HAL
open science

Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques.

Clément Pellegrini

To cite this version:

Clément Pellegrini. Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques.. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT : . tel-00334668

HAL Id: tel-00334668

https://theses.hal.science/tel-00334668

Submitted on 27 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUES
DE L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD (LYON I)
préparée à l'Institut Camille Jordan
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5208 CNRS-UCBL

EXISTENCE, UNICITÉ ET APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER STOCHASTIQUES

Clément PELLEGRINI

Soutenue à Lyon le lundi 23 juin 2008 devant le jury :

Stéphane ATTAL (Université de Lyon I), Directeur de thèse
Alberto BARCHIELLI (Université Politecnico di Milano), Professeur
Krzysztof GAWEDZKI (ENS Lyon), Directeur de recherches
Yves LE JAN (Université de Paris XI), Professeur
Claude Alain PILLET (Centre de Physique Théorique de Marseille), Professeur
Christophe SABOT (Université de Lyon I), Professeur

Au vu des rapports de :

Alberto BARCHIELLI
Yves LE JAN
Claude Alain PILLET

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard - Lyon I

Institut Camille Jordan

Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques

Clément PELLEGRINI

Sous la direction de **Stéphane ATTAL**

Remerciements

Je suis entré par la petite porte

Je ne sais pas si je peux emprunter ces mots pour parler de ma propre expérience, mais ils ont toujours eu énormément de valeurs à mes yeux et son auteur n'est pas étranger à la fierté que j'éprouve aujourd'hui. D'ailleurs s'il fallait désigner le responsable de ma passion pour les mathématiques, le principal suspect (et coupable) ce serait lui.

En tout cas, il s'avère que j'ai franchi un seuil et si ce seuil est celui d'une porte, elle aurait pu être "quantique"... Trois cent pages supplémentaires ne suffiraient pas pour conter tous les étapes et les expériences qui m'ont permis de le franchir. En revanche, il me tient à coeur de remercier toutes les personnes qui de près ou de loin ont participé à cette formidable aventure.

Mes premiers mots seront destinés aux membres de mon jury et à mes rapporteurs. Merci pour la qualité et la rigueur de votre travail, merci pour l'intérêt scientifique que vous avez prêté à mes travaux de recherche, également merci pour votre disponibilité.

Naturellement, je tiens à remercier tous les membres de l'Institut Camille Jordan et de l'ENS Lyon. En particulier je tiens à souligner l'immense plaisir que j'ai eu de faire partie de l'équipe de probabilité de Lyon ; la qualité et le dynamisme de cette équipe m'ont permis de progresser et de faire de nombreuses rencontres humaines et scientifiques.

Grands animateurs de ma vie à la faculté (et en dehors), je ne peux pas oublier tous mes compagnons et amis thésards, particulièrement Lucas (j'attends toujours une tarte aux quetsch), Christophe J. (un jour on fera quatre tours) et Aude, Pierre B. (tu devrais publier ton théorème de la chemise), Antoine (où que tu sois continue de soutenir l'OL), Ion (j'espère que notre passion commune nous permettra de continuer notre collaboration). Merci aussi à Clément, Jérémy, Christophe L., Ricardo, Ameur, Coralie, Zoubir, Corentin... Enfin je remercie tous les autres membres et personnels de l'université.

Je tiens également à partager ces instants de joie avec toutes les personnes que j'ai eues la chance de rencontrer pendant les journées "systèmes quantiques ouverts". La complicité, la curiosité, l'envie et la générosité des membres de cette "comunauté" m'ont permis de prendre toute la mesure de la chance que j'avais de faire de la recherche. En particulier je tiens à remercier, Alain Joye et Claude Alain Pillet, merci pour votre dynamisme et votre disponibilité. Je n'oublie pas également Laurent Bruneau, Yan Pautrat, Niels Berglund, Dominique Spehner et tout le reste de l'équipe...

En dehors de mon milieu professionnel et doctoral, de nombreuses personnes méritent mes remerciements. De près ou de loin, ils ont tous partagé mes doutes, mes réflexions

et mon enthousiasme. Un des plus actifs, Thomas, je le remercie pour son soutien et sa confiance inébranlable ; tu avais raison je suis devenu “trouveur”. Pour compléter la “dream team” je pense bien sûr à Sylvain et à Louis. Un petit clin d’oeil à Anaelle, à Elsa (et la mécanique Kantique) et à Muriel, merci de votre soutien. Merci également à Madeline, Méziane, J.P, la famille Al-Juneïdi, Kelvine et tous les autres...

Il me reste désormais à remercier ceux qui ont le plus contribués à ma progression. Naturellement, Stéphane, de simples mots ne pourront pas exprimer toute ma gratitude et mon admiration. Il m’est difficile de décrire toute la fierté que j’ai eue de pouvoir travailler avec un directeur qui a su me transmettre sa passion et son envie. Si il m’est permis de résumer l’impact qu’il a eu sur moi je dirais : impulsion, plaisir et exemple...

Ceux que je vais maintenant remercier doivent sûrement se dire “enfin” il va conclure ses études. Si ils savaient... Ils ont certainement le plus souffert de mon ingratitude, subit mon mauvais caractère mais ils m’ont toujours suivi et accompagné. On ne dit jamais suffisamment merci à ses parents, encore une fois merci. Une pensée également à mes frères Benjamin et Mathieu, en lisant mon mémoire peut être comprendrez vous pourquoi j’aime tant les mathématiques...

Enfin, celle pour qui et qui grâce à qui mon travail prend tout son sens et celles pour qui il en aura toujours un. Merci...

$i + \infty^{\infty}$

Introduction

En mécanique quantique, l'évolution au cours du temps de l'état d'un système quantique (atome, photom) est décrite par *l'équation de Schrödinger*. Comme les équations de la mécanique classique, l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles déterministe. Parfois, en mécanique classique, on a besoin de considérer des modèles stochastiques. On obtient alors la description de l'évolution des systèmes étudiés à partir d'équations différentielles stochastiques qui prennent en compte certains caractères aléatoires : conditions d'expériences, imprécisions de mesures...

La mécanique quantique possède, quant à elle, un caractère aléatoire intrinsèque qui est lié à la mesure. En effet, contrairement à la mécanique classique où le résulat de la mesure d'une quantité physique (énergie, position, vitesse...) d'un système est déterministe et ne change pas l'état du système, la mesure d'une quantité physique d'un système quantique est aléatoire et affecte définitivement l'état du système. Seule la distribution de probabilité des résultats est déterministe. Ces principes sont des axiomes fondamentaux de la mécanique quantique (axiome de la mesure, réduction du paquet d'onde).

Pour préciser cela, prenons par exemple une expérience qui consiste à mesurer l'énergie d'un système. Une première mesure donne un résultat qui suit une loi de probabilité que l'on peut décrire de manière précise. Si on cherche à effectuer une seconde mesure de la même quantité (l'énergie) sur le même système alors le résultat de cette seconde mesure devient totalement prévisible. En effet, il s'avère que le second résultat correspond exactement au premier résultat : le système est "figé". La recherche d'informations, à l'aide d'une mesure, modifie donc le système de façon irrémédiable.

Le seul échec de la mécanique quantique est de ne pas avoir pu s'accorder avec nos préjugés.

W.H Zurek

Bien que les notions d'information et de mesure puissent être mises en parallèle dans tous les domaines physiques, la mesure est ici à la fois à l'origine de l'information mais également à l'origine de sa destruction ([Dav76]). C'est pourtant ces phénomènes qui sont à la base de nombreuses utilisations actuelles ainsi que le sujet de recherches actives : optique quantique ([Har03],[HR06]), codage, ordinateur et information quantique ([GP01])...

Pour décrire ces phénomènes de manière précise, on munit la théorie de la mécanique

quantique de postulats ([AJP06a], ([Dav76]), [Att08]). Le premier formalisme mathématique a été introduit par Von Neumann dans son livre “Les fondements mathématiques de la mécanique quantique”.

Des expériences simples comme “les expériences d’Aspect” ou encore les “inégalités de Bell”, ont montré les limites des théorie probabilistes classiques pour décrire les aspects aléatoires des phénomènes quantiques (voir à ce sujet [KM98]). Ainsi, parfois présentée comme une théorie des probabilités généralisées, la mécanique quantique d’un point de vue mathématique, est un savoureux mélange de probabilité non-commutative ([Att08], [Mey93]) et d’algèbres d’opérateurs ([BR87],[BR97],[KR97a], [KR97b]). On peut également parler de “probabilité quantique” ([Att08], [BL06],[Mey93]).

Dans nos travaux, notre approche est axée sur les concepts mathématiques et principalement sur les aspects probabilistes comme l’indique une partie du titre *equations de Schrödinger stochastiques*. Le point de départ de notre travail est l’étude de l’évolution d’un petit système perturbé par une mesure extérieure.

Il s’agit ici de dresser un cadre mathématique rigoureux pour décrire ce que l’on appelle *le principe de mesure indirecte* en mécanique quantique ([Bar06],[Bel99]) et les modèles qui lui sont attachés. Le domaine des applications expérimentales de ce sujet est à la pointe aujourd’hui de la recherche appliquée en mécanique quantique (travaux de S.Haroche en infomations quantiques [Har03]).

Le cadre physique de notre étude est le suivant.

Cadre physique :

Le contexte général des modèles que nous étudierons vient de la théorie des *systèmes quantiques ouverts* ([Dav76],[Att08],[AJP06a],[AJP06b],[AJP06c]). En particulier nous étudierons l’évolution de petits systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté (notés $\mathcal{H}_0$) en contact avec un environnement (noté parfois $\mathcal{R}$ pour réservoir). L’environnement peut être un bain thermique, un champ de boson ou encore un laser... Pour diverses considérations, d’ordre pratique par exemple, on ne s’intéresse qu’à l’évolution du petit système (l’environnement est : soit trop compliqué, soit on n’y a tout simplement pas accès et on renonce à le décrire) ; le petit système est alors appelé un système quantique ouvert.

Physiquement, on peut s’intéresser à diverses situations : retour à l’équilibre du petit système, thermalisation, ou encore émission de photon du petit système (nous reviendrons sur la description de cette expérience). Le but est de décrire ces évolutions en présence d’un instrument de mesure qui va introduire une perturbation dans l’évolution du système.

Comme nous l’avons déjà évoqué, les principes fondamentaux de la physique quantique “interdisent” d’effectuer une mesure directement sur le petit système sous peine de détruire l’information contenue dans celui-ci. En pratique, c’est sur le champ qui interagit avec le petit système sur lequel on effectue la mesure. Cela signifie qu’après l’interaction on réalise une observation sur l’environnement $\mathcal{R}$ ou sur une sous partie. Certes on détruit la partie sur laquelle on effectue la mesure mais on obtient une information partielle sur le petit

système $\mathcal{H}_0$. Cette information partielle se traduit par une modification aléatoire du petit système ([BGM04],[Bel02],[Bel03],[BvH05],[BvHJ06]).

Dans cette situation, on peut considérer deux configurations.

- Soit une mesure de type continu, un instrument mesure une quantité précise sans discontinuité dans le temps.
- Soit une mesure de type discret, on effectue des mesures répétées, espacées les unes des autres par un intervalle de temps.

Un exemple de mesure continue est décrit par l'expérience de *résonnance fluorescence* ([BMK03],) en optique quantique qui consiste, à l'aide d'un compteur, à compter le nombre de photons émis par un atome qui est excité de façon continue par un laser.

Une mesure de type discret peut être réalisée lors de l'interaction entre un atome et un jet de photons. Imaginons que les photons soient propulsés les uns après les autres contre l'atome (chaque "lancer" étant espacé dans le temps). Après chaque interaction, on effectue alors une mesure sur le photon qui vient d'interagir. De telles expériences sont largement répandues dans tous les domaines de la physique quantique : engineering, traitement de l'information quantique (travaux de S.Haroche)...

Un des objets de cette thèse est donc de décrire de façon précise et rigoureuse l'évolution de tels systèmes. Le cadre mathématique est le suivant.

Cadre mathématique :

Pour étudier les systèmes quantiques ouverts, nous aborderons les notions d'espace de Fock, de calcul stochastique quantique ([Par92],[Att03],[AP05],[Att08]), d'évolutions hamiltoniennes et lindbladiennes ([BR87],[BR97]) ...

De manière plus concrète, comme nous le verrons en détail dans le chapitre 1, on s'appuie sur le formalisme hilbertien de la mécanique quantique. Un système quantique est donc décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les vecteurs de norme 1 représentent les états. Typiquement, un environnement représentant un champ continu (champ éléctromagnétique, champ de bosons...) est décrit par un espace de Fock et les petits systèmes par des espaces de dimensions finies. L'étude des espaces de Fock, l'un des outils les plus performants dans le domaine, nous permettra, entre autre, de définir les bases du calcul stochastique quantique et la notion de bruits quantiques.

En ce qui concerne la mesure, les quantités physiques mesurables (énergie, position, moment, vitesse...) sont caractérisées par les opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$. Ces opérateurs sont appelés *observables* du système. Les principes fondamentaux de la mécanique quantique (confirmés par les expériences dans le domaine) nous enseignent alors que les données accessibles, lors d'une mesure, sont les valeurs du spectre de ces opérateurs. Comme nous l'avons déjà souligné, le résultat d'une mesure obéit à des lois de probabilités précises.

Ajouté à cela, comme il sera précisé dans le chapitre 2, une mesure entraîne une transformation aléatoire de l'état d'un système (modification qui dépend du résultat de la mesure).

Enfin, pour terminer la description d'un système quantique, il faut décrire son évolution au cours du temps. Sans mesure pertubatrice dans le cadre de systèmes en interaction (petit système + environnement), cette évolution est entièrement caractérisée par une famille

d'opérateurs unitaires définis à l'aide d'une observable particulière appelée *hamiltonien*. Cet hamiltonien permet alors de définir l'équation de Schrödinger du système couplé ; on obtient alors la description de l'évolution. Le résultat de cette évolution, traduit sur le petit système, est donné par une équation appelée *équation maîtresse*.

L'équation maîtresse permet alors de décrire l'évolution de l'état d'un petit système qui n'est pas perturbé par la présence d'un appareil de mesure.

En présence d'un appareil de mesure, dans le cadre d'une mesure de type continu, l'évolution aléatoire du petit système est décrite par des équations différentielles stochastiques classiques qui apparaissent comme des perturbations de l'équation maîtresse ([BGM04],[BL04])). Ces équations différentielles stochastiques portent le nom *d'équations de Schrödinger stochastiques* ou *équations de Belavkin* ([BP02], [BPZ98]). Les solutions de ces équations sont appelées *trajectoires quantiques* ; elles décrivent l'évolution de l'état de référence d'un système.

Il y a essentiellement trois approches pour établir ces modèles stochastiques.

La première est basée sur les travaux de Davies. En effet, les premiers résultats concernant la description de systèmes soumis à un principe de mesure continue sont dus à Davies ([Dav76]). Il a notamment décrit l'évolution d'un atome en présence d'un compteur de photons (expérience de résonance fluorescence). A partir de ces travaux, on peut dériver des modèles stochastiques à l'aide d'arguments heuristiques. Les équations différentielles stochastiques ainsi obtenues, d'une part ne sont pas rigoureusement justifiées et d'autre part n'ont pas une réelle cohérence mathématique. On reprendra notamment cette description dans le chapitre 2 et on montrera les lacunes que présentent ces modèles.

La deuxième approche utilise fortement le formalisme mathématique inhérent à la mécanique quantique : algèbre de Von Neumann, espace de Fock, probabilité quantique ([BGM04],[BvHJ06],[Bar06],[BL04])... En effet, à l'aide de la théorie du *filtrage quantique*, il est possible d'obtenir des équations différentielles stochastiques de manière rigoureuse. Les équations ainsi obtenues ont une expression similaire à celles dérivées de manière heuristique. Le prix à payer pour parvenir à ces résultats est celui de l'utilisation d'outils analytiques très techniques. En effet, dans cette approche, sont abordées toutes les subtilités et difficultés de la théorie des probabilités quantiques non-commutatives. Par ailleurs, les questions d'existence et d'unicité des solutions ne sont jamais réellement traitées dans le détail.

La troisième approche est celle que nous approfondirons. Elle s'appuiera sur une démarche plus intuitive. Il s'agit en effet de décrire des modèles continus à partir de limites de modèles concrets basés sur des approximations discrètes. Cette démarche permet de s'affranchir du formalisme compliqué du filtrage quantique et permet néanmoins d'obtenir des résultats de façon rigoureuse. Obtenir et justifier des modèles à partir de limites est une méthode déjà mise en oeuvre avec succés par Stéphane Attal et Yan Pautrat dans l'article [AP06]. Leur idée peut s'exprimer de la manière suivante. Au lieu de travailler avec une description compliquée de l'environnement, on considère que celui-ci est divisé en petits systèmes quantiques identiques et indépendants les uns des autres ([AP05]). Les sous-parties du système évoluent à tour de rôle avec le petit système $\mathcal{H}_0$ pendant un in-

tervalle de temps h. Stéphane Attal et Yan Pautrat ont alors montré que l'on pouvait obtenir à la limite ($h \to 0$) un cadre très large d'évolutions (interaction petit système-champ continu) caractérisées par des équations de Langevin quantiques (encore appelées équations de Hudson Parthasarathy) dirigées par des bruits quantiques. A partir de limites d'évolutions discrètes, ils ont donné une justification concrète et rigoureuse de l'utilisation de modèles qui apparaissaient jusque là très abstraits et qui revêtaient plutôt un caractère pratique. En l'occurrence, il n'y avait jusque là pas de réelles explications physiques justifiant leur utilisation. Le modèle qui consiste à décrire l'environnement comme une chaîne de petits systèmes qui interagissent les uns après les autres est appelé *modèle d'interactions répétées*.

L'idée sous-jacente qui a amené les résultats établis dans cette thèse est d'adapter ce type de démarche au cadre de la théorie de la mesure quantique. Dans le modèle d'interactions répétées, une mesure est réalisée après chaque interaction sur la partie de la chaîne qui vient d'interagir. Il s'agit du principe de *mesures quantiques répétées* qui modélise les mesures de types discret. Chaque perturbation due à la mesure se traduit par une modification aléatoire du système ; la suite des modifications peut alors être décrite par une chaîne de Markov qui dépend du temps d'interaction h.

Cette chaîne de Markov décrit l'évolution discrète de l'état d'un système quantique, elle est appelée *trajectoire quantique discrète*. On peut alors s'intéresser au comportement asymptotique de cette chaîne de Markov lorsque h tend vers zéro. Ainsi, si la limite existe, elle décrira un modèle d'évolution pour un système soumis à une mesure de type continu. Les différents articles présentés dans cette thèse sont consacrés à la justification rigoureuse des passages à la limite dans des situations diverses et à l'étude probabiliste des équations qui régissent ces évolutions. Le dernier article permet en particulier de décrire un cadre très général de modèles continus.

Les résultats présentés dans cette thèse apparaissent, à dessein, de façon relativement naturelle. Outre l'intérêt propre à la théorie de la mécanique quantique, un intérêt majeur réside également dans l'élégance et la diversité des théories probabilistes utilisées dans les démonstrations.

Ce rapport est composé de deux parties.

La première partie est composée de trois chapitres retraçant le contexte général et les différentes motivations qui ont animées cette thèse. Le premier chapitre constitue la présentation mathématique du contexte général des systèmes quantiques ouverts. On présente en détail les axiomes et postulats permettant d'établir un cadre rigoureux pour la mécanique quantique. Nous mettons également en place les modèles discrets qui sont à l'origine des résultats obtenus par la suite.

Dans le deuxième chapitre on motive le projet de cette thèse concernant l'étude des équations de Schrödinger stochastiques en exposant l'approche heuristique de la théorie de la mesure quantique. Ensuite on présente notre méthode et nos principaux résultats concernant la théorie des trajectoires quantiques.

Enfin dans le troisième chapitre, on expose les différents outils utilisés pour aboutir aux résultats du chapitre 2. Nous mettons en évidence l'intérêt des objets probabilistes

introduits pour parvenir à nos fins.

La deuxième partie est donc constituée des 5 articles présentant l'ensemble de nos résultats avec les preuves complètes.

Article 1)

L'article 1 [Pel08a] concerne l'étude de l'équation classique de Belavkin décrivant le comportement diffusif des trajectoires quantiques. Dans cet article, on montre qu'une telle équation admet une unique solution et que le processus solution est à valeurs dans les états d'un petit système $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^2$. Ensuite, on justifie la pertinence d'un tel modèle en montrant qu'on peut l'obtenir comme limite de trajectoires discrètes particulières. Pour établir un tel résultat on utilise dans ce cas des techniques de convergence d'intégrales stochastiques. La démonstration est notamment basée sur un théorème de Kurtz et Protter établissant la convergence de processus stochastiques vers des solutions d'équations différentielles stochastiques. L'idée principale est alors de décrire les trajectoires quantiques discrètes à l'aide d'équations aux différences stochastiques qui apparaissent comme des approximations d'équations différentielles stochastiques. C'est à travers une telle méthode que nous justifions le caractère plus intuitif de notre approche.

L'équation diffusive modélise un des deux comportements classiques de l'évolution d'un atome à deux niveaux d'énergie en contact avec une chaîne de spins, l'évolution étant perturbée par une mesure.

Article 2)

Le deuxième article [Pel08b] présente l'étude de l'équation classique de Belavkin, décrivant une évolution comportant des sauts aléatoires (évolution dite poissonienne). Cette équation est souvent formulée de manière peu cohérente dans la littérature, la notion même de solution n'étant pas évidente. A l'aide de la théorie des mesures aléatoires de Poisson, on définit un cadre précis et rigoureux pour étudier un tel type d'équation. On montre l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans les états de $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^2$.

De même on montre que ce modèle peut être justifié par un théorème de convergence via les trajectoires quantiques discrètes. Cependant, la méthode utilisée dans le cas diffusif ne peut pas être adaptée dans cette situation. Pour obtenir le résultat de convergence on compare donc directement le processus discret et le processus solution de l'équation avec sauts. Ceci nécessite l'utilisation d'une méthode de couplage qui consiste à réaliser les deux processus dans le même espace. La démonstration finale passe par l'utilisation d'une version discretisée de l'équation à l'aide d'un schéma d'Euler. On montre également ici que le schéma d'Euler converge vers la solution.

Nous aboutissons donc à un résultat similaire au premier article, établi sur le même modèle d'un atome à deux niveaux d'énergie. Mise à part le modèle discret de base, les techniques utilisées diffèrent largement de celles employées dans le cas diffusif.

Article 3)

Dans l'article [Pel08d] nous introduisons la notion de contrôle, notamment celle de

contrôle stochastique dans la théorie des trajectoires quantiques. Notre modèle de base est celui d'un atome à deux niveaux d'énergie. Le principe du contrôle est d'introduire une action extérieure qui décide d'une stratégie à adopter pour atteindre un but ou pour obéir à certaines contraintes. Cette action entraîne donc une modification de l'évolution ; cette modification peut être de nature déterministe ou de nature stochastique. Dans le cas où, par exemple, la stratégie de contrôle dépend des résultats aléatoires d'une mesure, la stratégie sera stochastique.

A partir de la limite de modèles de mesures répétées, on décrit à nouveau deux comportements typiques : un diffusif et un avec des sauts aléatoires. Les méthodes employées sont les mêmes que celles concernant les deux cas classiques des deux premiers articles. Il s'agit en fait d'une extension de ces deux cas.

Un des intérêts de cet article porte dans un premier temps sur la description de la notion de contrôle à l'aide du modèle discret alors que dans le cas continu une telle description n'est pas évidente. Dans un deuxième temps, on présente deux applications, un modèle concret d'un atome dirigé par un laser (le laser appliquant une stratégie de contrôle déterministe) et une introduction à la notion de contrôle optimal (on traduit la théorie classique concernant le sujet en termes de trajectoires quantiques).

Article 4)

L'article 4 [AP08] est composé de deux parties relativement distinctes. La première partie présente un résultat de convergence vers l'équilibre pour des cas particuliers de trajectoires quantiques, solutions des équations classiques. La deuxième partie s'intéresse à la description de modèles limites pour des trajectoires quantiques en présence d'une température positive. En effet, dans les articles précédents, il s'agissait toujours de résultats en température zéro. Dans le cas du modèle à deux niveaux d'énergies, on retrouve une évolution diffusive alors que le comportement avec des sauts fait place à un comportement déterministe.

Article 5)

L'article 5 [Pel08c] concerne le cas général décrivant le comportement de trajectoires continues en dimension finie quelconque. On ne se limite plus au cas d'un atome à deux niveaux d'énergie en contact avec une chaîne de spins (cas où il n'y avait que deux degrés de liberté). Les équations limites obtenues à partir de trajectoires quantiques discrètes sont décrites par des équations de type saut-diffusion. Elles sont en effet dirigées par des bruits browniens associés à des évolutions poissoniennes.

Il n'est pas aisé, voire impossible, d'unifier les deux méthodes utilisées dans les deux cas classiques. On utilise alors des techniques de générateurs de Markov et d'approximation par chaîne de Markov pour montrer les résultats de convergence. A partir des chaînes de Markov décrivant les trajectoires quantiques discrètes, on peut définir une notion de générateurs de Markov (dépendant du temps h de l'interaction dans le modèle des interactions répétées). La limite de ces générateurs définit alors des générateurs infinitésimaux que l'on associe de façon naturelle à des problèmes de martingales. La solution de ces problèmes de martingales est donnée par la solution d'équations saut-diffusion dont on montre ensuite

qu'elles peuvent être obtenues comme limites de trajectoires discrètes.

Cette étude permet de retrouver les deux cas classiques comme cas particuliers. L'approche par problèmes de martingales peut paraître moins directe que celle étudiée dans les deux premiers articles. En effet, elle provient d'une expression plus abstraite en termes de générateurs avant de faire intervenir l'expression d'équations différentielles stochastiques.

Mode d'emploi

Afin de guider le lecteur, nous tenons à faire quelques remarques concernant le choix de la présentation de ce rapport. Cette thèse présente deux axes majeurs. D'une part, l'obtention et la description rigoureuse de modèles utilisés en mécanique quantique ; d'autre part, l'utilisation d'outils profonds en théorie des probabilités. Ceci explique pourquoi nous avons décidé de diviser la première partie en trois chapitres distincts.

Les deux premiers chapitres sont plus axés sur les aspects physique mathématique et mécanique quantique. Le troisième chapitre illustre l'utilisation des théories probabilistes mises en place pour aboutir aux résultats.

Le premier chapitre est un rappel de certains résultats et principes généraux qui font parti des outils de base des systèmes quantiques ouverts. Nous décrivons les théories nécessaires pour exposer la "philosophie" générale de nos travaux et pour les motiver. Nous n'exposons pas de résultats nouveaux dans ce domaine, le lecteur peu expert dans le domaine y trouvera, entre autre, une présentation générale des axiomes de la mécanique quantique. Les résultats plus élaborés concernant le calcul stochastique quantique et les espaces de Fock ne nécessitent pas d'être maitrisés par la suite pour aborder nos résultats. Il semblait cependant difficile de faire ce rapport de thèse sans évoquer ces théories. En effet, bien qu'elles n'apparaissent pas de manière explicite dans nos travaux, nous y faisons souvent référence. Le lecteur dont la motivation est plus orientée vers les probabilités pourra se contenter de la description des trajectoires quantiques discrètes comme chaîne de Markov. Néanmoins, la présentation des mesures répétées qui permet de décrire ces chaînes de Markov est accessible sans prérequis importants.

Dans le chapitre 2, on résume les résultats principaux obtenus dans les 5 articles de cette thèse. Suivant les centres d'intérêts du lecteur, celui-ci pourra s'intéresser naturellement aux résultats concernant le domaine de la mécanique quantique ou alors se focaliser sur les résultats probabilistes. Les objets mathématiques utilisés pour parvenir à ces résultas sont résumés dans le chapitre 3. Concernant les détails des preuves nous renvoyons le lecteur aux articles correspondants (cf deuxième partie). Cette partie a pour but de préciser la chronologie des résultats que nous avons établis et de montrer l'évolution de notre approche.

Le chapitre 3 peut être considéré comme une "boite à outils". On décrit en détail les objets et concepts probabilistes utilisés dans les démonstrations de nos résultats. Nous

avons préféré les mettre en valeur en leur réservant un chapitre car ils constituent une base de travail par eux-mêmes et présentent un intérêt en théorie des probabilités. Ils peuvent d'ailleurs être employés dans de nombreux autres domaines.

Notons que ce rapport de thèse présente trois comportements caractéristiques décrivant l'évolution des trajectoires quantiques. Pour chacun de ces trois cas, nous utilisons une méthode différente permettant d'aboutir aux résultats. Outre l'intérêt d'utiliser des démarches différentes, il s'avère que chaque méthode est propre à chaque situation. Dans le chapitre 3, nous donnons quelques explications montrant pourquoi une méthode appliquée pour un cas ne peut l'être pour les autres. De plus notre propos est agrémenté de remarques diverses qui n'apparaissent pas forcément de manière explicite dans les différents articles.

Table des matières

I Systèmes quantiques ouverts et trajectoires quantiques. Introduction et présentation des résultats. 21

1 Systèmes quantiques ouverts 23
1.1 Mécanique quantique 24
1.2 Systèmes quantiques ouverts 26
1.2.1 Etats et mesure quantique 26
1.2.2 Evolution et interactions 28
1.2.3 Espace de Fock et calcul stochastique quantique 34
1.3 Interactions quantiques répétées 40
1.3.1 Modèle discret 40
1.3.2 Convergence vers le modèle continu 44
1.3.3 Interactions quantiques répétées avec contrôle 48
1.4 Mesures quantiques répétées 52
1.4.1 Réduction du paquet d'ondes 52
1.4.2 Trajectoires quantiques discrètes, chaîne de Markov quantique . . . 53

2 Trajectoires quantiques, équations de Schrödinger stochastiques 59
2.1 Trajectoires quantiques continues 60
2.1.1 Resonnance Fluorescence 60
2.1.2 Equations de Belavkin classiques 61
2.1.3 Problèmes 63
2.2 Notre approche 64
2.2.1 Description des asymptotiques 64
2.2.2 Atome à deux niveaux d'énergie 66
2.3 Résultats 69
2.3.1 Existence, unicité et approximation : cas diffusif 69
2.3.2 Existence, unicité et approximation : cas poissonien 73
2.3.3 Trajectoires quantiques controlées 78
2.3.4 Bain de chaleur 80
2.3.5 Trajectoires diffusives avec sauts 83

3 Outils probabilistes **87**
3.1 Existence et unicité des solutions 88
3.1.1 Mesures aléatoires de Poisson 88
3.1.2 Méthode de troncature 93
3.2 Convergence des trajectoires discrètes 96
3.2.1 Convergence des intégrales stochastiques 96
3.2.2 Schéma d'Euler de l'équation avec sauts et méthode de couplage . . 99
3.2.3 Problèmes de martingales 104

II Présentation des articles. **119**

A Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Diffusive Case **121**
A.1 Discrete Quantum Trajectories 125
A.1.1 Repeated Quantum Measurements 125
A.1.2 A Two-Level Atom 129
A.2 Belavkin Equations 131
A.2.1 Existence and Uniqueness 132
A.2.2 Change of Measure 136
A.3 Approximation and Convergence 136
A.3.1 The Discrete Approximation 136
A.3.2 Convergence Theorems 139

B Article 2 : Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Poisson Case **147**
B.1 Quantum repeated interactions : A Markov chain 152
B.1.1 Quantum repeated measurement 152
B.1.2 The discrete stochastic differential equation 156
B.2 The jump Belavkin equation 157
B.2.1 The probability framework of the jump equation 158
B.2.2 Existence and uniqueness 161
B.3 Approximation and convergence theorems 167
B.3.1 The discrete jump-Belavkin process 167
B.3.2 Euler-scheme for jump-Belavkin equation 170
B.3.3 Convergence of the discrete process 176

C Article 3 : Poisson and Diffusion Approximation of Stochastic Schrödinger Equations with Control **187**
C.1 Discrete Controlled Quantum Trajectories 192
C.1.1 Repeated Quantum Measurements with Control 192
C.1.2 A Two-Level Atom 197
C.1.3 Description of Asymptotic 198

C.2 Convergence to Continuous Models 201
C.2.1 Diffusive Belavkin Equation with Control 202
C.2.2 Poisson Approximation of Control Quantum Measurement 209
C.3 Examples and Applications 216
C.3.1 Laser Monitoring Atom : Resonance Fluorescence 216
C.3.2 Optimal Control 221

D Article 4 : Return to Equilibrium and Heat Baths for Quantum Trajectories 229
D.1 Introduction 231
D.2 Discrete-Time Quantum Trajectories 232
D.2.1 Repeated Quantum Interactions 232
D.2.2 Repeated Quantum Measurements 236
D.2.3 The two-level atom model 241
D.3 Continuous Trajectories 242
D.3.1 The Poisson case 244
D.3.2 The diffusive case 246
D.3.3 Return to Equilibrium 250
D.4 Temperature Case 253
D.4.1 The Diagonal case 254
D.4.2 The Non-diagonal case 257

E Article 5 : Markov Chains Approximation of Jump-Diffusion Quantum Trajectories 261
E.1 Discrete Quantum Trajectories 266
E.1.1 Quantum Repeated Measurements 266
E.1.2 Infinitesimal Generators 270
E.1.3 Asymptotic Assumption 272
E.2 Jump-Diffusion Models of Quantum Measurement 274
E.2.1 Limit Infinitesimal Generators 275
E.2.2 Solutions of Problem of Martingale 279
E.3 Convergence of Discrete Quantum Trajectories 287

Première partie

Systèmes quantiques ouverts et trajectoires quantiques. Introduction et présentation des résultats.

Chapitre 1

Systèmes quantiques ouverts

Quiconque n'est pas choqué par la mécanique quantique ne la comprend pas.

Niels Bohr

Dans ce premier chapitre, nous introduisons le contexte général et les principes fondamentaux de la mécanique quantique permettant l'étude des systèmes quantiques ouverts. On met notamment en évidence les aspects probabilistes de cette théorie, prélude à l'étude des trajectoires quantiques. Ce chapitre a pour objet de dresser le cadre mathématique permettant de décrire les phénomènes quantiques que nous étudierons. Notre attention se porte d'une part sur l'étude des interactions entre un petit système quantique et un champ continu caractérisé par un espace de Fock et, d'autre part, sur une version discrète de ce type d'interaction.

Dans la section 1.1, on présente les axiomes mathématiques permettant de décrire un système quantique "fermé" : espace d'états, fonctions d'onde, observables, mesure quantique, principe de réduction du paquet d'ondes et évolutions.

Dans la section 1.2, on introduit de nouveaux axiomes décrivant les systèmes quantiques ouverts comme élargissement de ceux exposés dans la section 1.1. Nous étudions en détail les transformations que peuvent subir des systèmes en interaction (ou qui dissipent de l'énergie avec l'extérieur). On introduit la notion de semi-groupe d'évolution et la théorie de Linblad. Enfin, on définit les espaces de Fock de multiplicités finies et on définit les outils de base du calcul stochastique quantique.

Dans la section 1.3, on décrit un modèle discret d'interaction appelé "interactions quantiques répetées". Nous exposons alors les résultats de Attal-Pautrat qui concernent l'approximation des modèles d'interactions de type continu (petit système, champ continu) à l'aide de ces modèles discrets. On élargit ces résultats en introduisant le concept de contrôle.

Enfin pour clore ce chapitre, on présente la théorie des trajectoires quantiques discrètes dans la section 1.4. On introduit la notion de mesure indirecte et de mesures répétées dans le cadre des interactions répétées. On établit alors le cadre probabiliste décrivant ce

principe.

Ce chapitre constitue donc une introduction au contexte physique de cette thèse. On met en place les bases nécessaires pour aborder l'étude des trajectoires quantiques dans le chapitre 2. La richesse de la théorie des systèmes quantiques ouverts ne nous permet pas d'en aborder toutes les subtilités, nous avons choisi ici de présenter l'essentiel des ingédients dont nous nous servirons par la suite.

1.1 Mécanique quantique

Les axiomes de la mécanique quantique présentés dans cette section correspondent aux principes généralement utilisés pour décrire les phénomènes observés lors des expériences. Le modèle mathématique est le suivant ([Att08]).

Premier axiome : Etats

L'espace de tous les états possibles d'un système quantique est représenté par un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Typiquement, un système qui comporte un degré fini de liberté (souvent appelé petit système), sera caractérisé par un espace de Hilbert de dimension finie. Par exemple, l'espace d'état d'un atome à N niveaux d'énergie est représenté par $\mathbb{C}^N$. Des systèmes plus complexes comme des champs continus ou des chaînes infinies d'atomes seront eux représentés par des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie.

Sur l'espace des états $\mathcal{H}$, on définit la relation d'équivalence suivante entre deux vecteurs de cet espace :

$$\psi \sim \phi \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^\star \,/\, \psi = \lambda\phi\,. \tag{1.1}$$

Les états du système sont alors les classes d'équivalence des vecteurs de $\mathcal{H}$. Deux vecteurs représentent le même état si ils sont égaux à un scalaire non nul près. Dans chaque classe d'équivalence, on peut alors choisir un représentant de norme 1. Un tel représentant est appelé une *fonction d'onde*.

Une fonction d'onde ψ contient toute l'information du système $\mathcal{H}$. Nous verrons que les quantités observables sont mesurées à partir d'une fonction d'onde de référence.

Deuxième axiome : Observables

Ce deuxième axiome concerne la mesure des quantités physiques d'un système $\mathcal{H}$ telle que la position, la vitesse, l'énergie... Ces quantités sont représentées par les opérateurs auto-adjoints de $\mathcal{H}$. Ces opérateurs sont appelés *observables* du système.

Les données accessibles lors d'une mesure quantique d'une observable A sont les valeurs de son spectre $\sigma(A)$. Le principe général de mesure quantique utilisé dans les différents travaux concerne le cas où les espaces de Hilbert sont de dimensions finies. Dans ce cas, une observable A est donc une matrice hermitienne diagonalisable en base orthonormée. Une observable A peut donc se décomposer de la façon

$$A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i. \tag{1.2}$$

Les λ_i correspondent aux valeurs propres de A et les opérateurs P_i sont les projecteurs spectraux associés. Ce sont donc les valeurs propres λ_i qui sont accessibles lors d'une mesure.

Troisième axiome : Mesure quantique

On considère donc une quantité mesurable caractérisée par une observable A sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (de dimension finie). Sa décomposition spectrale est donnée par

$$A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i. \tag{1.3}$$

Soit ψ une fonction d'onde décrivant l'état du système quantique $\mathcal{H}$. Le résultat d'une mesure d'une observable, dans l'état ψ, donne une valeur du spectre de A. Ce résultat est aléatoire et obéit à la loi de probabilité suivante. On observe une valeur propre λ_i avec la probabilité p_i donné par :

$$p_i = \mathbb{P}[\,\text{observer } \lambda_i\,] = \|P_i\,\psi\|^2. \tag{1.4}$$

De plus, immédiatement après avoir observé la valeur propre λ_i lors de la mesure, l'état du système est modifié et devient

$$\psi_i = \frac{P_i\,\psi}{\|P_i\,\psi\|}. \tag{1.5}$$

Ce phénomène est appelé *principe de réduction du paquet d'ondes*. Après l'observation de la valeur propre λ_i, le nouvel état de référence du système est ψ_i.

Quatrième axiome : Dynamique

Le dernier axiome concerne l'évolution d'un système quantique $\mathcal{H}$ au cours du temps. Une observable particulière de $\mathcal{H}$ est appelée l'hamiltonien du système noté H. C'est l'observable énergie totale du système. Cette observable permet de décrire l'évolution du système de la manière suivante. On définit les opérateurs unitaires

$$U_t = e^{-itH} \tag{1.6}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'état du système au temps t est alors décrit par

$$\psi_t = U_t\,\psi_0 \tag{1.7}$$

où ψ_0 est l'état initial. L'équation (1.7) s'appelle *l'équation de Schrödinger*. Cette formulation concerne l'évolution des états du système $\mathcal{H}$; elle est appelée *représentation de Schrödinger* (*Schrödinger picture* en anglais).

La *représentation d'Heisenberg* (*Heisenberg picture*) concerne l'évolution des observables. Si A désigne une observable, son évolution au cours du temps est donnée par

$$A_t = U_t^\star\,A\,U_t. \tag{1.8}$$

On peut donc, soit considérer que les observables évoluent au cours du temps et on les mesure alors dans l'état initial ψ_0. Soit on considère la même observable A que l'on mesure dans l'état ψ_t au cours du temps.

Dans la suite nous conserverons la présentation de Schrödinger qui traduit l'évolution du système et non l'évolution des observables (ce qui semble plus naturel). Avant de présenter la description de systèmes quantiques en interaction, on rappelle les définitions des *Bra* et des *Ket* utilisées en physique.

Pour cela on considère le produit scalaire $\langle\, , \rangle$ sur $\mathcal{H}$. Soit ψ un vecteur de $\mathcal{H}$, on définit le bra $|\psi\rangle$ comme l'application linéaire

$$|\psi\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda\psi. \end{array} \tag{1.9}$$

Dans la suite, on identifie un vecteur ψ de $\mathcal{H}$ avec le bra $|\psi\rangle$ sans faire référence à l'application linéaire correspondante. On définit le ket $\langle\psi|$ comme la forme linéaire

$$\langle\psi| : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & \langle\psi, y\rangle. \end{array} \tag{1.10}$$

Comme on identifie les vecteurs y de $\mathcal{H}$ avec les bra $|y\rangle$, alors les ket agissent sur les bras : $\langle\psi||y\rangle = \langle\psi, y\rangle$. Cela permet de définir un projecteur orthogonal sur un vecteur Ω de norme 1 comme $|\Omega\rangle\langle\Omega|$. En particulier, un opérateur de la forme $|u\rangle\langle v|$ agit sur les bras $|y\rangle$ de la façon suivante : $|u\rangle\langle v||y\rangle = |u\rangle\langle v, y\rangle = \langle v, y\rangle u$. Nous utiliserons à plusieurs reprises de telles notations, elles apparaissent de manière récurrente dans les différents articles.

1.2 Systèmes quantiques ouverts

La précédente présentation des axiomes concernait essentiellement l'étude des systèmes quantiques fermés. De nombreuses situations physiques nécessitent l'étude de systèmes en interaction avec un environnement extérieur (notamment pour modéliser la dissipation d'énergie). Bien qu'un système couplé (petit système + environnement) soit un système fermé, la complexité de l'environnement ne permet pas d'avoir toutes les données du système, parfois même, on n'y a pas accès. On se focalise donc sur l'étude du petit système, qui dans de telles situations est appelé système quantique ouvert ([Dav76]).

Nous présentons ici les ingrédients mathématiques nécessaires à l'étude de ces systèmes. Dans un souci pédagogique, à partir de modèles simples, nous introduisons progressivement les nouveaux axiomes de la mécanique quantique des systèmes ouverts. Ensuite on présente le modèle des espace de Fock en interaction avec un petit système et on décrit les bases du calcul stochastique quantique.

1.2.1 Etats et mesure quantique

On considère deux systèmes quantiques $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ en interaction. L'espace $\mathcal{H}_0$ représente donc un petit système et $\mathcal{H}$ représente l'environnement. Ce qui va suivre ne nécessite pas

de préciser, dans un premier temps, les dimensions des espaces de Hilbert. L'espace qui décrit tous les états possibles du système couplé est représenté par le produit tensoriel des deux espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}.$$

Ce système couplé est alors un système fermé et peut être décrit par les axiomes exposés dans la section 1.1. Notre but est donc d'introduire les moyens de décrire le petit système $\mathcal{H}_0$ à partir de la description de $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Pour cela nous aurons besoin de la notion de trace partielle.

Définition-Théorème 1.1 *Soient $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert (de dimension finie ou non). Soit ψ une fonction d'onde de $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ alors il existe un unique opérateur sur $\mathcal{H}_0$ noté $Tr_{\mathcal{H}}(|\phi\rangle\langle\phi|)$ qui satisfait*

$$Tr\Big[Tr_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle\langle\psi|)\, X\Big] = Tr\Big[|\psi\rangle\langle\psi|\,(X \otimes I)\Big] \tag{1.11}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$.

A l'aide de cette notion de trace partielle nous allons pouvoir décrire le principe de mesure d'une observable du système $\mathcal{H}_0$. Considérons une observable $A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$ de $\mathcal{H}_0$. On considère alors

$$A \otimes I = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i\, P_i \otimes I, \tag{1.12}$$

l'extension de l'opérateur A comme opérateur sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Cela définit une observable de $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ que l'on peut mesurer dans l'état ψ, où ψ est un état de $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Une valeur propre λ_i est alors observée avec une probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{observer } \lambda_i] &= \|(P_i \otimes I)\psi\|^2 \\ &= Tr\Big[|\psi\rangle\langle\psi|(P_i \otimes I)\Big] \\ &= Tr\Big[Tr_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle\langle\psi|)\, P_i\Big] \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'opérateur $Tr_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ permet alors de décrire entièrement le résultat de la mesure d'une observable sur $\mathcal{H}_0$. Nous avons le théorème suivant qui permet de décrire entièrement cet opérateur ([Att08]).

Théorème 1.2 *Soit ρ un opérateur sur $\mathcal{H}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un vecteur de norme 1 sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ tel que*

$$\rho = Tr_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle\langle\psi|).$$

2. *L'opérateur ρ est auto-adjoint, positif de trace 1.*

Un opérateur ρ sur un espace de hilbert $\mathcal{H}_0$ qui satisfait les conditions d'être un opérateur auto-adjoint, positif et de trace 1 est appelée une *matrice densité*.

Il est important de noter que si ϕ désigne un vecetur de norme 1 de $\mathcal{H}_0$, alors l'opérateur $|\phi\rangle\langle\phi|$ est une matrice densité. La notion de matrice densité permet donc d'étendre la notion de fonction d'onde et donc celle d'état d'un système. Désormais lorsque nous parlerons d'état d'un système, nous ferons référence à une matrice densité.

Il est également intéressant de noter ici que le projecteur sur l'espace engendré par ϕ noté $|\phi\rangle\langle\phi|$ ne dépend pas du représentant définissant la fonction d'onde. Une matrice densité définie à partir d'une fonction d'onde s'appellera un *état pur*. Concernant les matrices densités nous avons le théorème général suivant ([Att08]).

Théorème 1.3 *Si μ désigne une matrice densité sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ alors il existe une unique matrice densité sur $\mathcal{H}_0$ notée $Tr_{\mathcal{H}}(\mu)$ qui satisfait*

$$Tr\Big[Tr_{\mathcal{H}}(\mu)\, X\Big] = Tr\Big[\mu\,(X \otimes I)\Big] \tag{1.14}$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$.

