DG] vertical), alors que la dans la figure verte ou rose, le segment [BC] est incliné, ce qui peut empêcher les élèves de voir la perpendicularité ou alors ils peuvent l'invalider par les mauvaises raisons.

Dans la figure bleue (1) :

On peut déplacer les points A, D, E et F. Le déplacement de D entraine le déplacement du segment [DG] qui reste perpendiculaire à [BC], et (GD) et (FE) restent parallèles.

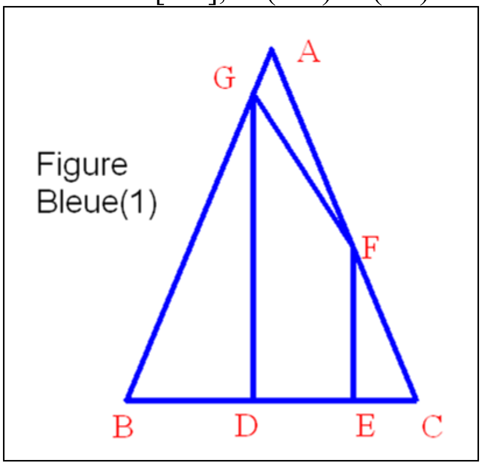


***Figure 54.** Déplacement de D : (GD) et (FE) restent parallèles*

Si on déplace F ou E, la direction du segment [EF] varie et les droites (GD) et (FE) ne sont plus parallèles.

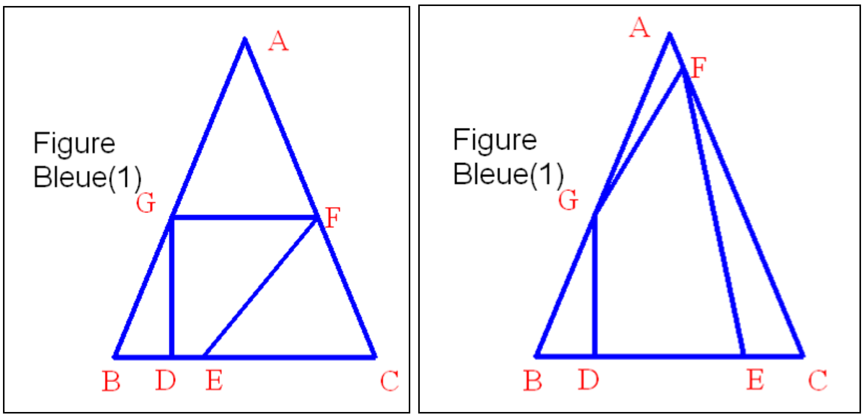


Figure 55. *Le déplacement de E ou F permet de voir que (GD) et (FE) ne sont pas parallèles*

Si on déplace A, (GD) et (FE) ne sont plus parallèles.

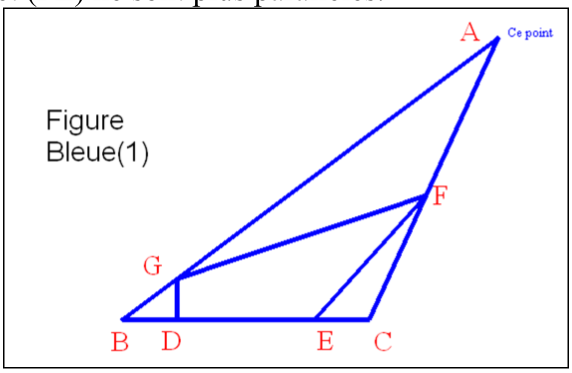


Figure 56. *Le déplacement du point A permet aussi d'invalider (GD) et (FE) parallèles*

Dans la figure verte (2) :

Le point A ne se déplace que sur la médiatrice de BC ; son déplacement ne modifie pas vraiment la forme de la figure, les droites (DG) et (EF) restent parallèles et (GD) et (BC) restent perpendiculaires.

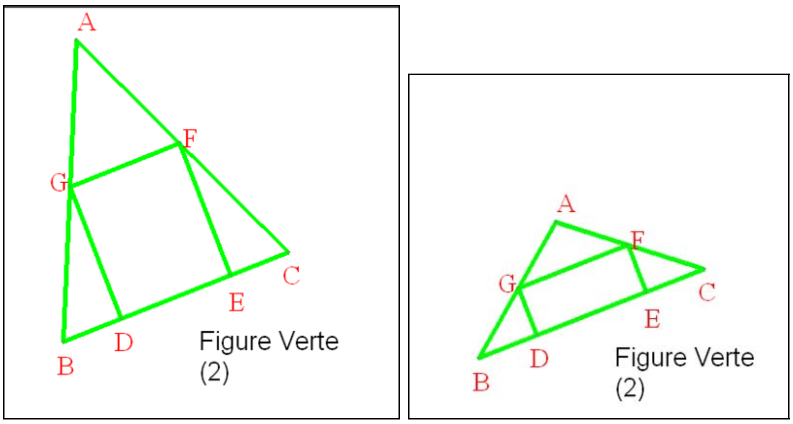


Figure 57. *Le déplacement du point A ne permet pas de décider de la validité des propriétés de la figure*

On peut aussi déplacer D et G, ce qui permet de voir que les droites (BC) et (GD) ne sont pas perpendiculaires.

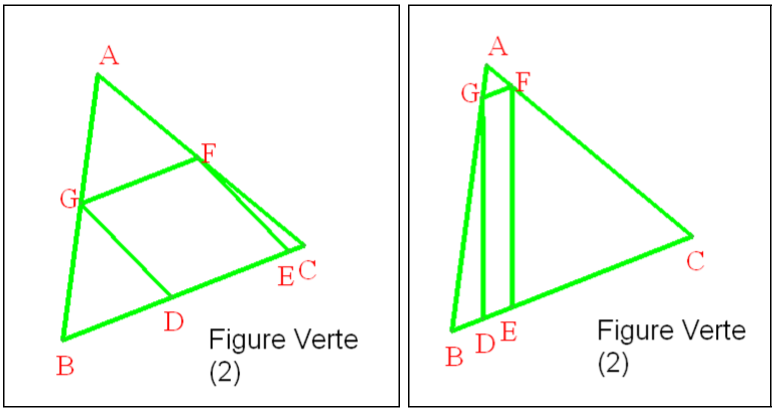


Figure 58. *Le déplacement de D ou G permet de voir que (GD) et (FE) restent parallèles et que (GD) et (BC) ne sont pas perpendiculaires*

Dans la figure rose (3) :

Dans cette figure, on ne peut déplacer que les points D et A. Si on bouge D, (GD) reste perpendiculaire à (BC) et (GD) et (FE) restent parallèles.

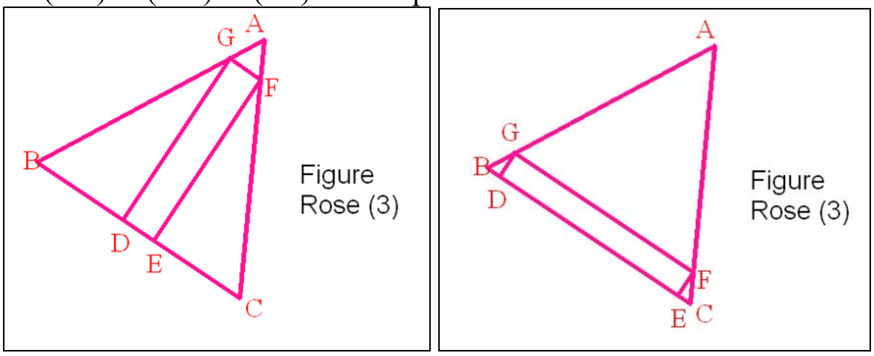


Figure 59. *Le déplacement de D permet de voir que (GD) et (AB) restent perpendiculaires et que (GD) et (FE) restent parallèles*

La propriété (GF)//(BC) est vraie dans la figure verte, mais fausse dans la figure bleue (déplacer A ou D) et fausse dans la figure rose (il faut déplacer le point A).

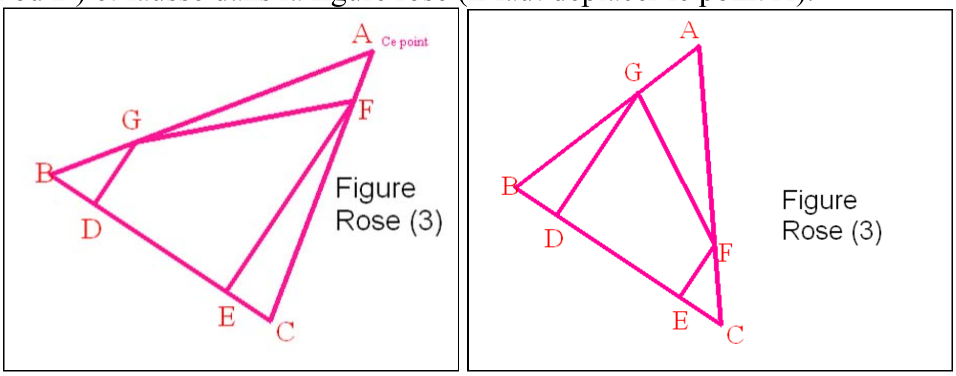


Figure 60. *Seul le déplacement du point A dans la figure rose permet de voir que (GF) et (BC) ne sont pas parallèles*

En général, la reconnaissance perceptive de deux droites perpendiculaires ou parallèles peut être difficile pour les élèves. En particulier, le fait d'avoir des segments et pas des droites peut les empêcher de valider ou invalider une propriété : pour les élèves, deux droites perpendiculaires doivent se croiser et former 4 angles droits (au lieu d'un seul) ; de même, deux droites sont parallèles si elles ne se croisent jamais, alors repérer des droites non parallèles revient à chercher quand est-ce qu'elles se croisent, ce qui est plus facile entre droites qu'entre segments.

Les élèves qui n'ont pas encore construit des invariants opératoires sur le comportement des constructions en géométrie dynamique, peuvent déplacer les points et les remettre dans la position initiale, et ne pas voir si la propriété se conserve ou non au cours du mouvement.

Certaines propriétés résistent au déplacement en fonction des points qui sont déplacés. Certains élèves peuvent se contenter de déplacer un seul point qui ne leur permet pas de décider de la validité d'une propriété géométrique. Par exemple, dans le triangle vert, la perpendicularité de (GF) et (BC) est conservée lorsque le point A bouge et non quand D bouge.

Nous présentons un tableau récapitulatif avec le déplacement des points dans les trois figures et la conservation des propriétés géométriques. La première ligne porte sur les propriétés géométriques qui résultent de la construction de la figure. Les suivantes répondent à la question : « Par le déplacement du point A (par exemple), la propriété est-elle conservée ? » :

	Figure bleue			Figure verte			Figure rose		
	(DG)⊥(BC)	(DG)//(EF)	(GF)//(BC)	(DG)⊥(BC)	(DG)//(EF)	(GF)//(BC)	(DG)⊥(BC)	(DG)//(EF)	(GF)//(BC)
Propriété est-elle vraie par construction ?	oui	non	non	non	oui	oui	oui	Oui	non
Déplacement de A	oui	non	non	oui	oui	oui	oui	Oui	non
Déplacement de D	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	Oui	oui
Déplacement de E	oui	non	oui						
Déplacement de G				non	oui	oui			
Déplacement de F	oui	non	non						

Ce qui est intéressant ici c'est la contradiction entre la validité de la propriété obtenue par construction et l'observation de sa conservation au cours du déplacement.

III.4.4 Conclusions

« Toujours/parfois vrai » est une situation centrée sur l'invalidation des propriétés spatiales apparentes de dessins statiques et sur l'introduction de la notion de contre-exemple.

Les objectifs d'apprentissage géométriques sont principalement de montrer aux élèves la différence entre un dessin statique avec des propriétés spatiales apparentes, et une figure avec des propriétés géométriques qui se conservent au cours du déplacement.

Le déplacement permet donc dans cette situation :

- de différencier le dessin, avec des propriétés spatiales apparentes, de la figure, avec des propriétés géométriques qui se conservent au cours du déplacement ;
- de trouver des dessins contre-exemples qui permettent d'invalider les conjectures formulées ;

Deux utilisations du déplacement devraient donc apparaître :

- le déplacement pour valider une conjecture/propriété, qui permet de décider si les propriétés sont vraies ou fausses ;
- le déplacement pour invalider une construction, qui leur permettra finalement de conclure.

III.5 Construire le symétrique

Cette situation a été conçue par l'enseignant. Comme nous l'avons vu dans l'étude des manuels que nous avons réalisée et le montrent les recherches sur la conception de situations par les enseignants (Laborde (2001) ; Tapan (2006)), l'utilisation la plus courante du déplacement est celle de faire constater aux élèves des propriétés géométriques. Cette situation s'appui sur cette utilisation du déplacement pour faire constater aux élèves les propriétés géométriques qui caractérisent un point et son symétrique.

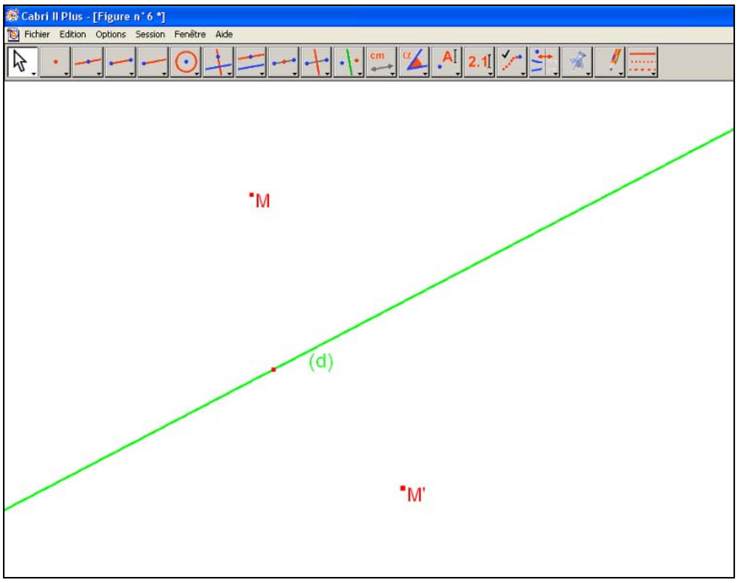


Figure 61. *Construire M' symétrique de M par rapport à la droite (d)*

Dans « Construire le symétrique », les élèves doivent construire le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) de trois manières différentes suivant les trois phases suivantes : dans la première phase, les élèves construisent le symétrique du point M dans Cabri utilisant l'outil « Symétrie axiale » ; dans la deuxième phase, les élèves doivent faire la construction en papier crayon ; et dans la troisième et dernière phase, les élèves construisent le symétrique du point M dans Cabri, mais cette fois-ci sans utiliser l'outil « Symétrie axiale ».

Dans la première phase, il est demandé aux élèves de constater les variations de déplacer le point M et la droite (d) et de constater les variations de M' au cours du mouvement, et d'identifier et caractériser les propriétés géométriques de la relation géométrique qui lie M à M'. Cette phase permettra l'invalidation des stratégies erronées utilisées dans la troisième phase.

Du point de vue mathématique, on cherche à ce que les élèves identifient les propriétés géométriques qui lient un point et son image par une symétrie axiale (la perpendicularité, l'équidistance).

Du point de vue instrumental, les élèves doivent :

- utiliser le déplacement pour constater les variations au cours du mouvement (cette utilisation du déplacement avait déjà été introduite dans une autre situation portant aussi sur la symétrie, « Symétrie axiale ») ;
- identifier la dépendance entre le point M et son symétrique M' (M peut être attrapé et déplacé, M' non) ;
- valider leurs constructions par déplacement.

III.5.1 Déroulement de la séance

Phase 1 : Découverte de l'outil « Symétrie axiale » (20 min)

Les élèves commencent par construire une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas. Puis, ils doivent explorer les outils disponibles et chercher un qui leur permette de construire M', le symétrique du point M par rapport à la droite (d), soit l'outil « Symétrie Axiale ». On laisse les élèves chercher l'outil et apprendre à utiliser par eux-mêmes, en surveillant de prêt, en passant dans les rangs, leur construction et leur utilisation de l'outil.

Puis les élèves vont utiliser cette construction pour l'explorer et chercher à caractériser les propriétés géométriques de la symétrie ; à chaque étape ils doivent noter leurs observations :

- ils déplacent le point M, la droite (d) et le point M' ;
- ils déplacent le point M de manière à ce que les points M et M' soient confondus ;
- ils construisent la droite (MM') et déplacent le point M et la droite (d) ;
- ils placent I, le point d'intersection de (MM') et (d), et déplacent M et (d).

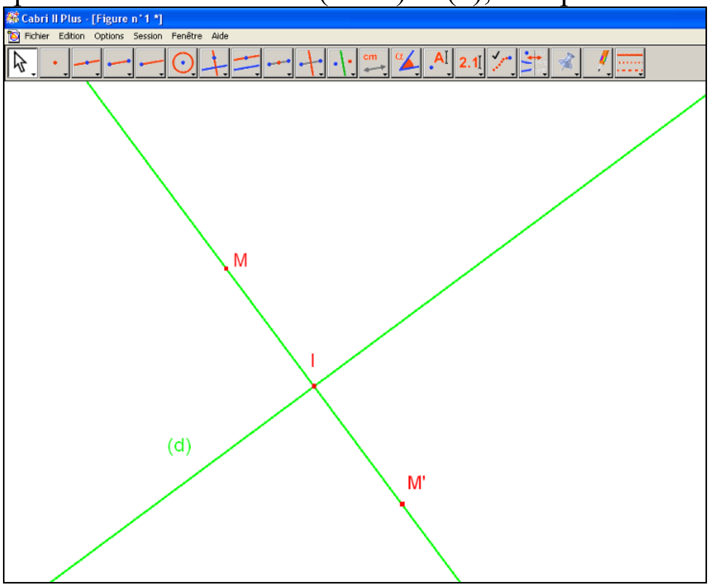


Figure 62. *Le déplacement de M et de (d) devrait permettre l'identification de la perpendicularité et de l'équidistance*

Nom Prénom : Classe :
Date :

SYMETRIE AXIALE : Construire

➢ ***Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »***

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? ....
....
Déplace le point M pour que les points M et M' soient confondus. Qu'observes-tu ? ....
....

➢ ***Observer***

Construis la droite (MM'). Déplace le point M et la droite (d). Qu'observes-tu sur (MM') et (d) ?
....
La droite (MM') coupe la droite (d) en I. Qu'observes-tu sur I et [MM'] ? ....
....

➢ ***Sur le cahier***

Construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas. En utilisant tes observations et les outils de géométrie, construis le point M'. Explique ta construction sur le cahier.

➢ ***Sans utiliser l'outil « Symétrie Axiale »***

Construis un point N qui n'appartient pas à la droite (d).
Sans utiliser l'outil Symétrie axiale, construis le point N', symétrique de M par rapport à (d).

Figure 63. *Fiche distribuée aux élèves*

Phase 2 : Construction du symétrique en papier-crayon (10 min)

Les élèves doivent faire la même construction initiale de la Phase 1 mais en papier crayon, soit une droite (d) et un point M et construire M', le symétrique du point M par rapport à la droite (d).

Les élèves doivent utiliser ce qu'ils ont découvert dans la première phase pour construire M'.

Ils peuvent utiliser tous les outils (règle, équerre, compas, etc.)

Phase 3 : Construction du symétrique en Cabri sans l'outil « Symétrie axiale » (15 min)

Les élèves travaillent à nouveau sur Cabri sur la même figure que dans la phase 1, c'est-à-dire qu'ils ont encore les points M et M' et la droite (d). En utilisant ce qu'ils ont fait dans les phases 1 et 2, ils construisent un point N qui n'appartient pas à la droite (d) et le point N', symétrique de N par rapport à (d), sans utiliser l'outil « Symétrie Axiale ».

Ils sont donc obligés d'utiliser des propriétés géométriques qu'ils ont constaté dans la première phase pour construire N' et pour que pouvoir l'« accrocher » à N, de sorte qu'ils se déplacent comme M' se déplaçait lorsqu'on déplaçait M dans la première phase. L'utilisation de propriétés géométriques dans la construction de N' assure ce comportement.

III.5.2 Analyse a priori

Phase 1 : Découverte de l'outil « Symétrie axiale »

La construction du point symétrique peut être difficile du point de vue instrumental, puisque les élèves vont chercher à cliquer à l'endroit supposé du point M' et non pas sur les arguments de la fonction « Symétrie axiale ». Cependant, les rétroactions du logiciel peuvent guider les élèves dans les actions à suivre (« Symétrie de ce point », « par rapport à cette droite »).

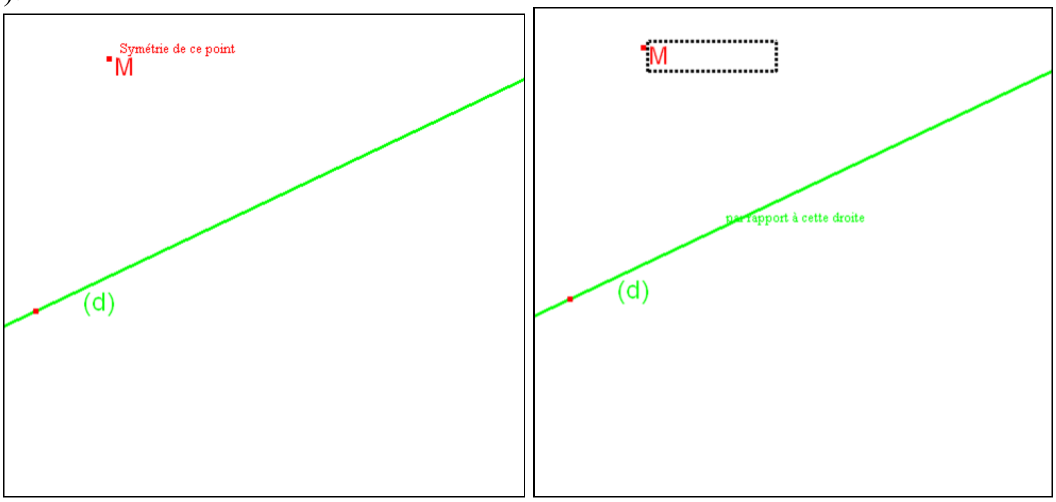


Figure 64. *Une fois l'outil « Symétrie axiale » choisi, en approchant la souris du point M le logiciel propose « Symétrie de ce point » ; en approchant la souris de la droite (d), le logiciel propose « par rapport à cette droite »*

Les élèves doivent donc déplacer le point M, la droite (d) et le point M' et observer ce qui se passe. Ici, on attend que les élèves repèrent la relation de dépendance entre le point M, la droite (d) et le point M'. Le fait de ne pas pouvoir déplacer le point M', mais qu'il soit déplacé lorsqu'on déplace M ou la droite (d), devrait leur permettre de comprendre mieux.

« Déplace le point M pour que les points M et M' soient confondus. Qu'observes-tu ? » : le mot « confondus » peut ne pas très bien être compris par les élèves. Ce qu'on cherche c'est à qu'ils comprennent que la seule position dans laquelle les deux points peuvent être confondus, c'est lorsqu'ils sont sur la droite (d).

Après avoir tracé la droite (MM'), les élèves doivent déplacer le point M et la droite (d) et constater que les deux droites sont perpendiculaires, cependant cette propriété peut ne pas être vue par les élèves ; la perpendicularité est facilement reconnue par les élèves lorsque les droites sont verticale/horizontale, mais très difficilement reconnue autrement. Comme Grenier (1989) l'a montré

> « La propriété d'orthogonalité n'est pas mise en œuvre spontanément et, même alors, elle est peu ou mal explicitée. [...] de nombreuses règles d'action se *substituent* à la mise en œuvre de cette propriété [l'orthogonalité], induisant des procédures qui « marchent » dans des cas particuliers mais très répandus dans l'enseignement et dans les manuels :
> - les procédures de rappels horizontal ou vertical, pour des directions privilégiées de la droite de symétrie dans la feuille ; » (Grenier 1989, p.39)

Après avoir déplacé, ils peuvent en rester à « elles se coupent » ou « les points restent sur la droite ».

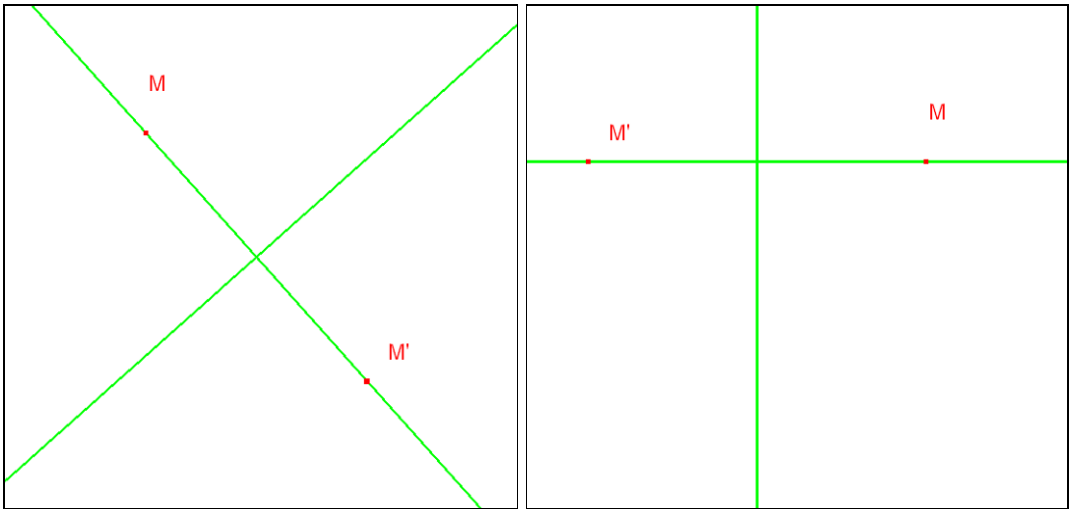


Figure 65. *La reconnaissance de la perpendicularité dépend de la position relative des droites (d) et (MM')*

De même, la reconnaissance du point I, point d'intersection de (MM') et (d), comme milieu du segment [MM'] peut être problématique pour les élèves. Le déplacement du point M et le fait de le définir comme point d'intersection, peut les induire à dire que le point reste à l'intersection, sans chercher à le caractériser géométriquement.

Finalement, répondre à une question du type « Qu'observes-tu ? » pour les élèves peut être une vraie difficulté. L'enseignant assume que la réponse à cette question est évidente et que les élèves seront capables d'observer ce qui leur est demandé ; mais pour pouvoir observer la propriété géométrique demandée, les élèves devraient déjà connaître la propriété en question. Le contrat qu'il y a derrière cette question amène les élèves à se poser la question : « qu'est-ce qu'il faudrait qu'on observe ? ».

Phase 2 : Construction du symétrique en papier-crayon

Les élèves doivent utiliser ce qu'ils ont constaté dans la phase 1 pour faire la construction dans cette deuxième phase. Cependant, la plupart des élèves utiliseront leurs connaissances antérieures et les conceptions qu'ils ont de la symétrie.

C'est pour cela qu'on peut s'attendre à voir des constructions qui ne mettent pas en œuvre la perpendicularité ou l'équidistance à l'axe, bien que cette dernière propriété soit plus facilement reconnue par les élèves.

Notre intérêt étant centré sur l'utilisation de Cabri et du déplacement, nous n'entrerons pas plus dans les détails de l'analyse de cette phase.

Phase 3 : Construction du symétrique en Cabri sans l'outil « Symétrie axiale »

Cette phase a le même comportement qu'une boîte noire : « si N bouge, N' doit bouger aussi » dans laquelle le comportement de M et M' sert de modèle.

Les élèves doivent utiliser ce qu'ils ont fait dans les deux premières phases, placer un nouveau point N et construire son symétrique N', sans utiliser l'outil « Symétrie Axiale ».

Les observations réalisées dans la première phase et l'utilisation du cinéma-déplacement (l'observation de ce qui se passe comme si c'était un film) leur permettent d'invalider les stratégies erronées.

La stratégie de base utilisée par les élèves sera sans doute celle de placer un point au jugé, mais cette stratégie sera invalidée grâce au déplacement et à l'exploration effectuée dans la première phase. Cependant, comme formulé dans notre deuxième hypothèse de travail, l'utilisation du déplacement devrait inciter les élèves à mobiliser leurs connaissances mathématiques et passer de la stratégie de base, où ils se placent dans une « géométrie naturelle », à une stratégie utilisant des propriétés mathématiques en se plaçant dans une « géométrie axiomatique naturelle ».

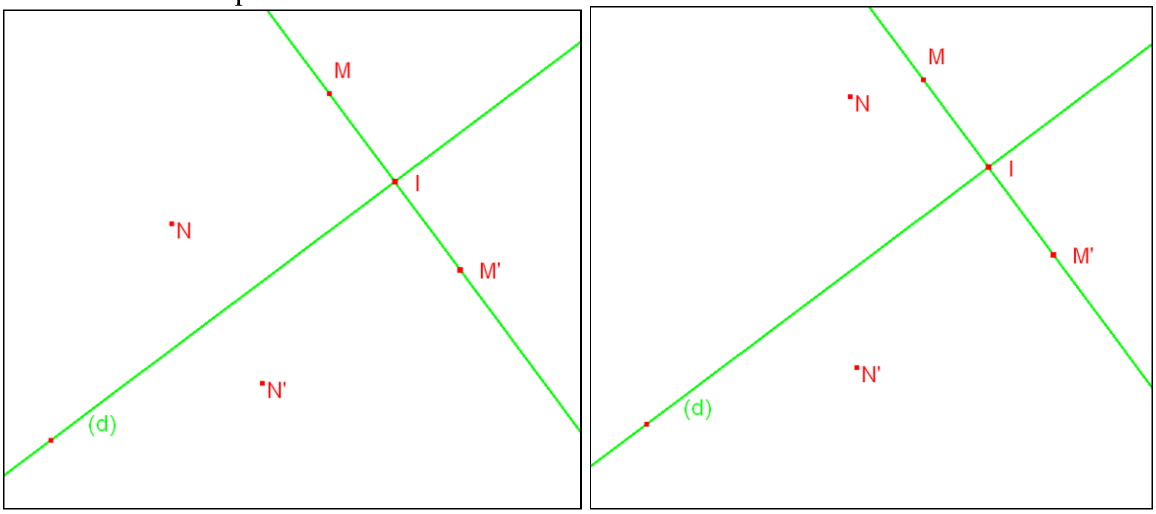


Figure 66. *Point N' placé au jugé : après avoir déplacé N, N' reste statique et ne se déplace pas en même temps que N*

Une autre stratégie peut s'appuyer sur l'équidistance de N et N' à la droite (d) et l'utilisation du déplacement pour ajuster. Les élèves peuvent mesurer la distance de N à la droite (d), construire un point N' de l'autre côté de la droite (à peu près où il devrait se trouver), mesurer la distance de N' à la droite (d) et le déplacer jusqu'à obtenir la même distance que de N à (d).

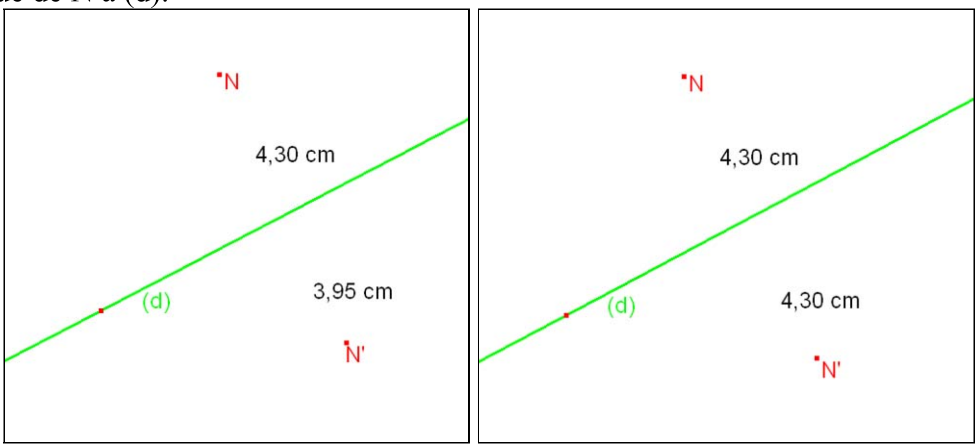


Figure 67. *Afin d'obtenir la même distance entre N et (d) et N' et (d), les élèves peuvent déplacer N' et obtenir la même distance.*

Mais lorsqu'on déplace le point N, les deux points ne restent pas symétriques et l'équidistance n'est pas conservée. Le déplacement pour valider permet ici d'invalider la construction ; l'invalidation se base dans la non dépendance des deux points lorsqu'on les déplace et non pas sur la conservation des propriétés géométriques.

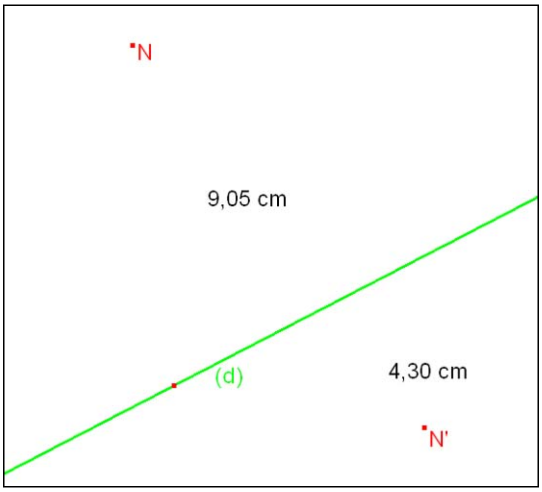


Figure 68. *Le déplacement du point N invalide la stratégie par ajustement.*

Les élèves peuvent aussi utiliser la perpendicularité et s'appuyer sur cette dernière stratégie d'ajustement, en traçant la perpendiculaire à (d) passant par N et plaçant un point N' de l'autre côté ; mesurer la distance de N et de N' à (d) et ajuster pour obtenir à peu près la même distance (à cause des pixels ce sera très difficile d'obtenir exactement la même distance).

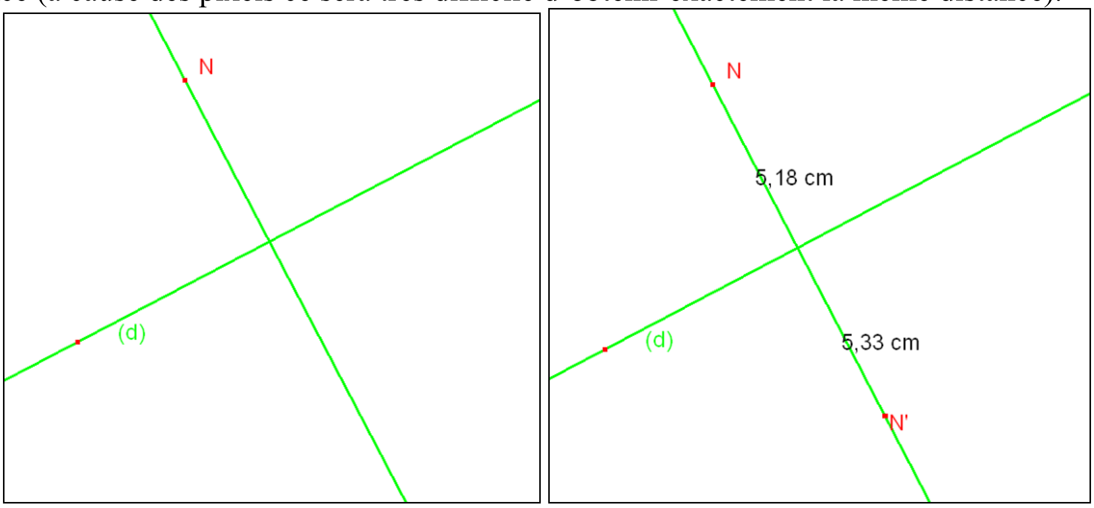


Figure 69. *Utilisation de la perpendicularité et d'une stratégie d'ajustement pour obtenir l'équidistance*

Le déplacement du point N peut permettre l'invalidation de la stratégie d'ajustement si on observe la conservation de l'équidistance ; cependant les élèves peuvent chercher à obtenir seulement la dépendance entre les deux points lors du déplacement et dans ce cas-là il n'y aura pas d'invalidation.

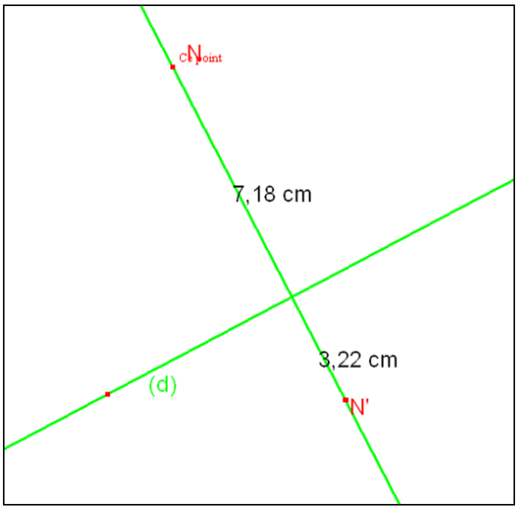


Figure 70. *Lorsqu'on déplace le point N, la distance de N et de N' à (d) n'est pas conservée*

Une autre stratégie s'appuyant sur l'équidistance consisterait à tracer une droite perceptivement perpendiculaire à (d) et passant par N et construire un cercle de centre le point d'intersection des deux droites et qui passe par N. N' serait alors à l'intersection du cercle et de la droite tracée perceptivement. Lorsqu'on déplace le point N, N' se comporte comme l'image de N par une symétrie axiale ; la construction n'est donc pas invalidée.

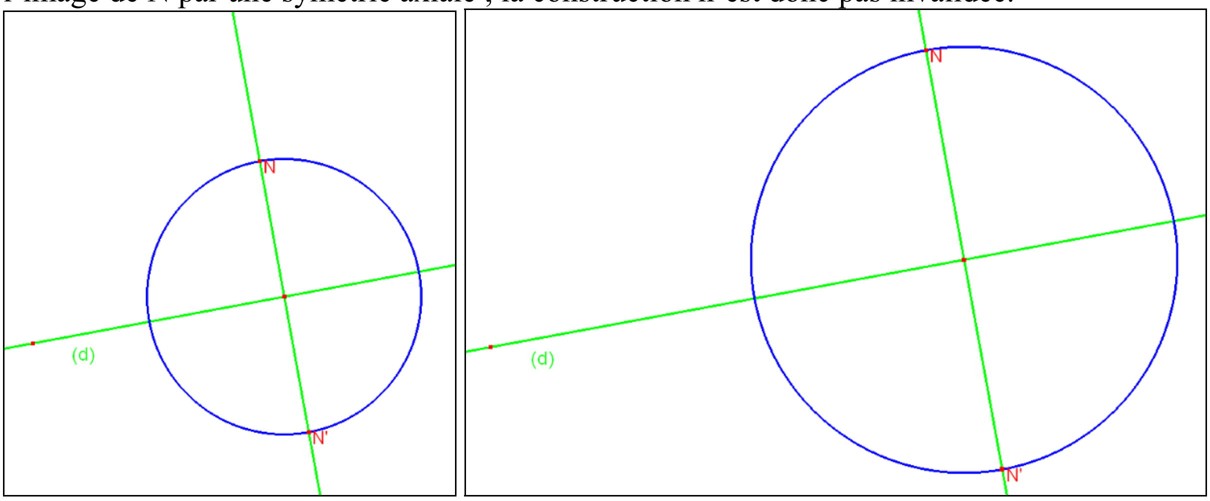


Figure 71. *Le déplacement du point N n'invalide pas cette stratégie*

Alors que si l'on déplace la droite (d) ou bien la droite passant par N, N' se comporte comme si c'était l'image de N par une symétrie centrale.

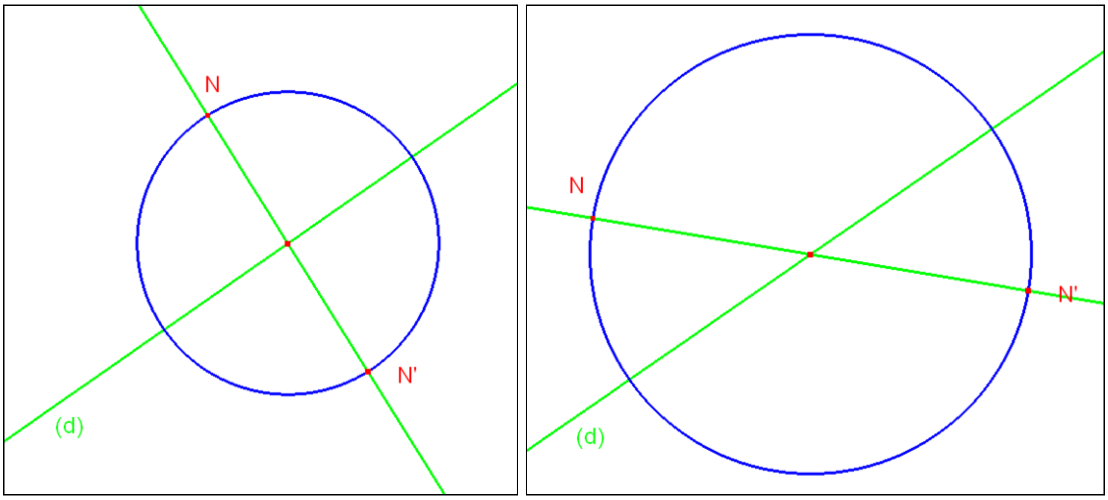


Figure 72. *Afin d'obtenir l'équidistance, des élèves peuvent s'appuyer sur la construction d'un cercle.*

Cette stratégie peut ne pas être invalidée par les élèves puisque, bien qu'ils connaissent le comportement d'un point et son image par une symétrie axiale, le déplacement du point N' au même temps que celui du point N peut les induire dans l'erreur et les satisfaire.

La stratégie attendue passe donc par l'utilisation de la perpendiculaire et du cercle :

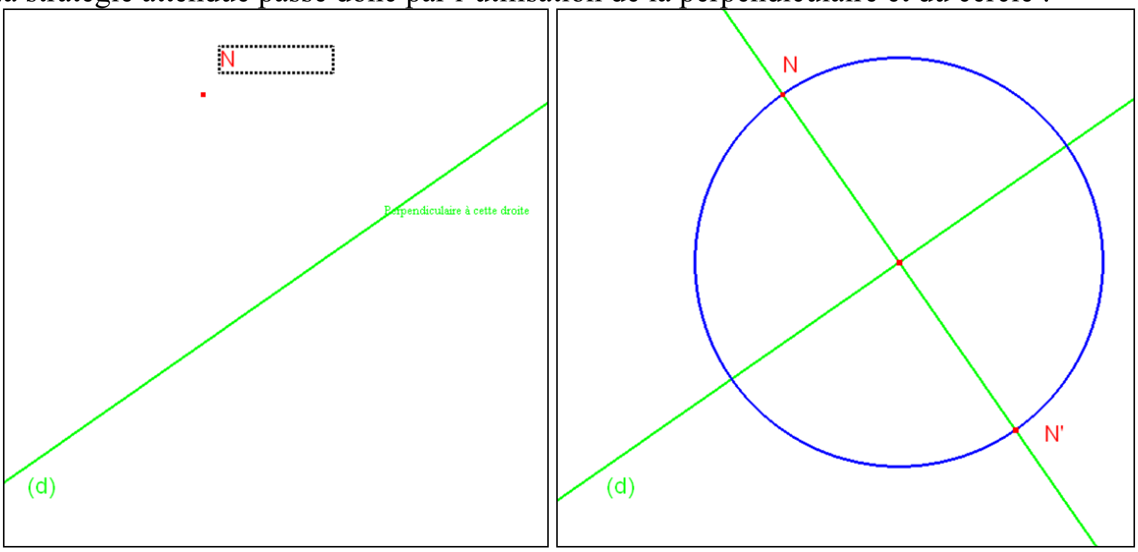


Figure 73. *Il faut tracer la perpendiculaire à (d) passant par N et le cercle de centre le point d'intersection de (d) et la perpendiculaire et qui passe par N. N' est à l'intersection du cercle et de la perpendiculaire.*

La construction de N' pose plusieurs types de difficultés :

- bien que les élèves aient compris qu'il y a une dépendance entre le point de départ et le symétrique, ils n'associent pas nécessairement dépendance à propriété géométrique ; ils auront donc du mal à faire le passage d'une construction au jugé à une construction qui utilise des propriétés géométriques ;
- la perpendicularité peut être utilisée plus facilement, alors que le report de mesure doit passer par la construction d'un cercle (de centre le point d'intersection de (d) et la perpendiculaire à (d) qui passe par N, et qui passe par N), or, penser à utiliser un cercle pour le report de mesure n'est pas évident ;

Nous pensons donc que la plupart des élèves n'arriveront pas à construire le point N' correctement, mais que cette activité leur permettra de réfléchir à la relation entre dépendance et propriété géométrique.

III.5.3 Conclusions

« Construire le symétrique » a été conçue par l'enseignant pour faire constater aux élèves les propriétés de perpendicularité et d'équidistance dans la symétrie axiale.

Du point de vue de la genèse instrumentale du déplacement :

Le déplacement pour ajuster sera sans doute mobilisé par les élèves dans la stratégie de base de construction du symétrique. Cette stratégie devrait être remise en cause par le déplacement pour valider, bien que l'invalidation puisse porter sur la non dépendance entre les deux points. Le déplacement pour valider ne permettra donc pas forcément de faire basculer les élèves vers une construction utilisant des propriétés géométriques.

Le déplacement pour constater les variations au cours du mouvement devrait permettre aux élèves de repérer le lien de dépendance d'un point et son symétrique et caractériser géométriquement le segment qui les joint un point. Or, l'analyse des variations d'un point et son symétrique et la validation de la construction du symétrique d'un point nécessitent le cinéma-déplacement. Cette utilisation du déplacement sera donc une variable dans la situation.

III.6 Rectangles à compléter

« Rectangles à compléter » a été adaptée à partir d'une situation proposée dans ERMEL (Charnay, Douaire et al. (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, Hatier Ermel, pp. 168-280).

L'objectif principal est de faire travailler les élèves sur les propriétés géométriques des rectangles, en particulier sur les angles droits. On donne aux élèves des rectangles dans lesquels les côtés sont incomplets et ils doivent les compléter. On demande explicitement qu'ils doivent rester des rectangles même lorsqu'on les déplace.

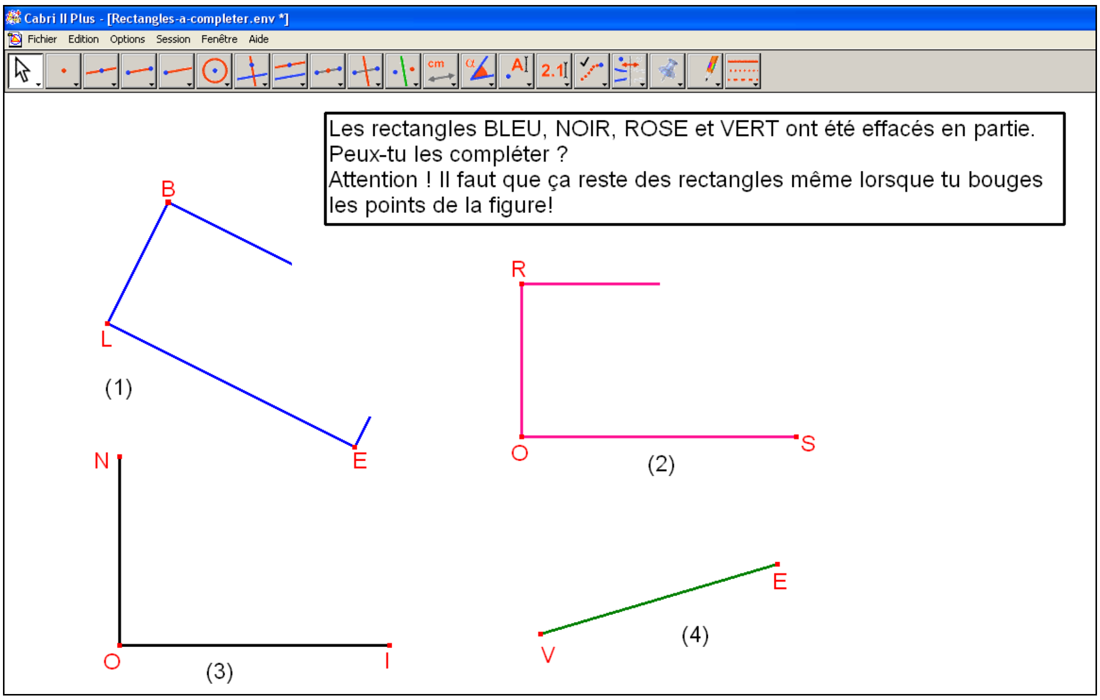


Figure 74. *Compléter les constructions pour qu'elles soient des rectangles, même lorsqu'on déplace*

L'objectif mathématique principal de la situation est le travail sur la perpendicularité et les angles droits du rectangle ; cependant, telle que la situation dans ERMEL est proposée, les élèves doivent construire l'angle droit manquant au rectangle bleu en utilisant le prolongement des deux côtés qui forment l'angle. Dans Cabri, ce prolongement ne peut pas être fait perceptivement pour pouvoir être validé, mais doit passer par la construction d'une droite (ou demi-droite) passant par un sommet et un point qui appartient au « bout de segment ».

Du point de vue instrumental, cette situation permet :

- de faire le point sur l'utilisation du déplacement pour valider une construction. Les élèves l'utilisent-ils ? Comment l'utilisent-ils ? Sont-ils capables d'invalider les stratégies erronées ?
- de travailler la construction d'une droite dont un seul point est apparent ;
- la construction de la perpendiculaire à un segment passant par une extrémité du segment.

III.6.1 Déroulement de la séance

Les élèves ouvrent le fichier Cabri « Rectangles à compléter » et suivent la consigne donnée :

« Les rectangles BLEU, NOIR, ROSE et VERT ont été effacés en partie.

Peux-tu les compléter ?

Attention ! Il faut que ça reste des rectangles même lorsque tu bouges les points de la figure! »

Les élèves travaillent en binôme et ils doivent donc compléter les rectangles donnés.

Bien qu'il n'y ait pas d'ordre imposé, la disposition des figures et la quantité d'éléments manquants les incite à commencer par le rectangle bleu, poursuivre par le rose, puis le noir et finir par le vert.

III.6.2 Analyse a priori

La figure bleue a été construite ainsi :

- un segment [EL],
- (d), la perpendiculaire à [EL] passant par L,
- (d'), la perpendiculaire à [EL] passant par E,
- B un point de (d),
- (Bx) la perpendiculaire à (BL) passant par B.
- Sur (Bx), on a reporté la moitié de la mesure de [EL].
- Sur (d'), on a reporté un quart de la mesure de [BL].

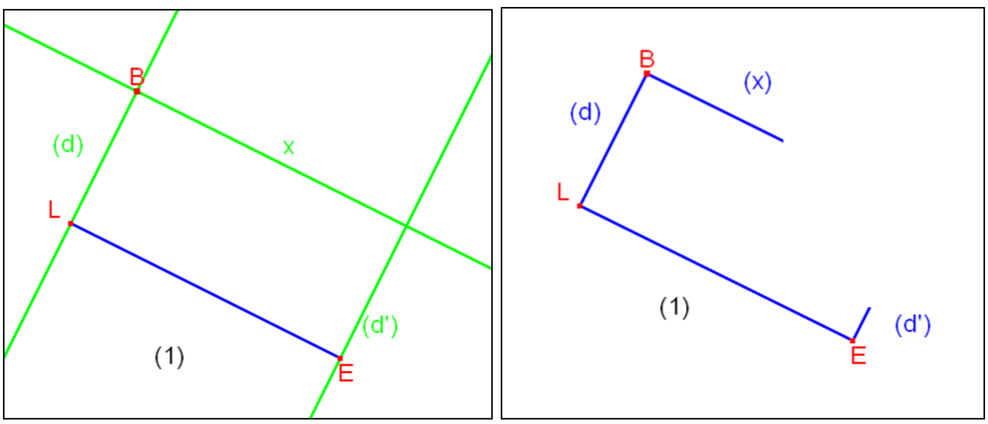


Figure 75. *Le rectangle bleu à compléter*

Rectangle bleu (1) :

La stratégie de base elle consiste à vouloir compléter le rectangle en traçant des segments qui visuellement prolongent les côtés. Cette stratégie trouve son origine dans la stratégie qu'on utiliserait en papier crayon, en prolongeant les côtés avec la règle, en essayant de trouver la longueur qui convient.

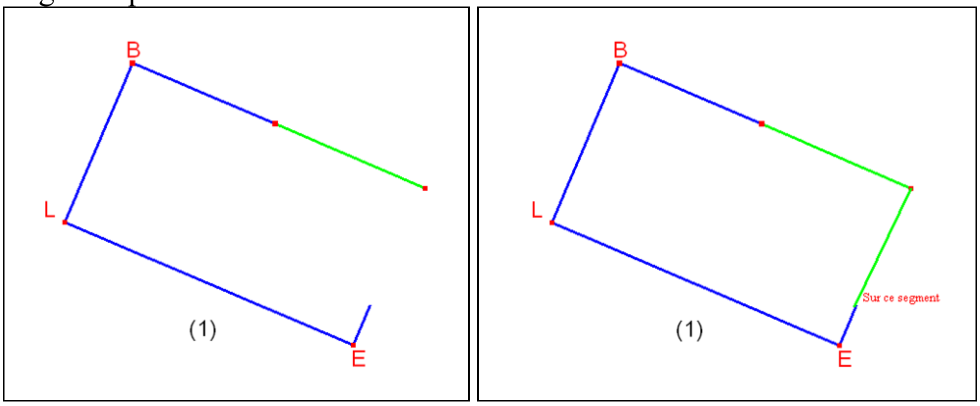


Figure 76. *Par morceaux, en traçant des segments au jugé*

Mais lorsqu'on déplace la construction, on voit que la figure ne reste pas un rectangle.

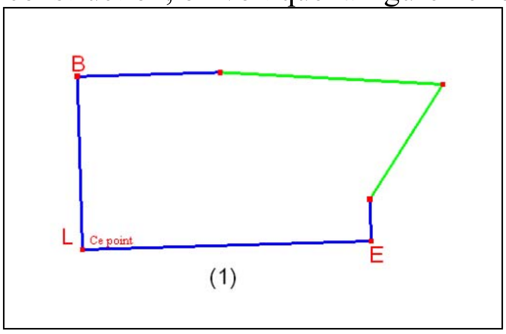


Figure 77. *Déplacer L (par exemple) permet d'invalider cette stratégie : la figure ne reste pas un rectangle*

Une adaptation de cette stratégie consiste à tracer des segments, partant des point B et E jusqu'à un point qui est choisi à l'œil de façon à ce que les segments se superposent avec les bouts de côtés donnés. Mais à nouveau, le déplacement invalide cette stratégie.

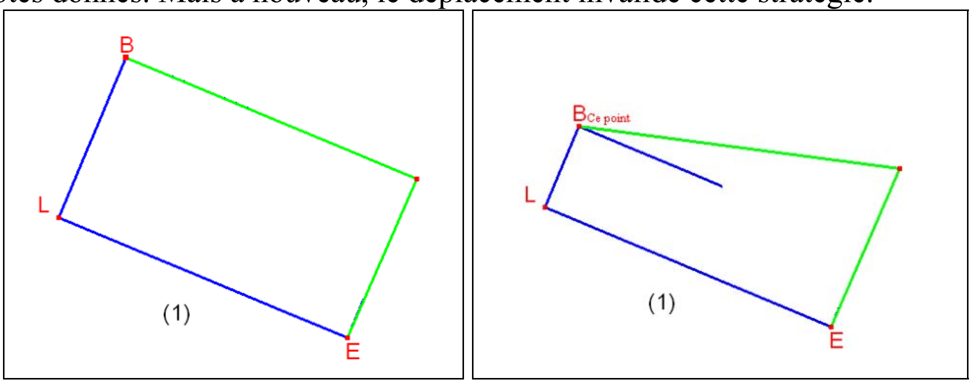


Figure 78. *Si l'on déplace E, on peut voir les segments incomplets ainsi que ceux tracés au jugé*

Cette même stratégie peut être utilisée en traçant des demi-droites qui se superposent visuellement avec les bouts de segment.

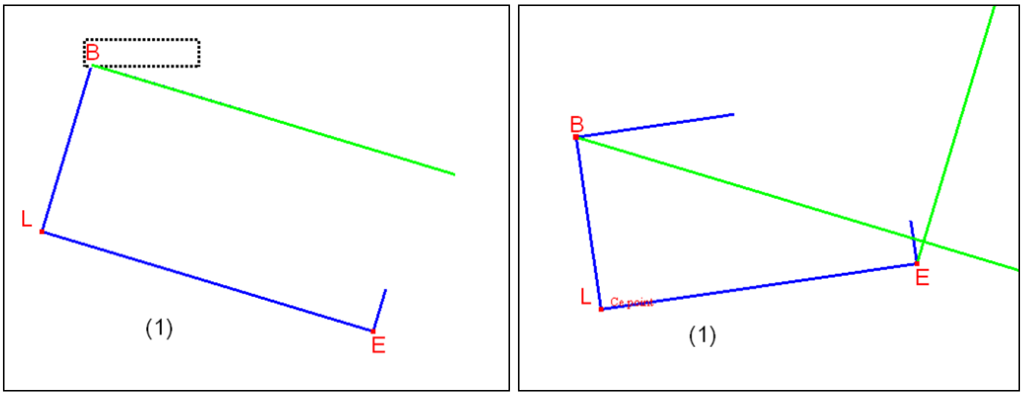


Figure 79. *Le déplacement permet d'invalider le tracé de demi-droites au jugé*

Finalement, la stratégie attendue est de construire une demi-droite (ou une droite) passant par B et un point du segment [Bx]. Mais d'autres stratégies correctes peuvent apparaître telles que le tracé de deux perpendiculaires, l'une à (BL) passant par B et l'autre à (EL) passant par B.

La difficulté dans cette situation est double. D'une part, il manque un angle droit, un sommet du rectangle et la stratégie gagnante la plus économique ne passe pas par la construction de cet angle ou de ce sommet. D'autre part, la stratégie gagnante et économique consiste à retracer des objets déjà présents dans la figure. Cela implique que les élèves disposent déjà de la notion de dépendance géométrique des objets dans une figure. Les objets manquants sont ici complètement déterminés par les objets déjà construits.

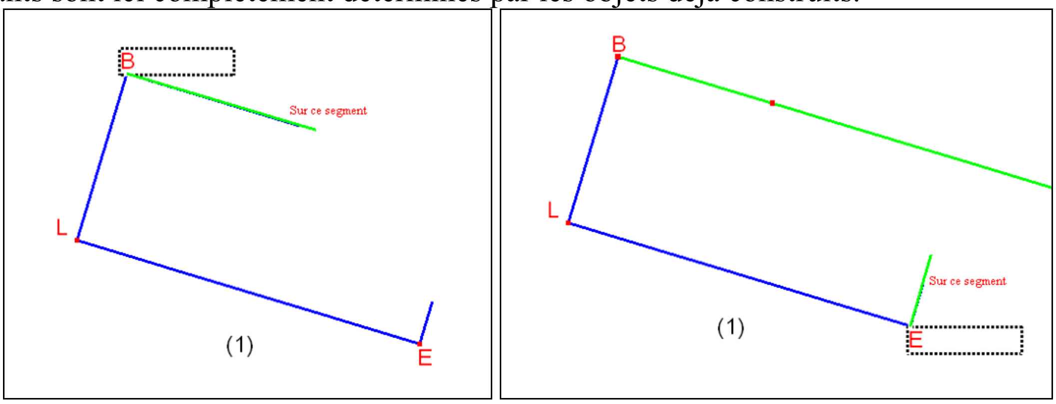


Figure 80. *En s'approchant des segments incomplets, le logiciel propose « Sur ce segment », pour faire passer la demi-droite ou la droite par un point appartenant au segment*

Le tracé des segments et le fait de cacher les droites ou demi-droites tracées n'est pas ici notre priorité.

Rectangle rose (2) :

La stratégie de base est de tracer une droite qui est perpendiculaire au segment [OS] visuellement. Le rectangle rose étant orienté initialement horizontal/vertical, cela peut faciliter pour les élèves le tracé d'une droite verticale passant par S. Mais le déplacement du point O, ou S, permet d'invalider cette stratégie.

Comme formulé dans notre deuxième hypothèse de travail, l'utilisation du déplacement devrait inciter les élèves à mobiliser leurs connaissances mathématiques et passer de la stratégie de base, où ils se placent dans une « géométrie naturelle » à la construction de la perpendiculaire, en se plaçant dans une « géométrie axiomatique naturelle ».

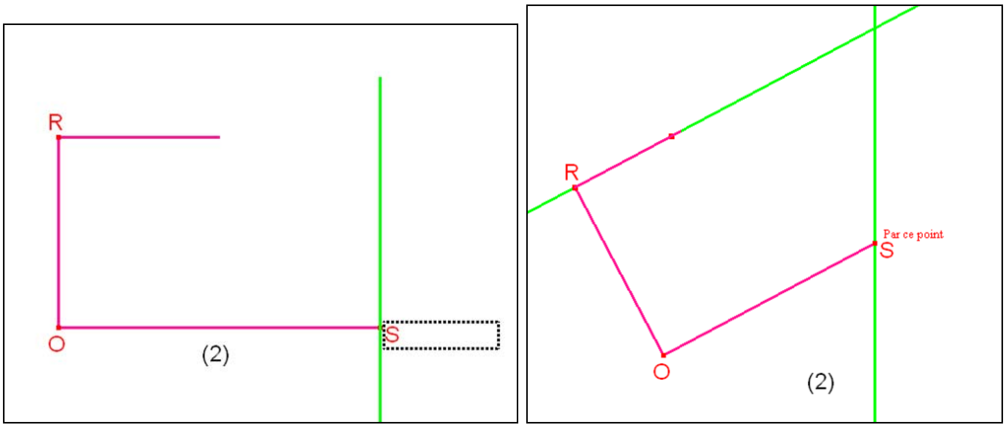


Figure 81. *La construction d'une droite verticale est invalidée par le déplacement des points de la figure*

Le déplacement pour ajuster peut aussi faire partie de la stratégie. Les élèves peuvent tracer une droite qui passe par S, à peu près verticale, et une droite passant par R et contrôler la mesure de l'angle formé par ces deux droites. Les élèves peuvent donc déplacer la droite qui passer par S afin d'obtenir un angle de 90°.

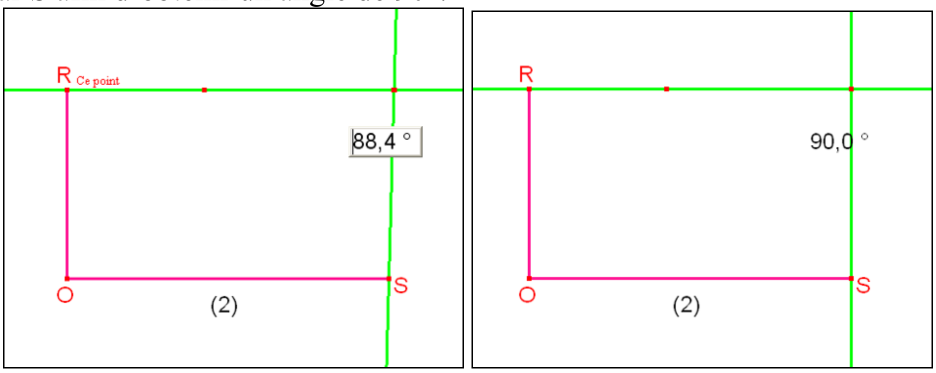


Figure 82. *Le déplacement pour ajuster peut faire partie de la stratégie : on trace une droite (à peu près verticale), on mesure l'angle et on ajuste pour obtenir 90°*

Mais le déplacement des points O ou S permet d'invalider cette stratégie puisque l'angle ne reste pas droit au cours du déplacement.

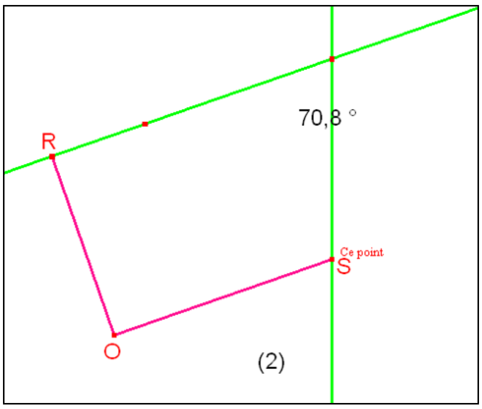


Figure 83. *L'angle ne reste pas droit*

Une autre stratégie consisterait à tracer d'abord la droite qui passe par R (cliquant sur le bout de segment [Rx]) et de tracer un segment de S à un point qui appartient à cette droite.

Les élèves peuvent même déplacer un peu ce point et ajuster de manière à obtenir un segment « bien droit ».

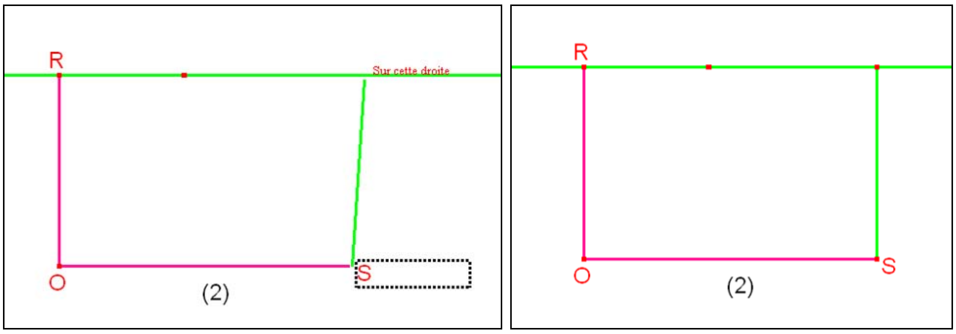


Figure 84. *Tracer d'abord la droite qui passe par R (correctement), puis tracer un segment de S à un point qui appartient à la droite tracée*

Le déplacement des points O, R et S ne permet pas d'invalider cette stratégie. Il faut que les élèves déplacent le point qui a été mis sur la droite. Cependant, cela peut ne pas être fait spontanément par les élèves, puisqu'il faut qu'ils disposent de l'idée de déplacer « TOUS » les points de la figure pour pouvoir valider la construction, ce qui est un objectif de la genèse instrumentale que l'on vise.

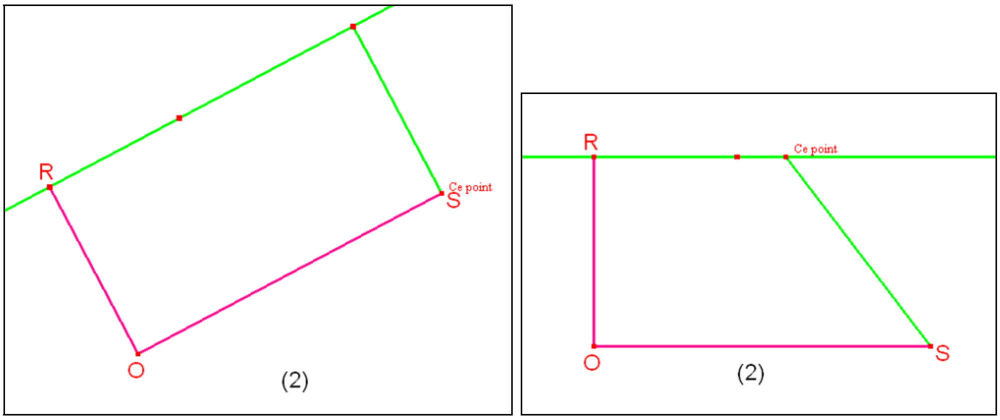


Figure 85. *Seulement le déplacement du point sur la droite permet l'invalidation de cette stratégie*

Finalement, la stratégie attendue passe donc par la construction de la droite perpendiculaire à [OS] passant par S (ou la parallèle à [OR] passant par S) et le tracé de la droite ou demi-droite qui passe par R comme dans le rectangle bleu.

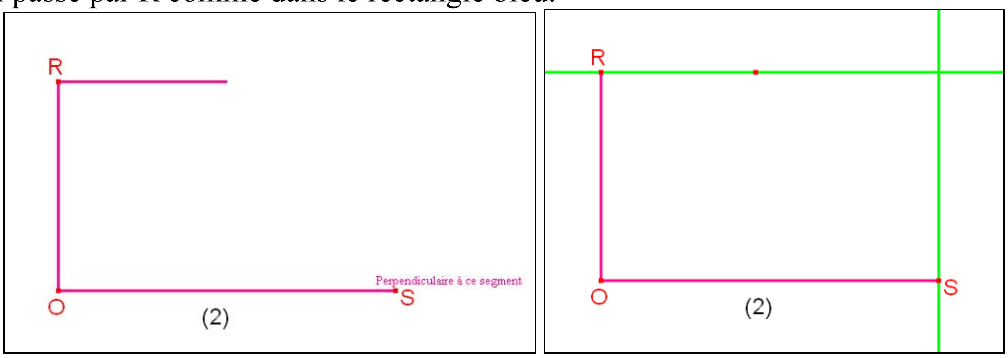
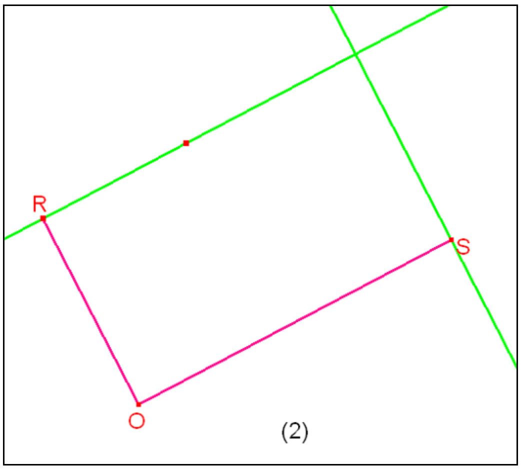


Figure 86. *« Perpendiculaire à ce segment » et « Par ce point » permettent de construire la perpendiculaire à [OS] passant par S*

La figure reste bien un rectangle lorsqu'on déplace les point O, R et S ainsi que le point non nommé sur le segment [Rx].



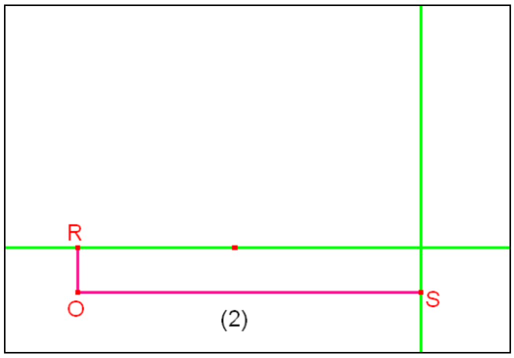


Figure 87. *La figure reste un rectangle*

III.6.3 Conclusions

« Rectangles à compléter » était la dernière situation de notre ingénierie. Elle nous permettait de faire le point sur l'état dans lequel se trouvaient les élèves dans leur genèse instrumentale, en observant en particulier l'utilisation du déplacement pour valider une construction. Notre intérêt sera donc centré sur la validation et l'invalidation des constructions faites par les élèves, sur l'interprétation qu'ils donnent à la déformation des figures, s'ils sont capables d'invalider les constructions erronées ou si au contraire ils n'invalident pas leur construction après avoir déplacé.

L'objectif mathématique principal de la situation est le travail sur les angles droits du rectangle, mais les élèves devront passer avant par le prolongement de deux côtés afin de compléter un angle droit manquant.

Comme formulés dans nos hypothèses de recherche, le déplacement devrait permettre aux élèves d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenus dans la recherche d'une stratégie gagnante, les incitant à mobiliser leurs connaissances mathématiques et passer d'une stratégie dans une « géométrie naturelle » à une stratégie utilisant des primitives géométriques dans une « géométrie axiomatique naturelle ».

IV.TABLEAU RECAPITULATIF DE L'ANALYSE A PRIORI

Nous avons présenté et analysé les situations que nous avons retenues pour l'analyse a posteriori.

Afin de synthétiser l'analyse faite et disposer d'une grille d'analyse, nous présentons un tableau récapitulatif des éléments clés des situations.

Situation	Objectifs mathématiques	Genèse instrumentale et rôle du déplacement	Type de déplacement utilisé
Géo	Pas d'objectif mathématique visé	Introduire les élèves au logiciel et au déplacement ; introduction aux trois types de points du logiciel par exploration : point libre, point sur objet et point non attrapable.	Déplacement non finalisé mathématiquement
Pajérond	Travail sur le milieu d'un segment ou de deux points	Introduction du déplacement pour valider ; première tâche de construction avec le logiciel.	Déplacement pour valider
Sur quel objet?	Travail de reconnaissance et différenciation de segment, droite et demi-droite	Identifier la trajectoire d'un point en le déplaçant (sans passer par l'outil « Trace »).	Déplacement pour identifier la trajectoire d'un point Déplacement pour valider
Toujours/ parfois vrai	Travail sur la notion de propriété géométrique et sa validité, ainsi que sur la notion de contre-exemple	Introduction de la notion de validité des propriétés géométriques en géométrie dynamique : elles doivent se conserver au cours du déplacement.	Déplacement pour valider une conjecture/ propriété Déplacement pour invalider
Construire le symétrique	Travail sur la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite et les propriétés géométriques de la symétrie axiale	Introduire l'utilisation de l'outil « Symétrie axiale » ; utiliser le déplacement pour constater les variations au cours du mouvement et pour valider une construction.	Déplacement pour constater les variations au cours du mouvement Déplacement pour valider une construction Déplacement pour ajuster
Rectangles à compléter	Travail sur le rectangle et les angles droits	Faire un bilan sur l'utilisation du déplacement pour valider chez les élèves.	Déplacement pour valider une construction Déplacement pour ajuster

Tableau 6. *Tableau récapitulatif de l'analyse a priori*

IV.CONCLUSIONS SUR L'ANALYSE A PRIORI

Dans ce chapitre, nous avons présenté les choix que nous avons faits pour la conception de l'ingénierie didactique que nous avons mis en place. Nous avons un ensemble de situations qui sollicitent différents instruments déplacement (au moins sept types différents), donc on pourra voir ceux qui vont effectivement apparaître dans le travail des élèves et ainsi répondre à notre première question de recherche. En particulier, nous pourrons observer si les élèves réussissent à construire les instruments déplacement que nous avions prévu ou bien s'ils en construisent d'autres.

Le déplacement pour valider une construction est présent dans quatre des six situations. Sur l'année scolaire, les élèves l'ont donc rencontré à plusieurs reprises dans des situations différentes. Nous pourrons donc étudier sa mise en place et l'appropriation faite par les élèves et donner des éléments de réponse à notre deuxième question de recherche.

Dans certaines situations, nous avons prévu que le cinéma-déplacement soit utilisé, puisque le photo-déplacement ne devrait pas suffire pour résoudre la tâche proposée, et constituer ainsi une variable didactique pour la situation. Nous pourrons donc observer si les élèves utilisent effectivement le cinéma-déplacement et dans quelles situations son utilisation est favorisée.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons un premier niveau des résultats de notre analyse, qui nous permettra par la suite de caractériser la genèse instrumentale du déplacement faite par les élèves.

CHAPITRE III

SCHEMES DE DEPLACEMENT

Nos questions de recherche portent sur la construction d'instruments déplacement. Lors de notre première analyse, faite à partir de l'analyse a priori présentée dans le deuxième chapitre en termes de stratégies, nous avons réalisé qu'il manquait un niveau plus fin d'éléments nous permettant d'étudier la genèse instrumentale du déplacement.

En effet, nous avions prévu que les élèves s'approprient spontanément le déplacement non finalisé mathématiquement. Cependant, on a pu observer que pour les élèves cette appropriation est plus complexe. Elle passe d'abord par la reconnaissance des points de la figure et par un premier niveau d'appropriation du déplacement : le déplacement d'objets de dimension supérieur ou égale à 1, comme si c'était un objet matériel.

Nous avons donc affiné notre analyse a priori en passant par la description des schèmes d'utilisation construits par les élèves. Certains de ces schèmes peuvent être considérés comme des schèmes a priori, issus de l'analyse a priori des stratégies décrites dans le deuxième chapitre. D'autres ont été identifiés au cours de l'analyse. Tous les schèmes que nous présentons sont très directement liés à l'utilisation du déplacement. L'utilisation de la géométrie dynamique requiert évidemment de nombreux autres schèmes.

Nous indiquerons donc d'abord les observables que nous avons recueillis, puis notre méthodologie d'analyse. Nous expliquerons comment nous avons identifié des schèmes, puis procéderons à donner une classification des schèmes utilisés par les élèves, en indiquant par quels binômes les ont utilisés et dans quelles situations ils sont apparus.

I. LES OBSERVABLES

Pour mettre en œuvre notre ingénierie, nous avons travaillé avec un enseignant expert dans l'usage de Cabri, ouvert à la recherche et à la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). L'enseignant était en charge de deux classes de Sixième dans un collège ZEP, que nous avons pu observer.

Nous avons enregistré le travail effectué à l'ordinateur[3] et les dialogues échangés de quatre binômes par classe, mais nous ne retiendrons que cinq des huit binômes enregistrés pour nos analyses (deux binômes ont changé au cours de l'année scolaire, ce qui ne nous a pas permis d'étudier leur genèse instrumentale, et dans un autre, un élève soufrait de problèmes de vision, ce qui l'empêchait de voir l'écran et les variations au cours du mouvement comme les autres).

Dans le but de repérer dans quelle mesure le niveau de connaissances mathématiques peut avoir une influence sur la genèse instrumentale du déplacement, nous avons demandé à l'enseignant de choisir huit binômes de niveaux mathématiques assez différents.

Utilisant une échelle ordonnée des différents niveaux mathématiques[4], nous pouvons dire que les élèves observés avaient les niveaux suivants :
Loïc : Excellent
Katia et Malek : Bien
Idriss, Chloé, Hanna, Cédric : Moyen
Alex, Iris : Assez Moyen
Nadir : Faible

Les binômes peuvent donc être classés ainsi :
Katia-Malek : Bon
Hanna-Idriss : Moyen +
Cédric-Iris : Moyen -
Chloé- Alex : Moyen -
Loïc-Nadir : le binôme des extrêmes

Afin de pouvoir observer le déroulement des phases collectives et les interactions de l'enseignant avec les élèves, nous avons aussi filmé le déroulement des séances Cabri.

Finalement, ont été gardée comme traces écrites les fiches des élèves et les notes dictées par l'enseignant dans la phase d'institutionnalisation.

II. METHODOLOGIE D'ANALYSE : COMMENT IDENTIFIER DES SCHEMES ?

Comme mentionné plus haut, nos questions de recherche portent sur la construction d'instruments déplacement par les élèves au cours de leur genèse instrumentale. Pour pouvoir étudier les instruments déplacement, nous devons identifier les schèmes mis en place par les élèves lorsqu'ils déplacent.