L'état $Tr_{\mathcal{H}}(\mu)$ est appelé "trace partielle" de l'état μ sur $\mathcal{H}_0$ par rapport à $\mathcal{H}$.

Finalement nous adopterons la description suivante d'un système quantique (ouvert ou non). Un système quantique est représenté par un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ dont les différents états du système sont représentés par les matrices densités ρ. En dimension finie, si $A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$ désigne une observable, alors on observe les valeurs propres λ_i avec une probabilité

$$\mathbb{P}[\text{observer } \lambda_i] = Tr[\rho P_i].$$

Le phénomène de réduction du paquet d'ondes se traduit de la manière suivante : si on a observé la valeur propre λ_i lors de la mesure alors l'état ρ est modifié et devient

$$\rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{Tr[\rho P_i]}. \tag{1.15}$$

Il est intéressant de remarquer que si $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ alors $\psi_i = P_i\psi/\|P_i\psi\|$ satisfait $|\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho_i$ (cette propriété est utilisée dans l'article [AP08]). Nous ne décrirons pas le principe de mesure en dimension infinie car cette notion n'apparaît pas dans les articles de cette thèse.

1.2.2 Evolution et interactions

L'objectif de cette section est de définir un cadre suffisamment général permettant de décrire l'évolution d'un système quantique qui dissiperait de l'énergie avec l'extérieur. A partir de situations simples d'interactions entre deux systèmes, nous présentons l'évolution des matrices densités d'un système quantique ouvert. On introduit notamment la notion d'applications complètement positives qui permettra de définir le cadre décrivant l'évolution des systèmes quantiques ouverts.

Exemple

Exemple 1) : Commençons par une interaction simple entre deux systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$. Sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, on considère un hamiltonien de la forme

$$H = H_0 \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{H}}, \tag{1.16}$$

où les opérateurs H_0 et $H_{\mathcal{H}}$ correspondent aux hamiltoniens propres des systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$.

Cet hamiltonien suggère que chaque système évolue de manière indépendante sans échange d'énergie (il n y a pas à proprement parler d'interaction) ; cela va nous permettre cependant de définir le principe dévolution des matrices densités. Sur le système fermé $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, on définit la famille d'unitaires (U_t) par

$$U_t = \exp(-it\, H) = U_0(t) \otimes U_{\mathcal{H}}(t)$$

avec $U_0(t) = \exp(-it\, H_0)$ et $U_{\mathcal{H}}(t) = \exp(-it\, H_{\mathcal{H}})$. Ainsi, si l'état initial sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ est décrit par une fonction d'onde ψ, l'évolution dans la représentation de Schrödinger est donnée par

$$\psi_t = U_t \psi.$$

Notons alors $\rho_t = Tr_{\mathcal{H}}(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$ la trace partielle de $|\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ sur $\mathcal{H}_0$ par rapport à $\mathcal{H}$. Il est facile de vérifier avec la définition de la trace partielle que l'on a

$$\rho_t = U_0(t)\, \rho_0\, U_0(t)^\star. \tag{1.17}$$

Afin de considérer un modèle plus complet d'interaction, on introduit un hamiltonien d'interaction H_I qui agit sur le produit tensoriel ; l'hamiltonien total d'interaction H_{tot} est alors décrit par

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{H}} + H_I. \tag{1.18}$$

On définit alors une famille d'unitaires (U_t) par $U_t = \exp(-ihH_{tot})$ qui agit sur le produit tensoriel. L'évolution des états $\tilde{\rho}$ du produit tensoriel $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ est donc donnée par

$$\tilde{\rho}_t = U_t\, \tilde{\rho}_0\, U_t^\star. \tag{1.19}$$

On obtient la description de l'évolution sur $\mathcal{H}_0$ à l'aide de la trace partielle

$$\rho_t = Tr_{\mathcal{H}}(\tilde{\rho}_t).$$

Dans ce type d'interaction, l'hamiltonien H_I représente les échanges entre les deux systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$.

Comment se traduisent ces échanges au niveau du petit système seul ? A l'aide de la description d'une telle situation entre deux systèmes de dimension finie, nous allons introduire la notion de lindbladien et d'applications complètement positives qui décriront ensuite le cadre le plus général des évolutions que nous étudierons

Exemple 2) : Considérons donc une interaction entre $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{K+1}$ et $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{N+1}$, deux systèmes quantiques de dimension finie. L'état initial sur $\mathcal{H}_0$ est décrit par une matrice densité ρ et celui sur $\mathcal{H}$ par une fonction d'onde ψ. L'état initial sur le produit tensoriel est donc

$$\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ qui décrit l'évolution du système couplé (après un certain laps de temps par exemple). L'état sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ après interaction est donc

$$U(\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^\star.$$

On note $\mu = Tr_{\mathcal{H}}(U(\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^\star)$ la trace partielle sur $\mathcal{H}_0$.

Pour déterminer la transformmation subie par ρ, nous allons donner un expression "explicite" de la trace partielle μ. Pour cela, fixons une base dans chacun des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{B}_0 = \{X_0, \ldots, X_N\}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_0$ et soit $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{\Omega_0, \ldots, \Omega_K\}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$ telle que $\Omega_0 = \psi$. On choist alors la base :

$$\mathcal{B} = \{X_0 \otimes \Omega_0, X_1 \otimes \Omega_0, \ldots, X_N \otimes \Omega_0, \ldots, X_0 \otimes \Omega_K, \ldots, X_N \otimes \Omega_K\} \tag{1.20}$$

comme base orthonormée du produit tensoriel $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$.

Dans cette base l'expression de la trace partielle est facile à calculer. En effet, tout opérateur β sur le produit tensoriel $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ peut être représenté par une matrice de taille $(N+1)(K+1) \times (N+1)(K+1)$ que l'on écrit (dans cette base) comme une matrice par bloc $\beta = (\beta_{ij})_{0 \leq i,j \leq K}$ où les coefficients β_{ij} sont des opérateurs sur $\mathcal{H}_0$. Ainsi, si $\eta = (\eta_{ij})_{0 \leq i,j \leq K}$ est un état sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, alors sa trace partielle $Tr_{\mathcal{H}}(\eta)$ sur $\mathcal{H}_0$ par rapport à $\mathcal{H}$ est donnée par

$$Tr_{\mathcal{H}}(\eta) = \sum_{i=0}^{K} \eta_{ii}.$$

Revenons à l'expression de μ. Dans la base $\mathcal{B}$, l'opérateur unitaire U peut s'écrire par bloc $U = (U_{ij})_{0 \leq i,j \leq K}$. Un simple calcul montre alors :

$$\mu = \sum_{i=0}^{K} U_{i0} \ \rho \ U_{i0}^\star. \tag{1.21}$$

Nous avons détaillé les calculs car ils apparaissent dans tous les articles de cette thèse. De manière générale, dans cette situation, les opérateurs U_{i0} peuvent être quelconques à la seule condition qu'ils satisfassent

$$\sum_{i=0}^{K} U_{i0}^\star U_{i0} = I. \tag{1.22}$$

En effet cette condition est nécessaire pour que l'opérateur U soit unitaire. On dénote $\mathcal{L}$ l'application définie par

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=0}^{K} U_{i0} \ \rho \ U_{i0}^\star. \tag{1.23}$$

Cette décomposition de l'opérateur $\mathcal{L}$ qui agit sur les états de $\mathcal{H}_0$ s'appelle la *décomposition de Krauss* de l'opérateur $\mathcal{L}$.

Finalement, si l'on ajoute la condition (1.22) à la transformation (1.23) cela constitue l'archétype de la transformation que peut subir l'état d'un système quantique ouvert. En particulier, nous allons voir qu'une transformation $\mathcal{L}$ possède des propriétés spécifiques ; une telle transformation est appelée une *application complètement positive* ([Att08],[BR97],[KR97b]). Nous allons préciser cela dans ce qui va suivre.

Applications complètement positives et semi-groupes d'évolution

Avant de définir le cadre décrivant les évolutions d'un système quantique ouvert, commençons par la définition générale d'une application complètement positive.

Définition 1.1 *Soit T un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ avec $\mathcal{H}_0$ un espace de hilbert séparable de dimension quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'opérateur $T^{(n)}$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ par*

$$T^{(n)}(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (T(A_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}.$$

*On dit qu'un opérateur T est n-**positif** si l'opérateur $T^{(n)}$ est positif.*

*On dit qu'un opérateur est **complètement positif** si l'opérateur T est n-positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Le théorème suivant est une généralisation (en toute dimension) du résultat que l'on a obtenu précédemment dans le cas de la dimension finie.

Théorème (Krauss) 1.4 *Soit T un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, σ-faiblement continu et complètement positif. Dans ce cas, il existe une suite d'opérateurs bornés $(T_i)_{i\geq 0}$ sur $\mathcal{H}_0$ telle que pour tout état ρ sur $\mathcal{H}_0$*

$$T(\rho) = \sum_{i\geq 0} T_i\, \rho\, T_i^\star,$$

où la série est fortement convergente pour tout état ρ. De plus si T laisse stable l'ensemble des états, on a

$$\sum_{i\geq 0} T_i^\star T_i = I.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, un état ρ définit une forme linéaire sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ par

$$X \mapsto Tr[\rho X].$$

En considérant une application T complètement positive de la forme

$$T(\rho) = \sum_{i\geq 0} T_i\, \rho\, T_i^\star,$$

on peut définir une application $T^\star$ qui agit sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ de la façon suivante :

$$T^\star(X) = \sum_{i\geq 0} T_i^\star \, X \, T_i,$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Il est important de noter que la série définie ainsi est fortement convergente pour tout opérateur borné sur $\mathcal{H}_0$. On a alors

$$Tr[T(\rho)\, X] = Tr[\rho\, T^\star(X)].$$

Ce résultat est en fait un cas très particulier de la dualité entre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ et les opérateurs à trace sur $\mathcal{H}_0$; nous ne rentrerons pas plus dans les détails de cette théorie.

Maintenant que l'on a définit et décrit ce qu'est une application complètement positive, on va s'intéresser aux semi-groupes d'applications complètement positives. Cela va nous permettre de dresser le cadre décrivant l'évolution d'un système quantique ouvert au cours du temps. Comme nous avons vu que l'évolution d'un petit système après interaction est donnée par une application complètement positive, il est naturel de décrire l'évolution de ce petit système au cours du temps par une famille d'applications complètement positives $(T_t)_{t\geq 0}$. Pour des raisons liés à la dynamique, on demande à ce que cette famille satisfasse une propriété de semi-groupe.

Ainsi, lorsque l'on considérera l'évolution d'un système quantique ouvert, on se donnera un semi-groupe d'applications complètement positives $(T_t)_{t\geq 0}$. Le fait que l'on considère seulement les temps strictement positifs traduit le fait que l'évolution est irréversible (le système dissipe de l'énergie).

Le théorème suivant décrit entièrement les semi-groupes d'évolution d'un système quantique.

Théorème (Lindblad) 1.5 *Soit (T_t) une semi-groupe d'opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. On suppose :*

1. *Chaque opérateur T_t est complètement positif, σ-faiblement continu*
2. *Les opérateurs satisfont $T_0 = I$ et $T_t^\star(I) = I$ pour tout t.*
3. *L'application $t \mapsto T_t$ est fortement continue si l'on munit $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ de la norme d'opérateurs.*

Alors il existe un opérateur auto-adjoint borné H et une suite d'opérateurs bornés $(L_i)_{i\geq 0}$ tels que la famille (T_t) admet un générateur $\mathcal{L}$ de la forme

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H,\rho] + \sum_{i\geq 0} \frac{1}{2}\left(2L_i\rho L_i^\star - L_i^\star L_i \rho - \rho L_i^\star L_i\right)$$

pour tout état ρ sur $\mathcal{H}_0$ (la série est fortement convergente).

Dans tous les résultats établis dans les articles, l'espace $\mathcal{H}_0$ est de dimension finie. Dans ce cas là, le résultat de ce théorème peut être exprimé avec un nombre fini d'opérateurs L_i (de même dans le théorème de Krauss). C'était notamment le cas de l'expression obtenue dans le cas d'une interaction entre $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ de dimension finie et c'est la principale situation considérée dans les articles.

En conclusion, lorsque l'on étudiera des évolutions de type continu pour des systèmes quantiques, elles satisferont toujours les conditions du théorème 1.5. L'évolution d'un système, traduite par l'évolution de ces états, est donc donnée par un semi-groupe (T_t) qui satisfait $(T_t = \exp(t\mathcal{L}))$. Ainsi l'évolution des états d'un système est entièrement determinée par l'équation différentielle

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{L}(\rho_t). \tag{1.24}$$

Un telle équation s'appelle *équation maitresse*. L'opérateur $\mathcal{L}$ qui agit sur les matrices densités s'appelle le *lindbladien* du système.

Remarque : Certains modèles plus complexe peuvent nécessiter une inhomogéneïté en temps. On considère alors des lindbladiens dépendants du temps et l'équation maîtresse est donnée par

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{L}(t, \rho_t). \tag{1.25}$$

Nous justifierons ultérieurement cette équation à l'aide d'un modèle d'interactions répétées.

Nous avons vu qu'un moyen d'obtenir des évolutions complètement positives consistait à considérer un principe d'interaction. Réciproquement, partant de la donnée d'un semi-groupe d'évolution (T_t) satisfaisant les conditions du théorème (1.5), peut-on décrire un modèle d'interaction entre un petit système et un environnement décrit par une famille d'unitaires (U_t) sur le système couplé qui redonne ce semi-groupe à l'aide d'une trace partielle. Cette question nous permet d'aborder la notion de dilatation de semi-groupes.

Dilatation des semi-groupes

Nous définissons ici la notion de dilatation d'un semi-groupe, qui donne un cadre précis à la question précédente.

Définition 1.2 *Soit (T_t) un semi-groupe d'évolution d'un système quantique $\mathcal{H}_0$ satisfaisant les conditions du théorème* 1.5*. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'un vecteur de référence Ω.*

On appellera ***dilatation*** *sur $\mathcal{H}$ du semi groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs de $\mathcal{H}_0$, la donnée d'une famille $(U_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ tels que pour tout t et pour tout état ρ sur $\mathcal{H}_0$ on ait*

$$T_t(\rho) = Tr_{\mathcal{H}}\Big(U_t(\rho \otimes |\Omega\rangle\langle\Omega|)U_t^\star\Big).$$

Dans la définition de dilatation, on peut demander la propriété de semi-groupes pour la famille (U_t) mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété dans nos propos.

Dans la suite nous nous concentrerons sur le cas où $\mathcal{H}_0$ est de dimension finie.

Un moyen d'obtenir une évolution linbladienne pour un tel système à partir d'une dilatation est l'utilisation du modèle d'interaction entre $\mathcal{H}_0$ et un espace de Fock. Nous exposons cette théorie dans la partie suivante.

1.2.3 Espace de Fock et calcul stochastique quantique

Dans cette partie, nous allons introduire la notion d'espace de Fock ainsi que son utilisation en mécanique quantique des systèmes ouverts. Cette étude présente plusieurs intérêts. D'une part, elle va nous permettre d'établir le fait que tout semi-groupe d'évolution agissant sur un système quantique peut être obtenu comme une dilatation. Toute évolution de ce type pourra alors être intérpretée comme une interaction entre un petit système et un espace de Fock. D'autre part, nous allons également introduire la notion de calcul stochastique quantique qui est un élément important dans la littérature concernant l'étude des trajectoires quantiques.

Bien que les résultats que nous allons exposer ici ne sont pas utilisés directement dans les articles de cette thèse, les théories qui vont suivre constituent le contexte général auquel nous faisons souvent référence.

Plus précisemment, nous allons définir la notion d'espace de Fock symétrique de multiplicité finie. Typiquement, en physique ceci caractérise par exemple ce qu'on appelle *champ de bosons* ; on parle parfois d'espace de Fock bosonique. Notre exposé n'a pas pour objet de faire une présentation exhaustive de la théorie des espaces de Fock, il s'agit ici d'introduire simplement les éléments de base.

Espace de Fock de multiplicité finie

L'espace de Fock de multiplicité K est défini par :

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} L^2\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^K\right)^{\circ(n)}, \tag{1.26}$$

où l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^K\right)^{\circ(n)}$ correspond au produit tensoriel symétrisé de n copies de $L^2\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^K\right)$. On définit également pour $s < t$

$$\mathbf{\Phi}^{(K)}_{[s,t]} = \mathbb{C}^K \oplus \bigoplus_{n\geq 1} L^2\left([s,t], \mathbb{C}^K\right)^{\circ(n)}.$$

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette définition, notre étude de ces espaces sera essentiellement basée sur *l'interprétation de Guichardet*. Cette interprétation sera d'ailleurs prise comme définition de ces espaces (il sera très peu fait référence à la définition (1.26)).

L'interprétation de Guichardet est la suivante. Soit $I = \{1, \ldots, K\}$, on définit $\Omega_n^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble des parties finies de la forme $\{(s_1, i_1), \ldots, (s_n, i_n)\}$ où les s_i sont des

élements de $\mathbb{R}^+$ tous distincts deux à deux et les i_j sont des éléments de I. On identifie (ou on définit) alors $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ avec l'espace des fonctions de carré intégrable sur

$$\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+) = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_n^{(K)}(\mathbb{R}^+).$$

La mesure sur l'espace $\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ est définie de la manière suivante. On identifie $\Omega_n^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ avec le simplexe

$$\Sigma_n^{(K)} = \{0 < t_1 < \ldots, t_n\} \times I.$$

On munit alors cet ensemble $\Omega_n^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ du produit de la mesure de Lebesgue sur le simplexe et de la mesure de comptage sur I. Pour $n = 0$ on note $\delta_\emptyset$ la mesure définie sur $\Omega_0^{(K)}(\mathbb{R}^+)$.

Ainsi $\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ hérite d'une structure d'espace mesuré et nous prendrons comme définition de l'espace de Fock de multiplicité K

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} = L^2(\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+)).$$

Un élément de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ est donc une fonction $f : \Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$|f(\emptyset)|^2 + \sum_n \sum_{i_1,\ldots,i_n \in I} \int_{t_1<\ldots<t_n} |f(\{(t_1,i_1),\ldots,(t_n,i_n)\})|^2 dt_1 \ldots dt_n < \infty.$$

Dans cette écriture on a identifié un élément σ de $\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+)$ avec une famille $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_K\}$ où $\sigma_i = \{s \in \mathbb{R}^+; (s,i) \in \sigma\}$. Ainsi $f \in \mathbf{\Phi}^{(K)}$ si et seulement si

$$\int_{\Omega^{(k)}(\mathbb{R}^+)} |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty.$$

Un exemple important d'élément de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ est celui des *vecteurs cohérents*. Pour tout élément $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^K)$ on définit le vecteur cohérent $e(f)$ par

$$[e(f)](\sigma) = \Pi_{i\in I} \Pi_{s\in\sigma_i} f_i(s).$$

L'espace engendré par les vecteurs cohérents sera noté $\mathcal{E}$. Nous ferons souvent référence à ce domaine notamment lorsque nous aborderons les trajectoires quantiques. Ce domaine à également une grande importance dans la théorie du calcul stochastique quantique.

La première étape dans la construction de l'intégrale stochastique concerne la propriété suivante de tensorialité de l'espace de Fock.

Proposition 1.6 *Pour tous réels s et t tels que $s < t$ on a l'isomorphisme suivant*

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} \simeq \mathbf{\Phi}_{[0,s]}^{(K)} \otimes \mathbf{\Phi}_{[s,t]}^{(K)} \otimes \mathbf{\Phi}_{[t,\infty[}^{(K)}.$$

Cette propriété est essentielle pour définir ensuite la notion de calcul stochastique quantique. En effet, elle est à rapprocher par exemple de la notion d'indépendance des accroissements d'un processus stochastique. Avant de définir la notion d'intégrale stochastique nous allons étudier la notion de processus dans l'espace de Fock et définir une première notion d'intégrale.

On considère les familles (χ_t^i) pour $i \in I$ telles que :

$$\chi_t^i(\sigma) = \begin{cases} \mathbf{1}_{[0,t[}(s) & \text{si } \sigma = (s,i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.27}$$

Il est alors important de remarquer que pour tout $i \in I$ la fonction χ_t^i est un élément de $\mathbf{\Phi}_{[0,t[}^{(K)}$.

La famille (χ_t^i) vérifie la propriété d'adaptation suivante. On dit qu'un *processus* (f_t) d'éléments de l'espace de Fock $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ est adapté si $t \to f_t$ est mesurable et que $f_t \in \mathbf{\Phi}_{[0,t[}^{(K)}$ pour tout t. Il est alors clair que (χ_t^i) est un processus adapté pour tout i.

Nous allons définir une notion d'intégrale par rapport à cette famille de courbes. Pour tout processus adapté (f_t) de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$, on pose pour tout $i \in I$

$$\int_0^\infty f_t \, d\chi_t^i(\sigma) = \begin{cases} f_{t_n}(\sigma \setminus (t_n, i_n)) & \text{si } \sigma = (s_1, i_1), \ldots, (t_n, i_n) \text{ avec } i_n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.28}$$

On a alors le théorème suivant ([Att08]).

Théorème 1.7 *Tout élément f de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ admet la notion suivante de représentation cahotique*

$$f = f(\emptyset) + \sum_n \sum_{i_1,\ldots,i_n \in I} \int_{t_1 < \ldots < t_n} f((t_1,i_1),\ldots,(t_n,i_n)) d\chi_{t_1}^{i_1}, \ldots d\chi_{t_n}^{i_n}$$

On peut alors interpréter ceci de la manière suivante (pour de plus amples détails, le lecteur intéressé trouvera des références complètes dans [Att08]). Dans un premier temps, on remarque que pour tout $i \in I$ l'élément $\chi_t^i - \chi_s^i$ est un élément de $\mathbf{\Phi}_{[s,t[}$. L'élément différentiel $d\chi_t^i$ peut donc être "considéré" comme un élément de "$\mathbf{\Phi}_{[t,t+dt[}$". Ainsi $\{1, d\chi_t^1, \ldots, d\chi_t^K\}$ forme une "base" de $\mathbf{\Phi}_{[t,t+dt[}$. On a alors une notion de produit tensoriel continu, c'est à dire,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^{(K)} &\simeq \bigotimes_{t \geq 0} \mathbf{\Phi}_{[t,t+dt[}^{(K)} \\ &\simeq \bigotimes_{t \geq 0} \mathbb{C}^{K+1}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Cette notion sera renforcée et précisée lorsque nous aborderons, dans la section 1.3, les résultats d'approximation de l'espace de Fock continu $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ par un bébé Fock. Décrivons maintenant les opérateurs de base de l'espace de Fock et notamment les bruits quantiques.

Bruits quantiques

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, on définit l'ensemble $\{s\}_i$ de $\Omega^{(k)}(\mathbb{R}^+)$ par

$$\{s\}_i = \{\emptyset, \dots \emptyset, \{s\}, \emptyset, \dots, \emptyset\},$$

où $\{s\}$ apparaît en i^{ème} position. On définit les bruits quantiques $a^i_j(t)$ agissant sur les éléments de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ pour $i, j = 0, \dots, k$ par

$$\begin{aligned} [a^0_i(t)f](\sigma) &= \sum_{s \in \sigma_i \cap [0,t]} f(\sigma \setminus \{s\}_i) \\ \left[a^i_0(t)f\right](\sigma) &= \int_0^t f(\sigma \cup \{s\}_i) ds \\ \left[a^i_j(t)f\right](\sigma) &= \sum_{s \in \sigma_i \cap [0,t]} f(\sigma \setminus \{s\}_i \cup \{s\}_j) \end{aligned} \tag{1.30}$$

pour $(i, j) \neq (0, 0)$ et

$$a^0_0(t) = tI.$$

Ces opérateurs (sauf a^0_0) sont non bornés et ont donc un domaine différent de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$. Un exemple de domaine souvent utilisé

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathbf{\Phi}^{(\mathbf{K})}; \int_{\Omega^{(K)} K(\mathbb{R}^+)} |\sigma| f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty \right\}.$$

L'espace $\mathcal{E}$ est également un domaine pour ces opérateurs. Cet espace est très utile dans les applications et on obtient les résultats suivants ([Att08])

$$\begin{aligned} a^i_0(t)e(f) &= \int_0^t f_i(s) ds\, e(f) \\ \langle e(f), a^0_i(t)e(g)\rangle &= \int_0^t \overline{g_i(s)} ds\, \langle e(g), e(f)\rangle \\ \langle e(f), a^j_i(t)e(g)\rangle &= \int_0^t \overline{g_i(s)} f_j(s) ds\, \langle e(g), e(f)\rangle. \end{aligned}$$

Après avoir défini les bruits quantiques, nous allons donner un sens à une intégrale stochastique par rapport à ces bruits.

Intégrale stochastique quantique

La propriété importante qui va nous permettre de définir l'intégrale stochastique quantique est la propriété de tensorialité de l'espace de Fock. Considérons une partition $\mathbf{\Pi} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < \dots\}$. Une généralisation de la proposition (1.6) donne

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} \simeq \bigotimes_{p \in \mathbb{N}} \mathbf{\Phi}^{(K)}_{[t_p, t_{p+1}[}.$$

Il est alors important de remarquer qu'un opérateur de la forme $a_j^i(t) - a_j^i(s)$ avec $s < t$ n'agit que sur $\mathbf{\Phi}^{(K)} K_{[s,t[}$. Plus précisément, sur le produit tensoriel $\Phi^{(K)} \simeq \Phi^{(K)}_{[0,s[} \otimes \Phi^{(K)}_{[s,t[} \otimes \Phi^{(K)}_{[s,\infty[}$, l'opérateur $a_j^i(t) - a_j^i(s)$ est de la forme

$$I \otimes (a_j^i(t) - a_j^i(s))_{|\Phi^{(K)}_{[s,t[}} \otimes I.$$

Comme pour l'intégrale stochastique, cette propriété "d'indépendance" des accroissements permet de définir une notion d'intégrale stochastique en considérant des sommes de Riemann de la forme

$$\sum_p H_{t_p}(a_j^i(t_{p+1}) - a_j^i(t_p)),$$

où les H_{t_p} sont de la forme $H_{t_p} \otimes I$ sur $\Phi^{(K)}_{[0,t_p[} \otimes \Phi^{(K)}_{[t_p,\infty[}$. Cette propriéte d'adaptation est l'équivalent de celle, en théorie classique, de l'intégration stochastique. On définit alors proprement la notion d'une intégrale stochastique quantique par rapport aux bruits quantiques, c'est à dire des intégrales du type

$$\int_0^\infty H_s da_j^i(s),$$

à partir de limite de sommes de Riemann. Nous ne rentrerons pas d'avantage dans les détails concernant la validité de la définition de ces intégrales stochastiques quantiques (condition d'intégrabilité, domnaine des opérateurs, voir [Att08] pour des références complètes...).

Nous allons maintenant décrire rapidement la manière d'obtenir des résultats de dilatations à partir de la solution d'une équation différentielle stochastique.

Equations différentielles stochastiques et dilatations

Soit $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{K+1}$ et $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ l'espace de Fock de multiplicité K, on pose toujours $I = \{1, \ldots, K\}$.

On considère le système couplé $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbf{\Phi}^{(K)}$. Comme état de référence sur $\mathbf{\Phi}^{(K)}$, on prend *l'état vide* défini de la manière suivante. On définit l'élément Ω de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ par

$$\Omega(\sigma) = \mathbf{1}_{\sigma=\emptyset},$$

pour tout $\sigma \in \Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+)$. Le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par Ω est alors appeleé état vide (*ground* or *vacuum* state en anglais). Le cadre des équations différentielles stochastiques quantiques est l'étude des équations de la forme

$$dU_t = \sum_{0 \le i,j \le K} L_j^i U_t \, da_j^i(t), \tag{1.31}$$

où L_j^i sont des opérateurs sur $\mathcal{H}_0$. On dit qu'un processus d'opérateurs $(U_t)_t$ est solution de (1.31) sur un domaine $\mathcal{D}$ si pour tout f de $\mathcal{D}$

$$U_t f = U_0 f + \left[\sum_{0 \le i,j \le K} \int_0^t L_j^i U_s da_j^i(s) \right] f.$$

Le théorème suivant permet de répondre aux questions d'existence et d'uncité pour ce type d'équations ([HP84]).

Théorème 1.8 *L'équation* (1.31) *admet une unique solution* (U_t) *définie sur le domaine exponentiel. Si, de plus, il existe un opérateur* H *auto-adjoint sur* $\mathcal{H}_0$ *et des opérateurs* S^i_j, $i, j \in I$ *tels que la matrice* $(S^i_j)_{i,j\in I}$ *soit unitaire et des opérateurs* L_i, $i \in I$ *tels que*

1. $L^0_0 = -(iH + \frac{1}{2}\sum_{i\in I} L^\star_i L_i)$
2. $L^0_i = L_i$
3. $L^i_0 = -\sum_{k\in I} L^\star_k S^k_i$
4. $L^i_j = S^i_j - \delta_{ij} I$,

alors l'équation (1.31) *admet une unique solution* (U_t) *constituée d'opérateurs unitaires.*

On peut alors énoncer le théorème concernant le résultat de dilatation.

Théorème 1.9 *Soit* (U_t) *un processus solution de l'équation* (1.31) *satisfaisant les conditions* $(1, 2, 3, 4)$ *du théorème* 1.8*, alors pour tout opérateur* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ *et tout état* ρ *de* $\mathcal{H}_0$ *on a*

$$Tr\Big[U_t(\rho \otimes |\Omega\rangle\langle\Omega|)U^\star_t\,(X \otimes I)\Big] = Tr[e^{t\mathcal{L}}(\rho)X\Big],$$

avec

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\Big(2L_i\rho L^\star_i - \rho L^\star_i L_i - L^\star_i L_i \rho\Big)$$

Ce théorème répond donc de façon positive au problème de dilatation. Il faut souligner que ce théorème reste valide lorsque l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$ est séparable. Le lecteur intéressé pourra consulter [Att08].

Remarque : La notation L^i_j (avec les indices en haut et en bas) dans l'expression de l'équation différentielle stochastique est la notation communément utilisée (elle correspond à la notation des bruits quantiques). Dans les différents articles, nous avons choisi la notation L_{ji} et nous conserverons cette notation dans la suite de notre propos. Une telle notation correspond à la notation habituelle des matrices (indice de ligne et de colonne) et dans la suite nous allons considérer les unitaires décrivant les interactions comme des matrices à valeurs opérateurs (de la même manière que celle utilisée pour décrire l'unitaire U dans l'exemple introduisant la notion d'application complètement positive). La correspondance est donc la suivante $L^i_j \leftrightarrow L_{ji}$ (cette remarque n'aura plus lieu lorsque nous nous intéresserons aux trajectoires quantiques dans le chapitre 2 car il n'y aura plus de confusions possibles).

Dans la suite, nous écrirons donc les équations différentielles stochastiques quantiques sous la forme

$$dU_t = \sum_{0\le i,j\le K} L_{ji}U_t\, da^i_j(t). \tag{1.32}$$

Les résultats des théorèmes 1.8 et 1.9, exposés ci-dessus, concernent le cadre "continu" de l'étude des systèmes quantiques ouverts. Nous allons introduire maintenant une version discrète de ces modèles.

1.3 Interactions quantiques répétées

Les résultats exposés dans cette section sont basés sur les travaux de Stéphane Attal et Yan Pautrat dans l'article [AP06]. Nous allons décrire un modèle discret d'interaction entre un petit système et un cas particulier d'environnement.

Dans ce modèle, l'environnement qui interagit avec un petit système $\mathcal{H}_0$ est constitué d'une chaîne infinie de petits systèmes quantiques. Chaque partie de l'environnement est supposée identique et indépendante des autres copies. L'hypothèse d'indépendance est appelée hypothèse markovienne.

Chaque copie, représentée par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, interagit avec $\mathcal{H}_0$ pendant un intervalle de temps h. Lorsqu'une copie a terminé son interaction, on la considère isolée de l'expérience, et la copie suivante vient interagir avec le petit système et ainsi de suite. Physiquement, on peut imaginer un atome excité de façon successive par des photons. Ce modèle est également à la base de l'étude des trajectoires quantiques discrètes que nous étudierons dans la section 1.4.

Dans cette section, nous exposons les résultats primordiaux, démontrés par Attal-Pautrat qui font le lien entre les modèles d'interaction décrits par des équations différentielles stochastiques et la limite ($h \to 0$) des modèles que nous allons présenter. Ces résultats d'approximation sont une justification physique, intuitive et rigoureuse des modèles d'interactions entre un petit système et un espace de Fock.

Cette approche, adaptée à la théorie de la mesure quantique, sera à la base de celle que nous adopterons pour établir les modèles de trajectoires quantiques dans le chapitre 2.

1.3.1 Modèle discret

On considère une interaction entre un système $\mathcal{H}_0$ et une chaîne infinie de système $\mathcal{H}$, chaque système interagissant avec $\mathcal{H}$ pendant une durée h.

Espace d'état

Comme la chaîne est supposée infinie, l'espace d'état qui permet de décrire ce principe d'interactions répétées est le produit tensoriel

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \\ &= \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k, \end{aligned} \tag{1.33}$$

où $\mathcal{H}_k \simeq \mathcal{H}$ correspond à la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$. Dans la suite nous considérerons $\mathcal{H}_k \simeq \mathbb{C}^{K+1}$ et nous supposerons que $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^{N+1}$. Pour décrire de façon précise l'espace $\mathbf{\Gamma}$, définissons

le produit tensoriel dénombrable

$$\mathbf{T\Phi^{(K)}} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

Cet espace sera appelé *bébé Fock* (*Toy Fock space* en anglais).

On fixe une base $(X_i)_{0\leq i\leq K}$ et on note $X^0 = \Omega$. L'espace $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$ est alors l'espace de Hilbert défini à partir de la suite stabilisatrice Ω. Cela signifie qu'une base orthonormée de $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$ est décrite par la famille

$$\mathcal{B}_\infty = \{X_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}\},$$

où l'ensemble $\mathcal{P}$ correspond à l'ensemble de tous les sous ensemble de la forme

$$\{(n_1, i_1), \ldots, (n_k, i_k)\},$$

avec $k \in \mathbb{N}^\star$, les termes n_i sont des entiers deux à deux distincts et les termes i_j sont des entiers de $\{1, \ldots, K\}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Un élément X_σ de $\mathcal{B}_\infty$ représente alors le vecteur

$$\Omega \otimes \ldots \otimes \Omega \otimes X_{i_1} \otimes \ldots \Omega \otimes \ldots \otimes \Omega \otimes X_{i_2} \otimes \ldots$$

où le terme X_{i_j} apparaît à la $n_j{}^{\text{ème}}$ place dans le produit tensoriel, c'est à dire dans la $n_j{}^{\text{ème}}$ copie de $\mathcal{H}$. Tout élément f de $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$ s'écrit donc :

$$f = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}} f(\sigma) X_\sigma.$$

Pour clore la description de la structure de l'espace $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$, nous allons décrire les opérateurs de base sur cet espace, nous allons notamment définir les bruits quantiques discrets. Pour cela on considère les opérateurs suivants sur $\mathcal{H}$ définis sur la base $\{X_0, \ldots, X_K\}$:

$$a^i_j X_k = \delta_{ki} X_j.$$

Ce sont les opérateurs de la base canonique de $\mathbb{M}_{K+1}(\mathbb{C})$. On prolonge de façon naturelle ces opérateurs sur $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$ en considérant les opérateurs $a^i_j(k)$ qui agissent comme a^i_j sur la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$ et comme l'opérateur identité sur le reste du produit tensoriel. On peut remarquer notamment que la famille d'opérateurs $\{a^i_j(k); k \in \mathbb{N}^\star\}$ forme une base de l'algèbre $\mathbf{T\Phi^{(K)}}$.

Dans toute la suite nous poserons $\Omega = X_0$ et l'état de référence de l'espace $\mathcal{H}$, caractéristique de la chaîne, sera l'état $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$.

Evolution

Pour décrire le principe d'évolution nous reprenons rapidement la description de l'interaction entre deux systèmes. On considère une interaction entre deux systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ pendant un intervalle de temps h. L'évolution est donc décrite par un unitaire $U = U(h)$ (pour le reste de cette sous-section nous ne spécifierons plus le paramètre h, il apparaîtra à nouveau lorsque l'on étudiera les problèmes de convergence). Dans la représentation de Schrödinger, son action sur les états de $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ est donnée par

$$\rho \longmapsto U\,\rho\,U^\star.$$

Pour décrire cette interaction sur l'espace $\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$, on définit l'opérateur U_1 qui agit comme U sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ et comme l'opérateur identité sur toutes les autres copies de $\mathcal{H}$. Par conséquent si $\tilde{\rho}$ désigne l'état de référence sur $\mathbf{\Gamma}$, après la première interaction, l'état devient

$$U_1\,\tilde{\rho}\,U_1^\star$$

Décrivons de la même manière la k^{ème} interaction. On considère l'opérateur unitaire U_k qui agit comme U sur $\mathcal{H}_0$ tenseur $\mathcal{H}_k$ la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$ et qui agit comme l'opérateur identité sur le reste du produit tensoriel. Cet opérateur agit sur les états de la même manière

$$\tilde{\rho} \longmapsto U_k\,\tilde{\rho}\,U_k^\star.$$

La succession d'interaction est alors décrite par la suite d'opérateur V_k définie par la formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1} & = & U_{k+1}V_k \\ V_0 & = & I \end{array} \right. \tag{1.34}$$

L'effet sur les états de $\mathbf{\Gamma}$ est donc

$$\tilde{\rho} \longmapsto V_k\,\tilde{\rho}\,V_k^\star.$$

On définit donc la famille d'opérateurs (j_k) agissant sur les états de $\mathbf{\Gamma}$

$$j_k(\tilde{\rho}) = V_k\,\tilde{\rho}\,V_k^\star;$$

cela définit donc la dynamique discrète sur $\mathbf{\Gamma}$, décrivant les interactions quantiques répétées.

On peut alors exprimer les opérateurs (U_k) et (V_k) en fonction des bruits quantiques $(a_j^i(k))$. Concernant la définition de U (qui permet de définir ensuite les U_k), comme opérateur sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, il peut s'écrire sous la forme

$$U = \sum_{0\leq i,j\leq K} U_{ji} \otimes a_j^i,$$

où les U_{kl} sont des opérateurs sur $\mathcal{H}_0$ (les U_{kl} correspondent aux coefficients de la matrice $U = (U_{kl})$ écrite par bloc dans une base adéquate, de la même manière que dans la section 1.2.2). Il est alors facile de voir que

$$U_k = \sum_{0\leq i,j\leq K} U_{ji} \otimes a_j^i(k).$$

La formule de récurrence donnant (V_k), peut s'écrire

$$\begin{cases} V_{k+1} &= \displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq K} U_{ji}V_k\ a_j^i(k+1) \\ V_0 &= I \end{cases} \tag{1.35}$$

Il s'agit maintenant de décrire les transformations successives subies par le petit système et d'établir l'analogue des évolutions lindbladiennes dans ce cadre.

Semi-groupe d'évolution discret

Comme dans le cas continu, nous allons montrer que le modèle d'interactions quantiques répétées donne naissance à un semi-groupe discret d'applications complètement positives et que réciproquement, si on se donne un tel semi-groupe, on peut l'obtenir à l'aide d'un schéma d'interactions répétées.

A partir de la description précédente on considère un petit système $\mathcal{H}_0$ en contact avec une chaîne infinie de système quantique. On fixe un état initial ρ sur le petit système $\mathcal{H}_0$ et l'état $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ sur $\mathcal{H}$. On rappelle que $\Omega = X_0$ et que X_0 désigne le premier vecteur de la base orthonormée de $\mathcal{H}$ que nous avons évoquée précédemment. L'état initial sur le petit système couplé avec la chaîne est donc

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \beta.$$

Après k interactions, on a alors

$$\tilde{\mu}_k = j_k(\tilde{\mu}) = V_k(\tilde{\mu})V_k^\star.$$

On désigne ici par $\mathbf{E}_0(\tilde{\eta})$ la trace partielle sur $\mathcal{H}_0$ d'un état $\tilde{\eta}$ du système couplé. On définit donc la famille d'applications T_k sur l'ensemble des états de $\mathcal{H}_0$ par

$$\rho_k = T_k(\rho) = \mathbf{E}_0\left[j_k\left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \beta\right)\right], \tag{1.36}$$

pour tout état ρ de $\mathcal{H}_0$. La famille (T_k) définit donc une dynamique discrète sur $\mathcal{H}_0$. Le théorème suivant est l'équivalent discret des théorèmes 1.5 et 1.9, il est prouvé en détails dans [Att08].

Théorème 1.10 *Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille d'applications définies sur les états de $\mathcal{H}_0$ par (1.36). Cette famille d'applications forme un semigroupe d'applications complètement positives sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, il existe alors une application complètement positive l telle que*

$$T_k = l^k.$$

Réciproquement, soit (l^k) un semi-groupe d'opérateurs complètement positifs sur $\mathcal{H}_0$ telle que $l(I) = I$, alors il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ équipé d'un état β et il existe un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ définissant une dynamique (j_k) sur

$$\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$$

telle que

$$l^k(\rho) = \mathbf{E}_0 \left[j_k \left(\rho \otimes \bigotimes_{k \geq 0} \beta \right) \right]$$

pour tout entier k positif et tout état ρ de $\mathcal{H}_0$.

1.3.2 Convergence vers le modèle continu

Les résultats de cette section sont basés sur les résultats de convergence de Attal-Pautrat ([AP06],[AP05]). Nous allons établir ici le fait qu'une interaction entre un petit système $\mathcal{H}_0$ et un espace de Fock $\mathbf{\Phi}^K$, décrite par une équation différentielle stochastique, peut être obtenue comme limite d'interactions quantiques repétées lorsque le temps d'interaction h tend vers 0.

On reprend les notations de la section 1.2 concernant l'espace de Fock $\mathbf{\Phi}^{(K)}$. En particulier en ce qui concerne les processus (χ_t^i) pour $i \in I = \{1, \ldots, K\}$ et les différents bruits quantiques $(a_j^i(t))$. On rappelle notamment que l'espace de Fock de multiplicité K est décrit dans l'interprétation de Guichardet par

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} = L^2(\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+),$$

où $\Omega^{(K)}(\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n^{(K)}(\mathbb{R}^+)$.

Convergence

La première étape consiste à identifier le bébé Fock $\mathbf{T\Phi}^{(K)}$ comme un sous espace de l'espace de fock $\mathbf{\Phi}^K$. On prend en compte désormais le paramètre h et on procède de la manière suivante. On considère la subdivision $\Pi = \{kh, k \in \mathbb{N}^\star\}$, on peut alors identifier

$$\mathbf{\Phi}^{(K)} \simeq \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{\Phi}^{(K)}_{[(k-1)h,(k)h[}.$$

Ici le produit tensoriel est défini à partir de la suite stabilisatrice $(\Omega)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $i \in I$, on définit

$$\begin{aligned}
X_i(k) &= \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\chi^i_{kh} - \chi^i_{(k-1)h}\right) \in \mathbf{\Phi}^{(K)}_{[(k-1)h,(k)h[} \\
a^i_0(k) &= \frac{1}{\sqrt{h}}\left(a^i_0(kh) - a^i_0((k-1)h)\right) \circ P_{1]} \\
a^i_j(k) &= P_{1]} \circ \left(a^i_j(kh) - a^i_j((k-1)h)\right) \circ P_{1]} \\
a^0_i(k) &= P_{1]}\frac{1}{\sqrt{h}}\left(a^0_i(kh) - a^0_i((k-1)h)\right) \\
a^0_0(k) &= P_{0]}
\end{aligned}$$

où pour tout $i \in \{0,1\}$ l'opérateur $P_{i]}$ correspond au projecteur orthogonal sur $L^2(\Omega^K_i(\mathbb{R}^+)$. Rappelons que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des σ de la forme $\sigma = \{(n,i_1),\ldots,(n_k,i_k)\}$ où les n_i sont des entiers deux à deux distincts et les i_j sont des éléments de I. On définit X_σ de la même manière que dans $\mathbf{T\Phi}^{(K)}$, c'est à dire que l'on pose

$$X_\sigma = \Omega \otimes \ldots \otimes \Omega \otimes X_{i_1}(n_1) \otimes \Omega \otimes \ldots \otimes \Omega X_{i_2}(n_2) \otimes \Omega \ldots$$

avec $\sigma \in \mathcal{P}$.

On définit alors $\mathbf{T\Phi}^{(K)}(\Pi)$ le sous ensemble des fonctions $f \in \mathbf{\Phi}^{(K)}$ qui sont de la forme

$$f = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}} f(\sigma)X_\sigma.$$

Il est alors clair que $\mathbf{T\Phi}^{(K)}(\Pi) \simeq \mathbf{T\Phi}^{(K)}$ (on peut montrer plus généralement que ce résultat d'isomorphisme est valable pour toute subdivision dénombrable). Dans [AP06], Attal-Pautrat montrent que les fonctions $X^i(k)$ et les opérateurs correspondent aux fonctions et opérateurs de base du bébé Fock $\mathbf{T\Phi}^{(K)}$ (bruits quantiques discrets).

On peut donc définir les interactions quantiques répétées sur $\mathbf{T\Phi}^{(K)}(\Pi)$; le temps d'interaction est donc h (nous prenons en compte ici ce paramètre). L'opérateur unitaire U décrivant la dynamique sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ dépend de h, il satisfait

$$U = U(h) = \sum_{0\le i,j\le K} U_{ji}(h) \otimes a^i_j.$$

En considérant les extensions $U_k(h)$, on définit donc la dynamique V_k par récurrence

$$\left\{\begin{aligned}
V_{k+1} &= \sum_{0\le i,j\le K} U_{ji}(h)V_k a^i_j(k+1) \\
V_0 &= I
\end{aligned}\right. \tag{1.37}$$

Dans la suite nous noterons P_Π, la projection orthogonale de $\mathbf{\Phi}^{(K)}$ dans $\mathbf{T\Phi}^{(K)}(\Pi)$. On a alors le résultat suivant qui est essentiel dans tous les résultats exposés dans les articles de cette thèse.

Théorème (Attal-Pautrat [AP06]) 1.11 *Pour tout $i, j \in I \cup \{0\}$, on définit $\varepsilon_{ij} = 1/2(\delta_{0i} + \delta_{0j})$. Supposons qu'il existe des opérateurs $L_{ji} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, $j, i \in I \cup \{0\}$ tels que*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{0 \leq i,j \leq K} \left\| \frac{U_{ji}(h) - \delta_{ij} I}{h^{\varepsilon_{ij}}} - L_{ji} \right\| = 0$$

Supposons également qu'il existe un opérateur H auto-adjoint sur $\mathcal{H}_0$ et des opérateurs S^i_j, $j, i \in I$ tels que la matrice $(S_{ji})_{j,i \in I}$ soit unitaire et des opérateurs L_i, $i \in I$ tels que

1. $L_{00} = -(iH + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} L_i^\star L_i)$
2. $L_{i0} = L_i$
3. $L_{0i} = -\sum_{k \in I} L_k^\star S_{ik}$
4. $L_{ji} = S_{ji} - \delta_{ij} I$,

Alors pour tout $t \geq 0$ et pour toutes fonctions ϕ et ψ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^K)$, le processus $(V_{[t/h]})$ défini à partir de la dynamique (1.37) satisfait

$$\lim_{h \to 0} \langle a \otimes e(\phi), \Big(P_\Pi \, V_{[t/h]} \, P_\Pi \Big) \, b \otimes e(\psi) \rangle = \langle a \otimes e(\phi), U_t \; b \otimes e(\psi) \rangle,$$

où (U_t) est l'unique processus d'unitaires sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbf{\Phi}^{(K)}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dU_t &= \displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq K} L_{ji} U_t \, da^i_j(t) \\ U_0 &= I \end{cases}.$$

Ce théorème est un outil puissant pour obtenir la justification et la description de modèles continus. Il est l'un des résultats fondateurs sur lequel nous baserons notre approche des trajectoires quantiques.

Un théorème moins puissant mais qui reste très instructif est celui concernant la convergence du générateur discret de la dynamique vers le lindbladien de la dynamique continu.

Rappelons que si (T_t) désigne un semi-groupe continu d'applications complètement positives, alors il existe un lindbladien $\mathcal{L}$ tel que $T_t = \exp(t\mathcal{L})$ (cf théorème (1.5). En discret, incluant le paramètre h, on peut définir une famille d'opérateurs $T_k^{(h)}$ qui satisfait $T_k^{(h)} = (l(h))^k$ où $l(h)$ est une application complètement positive qui dépend de h. On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.12 *Supposons qu'il existe des opérateurs L_i pour $i \in I$ et un opérateur auto-adjoint H sur $\mathcal{H}_0$ tels que*

1. $U_{00}(h) = I - h(iH + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} L_i^\star L_i) + \circ(h)$
2. $U_{i0}(h) = \sqrt{h} L_i + \circ(\sqrt{h})$.

Alors pour tout état ρ de $\mathcal{H}_0$ on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{l(h)(\rho)-\rho}{h}=\mathcal{L}(\rho)$$

où

$$\mathcal{L}(\rho)=-i[H,\rho]+\frac{1}{2}\sum_{i\in I}\Big(2L_i\rho L_i^\star-\rho L_i^\star L_i-L_i^\star L_i\rho\Big).$$

Preuve: Comme nous l'avons vu, on a la décomposition de Krauss pour l'opérateur $l(h)$

$$l(h)(\rho)=\sum_{i=1}^{K}U_{i0}(h)\rho U_{i0}(h)^\star.$$

Ainsi avec les asymptotiques nous avons

$$l(h)(\rho)=\rho+h\Big(L_{00}\rho+\rho L_{00}^\star+\sum_{i=1}^{K}L_i\rho L_i^\star\Big)+\circ(h),$$

avec $L_{00}=-\Big(iH+\frac{1}{2}\sum_{i\in I}L_i^\star L_i\Big)$. Le résultat en découle. □

Il est intéressant de remarquer que l'on obtient à nouveau le même type de résultat dans le cadre des trajectoires quantiques (en moyenne). Nous avons détaillé ce résultat dans l'article [Pel08a].

Nous avons ici décrit les coefficients de l'unitaire $U(h)$ sous forme asymptotique pour faire référence aux notations utilisées dans les articles.

Hamiltonien d'interactions répétées

Dans cette section, nous allons décrire les hamiltoniens typiques d'interactions qui permettent d'obtenir les asymptotiques adéquates pour les unitaires. Ces résultats sont également tirés des travaux de Attal-Pautrat [AP06] et sont plusieurs fois évoqués dans les différents articles de cette thèse.

Rappelons que l'interaction entre deux systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ est donnée par un hamiltonien total H_{tot} décrit par

$$H_{tot}=H_0\otimes I+I\otimes H_{\mathcal{H}}+H_I,$$

où H_0 et $H_{\mathcal{H}}$ sont les hamiltoniens propres des systèmes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ et que H_I est un hamiltonien d'interaction. L'unitaire $U(h)$ décrivant l'interaction pendant un intervalle de temps h est donc décrit par

$$U(h)=\exp(-ihH_{tot}).$$

L'hamiltonien typique d'interaction qui permet d'obtenir les asymptotiques adéquates pour les coefficients de l'unitaire $U(h)$ est donc de la forme ;

$$H_{tot}=H_0\otimes I+I\otimes H_{\mathcal{H}}+\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{i=1}^{K}\big(V_i\otimes a_i^0+V_i^\star\otimes a_0^i\big)+\frac{1}{h}\sum_{1\le i,j\le K}D_{ij}\otimes a_j^i,$$

où les opérateurs V_i sont des opérateurs sur $\mathcal{H}_0$, de même pour les opérateurs D_{ij} satisfaisant $D_{ij} = D_{ij}^\star$.

Dans l'article 4 de cette thèse, nous explicitons les opérateurs définissant l'hamiltonien d'interaction pour étudier un cas particulier de retour à l'équilibre. Il est également interressant d'observer que les termes en $1/h$ ne sont pas évoqués dans les articles car ils ne contribuent pas aux résultats que nous avons obtenus.

Nous terminons ce chapitre avec une petite introduction à la notion de contrôle qui sera reprise plus largement dans le chapitre 2 concernant les trajectoires quantiques controlées.

1.3.3 Interactions quantiques répétées avec contrôle

Dans cette section, nous introduisons la notion de contrôle dans la description de l'évolution des systèmes quantiques ouverts. Il s'agit ici de considérer des modèles d'interactions entre systèmes quantiques ouverts dont l'évolution peut être modifiée au cours de l'expérience par une action extérieure. Le choix d'une action de contrôle s'appellera une stratégie.

Un exemple utilisé fréquement en optique quantique est l'excitation d'un atome par un laser, le contrôle s'effectue alors par la modification de l'intensité du laser. Dans le cas où le contrôle ne dépend pas de l'évolution de l'expérience, le contrôle est dit déterministe (augmentation ou diminution de la pression, de la chaleur, modification progressive de l'intensité du laser...). Nous verrons, dans ce cas, que les résultats concernant l'évolution des systèmes quantiques ouverts peuvent être justifiés à l'aide d'un principe d'interactions répétées. Cependant, de nombreuses situations nécessitent que le contrôle dépende de l'expérience. On peut alors parler de contrôle stochastique, notamment dans le cas où l'évolution est perturbée de manière aléatoire comme nous le verrons dans le chapitre 2. Les résultats concernant l'évolution dépendent alors fortement de l'aléa et ne découlent pas des modèles déjà évoqués.

Notre but, ici, est d'obtenir principalement des résultats concernant des stratégies de contrôle déterministe. Outre le fait qu'il n'englobe pas le cas du contrôle stochastique, nous n'avons pas la prétention d'exposer les résultats avec le minimum d'hypothèse (surtout pour l'étude des modèles continus en temps). Notre démarche sera d'abord d'établir les bases de la théorie du contrôle déterministe dans le cadre du modèle d'interactions répétées. La description des modèles discrets nous permettra ensuite, dans la même veine que les résultats de convergence d'Attal-Pautrat, de décrire des modèles continus obtenus comme limite.

Interactions quantiques répétées avec contrôle

Dans un modèle d'interaction (continu ou discrète), un contrôle a pour effet de modifier les paramètres de l'expérience. Dans la description des interactions quantiques répétées, nous pouvons considérer deux types d'interactions :

1. soit l'état de référence de la chaîne est modifié à chaque interaction.
2. soit l'unitaire décrivant l'interaction est modifié à chaque étape

L'utilisation de la représentation G.N.S nous permet en réalité de ne considérer que le deuxième type d'interactions (nous ne décrirons pas la représentation G.N.S car nous ne l'utilisons pas, le lecteur intéressé pourra consulter [KR97a]). Nous allons donc décrire le principe d'interactions répétées dans lequel on modifie l'unitaire à chaque interaction. On considère donc un petit système $\mathcal{H}_0$ en contact avec une chaîne infinie de systèmes $\mathcal{H}$. L'espace d'état est donc l'espace

$$\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \mathcal{H}.$$

Chaque système $\mathcal{H}$ est dans l'état vide $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$, où Ω est le premier vecteur d'une base orthonormée de $\mathcal{H}$. On considère un état initial ρ sur $\mathcal{H}_0$, de sorte que l'état inital sur le système couplé $\mathbf{\Gamma}$ est

$$\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \beta.$$

L'opérateur unitaire U_k qui décrit la k^{ème} interaction dépend donc du temps d'interaction h et d'un paramètre u_{k-1} décrivant la stratégie de contrôle ; ce paramètre dépend également du temps d'interaction. On décrit alors U_k de la manière suivante

$$U_k = U_k(h, u_{k-1}(h)).$$

On peut remarquer que si u_k est constant pour tout k, on retrouve le modèle "classique" des interactions quantiques répétées sans contrôle. L'opérateur U_k agit donc comme un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}_0$ tenseur la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$ et comme l'opérateur identité ailleurs. La suite $\mathbf{u} = (u_k)$ s'appelle la *stratégie* de contrôle. La suite d'interactions est donc définie par la suite d'opérateurs V_k définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1}^{\mathbf{u}} & = & U_{k+1}(h, u_k(h))V_k^{\mathbf{u}}, \\ V_0 & = & I. \end{array} \right. \tag{1.38}$$

En reprenant la base des bruits quantiques discrets, on a une expression de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1} & = & \displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq K} U_{ji}(k+1, h, u_k(h))V_k a_j^i(k+1), \\ V_0 & = & I. \end{array} \right. \tag{1.39}$$

A partir de cette description nous allons pouvoir établir des résultats de convergence vers des modèles continus d'évolution en présence de contrôle.

Evolution lindbladienne de $\mathcal{H}_0$ en présence de contrôle

Il y a un premier point à souligner dans la description précédente qui concerne le fait qu'il n'y a plus d'homogénéité en temps. En effet, ici, les coefficients $U_{ji}(k+1, h, u_k(h))$ dépendent de l'étape $k+1$ où ils interviennent dans la définition de U_{k+1}. Les résultats de convergence de Attal-Pautrat ne peuvent donc pas être appliqués directement.

Dans cette section nous allons donc établir des résultats concernant seulement les générateurs des semi-groupes d'évolutions, nous ne traiterons pas la convergence vers les équations différentielles stochastiques quantiques (pour deux raisons, d'une part car les calculs seraient très lourds et très techniques et d'autre part car nous n'avons pas besoin de tels résultats pour nos résultats concernant la théorie du contrôle).

Les asymptotiques que nous allons donner sont cependant fortement inspirées des travaux de Attal-Pautrat. Sans contrôle, nous avons vu que les coefficients $U_{ji}(h)$ devaient satisfaire

$$\begin{aligned} U_{00}(h) &= I - h(iH + \frac{1}{2}\sum_{i\in I} L_i^\star L_i) + \circ(h) \\ U_{i0}(h) &= \sqrt{h}L_i + \circ(\sqrt{h}), \end{aligned} \tag{1.40}$$

où les L_i et H sont des opérateurs sur $\mathcal{H}_0$.

Avec contrôle, nous allons supposer plus généralement qu'il existe des fonctions $L_i(.,.)$ et une fonction $H(.,.)$ C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ ainsi qu'une fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} U_{00}(k+1,h,u_k(h)) &= I - h(iH(kh,u(kh)) + \frac{1}{2}\sum_{i\in I} L_i^\star(kh,u(kh))L_i(kh,u(kh))) + \circ(h) \\ U_{i0}(h) &= \sqrt{h}L_i(kh,u(kh)) + \circ(\sqrt{h}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Nous supposerons également que les $\circ$ sont uniformes en k. Les condition que nous imposon, ici, sont l'extension naturelle, au cas dépendant du temps, des résultats établis par Attal-Pautrat dans [AP06]. Cela nous permet donc d'introduire le facteur contrôle.

Nous pouvons donc décrire la dynamique des interactions quantiques répétées avec contrôle. On définit pour tout état initial ρ sur $\mathcal{H}_0$

$$\tilde{\rho}_k = V_k(\rho \otimes \bigotimes_{n\geq 0} \beta)V_k^\star,$$

et

$$\rho_k = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_k], \tag{1.42}$$

où $\mathbf{E}_0$ désigne toujours la trace partielle sur $\mathcal{H}_0$. On peut alors montrer que

$$\rho_{k+1} = \mathbf{E}_0[U_k(h,u_k(h)(\rho_k \otimes \beta)U_k^\star(h,u_k(h))]$$

Nous avons donc la version suivante du théorème 1.11 avec contrôle (il s'agit d'une conséquence du théorème 6 et 9 de l'article [Pel08d], ce théorème peut cependant être démontré de manière directe).

Théorème 1.13 *Supposons qu'il existe*

1. *une fonction $H(.,.)$ de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans les opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}_0$*

2. *des fonctions* $L_i(.,.)$, $i \in \{1, \ldots, K\}$, *de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans les opérateurs sur* $\mathcal{H}_0$
3. *une fonction* u *de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, *les opérateurs unitaires* $U_{k+1}(h, u_k(h) = (U_{ji}(k, h, u_k(h))_{0 \leq i,j \leq K}$ *satisfassent*

$$\begin{aligned} U_{00}(k+1, h, u_k(h)) &= I - h(iH(kh, u(kh)) + \frac{1}{2}\sum_{i \in I} L_i^\star(kh, u(kh))L_i(kh, u(kh))) + \circ(h) \\ U_{i0}(h) &= \sqrt{h}L_i(kh, u(kh)) + \circ(\sqrt{h}). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Alors la suite d'états (ρ_k) *sur* $\mathcal{H}_0$ *définie par*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_{k+1} &=& \mathbf{E}_0[U_k(h, u_k(h)(\rho_k \otimes \beta)U_k^\star(h, u_k(h))] \\ \rho_0 &=& \rho \end{array} \right. \tag{1.44}$$

satisfait

$$\lim_{h \to 0} \rho_{[t/h]} = \mu_t,$$

où (μ_t) *est la solution de l'équation maîtresse*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\mu_t &=& \mathcal{L}(t, u(t))(\mu_t)dt \\ \mu_0 &=& \rho, \end{array} \right. \tag{1.45}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, u(t))(\rho) = &-i[H(t, u(t), \rho] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i \in I}\Big(2L_i(t, u(t))\rho L_i^\star(t, u(t)) - \rho L_i^\star(t, u(t))L_i - L_i(t, u(t))L_i^\star(t, u(t))\rho\Big), \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$.

En particulier, l'équation maîtresse dans ce cas là s'exprime sous la forme

$$\frac{d\mu_t}{dt} = \mathcal{L}(t, u(t))(\mu_t).$$

Ceci constitue donc une généralisation de l'équation maîtresse abordée dans la section 1.2.2.

Dans la prochaine section, nous allons aborder la notion de mesures quantiques répétées. Il s'agit d'introduire le principe de mesure indirecte dans le cadre des interactions répétées.

1.4 Mesures quantiques répétées

Cette section constitue donc nos premiers pas dans la théorie des trajectoires quantiques, elle concerne la définition des trajectoires quantiques discrètes. Une telle notion permet de décrire, dans le cadre des interactions répétées, l'évolution de l'état du petit système ; évolution perturbée par une mesure extérieure.

Nous abordons ici le modèle de base qui est à l'origine des résultats qui serons présentés dans le chapitre 2. On considère donc un petit système en contact avec une chaîne infinie ; la mesure est alors effectuée sur chaque copie de la chaîne après chaque interaction.

Dans un premier temps, on présente une première notion d'état aléatoire et nous justifions pourquoi la mesure n'est pas effectuée directement sur le petit système. Dans un deuxième temps, on décrit proprement le modèle des mesures répétées et on introduit l'espace de probabilité qui permet de décrire les trajectoires quantiques discrètes à l'aide de chaînes de Markov.

1.4.1 Réduction du paquet d'ondes

Dans cette section, nous cherchons à motiver le fait d'utiliser un principe d'interaction pour étudier l'évolution de systèmes quantiques soumis à une mesure. A partir du postulat de la réduction du paquet d'ondes décrivant l'effet d'une mesure quantique, on met en place les premiers éléments probabilistes et la notion d'état aléatoire. On montre aussi qu'une mesure directe sur le petit système le modifie de façon irrémédiable, d'où l'utilisation d'un principe de mesure indirecte.

Revenons sur la description de la mesure définie dans la section 1.2, nous qualifierons cette mesure de *mesure directe*. On considère donc un système quantique $\mathcal{H}_0$ de dimension finie et un état de référence ρ par rapport auquel on va effectuer la mesure d'une observable A. Supposons que la décomposition spectrale de A soit donnée par ;

$$A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i,$$

on observe λ_i avec une probabilité $p_i = Tr[\rho P_i]$.

Suite à l'observation de λ_i, l'état ρ est modifé et devient :

$$\rho_i^1 = \frac{P_i \rho P_i}{Tr[\rho P_i]}. \tag{1.46}$$

On peut alors considérer l'espace de probabilité $\Sigma = \{0, \ldots, p\}$ muni de la loi de probabilité $\vartheta = \sum_{i=0} p_i \delta_i$. Le principe de réduction du paquet d'ondes permet alors de définir la variable aléatoire ρ^1

$$\begin{array}{rccc} \rho^1 : & \Sigma & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \\ & i & \longmapsto & \rho_i^1 \end{array} \tag{1.47}$$

Cette variable aléatoire, à valeur dans les états de $\mathcal{H}_0$, traduit donc le résultat de la mesure et son effet sur $\mathcal{H}_0$. Il est alors naturel de vouloir effectuer une seconde mesure avec la

même observable (pour pouvoir par exemple connaitre l'évolution de l'énergie ou de la position...).

Admettons que la première mesure nous ait permis d'observer la valeur propre λ_i, le nouvel état de référence du système est donc ρ_i^1. C'est donc dans cet état que l'on effectue la mesure de A. Dans ce cas on observe la valeur propre λ_k avec une probabilité

$$p_k^1 = Tr[\rho_i^1 P_k] = \frac{Tr[P_i \rho P_i P_k]}{Tr[\rho P_i]}.$$

Comme les opérateurs P_i correspondent aux projecteurs spectraux de A, nous avons $P_i P_k = \delta_{ik} P_i$. Cela implique alors que $p_i^1 = 1$ et que $p_k^1 = 0$ pour tout $k \neq i$. Ainsi, le principe de réduction du paquet d'ondes impose à la seconde évolution de satisfaire :

$$\rho_i^2 = \rho_i^1.$$

Par conséquent toute autre mesure de A donnera (avec probabilité 1) le même résultat que la première mesure.

Ainsi le fait d'effectuer une mesure directement sur l'atome ne permet d'obtenir qu'une seule information, ensuite le système est "figé" et ne donnera pas d'informations supplémentaires.

En conséquence pour pouvoir étudier une dynamique significative, on fait interagir le petit système $\mathcal{H}_0$ que l'on veut étudier avec un autre système $\mathcal{H}$ et après l'interaction on effectue une mesure sur $\mathcal{H}$. Le cadre de la théorie des mesures de type continu sera obtenu lors d'une interaction avec un champ continu type : espace de Fock. Le cadre discret sera obtenu, quant à lui, par un modèle type : interactions répétées ; c'est ce que nous décrivons dans la section suivante.

1.4.2 Trajectoires quantiques discrètes, chaîne de Markov quantique

Dans cette section nous définissons le cadre probabiliste permettant de décrire le principe de mesure quantique répétées. Premièrement, on décrit la mesure sur le petit système couplé à la chaîne infinie et ensuite on décrit les transformations subies seulement par le petit système.

Mesures répétées et trajectoires quantiques sur la chaîne infinie

Nous rappelons que l'espace d'état décrivant le principe d'interaction est décrit par

$$\Gamma = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k \geq 0} \mathcal{H}_k,$$

où $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}$ pour tout k. On considère des espaces de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{N+1}$ muni d'une base $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_N\}$ et $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{K+1}$ muni d'une base $\{X_0, \ldots, X_K\}$ où on pose

$\Omega = X_0$. On considère un état initial ρ sur $\mathcal{H}_0$ et un état de référence pour $\mathcal{H}_k$ noté β. Ainsi l'état initial de la chaîne est

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \beta;$$

l'état β peut être choisi quelconque pour l'instant.

Une simple interaction entre $\mathcal{H}_0$ et une copie $\mathcal{H}$ est décrite par un unitaire $U = U(h)$ où h est le temps d'interaction. Cela permet de définir une suite d'opérateurs U_k, où U_k est l'unitaire qui décrit la k^{ème} interaction. On définit donc pour tout $k > 0$ les opérateurs $V_k = U_k U_{k-1} \dots U_1$; le nouvel état après k interactions est alors décrit par

$$\mu_k = V_k(\mu) V_k^\star. \tag{1.48}$$

Décrivons maintenant la mesure d'une observable de $\mathcal{H}_k$. Soit A une observable de $\mathcal{H}$ de la forme

$$A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i.$$

On la prolonge de façon naturelle, comme observable sur $\mathbf{\Gamma}$, de la manière suivante

$$A^{(k)} = I \otimes \bigotimes_{j=1}^{k-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{j\geq k+1} I.$$

De manière équivalente, on considère les prolongements $P_i^{(k)}$ des projecteurs spectraux P_i. Si η décrit l'état de $\mathbf{\Gamma}$, on observe alors la valeur propre λ_i de $A^{(k)}$ dans l'état η avec probabilité

$$Tr\left[\eta P_i^{(k)}\right].$$

Le principe des interactions répétées décrit par (1.48) et la description de la mesure ci-dessus va nous permettre de décrire le principe des mesures répétées.

L'espace de probabilité décrivant les mesures successives est $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$ avec $\Sigma = \{0, \dots, p\}$ (les indices correspondent naturellement aux valeurs propres et la k^{ème} copie de Σ correspond à la mesure à l'étape k). On munit cet espace de la tribu cylindrique $\mathcal{C}$ engendrée par les cylindres de la forme :

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k} = \{\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}^\star} / \omega_1 = i_1, \dots, \omega_k = i_k\}, \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

Définissons, à présent une mesure de probabilité sur $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$. Pour cela on considère

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k(i_1, \dots, i_k) &= I \otimes P_{i_1} \otimes \dots P_{i_k} \otimes \dots \mu_k I \otimes P_{i_1} \otimes \dots P_{i_k} \otimes \dots \\ &= P_{i_k}^{(k)} \dots P_{i_1}^{(1)} \mu_k P_{i_k}^{(k)} \dots P_{i_1}^{(1)}, \end{aligned} \tag{1.49}$$

pour tout $k > 0$ et tout $\{i_1, \dots, i_k\} \in \Sigma^k$. Cet opérateur représente l'état non normalisé obtenu si on avait observé les valeurs propres $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ lors des k premières mesures.

Comme l'opérateur U_k agit de façon non triviale sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_k$ et l'identité ailleurs, il commute avec tous les opérateurs $P_{i_j}^{(j)}$ pour $j < k$. On a donc la propriété de "consistence" suivante

$$\tilde{\mu}_k(i_1, \ldots, i_k) = P_{i_k}^{(k)} U_k \, \tilde{\mu}_{k-1}(i_1, \ldots, i_k) \, U_k^\star \, P_{i_k}^{(k)}. \tag{1.50}$$

C'est cette propriété qui va nous permettre, grâce au critère de consistence de Kolmogorov, de définir une mesure de probabilité sur $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$. Pour cela on définit une mesure de probabilité sur les cylindres

$$P[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}] = P[\text{observer } \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}] = Tr[\tilde{\mu}_k(i_1, \ldots, i_k)]. \tag{1.51}$$

Comme annoncé, cette mesure de probabilité vérifie le critère de Kolmogorov et donc définit une unique mesure de probabilité sur $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$.

Comme $\tilde{\mu}_k(i_1, \ldots, i_k)$ correspond à l'état non normalisé, on définit le processus aléatoire discret $(\tilde{\rho}_k)$ à valeurs dans les états sur $\mathbf{\Gamma}$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho}_k : & \Sigma^{\mathbb{N}^\star} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma}) \\ & \omega & \longmapsto & \dfrac{\tilde{\mu}_k(\omega_1, \ldots, \omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}_k(\omega_1, \ldots, \omega_k)]} \end{array} \tag{1.52}$$

Le processus discret $(\tilde{\rho}_k)$ à valeurs dans les états de $\mathbf{\Gamma}$, ainsi défini, s'appelle *une trajectoire quantique discrète* sur $\mathbf{\Gamma}$. Pour terminer la description de cette suite de variable aléatoire nous avons la proposition suivante concernant le caractère markovien des trajectoires quantiques.

Proposition 1.14 *La trajectoire quantique discrète $(\tilde{\rho}_k)$ définie par* (1.52) *est une chaîne de Markov sur $(\Sigma^{\mathbb{N}^\star}, \mathcal{C}, P)$ à valeur dans les états de $\mathbf{\Gamma}$. De manière plus précise si $\tilde{\rho}_k = \theta_k$ alors l'état aléatoire $\tilde{\rho}_{k+1}$ prend l'une des valeurs suivantes*

$$\frac{P_i^{(k+1)} U_{k+1} \, (\theta_k) \, U_{k+1}^\star P_i^{(k+1)}}{Tr\Big[\theta_k \, U_{k+1}^\star P_i^{(k+1)} U_{k+1}\Big]}, \quad i = 0, \ldots, p \tag{1.53}$$

avec probabilité

$$p_i(\theta_k) = Tr\Big[\theta_k \, U_{k+1}^\star P_i^{(k+1)} U_{k+1}\Big].$$

Cette proposition donne donc une description markovienne des trajectoires quantiques sur le petit système couplé à une chaîne infinie. Comment cela se traduit-il sur le petit système seulement ?

Trajectoires quantiques sur le petit système $\mathcal{H}_0$

De la même manière que pour le cas déterministe décrit dans le chapitre 1, on récupère l'état du système $\mathcal{H}_0$ par l'intermédiaire de la trace partielle. Soit $(\tilde{\rho}_k)$ une trajectoire quantique sur $\mathbf{\Gamma}$ décrite par l'expression (1.52), on pose pour tout $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}^\star}$

$$\rho_k(\omega) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_k(\omega)], \tag{1.54}$$

où $\mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_k(\omega)]$ désigne la trace partielle de $\tilde{\rho}_k(\omega)$ sur $\mathcal{H}_0$. Cela définit donc un processus discret à valeur dans les états de $\mathcal{H}_0$; ce processus est donc naturellement appelé *trajectoire quantique discrète* sur $\mathcal{H}_0$.

L'équivalent de la proposition 1.14 est donc la proposition suivante.

Proposition 1.15 *La trajectoire quantique discrète* (ρ_k) *définie par* (1.54) *est une chaîne de Markov sur* $(\Sigma^{\mathbb{N}^\star}, \mathcal{C}, P)$ *à valeurs dans les états de* $\mathcal{H}_0$*. De manière plus précise si* $\tilde{\rho}_k = \theta_k$ *où* θ_k *est un état sur* $\mathcal{H}_0$*, alors l'état aléatoire* ρ_{k+1} *prend l'une des valeurs suivantes*

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{(I\otimes P_i)\,U\;(\theta_k\otimes\beta)\;U^\star\,(I\otimes P_i)}{Tr\Big[U\;(\theta_k\otimes\beta)\;U^\star\,(I\otimes P_i)\Big]}\right],\quad i=0,\ldots,p \tag{1.55}$$

avec probabilité

$$p_i(\theta_k) = Tr\Big[U\;(\theta_k\otimes\beta)\;U^\star\,(I\otimes P_i)\Big].$$

Dans cette proposition, il faut remarquer que $\mathbf{E}_0$ correspond ici à la trace partielle sur $\mathcal{H}_0$ par rapport à $\mathcal{H}$ et non pas par rapport à toute la chaîne. Finalement cela signifie que pour définir la trajectoire quantique sur $\mathcal{H}_0$, nous aurions pu adopter la description suivante.

Si ρ_k désigne l'état (aléatoire) "réduit" sur $\mathcal{H}_0$ après k interactions et k mesures, on considère alors une simple interaction avec le système $\mathcal{H}$ dans l'état β. Le nouvel état après interaction est

$$U(\rho_k\otimes\beta)U^\star.$$

On mesure alors l'observable

$$I\otimes A = \sum_{i=0}^{p}\lambda_i\, I\otimes P_i.$$

La valeur propre λ_i apparaît avec probabilité $Tr[U(\rho_k\otimes\beta)U^\star\,(I\otimes P_i)]$; ce qui correspond exactement à la description de la proposition précédente. Après observation de λ_i, l'état est modifié et devient

$$\tilde{\rho}_i^{k+1} = \frac{I\otimes P_i\,U\;(\rho_k\otimes\beta)\;U^\star\,I\otimes P_i}{Tr\Big[\rho_k\otimes\beta\;UP_iU\Big]}\;;$$

l'état ρ_{k+1} sur le petit système satisfait alors

$$\rho_{k+1}(i) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_i^{k+1}].$$

Finalement, cette description peut sembler plus intuitive. Après chaque interaction, le résultat de la mesure du système $\mathcal{H}$ entraîne une modification aléatoire de $\mathcal{H}_0$. Ensuite, une nouvelle copie de $\mathcal{H}$ peut alors interagir.

La description à l'aide du principe d'interactions répétées permet cependant une description plus précise de l'espace de probabilité décrivant les modifications aléatoires successives.

Nous avons donc décrit de façon rigoureuse un modèle concret de mesure en temps discret. L'idée pour obtenir les modèles correspondant en temps continu est de traduire les résultats de convergence de Attal-Pautrat en termes de trajectoires quantiques. C'est le sujet du chapitre 2 qui présente les différents résultats obtenus dans les articles de cette thèse.

Chapitre 2

Trajectoires quantiques, équations de Schrödinger stochastiques

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats que nous avons obtenus et qui sont exposés dans les articles [Pel08a],[Pel08b],[Pel08d],[AP08] et [Pel08c] (cf deuxième partie).

L'idée directrice qui a permis d'obtenir de tels résultats est l'étude du comportement asymptotique des chaînes de Markov décrivant le principe des mesures répétées lorsque h (le temps d'interaction) tend vers 0 (cf chapitre 1, section 1.4.2).

Afin de motiver l'étude des trajectoires quantiques et dans l'objectif de dégager l'intérêt mathématique et physique suscité par cette théorie, nous revenons sur quelques aspects permettant d'établir des premiers modèles de manière heuristique. Il s'agit de présenter, à partir des travaux de Davies, des modèles décrits par des équations différentielles stochastiques. Ces équations sont appelées parfois équations de Belavkin et nous les qualifierons de "classiques". Ce terme "classique" permet de les distinguer vis à vis des extensions que nous présenterons par la suite.

Physiquement, ces modèles classiques décrivent des situations concernant la description d'atomes à 2 niveaux d'énergies.

Plus généralement, une équation différentielle décrivant un modèle de mesures de type continu porte le nom d'équation de Schrödinger stochastique ; les équations de Belavkin sont donc un cas particulier de telles équations.

Soulignons le fait qu'une approche rigoureuse de ces équations peut être envisagée avec l'utilisation de la théorie du "filtrage quantique" ([BGM04],[BL04]). Cette théorie fait appel à des techniques qui nécessitent des outils fins de probabilité non-commutative ([Bar89]).

Notre approche est, elle, basée sur la description des modèles discrets d'interactions et de mesures répétées. A partir de ces modèles, un passage à la limite rigoureux, traduisant le fait que le temps d'interaction tend vers 0, est établi. Cela nous permet donc de décrire des modèles de mesure en temps continu ; nous retrouvons les modèles classiques de Belavkin. On étend ensuite ces résultats dans un cadre plus général : contrôle, bain de chaleur, dimension finie quelconque.

Ces travaux présentent deux intérêts. D'une part, nous obtenons une justification phy-

sique de modèles de mesures quantiques continues à partir de modèles concrets. D'autre part, pour établir ces résultats de convergence, nous utilisons des outils élégants et diversifiés en théorie des processus stochastiques (convergence d'intégrales stochastiques, problèmes de martingales, générateurs de Markov...). Le chapitre 3 sera consacré à la présentation de ces objets et de ces théories probabilistes.

Ce chapitre se divise en trois parties.

Dans la section 2.1, nous revenons sur la description de Davies de l'expérience de résonnance fluorescence et sur les arguments heuristiques qui permettent de dériver les modèles classiques de Belavkin.

Dans la section 2.2, nous décrivons notre approche à l'aide des mesures répétées. Nous traduisons notamment les asymptotiques de Attal-Pautrat en termes de trajectoires quantiques discrètes.

Enfin dans la section 2.3, nous établissons les différents modèles stochastiques justifiés comme limites des trajectoires quantiques discrètes.

2.1 Trajectoires quantiques continues

Dans cette section nous présentons la description de Davies du modèle d'un atome sur lequel on étudie l'émission de photons. Ces travaux vont nous permettre de décrire les *équations de Belavkin classiques* qui permettent de modéliser l'évolution de l'atome. Nous pourrons ensuite aborder les différents problèmes attachés à ces équations.

2.1.1 Resonnance Fluorescence

Dans les années 70, Davies, fut l'un des premiers à décrire l'évolution d'un atome perturbé par la présence d'un compteur de photons. Ces travaux sont basés sur la théorie des algèbres d'opérateurs et le processus qui décrit l'évolution de l'état de l'atome porte parfois le nom de *processus de Davies*. Maassen, Bouten and Guta donnent dans [BGM04] une description rigoureuse de ses résultats en terme de calcul stochastique quantique (le lecteur intéressé pourra aussi consulter pour une approche probabiliste [Bar06], [Bar94], [Bar93a]). Nous reprenons la description de Davies afin de motiver l'intérêt de l'étude des trajectoires quantiques.

Le modèle physique est donc celui d'un atome dirigé par un laser. Ajouté à cela un compteur mesure de façon continue l'émission de photons provenant de l'atome. Les résultats que nous allons exposer sont ceux de l'article [BMK03]. Nous ne rentrerons pas dans les détails concernant les justifications mathématiques car il ne s'agit pas directement de notre propos dans la suite. Concernant ce modèle particulier, il est repris et justifié par nos travaux dans l'article [Pel08d].

Sans mesure, l'évolution de l'atome est décrite par l'équation maîtresse

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{L}(\rho_t),$$

avec

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H,\rho] + i\frac{\Omega}{2}[V+V^\star,\rho] - \frac{1}{2}\{V^\star V,\rho\} + V\rho V^\star.$$

On considère la décomposition suivante $\mathcal{L} = L + \mathcal{J}$ où l'opérateur $\mathcal{J}$ est défini par

$$\mathcal{J}(\rho) = |k_c|^2 V\rho V^\star.$$

Ici le scalaire $|k_c|$ désigne un taux de retour à l'équilibre, c'est une constante de l'expérience.

Le résultat donné par le compteur correspond donc à une suite d'instants $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$: chaque instant correspondant à un photon émis. Comme le nombre de photons détectés peut être arbitraire, l'espace de tous les résultats possibles avant un instant t peut donc être décrit par l'espace de Guichardet

$$\Omega^1([0,t)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega^1_n([0,t))$$

que l'on munit de la mesure $d\sigma$ décrite dans la section 1.2.3. Rappelons que cette mesure est définie à partir de la mesure de Lebesgue sur les simplexes ; ces derniers permettent de définir une tribu notée $\Sigma([0,t))$ sur $\Omega^1([0,t))$.

La description de l'expérience peut alors être modélisée de la manière suivante.

Soit ρ un état décrivant l'état initial du petit système. Conditionnellement à l'observation d'un évènement $E \in \Sigma([0,t))$, Davies a montré que l'état non normalisé au temps t est donné par

$$\mu_t(E) = \int_E W_t(\sigma)(\rho)d\sigma,$$

où lorsque $\sigma = \{t_1, \ldots, t_k\}$, on a

$$W_t(\sigma)(\rho) = \exp((t-t_k)L)\mathcal{J}\ldots\mathcal{J}\exp((t_2-t_1)L)\mathcal{J}\exp(t_1L)(\rho).$$

Cette description signifie qu'à chaque photon détecté l'état subit une transformation $\mathcal{J}$ alors qu'entre chaque instant de détection, il subit une évolution lindbladienne légèrement modifiée (le lindbladien $\mathcal{L}$ est remplacé par L).

D'un point de vue probabilité, en définissant $P^t_\rho[E] = Tr[\mu_t(E)]$ pour tout $E \in \Sigma^t$, on montre que l'on définit une famille de probabilité consistante (P^t_ρ). Cela permet de définir une mesure de probabilité P_ρ sur $\Omega^1(\mathbb{R}^+)$ muni de la tribu Σ^∞.

Dans la section suivante, à partir de cette présentation, nous allons donner une méthode pour dériver une équation stochastique décrivant l'évolution de l'état normalisé.

2.1.2 Equations de Belavkin classiques

Sur l'espace de probabilité $(\Omega^1(\mathbb{R}^+), \Sigma^\infty, P_\rho)$, on définit la variable aléatoire

$$\begin{array}{rccc} \tilde{N}_t : & \Omega^1(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \sigma & \longmapsto & card\,(\sigma \cap [0,t))\,. \end{array} \tag{2.1}$$

Cette variable représente le nombre de photons détectés par le compteur. On définit un processus (ρ_t) à valeurs dans les états

$$\begin{array}{rccc} \rho_t : & \Omega^1(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \longmapsto & \dfrac{W_t(\sigma \cap [0,t))(\rho)}{Tr[W_t(\sigma \cap [0,t))(\rho)]} \end{array} \tag{2.2}$$

Nous ne chercherons pas pour l'instant à justifier les résultats qui vont suivre, ils seront justifiés dans nos travaux par l'approche discrète basée sur les trajectoires quantiques discrètes.

Admettons que les processus (ρ_t) et $(\tilde{N}_t)$ soient reliés par une équation différentielle stochastique

$$d\rho_t = \alpha_t dt + \beta_t d\tilde{N}_t.$$

Il est possible de voir que $d\tilde{N}_t d\tilde{N}_t = d\tilde{N}_t$ et $d\tilde{N}_t dt = 0$ (cf [BB91]). Décrivons un moyen d'obtenir (α_t) et (β_t). Si $t \in \sigma$ alors $d\tilde{N}_t(\sigma) = 1$ donc le terme en dt est négligeable, ainsi

$$\beta_t(\sigma) = \rho_{t+dt}(\sigma) - \rho_t = \frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t.$$

Sinon $t \notin \sigma$ et alors on obtient α_t en différenciant

$$\begin{aligned} \alpha_t(\sigma) &= \frac{d}{ds}_{|s=t} \frac{\exp((s-t)L)(\rho_t)}{Tr[\exp((s-t)L)(\rho_t)]} && (2.3) \\ &= L(\rho_t) - \frac{\rho_t}{Tr[\rho_t]^2} Tr[L(\rho_t)] && (2.4) \\ &= L(\rho_t) + Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]\rho_t. && (2.5) \end{aligned}$$

Ainsi on peut décrire une première équation de Belavkin

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t \right) (d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt).$$

Le processus $\tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$ est une martingale appelée parfois martingale innovatrice. On appellera cette équation : *équation avec sauts*. C'est un processus de comptage dont l'intensité stochastique $t \to \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$ dépend du processus (ρ_t).

Ce qui va suivre va nous permettre d'introduire un autre type d'équation dite *équation diffusive* à partir de l'équation précédente. Nous donnons une approche complètement heuristique sans justification précise (voir [BGM04] pour plus de précisions). Supposons que l'opérateur $\mathcal{J}$ soit défini de la manière suivante

$$\mathcal{J}(\rho) = (k_c V + \frac{1}{\varepsilon})\rho(\overline{k_c} V^\star + \frac{1}{\varepsilon}).$$

On a donc une équation avec sauts dépendant de ε ; on peut l'écrire sous la forme

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t \right) \varepsilon (d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt).$$

On pose $dW_t^\varepsilon = \varepsilon d\tilde{N}_t - dt/\varepsilon$. On a donc

$$dW_t^\varepsilon dW_t^\varepsilon = \varepsilon dW_t^\varepsilon + dt \tag{2.6}$$
$$dW_t^\varepsilon dt = 0 \tag{2.7}$$

On pose

$$W_t = \lim_{\varepsilon \to 0} W_t^\varepsilon.$$

Cela définit un processus de diffusion. En passant à la limite "formelle" ($\varepsilon \to 0$) dans l'équation avec sauts, on obtient une nouvelle équation de la forme

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) + \Big(\rho_t \overline{k_c} V^\star + k_c V \rho_t - Tr[\rho_t \overline{k_c} V^\star + k_c V \rho_t]\rho_t\Big)(dW_t - Tr[\rho_t \overline{k_c} V^\star + k_c V \rho_t]dt).$$

Le processus, défini pour tout t par

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t Tr[\rho_s \overline{k_c} V^\star + k_c V \rho_s]ds,$$

est une martingale ; c'est un mouvement brownien standard. Voila un moyen "d'obtenir" une description des équations de Belavkin classiques. La section suivante expose les problèmes qui apparaissent lorsque l'on cherche à étudier ces équations de manière générale et précise.

2.1.3 Problèmes

Une première remarque concerne évidemment le fait que l'approche présentée dans la section précedente peut paraître un peu artificielle surtout concernant l'équation diffusive. Comme nous l'avons déjà évoqué, des résultats rigoureux peuvent être obtenus avec des techniques de filtrage quantique.

Abordons ces équations d'un point de vue probabiliste ; on peut s'intéresser aux questions générales d'existence et d'unicité d'une solution. Il apparaît que les formulations des équations précédentes présentent plusieurs lacunes.

Dans le cas de l'équation avec sauts par exemple, si on cherche à statuer sur l'existence d'une solution (ρ_t), il faut pouvoir travailler avec le processus qui dirige l'équation. Or ce dernier est lui-même défini à partir de la solution (ρ_t). En effet un processus de comptage est déterminé par son intensité (c'est elle qui détermine la fréquence des sauts) et dans cette situation le processus $(\tilde{N}_t)$ est d'intensité $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$. Le terme $Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]$ marque la dépendance du processus $(\tilde{N}_t)$ vis à vis de (ρ_t) dont on ne connaît pas l'existence. Ainsi, pour considérer (ρ_t) il faut connaître $\tilde{N}_t$, mais pour connaître $\tilde{\tilde{N}}_t$ il faut définir (ρ_t).

Avec la formulation décrite dans la section précédente, on travaille avec un processus de comptage qui n'a pas de définition intrinsèque. Cela empêche donc d'aborder la question de l'existence de la solution de manière cohérente.

Nous verrons en réalité que la notion d'existence d'une solution impose de considérer simultanément l'existence des deux processus car il est impossible de les considérer de manière distincte sans "tourner en rond".

Remarque : Nous aurions pu être tenté de définir $(\tilde{N}_t)$ à partir d'un processus de Poisson standard (N_t). En effet si (X_t) désigne un processus aléatoire croissant alors (N_{X_t}) décrit un processus de comptage d'intensité stochastique X_t. Mais ici pour définir (N_{X_t}) on suppose déjà l'existence de (X_t) et ce n'est pas applicable dans notre situation. Nous verrons que l'on ne peut pas se contenter d'un simple processus de Poisson en dimension 1.

Toujours d'un point de vue général, un autre problème concerne le caractère non Lipschitz des fonctions qui définissent ces équations. En conséquence, il n'est pas possible d'appliquer les théorèmes classiques concernant les équations différentielles stochastiques.

En termes de justifications physiques, ces équations apparaissent de manière relativement artificielle. Même si à partir de l'expression de Davies, considérer un processus de saut peut sembler naturel, le choix d'une telle forme pour l'équation manque d'explications concrètes. En particulier, on ne peut pas définir de modèle hamiltonien pour décrire de tels phénomènes. De plus, la description de modèles plus complexes en dimension supérieure ne semble pas une chose aisée.

On peut également regretter les difficultés techniques nécessaires pour obtenir ces résultats ([BGM04]) par rapport à la description des modèles en temps discret (cf section 1.4 chapitre 1).

2.2 Notre approche

Dans cette section, nous présentons notre approche de la théorie de la mesure quantique de type continu à partir des trajectoires quantiques discrètes. Nous rapprochons cette manière de procéder de celle de Attal-Pautrat qui a permis de justifier l'utilisation du modèle des équations différentielles stochastiques quantiques dans la description des interactions continues.

Cette section est divisée en deux parties.

La première partie traite du comportement asymptotique général d'une trajectoire quantique dans le cas où les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ sont de dimensions finies quelconques.

La seconde partie traite plus particulièrement le cas d'un atome à deux niveaux d'énergie en contact avec une chaîne de spin. Ce cas nous permettra par la suite d'obtenir les équations de Belavkin classiques.

2.2.1 Description des asymptotiques

Le but de cette section est donc de présenter le comportement asymptotique des trajectoires quantiques afin d'obtenir "in-fine" la description de modèles continus en dimension

finie quelconque.

Dans un premier temps, nous donnons une description plus explicite de la chaîne de Markov (ρ_k). Ceci nous permettra dans un deuxième temps de traduire les approximations de Attal-Pautrat en termes de trajectoires quantiques.

Expression explicite de la chaîne de Markov

Considérons une trajectoire quantique (ρ_k) obtenue par mesures répétées de l'observable $A = \sum_{i=0}^{P} \lambda_i P_i$. Pour obtenir une version plus explicite de (ρ_k), on définit

$$\mathcal{L}_i(\rho_k) = \mathbf{E}_0[(I \otimes P_i)\, U\ (\theta_k \otimes \beta)\ U^\star\, (I \otimes P_i)], \quad i = 0, \ldots, p.$$

Cette expression correspond aux états non normalisés succeptibles d'apparaître après la mesure. Chacun apparaît notamment avec probabilité

$$p_i(\rho_k) = Tr[\mathcal{L}_i(\rho_k)].$$

On peut alors décrire la chaîne de Markov (ρ_k) sur $(\Sigma^{\mathbb{N}^\star}, \mathcal{C}, P)$ de la manière suivante :

$$\rho_{k+1}(\omega) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\mathcal{L}_i(\rho_k)(\omega)}{Tr[\mathcal{L}_i(\rho_k)(\omega)]} \mathbf{1}_i^{k+1}(\omega), \tag{2.8}$$

pout tout $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}^\star}$. Ici, on a défini $\mathbf{1}_i^{k+1}(\omega) = \mathbf{1}_i(\omega_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$.

Pour terminer la description de cette chaîne de Markov il suffit donc de calculer $\mathcal{L}_i(\rho)$ pour tout état ρ de $\mathcal{H}_0$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$.