> « Pour analyser la construction de la connaissance dans le cadre de l'activité avec instrument, nous adoptons une approche constructiviste de la cognition et de l'action instrumentale. Autrement dit, nous partons de l'hypothèse que l'activité est organisée par des schèmes, constitués sur la base de connaissances acquises, pas toujours explicitables, et susceptibles de différentes manières (Vergnaud 1985, 1990a, 1992, 1997). » (Gomes 1999, p.24)

---

[3] Nous avons utilisé le logiciel Camtasia Studio 3, qui permet d'enregistrer simultanément l'écran de l'ordinateur et l'audio, pour obtenir une trace dynamique et continue du travail des élèves et de leur utilisation du déplacement.

[4] Excellent, bien, assez bien, moyen, assez moyen, faible, très faible

Cela nous amène à poser les questions suivantes : « Comment identifie-t-on des schèmes ? » et « Qu'est-ce qu'on peut appeler *schème* ? ».

> « Malgré le fait que le concept de schème reste central pour décrire l'organisation d'une action, son identification dans le contexte de l'action reste problématique. La difficulté associée à son application est due au fait qu'on n'a pas d'accès direct aux schèmes ; seulement à leurs produits. Ainsi, décrire un schème reste toujours problématique dans la mesure où cette description résultera toujours d'une inférence pour décrire un mécanisme à partir de l'observation de ses effets au niveau du comportement.» (Gomes 1999, p.113)

Par définition, un schème est un invariant de conduites pour une classe de situations données (Vergnaud, 1990).

> « Dans les écrits de Gérard Vergnaud, la problématique des schèmes est intimement associée à celle de l'agir : les schèmes constituent une organisation de l'activité finalisée ; ils comportent des *concepts-en-acte* et des *théorèmes-en-acte*, qui sont les invariants opératoires sous-jacents à cette activité. » (Bronckart 2007, p. 135)

Nous pourrons donc identifier des schèmes (a posteriori) dans les régularités des actions, à partir de l'activité d'un même binôme (même organisation des actions pour résoudre un type de tâche) ou bien à partir de l'activité de plusieurs binômes (une même organisation de l'action utilisée par plusieurs binômes pour résoudre une même tâche). Afin d'identifier les régularités des actions dans l'analyse des vidéos des élèves, nous porterons une attention particulière aux déplacements effectués par les élèves, à ce qu'ils déplacent, ainsi qu'à leurs interprétations des effets obtenus.

Par ailleurs, en se fondant sur la base des recherches précédentes présentées dans le premier chapitre sur les différentes utilisations du déplacement, on peut envisager a priori la présence de schèmes de déplacement.

D'autre part, l'analyse a priori des situations donnée dans le deuxième chapitre nous a permis de prévoir des stratégies de résolution s'appuyant sur des connaissances mathématiques qui donnent lieu à une organisation de l'action qui correspond à des schèmes (a priori).

> « Le couple conceptuel " schème-situation " est la clef de voûte de la psychologie cognitive et de la théorie de l'activité : pour cette raison simple que la connaissance étant adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent, et qu'ils s'adaptent à des situations. (…) C'est la recherche en didactique… (pour un exposé systématique voir la "Théorie des situations didactiques" (1998) de Guy Brousseau)… qui a permis de sortir le concept de situation des oubliettes du sens commun et d'en faire un concept scientifique et pratique, avec lequel il soit possible d'agir : notamment de produire des effets d'apprentissage et de prise de conscience, en manipulant certaines variables de situation. » (Vergnaud 2001, cité dans Brun 2007, p.68)

L'étude des schèmes nous permettra d'identifier aussi certaines conceptualisations mathématiques des élèves, en inférant en particulier les invariants opératoires sur lesquels ils reposent, comme le propose Gomes :

> « Nous préférons décrire l'organisation de l'action au lieu d'inférer le fonctionnement du schème. Ce n'est qu'à partir de la description des actions observables que nous essayerons de faire des inférences sur les invariants opératoires et les règles sous-jacentes à l'organisation de l'action. » (Gomes 1999, p.113)

Nous chercherons à dégager les composantes d'un schème, à savoir les **« règles » d'action**, permettant de générer la suite des actions et l'activité du sujet en fonction des valeurs prises par les variables de situations ; les **« invariants opératoires »** qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation et la prise d'informations sur la situation à traiter ; les **« anticipations »** et le « **but** » à atteindre, les effets à attendre et les étapes intermédiaires éventuelles qui permettent de rendre compte à la fois de la représentation du but à atteindre et des opérations de planification et de contrôle ; et les **« inférences »** qui permettent de calculer les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet, ce qui permet au sujet d'ajuster le schème aux caractéristiques spécifiques de la situation présente (Coulet 2007, pp.299). Les anticipations et les inférences sont en situation et ne sont donc pas forcément descriptibles.

Nous distinguerons les schèmes d'usage, relatifs aux contraintes de l'artefact, des schèmes d'action instrumentée, « dont la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité » (Rabardel 1995, p.91).

Par exemple, dans la situation « Sur quel objet ? », lorsque les élèves doivent déplacer un point pour observer sa trajectoire, ils utilisent deux schèmes de nature différente :

- le schème « distinguer les différents types de points du logiciel » ; au début, ils voient des points qui sont en apparence libres, mais ce n'est qu'en les déplaçant qu'ils découvrent que les points sont contraints, qu'il s'agit de points sur objet ; ce schème s'applique à tout type de points, permet à l'utilisateur de déterminer de quel type de point il s'agit mais ne vise pas un but mathématique, il est donc un schème d'usage ;
- le schème d'action instrumentée « schème d'identification de l'objet-trajectoire » ; ici l'intention est de reconnaître quelle est la trajectoire décrite par le point mobile ; il s'appuie sur le schème d'usage décrit plus haut, puisque l'élève doit utiliser le déplacement du point contraint et observer son mouvement pour pouvoir identifier l'objet mathématique décrit par la trajectoire.

III. SCHEMES D'UTILISATION DU DEPLACEMENT

Nous proposons d'abord une modélisation de l'activité des élèves en termes de schèmes d'utilisation, en reprenant la distinction mentionnée entre schèmes d'usage et schèmes d'action instrumentée.

Nous présentons les schèmes dégagés de l'analyse a priori qui ont été observés chez les élèves, ainsi que ceux qui ont été observés a posteriori dans les stratégies des élèves, en décrivant (quand cela est possible) les règles d'action faisant partie du schème, les invariants opératoires sur lesquels ils reposent, les anticipations et les inférences qui peuvent être faites. Nous expliquons aussi dans quelles situations ils sont apparus et chez quels binômes.

III.1 Schèmes d'usage

Les schèmes d'usage sont en grande partie issus des contraintes de l'artefact. De ce fait, la plupart des schèmes d'usage sont des schèmes a priori.

Comme mentionné au début de ce chapitre, nous avions fait l'hypothèse que les élèves allaient utiliser le déplacement non finalisé mathématiquement dans Géo de manière spontanée. Cependant, notre analyse a posteriori nous montre que pour les élèves, le schème de « déplacement d'un objet » se construit et qu'il n'est valable au début que pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, à la manière d'un objet matériel. L'extension du domaine de validité de ce schème par les élèves, des objets (de dimension ≥ 1) aux points, demande d'une part, des connaissances instrumentales sur l'utilisation du déplacement de points et d'objets de dimension supérieure ou égale a 1, et d'autre part, la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) des objets en points.

D'autre part, nous avons pu observer que l'exploration d'une figure passe d'abord par la recherche des point bougent, et ceux qui ne bougent pas, et que cette recherche constitue en soi une organisation de l'action et donc un schème.

1) Schème d'usage de « déplacement d'un objet »
    a. les « règles » d'action : pour pouvoir déplacer un objet, il faut cliquer et laisser appuyée la souris jusqu'à la transformation en une main serrée, puis déplacer la souris

L'appropriation de ce schème peut paraître évidente, cependant, grâce aux observations que nous avons effectuées, on se rend compte que la construction de ce schème ne va pas de soi.

D'une part, il nécessite la reconnaissance de la présence des points dans la figure. Comme nous avons pu l'observer, Alex et Chloé ne construisent pas ce schème spontanément. Ils ont commencé par déplacer les formes globales et ils ne réalisent que les points peuvent être déplacés qu'après interrogation d'un camarade.

Alex : Ah! Où il y a des points!

Et ce n'est qu'à ce moment-là qu'ils ont été conscients de la présence des points et de la possibilité de pouvoir aussi attraper et déplacer les points.

D'autre part, ce schème nécessite l'appropriation de la règle d'action « conserver la souris appuyée ». L'absence d'appropriation de cette règle d'action est surtout observable dans la phase collective effectuée après la situation « Géo », au cours de laquelle le schème a été institutionnalisé :

Chloé essaye d'abord de cliquer sur « la pointe du chapeau », c'est-à-dire sur le sommet du grand triangle, qui relie le chapeau au pompon ; elle n'essaye pas vraiment de l'attraper et de le déplacer.

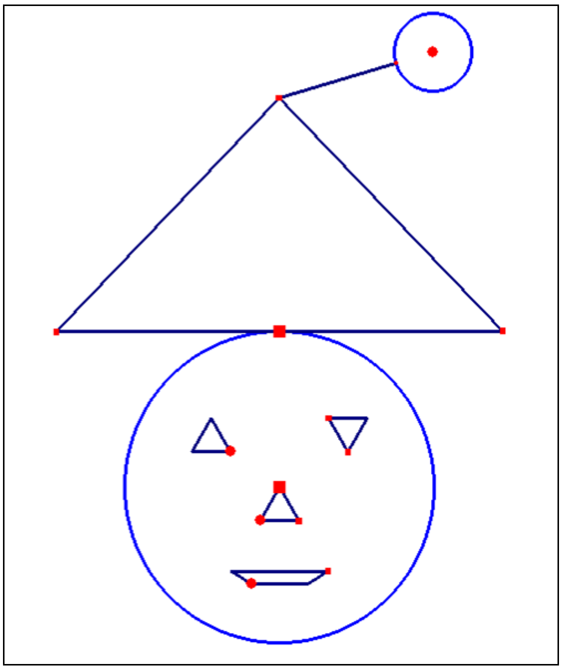


Figure 88. *Les deux points de base de la construction de Géo (représentés par des carrés ■) et les quatre points sur objet déplaçables (représentés par des ronds en gros ●) ; les autres points sont non-attrapables*

L'enseignant : Alors si sa consigne n'est pas assez précise, levez la main, essayez de les aider! Je n'interviens pas. Ambre

Ambre : Il faut mettre la flèche sur le centre du rond du chapeau, là-haut... Il faut que tu mettes la flèche, tu cliques sur le centre du point là... du chapeau, sur le centre...

Chloé : Du cercle ?

Ambre : Oui!

L'enseignant : Eh ben vas-y, tu essaies!

Chloé clique sur le centre du petit cercle du pompon comme Ambre le lui a dit mais elle ne l'attrape pas, ni le déplace. Elle clique une fois de plus et rien ne se passe.

L'enseignant : Elle a cliqué... On a toujours un petit souci technique, hein ? Peut-être vous allez trouver une solution je pense. Carl ?

Carl : Faut rester appuyé

L'enseignant : Faut rester appuyé, et oui, il faut rester pour que quand tu appuis comme ça, tu te transformes en main !

Chloé laisse la souris appuyée, le pointer se transforme en main et elle commence à déplacer le centre du petit cercle.

On voit donc que ce schème se construit, que son appropriation n'est pas immédiate pour tous les élèves et que le rôle de l'enseignant ou d'un utilisateur plus expert peut favoriser la construction de ce schème.

2) Schème d'usage de « recherche des points qui bougent » :
   a. les « règles » d'action : pour savoir si un point peut bouger, il faut essayer de le faire bouger
   b. les « invariants opératoires » : il existe des points qui bougent et des points qui ne bougent pas
      - si un point change de position lorsqu'il est déplacé avec la souris, alors c'est un point qui bouge
      - si le pointeur ne se transforme pas en une main serrée, alors le point ne peut pas être déplacé directement
      Concept-en-acte de « point graphique » : une trace à l'écran de petite taille (quelques pixels 1 à 9 pixels) qui peut bouger ou pas
      Concept-en-acte de « point qui bouge » : point qu'on peut attraper (point libre, point sur objet)
      Concept-en-acte de « point qui bouge pas » : point qu'on ne peut pas attraper (point punaisé, point construit)

Ce schème a été observé d'abord dans « Géo », en particulier chez Cédric et Iris et chez Loïc et Nadir, qui ont exploré la construction et ont essayé de déplacer presque tous les points de la figure.

Dans « Toujours/parfois vrai », l'exploration de la figure et la découverte des vraies propriétés de la figure passe par l'identification des points qui peuvent être déplacés.

Une des contraintes de l'artefact est relative aux différents types de points existant dans le logiciel, qui peuvent donner lieu à des déplacements différents et donc à différents schèmes d'usage du déplacement. Les schèmes portant sur le déplacement de points sont des schèmes a priori.

Dans Cabri il y a trois types de points : le point libre qui peut se déplacer partout ; le point sur objet, qui ne se déplace que sur l'objet (segment, droite, cercle…) ; le point non attrapable, qui ne peut pas être attrapé et déplacé directement, mais qui dépend d'un ou de plusieurs autres points (point d'intersection, milieu, image par une transformation…).

3) Schème d'usage de « distinction des différents types de points du logiciel » :
   a. les « règles » d'action : si on veut savoir si un point est libre/sur objet ou non attrapable, il faut utiliser le schème de déplacement d'un point
   b. les « invariants opératoires » :
      Concept-en-acte de « point graphique »
      Concept-en-acte de « point libre »
      Concept-en-acte de « point sur objet »
      Concept-en-acte de « point non attrapable »
      Théorèmes-en-acte :
      - si le point est attrapable et reste au voisinage du pointeur (4 pixels environ) pour tous les déplacements dans l'écran, alors il est libre

- si un point est attrapable et ne reste pas au voisinage du pointeur partout dans l'écran, alors ce point est un point sur objet
- si le pointeur ne se transforme pas en une main serrée au voisinage d'un point, alors le point est non attrapable

c. les « anticipations » portent sur le comportement du point : quand je déplace le point, il doit suivre « la main »

L'exploration d'une construction passe en général par la distinction des différents types de points constituant la construction. Les situations d'exploration de construction sont donc susceptibles de permettre d'identifier les schèmes sous-jacents aux actions des élèves pour distinguer différents types de points. Ce schème a été sans doute été utilisé dans toutes les situations, mais il a un statut particulier dans les situations « Géo », « Sur quel objet ? » et « Toujours/parfois vrai ». Nous montrons quelques utilisations faites par les élèves :

Dans « Géo », les élèves devaient déplacer les différents points et objets de la figure pour l'explorer et observer les effets spatio-graphiques obtenus lors du déplacement. Dans cette figure, les trois types de points étaient présents, point libre, point sur objet et point non attrapable. Cependant, étant la première situation à laquelle les élèves ont été confrontés, les inférences sont restées à un niveau de base : « ça bouge » ou « ça bouge pas ».

Loïc et Nadir ont déplacé presque tous les points déplaçables dans Géo et ils ont essayé de déplacer plusieurs points non-attrapables, mais à ce stade-là, aucune inférence ne peut être faite à part « celui-là il bouge pas ».

Dans « Pajérond », le déplacement du point « Attache » (point sur objet), permet le déplacement de la voiture. Pour certains élèves comme Katia et Malek, ce déplacement est venu de manière spontanée, alors que pour d'autres, comme Chloé et Alex, l'enseignant a dû intervenir.

Dans « Sur quel objet ? », les élèves doivent déplacer les points rouge et vert qui se déplacent sur des objets non visibles. Bautier (1993) a montré qu'une des caractéristiques de l'absence d'« homogénéisation du plan » est de ne prendre en compte que ce qui est tracé puisque le reste n'existe pas. Les élèves ont alors anticipé que ces points devaient être libres et qu'ils devaient pouvoir les déplacer partout dans l'écran. C'est donc grâce à la mise en place de ce schème que les élèves ont inféré que ces points n'étaient pas libres, mais qu'ils appartenaient à un objet.

Hanna, par exemple, a essayé à plusieurs reprises de faire sortir le point rouge d'abord, puis le point vert, de sa trajectoire. Une fois qu'elle a compris que la trajectoire du point était rectiligne, elle a cherché à explorer ses limites afin de caractériser l'objet géométrique représenté.

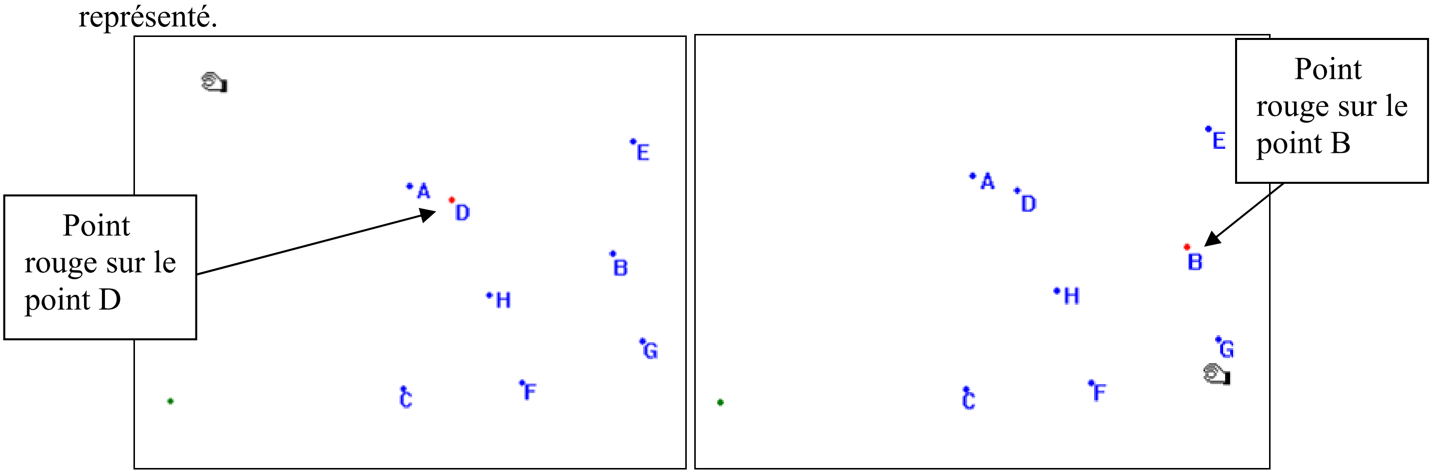


Figure 89. *Hanna essaye de faire sortir le point rouge de sa trajectoire, puis explore les limites de cette trajectoire*

Elle attrape et elle le déplace le point rouge, en essayant d'abord de le déplacer hors de sa trajectoire.

Hanna : Ah je sais! Regarde!

Elle commence à déplacer de plus en plus en suivant la trajectoire du point.

Hanna : Le point rouge reste sur...

Elle reprend le point rouge et elle continue à le déplacer, cette fois-ci très vite.

Hanna : Tu fais comme ça, il se déplace que sur B et D.

Elle continue à le déplacer, beaucoup, en essayant de le faire sortir du segment [DB]. Elle attrape le point rouge et elle le déplace en suivant cette fois une trajectoire rectiligne.

Hanna : Ouais il se déplace que sur [DB]

Puis elle attrape et elle déplace le point vert, en essayant à nouveau de le faire sortir de sa trajectoire, mais cette fois-ci elle essaye très peu de temps, elle se laisse guider par le mouvement du point vert.

Hanna : Mais il reste toujours sur CF...

La genèse instrumentale du déplacement impliquerait donc l'apparition du schème « distinction des différents types de points du logiciel » après le schème d'usage « d'recherche des points qui bougent ».

4) Schème d'usage de « traitement d'une ambigüité lorsqu'on veut déplacer un objet » :
   Ce schème est utilisé pour déplacer un objet lorsque plusieurs se superposent ou sont très proches.
   a. les « règles » d'action : si en s'approchant d'un objet qu'on veut déplacer on obtient une liste pop-up d'objets, alors on cherche à l'identifier dans la liste
   b. les « anticipations » : l'élève n'anticipe pas que le logiciel lui propose plusieurs choix ; au contraire, il anticipe pouvoir déplacer l'objet qu'il veut ; l'ambigüité est souvent une surprise pour l'élève
   c. les « inférences » : je choisis l'élément à déplacer :
      i. par hasard entre les éléments proposés
      ii. entre les éléments proposés en m'appuyant sur :
         1. le nom
         2. la couleur
         3. l'ordre dans la liste qui suit l'ordre de construction

Ce schème permet aux élèves de décider, lorsqu'ils cliquent sur un objet (un point, un segment, une droite, etc.) ce qu'ils veulent attraper et déplacer. Le logiciel propose comme feedback plusieurs options et les élèves doivent faire un choix.

Ce schème demande une réflexion de la part des élèves et des connaissances instrumentales pour pouvoir faire leur choix. Il est un schème a priori qui est apparu plus tôt que prévu dans la genèse instrumentale des élèves. Lorsque Katia travaillait sur la recherche de la trajectoire des points dans « Sur quel objet ? », elle a voulu construire des points supplémentaires pour tracer la droite sur laquelle se déplaçait le point vert. Ainsi, elle a placé un point juste à côté du point vert et a voulu déplacer le point vert. Pour ce faire, Katia devait choisir quel point elle voulait déplacer. Dans cette situation, la couleur des options données (les points créés sont rouges et l'autre point était vert) pouvait l'aider dans son choix.

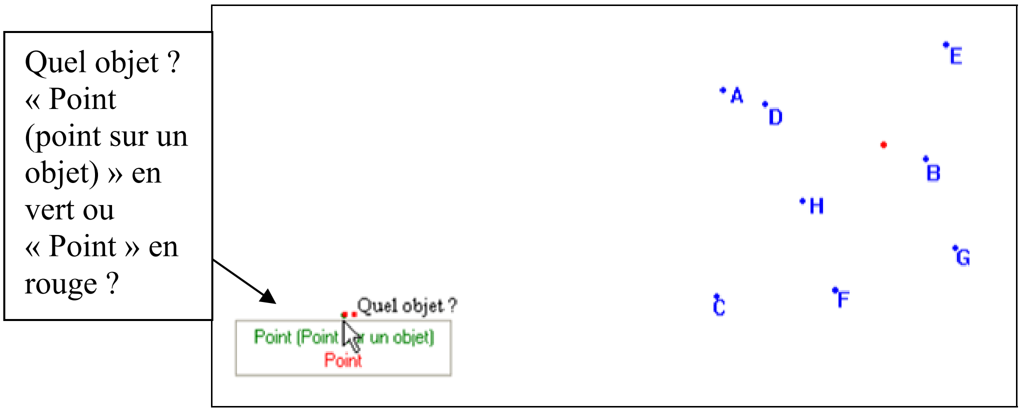


Figure 90. *Quel point déplacer ?*

Le schème suivant porte sur le tracé d'objets géométriques au jugé, c'est-à-dire que le contrôle est fait seulement par la perception et non pas par l'utilisation d'une propriété géométrique. C'est donc un schème d'usage a priori, puisqu'il repose sur l'utilisation des outils du logiciel et du déplacement de la souris pour contrôler la construction des objets.

5) Schème d'usage de « tracé au jugé » :
   a. les « règles » d'action :
      Règle d'action : pour tracer un point, on place le point dans une position particulière par le seul contrôle visuel
      Règle d'action : pour tracer un objet géométrique autre que point, on utilise les feedbacks du logiciel pour assister le contrôle visuel au cours du tracé.
      Règle d'action : pour tracer un objet géométrique (droite, demi-droite, cercle, conique…) passant par des points voulus, cliquer sur un premier point, puis déplacer et ajuster visuellement pour que l'objet passe par le(s) point(s) voulus
   b. les « invariants opératoires » :
      Concept-en-acte de point
      Théorème-en-acte : les droites horizontales/verticales sont les seules qui ne présentent pas d'escaliers dans le tracé
      Théorème-en-acte : si on trace au jugé une droite (demi-droite, cercle) en la faisant passer visuellement par un point, alors le point appartient à la droite
   c. les « anticipations » portent sur le choix de la direction de la droite (demi-droite) ou la taille du cercle

Ce schème a été observé dans toutes les tâches de construction, soit « Pajérond », « Sur quel objet ? », « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter ».

Dans « Pajérond », tous les binômes sont passés par la stratégie de base de construction du cercle, en choisissant de manière perceptive (i) le centre, pour qu'il soit « au milieu » et (ii) le rayon, pour que le cercle « passe » par les deux points de la carrosserie. Dans la phase collective, le milieu a été construit avec les outils du logiciel, mais lorsque l'enseignant a voulu institutionnaliser la construction du cercle passant par un des points de la carrosserie, l'élève-sherpa (Cédric) a choisi la taille du cercle perceptivement. L'enseignant n'a pas invalidé cette stratégie à ce moment là (elle expliquait à la classe l'importance « d'accrocher » le cercle à la voiture, pendant que Cédric a construit le cercle sans écouter ses instructions), mais l'a reprise dans la situation d'après (« Cercle »).

Dans « Sur quel objet ? », Nadir a construit la droite (CF), décrite correctement dans le message de Loïc, en cliquant d'abord sur C, puis en choisissant la direction de manière perceptive pour qu'elle passe par F.

Ce schème a aussi été utilisé pour obtenir une droite perceptivement perpendiculaire :

a. Dans « Construire le symétrique », avant de trouver l'outil « Symétrie axiale », une stratégie de construction utilisée par Hanna est de tracer une droite passant par M et qui est perceptivement perpendiculaire à la droite (d) ;

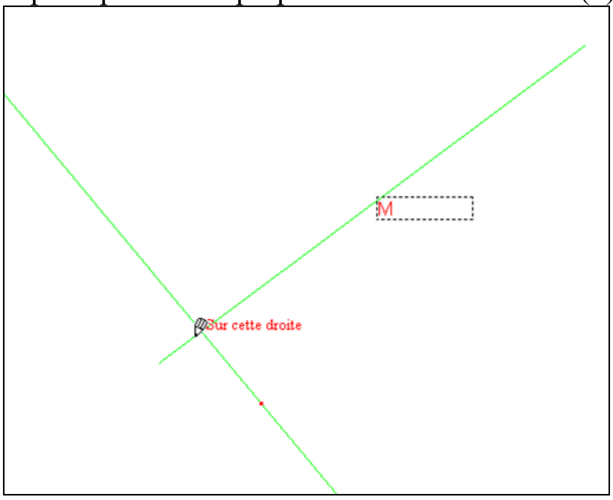


Figure 91. *Hanna trace une droite passant par M et perceptivement perpendiculaire à la droite (d)*

b. Dans « Rectangle à compléter », Katia et Malek tracent d'abord une demi-droite horizontale lisse, qui se confond avec le côté incomplet [Rx), puis ils essayent de tracer une droite perceptivement perpendiculaire au segment [OS].

Figure 92. *Katia et Malek tracent une demi-droite horizontale lisse à partir de R et une demi-droite perceptivement perpendiculaire au segment [OS] à partir de S*

Pour ce qui est du tracé de points, ce schème d'usage a pu être observé en particulier dans « Construire le symétrique », pour placer le symétrique du point N en contrôlant son emplacement de l'autre côté de la droite, et dans « Rectangles à compléter », pour placer le quatrième sommet manquant du rectangle bleu.

Dans « Construire le symétrique »,

a. Avant de trouver l'outil « Symétrie axiale », Hanna place un point perceptivement où devrait se trouver peu près le symétrique de M par rapport à la droite (d). Elle prend l'outil « Point », elle amène la souris jusqu'au point M, puis elle la déplace en suivant une direction à peu près perpendiculaire à la droite (d), puis change la direction et commence à suivre une direction horizontale et elle place le point.

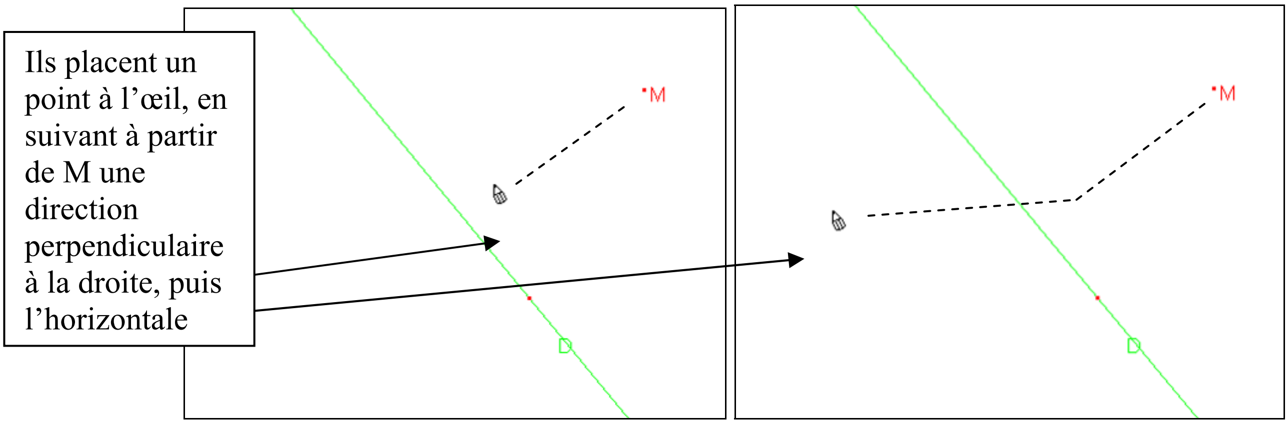


Figure 93. *Première stratégie utilisée par Hanna pour placer le symétrique de M par rapport à (d)*

b. Pour construire le symétrique du point N par rapport à la droite (d) sans l'outil « Symétrie axiale », Chloé et Alex placent un point N' de l'autre côté de la droite (d) en suivant une verticale à partir de m

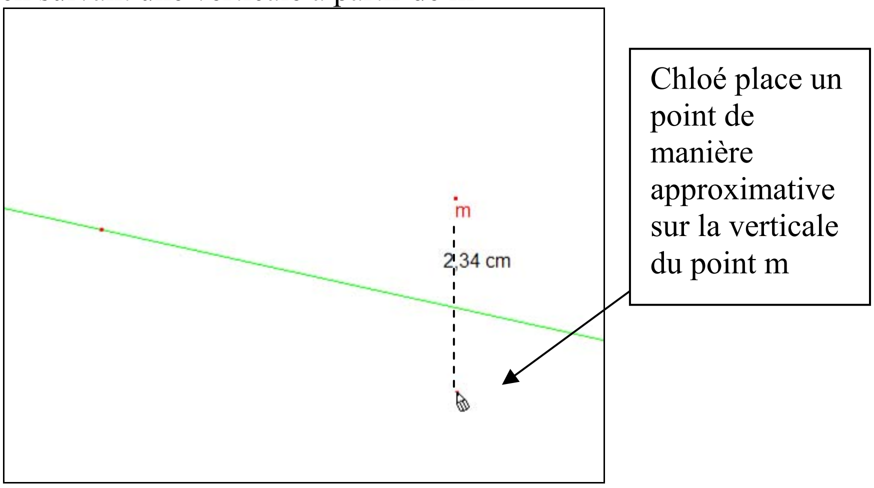


Figure 94. *Chloé place un point approximativement où elle pense que le symétrique devrait se trouver*

Katia et Malek placent un point N' de l'autre côté de la droite (d) en suivant un direction perpendiculaire à la droite (d).

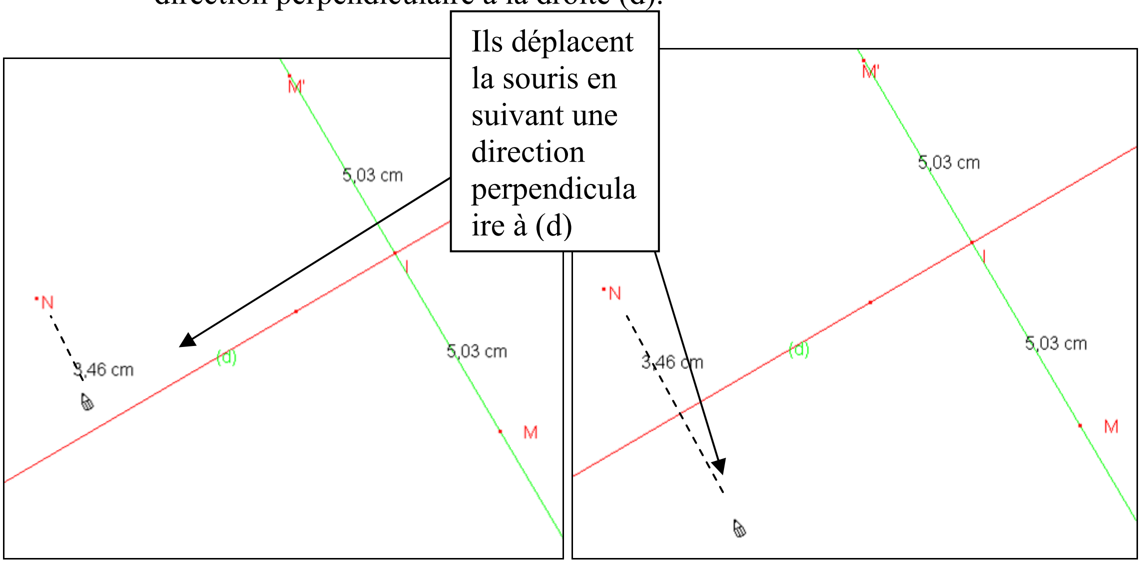


Figure 95. *Katia et Malek déplacent la souris en suivant une direction perpendiculaire à la droite (d) en rouge*

Dans « Rectangles à compléter », Katia et Malek placent un point perceptivement à l'endroit où devrait se trouver le quatrième sommet du rectangle bleu, puis ils construisent les segments qui relient ce point aux côtés incomplets du rectangle.

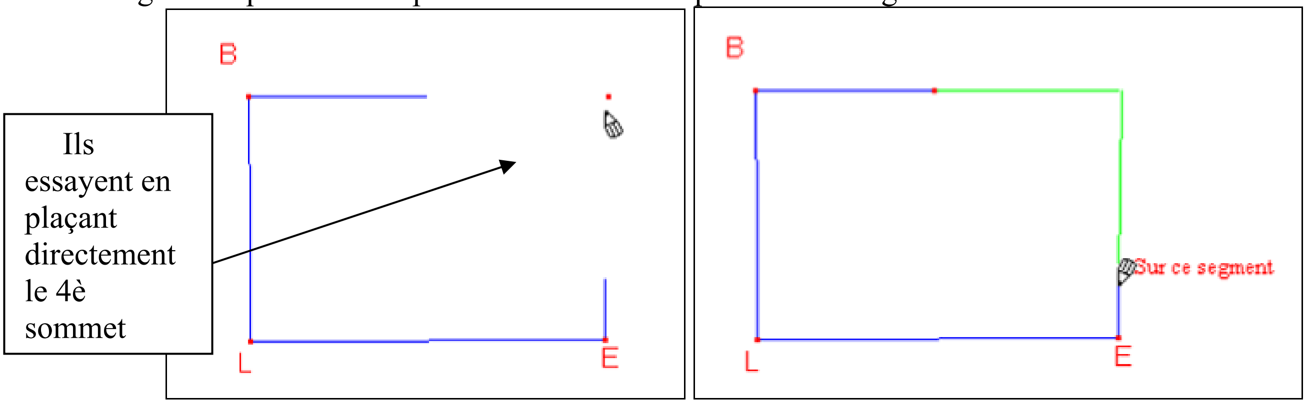


Figure 96. *Utilisation du schème d'usage du tracé au jugé pour placer le quatrième sommet du rectangle*

III.2 Schèmes d'action instrumentée

Les schèmes d'action instrumentée sont liés à l'activité et au but à atteindre. Ils ont donc une intention en lien direct avec la tâche que le sujet cherche à résoudre.

Avant de présenter les schèmes, donnons quelques invariants opératoires sur lesquels reposent certains de ces schèmes :

Invariant opératoire de dépendance : Si un point est déplacé et qu'un autre bouge simultanément, alors le deuxième dépend du premier.

Principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique : Si un phénomène perceptif est conservé au cours du déplacement, alors on le retrouvera pour n'importe quel autre déplacement.

L'instanciation de ce principe-en-acte relative à certaines propriétés se retrouve dans plusieurs situations.

En effet, ce principe ne fonctionne pas pour toutes les propriétés géométriques pours les élèves. Par exemple, des élèves n'invalident pas la perpendicularité dans des figures dynamiques qui ne la conservent pas au cours du déplacement.

Pour décider si une construction peut être validée, il faut déplacer TOUS les points de la figure et vérifier que pour chaque déplacement, la figure conserve les propriétés au cours du déplacement. Or, grâce à notre analyse a posteriori, nous nous sommes rendue compte que cette validation passe par plusieurs étapes : l'utilisation du schème d'usage « d'identification des points qui bougent dans la figure », puis le déplacement de chacun de ces points et la validation de la figure pour chaque déplacement pour pouvoir finalement conclure sur la validité de la construction.

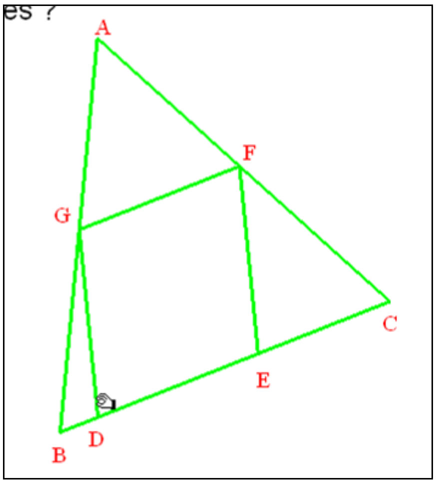
Nous distinguons alors deux schèmes d'action instrumentée : le schème « déplacer un point pour tester une construction », qui fait partie en soi du schème « déplacer pour valider une construction ».

1) Schème d'action instrumentée « déplacer un point pour tester une construction » :
   a. les « règles » d'action : pour tester la construction je déplace le point choisi et je vérifie que la construction soit conservée

b. les « invariants opératoires » : critères de ce qui est à conserver (forme, propriétés géométriques)
Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique

Notre analyse a posteriori nous a permis de voir que pour certains élèves il suffit de déplacer un seul point pour tester une construction, ce qui explique en partie la difficulté de l'appropriation du déplacement pour valider une construction.

Dans « Toujours/parfois vrai », Loïc et Nadir n'ont déplacé que le point D dans la figure verte (2) et la figure rose (3) pour décider de la validité des propriétés géométriques.



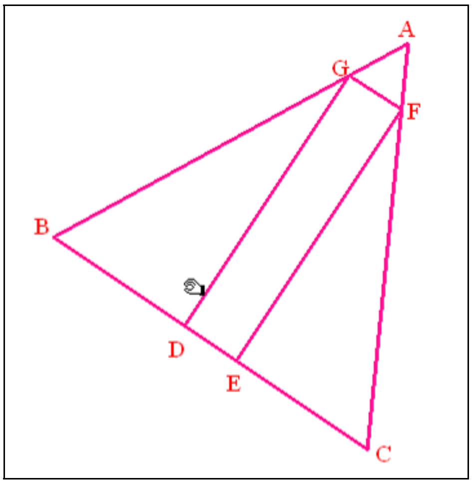


Figure 97. *Loïc et Nadir ne déplacent que le point D pour décider si les propriétés sont vraies ou fausses*

2) Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction » :
   a. les « règles » d'action :
      Règle d'action : pour valider la construction, je déplace **tous** les points de la figure et je vérifie que les propriétés se conservent au cours du déplacement
      Règle d'action : j'utilise le schème d'usage de « recherche des points qui bougent dans la figure »
      Règle d'action : pour chaque point qui bouge, j'utilise le schème « déplacer un point pour tester une construction »
      Règle d'action basée dans le principe-en-acte de la géométrie dynamique : si je trouve une position dans laquelle ma construction ne vérifie pas ce qui est demandé, alors elle est invalidée
   b. les « invariants opératoires » :
      Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
      Invariants opératoires liés à la situation (par exemple reconnaissance de la perpendicularité, du parallélisme, etc.)
      Concept-en-acte de l'ensemble des points attrapables dont dépend la construction
      Concept-en-acte de dépendance de certains points de la construction par rapport à d'autres points
   c. les « inférences » :
      a) La construction est validée

b) La construction n'est pas validée :
   i. non remise en cause de la stratégie de construction de la figure, mais répétition de la même avec une plus grande attention portée à la réalisation des actions
   ii. changement de stratégie

Ce schème est à l'origine du déplacement pour valider une construction (dragging test), il peut donc être considéré comme un schème a priori qu'on cherche à faire acquérir aux élèves.

Il a été introduit dès le début de l'ingénierie dans la situation « Pajérond », où les élèves devaient décider si leur construction de la roue manquant était correcte ou non, et a été utilisé dans toutes les tâches de construction au cours de l'ingénierie (« Sur quel objet ? », « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter ») et dans « Toujours/parfois vrai » où les élèves devaient décider si les propriétés données étaient vraies ou fausses.

Par exemple, dans la situation « Sur quel objet ? », Loïc l'a mis en place pour valider la construction de la droite :

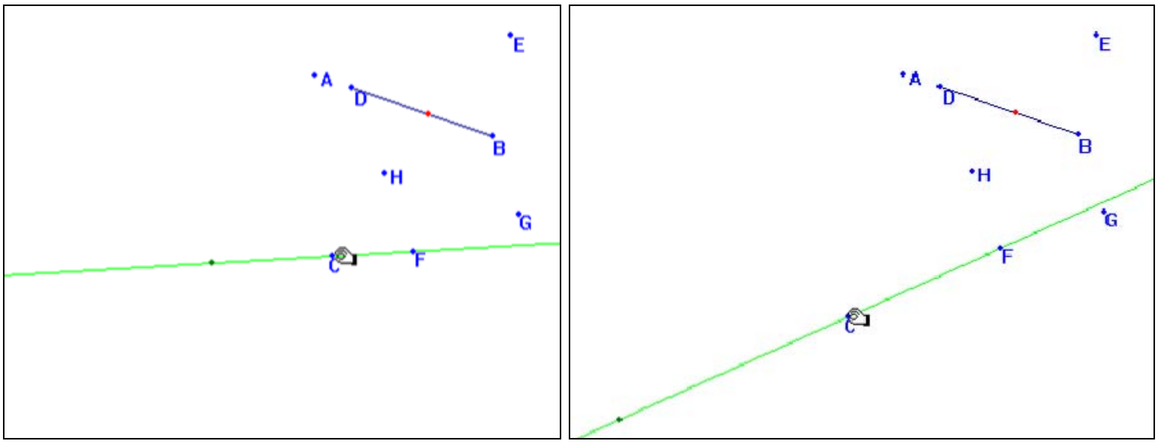


Figure 98. *Loïc déplace le point C pour valider la construction de la droite tracée*

Cependant, suivant les situations les phénomènes perceptifs permettant de valider une construction sont de nature différente. Dans « Pajérond » la validation est donnée par le contexte et la familiarité de la situation ; dans « Construire le symétrique », la validation vient de la dépendance du point et son image par une symétrie lors du déplacement ; ou encore, dans « Rectangles à compléter », la validation vient de la conservation de la forme « rectangle » au cours du déplacement.

Cependant, l'appropriation et l'utilisation de ce schème pose des problèmes aux élèves. Comme nous avons pu observer, Iris et Cédric n'invalident pas leurs constructions, même lorsqu'ils déplacent les points de la figure et la mette dans une position qui devrait leur permettre de l'invalider.

Iris déplace d'abord le point L dans la figure bleue, puis elle déplace le point O dans la figure rose et elle demande à un autre élève, Mounir, de valider leurs constructions :

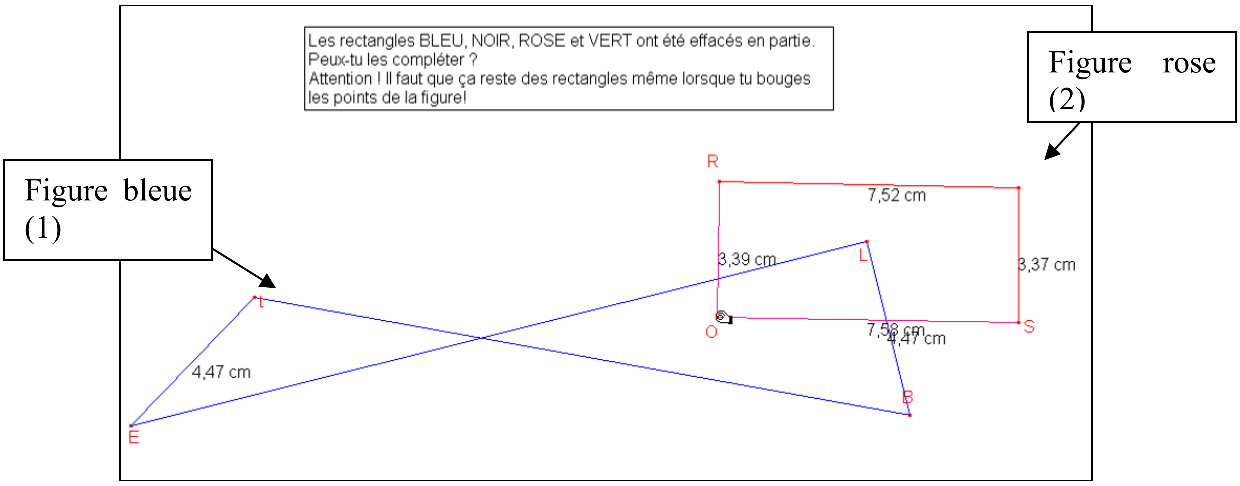


Figure 99. *Iris mets la figure bleue dans cette position, mais elle ne l'invalide pas*

Iris : Mounir, c'est un rectangle ?
Mounir : Ben si c'est un rectangle...

Nous pensons que la validation de Mounir peut venir de l'état de la figure rose (2) au moment où Iris lui montre leur construction.

3) Schème d'action instrumentée « d'identification de l'objet-trajectoire » :
   a. les « règles » d'action :
      Règle d'action 1 : pour visualiser la trajectoire d'un point en géométrie dynamique, il faut le déplacer
      Règle d'action 2 : au cours du déplacement du point, construire une image perceptive (trajectoire) de l'ensemble des positions occupées par le point mobile
      Règle d'action 3 : associer à l'image perceptive de la trajectoire, un objet spatial/géométrique
   b. les « invariants opératoires » :
      Concept-en-acte de trajectoire : deux aspects définissent la trajectoire :
         i. suite des positions du point au cours du temps
         i. l'objet même sur lequel se déplace le point

L'objectif principal de la situation « Sur quel objet ? » était de trouver, en déplaçant un point et sans passer par l'outil « Trace », la trajectoire du point rouge et du point vert et de la caractériser en fonction des points bleus. Les élèves devaient donc construire ce schème (a priori), qui s'appuie donc sur le concept-en-acte de trajectoire (Falcade et al., 2007).

Tous les binômes ont pu construire ce schème et identifier la trajectoire des points rouge et vert, sauf Chloé.

Chloé a d'abord joué le rôle de récepteur, puis d'émetteur. Elle doit donc déplacer le point rouge et le point vert, qui cette fois-ci se déplacent respectivement sur une demi-droite et sur un segment. Elle déplace le point rouge, elle essaye de le faire sortir de sa trajectoire, puis se laisse guider par le mouvement du point. Comme elle ne comprend pas très bien la tâche, elle cherche dans les outils disponibles et elle choisit l'outil de mesure. Elle mesure la distance entre le point vert et un des points bleus (le point **e**) : 0, 49cm.

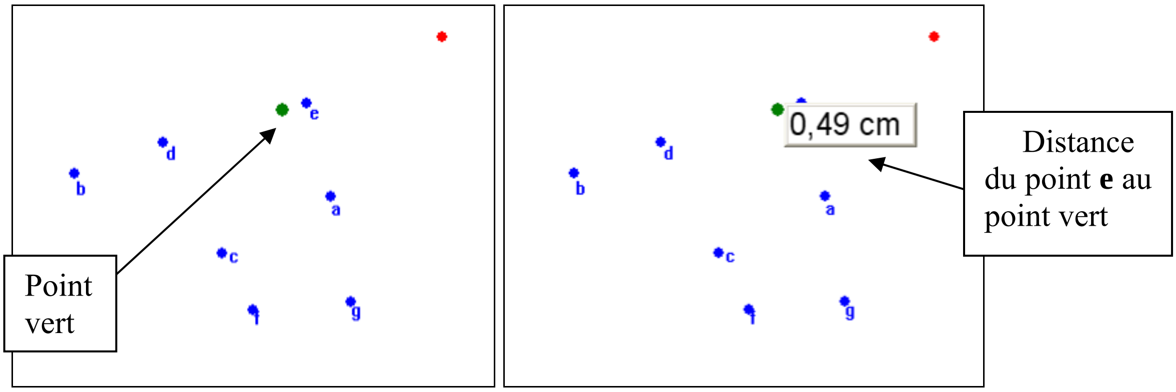


Figure 100. *Chloé utilise la mesure pour caractériser le point vert*

Chloé continue à chercher dans cette ligne de pensée, elle mesure d'autres distances, puis l'observateur vient, déplace le point vert et lui montre que la mesure du point vert au point **e** varie, invalidant sa procédure. Elle demande alors de l'aide à une autre élève :

Chloé : Je peux placer le point rouge entre F et quoi... entre F et l'infini ?
Elle attrape à nouveau le point rouge et elle le déplace.
Saïda l'aide :
Saïda : Déplace-le et regarde ce que ça fait
En déplaçant le point rouge :
Chloé : **Sur la ligne F**
Saïda : (AF)
Chloé : Au dessus, au dessus du trait...
Mais l'enseignant leur dit de ne pas s'aider
Chloé : Au dessus du point A ?

Chloé a donc des difficultés pour construire le schème de visualisation de la trajectoire. Au début elle n'observe que le point dans certaines positions et cherche à le caractériser de façon statique en utilisant la mesure. Puis, grâce au déplacement, elle réussit à identifier une trajectoire rectiligne passant par le point F, puisqu'elle parle de « **ligne F** » et de « **trait** ». Finalement, dans son message, elle donnera une caractérisation du point spatio-graphique, en indiquant la position du point rouge « au dessus du point A » et du point vert « entre le point E et le point F ».

Ce schème nécessite un cinéma-déplacement. Pour pouvoir visualiser la trajectoire d'un point sans passer par l'outil « Trace », les élèves doivent utiliser le cinéma-déplacement et observer le déplacement des points comme un film, afin de pouvoir visualiser toutes les positions qui peuvent être occupées par ce point.

4) Schème d'action instrumentée de « matérialisation d'une trajectoire par une droite » :
Ce schème est issu du tracé d'une droite avec une règle en papier crayon.
   a. les « règles » d'action : pour tracer la droite qui représente la trajectoire, il faut placer un point à l'emplacement du point mobile, puis déplacer le point mobile et construire un deuxième point au nouvel emplacement du point mobile et tracer la droite passant par les deux points construits
   Règle d'action : plus mes points sont éloignés, plus précis sera mon tracé
   b. les « invariants opératoires » :
   Théorème-en-acte : une droite est définie par deux points
   Concept-en-acte de droite : une droite est définie par deux points placés assez loin l'un de l'autre
   c. les « anticipations » : la trajectoire que l'on cherche est une droite

Ce schème, comme nous avons tenté d'expliquer auparavant, a été identifié a posteriori à partir de la stratégie utilisée par Katia dans la situation « Sur quel objet ? ». Afin de construire la droite représentant la trajectoire du point vert, Katia est passée par la construction de points auxiliaires. Elle a été la seule élève à utiliser cette stratégie, mais par la particularité du tracé et des invariants opératoires sur lesquels il repose, nous avons voulu le caractériser en termes de schème.

Elle place deux points à l'extrême gauche de l'écran, un sur le point vert et un autre juste à côté (peut-être parce qu'elle ne voit pas très bien au début le premier point placé), puis elle attrape le point vert, elle le déplace vers l'extrême droite de l'écran et elle place un deuxième point. Katia utilise ici le photo-déplacement pour placer le point vert dans les positions qui l'intéressent.

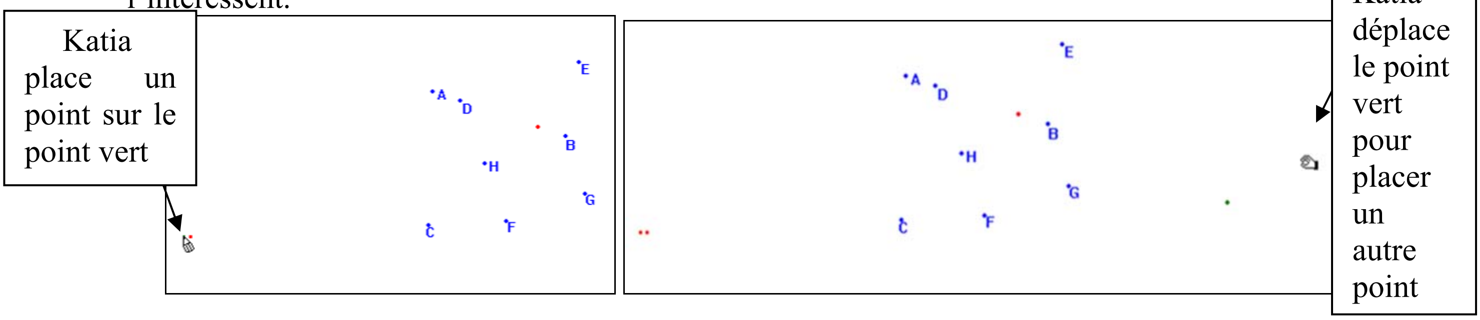


Figure 101. *Elle place un premier point à gauche de l'écran, elle attrape le point vert, le déplace pour qu'il soit bien à droite et elle place un deuxième point pour tracer la droite*

Elle prend l'outil « Droite » et elle trace la droite passant par les deux points construits précédemment.

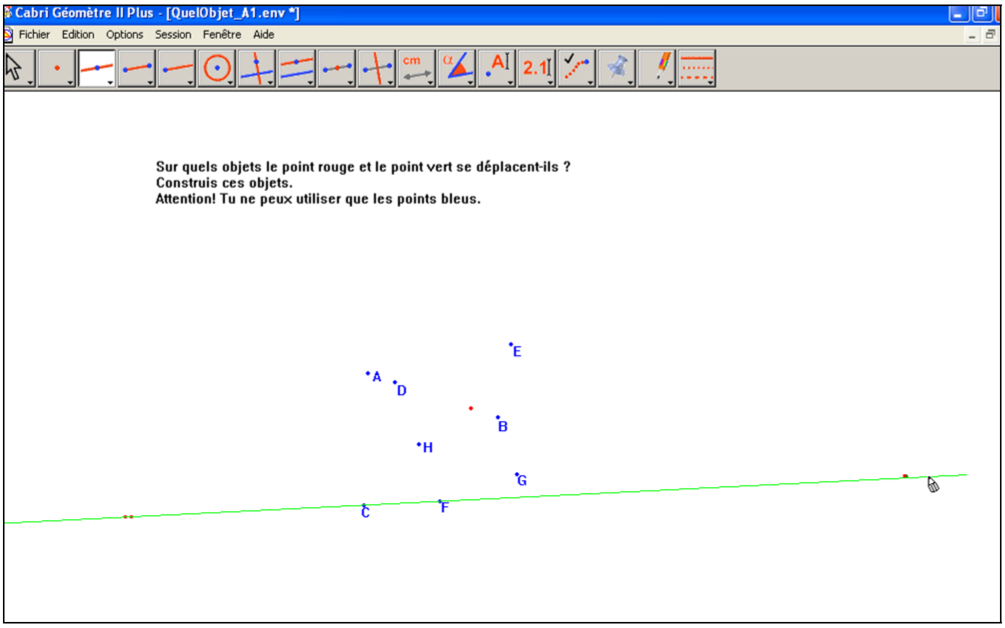


Figure 102. *Katia trace la droite qui passe par les deux points qu'elle avait construit sur deux emplacements du point vert*

5) Schème d'action instrumentée « vérification que la trajectoire passe par un point » :
   a. les « règles » d'action : pour savoir si la trajectoire d'un point passe bien par un point A, je dois déplacer lentement mon point mobile et vérifier qu'il passe sur le point A
   b. les « invariants opératoires » : si dans le déplacement le point mobile passe sur A, alors la trajectoire passe bien par A

c. les « anticipations » : je fais l'hypothèse que la trajectoire passe par A
d. les « inférences » : la trajectoire passe (ou ne passe pas) par A

Puisqu'une trajectoire est en jeu, ce schème a été observé a posteriori dans les stratégies mises en place par Katia et Malek, Alex, Iris et Loïc dans la situation « Sur quel objet ? ».

Katia et Malek l'ont utilisé lors de la phase de validation en binôme ; Malek explorait la construction qui avait été donnée à Katia et afin de vérifier si la trajectoire du point vert passait par les points C et F, il a déplacé très lentement le point vert au-dessus de ces points-là.

Loïc, dans le rôle d'émetteur, déplace le point vert et comprend très vite quelle est la trajectoire décrite par ce point. Mais afin de vérifier que la trajectoire dépend des points C et F, comme Malek, il déplace le point vert très lentement en passant par ces points.

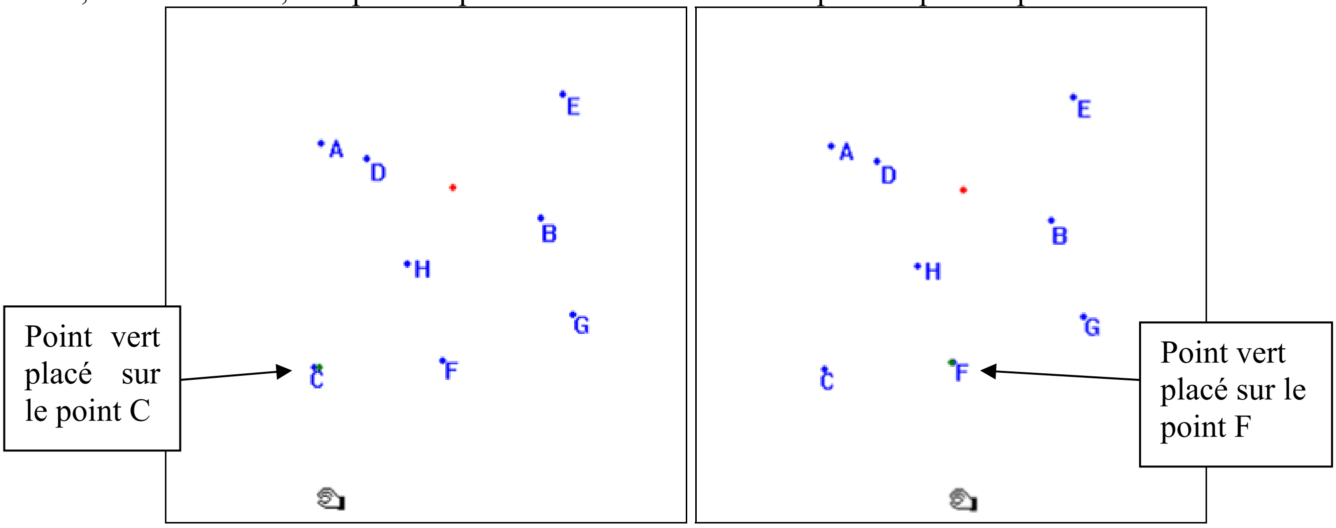


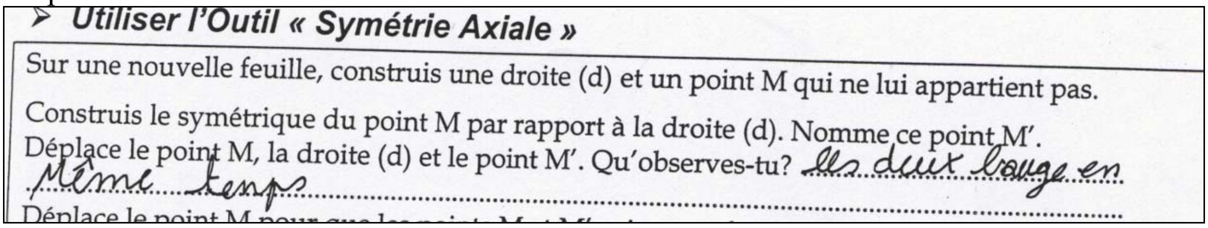
Figure 103. *Pour vérifier que la trajectoire passe par C et par F, les élèves placent le point sur ces points*

Ce schème utilise à la fois le photo-déplacement, pour placer le point dans une position spécifique que l'on cherche, et le cinéma-déplacement, au moment où on déplace lentement le point mobile sur le point « fixe » par lequel on cherche à vérifier que la trajectoire passe bien.

6) Schème « déplacer pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement » :
   a. les « règles » d'action :
      Règle d'action : j'utilise le schème d'usage « recherche des points qui bougent dans la figure »
      Règle d'action : pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement, on déplace les différents points de la figure et on observe ce qui varie et comment ça varie
   b. les « invariants opératoires » :
      Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
      Invariants opératoires permettant à l'élève de reconnaître les régularités et les changements (reconnaissance de forme spatiale, invariants géométriques)
   c. les « inférences » : dépendent de la figure et de ses propriétés géométriques

Ce schème devait être construit et mobilisé par les élèves dans les situations portant sur la symétrie. Cependant, pour les élèves l'observation des variations représente une vraie difficulté et restent alors à un niveau de base.

Par exemple, Iris remarque que lorsqu'elle déplace le point M, M et M' « bouge en même temps » :

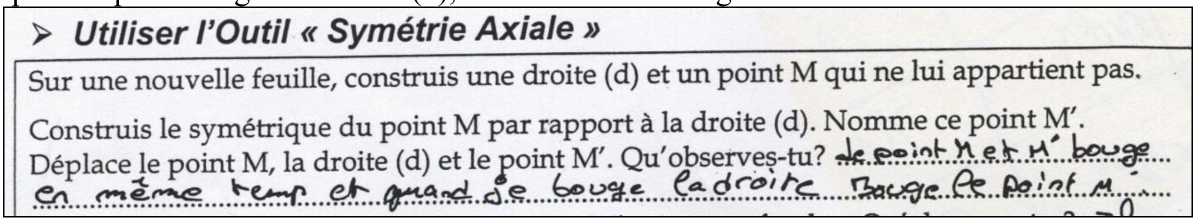

➢ Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? Ils deux bouge en Même temps

Figure 104. *Fiche d'Iris*

Hanna et Idriss remarquent non seulement qu'ils « bougent en même temps », mais aussi que lorsqu'ils bougent la droite (d), M' est le seul à bouger :

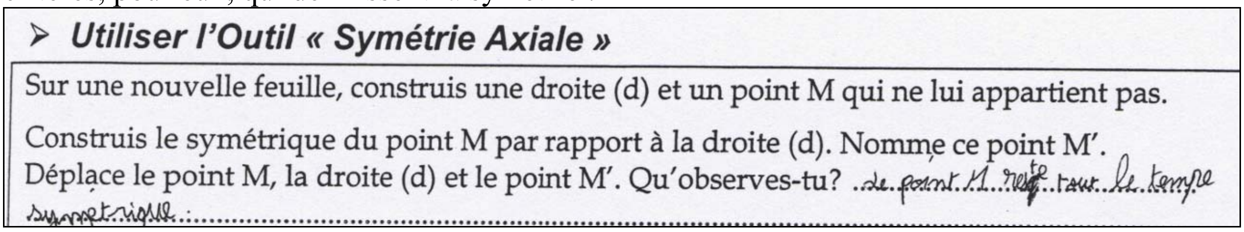

➢ Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? le point M et M' bouge en même temp et quand je bouge la droite bouge le point M'

Figure 105. *Fiche de Hanna et Idriss*

Chloé et Alex remarquent la conservation de la symétrie, sans spécifier quels sont les critères, pour eux, qui définissent la symétrie :

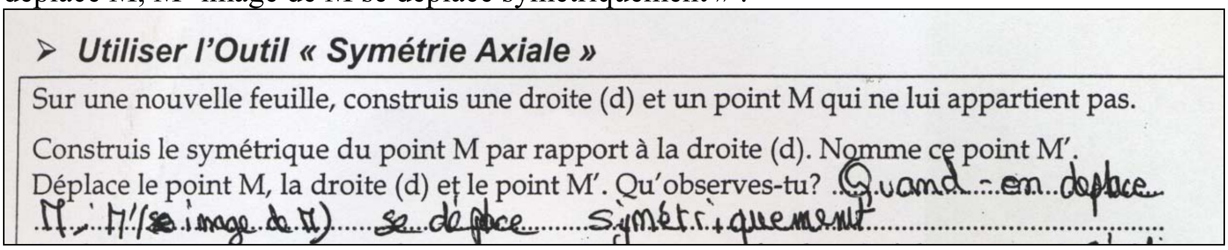

➢ Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? le point M reste tout le temps symetrique

Figure 106. *Fiche de réponses d'Alex et Chloé*

Katia et Malek donnent une réponse qui montrerai les variations de M et M' : « Quand on déplace M, M' image de M se déplace symétriquement » :


➢ Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? Quand on déplace M, M' (se image de M) se déplace symétriquement

Figure 107. *Fiche de Katia et Malek*

Bien que leurs critères de conservation de la symétrie ne soient pas plus spécifiques que ceux d'Alex et Chloé, la formulation utilisée par Katia et Malek contient en elle-même le sens de variation (« se déplace symétriquement »).

L'analyse des variations est à distinguer de l'identification des invariants. Les invariants peuvent se « voir » dans la figure en mouvement (cinéma-déplacement) ou dans chaque état statique de la figure (photo-déplacement). En revanche, l'analyse des variations nécessite le cinéma-déplacement puisque ce sont les régularités de la variation qui sont à identifier, telles que des points qui bougent à la même vitesse, qui se déplacent dans la même direction, etc.

7) Schème d'action instrumentée « déplacer pour identifier les invariants de la figure » :
   d. les « règles » d'action :
      Règle d'action : j'utilise le schème d'usage « identification des points qui bougent dans la figure »
      Règle d'action : pour identifier les invariants de la figure, je déplace les différents points de la figure et j'observe les régularités dans la variation de la figure, je me détache de ce qui change et je m'intéresse à ce qui se conserve
   e. les « invariants opératoires » :
      Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
      Invariants opératoires permettant à l'élève de reconnaître les régularités et les changements (reconnaissance de forme spatiale, invariants géométriques)
   f. les « inférences » : dépendent de la figure et de ses propriétés géométriques

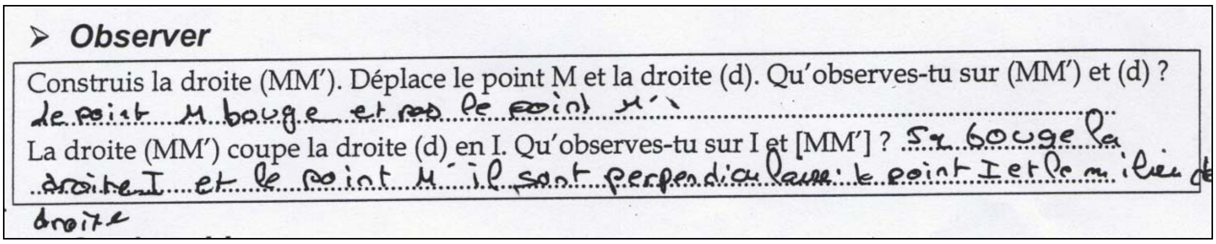
Ce schème a priori est susceptible d'être en jeu dans toutes les situations où une construction est déjà faite. En particulier, dans les situations relatives à la symétrie de notre ingénierie didactique, on donnait une construction aux élèves avec deux figures symétriques par rapport à un axe et on leur demandait de constater les variations au cours du mouvement. Ceci s'est avéré plus difficile que prévu. Les élèves remarquent la dépendance entre les deux figures, que les deux bougent en même temps, mais ils ont beaucoup de mal à reconnaître les invariants géométriques dans la variation des figures.

Une propriété que Katia et Malek et Hanna et Idriss ont réussi à identifier dans « Construire le symétrique », avec l'aide de l'enseignant ou du chercheur, porte sur l'équidistance à l'axe d'un point et de son image.

Hanna et Idriss :

> L'enseignant : Alors vous vous êtes sur les déplacements, sur tout ce qui bouge, mais mon stylo et la droite (MM') ils sont comment tous les deux ?
> Hanna : Perpendiculaires ?
> L'enseignant : Vous l'avez écrit quelque part ? On a bien l'impression effectivement. Et de la même façon votre point I ici il est comment par rapport à ces deux droites ? A vue d'œil ou même si on bouge on va en avoir l'impression ? Il est comment ?
> Hanna : Le milieu ?
> L'enseignant : Eh ben on va peut-être l'écrire aussi ça. Et ça, ça va vous aider ensuite à faire le dessin sur le cahier. Donc l'objectif pour aujourd'hui c'est d'arriver à faire la construction sur le cahier et l'utiliser après.

Ils écrivent dans leur fiche : « ça bouge la droite I et le point M' ils sont perpendiculaires le point I et le milieu de droite ».



➢ **Observer**

Construis la droite (MM'). Déplace le point M et la droite (d). Qu'observes-tu sur (MM') et (d) ? le point M bouge et le point M'

La droite (MM') coupe la droite (d) en I. Qu'observes-tu sur I et [MM'] ? ça bouge la droite I et le point M' il sont perpendiculaire le point I et le milieu de droite

Figure 108. *Qu'observes-tu sur I et [MM'] ? ça bouge la droite E et le point M' ils sont perpendiculaire. Le point I et le milieu de droite*

Afin d'observer les invariants, les élèves doivent avoir des connaissances mathématiques suffisantes leur permettant de repérer les propriétés qui se conservent au cours du mouvement.

8) Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété » :
   a. les « règles » d'action :
      Règle d'action : j'utilise le schème d'usage « identification des points qui bougent dans la figure »
      Règle d'action : pour valider la conjecture/propriété, je déplace tous les points de la figure et j'observe si elle est vraie ou fausse
   b. les « invariants opératoires » : si la conjecture/propriété est valide au cours du déplacement, alors elle est toujours vraie
      Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
   c. les « inférences » :
      - si elle est vraie au cours du déplacement, alors elle est vraie et elle peut être validée ;
      - si je trouve une position dans laquelle la conjecture/propriété n'est plus vraie, alors, par le principe du contre-exemple, je conclus qu'elle est fausse.

Ce schème est à l'origine du déplacement pour valider une conjecture/propriété, il est donc un schème a priori. La validation d'une conjecture/propriété peut se faire sur une construction donnée au sujet, ou bien une construction faite par le sujet.

Il a été observé dans les situations « Toujours/parfois vrai » et en particulier dans « Construire le symétrique ».

Dans « Toujours/parfois vrai », bien que les propriétés aient été données et demandées aux élèves, on a pu observer des moments où les élèves ont formulé des conjectures et ont déplacé les points de la figure pour décider de la validité.

C'est le cas d'Iris et Cédric lorsqu'ils exploraient la figure rose. Alors qu'ils travaillaient sur la propriété « (GF) et (BC) parallèles », Iris formule la conjecture « oui, elles sont parallèles ».

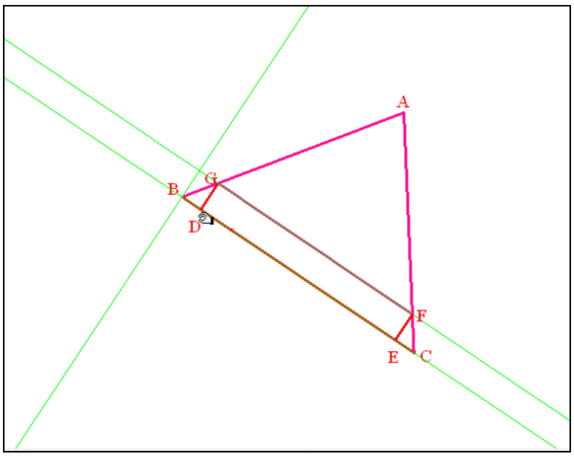
« Iris : Si **ça reste toujours**... »

Puis ils déplacent le point D et la droite disparaît un moment :

Iris : Ah! J'ai rien dit!
Cédric : Non regarde! Même si tu vois pas! Regarde !

Mais Iris utilise le déplacement pour trouver une position dans laquelle la droite (GF) coupe la droite (BC) et montrer à Cédric que leur conjecture est fausse :

Iris : **Non regarde! Ça se tord! Tu vois ?**
Cédric : Ah ouais!



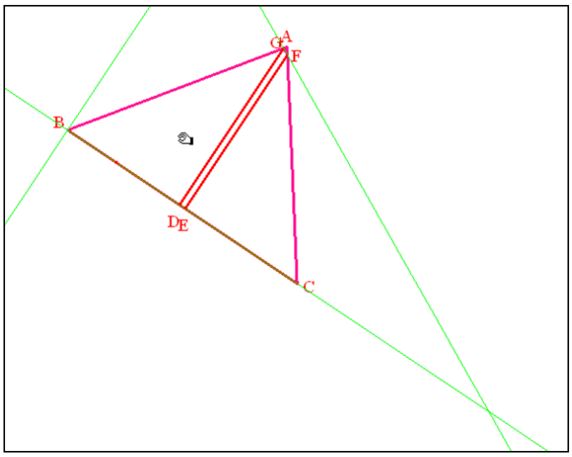


Figure 109. *Conjecture : (GF) et (BC) sont toujours parallèles ; mais Iris trouve une position dans laquelle les deux droites se coupent : non, ma conjecture était fausse, elles ne sont pas parallèles*

Ce schème peut utiliser le photo-déplacement ou le cinéma-déplacement en fonction de ce qu'on cherche à faire. La visualisation qu'une conjecture/propriété est vraie passe nécessairement par le cinéma-déplacement. Pour pouvoir déterminer si une conjecture/propriété est vraie et se conserve au cours du déplacement, le photo-déplacement ne suffit pas puisque la figure doit être observée en continu. Alors que pour invalider une conjecture/propriété, en général on cherche une position spécifique, laquelle peut être trouvée lors de l'exploration des propriétés de la figure utilisant le cinéma-déplacement, ou bien qui a déjà été observée, comme dans le cas d'Iris, et dans ce cas-là le photo-déplacement permet de mettre directement la figure dans une position qui invalide la conjecture.

9) Schème d'action instrumentée « vérification de l'équidistance » :

Ce schème de vérification est à distinguer de celui de l'identification de l'invariant. C'est une fois que l'invariant est identifié qu'il y a vérification. Les deux sont liés mais non réductibles l'un à l'autre.

a. les « règles » d'action : si je mesure AB et AC et je déplace et que les mesures restent égales, alors le point A est équidistant de B et de C
b. les « invariants opératoires » :
   Théorème-en-acte : deux mesures restant égales au cours du déplacement, sont toujours égales
   Concept-en-acte de milieu : le point à égale distance de deux points est leur milieu

Ce schème est susceptible d'être en jeu surtout dans les situations portant sur la symétrie. Il a été identifié a posteriori dans la situation « Construire le symétrique », où l'on demandait d'abord aux élèves de déplacer le point M et la droite (d) et d'analyser les variations de M, M' (son symétrique par rapport à (d)) et (d) ; on demandait aussi de construire la droite (MM') et le point d'intersection de (MM') et (d), le point I, et d'analyser les variations de M, M' et I.

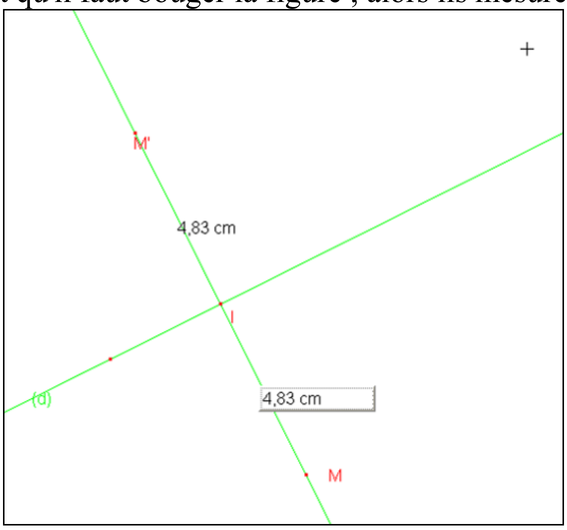
Ce schème a été observé chez Katia et Malek qui remarquent d'abord que I est au milieu de M et M', mais qui vont finalement chercher à vérifier l'équidistance du point I aux points M et M' :

Katia et Malek déplacent le point M et la droite (d) pour analyser les variations de M, M' et I. Ils attrapent et déplacent la droite (d) et l'observateur leur demande de s'arrêter un peu et de regarder (sans que la droite (d) soit horizontale) :

L'observateur : Tu vois pas quelque chose par rapport à...

Katia : **Il est tout le temps au milieu! Il est tout le temps au milieu!**

Afin de valider leur conjecture (l'équidistance à l'axe et non pas que ce soit le milieu), ils disent qu'il faut bouger la figure ; alors ils mesurent MI et IM' et ils déplacent.



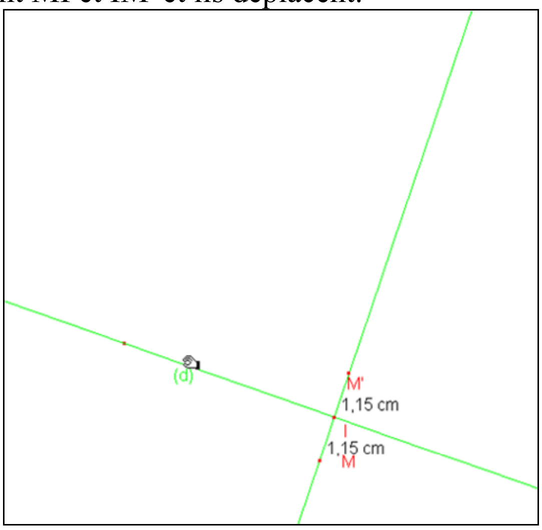


Figure 110. *Ils mesurent les distances IM et IM', puis ils utilisent le déplacement pour vérifier l'équidistance*

Malek : ...la même distance de M à I et de M' à I...

Ils écrivent dans leur fiche : « Le point I reste toujours à la même distance de M et de M'. »

10) Schème d'action instrumentée « vérification que deux droites sont perpendiculaires » :

a. les « règles » d'action : pour vérifier si deux droites sont perpendiculaires, il suffit de déplacer un point ou une droite pour les mettre verticale/horizontale

b. les « invariants opératoires » :

Concept-en-acte de perpendicularité : deux droites, l'une horizontale l'autre verticale sont perpendiculaires

Théorème-en-acte : deux droites sont perpendiculaires si elles peuvent être mises l'une horizontale l'autre verticale

Théorème-en-acte : les droites horizontales ou verticales sont les seules qui ne présentent pas d'escaliers dans le tracé

Théorème-en-acte : si deux droites dépendantes sont perpendiculaires dans une position, alors elles le sont dans toutes les positions

c. les « inférences » : les deux droites sont (ou ne sont pas) perpendiculaires

Bien que ce schème puisse être classé dans la catégorie de « déplacer pour valider une conjecture/propriété », nous pensons que par la nature du concept-en-acte et du théorème-en-acte sur lesquels il repose, il doit être considéré à part. Il a été observé a posteriori chez Loïc et Nadir.