On considère $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ comme état de référence de $\mathcal{H}$; rappelons ici que Ω désigne le premier vecteur de la base de $\mathcal{H}$. L'état β correspond au modèle d'une chaîne où chaque sous-système est à température 0. Pour le calcul des traces partielles, on considère la base adéquate du produit tensoriel décrite dans la section 1.3.1 du chapitre 1 et qui nous a permis de décrire les interactions quantiques répétées.

Exprimons les projecteurs spectraux de $I \otimes A$ dans la base du produit tensoriel. Soit $P_i = (p_{kl}^i)_{0 \le k,l \le N}$ l'expression du projecteur spectral de A dans la base orthonormée de $\mathcal{H}$. Si I désigne l'opérateur identité sur $\mathcal{H}_0$, l'expression de $I \otimes P_i$, dans la base du produit tensoriel, est donnée par $I \otimes P_i = (p_{kl}^i I)_{0 \le k,l \le N}$. Ici nous avons une nouvelle fois exprimé un opérateur sur le produit tensoriel comme une matrice dont les coefficients agissent sur $\mathcal{H}_0$.

Ainsi en considérant $U = (U_{ij})_{0 \le i,j \le N}$, on a

$$\mathcal{L}_i(\rho) = \sum_{0 \le k,l \le N} p_{kl}^i\, U_{k0}\, \rho\, U_{l0}^\star. \tag{2.9}$$

Concernant les probabilités on a alors

$$p_i(\rho) = Tr[\mathcal{L}_i(\rho)] = \sum_{0 \le k,l \le N} p_{kl}^i\, Tr[U_{k0}\, \rho\, U_{l0}^\star]. \tag{2.10}$$

A partir de ces calculs et des approximations de Attal-Pautrat, on peut obtenir le comportement asymptotique des trajectoires quantiques discrètes.

Expression asymptotique de la chaîne de Markov

On introduit le pas de temps $h = 1/n$. L'unitaire U, décrivant l'interaction, dépend alors de ce paramètre et on l'exprime dans la base du produit tensoriel sous la forme $U(n) = (U_{ij}(n))_{0\leq i,j\leq N}$.

D'après les asymptotiques présentées dans la section 1.3.2, il existe un opérateur auto-adjoint H et des opérateurs L_{i0} pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ tels que

$$\begin{aligned} U_{00}(n) &= I - \frac{1}{n}\left(iH + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i L_i^\star\right) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ U_{i0}(n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} L_{i0} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{pour } i > 0. \end{aligned}$$

On notera dans la suite

$$L_{00} = -\left(iH + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_{i0} L_{i0}^\star\right).$$

On applique donc ces résultats aux expressions (2.9) et (2.10) et on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\rho) &= p_{00}^i\,\rho + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\leq k\leq N} \left(p_{k0}^i L_{k0}\,\rho + p_{0k}^i\,\rho\, L_{k0}^\star\right) \\ &\quad + \frac{1}{n}\left[p_{00}^i\left(L_{00}\,\rho + \rho\, L_{00}^\star\right) + \sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^i L_{k0}\,\rho\, L_{l0}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ p^i(\rho) &= p_{00}^i + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left[\sum_{1\leq k\leq N}\left(p_{k0}^i L_{k0}\,\rho + p_{0k}^i\,\rho\, L_{k0}^\star\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{n} Tr\left[\left(p_{00}^i\left(L_{00}\,\rho + \rho\, L_{00}^\star\right) + \sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^i L_{k0}\,\rho\, L_{l0}^\star\right)\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ces approximations sont à la base des résultats établis dans [Pel08a] et [Pel08b] ; ils sont exploités de manière plus complète dans [Pel08c].

Dans la section suivante, nous nous intéressons au modèle d'un atome à deux niveaux d'énergie en contact avec une chaîne infinie de spin.

2.2.2 Atome à deux niveaux d'énergie

Le modèle discret que nous allons étudier ici est une version discrète du modèle continu que nous avons introduit dans la section 2.1.2. C'est le modèle de base qui a inspiré les articles [Pel08a],[Pel08b],[AP08] et [Pel08d]. Il fait également l'objet de nombreuses utilisations pratiques dans le domaine de l'optique physique ([Har03],[HR06]).

Il s'agit donc d'un atome à deux niveaux d'energie en interaction avec une chaîne de spin ; cette situation est modélisée par $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ muni d'une base $\{\Omega, X\}$ et de la base correspondante pour le produit tensoriel (cf section 1.3.2).

Dans ce cas l'expression (2.8) décrite dans la section précédente devient

$$\rho_{k+1} = \frac{\mathcal{L}_0(\rho_k)}{p_0(\rho_k)}\mathbf{1}_0^{k+1} + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_k)}{p_1(\rho_k)}\mathbf{1}_1^{k+1}. \tag{2.12}$$

On définit alors sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}, \mathcal{C}, P)$ les variables aléatoires $(X_k)_{k>0}$ par

$$X_{k+1} = \frac{\mathbf{1}_1^{k+1} - p_1(\rho_k)}{\sqrt{p_0(\rho_k)\, p_1(\rho_k)}}\,. \tag{2.13}$$

Ces variables aléatoires sont centrées et réduites. On peut remarquer que pour k fixé les variables aléatoires $\mathbf{1}$ et X_{k+1} forment une base orthonormée de

$$L^2(\{0,1\}, p_0(\rho_k)\delta_0 + p_1(\rho_k)\delta_1).$$

Ici, la variable $\mathbf{1}$ désigne la variable déterministe telle que $\mathbf{1}(i) = 1$ pour $i \in \{0,1\}$.

Exprimée, maintenant, avec les variables (X_k), la trajectoire quantique (ρ_k) satisfait

$$\rho_{k+1} = \Big(\mathcal{L}_0(\rho_k) + \mathcal{L}_1(\rho_k)\Big)\mathbf{1} + \left(-\sqrt{\frac{p_1(\rho_k)}{p_0(\rho_k)}}\,\mathcal{L}_0(\rho_k) + \sqrt{\frac{p_0(\rho_k)}{p_1(\rho_k)}}\,\mathcal{L}_1(\rho_k)\right) X_{k+1} \tag{2.14}$$

On peut alors appliquer les résultats asymptotiques décrits dans la section précédente. On considère pour cela une observable de la forme $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$. Suivant l'expression des projecteurs spectraux P_i dans la base $\{\Omega, X\}$, on observe essentiellement deux comportements asymptotiques différents. Quitte à permuter les deux projecteurs P_0 et P_1 on peut supposer que $p_{00}^0 \neq 0$.

1. Si $p_{00}^0 = 1$, alors on a $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I - P_1$. L'observable A est donc diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$. On a alors la description asymptotique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\rho) &= \rho + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left[L_{00}\,\rho + \rho\, L_{00}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ \mathcal{L}_1(\rho) &= \frac{1}{n}[L_{10}\,\rho\, L_{10}^\star] + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme L_{00} peut s'écrire sous la forme $L_{00} = -iH + \frac{1}{2}L_{10}L_{10}^\star$ on a

$$p_0(\rho) = 1 - \frac{1}{n}Tr\left[L_{10}\,\rho\, L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.15}$$

$$P_1(\rho) = \frac{1}{n}Tr\left[L_{10}\,\rho\, L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.16}$$

L'équation discrète (2.14) devient alors sous forme asymptotique

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &= \rho_k + \frac{1}{n}\Big(L_{00}\,\rho_k + \rho_k\, L_{00}^\star + L_{10}\,\rho_k\, L_{10}^\star\Big) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \Big(-\rho_k + \frac{L_{10}\,\rho_k\, L_{10}^\star}{Tr[L_{10}\,\rho_k\, L_{10}^\star]} + \circ(1)\Big)\left(\mathbf{1}^{k+1} - \frac{1}{n}Tr[L_{10}\,\rho_k\, L_{10}^\star] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

2. Si $p_{00}^0 \neq 1$, on a $0 < p_{00}^0 < 1$ et de même $0 < p_{00}^1 < 1$ car $P_0 + P_1 = I$ et $p_{00}^0 \neq 0$. Cette situation concerne une observable qui ne serait pas diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(\rho) &= p_{00}^0\,\rho + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(p_{10}^0 L_{10}\,\rho + p_{01}^0\,\rho\,L_{10}^\star\right) \\
&\quad + \frac{1}{n}\left[p_{00}^0(L_{00}\,\rho + \rho\,L_{00}^\star) + p_{11}^0 L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
\mathcal{L}_1(\rho) &= p_{00}^1\,\rho + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(p_{10}^1 L_{10}\,\rho + p_{01}^1\,\rho\,L_{10}^\star\right) \\
&\quad + \frac{1}{n}\left[p_{00}^1(L_{00}\,\rho + \rho\,L_{00}^\star) + p_{11}^1 L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et pour les probabilités

$$\begin{aligned}
p_0(\rho) &= p_{00}^0 + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left(p_{10}^0 L_{10}\,\rho + p_{01}^0\,\rho\,L_{10}^\star\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} Tr\left[p_{00}^0(L_{00}\,\rho + \rho\,L_{00}^\star) + p_{11}^0 L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
p_1(\rho) &= p_{00}^1 + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left(p_{10}^1 L_{10}\,\rho + p_{01}^1\,\rho\,L_{10}^\star\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} Tr\left[p_{00}^1(L_{00}\,\rho + \rho\,L_{00}^\star) + p_{11}^1 L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation discrète devient

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1} &= \rho_k + \frac{1}{n}\Big(L_{00}\rho_k + \rho_k L_{00}^\star + L_{10}\,\rho_k\,L_{10}^\star\Big) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\quad \left(e^{i\theta} L_{10}\rho_k + \rho_k (e^{i\theta} L_{10})^\star - Tr\Big[e^{i\theta} L_{10}\rho_k + \rho_k (e^{i\theta} L_{10})^\star\Big]\rho_k + \circ(1)\right) X_{k+1}.
\end{aligned}$$

Le terme $e^{i\theta}$ s'exprime à partir des coefficients des projecteurs spectraux. L'expression exacte n'a pas d'intérêt dans la suite.

Ces deux équations décrivant le comportement asymptotique des trajectoires quantiques discrètes en dimension 2 apparaissent comme deux équations stochastiques aux différences. Chacune d'elle comporte deux parties :

– Une partie déterministe où apparaît l'expression d'un lindbladien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\rho) &= L_{00}\rho + \rho L_{00}^\star + L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star \\
&= -i[H,\rho] - \frac{1}{2}[2L_{10}\,\rho\,L_{10}^\star - L_{10}^\star L_{10}\,\rho + \rho\,L_{10}^\star L_{10}]. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

– Une autre partie, aléatoire, qui représente la perturbation due à la mesure. Avec l'expression des équations classiques de Belavkin décrites dans la section 2.1.2, on peut aisément intuiter quels modèles on obtiendra à la limite.

Dans la section suivante, on applique les résultats asymptotiques, décrits dans cette section et dans la précédente, pour établir les modèles stochastiques décrivant l'effet d'une mesure indirecte de type continu sur un système quantique.

2.3 Résultats

Cette section est consacrée aux différents résultats obtenus dans les articles présentés dans ce rapport. Les 4 premières parties sont consacrées au modèle de l'atome à deux niveaux d'énergies et la dernière traite des modèles en dimension supérieure.

Dans les deux premières parties, nous donnons un sens précis aux équations de Belavkin classiques. En particulier, nous donnons un sens mathématique précis à l'equation de Belavkin avec sauts et nous exposons les résultats d'existence, d'unicité et d'approximation dans les deux cas classiques.

Les deux sections suivantes présentent deux extensions des cas classiques. La première extension concerne les trajectoires quantiques avec introduction de la théorie du contrôle stochastique. La deuxième extension concerne le cas où la chaîne infinie est à température positive.

Enfin la dernière section concerne la dimension supérieure à 2. Les équations différentielles que nous allons présenter dans cette section apparaîtront comme des généralisations des équations classiques.

Les théories probabilistes utilisées pour démontrer les différents résultats seront présentées dans le chapitre 3. Comme nous l'avons déjà signalé, une telle présentation a été choisie pour deux raisons.

- La première concerne le fait que les modèles que nous exposons ici sont naturels à partir de la description discrète
- La deuxième concerne le fait que les objets mathématiques et les techniques dont nous parlerons dans le chapitre 3 présentent leurs propres intérêts.

2.3.1 Existence, unicité et approximation : cas diffusif

Dans cette section, nous présentons les résultats relatifs au cas diffusif et correspondant à l'article [Pel08a]. Dans cet article, on montre que l'équation classique de Belavkin diffusive admet une unique solution et que cette solution est à valeurs dans les états. En outre on justifie physiquement l'utilisation d'un tel modèle par la convergence de trajectoires quantiques particulières vers la solution de cette équation.

Existence et unicité

L'équation classique de Belavkin de type diffusif décrivant un système $\mathcal{H}_0$ à deux niveaux en contact avec un champ de photons (chaîne de spin) soumis à une mesure indirecte

de type continu est donnée par

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \Big(C\rho_t + \rho_t C^\star - Tr[C\rho_t + \rho_t C^\star]\rho_t\Big)dW_t. \tag{2.18}$$

Le processus (W_t) désigne un mouvement brownien standard unidimensionnel.

Dans cette expression, l'opérateur C correspond à l'opérateur L_{10} qui apparaît lors de la description des asymptotiques (section 2.2.2). Ici l'opérateur $\mathcal{L}$ est de type Lindblad ; il agit sur les états de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H,\rho] - \frac{1}{2}[2C\,\rho\,C^\star - C^\star C\rho - \rho\,C^\star C].$$

La solution de cette équation s'appelle donc une *trajectoire quantique diffusive* et le processus (ρ_t) décrit l'évolution de l'état du système $\mathcal{H}_0$. L'évolution linbladienne donnée par l'équation maîtresse $d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt$ est donc perturbée par un bruit induit par l'appareil de mesure.

A notre connaissance, dans la littérature, le problème de l'existence et de l'unicité n'a jamais été réellement traité en détail. Dans l'absolu, une telle question n'est pas dénuée d'intérêt car cette équation ne rentre pas directement dans le cadre le plus classique des équations différentielles diffusives. En effet, les coefficients qui définissent l'équation ne sont pas lipschitziens et les théorèmes classiques ne s'appliquent pas immédiatement.

Avant d'énoncer le résultat concernant l'existence et l'unicité dans le cas diffusif, il est intéressant (et même essentiel) de donner une version équivalente de cette équation en terme d'états purs. Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.1 ***(Proposition 2 de l'article [Pel08a])*** *Soit (W_t) un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Soit ψ_0 un vecteur de $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^2$ de norme 1 et soit C un opérateur quelconque sur $\mathbb{C}^2$. Pour tout processus (ϕ_t) à valeurs dans $\mathcal{H}_0$, on définit $\nu(\phi_t) = \frac{1}{2}\langle\phi_t, (C + C^\star)\phi_t\rangle$ pour tout t.*

Alors si l'équation suivante

$$d\psi_t \;=\; (C - \nu(\psi_t)I)\,\psi_t\;dW_t + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu(\psi_t)C + \nu(\psi_t)^2 I\right)\right)\psi_t\;dt \tag{2.19}$$

admet une unique solution (ψ_t), on a presque sûrement $\|\psi_t\| = 1$ pour tout $t \geq 0$.

De plus, le processus $(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$ est à valeurs dans les états purs de $\mathcal{H}_0$ et satisfait l'équation diffusive de Belavkin (2.18).

Cette proposition nous permet de voir qu'une solution de (2.18) peut être décrite par un processus composé d'états purs. Mieux, si on a les résultats d'unicité de la solution pour (2.18) et (2.19), alors il y a équivalence entre l'équation (2.18) et (2.19) dès l'instant que l'état initial est un état pur.

Concernant l'équation (2.19), le théorème suivant exprime le résultat d'existence et d'uncité (il s'agit de la version fonction d'onde du théorème 3 de [Pel08a]).

Théorème 2.2 *Soit (W_t) un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Soit ψ_0 un vecteur de $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^2$ de norme 1 et soit C un opérateur quelconque sur $\mathbb{C}^2$. Pour tout processus (ϕ_t) à valeurs dans $\mathcal{H}_0$, on définit $\nu(\phi_t) = \frac{1}{2}\langle \phi_t, (C + C^\star)\phi_t \rangle$ pour tout t.*

Alors l'équation

$$d\psi_t \;=\; (C - \nu(\psi_t)I)\,\psi_t\; dW_t + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu(\psi_t)C + \nu(\psi_t)^2 I\right)\right)\,\psi_t\; dt \qquad (2.20)$$

admet une unique solution (ψ_t) qui vérifie presque sûrement $\|\psi_t\| = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Ici aussi les coefficients qui définissent l'équation différentielle stochastique ne sont pas Lipschitz. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, on obtient la solution par une méthode de troncature, la propriété d'être de norme 1 assure ensuite l'existence de la solution.

Cette propriété d'être de norme 1 révèle la cohérence physique d'une telle équation car elle définit, ainsi, un processus stochastique à valeurs dans les fonctions d'onde.

Concernant l'équation (2.19) définie pour des matrices densités, il incombe de vérifier que cette équation préserve la propriété d'être une matrice densité. Il est par exemple facile de vérifier que cette équation préserve la trace et le caractère auto-adjoint. En revanche il n'est pas du tout évident que ce type d'équation préserve la positivité. Dans l'article [Pel08a], on montre qu'il s'agit d'une conséquence du théorème 2.2.

Théorème 2.3 ***(Théorème 3 de [Pel08a])*** *Soit (W_t) un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Soit ρ un état sur $\mathcal{H}_0$.*

L'équation différentielle stochastique

$$\left\{\begin{array}{lcl} d\rho_t & = & \mathcal{L}(\rho_t)dt + \Big(C\rho_t + \rho_t C^\star - Tr[C\rho_t + \rho_t C^\star]\rho_t\Big)dW_t. \\ \rho_0 & = & \rho \end{array}\right. \qquad (2.21)$$

admet une unique solution (ρ_t) à valeurs dans les états sur $\mathcal{H}_0$.

Classiquement, cette équation n'apparaît pas directement sous cette forme dans la littérature qui traîte de ces sujets. En effet, elle apparaît sous la forme suivante.

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \Big(C\rho_t + \rho_t C^\star - Tr[C\rho_t + \rho_t C^\star]\rho_t\Big)(d\tilde{W}_t - Tr[C\rho_t + \rho_t C^\star]dt),$$

où le processus décrit par

$$t \to \tilde{W}_t - \int_0^t Tr[C\rho_s + \rho_s C^\star]ds$$

est un mouvement brownien standard.

Le rapport entre cette équation et l'équation (2.18) est donné par le théorème de changement de mesure de Girsanov adapté ici à notre cas.

Théorème (Girsanov) 2.4 *Soit (W_t) un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit ρ un état et soit (ρ_t) le processus satisfaisant*

$$\rho_t = \rho + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_s)ds + \Big(C\rho_s + \rho_s C^\star - Tr[C\rho_s + \rho_s C^\star]\rho_s\Big)dW_s. \tag{2.22}$$

On définit alors la nouvelle mesure de probabilité Q par

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T Tr[\rho_t(C + C^\star)]dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Tr[\rho_t(C + C^\star)]^2 ds\right). \tag{2.23}$$

Alors sous Q, le processus définit par

$$\tilde{W}_t - \int_0^t Tr[C\rho_s + \rho_s C^\star]ds$$

est un mouvement brownien standard.

Après avoir défini le modèle diffusif des équations de Belavkin et décrit les principaux résultats mathématiques concernant ce cas, exposons maintenant le résultat de convergence qui permet de donner une justification physique de cette équation.

Convergence

Dans cette section, nous exposons le résultat de convergence des trajectoires quantiques discrètes vers l'équation diffusive de Belavkin. Cette convergence sera justifiée dans le chapitre 3 par des méthodes de convergences d'intégrales stochastiques.

On considère donc le modèle des mesures répétées dans le cas $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}_2$. Chaque espace est muni de la base orthonormée $\{\Omega, X\}$.

Soit (ρ_k) une trajectoire quantique obtenue par mesures répétées d'une observable A non-diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$. Lorsque le pas de temps est $h = 1/n$, l'équation décrivant (ρ_k) satisfait asymptotiquement

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= \rho_k + \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho_k) + \circ(1)\Big) \\ &+ \left(e^{i\theta}L_{10}\rho_k + \rho_k(e^{i\theta}L_{10})^\star - Tr\Big[e^{i\theta}L_{10}\rho_k + \rho_k(e^{i\theta}L_{10})^\star\Big]\rho_k + \circ(1)\right)X_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Le théorème suivant exprime alors le résultat de convergence de cette trajectoire quantique lorsque le pas de temps tend vers 0.

On note $\mathcal{D}_2[0,t)$ l'espace des processus càdlàg à valeurs dans les opérateurs de $\mathcal{H}_0$ muni de la topologie de Skorohod (topologie de la convergence en loi pour les processus stochastiques).

Théorème 2.5 ***(Théorème 8 de [Pel08a])*** *Soit (ρ_k) la trajectoire quantique satisfaisant l'équation* (2.24)*. Alors pour tout $T > 0$, le processus $(\rho_{[nt]})_{t>0}$ converge dans $\mathcal{D}_2[0,T)$ vers le processus solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \Big(e^{i\theta}L_{10}\,\rho_k + \rho_k(e^{i\theta}L_{10})^\star - Tr\Big[e^{i\theta}L_{10}\,\rho_k + \rho_k(e^{i\theta}L_{10})^\star\Big]\rho_k\Big)dW_s, \quad (2.25)\end{aligned}$$

où (W_t) désigne un mouvement brownien standard unidimensionnel.

En considérant le cas $\theta = 0$ et $L_{10} = C$, on obtient exactement la même équation que celle décrite précédemment dans la section 2.1.2.

Ce théorème donne une justification physique rigoureuse et intuitive de l'utilisation d'un modèle d'équation différentielle stochastique diffusive pour décrire une mesure quantique de type continu.

2.3.2 Existence, unicité et approximation : cas poissonien

Dans cette section, nous donnons un sens précis à l'équation classique de Belavkin avec processus de sauts. On donne ensuite les résultats concernant l'existence et l'unicité d'une solution. Comme pour le cas diffusif on justifie ensuite ce modèle par approximation.

Cette section correspond à l'article [Pel08b].

Existence et unicité

Classiquement, le modèle de Belavkin avec sauts est décrit par l'équation différentielle suivante

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right)(d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt),$$

où $\tilde{N}_t$ est un processus de comptage (ou de saut) dont l'intensité stochastique est donnée par $t \to \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$. L'opérateur $\mathcal{J}$ est défini par :

$$\mathcal{J}(\rho) = C\,\rho\,C^\star,$$

où C est un opérateur quelconque sur $\mathbb{C}^2$.

Cette description correspond à l'équation obtenue à l'aide d'arguments heuristiques au début de ce chapitre (section 2.1.2). Comme nous l'avons évoqué dans la section 2.1.3, cette équation n'a pas de sens sous cette forme car le processus $\tilde{N}_t$ n'est pas correctement défini.

En réalité, pour considérer une telle équation, il ne faut pas seulement considérer le processus (ρ_t) comme solution mais il faut considérer le couple $(\rho_t, \tilde{N}_t)$ et les construire simultanément. Une notion correcte de solution est la suivante (cf [JP82]).

Définition 2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité, un processus-solution de l'équation*

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)} - \rho_t\right)(d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt)$$

est la donnée d'un processus (ρ_t) et d'un processus de comptage $\tilde{N}_t$ tel que presque sûrement on ait

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds + \int_0^t \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})} - \rho_{s-}\right)d\tilde{N}_t$$

et tel que le processus $(\tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds)_t$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale. Cette propriété de martingale entraîne le fait que $(\tilde{N}_t)$ a pour intensité $t \to \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds$.

Nous adopterons donc cette définition pour parler de solution pour l'équation avec sauts ; le processus (ρ_t), si il existe, est appelé *trajectoires quantiques avec sauts.*

Il est alors clair dans cette définition que la notion de solution nécessite la construction simultanée du processus (ρ_t) et du processus $\tilde{N}_t$. Il est également important de souligner que cette définition nécessite aussi de définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ adéquate (cette notion de solution peut être interprétée en terme de problème de martingale cf chapitre 3 section 3.2.3).

Pour construire un tel espace Ω dans l'article [Pel08b], on considère un espace supportant une mesure aléatoire de Poisson. Nous reviendrons plus en détail sur ce sujet dans la section 3.1.1 du chapitre 3.

Pour décrire ici, de manière précise, le modèle avec sauts des équations de Belavkin, nous allons utiliser un processus ponctuel de Poisson N sur $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un processus de Poisson N est une distribution aléatoire de points sur $\mathbb{R}^2$. On définit alors une mesure aléatoire à partir de N de la manière suivante (cette notion sera reprise et détaillée dans le chapitre 3).

Soit $\omega \in \Omega$ et soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$N(\omega, B) = card\{N(\omega) \in B\}.$$

Un processus ponctuel de Poisson vérifie :

1. Pour tout borélien B

$$P[N(B) = k] = \exp(-\lambda(B))\frac{\lambda(B)^k}{k!},$$

   où $\lambda(B)$ désigne la mesure de Lebesgue de B.

2. Pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$ et pour toute suite $(A_i)_{0 \leq i \leq l}$ de boréliens disjoints deux à deux, les variables aléatoires $N(A_i)$ sont mutuellement indépendantes.

De plus, on définit pour tout borélien B

$$m(B) = E[N(B)].$$

Ceci définit une mesure sur les boréliens et cette mesure est appelée mesure intensité de N. Dans cette situation, on a $m(B) = \lambda(B)$ pour tout borélien.

On a donc le théorème suivant qui répond à la définition 2.1.

Théorème 2.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité supportant un processus ponctuel de Poisson N sur $\mathbb{R}^2$. Tout processus (ρ_t) satisfaisant*

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right) \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds, dx) \end{aligned} \tag{2.26}$$

permet de définir le processus de comptage $\tilde{N}_t$ par

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds, dx).$$

En définissant $\mathcal{F}_t = \sigma(\rho_s, s \leq t)$, le processus

$$t \longmapsto \tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds$$

est alors une $\mathcal{F}_t$ martingale.

En conclusion, les processus (ρ_t) et $(\tilde{N}_t)$ répondent à la définition 2.1.

Comme pour le cas diffusif, nous avons la version fonction d'onde de l'équation (2.26).

Proposition 2.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité supportant un processus ponctuel de Poisson N sur $\mathbb{R}^2$. Soit ψ_0 un vecteur de $\mathbb{C}^2$ de norme* 1. *Si l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned} \psi_t = \psi_0 &+ \int_0^t \left[-iH - \frac{1}{2}C^\star C - \frac{1}{2}\eta_t + (\sqrt{\eta_t})C\right] \psi_{s-} ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{C\psi_{s-}}{\|C\psi_{s-}\|} - \psi_{s-}\right) \mathbf{1}_{0<x<\eta_{s-}} N(ds, dx), \end{aligned} \tag{2.27}$$

où $\eta_t = \langle x_t, C^\star C x_t\rangle$, admet une solution (ψ_t). Alors presque sûrement pour tout t, on a $\|\psi_t\| = 1$.

De plus le processus $(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$ est à valeurs dans les états purs de $\mathcal{H}_0$ et satisfait l'équation de Belavkin avec sauts(2.26).

Avec des arguments similaires au cas diffusif, on prouve grâce à cette proposition que la partie équation différentielle ordinaire admet une solution. Ensuite, de proche en proche, on construit les instants de sauts de la solution. Nous préciserons cela dans le cadre de l'utilisation des mesures aléatoires de Poisson dans le chapitre 3.

On peut énoncer le théorème concernant l'unicité et l'existence d'une solution pour l'équation (2.26).

Théorème 2.8 ***(Théorème 4 de [Pel08b])*** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité supportant un processus ponctuel de Poisson N sur $\mathbb{R}^2$. soit ρ un état sur $\mathcal{H}_0$. L'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right) \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds, dx) \qquad (2.28)\end{aligned}$$

admet une unique solution $(\rho_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans les états sur $\mathcal{H}_0$.

Ce théorème montre donc que le modèle d'équation de Belavkin avec sauts est cohérent. En particulier, l'équation avec sauts admet une solution à valeurs états.

La section suivante concerne le résultat de convergence qui montre que la solution de l'équation avec sauts peut être obtenue comme limite d'une trajectoire quantique.

Convergence

Nous avons vu précédemment que le cas diffusif pouvait être obtenu comme modèle limite des trajectoires quantiques décrivant la mesure des observables non-diagonales. Nous allons donc exposer, ici, le résultat concernant les mesures répétées d'une observable diagonale. On se place donc dans le cadre des mesures répétées d'une observable diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$ de $\mathcal{H}$.

En fixant le temps d'interaction $h = 1/n$, l'équation d'évolution de la trajectoire quantique (ρ_k) décrivant l'expérience est décrite, sous forme asymptotique, par :

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= \rho_k + \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho_k) + \circ(1)\Big) \\ &\quad + \Big(-\rho_k + \frac{\mathcal{J}(\rho_k)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_k)]} + \circ(1)\Big)\left(\mathbf{1}^{k+1} - \frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\rho_k)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (2.29)\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une version discrète de l'équation de Belavkin avec sauts ; le théorème concernant le résultat de convergence est donc le suivant.

Théorème 2.9 ***(Théorème 6 de [Pel08b])*** *Soit (ρ_k) la trajectoire quantique satisfaisant l'équation (2.29). Alors pour tout $T > 0$, le processus $(\rho_{[nt]})_{t\geq 0}$ converge dans $\mathcal{D}_2[0, t)$*

vers le processus solution de l'équation :

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right) \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds, dx), \end{aligned} \tag{2.30}$$

où N est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$.

Comme dans le cas de l'équation diffusive, l'utilisation d'un modèle stochastique avec sauts est donc justifié comme limite d'un modèle discret de trajectoire quantique. En particulier, notre approche donne un cadre mathématique et physique précis pour l'utilisation de ce type d'équation.

Nous finissons cette section avec un théorème de type convergence vers l'équilibre.

Convergence vers l'équilibre

Dans cette section, nous présentons un résultat concernant le retour à l'équilibre de la solution de l'équation avec sauts. Ce résultat est également valable pour le cas diffusif. Ces théorèmes correspondent au théorème 6 de l'article [AP08].

Nous énonçons le résultat seulement pour le cas avec sauts. Le résultat de convergence dans le cas diffusif est légérement différent (même résultat mais type de convergence différent).

Bien que les résultats soient similaires, celui concernant l'équation avec sauts se prête plus facilement à des interprétations physiques.

On rappelle que, d'après les travaux de Davies, l'équation avec sauts apparaît dans le cas où la mesure est réalisée par un compteur de photons. Conservons cette expérience en mémoire et intéressons nous à un modèle particulier de mesures décrites par l'équation avec sauts. Nous allons déterminer des conditions particulières sur les paramètres qui définissent l'interaction (unitaires, hamiltoniens...) et observer un comportement spécial pour la trajectoire quantique.

On se place dans le cas $H = 0$ et dans le cas $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est alors facile de vérifier par le calcul que si $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{J}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que si l'état initial du système $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors pour tout t on a $\rho_t = \rho_0$ (en effet, les opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{J}$ déterminent la dynamique).

D'autre part, si T_1 désigne le temps du premier saut, on montre que

$$\rho_{T_1} = \frac{\mathcal{J}(\rho_{T_1-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{T_1-})]}.$$

Or dans cette situation (avec les opérateurs H et C que nous avons fixés) pour tout état ρ, on a

$$\frac{\mathcal{J}(\rho)}{Tr[\mathcal{J}(\rho)]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{1}_{Tr[\mathcal{J}(\rho)\neq 0} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, après T_1, par le même raisonnement que ci-dessus, la solution satisfait $\rho_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout t.

Cela signifie, physiquement, par exemple que l'atome a émis un photon et qu'il est ensuite plongé dans un état et n'évolue plus. Bien que indirecte, la mesure semble une nouvelle fois destructrive.

Dans la perspective où l'atome n'émet aucun photon, on montre alors que la solution converge, quand t tend vers l'infini, vers l'état $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce résultat mathématique peut être rapprocher du phénomène physique observé récemment concernant la vie et la mort d'un photon ([GKG+07]).

Dans l'article [Pel08d], on montre que si l'atome est excité par un laser cette situation ne se produit pas. En effet le laser exerce une sorte de contrôle sur l'atome, qui même après avoir émis un photon, est sans cesse excité.

2.3.3 Trajectoires quantiques controlées

Dans cette section, nous abordons une première extension des deux modèles exposés précédemment. Les résultats présentés ici sont détaillés dans l'article [Pel08d].

Nous allons étendre la notion de contrôle introduite dans la section 1.3.3 au cas de la notion de contrôle stochastique. Il s'agit d'introduire des stratégies de contrôle qui peuvent dépendre des résultats des mesures. Comme les observations sont aléatoires, il est naturel de considérer des stratégies aléatoires.

Reprenons la description des mesures répétées d'une observable $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ sur la chaîne infinie.

Si la trajectoire quantique $(\tilde{\rho}_k)$ satisfait $\tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}$ à l'étape k, alors $\tilde{\rho}_{k+1}$ peut prendre deux valeurs

$$\frac{\mathcal{H}_i(\tilde{\rho})}{Tr[\mathcal{H}_i(\tilde{\rho})]}, \quad i \in \{0, 1\},$$

où $\mathcal{H}_i(\tilde{\rho}) = P_i^{(k+1)} U_{k+1}\ \tilde{\rho}\ U_{k+1}^{\star} P_i^{(k+1)}$.

On rappelle ici que l'opérateur U_k agit comme un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}_0$ tenseur la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$ et comme l'opérateur identité ailleurs. Les projecteurs $P_i^{(k)}$ sont les extensions des opérateurs P_i sur la k^{ème} copie de $\mathcal{H}$ (cf notations section 1.4).

Appliquer une stratégie de contrôle impose donc une modification à chaque étape de l'unitaire U_k. On décrit alors cet unitaire par $U_k = U_k(h, u_{k-1}(h))$ où h est le temps d'interaction et $u_k(h)$ est le paramètre qui décrit le contrôle. On retrouve ici la description donnée dans la section 1.3.3, mais on élargit le cadre en permettant à u_k d'être aléatoire.

On va alors considèrer deux types de contrôles possibles :

1. si pour tout k et pour tout h il existe une fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u_k(h) = u(kh)$, la stratégie notée $\mathbf{u} = (u_k)$ est dite *déterministe* (comme dans la section 1.3.3)
2. si pour tout k et pour tout h il existe une fonction u de $\mathbb{R} \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ lle que $u_k(h) = u(kh, \rho_k)$ alors la stratégie $\mathbf{u} = (u_k)$ est dite *markovienne.*

Plus généralement, on peut considérer des stratégies qui dépendent de tout le passé de la trajectoire. Cependant, dans plusieurs applications notamment en optimisation (cf théorème 10 et 11 de l'article [Pel08d]), il s'avère que la notion de stratégie markovienne suffit.

Nous ne décrirons pas en détail la chaîne de Markov et les approximations ; nous renvoyons le lecteur à l'article [Pel08d].

Sur l'espace $\mathcal{H}_0$ la trajectoire quantique (ρ_k) est décrite de la manière suivante.

On considère des opérateurs unitaires encore notés $U_k(h, u_{k-1}(h)$ sur le produit tensoriel $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ qui agissent comme les opérateurs unitaires décrits ci-dessus. Les transitions $\mathcal{L}_i$ sont donc définies par

$$\mathcal{L}_i(\rho) = \mathbf{E}_0[(I \otimes P_i)\, U_{k+1}(h, u_k(h))\ \rho \otimes \beta\ U^\star_{k+1}(h, u_k(h))\, (I \otimes P_i)].$$

On pose $h = 1/n$ et on considère $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$.

Concernant la forme des projecteurs P_i, on retrouve la même distinction entre les observables diagonales et les observables non-diagonales. Le théorème qui suit s'appuie sur les définitions et les approximations présentées dans la section 1.3.3, il résume les théorèmes 6 et 9 de [Pel08d].

Théorème 2.10 ***(Théorèmes 6 et 9 de [Pel08d])*** *Soit (ρ_k) une trajectoire quantique obtenue par mesures répétées d'une observable diagonale. Alors pour tout $T \geq 0$ le processus $(\rho_{[nt]})$ converge en loi dans $\mathcal{D}_2[0, T)$ vers la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned}\rho_t = \rho_0 &+ \int_0^t \mathcal{L}\big(s, u(s, \rho_s)\big)(\rho_s) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \big(\mathcal{P}\big(s-, u(s-, \rho_{s-})\big) - \rho_{s-}\big)\, \mathbf{1}_{0<x<Tr\left[\mathcal{J}\left(s-, u(s-, \rho_{s-})\right)(\rho_{s-})\right]} (N(dx, ds) - dxds),\end{aligned} \tag{2.31}$$

où N désigne un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ et où

$$\mathcal{P}\big(s-, u(s-, \rho_{s-})\big) = \frac{\mathcal{J}\big(s-, u(s-, \rho_{s-})\big)(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}\big(s-, u(s-, \rho_{s-})\big)(\rho_{s-})]}.$$

Soit (ρ_k) une trajectoire quantique obtenue par mesures répétées d'une observable non-diagonale. Alors pour tout $T \geq 0$ le processus $(\rho_{[nt]})$ converge en loi dans $\mathcal{D}_2[0,T)$ vers la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \mathcal{L}\big(s, u(s,\rho_s)\big)(\rho_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \Big[C\big(s, u(s,\rho_s)\big)\rho_s + \rho_s C^\star\big(s, u(s,\rho_s)\big) \\ &\qquad - Tr[\rho_s(C\big(s, u(s,\rho_s)\big) + C^\star\big(s, u(s,\rho_s)\big)]\rho_s\Big] dW_s,\end{aligned} \tag{2.32}$$

où (W_t) est un mouvement brownien standard unidimensionnel.

Il est intéressant de remarquer qu'en moyenne, dans les deux cas, le processus (ρ_t) satisfait

$$\mathbf{E}[\rho_t] = \rho_0 + \int_0^t \mathbf{E}[\mathcal{L}\big(s, u(s,\rho_s)\big)(\rho_s)]ds.$$

Nous avons donc ici la notion de linbladien aléatoire et cette expression correspond à la notion d'équation maîtresse dans une telle situation.

Une telle situation est nettement plus compliquée à justifier dans le cadre des évolutions décrites dans la section 1.2.2 du chapitre 1. Ajouté à cela, les subtilités de la théorie des probabilités non-commutatives qui apparaissent en théorie du filtrage quantique sont amplifiées par l'introduction de la notion de contrôle stochastique. Cela permet donc de justifier l'efficacité de l'utilisation d'une approche discrète.

Dans la section suivante, nous présentons une dernière extension du modèle de l'atome à deux niveaux d'énergie.

2.3.4 Bain de chaleur

Les modèles précédemment présentés concernaient toujours une chaîne dont l'état de référence du système caractéristique était un état pur de la forme $\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|$. Ces modèles décrivent principalement des situations à température zéro.

Dans cette section, nous allons introduire une température positive. Cette notion est caractérisée par le fait que l'état caractéristique de la chaîne est un état dit *état température* (en particulier cet état est non pur).

On décrit ici l'état de $\mathcal{H}$ sous la forme

$$\beta = \frac{e^{-\alpha H}}{Tr[e^{-\alpha H}]} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

avec $0 < \beta_i < 1$ pour tout $i \in \{1,2\}$. L'opérateur H correspond à l'hamiltonien du système et le paramètre α est proportionelle à l'inverse de la température (d'habitude ce

paramètre est noté β mais nous avons choisi cette notation pour les états, dans le cas d'une température positive ce paramètre est fini).

Une telle écriture est toujours possible à obtenir. Il suffit de choisir la base de référence $\{\Omega, X\}$ comme une base de diagonalisation de l'état β. Cet état correspond donc à l'état température "discret".

On considère le principe de mesures répétées d'une observable A de la forme $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$.

La proposition (1.15) concernant la propriété de Markov ne dépend pas de l'état de référence de l'espace $\mathcal{H}$, la trajectoire quantique obtenue dans une telle situation conserve donc cette propriété.

Remarque : Il est possible de comparer les résultats que nous allons obtenir ici avec ceux exposés dans la section 2.3.3 concernant le cas des trajectoires quantiques de dimension supérieure. En effet, grâce à l'outil de la représentation G.N.S, on peut "identifier" le système quantique $(\mathcal{H}, \beta)$ avec $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), |I\rangle\langle I|)$ où I est l'opérateur identité et désigne le premier vecteur d'une base orthonormée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On peut alors appliquer directement les résultats de 2.3.3 avec $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathbb{C}^4$ et $\Omega = I$.

L'utilisation de la représentation G.N.S ne présente pas d'intérêt ici car les résultats concernant la situation "température" peuvent être établis avec les mêmes outils que ceux utilisés pour le cas classique des équations de Belavkin.

Pour décrire le principe d'interaction, on considère donc de manière habituelle un unitaire de la forme

$$U(n) = \begin{pmatrix} U_{00}(n) & U_{01}(n) \\ U_{10}(n) & U_{11}(n) \end{pmatrix}.$$

Dans cette situation, les 4 coefficients de $U(n)$ vont apparaître dans l'expression des transitions de la chaîne de Markov (ρ_k).

En effet, si $\rho_k = \rho$ et si $P_i = (P^i_{kl})_{0\leq k,l\leq 1}$ alors ρ_{k+1} peut prendre deux valeurs

$$\frac{\mathcal{L}_i(\rho)}{Tr[\mathcal{L}_i(\rho)]},$$

où cette fois-ci

$$\mathcal{L}_i(\rho) = p^i_{00}\mathcal{U}_{00}(n)(\rho) + p^i_{10}\mathcal{U}_{01}(n)(\rho) + p^i_{01}\mathcal{U}_{10}(n)(\rho) + p^i_{11}\mathcal{U}_{11}(n)(\rho) \;\; i \in \{0,1\}, \tag{2.34}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{00}(\rho) &= \beta_1 U_{00}\rho U^\star_{00} + \beta_2 U_{01}\rho U^\star_{01}, \;\; \mathcal{U}_{01}(\rho) = \beta_1 U_{00}\rho U^\star_{10} + \beta_2 U_{01}\rho U^\star_{11} \\ \mathcal{U}_{10}(\rho) &= \beta_1 U_{10}\rho U^\star_{00} + \beta_2 U_{11}\rho U^\star_{01}, \;\; \mathcal{U}_{11}(\rho) = \beta_1 U_{10}\rho U^\star_{10} + \beta_2 U_{11}\rho U^\star_{11} \end{aligned}$$

On considère les asymptotiques suivantes (cf [AP06], [AJ07])

$$\begin{aligned}
U_{00}(n) &= I + \frac{1}{n}\Big(- iH - i\gamma_0 I - \frac{1}{2}\, C^\star C\Big)\\
U_{01}(n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} C^\star\\
U_{10}(n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} C\\
U_{11}(n) &= I + \frac{1}{n}\Big(- iH - i\gamma_1 I - \frac{1}{2}\, CC^\star\Big).
\end{aligned}$$

Un hamiltonien total H_{tot} sur le système couplé permettant d'obtenir un tel comportement asymptotique peut être donné par (cf [])

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(C \otimes a_1^0 + C^\star \otimes a_0^1\Big), \tag{2.35}$$

où H_0 est l'hamiltonien du petit système, la matrice $H = diag(\gamma_0, \gamma_1)$ correspond à l'hamiltonien du système caractéristique de la chaîne. L'opérateur C est un opérateur quelconque et les opérateurs a_0^1 et a_1^0 correspondent aux opérateurs introduits dans le chapitre 1 section 1.3. Il est important de noter que dans une telle description l'état température est décrit par $\beta = diag(\beta_1, \beta_2)$ avec

$$\beta_i = \frac{e^{-\alpha\gamma_i}}{e^{-\alpha\gamma_0} + e^{-\alpha\gamma_1}}.$$

On peut alors décrire le comportement asymptotique des trajectoires discrètes. De la même manière on observe deux évolution distinctes.

1. Dans le cas où l'observable A est diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$ on a l'expression asymptotique suivante qui décrit l'évolution de (ρ_k)

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho) + \circ(1)\Big) + \frac{1}{n}\Big(\mathcal{H}(\rho_k) + \circ(1)\Big) X_{k+1}, \tag{2.36}$$

   avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\rho) &= -i[H_0, \rho] - \frac{1}{2}\Big(\beta_1(C^\star C\rho + \rho\, C^\star C) + \beta_2(CC^\star\rho + \rho\, CC^\star)\Big)\\
&\quad + \beta_1 C\rho C^\star + \beta_2 C^\star \rho C.
\end{aligned}$$

   L'expression de $\mathcal{H}$ n'est pas nécessaire dans la suite car elle n'apparaît pas dans le résultat de convergence. La forme du linbladien obtenue ainsi correspond aux formes décrivant les modèles classiques d'interactions type : système + bain de température.

2. Dans le cas d'une observable non-diagonale dans la base $\{\Omega, X\}$, comme pour le cas zéro température, on observe des asymptotiques similaires quelque soit le choix de l'expression des projecteurs spectraux P_i. Ainsi, si par exemple

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a l'expression asymptotique suivante

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \frac{1}{n}\left(\mathcal{L}(\rho_k) + \circ(1)\right)) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\mathcal{F}(\rho_k) + \circ(1)\right) X_{k+1}, \tag{2.37}$$

où $\mathcal{L}(\rho)$ à la même expression que ci-dessus et

$$\mathcal{F}(\rho) = \Big[\beta_1(\rho\, C^\star + C\rho) + \beta_2(\rho\, C + C^\star\rho)\Big] - Tr[\rho(C + C^\star)]\rho$$

Le résultat concernant la convergence est donc le suivant.

Théorème 2.11 ***(Théorèmes 8 et 9 de [AP08])*** *Soit (ρ_k) la trajectoire quantique décrivant le principe de mesures répétées d'une observable diagonale. Alors, le processus $(\rho_{[nt]})$, défini à partir de cette chaîne de Markov, converge en loi vers la solution de l'équation différentielle ordinaire*

$$d(\rho_t) = \mathcal{L}(\rho_t)dt. \tag{2.38}$$

Soit (ρ_k) la trajectoire quantique décrivant le principe de mesures répétées satisfaisant l'équation (2.37)*. Alors le processus $(\rho_{[nt]})$, défini à partir de cette chaîne de Markov, converge en loi vers la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$d(\rho_t) = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \mathcal{F}(\rho_t)dW_t, \tag{2.39}$$

où (W_t) désigne un mouvement brownien standard unidimensionnel.

Le résultat le plus marquant est l'absence d'évolution poissonienne à la limite et l'obtention également d'une évolution déterministe.