Lors de l'exploration des variations de la droite (MM'), M un point quelconque et M' son image par une symétrie axiale par rapport à une droite (d), Loïc et Nadir déplacent le point M et la droite (d). Loïc fait la conjecture que les deux droites sont perpendiculaires, mais afin de vérifier sa conjecture, Loïc utilise le photo-déplacement et déplace la droite (d) de manière à mettre les droites (d) et (MM') verticale et horizontale.

Loïc : Attends !

Il attrape la droite (d) et il la déplace et la droite (mm') change de direction, puis il reprend (d) et il la déplace en mettant la droite (d) horizontale, et à ce moment là, (mm') est verticale.

Loïc : C'est perpendiculaire, oui!

Nadir : Tu marques quoi ?

Loïc : Ils sont... perpendiculaires...

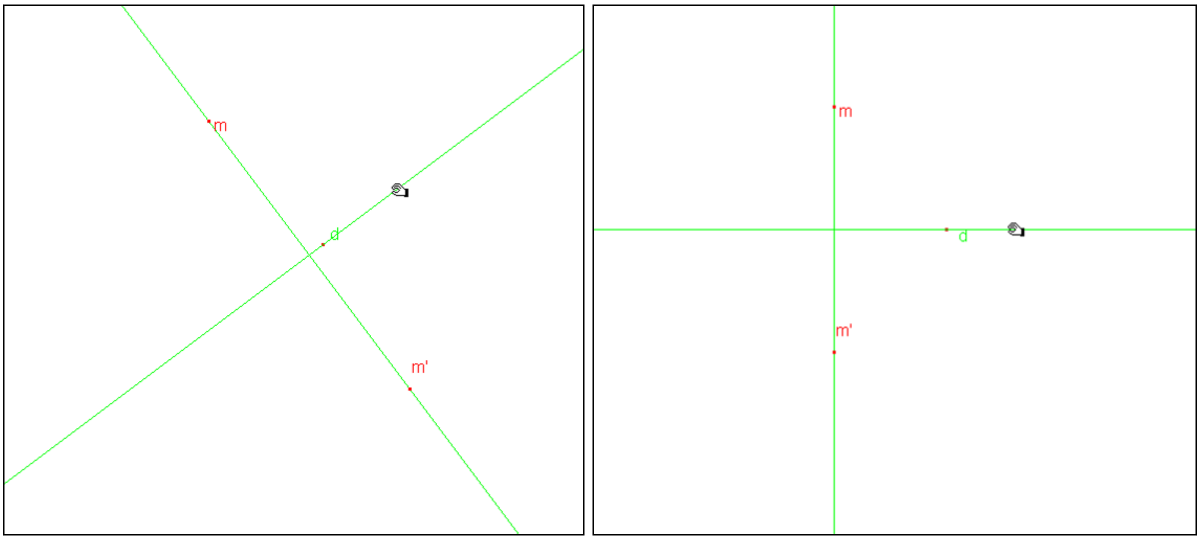


Figure 111. *Pour vérifier que deux droites sont perpendiculaires, il faut les déplacer pour pouvoir les mettre verticale/horizontale*

Ce schème montre que pour les élèves la perpendicularité n'est vérifiable que si droites sont l'une horizontale et l'autre verticale et ils s'appuient sur le fait que les droites ont une apparence rectiligne lisse à l'écran dans ce cas.

11) Schème d'action instrumentée « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » :
   a. les « règles » d'action : pour trouver un contre-exemple, il faut déplacer les points de la figure et trouver un dessin, une position, qui permet de montrer un contre-exemple
   b. les « invariants opératoires » :
      Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
   c. les « inférences » : si je trouve un dessin dans lequel la propriété géométrique concernée n'est pas vraie, alors j'ai trouvé un dessin contre-exemple et la propriété est **fausse**.

Ce schème est à l'origine du déplacement pour invalider une construction, il est considéré comme un schème a priori. Il est utilisé pour trouver un dessin contre-exemple, une position particulière, dans laquelle la construction ne possède pas une certaine propriété géométrique. Il permet donc d'invalider en particulier les propriétés géométriques observées dans un dessin, schème qu'on cherchait à faire acquérir aux élèves pour passer du dessin à la figure, en particulier dans la situation « Toujours /parfois vrai ». Puisqu'on cherche à obtenir une configuration particulière de la figure, le photo-déplacement permet de l'obtenir.

Il a non seulement été mis en place par les élèves dans la situation « Toujours/parfois vrai », mais a été observé après dans la situation « Rectangles à compléter » chez Katia et Malek et Hanna et Idriss, qui l'ont utilisé comme moyen pour argumenter entre eux et donner un contre-exemple pour invalider leur construction.

Dans la phase collective de « Toujours/parfois vrai », l'enseignant a commencé par faire le bilan au tableau des réponses données à la question « (DG)//(EF) ? » pour la figure bleue. Il a d'abord interrogé Iris, qui avait voté pour le « oui, les droites sont parallèles » et qui a simplement montré sur le dessin statique que les droites étaient bien parallèles. L'enseignant a alors interrogé un élève, Carl, qui avait voté pour le « non, les droites ne sont pas parallèles » :

L'enseignant : Carl pourquoi t'es pas convaincu toi ?
Carl : **Parce que si on bouge...**
L'enseignant : Parce que quoi ?
Carl : **On bouge un point...**
L'enseignant : On bouge un point et puis alors ?
Carl : **Et après ça se coupe**...
L'enseignant : Et alors ça se ?
Les élèves : **Coupe**!
L'enseignant : ça se penche ! Eux ils les ont mises et ça se penche comme ça, quand ils bougent un point. Ben viens nous le montrer. Parce que moi quand je les regarde, je les regarde bien droit, op! Parallèles ! Et toi tu nous dis on bouge, ça se penche !

Carl, en tant qu'élève-sherpa, a manipulé l'ordinateur vidéo-projeté et il a déplacé le point E de manière à ce que E se superpose avec B et que (EF) et (DG) se coupent. Il a donc utilisé le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » pour montrer à la classe que les droites n'étaient pas parallèles.

L'enseignant : Ah oui ben alors là toi t'es bien convaincu que les deux elles sont pas parallèles là!

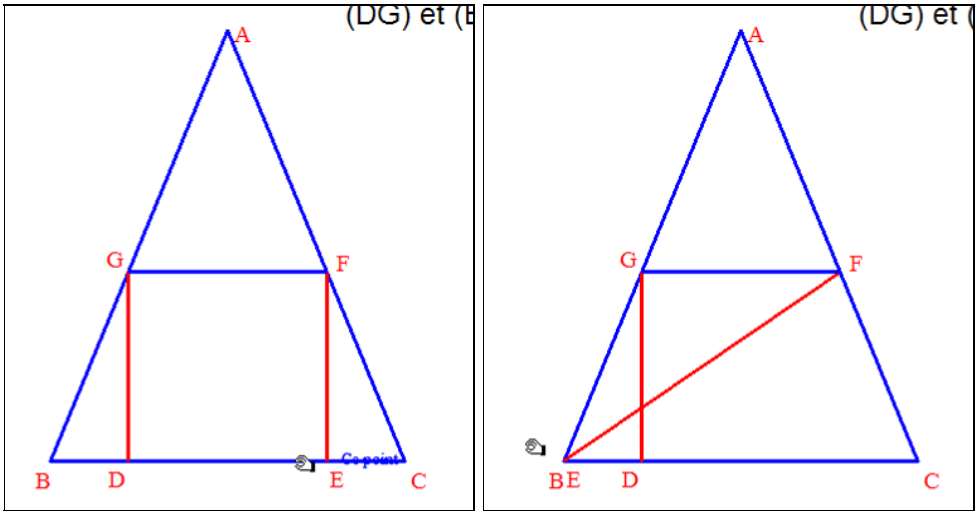


Figure 112. *Carl attrape le point E et le déplace pour montrer que (DG) et (EF) ne sont pas parallèles*

12) Schème d'action instrumentée « recherche de dépendance entre deux points » :
Il s'agit ici d'un schème d'action instrumentée et non pas d'un schème d'usage, car c'est l'interprétation par le sujet de la dépendance de deux points, interprétation géométrique ou mécanique, ce qui régule l'utilisation de ce schème.

a. les « règles » d'action : pour savoir si un point A dépend d'un point B, alors il faut déplacer B et observer si A se déplace ou non
b. les « invariants opératoires » :
   Concept-en-acte de dépendance : Si un point est déplacé et qu'un autre bouge simultanément, alors le deuxième dépend du premier
   Théorème-en-acte : si un point dépend d'un autre, alors il y a une relation géométrique entre ces deux points
c. les « anticipations » : je fais l'hypothèse que A dépend de B ;
d. les « inférences » :
   - le point A se déplace lorsque je déplace B, donc A dépend de B ;
   - le point A ne se déplace pas lorsque je déplace de B, alors A est indépendant de B

Ce schème, a priori, a été utilisé en particulier dans la situation « Construire le symétrique ». Il a permis d'invalider des stratégies erronées dans la phase de construction du symétrique sans utiliser l'outil « Symétrie axiale ».

On a pu observer, dans la phase d'observation des variations de M et de M', comment peu à peu ce schème se construit chez Chloé et Alex :

Chloé : Alors, ce qu'on observe c'est que **ça reste toujours symétrique**.

Dans la phase de construction, c'est l'identification de l'indépendance des points N et N' qui leur permet d'invalider leur construction :

Chloé : Ouais! Faut que...

Chloé attrape et déplace le point N' qu'elle a construit au jugé.

L'observateur : Donc il faut...
Chloé : Il faut l'attacher!
L'observateur : Il faut arriver, exactement! (Il efface le point N') à le construire de manière à ce qu'il reste attaché. Comme quand je bouge le M... Quand je bouge le M, mon M' il bouge en même temps et ça bouge pareil!

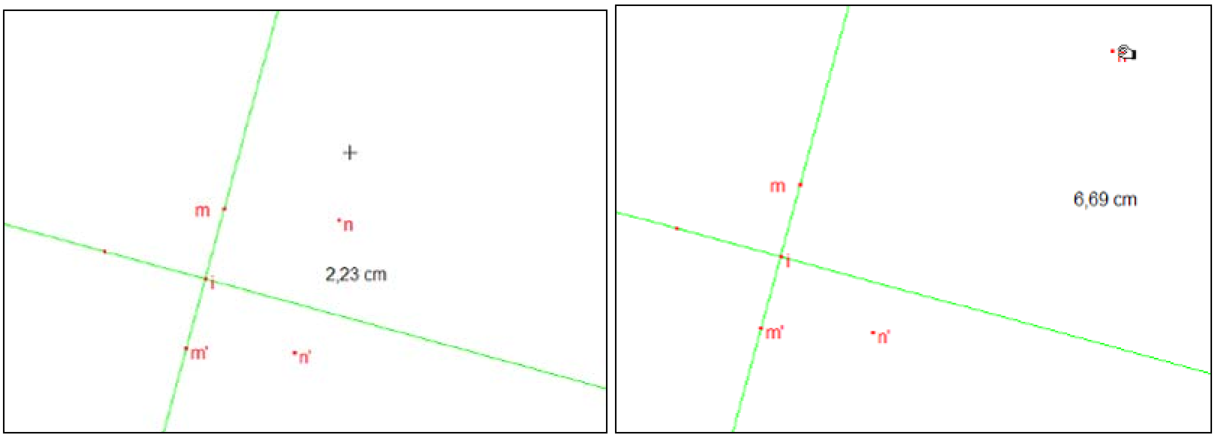


Figure 113. *Lorsqu'on déplace le point N, N' reste statique*

Bien que les élèves, à ce stade, n'arrivent pas à construire le théorème-en-acte et à associer des propriétés géométriques à la dépendance de deux points, ce schème de dépendance leur permet au moins d'invalider leur construction erronée.

13) Schème d'action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition » :
Il s'agit ici d'un schème observé alors que l'on attend l'usage d'outils de Cabri embarquant des propriétés pour obtenir une construction satisfaisant à ces propriétés. Ce schème est plus général que celui qui sera présenté juste après où l'ajustement est instrumenté par la mesure
   a. les « règles » d'action : pour satisfaire une condition, on attrape un point ou un objet et on le déplace
   Règle d'action : si la condition peut être contrôlée avec la mesure, alors on utilise le schème d'ajustement instrumenté par la mesure
   b. les « invariants opératoires » : si la figure peut être ajustée de manière à ce qu'elle soit correcte dans une position donnée, alors elle possédera les propriétés géométrique voulues
   Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique
   c. les « anticipations » : je peux utiliser le déplacement pour obtenir la condition qui manque
   d. les « inférences » : ma construction est correcte, elle a les propriétés géométriques demandées

Le schème d'ajustement fait partie des stratégies de base dans les tâches de construction (Acosta, 2008), il constitue donc un schème a priori. Il s'appuie sur le photo-déplacement afin que soit obtenue une position particulière dans laquelle la construction vérifie la propriété géométrique désirée et est parfois instrumenté par la mesure de longueur ou d'angle, élément de contrôle des élèves. Il constitue donc un schème a priori.

Il peut être visuellement instrumenté, pour obtenir par exemple une perpendiculaire de manière perceptive, ou instrumenté par d'autres outils tels que la mesure de longueurs ou d'angles (voir schème suivant) ou le tracé d'objets géométriques (droite perpendiculaire, etc.).

Il a été observé chez Iris lors de la construction du symétrique du point N par rapport à la droite (d), sans utiliser l'outil « Symétrie axiale ».

Elle a d'abord tracé une droite passant par N. Puis, elle l'a attrapée et elle l'a ajustée de manière à ce qu'elle soit perceptivement perpendiculaire à la droite (d).

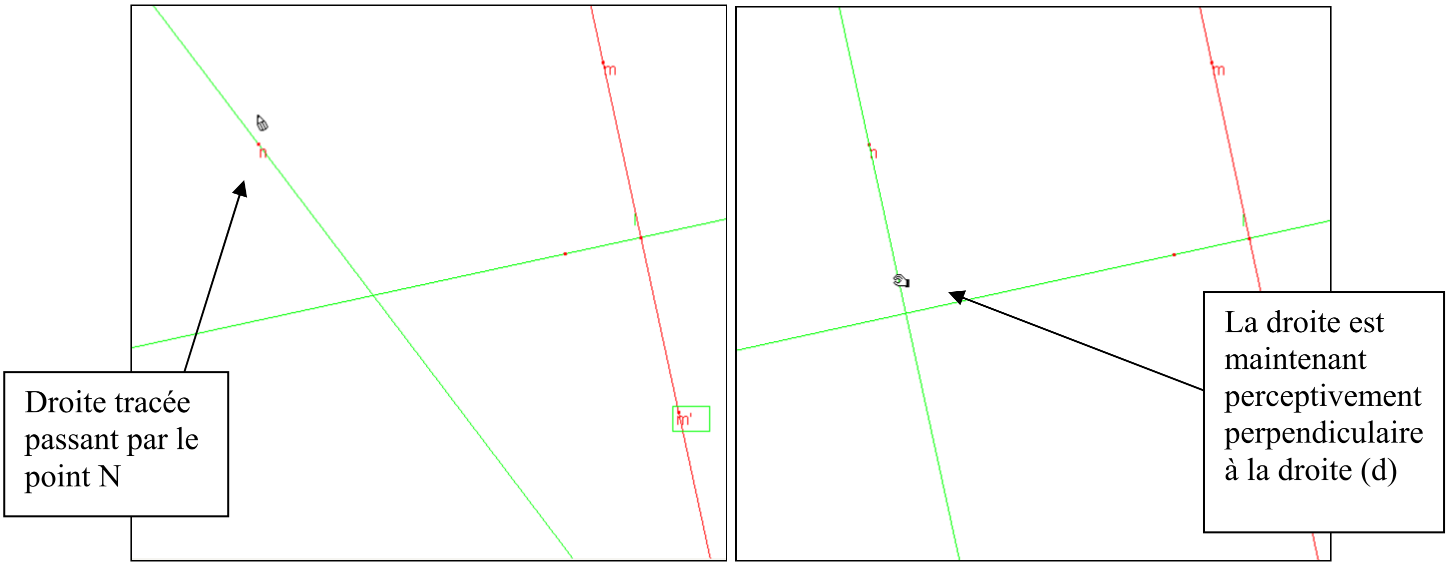


Figure 114. *Iris utilise le déplacement pour ajuster la direction de la droite passant par N pour qu'elle soit perceptivement perpendiculaire à la droite (d)*

14) Schème d'action instrumentée « ajustement instrumenté par la mesure » :

a. les « règles » d'action :
Règle d'action : pour satisfaire une condition qui peut être contrôlée par la mesure, alors on utilise un outil de mesure (longueur, angle), puis on déplace un point ou un objet pour obtenir un nombre donné

b. les « invariants opératoires » :
Théorème-en-acte : deux droites perpendiculaires font un angle de 90°
Théorème-en-acte : deux segments ont la même longueur si leur mesure est égale
Théorème-en-acte : deux points A et B sont équidistants d'un troisième objet (point, droite), si la longueur de A à l'objet a la même mesure que celle de B à l'objet
Instanciations du principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique

c. les « anticipations » : je peux trouver un endroit où j'aurai la mesure que je cherche

Ce schème d'ajustement est très fréquent dans les stratégies des élèves, en particulier en $6^{ème}$, par l'importance de la mesure dans l'école primaire. Il peut donc être considéré comme un schème a priori.

Il a été observé en particulier dans la stratégie de base de construction du symétrique du point N par rapport à la droite (d) dans « Construire le symétrique » chez Alex et Chloé, Katia et Malek, Iris et Cédric ; mais il a surtout été utilisé dans « Rectangles à compléter » par Alex et Chloé, Katia et Malek, et Iris et Cédric.

Dans « Construire le symétrique » par exemple, la stratégie de base consiste à placer un point N' perceptivement, mesurer la distance de N et de N' à la droite (d), puis à déplacer N' pour avoir la même mesure des deux côtés. Cette stratégie a été observée, par exemple chez Katia et Malek ainsi que chez Célia et Amir.

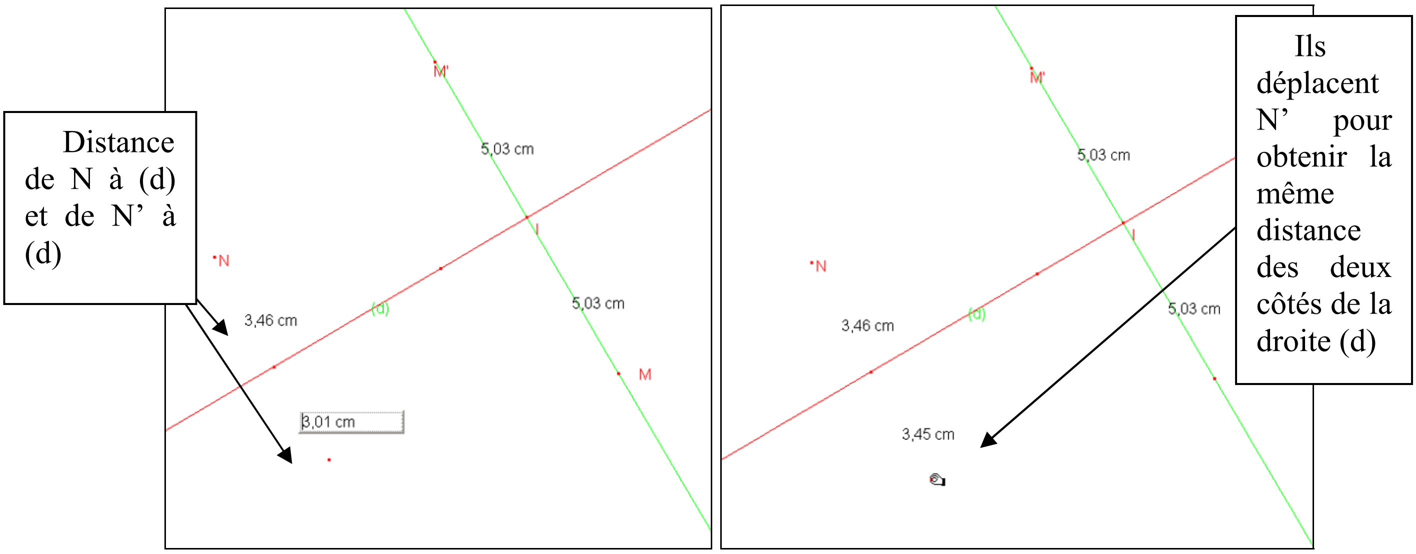


Figure 115. *Ils placent un point N' à peu près où serait le symétrique de N, ils mesurent la distance de N et de N' à (d), puis ils déplacent N' afin d'avoir la même distance, c'est-à-dire le même nombre, des deux côtés.*

Dans « Rectangles à compléter », Alex et Chloé l'utilisent pour obtenir des segments de même longueur. Dans la figure bleue (1), ils mesurent d'abord les segments [BL] et [EL]. Puis, ils utilisent le schème de « tracé au jugé » pour construire un segment à partir du point B qui se superpose perceptivement avec le côté incomplet [Bx]. Ils mesurent ce segment, puis ils l'ajustent de manière à obtenir la même longueur que [LE].

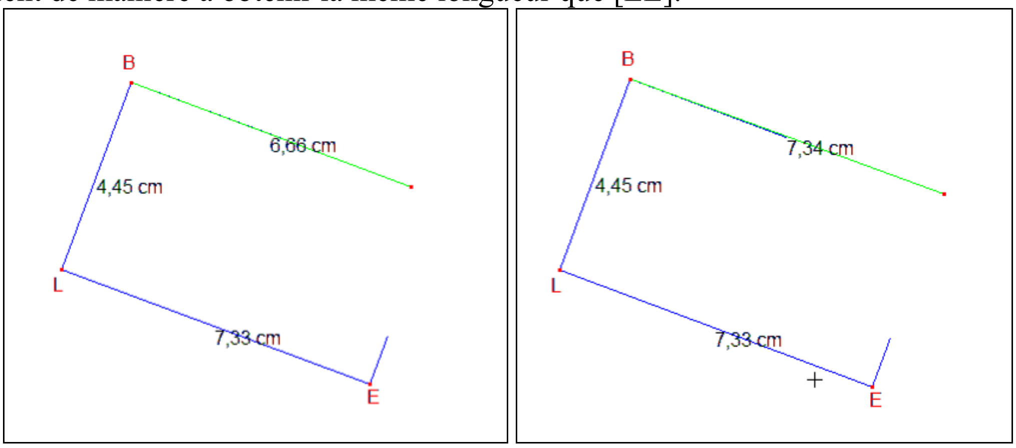


Figure 116. *Ils déplacent le quatrième sommet pour ajuster et obtenir la même mesure que [EL]*

Katia et Malek l'utilisent pour obtenir une droite qui leur permette de compléter le rectangle rose (2). Ils tracent d'abord une demi-droite perceptivement perpendiculaire au segment [OS] et ils mesurent l'angle formé par cette demi-droite et la parallèle à [OS] passant par R : 88,4°. Ils attrapent alors la demi-droite et ils la déplacent de manière à obtenir 90°.

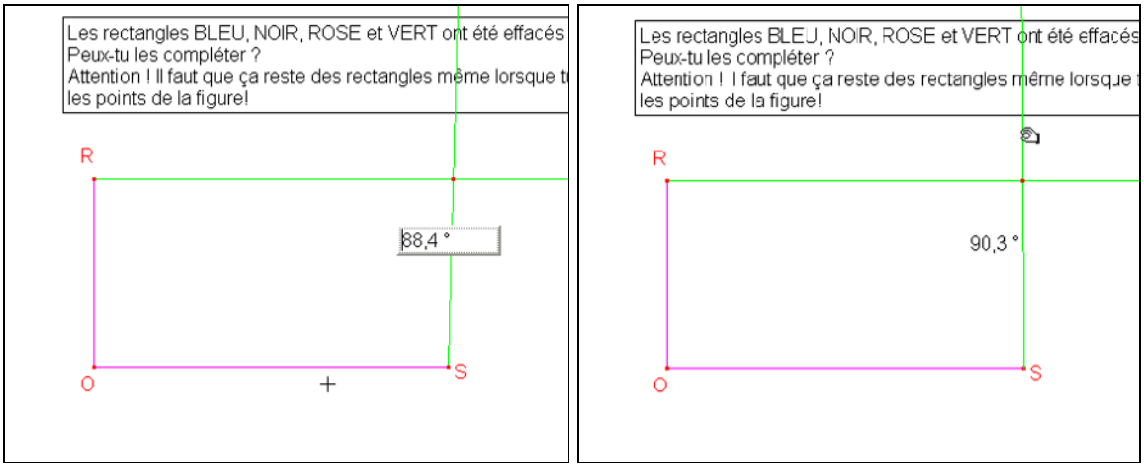


Figure 117. *Katia et Malek utilisent le déplacement pour ajuster pour obtenir un angle de 90°*

15) Schème d'action instrumentée « du crayon » :

Un schème de construction dans Cabri ne nécessite pas une utilisation spécifique du déplacement, mais ce schème introduit le déplacement de la souris dans le tracé de l'objet. Il est basé sur l'analogie avec le tracé d'un « trait » en papier-crayon :

a. les « règles » d'action : pour obtenir un segment il faut cliquer d'abord sur le premier point, puis déplacer lentement la souris jusqu'à l'autre point, comme si on laissait une trace avec le « crayon », puis cliquer sur le deuxième point
b. les « invariants opératoires » :
   Concept-en-acte de segment comme résultat d'un processus de tracé d'un trait rectiligne
   Concept-en-acte de trajectoire en géométrie dynamique : l'endroit par lequel passe la souris, passe aussi la trajectoire
c. les « anticipations » portent sur l'image mentale du trait qui contrôle le mouvement de la souris fait par les élèves

Le schème du crayon est un schème observé a posteriori non seulement chez des élèves de 6ème, mais a aussi été observé chez des enseignants ayant des connaissances instrumentales probablement insuffisamment développées. Il trouve son origine dans le tracé de segments en papier crayon.

Ce schème peut donner lieu à (au moins) deux utilisations possibles, selon l'anticipation de l'utilisateur :

1- Avec l'anticipation d'obtenir un trait rectiligne, il peut permettre le tracer d'un segment quelconque ;

2- Dans la situation « Rectangles à compléter », les élèves construisent un segment en anticipant l'emplacement du quatrième sommet. Cette stratégie trouve son origine dans la stratégie qu'on utiliserait en papier crayon en prolongeant les côtés avec la règle.

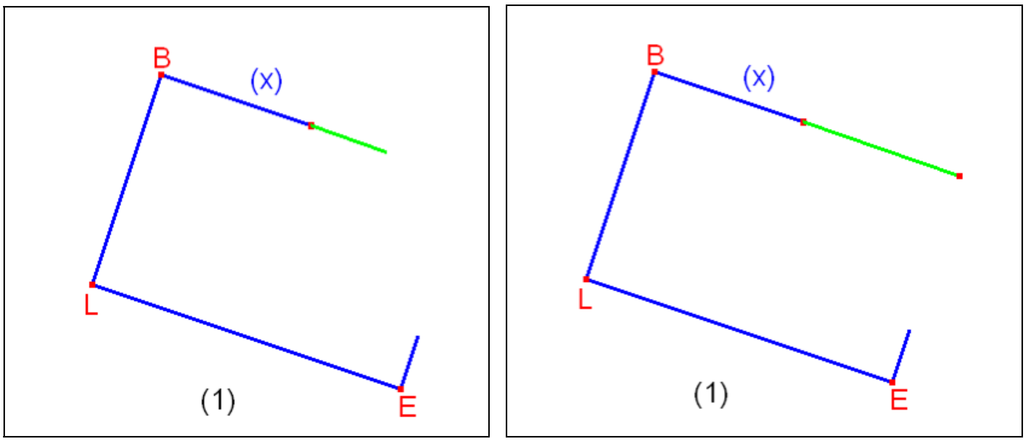


Figure 118. *Les élèves tracent le segment en essayant de conserver la direction de [Bx) et ils ne cliquent la deuxième fois que lorsqu'ils ont choisi la « bonne longueur »*

Cette stratégie a été observée chez Alex et Chloé, Katia et Malek, et Cédric et Iris.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau niveau d'analyse nous permettant d'étudier de manière plus fine les actions des élèves et caractériser en termes de schèmes relatifs au déplacement la genèse instrumentale des élèves.

Nous avons distingué cinq schèmes d'usage et quinze schèmes d'action instrumentée.

Schèmes d'usage :

- « déplacement d'un objet »
- « recherche des points qui bougent »
- « distinction des différents types de points du logiciel »
- « traitement d'une ambigüité lorsqu'on veut déplacer un objet »
- « tracé au jugé »

Schèmes d'action instrumentée :

- « déplacer un point pour tester une construction »
- « déplacer pour valider une construction »
- « identification de l'objet-trajectoire »
- « matérialisation d'une trajectoire par une droite »
- « vérification que la trajectoire passe par un point »
- « déplacer pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement »
- « déplacer pour identifier les invariants de la figure »
- « déplacer pour valider une conjecture/propriété »
- « vérification de l'équidistance »
- « vérification que deux droites sont perpendiculaires »
- « dessin contre-exemple obtenu par déplacement »
- « recherche de dépendance entre deux points »
- « ajustement pour satisfaire une condition »
- « ajustement instrumenté par la mesure »
- « du crayon »

Dans les schèmes d'usage, nous avons montré que pour les élèves le déplacement d'un point est un schème qui se construit et qui passe d'abord par le schème de déplacement d'objets de dimension supérieure ou égale à 1. Nous avons aussi remarqué que l'exploration d'une figure passe par la recherche des points qui bougent et ceux qui bougent pas et que ce schème précède le schème a priori de distinction des trois types de points du logiciel. On voit donc que la genèse instrumentale du déplacement demande une première étape de construction de schèmes d'usage.

Le principe-en-acte de conservation de phénomènes perceptifs en géométrie dynamique (« Si un phénomène perceptif est conservé au cours du déplacement, alors on le retrouvera pour n'importe quel autre déplacement »), est un principe fondamental dans la géométrie dynamique. Il est présent dans plusieurs schèmes d'actions instrumentée : le schème déplacer pour valider une construction, déplacer pour valider une conjecture/propriété, déplacer pour identifier les invariants au cours du mouvement ou le schème du dessin contre-exemple obtenu par déplacement. Ce principe est générateur de nombreux invariants opératoires portant sur la conservation de phénomènes perceptifs en géométrie dynamique.

Nos analyses nous ont permis de voir que le schème « déplacer pour valider une construction » est en fait un « grand » schème qui embarque en lui-même plusieurs schèmes, comme le schème d'usage de recherche des points qui bougent, et que pour chaque point qui bouge, on utilise le schème de « déplacer un point pour tester une construction ». Ceci nous montre d'une part, la complexité de la construction de ce schème, et d'autre part, l'imbrication des schèmes dans la genèse instrumentale.

A partir de nos observations dans la situation « Construire le symétrique », nous avons pu observer deux utilisations particulières du schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété » : le schème de « vérification de l'équidistance » et le schème de « « vérification que deux droites sont perpendiculaires ».

La situation « Sur quel objet ? » a été une source de schèmes sur la trajectoire. Elle nous a permis de voir la difficulté de la tâche, puisque certains élèves ne sont pas arrivés à identifier la trajectoire des points. Il aurait fallu que ces élèves travaillent avec l'outil « Trace ». Cette situation nous a aussi permis de repérer un concept-en-acte de droite, issu du tracé en papier crayon :

> Concept-en-acte de droite : une droite est définie par deux points placés assez loin l'un de l'autre

Le schème de « vérification que la trajectoire passe par un point » nous a paru très intéressant. On ne s'attendait pas à ce que les élèves, une fois qu'ils aient identifié la trajectoire, veuillent vérifier les points par lesquels la trajectoire est définie. Dans ce schème, le photo-déplacement permet de placer le point à une position spécifique, et le cinéma-déplacement permet de vérifier l'appartenance de ces points à la trajectoire.

Dans le chapitre suivant, nous allons pouvoir caractériser la genèse instrumentale de chacun des binômes observés à partir des schèmes décrits dans ce chapitre.

CHAPITRE IV

GENESE INSTRUMENTALE DU DEPLACEMENT

Nos deux questions de recherche portent sur la genèse instrumentale du déplacement et la construction d'instruments déplacement :

> Question de Recherche 1 : Quels instruments déplacement seront construits par les élèves au cours de la genèse instrumentale ?

> Question de Recherche 2 : Est-ce que les élèves prennent en charge la validation de leurs constructions en déplaçant ?

Dans ce chapitre, nous essaierons de décrire la genèse instrumentale de chaque binôme en nous aidant de l'analyse a priori effectuée dans le deuxième chapitre et des schèmes que nous avons décrits dans le troisième chapitre.

Pour chaque binôme, nous reprendrons certains schèmes qui ont pu être repérés au cours du temps et nous essaierons de montrer leur évolution. En particulier, afin d'avoir des éléments de réponse à notre deuxième question de recherche, nous essaierons de montrer, chronologiquement, quand le schème « déplacer pour valider une construction » a été utilisé et quelle est l'inférence faite si inférence il y a.

Dans nos analyses, nous essaierons aussi de montrer le rôle de l'enseignant et l'influence des phases collectives quand cela est possible.

I. ALEX ET CHLOE

Alex et Chloé sont des élèves assez moyens (moyen -). Ils ont eu beaucoup de mal à s'approprier le déplacement et à comprendre le fonctionnement des figures en géométrie dynamique. Au cours de l'année scolaire, comme nous le verrons, ils sont restés plutôt du côté du dessin statique et leur moyen de contrôle résidait dans la mesure.

Nous montrerons leur appropriation du schème d'usage de « déplacement d'un objet », puisque c'est grâce à Chloé et Alex que nous avons pu voir la construction de ce schème, qui n'est valable d'abord que pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, puis étend son domaine de fonctionnement aux points. Nous reprendrons le passage de la phase collective portant sur « Géo » pour montrer aussi que l'utilisation de la souris n'est pas évidente et qu'elle a demandé une institutionnalisation en classe.

Nous montrerons la difficulté de Chloé à identifier l'objet-trajectoire par le déplacement.

Puis nous montrerons que le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » n'est pas apparu spontanément chez Alex et Chloé, mais qu'en réalité il a été construit lors d'une situation de reproduction de figure.

Nous continuerons avec l'appropriation de Chloé du schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété » afin de mettre en évidence comment elle utilise le déplacement pour décider de la validité des propriétés géométriques dans « Toujours/parfois vrai ».

Finalement, nous aborderons l'utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » et montrerons comment dans certaines situations il est absent et la validation de la figure passe par la mesure.

I.1 Construction du schème d'usage de « déplacement d'un objet »

Dans « Géo », Chloé et Alex n'ont pas cherché à explorer vraiment tous les déplacements possibles. Ils ont commencé à ne déplacer que les formes globales, en déplaçant le grand cercle du visage et en translatant Géo partout dans l'écran.

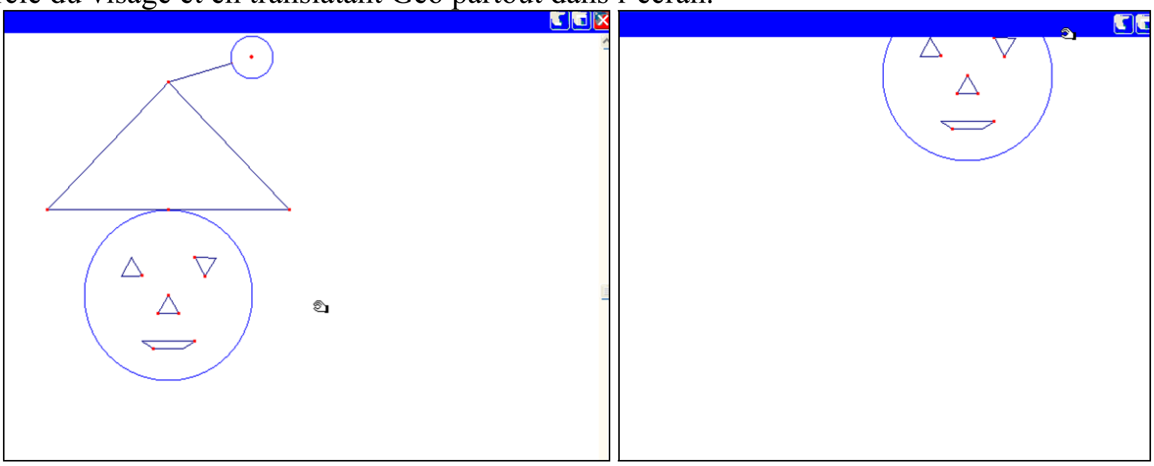


Figure 119. *Ils translatent Géo partout dans l'écran*

Chloé : Déplace le chapeau

Ils ont essayé ensuite avec le grand triangle du chapeau, ainsi qu'avec le petit cercle du pompon, mais aucun des deux ne pouvait être déplacé directement.

Alex a demandé alors à l'un de ses camarades comment il faisait pour bouger les objets.

Alex : Ah! Où il y a des points!

Ce n'est qu'à ce moment-là qu'ils ont été conscients des points et de la possibilité de pouvoir aussi attraper et déplacer les points. Ils ont attrapé le point de tangence du grand cercle avec le grand triangle et l'ont déplacé. Ils ont fait tourner, ils ont agrandi et rétréci Géo. Ils l'ont beaucoup agrandi et beaucoup diminué, jusqu'à ce qu'il devienne presqu'un point.

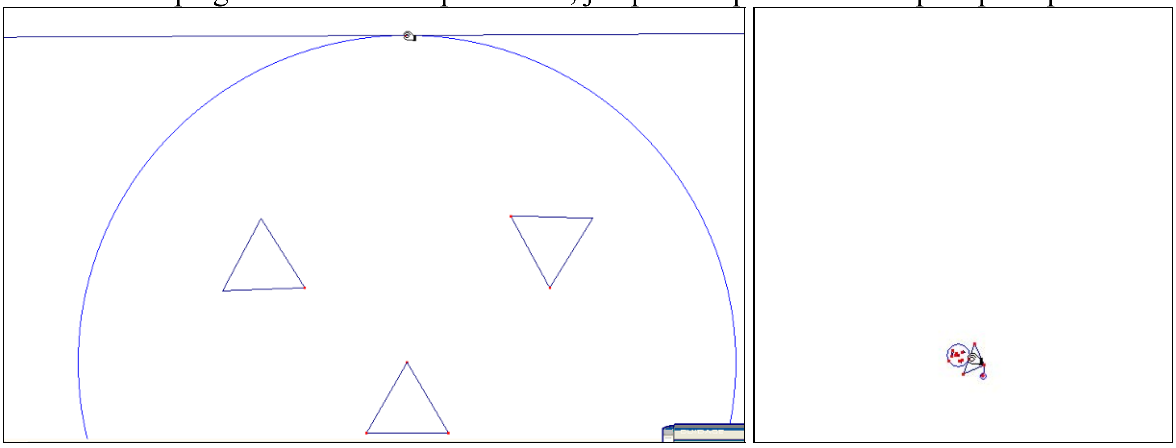


Figure 120. *Chloé et Alex attrapent le point de tangence du grand cercle et du grand triangle et font varier la taille de Géo*

Chloé et Alex ont commencé par ne déplacer que les formes globales et ils n'ont réalisé que les points pouvaient être déplacés qu'après interrogation d'un camarade. Ils ont donc utilisé spontanément le schème de « déplacement d'un objet », mais en se limitant aux objets de dimension supérieure ou égale à 1, et ont ensuite étendu son domaine de fonctionnement aux points. Cela met en évidence que le schème d'usage de « déplacement d'un objet » dans le cas des points ne va pas de soi mais qu'il est à construire et demande de reconnaître déjà la présence des points dans la figure, c'est-à-dire un début de concept-en-acte de point.

Lors de la phase collective portant sur « Géo », l'enseignant choisit Chloé comme élève-sherpa, pendant que d'autres élèves lui indiquent ce qu'elle doit déplacer. Cependant, Chloé a des difficultés à attraper les points et à les déplacer :

> L'enseignant : Chloé, tu écoutes Mounir, c'est lui qui dit ce que tu fais. Après si tu as une idée tu l'écris, tu le feras toi. Mounir vas-y!
> Mounir : Sur la pointe du chapeau, ben on clique sur le point et on peut le faire tourner.
> Chloé : Sur la pointe du chapeau ?
> L'enseignant : Débrouille-toi avec ce qu'il te dit!

Chloé clique sur « la pointe du chapeau », le sommet du grand triangle qui relie le chapeau au pompon ; elle n'essaye pas vraiment de l'attraper et de le déplacer, elle clique simplement.

> L'enseignant : Alors si sa consigne n'est pas assez précise, levez la main, essayez de les aider! Je n'interviens pas. Ambre
> Ambre : Il faut mettre la flèche sur le centre du rond du chapeau, là-haut...

Mais Ambre doit lui répéter :

> Ambre : Il faut que tu mettes la flèche, tu cliques sur le centre du point là... du chapeau, sur le centre...
> Chloé : Du cercle ?
> Ambre : Oui!
> L'enseignant : Eh ben vas-y, tu essaies!

Chloé clique sur le centre du petit cercle du pompon comme Ambre lui a dit, mais elle ne l'attrape, ni ne le déplace. Elle clique une fois de plus et rien ne se passe.

> L'enseignant : Elle a cliqué... On a toujours un petit souci technique, hein ? Peut-être vous allez trouver une solution je pense. Cédric!
> Cédric : **Faut rester appuyé**
> L'enseignant : Faut **rester appuyé, et oui, il faut rester pour que quand tu appuies comme ça, tu te transformes en main!**

Chloé laisse la souris appuyée, le pointeur se transforme en une main serrée et elle commence à déplacer le centre du petit cercle.

On voit donc ici que même l'utilisation de la souris pour attraper et déplacer un objet demande une appropriation de la part de Chloé.

I.2 Schème d'action instrumentée « d'identification de l'objet-trajectoire »

Chloé est la seule élève, parmi ceux que nous avons pu observer, qui n'a pas construit le schème « d'identification de l'objet-trajectoire ». Elle a réussi à identifier une trajectoire rectiligne à un moment donné, mais elle n'arrive pas à la caractériser et décide finalement de donner une description spatio-graphique, en indiquant une position statique des points mobiles à un moment donné. Il aurait fallu activer l'outil « Trace » pour faire apparaître la trajectoire et l'aider à identifier l'objet-trajectoire.

Alex commence en tant qu'émetteur et Chloé en tant que réceptrice, puis ils changent de rôles. Pendant la première phase de validation, ils n'ouvrent pas le fichier sur lequel Alex avait travaillé mais ils se limitent à valider la construction faite par Chloé à partir de la description donnée dans le message d'Alex.

Chloé commence par attraper le point rouge et le déplacer. Au début, elle essaye d'aller un peu partout dans l'écran avec la souris; elle essaye de le déplacer vers les côtés mais le point rouge ne se déplace que sur une trajectoire rectiligne qui est presque sur une verticale. Elle décide alors de se laisser guider par la trajectoire du point.

Mais Chloé n'a pas l'air de comprendre ce qu'elle doit faire, elle s'arrête alors et relit la consigne. Elle attrape à nouveau le point rouge et le déplace en suivant un mouvement rectiligne et en observant les limites du déplacement (le point rouge se déplace sur la demi-droite [**fa**)). On voit donc que Chloé met en place la deuxième règle d'action du schème de visualisation de la trajectoire, en essayant d'explorer les limites du déplacement du point rouge. Cependant, cela n'a pas l'air de l'aider.

Chloé cherche alors dans les outils du logiciel, elle choisit l'outil « Distance ou longueur » et mesure la distance entre le point **e** et le point vert : 0, 49cm.

Chloé : 49 millimètres

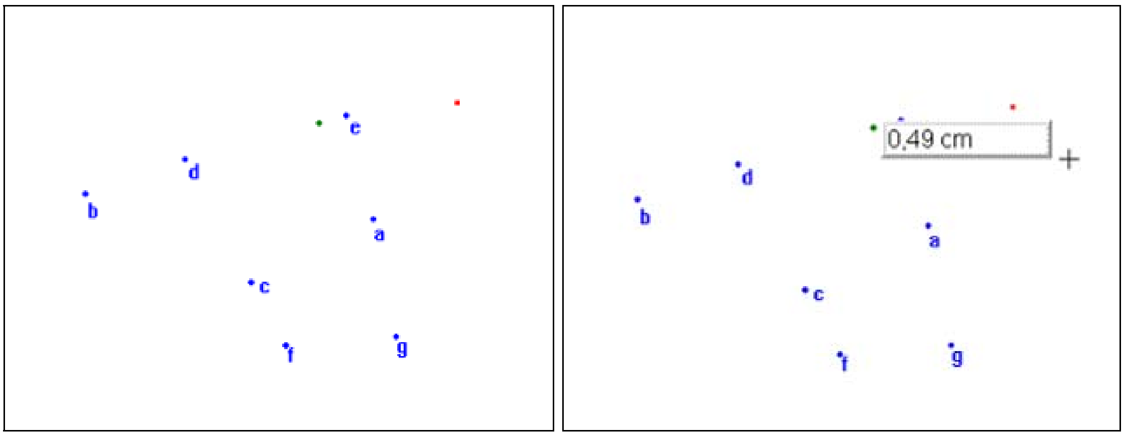


Figure 121. *Chloé mesure la distance entre le point* ***e*** *et le point vert*

On voit donc apparaître le besoin chez Chloé d'utiliser la mesure pour pouvoir caractériser la position relative de ces points.

Chloé appelle l'enseignant :

Chloé : Madame on a le droit de faire comme ça ?

L'enseignant : Tout ce que tu veux t'as le droit!

Chloé mesure alors la distance entre le point **e** et le point rouge : 1,93cm. Elle dit qu'elle a fini, alors l'observateur lit son message :

L'observateur : Tu crois que c'est bien ça ?

Chloé : Ben j'ai regardé, j'ai mesuré
L'observateur : Et... Mais ils te disent « où est-ce qu'ils se déplacent... le point rouge et le point vert »
Chloé : Oui mais ils me disent « Construis **ces objets** »

Pour Chloé « Construis ces **objets** » veut sans doute dire « Construis ces **points** », elle cherche donc à caractériser les points et leur position et non pas la trajectoire qu'ils décrivent :

L'observateur : Oui... ben en fait il faut lui dire où est-ce qu'il se déplace le point vert, parce que regarde (en déplaçant le point vert) moi je peux le bouger! Et c'est pas la même mesure que tout à l'heure!

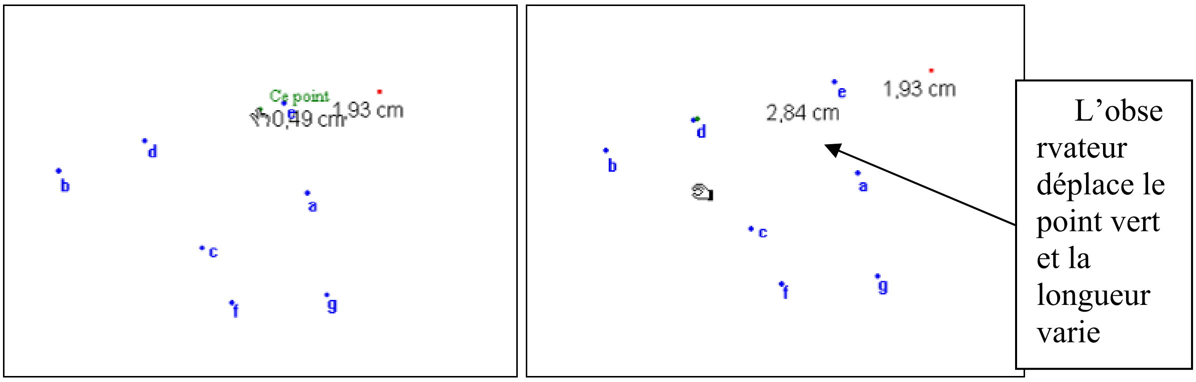


Figure 122. *L'observateur montre à Chloé que si l'on déplace le point vert, la mesure entre le point vert et le point* ***e*** *varie*

Chloé : Ah ouais!
L'observateur : Ah ouais! Donc ça sert pas en fait ces mesures (l'observateur les efface). Moi ce que je veux... moi ce que je veux savoir c'est où est-ce qu'il, où est-ce que je peux placer ce point vert, où est-ce que je peux placer le point rouge.
Chloé : Je peux placer le point rouge entre F et quoi... entre F et l'infini ?

Chloé attrape à nouveau le point rouge et elle le déplace.

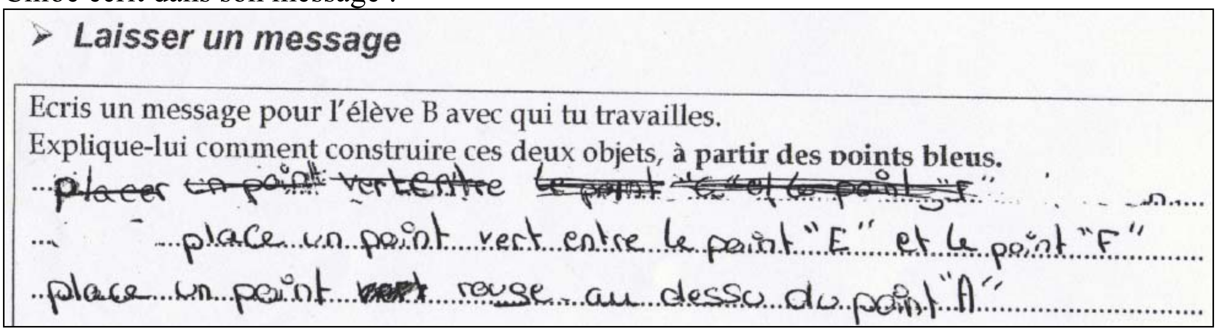
Une autre élève l'aide :

Saïda : Déplace-le et regarde ce que ça fait
Chloé en déplaçant le point rouge : **Sur la ligne F**
Saïda : **(AF)**
Chloé : Au dessus, au dessus du **trait**...

Mais l'enseignant leur dit de ne pas s'aider mutuellement.

Chloé : Au dessus du point A ?

Chloé écrit dans son message :


➢ Laisser un message

Ecris un message pour l'élève B avec qui tu travailles.
Explique-lui comment construire ces deux objets, à partir des points bleus.
~~placer un point vert entre le point "E" et le point "F"~~
place un point vert entre le point "E" et le point "F"
place un point ~~vert~~ rouse au dessu du point "A"

Figure 123. *Message de Chloé à Alex dans la situation « Sur quel objet ? »*

« Place un point vert entre le point "E" et le point "F" ; place un point rouge au dessu(s) du point "A" ».

C'est donc une description statique d'une position des points rouge et vert à un moment donné.

On voit donc que Chloé arrive à reconnaître une trajectoire rectiligne qui dépend du point F, puisqu'elle parle de « **ligne F** » et de « **trait** ». Elle ne construit pas d'objet géométrique représentant la trajectoire et dans son message mais elle donne une description spatio-graphique, en indiquant la position du point rouge « au dessus du point A » et du point vert « entre le point E et le point F » à partir des points bleus. Elle essaye de caractériser une position statique des points par la mesure, mais sa stratégie est invalidée. Chloé n'arrive donc pas à construire le schème « d'identification de l'objet-trajectoire ».

I.3 Schème d'action instrumentée « ajustement instrumenté par la mesure »

Dans notre analyse a priori, nous avions prévu que le déplacement pour ajuster apparaisse spontanément dans les stratégies des élèves. Cependant, chez Alex et Chloé, nous avons pu voir que même le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » n'est pas spontané et se construit au cours de l'ingénierie.

Dans la situation « Le même triangle » (situation qui n'a pas été incluse dans nos analyses et qui a eu lieu en mars, juste avant la situation « Toujours/parfois vrai »), Alex et Chloé étaient confrontés à une tâche de reproduction de figure type « boîte noire ».

Dans cette situation, les élèves doivent reconstruire une figure à partir d'un modèle donné dans Cabri. L'énoncé de la tâche mentionne explicitement qu'il faut que la construction soit la même que le modèle, y compris lorsque les objets se déplacent. Les élèves doivent donc utiliser le déplacement pour identifier les invariants du modèle et pour pouvoir le reconstruire.

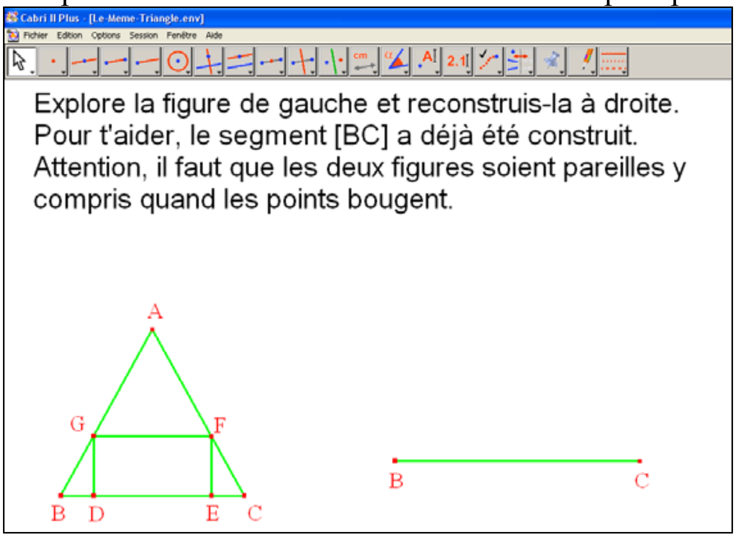


Figure 124. *Situation de reproduction type « boîte noire » « Le même triangle »*

Chloé et Alex ont décidé de baser leur stratégie de reproduction utilisant la mesure, comme ils le feraient en papier crayon. Mais un des choix de la situation était de donner deux segments [BC] de différente mesure, pour invalider la construction utilisant les seules mesures.

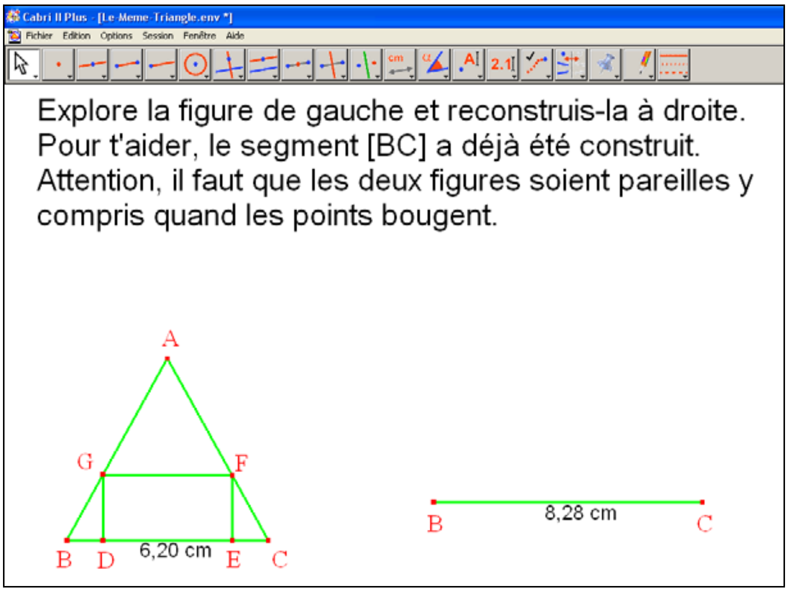


Figure 125. *Une des variables de la situation est la mesure du segment [BC] dans les deux figures*

Chloé et Alex commencent donc par mesurer la longueur BD dans le modèle et placer un point sur le segment [BC] donné, assez près de B, utilisant le schème d'usage de « tracé au jugé ». Ils mesurent la distance du point B à ce point

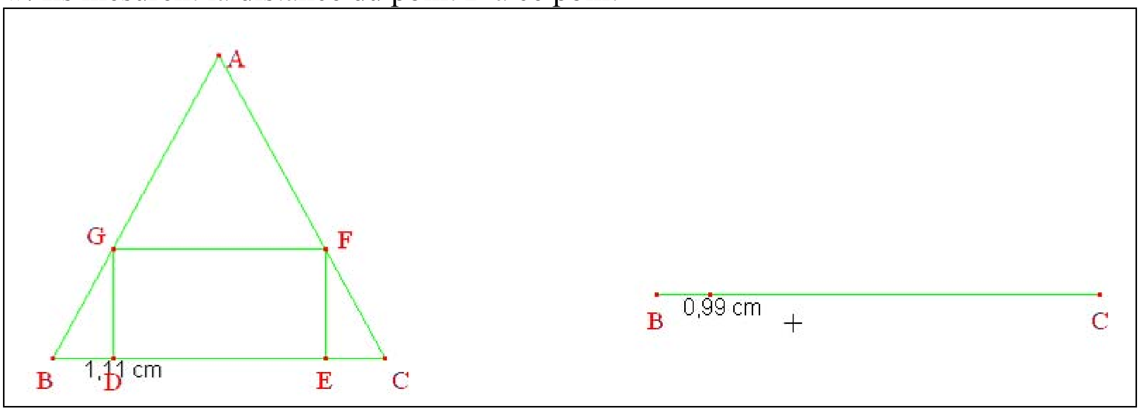


Figure 126. *BD=1,11cm ; la distance entre B et le point placé au jugé : 0,99cm*

Comme la distance n'est pas la même, ils effacent le point et ils recommencent. Mais ils décident de laisser les points pour savoir s'ils ont besoin d'avoir une mesure plus grande ou plus petite. Le premier repère est un point à 1,02cm, puis ils arrivent à placer un point 1,10cm, alors ils effacent le premier et laissent le deuxième comme repère, et ils arrivent à placer un point à 1,12cm.

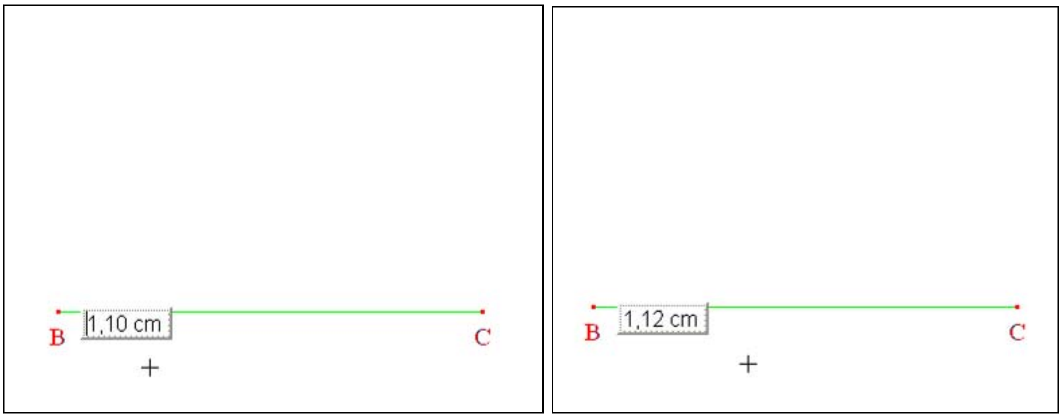


Figure 127.*Ils arrivent à placer un point à 1,10cm et un autre à 1,12cm*

Ils laissent alors le deuxième point et continuent. Ils mesurent EC dans le modèle (1,11cm) et vont utiliser la même stratégie pour essayer d'obtenir un point sur le segment [BC] donné à la même distance.

Par erreur, Chloé déplace ce nouveau point, qu'elle appelle e.

Chloé : Ah non ! C'est pas… c'est pas bon…

Elle déplace aussi le point qu'elle avait construit et qu'elle appelle d. Puis elle décide d'aller déplacer dans le modèle le point E et elle utilise le schème « déplacer pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement » : la longueur EC varie au cours du mouvement.

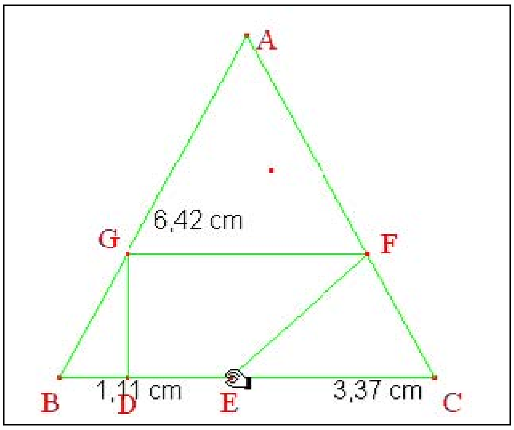


Figure 128. *Chloé déplace le point E dans le modèle : la longueur EC peut varier*

Mais Chloé remet le point E de manière à obtenir 1,11cm comme au début. Puis elle attrape et elle déplace un peu le point d sur le segment [BC] et elle réalise à ce moment qu'elle peut ajuster l'emplacement du point :

Chloé : Ah ! je sais ! regarde j'ai une bonne idée !

Elle mesure la distance de d à B, elle obtient 1,31cm et elle attrape le point :

Chloé : (en mesurant la distance) De ça à ça… ok ! Et on va faire… ça ! (en déplaçant le point d et montrant à Alex qu'on peut faire varier la mesure)

Alex : Ah ouais ! T'es maline !

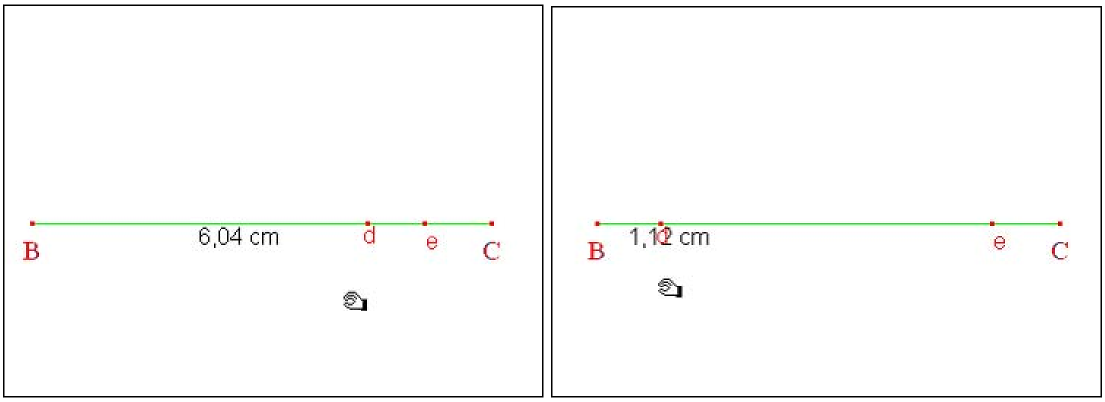


Figure 129. *Chloé déplace le point d pour faire varier la longueur Bd et pouvoir ainsi obtenir 1,11cm*

Ils construisent alors le schème « ajustement instrumenté par la mesure ».

Ce schème demande donc d'abord la construction d'un invariant opératoire qui dépend d'une première appropriation du déplacement et qu'on pourrait formuler ainsi : « En géométrie dynamique, les objets peuvent être déplacés pour faire varier une mesure ».

Chloé et Alex ont basé leur stratégie de résolution dans « Construire le symétrique » et dans « Rectangles à compléter » en utilisant ce schème.

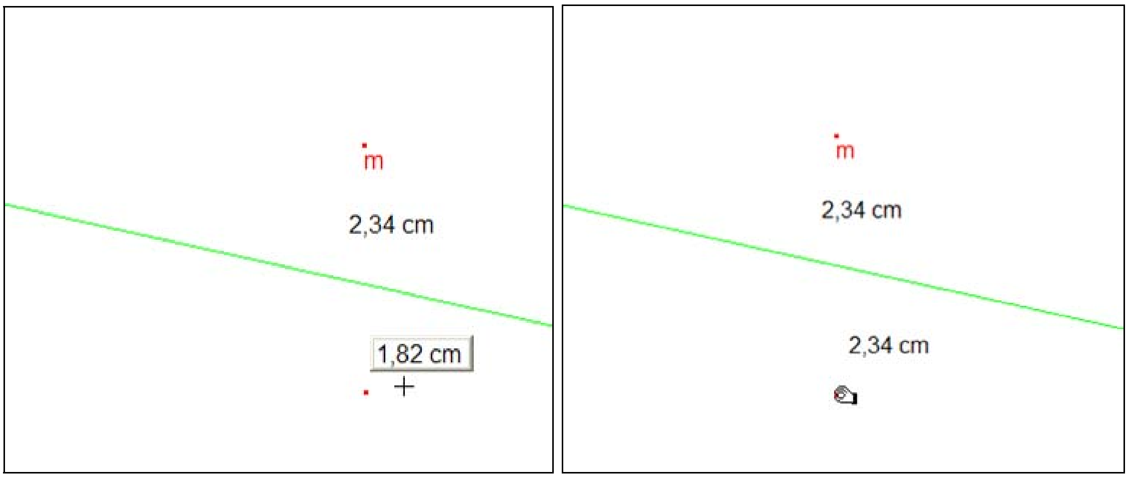


Figure 130. *Dans « Construire le symétrique », Chloé et Alex utilisent le schème « ajustement instrumenté par la mesure » pour construire le symétrique*

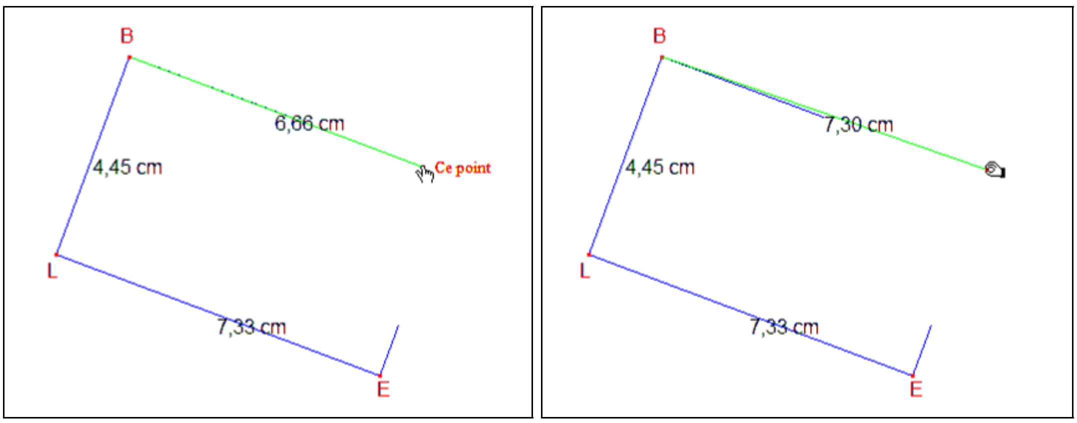


Figure 131. *Dans « Rectangles à compléter», Chloé et Alex utilisent le schème « ajustement instrumenté par la mesure » pour construire des segments de même mesure*

I.4 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété »

Dans la situation « Toujours/parfois vrai », nous avons pu observer une évolution dans la genèse instrumentale du déplacement chez Chloé, alors que pour Alex l'utilisation du déplacement pour décider de la validité des propriétés géométriques qui caractérisent la figure n'est pas évidente.

Au début, Chloé et Alex ne lisent pas bien la consigne et au lieu de voir si (DG) et (BC) sont perpendiculaires, ils essayent de voir si (AG) et (GF) sont perpendiculaires ; ils utilisent le schème « ajustement pour satisfaire une condition » pour voir si c'est possible de trouver une position dans laquelle les deux droites forment un angle droit. Ils déplacent le point D et le point A, mais ils n'arrivent pas à trouver une position pour satisfaire la condition.

Chloé : On peut pas en faire un

L'enseignant intervient et leur explique qu'il faut observer l'angle formé par (DG) et (BC). Ils cherchent alors à décider de la validité de la propriété « (DG) et (EF) parallèles » :

Alex : (DG) et (EF)... (DG) et (EF)...
Chloé : **ça ça forme un angle droit ?**
Alex : (DG) et (EF)
Chloé : **Elles sont parallèles ou pas ? Moi je crois pas... sont-elles parallèles ?**
L'enseignant : Bon... et ces deux là, (DG) et (EF)...
Chloé : **Non moi je dirais non...**
Alex : (DG) et (EF) c'est ça...
L'enseignant : Alors (DG), c'est une seule droite (en la montrant avec la souris) (EF) c'est laquelle ? Montre... Voilà! Est-ce qu'elles sont parallèles ?
Alex : **Ben non!**
Chloé : Ben là tu vois, **c'est pas tout à fait droit, tu vois ?**
Alex : **Non parce que t'as déplacé la figure...**
Chloé : **Attends je recommence**

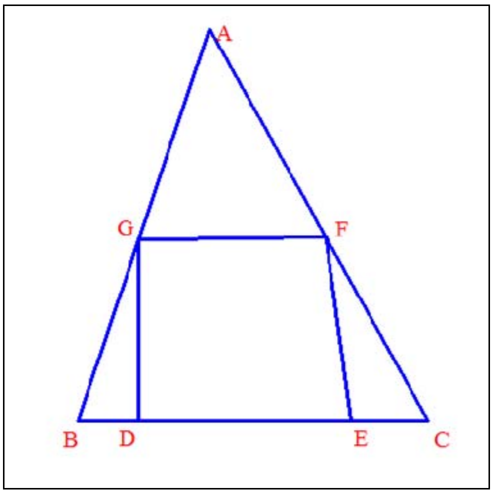


Figure 132. *« C'est pas tout à fait droit, tu vois ? »*

« C'est pas tout à fait droit » peut ici faire référence au fait que le segment [EF], puisque le point F a été déplacé, n'est plus vertical comme avant, alors que [GD] oui.

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?		Il n'y a pas besoin de déplace des point.
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	~~[illegible]~~ non	X le point Fe

Figure 133. (EF) n'étant pas « tout à fait droit », les droites (DG) et (EF) ne sont pas parallèles

Chloé arrive à invalider la non conservation du parallélisme, alors qu'Alex n'a pas encore construit le principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs au cours du déplacement, alors son argument est que la droite « n'est pas droite » parce Chloé l'a déplacée. Alors ils décident de fermer le fichier et de recommencer avec la figure initiale.

Dans la figure verte, ils ne déplacent pas pour vérifier la validité des propriétés :

Chloé : La figure verte... (DG) et (BC) elles sont parallèles ? (DG) et (BC)...
Alex la corrige
Chloé : Ouais perpendiculaires pardon... Comment on peut savoir s'il y a un angle droit ?
Alex : **Ben regarde! C'est logique!**
Chloé : Ouais

Ils ne déplacent pas et ils répondent « oui » à (DG) et (BC) perpendiculaires (le non a dû être ajouté ensuite) et « oui » à (DG) et (EF) parallèles.

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui non	Le point D
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	oui	Le point G

Figure 134. Ils répondent « oui » à (DG) et (EF) parallèles et « oui » à (DG) et (BC) perpendiculaires

Ils continuent aussitôt avec la figure rose (3) et Chloé propose alors de déplacer pour pouvoir valider la construction :

Chloé : Bon la figure rose... Oh mais normalement si elles sont parallèles, on peut pas bouger les points!

On voit donc que Chloé essaye de vérifier la validité des propriétés géométriques et qu'elle a construit un théorème-en-acte :

« Si deux droites sont parallèles, alors on ne peut pas bouger les points »

Elle essaye de déplacer F et G, mais ils sont des points d'intersection non attrapables ; elle attrape et elle déplace D sur le segment [BC] :

Chloé : Alors que là (les segments [DG] et [EF] disparaissent) ils peuvent plus être parallèles. Ah si... **Là eux ils sont toujours parallèles en tout cas.** Après...
Alex : Alors c'est le point F... ben c'est le point D... ben c'est D et après c'est G
Chloé : **Ben ouais de toute façon dans tous les cas ça fera tout le temps un angle droit.**

Elle continue à déplacer le point D et elle insiste sur la conservation de la propriété :

Chloé : Regarde, **dans tous les cas**, de toute façon ça fera **toujours** un angle droit, regarde!

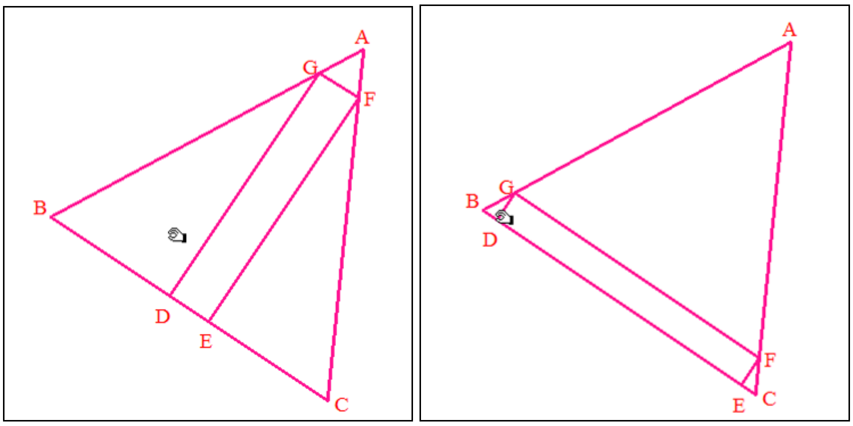


***Figure 135.** Chloé déplace le point D pour décider si (DG) et (EF) sont parallèles et si (DG) et (BC) sont perpendiculaires dans la figure rose (3)*

Chloé valide donc la perpendicularité de (DG) et (BC) et le parallélisme de (EF) et (DG).

Son utilisation de « toujours » et « dans tous les cas » montre que Chloé commence à construire le principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique: elles doivent être vraies « tout le temps », « dans tous les cas », « toujours ».

L’enseignant organise une phase collective sous forme de débat, dans lequel le but est d’arriver à « en géométrie dynamique, une propriété géométrique est vraie si elle se conserve au cours du déplacement » et le contre-exemple : « si une seule fois la propriété n’est pas vérifiée, alors on dit qu’elle est fausse ».

L’enseignant reprend les éléments de ce débat et leur demande d’écrire dans le cahier :

« En mathématiques, pour qu'une propriété soit vraie il faut qu'elle le soit **toujours**, **dans tous les cas**. Si une seule fois, la propriété n'est pas vérifiée, alors on dit qu'elle est fausse. »

L'enseignant leur demande de reprendre la fiche et les figures sur lesquelles ils avaient commencé à travailler pour vérifier leurs réponses.

L'enseignant : Pour vérifier bien que vous avez essayé que ça marchait TOUT LE TEMPS. Comment on peut essayer que ça marche tout le temps, dans les figure qu'on a ? Qu'est-ce qu'on va essayer de faire ?
Un élève : On bouge les points
L'enseignant : On va bouger ?
L'élève : Les points
L'enseignant : On va bouger ?
L'élève : **TOUS les points!**
L'enseignant : **TOUS les points!**

Elle leur demande aussi d’écrire dans la ligne grisée de la fiche : « Est-ce que les droites (GF) et (BC) sont parallèles ? ».

Après la phase collective, Alex et Chloé reviennent sur la figure rose. Ils déplacent les points D, puis ils essayent de déplacer le point F, le point E, le point B, puis ils attrapent et ils déplacent le point A. On voit donc l’importance et l’influence de la phase collective et de la dernière interaction entre l’élève et l’enseignant.

Chloé continue à déplacer le point A afin de pouvoir décider de la validité du parallélisme entre (GF) et (BC).

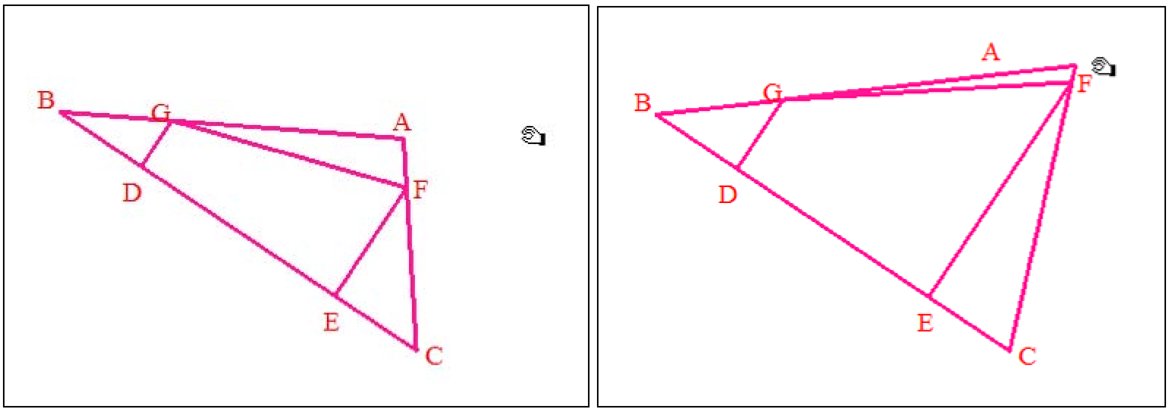


Figure 136. *Chloé déplace le point A dans la figure rose (3) pour décider de la validité de la propriété « (GF) et (BC) parallèles »*

Chloé remet le point A pour que la figure soit à peu près comme au début mais elle conclut sur la propriété observée :

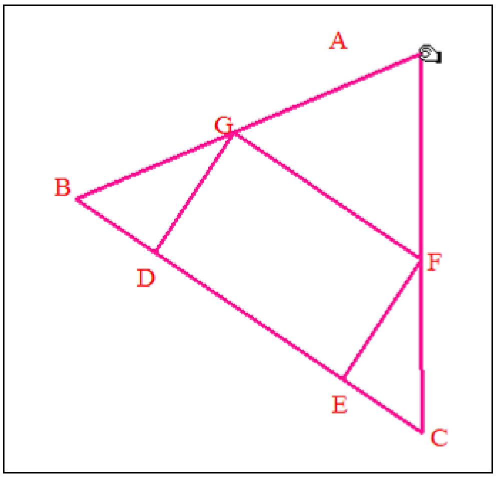


Figure 137. *Chloé remet la figure comme au début*

Chloé : **Il est pas parallèle, parce que si on le bouge**...

On voit donc que Chloé fait ici une inférence à propos des droites (GF) et (BC) : « elles ne sont pas parallèles parce que si on déplace, on peut trouver une position dans laquelle elles ne le seront plus».

Chloé passe la souris à Alex pour qu'il manipule :

Chloé : Tiens toi, tiens la souris
Alex : Tu voulais en faire quoi ?
Chloé : Ben ch'ais pas, t'essaye....
Alex : Tu veux que j'essaye quoi ?
Chloé : Tu, tu dis si t'arrives à... **si par exemple (DG) et (BC) sont parallèles ou sont perpendiculaires...**
Alex : (BC)
Chloé : Non! Oui, **(BC) et (DG) sont perpendiculaires et si (DG) et (EF) sont parallèles**
Alex : Ah oui! Puisque... **(BC) et (DG) ben il y a un angle, un angle droit**
Chloé : Oui **mais si tu le bouges ?**

Chloé a donc bien compris que pour être sûr de la validité d'une propriété géométrique, il faut qu'elle se conserve au cours du déplacement, elle s'est approprié le principe-en-acte introduit lors de la phase collective.

Pendant plusieurs minutes, Alex utilise le déplacement non finalisé mathématiquement sans prêter attention aux variations ou aux invariants de la figure.