2.3.5 Trajectoires diffusives avec sauts

Les résultats précédents sont relatifs au cas de la dimension 2. Nous allons voir dans cette section quels sont les modèles stochastiques adéquats pour étudier des modèles en dimension supérieure. Il s'agit de généralisations des équations classiques de Belavkin décrites par des équations de type saut-diffusion, c'est à dire, des équations différentielles stochastiques dirigées par plusieurs bruits browniens et poissoniens.

Bien que similaire au cas classiques, l'appproche qui permet d'éatblir les modèles continus dans le cas de la dimension supérieure est sensiblement différente. Nous conservons la démarche qui consiste à obtenir les différents modèles comme limites des trajectoires discrètes. Cependant, les modèles limites peuvent paraître moins intuitifs car les équations qui les définissent n'apparaissent pas comme des équivalents continus d'équations discrètes.

En effet comme nous le verrons dans le chapitre 3, les modèles continus sont définis comme les solutions de problèmes de martingales. Ces solutions sont également décrites à partir d'équations différentielles stochastiques dont les solutions peuvent être une nouvelle fois obtenues comme limites de trajectoires quantiques discrètes. Des équations du même type apparaissent dans les travaux de Barchielli ([BPZ98]).

Cette section correspond à l'article [Pel08c].

Description des modèles

On se place dans le cas où $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{N+1}$ et $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{K+1}$ et on considère un principe de mesures répétées d'une observable A de $\mathcal{H}$ de la forme

$$A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i.$$

où les projecteurs spectraux sont de la forme $P_i = (p^i_{kl})_{0\leq k,l\leq K}$, $i = 0, \ldots, p$. Quitte à permuter ces projecteurs, on peut supposer que $p^0_{00} \neq 0$ (car $\sum P_i = I$). On définit alors les ensembles

$$\begin{aligned} I &= \{i \in \{1, \ldots, p\}/p^i_{00} = 0\} \\ J &= \{i \in \{1, \ldots, p\}/p^i_{00} \neq 0\} = \{1, \ldots, p\} \setminus I. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ainsi A peut s'écrire

$$A = \lambda_0 P_0 + \sum_{i\in I} \lambda_i P_i + \sum_{j\in J} \lambda_j P_j.$$

Cette distinction se justifie naturellement avec le comportement asymptotique de la chaîne (ρ_k) suivant le fait que l'on observe une valeur propre λ_i avec i dans I ou i dans J (cf section 2.2.2).

Nous allons voir que l'ensemble I contribue aux évolutions browniennes alors que l'ensemble J correspond aux évolutions de type saut.

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel vivent un mouvement brownien $p+1$ dimensionnel $(W_t = (W_0(t), \ldots, W_p(t))$ et p processus de Poisson N_i, $i = 1, \ldots, p$ mutuellement indépendants et indépendants du mouvement brownien.

Avant de définir les équations différentielles stochastiques modélisant la théorie de la mesure quantique en dimension supérieure à 2, on introduit les fonctions

$$\begin{aligned} g_i(\rho) &= \left(\frac{\sum_{1\leq k,l\leq N} p^i_{kl} L_{k0}\, \rho\, L^\star_{l0}}{Tr[\sum_{1\leq k,l\leq N} p^i_{kl} L_{k0}\, \rho\, L^\star_{l0}]} - \rho \right) \\ v_i(\rho) &= Tr\left[\sum_{1\leq k,l\leq N} p^i_{kl} L_{k0}\, \rho\, L^\star_{l0} \right] \\ h_i(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{p^i_{00}}} \left[\sum_{1\leq k\leq N} \left(p^i_{k0} L_{k0}\, \rho + p^i_{0k}\, \rho\, L^\star_{k0}\right) - Tr\Big[\sum_{1\leq k\leq N} \left(p^i_{k0} L_{k0}\, \rho + p^i_{0k}\, \rho\, L^\star_{k0}\right) \Big] \rho \right] \\ \mathcal{L}(\rho) &= L_{00}\, \rho + \rho\, L^\star_{00} + \sum_{1\leq k\leq N} L_{k0}\, \rho\, L^\star_{k0}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$. Ici $\mathcal{L}$ correspond à un opérateur de type Linblad et les opérateurs L_i correspondent aux opérateurs définis à partir des conditions limites de l'unitaire U.

Les équations différentielles stochastiques décrivant la théorie de la mesure continue en dimension supérieure sont définies de la manière suivante.

1. dans le cas $J = \emptyset$, on pose l'équation différentielle stochastique suivante sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right]. \quad (2.42)$$

2. dans le cas $J = \emptyset$, on pose l'équation différentielle stochastique suivante sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i \in J \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Comme il est clairement souligné dans l'article [Pel08c], ces équations n'ont pas de sens si le processus (ρ_t^J) n'est pas à valeurs dans l'ensemble des états. Par exemple, le terme $v_i\left(\rho_{t-}^J\right)$ peut ne pas être réel si ρ_{t-}^J est une matrice quelconque.

Contrairement au cas des équations classiques, on ne peut pas obtenir le résultat concernant la propriété d'être un état indépendamment du résultat de convergence. Il est donc important de noter que le résultat suivant concernant l'existence d'une solution est en fait une conséquence du résultat de convergence.

Théorème 2.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sur lequel vivent un mouvement brownien $p+1$ dimensionnel et p processus ponctuel de Poisson N_i, $i = 1, \ldots, p$ mutuellement indépendants et indépendants du mouvement brownien. Soit I un sous ensemble de $\{1, \ldots, p\}$ (éventuellement vide) et $J = \{1, \ldots, p\} \setminus I$.*

1. *Si $I = \emptyset$, l'équation différentielle stochastique*

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right]. \quad (2.44)$$

admet une unique solution (ρ_t^J) à valeurs dans les états.

2. *Si $I \neq \emptyset$, l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i \in J \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

admet une unique solution (ρ_t^J) à valeurs dans les états

Ce théorème établit donc la description de modèles de mesure de type continu en dimension finie quelconque. Il est une conséquence de la proposition 3, du théorème 3 et du théorème 5 de l'article [Pel08c].

La section suivante établit les résultats de convergence.

Convergence

Le théorème suivant établit donc le résultat de convergence pour les trajectoires quantiques en dimension finie quelconque.

Théorème 2.13 ***(Théorème 5 de [Pel08c])*** *Soit (ρ_k) la trajectoire quantique décrivant le principe de mesures répétées d'une observable A de la forme*

$$A = \lambda_0 P_0 + \sum_{i\in I} \lambda_i P_i + \sum_{j\in J} \lambda_j P_j.$$

Alors pour tout $T \geq 0$, le processus $(\rho_{[nt]})$ converge en loi dans $\mathcal{D}_{N+1}[0,T)$ vers le processus (ρ_t) satisfaisant

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right], \tag{2.46}$$

dans le cas où $I = \emptyset$ et satisfaisant

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right], \end{aligned} \tag{2.47}$$

dans le cas où $I \neq \emptyset$.

Il est intéressant de noter que les deux cas classiques sont des cas particuliers de ces résultats lorsque l'observable A n'a que 2 valeurs propres distinctes.

Cependant il apparaît clairement, dans le cas général, qu'il y a peu de liens entre l'expression de ces équations différentielles stochastiques et les équations d'évolutions discrètes. Comme nous le verrons dans le chapitre 3 et comme il est stipulé à la fin de l'article [Pel08c], on peut donner une version encore plus abstraite (moins naturelle) pour la loi limite des trajectoires quantiques discrètes.

Voilà donc résumé l'ensemble des résultats que nous avons établis dans les articles présentés dans la deuxième partie de ce rapport.

Le chapitre suivant présente les outils utilisés pour justifier l'existence, l'unicité et l'approximation des solutions des équations de Schrödinger stochastiques.

Chapitre 3

Outils probabilistes

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments et les théories probabilistes utilisés dans nos travaux pour étudier les équations de Schrödinger stochastiques et les trajectoires quantiques.

Comme l'indique une partie du titre de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes généraux de l'existence et de l'unicité d'une solution pour les différentes équations présentées dans le chapitre 2. Sans se préoccuper dans un premier temps de l'interprétation physique de ces équations, il s'agit de montrer que de telles équations ont une pertinence mathématique. En particulier, admettent-elles une solution, cette solution est-elle unique et quelles sont ses propriétés ? Notre approche de ces équations, notamment dans le cas des équations avec sauts ou avec saut-diffusion, est assez générale et peut être utilisée dans de nombreux autres domaines où des équations du même genre apparaissent, mathématiques financières, fiabilité...Concernant la question de l'existence et de l'unicité de solutions pour des équations diffusives de type Schrödinger stochastique, une approche intéressante est présentée dans l'article [MR07]. On peut également se référer à l'article [BPZ98].

Le deuxième aspect de notre travail, qui concerne la dernière partie du titre de cette thèse, s'intéresse à l'approximation de ces équations. Nourrie par l'objectif de justifier l'utilisation de telles équations à partir de modèles concrets et discrets, cette démarche permet d'utiliser des techniques enrichissantes et instructives dans le domaine de la convergence des processus stochastiques.

Ce chapitre se divise en deux parties.

Dans la section 3.1, on décrit dans un premier temps la notion de mesures aléatoires de Poisson. Cette théorie permet dans l'article [Pel08b] de donner un sens précis à l'équation classique avec sauts. Elle englobe notamment le cas particulier du processus de Poisson que nous avons exposé dans la section 2.3.2.

Après avoir donné un sens mathématique précis à la notion de solution pour les équations de Schrödinger stochastique, le problème suivant est le caractère non-Lipschitz des coefficients qui définissent ces équations. Dans un deuxième temps, nous présentons donc une méthode générale de troncature qui permet de montrer l'existence et l'unicité de solu-

tions pour des équations de ce type.

La section 3.2 est consacrée à la convergence des processus définissant les trajectoires quantiques discrètes vers les solutions des équations de Schrödinger stochastiques. On présente ici trois méthodes qui correspondent chacune à l'un des articles présentés dans la deuxième partie.

Dans la section 3.2.1, on aborde la notion de convergence des intégrales stochastiques basées sur les travaux de Kurtz et Protter. On présente ici les outils qui nous ont permis de prouver la convergence dans le cas de l'équation classique de Belavkin avec évolution diffusive. Nous présentons donc le résultat général qui nous a permis de conclure. Ce résultat, bien que naturel, présente quelques "pathologies" que nous tenterons de mettre en évidence.

La section 3.2.2 concerne le cas classique de l'équation avec sauts. Cette section permet de montrer "l'impossibilité" d'appliquer les techniques utilisées pour le cas diffusif dans cette situation. Afin de parvenir au résultat, on met en place une méthode de couplage qui consiste à réaliser les trajectoires quantiques discrètes et continues dans le même espace de probabilité. Cette approche nous permet alors une comparaison effective entre les deux processus ; le résultat final nécessite encore l'étude du schéma d'approximation d'Euler.

Enfin, la dernière section de ce chapitre concerne les résultats qui traitent du cas général des équations de Schrödinger stochastiques en dimension finie quelconque [Pel08c]. Comme ces équations font apparaître un mélange des deux évolutions classiques et que ces deux évolutions nécessitent des méthodes différentes pour prouver les résultats d'approximations, nous présentons une troisième approche basée sur la convergence des générateurs de processus de Markov afin de prouver les résultats dans cette situation. Cette section est divisée en deux parties : une consacrée aux résultats de convergence et une autre qui étudie la notion générale de problèmes de martingales. En effet, c'est cette notion qui permet de définir les processus continus.

3.1 Existence et unicité des solutions

3.1.1 Mesures aléatoires de Poisson

Dans cette section, nous revenons sur l'équation classique de Belavkin avec sauts. Dans le chapitre 2, nous avons proposé un moyen de décrire l'équation avec sauts à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson. Un tel processus est en réalité un cas particulier de la théorie des mesures aléatoires. Nous allons reprendre ici quelques ingrédients de cette théorie pour justifier l'utilisation de tels outils dans le cadre des trajectoires quantiques. Nous détaillons également quelques éléments utilisés de manière implicite dans [Pel08b] et qui révèle la richesse de cette théorie ([JS03],[Jac79]).

Commençons par la définition générale d'une mesure aléatoire.

Définition 3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *un espace de probabilité. Une* ***mesure aléatoire*** *est une famille de mesures* σ*-finies* $\mu = (\mu(\omega, .), \omega \in \Omega)$ *sur* $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$.

Comme nous allons le voir, une mesure aléatoire de Poisson est un cas particulier d'une mesure aléatoire.

Avant de définir la notion de mesure aléatoire de Poisson, nous aurons besoin au préalable de la notion de tribu optionnelle. Rappelons que sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$, *la tribu optionnelle* notée $\mathcal{O}$ est la tribu engendrée par les processus $(\mathcal{F}_t)$ adaptés qui sont continus à droite et qui admettent une limite à gauche. On parlera également de la *tribu prévisible* notée $\mathcal{P}$ qui est la tribu engendrée par les processus continus.

Sur $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ on notera $\tilde{\mathcal{O}}$ la tribu, encore appelée tribu optionnelle, définie par $\mathcal{O} \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$. On définit de la même façon $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$.

A partir de ces tribus, on va pouvoir définir la notion de mesure aléatoire optionnelle. Soit W une fonction définie $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et soit μ une mesure aléatoire. Si les applications $W(\omega, .)$ sont boréliennes, on définit (si cela a un sens)

$$W * \mu_t(\omega) = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} W(\omega, s, x)\mu(\omega, ds, dx).$$

Cela définit un processus sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.2 *Une mesure aléatoire μ est dite* ***optionnelle*** *(respectivement* ***prévisible****) si pour toute fonction W optionelle, c'est à dire $\tilde{\mathcal{O}}$ mesurable (respectivement prévisible) le processus $(W * \mu_t)$ est $\mathcal{O}$ mesurable (respectivement $\mathcal{P}$ mesurable).*

Cette notion apparaît dans la définition d'une mesure aléatoire de Poisson et permettra ensuite d'intégrer par rapport à une mesure aléatoire de Poisson.

Définition 3.3 *Une mesure aléatoire μ est dite entière si*

1. *Pour tout $\omega \in \Omega$, la quantité $\mu(\omega, t \times \mathbb{R}^d) \leq 1$.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\mu(., A)$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*

Une mesure aléatoire μ est appelée ***mesure aléatoire de Poisson*** *si c'est une mesure entière* <u>*optionnelle*</u> *satisfaisant*

1. *La mesure m, définie sur $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}or(\mathcal{R}^d))$ par $m(A) = \mathbf{E}[\mu(A)]$ pour tout $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}or(\mathcal{R}^d)$, est sans atome.*
2. *$m(0 \times \mathbb{R}^d) = 0$.*
3. *Pour tout $t > 0$, pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$ et pour toute suite finie $(A_i)_{i\in\{0,\ldots,l\}}$ tels que les A_i sont des éléments de $\mathcal{B}or(]t, +\infty)) \otimes \mathcal{B}or(\mathcal{R}^d)$ disjoints deux à deux et satisfaisant $m(A_i) < \infty$, les variables aléatoires $\mu(A_i)$ sont mutuellement indépendantes et indépendantes de $\mathcal{F}_t$.*

La mesure m définie dans cette définition s'appelle la *mesure intensité* de μ. .

Remarque : Un processus ponctuel de Poisson est un cas particulier de mesure aléatoire

de Poisson (muni de la plus petite tribu qui rend la mesure optionnelle) dont la mesure intensité est la mesure de Lebesgue. Réciproquement on peut montrer ([Jac79]) que toute mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ ayant pour mesure intensité la mesure de Lebesgue peut être interprétée comme un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$.

Ce qui va suivre va nous permettre de décrire le moyen d'intégrer par rapport à une mesure aléatoire de Poisson. Considérons donc une mesure aléatoire de Poisson μ. On pose

$$D = \left\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ / \mu\left(\omega, \{t\} \times \mathbb{R}^d\right) = 1\right\}.$$

Alors pour tout $(\omega, t) \in D$, il existe un unique point $\beta_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mu(\omega, dt, dx) = \delta_{\beta_t(\omega)}(dx)$. Si $(\omega, t) \notin D$, on pose $\beta_t(\omega) = \beta$ (on définit un point β tel que $\beta \notin \mathbb{R}^d$). Le processus (β_t) est optionnel car une mesure de Poisson est supposée optionnelle.

Ajouté à cela, comme la mesure μ est σ-finie, l'ensemble D est *mince*, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble $D_\omega = \{t \in \mathbb{R}^+ / (\omega, t) \in D\}$ est au plus dénombrable. On peut alors décrire cet ensemble par

$$D = \bigcup_{n \geq 0} \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ / T_n(\omega) = t\},$$

où T_n est une suite croissante de temps d'arrêt. On a en effet

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} / \beta_t \in D\}.$$

Nous verrons qu'une telle suite de temps d'arrêt sera définie lorsque l'on définira la solution de l'équation avec sauts à l'aide des mesures aléatoires de Poisson.

Décrivons maintenant un processus de la forme $(W * \mu_t)$ à l'aide de l'ensemble D. Cet ensemble nous permet d'écrire la formule d'intégration suivante

$$W * \mu_t(.) = \sum_{n \geq 0} W(., T_n(.), \beta_{T_n(.)}(.)) \mathbf{1}_{[T_n(.), \infty[}(t). \tag{3.1}$$

Maintenant que l'on sait intégrer par rapport à une mesure aléatoire de Poisson, on va pouvoir définir des équations différentielles stochastiques par rapport à une telle mesure. Notre attention se portera essentiellement sur l'équation avec sauts ; une mesure aléatoire de Poisson va effectivement nous permettre de définir le processus $\tilde{N}_t$. Il est important de souligner que ce qui va suivre peut être adapté dans de nombreuses situations faisant intervenir des processus de comptages avec intensité stochastique.

La présentation qui va suivre est la traduction en termes de trajectoires quantiques avec sauts de l'article de Jacod et Protter [JP82]. Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ supportant une mesure aléatoire de Poisson μ sur $\mathbb{R}^2$ dont la mesure intenité est la mesure de Lebesgue. On peut alors définir l'équation différentielle avec sauts de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right) \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]}\right] \mu(ds, dx) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tout processus solution de (3.2) satisfait

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{T_n-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{T_n-})]} - \rho_{T_n-}\right)\mathbf{1}_{0<\beta_{T_n}<Tr[\mathcal{J}(\rho_{T_n-})]}\mathbf{1}_{[T_n,\infty[}(t), \qquad (3.3)\end{aligned}$$

où le processus (β_t) et les temps d'arrêt $(T_n)_n$ correspondent à la mesure μ.

Une telle solution permet de définir le processus

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]}\mu(ds, dx).$$

Cela définit un processus de comptage dont l'intensité stochastique est

$$t \to \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds.$$

Les instants de sauts de ce processus correspondent à ceux du processus (ρ_t). Il est important de noter que les instants de sauts du processus (ρ_t) ne correspondent pas forcément aux temps d'arrêts (T_n).

Donnons maintenant un moyen de définir la solution de l'équation (3.3). La version que nous présentons, ici, est légèrement différente de celle exposée dans l'article mais elle est rigoureusement équivalente ; il s'agit d'utiliser de manière plus systématique le formalisme des mesures aléatoires de Poisson et la formule díntégration (3.1). Nous ferons ensuite le lien entre la description qui va suivre et la formule (3.3).

Au préalable, pour tout processus (ν_t) à valeurs dans les états sur $\mathcal{H}_0$, on définit

$$\tilde{N}_t^\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\nu_{s-})]}\mu(ds, dx).$$

Le processus, ainsi défini, est un processus de comptage d'intensité stochastique

$$t \mapsto \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\nu_{s-})]ds.$$

Comme il existe une constante K telle que pour tout état ρ, on a $Tr[\mathcal{J}(\rho)] \leq K$, on dit que l'intensité est bornée. Cette propriété assure que le processus $(\tilde{N}_t^\nu)$ est bien défini pour tout t ([JP82],[Pel08b]).

Nous allons donc définir une suite de processus que nous noterons $(\rho_t^{(n)})$. Cette suite nous permettra ensuite de définir la solution de l'équation avec sauts. On pose pour tout $t \geq 0$

$$\rho_t^{(0)} = \rho_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_s^{(0)} - \mathcal{J}(\rho_s^{(0)}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_s^{(0)})]\rho_s ds,$$

où ρ_0 est l'état initial du petit système. Avant de définir $(\rho_t^{(n)})$ pour tout n, on va définir $\rho_t^{(1)}$ de la manière suivante

$$\rho_t^{(1)} = \rho_0 + \int_0^t \left(\mathcal{L}(\rho_s^{(1)}) - \mathcal{J}(\rho_s^{(1)}) + Tr\left[\mathcal{J}(\rho_s^{(1)}\right]\rho_s^{(1)}\right)ds + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})\right]} - \rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)}\right)\mathbf{1}_{[\tilde{T}_1,\infty[}(t),$$

où

$$\tilde{T}_1 = \inf\left\{t/\tilde{N}_t^{\rho(0)} > 1\right\}.$$

Pour définir les processus $(\rho_t^{(0)})$ et $(\rho_t^{(1)})$, il faut pouvoir résoudre l'equation

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) - \mathcal{J}(\rho_t) + Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]\rho_t ds.$$

On montre (section 3.1.2) que si la condition initiale est un état, alors une telle équation admet une unique solution à valeurs états (il faut remarquer que ce résultat n'est pas immédiat car les coefficients qui définissent l'équation ne sont pas lipschitziens).

On peut alors remarquer que $\tilde{T}_1 > 0$ presque sûrement (éventuellement infini). Ainsi par unicité de la solution, il est évident que les processus $(\rho_t^{(0)})$ et $(\rho_t^{(1)})$ coïncident sur $[0, \tilde{T}_1[$.

On définit alors la solution (ρ_t) de l'équation avec sauts sur $[0, \tilde{T}_1[$, en posant $\rho_t = \rho_t^{(0)}$ pour tout $t \in [0, \tilde{T}_1[$. A l'instant $\tilde{T}_1$ on a alors

$$\rho_{\tilde{T}_1} = \rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)} + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})\right]} - \rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)}\right) = \frac{\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-}^{(0)})\right]} = \frac{\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-})}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_1-})\right]};$$

cet opérateur est également un état sur $\mathcal{H}_0$. La solution après $\tilde{T}_1$ est alors donnée par $(\rho_t^{(1)})$ jusqu'au prochain saut.

Avec ce principe de construction en mémoire, on définit le processus $(\rho_t^{(n)})$ et la suite de temps d'arrêts $(\tilde{T}_n)$ tels que

$$\begin{aligned}
\rho_t^{(n+1)} &= \rho_0 + \int_0^t \left(\mathcal{L}(\rho_s^{(n+1)}) - \mathcal{J}(\rho_s^{(n+1)}) + Tr\left[\mathcal{J}(\rho_s^{(n+1)}\right]\rho_s^{(n+1)}\right)ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_k-}^{(n)})}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{\tilde{T}_k-}^{(n)})\right]} - \rho_{\tilde{T}_k-}^{(n)}\right)\mathbf{1}_{[\tilde{T}_k,\infty[}(t). \\
\tilde{T}_{n+1} &= \inf\left\{t/\tilde{N}_t^{\rho(n+1)} > \tilde{N}_{\tilde{T}_n}^{\rho(n+1)}\right\}
\end{aligned}$$

On vérifie alors par unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire que $\rho_t^{(n+1)} = \rho_t^{(n)}$ sur $[0, \tilde{T}_n[$. De plus, la suite $(\tilde{T}_n)$ est une suite croissante et $\tilde{T}_{n+1} > \tilde{T}_n$ sur $\{\tilde{T}_n < \infty\}$. Il faut également vérifier que ces différents processus sont à valeurs dans

les états pour que leurs définitions soient valables. Alors comme l'intensité est bornée, on montre que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}_n = \infty \ \ p.s.$$

On définit alors la solution (ρ_t) de l'équation avec sauts en posant

$$\rho_t = \rho_t^{(n)} \quad \text{sur} \ \ [0, \tilde{T}_n[.$$

Cette solution est donc bien définie pour tout instant t. Dans la section suivante, une méthode générale de troncature qui permet de statuer sur l'existence de solutions pour les équations de Schrödinger stochatisques. Cette méthode permet, entre autres, de montrer l'existence d'une solution pour la partie équation différentielle ordinaire de l'équation avec sauts.

Pour de plus amples détails sur les équations où interviennent des processus de comptage avec intensité stochastique, le lecteur pourra consulter [JP82]. Pour le cas plus spécifique de l'équation de Belavkin avec sauts, nous renvoyons à notre article [Pel08b].

3.1.2 Méthode de troncature

Dans toutes les équations différentielles que nous avons décrites la majorité des fonctions définissant ces équations ne sont pas lipschitziennes. On ne peut donc pas appliquer directement les théorèmes classiques concernant l'existence et l'unicité de solutions pour des équations différentielles stochastiques ([JS03],[Pro04],[SV06]). Il faut donc modifier ces équations afin de pouvoir exhiber une solution, notamment en utilisant une méthode de troncature.

Décrivons cette méthode dans le cas des équations de Schrödinger stochastiques de dimension supérieure ou égale à 2 relatives à la section 2.3.3. La forme la plus générale est décrite par

$$\begin{aligned}
\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_{s-})ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-})dW_i(s) \\
&\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-})\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-})} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right] \\
&= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \sum_{i\in I} g_i(\rho_{s-})v_i(\rho_{s-})\Big)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-})dW_i(s) \\
&\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-})\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-})} N_i(dx,ds). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Rappelons que I et J forment une partition de $\{1,\ldots,p.\}$ et que l'on travaille sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel vivent un mouvement brownien $p+1$ dimensionnel $W = (W_0, \ldots, W_p)$ et p processus de Poisson $(N_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ indépendants et indépendants de W. Il est intéressant

de remarquer que chaque N_i définit une mesure aléatoire de Poisson et que les résultats de 3.1.1 restent valables.

Comme nous l'avons évoqué dans la section 3.1.1, pour résoudre ce type d'équation, il faut pouvoir résoudre l'équation différentielle stochastique

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \sum_{i\in I} g_i(\rho_{s-})v_i(\rho_{s-})\Big)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-})dW_i(s). \quad (3.5)$$

Soulignons que dans la section 3.1.1, l'équation dont on considérer la solution était une équation différentielle ordinaire qui est un cas particulier de ce type d'équation (il n'y a pas de parties browniennes...). De même, dans les équations ne comportant que des bruits poissoniens, il faut pouvoir résoudre seulement la partie équation différentielle ordinaire.

Une condition suffisante pour qu'une telle équation admette une unique solution est le fait que les coefficients qui définissent cette équation soient Lipschitz. Or d'après l'expression des différentes fonctions (cf section 2.3.5), il apparaît clairement que ces coefficients sont C^∞ mais pas Lipschitz.

Pour rendre ces coefficients Lipschitz, on utilise une méthode de troncature. Pour cela on définit une fonction dite de troncature ; pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\phi_k(x) = -k\mathbf{1}_{x<-k} + x\mathbf{1}_{-k\leq x\leq k} + k\mathbf{1}_{x>k},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où on travaille avec des processus à valeurs dans les opérateurs sur $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{N+1}$, pour toute matrice $M = (M_{ij})_{0\leq i,j\leq N}$ on pose

$$\tilde{\phi}_k(M) = (\phi_k(Re(M_{ij})) + i\phi_k(Im(M_{ij})))_{0\leq i,j\leq N}.$$

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, on définit $f^k = f \circ \phi_k$. Ainsi si f est localement lipschitzienne, alors f^k est lipschitzienne. Comme les fonctions $\mathcal{L}$, g_iv_i et h_i sont C^∞, elles sont localement lipschitziennes.

Fixons $k \in \mathbb{N}^\star$, l'équation différentielle stochastique suivante

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \Big(L^k(\rho_{s-}) - \sum_{i\in I} g_i^k(\rho_{s-})v_i^k(\rho_{s-})\Big)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i^k(\rho_{s-})dW_i(s) \quad (3.6)$$

admet une unique solution que l'on notera (ρ_t^k) et qui est continue. On note $\rho_t^k(ij)$ les coefficients de la matrice ρ_t^k. On pose alors

$$T_k = \inf\{t > 0, \exists (i,j) \in \{0,\dots,N\}^2 / |Re(\rho_t^k(ij))| = k \text{ ou } |Im(\rho_t^k(ij))| = k\}.$$

Comme ρ_0 est un état, pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2$ on a $|\rho_0(ij)| \leq 1$. Ainsi par continuité de la solution (ρ_t^k) on a $T_k > 0$. De plus, par définition sur $[0, T_k[$ on a $|Re(\rho_t^k(ij))| < k$ et $|Im(\rho_t^k(ij))| < k$, donc pour tout $t \in [0, T_k[$ on a

$$\tilde{\phi}_k(\rho_t^k) = \rho_t^k. \quad (3.7)$$

Ainsi le processus (ρ_t^k) satisfait (3.5) sur $[0, T_k[$. Classiquement, pour montrer que (3.5) admet une solution, on montre que

$$\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty.$$

Dans notre situation ce fait est simplifié car on montre que $T_2 = \infty$ presque sûrement. En effet, on montre que (ρ_t^2) est un processus à valeurs dans l'ensemble des états. Dans ce cas, pour tout t et pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2$, on a $|\rho_t^2(ij)| < 2$ car ρ_t^2 est un état ; ce qui entraîne $T_2 = \infty$.

On peut appliquer alors un principe similaire à celui présenté dans la section 3.1.1 pour définir les instants de sauts du processus solution.

Comme nous l'avons déjà annoncé, pour montrer que la solution est à valeurs dans l'ensemble des états, la propriété qui est difficile à montrer est la positivité.

Concernant les équations classiques, on utilise l'équivalence entre l'équation pour les matrices densités et les fonctions d'ondes. Comme il s'agit de modèles en dimension 2, on a le lien suivant pour décrire les états purs.

$$\rho \text{ est un état pur} \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C}^2 / \langle z, \rho z\rangle = 0.$$

Considérons le processus (ρ_t^2), on pose alors

$$T = \inf\{t > 0, \exists z \in \mathbb{C}^2 / \langle z, \rho_t^2 z\rangle = 0\},$$

alors ρ_T^2 est un état pur. La solution après T est à valeurs états purs. En effet, soit $z \in \mathbb{C}^2$ de norme 1 tel que $\langle z, \rho_T^2 z\rangle = 0$ alors $\rho_T^2 = |z\rangle\langle z|$. La solution après T est donc donnée par l'équation pour les fonctions d'onde avec comme condition initiale z.

Remarque : Pour prouver que les équations concernant les fonctions d'onde admettent une solution, on doit encore utiliser une méthode de troncature, toujours à cause du problème des coefficients non-Lipschitz. Le fait que si ces équations admettent une solution alors le processus est de norme 1, cela implique de la même manière que la solution de l'équation tronquée correspond à la solution de l'équation non tronquée.

En dimension supérieure, nous n'avons pas de description des trajectoires quantiques en terme de fonctions d'onde (ces équations ne conservent pas en général cette propriété) et la méthode appliquée en dimension 2 ne peut pas être utilisée (de plus le critère pour les états purs n'est plus valide). Dans cette situation, le fait que la solution (ρ_t^2) est à valeurs états est une conséquence de la convergence en loi des trajectoires quantiques vers le processus (ρ_t^2). En effet, les trajectoires quantiques sont des états et la propriété d'être un état est fermée pour la topologie de la convergence en loi.

Les techniques utilisées pour prouver les différentes convergences sont exposées dans la section suivante.

3.2 Convergence des trajectoires discrètes

Dans cette section, nous présentons les différents ingrédients utilisés pour établir les résultats de convergence. Dans les deux premières parties, nous traitons le cas des deux équations de Belavkin classiques. Bien que ces équations proviennent du même modèle et que la description asymptotique des équations discrètes est similaire, les techniques probabilistes pour aboutir aux résultats sont différentes dans les deux cas.

Dans les deux dernières parties, on aborde les outils utilisés pour établir la convergence dans le cas de la dimension supérieure. On étudie les notions de convergence des générateurs de processus de Markov et les problèmes de martingales associés.

3.2.1 Convergence des intégrales stochastiques

Cette section est consacrée à la preuve de la convergence des trajectoires quantiques dans le cas du modèle de l'atome à deux niveaux d'énergie soumis aux mesures répétées d'une observable non-diagonale. Il s'agit donc de justifier les résultats concernant le modèle diffusif des équations classiques de Belavkin. La preuve des résultats exposés dans les articles [Pel08a],[AP08] est directement inspirée de ce que nous allons présenter ci-dessous. Les résultats relatifs à l'article [Pel08d] nécessitent des résultats plus complets disponibles dans l'article [KP91a].

Nous nous concentrons sur le cas de l'équation classique de Belavkin diffusive [Pel08a]. On rappelle que l'équation, sous forme asymptotique, décrivant une trajectoire discrète (ρ_k) dans cette situation est de la forme

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho_k) + \circ(1)\Big) + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\mathcal{F}(\rho_k) + \circ(1)\Big)X_{k+1}. \tag{3.8}$$

On rappelle que X_{k+1} est défini sur $\{0,1\}$ par

$$X_{k+1} = \frac{\mathbf{1}_1^{k+1} - p_1(\rho_k)}{\sqrt{p_0(\rho_k)p_1(\rho_k)}},$$

où la variable aléatoire $\mathbf{1}_1^{k+1}$ prend la valeur 0 avec probabilité $p_0(\rho_k)$ et la valeur 1 avec probabilité $p_1(\rho_k)$.

A partir de (ρ_k) on construit le processus $(\rho_{[nt]})$ satisfaisant

$$\begin{aligned}\rho_{[nt]} &= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \rho_{k+1} - \rho_k \\ &= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho_k) + \circ(1)\Big) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\mathcal{F}(\rho_k) + \circ(1)\Big)X_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}
\rho_n(t) &= \rho_{[nt]}, \\
V_n(t) &= \frac{[nt]}{n}, \\
W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]-1} X_{k+1}, \\
\varepsilon_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[nt]-1} \circ(1) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]-1} \circ(1) X_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi le processus $(\rho_{[nt]})$ satisfait l'équation différentielle stochastique discrète

$$\rho_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_n(s-))dV_n(s) + \int_0^t \mathcal{F}(\rho_n(s-))dW_n(s). \tag{3.11}$$

On montre alors avec un théorème de Donsker généralisé ([KP91b]) que le triplet de processus $(W_n(t), V_n, \varepsilon_n(t))$ converge en loi vers $(W_t, V_t, 0)$ où (W_t) est un mouvement brownien et $V_t = t$ pour tout $t \geq 0$. Il est alors naturel de penser que $(\rho_n(t))$ converge en loi vers (ρ_t) qui est solution de

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \mathcal{L}(\rho_s)ds + \int_0^t \mathcal{F}(\rho_s)dW(s). \tag{3.12}$$

Cependant ce type de conclusion est à prendre avec précautions et nécessite une étude précise du processus $(W_n(t))$. Pour motiver cette réflexion, considérons deux exemples où ce type de conclusion est en défaut ([KP91a]).

Exemple 1) On considère deux suite de processus définis par

$$X_n = \mathbf{1}_{[1,\infty)}, \quad Y_n = \mathbf{1}_{[1+1/n,\infty)}$$

alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) où $X = Y = X_n$. cependant

$$\int_0^t X_n(s-)dY_n(s) = 1 \text{ et } \int_0^t X(s-)dY(s) = 0$$

Exemple 2) Soit (W_t) un mouvement brownien standard. On définit le processus $(W_n(t))$ tel que

$$W_n(t) = n \int_{t-\frac{1}{n}}^t W_s \, ds$$

On a $\lim_{n\to\infty} W_n = W$ presque sûrement uniformément sur les compacts. Considérons l'équation

$$X_n(t) = x + \int_0^t X_n(s) \, dW_n(s),$$

on a $X_n(t) = x\exp(W_n(t))$. L'équation limite devrait être

$$X_t = x + \int_0^t X_s\, dW_s,$$

dont la solution est donnée par $X_t = x\exp(W_t - \frac{1}{2}t)$.

Il apparaît donc clairement que la notion de convergence d'intégrales stochastiques nécessite des hypothèse particulières à vérifier pour pouvoir établir des résultats cohérents. La solution, dans notre situation, est donnée par un théorème de Kurtz et Protter qui imposent des conditions sur $(W_n(t))$ pour pouvoir conclure.

Rappelons, au préalable, que le crochet droit $[X, X]$, où X est une semi-martingale, satisfait

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_{s-} dX_s\,.$$

On notera $T_t(V)$ la variation totale pour un processus à variation finie V sur l'intervalle $[0, t]$ (cf [Pro04] pour plus de détails sur ces deux notions). On peut alors énoncer le théorème suivant de Kurtz et Protter [KP91a].

Théorème (Kurtz-Protter [KP91a]) 3.1 *Soit W_n une martingale et V_n un processus à variation finie. On considère le processus X_n défini par*

$$X_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t \mathcal{L}(X_n(s-)dV_n(s) + \int_0^t \Theta(X_n(s-))dW_n(s)\,.$$

Supposons que pour tout $t \geq 0$:

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] < \infty\,,$$
$$\sup_n \mathbf{E}\big[T_t(V_n)\big] < \infty\,,$$

et $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ converge en loi vers $(W, V, 0)$ où (W_t) est un mouvement brownien standard et $V(t) = t$ pour tout t. Supposons que X satisfait

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathcal{L}(X_s)ds + \int_0^t \Theta(X_s)dW_s$$

et que la solution de cette équation différentielle stochastique est unique.

Alors le processus X_n converge en loi vers X.

La propriété essentielle qui fait défaut dans l'exemple 2 est celle concernant le fait que le $\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big]$ n'est pas borné. En effet dans cet exemple, on a

$$\mathbf{E}[W_n(t), W_n(t)] = n^2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\Big(t - \frac{1}{n}\Big)^3\right)$$

et cette quantité n'est pas bornée en n.

Cette propriété est, quant à elle, satisfaite dans le cas des trajectoires quantiques discrètes ; on montre en effet que pour tout t

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] \leq t.$$

Il est également important de souligner que ce théorème impose que l'équation limite admette une unique solution, question que nous avons déjà résolue.

La section suivante présente le moyen d'établir le résultat équivalent dans le cas de l'équation avec sauts ; la conclusion est similaire mais la méthode est différente.

3.2.2 Schéma d'Euler de l'équation avec sauts et méthode de couplage

Cette section présente les ingrédients pour conclure sur la convergence dans le cas de l'équation avec sauts.

Comme dans le cas diffusif, on définit dans le cas de la trajectoire (ρ_k) décrivant la mesure d'une observable diagonale

$$\begin{aligned}
\rho_{[nt]} &= \rho_0 + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \rho_{k+1} - \rho_k \\
&= \rho_0 + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\Big(\mathcal{L}(\rho_k) + \rho_k Tr[\mathcal{J}(\rho_k)] - \mathcal{J}(\rho_k) + \circ(1)\Big) \\
&\quad \sum_{k=0}^{[nt]-1} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_k)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_k)]} - \rho_k + \circ(1)\right) \mathbf{1}_1^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Dans cette situation on a sur $\{0,1\}$

$$\mathbf{1}_1^{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i=0 \quad \text{avec probabilité} \quad 1 - \frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\rho_k)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ 1 & \text{si } i=1 \quad \text{avec probabilité} \quad \frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\rho_k)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

On définit

$$\begin{aligned}
\rho_n(t) &= \rho_{[nt]} \\
V_n(t) &= \frac{[nt]}{n}, \\
N_n(t) &= \sum_{k=0}^{[nt]-1} \mathbf{1}_1^{k+1}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Alors dans ce cas là, on a

$$\rho_n(t) = \rho_0 + \int_0^t \mathcal{G}_n(\rho_n(s-))dV_n(s) + \int_0^t \mathcal{H}_n(\rho_n(s-))dN_n(s), \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n(\rho) &= \mathcal{L}(\rho) + \rho Tr[\mathcal{J}(\rho)] - \mathcal{J}(\rho) + \circ(1) \text{ et}\\ \mathcal{H}_n(\rho) &= \mathcal{J}(\rho)/Tr[\mathcal{J}(\rho)] - \rho + \circ(1).\end{aligned}$$

Il est important de souligner que les $\circ$ sont uniformes en ρ car l'ensemble des états est un compact.

Admettons momentanément que $(\rho_n(t))$ converge vers un processus (ρ_t) et que $(N_n(t))$ converge vers un processus de comptage $(\tilde{N}_t)$, alors l'intensité du processus $(\tilde{N}_t)$ est $t \mapsto \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds$. En effet cela vient du fait que

$$\mathbf{E}[N_n(t)] = \sum_{k=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\mathbf{E}\Big[Tr[\mathcal{J}(\rho_n(s-))\Big]$$

et en passant à la limite on a $\mathbf{E}[\tilde{N}_t] = \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds$.

Cependant, ce résultat est loin d'être évident car, comme nous l'avons supposé, il nécessite la convergence de $(\rho_n(t))$ et $(N_n(t))$. De plus, il apparaît clairement que la convergence de $N_n(t)$ est dépendante de celle de $(\rho_n(t))$, ce qui est en réalité naturel car on ne peut pas construire le processus $\tilde{N}_t$ sans construire (ρ_t) lorsque l'on traite de la question de l'existence d'une solution pour l'équation avec sauts.

Il est important et intéressant de souligner que ce n'est pas le cas dans l'équation diffusive. En effet, on a la convergence de $(W_n(t))$ indépendamment de celle de $(\rho_n(t))$. En particulier, dans le cas d'une trajectoire quantique discrète décrivant la mesure d'une observable diagonale, il n'y a pas malheureusement (ou heureusement) de résultat direct type Donsker pour $N_n(t)$. Les convergences de $(\rho_n(t))$ et $(N_n(t))$ sont en fait indissociables comme le sont les constructions de (ρ_t) et $\tilde{N}_t$.

Néanmoins, il existe des théorèmes, type Donsker, pour les processus de comptage. Pour établir ces résultats, on utilise des méthodes de couplage de variables aléatoires. Cela signifie que l'on réalise les différents processus $(N_n(t))$ (censés converger) et le processus $(\tilde{N}_t)$ (censé être la limite) dans le même espace de probabilité. Ici l'idée est donc de réaliser les processus $(\rho_n(t))$ et $(N_n(t))$ dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ du processus ponctuel de Poisson N qui a permis de définir le processus (ρ_t) et $(\tilde{N}_t)$ dans le cas de l'équation classique avec sauts (cf section 2.3.2).

Pour cela, on définit les variables $\mathbf{1}_1^k$ à partir du processus de Poisson N. On pose pour tout état ρ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire ν_{k+1}

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\rho, \omega) = \mathbf{1}_{N(\omega, G_k(\rho))>0} \tag{3.17}$$

où $G_k(\rho) = \big\{(t,u)/\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, 0 \leq u \leq -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(\rho)])\big\}$. On rappelle que $\mathcal{L}_0(\rho)$ correspond à l'état non normalisé définissant les transitions de la trajectoire quantique (ρ_k). Asymptotiquement, on a $Tr[\mathcal{L}_0(\rho)] = 1 - 1/n \times Tr[\mathcal{J}(\rho)] + \circ(1/n)$. On définit

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{k+1} &= \mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k) + \mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)\\ &\quad + \left[-\frac{\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)]} + \frac{\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)]}\right](\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k, .) - Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)])\end{aligned} \tag{3.18}$$

Le processus $(\tilde{\rho}_k)$ est alors la réalisation de la trajectoire quantique (ρ_k) et les variables $\nu_{k+1}(\tilde{\rho}_k)$ ont même loi que $\mathbf{1}_1^{k+1}$.

On peut donc appliquer les résultats asymptotiques, décrits sur la première version de la chaîne de markov, à la nouvelle expression. Il s'agit ensuite de comparer le processus $(\tilde{\rho}_{[nt]})$ au processus obtenu grâce à un schéma d'Euler de la solution de l'équation avec sauts. Décrivons donc ce schéma d'Euler.

Schéma d'Euler

Dans cette section, nous reprenons, en substance, les résultats que nous avons établis dans l'article concernant le schéma d'Euler appliqué à l'équation avec sauts. La convergence du schéma d'Euler n'est pas immédiate dans cette situation et nécessite une étude assez fine du schéma.

Il y a effectivement trois principaux soucis pour établir la convergence du schéma d'Euler. Premièrement, les coefficients qui définissent l'équation ne sont pas lipschitziens. Deuxièmement, le terme devant le processus de Poisson fait intervenir un quotient donc il n'est pas défini pour toutes les matrices et troisièmement, il faut aussi gérer l'intensité stochastique du processus qui dirige l'équation.

On rappelle que l'équation avec sauts est définie par

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right)\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]}N(ds,dx) \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Pour écarter le problème concernant le caractère lipschitzien des coefficients, on peut considérer que les coefficients définissant la partie équation différentielle ordinaire sont tronqués. On montre alors que le schéma d'Euler de l'équation, ainsi tronquée, converge vers la solution qui est à valeurs états. Ensuite on compare le processus discret avec ce schéma d'Euler pour conclure sur la convergence.

Concernant les coefficients devant le processus de Poisson, si la matrice C qui définit l'opérateur $\mathcal{J}$ est inversible alors on peut définir une fonction C^∞ sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ qui coïncide avec la fonction $\mathcal{J}(.)/Tr[\mathcal{J}(.)]$ sur l'ensemble des états. En effet, l'expression $Tr[\mathcal{J}(.)]$ définie une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur l'ensemble des états qui est compact. La fonction, ainsi définie, devient lipschitzienne par troncature. Sinon, si la matrice C n'est pas inversible, on peut trouver un unitaire W tel que

$$WCW^\star = D = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout état ρ, si $Tr[D\rho D^\star] \neq 0$ on a

$$\frac{D\rho D^\star}{Tr[D\rho D^\star]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On transforme alors l'équation avec sauts en posant $\mu_t = W\,\rho_t\,W^\star$. On remarque alors que l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mu_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big(\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\mu_{s-}) - \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\mu_{s-}) + Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\mu_{s-})]\mu_{s-}\Big)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \rho_{s-} \right) \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\mu_{s-})]} N(ds,dx). \qquad (3.20)\end{aligned}$$

La fonction constante égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est lipschitzienne. Ainsi on peut toujours écrire (à une troncature et un changement unitaire près) l'équation sous la forme

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t f(\rho_{s-})ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(\rho_{s-})\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds,dx),$$

avec q et f des fonctions lipschitziennes.

On définit notre schéma d'Euler sous la forme

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{1}{n} f(\theta_k) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{[0,K]} [q(\theta_k)]\mathbf{1}_{0\le x\le Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} N(.,dx,ds). \qquad (3.21)$$

L'intensité est ici écrite sous la forme $Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])$ afin que l'on puisse considérer l'inégalité $0 \le x \le Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])$ (le schéma d'Euler définit un processus qui ne prend pas forcément ses valeurs dans l'ensemble des états, le terme $Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]$ peut alors être complexe). On définit alors le processus $\tilde{\theta}_t$ à partir du schéma d'Euler

$$\tilde{\theta}_t = \theta_k + \int_{\frac{k}{n}}^t f(\theta_k)ds + \int_{\frac{k}{n}}^t \int_{[0,1]} [q(\theta_k)]\mathbf{1}_{0\le x\le Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} N(.,dx,ds). \qquad (3.22)$$

On a donc le théorème suivant.