Chloé lui demande alors s'il a observé si les droites (DG) et (BC) sont perpendiculaires, mais Alex ne peut pas lui donner de réponse. Alex essaye de déplacer le segment [DG] mais il n'y arrive pas. Alex déplace alors le point D sur le segment [BC] très vite, mais Chloé lui demande d’aller plus lentement pour pouvoir observer la figure et pouvoir décider de la validité de la perpendicularité :

> Chloé : Attends **c'est toujours perpendiculaire ou pas** ? **Attends fais doucement, doucement**! (Alex commence à déplacer plus lentement le point D) C'est perpend, **c'est toujours un angle droit** ?
>
> Alex : Ben oui! **Toujours un angle droit**.

Ils concluent alors que les droites (BC) et (DG) sont perpendiculaires.

La validation de cette propriété est faite perceptivement, sans utiliser les outils du logiciel, c’est l’utilisation du cinéma-déplacement qui leur permet de voir la conservation de la perpendicularité.

Figure Rose	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	de D
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		

Figure 138. *(DG) et (BC) sont parallèles « toujours »*

Dans « Toujours/parfois vrai », on voit donc se former un écart entre Chloé et Alex.

Chloé comprend qu’il faut utiliser le déplacement pour décider de la validité des propriétés géométriques en question et commence à s’approprier le schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété ». Elle demande explicitement à Alex de déplacer lentement (cinéma-déplacement) pour observer si une propriété se conserve ou non pendant tout le cours du déplacement. On voit donc une évolution dans la genèse instrumentale du déplacement chez Chloé.

Alex, au contraire, ne s’est pas approprié pas le principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs en géométrie dynamique. Il veut décider uniquement à partir du dessin initial si les droites sont parallèles ou perpendiculaires et lorsqu’il déplace, il n’attribue aucune signification au déplacement, mais utilise le déplacement non finalisé mathématiquement.

I.5 Schème d’action instrumentée « déplacer pour valider une construction »

Le schème « Déplacer pour valider une construction » n’a pas été complètement acquis par Alex et Chloé. Il n’est pas apparu spontanément dans la situation « Pajérond » et a été peu utilisé, voire absent des situations suivantes faisant partie de l’ingénierie didactique.

Dans « Pajérond », la validation de la construction passe par le déplacement d’un seul point. Cela nous a permis d’introduire d’abord le schème « déplacer un point pour tester une construction ».

Dans le cas d’Alex et Chloé, l’enseignant a dû introduire l’utilisation de ce schème pour valider leur construction :

Alex et Chloé lèvent la main et demandent à l'enseignant de venir voir leur construction.

> L’enseignant : Bon, dit, une voiture, c'est censé ?
>
> Alex : Rouler ?
>
> L’enseignant : Tu l'as fait rouler ?
>
> Alex : Hein ?
>
> L’enseignant : Ben vas-y!

Alex attrape le point « Attache » et le déplace en faisant rouler la voiture. La voiture avance et la roue reste immobile.

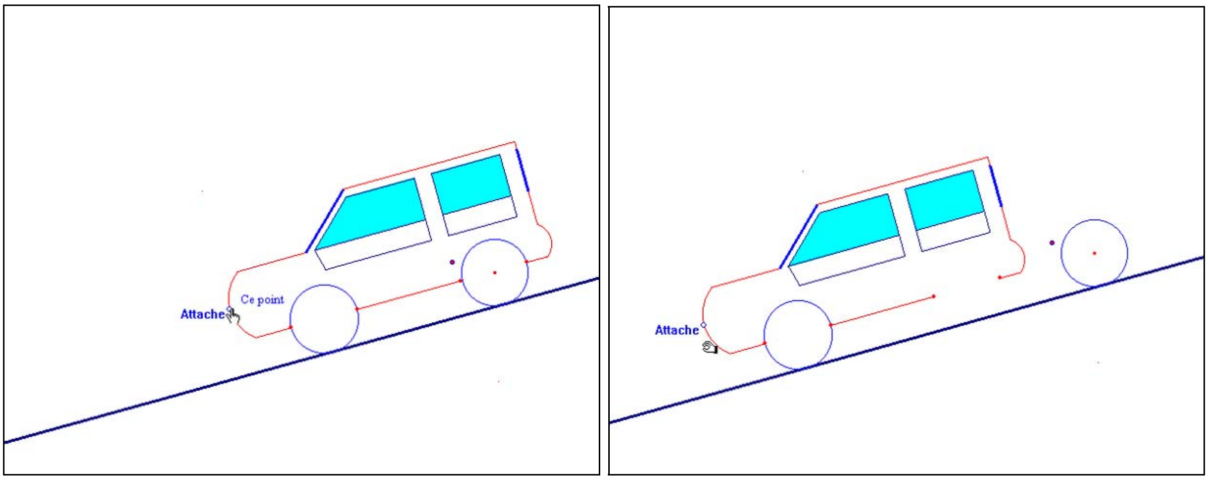


Figure 139. *Lorsqu'ils déplacent, la roue ne reste pas attachée à la voiture*

Chloé rigole.

Enseignant : Voilà! Le problème technique! Alors, quand on a un problème technique on essaye de le résoudre, on est d'accord ? Donc on va fermer ici, on va rouvrir Pajérond puis essayer de recommencer.

Alex : Pour faire ?

Enseignant : Pour m'avoir une roue qui tient, hein quand même. Parce que sinon c'est un peu gênant.

L'invalidation est donc possible ici grâce au contexte : Alex et Chloé comprennent bien que leur construction n'est pas correcte. Cependant, ils ne remettent pas en cause leur stratégie mais continuent à utiliser la même : ils utilisent le schème d'usage de « tracé au jugé » en essayant que le centre soit bien au milieu et que le cercle ait la bonne taille, en invalidant leurs constructions visuellement par la taille et l'emplacement du cercle et non pas par le déplacement.

Ni Alex ni Chloé n'ont cherché à valider leur construction par le déplacement dans la situation « Sur quel objet ? ».

Alex, après avoir identifié une trajectoire rectiligne, construit les segments [AD] et [DB], utilisant la stratégie « avec les points bleus », mais dans son message il ne décrit que le « "segment" [DB] ». Il construit aussi le segment [CF], utilisant à nouveau la stratégie « avec les points bleus », et il décrit dans son message « un autre (segment) cur (sur) [CF] ». Nous pensons que l'utilisation de « sur [CF] », au contraire du « "segment" [DB] », indique l'identification d'une trajectoire rectiligne qui passe par les points C et F, mais qui ne se limite pas au segment [CF].

Mais une fois la construction est terminée, Alex ne remet pas en cause sa construction et ne déplace les points mobiles ni les points bleus pour valider sa construction et vérifier que la trajectoire décrite est celle construite.

Chloé ne construit pas d'objet géométrique représentant la droite. Elle a beaucoup de difficulté à identifier la trajectoire des points et à la caractériser, elle essaye alors de s'appuyer sur l'utilisation de la mesure pour donner une position statique des points mobiles en fonction des points bleus (elle mesure la distance du point rouge et du point vert au point E). Mais l'observateur utilise le déplacement pour lui montrer que la mesure peut varier et ainsi invalider sa stratégie. Elle écrit finalement un message à Alex en lui demandant de placer « un point vert entre le point "E" et le point "F" ; place un point rouge au dessu(s) du point "A" ». Alex fait un tracé de points au jugé, mais ils ne déplacent pas pour valider la construction.

Dans la situation « Construire le symétrique », Chloé et Alex utilisent la stratégie de base qui consiste à utiliser d'abord le schème d'usage de « tracé au jugé » pour placer un point où devrait se trouver le symétrique, puis ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure ». L'invalidation de cette stratégie est faite par l'observateur avant qu'ils n'aient le temps de déplacer pour essayer de la valider.

Dans « Rectangles à compléter », Alex et Chloé utilisent beaucoup le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » et n'utilisent pas vraiment le schème « déplacer pour valider une construction ».

Alex et Chloé commencent par travailler sur le rectangle bleu (1) dans lequel ils doivent compléter un angle manquant. Ils tracent d'abord un segment utilisant le « schème du crayon », partant de B et suivant la même direction que le segment [Bx] pour aller jusqu'au quatrième sommet. Puis ils mesurent la longueur de ce segment et ils utilisent schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » et obtenir à peu près la même longueur que [LE].

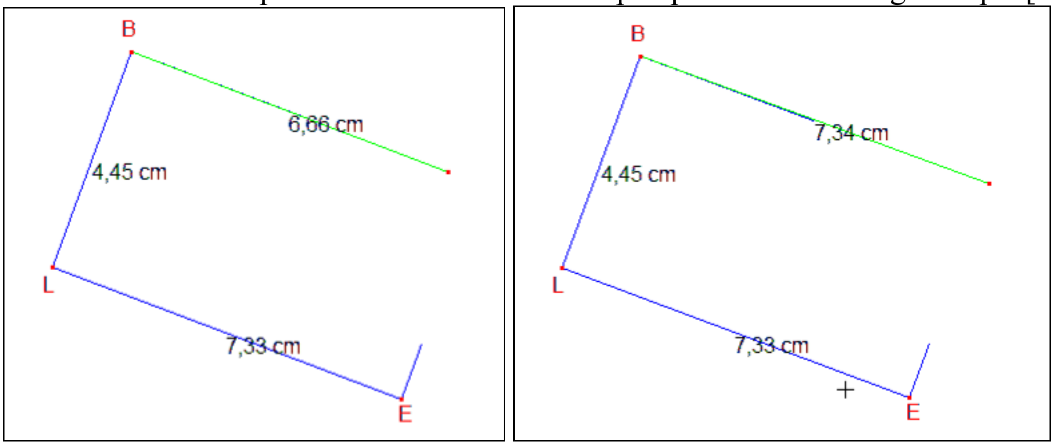


Figure 140. *Ils utilisent le schème « ajustement instrumenté par la mesure » pour obtenir la même longueur que [EL]*

Puis, ils tracent le segment qui relie E à l'extrémité du segment tracé et ils mesurent la longueur de ce segment : 4,50 cm, alors que [BL] fait 4,45 cm.

Chloé : 4,50... Oula! Attends on va essayer de le...

Ils utilisent à nouveau le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure », ils déplacent le quatrième sommet construit pour ajuster la mesure des deux segments tracés, mais lorsqu'ils le déplacent, la figure ne reste pas un rectangle.

Chloé : Qu'est-ce que j'ai fait!

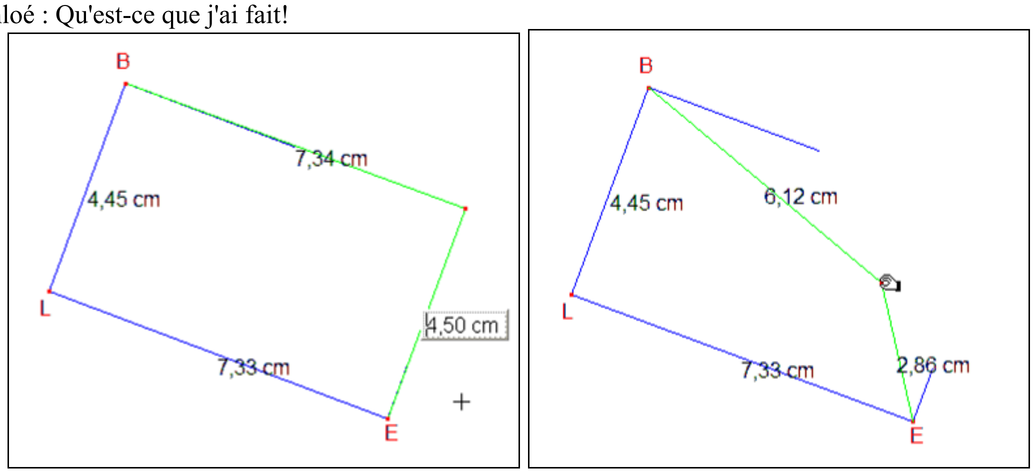


Figure 141. *Ils utilisent le schème « ajustement instrumenté par la mesure » dans la figure bleue (1), qui devrait permettre aussi l'invalidation de la construction faite*

Elle ne cherche donc pas à utiliser le déplacement pour valider sa construction, mais à ajuster la figure pour obtenir des mesures égales. Ils n'invalident pas leur construction, bien que Chloé dise « Qu'est-ce que j'ai fait ? ».

Alex et Chloé vont utiliser cette même stratégie jusqu'à ce que l'enseignant intervienne :

Chloé : Madame! On n'y arrive pas! On n'arrive pas trop en fait **à accrocher!** En fait à savoir... **quelles sont les choses à accrocher**...
L'enseignant : Alors... là ce que vous voulez c'est l'agrandir!
Chloé : Oui!
L'enseignant : Bon! Quand on agrandit**, c'est pas seulement un segment qu'on trace, c'est quoi ce qu'on trace si on agrandit autant qu'on veut** ?
Chloé : Ben c'est une droite!
L'enseignant : Une droite! On peut agrandir des deux côtés! Et gommer après ce qui dépasse. Bon! Si tu veux construire une droite, tu as déjà choisi l'outil. Ensuite, ta droite si tu l'accroches par dessus, tu vas l'accrocher **à deux endroits**, tu vas l'accrocher là (Chloé a la souris sur le point E, alors elle clique dessus, puis elle commence à suivre la direction du segment [Ey]). Et tu vas l'accrocher où aussi ? (Chloé suit la direction de [Ey]) **Mais là c'est du vide là!** (Chloé change la direction de la droite et elle se dirige vers (EL)). Tu vas l'accrocher à quel...

L'enseignant utilise donc la notion de « agrandir » pour les faire passer de la construction de segment à droite, et essaye de les guider dans la construction en passant par un point appartenant aux côtés incomplets. On voit aussi apparaître l'obstacle de l'hétérogénéité du plan lorsque l'enseignante parle « du vide là », puisque c'est par « là », dans « le vide », par où devrait passer la droite.

L'enseignant : Comment tu sais que t'es **bien droit** ? Quand ta droite verte elle vient où ?
Alex : Quand elle vient **sur le... bleu**
L'enseignant : Vient sur le bout bleu! Et bien accroche la moi au bout bleu!

Alex a compris qu'il faut que la droite suive la direction du côté bleu, mais Chloé a du mal à savoir quel est le « bout bleu » sur lequel il faut cliquer.

L'enseignant : Ecoute Alex aussi ! Il dit de l'accrocher à quel bout bleu ?
Alex : Lui là!
L'enseignant : Lui là! Eh ben vas me l'accrocher à lui là!

Elle met la souris sur [Ey] et elle clique dessus.

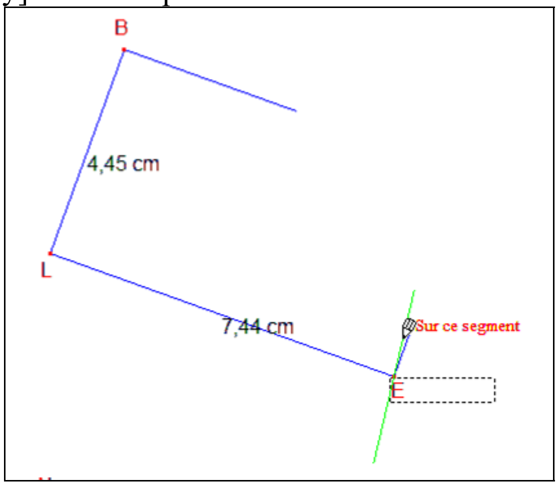


Figure 142. *Construction de la droite passant par E et par un point qui appartient à [Ey]*

Chloé : Sur ce segment
L'enseignant : Tu veux l'accrocher là ? Eh ben voilà!
Chloé : Ah bravo! Et maintenant tu peux... On va voir...

Ils tracent la droite passant par B et par un point appartenant à [Bx].

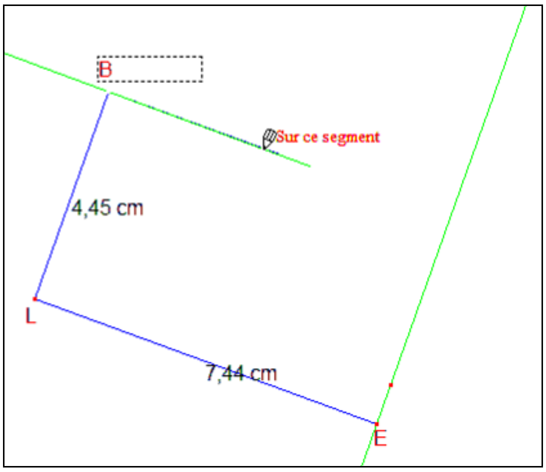


Figure 143. *Construction de la droite passant par B et par un point appartenant à [Bx]*

Chloé : **C'est bon! Maintenant tu prends les mesures ?**

Ils placent un point à l'intersection. Ils mesurent et ils obtiennent des segments de même mesure, ce qui les satisfait. La validation vient donc de l'égalité des longueurs des segments. Comme c'est une des propriétés géométriques du rectangle (non suffisante certes à elle seule mais avec la propriété reconnaissable visuellement que l'angle EBL est droit, cela suffit), ils ne sont pas incités à utiliser le déplacement pour valider leur construction. Loïc, un excellent élève, utilisera la même stratégie de validation dans cette même situation, en mesurant les angles de chaque figure.

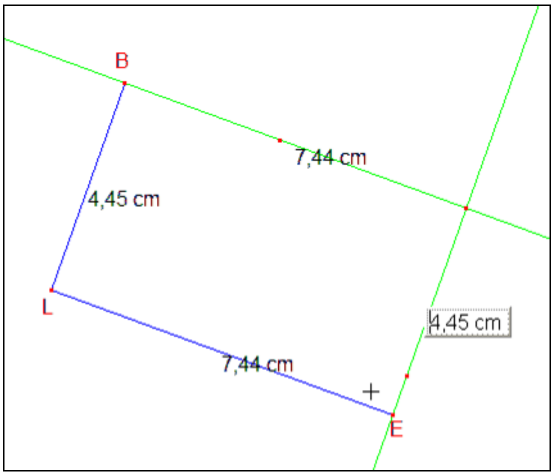


Figure 144. *La mesure valide leur construction*

Dans la figure rose (2), Alex et Chloé utilise le schème d'usage du « tracé au jugé » pour tracer une droite passant par S de manière à ce qu'elle soit verticale et lisse.

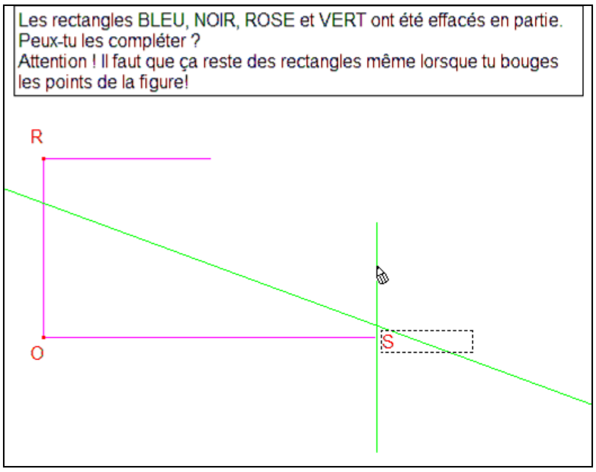


Figure 145. *Utilisation du schème d'usage du « tracé au jugé » pour obtenir une verticale « lisse »*

Puis ils tracent la droite correctement passant par R, en cliquant sur le côté incomplet [Rx].

Chloé : Et voilà!

Ils mettent un point à l'intersection des deux droites et mesurent les segments pour valider leur construction. Comme la mesure des côtés leur convient, ils ne ressentent pas le besoin de déplacer pour ajuster ou pour valider leur construction, la mesure leur suffit pour décider. Le schème « déplacer pour valider » n'est encore complètement acquis.

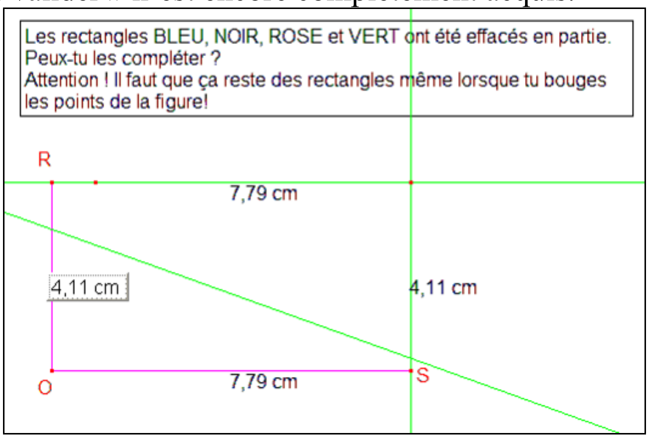


Figure 146. *La mesure des côtés du rectangle rose leur permet de valider leur construction*

Pour le rectangle noir, ils utilisent la même stratégie en s'appuyant sur le tracé de droites horizontales et verticales et valident par la mesure et non par le déplacement de la figure.

Chloé : Voilà! Maintenant on va prendre les mesures!

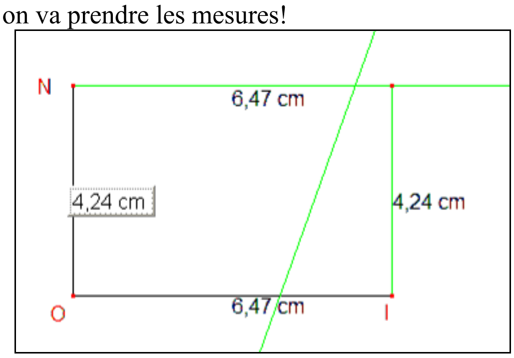


Figure 147. *La mesure leur permet de valider leur construction*

Finalement, dans le figure verte, par le schème d'usage du « tracé au jugé », ils tracent des demi-droites partant de V, [Vx], et de E, [Ey], « à peu près » perpendiculaires à [VE].

Ils tracent un segment « au jugé » partant d'un point qui appartient à [Vx) et qui va jusqu'à un point appartenant à [Ey] de manière à ce que ça fasse un « rectangle », mais qui ressemble plutôt à un parallélogramme.

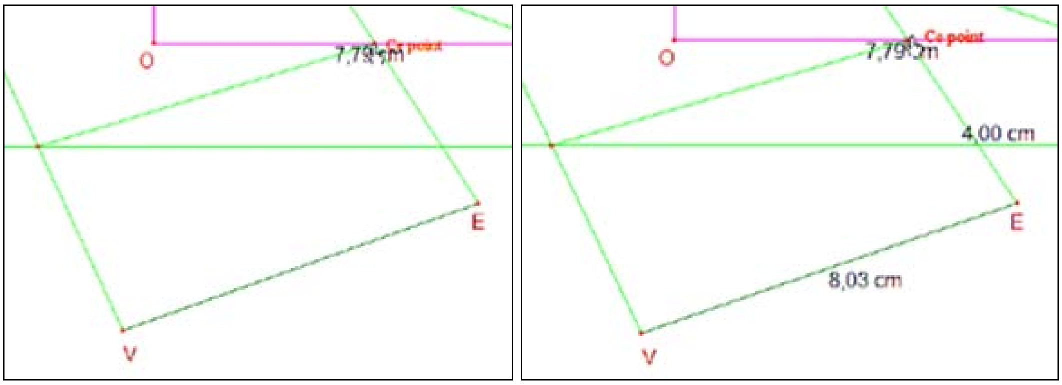


Figure 148. *Construction du « rectangle » vert et mesure des côtés pour le valider*

Ils mesurent les côtés pour valider leur construction, mais ils ne mesurent que deux côtés (8, 03 cm et 4,00 cm).

L'enseignant vient alors et les incite à utiliser le déplacement pour valider leurs constructions :

Chloé : Alors, qu'est-ce qu'on fait ?
L'enseignant : Ben déjà on va vérifier que vous avez des rectangles de partout!

Ils attrapent le point V et ils le déplacent et le quadrilatère vert se déforme en donnant à voir que ce n'est pas un rectangle.

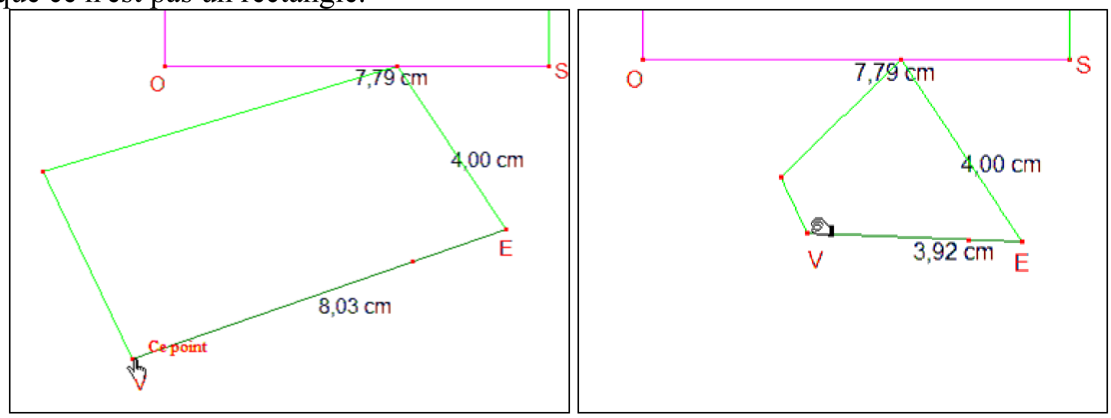


Figure 149. *L'enseignant leur demande de déplacer pour valider leur construction*

Chloé : Bon ben là **c'est pas sûr** par contre!
L'enseignant : C'est pas un magnifique rectangle, c'est à dire qu'il faudrait qu'on lui rajoute des choses pour que ce soit un rectangle celui-là! Parce que là quand même il se déforme peut-être un petit peu trop! Alors essayez de me corriger celui-là et contrôlez les autres avant que j'arrive!
Chloé : D'accord!
L'enseignant : Pensez à ce qu'il perd, à ce qui va pas!

Ils invalident leur construction, mais ils ne remettent pas en cause leur stratégie et utilisent à nouveau le schème d'usage du « tracé au jugé ».

Chloé : Ah! Mais ça c'est un carré! ça c'est pas un rectangle!

Ils contrôlent alors les mesures des côtés du quadrilatère construit et n'utilisent pas le déplacement pour valider : 5,98 cm ; 4,42 cm ; 6,04 cm ; 4,61 cm. Même si les mesures devraient leur permettre de décider, ils ne font pas de remarques.

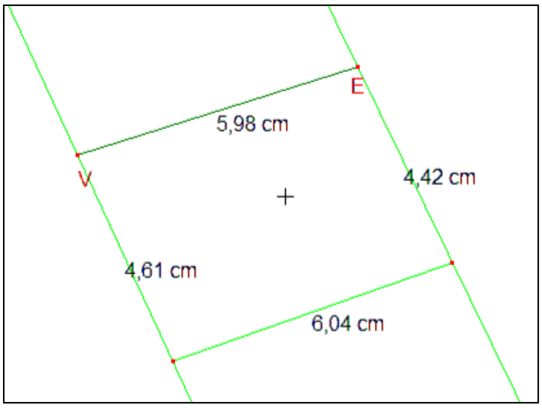


Figure 150. *Ils mesurent pour décider de la validité de leur construction et ne déplacent pas*

On voit donc que pour Chloé et Alex la mesure est un moyen de validation très fort. Leurs stratégies et l'orientation des rectangles rose et noir, ne les incitent pas à utiliser le schème « déplacer pour valider une construction » et ils préfèrent passer par la mesure des côtés.

L'utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » est loin de se faire de manière spontanée chez Alex et Chloé, alors que, comme nous le verrons chez d'autres binômes, bien qu'ils aient du mal à remettre en cause leur stratégie, ils déplacent constamment pour vérifier la validité de leur construction.

La situation « Pajérond », par le contexte évoqué, permet la compréhension de l'invalidation de leur construction au jugé par le déplacement. Chloé a su recourir au déplacement dans la situation « Parfois vrai/Toujours vrai » qui ne demandait que de juger de la validité d'une propriété donnée, alors que la situation « Rectangles à compléter » est une tâche de construction beaucoup plus complexe. La signification même de ce qu'est une tâche de construction réalisée correctement n'est peut-être pas encore acquise pour eux.

I.6 Genèse instrumentale d'Alex et Chloé

Alex et Chloé étaient des élèves assez moyens (moyen -) qui ont eu beaucoup de difficulté à s'approprier le déplacement et à construire même le schème d'usage de « déplacement d'un objet ».

Ils n'ont commencé par l'utiliser spontanément que pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, en déplaçant seulement les formes globales, et n'ont pu utiliser ce schème pour déplacer aussi les points que lorsqu'ils ont été conscients de la présence des points de la figure.

Comme nous avons pu le voir, l'identification de l'objet-trajectoire a posé beaucoup de problèmes à Chloé, bien qu'elle ait pu identifier une trajectoire rectiligne. Elle a préféré caractériser la position statique des points, d'abord, en utilisant la mesure, puis finalement, en donnant une description spatio-graphique dans son message, alors qu'Alex réussit à identifier la trajectoire rectiligne, en utilisant le schème de « vérification que la trajectoire passe par deux points », bien qu'il ne caractérise pas correctement la droite.

Grâce à la situation « Le même triangle », nous avons pu observer la construction du schème « ajustement instrumenté par la mesure » chez Alex et Chloé. Comme nous avons pu le voir, Chloé a d'abord utilisé le schème « déplacer pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement », ce qui lui a permis d'identifier les variations de la mesure de la longueur EC. Lorsqu'elle a fait ce pas, elle a pu construire le schème « d'ajustement par la mesure ». Comme nous l'avons dit, il a été utilisé par la suite dans les situations « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter ».

Faire un bilan de l'utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » chez Alex et Chloé est une tâche complexe. De manière générale et en nous basant sur les deux dernières tâches de construction, nous pourrions dire que ce schème n'est pas vraiment construit par Alex et Chloé. Pour eux, la mesure dans le dessin statique a un rôle si important, qu'elle leur suffit pour décider de la validité d'une construction.

Comme nous l'avons vu dans « Toujours/parfois vrai », Chloé a utilisé le schème « déplacer pour valider une conjecture/propriétés » pour décider de la validité des propriétés géométriques de la figure et a pu valider celles qui étaient vraies et invalider celles qui étaient fausses. Alors que Alex, demande à Chloé de fermer le fichier et recommencer pour pouvoir valider la construction dans l'état initial et sans déplacer les objets de la figure.

On peut voir ici la difficulté que représente la validation d'une construction faite par l'élève, face à la validation d'une propriété donnée dans une construction déjà faite. Dans le deuxième cas, on donne à l'élève une construction finie et des propriétés à valider par le déplacement, alors que dans le premier cas, l'élève doit d'abord chercher les propriétés à imposer à la figure, puis déplacer pour la valider.

II. CEDRIC ET IRIS

Cédric et Iris sont des élèves assez moyens (moyen -). Ils ont donc à peu près le même niveau mathématique qu'Alex et Chloé, mais comme nous le verrons, leur genèse instrumentale se passe très différemment.

Nous montrerons d'abord leur appropriation du déplacement dès la situation « Géo », dans laquelle ils ont construit plusieurs schèmes d'usage, comme le schème de « recherche des points qui bougent ».

Nous montrerons leur utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » et leur difficulté à invalider une construction erronée.

Nous montrerons ensuite leur utilisation du schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété ».

Nous finirions par montrer leur utilisation des schèmes d'ajustement, le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » et le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure », dans leurs stratégies de résolution.

II.1 Appropriation du déplacement et schèmes d'usage

L'exploration des déplacements possibles dans « Géo » faite par Cédric et Iris est très riche. Ils ont essayé de déplacer presque tous les points et les objets de la figure. Au début, ils ont commencé par chercher les points et les objets pouvant être déplacés, utilisant ainsi le schème d'usage de « recherche des points qui bougent », puis une fois qu'ils connaissaient les effets qui pouvaient être obtenus, ils ont commencé à contrôler les points déplacés.

Cédric et Iris ont d'abord essayé de déplacer les sommets du grand triangle du chapeau, puis ils ont attrapé le grand cercle du visage et ils ont translaté Géo. On voit donc qu'ils utilisent spontanément le schème d'usage de « déplacement d'un objet », pour les points, ainsi comme pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1.

En utilisant le schème d'usage de « recherche des points qui bougent », ils font tourner les yeux de Géo, ils l'agrandissent et ils essayent de déplacer les sommets du trapèze et le trapèze même de la bouche.

Ils attrapent à nouveau le grand cercle et ils translatent Géo ; puis ils attrapent le centre du grand cercle en faisant varier la taille de Géo. Ils le rétrécissent beaucoup, jusqu'à ce qu'il devienne presqu'un point ; puis ils l'agrandissent jusqu'à ce qu'on ne voit qu'une partie de Géo.

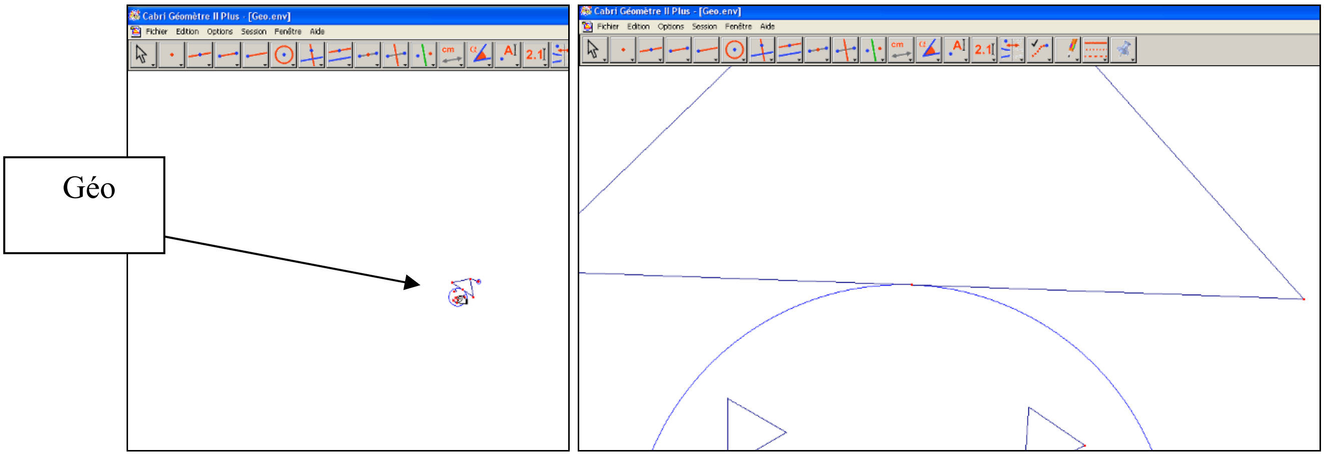


Figure 151. *Cédric et Iris agrandissent et rétrécissent Géo*

On voit donc ici qu'ils commencent d'une part, à contrôler les points qu'ils déplacer, et d'autre part, à explorer d'avantage les variations de figure, en faisant ici varier la taille et l'orientation de Géo.

Ils continuent à la « recherche des points qui bougent » :

- ils attrapent le point de tangence du grand cercle et du grand triangle et ils agrandissent et rétrécissent à nouveau Géo ;
- ils attrapent le centre du petit cercle du pompon et ils le font tourner.

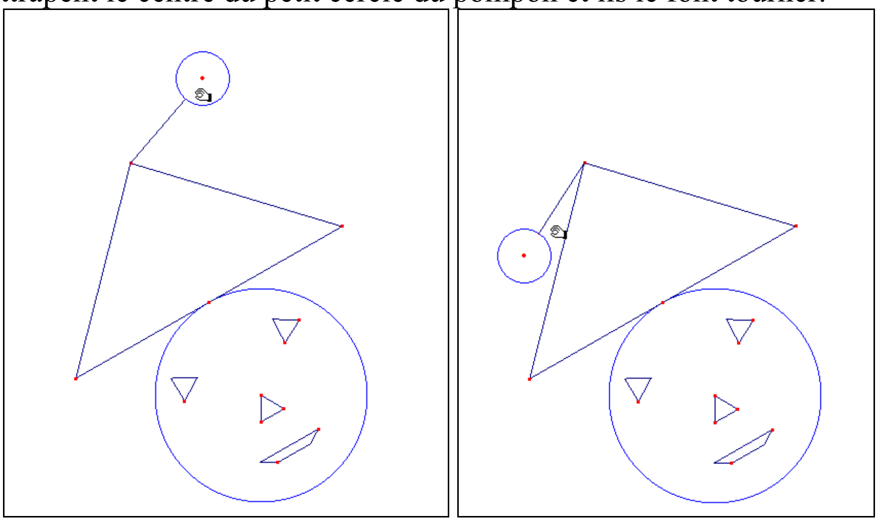


Figure 152. *Ils font faire des tours au pompon*

Ils déplacent à nouveau le centre du grand cercle, puis le point de tangence du grand cercle et du triangle, en faisant varier la taille de Géo. Pour pouvoir l'attraper, le logiciel leur propose « Cercle » ou « Triangle », alors Cédric dit à Iris :

Cédric : Mets cercle, mets cercle…

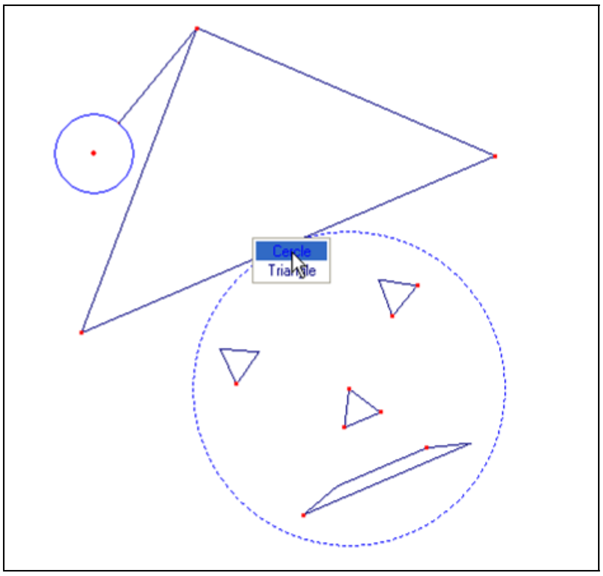


Figure 153. *« Cercle » ou « Triangle » ?*

Ils utilisent donc le schème d'usage du « traitement d'une ambigüité lorsqu'on veut déplacer un point ». Comme Cédric avait déjà attrapé et déplacé ce point, il essaye de guider Iris dans la manipulation.

Ils continuent à la « recherche des points qui bougent » :

- ils essayent d'attraper le petit cercle du pompon ;
- ils attrapent le centre de ce cercle et ils font bouger le pompon ;
- ils essayent d'attraper le trapèze ;
- ils essayent d'attraper le grand triangle et ses sommets.

On voit donc que Cédric et Iris, même s'ils déplacent des points, n'abandonnent pas le déplacement des formes globales et continuent à explorer si les objets de 2 dimensions, comme le grand cercle du visage, peuvent être déplacés comme un objet matériel.

Ils attrapent une nouvelle fois le point de tangence du cercle et du triangle et ils rétrécissent et agrandissent Géo, puis ils le font tourner.

Une dernière fois, ils essayent

- d'attraper des sommets des triangles des yeux ;
- d'attraper les triangles des yeux ;

Puis ils attrapent le sommet d'un de ces triangles, en faisant tourner les yeux de Géo.

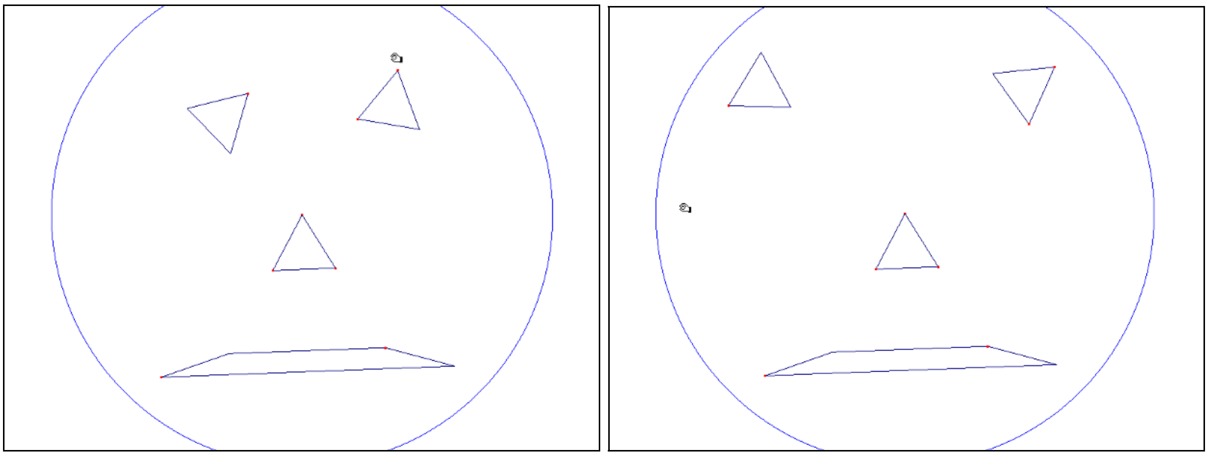


Figure 154. *Cédric et iris font tourner les yeux de Géo*

L’exploration de Cédric et Iris est très riche. Ils ont déplacé tous les points déplaçables, sauf celui qui permet de faire tourner le nez et modifier la taille et la forme du triangle du chapeau. Ils ont aussi déplacé ou essayé de déplacer toutes les formes globales (cercles, triangles, trapèze).

Ils ont donc construit les schèmes d’usage :

- de "déplacement d’un objet, pour les points comme pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1 ;
- de recherche des points qui bougent, qui dans leur cas a été utilisé comme recherche des objets qui bougent ;
- de traitement d’une ambigüité lorsqu’on veut déplacer un objet, pour pouvoir attraper le point de tangence du cercle et du triangle, et qu’ils ont su traiter.

Ils n’ont pas fait des remarques à propos des effets obtenus grâce au déplacement, mais ils ont fait très attention aux messages du logiciel et cela ce qui leur a permis de contrôler leurs déplacements.

Au début, ils ont commencé par explorer la figure et les déplacements possibles, mais une fois qu’ils ont eu plus de connaissances sur les effets graphiques produits, ils ont contrôlé ce qu’ils déplaçaient et ce qu’ils observaient. Ceci peut être interprété comme une première étape dans la construction du schème d’action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition ».

II.2 Schème d’action instrumentée « déplacer pour valider une construction »

Dans « Pajérond », le schème « déplacer pour valider une construction » n’apparaît pas immédiatement.

Cédric et Iris commencent par utiliser le schème d’usage du « tracé au jugé » pour construire le cercle, mais le centre du cercle n’étant pas très proche du milieu des deux points de la carrosserie, le cercle tracé ne convient pas. Cependant, même si statiquement le tracé pourrait être invalidé, ils ne le font pas.

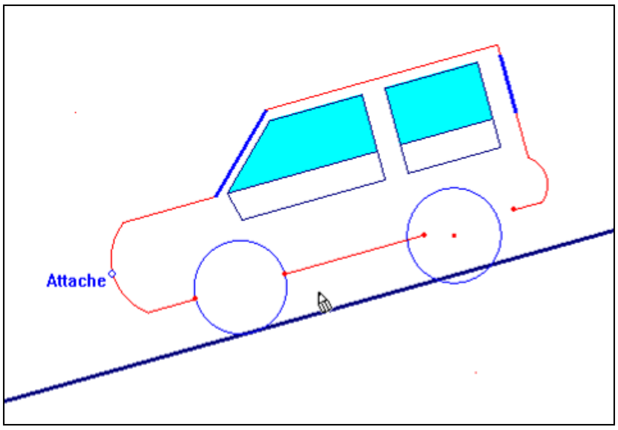


Figure 155. *Première construction du cercle par Cédric et Iris : ils ne l'invalident*

L'enseignant intervient et leur demande de recommencer. Ils recommencent à nouveau en faisant un « tracé au jugé », mais en en essayant cette fois de mettre le centre du cercle « bien au milieu ».

Iris : **Là, là tu dois la faire marcher pour voir si elle tombe pas.**

Iris demande donc à Cédric de déplacer la voiture pour voir si la roue « ne tombe pas ». Cédric attrape le point d'attache et il déplace la voiture. La voiture se déplace mais la roue reste statique.

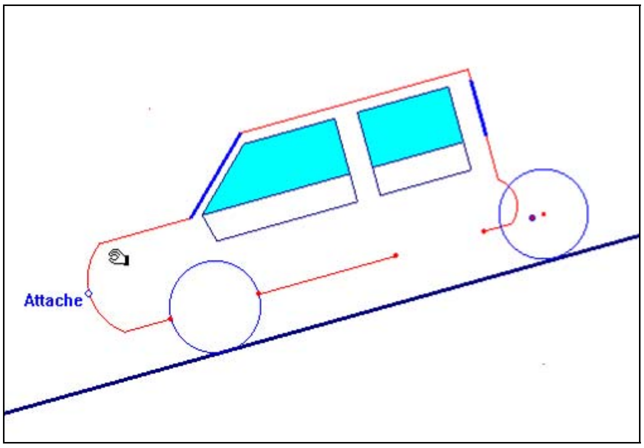


Figure 156. *« Là, là tu dois la faire marcher pour voir si elle tombe pas »*

Comme ils voient que ça ne marche pas, ils attrapent le centre de la roue et utilisent le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition ». Il apparaît spontanément très tôt dans la genèse instrumentale de Cédric et Iris, alors qu'il n'a été construit par Chloé et Alex que quelques mois plus tard.

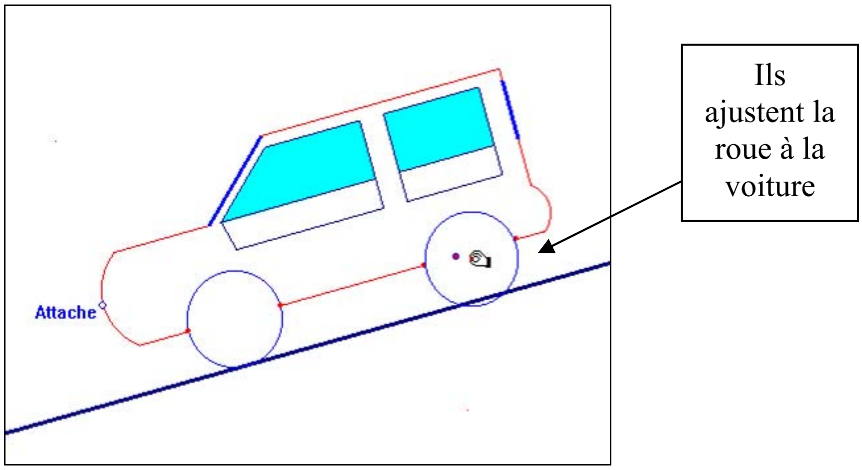


Figure 157. *Utilisation du schème « d'ajustement pour satisfaire une condition »*

Ils attrapent une nouvelle fois le point d'attache et ils déplacent utilisant le schème de « déplacement pour valider une construction ».

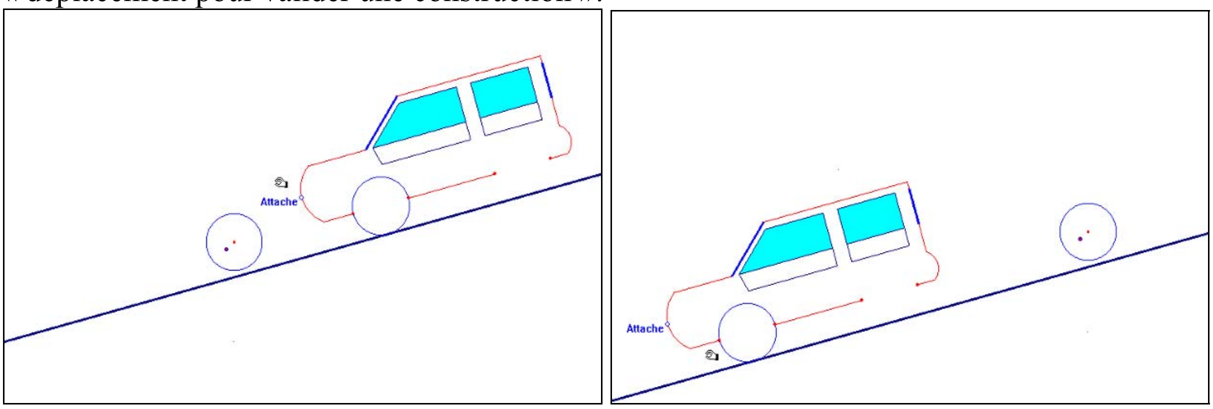


Figure 158. *Après ajuster la roue à la voiture, ils déplacent pour valider leur construction*

On voit donc déjà apparaître une utilisation spontanée du schème de « déplacement pour valider une construction ». On peut penser que le contexte de la voiture a favorisé le déplacement pour valider.

Cédric et Iris ont mis en œuvre une seule stratégie. Ils ont invalidé leur construction à plusieurs reprises, mais n'ont pas remis en cause leur stratégie de construction. Ils ont mobilisé le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition» et de « déplacement pour valider une construction ». Mais ils n'ont pas évolué dans les stratégies mobilisées.

Dans la situation « Sur quel objet ? », Cédric modifie la tâche : il commence à construire le segment [DB], mais comme il n'a pas encore construit le schème d'usage de construction d'un segment, il construit un nouveau point et modifie la tâche en ajustant le segment construit pour qu'il corresponde à la solution qu'il avait commencée à construire. Il n'a donc pas les invariants d'une tâche de construction et la distinction entre ce qui est donné et ce qui est à construire.

Il déplace le point mobile pour vérifier que le segment « ajusté » correspond à la trajectoire décrite par le point mobile. Puis il efface le nouveau point construit et le segment tracé. Il invalide donc sa stratégie, bien que cela ne soit pas forcément une inférence venant du déplacement du point mobile.

Une fois qu'il réussit à construire le segment [DB], Cédric utilise le déplacement du point mobile pour valider sa construction et vérifier que le point mobile décrit bien cette trajectoire et ne peut pas aller au-delà des points D et B. Iris de son côté n’a pas utilisé le schème de « déplacement pour valider sa construction ».

Cédric était absent lors de la situation « Construire le symétrique » et Iris n’a eu vraiment de temps de travailler dans la construction.

Dans « Rectangles à compléter », Cédric et Iris utilisent le schème de « déplacement pour valider la construction », mais ils n’invalident pas leur construction, même lorsque celle-ci est dans une position qui devrait leur permettre de l’invalider.

Dans la figure bleue (1), ils utilisent le schème d’usage du « tracé au jugé » de segments, puis le schème « d’ajustement instrumenté par la mesure ».

Ils attrapent le point B et ils le déplacent pour valider leur construction. Comme le côté incomplet [Bx] « dépasse », alors, au lieu de remettre en cause leur construction, Cédric propose de le supprimer et ils le font.

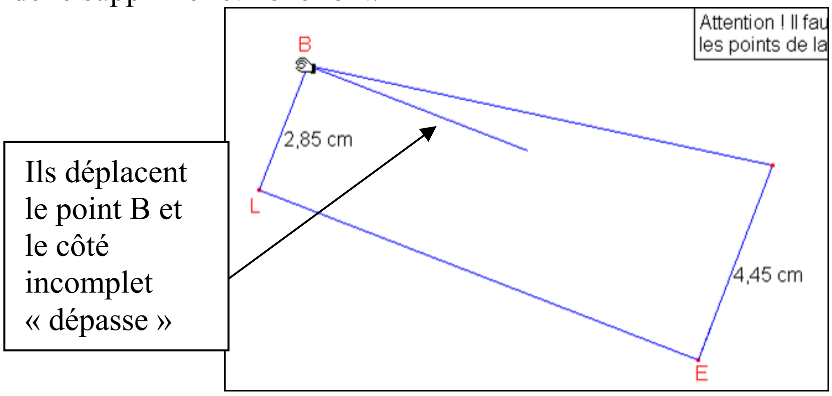


Figure 159. *Ils déplacent le point B pour valider leur construction*

Puis ils attrapent le point B et ils utilisent le schème « d’ajustement instrumenté par la mesure », en essayant d’obtenir 4,46cm des deux côtés.

Puis ils attrapent le quatrième sommet du quadrilatère et ils le déplacent pour valider leur construction, mais l'autre côté incomplet, [Ey], dépasse, alors Cédric propose à nouveau de supprimer « le petit ».

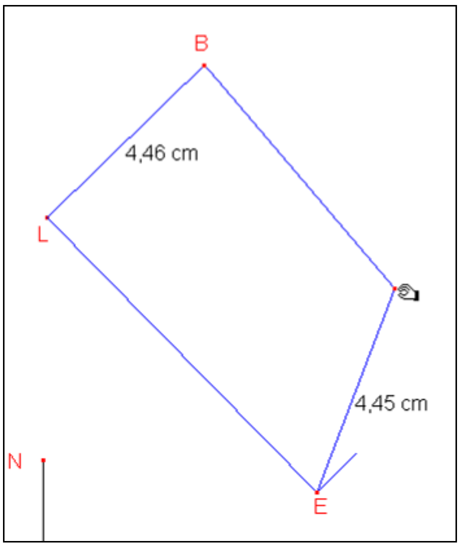


Figure 160. *[Ey] dépasse, alors Cédric propose d'effacer « le petit »*

Cédric et Iris n'invalident donc pas leur construction. Le fait de pouvoir mettre la figure comme un trapèze ne paraît pas les déranger. Iris attrape le point E et elle le déplace, en continuant à déformer la figure.

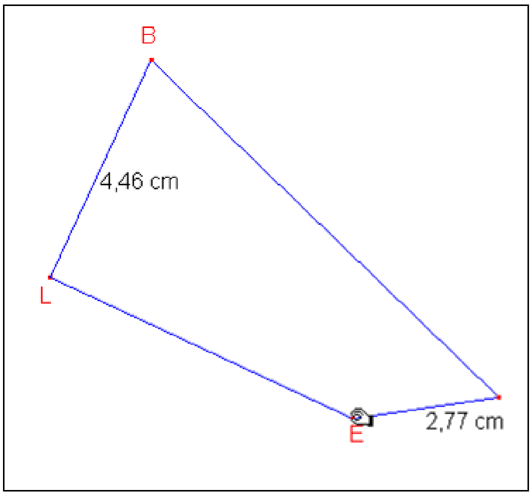


Figure 161. *Iris déplace le point E pour* ***invalider*** *la construction*

Iris : **C'est pas un rectangle ça !**
Cédric : **Si!**

Iris veut utilise donc le déplacement pour invalider la construction, en utilisant le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », mais Cédric valide la construction et Iris ne s'oppose pas. Ils attrapent le point L et ils le déplacent, en utilisant le schème du dessin contre-exemple :

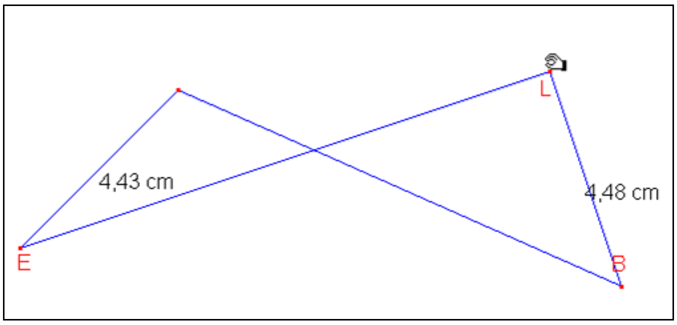


Figure 162. *Ils déplacent le point L dans la figure bleue (1)*

Cédric : Pas trop un rectangle…

Cédric est donc conscient que dans cette position là, la figure n'est pas un rectangle, mais ils n'invalident pas leur construction. Leur objectif est d'obtenir deux côtés opposés de même longueur, alors ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure ».

Dans le rectangle rose (2), Iris et Cédric utilisent la même stratégie, utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé », puis ils déplacent et effacent « les bouts qui sortent ». Puis, ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » pour avoir un rectangle.

Ils décident de revenir sur la figure bleue (1) et ils déplacent le point B, puis le point L en laissant le quadrilatère bleu (1) dans une position où il est croisé.

Puis ils attrapent le point R dans la figure rose (2) et ils le déplacent un peu, puis ils attrapent le point O et ils le déplacent beaucoup, en explorant les variations du quadrilatère.

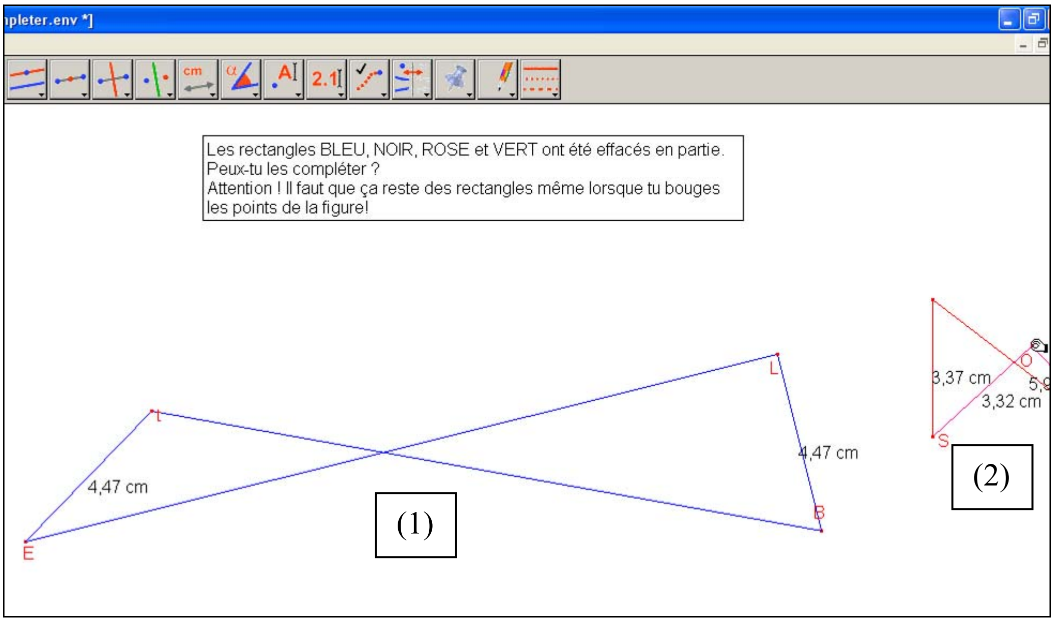


Figure 163. *Quadrilatère bleu (1) croisé et quadrilatère rose (2) croisé*

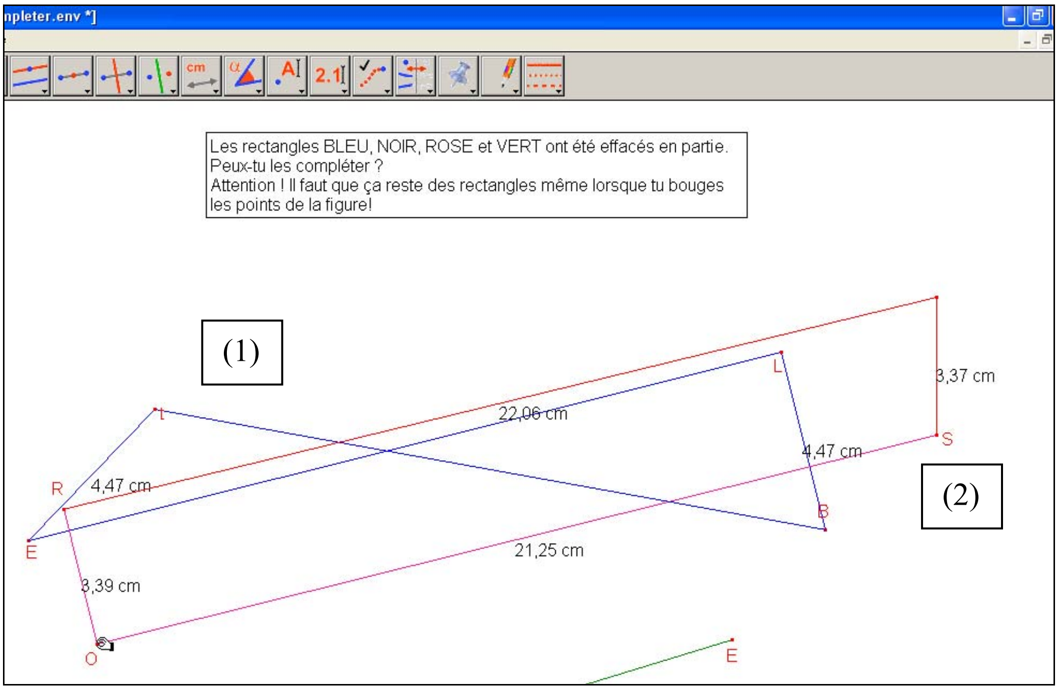


Figure 164. *Quadrilatère bleu (1) croisé, quadrilatère rose (2) un « presque » rectangle*

Iris demande à un autre élève, Mounir, de valider leur construction :

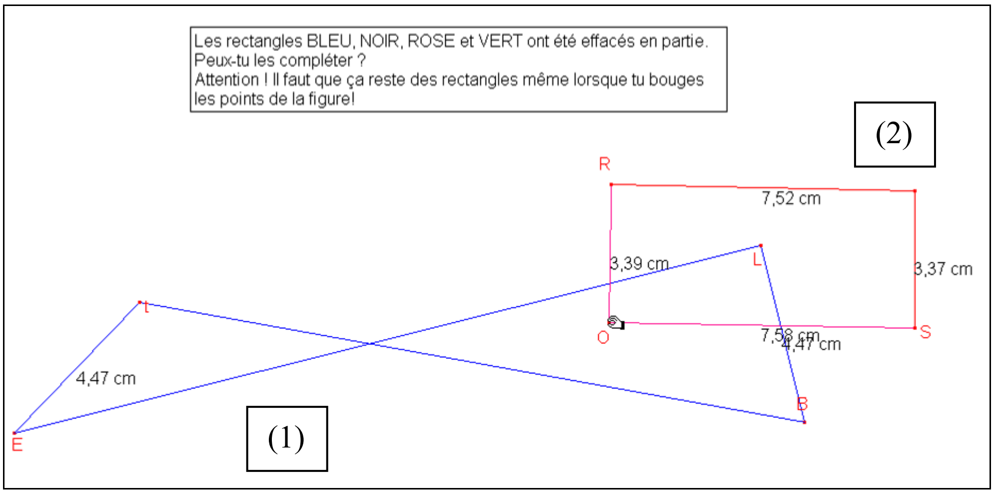


Figure 165. *Iris déplace le point O dans la figure rose (2) et elle demande à Mounir de la valider*

Iris : Mounir, c'est un rectangle ?
Mounir : Ben si c'est un rectangle...

Nous pensons que la validation de Mounir peut venir de l'état de la figure rose (2) au moment où Iris lui montre leur construction

On voit donc que le schème « déplacer pour valider » n'est pas facile à construire. Si Iris et Cédric reviennent sur la figure bleue (1) et qu'ils utilisent le photo-déplacement pour la mettre dans une position leur permettant de l'invalider, c'est parce qu'ils doutent de la validité de leur construction, mais ils ne l'invalident pas.

Cédric et Iris n'ont pas l'invariant de la forme rectangle.

L'observateur intervient et les fait recommencer. Ils tracent une demi-droite utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé » partant du point E dans le rectangle bleu (1). Mais l'observateur utilise le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » et invalide leur construction. Cédric propose à nouveau d'effacer [Ey], mais l'observateur leur explique qu'il faut compléter le rectangle tel qu'il est, utilisant [Ey].

On voit donc que Cédric et Iris n'avaient pas compris en quoi consiste une tâche de construction dans laquelle on part de données qu'on ne peut pas changer. Ceci constitue un autre invariant que les élèves doivent construire.

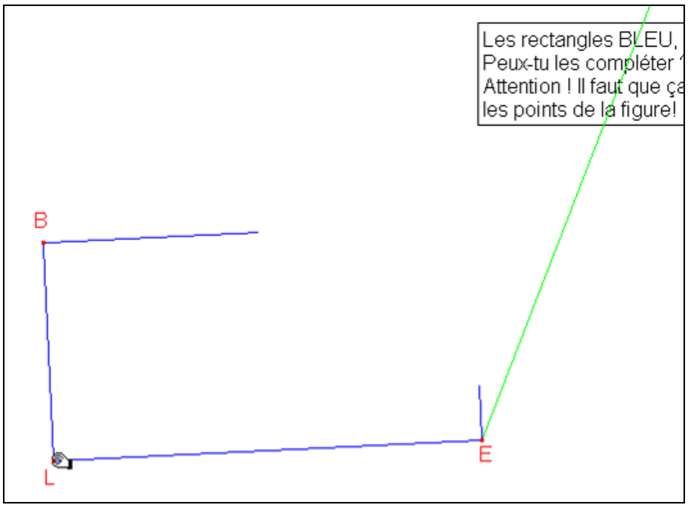


Figure 166. *L'observateur utilise le déplacement pour invalider leur construction*

Cédric : Faut mettre un point là (sur [Ey])

L'observateur : Ouais...
Cédric : **Et après on continue et après ça va rester collé**
L'observateur : Ouais!

Cédric place un point à l'extrémité du segment [Ey]. Puis il utilise le schème d'usage du « tracé au jugé » et trace une demi-droite partant de ce point-là et ayant la même direction que [Ey]. Mais à nouveau, l'observateur leur montre, qu'en déplaçant le point L, la demi-droite ne conserve pas la même direction que [Ey].

L'observateur : Qu'est-ce qu'on veut de cette demi-droite ? Qu'elle soit comment ?
Iris : Ben **droite**...
L'observateur : Comment ? Mais comment par rapport à...
Cédric : Accrochée, accrochée avec ça ([Ey])
L'observateur: Accrochée avec ça, alors on va l'accrocher avec ça!

Ils tracent la demi-droite partant de E et passant par le point que Cédric a placé sur [Ey]. Lorsqu'ils déplacent, la demi-droite « reste accrochée ».

Cédric : C'est à dire que là (il montre avec la souris l'extrémité de [Bx]) on va mettre un point, on va mettre une demi-droite qui part de là (il montre avec la souris le point B), au point là et après ça va s'accrocher.

Ils mettent un point sur [Bx], ils tracent la demi-droite partant de B et passant par ce point là, et ils déplacent le point L pour valider leur construction.

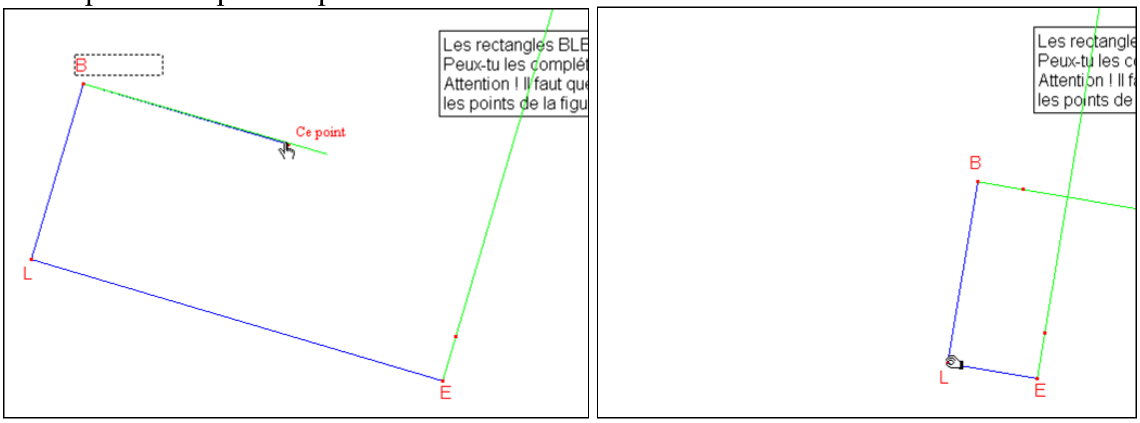


Figure 167. *Ils déplacent pour valider leur construction*

Iris : C'est bon!

C'est l'intervention de l'observateur qui permet d'invalider leur stratégie et incite les élèves à poursuivre leur recherche ; sans lui, ils seraient restés à la manipulation de leurs quadrilatères croisé ou pas.

Dans le rectangle rose (2), ils placent un point à l'extrémité de [Rx], ils tracent la demi-droite partant de R et passant par ce point-là. Puis ils veulent utiliser la même stratégie à partir de S, mais il n'y a pas côté incomplet sur lequel placer un point. Ils cliquent d'abord sur l'outil « Demi-droite », mais ils laissent la souris appuyée et lorsqu'ils l'avancent vers le rectangle rose, l'outil choisi change et se met sur « Droite perpendiculaire » ; ils cliquent sur S, ils attendent la rétroaction du logiciel pour obtenir une droite mais rien n'apparaît, ils cliquent à nouveau sur S (« Perpendiculaire à ce segment ») et la perpendiculaire à (OS) passant par S est tracée.

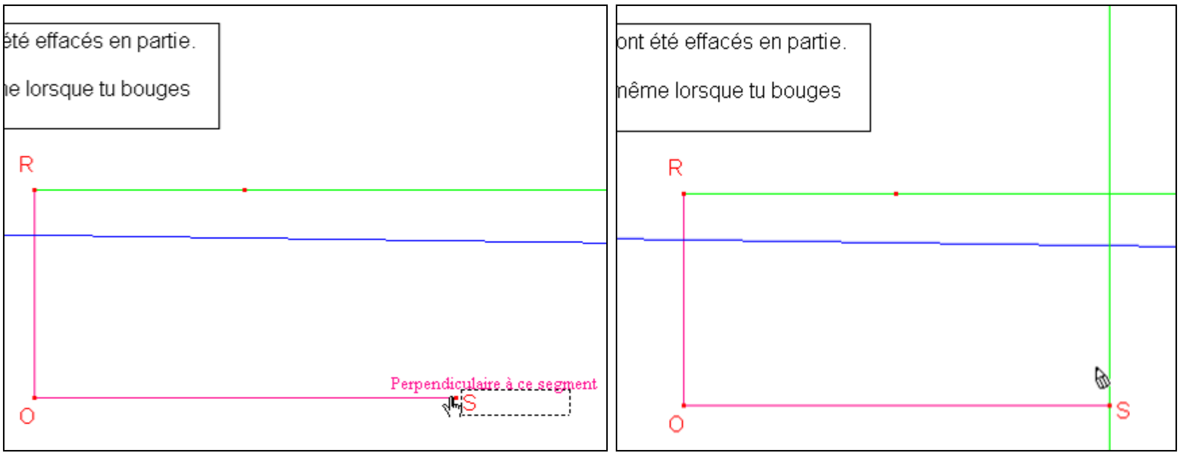


Figure 168. *Ils construisent la perpendiculaire à [OS] passant par S*

Ils attrapent le point O et ils déplacent pour valider leur construction.

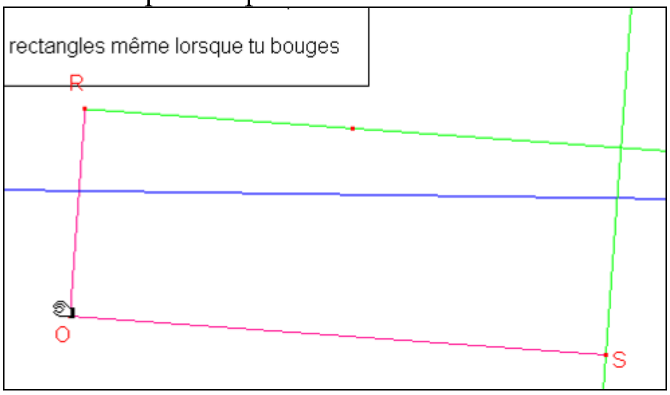


Figure 169. *Ils déplacent le point O pour valider leur construction*

Dans le rectangle noir (3), avec l'outil « Droite parallèle », ils tracent d'abord la parallèle à (ON) passant par I. Puis ils tracent la perpendiculaire à (ON) passant par N. Ils ne déplacent pas pour valider leur construction.

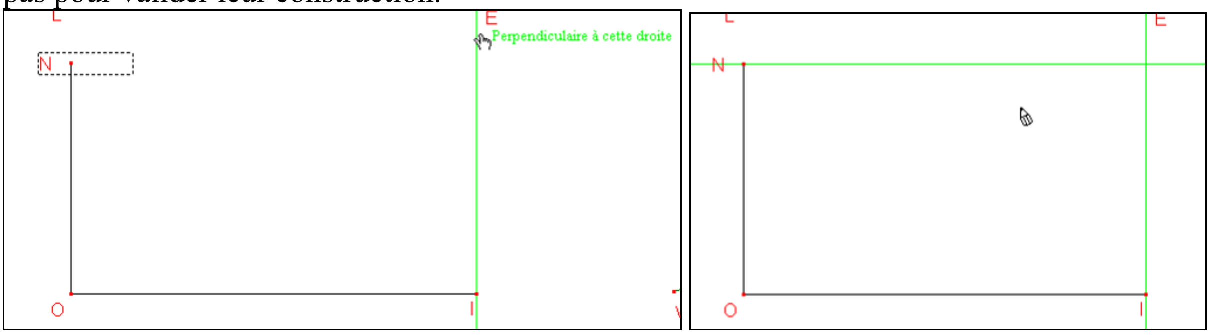


Figure 170. *Ils construisent le rectangle utilisant « Droite parallèle » et « Droite perpendiculaire »*

Le schème « déplacer pour valider une construction » n'est pas complètement acquis par Cédric et Iris. Ils ne disposent pas de plusieurs invariants nécessaires au fonctionnement du schème « déplacer pour valider une construction ».

L'absence d'invariants spatiaux ne leur permet pas d'invalider leurs constructions erronées. Dans « Rectangles à compléter », nous avons pu observer que l'absence de l'invariant de la forme rectangle ne leur permet d'invalider leurs constructions. Dans « Pajérond », n'ayant pas besoin d'invariant spatial, puisqu'il suffit de voir que la roue ne reste pas accrochée, ils réussissent à invalider leur construction au jugé, bien qu'ils ne changent pas de stratégie.

Ils ne possèdent pas non plus les invariants d'une tâche de construction et ne font pas la distinction entre ce qui est donné et ce qui est à construire. Cet invariant est absent principalement chez Cédric, qui change les conditions de la tâche dans la situation « Sur quel objet ? », en construisant un segment à partir d'un des points bleus donnés et un point quelconque, segment qu'il fait par la suite correspondre à la solution qu'il avait commencé à construire. Dans « Rectangles à compléter », c'est lui qui propose d'effacer les segments qui « dépassent », en changeant les données du problème.

Grâce à l'intervention de l'observateur, leur stratégie est invalidée et les élèves ont été incités à poursuivre leur recherche. Sans cette intervention ils seraient restés à leur stratégie changeant les données du problème.

II.3 Schème d'action instrumenté « déplacer pour valider une conjecture/propriété »

Dans la situation « Toujours/parfois vrai », afin de valider le parallélisme et la perpendicularité entre les droites, Cédric et Iris essayent d'utiliser les outils du logiciel. Cependant, par manque de connaissances instrumentales, la plupart du temps ils ne construisent pas les droites qu'ils cherchaient à construire.

Cédric lit la consigne : « (DG) et (BC) perpendiculaires ? », alors il explore les outils disponibles et il choisit l'outil « Droite perpendiculaire ».

Dans la figure bleue (1), il construit la perpendiculaire au segment [DG], passant par D. Comme cette droite se confond avec (BC), Cédric dit : « ben oui regarde! C'est perpendiculaire! ». Il commence donc d'abord par décider à partir du dessin statique et de l'utilisation des outils du logiciel, avec lesquels il cherche à avoir une perpendiculaire qui lui permette de valider la propriété. C'est alors qu'ils réalisent qu'ils doivent déplacer :

> Cédric : Oui là faut marquer oui! (pour la perpendicularité)
> Un élève : On a déplacé
> Cédric : Ah mais d'abord faut déplacer!
> Iris : Ben... on les a déplacés!

Ils attrapent alors le point A et ils le déplacent un peu, puis ils attrapent le point F et ils le déplacent aussi un peu.

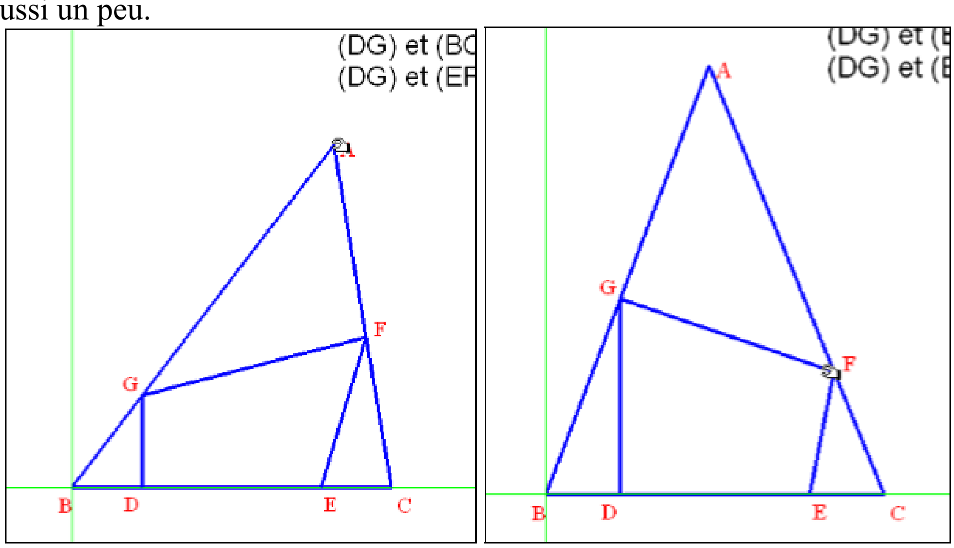


Figure 171. *Déplacement du point A et du point F dans la figure bleue (1)*

Ils essayent d'attraper C, mais ils attrapent le segment [AC] et ils le déplacent.

Ils essayent d'attraper et déplacer E mais ils n'y arrivent pas, puis ils essayent avec D et avec B. ils utilisent donc le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » pour décider de la validité des propriétés de la figure.

Cédric : Tu vas marquer quoi ?
Iris : **Perpendiculaires, oui!**
Cédric : Oui ben faut marquer les points qu'on fait...
Iris : Mais j'ai bougé le ...
Cédric : A! G, F...
Iris : Non! **Le G il bouge pas!**
Cédric : **Ce qui bouge!**
Iris : A, F!
Cédric : Et le C!
Iris : Et le C aussi!

Pour vérifier la validité du parallélisme des droites (DG) et (EF), Cédric essaye d'utiliser l'outil « Droite parallèle ». Cela pourrait lui permettre d'invalider, couplé avec l'utilisation du déplacement ; c'est un schème de validation par contrôle visuel assisté par l'outil parallèle ou perpendiculaire.

Cédric clique d'abord sur le segment [DG] et il essaye de cliquer sur F, puis sur [EF], mais Iris lui dit qu'il ne peut « pas faire les deux au même temps! ». Il finit par construire la parallèle à [DG] passant par D, soit (DG), puis (EF) en traçant la parallèle à [EF] passant par F.

Iris : **Oui, ils sont parallèles!**
Cédric : **Attends d'abord faut bouger les points!**
Iris : **Mais ça fera pareil!**

On voit donc que pour Iris il suffirait d'utiliser les outils du logiciel pour valider la construction (schème de validation sans utiliser le déplacement), mais Cédric insiste et ils déplacent. Il semblerait que Cédric ait construit un schème déplacement avec contrôle visuel assisté. Ils attrapent le point F et ils le déplacent, mais les droites (EF) et (DG) ne restent pas parallèles. Ils le remettent à peu près comme avant.