Théorème 3.2 ***(Théorème 5 de [Pel08b])*** *Soit $T > 0$, soit $(\tilde{\theta}_t)$ le processus définit par (3.22), soit (ρ_t) la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t f(\rho_{s-}ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(\rho_{s-})\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(ds,dx),$$

On définit pour $u < T$ et n suffisament grand :

$$Z_u(n) = \mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le u} \left\|\tilde{\theta}_t(n) - \mu_t\right\|\right]. \qquad (3.23)$$

Alors il existe une constante Γ indépendante de n telle que pour tout $u < T$:

$$Z_u(n) \le \frac{\Gamma}{n}. \qquad (3.24)$$

En conclusion le processus $(\tilde{\theta}_t)$, qui dépend de n, converge en loi dans $\mathcal{D}_2([0,t))$ vers le processus (ρ_t).

Comme on doit prendre en compte l'intensité stochastique, on ne peut obtenir des résultats exploitables que sur un terme de la forme $\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left\|\tilde{\theta}_t(n)-\mu_t\right\|\right]$. Or si on avait pu travailler avec un terme de la forme $Y_u(n)=\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left\|\tilde{\theta}_t(n)-\mu_t\right\|^2\right]$ et obtenir un résultat de la forme

$$Y_u(n)\leq\frac{\Gamma}{n^2},$$

on aurait prouvé une convergence presque sûre (en appliquant le lemme de Borel-Cantelli).

Or le résultat $Z_u(n)\leq\Gamma/n$ est une conséquence de l'application du lemme de Gronwall. Pour appliquer ce lemme, il faut conserver l'homogénéité de l'exposant dans la norme. En effet, on obtient une estimation de la forme

$$Z_u\leq A\int_0^u Z_s ds+\frac{B}{n}$$

Dans la preuve de ce résultat apparait la différence

$$\left|\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}-\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]}\right|$$

qui vaut toujours 0 ou 1. Donc si on voulait augmenter la puissance dans la norme (par exemple 2), il appaitrait le terme

$$\left|\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}-\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]}\right|^2=\left|\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}-\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]}\right|$$

et l'homogénéïté de l'exposant tombe en défaut.

Finalement, nous obtenons simplement une convergence en loi. On peut regretter à postériori ce fait car des méthodes de couplage permettent souvent d'obtenir des convergences presque sûre.

Chronologiquement, la démonstration dans le cas du Poisson est apparue après celle découverte pour le cas diffusif. Il était donc naturel de tenter d'appliquer un tel résultat pour le cas diffusif. De plus, les résultats concernant le schéma d'Euler sont plus fournis dans la littérature ([BL94],[BLP05]).

Cependant le problème dans le cas diffusif est de réaliser les variables $\mathbf{1}_1^{k+1}$ dans un l'espace du mouvement brownien. Dans le cas du processus de Poisson, il est en effet important de remarquer que la construction de des variables $\mathbf{1}_1^{k+1}$ dans l'espace du processus de Poisson respectent les mêmes subdivisions que celles employées dans le schéma d'Euler (pas de temps $1/n$). Or dans le cas diffusif, il n'est pas possible de comparer un accroissement $W_{(k+1)/n}-W_{k/n}$ du brownien avec une réalisation de $\mathbf{1}_1^{k+1}$ dans l'espace du brownien.

Les deux méthodes semblent donc incompatibles. Pour trouver une méthode commune entraînant la convergence, il faut utiliser un moyen plus abstrait utilisant la convergence de générateurs de Markov. C'est ce que nous avons fait en dimension supérieure.

3.2.3 Problèmes de martingales

En dimension supérieure, on rappelle qu'une trajectoire quantique discrète décrivant la mesure d'une observable de la forme $A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$ est décrite par

$$\rho_{k+1} = \sum_{i=0}^{p} \frac{\mathcal{L}^i(\rho_k)}{Tr[\mathcal{L}_i(\rho_k)]} \mathbf{1}_{k+1}^i. \tag{3.25}$$

Les trajectoires quantiques continues sont, elles, décrites par

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J) ds + \sum_{i \in J \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J) dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds \right], \end{aligned} \tag{3.26}$$

dans le cas où $I \neq \emptyset$ et

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J) ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds \right]. \tag{3.27}$$

dans le cas où $I = \emptyset$.

Pour montrer la convergence des trajectoires quantiques discrètes vers les trajectoires quantiques continues, les méthodes utilisées dans le cadre classique des équations de Belavkin ne sont pas applicables (en tout cas pas de manière aisée).

Le principal obstacle réside dans le fait qu'en dimension supérieure, la description de l'équation discrète ne se prête pas à une écriture en termes d'équations différentielles stochastiques discrètes.

En effet, pour mettre en place une telle description cela imposerait d'orthonormaliser la base $(\mathbf{1}_0^{k+1}, \ldots, \mathbf{1}_p^{k+1})$ de $L^2(\{0 \ldots, p\}, \sum_{i=0}^{p} p_i(\rho_k)\delta_i)$ comme nous l'avons fait en introduisant les variables (X_k) pour les équations classiques.

Cependant, même avec une telle orthonormalisation, il faut ensuite réorganiser les termes $\mathcal{L}_i(\rho_k)$ pour écrire l'équation discrète avec la base orthonormalisée. Or il n'apparaît pas dans cette manière de procéder d'écriture pratique et utilisable pour parvenir à un résultat de convergence digeste.

En outre, même si une telle écriture était envisageable, elle ne serait pas réellement utilisable que dans deux cas d'équation continues. En effet, elle permettrait de traiter le cas où il n'y aurait que des bruits browniens à la limite ; on utiliserait alors un théorème de Donsker multidimensionnel pour obtenir la convergence des bruits discrets puis un argument du type Kurtz et Protter. Elle permettrait également de traiter le cas où il n'y a que des processus de Poisson à la limite ; il s'agirait ici de réaliser le processus discret et le processus continu dans le même espace et de comparer le processus discret à un schéma d'Euler.

Traiter ces deux cas extrêmes reviendrait donc à adapter les méthodes utilisées dans le cas classique. Or, il apparaît clairement que la méthode utilisée pour le cas diffusif ne s'adapte pas pour le cas avec sauts et inversement. On peut donc en déduire qu'il semble difficile de trouver un compromis entre les deux méthodes pour traiter le cas où il y a un mélange de brownien et de Poisson.

Néanmoins, il existe un moyen d'unifier ces deux méthodes en utilisant la notion de problèmes de martingales ([Jac79],[EK86],[JS03],[CFY05]). En effet, on peut interpréter les processus limites des trajectoires quantiques (en toute dimension) comme solutions de problèmes de martingales. Comme nous le verrons un problème de martingale est associé à la donnée d'un générateur infinitésimal (générateurs des processus de Markov).

La partie suivante est consacrée à l'étude des générateurs associés aux trajectoires quantiques.

Convergence des générateurs de Markov

Dans cette section, nous allons définir les générateurs infinitésimaux qui seront ensuite associés aux trajectoires quantiques continues par l'intermédiaire des problèmes de martingales. Ces générateurs sont obtenus comme limites des générateurs des trajectoires quantiques discrètes. Nous allons maintenant les définir.

On considère donc une trajectoire quantique (ρ_k) obtenue par mesures répétées d'une observable $A = \sum_{i=0} \lambda_i P_i$ dont l'état initial est ρ_0. On rappelle que A peut s'écrire sous la forme

$$A = \lambda_0 + \sum_{I \in I} \lambda_i P_i + \sum_{j \in J} \lambda_j P_j,$$

où $I = \{i \in \{1, \ldots, p\} / p_{00}^i \neq 0\}$ et $J = \{1, \ldots, p\} \setminus I$.

On considère $h = 1/n$ le temps d'interaction. A partir de la chaîne de Markov (ρ_k) définie sur l'espace $(\Sigma^{\mathbb{N}^\star}, \mathcal{C}, P)$ (cf chapitre 1 section 1.4.2), on définit le processus $(\rho_n(t) = \rho_{[nt]})$. Ce processus satisfait

$$P[\rho_n(0) = \rho] = 1 \tag{3.28}$$

$$P[\rho_n(s) = \rho_k,\ k/n \leq s < (k+1)/n] = 1 \tag{3.29}$$

$$P[\rho_{k+1} \in \mathbf{\Gamma} / \mathcal{M}_k^{(n)}] = \Pi_n(\rho_k, \mathbf{\Gamma}) \tag{3.30}$$

où $\Pi_n(\rho, .)$ est le noyau de transition de la chaîne de Markov (ρ_k). Il est donné par

$$\Pi_n(\rho, \mathbf{\Gamma}) = \sum_{i=0}^{p} p^i(\rho) \delta_{\mathcal{L}_i(\rho)}(\mathbf{\Gamma}) \tag{3.31}$$

pour tout borélien de $\Gamma \in \mathcal{B}or(\mathbb{M}_{N+1}(\mathbb{C}))$ (on rappelle que $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{C}^{N+1}$ et que les états forment un sous ensemble compact de $\mathbb{M}_{N+1}(\mathbb{C})$).

On définit le générateur de Markov du processus $(\rho_n(t))$ de la manière suivante. On notera C_c^2 l'ensemble des fonctions de classe C^2 à support compact définies sur $E = \mathbb{M}_{N+1}(\mathbb{C})$

à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in C_c^2$ et tout état ρ sur $\mathcal{H}_0$, on pose

$$\mathcal{A}_n f(\rho) = n \int_E (f(\mu) - f(\rho)) \Pi_n(\rho, d\mu).$$

L'opérateur $\mathcal{A}_n$ est le générateur de Markov de $(\rho_n(t))$. On a alors pour tout $f \in C_c^2$ et pour tout état ρ

$$\mathcal{A}_n f(\rho) = n \sum_{i=0}^{p} \big(f(\mathcal{L}_i(\rho)) - f(\rho)\big) p^i(\rho).$$

Dans l'article [Pel08c] concernant ce sujet, on fait une identification entre $E = \mathbb{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^p$ où $p = 2^{(N+1)^2}$. Cette identification est un artifice plutôt technique et n'apparaît pas dans les résultats finaux (mis à part sous la forme d'une remarque sur laquelle nous reviendrons dans ce rapport).

Pour déterminer les générateurs des trajectoires quantiques continues, on considère la limite de $\mathcal{A}_n$ quand n tend vers l'infini. On a la proposition suivante basée sur la description des asymptotiques décrites dans la section 2.2.1 du chapitre 2.

Proposition 3.3 ***(Proposition 2 de [Pel08c])*** *Soit $(\rho_n^J(t))$ la trajectoire quantique obtenue par mesures répétées d'une observable A de la forme*

$$A = \lambda_0 + \sum_{I \in I} \lambda_i P_i + \sum_{j \in J} \lambda_j P_j$$

et soit $\mathcal{A}_n^J$ son générateur de Markov. On a les résultats de convergence suivants.

1. *Si $I = \{1, \ldots, p\}$, on a pour tout $f \in C_c^2$:*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\rho \in \mathcal{S}} \left| \mathcal{A}_n^J f(\rho) - \mathcal{A}^J f(\rho) \right| \tag{3.32}$$

où $\mathcal{A}^J$ est un opérateur infinitésimal défini par

$$\mathcal{A}^J f(\rho) \;=\; D_\rho f\Big(\mathcal{L}(\rho)\Big) + \int_E \Big[f\Big(\rho + \mu\Big) - f(\rho) - D_\rho f(\mu) \Big] \Pi(\rho, d\mu). \tag{3.33}$$

Le terme Π désigne un noyau de transition défini par

$$\Pi(\rho, d\mu) = \sum_{i=1}^{p} v_i(\rho) \delta_{g_i(\rho)}(d\mu).$$

2. *Si $I \neq \{1, \ldots, p\}$, on a pour tout $f \in C_c^2(E)$:*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\rho \in \mathcal{S}} \left| \mathcal{A}_n^J f(\rho) - \mathcal{A}^J f(\rho) \right| \tag{3.34}$$

où $\mathcal{A}^J$ est un opérateur infinitésimal défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^J f(\rho) &= D_\rho f(\mathcal{L}(\rho)) + \frac{1}{2}\sum_{i\in J\bigcup\{0\}} D^2_\rho f(h_i(\rho), h_i(\rho)) \\ &\quad + \int_E [f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)]\,\Pi(\rho, d\mu), \end{aligned} \tag{3.35}$$

Le terme Π désigne un noyau de transition défini par

$$\Pi(\rho, d\mu) = \sum_{i\in I} v_i(\rho)\delta_{g_i(\rho)}(d\mu).$$

Voila donc les différentes expressions concernant les générateurs limites. Ceux-ci vont nous permettre de décrire les processus limites dans la section suivante.

Problèmes de martingales

Dans cette section, on présente comment définir un modèle stochastique, en théorie de la mesure quantique de type continu, à partir de la solution d'un problème de martingale.

Pour tout processus (ρ_t), on notera $\mathcal{F}^\rho_t = \sigma(\rho_s, s \leq t)$. Dans notre situation la notion de problème de martingale s'exprime de la façon suivante.

Définition 3.4 *Soit I et J deux sous ensembles formant une partition de $\{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{A}^J$ le générateur correspondant, défini dans la proposition 3.3 et soit ρ_0 un état sur $\mathcal{H}_0$.*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Alors le processus (ρ_t) est solution du problème de martingale $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ si le processus

$$\mathcal{M}^t_f := f(\rho_t) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}^J f(\rho_s)ds$$

est une $\mathcal{F}^\rho_t$ martingale pour tout $f \in C^2_c$.

On dira que le problème de martingale admet une unique solution si toutes les solutions ont même loi.

Dans cette définition, il est important de préciser que définir une solution pour un problème de martingale nécessite de définir également un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Les solutions des problèmes de martingale, dans notre situation, sont donc données par les équations différentielles décrites dans la section 2.3.5.

Théorème 3.4 ***(Proposition 3 et Théorème 3 de [Pel08c])*** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sur lequel vivent un mouvement brownien $p+1$ dimensionnel $(W_t) = (W_0(t), \ldots, W_p(t))$ et p processus de Poisson (N_i), $i = 1, \ldots, p$ mutuellement indépendants et indépendants du mouvement brownien.*

Alors dans le cas $I \neq \emptyset$, le processus (ρ_t^J) solution de

$$\begin{aligned}\rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i\left(\rho_{s-}^J\right)} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

est la solution du problème de martingale pour $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ dans le cas où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^J f(\rho) &= D_\rho f(\mathcal{L}(\rho)) + \frac{1}{2}\sum_{i\in J\bigcup\{0\}} D_\rho^2 f(h_i(\rho), h_i(\rho)) \\ &\quad + \int_E \left[f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)\right]\Pi(\rho, d\mu).\end{aligned}$$

Dans le cas $I = \emptyset$, le processus (ρ_t^J) solution de

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i\left(\rho_{s-}^J\right)} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right].$$

est la solution du problème de martingale pour $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ dans le cas où

$$\mathcal{A}^J f(\rho) = D_\rho f(\mathcal{L}(\rho)) + \int_E \left[f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)\right]\Pi(\rho, d\mu).$$

Dans ce théorème il y a deux choses à vérifier. Premièrement que la solution de l'équation différentielle stochastique répond bien au problème de martingale et deuxièmement que le problème de martingale admet une unique solution.

Concernant la première partie il s'agit d'une conséquence de la formule d'Ito pour les processus stochastiques. La deuxième partie vient du fait que la solution de l'équation différentielle est unique (cf [EK86]).

Nous allons finir cette sous-section par quelques remarques.

La première concerne l'unicité en loi du problème de martingale et l'identification entre $E = \mathbb{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}$. Classiquement, dans la littérature concernant les générateurs de Markov, on définit ces générateurs de la manière suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(\rho) &= \sum_{i=1}^{2^{(N+1)^2}} b_i(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2^{(N+1)^2}} a_{ij}(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}} \left[f(\rho+\mu) - f(\rho) - \sum_{i=1}^{2^{(N+1)^2}} \mu_i \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i}\right]\Pi(\rho, d\mu),\end{aligned} \tag{3.37}$$

où la matrice $a(.) = (a_{ij}(.))$ est semi définie positive et mesurable et où les $b_i(.)$, $i = 1, \ldots, 2^{(N+1)^2}$ sont des fonctions mesurables. Ici le noyau de transition est défini sur $\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}$, il satisfait

$$\Pi(\rho, d\mu) = \sum_{i \in I} v_i(\rho) \delta_{g_i(\rho)}(d\mu).$$

Il faut remarquer que dans cette écriture les fonctions g_i et v_i sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}$.

Si on développe les termes Df et $D^2 f$ dans l'expression des générateurs de Markov limites, alors il est évident que l'on obtient une expression similaire à celle-ci.

Etudions donc la forme de la solution du problème de martingale dans une telle configuration.

Pour résoudre le problème de martingale associé à ce type de générateur, on considère un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel vivent alors un mouvement brownien $2^{(N+1)^2}$ dimensionnel (W_t) et p processus de Poisson N_i, $i = 1 \ldots, p$ mutuellement indépendants et indépendants de W. On pose la matrice $\sigma(.)$ telle que $\sigma(.)\sigma^t(.) = a(.)$, on pose $b(.) = (b_1(.), \ldots, b_{2^{(N+1)^2}}(.))$ et on définit l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t b(\rho_{s-}^J) ds + \int_0^t \sigma(\rho_s^J) dW_s \\ &\quad + \sum_{k \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_k(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0 < x < v_k(\rho_{s-}^J)} \left[N_k(dx, ds) - dx ds \right]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ici le processus (ρ_t^J) est à valeurs dans $\mathbb{R}^{2^{(N+1)^2}}$.

Il est donc intéressant de remarquer que l'on a besoin ici d'un mouvement brownien $2^{(N+1)^2}$ dimensionnel dépendant de la dimension de $\mathcal{H}_0$, alors que dans l'expression précédente, on travaillait avec un mouvement $p+1$ dimensionnel qui dépendait du nombre de valeurs propres de l'observable A de $\mathcal{H}$.

Ainsi, nous avions $p \leq K$. Le paramètre K est en réalité imposé par les conditions de l'expérience physique alors que le paramètre $2^{(N+1)^2}$ (même si N correspond à la dimension de $\mathcal{H}_0$) est purement mathématique.

La deuxième remarque concerne le fait que le théorème 3.4 redonne l'expression des équations classiques. On retrouve immédiatement l'expression dans le cas avec sauts si on applique ces résultats en dimension 2 avec une observable diagonale, alors que l'on a une expression faisant intervenir deux browniens dans l'équation diffusive. En réalité on peut observer ici que les coefficients devant le mouvement brownien satisfont $h_0 = -h_1$ et retrouver la même expression. Fermons ici ces parenthèses qui relèvent plus de simples constatations que de fait profonds.

Convergence des trajectoires discrètes

Introduisons ici les outils permettant de conclure quant à la convergence des processus $(\rho_n(t)$ vers les solutions des équations différentielles stochastiques. Nous allons ici procéder

de manière plus classique en théorie de la convergence des processus. Nous allons, en effet, montrer que les lois fini-dimensionnelles des trajectoires quantiques discrètes convergent vers les lois fini-dimensionnelles des solutions des équations différentielles stochastiques. Puis pour conclure nous montrerons que les trajectoires quantiques sont des processus relativement compacts (propriété de tension).

Rappelons que l'on a définit les modèles continus à partir de la donnée de générateurs infinitésimaux provenant de la convergence des générateurs des trajectoires quantiques discrètes. Il est donc naturel que la convergence des processus discrets vers les processus continus s'appuie sur la convergence de ces générateurs. Le résultat, concernant les générateurs, associé à l'unicité de la solution (en loi) du problème de martingale va nous permettre de montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles. Nous résumons ici les résultats concernant le théorème 4 et les propositions 5 et 6 de l'article [Pel08c].

Théorème 3.5 *Soit ρ_0 un état sur $\mathcal{H}_0$. Soit $\mathcal{A}^J$ le générateur infinitésimal du processus de Markov (ρ_t^J) solution de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned}\rho_t^J &= \rho_0 + \int \mathcal{L}(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx,ds) - dxds\right].\end{aligned}$$

Soit $(\rho_n^J(.))$ la trajectoire quantique discrète correspondant à cette équation (celle dont le générateur permet, à la limite, de définir $\mathcal{A}^J$). Soit $\mathcal{F}_t^n$ le filtration naturelle associée au processus $(\rho_n(t))$.

Alors le processus $(\rho_n^J(.))$ est $(\mathcal{F}_t^n)$ adapté et pour tout $m \geq 0$, pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, pour toutes fonctions $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ et pour toute fonction f in C_c^2 on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t)) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] = 0. \tag{3.39}$$

De plus le processus $(\rho_n^J(.))$ est relativement compact.

En conclusion, comme le problème de martingale $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ admet une unique solution, la trajectoire quantique discrète $(\rho_n^J(.))$ converge en loi vers la trajectoire quantique continue (ρ_t^J).

Donnons quelques éléments permettant de montrer la convergence en loi à partir des conditions satisfaites par la trajectoire quantique discrète (ρ_t^J).

La condition (3.39) provient de façon naturelle de la convergence des générateurs (la démonstration de ce résultat est facilitée par le caractère uniforme de la convergence des générateurs). C'est cette propriété qui exprime la convergence des lois fini-dimensionnelles de $(\rho_n^J(t))$. La relative compacité nous permet alors de conclure à la convergence en lois des processus.

Cette démarche est classique dans ce type de conclusion, dans les cas classiques ces propriétés sont également satisfaites mais elles n'interviennent pas directement dans les preuves.

En effet, comme la suite de processus (ρ_t^J) est relativement compact, si (Y_t) désigne un procesus limite d'une suite extraite de $(\rho_n^J(t))$, alors la convergence en loi de la sous suite extraite et la condition (3.39) impliquent nécessairement

$$\mathbf{E}\left[\left(f(Y_{t+s}) - f(Y_t) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^J f(Y_s)\right) \prod_{i=1}^m \theta_i(Y_{t_i})\right] = 0, \tag{3.40}$$

pour tout $m \geq 0$, pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, pour toutes fonctions $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ et pour toute fonction f in C_c^2.

La condition (3.40), satisfaite par le processus (Y_t), entraîne le fait que ce processus est un processus de Markov et qu'il est solution du problème de martingale $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$. En conséquence, par unicité du problème de martingale, les processus (Y_t) et (ρ_t^J) ont même loi. Ainsi toute sous suite extraite de $(\rho_n^J(t))$,qui converge en loi, converge en loi vers (ρ_t^J). La propriété de relative compacité entraîne la convergence en loi de la suite $(\rho_n^J(t))$ vers (ρ_t^J).

Remarque La solution du problème de martingale associée à $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ est un processus de Markov par rapport à sa filtration naturelle. Cela vient naturellement du fait que $\mathcal{A}^J$ définit un générateur de Markov et que le problème de martingale associé à ce générateur admet une unique solution (cf [EK86]).

Ceci conclue la première partie correspondant à un exposé des notions utilisées dans l'ensemble de nos résultats. La deuxième partie est consacrée à la présentation de 5 articles qui reprennent en détails tous les résultats exposés dans le chapitre 2 avec les preuves complètes.

Bibliographie

[AJ07] S. Attal and A. Joye. The Langevin equation for a quantum heat bath. *J. Funct. Anal.*, 247(2) :253–288, 2007.

[AJP06a] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. I*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[AJP06b] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. II*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[AJP06c] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[AP05] S. Attal and Y. Pautrat. From $(n+1)$-level atom chains to n-dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.

[AP06] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[AP08] S. Attal and C. Pellegrini. Return to equilibrium and heat baths for quantum trajectories. 2008.

[Att03] S Attal. Approximating the Fock space with the toy Fock space. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 477–491. Springer, Berlin, 2003.

[Att08] S Attal. *The Theory of Quantum Noises.* book to appear. Springer Verlag, 2008.

[Bar89] A. Barchielli. Probability operators and convolution semigroups of instruments in quantum probability. *Probab. Theory Related Fields*, 82(1) :1–8, 1989.

[Bar91] A. Barchielli. Applications of quantum stochastic calculus to quantum optics. In *Quantum probability & related topics*, QP-PQ, VI, pages 111–125. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[Bar93a] A. Barchielli. Quantum stochastic calculus, measurements continuous in time, and heterodyne detection in quantum optics. In *Classical and quantum systems (Goslar, 1991)*, pages 488–491. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.

[Bar93b] A. Barchielli. Stochastic differential equations and a posteriori states in quantum mechanics. In *Proceedings of the International Quantum Structures Association, Part II (Castiglioncello, 1992)*, volume 32, pages 2221–2233, 1993.

[Bar94] A. Barchielli. Some stochastic differential equations in quantum optics and measurement theory : the case of counting processes. In *Stochastic evolution of quantum states in open systems and in measurement processes (Budapest, 1993)*, pages 1–14. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.

[Bar06] A Barchielli. Continual measurements in quantum mechanics and quantum stochastic calculus. In *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Math.*, pages 207–292. Springer, Berlin, 2006.

[BB91] A. Barchielli and V. P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 24(7) :1495–1514, 1991.

[Bel99] V. P. Belavkin. Measurement, filtering and control in quantum open dynamical systems. *Reports on Mathematical Physics*, 45 :353, 1999.

[Bel02] V. P. Belavkin. Quantum causality, stochastics, trajectories and information. *Rep. Progr. Phys.*, 65(3) :353–420, 2002.

[Bel03] V. P. Belavkin. Quantum trajectories, state diffusion, and time-asymmetric eventum mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.*, 42(10) :2461–2485, 2003. Fourth and Fifth Workshop on Time Asymmetric Quantum Theory (Jaca, 2001/Trieste, 2002).

[BGM04] L Bouten, M Guţă, and H Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[Bil99] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[BL94] N. Bouleau and D. Lépingle. *Numerical methods for stochastic processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication.

[BL04] A. Barchielli and G. Lupieri. Instrumental processes, entropies, information in quantum continual measurements. *Quantum Inf. Comput.*, 4(6-7) :437–449, 2004.

[BL06] A. Barchielli and G. Lupieri. Quantum measurements and entropic bounds on information transmission. *Quantum Inf. Comput.*, 6(1) :16–45, 2006.

[BLP05] N. Bruti-Liberati and E. Platen. On the strong approximation of jump-diffusion processes. Research Paper Series 157, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, April 2005. available at http ://ideas.repec.org/p/uts/rpaper/157.html.

[BMK03] L. Bouten, H. Maassen, and B. Kuemmerer. Constructing the davies process of resonance fluorescence with quantum stochastic calculus. *Optics and Spectroscopy*, 94 :911, 2003.

[BP96] A. Barchielli and A. M. Paganoni. A note on a formula of the Lévy-Khinchin type in quantum probability. *Nagoya Math. J.*, 141 :29–43, 1996.

[BP02] A. Barchielli and A. Paganoni. Stochastic differential equations for trace-class operators and quantum continual measurements. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002)*, volume 227 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 53–67. Dekker, New York, 2002.

[BPZ98] A. Barchielli, A. M. Paganoni, and F. Zucca. On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability. *Stochastic Process. Appl.*, 73(1) :69–86, 1998.

[BR87] O Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. C^*- and W^*-algebras, symmetry groups, decomposition of states.

[BR97] O Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.

[BvH05] L. Bouten and R. van Handel. Quantum filtering : a reference probability approach, 2005.

[BvHJ06] L. Bouten, R. van Handel, and M. James. An introduction to quantum filtering, 2006.

[BZ96] A. Barchielli and F. Zucca. On a class of stochastic differential equations used in quantum optics. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 66 :355–376 (1998), 1996.

[CFY05] P. Cheridito, D. Filipović, and M. Yor. Equivalent and absolutely continuous measure changes for jump-diffusion processes. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3) :1713–1732, 2005.

[Dav76] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[EK86] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[GBS05] J. Gough, V. P. Belavkin, and O. G. Smolyanov. Hamilton-Jacobi-Bellman equations for quantum optimal feedback control. *J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt.*, 7(10) :S237–S244, 2005.

[GKG+07] S Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U. Busk Hoff, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity, 2007.

[GP01] D Gottesman and J Preskill. Secure quantum key distribution using squeezed states. *Physical Review A*, 63 :022309, 2001.

[Har03] S. Haroche. Quantum information in cavity quantum electrodynamics : logical gates, entanglement engineering and 'Schrödinger-cat states'. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 361(1808) :1339–1347, 2003. Practical realizations of quantum information processing (London, 2002).

[HP84] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Comm. Math. Phys.*, 93(3) :301–323, 1984.

[HR06] S Haroche and J-M Raimond. *Exploring the quantum*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2006. Atoms, cavities and photons.

[Jac79] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[Jac04] J. Jacod. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations : limit theorems. *Ann. Probab.*, 32(3A) :1830–1872, 2004.

[JKMP05] J. Jacod, T. G. Kurtz, S. Méléard, and P. Protter. The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :523–558, 2005.

[JP82] J. Jacod and P. Protter. Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques. In *Seminar on Probability, XVI*, volume 920 of *Lecture Notes in Math.*, pages 447–458. Springer, Berlin, 1982.

[JS03] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[KM98] B. Kümmerer and H. Maassen. Elements of quantum probability. In *Quantum probability communications*, QP-PQ, X, pages 73–100. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.

[KP91a] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[KP91b] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[KP91c] T. G. Kurtz and P. Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[KR97a] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 15 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Elementary theory, Reprint of the 1983 original.

[KR97b] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Advanced theory, Corrected reprint of the 1986 original.

[Mey93] P Meyer. *Quantum probability for probabilists*, volume 1538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[MR07] C. M. Mora and R. Rebolledo. Regularity of solutions to linear stochastic Schrödinger equations. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 10(2) :237–259, 2007.

[Par92] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[Pau05] Y. Pautrat. From Pauli matrices to quantum Itô formula. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 8(2) :121–155, 2005.

[Pel08a] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the diffusive case. 2008.

[Pel08b] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the poisson case. 2008.

[Pel08c] C. Pellegrini. Markov chains approximation of jump-diffusion quantum trajectories. 2008.

[Pel08d] C. Pellegrini. Poisson and diffusion approximation of stochastic schrödinger equations with control. 2008.

[Pro04] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[SV06] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.

Deuxième partie

Présentation des articles.

Annexe A

Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Diffusive Case

Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Diffusive Case

Clément PELLEGRINI

Institut C.Jordan
Université C.Bernard, Lyon 1
21, av Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex
France
e-mail : pelleg@math.univ-lyon1.fr

Abstract

Recent developments in quantum physics make heavy use of so-called "quantum trajectories". Mathematically, this theory gives rise to "stochastic Schrödinger equations", that is, perturbation of Schrödinger-type equations under the form of stochastic differential equations. But such equations are in general not of the usual type as considered in the literature. They pose a serious problem in terms of justifying the existence and uniqueness of a solution, justifying the physical pertinence of the equations. In this article we concentrate on a particular case : the diffusive case, for a two-level system. We prove existence and uniqueness of the associated stochastic Schrödinger equation. We physically justify the equations by proving that they are continuous time limit of a concrete physical procedure for obtaining quantum trajectory.

Introduction

Belavkin equations (also called stochastic Schrödinger equations) are classical stochastic differential equations describing the evolution of an open quantum system undergoing a continuous quantum measurement. The solutions of such equations are called quantum trajectories and describe the time evolution of the state of the system. The random nature

of the result of quantum measurement is at the origin of the stochastic character of the evolution.

The first rigorous description of a state undergoing a continuous measurement is due to Davies in [6]. It describes in quantum optics, the behavior of an atom from which we observe the photon emission. This is the so-called "Resonance Fluorescence" experiment (see [10] and [4]) .

In the literature, essentially two kinds of Belavkin equations are considered : they are either driven by a Brownian motion or by a counting process. But the kind of equations which are obtained this way are of non-usual type compared to the usual theory of stochastic differential equations. In particular there is no reference in physics nor in mathematics, where the existence and the uniqueness of the solution of such equations is discussed. Furthemore, the physical justification of the apparition of these equations requires in general quite heavy mathematical framework (Von-Neumann algebra, conditional expectation, filtering...). The high technology of such tools contrasts with the simplicity and the intuition of the physical model.

An approach to such equations, which is physically very intuitive, is the one of repeated quantum interactions. The setup is the following. The continuous measurement model is obtained as a limit of discrete models. This discrete model is a naive approach to the interaction of a simple system interacting with a field. The field is represented as a chain of independent copies of small pieces of environment. The simple system interacts, for a time interval h, with one piece of the environment. After that interaction an observable of the piece of environment is measured. The random result of the measurement induces a random new state for the small system. The small system then interacts again with another piece of the environment for a time interval h. A measurement of the same observable of this second copy is performed. And so on.

This experiment gives rise to a discrete evolution of the state of the small system, which is a Markov chain. The continuous time limit ($h \to 0$) of this evolution should give rise to the quantum trajectories.

Repeated quantum interactions have been considered by Attal-Pautrat in [3] and by Gough in [7]. The continuous limit of repeated quantum interactions is rigorously shown to converge to a quantum stochastic differential equation in [3]. The setup of measuring an observable of the chain after each interaction is considered in [7], but the continuous limit, the existence and the uniqueness of the solutions are not all treated rigorously in this reference.

The aim of this article is to study the diffusive Belavkin equation, to show existence and uniqueness of the solution, to show its approximation by repeated quantum interaction models. The same results for the equation concerning the counting process are developed in another article [16].

This article is structured as follow :

In Section 1, we present the mathematical model of repeated quantum interactions with measurement. We define discrete time quantum trajectories and focus on their probabilistic properties. In particular, it is shown that these processes are classical Markov chains.

Finally we deal with the model of a two-level atom in interaction with a spin chain and we describe the discrete stochastic evolution equations in this setting.

The Section 2 is devoted to the continuous model. We present the two different types of Belavkin equations whose solutions are continuous time quantum trajectories. We then prove existence and uniqueness of solutions in the diffusive case.

The link between discrete and continuous models is provided in section 3. It is shown that particular discrete quantum trajectories (for two-level model) satisfy stochastic equations which are discrete time diffusive equation. We use result of weak convergence of stochastic integrals in order to prove that solutions of diffusive Belavkin stochastic equations are obtained as a limit of discrete trajectories.

A.1 Discrete Quantum Trajectories

We make here precise the mathematical framework to describe the model of discrete quantum trajectories.

A.1.1 Repeated Quantum Measurements

The physical setup is the one of a small quantum system, represented by a Hilbert space $\mathcal{H}_0$, coupled to a field modelled by an infinite chain of identical independent quantum systems. Each piece of the field is represented by a Hilbert space $\mathcal{H}$. Each space is equipped with positive, trace-class operator with trace 1. This operator is called a "state" or "a density matrix". In this section, we present the random character of repeated measurements.

The discrete model of interaction is called "quantum repeated interactions". Each copy $\mathcal{H}$ of the environment interacts with $\mathcal{H}_0$, one after the other, during a time interval of length h. Informations on the evolution of the small system are obtained by performing a measurement of $\mathcal{H}$ after each interaction.

For the first interaction, the compound system is described by the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ and the interaction is characterized by a total Hamiltonian H_{tot} which is a self-adjoint operator on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Its general form is

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes H + H_{int}, \tag{A.1}$$

where H_0 and H are the free Hamiltonians of each system and H_{int} is the interaction Hamiltonian. The operator

$$U = e^{ihH_{tot}}$$

describes the first interaction as follows. In the Schrödinger picture, if ρ denotes any state on the tensor product, the evolution is given by

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^{\star}.$$

After this first interaction, a second copy of $\mathcal{H}$ interacts with $\mathcal{H}_0$ in the same way. And so on...

As the field is supposed to be an infinite chain, the whole sequence of successive interactions is described by the state space

$$\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k, \tag{A.2}$$

where $\mathcal{H}_k$ designs the k-th copy of $\mathcal{H}$. The countable tensor product $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ is defined as follows. We consider that $\mathcal{H}$ is finite dimensional and that $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ is a fixed orthonormal basis of $\mathcal{H}$. The orthogonal projector onto $\mathbb{C}X_0$ is denoted by $|X_0\rangle\langle X_0|$ (this is the bra-ket notation in mathematical physics see the remark below). This is the ground state (or vacuum state) of $\mathcal{H}$. The tensor product is taken with respect to X_0 (for details, see [3]), that is, we define an orthonormal basis of $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ with respect to this vector. It is described as follows.

Let $\mathcal{P}$ be the set of finite subset A of the form $A = \{(n_1, i_1), \ldots, (n_k, i_k)\}$ of $\mathbb{N}^\star \times \{1, \ldots, n\}$ such that the $n_i's$ are two by two disjoint. The orthonormal basis of $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ with respect to X_0 is the family

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}\},$$

where for $A = \{(n_1, i_1), \ldots, (n_k, i_k)\}$, we define X_A as the vector

$$X_0 \otimes \ldots \otimes X_{i_1} \otimes X_0 \otimes \ldots \otimes X_0 \otimes X_{i_2} \otimes \ldots,$$

of $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$, where X_{i_j} appears in the copy number n_j of $\mathcal{H}$. The infinite tensor product allow us to work in a single space but the structure of Hilbert space do not appear explicitly in the rest of the paper.

Remark : A vector Y in a Hilbert space $\mathcal{H}$ is represented by the application $|Y\rangle$ from $\mathbb{C}$ to $\mathcal{H}$ which acts with the following way $|Y\rangle(\lambda) = |\lambda Y\rangle$. The linear form on $\mathcal{H}$ are represented by the operators $\langle Z|$ which acts on the vector $|Y\rangle$ by $\langle Z||Y\rangle = \langle Z, Y\rangle$, where $\langle\, ,\rangle$ denotes the scalar product of $\mathcal{H}$.

The unitary evolution describing the k-th interaction is given by the operator U_k which acts as U on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_k$, whereas it acts as the identity operator on the other copies of $\mathcal{H}$. If ρ is a state on $\mathbf{\Gamma}$, the effect of the k-th interaction is :

$$\rho \mapsto U_k\, \rho\, U_k^\star$$

Hence the result of the k first interactions is described by the operator V_k on $\mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$ defined by the recursive formula :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1} & = & U_{k+1} V_k \\ V_0 & = & I \end{array} \right. \tag{A.3}$$

and the evolution of states is then given, in the Schrödinger picture, by :

$$\rho \mapsto V_k\, \rho\, V_k^\star. \tag{A.4}$$

We present now the indirect measurement principle. The idea is to perform a measurement of an observable of the field after each interaction.

A measurement of an observable of $\mathcal{H}_k$ is modelled as follows. Let A be any observable on $\mathcal{H}$, with spectral decomposition $A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j$. We consider its natural ampliation on $\mathbf{\Gamma}$:

$$A^k := \bigotimes_{j=0}^{k-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{j \geq k+1} I. \tag{A.5}$$

The result of the measurement of A^k is random, the accessible data are its eigenvalues. If ρ denotes the reference state of $\mathbf{\Gamma}$, the observation of λ_i is obtained with probability

$$P[\text{to observe } \lambda_j] = Tr[\,\rho\, P_j^k\,], \quad j \in \{1, \ldots, p\},$$

where P_i^k is the ampliation of P_i in the same way as $(A.5)$. If we have observed the eigenvalue λ_j the "projection postulate" called "wave packet reduction" imposes that the state after measurement is

$$\rho_j = \frac{P_j^k\, \rho\, P_j^k}{Tr[\,\rho\, P_j^k\,]}\,.$$

Remark : This corresponds to the new reference state depending on the result of the observation. Another measurement of the observable A^k (with respect to this new state), would give $P[\text{to observe } \lambda_j] = 1$ (for $P_i P_j = 0$ if $i \neq j$). This means that only one measurement after each interaction gives a significant information. This justifies the principle of repeated interactions.

The repeated quantum measurements are the combination of the previous description and the successive interactions $(A.4)$. After each interaction, the measurement procedure involves a random modification of the system. It defines namely a sequence of random states which is called : "discrete quantum trajectory".

The initial state on $\mathbf{\Gamma}$ is chosen to be

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{j \geq 1} \beta_j$$

where ρ is any state on $\mathcal{H}_0$ and each $\beta_i = \beta$ is a fixed state on $\mathcal{H}$. We denote by μ_k the new state after k interactions, that is :

$$\mu_k = V_k\, \mu\, V_k^\star.$$

The probability space describing the experience of repeated measurements is $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$ where $\Omega = \{1, \ldots, p\}$. The integers i correspond to the indexes of the eigenvalues of A. We endow $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$ with the cylinder σ-algebra generated by the sets :

$$\Lambda_{i_1, \ldots, i_k} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^\star} / \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_k = i_k\}.$$

Note that for all j, the unitary operator U_j commutes with all P^k, for $k < j$. For any set $\{i_1, \ldots, i_k\}$, we can define the following non normalized state

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k) &= (I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots)\ \mu_k\ (I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots) \\ &= (P_{i_k}^k \ldots P_{i_1}^1)\ \mu_k\ (P_{i_1}^1 \ldots P_{i_k}^k). \end{aligned}$$

It is the non-normalized state which corresponds to the successive observation of the eigenvalues $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ during the k first measurements. The probability to observe these eigenvalues is

$$P[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}] = P[\text{to observe } (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})] = Tr[\tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k)].$$

This way, we define a probability measure on the cylinder sets of $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$ which satisfies the Kolmogorv Consistency Criterion. Hence it defines a unique probability measure on $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$. The discrete quantum trajectory on $\mathbf{\Gamma}$ is then given by the following random sequence of states :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho}_k : & \Omega^{\mathbb{N}^\star} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma}) \\ & \omega & \longmapsto & \tilde{\rho}_k(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \frac{\tilde{\mu}(\omega_1,\ldots,\omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}(\omega_1,\ldots,\omega_k)]} \end{array}$$

From the construction and the remarks above, the following is immediate.

Proposition 1 *Let $(\tilde{\rho}_k)$ be the above random sequence of states, we have for all $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^\star}$:*

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\omega) = \frac{P^{k+1}_{\omega_{k+1}}\, U_{k+1}\, \tilde{\rho}_k(\omega)\, U^\star_{k+1}\, P^{k+1}_{\omega_{k+1}}}{Tr\left[\, \tilde{\rho}_k(\omega)\, U^\star_{k+1}\, P^{k+1}_{\omega_{k+1}}\, U_{k+1}\right]}.$$

The following theorem is an easy consequence of the previous proposition.

Theorem 1 *The discrete quantum trajectory $(\tilde{\rho}_n)_n$ is a Markov chain, with values on the set of states of $\mathcal{H}_0 \bigotimes_{i\geq 1} \mathcal{H}_i$. It is described as follows :*

$$P\left[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n, \ldots, \tilde{\rho}_0 = \theta_0\right] = P\left[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n\right]$$

If $\tilde{\rho}_n = \theta_n$, the random state $\tilde{\rho}_{n+1}$ takes one of the values :

$$\frac{P^{n+1}_i\, (U_{n+1}(\theta_n \otimes \beta) U^\star_{n+1})\, P^{n+1}_i}{Tr\left[\, (U_{n+1}\, (\theta_n \otimes \beta)\, U^\star_{n+1})\, P^{n+1}_i\, \right]} \quad i = 1, \ldots, p$$

with probability $Tr\left[\, (U_{n+1}\, (\theta_n \otimes \beta)\, U^\star_{n+1})\, P^{n+1}_i\, \right]$.

In general, one is more interested into the reduced state on the small system $\mathcal{H}_0$ only. This state is given by taking a partial trace on $\mathcal{H}_0$. Let us recall what partial trace is. If $\mathcal{H}$ is any Hilbert space, we denote by $Tr_{\mathcal{H}}[W]$ the trace of a trace-class operator W on $\mathcal{H}$.

Definition-Theorem 1 *Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ be two Hilbert spaces. If α is a state on a tensor product $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, then there exists a unique state η on $\mathcal{H}$ which is characterized by the property*

$$Tr_{\mathcal{H}}[\, \eta\, X\,] = Tr_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}[\, \alpha\, (X \otimes I)\,].$$

for all $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. This unique state η is called the partial trace of α on $\mathcal{H}$ with respect to $\mathcal{K}$.

Let $\mathbf{E}_0(\alpha)$ denote the partial trace on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\bigotimes_{k\geq 1}\mathcal{H}_k$ of any state α on $\mathbf{\Gamma}$. We define a random sequence of states on $\mathcal{H}_0$ as follows. For all ω in $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$, define the discrete quantum trajectory on $\mathcal{H}_0$

$$\rho_n(\omega) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_n(\omega)]. \tag{A.6}$$

An immediate consequence of Theorem 1 is the following result.

Theorem 2 *The quantum trajectory $(\rho_n)_n$ defined by formula (A.6) is a Markov chain with values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. If $\rho_n = \chi_n$, then ρ_{n+1} takes one of the values :*

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{(I\otimes P_i)\,U(\chi_n\otimes\beta)U^\star\,(I\otimes P_i)}{Tr[\,U(\chi_n\otimes\beta)U^\star\,(I\otimes P_i)]}\right]\quad i=1\ldots p$$

with probability $Tr\,[U(\chi_n\otimes\beta)U^\star\,(I\otimes P_i)]$.

Remark : Let us stress that :

$$\frac{(I\otimes P_i)\,U\,(\chi_n\otimes\beta)\,U^\star\,(I\otimes P_i)}{Tr[\,U\,(\chi_n\otimes\beta)\,U^\star\,(I\otimes P_i)]}$$

is a state on $\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{H}$. In this situation, the notation $\mathbf{E}_0$ denotes the partial trace on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\mathcal{H}$. The infinite tensor product $\mathbf{\Gamma}$ is just needed to have a clear description of the repeated interactions and the probability space $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$.

The next section is devoted to the particular case of a two-level atom in contact with a photon stream. Because of physical considerations, this case is often the central case in the literature concerning continuous measurement.

A.1.2 A Two-Level Atom

The Hilbert spaces describing the physical situation are now $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

In this section, we establish a discrete quantum evolution equation for (ρ_n) which is a discrete approximation of the Belavkin equation.

The main goal of this section is to obtain a formula of the following form

$$\rho_{k+1} = f(\rho_k, X_{k+1}). \tag{A.7}$$

where $(X_k)_k$ is a sequence of random variables. Such a formula is obtained from the description of Theorem 2 and the computation of the partial trace operation.

The state ρ_k can be namely considered as an initial state (according to the Markov property of Theorem 2). Thus we can consider a single interaction with a system $(\mathcal{H},\beta)$ (actually this is the $k+1$-th copy). We consider an observable of the form $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ and the unitary operator describing the interaction is a unitary 4×4 unitary matrix.

In order to compute the state given by the projection postulate and the partial trace, we choose a suitable basis. If $(X_0 = \Omega, X_1 = X)$ is an orthonormal basis of $\mathbb{C}^2$, for the

space $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ we consider the following basis $\Omega \otimes \Omega, X \otimes \Omega, \Omega \otimes X, X \otimes X$. In this basis, the unitary-operator U can be written by blocks in the following way :

$$U = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}$$

where each L_{ij} are operators on $\mathcal{H}_0$. For β we choose

$$\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|.$$

As a consequence, the state after the interaction is

$$\mu_{k+1} = U(\rho_k \otimes \beta)U^\star = \begin{pmatrix} L_{00}\rho_k L_{00}^\star & L_{00}\rho_k L_{10}^\star \\ L_{10}\rho_k L_{00}^\star & L_{10}\rho_k L_{10}^\star \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Thanks to the description of Theorem 2, we define the two possible non-normalized states

$$\mathcal{L}_0(\rho_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_0(\mu_{k+1}) I \otimes P_0], \tag{A.9}$$

$$\mathcal{L}_1(\rho_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_1(\mu_{k+1}) I \otimes P_1]. \tag{A.10}$$

These are operators on $\mathcal{H}_0$, the non-normalized state $\mathcal{L}_0(\rho_k)$ appears with probability $p_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)]$ and $\mathcal{L}_1(\rho_k)$ with probability $q_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)]$.

Let define the random variable ν_{k+1} on $\{0, 1\}$:

$$\begin{cases} \nu_{k+1}(0) = 0 & \text{with probability } p_{k+1}, \\ \nu_{k+1}(1) = 1 & \text{with probability } q_{k+1}. \end{cases}$$

With these notations, the discrete quantum trajectory can be described as follows. For all $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^\star}$, we have

$$\rho_{k+1}(\omega) = \frac{\mathcal{L}_0(\rho_k(\omega))}{p_{k+1}(\omega)}(1 - \nu_{k+1}(\omega)) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_k(\omega))}{q_{k+1}(\omega)}\nu_{k+1}(\omega)\,. \tag{A.11}$$

In order to obtain the final discrete quantum evolution equation, we consider the centered and normalized random variable

$$X_{k+1} = \frac{\nu_{k+1} - q_{k+1}}{\sqrt{q_{k+1}p_{k+1}}}\,.$$

We define the associated filtration on $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^\star}$:

$$\mathcal{F}_k = \sigma(X_i, i \leq k).$$

By construction, we have $\mathbf{E}[X_{k+1}/\mathcal{F}_k] = 0$ and $\mathbf{E}[X_{k+1}^2/\mathcal{F}_k] = 1$. Thus we can write the discrete evolution equation for the quantum trajectory in terms of the random variables (X_k) :

$$\rho_{k+1} = \mathcal{L}_0(\rho_k) + \mathcal{L}_1(\rho_k) + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_k) + \sqrt{\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_k)\right] X_{k+1}\,. \tag{A.12}$$

The above equation can be considered in a general way and the unique solution starting from ρ_0 is the discrete quantum trajectory described in Theorem 2. Let us stress that this sequence depends on the length time of interaction. This dependence will allow us to prove a continuous time approximation result in Section 3. For the moment, next section is devoted to describing continuous time quantum trajectories.

A.2 Belavkin Equations

As announced in the introduction, it is commonly assumed that the evolution of a system undergoing a continuous measurement is described by stochastic differential equations. A model of interaction can be provided to describe an atom in contact with a continuous field. In this setting, the description of the principle of indirect measurement needs high technical tools in order to obtain rigorous statements. Such theories are not the purpose of this article. We just give the physical setup in order to introduce the Belavkin stochastic differential equations.

Consider a two-level system, described by $\mathbb{C}^2$, in interaction with an environment (classically described by a Fock space). The time evolution is given by a unitary-process (U_t) which satisfies a quantum stochastic differential equation (cf [15]). Without measurement the evolution of the small system is given by a norm continuous semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$. The Linblad generator of (T_t) is denoted by L and we have the "Master Equation" :

$$\frac{d\rho_t}{dt} = L(\rho_t) = -i[H_0, \rho_t] - \frac{1}{2}\{C^\star C, \rho_t\} + C\rho_t C^\star$$

where C is any operator on $\mathbb{C}^2$ and H_0 is the Hamiltonian of the atom.

In the theory of time continuous measurement L is decomposed as the sum of $\mathcal{L} + \mathcal{J}$ where $\mathcal{J}$ represents the instantaneous state change taking place when detecting a photon, and $\mathcal{L}$ describes the smooth state variation in between these instants. These operators are defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) &= -i[H_0, \rho] - \frac{1}{2}\{C^\star C, \rho\}, \\ \mathcal{J}(\rho) &= C\rho C^\star. \end{aligned}$$

Thanks to the works of Davies in [6], two types of stochastic differential equations can be derived. The solutions of these equations are then called "continuous-time quantum trajectories".

1. The "diffusive equation" (Homodyne detection experiment) is given by

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + [\rho_t C^\star + C\rho_t - Tr\left(\rho_t(C + C^\star)\right)\rho_t]dW_t \tag{A.13}$$

   where W_t describes a one-dimensional Brownian motion.

2. The "jump equation" (Resonance fluorescence experiment) is

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt) \tag{A.14}$$

where $\tilde{N}_t$ is a counting process with stochastic intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$.

A physical justification of equation $(A.13)$ as limit of discrete quantum trajectories, is given in Section 3. For the moment, we shall focus on the general problem of existence and uniqueness of a solution of equation $(A.13)$. The jump-equation and all the convergence theorems referring to this case are treated in detail in [16] with different technics.

A.2.1 Existence and Uniqueness

Let ρ_0 be any state, we aim to show existence and uniqueness for the stochastic differential equation

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s)ds + \int_0^t [\rho_s C^\star + C\rho_s - Tr[(\rho_s(C + C^\star))\,\rho_s]dW_s. \tag{A.15}$$

Classical theorems concerning existence and uniqueness for SDE cannot be applied directly here for the coefficients of the equation (A.15) are not Lipschitz. Furthermore, even if there exists a solution, one must show that the solution takes values in the set of states. Actually this property and the questions of existence and uniqueness are linked.

Concerning the property of being valued in the set of states, an important feature of the differential equation (A.15) is that it preserves the property to be a pure state (in quantum theory, a pure state is a one dimensional projector). This idea is expressed in the following proposition.

Proposition 2 *Let (W_t) be a standard Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ and let $|\psi_0\rangle$ be any norm 1 vector in $\mathbb{C}^2$. Let $\nu_t = \frac{1}{2}\langle\psi_t, (C + C^\star)\psi_t\rangle$ where C is any operator on $\mathbb{C}^2$.*

If the following stochastic equation :

$$d|\psi_t\rangle \;=\; (C - \nu_t I)|\psi_t\rangle dW_t + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2 I\right)\right)|\psi_t\rangle dt \tag{A.16}$$

admits a solution $(|\psi_t\rangle)$, then almost surely we have $\|\psi_t\| = 1$ for all t.

Furthermore the process $(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$ takes values in the set of pure states and it is a solution of the diffusive Belavkin equation $(A.15)$.

Proof: Let $|\psi_0\rangle$ be any vector in $\mathbb{C}^2$ and let $(|\psi_t\rangle)$ be a solution of $(A.16)$. Let us prove that $\|\psi_t\|^2 = 1$. Using the Ito Formulas and the fact that H is self-adjoint, a straightforward

computation shows that

$$\begin{aligned}
d\|\psi_t\|^2 &= d\langle\psi_t,\psi_t\rangle = \langle d\psi_t,\psi_t\rangle + \langle\psi_t,d\psi_t\rangle + \langle d\psi_t,d\psi_t\rangle \\
&= \langle(C-\nu_t I)\psi_t,\psi_t\rangle dW_t + \langle(-iH_0 - \frac{1}{2}(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2 I)\psi_t,\psi_t\rangle dt \\
&\quad +\langle\psi_t,(C-\nu_t I)\psi_t\rangle dW_t + \langle\psi_t,(-iH_0 - \frac{1}{2}(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2 I)\psi_t\rangle dt \\
&\quad +\langle(C-\nu_t I)\psi_t,(C-\nu_t I)\psi_t\rangle dt \\
&= (2\nu_t - 2\nu_t\langle\psi_t,\psi_t\rangle)dW_t.
\end{aligned}$$

If $\|\psi_0\|^2 = 1$, this implies that almost surely

$$\|\psi_t\|^2 = \|\psi_0\|^2 = 1.$$

for all $t \geq 0$. Define the process $\rho_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$. It is valued in the set of pure states. As $\|\psi_t\| = 1$, we have for all $y \in \mathbb{C}^2$

$$\rho_t|y\rangle = \langle\psi_t,y\rangle|\psi_t\rangle.$$

Hence we can compute $d\,\rho_t|y\rangle$ by the Ito Formula :

$$\begin{aligned}
d\,\rho_t|y\rangle &= \langle d\psi_t,y\rangle|\psi_t\rangle + \langle\psi_t,y\rangle d|\psi_t\rangle + \langle d\psi_t,y\rangle d|\psi_t\rangle \\
&= \langle(C-\nu_t)\psi_t,y\rangle|\psi_t\rangle dW_t + \langle(-iH_0 - \frac{1}{2}(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2)\psi_t,y\rangle|\psi_t\rangle dt \\
&\quad +\langle\psi_t,y\rangle(C-\nu_t)|\psi_t\rangle dW_t + \langle\psi_t,y\rangle(-iH_0 - \frac{1}{2}(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2)|\psi_t\rangle dt \\
&\quad +\langle(C-\nu_t)\psi_t,y\rangle(C-\nu_t)|\psi_t\rangle\, dt
\end{aligned}$$

Let us show that this corresponds to the equation $(A.15)$. It is clear that $\nu_t = \frac{1}{2}\langle\psi_t,(C+C^\star)\psi_t\rangle$ corresponds to the term $\frac{1}{2}Tr\big[|\psi_t\rangle\langle\psi_t|(C+C^\star)\big]$. As a consequence the term in front of the Brownian motion becomes

$$\begin{aligned}
&\langle(C-\nu_t)\psi_t,y\rangle|\psi_t\rangle + \langle\psi_t,y\rangle(C-\nu_t)|\psi_t\rangle \\
&\qquad = \big(C|\psi_t\rangle\langle\psi_t| + |\psi_t\rangle\langle\psi_t|C^\star - Tr\big[|\psi_t\rangle\langle\psi_t|(C+C^\star)\big]|\psi_t\rangle\langle\psi_t|\big)\,|y\rangle.
\end{aligned}$$

A similar computation show that the term in front of dt is

$$L\big(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|\big)|y\rangle$$

Hence we recover the expression of Belavkin Equation $(A.15)$ and the proposition is proved. □

As a consequence, we can express an existence and uniqueness theorem for equation $(A.15)$. In what follows, we use the notion of "wave function". A wave function is a norm 1 vector which define a pure state.

Theorem 3 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space which supports a standard Brownian motion (W_t) and let ρ_0 be any state on $\mathbb{C}^2$.*

The stochastic differential equation

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s)ds + \int_0^t \left[\rho_s C^\star + C\rho_s - Tr[(\rho_s(C + C^\star))\,\rho_s\right] dW_s$$

admits a unique solution (ρ_t). The solution takes values in the set of states and is defined for all $t \geq 0$.

Furthemore, if the initial condition is a pure state, the solution takes values in the set of pure states. The corresponding stochastic differential equation for a wave function is then given by :

$$d|\psi_t\rangle \;=\; (C - \nu_t)|\psi_t\rangle dW_t + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2\right)\right)|\psi_t\rangle dt$$

where $\nu_t = \frac{1}{2}\langle\psi_t, (C + C^\star)\psi_t\rangle$.

Proof: As the coefficients of (A.15) are not Lipschitz, we cannot apply directly the usual existence and uniqueness theorems for SDE. However, the coefficients are C^∞, hence locally Lipschitz. We can use a truncature method. The equation $(A.15)$ is of the following form :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \Theta(\rho_t)dW_t \tag{A.17}$$

where Θ is C^∞ and $\Theta(A) = AC^\star + CA - Tr\,[A(C + C^\star)]\,A$. Let $k > 1$ be an integer, we define the truncation function φ_k from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ defined by

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} -k & \text{if } x \leq -k \\ x & \text{if } -k \leq x \leq k \\ k & \text{if } -k \leq x \leq k \end{cases}$$

For a matrix $A = (a_{ij})$, we define by extension $\tilde{\varphi}_k(A) = \varphi_k(Re(a_{ij})) + i\varphi_k(Im(a_{ij}))$. Thus the function $\Theta \circ \tilde{\varphi}_k$ is a Lipschitz. Now we consider the truncated equation :

$$d\rho_{k,t} = L \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t})dt + \Theta \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t})dW_t.$$

The Cauchy-Lipschitz Theorem concerning stochastic differential equations can be applied ; there exists a unique solution $t \mapsto \rho_{k,t}$ defined for all t. Besides the solution is continuous in time.

Define the random stopping times

$$T_k = \inf\{t, \exists(ij)/|Re(a_{ij}(\rho_{k,t}))| = k \text{ or } |Im(a_{ij}(\rho_{k,t}))| = k\}.$$

As ρ_0 is a state, we have $\|\rho_0\| \leq 1$. Thanks to continuity, if k is chosen large enough, we have $T_k > 0$ and for all $t \leq T_k$ we have $\tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t}) = \rho_{k,t}$. Thus $t \mapsto \rho_{k,t}$ is the unique

solution of equation $(A.15)$ (without truncation) on $[0, T_k]$. The usual method for solving an equation with non Lipschitz coefficients is to put $T = \lim_k T_k$ and to show that $T = \infty$.

In addition to the proof of existence of a solution, we must prove that the process is valued in the set of states. If ν is any state, we have $\|\nu\| \leq 1$, so $|\nu(ij)| \leq 1$. Hence if we prove that on $[0, T_2]$ the process $(\rho_{2,t})$ is valued on set of states ; this would prove that $T_2 = \infty$ a.s and we would have proved that there exists a unique solution valued in the set of states. Let us prove this fact.

In the proof of the existence and uniqueness of a solution in the case of Cauchy-Lipschitz coefficients, the solution is obtained as the limit of the sequence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_{n+1}(t) & = & \rho_n(0) + \int_0^t L \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_n(s))ds + \int_0^t \Theta \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_n(s))dW_s \\ \rho_0(t) & = & \rho \end{array} \right. \tag{A.18}$$

With our definition of Θ and L, if ρ_0 is a state, it is clear that this sequence is self-adjoint with trace one. These conditions are closed and at the limit the process is self-adjoint with trace one. But the condition of positivity does not follow from such arguments. we shall prove it by other means.

Consider the random time

$$T^0 = \inf\{t \leq T_2 / \exists X \in \mathbf{C}^2 / \langle X, \rho_{2,t} X\rangle = 0\} \tag{A.19}$$

We have $\langle X, \rho_0 X\rangle \geq 0$ for all X, so by continuity we have $\langle X, \rho_{2,t} X\rangle \geq 0$ on $[0, T^0]$ which implies that $\rho_{2,t}$ is a state for all $t \leq T^0$.

If $T^0 = T_2$ a.s the result is proved. Otherwise, if we have $T^0 < T_2$, then by continuity there exists X such that $\langle X, \rho_{2,T^0} X\rangle = 0$ and for all Y $\langle Y, \rho_{2,T^0} Y\rangle \geq 0$. This implies that ρ_{2,T^0} is a pure state because we work in dimension 2. Let us denote by ψ_{T^0} a vector of norm one such that $\rho_{2,T^0} = |\psi_{T^0}\rangle\langle\psi_{T^0}|$. Consider the equation :

$$d|\psi_t\rangle \;=\; (C - \nu_t)|\psi_t\rangle dW_t + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu_t C + \nu_t^2\right)\right)|\psi_t\rangle dt$$

with ψ_{T^0} as initial condition. The problem of existence and uniqueness for this equation is solved by a truncation method too. The fact that, if we have a solution, it is of norm 1 shows that the solution obtained by truncation (defined for all t) is actually the solution of $(A.16)$. Proposition 2 and the uniqueness of $\rho_{2,t}$ on $[T^0, T_2]$ show that the solution of $(A.16)$ which satisfies

$$|\psi_t\rangle = |\psi_{T^0}\rangle + \int_{T^0}^t (C - \nu_s)|\psi_s\rangle dW_s + \left(-iH_0 - \frac{1}{2}\left(C^\star C - 2\nu_s C + \nu_s^2\right)\right)|\psi_s\rangle ds$$

defines a process $(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$ equals to $\rho_{2,t}$ on $[T^0, T_2]$. Hence the process obtained by truncation is valued on set of states and the Theorem is proved. $\square$

A.2.2 Change of Measure

At this stage, it must be said that the stochastic differential equation usually appearing in the literature is of the following form :

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s)ds + \int_0^t [\rho_s C^\star + C\rho_s - Tr[\rho_s(C + C^\star)]]\, d\tilde{W}_s \tag{A.20}$$

where

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t Tr[\rho_s(C + C^\star)]ds \tag{A.21}$$

Hence it seems to be rather different from equation $(A.15)$. Actually the link between the two different equation is given by the Girsanov's Theorem (see [18]).

Theorem 4 *Let (W_t) be a standard Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ and let H be a bounded càglàd process. Let*

$$X_t = \int_0^t H_s ds + W_t \tag{A.22}$$

and define a new probability by

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T H_s dW s - \frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

for some $T > 0$. Then under Q, the process (X_t) is a standard brownian motion for $0 \leq t \leq T$.

The link between the two equations $(A.15)$ and $(A.20)$ is then obvious. Let (ρ_t) be the solution of equation $(A.15)$ given by Theorem 3 on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. For some $T > 0$, define the probability measure Q by :

$$\frac{dQ}{dt} = \exp\left(\int_0^T Tr[\rho_t(C + C^\star)]dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Tr[\rho_t(C + C^\star)]^2 ds\right) \tag{A.23}$$

The above theorem claims that $\tilde{W}_t$ is a standard Brownian motion under Q for $0 \leq t \leq T$. Hence equation $(A.20)$ is the same equation as $(A.15)$ up to a change of measure. In the following section, we show that the solution of equation $(A.15)$ can be obtained as limit of discrete quantum trajectories.

A.3 Approximation and Convergence

A.3.1 The Discrete Approximation

In this section, we present a way to obtain the solution of the diffusive Belavkin equation $(A.15)$ as a limit of concrete discrete quantum trajectories. Let us show that these

discrete trajectories satisfy evolution equations which appear as approximations of stochastic differential equations.

In Section 1, we had the discrete quantum trajectories satisfying :

$$\rho_{k+1} = \mathcal{L}_0(\rho_k) + \mathcal{L}_1(\rho_k) + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_k) + \sqrt{\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_k) \right] X_{k+1} \,. \tag{A.24}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} - \rho_0 &= \sum_{i=0}^{k} [\rho_{i+1} - \rho_i] \\ &= \sum_{i=0}^{k} [\mathcal{L}_0(\rho_i)) + \mathcal{L}_1(\rho_i) - \rho_i] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k} \left[-\sqrt{\frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_i) + \sqrt{\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_i) \right] X_{i+1} \,. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Let us introduce a time discretization. Consider a partition of $[0, T]$ in subintervals of equal size $1/n$. The time of interaction is supposed now to be $h = 1/n$, the unitary operator depends then on the time interaction :

$$U(n) = \begin{pmatrix} L_{00}(n) & L_{01}(n) \\ L_{10}(n) & L_{11}(n) \end{pmatrix}.$$

In [3], Attal and Pautrat have shown that the asymptotic of the coefficients $L_{ij}(n)$ must be properly rescaled in order to obtain a non-trivial limit when n goes to infinity. Indeed they have shown that $V_{[nt]} = U_{[nt]}(n) \dots U_1(n)$, which represents the discrete dynamic of quantum repeated interactions, converges to a process V_t solution of a Quantum Langevin Equation only if the coefficients L_{ij} obey certain normalizations. When translated to our context, the results of [3] show that we should consider

$$L_{00}(n) = I + \frac{1}{n}\left(-iH_0 - \frac{1}{2}CC^\star \right) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{A.26}$$

$$L_{10}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}C + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{A.27}$$

Remember that the unitary operator is given by

$$U(n) = \exp\left(i\frac{1}{n}\, H_{Tot} \right)$$

The corresponding Hamiltonian H_{tot} which gives the expression $U(n)$ is of the following form :

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[C \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C^\star \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

where H_0 is the Hamiltonian of the small system and C is any operator on $\mathbb{C}^2$.

With the time discretization we then obtain

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}(n) &= \mathcal{L}_0(n)(\rho_k(n)) + \mathcal{L}_1(n)(\rho_k(n)) && \text{(A.28)}\\ &+ \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}(n)}{p_{k+1}(n)}}\mathcal{L}_0(n)(\rho_k(n)) + \sqrt{\frac{p_{k+1}(n)}{q_{k+1}(n)}}\mathcal{L}_1(n)(\rho_k(n))\right] X_{k+1}(n) && \text{(A.29)}\end{aligned}$$

Remember that the sequence of random variables $(X_k(n))$ is defined through the two probabilities :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{k+1} &=& Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)]\,,\\ q_{k+1} &=& Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)]\,.\end{array}\right. \tag{A.30}$$

By definition of (X_k) we have :

$$X_k(n)(i) = \left\{\begin{array}{lll} -\sqrt{\frac{q_{k+1}(n)}{p_{k+1}(n)}} & \text{with probability} & p_{k+1}(n) \text{ if } i=0\,,\\ \sqrt{\frac{p_{k+1}(n)}{q_{k+1}(n)}} & \text{with probability} & q_{k+1}(n) \text{ if } i=1\,.\end{array}\right. \tag{A.31}$$

Each probability depends on the expression of $\mathcal{L}_i$, which depends on the measured observable $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$. At the limit, the diffusive behavior of $\rho_{[nt]}(n)$ is depending on the comportment of (X_k), that is, on the observable.

1. If the observable is of the form $A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, we obtain the following asymptotic for the probabilities :

$$\begin{aligned} p_{k+1}(n) &= 1 - \frac{1}{n} Tr\left[\mathcal{J}(\rho_k(n))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\\ q_{k+1}(n) &= \frac{1}{n} Tr\left[\mathcal{J}(\rho_k(n))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

The discrete equation then becomes :

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}(n) - \rho_k(n) &= \frac{1}{n} L(\rho_k(n)) + \circ(\frac{1}{n})\\ &+ \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_k(n))}{Tr\left[\mathcal{J}(\rho_k(n))\right]} - \rho_k(n) + \circ(1)\right] \sqrt{q_{k+1}(n) p_{k+1}(n)}\, X_{k+1}(n).\end{aligned}$$

2. If the observable A is non diagonal in the basis (Ω, X). For the eigenprojectors, put $P_0 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ and $P_1 = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}$ we have

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left[\rho_k(p_{01}C + p_{10}C^\star)\right] + \frac{1}{n} Tr\left[\rho_k p_{00}(C + C^\star)\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\\ q_{k+1} &= q_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left[\rho_k(q_{01}C + q_{10}C^\star)\right] + \frac{1}{n} Tr\left[\rho_k q_{00}(C + C^\star)\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

The discrete equation here becomes

$$\rho_{k+1} - \rho_k = \frac{1}{n}L(\rho_k) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \left[e^{i\theta}C\rho_k + e^{-i\theta}\rho_k C^\star\right. \tag{A.32}$$

$$\left. -Tr[\rho_k(e^{i\theta}C + e^{-i\theta}C^\star)]\,\rho^k + \circ(1)\right]\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}. \tag{A.33}$$

In this expression, the parameter θ represents a kind of phase. It is real and depends on the coefficients of the eigenprojectors. If we put $C_\theta = e^{i\theta}C$, the discrete equation (A.32) becomes :

$$\rho_{k+1} - \rho_k = \frac{1}{n}L(\rho_k) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + [C_\theta\rho_k + \rho_k C_\theta^\star$$
$$-Tr[\rho_k(C_\theta + C_\theta^\star)]\,\rho_k + \circ(1)]\,\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}.$$

For each θ, we have similar expressions for discrete equations with different operators C_θ. Let us stress that this parameter do not modify the expression of L. In the following, we deal with $\theta = 0$.

In [16], it is shown that the case where A is diagonal gives rise to the jump-Belavkin equation at a continuous limit. In the following section, we show that the diffusive case is obtained as the limit of the discrete process which comes from the measurement of a non-diagonal observable.

A.3.2 Convergence Theorems

Before presenting the main theorem concerning the convergence of discrete quantum trajectories, we show a first result concerning the average of the processes. In order to avoid confusion between the discrete time process (ρ_k) and the continuous time process (ρ_t) we write the discrete process (ρ^k) with the index on the top.

Theorem 5 *Let (Ω, X) be any orthonormal basis of $\mathbb{C}^2$. For all non-diagonal observable A, the deterministic function $t \mapsto\rightarrow \mathbf{E}[\rho^{[nt]}(n)]$ converges in $L^\infty([0,T])$, when n goes to infinity, to the function $t \mapsto\rightarrow \mathbf{E}[\rho_t]$. That is,*

$$\sup_{0<s<T} \|\mathbf{E}[\rho^{[ns]}(n)] - \mathbf{E}[\rho_s]\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Furthemore the function $t \mapsto\rightarrow \mathbf{E}[\rho_t]$ is the solution of the Master equation

$$d\,\nu_t = L(\nu_t)dt.$$

Proof: First of all, we show the second part of the theorem. We can consider the function $t \mapsto\rightarrow \mathbf{E}[\rho_t]$ because we have existence and uniqueness of the solution of equation

$(A.15)$. The process (ρ_t) is integrable (because ρ_t is a state for all t). It is obvious that this function takes also values in the set of states. As ρ_0 is a deterministic state we must show :

$$\mathbf{E}[\rho_t] = \rho_0 + \int_0^t L(\mathbf{E}[\rho_s])ds\,. \tag{A.34}$$

We know that the process (ρ_t) satisfies :

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s)ds + \int_0^t [\rho_s C^\star + C\rho_s - Tr\left(\rho_s(C + C^\star)\right)\rho_s]dW_s$$

As (W_t) is a martingale and the process (ρ_t) is predictable (for it is continuous), the properties of stochastic integral give

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t [\rho_s C^\star + C\rho_s - Tr\left(\rho_s(C + C^\star)\right)\rho_s]dW_s\right] = 0.$$

Hence, we have, by linearity of L,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\rho_t] &= \rho_0 + \int_0^t \mathbf{E}[L(\rho_s)]ds \\ &= \rho_0 + \int_0^t L(\mathbf{E}[\rho_s])ds\,.\end{aligned}$$

We then have the integral form of the solution of the Master equation and the second part is proved.

Let us show now the first part of the theorem. We shall now compare $\mathbf{E}[\rho^{[nt]}(n)]$ with $\mathbf{E}[\rho_t]$. Like in the continuous case, the martingale argument is replaced by the fact that the process (X_k) is centered. Remember that we have

$$\mathbf{E}[X_{k+1}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{k+1}/\mathcal{F}_k]] = 0$$

As a consequence, considering $k = [nt]$ and taking expectation in the discrete equation we have

$$\mathbf{E}[\rho^{[nt]}(n)] - \rho^0 = \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n} L(\mathbf{E}[\rho^k(n)] + \circ(\frac{1}{n})$$

This is a kind of Euler Scheme and we can conclude by a discrete Gronwall Lemma argument that we have

$$\sup_{0<s<t} \|\mathbf{E}[\rho^{[ns]}(n)] - \mathbf{E}[\rho_s]\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

The average of the discrete process is then an approximation of the average of ρ_t. In [3], this result was shown in the case of repeated interactions without measurement. It is a consequence of the asymptotic of the unitary-operator coefficients, so it justifies our choice of the coefficients.

Concerning the convergence of the processes, the discrete process which is the candidate to converge to the diffusive quantum trajectory satisfies for $k = [nt]$

$$\rho^{[nt]} - \rho^0 = \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n} L(\rho^k(n)) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} [\Theta(\rho^k) + \circ(1)] \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i+1}$$

Thanks to this equation we can define the processes :

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \\ V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \\ \rho_n(t) &= \rho^{[nt]}(n) \\ \varepsilon_n(t) &= \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ(\frac{1}{n}) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ(1) \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i+1} \end{aligned} \tag{A.35}$$

By observing that these four processes are piecewise constant, we can write the process $(\rho_n(t))_{t\geq 0}$ like a solution of a stochastic differential equation in the following way :

$$\rho_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t L(\rho_n(s-))dV_n(s) + \int_0^t \Theta(\rho_n(s-))dW_n(s) \tag{A.36}$$

We now use a theorem of Kurtz and Protter (cf [13]) to prove the convergence. Let us first fix some notations.

Recall that the square-bracket $[X, X]$ is defined for a semi-martingale by the formula :

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_{s-} dX_s \,.$$

We shall denote by $T_t(V)$ the total variation of a finite variation processes V on the interval $[0, t]$. The Theorem of Kurtz and Protter [13] that we use is the following.

Theorem 6 *Let W_n be a martingale and V_n be a finite variation process. Consider the process X_n defined by :*

$$X_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t L(X_n(s-)dV_n(s) + \int_0^t \Theta(X_n(s-))dW_n(s) \,.$$

Assume that for each $t \geq 0$:

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] < \infty \,,$$
$$\sup_n \mathbf{E}\big[T_t(V_n)\big] < \infty \,,$$

and that $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ *converges in distribution to* $(W, V, 0)$ *where* W *is a standard Brownian motion and* $V(t) = t$ *for all* t*. Suppose that* X *satisfies :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t L(X_s)ds + \int_0^t \Theta(X_s)dW_s$$

and that the solution of this stochastic differential equation is unique. Then X_n *converges in distribution to* X*.*

We wish to apply this theorem to the process $(\rho_n(t))$ (equation $(A.36)$). The first step is the convergence of W_n in $(A.35)$ to a Brownian motion. We need the following theorem (cf [5] [14]) which is a generalization of the Donsker Theorem.

Theorem 7 *Let* (M_n) *be a sequence of martingales. Suppose that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\sup_{s\leq t} |M_n(s) - M_n(s-)|\right] = 0$$

and

$$[M_n, M_n]_t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t.$$

Then M_n *converges in distribution to a standard Brownian motion. The conclusion is the same if we just have :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|\big] = 0.$$

Back to our process W_n, consider the filtration

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_i, i \leq [nt]).$$

Proposition 3 *Let* $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ *be the processes defined in* $(A.35)$*. We have that* $(W_n(t))$ *is a* $\mathcal{F}_t^n$*-martingale. The process* (W_n) *converges to a standard Brownian motion* W *when* n *goes to infinity. Furthermore we have*

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] < \infty\,.$$

Finally, we have the convergence in distribution for the processes $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$*, when* n *goes to infinity, to* $(W, V, 0)$*.*

Proof: Thanks to the definition of the random variable X_k, we have $\mathbf{E}[X_{i+1}/\mathcal{F}_i^n] = 0$ which implies $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i/\mathcal{F}_s^n\right] = 0$ for $t > s$. Thus if $t > s$ we have the martingale property :

$$\mathbf{E}[W_n(t)/\mathcal{F}_s^n] = W_n(s) + \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i/\mathcal{F}_s^n\right] = W_n(s).$$

By definition of $[Y,Y]$ for a stochastic process we have

$$[W_n,W_n]_t = W_n(t)^2 - 2\int_0^t W_n(s-)dW_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} X_i^2$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[[W_n,W_n]_t\big] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}[X_i^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l<i\}]] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} 1 = \frac{[nt]}{n}.\end{aligned}$$

Hence we have

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n,W_n]_t\big] \leq t < \infty\,.$$

Let us prove the convergence of (W_n) to (W). According to Theorem (7) we must prove that

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\big[|[M_n,M_n]_t - t|\big] = 0$$

Actually we prove a L_2 convergence :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\big[|[M_n,M_n]_t - t|^2\big] = 0,$$

which implies the L_1 convergence. In order to show this convergence, we use the following property

$$\mathbf{E}\left[X_i^2\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l<i\}]\right] = 1$$

and if $i<j$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)/\sigma\{X_l, l<j\}]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)\right]\mathbf{E}\left[(X_j^2-1)\right] \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

This gives

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left([W_n,W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right]\end{aligned}$$

Thanks to the fact that p_{00} and q_{00} are not equal to zero (because the observable A is not diagonal !) the terms $\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right]$ are bounded uniformly in i so we have :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\left([W_n,W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] = 0\,.$$

As $\frac{[nt]}{n} \longrightarrow t$ in L_2 we have the desired convergence. Finally, the convergence in distribution of (W_n) and (V_n) implies the convergence of (ε_n) to 0. $\square$

We can now express the final theorem.

Theorem 8 *Let (Ω, X) be any orthonormal basis of $\mathbb{C}^2$ and A be any non-diagonal observable (in this basis). Let ρ_0 be any initial state on $\mathbb{C}^2$. Let $(\rho^{[nt]}(n))$ be the discrete quantum trajectory obtained from the quantum repeated measurement principle with respect to A. The process $(\rho^{[nt]}(n))$ then satisfies*

$$\rho^{[nt]}(n) = \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n} L(\rho^k(n)) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} [\Theta(\rho^k) + \circ(1)] \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i+1}$$

Let (ρ_t) be the solution of the diffusive Belavkin equation $(A.15)$ which satisfies

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s) ds + \int_0^t \Theta(\rho_s) dW_s.$$

Then we have the convergence in distribution

$$(\rho^{[nt]}(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (\rho_t)$$

Proof: It is a simple compilation of Theorems 6, Proposition 3 and existence and uniqueness of Theorem 3. $\square$

Bibliographie

[1] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[2] Stéphane Attal and Yan Pautrat. From $(n+1)$-level atom chains to n-dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.

[3] Stéphane Attal and Yan Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[4] Luc Bouten, Mădălin Guţă, and Hans Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[5] Didier Dacunha-Castelle and Marie Duflo. *Probability and statistics. Vol. II.* Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the French by David McHale.

[6] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[7] John Gough and Andrei Sobolev. Stochastic Schrödinger equations as limit of discrete filtering. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 11(3) :235–255, 2004.

[8] Jean Jacod, Thomas G. Kurtz, Sylvie Méléard, and Philip Protter. The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :523–558, 2005.

[9] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[10] B. Kümmerer and H. Maassen. An ergodic theorem for quantum counting processes. *J. Phys. A*, 36(8) :2155–2161, 2003.

[11] B. Kümmerer and H. Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *J. Phys. A*, 37(49) :11889–11896, 2004.

[12] Thomas G. Kurtz and Philip Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[13] Thomas G. Kurtz and Philip Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[14] Thomas G. Kurtz and Philip E. Protter. Weak convergence of stochastic integrals and differential equations. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1627 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–41. Springer, Berlin, 1996.

[15] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[16] C Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation of stochastic Schrödinger equation : the Poisson case.* to appear, 2007.

[17] Philip Protter and Denis Talay. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 25(1) :393–423, 1997.

[18] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

Annexe B

Article 2 : Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Poisson Case

Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Poisson Case

Clément PELLEGRINI

Institut C.Jordan
Université C.Bernard, Lyon 1
21, av Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex
France
e-mail : pelleg@math.univ-lyon1.fr

Abstract

In quantum physics, recent investigations deal with the so-called "quantum trajectory" theory. Heuristic rules are usually used to give rise to "stochastic Schrödinger equations" which are stochastic differential equations of non-usual type describing the physical models. These equations pose tedious problems in terms of mathematical justification : notion of solution, existence, uniqueness, justification...

In this article, we concentrate on a particular case : the Poisson case. Random measure theory is used in order to give rigorous sense to such equations. We prove existence and uniqueness of a solution for the associated stochastic equation. Furthermore, the stochastic model is physically justified by proving that the solution can be obtained as a limit of a concrete discrete time physical model.

Introduction

Many recent developments in quantum mechanics deal with "stochastic Schrödinger equations". These equations are classical stochastic differential equations (also called Belavkin equations) which describe random phenomena in continuous measurement theory.

The solutions of these equations are called "quantum trajectories", they give account of the time evolution of an open quantum system undergoing a continuous measurement.

In quantum mechanics, the result of a measurement is inherently random, as is namely expressed by the axioms of the theory. The setup is as follow. A quantum system is characterized by a Hilbert space $\mathcal{H}$ (with finite or infinite dimension) and an operator ρ, self-adjoint, positive, trace class with $Tr[\rho] = 1$. This operator is called a "state" or a "density matrix". The measurable quantities (energy, momentum, position...) are represented by the self-adjoint operators on $\mathcal{H}$ and are called "observable" of the system. The accessible data are the values of the spectrum of the observable. In finite dimension for example, if $A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$ denotes an observable where λ_i are the eigenvalues of A and P_i the eigenprojectors, the observation of the λ_i is governed by the probability law :

$$P_\rho[\text{to observe}\,\lambda_i] = Tr[\rho\ P_i]. \tag{B.1}$$

As opposed to classical system (described by classical mechanics), a quantum system is disturbed by the result of the measurement. Conditionally to the result, the reference state of the system is modified. If we have observed the eigenvalue λ_i, the state ρ collapses to the new state :

$$\rho \longrightarrow \rho_i^1 = \frac{P_i \rho P_i}{Tr[\rho\ P_i]} \tag{B.2}$$

This is the principle of the "wave packet reduction". Thus the quantum trajectory theory is the study of the evolution of the state of the system undergoing a sequence of measurement. The probability theory $(B.1)$ and the wave packet reduction $(B.2)$ give rise to a random variable ρ^1 which is the new reference state. This random state describes the first evolution, the second evolution is then given by a second measurement. However according to the fact that $P_i P_j = 0$ if $i \neq j$ and $P_i P_i = P_i$, if we have observed the result λ_i during the first measurement, a second measurement with the same observable gives us the following result :

$$P_{\rho_i^1}[\text{to observe}\,\lambda_i] = 1.$$

The principle $(B.2)$ imposed the second state to be $\rho^2 = \rho^1$ almost surely and so on.

The probability law described by $(B.1)$ and $(B.2)$ is the description of what is called a direct measurement. Such procedure is not interesting in terms of dynamics because after one measurement the evolution is stopped. The physical procedure used in order to get around this obstacle is an interaction setup. Our system interacts with another system, after the interaction, a measurement is performed on the interacting system, so we get back a partial information of the evolution of our system without destroy it.

A repeated scheme of interaction is used to obtain a significant evolution. The system is in contact with a chain of identical quantum system. Each system interacts one after the other with our system during a defined time. A measurement of the same observable is performed after each interaction on the interacting system. Each measurement gives us a random modification of the reference state of our system without destruction. So the probability theory $(B.1)$ and the wave packet reduction $(B.2)$ allow us to describe a sequence of random state called "discrete quantum trajectory". The probabilistic framework

of this discrete model is going to be deeply studied in the section (1). This model is called repeated quantum measurement. It will be shown that the evolution of the state can be described by a discrete stochastic equation and Markov property.

A continuous model in a similar framework is considered in quantum optics. The system is in contact with a continuous field (a photon stream, a Bozon field, a laser...) and a continuous time measurement is performed on the interacting system. In this situation, the first rigorous results are due to Davies which have described the time evolution of the state of the system from which we observe the photon emission. Using heuristic rules one can derive stochastic equations from this description. This is the setup of the Belavkin equations. Depending on the observable which is considered, there are two type of stochastic differential equations, one is diffusive and the other is driven by a counting process. If the continuous quantum trajectory is denoted by $(\rho_t)_t$ representing the state of the system at time t, it satisfies either a diffusive equation :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\rho_t C^\star + C\rho_t - Tr\left[\rho_t(C + C^\star)\right]\rho_t\right] dW_t \tag{B.3}$$

where W_t designs a one-dimensional Brownian motion, or a jump equation :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt) \tag{B.4}$$

where $\tilde{N}_t$ is assume to be a counting process with intensity $\int_0^t Tr(\mathcal{J}(\rho_s)]ds$ (the different operator are going to be described in the article).

These equations pose tedious problem in terms of mathematical justification. In the literature the question of existence and uniqueness of a solution is not treated. Classical theorems can not be applied directly. Furthermore the way of writing the jump-equation is not clear. How can we consider a driving process which depends on the solution ? There is no intrinsic existence for such process in this way. Even the notion of solution is then not clear and a clearly probability space must be defined to give sense for such equations.

Regarding the physical justification of the use of the Belavkin equation model, the mathematical framework needs a heavy analytic machinery (Von-Neumann algebra, conditional expectation in operator algebra, Fock space, quantum filtering...). This high technology contrasts with the intuition of the heuristics rules. In this article for the very first time, the continuous model is obtained as a limit of the previous discrete model. The discrete evolution equation, describing the discrete procedure of measurement, appears as a discrete analog of the continuous time stochastic equation. The physical idea behind this convergence is the following. The continuous field is considered as a chain of quantum space which interacts one after the other during a time h and a measurement is performed after each interaction. The continuous limit (h goes to zero) gives rise then to the continuous model and the Belavkin equations.

In this article we shall focus on the case of jump-equation ($B.4$), the diffusive case is treated in details in [22]. The problem of the right way of writing the equation and the right notion of solution is treated with the use of random Poisson measure. In order to prove the convergence theorem we use random variable coupling and a comparison between

the discrete process and a Euler scheme of the continuous time equation .

This article is structured as follow.

The section (1) is devoted to present the discrete model of repeated quantum measurement. The mathematical model is namely defined as well as the discrete random variable sequence which gives account of the modification of the state of the studied system. We present a natural probability space attached with this sequence. It is shown that this sequence or discrete quantum trajectory is governed by a Markov property. It is namely a Markov chain which satisfies a stochastic finite difference equation.

We study the continuous model in the section (2). We deal with the jump-equation. By martingale problems theory, we define a rigorous probabilistic framework to deal with such equation. The random measure theory is namely used to define the driving process $(\tilde{N}_t)$. This allows us to give a clearly sense of the notion of solution in this non-usual situation. Next the question of existence and uniqueness of a solution is treated in details.

Finally the section (3) is devoted to the link between the discrete and the continuous model. The solution of the jump-equation (continuous quantum trajectory) is going to be obtained as a continuous limit of the discrete quantum trajectory. With the discrete model, we define a process which depends on a time slice h. Random coupling theory is next used to realize and to compare this discrete process and the continuous quantum trajectory in the same space. Actually the discrete process is compared to a Euler scheme of the jump-Belavkin equation. The Euler approximation is treated in details in this non-usual context.

B.1 Quantum repeated interactions : A Markov chain

B.1.1 Quantum repeated measurement

As it was described in the introduction the result of a quantum measurement is inherently random and a direct measurement destroy the evolution of a system.

In order to get around the "wave packet reduction" and to observe a significant dynamic, a principle of quantum interaction is necessary. This physical procedure is used experimentally (se Haroche [10]) in quantum optics or in quantum information. A little system is then in contact with a chain of other quantum system which interacts one after the other during a defined time h. Attal-Pautrat in [3] have rigorously shown that this model is an approximation of an equivalent continuous model when h goes to zero. This model of interaction is called quantum repeated interactions, the main goal of this section is to describe the quantum measurement principle in this framework. A measurement is performed at each interaction on the interacting system ; the random character of the measurement gives rise to a random sequence of state describing the little system.

This section is devoted to the setup of the mathematical description of this sequence which is our discrete quantum trajectory.

Let us introduce the principle of quantum repeated interaction. We denote by $\mathcal{H}_0$ the Hilbert space representing the system from which we study the evolution. In repeated quantum interaction the interacting field is represented as a chain of identical Hilbert spaces $\mathcal{H}$. Each copy describes a quantum system which is a piece of the environment. Each one interacts with the small system $\mathcal{H}_0$ one after the other during a time interval h. The mathematical formalism of the interaction model is the following.

We shall focus on the case $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbf{C}^2$, the general case is treated in [22]. Let us describe the first interaction. The compound system describing the interaction is given by the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. According to the principle of quantum mechanics the evolution of the coupling system is described by an unitary operator which acts on the states of the compound system. If ρ is any state on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, following the so-called Schrödinger picture, the effect of the interaction is :

$$\rho \to U\,\rho\,U^\star.$$

For instance we do not come into the question of approximation and the length time interaction is not specified. But we must keep in mind that the unitary-operator depends on the time interaction, that is U can be written as $U = \exp(ihH)$ where h is the time of interaction and H is a self-adjoint operator called Hamiltonian of the system (this will be precise in the section (3)). After the first interaction, a second interaction with a second copy is considered with the same fashion. And so on. The Hilbert space describing the repeated interaction is given by the countable tensor product :

$$\mathbf{T\Phi} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k. \tag{B.5}$$

The countable tensor product $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ mean the following. We consider a fixed orthonormal basis of $\mathcal{H}$: (Ω, X), the projector $P_{\{\Omega\}}$ is called the ground state (or vacuum state) of $\mathcal{H}$ and the tensor product is taken with respect to Ω. In order to have precision on countable tensor product one can see [2].

The k-th interaction is described by a unitary-operator denoted by U_k. It acts like U on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_k$ and like the identity operator on the rest of the tensor product. If ρ is any state on $\mathbf{T\Phi}$, the effect of this operator is :

$$\rho \to U_k\,\rho\,U_k^\star.$$

We then define a sequence of operators acting on $\mathbf{T\Phi}$ by :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1} & = & U_{k+1}V_k \\ V_0 & = & I \end{array} \right. \tag{B.6}$$

This sequence clearly describes the effect of the successive interactions and the k first interactions are described by :

$$\rho \to V_k\,\rho\,V_k^\star.$$

The above description is the classical setup of repeated quantum interactions. We shall now explain the measurement principle.

Let us describe the measurement on the k-th piece of environment. We use the projection principle $(B.2)$ to describe the measurement at the k-th interaction. According to the fact that we work in 2-dimension we consider an observable on $\mathcal{H}_k$ of the form $A = \lambda_o P_0 + \lambda_1 P_1$. The natural ampliation as an observable $\mathbf{T\Phi}$ is :

$$A^k := \bigotimes_{j=0}^{k} I \otimes (\lambda_o P_0 + \lambda_1 P_1) \otimes \bigotimes_{j \geq k+1} I. \tag{B.7}$$

If ρ is any state on $\mathbf{T\Phi}$, the theory of quantum probability $(B.1)$ attached with the measurement of A^k gives :

$$P[\text{to observe } \lambda_j] = Tr[\,\rho\, P_j^k\,], \quad j \in \{0,1\}.$$

If we have observed the eigenvalue λ_j, the wave packet reduction $(B.2)$ imposed the new state to be :

$$\rho_j = \frac{P_j^k\, \rho\, P_j^k}{Tr[\,\rho\, P_j^k\,]}.$$

The principle of quantum repeated measurement is the combination of this above description and the repeated quantum interactions framework. It is described as follow. At each interaction a measurement is performed and gives a new state. We obtain a random sequence of state which is called the discrete quantum trajectory.