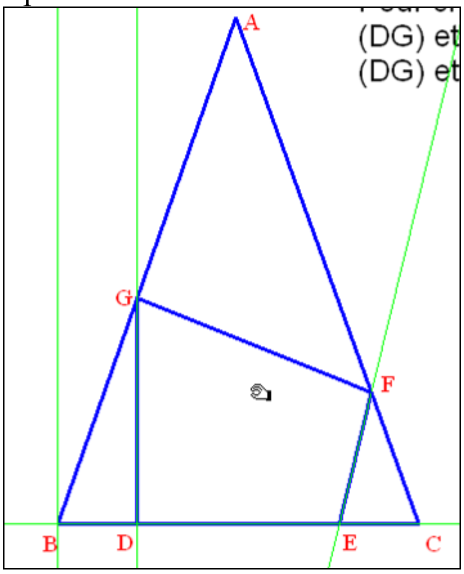


Figure 172. *Ils déplacent le point F pour voir si le parallélisme des droites est conservé ou pas*

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	Oui	d F C
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	[illegible]	d F C
(BC) Et // (GF)		

Figure 173. *Ils valident la perpendicularité et invalident le parallélisme*

L'enseignant fait une phase collective, un débat, dans lequel le but est d'arriver à « en géométrie dynamique, une propriété géométrique est vraie si elle se conserve au cours du déplacement » et le contre-exemple : « si une seule fois la propriété n'est pas vérifiée, alors on dit qu'elle est fausse ».

Pendant la phase collective, Cédric et Iris colorent les segments [DG], [EF] et [BC] en rouge dans la figure bleue (1), dans la figure verte (2) et dans la figure rose (3).

Dans la figure verte (2), ils tracent la perpendiculaire au segment [DG] passant par D et la parallèle au segment [EF] passant par F (ils refont ce qu'ils avaient déjà fait sur la figure bleue), soit (EF). Ils attrapent le point G et ils le déplacent, et la perpendiculaire au segment [DG] passant par D ne se confond plus avec [BC].

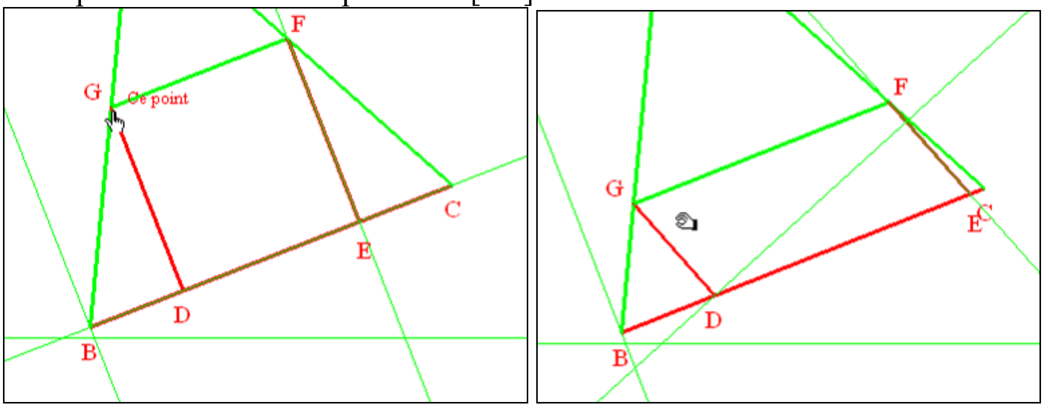


Figure 174. *Ils déplacent G et la perpendiculaire à [GD] passant par D ne se confond plus avec (BC)*

L'observateur : Dans la verte, est-ce que (DG) et (BD) sont perpendiculaires ?
Iris : Mmmmmmmm... **Oui!**
Cédric : (BD), (BC)...
Iris : **Faut bouger les points aussi!**

Iris n'a pas compris ce qu'est un contre exemple. Elle dit de bouger par effet de contrat suite à l'intervention collective de l'enseignante. Ils attrapent alors le point D et le déplacent, mais ils le remettent comme avant et n'invalident pas la non conservation de la perpendicularité.

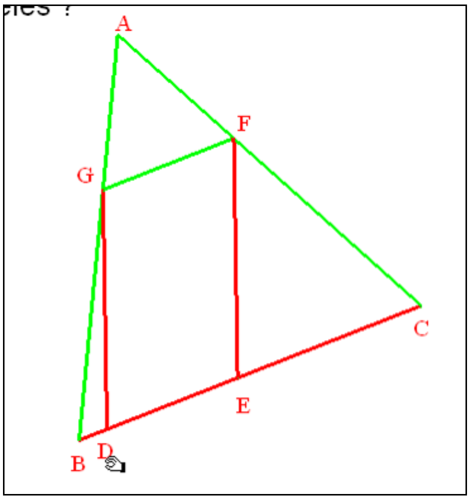


Figure 175. *Cédric et Iris déplacent le point D*

Ils déplacent aussi G, puis A. ils ont donc déplacé tous les points de la figure et ont utilisé le schème d'usage de « recherche des points qui bougent ».

Ils attrapent à nouveau le point G et ils le déplacent sur le segment AB.

Iris : **ça reste tout le temps pareil! Regarde, monte comme ça!**

Iris n'est peut être plus centrée sur la perpendicularité, mais seulement sur le fait que tout reste pareil perceptivement, ce qui se passe si l'on considère la forme parallélogramme de DEFG.

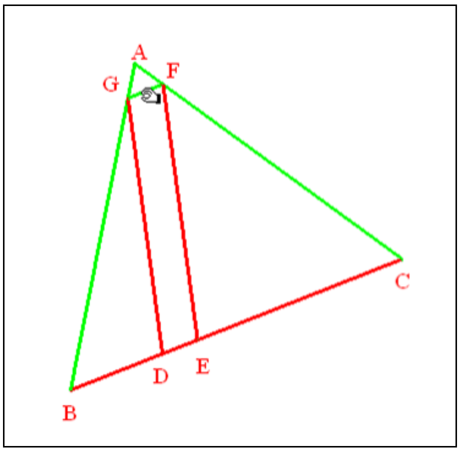


Figure 176. *Le déplacement du pont G leur permet de valider la conservation du parallélisme*

Iris : **C'est parallèle et c'est perpendiculaire aussi!**

Dans leur fiche ils répondent « oui » à la perpendicularité et au parallélisme.

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	A D C
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	oui	A D C

Ils n'invalident donc pas la non conservation de la perpendicularité dans la figure et valident la conservation du parallélisme.

Dans la figure rose (3), Cédric prend l'outil « Droite parallèle », mais Iris dit à Cédric :

Iris : **Non! Il faut prendre la main et faut bouger!**

Alors ils attrapent le point D et ils le déplacent.

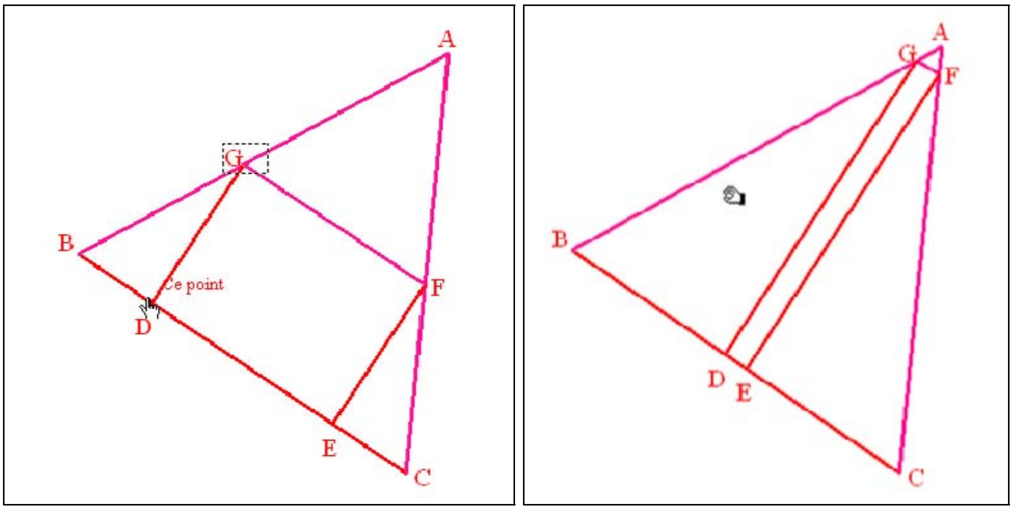


Figure 177. *Cédric et Iris déplacent le point D dans la figure rose (3)*

Iris : **C'est bon!** Maintenant bouge le BC! Ben bouge le B!

Cédric essaye de déplacer le point B, puis le C, mais il attrape le segment [AC] et il le déplace un peu.

Iris : Bouge le A! Le A!

Iris veut donc essayer de déplacer <u>tous</u> les points de la figure pour décider quelles propriétés sont vraies et lesquelles sont fausses, ceci peut être un effet de contrat après l'intervention de l'enseignante. Elle utilise le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » et le schème de « déplacement pour valider une conjecture/propriété ».

Cédric attrape le point A et il le déplace, (GF) et (DE) ne restent pas parallèles, alors que (DG) et (EF) restent perpendiculaires.

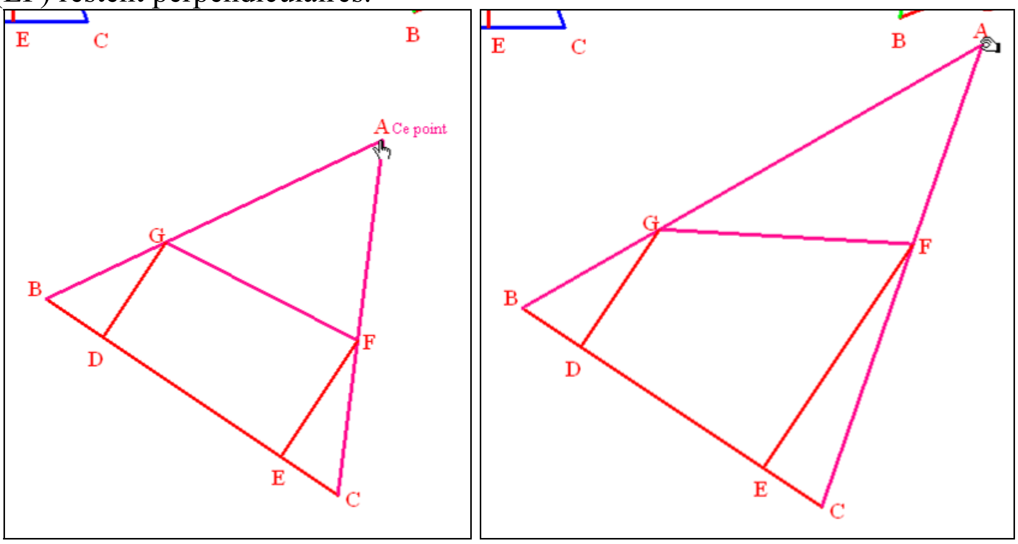


Figure 178. *Ils déplacent le point A dans la figure rose (3)*

Iris : **Il est pas parallèle regarde**!

Iris invalide donc la propriété « (GF) et (BD) parallèles ».

Ils continuent à déplacer le point A et ils utilisent le schème de « déplacement pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement ».

Iris : Perpendiculaires ?

Ils prennent l'outil « Droite perpendiculaire » et ils tracent la perpendiculaire à (DG) passant par B, soit (BC), puis la perpendiculaire à (BC) passant par B. Sans déplacer, ils concluent de la validité de la propriété :

Iris : **Oui c'est perpendiculaire!**

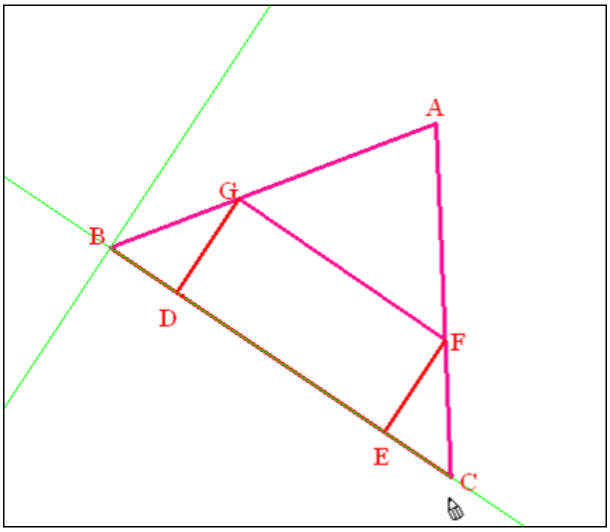


Figure 179. *« Oui ((DG) et (BC)) c'est perpendiculaire ! »*

Pour décider de la validité de la propriété « (BC) et (GF) parallèles ? », ils tracent la parallèle à (BD) passant par B, soit (BC), et la parallèle à (GF) passant par F, soit (GF), et ils déplacent le point D :

Iris : **Si ça reste toujours...**

Mais la droite disparaît :

Iris : Ah! J'ai rien dit!

Cédric : Non regarde! Même si tu vois pas! Regarde

Iris utilise alors le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » et elle montre à Cédric une position dans laquelle les droites (GF) et (BC) se coupent.

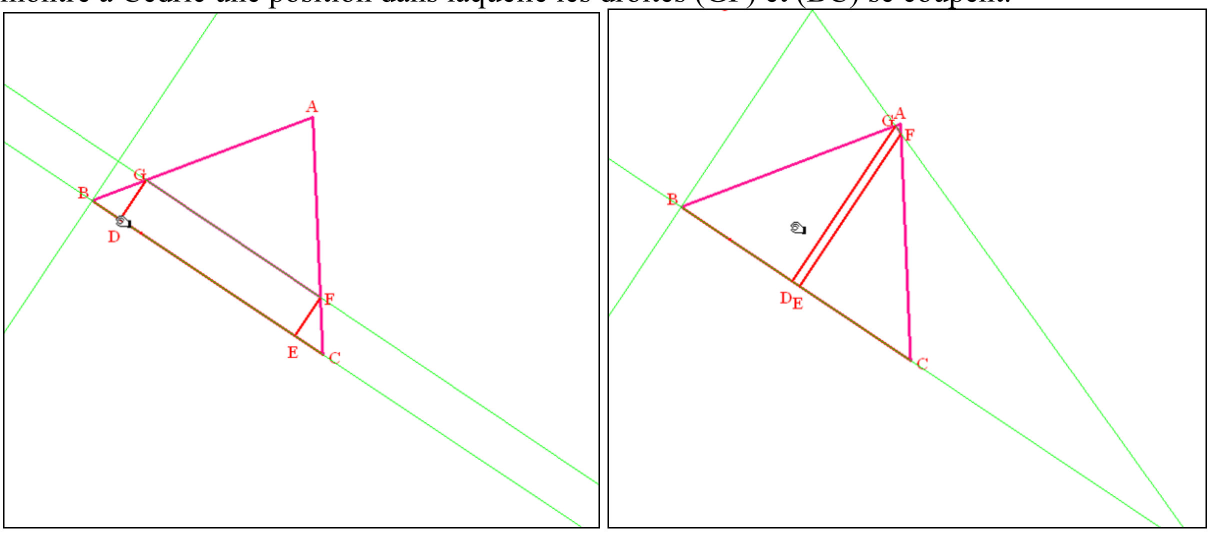


Figure 180. *Iris utilise le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement» pour montrer à Cédric que les droites ne sont pas parallèles*

Iris : Non regarde! **ça se tord!** Tu vois ?

Cédric : Ah ouais! Ouais carrément !

Iris utilise donc le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » pour invalider la conjecture « (GF) et (BC) parallèles » et pour montrer à Cédric pourquoi elle peut réfuter cette propriété. Dans cet épisode, il apparaît clairement que c'est un état particulier de la figure qui permet aux élèves de décider s'il y a encore parallélisme ou pas, en l'occurrence pas. Le déplacement utilisé est un photo-déplacement. Leurs difficultés précédentes sont donc bien sur la reconnaissance perceptive du parallélisme et de la perpendicularité. Ils essayent d'ailleurs d'instrumenter cette perception par la construction de droites parallèles et perpendiculaires.

Figure Rose	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	A C G
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	Non	A C G
	Non	

Figure 181. *Ils valident la conservation de la perpendicularité et ils invalident le parallélisme dans les deux cas*

. Ils ne valident donc pas la propriété « (DG) et (EF) parallèles ».

Dans cette situation, Cédric et Iris ont utilisé le déplacement pour décider de la validité des propriétés. Ils n'ont pas invalidé la perte de la perpendicularité dans la figure verte (2), ni ont validé la conservation du parallélisme dans la figure rose (3).

Ils ont fait la conjecture que les droites (BC) et (GF) étaient parallèles dans la figure rose, et grâce au déplacement et au schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », Iris utilise le photo-déplacement pour montrer à Cédric que les droites ne restent pas parallèles.

Cédric utilise le schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété » et instrumente sa perception en passant par l'utilisation d'outils (« Droite parallèle », « Droite perpendiculaire »).

II.4 Schème d'action instrumenté « ajustement pour satisfaire une condition »

Comme nous l'avions mentionné plus haut, le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » est apparu spontanément chez Cédric et Iris dans leur stratégie de résolution de « Pajérond ».

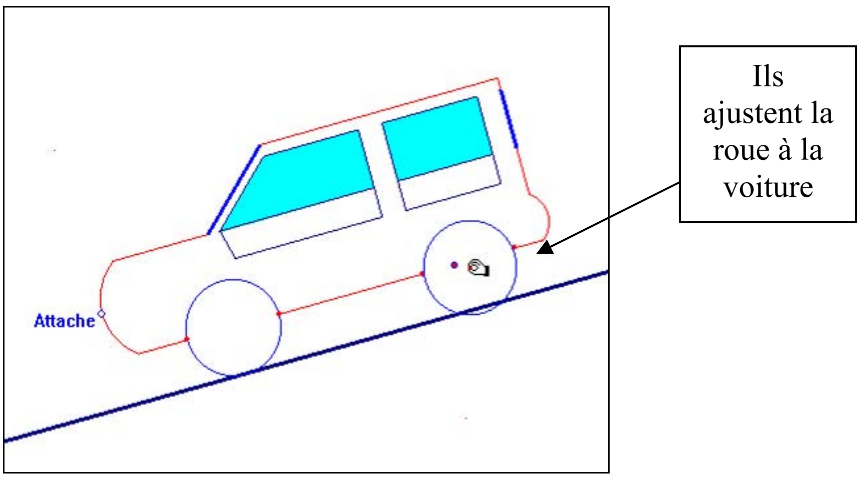


Figure 182. *Utilisation du schème « d'ajustement pour satisfaire une condition »*

Dans la situation « Sur quel objet ? », Cédric et Iris, chacun à leur tour en tant qu'élève A émetteur, a utilisé ce schème pour faire la construction.

Après avoir identifié la trajectoire du point rouge, Cédric essaye de construire le segment [DB]. Mais il clique juste à côté du point B, en construisant un segment [DB'], avec B' libre. Au lieu d'invalider sa construction et recommencer, il attrape le point B et il le déplace jusqu'au point B'. Il utilise donc le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition ».

Cédric modifie ici la situation pour qu'elle corresponde à la solution qu'il a commencé à construire. Il n'a pas les invariants d'une tâche de construction et ne fait pas la distinction entre ce qui est donné et ce qui est à construire.

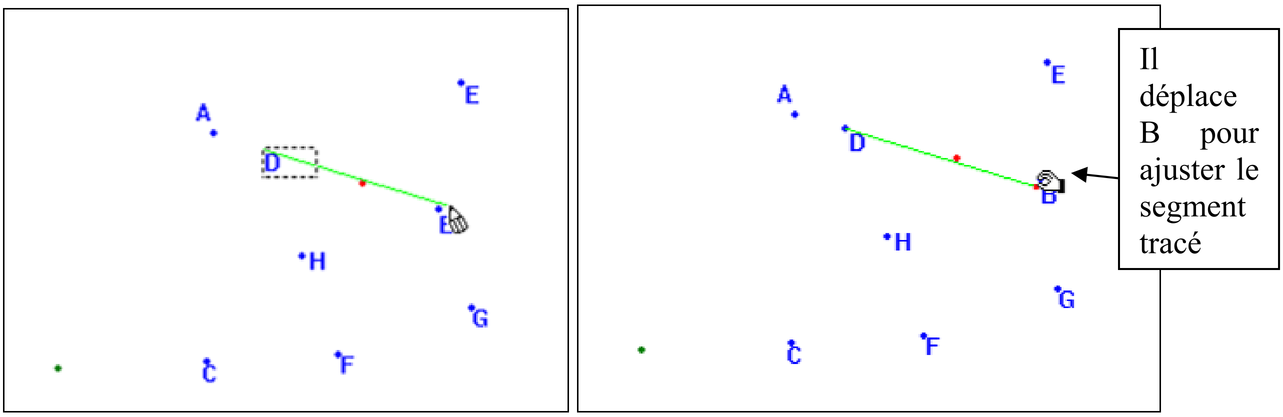


Figure 183. *Cédric utilise le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » pour obtenir le segment [DB]*

Cédric déplace le point rouge mobile et vérifie d'abord que la trajectoire du point rouge correspond bien au segment construit et qu'il ne puisse pas aller au-delà de D, jusqu'au point A. Il efface le point B' et essaye une nouvelle fois de construire le segment [DB], mais à nouveau il clique à côté du point D, en créant un point D'. Il attrape D' et il le déplace pour ajuster le segment tracé en essayant de placer D' sur le point D ; comme il a du mal à le mettre exactement sur D, il l'efface. Finalement il réussit à construire le segment [DB] correctement.

Cédric a donc construit le schème « d'identification de l'objet-trajectoire », puisque son intention est de construire le segment [DB]. Le schème d'usage de construction d'un segment par deux points donnés n'est pas disponible, alors il fait appel au schème « d'ajustement pour satisfaire une condition ».

Iris utilise aussi le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » dans cette même situation et s'appui de plus pour faire sa construction sur le point mobile. Elle commence par construire un segment partant d'un point D' quelconque et allant jusqu'au point vert (mobile). Puis elle attrape D' et elle le déplace en le plaçant sur le point D.

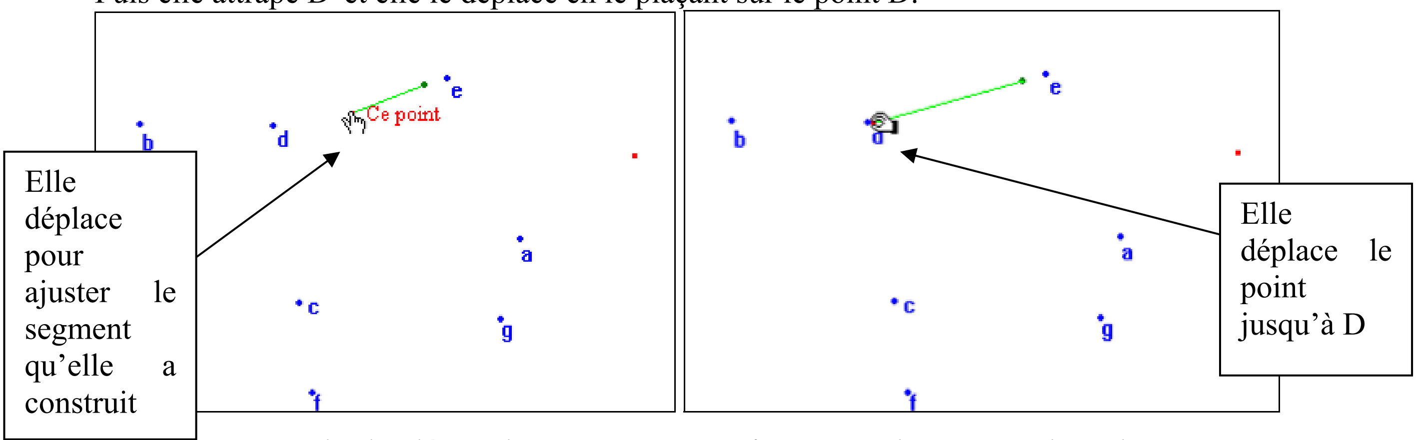


Figure 184. *Iris utilise le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » pour obtenir le segment [DE]*

Elle efface le point D' et elle recommence. Elle construit à nouveau un segment partant d'un point quelconque situé « à peu près » sur le segment [DE], puis elle clique sur E. Elle déplace d'abord le point D, puis elle déplace le point quelconque et le place sur D.

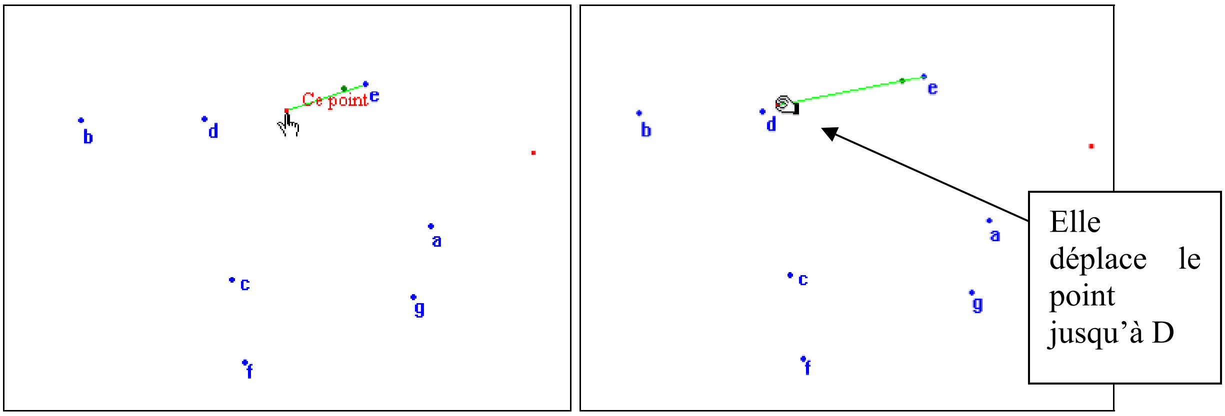


Figure 185. *Iris utilise la même stratégie, mais traçant le segment à partir de E*

Pour construire la demi-droite [FA), Iris utilise la même stratégie en s'appuyant sur le point mobile.

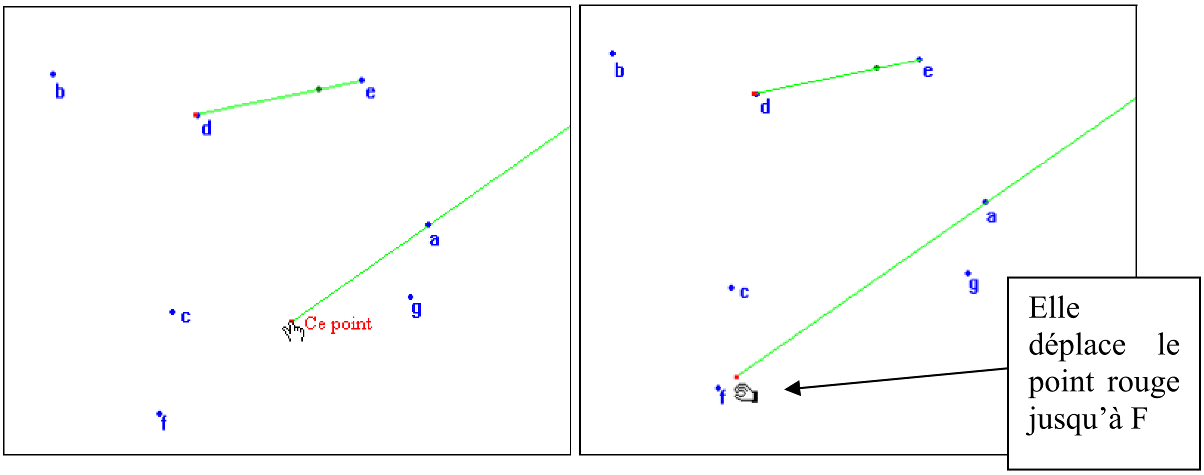


Figure 186. *Iris construit la demi-droite à partir du point rouge et passant par A, puis déplace le point rouge pour « compléter » la demi-droite*

Dans « Construire le symétrique », Iris commence par tracer une droite passant par N, puis elle utilise le schème « d'ajustement » pour que cette droite soit perceptivement perpendiculaire à la droite (d).

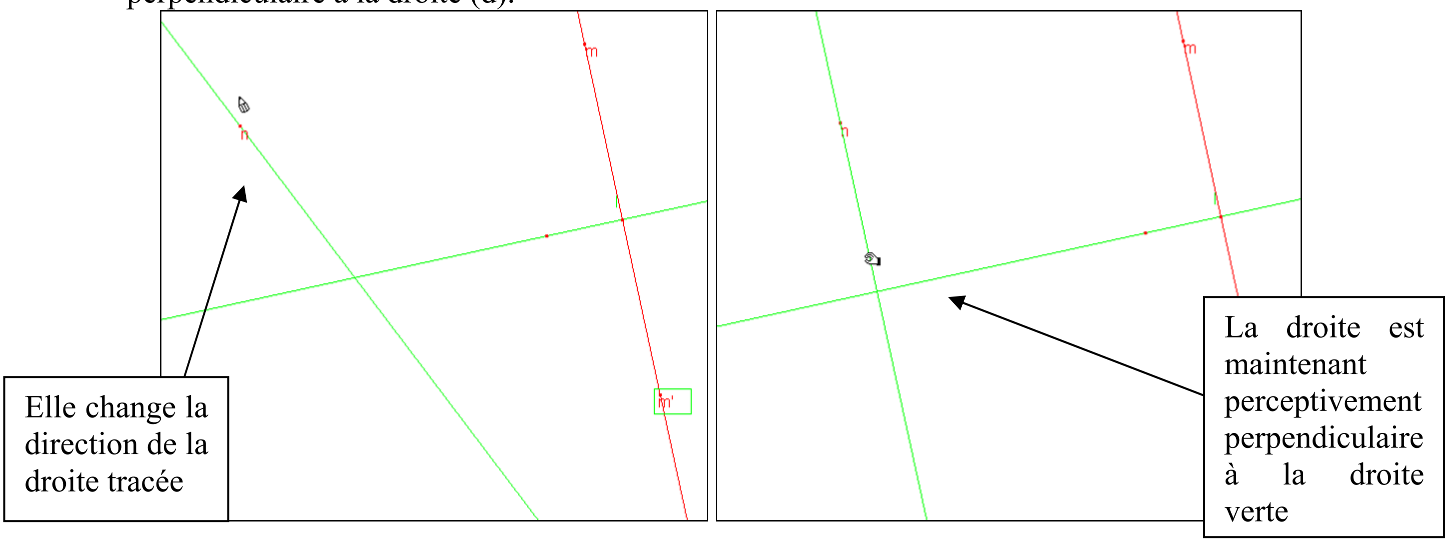


Figure 187. *Iris utilise le déplacement pour ajuster la direction de la droite passant par N pour qu'elle soit perceptivement perpendiculaire à la droite verte*

II.5 Schème d'action instrumentée « ajustement instrumenté par la mesure »

Cédric et Iris utilisent aussi l'ajustement en l'instrumentant par la mesure, en particulier dans la situation « Rectangles à compléter ».

Pour construire le rectangle bleu (1), ils mesurent la longueur BL, puis utilisent le schème du « tracé au jugé » et le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure ».

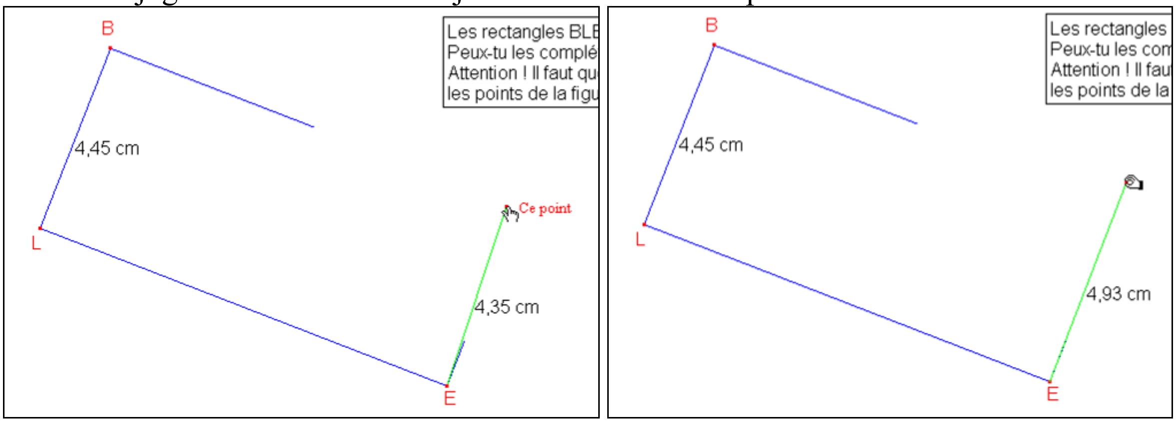


Figure 188. *Ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » pour avoir des segments de même longueur*

Dans le rectangle rose (2), ils commencent par baser leur stratégie de résolution utilisant ce schème.

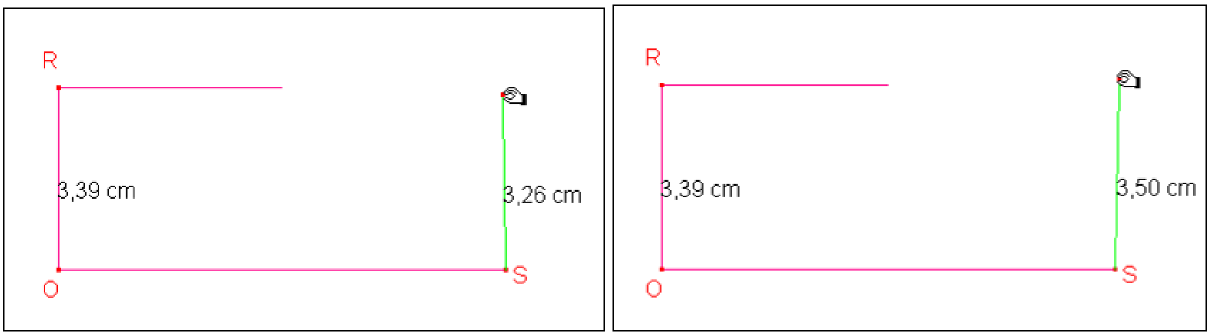


Figure 189. *Pour compléter le rectangle rose (2), ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure »*

Ils continuent à compléter le rectangle en utilisant des tracés au jugé, puis mesurent pour contrôler la validité de leur construction :

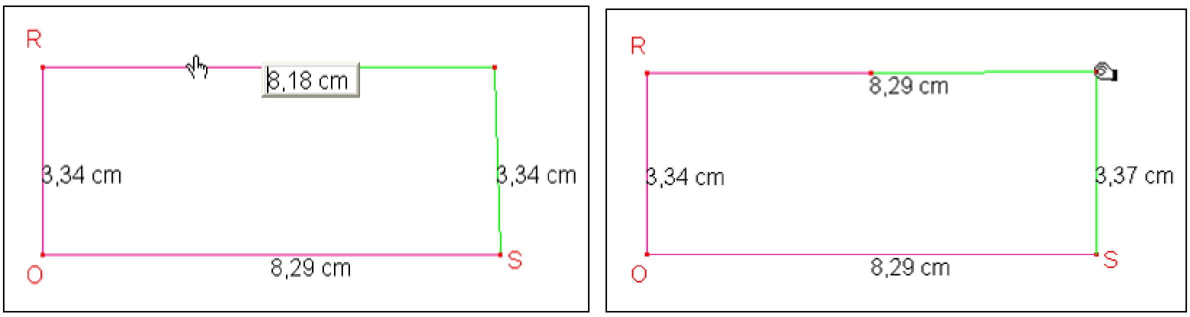


Figure 190. *Ils utilisent le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » pour obtenir des côtés opposés de même mesure*

II.6 Genèse instrumentale

Cédric et Iris ont à peu près le même niveau mathématique que Chloé et Alex, cependant, comme on a pu le voir, leur genèse instrumentale et plus rapide et plus riche.

Lors de l'exploration de « Géo », Cédric et Iris ont construit le schème d'usage de « recherche des points qui bougent ». Ils ont déplacé tous les points déplaçables, sauf un, et ont déplacé ou cherché à déplacer toutes les formes globales. Ils ont aussi rencontré pour la première fois une ambigüité lorsqu'ils ont voulu déplacer un point et ils l'ont traité correctement.

Le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » est apparu spontanément très tôt dans leur genèse instrumentale. Dans « Pajérond », ils l'ont utilisé pour adapter la roue à la voiture et ils ont continué à l'utiliser dans leurs stratégies. Cédric et Iris l'ont utilisé dans la situation « Sur quel objet ? » pour ajuster leur construction à la solution qu'ils avaient identifiée. Ils ont aussi utilisé le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » dans « Rectangles à compléter ». Ceci peut être dû au fait que les connaissances des élèves en 6ème sur les quadrilatères particuliers sont basées principalement sur leur expérience en primaire.

Le schème « déplacer pour valider une construction » n'est pas complètement acquis par Cédric et Iris. L'absence d'invariants spatiaux et des invariants d'une tâche de construction ne leur permettent pas d'invalider leur construction ni de remettre en cause leur stratégie. L'intervention d'un adulte est donc indispensable pour les faire changer de stratégie et continuer à la recherche de la stratégie gagnante.

L'intervention collective de l'enseignant dans « Toujours/parfois vrai » a permis la mise en place d'un contrat de déplacement « il faut déplacer tous les points de la figure ». Ceci a renforcé l'utilisation du schème d'usage de « recherche des points qui bougent » par Cédric et Iris pour décider de la validité des propriétés géométriques de la figure. Mais le manque d'invariants ne leur permet pas d'invalider des propriétés qui ne se conservent pas.

Cédric utilise le schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété » et instrumente sa perception par l'utilisation des outils du logiciel (« Droite parallèle », « Droite perpendiculaire »). Ceci montre une évolution dans la genèse instrumentale et une première étape dans le passage de la « géométrie naturelle », G1, vers la géométrie « naturelle axiomatique », G2.

III. KATIA ET MALEK

Katia et Malek ont un bon niveau mathématique. Ils se sont investis dans les séances avec Cabri, et sont restés toujours très intéressés et enthousiastes.

Le schème « de matérialisation de la droite », utilisé par Katia dans la situation « Sur quel objet ? », et le schème « de vérification de l'équidistance », utilisé par Katia et Malek lorsqu'ils analysaient les variations de la figure dans « Construire le symétrique », ne seront pas repris ici.

Nous montrerons d'abord l'évolution de l'utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » chez Katia et Malek et comment ils peuvent alterner entre l'utilisation de ce dernier et du schème « d'ajustement instrumenté par la mesure », sans remettre en cause leur stratégie.

Nous étudierons leur utilisation du schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété » dans la situation « Toujours/parfois vrai », situation qui a permis à Katia et Malek de construire le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », schème qui, comme nous le verrons, est utilisé par la suite pour invalider leurs constructions et comme un moyen pour argumenter.

Finalement, Malek a construit le schème de « vérification que la trajectoire passe par un point » dans la situation « Sur quel objet ? » d'abord au cours de la phase de validation en tant qu'élève B, récepteur du message, puis l'utilise en tant qu'émetteur pour caractériser la trajectoire rectiligne qu'il a identifiée.

III.1 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction » (et l'alternance avec le schème d'action instrumentée « ajustement instrumenté par la mesure»)

Katia et Malek ont été le seul binôme, des cinq binômes observés, qui a réussi à élaborer la stratégie attendue dans « Pajérond ».

Ils ont commencé par construire un cercle en utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé ».

> Malek : Il faut faire avancer la voiture

L'utilisation du schème « déplacer pour valider une construction » apparaît donc spontanément, probablement en raison du contexte. La voiture avance et la roue reste statique :

> Malek : Elle est restée!
> Katia : Notre roue elle est restée!

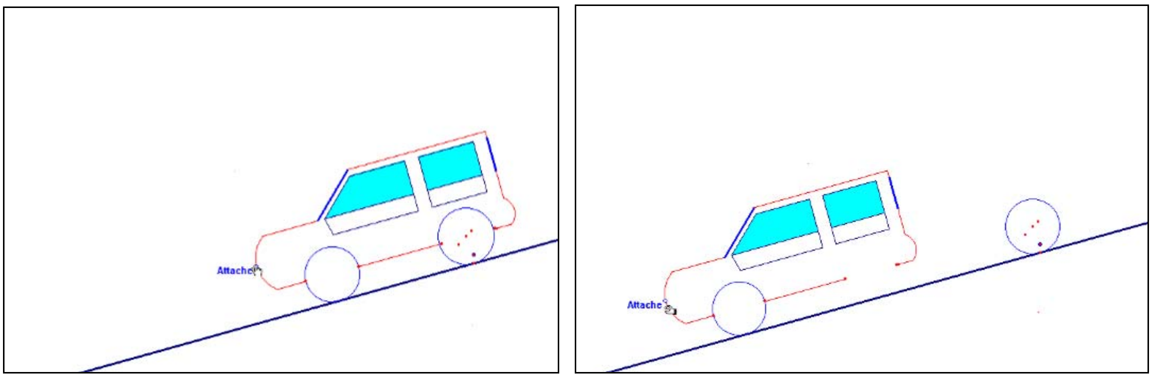


Figure 191. *La voiture avance, mais « Notre roue elle est restée! »*

Ils invalident alors leur construction, mais ils ne vont pas remettre en cause leur stratégie, ils continuent à essayer de mettre le centre « bien au milieu » et de tracer un cercle ayant à peu près la bonne taille. Après plusieurs essais, l'enseignant intervient :

> Enseignant : Alors, là vous progressez bien.... C'est où pile au bon endroit ?
> Malek : **Au milieu** ... il y a pas... ?
> Enseignant : Vous allez chercher !

Katia et Malek savent que le point doit se trouver au milieu des deux points de la carrosserie et que pour ce faire, ils doivent construire ce milieu. Ils décident alors d'explorer les outils du logiciel. Ils essayent d'utiliser « droite perpendiculaire » mais ils n'y arrivent pas, puis décident d'essayer l'outil de mesure de longueur, mais comme ils n'arrivent pas à l'utiliser, ils décident de construire d'abord le segment qui joint les deux points visibles de la carrosserie. Ils reprennent l'outil de mesure de longueur, ils cliquent sur le segment et ils obtiennent la longueur du segment tracé.

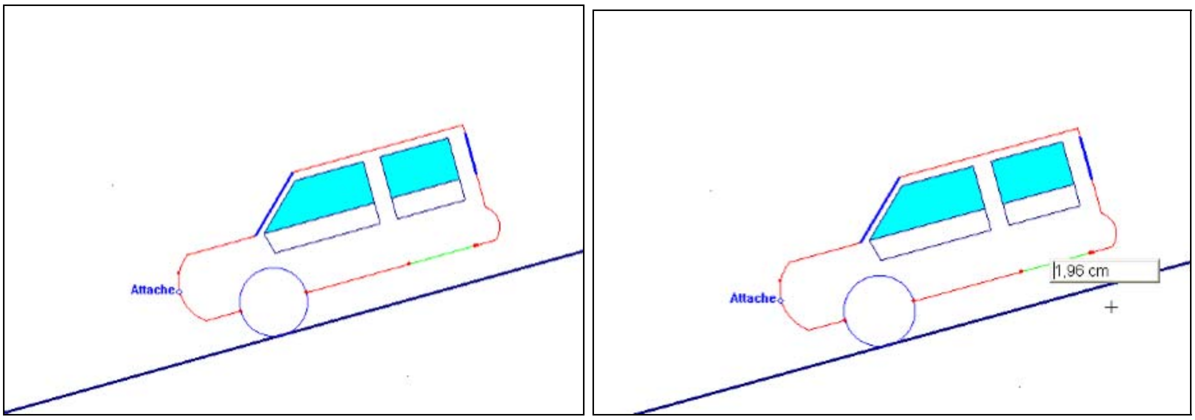


Figure 192. *Katia et Malek mesurent la longueur du segment qui joint les deux par lesquels doit passer le cercle*

Katia et Malek aimeraient pouvoir placer le point au milieu. En papier crayon, la stratégie consisterait à mesurer, diviser par deux et placer à cette distance-là le milieu. Leur stratégie est donc proche de celle du papier crayon.

Ils construisent alors un cercle, en utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé », dont le centre se trouve sur le segment construit ; comme il n'est pas tout à fait au milieu, ils voient que le cercle ne peut pas passer par les deux points de la carrosserie.

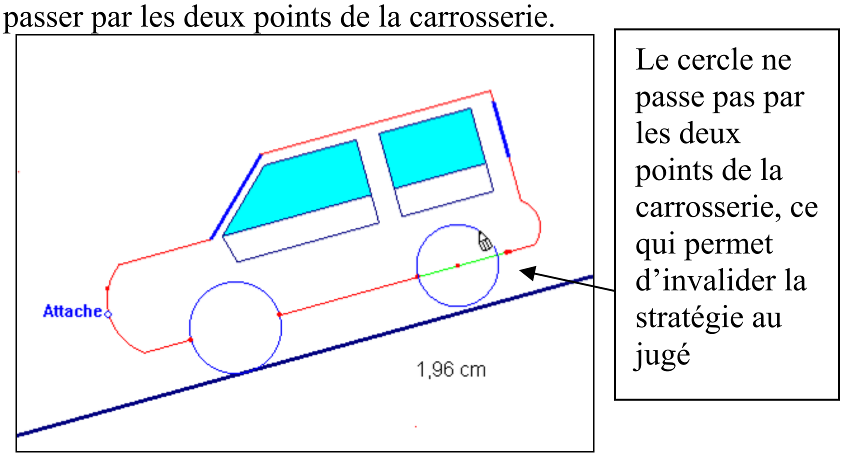


Figure 193. *Ils construisent un cercle dont le centre se trouve sur le segment construit*

Ils décident alors de continuer à chercher dans les outils disponibles du logiciel et ils trouvent l'outil « Milieu ». Ils construisent le milieu des deux points de la carrosserie, en cliquant d'abord sur un point puis sur l'autre. Puis ils construisent le cercle en utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé », c'est-à-dire sans cliquer sur un des points de la carrosserie, mais en choisissant la taille du cercle perceptivement, en prenant comme centre le milieu du segment construit.

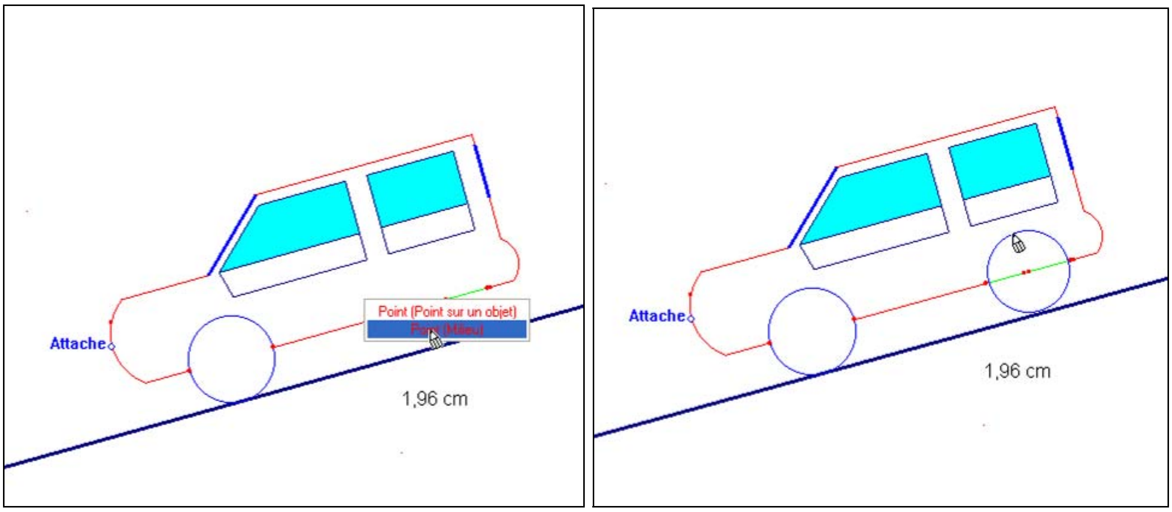


Figure 194. *Une fois construit le milieu, ils cliquent sur « Point (Milieu) » et ils choisissent la taille du cercle perceptivement*

Même si visuellement leur construction paraît correcte, ils ressentent le besoin d'attraper le point « Attache » et de déplacer la voiture pour valider leur construction :

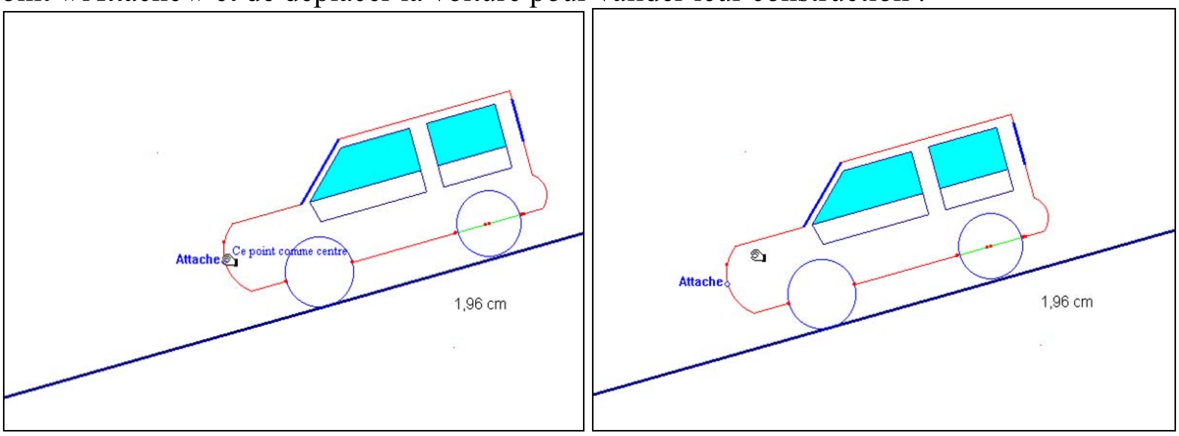


Figure 195. *Même si perceptivement ils pourraient valider, ils déplacent pour être sûrs*

Leur construction est donc validée. Cette construction est validée par le déplacement, bien que le tracé soit fait au jugé, car le cercle conserve sa taille et se déplace avec la voiture. L'objectif de la situation étant la construction du milieu passant par l'outil et non pas la construction du cercle, on peut considérer cette stratégie comme correcte.

L'enseignant choisira Katia pour jouer le rôle d'élève-sherpa et montrer à la classe leur stratégie de construction du milieu dans la phase collective. Une fois le milieu est construit, l'enseignant demande à Cédric de jouer le rôle d'élève-sherpa pour construire le cercle. Cédric construit un cercle « au jugé », bien que l'enseignant ait voulu institutionnaliser la construction du cercle passant par un des points de la carrosserie.

Nous voyons donc que Katia et Malek sont passés par la stratégie de base et ont utilisé spontanément le déplacement pour valider leur construction. Ils ont compris très vite que leur construction devait passer par l'utilisation d'outils du logiciel. Ils ont essayé d'abord d'autres outils, mais ne réussissant pas à faire une construction qui leur convienne, ils ont continué à chercher et ont trouvé l'outil « Milieu ». Ils ont tracé le cercle de centre le milieu construit et ont choisit la taille au jugé, et bien que leur construction avait l'air correcte, ils ont ressenti le besoin de déplacer pour valider leur construction.

Dans la situation « Sur quel objet ? », ni Katia ni Malek n'ont pas utilisé le déplacement pour valider leur construction. Katia a utilisé le schème de « matérialisation de la droite », qui ne pouvait pas être invalidé par le déplacement, mais qui n'a pas pu être reconstruit par Malek.

Dans les situations « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter », Katia et Malek utilisent le schème de « déplacement pour valider leur construction » spontanément, bien que leur stratégie de construction s'appuie sur l'utilisation du schème « d'ajustement instrumenté par la mesure ».

Pour construire le symétrique du point N par rapport à la droite (d) (en rouge), Katia et Malek commencent d'abord par mesurer la distance de N à la droite à (d) (le logiciel fournit cette distance directement, ils obtiennent 3,46 cm). Puis ils utilisent le schème d'usage du « tracé au jugé » et ils placent un point au jugé suivant une direction perpendiculaire à (d) à partir de N. Ils mesurent la distance de ce point à la droite (d) (2, 85 cm). Comme ça ne leur convient pas, ils effacent la mesure et le point. Ils n'ont pas besoin de déplacer pour invalider leur construction, puisque la mesure leur suffit pour invalider.

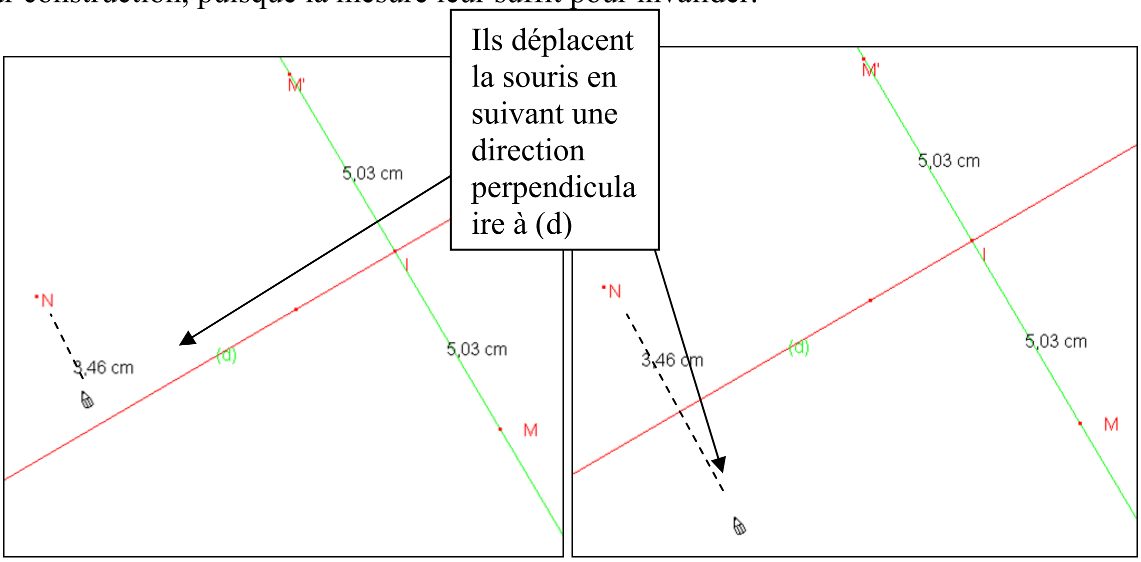


Figure 196. *Katia et Malek placent un point par ajustement visuel non instrumenté*

Ils effacent la distance de N à (d) et ils décident alors de placer un point « au jugé » sur (d) qui se trouverait perceptivement à l'intersection de (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par N. C'est à partir de ce point-là qu'ils utiliseront le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure ».

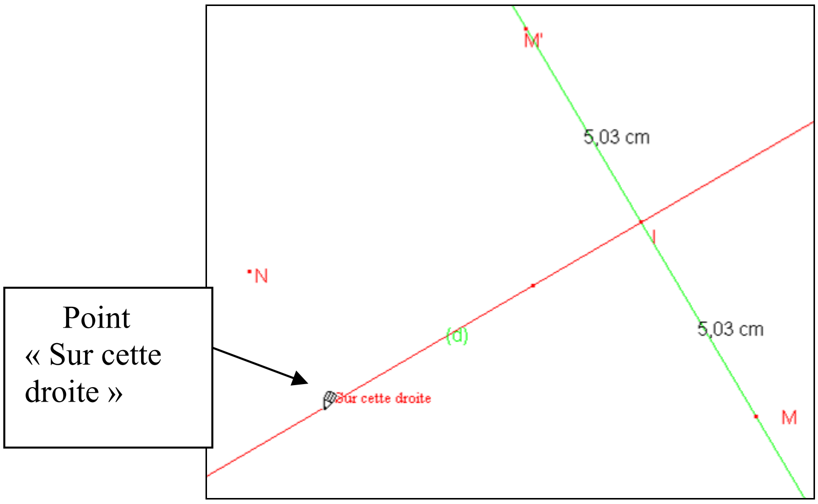


Figure 197. *Ils placent un point sur (d) pour avoir un « point I » de repère sur (d)*

Ils mesurent la distance de N à ce point, puis ils utilisent le schème d'usage « du tracé au jugé » pour placer le « symétrique de N » par rapport à (d). Ils mesurent la distance de ce point au point sur (d) et ajustent par déplacement.

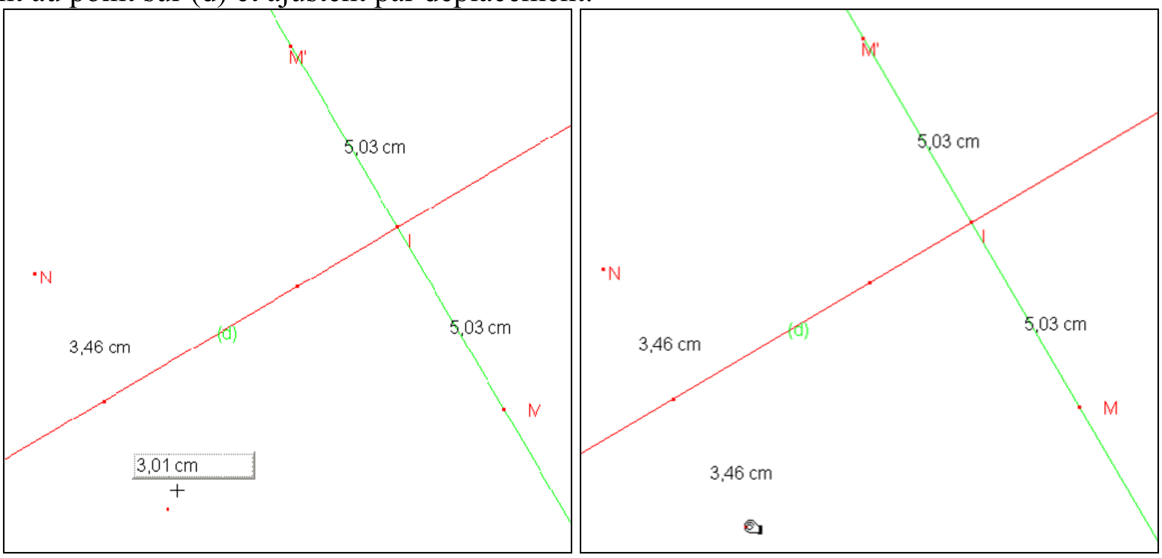


Figure 198. *Schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » pour construire le symétrique de N par rapport à la droite (d) (en rouge)*

Katia : Déplace-le!

Une fois qu'ils obtiennent 3,46 cm des deux côtés de la droite, ils nomment ce point N' et ils attrapent N et le déplacent pour valider leur construction : N' ne bouge pas.

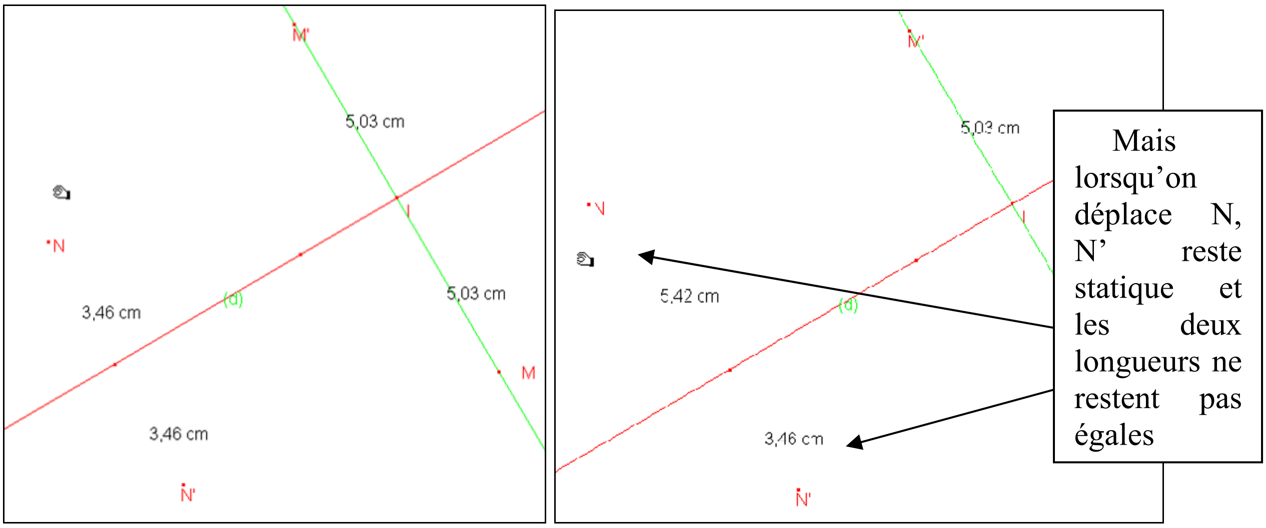


Figure 199. *Ils déplacent N pour valider leur construction*

Katia : Ah ! **Il est lié!**

Le ton dans lequel Katia dit cette phrase, montre qu'elle vient de comprendre que le point M' est lié au point M et que N et N' doivent avoir le même comportement.

Le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » n'empêche pas Katia et Malek d'utiliser le schème de « déplacement pour valider leur construction ».

Pour compléter le rectangle bleu, Katia et Malek commencent par utiliser le schème d'usage du « tracé au jugé » de segments qui se superposent perceptivement avec les côtés incomplets [Ey) et [Bx). Puis, ils attrapent le quatrième sommet qu'ils ont construit et le déplacent pour valider leur construction. Ils rient lorsqu'ils voient que la figure se déforme et ne reste pas un rectangle.

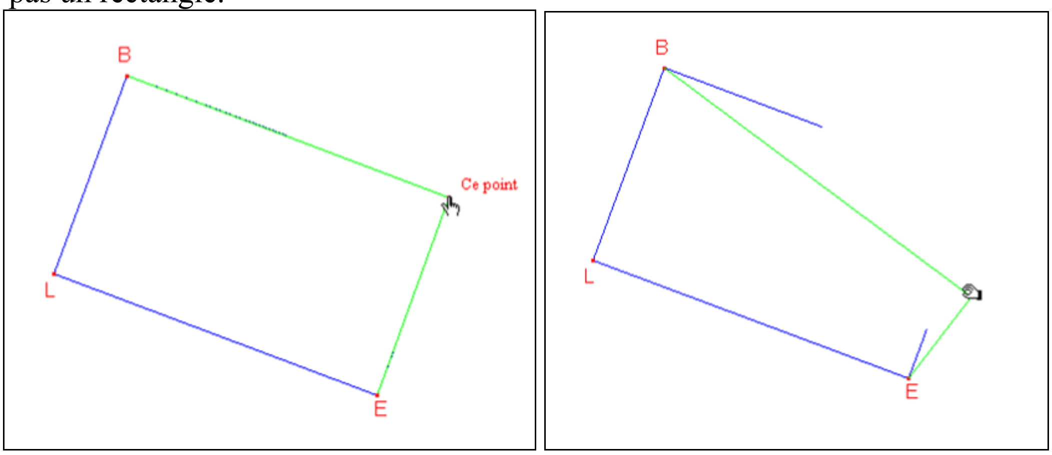


Figure 200. *Ils déplacent pour valider leur construction*

Leur utilisation du schème de « déplacement pour valider » est donc spontanée.

Ils remettent la figure comme avant, puis ils déplacent le point E pour s'assurer que la construction ne peut pas être validée :

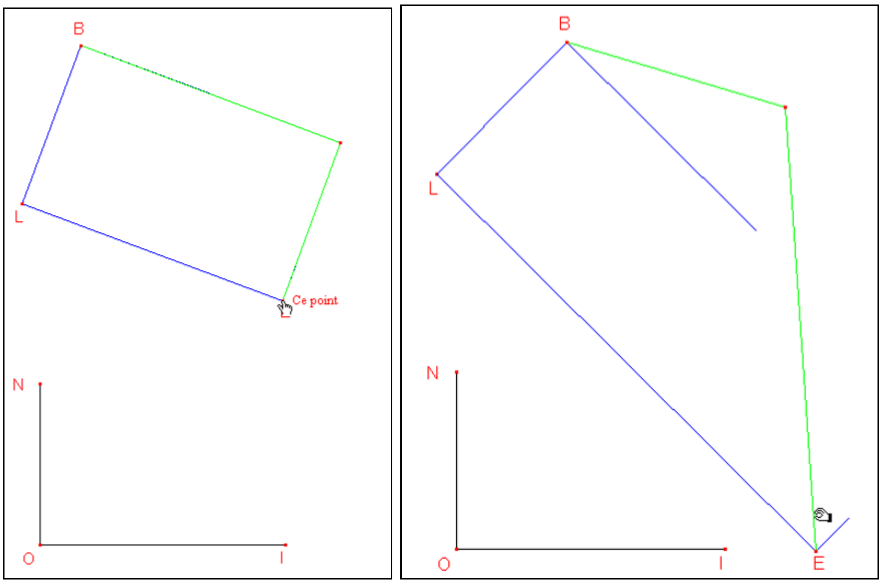


Figure 201. *Ils la remettent comme avant, mais ils déplacent E pour s'assurer qu'elle ne peut pas être validée*

Ils essayent plusieurs stratégies erronées, puis ils placent la figure sur l'horizontale. Ils essayent d'utiliser l'outil « Droite », en cliquant sur les côtés incomplets du rectangle, mais en choisissant visuellement la direction (schème du « tracé au jugé »). Visuellement la construction paraît correcte, alors ils ne ressentent pas le besoin de « déplacer pour valider leur construction ».

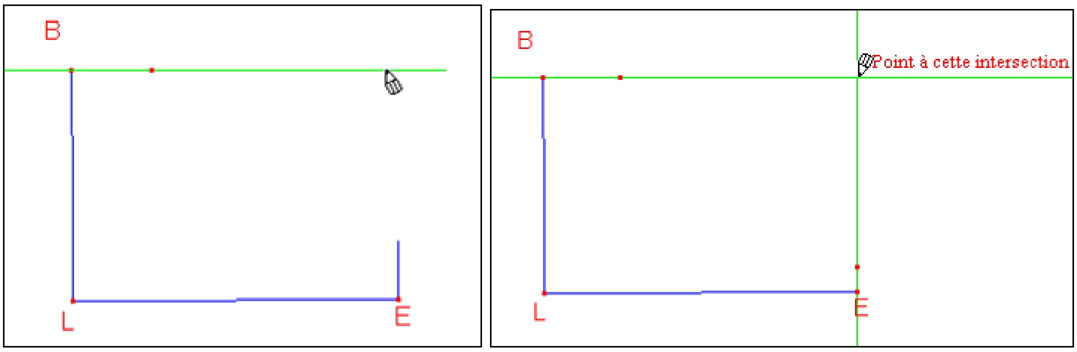


Figure 202. *Ils valident leur construction visuellement et ne ressentent pas le besoin de déplacer*

Dans la figure rose (2), ils utilisent à nouveau le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » de l'angle formé par la demi-droite horizontale tracée passant par R et la demi-droite verticale passant par S. Une fois qu'ils obtiennent un angle de 90°, ils déplacent le point O pour valider leur construction :

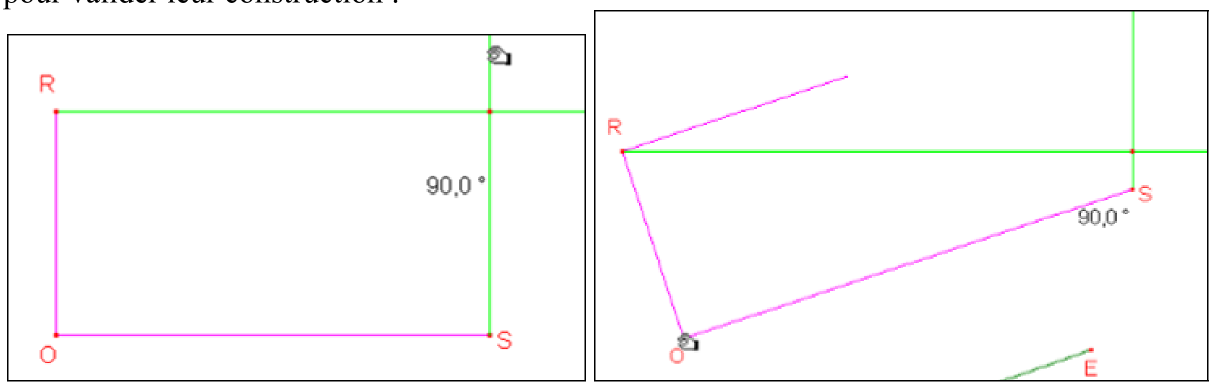


Figure 203. *Ils utilisent le déplacement pour valider leur construction*

Malek : Eh ben non!

Malek utilise donc le déplacement pour valider sa construction de manière spontanée, sans que l'enseignant ait besoin de lui dire de le faire.

Après avoir essayé des stratégies erronées pour compléter le rectangle bleu, ils reviennent à la figure rose, l'observateur intervient et les guide dans le tracé de la droite passant par R et par un point appartenant au côté incomplet [Rx] :

L'observateur : Cette droite tu veux qu'elle passe par quoi ?
Katia : Par R
L'observateur : Par R
Malek : **Ah ouais!**
L'observateur : Alors dis lui de passer par R!

Ils cliquent sur R :

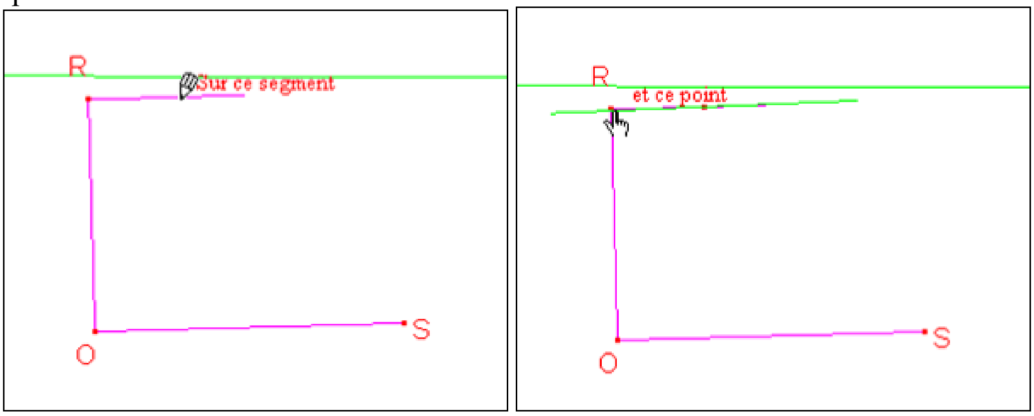


Figure 204. *Guidés par l'observateur, ils cliquent sur le sommet et sur le côté*

Mais Katia n'est pas contente parce que la droite tracée n'est « pas droite ».

Malek : Ben non parce que le truc...
L'observateur : Ben non parce que (OS) elle est pas droite
Katia : Ah oui!
L'observateur (après avoir déplacé le point O) : Mais est-ce qu'elle est droite par rapport à ce segment-là [OR] ? Est-ce que ça fait... Qu'est-ce qu'on voudrait que ça fasse ? (en montrant l'angle formé par (OR) et la nouvelle droite tracée).

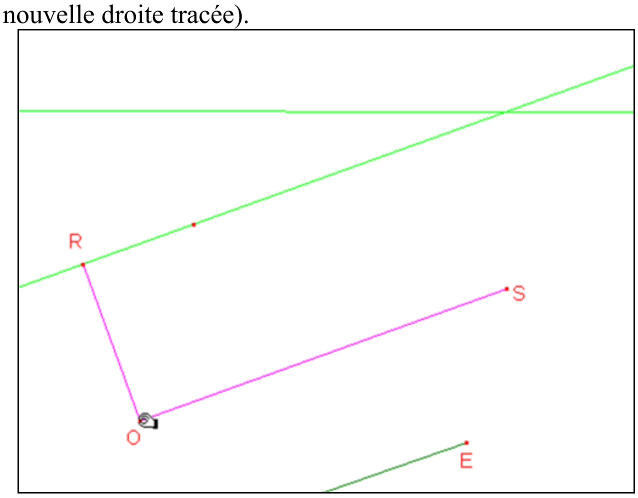


Figure 205. *Validation de la construction par déplacement*

Katia : Que ça reste comme ça
L'observateur : Que ça reste comme ça, mais comment ? Par rapport à [OR] ?
Malek : Euh... parallèle, euh! Perpen... euh... perpendiculaire
Katia : Parallèle ouais
L'observateur : Ouais... Perpendiculaire ou parallèle à (OS). Ok...
Malek : Maintenant il faut faire pareil mais là (en montrant l'endroit où devrait être le quatrième

côté du rectangle rose)...

Le déplacement du point O par l'observateur et l'intervention sur la relation entre [OR] et [OR] a permis de les convaincre de la validité de la construction.

Afin de compléter le rectangle rose (2), ils utilisent le schème d'usage du « tracé au jugé » pour tracer une droite perceptivement perpendiculaire à (OS) passant par S et par un point qui appartient à la droite tracée passant par R.

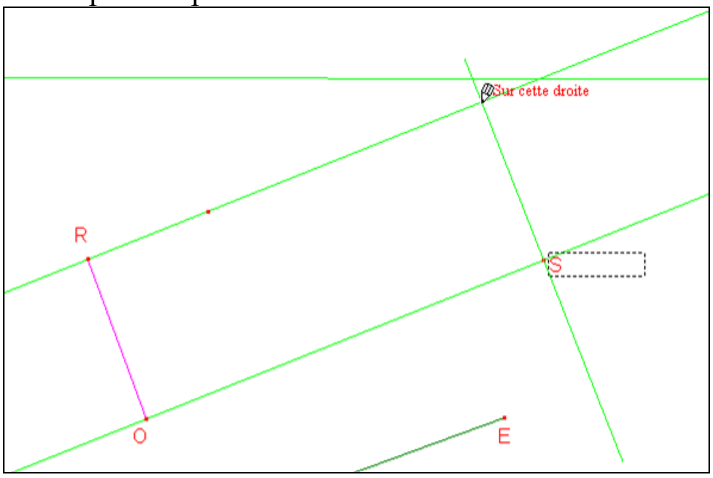


Figure 206. *Ils tracent une droite perceptivement perpendiculaire à (OS)*

Afin de valider leur construction, ils mesurent l'angle formé par les droites (Rx) et la droite tracée passant par S, mais ils obtiennent un angle de 92,7°.

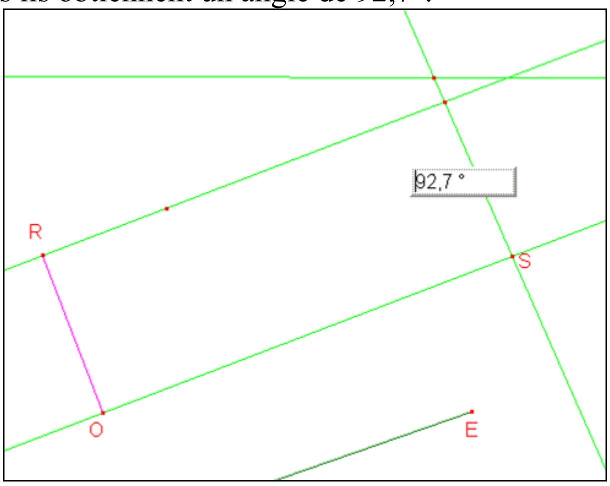


Figure 207. *Ils mesurent l'angle formé par la droite (Rx) et la droite tracée passant par S*

Katia en montrant l'angle mesuré : Mais ici **c'est pas un angle droit!**

Ils attrapent alors le point O et ils le déplacent, la droite tracée par S reste statique et l'angle varie.

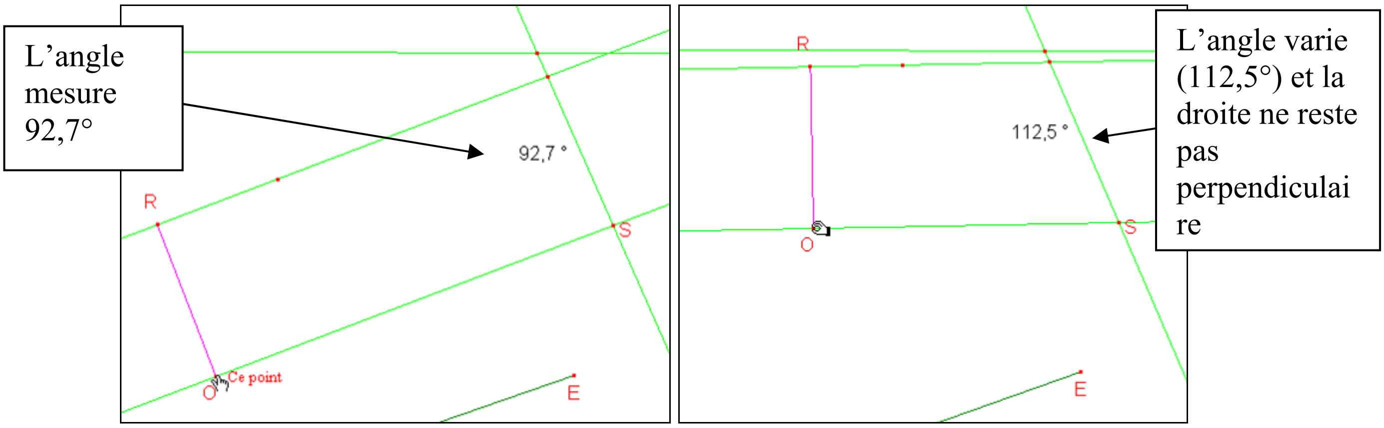


Figure 208. *Mais lorsqu'on déplace le point O, l'angle n'est pas droit*

Ils utilisent alors le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » pour obtenir un angle de 90°. Puis, ils attrapent et ils déplacent le point S pour « valider leur construction », mais l'angle ne reste pas droit. Ils n'invalident pas et remettent la figure comme avant.

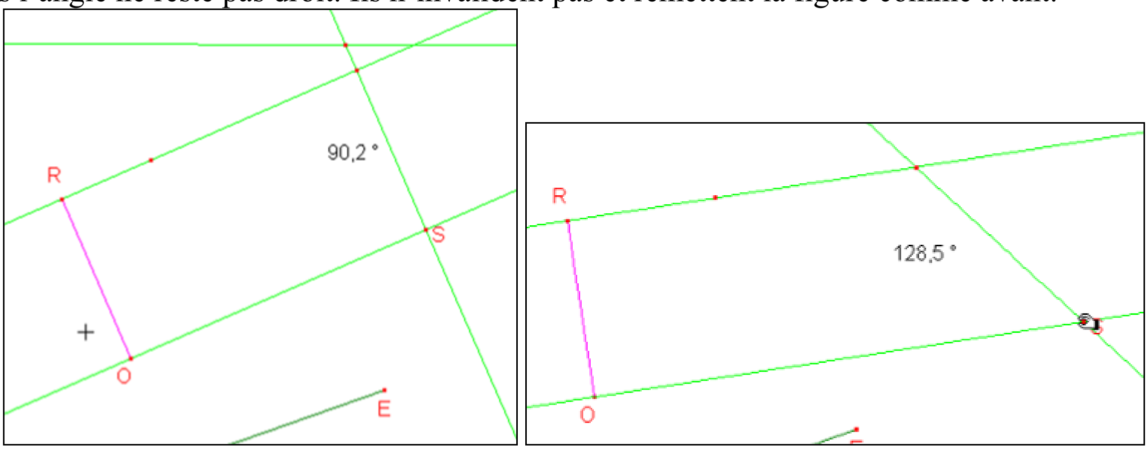
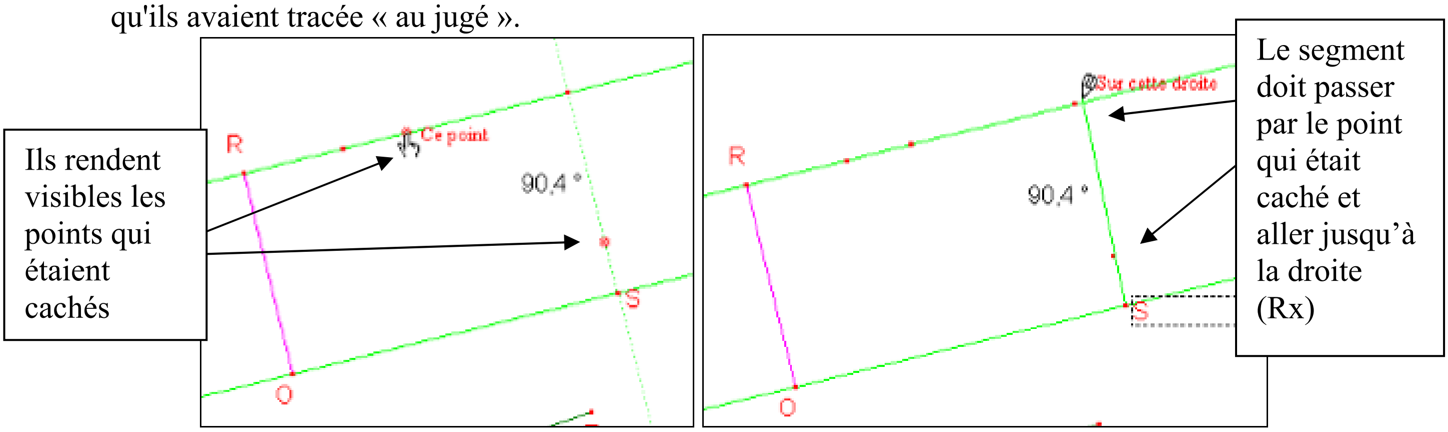


Figure 209. *Ils ajustent d'abord par déplacement pour obtenir un angle de 90°, puis ils déplacent pour valider leur construction*

Finalement, ils cliquent sur l'outil « Cacher/montrer » et ils rendent visibles les points qui avaient été cachés aux extrémités des côtés incomplets du rectangle et ils cachent la droite qu'ils avaient tracée « au jugé ».



Puis ils tracent le segment qui joint S à la droite (Rx) en utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé », de manière à que le segment passe perceptivement <u>sur</u> le point qui avait été caché. Cette dernière stratégie ne peut être invalidée que par le déplacement du point placé « au jugé » sur la droite passant par R. En effet, dans la construction du rectangle à terminer rose, le morceau de côté [Rx] a une longueur égale à OS/2. Cela entraîne que le quatrième sommet construit au jugé par les élèves sur le prolongement du côté [Rx] reste à une distance égale aussi à OS/2 du point x caché. Cela suffit à conserver le rectangle au cours du déplacement.

De manière générale, nous pouvons dire que Katia et Malek utilisent de manière spontanée le schème « déplacer pour valider une construction ».

Dans « Pajérond », ils l'ont utilisé après avoir construit la roue et être passé par la construction du milieu avec l'outil du logiciel. Même si perceptivement la construction pourrait être validée, ils ressentent le besoin de déplacer pour valider leur construction.

Dans « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter » on peut voir l'utilisation spontanée du schème. Cependant, on remarque aussi une alternance entre le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » et le schème de « déplacement pour valider ».

III.2 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété »

Dans la situation « Toujours/parfois vrai », Katia et Malek vont commencer d'abord à valider les propriétés sur des dessins statiques, en n'utilisant que la mesure d'angles et de longueurs ; puis, ils introduisent le déplacement des points de la figure, mais continuent à utiliser la mesure comme moyen de contrôle pour décider si les propriétés se conservent ou non.

Katia et Malek commencent par explorer la figure bleue (1). Ils mesurent d'abord l'angle formé par les droites (GD) et (FG) (90,0°) et en conséquence répondent « oui » à la question « (DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? ».

Malek : T'as fait quoi alors ?
Katia **: J'ai écrit oui! (…) ça se voit!** Après c'était lequel qu'il faut faire ?
Malek : (DG) et (EF)
Katia : (DG)...
Malek : Sont-elles parallèles ?

Katia essaye d'utiliser l'outil « Droite parallèle » mais n'y arrive pas.

Katia : **Ah! Faut mesurer!**

Elle prend l'outil de mesure et elle mesure la longueur FE (3,90 cm). Mais elle se rend compte que cette mesure ne lui permet pas de conclure et qu'elle aurait plutôt besoin de la distance qui sépare les segments [DG] et [EF] :

Katia : Ah non! C'est là (elle montre avec la souris le segment [DE]) qu'il faut mesurer!
Malek : C'est pas grave! On fait lequel ?
Katia : ça (du point E) à ça (au point D)

Malek efface la mesure de FE et il mesure FG (4,15 cm) et DE (4,15 cm).

Katia : **Oui, oui ils sont parallèles.**

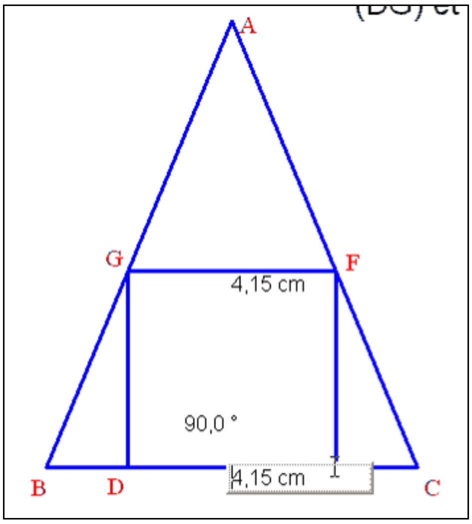


Figure 210. *Katia et Malek mesurent pour décider si (GD) et (EF) sont parallèles*

On voit donc ici que Katia et Malek utilisent la mesure pour décider si les droites (DG) et (EF) sont parallèles. Comme GF = ED, alors ils concluent « oui, les droites sont parallèles ». Cette conception de parallèles s'appuie sans doute dans le théorème-en-acte que nous pouvons formuler ainsi :

Théorème-en-acte : « Si deux points, l'un appartenant à une droite (D) et l'autre à une droite (D'), sont à même distance que deux autres points, l'un de (D) et l'autre de (D'), alors les deux droites (D) et (D') sont parallèles ».

Ce théorème est erroné, il manque la condition que les deux segments définis par les deux points sont parallèles. Katia et Malek utiliseront ce théorème-en-acte pour décider du parallélisme des droites dans les trois figures.

Mais Katia et Malek se rendent compte que pour décider de la validité de ces propriétés, ils doivent d'abord déplacer. La consigne de noter les points déplacés a pu jouer un rôle dans cette prise de conscience comme on peut le remarquer dans l'exclamation de Katia :

Malek : Après c'est figure verte...
Katia : **Il faut noter les points qu'on déplace!**
Malek : Ah!!!

Ils attrapent alors le point F et ils le déplacent et GF et DE n'ont plus la même mesure :

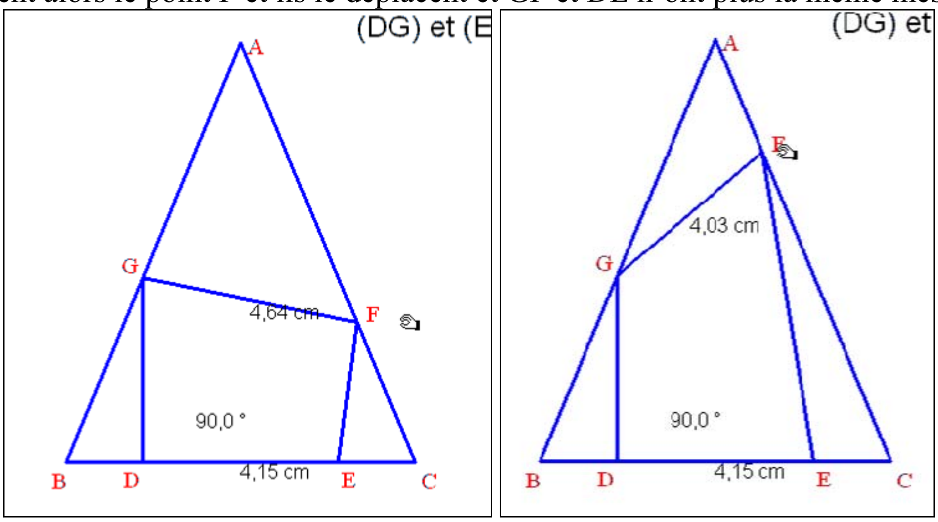


Figure 211. *Ils déplacent le point F et GF et DE n'ont plus la même mesure*

Malek : T'as vu ?

Ils déplacent F sur le segment [AC], puis le remettent dans sa position précédente, de façon à ce que GF et ED aient la même mesure. Ils essayent de déplacer le point G, puis ils attrapent et déplacent D.

Malek : Le D...

Mais cette fois-ci, ils laissent la figure dans une position très différente de la position initiale : ils commencent donc à comprendre que le but de la situation est de trouver des positions qui permettent, soit d'invalider les propriétés, soit de conclure qu'elles sont vraies après avoir utilisé plusieurs déplacements.

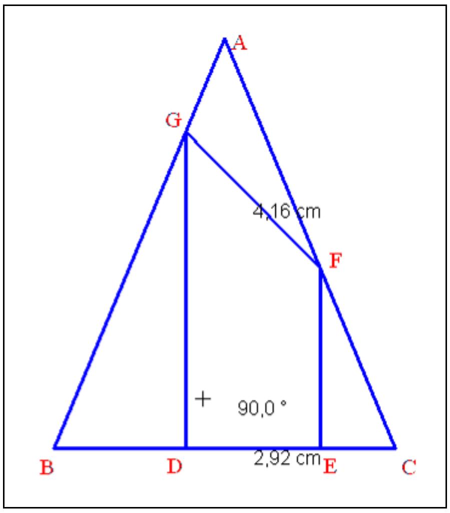


Figure 212. *Ils commencent à laisser la figure dans des positions autres que l'initiale*

Ils attrapent et déplacent le point E et ils le superposent avec le point D, en formant un triangle GFE et dans lequel on voit bien que les droites (FE) et (GD) ne sont pas parallèles : ils mettent donc en œuvre le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement ».

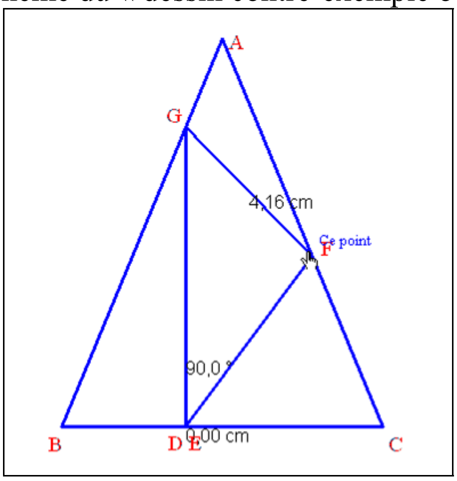


Figure 213. *Schème du dessin contre-exemple : (DG) et (EF) ne sont pas parallèles*

Katia et Malek essayent donc tous les déplacements possibles (D, E, F et A) avant de pouvoir décider si une propriété géométrique est vraie ou fausse.

On voit donc une première évolution dans la stratégie utilisée par Katia et Malek : au début ils se contentent d'utiliser la mesure pour décider si les propriétés sont vraies ou fausses, puis décident de déplacer tous les points de la figure pour pouvoir la valider.

Cependant, Katia et Malek n'abandonnent pas l'utilisation de la mesure et dans la figure verte (2), ils commencent par mesurer l'angle formé par (GD) et (BC) (90,0°). Ils marquent « oui » dans leur fiche. Puis ils profitent pour mesurer le même angle dans la figure rose (90,0°). On peut noter la force de la mesure qui peut faire obstacle au déplacement pour valider. Cette force de la mesure provient de la géométrie de l'environnement papier crayon apprise à l'école élémentaire.

Après la phase collective dans laquelle le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » est socialement partagé et dans laquelle une nouvelle règle du contrat Cabri s'établit (pour décider de la validité d'une propriété, il faut déplacer <u>tous</u> les points de la figure), l'enseignant leur demande de reprendre la fiche et les figures sur lesquelles ils avaient déjà travaillé et de vérifier leurs réponses. Elle leur demande d'écrire dans la ligne grisée de la fiche : « Est-ce que les droites (GF) et (BC) sont parallèles ? ».

Katia et Malek reprennent alors la figure bleue et ils mesurent les longueurs GD (3,91 cm) et FE (3,90 cm), puis DE (4,15 cm) et GF (4,15 cm).

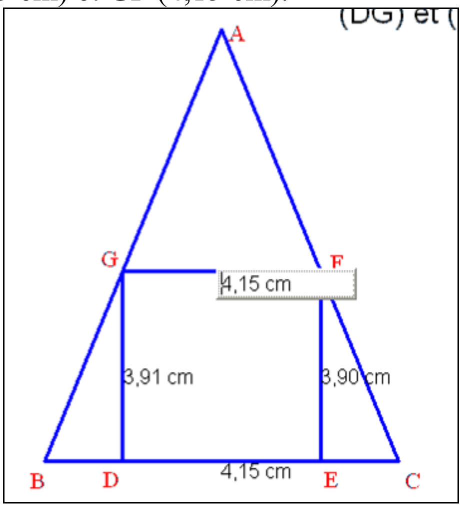


Figure 214. *Ils mesurent GD et EF pour décider si les droites (GF) et (BC) sont parallèles*

Katia : **Essaye de bouger...**

Katia a donc bien compris que, s'ils veulent décider si deux droites sont parallèles ou perpendiculaires, il faut les déplacer avant de dire « oui » ou « non ».

Malek attrape le segment [AC] et il le déplace.

Katia : **Non!**

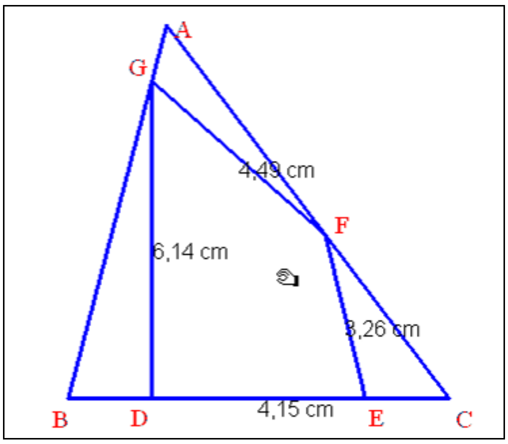


Figure 215. *(GF) et (BC) ne sont pas parallèles*

Ils répondent « non » dans leur fiche à la question « (BC) et (GF) sont-elles parallèles ? » :

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? oui	~~oui~~	F, D, E, A
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ? NON	oui	F, D, E
BC, GF sont parallèle.	non	

Figure 216. *Réponses de Katia et Malek*

Dans la figure rose (3), ils mesurent GF et DE.

Katia : Mais il faut les bouger!

Malek déplace peu le point D.

Katia : Ah ouais! **Lui il est perpendiculaire!**

Malek attrape à nouveau le point D et il le déplace lentement, en utilisant un cinéma-déplacement.

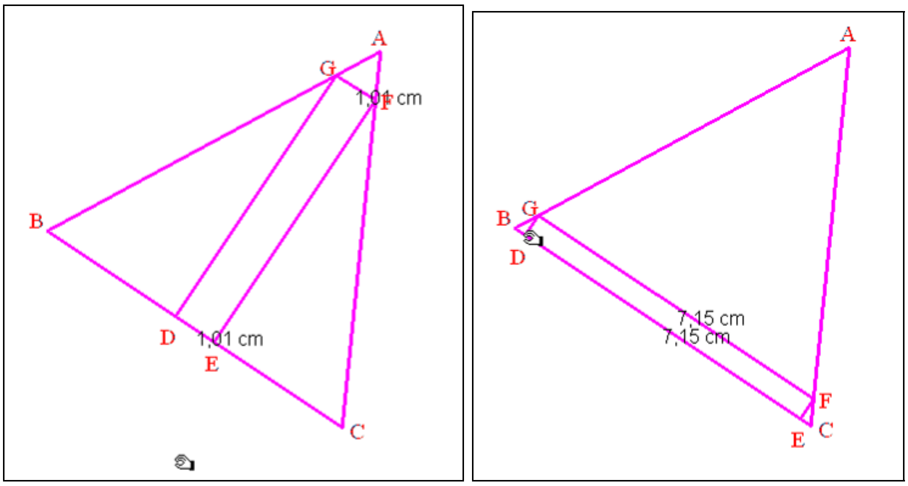


Figure 217. *Déplacement du point D dans la figure rose (3)*

Katia : **Ouais ils sont perpendiculaires.**

Ici on voit apparaître l'utilisation du cinéma-déplacement, en déplaçant lentement, qui leur permet de valider la propriété « les droites (DG) et (BC) sont perpendiculaires ».

Dans la figure verte (2), ils mesurent ED et GF (3,73 cm les deux). Ils attrapent et déplacent le point D, en utilisant le cinéma-déplacement et ils font « balancer » (GD) et (EF) parallèlement, d'un côté et de l'autre.

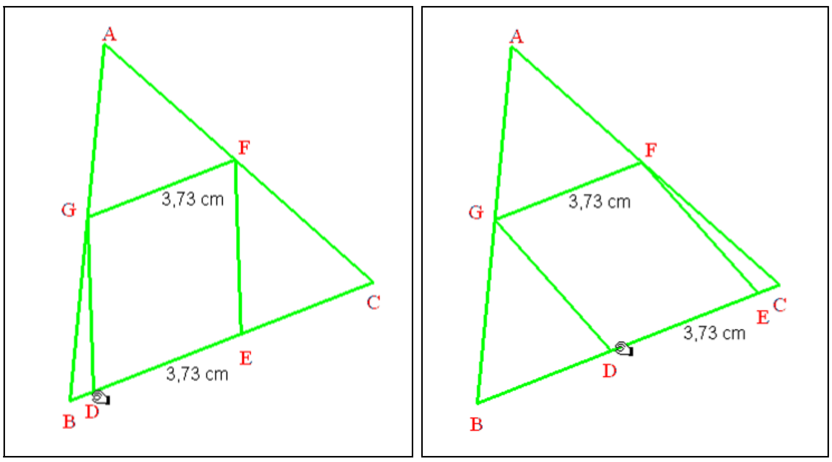


Figure 218. *(DG) et (EF) se « balancent » parallèlement ; de plus, GF et ED conservent la même distance*

Ils essayent de déplacer le point F, puis ils attrapent et ils déplacent le point G, sur le segment AB, en allant jusqu'aux extrémités A et B.

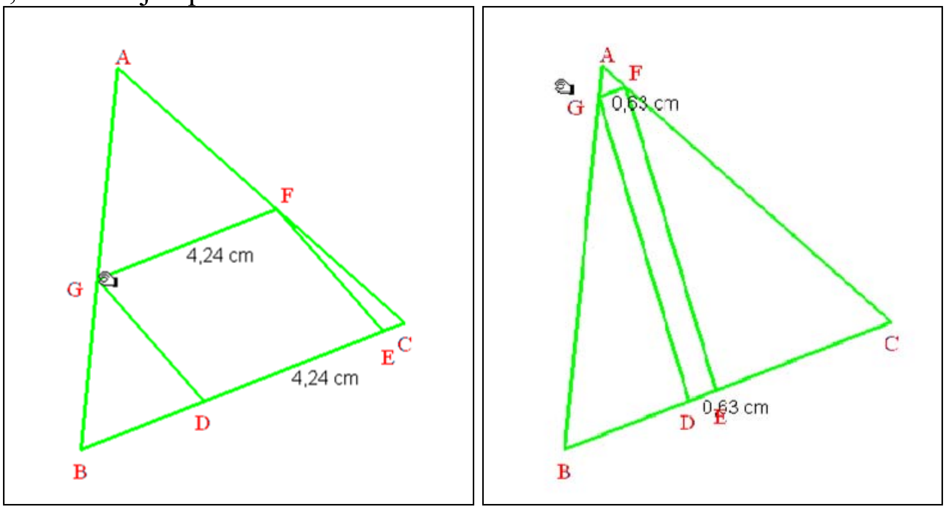


Figure 219. *Les droites (GD) et (EF) restent parallèles*

Katia : **Mais ils sont parallèles!**

Katia identifie les propriétés géométriques de la figure grâce au déplacement.

Ils ont donc déplacé tous les points sauf le point A

Katia et Malek décident de revenir sur la figure bleue (1) pour pouvoir décider s'ils valident ou non le parallélisme entre les droites (BC) et (GF) :

Katia : (BC) et (GF) c'est ça ? (BC) et (GF)...

Katia attrape et déplace le point F :

Katia : Non! (les droites (GF) et (BC) ne sont pas parallèles)

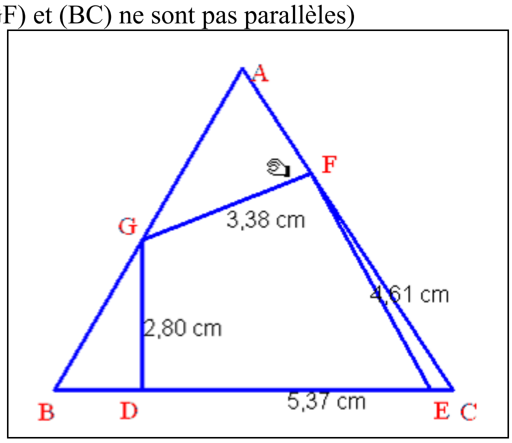


Figure 220. *Katia déplace le point F pour décider si (GF) et (BC) sont parallèles*

Le déplacement utilisé ici par Katia est contrôlé : elle sait ce qu'elle déplace, elle sait ce qu'elle observe et elle peut conclure sur la propriété qu'elle observe. Elle s'est donc approprié le déplacement pour valider une conjecture : ils déplacent pour valider d'abord, puis rencontrent un contre-exemple et ils sont capables de conclure et d'invalider.

Katia décide alors d'explorer à nouveau la figure rose (3). Elle utilise le schème d'usage de « recherche des points qui bougent », en essayant de déplacer le point G, puis B, puis elle attrape le point D et elle le déplace. Elle essaye aussi d'attraper le point E, puis elle attrape et déplace le point A. Elle déplace donc <u>tous</u> les points de la figure.

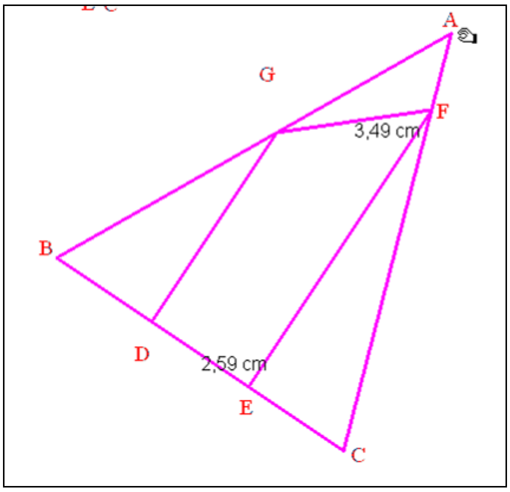


Figure 221. *Le déplacement du point A leur permet de dire que les droites (GF) et (BC) ne sont pas parallèles*

Malek : **Ah ouais!**

Katia laisse le point A dans une position dans laquelle on voit bien que (GF) et (BC) ne sont pas parallèles. Elle utilise donc le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement ».

Finalement, dans la figure verte (2), ils attrapent et ils déplacent le point A, mais celui-ci ne se déplace que sur la médiatrice de [BC] et cela choque un peu Malek :

Malek : Aï regarde le problème là!

Katia : Pas de problème! Il est parallèle!

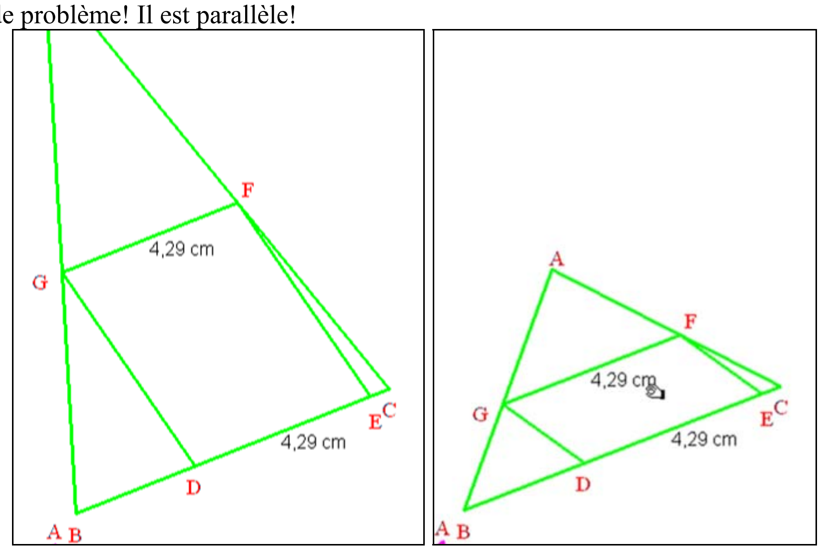


Figure 222. *Katia déplace le point A dans la figure verte (2), mais ça choque un peu Malek*

Ils répondent « oui » au parallélisme et « oui » à la perpendicularité :

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	A,B
(?G) et (EF) sont-elles parallèles ?	Oui	A,C

Figure 223. *Réponses de Katia et Malek*

Katia et Malek n'invalident donc pas la perpendicularité dans la figure verte. Le parallélisme est plus facilement identifiable par le mouvement de (DG) et (EF) qui se « balancent » lorsqu'on utilise le cinéma-déplacement, alors que la perpendicularité est plus difficile à invalider par un contrôle uniquement perceptif.

Bien qu'au début, Katia et Malek commencent par décider si les propriétés sont vraies ou fausses à partir des dessins statiques, une fois qu'ils commencent à utiliser le déplacement, ils construisent le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » ; ils identifient les propriétés de la figure au cours du déplacement, ce qui leur permet de valider ou invalider leurs conjectures.

Katia et Malek ont construit un schème de « déplacement pour valider le parallélisme ». Ils s'appuient sur l'utilisation de la mesure et du théorème-en-acte qu'ils ont construit et avec lequel ils contrôlent les déplacements qu'ils font, ce qu'ils observent et ceci leur permet de décider si la propriété se conserve ou non au cours du déplacement. De plus ils mettent en œuvre la règle d'action relative au déplacement de tous les points pour valider.

Pour la perpendicularité, par contre, l'invariant spatial est absent et empêche le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » de fonctionner. Ce n'est pas le manque de points déplacés qui met en défaut le fonctionnement du schème. Comme nous avons pu le voir, ils utilisent le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » et ils les déplacent tous les points avant de décider de la validité d'une propriété.

III.3 Schème d'action instrumentée du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement »

Comme nous l'avons vu, dans « Toujours/parfois vrai », Katia et Malek construisent le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement ». Au début ils déplacent les points de la figure, puis la remettent comme elle était auparavant. Mais une fois qu'ils ont construit ce schème, ils déplacent les points de la figure et utilisent le photo-déplacement pour la mettre dans une position leur permettant d'invalider une propriété géométrique.

La construction de ce schème leur permet ensuite d'utiliser le déplacement pour invalider une construction et ils l'utilisent d'ailleurs comme un moyen pour argumenter entre eux.

Dans « Rectangles à compléter », par exemple, Malek utilise ce schème pour montrer à Katia que leur construction doit être invalidée.

Après avoir construit des segments utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé » pour qu'ils se superposent perceptivement avec les côtés incomplets du rectangle bleu (1), Malek déplace le quatrième sommet construit pour valider leur construction, puis le point E, mais il voit que leur construction ne peut pas être validée.

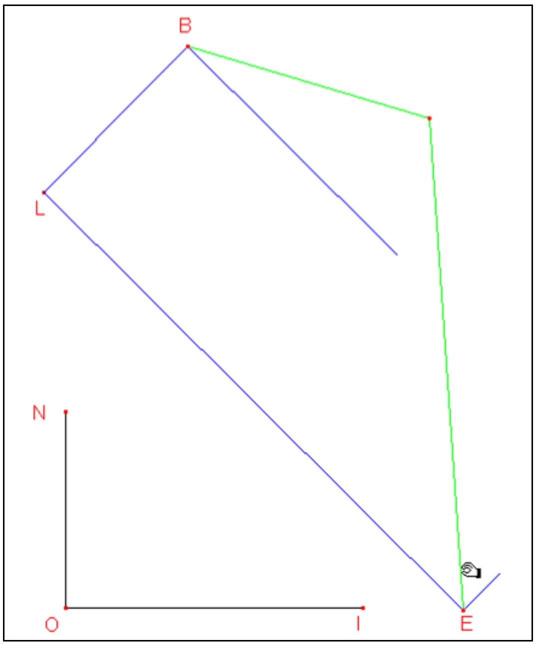


Figure 224. *Malek déplace le point E pour valider leur construction*

Mais Katia n'est pas convaincue de l'invalidation de leur construction :

Malek : Ah non! C'était mal
Katia : **Non, c'est juste!**
Malek : Non...
Katia : **Si si!**
Malek : Ah bon ?
Katia : **ça reste un rectangle, non ?**

Malek utilise alors le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » et il met la figure dans une position qui lui permet de l'invalider. Il attrape le point E et il le déplace :

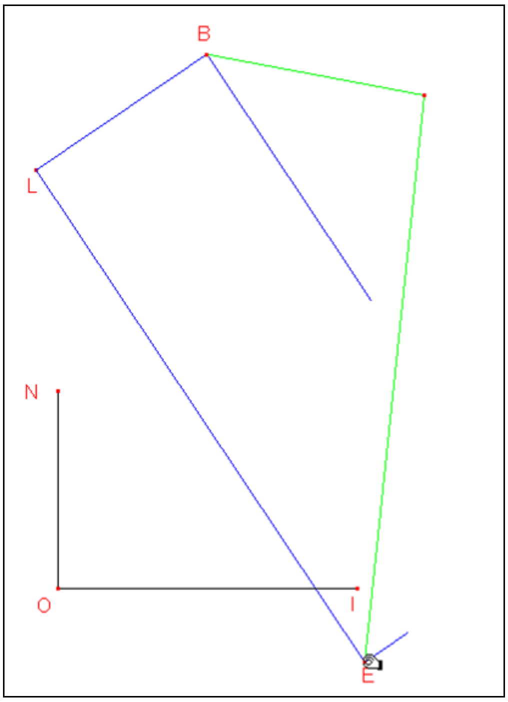


Figure 225. *Malek déplace le point E pour montrer un contre-exemple à Katia*

Malek : **Non, ça fait un rectangle ça ? Je sais comme il est fait un rectangle!**

Ceci montre l'importance et la pertinence de la situation « Toujours/parfois vrai » dans notre ingénierie didactique, puisqu'elle a permis la construction du schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », ce qui permet aux élèves d'utiliser le déplacement pour invalider une construction.

III.4 Schème d'action instrumentée de « vérification que la trajectoire passe par un point »

Dans la situation « Sur quel objet ? », Malek utilise d'abord ce schème dans la phase de validation, en tant que récepteur, puis lors de la phase d'exploration en tant qu'émetteur.

1) Phase de validation

Malek reçoit le message de Katia, mais comme la construction décrite par Katia ne peut pas être reproduite par Malek (dépend du point vert mobile), ils sont obligés de passer directement à la phase de validation. Katia construit d'abord une droite passant par le point C et visuellement passant par G. Puis, elle construit le segment [DB].

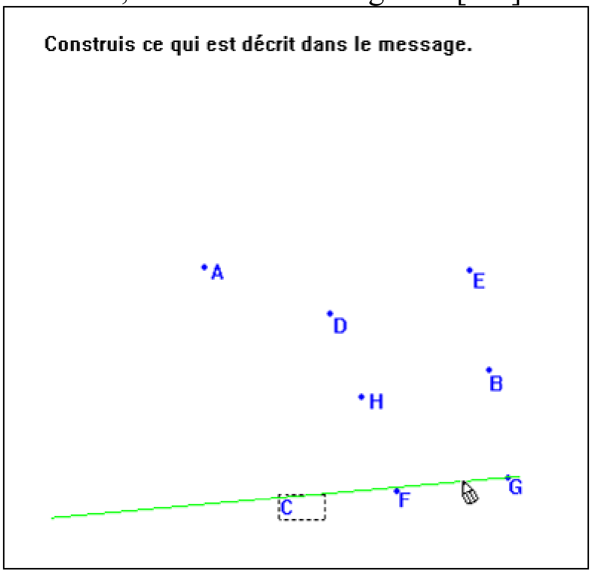


Figure 226. *Katia trace une droite passant par le point C pour montrer à Malek la trajectoire du point vert*

Malek regarde ce que d'autres élèves ont fait et il se demande si la construction de la droite est correcte. Alors ils ouvrent le fichier A1 sur lequel a travaillé Katia afin de vérifier la trajectoire du point rouge et du point vert. Katia dit à Malek de déplacer le point rouge pour observer sa trajectoire. Il le déplace :

Malek : Ah ouais!
Katia : Et lui (le point vert) essaye de le déplacer pour voir...
Malek en le déplaçant : Ah! Que sur la ligne!

Malek s'arrête sur les points C et F, utilisant le schème de « vérification que la trajectoire passe par un point ». Ceci lui permet d'invalider la construction faite par Katia :

Malek : Et regarde **le G est dehors**.

2) Phase d'exploration

Il attrape et il déplace le point rouge, en essayant vraiment d'observer les limites du déplacement du point : d'un côté il peut se déplacer sans limites, alors que de l'autre il est bloqué par le point F.

Il dit qu'il a fini, mais lorsque l'observateur lit son message (« Le point rouge et le point vert. Le point rouge se déplace sur une demi-droite ») il l'interroge sur la précision de la description :

L'observateur : Quelle demi-droite ? Laquelle ?

Malek : Sur la demi-droite F… Il y a qu'un point sur la demi-droite.
L'observateur : Quel point ?
Malek : Sur la demi-droite F… Si je lui dis sur la demi-droite F et après sur le...
L'observateur : T'es sûr qu'une demi-droite on peut la définir à partir d'une seule lettre ?
Malek : Ah non!
L'observateur : Ah non! Tu crois qu'elle va pouvoir le construire après ?

Il attrape le point rouge et il le déplace autour du point A, en utilisant le schème de vérification que la trajectoire passe par ce point.

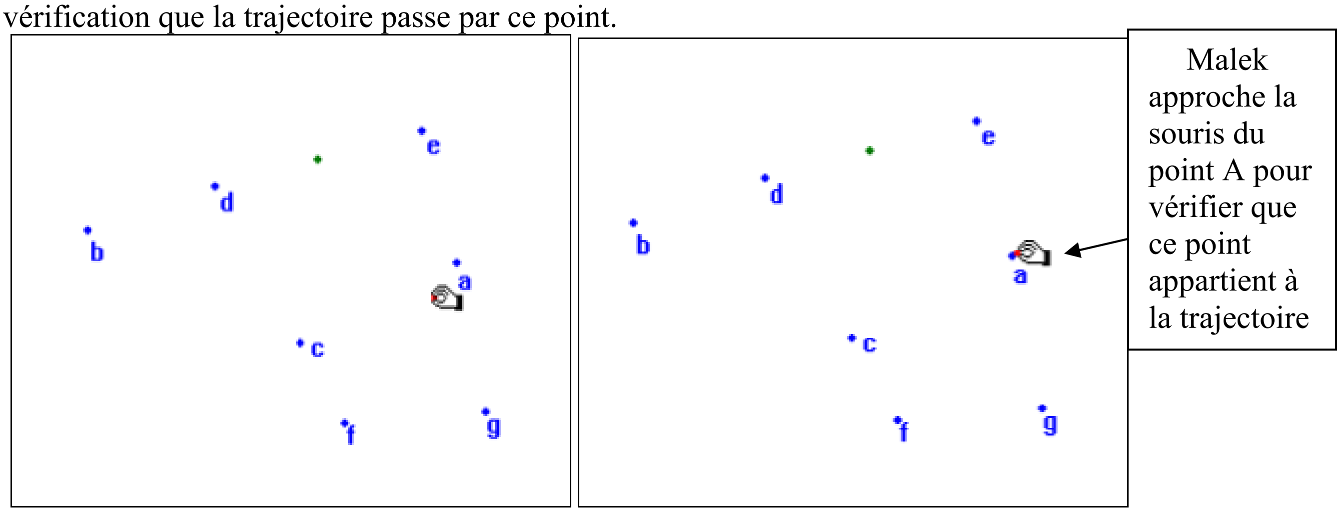


Figure 227. *Malek déplace le point rouge autour du point A pour vérifier que A appartient à la trajectoire*

Malek : Ah ça y est! Je sais! (...) ça y est!

Il écrit dans son message « le point rouge se déplace sur la demi-droite FE et le point vert sur un segment [DE] ».

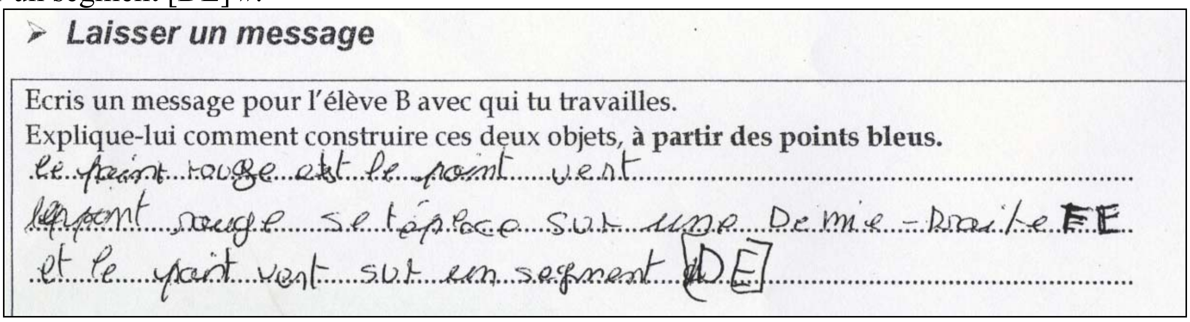


Figure 228. *Message de Malek a Katia*

III.5 Genèse instrumentale

Le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction » s'est construit au cours de l'année. Il est immédiatement à l'œuvre dans « Pajérond » mais on peut supposer que le contexte de la voiture le favorisait et qu'il n'est pas lié alors à l'idée de valider une construction géométrique. Les situations suivantes montrent en effet que la validation de propriétés peut être faite par Katia et Malek sur des dessins statiques et que le déplacement pour ajuster et la vérification par des mesures sur des dessins statiques coexistent avec le déplacement pour valider une construction ou pour valider une propriété, signe de l'appropriation incomplète du schème de déplacement pour valider une construction.

L'institutionnalisation par l'enseignante dans « Parfois/toujours vrai » a joué un rôle important dans la prise de conscience de la nécessité de déplacer tous les points pour valider une propriété ou une construction. La construction du schème de « déplacement pour valider » se fait donc grâce à la construction du schème de recherche de tous les points que l'on peut attraper et déplacer (schème de « recherche des points qui bougent »).

Le schème de « déplacement pour valider une construction » interagit sur le schème de dépendance dans la situation « Construire le symétrique » et permet ainsi à Katia de prendre pleinement conscience de la dépendance de M’ par rapport à M, dépendance qui n’avait pas été remarquée de cette façon dans la première partie de la situation alors que la consigne était justement d’observer le comportement de M et M’ (ils avaient vu qu’ils se déplaçaient « symétriquement »). On voit ainsi comment la mise en œuvre d’un schème peut constituer une opportunité pour que se construise un invariant, ici la notion de dépendance entre points. Cela confirme aussi qu’une tâche d’observation a eu peu d’effet alors qu’une tâche de construction au moment de la validation par le déplacement amène les élèves à analyser plus en profondeur un phénomène.

IV. HANNA ET IDRISS

Hanna et Idriss sont des élèves moyens (moyen +).

Nous allons voir d’abord leur appropriation du schème de « déplacement d’un point », puis nous étudierons l’évolution du schème de « déplacement pour valider une construction ».

Nous regarderons également le schème « déplacer pour valider une conjecture/propriété », ainsi que le schème « d’identification de l’objet-trajectoire » et le schème « d’identification des invariants d’une figure ».

IV.1 Construction du schème d’usage de « déplacement d’un objet »

Dans la première situation, Géo, Hanna essaye d'attraper et de déplacer des points, mais elle n'y arrive pas. Idriss essaye alors de la guider en lui indiquant ce qu’elle doit déplacer, mais ça ne l’aide pas :

Idriss : Prends-la du bout du nez, du nez…

Puis il lui explique la règle d’action :

Idriss : fais bouger comme ça… **reste appuyé dessus et fais comme ça** …

Hanna a donc besoin de s’approprier cette règle d’action, pour pouvoir construire le schème de « déplacement d’un objet ». Une fois qu’elle réussit à attraper les points, elle attrape un des sommets des triangles constituant les yeux et elle le déplace en faisant tourner les yeux. Puis elle déplace le petit cercle du pompon du chapeau en le faisant passer d’un côté et de l’autre du chapeau.

Ils essayent de déplacer les sommets du grand triangle du chapeau de Géo mais ces points sont non-attrapables. Ils attrapent et ils déplacent le sommet du trapèze de la bouche qui permet de changer la forme. Puis ils attrapent le centre du grand cercle et ils le déplacent en faisant varier la taille de Géo et en le faisant tourner.

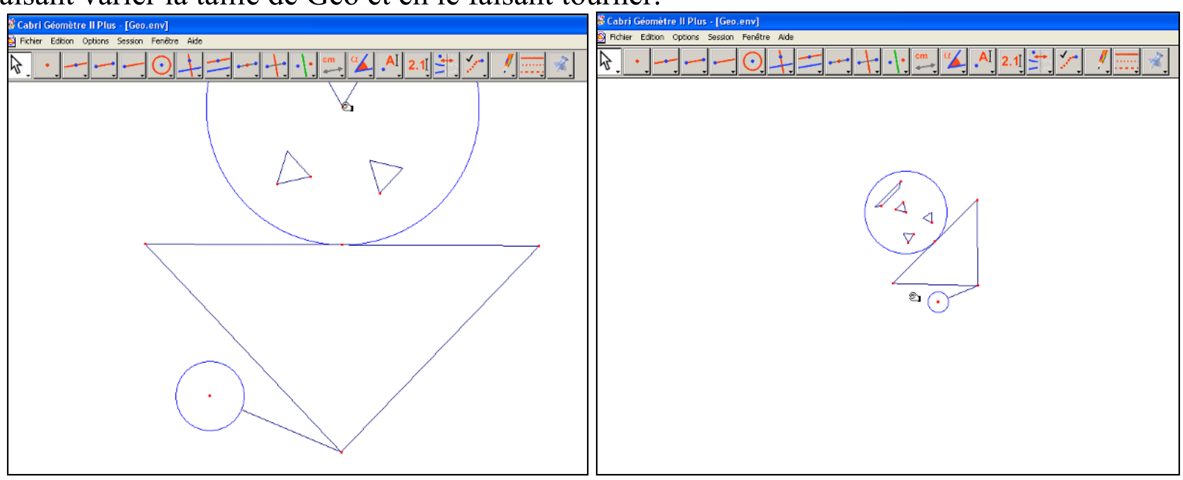


Figure 229. *Ils font varier la taille et l’orientation de Géo en déplaçant le centre du grand cercle*

Ils ne font donc pas beaucoup d'explorations, mais une fois que Hanna a réussi à attraper les points, ils explorent le déplacement de plusieurs points de la figure.

IV.2 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction »

Dans « Pajérond », Hanna et Idriss débutent par la construction de cercles qu'ils suppriment au fur et à mesure car ils ne leur conviennent pas, jusqu'à ce qu'ils finissent par construire un cercle perceptivement correct. Comme ils ne ressentent pas le besoin de déplacer, ils perdent alors beaucoup de temps et ne savent plus vraiment quoi faire.

Ainsi, au début, ils utilisent le schème d'usage du « tracé au jugé » pour construire les cercles, De plus, malgré le contexte, le schème « déplacer pour valider une construction » n'apparaît pas spontanément.

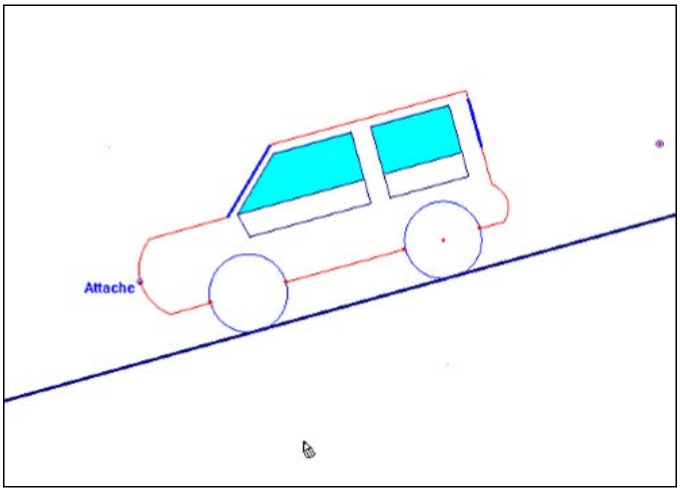


Figure 230. *Ils construisent une roue qui peut être validée statiquement*

Ne sachant plus quoi faire, ils font des dessins à côté, jusqu'à ce que l'enseignante intervienne et leur demande de recommencer. Lorsqu'ils ouvrent le fichier, ils déplacent la voiture avant d'avoir construit la roue. Alors ils construisent une fois de plus la roue « au jugé », puis ils déplacent :

Idriss : **Ah! Mais après il faut voir si ça roule, si ça marche!**

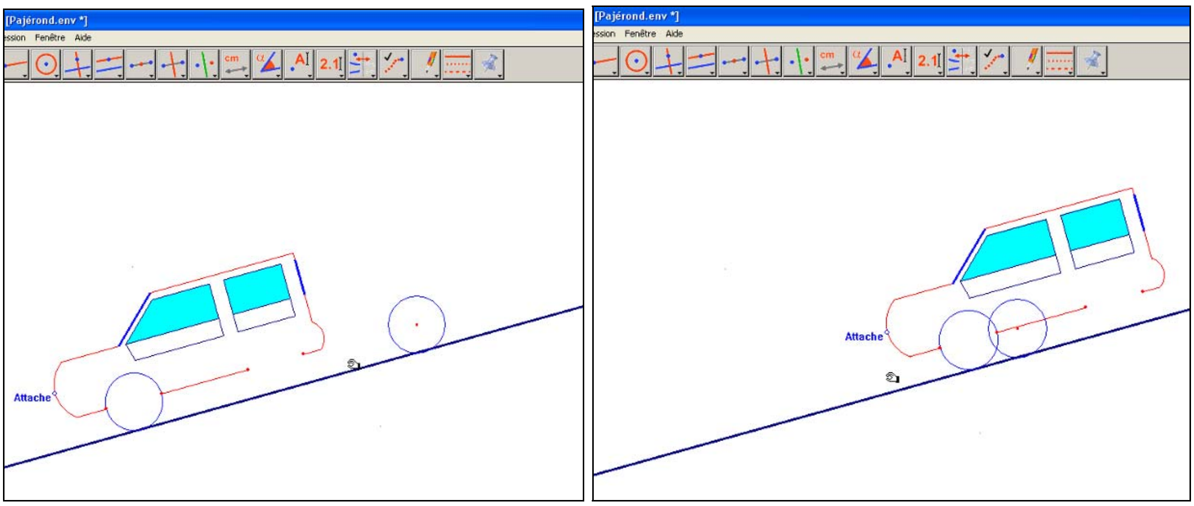


Figure 231. *Ils déplacent la voiture, mais la roue reste statique*

Comme ils avaient perdu beaucoup de temps à attendre, Hanna et Idriss n'ont pas le temps d'essayer d'autres stratégies.

Dans cette classe, pour la situation « Sur quel objet ? », il n'y a pas eu de changement de rôles, laissant à Hanna en tant qu'émettrice et à Idriss en tant que récepteur les deux fois.

Dans cette situation, Hanna utilise le schème « déplacer un point pour tester une construction ». Après avoir tracé le segment [DB], correctement identifié comme étant la trajectoire du point rouge, elle attrape le point rouge mobile et elle le déplace pour valider sa construction. Elle vérifie ainsi que le segment [DB] construit représente bien la trajectoire décrite par le point rouge.

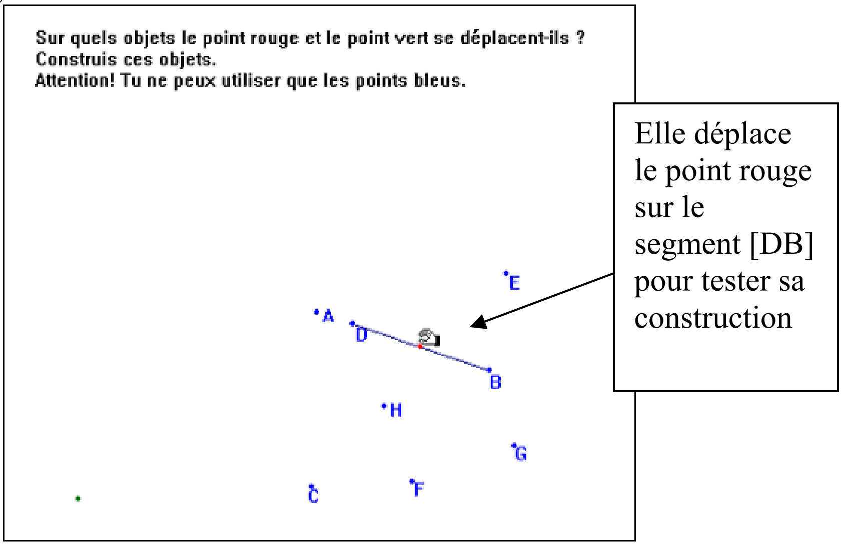


Figure 232. *Elle utilise le déplacement pour valider sa construction et vérifier que le segment [DB] représente la trajectoire du point rouge*

De même, après avoir construit la droite (CF), trajectoire du point vert, elle attrape le point vert mobile et le déplace sur la droite (CF).

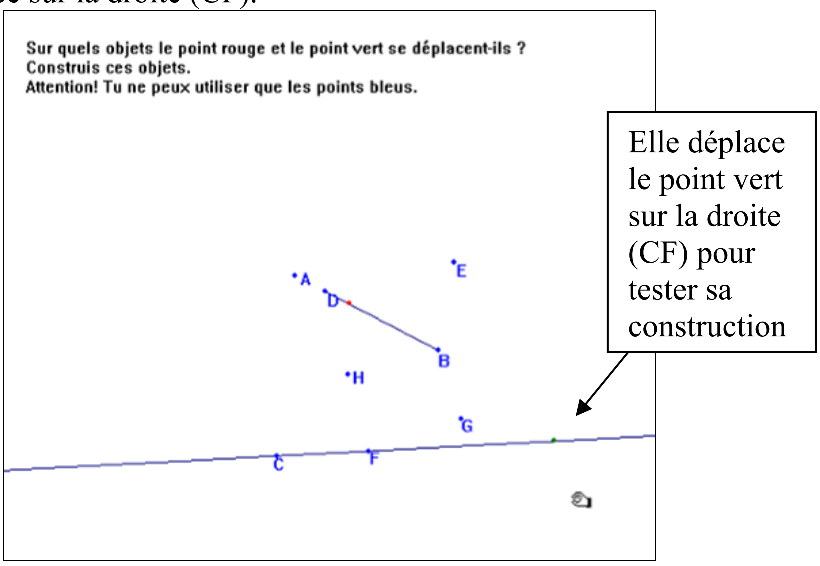


Figure 233. *Elle utilise le déplacement pour valider sa construction et vérifier que la droite (CF) décrit bien toute la trajectoire*

Lors de l'exploration du deuxième fichier, Hanna se sent plus sûre d'elle et de sa construction et ne ressent pas le besoin de déplacer pour valider sa construction.

Pour construire le symétrique N' du point, Hanna et Idriss commencent par placer un point utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé ». De plus, ils utilisent comme axe la droite (MM') et non la droite d.

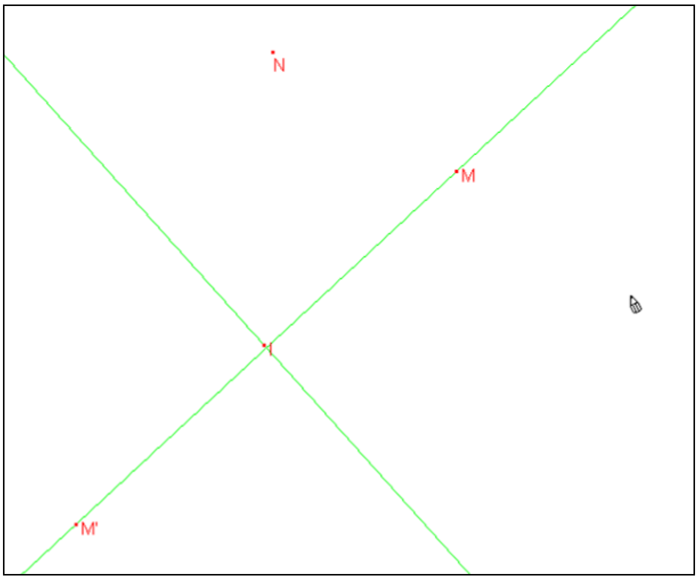


Figure 234. *Tracé « au jugé » du symétrique de N par rapport à (MM')*

Ils attrapent alors N, le déplacent, et N' reste statique. Puis ils attrapent N', le déplacent et N ne bouge pas.

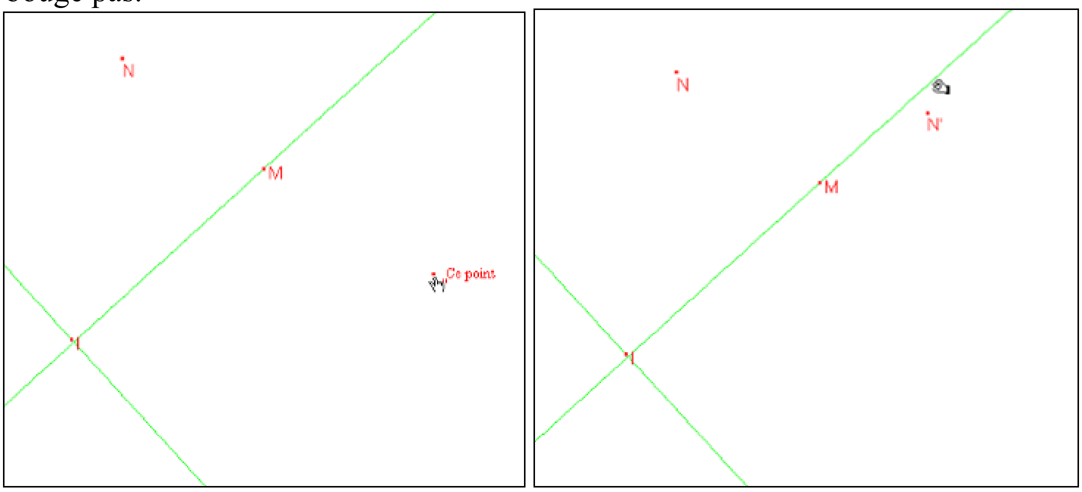


Figure 235. *Hanna déplace le point N' et elle voit que les points ne se déplacent même pas ensemble et ne restent pas symétriques.*

Hanna : **Non ça marche pas...**

Le fait qu'Hanna conclue que « ça ne marche pas » signifie vraisemblablement qu'elle a utilisé le schème de « recherche de dépendance entre deux points ». Elle a anticipé que les deux points devraient bouger ensemble et cette anticipation non vérifiée lui permet d'invalider sa construction. Une seconde hypothèse est qu'elle a anticipé le fait que N' devrait être un point non attrapable ce qui n'est pas vérifié avec sa construction. En effet, elle avait observé que le symétrique de M n'est pas attrapable avec l'aide de l'enseignant dans la première phase de la situation.

Elle appelle alors l'observateur pour lui montrer :

Hanna : J'ai fait symétrique, mais ça...

Elle attrape le point N' et elle le déplace, en utilisant le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » :

Hanna : ça, ça, ça fait pas symétrique

Elle attrape N et elle le déplace aussi. La référence à la non symétrie permet de faire une troisième hypothèse sur les raisons de l'invalidation de la construction par Hanna, celle de la non conservation de la propriété géométrique « symétrique ».

L'observateur lui fait comprendre qu'il faut utiliser des propriétés géométriques pour faire un tracé correct. Hanna construit alors la perpendiculaire à la droite (MM') passant par N. Pour cela, ils cliquent sur le point N puis sur l'axe. Ils obtiennent alors une droite passant par N, perpendiculaire à l'axe mais qui ne passe pas par le point M. Ils essayent de déplacer cette perpendiculaire pour que M soit à l'intersection de la droite et de l'axe, mais comme ils n'y arrivent pas, ils la suppriment. Ils tracent une nouvelle fois la même droite en faisant bien attention cette fois de cliquer sur le point M, qui se trouve être perceptivement quasiment la projection orthogonale de N sur l'axe mais ils obtiennent le même résultat.

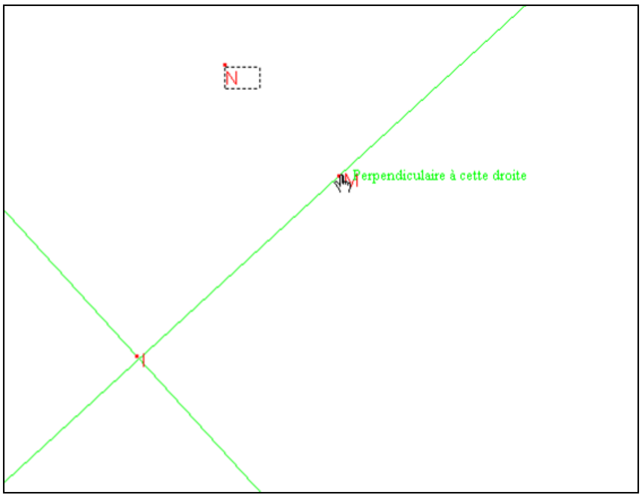
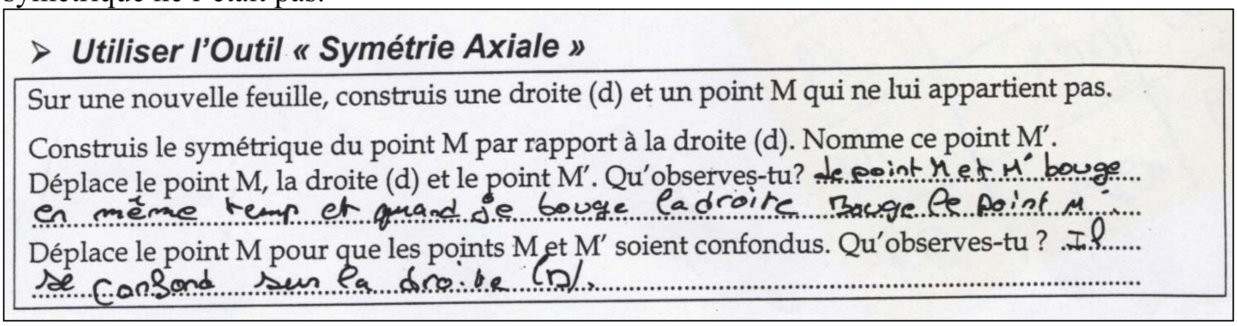


Figure 236. *Deuxième tentative de construction de la perpendiculaire à l'axe qui passe par N et qu'Hanna et Idriss voudraient aussi faire passer par M.*

Dans cette situation « Construire le symétrique », la validation par déplacement fonctionne pour invalider d'abord la construction (ça ne marche pas), puis la stratégie elle-même grâce à l'intervention de l'observateur (il faut faire autrement). Cependant, ce n'est pas forcément la propriété géométrique non respectée qui a conduit à l'invalidation. Il peut s'agir soit du fait que le point et son symétrique ne bougent pas ensemble contrairement à l'observation faite sur le modèle (cf. réponse d'Hanna et Idriss lors de la première phase), ou peut-être aussi du fait que le point symétrique soit encore attrapable, alors que sur le « modèle », le point symétrique ne l'était pas.



➢ **Utiliser l'Outil « Symétrie Axiale »**

Sur une nouvelle feuille, construis une droite (d) et un point M qui ne lui appartient pas.

Construis le symétrique du point M par rapport à la droite (d). Nomme ce point M'.
Déplace le point M, la droite (d) et le point M'. Qu'observes-tu? le point M et M' bouge en même temp et quand je bouge la droite bouge le point M.
Déplace le point M pour que les points M et M' soient confondus. Qu'observes-tu ? Il se confond sur la droite (D).

Figure 237. *Extrait de réponse d'Hanna et Idriss à la première phase de la situation (observation du comportement d'un point M et de son symétrique M')*

Dans « Rectangles à compléter », Hanna et Idriss commencent d'abord par des tracés au jugé de segments pour compléter le rectangle bleu (1). Une fois qu'ils ont fini leur construction, ils attrapent le point L et ils le déplacent pour valider leur construction, mais la figure ne reste pas un rectangle. Ils la remettent perceptivement en rectangle, puis ils utilisent le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » pour s'assurer que leur construction ne peut pas être validée :

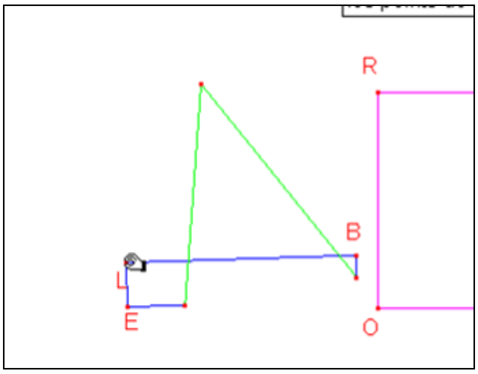


Figure 238. *Ils utilisent le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » pour invalider leur construction du rectangle à l'aide de deux segments*

Hanna efface les segments, mais elle laisse les points sur les côtés incomplets à partir desquels elle avait tracé les segments pour compléter l'angle.

Hanna trace alors une droite en cliquant d'abord sur le point qui se trouve sur [Bx), puis elle commence à aller vers l'endroit où devrait se trouver le quatrième sommet du rectangle en superposant la droite en train de se construire avec [Bx), mais Idriss lui dit : « Par ce point », alors elle déplace la souris vers B et clique dessus. Elle trace de la même manière la droite passant par E et par le point appartenant à [Ey). Puis elle attrape et elle déplace le point L pour valider la construction :

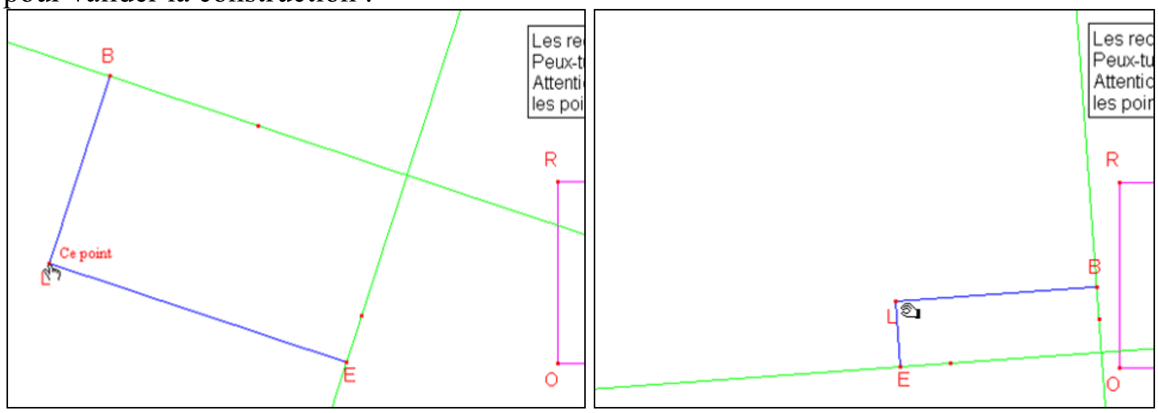


Figure 239. *Ils déplacent le point L pour valider leur construction*

Hanna et Idriss utilisent donc le déplacement pour valider leur construction de manière spontanée.

Dans le rectangle rose (2), ils tracent d'abord la droite passant par le point R et par un point appartenant au côté incomplet [Rx]. Puis ils utilisent le schème d'usage du « tracé au jugé » pour construire une droite passant par S qui soit perceptivement perpendiculaire à [OS] et par un point appartenant à la droite tracée auparavant.

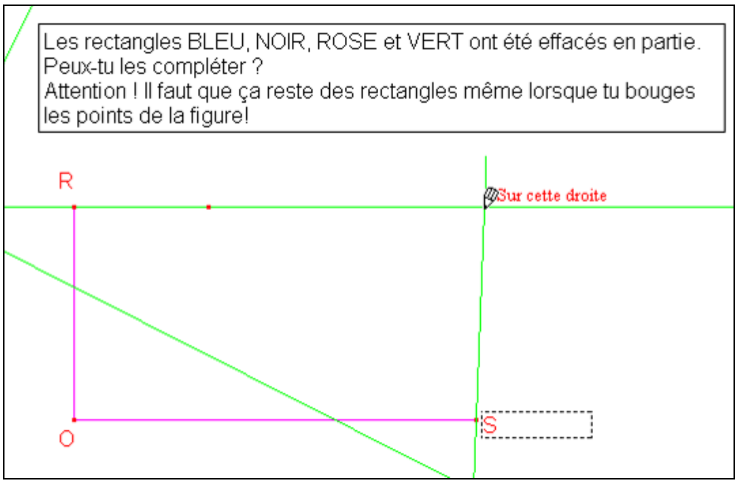


Figure 240. *Ils tracent une droite perceptivement perpendiculaire à [OS]*

Puis ils attrapent le point sur la droite et ils le déplacent, la droite passant par S ne reste pas perpendiculaire à (OS), mais ils n'invalident pas la construction immédiatement. Ils l'ajustent pour qu'elle soit perceptivement perpendiculaire.

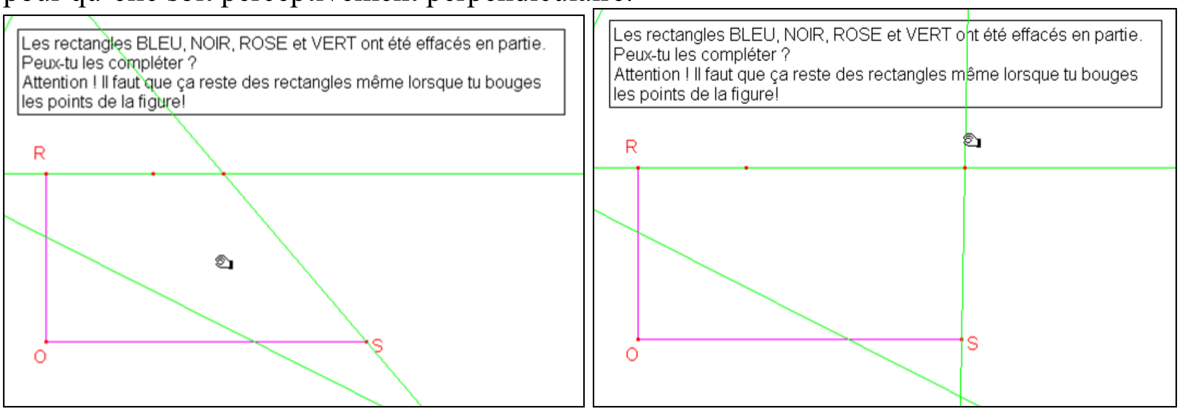


Figure 241. *Hanna et Idriss utilisent le schème « d'ajustement » pour satisfaire ici la condition de perpendicularité*

Ils attrapent alors le point O et le déplacent pour valider leur construction, mais leur déplacement du point O ne permet pas l'invalidation de cette construction. En effet, dans la construction du rectangle à terminer rose, le morceau de côté [Rx] a une longueur égale à OS/2. Cela entraîne que le quatrième sommet construit au jugé par les élèves sur le prolongement du côté [Rx] reste à une distance égale aussi à OS/2 du point x caché. Cela suffit à conserver le rectangle au cours du déplacement.

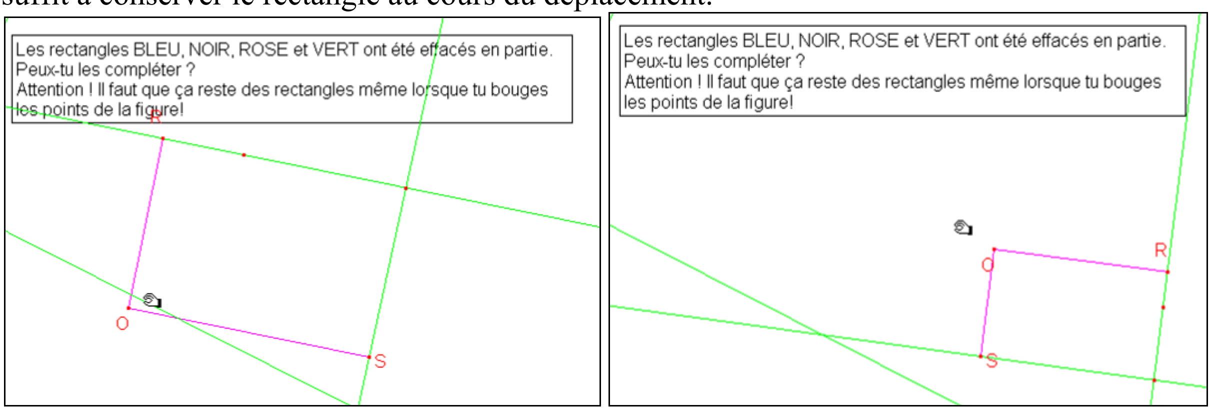


Figure 242. *Ils déplacent le point O et valident leur construction bien que la perpendicularité ait été réalisée au jugé*

Hanna attrape le point qu'elle avait placé sur le côté incomplet [Rx] et elle le déplace : le quadrilatère ne reste pas un rectangle :

Hanna : **Non, c'est pas... ça marche pas!**

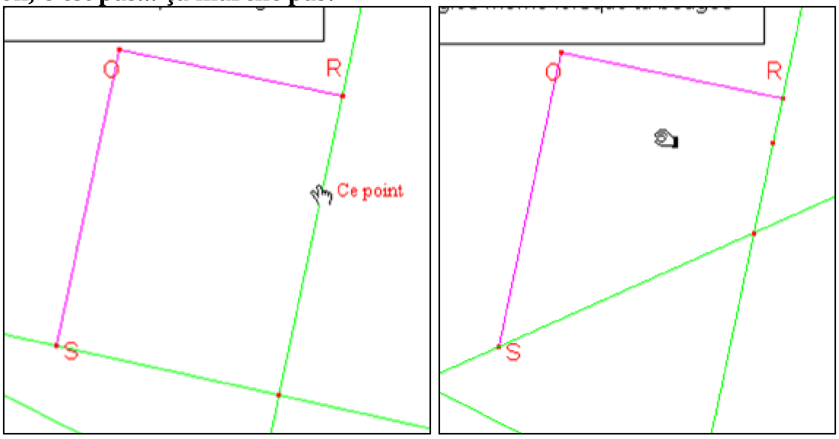


Figure 243. *Hanna déplace le point sur le côté incomplet [Rx] qui lui permet d'invalider la construction*

Ils invalident leur construction et ils effacent les deux droites tracées. Ils ont donc utilisé le déplacement pour valider, et invalider.

Ils poursuivent avec le rectangle vert. Sur le segment [VE], ils tracent des droites « au jugé » perpendiculaires à [VE]. Idriss essaye de dire à Hanna de construire la droite perpendiculaire au segment, mais elle ne fait pas attention.

Idriss : **Perpendiculaire à cette droite, à ce segment**...

Hanna : Mais non, mais il faut que ça passe par là (elle montre le point V avec la souris)

Idriss : Oui mais **il faut que ce soit perpendiculaire à ce segment**!

Une fois sa construction finie, elle attrape le point E et le déplace pour valider. Mais la construction étant faite au jugé, le rectangle ne se conserve pas.

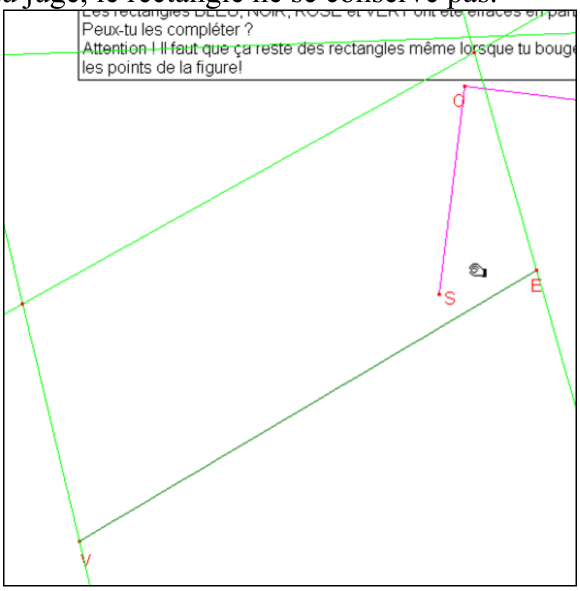


Figure 244. *Ils déplacent le point E pour valider leur construction*

Ils décident alors d'effacer tout, dans les trois figures (bleue, rose et verte) et de recommencer. Ils refont sur la figure bleue le tracé de droites prolongeant les côtés incomplets. La construction est validée par déplacement du point L.

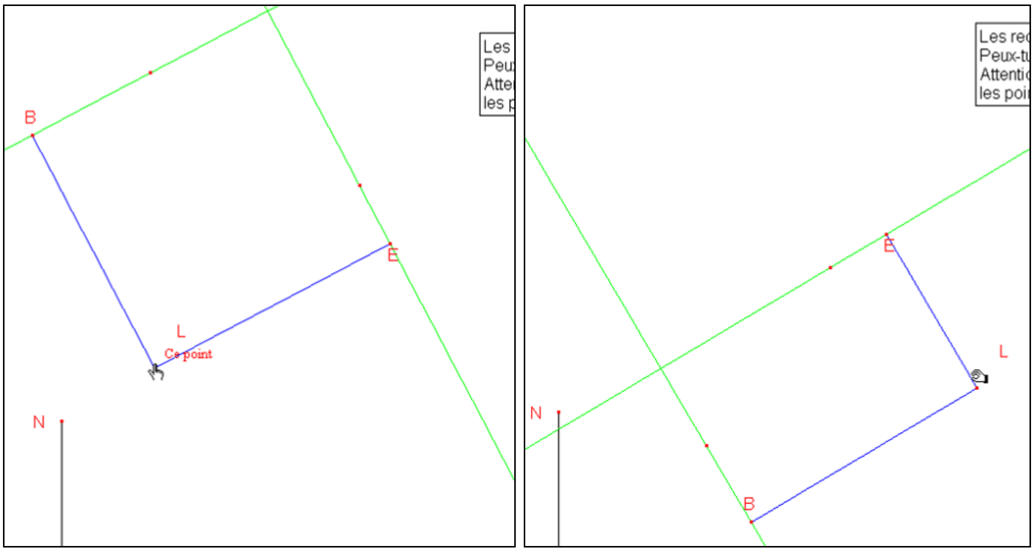


Figure 245. *Ils déplacent le point L pour valider leur construction*

Ils poursuivent avec la figure noire (3) par le tracé de droites « au jugé ».

Idriss relit la consigne puis il dit :

Idriss : **Ben il y en a qu'un qui peut rester un rectangle**! C'est le, le, le bleu...

Pour Idriss, la seule des quatre figures qui peut rester un rectangle est le rectangle bleu. Hanna retourne au rectangle bleu (1), attrape le point L et le déplace.

Hanna : **Bon il y a le bleu qui reste... Lui (le noir) il va pas rester par contre**

Elle attrape le point O dans la figure noire et elle le déplace pour invalider leur construction :

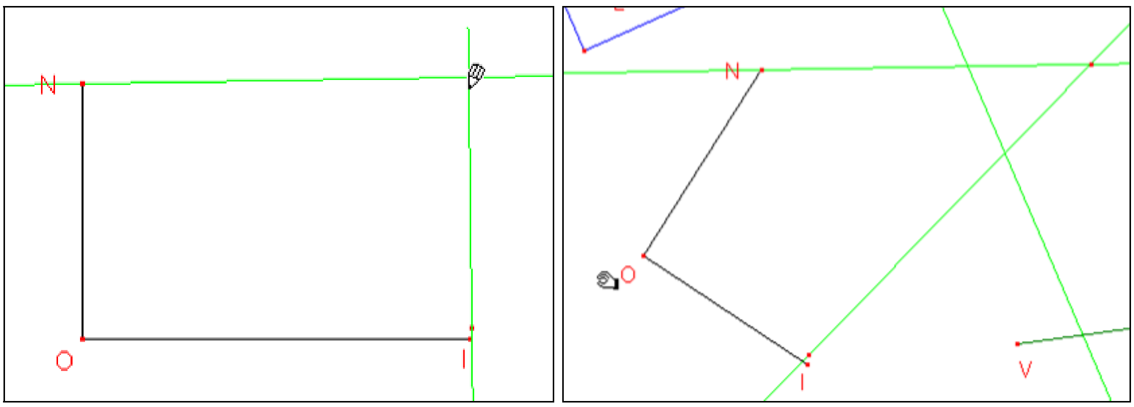


Figure 246. *Hanna déplace le point O pour invalider sa construction*

Hanna et Idriss utilisent donc de manière spontanée le déplacement pour valider leur construction. La plupart du temps, ils arrivent à invalider leur construction lorsqu'elle n'est pas correcte. Ils sont capables de déplacer plus d'un point de la figure et de reconnaître si une propriété géométrique est conservé ou pas. Ils remettent même en cause leur stratégie dans la plupart des cas. Cependant, et malgré la proposition d'Idriss de construire une droite perpendiculaire, ils ne trouvent pas la stratégie correcte.

Dans « Construire le symétrique », Hanna utilise le schème « déplacer un point pour tester une construction » et déplace N et N' pour invalider sa construction. Le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » est quant à lui utilisé dans « Rectangles à compléter », car il permet à Hanna et Idriss d'invalider leur construction « au jugé » du rectangle rose alors que le déplacement d'un seul point, le sommet S, ne l'aurait pas permis.

Pour ce binôme, le schème « déplacer pour valider une propriété » semble donc être disponible.

IV.3 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété »

Hanna et Idriss sont dans une classe différente de celle des trois premiers binômes que nous avons présentés. Dans cette classe, pour la situation « Toujours/parfois vrai », l'enseignant a commencé par une phase collective dans laquelle il s'agissait de décider quelles étaient les vraies propriétés géométriques de la figure et d'utiliser le déplacement pour valider une conjecture/propriété.

Hanna et Idriss commencent par observer la figure verte (2) et ils décident si les propriétés demandées sont vraies ou fausses à partir du dessin statique. Mais l'enseignant intervient et reprend les éléments de la phase collective pour leur rappeler qu'avant de décider si une propriété est vraie ou pas, il faut déplacer les points de la figure.

Idriss : Vas-y ! Bouge !

Ils attrapent le point D dans la figure verte (2) et ils le déplacent.

Hanna : ça se balance, tout ça se balance!

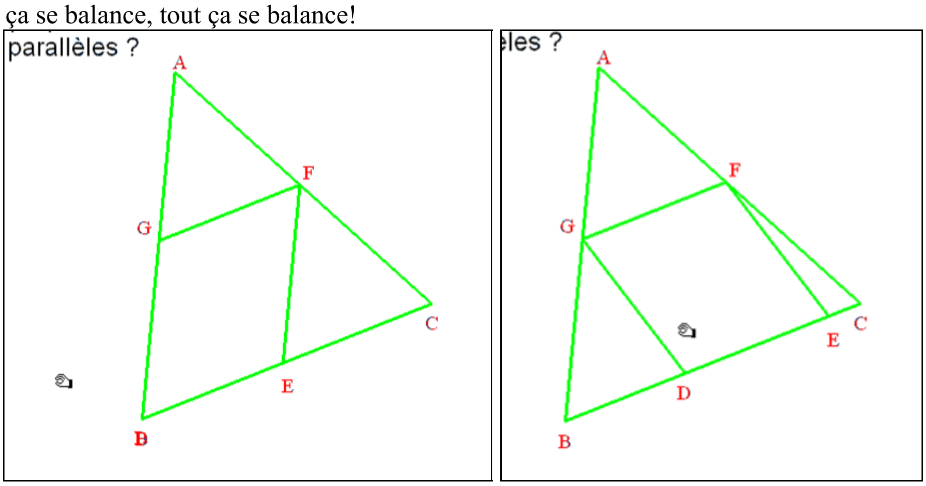


Figure 247. *« Tout se balance »*

Idriss : Attends ! Regarde !

Il essaye de déplacer le point E, qui n'est pas attrapable, puis il déplace à nouveau le point D de manière à ce que D soit sur C et que la droite (FE) n'existe plus, car le point E disparaît.

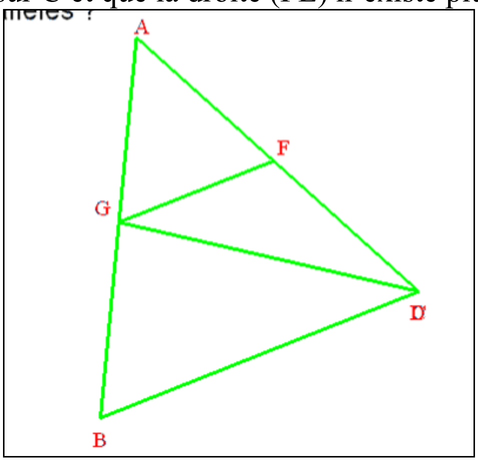


Figure 248. *Idriss déplace D sur C, pour obtenir une figure limite et ainsi invalider la perpendicularité entre (DG) et (BC)*

Hanna : C'est un triangle!
Idriss : C'est un triangle!

Hanna : Donc **c'est pas des droites perpendiculaires...**

On voit donc que Hanna conclut sur la validité de la perpendicularité de (GD) et (BC).

Pendant plusieurs minutes, ils vont essayer de mettre les figures bleue, verte et rose dans des configurations limites.

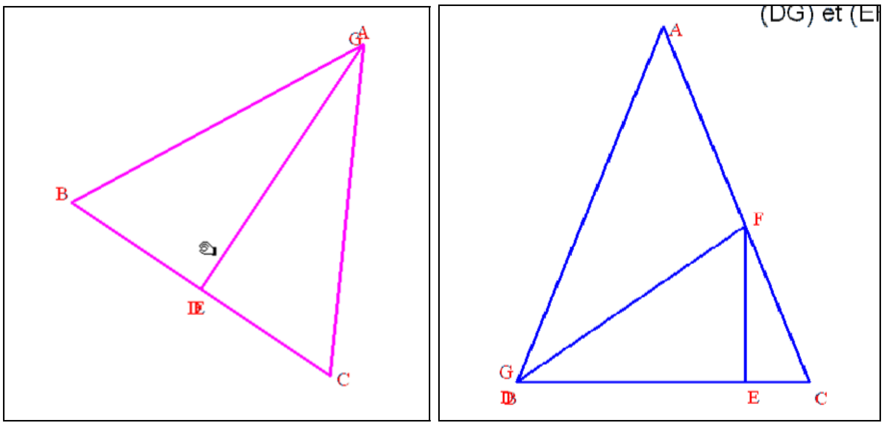


Figure 249. *Ils déplacent les points des figures bleue et rose à la recherche de figures limites*

Après cette première phase d'exploration, ils commencent à utiliser le déplacement des points de manière plus contrôlée, en s'intéressant à une propriété pour pouvoir conclure : ils déplacent le point D, puis le point G dans la figure verte (2), et ils s'interessent à la perpendicularité :

Idriss : (DG), attends (DG) c'est ça...

Hanna : (DG)... et **je regarde ce qu'il fait...**

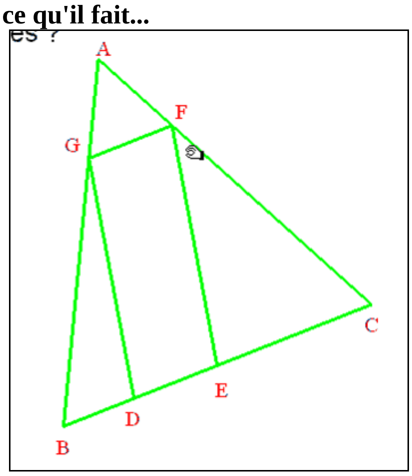


Figure 250. *Ils déplacent pour décider de la validité de la perpendicularité entre (DG) et (BC)*

Idriss : Et (BC), (BC) c'est ça...

Hanna : (GD)... il fait ça...

Idriss : **Non, donc non...**

Hanna et Idriss décident que les droites (DG) et (BC) ne sont pas perpendiculaires.

Puis Hanna déplace le point D utilisant un cinéma-déplacement, puis le point G, pour montrer à Idriss que les droites sont parallèles :

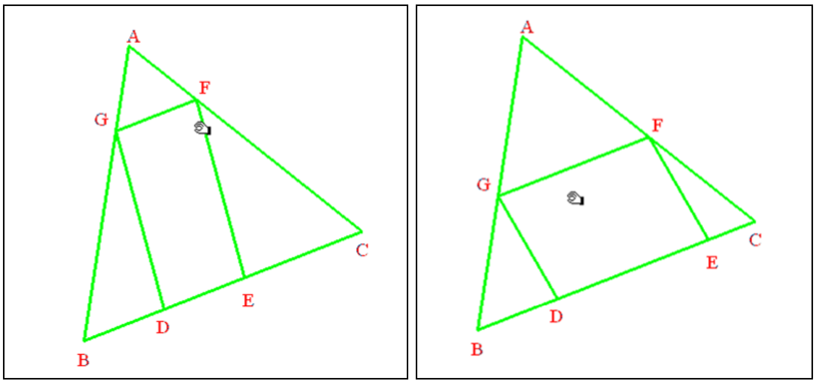


Figure 251. *Ils déplacent pour valider le parallélisme*

Hanna : Ben oui regarde, c'est parallèle!

Hanna arrive donc à convaincre à Idriss que les deux droites sont parallèles. Elle utilise un cinéma-déplacement (en déplaçant le point en continu) pour valider cette propriété et montrer à Idriss qu'elle se conserve au cours du mouvement, lorsqu'on déplace les différents points de la figure.

Dans la figure bleue (1), ils attrapent et ils déplacent le point D et ils invalident la perpendicularité :

Hanna : Voilà! Regarde! **Non ce n'est pas toujours...**

Ils utilisent alors le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » et ils déplacent les points G, D, A et F et ils essayent aussi de déplacer B et C. Lors de ces déplacements, Hanna demande à Idriss de contrôler la propriété :

Hanna : Regarde si elles sont parallèles...

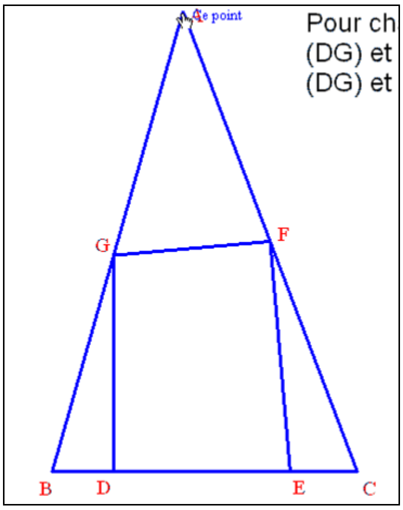


Figure 252. *Ils invalident le parallélisme*

Hanna : **Est-ce que c'est parallèle ?**

Idriss : Ah... euh... non!

Dans leur fiche, ils répondent « non » à la perpendicularité de (BC) avec (GD) et « non » au parallélisme entre (DG) et (EF). Ils n'ont donc pas reconnu la conservation de la perpendicularité, bien que les segments en jeu soient dans des positions verticales et horizontales.

Dans la figure rose (3), lorsqu'ils déplacent le point D, Hanna reconnaît la conservation du parallélisme :

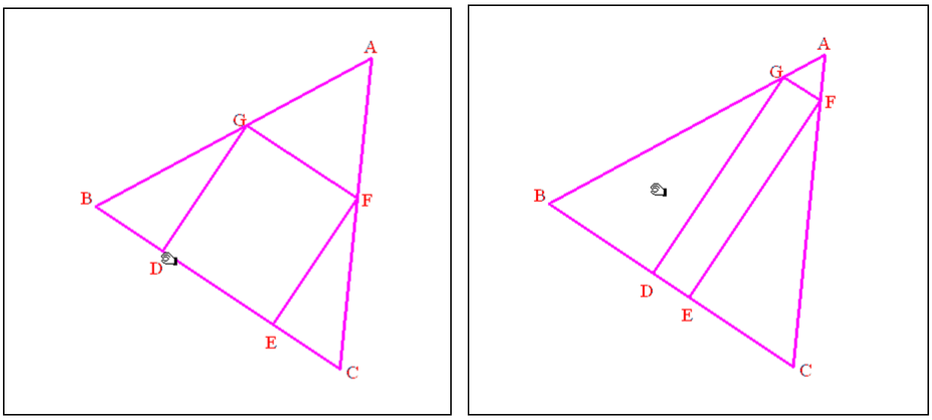


Figure 253. *« Déjà c'est parallèle »*

Hanna : **Déjà c'est parallèle parce que regarde!**
Idriss : Ouais **c'est parallèle et c'est perpendiculaire...**
Hanna : **C'est pas perpendiculaire...**

Ils utilisent alors le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » (E, F et B), puis ils attrapent A et ils le déplacent :

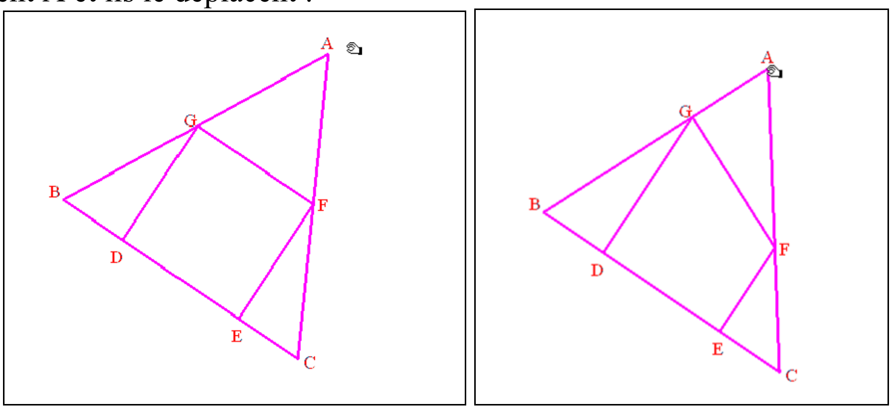
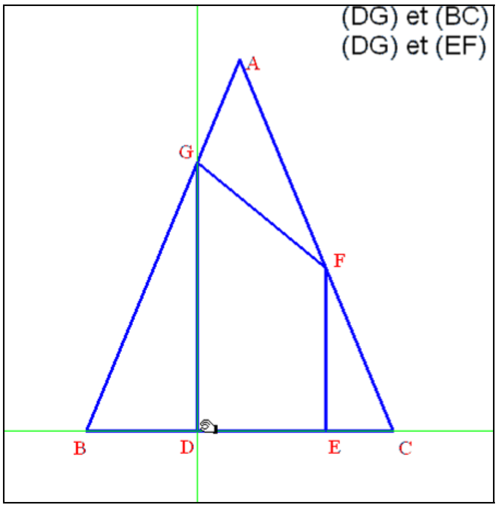


Figure 254.*Ils déplacent le point A*

Hanna : **Regarde !**
Idriss : **(DG) et (BC)…**
Hanna : **Perpendiculaires ? Perpendiculaires c'est non!**
(...)
Hanna : **Et parallèles! Oui!**

Ils répondent dans leur fiche « non » à la perpendicularité de (DG) et (BC) et « oui » au parallélisme de (GF) et (BC). A nouveau, ils n'ont pas reconnu la conservation de la perpendicularité au cours du déplacement.

Lorsque l'observateur vérifie leurs réponses, il les fait revenir sur la figure bleue (1) où ils n'avaient pas reconnu la perpendicularité. Hanna et Idriss justifie leur réponse en disant « qu'elles se touchent pas, elles se coupent pas ». L'observateur trace alors les droites (DG) et (BC) et leur demande de déplacer le point D :



L'observateur : Est-ce que ça t'aide ? Qu'est-ce que t'as envie de dire ?
Hanna : Ben là **elles** (les droites tracées, (DG) et (BC)) **se touchent mieux...**
L'observateur : Elles se touchent mieux! Mais elles se touchent comment ? (...)
Hanna : **Ben... y a un angle droit...**
L'observateur : Ah! Ok! Et quand tu bouges D qu'est-ce qui se passe ? Cet angle droit...
Hanna : Ben il (l'angle droit) touche cette droite
Idriss : **Donc elle** ((DG)) **est perpendiculaire** (implicitement à (BC))

On voit donc que pour Hanna et Idriss il est plus facile d'identifier le parallélisme que la perpendicularité. Ils ont utilisé le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » pour observer quelles propriétés se conservent et lesquelles non. Pour le schème de « déplacement pour valider une propriété », c'est la reconnaissance perceptive de la perpendicularité ou non-perpendicularité (respectivement parallélisme) qui fait défaut à ces deux élèves.

IV.4 Schème d'action instrumentée « d'identification de l'objet-trajectoire »

Hanna est l'élève qui a le plus essayé de faire sortir les points de leur trajectoire. Elle a commencé par déplacer le point rouge (qui se déplace sur le segment [DB]), en essayant de le déplacer partout dans l'écran. Et après avoir constaté qu'il ne pouvait pas être déplacé partout et qu'il ne suivait pas le pointer, elle a pu commencer à identifier l'objet-trajectoire.

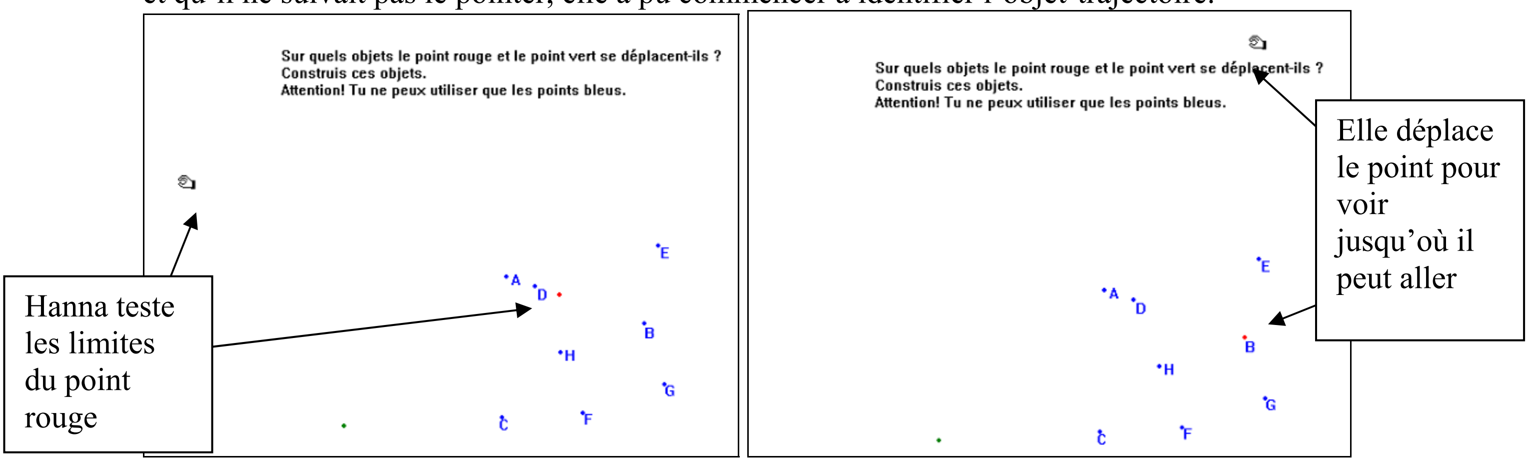


***Figure 255.** Hanna tente de déplacer le point rouge partout dans l'écran*

Hanna : Ah je sais! Regarde!

Elle commence alors à déplacer le point en se laissant guider par sa trajectoire.

Hanna : Le point rouge **reste sur**...

Puis elle continue à le déplacer, très vite.

Hanna : Tu fais comme ça, **il se déplace que sur B et D**.

Une fois qu'elle a identifié la trajectoire comme étant le segment [DB], elle essaye une nouvelle fois de le déplacer en observant les limites du déplacement du point.

Hanna : Ouais il se déplace que sur [DB]

On voit donc ici qu'Hanna fait d'abord la conjecture « le point rouge se déplace sur le segment [DB] », puis elle utilise le déplacement du point mobile pour valider sa conjecture.

Avant de construire le segment [DB], Hanna attrape et déplace le point vert, en essayant à nouveau de le faire sortir de sa trajectoire, mais cette fois-ci elle essaye beaucoup moins et se laisse guider assez vite par le mouvement du point vert.

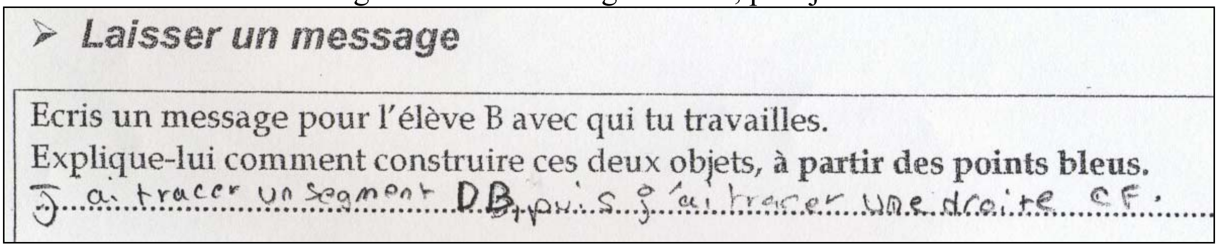
Hanna : Mais **il reste toujours sur CF**...

L'observateur : Sur... quoi CF ?

Hanna : Sur la droite (CF)… (en cliquant sur les outils) « Droite », « Segment » !

Elle choisit l'outil « Segment » et elle trace le segment [DB]. Puis elle attrape le point rouge et elle le « déplace pour tester sa construction », comme vu précédemment. Elle vérifie ainsi que le segment [DB] construit représente bien la trajectoire décrite par le point rouge. Puis elle trace la droite (CF) et elle déplace le point vert pour tester sa construction.

Hanna écrit sans son message "J'ai tracer un segment DB, puis j'ai tracer une droite CF".


➢ Laisser un message

Ecris un message pour l'élève B avec qui tu travailles.
Explique-lui comment construire ces deux objets, **à partir des points bleus.**
J'ai tracer un Segment DB, puis j'ai tracer une droite CF.

Figure 256. *Message de Hanna à Idriss*

Hanna caractérise géométriquement de manière correcte les objets-trajectoire.

On voit donc, dans la procédure d'Hanna, les étapes qui lui permettent de construire le schème « d'identification de l'objet-trajectoire » : déplacement non finalisé du point mobile, identification du point mobile comme non déplaçable partout dans l'écran mais appartenant à un objet, caractérisation de la trajectoire comme un objet géométrique et construction de l'objet géométrique identifié, déplacement pour tester la construction.

IV.5 Schèmes d'action instrumentée « déplacer pour analyser les variations » et « identifier les invariants de la figure » et le rôle de l'enseignant

Dans la situation « Construire le symétrique » conçue par l'enseignante, il était d'abord demandé aux élèves d'utiliser le déplacement et d'analyser les variations de la figure au cours du déplacement, afin de caractériser les invariants géométriques qui permettent de construire le symétrique d'un point. Cependant cette tâche s'est avérée très difficile. Seuls deux binômes (Hanna&Idriss et Loïc&Nadir) ont identifié l'équidistance des points M et M' à la droite (d) et deux (Hanna&Idriss et Katia&Malek) ont identifié la perpendicularité.

Hanna et Idriss ont réussi à analyser les variations de M et M' au cours du déplacement avec l'aide de l'enseignant. Ils ont d'abord déplacé le point M :

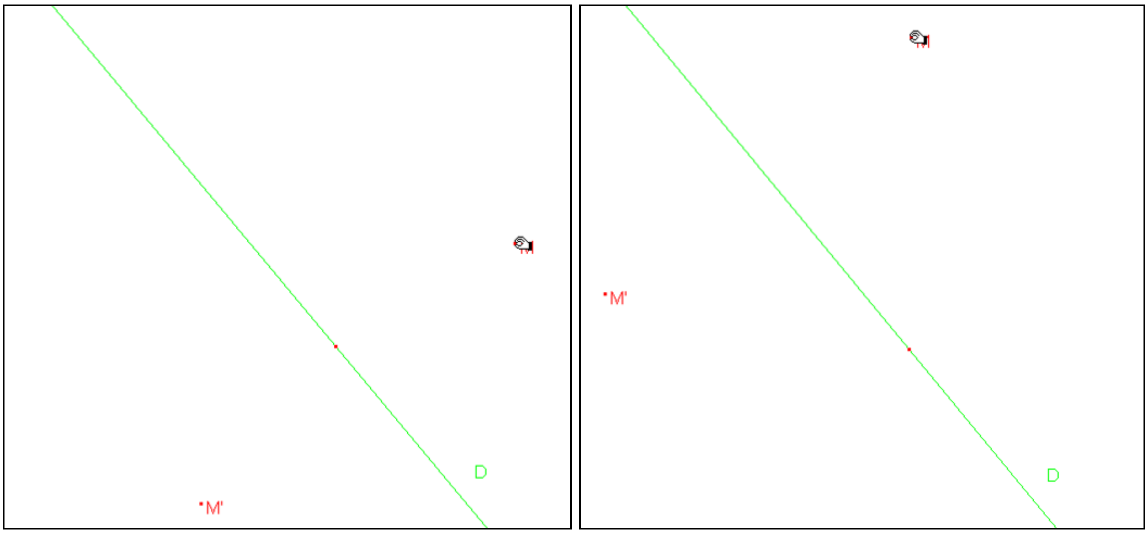


Figure 257. *Hanna déplace le point M*

Hanna : ça veut dire que je dois déplacer ce point, ce point et la droite ?
L'enseignant : Oui, tu essayes de les bouger un par un, tu prends ton temps de bien observer, ça vous aidera après. Qu'est-ce qui se passe quand je bouge le point M ?
Hanna : Quand je bouge le point M... **Ça bouge la symétrique du point M...**
L'enseignant : Ah ben oui! Qu'est-ce qui se passe quand je bouge la droite (d) ?
Hanna : Y a que le...
L'enseignant : Ah! Tu vois!
Hanna : **Mais ils sont toujours symétriques!**
L'enseignant : Eh oui ils restent symétriques mais t'as qu'un qui bouge... Et ensuite tu regardes ce qui se passe quand tu bouges le point M' aussi.

Hanna déplace la droite (d) :

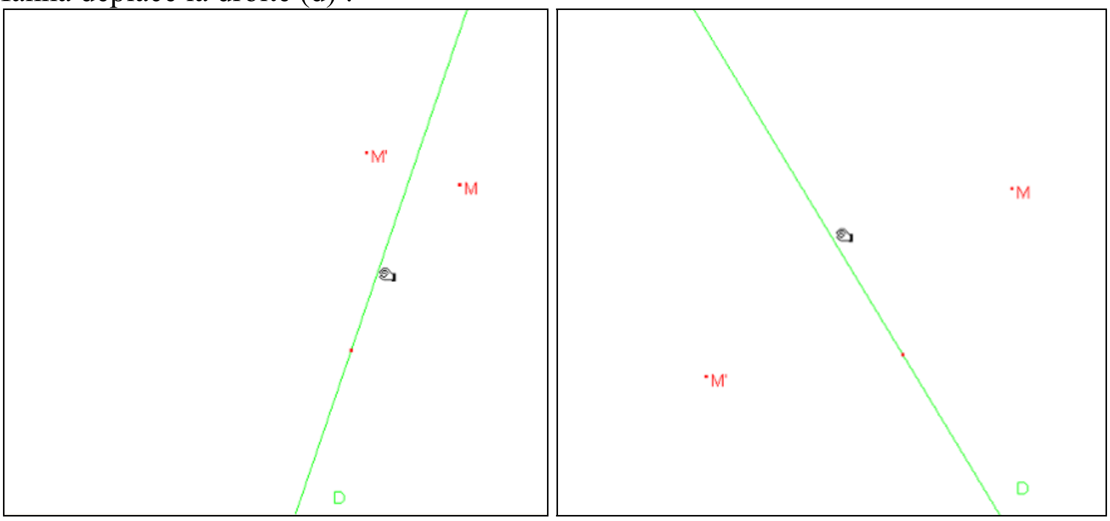


Figure 258. *Hanna déplace la droite (d)*

Hanna : **Il reste... symétrique**
L'enseignant : Vas-y avec le point M', attrape-le!
Hanna : C'est lui ?
L'enseignant : Oui!

Elle essaye d'attraper le point M' et de le déplacer directement mais elle n'y arrive pas. L'observateur intervient aussi et les interroge sur leurs observations :

L'observateur : Et quand tu bouges la droite ?
Hanna : ça bouge le M'...
L'observateur : Ouais... le M il bouge pas...

Hanna : Mais **quand je dois bouger le M' et ben ça bouge pas...**
L'observateur : Et ouais! Et à ton avis pourquoi il bouge pas ?
Hanna : Parce que **c'est euh... la symétrique! Qu'il peut pas bouger...**

Ils remarquent donc la conservation de la symétrie, sans spécifier quels critères définissent pour eux la symétrie.

L'enseignant essaye de les guider dans l'observation de la condition permettant de superposer les deux points :

Hanna : Madame, pour les confondre on doit échanger en fait ? Pour les confondre...
L'enseignant : Alors, les confondre c'est les superposer, c'est-à-dire qu'ils doivent venir l'un sur l'autre. Voilà! Donc **si je veux les mettre l'un sur l'autre où ils se mettent tous les deux ?**

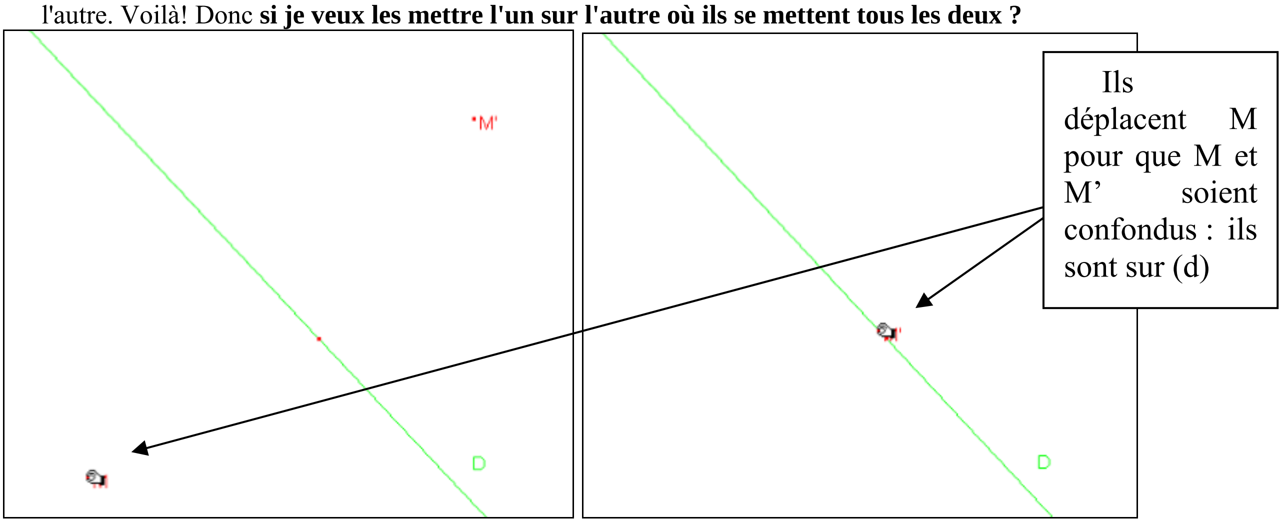


Figure 259. *Hanna et Idriss superposent les points M et M' sur la droite (d)*

L'enseignant : **Où est-ce ils se mettent quand tu veux qu'ils soient l'un sur l'autre ?**
Hanna : **Sur la droite ?**
L'enseignant : **Obligé ! Est-ce qu'ils peuvent se mettre confondus s'ils ne sont pas sur la droite ?**
Hanna : **Ben non, s'ils sont pas symétriques après !**

Grâce à l'intervention de l'enseignant, qui leur demande « où doivent être placés les points », Hanna et Idriss constatent que les points M et M' doivent être sur la droite (d) pour pouvoir être confondus, sauf « s'ils sont pas symétriques ».

Hanna et Idriss tracent la droite (MM') et ils la déplacent pour que le point par lequel a été tracé la droite (d) soit à l'intersection de (d) avec (MM'). Ils appellent I ce point.

Ils attrapent le point I et ils le déplacent et la droite (d) est déplacée avec. Le point I ne reste pas à l'intersection, mais ils le remettent à l'intersection de (MM') et (d).

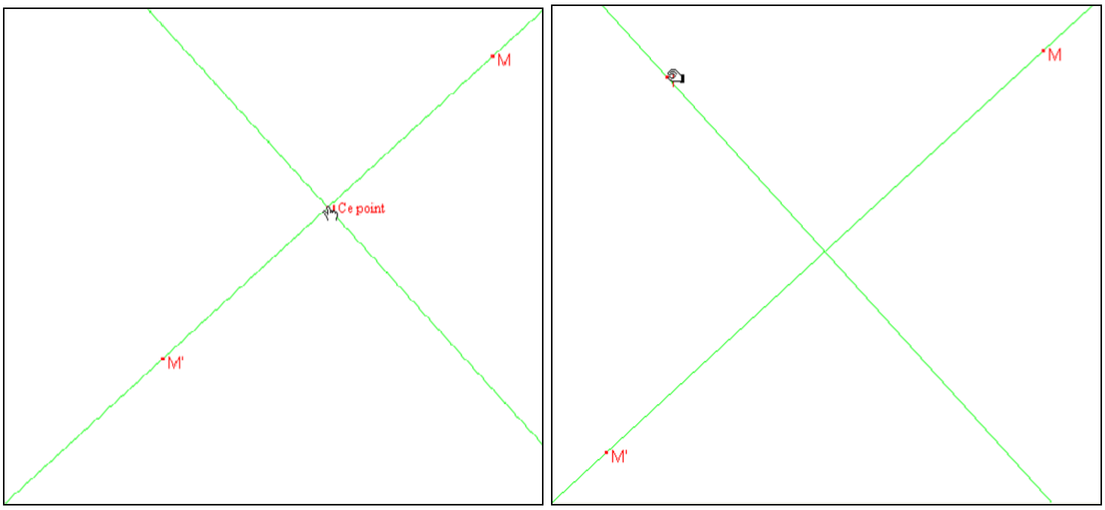
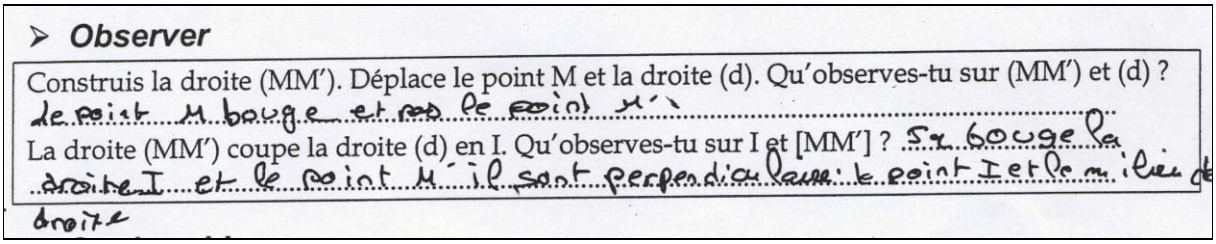


Figure 260. *Ils déplacent le point I par lequel a été tracé la droite (d)*

L'enseignant vient les guider dans leurs observations :

L'enseignant : Alors vous vous êtes sur les déplacements, sur tout ce qui bouge, mais **mon stylo** (sur la droite (d)) **et la droite (MM') ils sont comment tous les deux** ?
Hanna : **Perpendiculaires ?**
L'enseignant : Vous l'avez écrit quelque part ? On a bien l'impression effectivement. Et de la même façon **votre point I ici il est comment par rapport à ces deux droites ? A vue d'œil ou même si on bouge on va en avoir l'impression ? Il est comment ?**
Hanna : **Le milieu ?**
L'enseignant : Eh ben, on va peut-être l'écrire aussi ça. Et ça, ça va vous aider ensuite à faire le dessin sur le cahier. Donc l'objectif pour aujourd'hui c'est d'arriver à faire la construction sur le cahier et l'utiliser après.

Ils écrivent dans leur fiche : « ça bouge la droite I et le point M' ils sont perpendiculaires le point I et le milieu de droite. »


➢ **Observer**

Construis la droite (MM'). Déplace le point M et la droite (d). Qu'observes-tu sur (MM') et (d) ?
le point M bouge et pas le point M'
La droite (MM') coupe la droite (d) en I. Qu'observes-tu sur I et [MM'] ? Si on bouge la droite I et le point M' il sont perpendiculaire le point I et le milieu de droite

Figure 261. *Observations d'Hanna et Idriss*

On voit donc que grâce aux interventions de l'enseignant, Hanna et Idriss arrivent à identifier la perpendicularité et « le milieu de la droite ». Cependant la rédaction ne fait pas apparaître clairement les deux propriétés explicitées oralement.

IV.6 Genèse instrumentale

Comme nous l'avons vu, Hanna ne disposait pas du schème d'usage de « déplacement d'un point » et elle a dû le construire au cours de la situation Géo, alors que les autres élèves le construisent plus spontanément. Mais l'absence de ce schème d'usage au départ, ne l'a pas empêchée d'aller assez loin dans l'appropriation du déplacement, en particulier du déplacement pour valider.

La construction du schème d'usage de « recherche des points qui bougent » leur a permis d'une part d'explorer les figures dans « Toujours/parfois vrai » et de décider de la validité des propriétés géométriques, et d'autre part, d'invalider une construction dans « Rectangles à compléter » qui ne pouvait être invalidée que par le déplacement de ce point (et du point placé au jugé).

Hanna et Idriss utilisent de manière spontanée le schème de « déplacement pour valider une construction ». Ils arrivent à invalider souvent leur construction lorsqu'elle n'est pas correcte et remettent en cause leur construction dans la plupart des cas, ce qui les amène aussi à changer de stratégie, bien qu'ils ne trouvent pas toujours la stratégie correcte.

Grâce aux interventions de l'enseignant, et de l'observateur, Hanna et Idriss arrivent à identifier des invariants dans la construction du point M et de son symétrique M' (perpendicularité des droites (d) et (MM') et I « milieu de la droite »). Cependant, ces invariants ne sont pas réinvestis pour reconstruire un point et son symétrique. Ainsi, le schème « déplacer pour identifier les invariants au cours du déplacement » n'a pas pu être mis en œuvre indépendamment de l'enseignant et les inférences qu'il a produit ne paraissent pas être utilisables ensuite.

L'analyse des variations dans la première phase a permis à Hanna d'invalider sa construction « au jugé » du symétrique du point N. Le déplacement des points N et N' nous ont amené à formulé trois hypothèses qui l'ont amené à invalider sa construction :

- le schème de « recherche de dépendance entre deux points » ; elle a pu anticiper que les deux points devraient bouger ensemble et cette anticipation non vérifiée lui permet d'invalider sa construction ;
- elle a anticipé le fait que N' devrait être un point non attrapable ce qui n'est pas vérifié avec sa construction ; en effet, elle avait observé que le symétrique de M n'est pas attrapable avec l'aide de l'enseignant dans la première phase de la situation ;
- la référence à la non symétrie permet de faire une troisième hypothèse sur les raisons de l'invalidation de la construction par Hanna, celle de la non conservation de la propriété géométrique « symétrique ».

V. LOÏC ET NADIR

Loïc et Nadir sont les extrêmes : Loïc est un élève excellent, un des meilleurs de la classe, alors que Nadir est un élève faible, mais très enthousiaste dans les séances avec Cabri. Comme Loïc a plus de connaissances mathématiques, Nadir se laisse guider en général par Loïc et les stratégies qu'il propose.

Comme nous allons le voir, Loïc n'utilise pas toujours le schème « déplacer pour valider », puisque pour lui, imposer des propriétés géométriques à la construction garantit sa validité. Ce sera donc Nadir qui dira à Loïc de déplacer.

Dans la situation « Construire le symétrique », lorsqu'ils analysaient les variations des droites (d) et (MM') au cours du déplacement, Loïc a fait la conjecture que les droites étaient perpendiculaires. Pour valider sa conjecture, il les a déplacées et les a mises en position horizontale et verticale, mettant en place ainsi le schème de « vérification que deux droites sont perpendiculaires ».

Loïc et Nadir, avec Cédric et Iris, ont été les seuls binômes à s'investir dans l'exploration de Géo et à chercher à déplacer tous les objets possibles. Nous étudierons donc d'abord l'appropriation du déplacement et les schèmes d'usage et d'action instrumentée qu'ils ont commencé à construire alors.

Nous montrerons leur utilisation du déplacement pour valider leur construction.

Nous verrons, dans la situation « Toujours/parfois vrai », qu'ils ne déplacent qu'un seul point pour décider de la validité des propriétés géométriques et n'utilisent pas le schème d'usage de « recherche des points qui bougent ».

Finalement, nous montrerons l'utilisation du schème « d'identification de l'objet-trajectoire » par Loïc et le théorème-en-acte sur lequel il s'appuie pour faire sa construction.

V.1 Appropriation du déplacement

Loïc et Nadir, comme Cédric et Iris, ont déplacé presque tous les points de la figure dans la situation « Géo ».

Ils ont commencé d'abord par utiliser spontanément le schème d'usage de « déplacement d'un objet » seulement pour les objets de dimension supérieure ou égale a 1, en essayant de déplacer un des triangles formant un œil, puis le grand triangle du chapeau, puis en déplaçant le grand cercle du visage et translatant tout Géo.

Ils essayent après d'attraper à nouveau le grand triangle du chapeau, puis le petit cercle du pompon, jusqu'à ce que finalement ils attrapent le centre de ce cercle et ils le déplacent, en faisant tourner le pompon d'un côté à l'autre. On peut donc voir que Loïc et Nadir passent d'abord par le déplacement des objets de deux dimensions, pour après étendre le domaine de validité du schème au déplacement des points.

Cependant, ils continuent à essayer de déplacer des objets de deux dimensions, ils essayent d'attraper le trapèze de la bouche, puis le triangle du nez. Ils attrapent à nouveau le grand cercle du visage en le translatant.

Puis ils essayent à nouveau de déplacer des points, comme les sommets du grand triangle du chapeau, mais comme ils sont non attrapables, ils déplacent le centre du petit cercle du pompon, en essayant cette fois de voir quelles sont les limites de son déplacement.

Ils attrapent un des sommets du triangle formant le nez et ils le déplacent en déformant la forme du grand triangle du chapeau ; puis, ils attrapent et ils déplacent un sommet d'un des triangles des yeux qui permet de faire tourner les yeux de Géo. Ils laissent le chapeau et les yeux dans une position différente de celle du début.

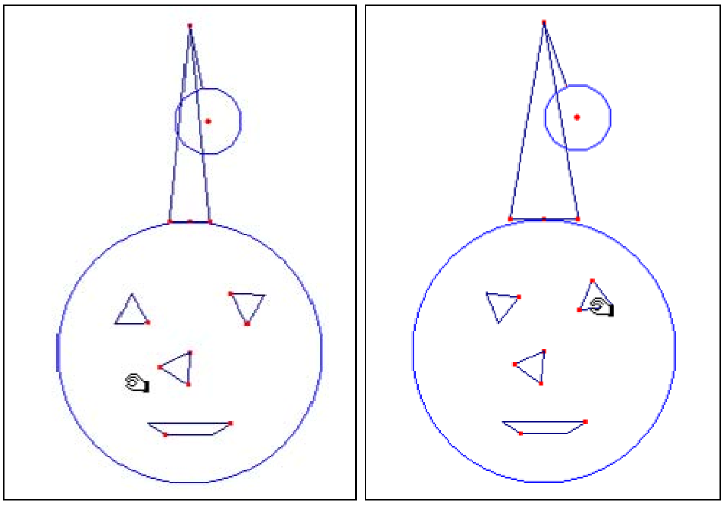


Figure 262. *Ils déplacent pour faire tourner les yeux*

Ils attrapent et ils déplacent :

- le sommet du trapèze de la bouche en changeant l'expression de Géo ;
- le centre du petit cercle en le faisant faire des tours ;
- le point de tangence du grand cercle et du grand triangle et ils agrandissent et rétrécissent Géo.

Lorsque Nadir demande à Loïc comment mettre Géo à l'envers, Loïc attrape le point de tangence et le déplace en retournant Géo. On voit donc ici un début de construction du schème d'action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition ».

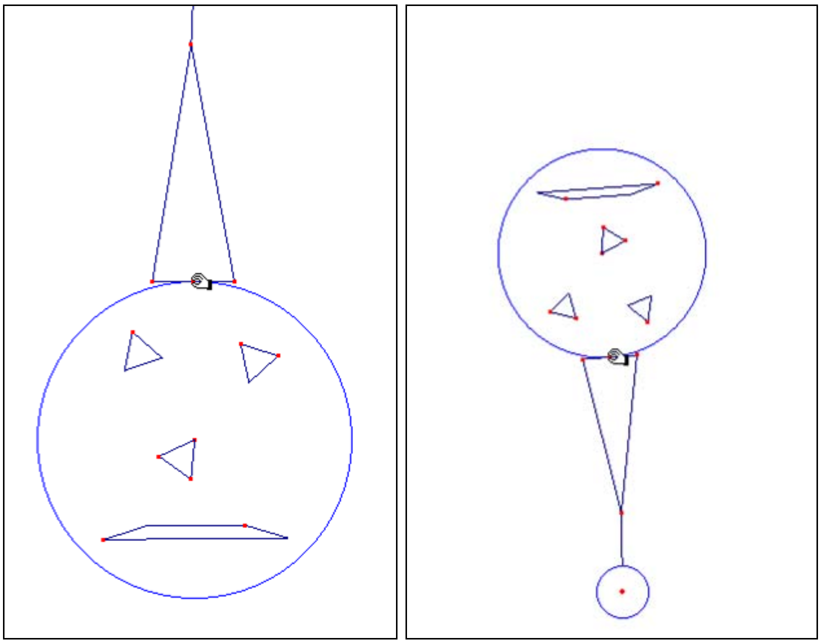


Figure 263. *Loïc attrape le point de tangence pour retourner Géo*

Loïc et Nadir continuent à déplacer des points en contrôlant les points qu'ils déplacent pour donner à Géo une forme ou une orientation particulière.

On voit donc une évolution dans cette première étape d'appropriation du déplacement chez Loïc et Nadir : ils ont d'abord commencé par utiliser spontanément le schème « déplacement d'un objet », en essayant de déplacer plusieurs formes globales (de dimension supérieure ou égale a 1), puis ont utilisé le schème pour déplacer aussi des points. Une fois qu'ils ont commencé à connaître quels effets ils pouvaient obtenir par le déplacement d'un point, ils ont commencé à contrôler leurs déplacements et à construire le schème d'action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition ».

V.2 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction »

Loïc et Nadir utilisent spontanément le schème de « déplacement pour valider » leur construction dans « Pajérond ».

Ils commencent par utiliser le schème d'usage du « tracé au jugé » pour construire le cercle perceptivement, mais comme il ne s'ajuste pas perceptivement, ils recommencent. Loïc construit alors un cercle plus précis (perceptivement) de manière à ce que le centre du cercle soit « plus au milieu » des deux points de la carrosserie et que la taille convienne (passant par un point de la droite).

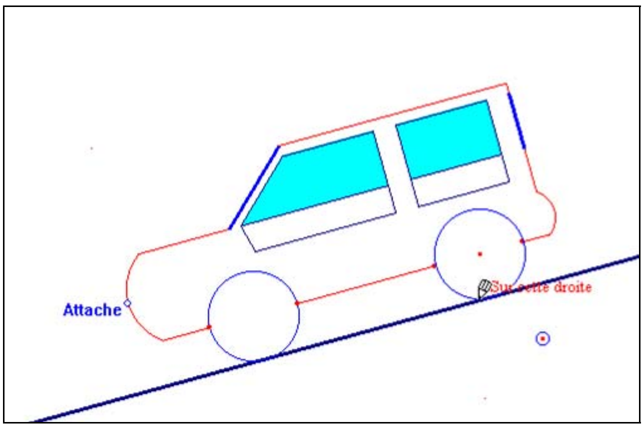


Figure 264. *Tracé du cercle passant par un point sur la droite*

Ils attrapent le point d'attache et ils déplacent la voiture et la roue reste immobile.

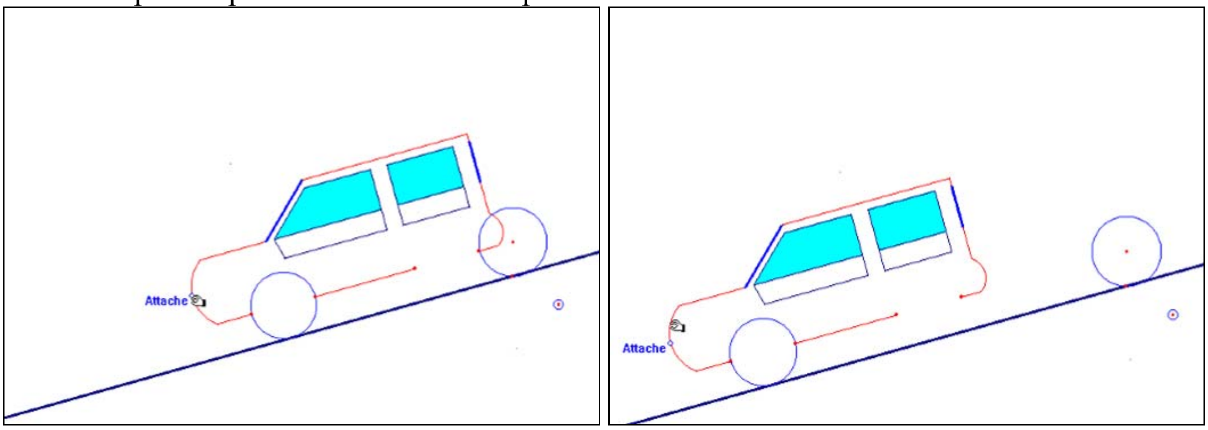


Figure 265. *Ils déplacent la voiture pour valider leur construction, mais la roue reste immobile*

Puis ils attrapent le centre du cercle construit et ils utilisent le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » pour que le cercle passe perceptivement par les deux points de la carrosserie. Ils utilisent le schème de « déplacement d'un point pour tester » leur construction, mais la roue reste statique.

Ils attrapent alors le point appartenant à la droite et par lequel a été construit le cercle et ils utilisent à nouveau le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition ». Ce point se déplace seulement sur la droite, mais il permet de faire varier la taille du cercle.

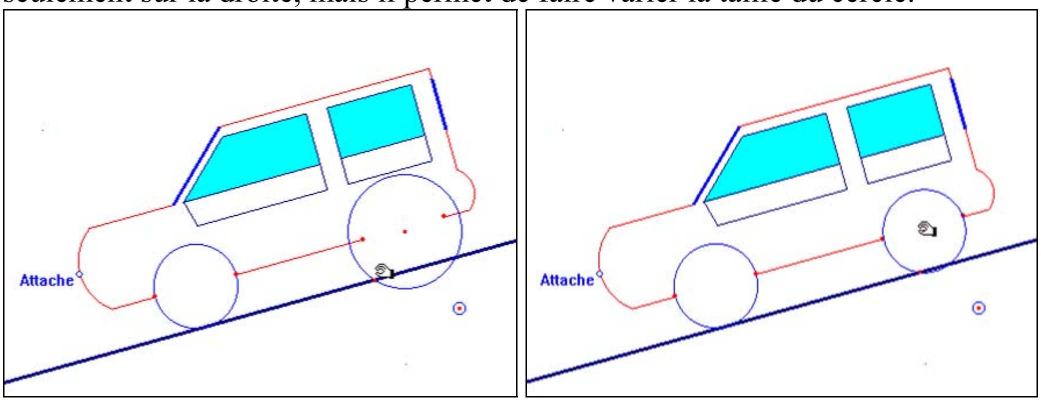


Figure 266. *Ils ajustent la taille de la roue*

Une fois qu'ils ont choisi la taille, ils essayent à nouveau de déplacer la voiture pour valider l'ajustement, mais la roue reste à sa place pendant que la voiture avance.

Ils essayent aussi d'utiliser l'outil « Punaise » pour accrocher la roue à la voiture, mais le déplacement invalide leur stratégie.

Loïc et Nadir ne réussissent donc pas à trouver la stratégie correcte. Ils ont utilisé le schème « d'ajustement pour satisfaire une condition » pour adapter la roue à la voiture et ils ont utilisé le schème « déplacer pour valider la construction » après chaque ajustement.

Dans la situation « Sur quel objet ? », Loïc identifie la trajectoire du point vert comme étant une droite. Pour la construire, il clique d'abord sur le point vert, puis sur le point F, et il hésite à cliquer aussi sur le point C.

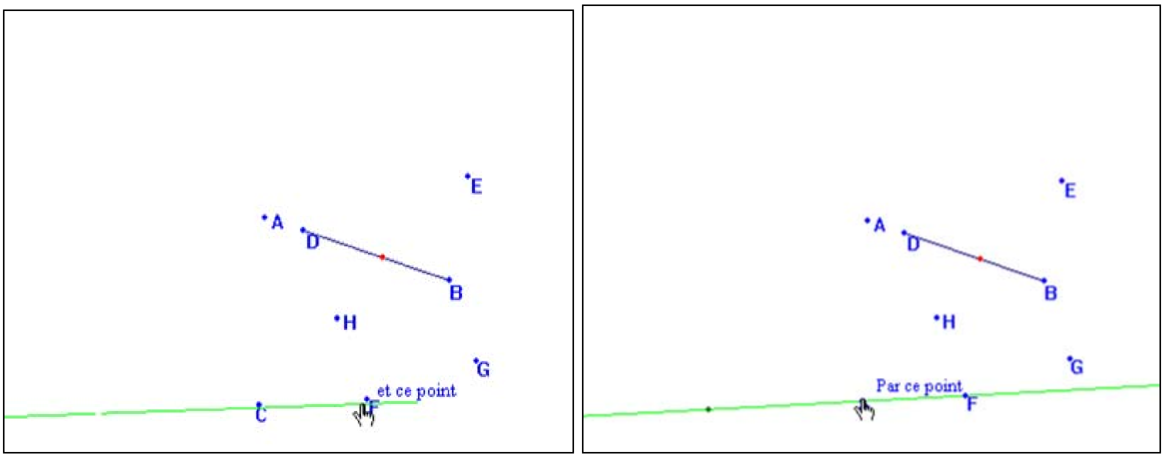


Figure 267. *Droite passant par le point vert, le point F et le point C ?*

Puis, il attrape le point C et il le déplace pour valider la construction de la droite et l'appartenance de ce point à la droite tracée par le point vert et par F :

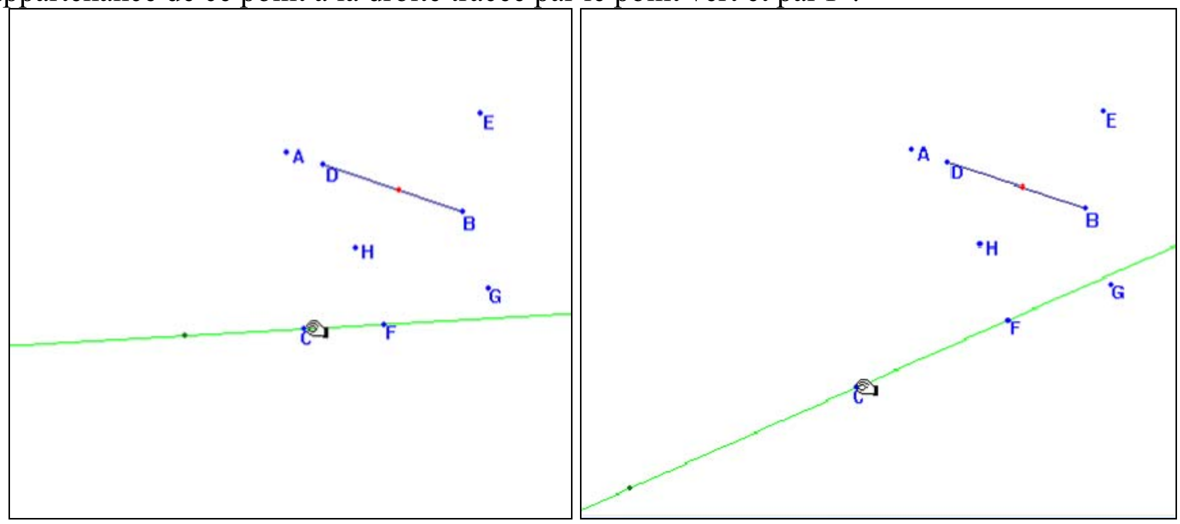


Figure 268. *Loïc déplace le point C pour valider sa construction et l'appartenance du point à la droite*

Puis il déplace le point vert aussi pour vérifier que la droite tracée décrit bien la trajectoire du point vert :

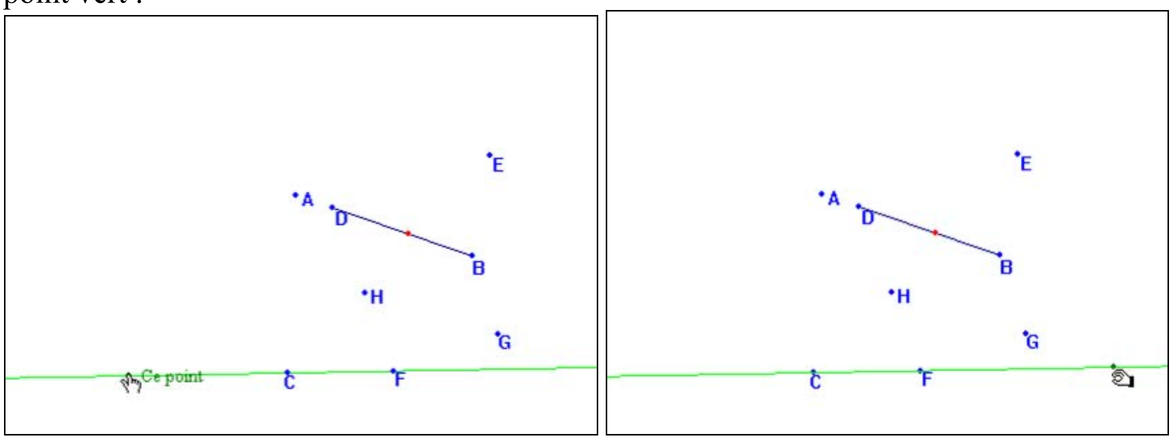


Figure 269. *Loïc déplace le point vert sur la droite tracée*

Dans son message, Loïc décrira la droite seulement en fonction des points bleus (C et F).

Dans la situation « Construire le symétrique », malheureusement, il n'y a pas de phase d'essai et erreur chez Loïc et Nadir dans la construction du symétrique de N sans l'outil du logiciel. Loïc a observé ce que faisait le binôme à côté d'eux, qui a trouvé la stratégie correcte, et a donc répété la construction faite, ce qui est un signe d'une certaine compréhension du processus de construction.

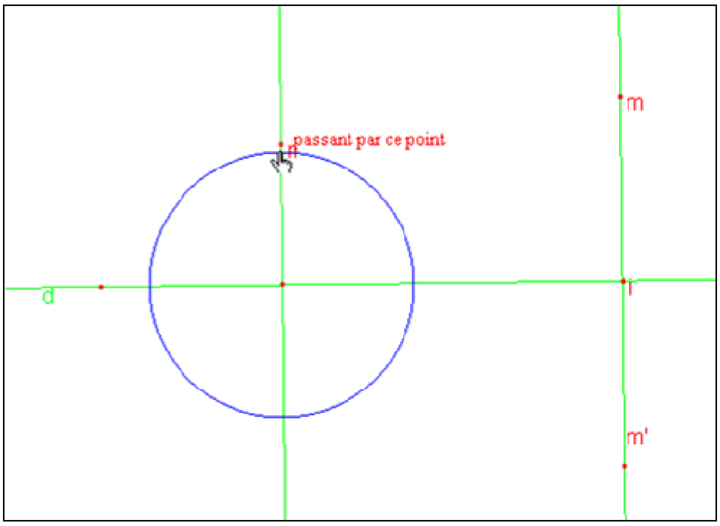


Figure 270. *Construction du symétrique en passant par la construction de la perpendiculaire et le cercle*

Une fois la construction est finie, ils ne déplacent ni n, ni (d) pour valider leur construction. L'enseignant valide aussi leur construction sans utiliser le déplacement.

Le schème de « déplacement pour valider une construction » n'est donc pas présent chez eux quand il s'agit de valider leur propre construction.

Dans la situation « Rectangles à compléter », Loïc et Nadir complètent les 4 rectangles utilisant seulement l'outil « Droite perpendiculaire ». Ils ont beaucoup de mal à utiliser l'outil (perpendiculaire à cette droite ? à ce segment ?), mais ils réussissent à construire correctement les 4 rectangles. L'utilisation de propriétés géométriques dans leur construction n'incite pas Loïc à mettre en place le schème de « déplacement pour valider » leur construction.

Ils commencent par le rectangle bleu (1), ils essayent d'abord d'utiliser l'outil « Symétrie axiale », mais comme ils n'arrivent pas à l'utiliser dans leur construction, ils essayent avec l'outil « Droite perpendiculaire » et ils construisent d'abord la perpendiculaire au côté incomplet [Ey], passant par un point appartenant à [Bx].

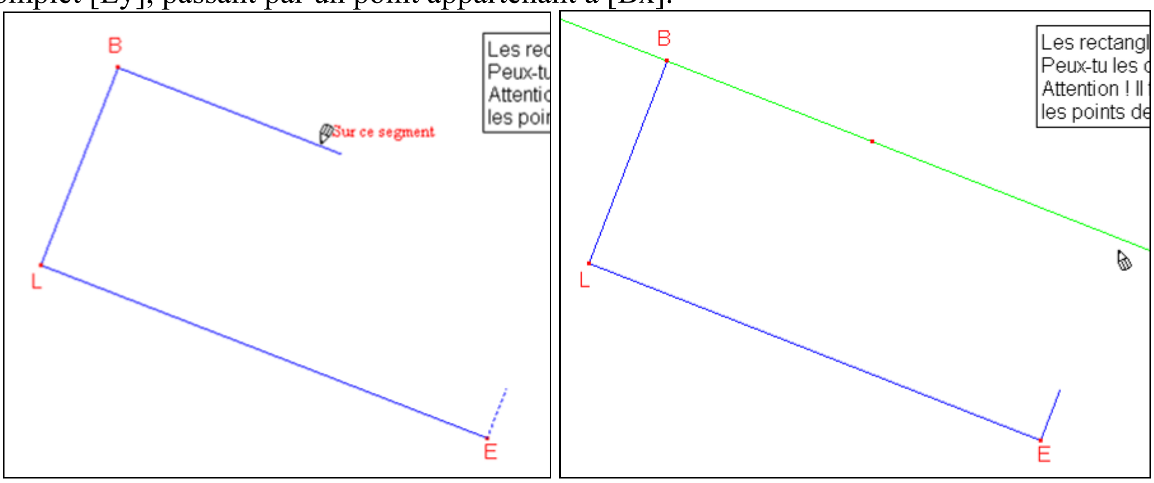


Figure 271. *Perpendiculaire à [Ey] et passant par un point appartenant à [Bx]*

Ils essayent de tracer la droite passant par E, utilisant l'outil « Droite perpendiculaire », mais ils cliquent comme avant, sur [Ey] puis sur la droite qui passe par B, alors ils obtiennent la même droite que précédemment et elles se superposent. Ils utilisent le schème d'usage de l'outil « Droite perpendiculaire » incorrectement.

Ils essayent une nouvelle fois, mais cette fois ils cliquent d'abord sur la droite passant par B, puis sur [Ey] et ils obtiennent la droite qu'ils cherchaient.

Ils placent un point à l'intersection des deux droites, ils tracent les segments de ce point à E et de ce point à B, ils les colorent en bleu et ils cachent les droites tracées. Puis ils attrapent le point E et ils le déplacent pour valider leur construction. Ils ne déplacent pas les points L ou B pour la valider.

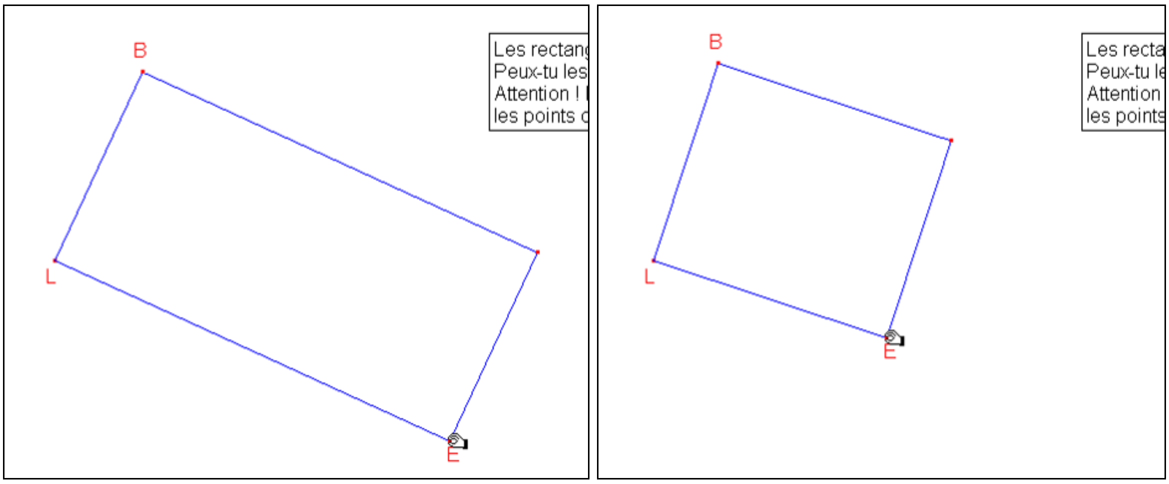


Figure 272. *Ils déplacent le point E pour valider leur construction*

Dans le rectangle rose (2), ils utilisent la même stratégie de construction de droites perpendiculaires. Ils construisent d'abord la droite perpendiculaire à [Rx] passant par S, puis ils ont des difficultés à utiliser le schème d'usage de l'outil « Droite perpendiculaire » pour construire la deuxième droite.

Une fois ils réussissent à la construire, ils utilisent la même procédure que dans la figure bleue (1) : ils placent le point d'intersection des deux droites, ils construisent les segments reliant R et S à ce point, ils colorent les segments et ils cachent les droites. Puis ils attrapent le point S et ils le déplacent pour valider leur construction :

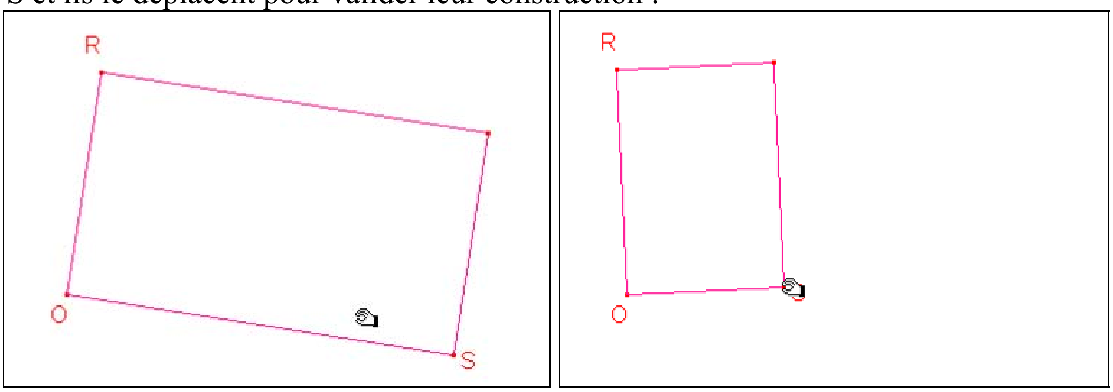


Figure 273. *Ils déplacent le point S pour valider leur construction*

Dans le rectangle noir (3), une fois ils ont tracé la perpendiculaire au segment [ON] passant par N et la perpendiculaire à [OI] passant par I (et avoir tracé les segments et caché les droites), ils n'utilisent pas le déplacement pour valider leur construction. Cela peut être dû au fait que leur stratégie de construction a déjà été validée dans les rectangles bleu (1) et rose (2), et qu'ils ne ressentent pas le besoin de valider une nouvelle fois.

Finalement, dans la figure verte (4), après avoir tracé les droites (d), perpendiculaire au segment [VE] passant par E, et (d'), la perpendiculaire à [VE] passant par V, sans problème cette fois, ils hésitent à savoir quoi faire.

Loïc : Alors, comment faire...

Ils construisent alors un segment sur la droite (d), à partir du point E.

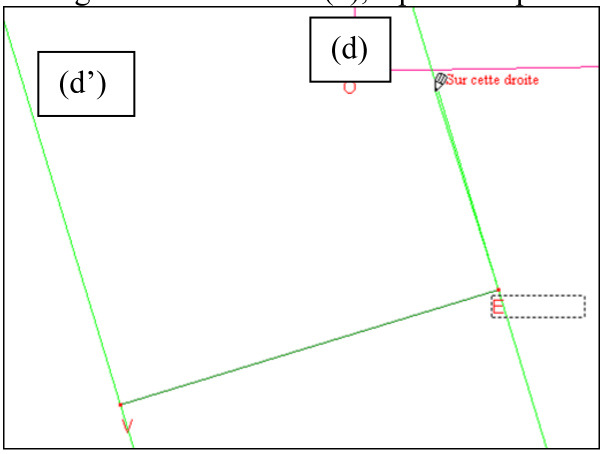


Figure 274. *Tracé d'un segment sur (d) à partir de E*

Puis Loïc commence à construire un segment sur (d') partant de V, mais Nadir lui dit de ne pas le faire comme ça alors il arrête. Loïc prend alors l'outil « Droite perpendiculaire » et il construit la perpendiculaire au segment tracé sur (d) et passant par l'extrémité du segment.

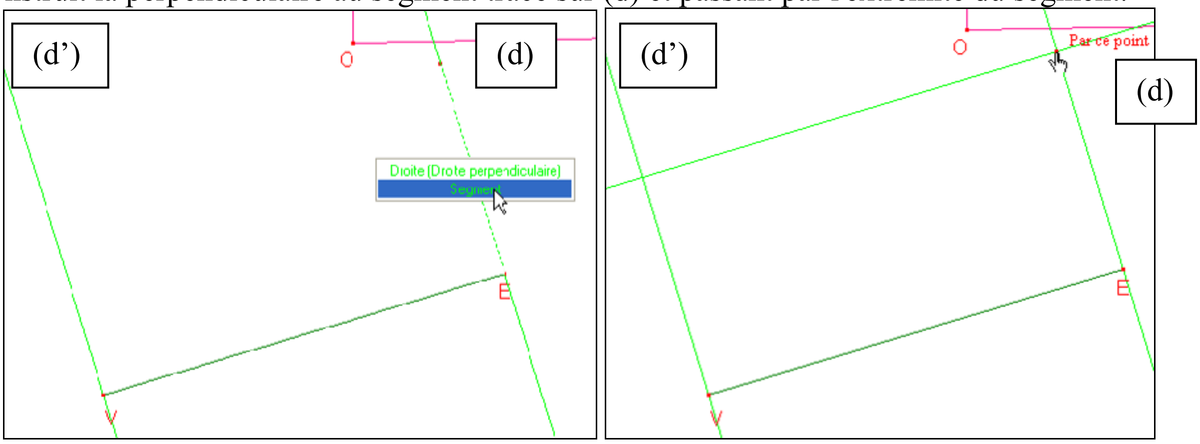


Figure 275. *Tracé de la perpendiculaire au segment sur la droite (d), passant par l'extrémité du segment*

Lorsqu'ils ont fini leur construction, l'enseignant vient les voir :

L'enseignant : Ben moi je crois pas trop ce que je vois, j'aime bien voir des figures (...) des figures, puis vous m'expliquez pourquoi vous avez fini, **pourquoi elle sont justes**... Faut nous justifier, **faut nous convaincre** que ce sont bien des rectangles! Le premier, je voudrais être sûr que c'est un rectangle!

Ils prennent alors l'outil de mesure d'angles et ils mesurent les quatre angles dans chaque figure. Ils obtiennent 90° partout et valident donc leurs constructions par la mesure des angles. Peut-être parce que déplacer n'est pas une justification mathématique et que l'enseignant leur a demandé une justification qui convainque.

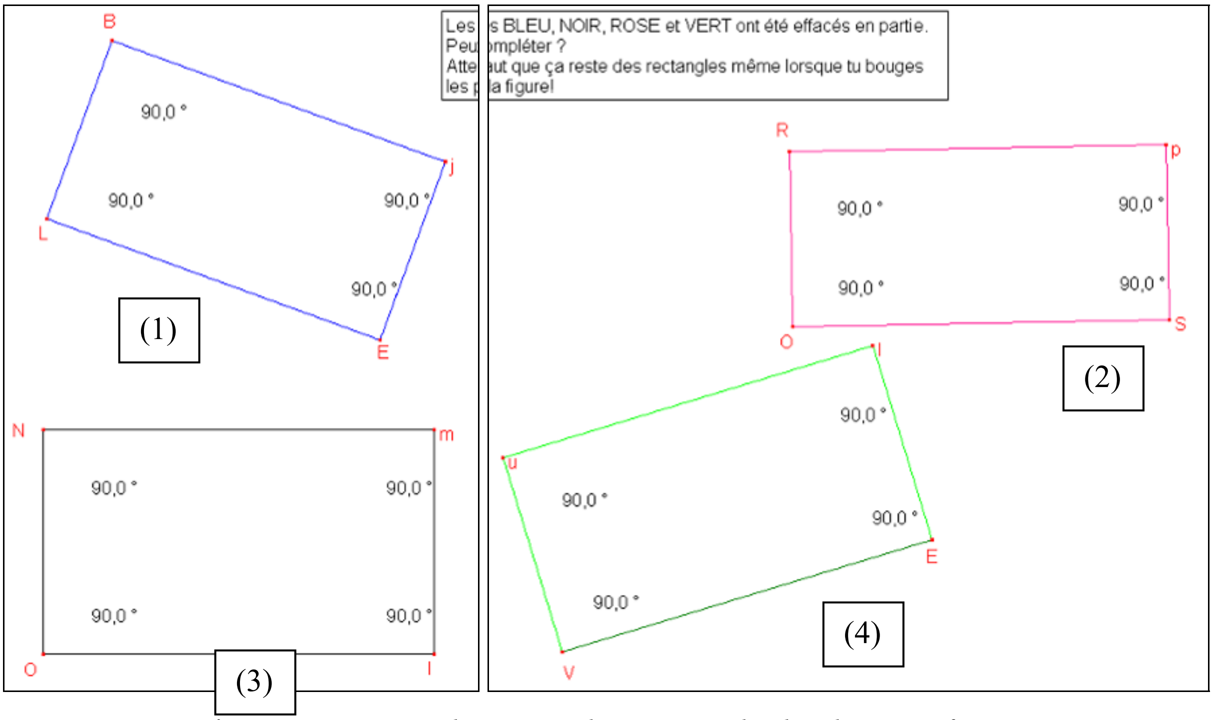


Figure 276. *Loïc et Nadir mesurent les quatre angles dans les quatre figures*

Nadir demande alors à Loïc de déplacer les rectangles :

Nadir : Bouge-les maintenant!

Loïc attrape le point **i** (sur la droite (d)) dans le rectangle vert (4) et il le déplace. Puis il attrape le point V et il le déplace.

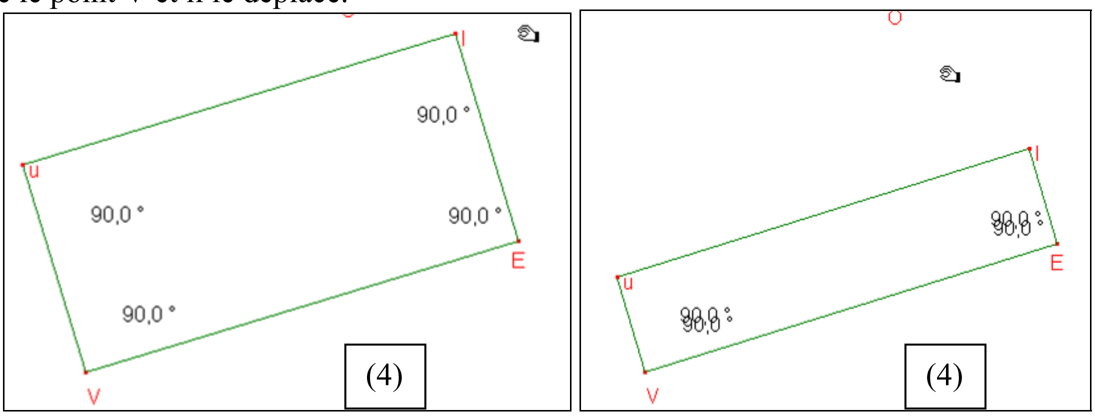


Figure 277. *Ils déplacent le point i pour valider la conservation des angles dans leur construction*

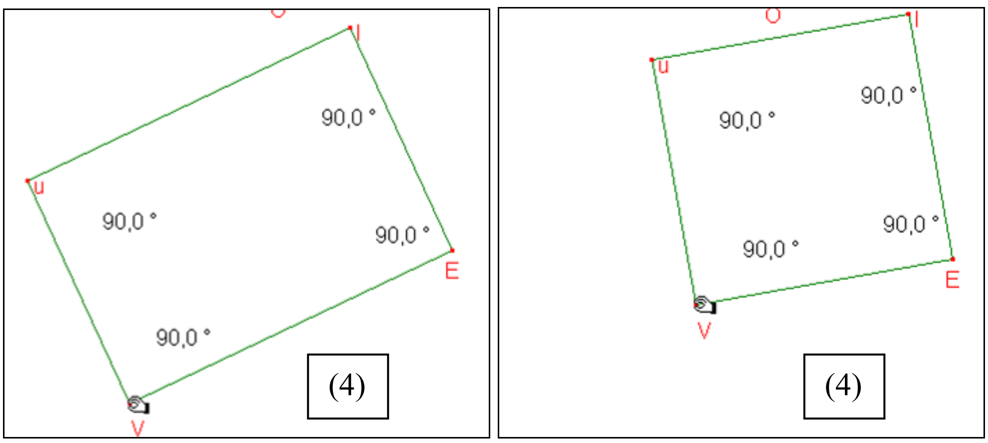


Figure 278. *Ils déplacent aussi le point V pour valider leur construction*

Ils attrapent le point R dans le rectangle rose (2) et ils le déplacent, puis le point O.

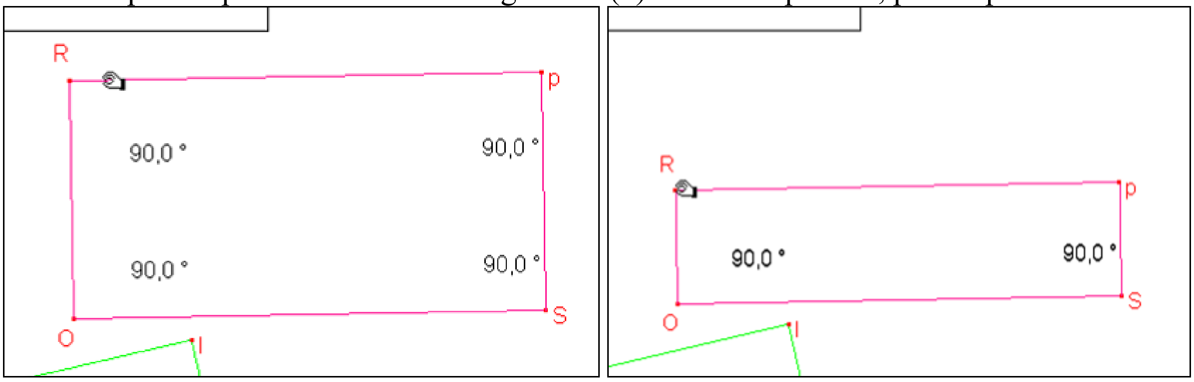


Figure 279. *Ils déplacent le point R dans la figure rose (2)*

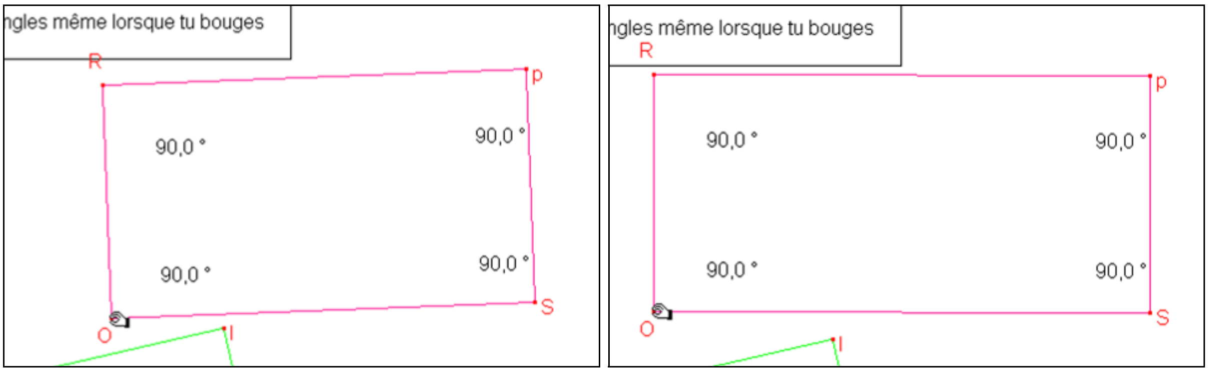


Figure 280. *Ils déplacent le point O dans la figure rose*

Ils ont recours ici au « déplacement pour valider une construction » assisté par la mesure.

Comme nous l'avons vu dans les situations « Construire le symétrique » et « Rectangles à compléter », pour Loïc en particulier, l'assurance que les propriétés géométriques sont satisfaites garantit pour lui la validité de la construction et il devient inutile de déplacer. Loïc est entré dans la « géométrie axiomatique naturelle », alors que Nadir ne l'est pas encore.

Dans « Rectangles à Compléter », grâce à l'intervention de Nadir, qui demande à Loïc de déplacer les rectangles, ils utilisent le déplacement pour valider assisté par la mesure des angles. Ce déplacement semble être plus fort pour eux que le seul déplacement, car la mesure explicite la propriété caractéristique du rectangle. Ce déplacement est en fait le résultat de la conjonction des schèmes de Nadir et de Loïc, puisque Loïc seul n'aurait pas déplacé.

V.3 Schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété »

Loïc et Nadir n'utilisent pas le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » pour décider de la validité des propriétés.

Dans la situation « Toujours/parfois vrai », Loïc et Nadir commencent par déplacer plusieurs points dans la figure bleue (1), puis ils ne déplaceront que le point D dans les figures verte (2) et rose (3).

Dans la figure bleue (1), ils essayent d'abord d'attraper le point B, puis ils attrapent le point D et ils le déplacent. Loïc comprend parfaitement quelle est la tâche :

Loïc : Je regarde si c'est perpendiculaire... et si ça reste...
L'observateur : si ça reste ?

Loïc : un angle droit…

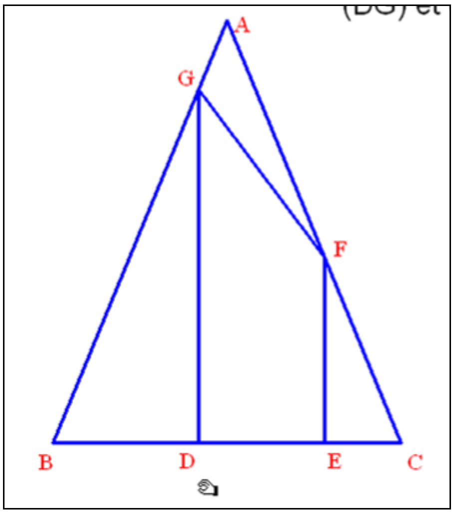


Figure 281. *Loïc déplace le point D et il observe si la perpendicularité se conserve ou non*

Nadir déplace un peu le point E, puis ils déplacent encore le point D, puis E :

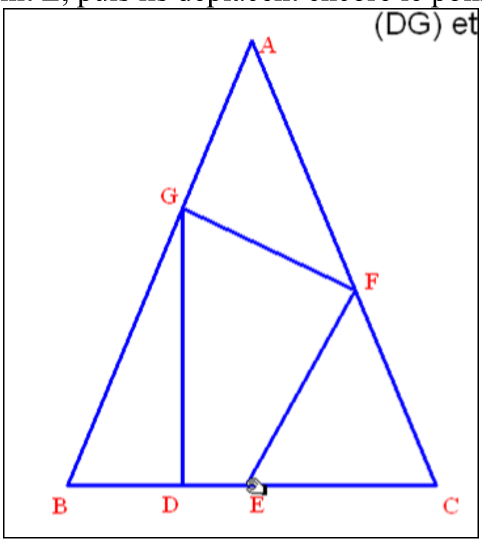


Figure 282. *Ils déplacent les points D et E*

Ils répondent dans leur fiche : « oui », (DG) et (BC) sont perpendiculaires et ils ont déplacé D, et « non », (DG) et (EF) ne sont pas parallèles et ils ont déplacé D et E. Ils n'essayent donc pas de déplacer G pour vérifier si la perpendicularité est conservée.

Figure Bleue	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	D
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	non	D et E

Figure 283. *Ils ne déplacent que les points D et E pour décider de la validité des propriétés de la figure*

Dans la figure verte (2), ils n'attrapent que le point D :

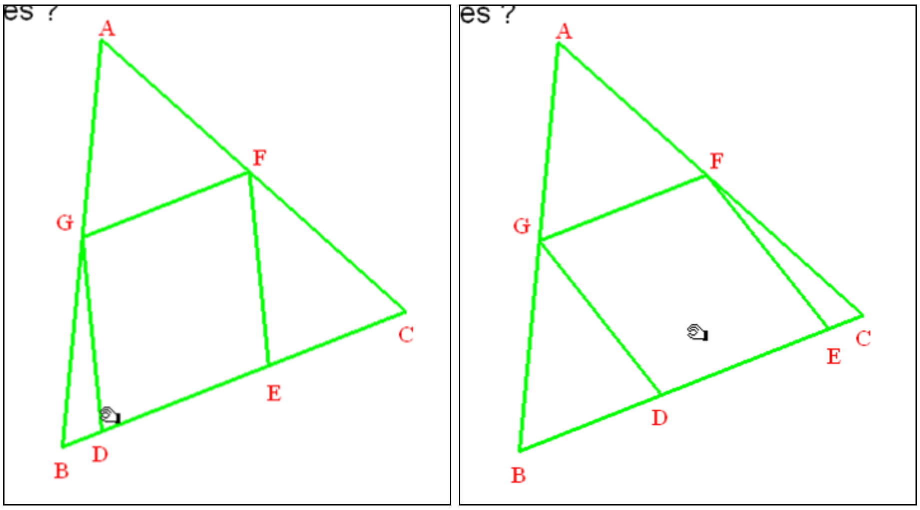


Figure 284. *Ils déplacent seulement le point D dans la figure verte (2)*

Le déplacement du point D paraît leur suffire pour conclure à propos de la validité des propriétés, alors ils n'explorent pas d'autres déplacements. Ils répondent dans leur fiche : « non » à la perpendicularité, ils ont déplacé D, et « oui » au parallélisme, ils ont déplacé D aussi.

Figure Verte	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	non	D
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	oui	D

Figure 285. *Ils ne déplacent que le point D pour décider de la validité des propriétés de la figure verte (2)*

Bien qu'ici leurs réponses soient correctes, ils n'explorent pas assez la figure et ils se contentent de déplacer un seul point avec lequel ils invalident la non-perpendicularité et valident de façon erronée le parallélisme.

Dans la figure rose (3), ils ne déplacent aussi que le point D :

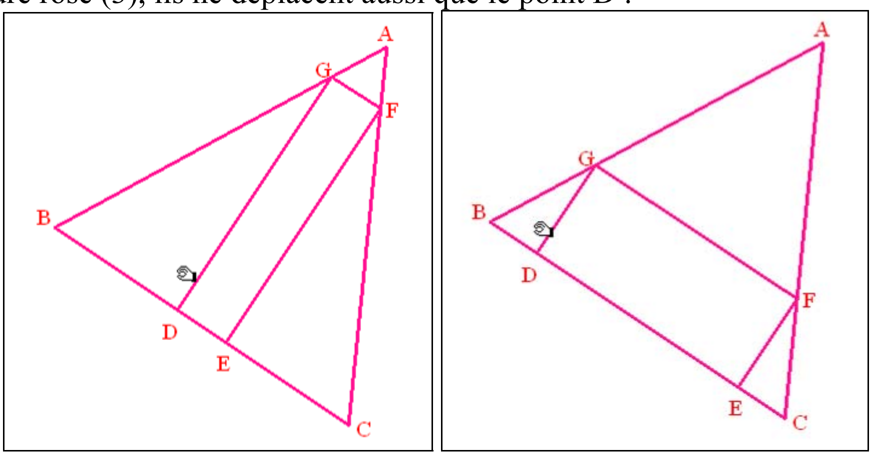


Figure 286. *Ils ne déplacent que le point D dans la figure rose (3)*

Ils essayent d'attraper et de déplacer le point E, mais ce point est non attrapable.

Ils répondent dans leur fiche : « oui », (DG) et (BC) sont perpendiculaires et ils ont déplacé le point D, et « oui », (DG) et (EF) sont parallèles et ils ont déplacé D.

Figure Rose	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	oui	D
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?	oui	D

Figure 287. *Ils ne déplacent que le point D et décident de la validité des propriétés de la figure rose (3)*

Loïc et Nadir comprennent très vite que pour décider si une propriété est vraie ou fausse, ils doivent déplacer des points de la figure. Dans la première figure qu'ils explorent, la figure bleue (1), ils déplacent les points D et E et cela leur suffit pour conclure sur les deux propriétés demandées. Ils essayent de déplacer d'autres points comme le point B, mais comme ils sont punaisés, ils ne peuvent pas être déplacés. Dans les deux figures suivantes, la verte (2) et la rose (3), ils ne déplacent que le point D. Ils n'explorent pas d'autres points déplaçables de la figure et bien que leurs réponses soient vraies, leur exploration reste très limitée. Ils utilisent donc le schème de « déplacement pour valider une conjecture/propriété » sur un ensemble incomplet de points et n'utilisent pas le schème d'usage de « recherche des points qui bougent ».

V.4 Schème d'action instrumentée « d'identification de l'objet-trajectoire » et concept-en-acte de droite

Dans la situation « Sur quel objet ? », Loïc met en place la stratégie « utilisation du point mobile pour caractériser sa trajectoire » pour le tracé de la droite représentant la trajectoire du point vert.

Après avoir identifié la trajectoire du point vert et afin de pouvoir la caractériser en fonction des points bleus, Loïc utilise le schème de « vérification que la trajectoire passe par un point » pour vérifier si elle passe par C et par F.

Cependant, lorsqu'il va tracer la droite, il clique d'abord sur le point vert, puis sur le point F, et il hésite à cliquer aussi sur le point C.

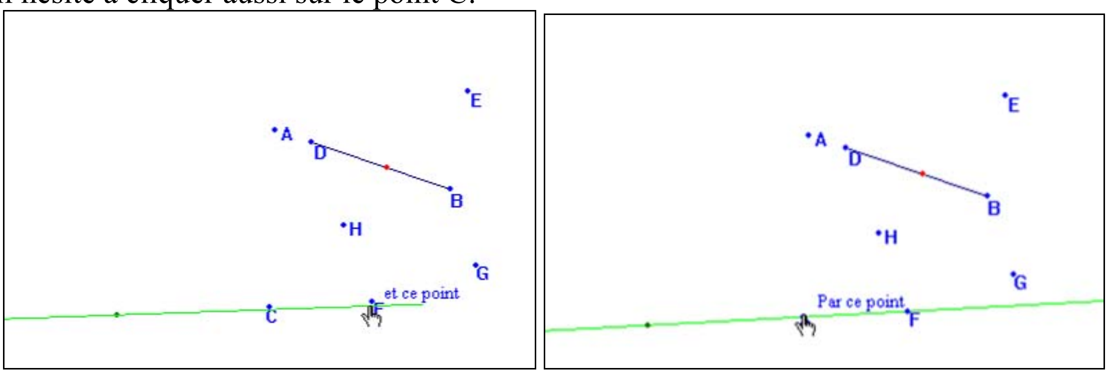


Figure 288. *Droite passant par le point vert, par F et par C*

Puis il attrape le point C et il le déplace pour valider sa construction et vérifier l'appartenance du point C à la droite tracée :

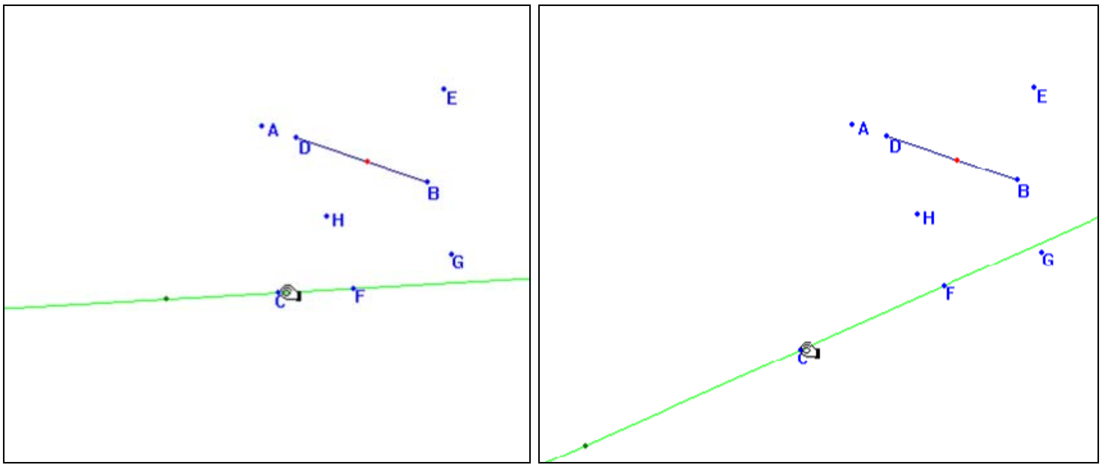


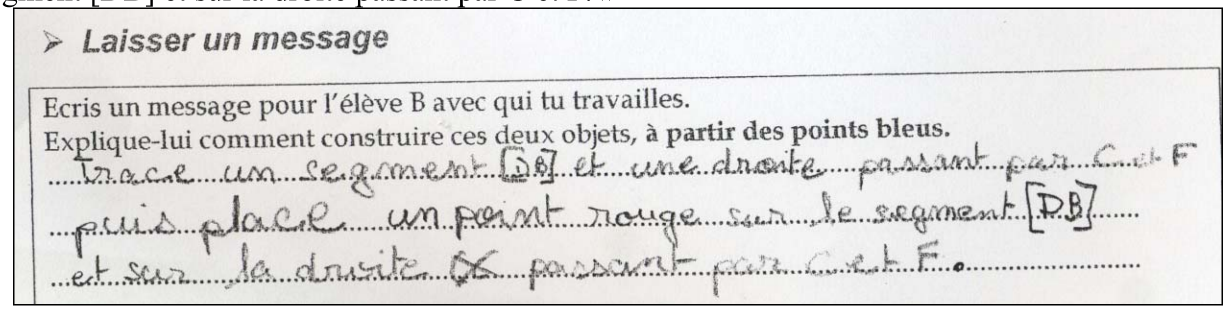
Figure 289. *Il déplace le point C pour vérifier qu'il appartient à la droite passant par le point vert et par F*

Il déplace aussi le point vert pour vérifier que la droite tracée décrit bien la trajectoire de ce point.

Nous pouvons formuler ainsi le théorème-en-acte mobilisé par Loïc :

Théorème en acte : trois points ou plus alignés ne sont pas nécessairement sur une même droite

Cependant Loïc décrit dans son message la droite en fonction des points bleus seulement : « Trace un segment [DB] et une droite passant par C et F puis place un point rouge sur le segment [DB] et sur la droite passant par C et F. »



➢ Laisser un message

Ecris un message pour l'élève B avec qui tu travailles.
Explique-lui comment construire ces deux objets, **à partir des points bleus.**
Trace un segment [DB] et une droite passant par C et F
puis place un point rouge sur le segment [DB]
et sur la droite passant par C et F.

Figure 290. *Message écrit par Loïc : « droite passant par C et F »*

Loïc et Nadir étant dans la classe où le changement de rôle ne s'est pas effectué, Loïc est à nouveau émetteur. Il mettra en place la même stratégie pour tracer la demi-droite décrite par la trajectoire du point rouge : il trace la demi-droite en cliquant d'abord sur le point F, puis sur le point rouge.

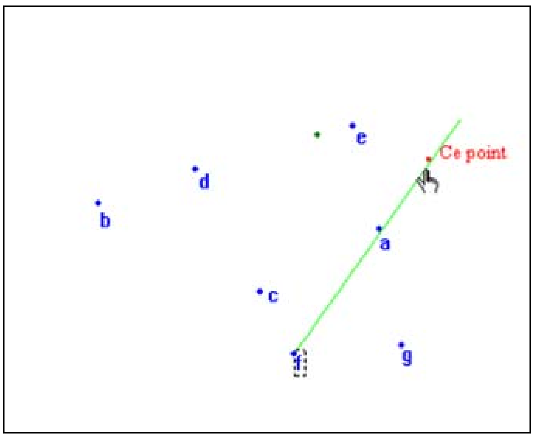
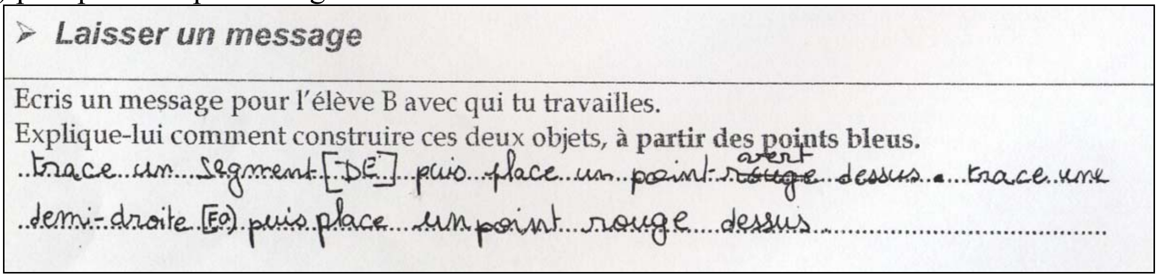


Figure 291. *Loïc trace la demi-droite passant par le point rouge*

Et à nouveau dans son message il la décrit correctement en fonction des points bleus seulement : « trace un segment [DE] puis place un point vert dessus. trace une demi-droite [Fa) puis place un point rouge dessus. »


➢ *Laisser un message*

Ecris un message pour l'élève B avec qui tu travailles.
Explique-lui comment construire ces deux objets, **à partir des points bleus.**
..trace..un...Segment [DE]...puis...place..un..point..~~rouge~~ vert...dessus.....trace.une
..demi-droite [Fa) puis place...un point...rouge....dessus......................................

Figure 292. *Loïc décrit correctement la demi-droite [Fa) dans son message*

V.5 Genèse instrumentale

Loïc et Nadir ont effectué une exploration très riche dans « Géo » qui leur a permis de construire le schème d'usage de « déplacement d'un objet », valable d'abord seulement pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, puis pour les points. Ils ont utilisé le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » pour explorer les effets graphiques possibles, puis ont contrôlé les points qu'ils déplaçaient pour donner à Géo une forme particulière, début de la construction du schème d'action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition ». Cependant, le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » n'est pas mobilisé par la suite pour décider de la validité des propriétés d'une figure ou de leur propre construction.

Puisque Loïc est entré dans la géométrie « naturelle axiomatique », il mobilise ses connaissances mathématiques et impose des propriétés géométriques à la construction. Mais l'assurance que les propriétés géométriques sont satisfaites garantit pour lui la validité de la construction et ne ressent plus le besoin de déplacer pour valider sa construction. Ceci avait été observé par Rolet (1996) avec des Professeurs des Ecoles en formation et Tapan (2006) avec des Professeurs de Mathématiques en formation.

Grâce à l'envie de Nadir de déplacer et à la conjonction des schèmes construit par les deux, nous avons pu observer le schème de « déplacement pour valider une construction » assisté par la mesure. Ce schème de déplacement semble être plus fort pour eux que le seul déplacement, puisqu'il justifie la conservation de la propriété caractéristique du rectangle.

VI. ROLE DE L'ENSEIGNANT ET DES PHASES COLLECTIVES

Les phases collectives ont joué un rôle essentiel dans notre ingénierie. Elles ont permis parfois d'introduire, d'institutionnaliser ou d'intégrer des schèmes ou des règles d'action dans le contrat didactique de la classe.

Dans « Géo » par exemple, la règle d'action sur comment doit être effectué le déplacement d'un point a fait l'objet de la discussion. De même, le fonctionnement de la classe et le rôle de l'élève-sherpa sont introduits.

La phase collective dans la situation « Toujours/parfois vrai » a permis d'une part, de partager socialement le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », et d'autre part, d'intégrer dans le contrat de la classe la règle qu'il faut déplacer <u>tous</u> les points de la figure pour pouvoir décider de la validité des propriétés géométriques.

VI.1 « Géo » et l'appropriation du schème d'usage de déplacement d'un point

Appropriation du déplacement et comment attraper et déplacer un point :

> Cédric : On peut le faire bouger
>
> L'enseignant : Chloé, tu écoutes Mounir, c'est lui qui dit ce que tu fais. Après si tu as une idée tu l'écris, tu le feras toi. Mounir vas-y!

L'enseignant explique donc le fonctionnement des phases collectives et le rôle de l'élève-sherpa : manipuler l'ordinateur, sous les indications données par un autre élève.

> Mounir : Sur la pointe du chapeau, ben on clique sur le point et on peut le faire tourner.
>
> Chloé : Sur la pointe du chapeau ?
>
> L'enseignant : Débrouille-toi avec ce qu'il te dit!

Chloé clique sur « la pointe du chapeau », le sommet du grand triangle qui relie le chapeau au pompon ; elle n'essaye pas vraiment de l'attraper et de le déplacer.

> L'enseignant : Alors si sa consigne n'est pas assez précise, levez la main, essayez de les aider! Je n'interviens pas. Ambre
>
> Ambre : Il faut mettre la flèche sur le centre du rond du chapeau, là-haut...

Mais Ambre doit lui répéter :

> Ambre : Il faut que tu mettes la flèche, tu cliques sur le centre du point là... du chapeau, sur le centre...
>
> Chloé : Du cercle ?
>
> Ambre : Oui!
>
> L'enseignant : Eh ben vas-y, tu essaies!

Chloé clique sur le centre du petit cercle du pompon comme Ambre lui a dit mais elle ne l'attrape, ni ne le déplace. Elle clique une fois de plus et rien ne se passe.

> L'enseignant : Elle a cliqué... On a toujours un petit souci technique, hein ? Peut-être vous allez trouver une solution je pense. Carl!
>
> Carl : **Faut rester appuyé**
>
> L'enseignant : **Faut rester appuyé, et oui, il faut rester pour que quand tu appuies comme ça, tu te transformes en main!**

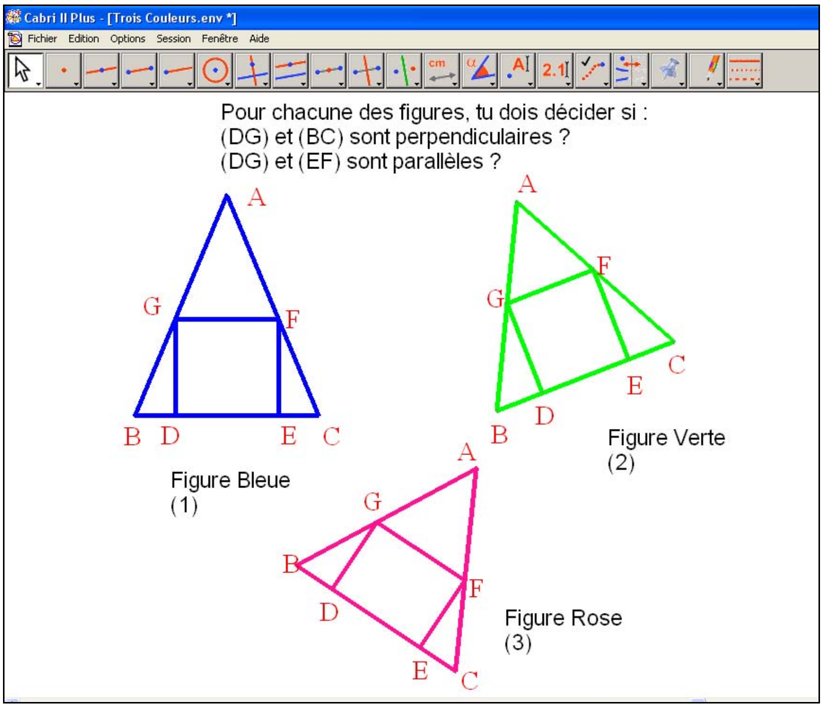
Chloé laisse la souris appuyée, le pointeur se transforme en main et elle commence à déplacer le centre du petit cercle.

L'enseignant doit donc expliciter le schème gestuel pour attraper un point qui ne va pas de soi pour les élèves.

L'enseignant introduit aussi dans cette séance le fonctionnement de la classe lors des phases collectives et les explicitations qui doivent être faites par l'élève qui donne des indications à l'élève-sherpa : qu'est-ce qu'on déplace et qu'est-ce qu'on observe :

> L'enseignant : Allez ma fille! **Et qu'est-ce que tu regardes pendant que tu fais ça Chloé**, ce coup-ci tu peux nous le dire! **Qu'est-ce que tu observes quand tu fais bouger comme ça** ?
>
> Chloé : J'observe... le, le trait...qui bouge, enfin, le cercle...
>
> L'enseignant : Oui le cercle qui bouge, le pompon on pourrait dire, le trait. Bon André tu dis quoi toi ?
>
> André : La main
>
> L'enseignant : On peut observer la main hein, la main qui saisit, qui permet de faire bouger. Est-ce que quelqu'un a une autre idée de ce qu'on pourrait essayer de faire bouger ? Et puis me dire ce qu'on regarde aussi! Allez on va changer, cette fois ce sera Alex qui manipulera. Qui peut lui dire ce qu'il essaie ? Cédric!
>
> Cédric : Sinon il peut baisser la tête... enfin...

VI.2 « Toujours/parfois vrai » et le schème d'action instrumentée du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement »



L'enseignante demande aux élèves de dire si les droites (DG) et (EF) sont parallèles, en les faisant voter : 9 oui, 12 non.

Parmi ceux qui ont dit que « non », les deux droites ne sont pas parallèles, l'enseignant demande à Carl pourquoi il dit que les droites ne sont pas parallèles si pourtant, perceptivement, elles ont « bien l'air » :

L'enseignant : Carl pourquoi t'es pas convaincu toi ?
Carl : **Parce que si on bouge...**
L'enseignant : Parce que quoi ?
Carl : **On bouge un point...**
L'enseignant : On bouge un point et puis alors ?
Carl : **Et après ça se coupe...**
L'enseignant : Et alors ça se ?
Les élèves : Coupe!
L'enseignant : ça se penche! Eux ils les ont mises et ça se penche comme ça, quand ils bougent un point. Ben viens nous le montrer. Parce que moi quand je les regarde, je les regarde bien droit, op! Parallèles! Et toi tu nous dis on bouge, ça se penche!

La formulation de Carl est correcte, « ça se coupe », et explicite bien le fait que les droites ne peuvent pas être parallèles.

Carl vient manipuler l'ordinateur vidéo-projeté et il déplace le point E de manière à ce que E vienne se superposer avec B et que (EF) et (DG) se coupent. Il utilise donc le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » pour montrer à la classe que les deux droites ne sont pas parallèles.

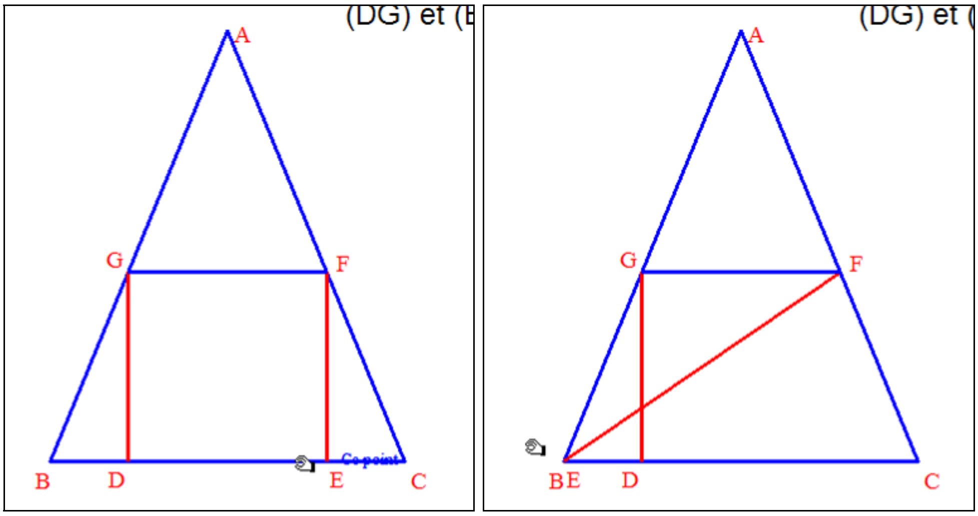


Figure 293. *Carl attrape le point E et le déplace pour montrer que (DG) et (EF) ne sont pas parallèles*

Le schème est donc socialement partagé et sera utilisé après par les élèves comme un moyen d'argumentation.

L'enseignant : Ah oui ben alors là toi t'es bien convaincu que les deux elles sont pas parallèles là! D'accord! Mais dites-moi, ça veut dire qu'elles sont jamais parallèles ?
Les élèves : Ben non!
L'enseignant : Parce que **des fois elles sont bien parallèles** ? (Elle utilise ses bras pour montrer des droites parallèles) Et puis **des fois elles sont pas** ? (Elle croise ses bras pour montrer des droites qui se croisent) Alors, des fois oui, des fois non. Ça vous gène pas ça ? Ben non, des fois oui, des fois non… Qu'est-ce qu'on va voter à votre avis ? Des fois oui des fois non ?
Les élèves : Non !
L'enseignant : Comment ça non ? Moi je dis des fois oui, des fois non, des fois elles sont, des fois elles sont pas, comme ça on est tranquilles.
Ambre : **Parce que des parallèles même si tu bouges les points, ça reste toujours parallèle!**
L'enseignant : ça reste ?
Ambre : **Toujours parallèles!**

On voit donc que pour Ambre, le principe-en-acte de conservation des phénomènes perceptifs commence à avoir du sens : deux droites sont parallèles si elles le sont <u>toujours</u>.

L'enseignant : Toujours! C'est à dire qu'on va dire en mathématiques (...) On va dire en maths c'est parallèle seulement si c'est ? T'as dit si c'est ?
Ambre : Perpendiculaire... euh! Parallèle!
L'enseignant : Non mais t'avais dit un mot important
Ambre : **Toujours**
L'enseignant : T'as dit si c'est toujours parallèle! ça veut dire si j'arrive **UNE FOIS** à le mettre dans une position où c'est pas parallèle, ça peut être comme ça (elle montre avec ses bras des droites sécantes), ça peut être comme ça (elle montre des segments non parallèles mais qui ne se coupent pas). Si une fois c'est pas parallèle, ça suffit pour que ce soit ?
Les élèves : Jamais parallèles!
L'enseignant : Alors c'est pas jamais parallèles, mais on va dire ?
Les élèves : Parallèles!
L'enseignant : Si on nous dit de (...) on va dire « Non c'est pas ? »
Les élèves : Parallèles!

L'enseignant introduit donc le concept de contre-exemple en mathématiques et leur fait écrire dans leur cahier :

« En mathématiques, pour qu'une propriété soit vraie il faut qu'elle le soit toujours, dans tous les cas. Si une seule fois, la propriété n'est pas vérifiée, alors on dit qu'elle est fausse. »

L'enseignant leur demande de reprendre la fiche et les figures sur lesquelles ils avaient commencé à travailler pour vérifier leurs réponses :

L'enseignant : Pour vérifier bien que vous avez essayé que ça marchait TOUT LE TEMPS. **Comment on peut essayer que ça marche tout le temps, dans les figure qu'on a ? Qu'est-ce qu'on va essayer de faire ?**
Un élève : On bouge les points
L'enseignant : On va bouger ?
L'élève : Les points
L'enseignant : On va bouger ?
L'élève : **TOUS les points!**
L'enseignant : **TOUS les points!**

Cette règle d'action sera intégrée par les élèves comme faisant partie du contrat didactique de la classe. Ceci est particulièrement visible chez Katia&Malek et chez Cédric&Iris qui utilisent le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » pour pouvoir valider les propriétés de la figure, bien que parfois ils ne comprennent pas qu'ils ont obtenu un contre-exemple permettant d'invalider une propriété donnée et décident de bouger les points par effet de contrat.

CHAPITRE V

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Afin de pouvoir répondre à nos deux questions de recherche,

Question de Recherche 1 : Quels instruments déplacement seront construits par les élèves au cours de la genèse instrumentale ?

Question de Recherche 2 : Est-ce que les élèves prennent en charge la validation de leurs constructions en déplaçant ?

nous avons observé tout au long d'une année les processus de résolution des élèves de deux classes de $6^{ème}$ lors d'une suite de situations sur Cabri. Ces situations visent le développement d'une genèse instrumentale du déplacement par ces élèves au cours de leur utilisation de la géométrie dynamique pour l'apprentissage de la géométrie.

Ayant peu d'éléments dans la littérature à propos de la genèse instrumentale du déplacement, nous avons décidé d'introduire plusieurs types de déplacements dans des situations de natures différentes, en donnant une place centrale au déplacement pour valider une construction. Ceci nous a permis d'avoir une vue d'ensemble plus globale, d'introduire le concept du déplacement dans des situations variées et de rendre possible la construction de différents schèmes relatifs au déplacement chez les élèves.

Nous avons réalisé une première analyse a priori en termes de stratégies, mais cette première analyse des actions des élèves nous a permis de nous rendre compte qu'il manquait un niveau plus fin d'étude nous permettant étudier la construction d'instruments déplacement chez les élèves. Nous avons donc affiné cette analyse en passant par l'identification et la description des schèmes d'utilisation construits par les élèves.

L'analyse en termes de schèmes, par la structure même du schème, nous a obligé à analyser plus finement les actions des élèves et nous a permis d'observer des phénomènes que nous n'avions pu voir auparavant. Par exemple, nous avons observé que le schème d'usage de « déplacement d'un objet » se construit et n'est valable d'abord que pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, à la manière d'objets matériels, puis étend son domaine de validité aux points de la figure.

Nous allons d'abord donner des éléments de réponse à nos deux questions de recherche, puis discuter les quatre hypothèses de travail que nous avons formulées dans le premier chapitre, pour enfin revenir sur la méthodologie.

DES SCHEMES AUX INSTRUMENTS DEPLACEMENT

Afin de pouvoir répondre à ces questions en termes d'instruments, nous sommes revenus à la définition d'instrument donnée par Rabardel (1995) :

> « Nous pensons qu'il faut définir l'instrument comme une entité mixte, qui tient à la fois du sujet et de l'objet (au sens philosophique du terme) : l'instrument est une entité composite qui comprend une composante artefact (un artefact, une fraction d'artefact ou un ensemble d'artefacts) et une composante schème (le ou les schèmes d'utilisation, eux-mêmes souvent liés à des schèmes d'action plus généraux). Un instrument est donc formé de deux composantes :
> - d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
> - d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de ShSU (Schèmes Sociaux d'Utilisation) déjà formés extérieurement à lui. » (Rabardel 1995, p.95)

Un instrument déplacement sera donc défini à partir d'un ou plusieurs schèmes d'utilisation intervenant dans cet instrument. Un même schème d'utilisation pourra être présent dans différents instruments, en jouant un rôle spécifique dans le fonctionnement de l'instrument.

Nous pouvons donc revenir sur notre classification initiale des différentes utilisations du déplacement et voir quels sont les schèmes qui interviennent.

Dans le **déplacement non-finalisé mathématiquement** et l'exploration de la figure, plusieurs schèmes d'usage sont présents :

- le schème d'usage de « déplacement d'un objet », qui nécessite la reconnaissance des points de la figure et qui n'est souvent valable, au début de la genèse instrumentale, que pour les objets de dimension supérieure ou égale à 1, à la manière d'objets matériels ;
- le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » intervient aussi dans une première étape d'exploration de la figure ;
- le schème d'usage de « distinction des différents types de points du logiciel » correspond à une évolution du schème précédent de recherche des points qui bougent, bien que d'après nos observations, ce schème ne soit pas construit par les élèves.

Puisque c'est un instrument non finalisé mathématiquement, nous ne lui avons pas associé de schème d'action instrumentée. Une première occasion de construction de cet instrument est donnée dans la situation initiale de l'ingénierie, « Géo ». Il est apparu spontanément chez tous les binômes observés, sauf chez Alex et Chloé. Leur exploration de la figure et des déplacements possibles nous a permis de distinguer deux étapes dans la construction du schème d'usage de déplacement d'un objet. La situation « Géo » se prête bien, certes, à ce que les élèves l'associent à une situation plus réelle dans laquelle le déplacement des formes globales est possible. Cependant, nous ne nous attendions pas à ce que les élèves ne perçoivent pas immédiatement la présence des points et qu'ils aient besoin de construire le schème de « déplacement d'un objet » et étendre son domaine de validité pour pouvoir déplacer les points.

C'est un déplacement susceptible de surgir à n'importe quel moment quand l'élève perd de vu le travail mathématique en cours, lorsqu'il n'y a pas de dévolution. Alex, par exemple, l'a utilisé dans la situation « Toujours/parfois vrai ». Alors que Chloé lui avait demandé de déplacer les points de la figure et d'observer si la perpendicularité se conservait, Alex a passé plusieurs minutes à utiliser le déplacement non finalisé mathématiquement, sans faire attention aux variations ou aux invariants de la figure.

Dans le **déplacement pour ajuster** deux schèmes principaux interviennent :

- le schème d'action instrumentée « ajustement instrumenté par la mesure », qui est le plus couramment utilisé par les élèves dans les tâches de construction pour obtenir une mesure spécifique, lorsqu'une condition peut s'exprimer par une mesure ;
- le schème d'action instrumentée « ajustement pour satisfaire une condition », qui peut être instrumenté ou non par le tracé d'autres objets ;

Nous avions fait l'hypothèse que cet instrument devait être apparaître dans la genèse instrumentale des élèves assez tôt, ce qui a été le cas pour la plupart des élèves. Mais comme nous avons pu le voir, chez Alex et Chloé la construction de cet instrument a été très tardive. Cela montre que ce déplacement demande une première étape de familiarisation avec le logiciel et une compréhension et une appropriation du fonctionnement des constructions en géométrie dynamique.

Chez Cédric et Iris et Nadir et Loïc, cet instrument a commencé à se construire dès « Géo », où ils ont contrôlé les points qu'ils déplaçaient pour donner une forme particulière à la figure.

Par l'importance donnée à la mesure par les élèves en Sixième, ce déplacement a été utilisé dans la plupart des cas en étant instrumenté par la mesure, en particulier dans les deux dernières tâches de constructions analysées : dans « Construire le symétrique », pour obtenir deux points à égale distance de la droite ; dans « Rectangles à compléter », pour obtenir des côtés opposés de même mesure.

Le **déplacement mou** n'était pas prévu dans notre ingénierie et n'est pas apparu. A partir des schèmes d'utilisation que nous avons identifiés, nous pouvons caractériser certains schèmes d'utilisation qui pourraient faire partie de l'instrument déplacement mou :

- le schème d'action instrumentée « d'ajustement instrumenté par la mesure », pour obtenir une mesure spécifique ;
- le schème d'action instrumentée « d'ajustement pour satisfaire une condition », instrumenté ou non par le tracé d'autres objets (droite perpendiculaire, cercle, etc.) ;
- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété », puisque le déplacement mou demande de faire un pas en avant et d'effectuer des conjectures qui peuvent être validées par le déplacement.

Avec le déplacement mou, l'intention n'est pas la même que celle du déplacement pour ajuster. L'ajustement instrumenté ou pas fait partie de la stratégie de construction des élèves. En revanche, le déplacement mou correspond à une stratégie de résolution de problème, à un raisonnement dont la finalité n'est pas forcément une construction (par exemple la recherche d'un « lieu mou » ou des éléments d'un théorème (hypothèses, conclusion)). Il est accompagné d'un raisonnement et du passage par une conjecture. Son résultat fait l'objet d'un traitement ultérieur.

Parmi les déplacements exploratoires :

Le **déplacement pour identifier les invariants de la figure** implique :

- le schème d'action instrumentée « déplacer pour identifier les invariants de la figure » ;
- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété », puisque lorsque un invariant est identifié, une conjecture est émise et en général passe

par une phase de validation par le déplacement, initialement perceptive, mais éventuellement instrumentée.

Cet instrument a été exploité en particulier dans la situation « Quadrilatères » (non inclue dans nos analyses), dans laquelle les élèves devaient déterminer la nature des quadrilatères, présentés tous sous la forme de rectangles et carrés. Certains élèves ont non seulement utilisé le déplacement, mais ils l'ont instrumenté par la mesure des angles ou des côtés des quadrilatères.

Il a été utilisé par certains élèves dans « Construire le symétrique », puisque Loïc et Nadir ont identifié la conservation de la perpendicularité des droites (MM') et (d).

Cet instrument, par sa nature, demande de fortes connaissances mathématiques et des invariants de reconnaissance des propriétés qui ne sont pas toujours présents et difficiles à construire pour les élèves.

Le **déplacement pour constater les variations de la figure au cours du mouvement** :

- le schème d'action instrumentée de « recherche de dépendance entre deux points »
- le schème d'action instrumentée « déplacer pour analyser les variations de la figure au cours du mouvement » ;
- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété ».

De manière générale, nous avons remarqué que pour les élèves, l'utilisation de cet instrument recèle une vraie difficulté. Les variations, comme les invariants, demandent des connaissances mathématiques et des invariants géométriques suffisants pour savoir ce qui doit être observé. Dans la situation « Construire le symétrique », Chloé le dit clairement :

> Chloé : Maintenant... « Déplace le point m pour que les points M et M (M')… soient confondus. Qu'observes-tu ? ». **Qu'est-ce qu'on observe à ton avis ?**

« Qu'est-ce qu'il faudrait qu'on observe ? » est la question que les élèves se posent.

Ce déplacement pour constater les variations est à distinguer celui d'identification des invariants. Les invariants peuvent se « voir » dans la figure en mouvement, cinéma-déplacement mais surtout dans chaque état statique de la figure, photo-déplacement. En revanche, le déplacement pour constater les variations requiert le cinéma-déplacement puisque ce sont les régularités de la variation qui sont à identifier, telles que des points qui bougent à la même vitesse, qui se déplacent dans la même direction, etc. C'est un déplacement très complexe qui implique le schème de « recherche de dépendance entre deux points ». Cependant, ce déplacement peut être sollicité par les élèves à propos d'une variation qui ne concerne que le fait que les points bougent ensemble.

Le **déplacement pour trouver la trajectoire d'un point** :

- le schème d'usage de « distinction des différents types de points du logiciel », qui permet de voir que le point n'est pas libre, mais sur un objet qui reste à identifier ;
- le schème d'action instrumentée « d'identification de l'objet-trajectoire » ;
- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture » peut être utilisé éventuellement pour vérifier que la construction effectuée correspond bien à la trajectoire du point ;
- le schème d'action instrumentée « déplacer un point pour tester une construction » pour valider la construction de l'objet-trajectoire ;

Cet instrument a pu être construit par tous les élèves, sauf par Chloé. Cet instrument nécessite un cinéma-déplacement pour pouvoir observer le déplacement du point en continu et identifier ainsi l'objet représenté.

Enfin, les déplacements pour valider ou invalider :

Le **déplacement pour valider une conjecture/propriété** est défini par le schème d'action instrumentée du même nom. Il est présent dans d'autres instruments déplacement, tels que le déplacement pour trouver la trajectoire d'un point ou pour valider une construction. Il apparaît donc assez tôt dans la genèse instrumentale, bien que les conjectures faites par les élèves ne soient pas d'un niveau mathématique très élevé.

Le **déplacement pour invalider une construction** est défini par le schème d'action instrumentée du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement ».

Il s'agit d'un déplacement mobilisé par un élève avec l'intention de montrer, ou de se montrer à lui même, qu'une propriété n'est pas vérifiée dans la construction. Il consiste à mettre la figure dans une position (photo-déplacement) qui montre l'absence ou la perte de la propriété, en particulier en rendant cette absence particulièrement évidente perceptivement.

La situation « Toujours/parfois vrai » a permis son apparition chez les élèves et son appropriation. Il a été socialement partagé lors d'une phase collective, lorsqu'un élève est venu manipuler l'ordinateur vidéo-projeté et montrer à la classe qu'en déplaçant un point, la propriété (sur laquelle portait le débat) ne se conservait pas.

Ceci constitue une initiation à l'argumentation, objectif de la classe de 6ème :

« - habituer l'élève à justifier ses affirmations, à argumenter à propos de la validité d'une solution, et pour cela à s'exprimer clairement aussi bien à l'écrit qu'à l'oral ; » (B.O. hors série n° 4 du 9 septembre 2004)

Cet instrument a été observé par la suite lorsque les élèves voulaient être sûrs ou montrer à leur camarade du binôme que leur construction devait être invalidée. Malek, par exemple, l'a utilisé dans la situation « Rectangles à compléter » pour montrer et convaincre Katia que leur construction était erronée.

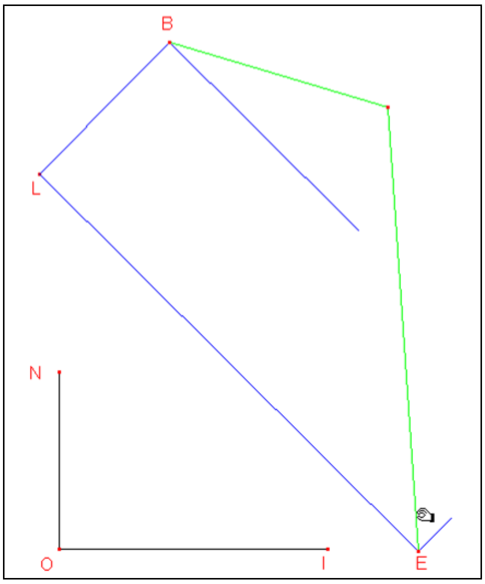


Figure 294. *Malek à Katia en déplaçant : « Non, ça fait un rectangle ça ? Je sais comment il est fait un rectangle! »*

Le **Déplacement pour valider une construction** est constitué de plusieurs schèmes et plusieurs étapes :

- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une construction », qui s'appuie lui-même sur le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » et sur le schème « déplacer un point pour tester une construction » utilisé pour chaque point qui bouge ;

- le schème d'action instrumentée « déplacer pour valider une conjecture/propriété », puisqu'au cours de la validation le sujet fera sans doute des conjectures sur sa construction et des propriétés qui devraient être conservées ;
- le schème d'action instrumentée du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » éventuellement, lorsqu'un cas « contre-exemple » apparaît au cours du déplacement et que le sujet s'assure de l'invalidation de sa construction.

Notre analyse en termes de schèmes nous a permis de mieux comprendre la complexité de cet instrument. Il est en réalité une itération faite de plusieurs pas : pour chaque point qui bouge, on doit le déplacer et vérifier si la construction peut être validée ou pas. Au cours de ces déplacements, le sujet peut de plus émettre des conjectures sur sa propre construction et chercher à les valider.

Le schème d'usage de « recherche des points qui bougent » n'est pas toujours mobilisé par les élèves. Cependant, la phase collective de la situation « Toujours/parfois vrai » a permis à l'enseignant d'institutionnaliser l'utilisation de ce schème d'usage. Par la suite, on voit les élèves utiliser ce schème d'usage, parfois sans savoir vraiment ce qu'ils devraient observer.

Une autre difficulté de ce déplacement est qu'il repose sur les connaissances géométriques des élèves, en termes de forme et de configurations spatiales. Or, à nouveau, nous avons pu observer les difficultés qu'ont les élèves à décider pour un état particulier de la figure, si la propriété était vérifiée (par exemple pour la perpendicularité). Cela est donc encore plus difficile lors d'une variation continue de la figure, qui est nécessaire pour la validation (valide pour tous les cas de la figure obtenus continument au cours du déplacement).

Quels instruments déplacement ont été alors construits par les élèves au cours de la genèse instrumentale ?

Le déplacement pour trouver la trajectoire d'un point a été construit par tous les élèves sauf par Chloé.

Le déplacement pour ajuster, instrumenté ou pas.

Le déplacement pour invalider une construction, puisqu'on a pu observer les élèves l'utiliser dans leur procédure et comme un moyen pour argumenter.

Est-ce que les élèves prennent en charge la validation de leurs constructions en déplaçant ?

Les élèves prennent effectivement en charge la validation de leurs constructions. La plupart d'entre eux utilisent le déplacement pour valider leur construction de manière spontanée, bien que l'instrument qu'ils ont construit ne soit pas encore complètement fonctionnel. Leur instrument de validation fonctionne de manière partielle, puisqu'ils arrivent en général à invalider leur construction.

Hanna et Idriss, dans la situation « Rectangles à compléter », invalident la stratégie qu'ils utilisent. Pour eux, la seule figure qui peut rester un rectangle (utilisant leur stratégie de construction) est la figure bleue :

> Idriss relit la consigne puis il dit : « **Ben il y en a qu'un qui peut rester un rectangle**! C'est le, le, le bleu... »
> Hanna attrape alors le point L dans le rectangle bleu (1) et elle le déplace.
> Hanna : « **Bon il y a le bleu qui reste... Lui (le noir) il va pas rester par contre** »

Leurs critères ne sont pas explicites, mais ils anticipent que leur construction bleue sera valide et que les trois autres ne pourront pas être validées par le déplacement.

NOS HYPOTHESES DE TRAVAIL…

Revenons sur nos hypothèses de travail.

Hypothèse de Travail 1 : L'appropriation du déplacement devrait permettre aux élèves de distinguer un dessin d'une figure géométrique et faciliter ce passage

L'observation des élèves sur une année nous a permis de voir la difficulté de ce passage et aussi de constater une évolution chez les élèves. La distinction entre dessin et figure peut s'observer chez un élève lorsqu'il décrit et analyse une figure par ses propriétés géométriques, ou lorsqu'il s'intéresse aux propriétés conservées au cours du déplacement. Les élèves ont tous mobilisé des connaissances géométriques, dans chaque situation. Mais ces connaissances ont fréquemment été introduites par l'énoncé de la situation ou par l'enseignant. Ils se sont également peu à peu détachés du dessin statique pour considérer la figure Cabri dynamique. Présentons le cas de Chloé et Alex car c'est le binôme en grande difficulté qui au cours de l'année scolaire est resté le plus du côté du dessin.

Dans la situation « Toujours/parfois vrai », on a pu voir se former un écart entre Chloé et Alex. Chloé comprend qu'il faut utiliser le déplacement pour décider de la validité des propriétés géométriques de la figure, alors qu'Alex veut décider uniquement à partir du dessin statique. L'idée de figure géométrique commence donc à avoir du sens pour Chloé. Nous faisons l'hypothèse que la situation construite pour que les élèves comprennent la différence entre dessin et figure a obligé les élèves à se centrer sur la validité d'une seule propriété à l'aide du déplacement, et leur a fait prendre conscience de la différence entre propriété vérifiée par une position de la figure (sur le dessin) et propriété vraie pour toutes les positions de la figure (« dans tous les cas » comme le dit Chloé).

Cette situation a donc permis aux élèves de voir au-delà du dessin statique et commencer à faire le passage vers la figure. L'appropriation du déplacement ne suffit donc pas pour que les élèves distinguent un dessin d'une figure géométrique et qu'ils fassent le passage de l'un à l'autre. Ce passage repose aussi fortement sur les situations proposées aux élèves.

Hypothèse de Travail 2 : L'utilisation de la géométrie dynamique et l'appropriation du déplacement devraient inciter les élèves à passer d'une « géométrie naturelle » à une « géométrie axiomatique naturelle » et à mobiliser leurs connaissances mathématiques

On a pu observer une évolution dans les stratégies des élèves, qui ont mobilisé de plus en plus leurs connaissances mathématiques en utilisant les outils du logiciel.

La situation « Sur quel objet ? » nous a permis de voir que les élèves arrivent à reconnaître et caractériser les objets droite, segment et demi-droite ; le concept d'alignement, par contre, n'est pas encore acquis, c'est-à-dire que trois points alignés ne sont pas nécessairement sur la même droite.

L'utilisation du déplacement pour invalider montre que les élèves commencent à s'approprier le concept de contre-exemple.

Dans la situation « Rectangles à compléter », bien que les élèves aient rencontré une grande difficulté pour les compléter, nous avons vu que certains d'entre eux pensent à la construction d'une perpendiculaire, rencontrant alors des difficultés pour la tracer.

Alors qu'Hanna essayait de tracer une droite utilisant le schème d'usage du « tracé au jugé », Idriss lui propose de tracer une perpendiculaire :

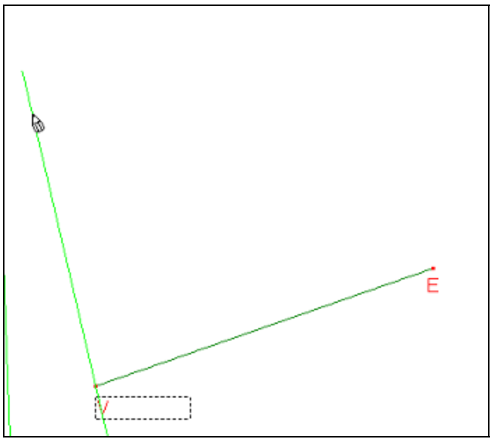


Figure 295. *« Perpendiculaire à ce segment ! »*

Idriss : **Perpendiculaire à cette droite, à ce segment**...
Hanna : Mais non, mais il faut que ça passe par là (elle montre le point V avec la souris)
Idriss : Oui mais **il faut que ce soit perpendiculaire à ce segment**!

Loïc et Nadir ont complété tous les rectangles avec le tracé de droites perpendiculaires, alors que Cédric et Iris ont utilisé le tracé de perpendiculaires et de parallèles.

Le schème « d'ajustement instrumenté par la mesure » a été utilisé en contrôlant la mesure des angles, comme c'est le cas de Malek, qui cherchait à obtenir 90,0°, ou alors des côtés opposés de même mesure. Ceci montre déjà que les élèves essayent d'imposer des propriétés géométriques à leurs constructions, bien qu'ils n'arrivent pas le faire correctement.

On a pu remarquer que Loïc, qui est le plus proche de la « géométrie axiomatique naturelle », ne ressent plus autant le besoin de déplacer que Nadir qui ne donne pas une justification mathématique. Loïc utilise alors les outils du logiciel (mesure d'angle) pour vérifier que la construction peut être validée.

Le passage d'une « géométrie naturelle » à une « géométrie axiomatique naturelle » se fait donc non seulement grâce à l'appropriation du déplacement, mais aussi par les situations qui exploitent les apports de la géométrie dynamique et qui donnent sens au déplacement, incitant ainsi les élèves à faire ce passage.

Hypothèse de Travail 3 : La géométrie dynamique offre un milieu potentiellement riche en rétroactions qui peut permettre à l'élève d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie gagnante

Les rétroactions du logiciel permettent effectivement à l'élève d'invalider sa construction. Cependant, les élèves ne remettent que très difficilement en cause leur stratégie, ils retentent la même stratégie en portant plus d'attention à sa réalisation et ne l'invalident donc pas. C'est seulement grâce à l'intervention d'un « plus expert » qu'ils peuvent essayer de changer de stratégie. Mais la recherche d'une stratégie gagnante s'avère habituellement peu fructueuse.

La situation « Pajérond » est un clair exemple d'une situation construite avec un milieu riche en rétroactions, facilement comprises par les élèves, mais dans laquelle les élèves ont beaucoup de difficulté à changer de stratégie. La plupart des élèves n'arrivent pas à trouver la stratégie gagnante, mais essayent la stratégie de base plusieurs fois, sans la remettre en question. L'intervention d'un adulte invalidant leur stratégie au jugé leur permet de changer de stratégie.

Ce n'est donc pas la richesse et la qualité des rétroactions qui permettent de passer à une autre stratégie et, éventuellement, de trouver la stratégie gagnante.

Hypothèse de Travail 4 : La genèse instrumentale du déplacement est un processus long et complexe et demande une mise en place organisée sur le long terme

La genèse instrumentale du déplacement s'est avérée effectivement être un processus long et complexe et a demandé une mise en place organisée sur le long terme. Nos analyses en termes de schèmes nous ont permis de voir la complexité et l'imbrication de la construction des instruments déplacement. En particulier, l'instrument « déplacement pour valider une construction » qui nécessite à la fois la construction d'autres schèmes de déplacement, qui commencent à être disponibles à la fin de l'année, et par ailleurs la construction et l'appropriation d'invariants géométriques pour pouvoir fonctionner correctement.

Notre ingénierie, sur le long terme nous a permis d'une part, d'avoir une vue d'ensemble de la multiplicité de schèmes et d'instruments déplacement, et d'autre part, de voir l'importance et l'influence de certaines situations dans la genèse instrumentale des élèves.

La situation « Géo » a permis aux élèves de construire les schèmes d'usage de « déplacement d'un point » et de « recherche des points qui bougent », donnant ainsi l'opportunité à une première appropriation du déplacement et la construction de l'instrument déplacement non-finalisé mathématiquement.

La situation « Toujours/parfois vrai » a joué un rôle essentiel dans le déroulement de l'ingénierie et de la genèse instrumentale : elle a donné lieu à la construction et institutionnalisation du schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » lors de la phase collective. Comme nous avons pu le voir par la suite, les élèves se sont approprié ce schème et l'ont réinvesti pour invalider leurs propres constructions. Dans la même phase collective, l'enseignant a pu introduire la nécessité du déplacement de tous les points qui bougent pour pouvoir vérifier si une propriété se conserve. Cette règle d'action est alors devenue partie du contrat didactique de la classe et a été utilisé par la suite pour la validation de constructions. A propos de cette situation, nous avons remarqué que :

- avoir donné les propriétés géométriques à valider aux élèves leur a facilité la tâche ; en effet, les élèves pouvaient focaliser leur attention sur le déplacement d'un point et la conservation de cette propriété. Le parallélisme a été plus facilement validé et invalidé que la perpendicularité. Elle n'est pas invalidée par certains élèves, même quand cela paraît évident, et est invalidée alors qu'elle se conserve ;
- avoir demandé aux élèves « Note les points que tu déplaces » a participé à l'étayage de l'activité des élèves ; d'une part, en leur rappelant la nécessité du déplacement pour décider de la validité de la propriété, et d'autre part, en les obligeant focaliser leur attention sur le déplacement d'un point spécifique et la possibilité de bouger les autres points.

La situation « Construire le symétrique » a permis d'introduire le schème de « recherche de dépendance entre les points ». Bien que les élèves n'attribuent pas encore un sens géométrique à la dépendance des points, ils ont remarqué que le déplacement du point M entraînait celui de son symétrique M' et l'impossibilité de pouvoir déplacer M' directement. Cela a permis ensuite à certains élèves d'invalider leur construction du symétrique qui ne respectait pas cette dépendance et ces possibilités de déplacement.

La genèse instrumentale du déplacement s'appuie sur la construction d'invariants opératoires et de concepts-en-acte. Or, le concept-en-acte de point joue finalement un rôle très important dans le développement de la genèse. On s'attendait à ce que les élèves arrivent à distinguer les trois types de points du logiciel (point libre, point sur objet ou point non-attrapable), mais en fin de compte, pour les élèves, il n'y a qu'une alternative : un point bouge (attrapable) ou il ne bouge pas (non attrapable). Bien que l'enseignant ait tenté de leur faire remarquer que les points d'intersection bougent, lorsqu'on bouge un autre point, pour les élèves ce qui importe est le déplacement direct d'un point : un point d'intersection ne bouge pas car on ne peut pas l'attraper directement. Il faudrait donc construire et inclure des situations permettant de travailler le fait qu'un point qui bouge n'est pas forcément un point attrapable.

RESULTATS ET LIMITES DU TRAVAIL

Un des principaux résultats de notre recherche est la distinction entre le déplacement pour valider une construction, ou *dragging test*, et le déplacement pour invalider qui était absent de la littérature. L'anticipation du sujet n'est pas la même dans les deux déplacements : dans le déplacement pour valider, le sujet déplace *a priori* pour valider sa construction en pensant que celle-ci sera validée et que sa stratégie de construction est correcte ; il peut éventuellement l'invalider, mais son but initial est de valider sa construction. Alors que dans le déplacement pour invalider, le sujet anticipe que la construction est erronée et l'utilise pour se convaincre soi-même ou un autre.

Comme nous l'avons montré plus haut, le déplacement pour valider est un instrument très complexe, constitué de plusieurs schèmes qui permettent finalement de décider si une construction peut être validée ou non. Ce déplacement nécessite le cinéma-déplacement pour pouvoir observer la figure en continu, ainsi que le déplacement de tous les points de la figure et pour chacun de ces points, l'usage du schème de « déplacement d'un point pour tester une construction », afin de pouvoir déterminer finalement si les propriétés géométriques sont conservées pour chaque déplacement.

Le déplacement pour invalider, au contraire, utilise le photo-déplacement pour mettre la figure dans une position particulière permettant de l'invalider et ne nécessite que le déplacement d'un seul point. Il met en œuvre le schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement », ce qui a permis aux élèves de commencer à s'approprier la notion de contre-exemple en mathématiques.

Les élèves ont utilisé par la suite cet instrument déplacement comme un moyen pour argumenter entre eux, ce qui est une première étape dans l'appropriation de la démarche de preuve. Ceci pourrait donc constituer un possible prolongement de ce travail sur le sujet de la preuve.

Grâce à l'utilisation de la géométrie dynamique, nous avons pu repérer les conceptualisations des élèves. En particulier, la situation « Sur quel objet ? » a été révélatrice de conceptualisations des élèves sur la notion de droite et d'alignement, qui n'auraient pas pu être repérées en papier crayon.

Le schème de « matérialisation d'une trajectoire par une droite », utilisé par Katia pour tracer une droite, nous a permis de voir l'importance du tracé à la règle et l'influence qu'il peut avoir pour les élèves. Loïc, a essayé de construire la droite en passant par trois points, le point mobile et les deux points bleus qui la définissaient. Une fois la droite tracée (par deux points en raison des contraintes du logiciel et de la géométrie), il a attrapé le troisième point par lequel il voulait que la droite passe et l'a déplacé pour vérifier son appartenance à celle-ci.

D'après nos observations des situations relatives à la notion de la symétrie axiale, construites la plupart d'entre elles par l'enseignant, le déplacement pour constater les variations de la figure au cours du mouvement est un instrument très difficile à construire pour les élèves. Comme nous l'avons dit dans notre analyse a priori, le contrat derrière la question « Qu'observes-tu ? » demande des connaissances préalables que les élèves n'ont pas forcément. Nous avons entendu les élèves se demander « Qu'est-ce qu'on observe ? Que devrait-on observer ? ».

Or l'étude des manuels que nous avons réalisée, montre que l'utilisation du déplacement la plus courante est celle pour faire constater aux élèves des propriétés géométriques. Tapan (2006) avait fait cette même remarque lorsqu'elle s'était intéressée aux pratiques enseignantes et aux activités utilisées en classe. Nous nous demandons alors si cette utilisation majoritaire de la géométrie dynamique et du déplacement est pertinente.

Nous avons pu observer des genèses instrumentales très différentes indépendamment du niveau de connaissances mathématiques des élèves. Chloé, Alex, Iris et Cédric avaient à peu près le même niveau mathématique (moyen -) mais ont développé des genèses instrumentales très différentes. Chloé et Alex sont restés plutôt du côté du dessin statique et ont eu beaucoup de difficultés à s'approprier et à construire les instruments déplacement. Cédric et Iris, par contre, ont eu peu de difficultés. Ils ont commencé à utiliser les outils du logiciel pour instrumenter leur perception (dans « Toujours/parfois vrai », ils tracent des droites parallèles et perpendiculaires pour s'assurer de la validité des propriétés géométriques) puis ont poursuivi en les utilisant dans leurs constructions (dans « Rectangles à compléter », ils construisent des droites perpendiculaires et parallèles correctement). On voit donc que des élèves de même niveau mathématique peuvent construire des genèses instrumentales très différentes.

Pour ce qui est des autres élèves, Katia et Malek était un binôme de niveau mathématique bon, pourtant leur genèse ne montre pas une véritable différence par rapport à celle des binômes de niveau moyen. Ceci confirme ce qui avait été observé par Trouche (2003) :

> « Mais il semble aussi que la complexité des environnements technologiques et des processus de genèse instrumentale nécessite la prise en compte d'autres variables que la seule réussite scolaire mathématique (matérialisée par l'échelle « élève faible-élève fort »).» (Trouche 2003, p.33)

A priori, nous avions prévu que le schème d'usage de distinction des trois types de points serait construit par les élèves au cours de l'ingénierie. Cependant, nous avons remarqué que, pour les élèves, les points sont définis en termes de « ça bouge ou ça bouge pas ». Or pour nous « ça bouge » devrait inclure les points qui peuvent être déplacés indirectement, mais pour les élèves un point ne bouge que s'il peut être déplacé directement. Une suite possible serait de travailler la différence entre points attrapables et points non attrapables. On peut envisager de demander aux élèves quels points ils ont déplacés, lesquels ils ont essayé de déplacer et essayer des les faire formuler pourquoi ces points ne peuvent pas être déplacés directement.

A ce sujet, dans la situation « Construire le symétrique », nous avons essayé dans la phase collective de faire expliciter aux élèves pourquoi le point M' ne pouvait pas être déplacé directement. Certains élèves ont réussi à expliquer que le point M' dépendait de M et de (d). Cependant nous ne pouvons pas dire que la notion a été vraiment acquise.

Le schème de « recherche de dépendance entre deux points » est fondamental dans la compréhension des liens entre les points en géométrie dynamique. Cependant, les élèves, bien qu'ils remarquent la dépendance entre points, comme dans « Construire le symétrique », n'attribuent pas de relation géométrique à la dépendance. Le théorème-en-acte : « si un point dépend d'un autre, alors il y a une relation géométrique entre ces deux points » devrait être davantage mis en avant et faire partie d'une institutionnalisation.

En ce qui concerne l'enseignant et les phases collectives, les interventions de l'enseignant ont joué un rôle essentiel dans le déroulement de l'ingénierie et des situations.

La phase collective de « Géo » a permis l'institutionnalisation du schème de « déplacement d'un objet », portant en particulier sur l'appropriation de l'utilisation de la souris, et la mise en place du fonctionnement des phases collectives et du rôle de l'élève-sherpa.

Dans « Toujours/parfois vrai », la phase collective a permis l'institutionnalisation du schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » ainsi que la règle d'action de déplacer TOUS les points de la figure, qui est devenu par la suite une règle du contrat didactique.

Cependant, l'organisation des phases collectives utilisant les potentialités de la géométrie dynamique reste difficile pour l'enseignant.

Dans « Pajérond », par exemple, l'enseignant a demandé à Katia de montrer directement la construction du milieu sans reprendre la stratégie de base mobilisée par tous les élèves et sur laquelle la plupart est restée.

Dans « Construire le symétrique », comme dans « Rectangles à compléter », l'enseignant a décidé de faire la phase collective au tableau, sans utiliser le logiciel ou montrer les différentes stratégies utilisées par les élèves. Dans « Construire le symétrique », situation conçue par l'enseignant, nous faisons l'hypothèse que ce qui l'intéressait c'était la construction en papier crayon et montrer les invariants comme la perpendicularité et l'équidistance. Dans « Rectangles à compléter », une situation nouvelle pour l'enseignant et proposée par le chercheur, l'enseignant n'a pas pu beaucoup anticiper les difficultés des élèves dans cette situation (schèmes d'usage de perpendiculaire et de droite pour le prolongement des côtés du rectangle). Il a préféré faire une phase collective au tableau, centrée sur les caractéristiques du rectangle et des quadrilatères particuliers.

En ce qui concerne notre méthodologie d'analyse, nos analyses en termes de schèmes nous ont permis de voir et de décrire la construction des genèses instrumentales, d'observer en particulier l'évolution des schèmes, leur construction par les élèves et les relations existantes. De plus, la structure même du schème nous a amené à la description des règles d'action et des invariants opératoires et à l'observation de ceux utilisés par les élèves. Ceci a mis en évidence la quantité de schèmes construits par les élèves, la difficulté de leur construction et le temps nécessaire.

Cependant le modèle de description des schèmes présente une difficulté : Quand et comment décide-t-on ce qu'est un schème ? Est-ce le même schème ou bien un schème différent ? Un de nos choix de modélisation était d'essayer de décrire des schèmes de manière assez globale et ne pas avoir une multitude de schèmes différents. Cependant, par la nature des règles d'action et des invariants opératoires sur lesquelles repose une utilisation d'un schème par les élèves, nous avons souvent décidé de distinguer un nouveau schème. C'est le cas des schèmes de « vérification que deux droites sont perpendiculaires » et de « vérification de l'équidistance », qui pourraient être classés dans la catégorie de « déplacer pour valider une conjecture/propriété », mais que par la nature des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte sur lesquels ils reposent, ont été considérés comme des schèmes différents.

La méthodologie que nous avons mise en place intégrait à la fois des situations choisies ou conçues par le chercheur et des situations conçues par l'enseignant, comme la situation « Construire le symétrique ». Cette situation est emblématique de ce que font les enseignants et de leur difficulté à intégrer le déplacement dans des tâches autres que faire constater une propriété à l'élève.

Finalement, il reste encore difficile de définir ce que sont le « photo-déplacement » et le « cinéma-déplacement ». Ce sont des utilisations spécifiques du déplacement qui font partie d'autres instruments déplacement. Ce ne sont ni des schèmes d'usage, puisqu'ils ne dépendent pas des contraintes du logiciel mais de l'utilisation faite par le sujet, ni des schèmes d'action instrumentée, puisqu'ils ne permettent pas d'accomplir un but mathématique. Est-ce alors une règle d'action ? « Déplacer lentement et observer la figure en continu » ?

PERSPECTIVES

L'appropriation du schème du « dessin contre-exemple obtenu par déplacement » a permis aux élèves non seulement de commencer à faire le passage du dessin à la figure, mais de l'utiliser par la suite comme un moyen d'argumentation. Ceci constitue une première étape dans la démarche de preuve et le raisonnement déductif, cœur de l'activité mathématique. Il serait donc intéressant de mener une étude centrée sur l'utilisation du déplacement pour invalider une construction comme introduction des élèves à la démarche de preuve et au raisonnement déductif.

La validation d'une construction par déplacement est l'aboutissement de la genèse instrumentale de la géométrique dynamique. Cependant, comme nous l'avons montré, la construction de cet instrument déplacement et son utilisation de manière effective est une vraie difficulté pour les élèves. La recherche de pistes permettant de soutenir la genèse instrumentale du déplacement pour valider est ainsi loin d'être finie.

BIBLIOGRAPHIE

Acosta, M. (2008) *Démarche expérimentale, validation et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie.* Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble et l'Université de Genève.

Artigue, M. (2002a) Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7,** 245–274.

Artigue, M. (2002a) L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques In Guin, D. & Trouche, L. (coord) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D, & Robutti, O. (2002) A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* **34 (3),** 66-72.

Assude, T. (2005) Time management in the work economy of a class, a case study integration of Cabri in primary school mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* **59**, 183-203.

Assude, T. & Gélis, J.M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics* **50**, 259-287.

Balacheff, N. & Soury-Lavergne, S. (1996) Explication et préceptorat, à propos d'une étude de cas dans Télécabri*, In M. Joab, Actes des Journées Explication '96*, 343-356.

Bautier, T. (1993) *Médiations dans l'enseignement des transformations géométriques*. Thèse de l'Université Bordeaux 1.

Béguin, P. and Rabardel, P. (2000) Designing for instrument-mediated activity, *Scandinavian Journal of Information Systems* **12**, 173-190.

Bellemain, F. et Capponi B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur, *Educational Studies in Mathematics* **23**, 59-97.

Bronckart, J.P. (2007) De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelle, In Merri, M. (coord.) *Activité humaine et conceptualisation : Questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses universitaires du Mirail, pp. 121-141.

Brousseau, G. (1998) *Théories des Situations Didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brun, J. (2007) L'œuvre de Gérard Vergnaud dans une perspective de didactique des mathématiques, In Merri, M. (coord.) *Activité humaine et conceptualisation : Questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses universitaires du Mirail, pp. 65-68.

Çalişkan-Dedeoğlu, N. (2006) *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre : quelles motivations, quelles pratiques ?* Thèse de l'Université Paris 7.

Camargo, L., Samper, C. & Perry, P. (2007) Cabri's role in the task of building part of an axiomatic system, *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Cyprus: University of Cyprus, 571-580. (http://ermeweb.free.fr/CERME5b, disponible en ligne le 17 juin 2008)

Cardona, M. (2006) Papel mediador de Cabri geometry en la construcción de conceptos relacionados con los cuadriláteros y sus propiedades, in *Memorias IberoCabri 2006 Colombia*, Bogotá. (http://iberocabri.org/Conferencias1.htm, disponible en ligne le 17 juin 2008)

Charrière, P.M. (1996) *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-géomètre,* Genève : Centre informatique pédagogique.

Coulet, J.C. (2007) Le concept de schème dans la description et l'analyse des compétences professionnelles : formalisation des pratiques, variabilité des conduites et régulation de l'activité, In Merri, M. (coord.) *Activité humaine et conceptualisation : Questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses universitaires du Mirail, pp. 297-306.

Defouad, B. (2000) *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S,* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Duval, R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et Sciences cognitives* **10**, 5-53.

Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM* **17**, 121-138.

Engeström (1987) *Learning by explanding : An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Falcade, R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble et Universita degli Studi di Torino.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M.A (2007) Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation, *Educational Studies in Mathematics* **66**, 317-333.

Gomes, A.S. (1999) *Développement conceptuel consécutif à l'activité instrumentée*, Thèse de l'Université Paris V.

Gonseth, F. (1945-1955) La géométrie et le problème de l'espace. Editions du Griffon, Lausanne.

Gousseau-Coutat S. (2006) *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Grenier, D. (1989) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10(1)**, 5-60.

Grugeon-Allys, B. (2008) Pratiques d'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique à l'école élémentaire, *Carrefours de l'éducation* **25**, 73-88.

Grugeon, B. et Duvert, R. (2001) Environnement logiciel et enseignement de la géométrie dans la transition école collège, *Commission Inter-IREM Collège,* Cap d'Agde.

Guin, D. et Trouche, L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments : the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **3**, 195-227.

Haspekian, M. (2005a) *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques : étude du cas des tableurs*. Thèse de l'Université Paris 7.

Haspekian, M. (2005b) An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **10,** 109–141.

Healy, L. (2000) Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions, in *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima: Tadao Nakahara, Masataka Koyama, **1**, 103-117.

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. & Noss, R. (1994a) Messing up, *Micromath* **10.1**, 14-17.

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. & Noss, R. (1994b) Cabri constructions, *Micromath* **10.2**, 13-16.

Houdement, C et Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 175-193.

Jahn, A.P. (2002) "Locus" and "Trace" in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* **34 (3),** 78-84.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strässer R. (2006) Teaching and learning geometry with technology, in Gutierrez, A. and Boero, P. (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* Rotterdam: Sense Publishers, pp. 275-304.

Laborde, C. (2005) Robust and Soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments, in Sung-Chi Chu, Hee-Chan Lew, Wei-Chi Yang (Eds.) *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics*, Cheong-Ju, South Korea: Korea National University of Education, 22-36.

Laborde, C. (2001), Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **6**, 283–317.

Laborde, C. et Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **14(1)**, 165-210.

Leontiev, A.N. (1978) *Activity, consciousness and personality*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Leontiev, A.N. (1972) *Le développement du psychisme*. Paris : Editions sociales. Traduction française (1976).

Olivero, F. (2002) The *proving process within a dynamic geometry environment*. PhD Thesis, University of Bristol.

Parzysz, B. (1998) "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics* **19**, 79-92.

Pea, R. (1985) Beyond amplification: Using the computer to reorganise mental functioning, *Educational Psychologist* **20(4),** 167–182.

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, In Bailleul, M. (ed.), *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate : IUFM de Caen, pp. 203-213.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains,* Paris : Armand-Collin.

Restrepo, A. (2005) *Instrumentation du déplacement dans Cabri-géomètre par des élèves de 6ème*. Mémoire de Master 2 Université Joseph Fourier.

Rolet, C. (1999) Cabri-géomètre, instrument dans la formation des Professeurs d'Ecole, *Actes de la Xè Ecole d'été de Didactique des Mathématiques,* 315-320.

Rolet, C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre,* Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

Soury-Lavergne S. (2007) Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures, *Séminaire national de l'ARDM 24-25 mars 2007, Paris*.

Soury-Lavergne, S. (2006) Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre, *Actes du Colloque EMF, Sherbrooke*.

Strässer, R. (1992) Didaktische Persperktiven auf Werkzeug-software im Geometrie-Unterricht der Sekundarstufe I. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* **24 (5),** 197-201.

Sutherland, R. et Balacheff, N. (1999) Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics*, International Journal of Computers for Mathematical Learning* **4**, 1-26.

Tapan, S. (2006) *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale des enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique*, Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Trouche, L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics* **55**, 181-197.

Trouche, L. (2003) *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*, Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Montpellier : Edition de l'IREM.

Trouche, L. (2000) La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics* **41**, 239-264.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10/2.3**, 133-170.

Vergnaud, G. (1996) Au fond de l'action, la conceptualisation, In Barbier J.-M. (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Coll. Pédagogie d'aujourd'hui. Paris : PUF.

Vygotsky, L. (1934) *Pensée et langage.* Paris : Editions sociales (Traduction de F. Sève, 1985).

Vygotsky, L. (1978) *Mind in society: development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Textes officiels et manuels utilisés

B.O. hors série n° 4 du 9 septembre 2004 volume 1
Programme de l'enseignement des mathématiques en classe de sixième du collège.

Buret, D. Dir., Biton, Y., Gérard, C., Monteil, L., Vincent, C. (2007) *Les dossiers de l'ingénierie éducative hors série. Activités avec un logiciel de géométrie dynamique 6^{è}, 5^{e}*. CNDP : Paris.

Charnay, R., Douaire, J., Collectif d'auteurs (2006) Thème 2 : Angle, perpendicularité et parallélisme, In *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes,* Hatier Ermel, pp. 168-280.

Dimathème classe de sixième (2005) Ed. Didier

Collection Diabolo maths 6^{è} (2005) Ed. Hachette

Collection Phare mathématiques 6^{è} (2005) Ed. Hachette

Triangle mathématiques 6^{è} (2005) Ed. Hatier

multi·math (2005) Ed. Hatier

Maths 6^{è} (2005) Ed. Magnard