Each Hilbert space $\mathcal{H}$ is endowed with a reference state β and we denote by ρ the state on $\mathcal{H}_0$, the corresponding state on $\mathbf{T\Phi}$ is then :

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{j \geq 1} \beta_j.$$

If μ_k denotes the state after k interaction we have $\mu_k = V_k\, \mu\, V_k^\star$.

Let us now describe the probability framework. We put $\Sigma = \{0,1\}$ (referring to the two eigenvalues) and we endow $\Sigma^{\mathbb{N}}$ with the cylindric σ-algebra. For $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \Sigma^k$ we define the following operator :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k) &= I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots\, \mu_k\, I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots \\ &= P_{i_k}^k \ldots P_{i_1}^1\, \mu_k\, P_{i_1}^1 \ldots P_{i_k}^k \end{aligned}$$

We define a probability measure on $\Sigma^{\mathbb{N}}$. If $\Lambda_{i_1,\ldots,i_k} = \{\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}} / \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_k = i_k\}$ denotes a cylinder of size k, we put :

$$P\left[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}\right] = Tr\left[\tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k)\right].$$

The Kolmogorov consistence criterion is satisfied because for all j the unitary operator U_j commutes with all P_k for $k < j$. Hence we define a random sequence which takes value in the set of states on $\mathbf{T\Phi}$:

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\rho}_k & \Sigma^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{T\Phi}) \\ & \omega & \longmapsto & \tilde{\rho}_k(\omega_1 \ldots \omega_k) = \frac{\tilde{\mu}(\omega_1 \ldots \omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}(\omega_1 \ldots \omega_k)]}. \end{array}$$

This random sequence is our discrete quantum trajectory on $\mathbf{T\Phi}$. This mean that if the k first measurements have given the observation $\{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\}$, the new state is $\tilde{\rho}_k(\omega_1 \ldots \omega_k)$. The following proposition resumes this fact :

Proposition 4 *Let $(\tilde{\rho}_k)$ be the above random sequence of states we have for all $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}}$:*

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\omega) = \frac{P^{k+1}_{\omega_{k+1}} U_{k+1}\, \tilde{\rho}_k(\omega)\, U^{\star}_{k+1} P^{k+1}_{\omega_{k+1}}}{Tr[\, \tilde{\rho}_k(\omega)\, U^{\star}_{k+1} P^{k+1}_{\omega_{k+1}} U_{k+1}]}.$$

The random sequence $(\tilde{\rho}_k)$ describes the results of the successive measurements and the effect on $\mathbf{T\Phi}$. An easy consequence of the proposition (4) is the Markov property of the quantum trajectory.

Theorem 9 *The sequence $(\tilde{\rho}_n)_n$ is a Markov chain valued on the set of states of $\mathbf{T\Phi}$. It is described as follow :*

$$P[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n, \ldots, \tilde{\rho}_1 = \theta_1] = P[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n]$$

If $\tilde{\rho}_n = \theta_n$ then $\tilde{\rho}_{n+1}$ takes one of the values :

$$\frac{P^{n+1}_i\, U_{n+1}\, \theta_n\, U^{\star}_{n+1}\, P^{n+1}_i}{Tr[\, U_{n+1}\, \theta_n\, U^{\star}_{n+1}\, P^{n+1}_i\,]}, \quad i = 0, 1$$

with probability $Tr[\, U_{n+1}\, \theta_n\, U^{\star}_{n+1}\, P^{n+1}_i\,]$.

In quantum theory it was assumed that we do not have access to the interacting field (because it is more complicated), we just have access to the small system $\mathcal{H}_0$. So the mathematical tools rendering this phenomenon is the partial trace operation given by the following theorem.

Definition-Theorem 2 *If we have a state α on a tensor product $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. There exists a unique state η on $\mathcal{H}$ which is characterized by the property :*

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;\; Tr_{\mathcal{H}}[\, \eta\, X\,] = Tr_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}[\, \alpha(X \otimes I)\,].$$

So by taking the partial trace on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$, we obtain a sequence of random state on $\mathcal{H}_0$. We denote by $\mathbf{E}_0$ the partial trace on $\mathcal{H}_0$ and we define for all ω in $\Sigma^{\mathbb{N}}$:

$$\rho_n(\omega) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_n(\omega)]. \tag{B.8}$$

The sequence (ρ_n) describes the evolution of the small system whereas the measurements are performed on the interacting field. We obtain a partial information about the small system. A high analytic machinery is used to obtain an equivalent rigorous description in the continuous measurement principle. The last section will present a rigorous way to get around this tools by studying convergence theorems of the discrete process given by $(B.8)$. The following section is then devoted to study in details the properties of this sequence.

B.1.2 The discrete stochastic differential equation

In this section the main goal is to establish a discrete stochastic equation whose the solution is our discrete quantum trajectory (ρ_n). Like in filtering theory we want to obtain a formula of the following form :

$$\rho_{k+1} = f(\rho_k, X_{k+1}) \tag{B.9}$$

where (X_k) is a sequence of random variables. Let us start with the Markov property of this random sequence, we have the following theorem which is a consequence of the theorem 9.

Theorem 10 *The random sequence defined by the formula* $(B.8)$ *is a Markov chain which takes value in the set of states on* $\mathcal{H}_0$*. If* $\rho_n = \chi_n$ *then* ρ_{n+1} *takes one of the values :*

$$\mathbf{E}_0 \left[\frac{I \otimes P_i \, U(\chi_n \otimes \beta) U^\star \, I \otimes P_i}{Tr[\, U(\chi_n \otimes \beta) U^\star \, I \otimes P_i]} \right] \quad i = 0, 1$$

with probability $Tr[U(\chi_n \otimes \beta) U^\star \, P_i]$.

Remark : Let us stress that $\frac{I \otimes P_i \, U(\chi_n \otimes \beta) U^\star \, I \otimes P_i}{Tr[\, U(\chi_n \otimes \beta) U^\star \, I \otimes P_i]}$ is a state on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, we have kept the notation $\mathbf{E}_0$ to denote the partial trace on $\mathcal{H}_0$.

The state ρ_k can be namely considered as a initial state (according to the Markov property : cf theorem 10). Thus we consider a single interaction with a system $(\mathcal{H}, \beta)$. Remember that each Hilbert space are $\mathbf{C}^2$. The measured observable is of the form $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ and the unitary operator describing the interaction is a unitary 4×4 matrix. In order to compute the state given by the projection postulate we choose a suitable basis. If (Ω, X) is any orthonormal basis of $\mathbf{C}^2$, for $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ we consider the following basis $\Omega \otimes \Omega, X \otimes \Omega, \Omega \otimes X, X \otimes X$. This basis allows us to consider the following way of writing for U :

$$U = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}$$

where each L_{ij} are operators on $\mathcal{H}_0$. For β we choose the one dimensional projector on Ω :

$$\beta = P_{\{\Omega\}}$$

As a consequence, the state after the interaction is :

$$\mu_{k+1} = U(\rho_k \otimes \beta) U^\star = \begin{pmatrix} L_{00} \rho_k L_{00}^\star & L_{00} \rho_k L_{10}^\star \\ L_{10} \rho_k L_{00}^\star & L_{10} \rho_k L_{10}^\star \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

We can apply the indirect quantum measurement principle. For the two possible results of the measurement, we put :

$$\mathcal{L}_0(\rho_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_0(\mu_{k+1}) I \otimes P_0] \tag{B.11}$$

$$\mathcal{L}_1(\rho_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_1(\mu_{k+1}) I \otimes P_1]. \tag{B.12}$$

Thanks to the partial trace these are operators on $\mathcal{H}_0$. We denote the two probability by $p_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)]$ and $q_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)]$. The non normalized state : $\mathcal{L}_0(\rho_k)$ appears with probability p_{k+1} and $\mathcal{L}_1(\rho_k)$ with probability q_{k+1}.

Thanks to this two probabilities, if we know ρ_k we can define a random variable ν_{k+1} on $\{0,1\}$ by :

$$\begin{cases} \nu_{k+1}(0) = 0 & \text{with probability } p_{k+1} \\ \nu_{k+1}(1) = 1 & \text{with probability } q_{k+1} \end{cases}$$

As a consequence we can describe the state on $\mathcal{H}_0$ with the following equation. We have for all $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}}$:

$$\rho_{k+1}(\omega) = \frac{\mathcal{L}_0(\rho_k(\omega))}{p_{k+1}(\omega)}\left(1 - \nu_{k+1}(\omega)\right) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_k(\omega))}{q_{k+1}(\omega)}\nu_{k+1}(\omega) \tag{B.13}$$

In order to finish the description of the evolution and to obtain the final discrete quantum evolution equation, we consider the centered and normalized random variable :

$$X_{k+1} = \frac{\nu_{k+1} - q_{k+1}}{\sqrt{q_{k+1}p_{k+1}}}.$$

We define the associated filtration on $\Sigma^{\mathbb{N}}$:

$$\mathcal{F}_k = \sigma(X_i, i \leq k).$$

So by construction we have $\mathbf{E}[X_{k+1}/\mathcal{F}_k] = 0$ and $\mathbf{E}[X_{k+1}^2/\mathcal{F}_k] = 1$. Thus we can write the discrete evolution equation for our quantum trajectory.

$$\rho_{k+1} = \mathcal{L}_0(\rho_k) + \mathcal{L}_1(\rho_k) + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_k) + \sqrt{\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_k)\right] X_{k+1}. \tag{B.14}$$

The above equation can be considered in a general way and the unique solution starting from ρ_0 is our discrete quantum trajectory.

Here the time interaction is chosen arbitrary to be one. In Section (3), we are going to consider this equation with a time interaction h which is supposed later to go to zero. The continuous limit will give rise to stochastic differential equations which are the Belavkin equations considered in the literature.

In the following section, we present a right probability way to consider the jump-equation.

B.2 The jump Belavkin equation

In the literature, the evolution of an open quantum system undergoing a continuous measurement is assumed to be governed by classical stochastic differential equations called Belavkin or stochastic Schrödinger equations. The first rigorous result and mathematical

model are due to Davies in [8], the associated stochastic model can be derived with heuristic rules. A heavy background is necessary in order to obtain these equations in a rigorous setup. In this article the continuous stochastic model will be rigorously obtained as a limit of the discrete process given by the equation $(B.14)$.

As it was expressed in the introduction there are essentially two kind of stochastic equation in the literature. If (ρ_t) designs the state of the system, it satisfies either a diffusive equation :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + [\rho_t C^\star + C\rho_t - Tr\,[\rho_t(C + C^\star)]\,\rho_t]\,dW_t \tag{B.15}$$

where W_t designs a one-dimensional Brownian motion, or a jump equation :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt) \tag{B.16}$$

where $\tilde{N}_t$ is assumed to be a counting process with intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$.

The solutions of such equations are called continuous quantum trajectories.

Before to study these equations, let us speak briefly about the different operators appearing in the equations. In quantum physics L is called the Lindbladian of the system. This is the generator of the dynamics of a small system coupled with an environment. The evolution of the state system (without measurement) is namely given by the solution of an ordinary differential equation which is called master equation.

$$\frac{d}{dt}\rho_t = L(\rho_t) = -i[H, \rho_t] - \frac{1}{2}\{CC^\star, \rho_t\} + C\rho_t C^\star \tag{B.17}$$

where C is any 2×2 matrix, the operator H is the Hamiltonian of the atom. In the jump-equation $(B.16)$, we define $\mathcal{J}(\rho) = C\,\rho\,C^\star$. The Belavkin equations appears then as stochastic perturbation of the master equation $(B.17)$.

This article is devoted to study in details the jump-equation, the case of diffusive equation is totally treated in [22].

B.2.1 The probability framework of the jump equation

The good way to express the jump-equation in a clearly probability framework is related to problems of Martingale. The driving process depends on the solution and has no intrinsic definition. A probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ must be defined in order that the stochastic differential equation :

$$d\rho_t = L(\rho_{t-})dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{t-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{t-})]} - \rho_{t-}\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_{t-})]dt). \tag{B.18}$$

has a sense. Furthermore the good notion of solution is the notion of process-solution and was given by Jacod and Protter in [14] [11]. This is the topic of the following definition.

Definition 1 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a filtered probabilistic space. A process-solution of $(B.18)$ is a càdlàg process (ρ_t) such that there exists a counting process $(\tilde{N}_t)$ with predictable compensator (or stochastic intensity)*

$$t \to \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds$$

and such that the couple $(\rho_t, \tilde{N}_t)$ satisfies :

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}) - \mathcal{J}(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-}ds + \int_0^t \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right] d\tilde{N}_s$$

A mean to construct the process $\tilde{N}$ which is assumed to be a counting process is the use of the theory of random measure (for all details see [11] or [15]). Let us introduce this notion.

Definition 2 *Given a filtred probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, a random measure is a family of measure $\mu = (\mu(\omega, .), \omega \in \Omega)$ on $(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$.*

A random measure is said to be integer valued if :

1. *For all $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega, t \times \mathbf{R}^d) \leq 1$.*
2. *For all $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, the quantity $\mu(A)$ is valued in $\mathbf{N} \bigcup \{+\infty\}$.*

Definition 3 *A random Poisson measure on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ is a integer valued measure that verify*

1. *The measure $m(A) = \mathbf{E}(\mu(A))$ on $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d$ is non atomic.*
2. *$m(0 \times \mathbf{R}^d) = 0$.*
3. *If $t \in \mathbf{R}_+$ and if $A_i \in \mathcal{B}(]t, +\infty[)$ $i = 1, \ldots, l$ are two by two disjoint with $m(A_i) < +\infty$, the random variables $\mu(A_i)$ are mutually independent and independent from $\mathcal{F}_t$.*

The measure m is called the intensity of the random Poisson measure μ.

The following theorem show how the random measure theory is used to construct the process $(\tilde{N}_t)$.

Theorem 11 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a filtred probability space which support a random Poisson measure μ on $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ with intensity $dt \otimes dx$. Every process-solution from the following equation is a process-solution of equation $(B.18)$:*

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-} - \mathcal{J}(\rho_{s-})ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_+} \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} \mu(ds, dx) \end{aligned} \tag{B.19}$$

and for the process $\tilde{N}_t$ we will choose the process

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} \mu(ds, dx) \tag{B.20}$$

This theorem is due to Jacod and Protter in [14]. In this theorem there is two part. On the one hand we must prove that the process given by $(B.20)$ is well defined, that is, it is non-explosive. On the other hand we must prove that if there is a solution of the equation $(B.19)$ it is a process-solution of the jump-Belavkin equation $(B.18)$.

The non-explosive property of $(\tilde{N}_t)_t$ is related to the boundness character of the stochastic intensity $t \to Tr[\mathcal{J}(\rho_{t-})]$. Now, a straightforward computation shows that there exists a constant K such that for all state ρ we have $0 \leq Tr[\mathcal{J}(\rho)] \leq K$. It implies directly that for all t, the quantity $Tr[\mathcal{J}(\rho_{t-})] = \lim_{s<t, s\to t} Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]$ satisfies :

$$0 \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{t-})] \leq K,$$

so the intensity is bounded. This property is going to be used in the proof of the theorem

Proof: As it was announced, in order to consider the equation given by $(B.19)$, we must show that the counting process $(\tilde{N}_t)$ given by $(B.20)$ is non explosive. For all càdlàg matricial process (X_t) we define the time explosion :

$$T^X = \inf\left(t : \tilde{N}_t^X = +\infty\right).$$

Let us show that, if (ρ_t) takes value in the set of states, the explosion time $T^\rho = \infty$ almost surely. For this we introduce the following stopping time :

$$T_n = \inf\left(t, \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \geq n\right).$$

It was clear that $\int_0^{T_n} Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \leq n$ and thanks to the property of Poisson random measure :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\tilde{N}_{T_n}^\rho\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^{T_n}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} ds dx\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^{T_N} Tr\left[\mathcal{J}(\rho_{s-})\right] ds\right]
\end{aligned}$$

As a consequence we have $T_n \leq T^\rho$ almost surely. The fact that : $0 \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_t)] \leq K$ implies $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds < \infty$, so we have $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$ which implies $T^\rho = +\infty$ almost surely. Finally we have construct a counting process without explosion for all càdlàg process which takes value in the set of states. Concerning the fact that a process-solution of $(B.19)$ is a process-solution of the jump-Belavkin equation $(B.18)$, it is obvious by construction of $(\tilde{N}_t)$. □

A mean to construct a random Poisson measure with uniform intensity measure is to consider the space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ of Poisson point process N on $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. The random poisson measure attached with this point process is defined for all $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbf{R})$ by :

$$\mu(., A) = N(., A).$$

We have for all Borel subset $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$: $\mathbf{E}[N(.,A)] = \lambda(A)$ where λ denotes the Lebesgue measure. The Poisson random measure μ satisfies the condition of theorem (11). This random Poisson measure is going to be used to consider an explicit solution of the jump-Belavkin equation when we deal with problem of approximation.

In the rest of the paper we consider the equation $(B.19)$ when we speak about the jump-Belavkin equation. As we have clearly define the probability framework in order to study this kind of equation, we can now answer the question of existence and uniqueness of a solution. This is the content of the following section.

B.2.2 Existence and uniqueness

From now we consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ which support a suitable random Poisson measure μ. Now we are face to the problem of existence and uniqueness of a process-solution (ρ_t) valued in the set of states which satisfies :

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t [L(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-} - \mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_+} \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-} \right] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} \mu(ds, dx) \end{aligned} \tag{B.21}$$

The problem of existence and uniqueness for this type of stochastic differential equation was deeply studied for example in financial modelling or in filtering theory (cf [20],[14] or [7]). The principal hypothesis is the Lipschitz property of the coefficients in the integrand. Here it is not the case, so we can not directly use a general theorem. The method that we are going to use can be used in more general case.

The first step is solving the ordinary differential equation with non-Lipschitz coefficients :

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t [L(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-} - \mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \tag{B.22}$$

We have to prove that this equation admits a unique solution and the solution must be valued in the set of states. Actually the two problem are indissociable.

Before to prove these results we need a technical lemma about states on $\mathbf{C}^2$. A particular class of states is the class of one-dimensional projectors called pure states. The following lemma is a mean to characterize a state which is a one-dimensional projector.

Lemma 1 *Let ρ be a state on $\mathbf{C}^2$, if there exists a vector $x \in \mathbf{C}^2$ such that $\langle x; \rho x \rangle = 0$ ρ is a one dimensional projector*

We do not give the proof, it is a simple linear algebra fact, but this property is only valid in 2 dimension.

An important property is the fact that the ordinary differential equation $(B.22)$ preserves the property to be a pure state. This is resumed in the following proposition :

Proposition 5 *Let x be any vector of norm one in $\mathbf{C}^2$, if the Cauchy problem*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx_t & = & \left[-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t\right] x_t dt \\ x_0 & = & x \end{array} \right. \tag{B.23}$$

where $\eta_t = \langle x_t, C^\star C x_t\rangle$ has a solution then $\|x_t\| = 1$ for all $t > 0$.

Furthermore the process (ρ_t) of one-dimensional projector defined by $\rho_t = P_{\{x_t\}}$ for all $t > 0$ is solution of the Cauchy problem :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\rho_t & = & [L(\rho_t) + Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]\rho_t - \mathcal{J}(\rho_t)]dt \\ \rho_0 & = & P_{\{x\}} \end{array} \right. \tag{B.24}$$

Proof: Let (x_t) be the solution of $(B.23)$, thanks to the fact that H is self-adjoint and $\eta_t = \langle x_t, C^\star C x_t\rangle = \langle Cx_t, Cx_t\rangle$, a straightforward computation gives :

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\langle x_t, x_t\rangle & = & \langle \frac{d}{dt}x_t, x_t\rangle + \langle x_t, \frac{d}{dt}x_t\rangle \\ & = & \langle \left[-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t\right] x_t, x_t\rangle + \\ & & \langle x_t, \left[-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t\right] x_t\rangle \\ & = & 0 \end{array}$$

Thus we have $\langle x_t, x_t\rangle = \langle x_0, x_0\rangle = 1$ for all t, this implies that for all y :

$$\rho_t y = \langle x_t, y\rangle x_t$$

and we can derive $d\rho_t y$. We have :

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\rho_t y & = & \langle \frac{d}{dt}x_t, y\rangle x_t + \langle x_t, y\rangle \frac{d}{dt}x_t \\ & = & \langle (-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)x_t, y\rangle x_t \\ & & +\langle x_t, y\rangle(-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)x_t \\ & = & \langle x_t, (-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)^\star y\rangle x_t \\ & & +(-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)\langle x_t, y\rangle x_t \\ & = & \rho_t(-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)^\star y \\ & & +(-iH - \frac{1}{2}C^\star C + \frac{1}{2}\eta_t)\rho_t y \\ & = & [L(\rho_t) + Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]\rho_t - \mathcal{J}(\rho_t)]y \end{array}$$

and the result follows. □

With the lemma 1 and the previous proposition 5, we can express the following proposition concerning the ordinary differential equation :

Proposition 6 *Let ρ be any state, the Cauchy problem :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\rho_t & = & [L(\rho_t) + Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]\rho_t - \mathcal{J}(\rho_t)]dt \\ \rho_0 & = & \rho \end{array} \right. \tag{B.25}$$

has a unique solution defined for all time t.

Furthermore if there exists t_0 such that ρ_{t_0} is a one dimensional projector the solution of $(B.25)$ after t_0 is valued in the set of pure states.

Proof: As the coefficients are not Lipschitz we can not apply directly the theorem of Cauchy Lipschitz. However the coefficients are C^∞, so locally Lipschitz and we can use a truncation method. The ordinary equation is of the following form :

$$d\rho_t = f(\rho_t)dt$$

where f is C^∞ and $f(A) = L(A) + Tr[\mathcal{J}(A)]A - \mathcal{J}(A)$. We define the truncation function φ from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}$ defined by

$$\varphi_k(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -k & \text{if } x \leq -k \\ x & \text{if } -k \leq x \leq k \\ k & \text{if } -k \leq x \leq k \end{array} \right.$$

For a matrix $A = (a_{ij})$ we define by extension $\tilde{\varphi}_k(A) = \varphi_k(Re(a_{ij})) + i\varphi_k(Im(a_{ij}))$. Thus $f \circ \tilde{\varphi}_k$ is Lipschitz. Now we consider the truncated equation :

$$d\rho_{k,t} = f \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t})dt.$$

The Cauchy-Lipschitz theorem can be applied because $f \circ \tilde{\varphi}_k$ is Lipschitz and there exists a unique solution $t \mapsto \rho_{k,t}$ defined for all t. We define

$$T_k = inf\{t, \exists(ij)/|(Re(a_{ij}(\rho_{k,t})))| = k \, or \, |(Im(a_{ij}(\rho_{k,t})))| = k\}.$$

As ρ_0 is a state if k is chosen large enough we have $T_k > 0$ and for all $t \leq T_k$ we have $\tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t}) = \rho_{k,t}$. Thus $t \mapsto \rho_{k,t}$ is the unique solution of the ordinary equation $(B.22)$ (without truncation) on $[0, T_k]$.

The classical method in order to solve an equation with non Lipschitz coefficients is to put $T = \lim_k T_k$ and to show that $T = \infty$. Here the situation is more simply because if ρ_0 is a state we are going to see that the solution is valued on the set of states. As $\|\rho\| \leq 1$ when ρ is a state then we have for example $\tilde{\varphi}_2(\rho) = \rho$. We are going to show that the solution obtained by the truncation method is a process valued on the set of states, it implies that $T_2 = \infty$.

On $[0, T_2]$ the ordinary differential equation is Lipschitz. So we can solve her by an iterative method. We define :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_{n+1}(t) & = & \rho_n(0) + \int_0^t f \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_n(s))ds \\ \rho_0(t) & = & \rho \end{array} \right. \tag{B.26}$$

It was easy to show with the right definition of f that this sequence is self adjoint with trace one. So it proves that for all $t \leq T_2$ $\rho_{2,t}$ is self adjoint with trace one because these conditions are closed. To conclude we must show the positivity which is not obtained by the iterative sequence. This condition is nevertheless a consequence of the proposition 5 and the lemma 1.

We must prove that for all $y \in \mathbf{R}^2$ and for all $t \leq T_2$ $\langle y, \rho_{2,t} y\rangle \geq 0$. We define :

$$T^0 = \inf\{t \leq T_2, \exists y \in \mathbf{R}^2 / \langle y, \rho_{2,t} y\rangle = 0\}$$

If $T^0 = T_2$ a continuity argument for solution of ordinary differential equation gives us $\langle y, \rho_{2,t} y\rangle \geq 0$ for all $t \leq T_2$ and all $y \in \mathbf{C}^2$, the process is then valued on the set of states.

If $T^0 < T_2$ by continuity there exists some $x \in \mathbb{R}^2$ such that $\langle x, \rho_{2,T^0} x\rangle = 0$ and we have for all $t \leq T^0$ and for all $y \in \mathbf{R}^2$ $\langle y, \rho_{2,t} y\rangle \geq 0$. It means that on $[0, T^0]$, the process $t \mapsto \rho_{2,t}$ is valued on the set of states. Moreover for some x, we have $\langle x, \rho^k_{T^0} x\rangle = 0$. Thanks to the lemma 1, the operator ρ_{2,T^0} is a one dimensional projector.

We can now consider the ordinary differential equation with initial state $\rho_{T^0} = \rho^0$. We are face to the Cauchy problem $(B.23)$ which is equivalent to the problem $(B.25)$ thanks to the proposition 5. This problem can be solved by truncation method too, the fact that the norm is conserved implies that the solution is defined for all t (the truncation is actually not necessary). Thanks to the proposition 5, we have a solution for the initial Cauchy problem $(B.25)$ which defines a state-process. We have proved that on $[T^0, T_2]$ the solution is valued on the set of states.

An easy local argument and the uniqueness in the Cauchy-Lipschitz theorem allow us to conclude that $T_2 = \infty$ and that there exists a unique solution of the ordinary differential equation $(B.22)$. □

The ordinary differential equation part of the Belavkin equation has then a unique solution if the initial condition is a state. Furthermore this solution is a state valued process. This proposition is essential in the proof of the final theorem concerning existence and uniqueness of the stochastic differential equation $(B.21)$.

Theorem 12 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space which supports a Poisson random measure μ whose the intensity measure is $dx \otimes dt$. Let ρ_0 be any state, the jump-Belavkin equation :*

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t [L(\rho_{s-}) + Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]\rho_{s-} - \mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_+} \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} \mu(ds, dx)\end{aligned}$$

admits a unique solution defined for all time. The process-solution (ρ_t) takes value on the set of states.

Proof: Such equation are solved paths by paths. The initial condition is a state ρ_0. The proposition 6 states the existence and the uniqueness for the Cauchy problem $(B.25)$. Now we can define the first jump time, we put :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(1)_t & = & \rho_0 + \int_0^t f(\rho(1)_s)ds \\ T_1 & = & \inf\{t, \tilde{N}_t^{\rho(1)} > 0\} \end{array}\right. \tag{B.27}$$

The random variable T_1 is the stopping time of the first jump. We have :

$$\tilde{N}_{T_1}^{\rho(1)}(\omega) = \mu(\omega, G(\rho, T_1, 0)) = 1,$$

with $G(\rho, t, s) = \{(u, y) \in \mathbf{R}^2/t < u < s, 0 < y < Tr[\mathcal{J}(\rho_u)]\}$, the quantity $\mu(\omega, G(\rho, t, s))$ represents the number of point under the curves $t \to Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]$. So if $T_1 < \infty$ we have $Tr[\mathcal{J}(\rho(1)_{T_1-})] > 0$. The upper step is to construct the second time of jump. The central idea is then to put on $[0, T_1[$ $\rho_t = \rho(1)_t$ and at the jump time T_1 we affect the value in front of the counting process :

$$\rho_{T_1} = \rho_{T_1-} + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{T_1-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{T_1-})]} - \rho_{T_1-}\right] = \frac{\mathcal{J}(\rho_{T_1-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{T_1-})]}$$

As a consequence ρ_{T_1} is a state. According to the proposition 6 we can solve the Cauchy problem and so on. For a better understanding let us define the second jump-time of the solution. We then define :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(2)_t & = & \rho(1)_t \text{ on } [0, T_1[\\ \rho(2)_t & = & \rho_{T_1} + \int_{T_1}^t f(\rho(2)_s)ds \\ T_2 & = & \inf\{t > T_1, \tilde{N}_t^{\rho(2)} > \tilde{N}_{T_1}^{\rho(1)}\} \end{array}\right. \tag{B.28}$$

The random variable T_2 is the second jump-time. If $T_2 < \infty$ we have $Tr[\mathcal{J}(\rho(2)_{T_2-})] > 0$.

A sequence of process and a sequence of random time T_n can be defined by the recursive way :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(n)_t & = & \rho(n-1)_t \text{ on } [0, T_{n-1}[\\ \rho_{T_{n-1}} & = & \frac{\mathcal{J}\rho_{T_{n-1}-}}{Tr(\mathcal{J}\rho_{T_{n-1}-}} \\ \rho(n)_t & = & \rho_{T_{n-1}} + \int_{T_{n-1}}^t f(\rho(n-1)_s)ds \\ T_n & = & \inf\{t > T_{n-1}, \tilde{N}_t^{\rho(n)} > \tilde{N}_{T_1}^{\rho(n-1)}\} \end{array}\right. \tag{B.29}$$

All the process are well defined because the value at each jump time is a state and the Cauchy problem can be solved. The sequence of random stopping time (T_n) satisfies $T_{n+1} > T_n$ on the set $\{T_n < \infty\}$. We put :

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n.$$

Thus we can express the process-solution (ρ_t) of the jump-Belavkin equation. We put for all $t < T$:

$$\rho_t = \rho(n)_t \text{ on } [0, T_n[\tag{B.30}$$

This process is clearly a solution of the jump-Belavkin equation $(B.21)$ and it is valued on the set of states. The uniqueness is implied by the uniqueness of the solution of the Cauchy problem (cf proposition 6). Moreover any other solution is forced to have the same random jump-time, it implies the uniqueness.

To finish the proof we must show $T = \infty$ a.s. This random time is the explosion-time of $\tilde{N}^\rho$, we can not directly apply the result of the theorem 3 because the definition for all t of (ρ_t) is not already proved. However (ρ_t) is a state valued process, so we have $Tr[\mathcal{J}(\rho_t)] < K$ for all t then :

$$\mathbf{E}\left[\tilde{N}^\rho_{T_p\wedge n}\right] \leq \mathbf{E}\left[\tilde{N}^\rho_n\right] \leq Kn$$

Furthermore $\tilde{N}^\rho_{T_p\wedge n} = p$ on $\{T_P < n\}$, it follows that $pP[T_p < n] \leq Kn$, then we have $P[T \leq n] = 0$ for all n and the result is proved. □

The proof of the theorem gives an explicit way to construct the solution and the random time of jump. It can be used in more general context. In the rest of the paper we are going to compare the solution of the stochastic equation () and the discrete process (). For this we need realization of the different processes in an explicit probability space.

In order to realize the paths of the process (ρ_t) we consider the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ given by a Poisson point process N on $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. We have the random measure denoted by : $N(\omega, ds, dx)$. The process (ρ_t) satisfies :

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t [L(\rho_{s-}) + Tr(\mathcal{J}\rho_{s-})\rho_{s-} - \mathcal{J}\rho_{s-})]ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{[0,K]} \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} - \rho_{s-}\right] \mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]} N(., ds, dx). \end{aligned} \tag{B.31}$$

We can work on $[0, K]$ because $Tr[\mathcal{J}(\rho_t)] \leq K$ for all state process.

We can remark that the function $t \to card(N(., [0, K]\times[0, t])) = \mathcal{N}_t$ defines a standard Poisson process with intensity K. Thus for the filtration $\mathcal{F}_t$ we can choose the natural filtration of this process. The Poisson random measure and the previous process generate on $[0, T]$ (for a fixed T) a sequence $\{(\tau_i, \xi_i), i \in \{1, \ldots, \mathcal{N}_t)\}\}$ where each τ_i represents the jump time of $\mathcal{N}$. Moreover the random variables ξ_i are random uniform variables on $[0, K]$. Consequently we can write our quantum trajectory with the following way :

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t [L(\rho_{s-}) + Tr(\mathcal{J}\rho_{s-})\rho_{s-} - \mathcal{J}\rho_{s-})]ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_{\tau_i-})}{Tr[\mathcal{J}(\rho_{\tau_i-})]} - \rho_{\tau_i-}\right] \mathbf{1}_{0\leq\xi_i\leq Tr[\mathcal{J}(\rho_{\tau_i-})]}.\end{aligned}$$

This formula shows with a better way how the random jump time appears. The integral form $(B.31)$ will be used to construct the Euler scheme approximation. Next we will compare the Euler scheme with the discrete quantum trajectory. This is the subject of the following section.

B.3 Approximation and convergence theorems

This section is devoted to the convergence theorems. The discrete quantum trajectory defined in section (1) is shown to converge to the continuous quantum trajectory which is solution of the jump Belavkin equation (B.31).

A time interaction $h = 1/n$ is introduced to define a discrete stochastic process depending on n. Hence we can consider the limit when n goes to infinity. The discrete process obtained by this way is compared with an Euler scheme of the jump-Belavkin equation. The convergence of the Euler scheme to the solution of the jump-Belavkin equation is proved in this framework. Indeed the general theorem concerning such convergence can not be applied because the stochastic differential equation is of a non-classical type.

In the following section we present the discrete quantum trajectory obtained with the introduction of a time discretization.

B.3.1 The discrete jump-Belavkin process

As it was announced there are two kind of Belavkin equations. So we are going to see how the counting process appears from the definition of the random variable (X_k) defined in section 1. We have previously obtained the following equation :

$$\rho_{k+1} = \mathcal{L}_0(\rho_k) + \mathcal{L}_1(\rho_k) + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_k) + \sqrt{\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_k) \right] X_{k+1} \tag{B.32}$$

Hence we have :

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} - \rho_0 &= \sum_{i=0}^{k} [\rho_{i+1} - \rho_i] \\ &= \sum_{i=0}^{k} [\mathcal{L}_0(\rho_i)) + \mathcal{L}_1(\rho_i) - \rho_i] + \sum_{i=0}^{k} \left[-\sqrt{\frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_i) + \sqrt{\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_i) \right] X_{i+1} \end{aligned}$$

The discrete process (ρ_k) is then the solution of this discrete stochastic equation. This is a kind of discrete time stochastic differential equation. This idea is going to be developed in order to obtain an approximation of the solution of the jump-Belavkin equation (B.31).

Consider a partition of $[0, T]$ in subintervals of equal size $1/n$. The dynamic laws concerning the evolution of an open quantum system imposed that the unitary operator of evolution depends on the time interaction. We then have :

$$U(n) = \begin{pmatrix} L_{00}(n) & L_{01}(n) \\ L_{10}(n) & L_{11}(n) \end{pmatrix}$$

The work of Attal-Pautrat [3] has shown that the asymptotic of the coefficients $L_{ij}(n)$ must be chosen with well-defined scaling if we want to obtain an effective limit. Indeed they

have shown that $V_{[nt]} = U_{[nt]}(n) \dots U_1(n)$ which represents the discrete dynamic of quantum repeated interaction converges to an operator V_t representing the continuous dynamic. These operators define namely an operator-process which is solution of a quantum stochastic differential equation called Langevin equation (cf [21] for a good introduction). Through the measurement theory we find a part of this result again. The suitable asymptotic are the following :

$$L_{00}(n) = I + \frac{1}{n}(-iH - \frac{1}{2}CC^\star) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{B.33}$$

$$L_{10}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}C + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{B.34}$$

In the general theory we can write $U(n) = \exp\left(\frac{1}{n}H_{tot}\right)$ where $H_{tot}(n)$ is the Hamiltonian of the interaction. We have :

$$H_{tot}(n) = H \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[C \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C^\star \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

where H is the Hamiltonian of the small system and C is any operator.

With the time discretisation, we obtain a discrete process depending on n :

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}(n) &= \mathcal{L}_0(n)(\rho_k(n)) + \mathcal{L}_1(n)(\rho_k(n)) \\ &+ \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}(n)}{p_{k+1}(n)}}\mathcal{L}_0(n)(\rho_k(n)) + \sqrt{\frac{p_{k+1}(n)}{q_{k+1}(n)}}\mathcal{L}_1(n)(\rho_k(n))\right] X_{k+1}(n) \end{aligned}$$

Remember that the sequence of random variable $(X_k(n))$ is defined from the two probabilities :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)] \\ q_{k+1} &= Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)] \end{aligned}$$

where each $\mathcal{L}_i$ depends on the measured observable : $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$.

The aim of this section is to show the convergence of $\rho_{[nt]}(n)$ to the solution of the jump Belavkin equation $(B.31)$. The counting process $(\tilde{N}_t)$ will appear thanks to the sequence (X_k). By definition we have :

$$X_k(n)(i) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{q_{k+1}(n)}{p_{k+1}(n)}} & \text{with probability} \quad p_{k+1}(n) \text{ if } i = 0 \\ \sqrt{\frac{p_{k+1}(n)}{q_{k+1}(n)}} & \text{with probability} \quad q_{k+1}(n) \text{ if } i = 1 \end{cases} \tag{B.35}$$

As the probability and the operators $\mathcal{L}_i$ depends on the observable, we are going to classify the observable in order to determine which ones give the jump nature.

Remember that we have fixed an orthonormal basis (Ω, X). Hence if the observable is of the form $A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, in this basis. We obtain the asymptotic for the probabilities :

$$\begin{aligned} p_{k+1}(n) &= 1 - \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}(\rho_k(n))] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ q_{k+1}(n) &= \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}(\rho_k(n))] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

The discrete equation becomes :

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}(n) - \rho_k(n) &= \frac{1}{n} L(\rho_k(n)) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_k(n))}{Tr(\mathcal{J}(\rho_k(n)))} - \rho_k(n) + \circ(1)\right] \sqrt{q_{k+1}(n) p_{k+1}(n)}\, X_{k+1}(n) \end{aligned}$$

If the observable is non diagonal in the basis (Ω, X), we consider $P_0 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ and $P_1 = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}$ we have :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr[\rho_k(p_{01} C + p_{10} C^\star)] + \frac{1}{n} Tr[\rho_k(p_{00}(C + C^\star))] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ q_{k+1} &= q_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr[\rho_k(q_{01} C + q_{10} C^\star)] + \frac{1}{n} Tr[\rho_k(q_{00}(C + C^\star))] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

The discrete equation becomes then

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} - \rho_k &= \frac{1}{n} L(\rho_k) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \big[e^{i\theta} C \rho_k + e^{-i\theta} \rho_k C^\star \\ &\quad - Tr[\rho_k(e^{i\theta} C + e^{-i\theta} C^\star)]\, \rho_k + \circ(1)\big] \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1} \end{aligned}$$

In the second case in [22], it was proved that :

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W_t \tag{B.36}$$

where $\mathcal{D}$ denotes the convergence in distribution and (W_t) is a standard Brownian motion. Using theorem of convergence for stochastic integral due to Kurtz and Protter (cf [18],[19]), it was shown that in the second case the discrete quantum trajectory converges to the

solution of the diffusive Belavkin equation. A similar result for the first case would be the following :

$$\sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_{s-})]ds \tag{B.37}$$

As the process $(\tilde{N}_t)$ depends on the solution, such result need a method of random variable coupling. This mean that the discrete process will be defined in the same probability space of the jump-Belavkin solution. The discrete process will be compared with a Euler scheme of the time continuous solution. That is why we are going to investigate the Euler scheme approximation for the jump-Belavkin equation in the following section.

B.3.2 Euler-scheme for jump-Belavkin equation

The literature abounds in references about Euler scheme approximation for stochastic differential equation (cf [7],[12],[13]). The non-usual type as jump-Belavkin equations is not really treated, that is why we present the different result in this situation.

An important property when we want to study Euler scheme approximation for stochastic differential equation is the Lipschitz character of the coefficients. Remember that our equation is of the following form :

$$\begin{aligned}\mu_t &= \mu_0 + \int_0^t f(\mu_{s-})ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{[0,K]} \left[\frac{\mathcal{J}(\mu_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} - \mu_{s-}\right] \mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} N(.,dx,ds)\end{aligned} \tag{B.38}$$

We must transform this equation to have Lipschitz property. We are going to write it in the following way :

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t f(\mu_{s-})ds + \int_0^t \int_{[0,K]} [q(\mu_{s-})]\, \mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} N(.,dx,ds) \tag{B.39}$$

where f and q are Lipschitz function and defined for all matrices.

The consideration about the Lipschitz property is a pure technical aspect and can be admit by the reader. The Euler scheme is given by the formula $(B.46)$ below.

Concerning f, we have seen that the solution of $(B.38)$ is obtained by truncation method because f is not Lipschitz but C^∞. It was shown that the truncation is unnecessary because the solution is a process valued on the set of states. The solution obtained by truncation is in fact the right solution without truncation (see the proof of proposition 6). As a consequence we can consider that the function is truncated and then Lipschitz. We denote by F its Lipschitz coefficient.

Concerning q, we must control the function defined on the states by :

$$g : \rho \longrightarrow \left[\frac{\mathcal{J}(\rho)}{Tr[\mathcal{J}(\rho)]} - \rho\right] \mathbf{1}_{0<Tr[\mathcal{J}(\rho)]} \tag{B.40}$$

The denominator $Tr[\mathcal{J}(\rho)]$ can vanish. We will transform the expression and define a function q which is C^∞ and such that :

$$g(\rho) = q(\rho)\mathbf{1}_{0<Tr[\mathcal{J}(\rho)]}.$$

We are going to modify the stochastic differential equation with a unitary fashion. Before to come into the details, let us define for any unitary-operator V :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_V(\rho) &= VCV^\star(\rho)(VCV^\star)^\star && \text{(B.41)}\\
f_V(\rho) &= -i[VHV^\star,\rho] - \frac{1}{2}\{VCV^\star(VCV^\star)^\star,\rho\} \\
&\quad +VCV^\star\rho(VCV^\star)^\star - \mathcal{J}_V(\rho) + Tr[\mathcal{J}_V(\rho)]\rho && \text{(B.42)}\\
g_V(\rho) &= \left[\frac{\mathcal{J}_\mathcal{V}(\rho)}{Tr[\mathcal{J}_\mathcal{V}(\rho)]} - \rho\right]\mathbf{1}_{0<Tr[\mathcal{J}_V(\rho)]} && \text{(B.43)}
\end{aligned}$$

The notion of unitary modification for the jump-Belavkin equation is the following :

Proposition 7 *Let V be any unitary operator and let (μ_t) be the solution of the jump Belavkin equation, then the process $(\gamma_t := V\mu_t V^\star)$ valued on the set of states satisfies :*

$$\gamma_t = \gamma_0 + \int_0^t f_V(\gamma_{s-})ds + \int_0^t\int_{[0,K]} [g_V(\gamma_{s-})]\,\mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}_V(\gamma_{s-})]}N(.,dx,ds). \qquad \text{(B.44)}$$

The proof is a straightforward computation. A such unitary-operation allow us to transform g without change the property of f (concerning the fact that we can consider it as Lipschitz). The function g is defined by the operator C, we have to study two case.

If C is invertible the function defined on the set of states : $\rho \to Tr[\mathcal{J}(\rho)]$ is continuous. With the fact that for all state ρ we have $Tr[\mathcal{J}(\rho)] > 0$, the function $\rho \longrightarrow \frac{\mathcal{J}(\rho)}{Tr[\mathcal{J}(\rho)]}$ is extendible by a function C^∞ defined for all matrices.

If C is not invertible there exists a unitary-operator V and two complex α et β such that :

$$VCV^\star = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A straightforward computation shows us :

$$g_V(\rho) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \rho\right]\mathbf{1}_{0<Tr[\mathcal{J}_V(\rho)]}$$

The expression of q is clear and by using the unitary transformation given by the proposition and the unitary-operator V we can consider :

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t f(\mu_{s-})ds + \int_0^t\int_{[0,1]} [q(\mu_{s-})]\mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}N(.,dx,ds) \qquad \text{(B.45)}$$

which admits a unique solution by the theorem 4.

Concerning the Lipschitz character, if we adapt the proof of the theorem of existence and uniqueness, we can consider q Lipschitz. Indeed this function is C^∞, we can consider a truncation, the fact that the solution is valued on the set of states shows that it is unnecessary again. We denote by Q the Lipschitz coefficient of q.

Let us define the Euler scheme :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{1}{n} f(\theta_k) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{[0,K]} [q(\theta_k)] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} N(., dx, ds) \tag{B.46}$$

We fix an interval $[0, T]$ and for all $t < T$ we define $k_t = \max\{k \in \{0, 1, \ldots\} / \frac{k}{n} \leq t\}$. From the Euler scheme $(B.46)$, we define the following process. For $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ we put :

$$\tilde{\theta}_t = \theta_k + \int_{\frac{k}{n}}^{t} f(\theta_k) ds + \int_{\frac{k}{n}}^{t} \int_{[0,1]} [q(\theta_k)] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} N(., dx, ds) \tag{B.47}$$

We have $\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}} = \theta_k$ for all k. We then have $t < T$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t(n) &= \sum_{k=0}^{k_t - 1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\theta_k) ds + \sum_{k=0}^{k_t - 1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{[0,K]} [q(\theta_k)] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} N(., dx, ds) \\ &\quad + \int_{k_t}^{t} f(\theta_{k_t}) ds + \int_{k_t}^{t} \int_{[0,K]} [q(\theta_{k_t})] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_{k_t})])} N(., dx, ds) \end{aligned}$$

The dependance in n is not expressed in the integrals and the sums in order to lighten the notation.

Likewise for the solution of the Belavkin equation we can write :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \sum_{k=0}^{k_t - 1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\mu_{s-}) ds + \sum_{k=0}^{k_t - 1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{[0,1]} [q(\mu_{s-})] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} N(., dx, ds) \\ &\quad + \int_{k_t}^{t} f(\mu_{s-}) ds + \int_{k_t}^{t} \int_{[0,K]} [q(\mu_{s-})] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} N(., dx, ds) \end{aligned} \tag{B.48}$$

Before to express the convergence theorem we need the following proposition :

Proposition 8 *Let (μ_t) be the solution of the jump-Belavkin equation, then there exists a constant M such that for all $(s, t) \in \mathbf{R}_+^2$*

$$\mathbf{E}[\|\mu_t - \mu_s\|] \leq M|t - s| \tag{B.49}$$

Proof: From the fact that the solution of the jump-Belavkin equation is valued on the set of states we have for all $t > 0$ $\|\mu_t\| \leq 1$ almost surely (we do not specify the norm because we just need the fact that the solution is bounded). We have for $0 < s < t$:

$$\mu_t - \mu_s = \int_s^t f(\mu_{u-}) du + \int_s^t \int_{[0,1]} [q(\mu_{u-})] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{u-})]} N(., dx, du) \tag{B.50}$$

By using the property of random poisson measure, in particular the property about the intensity measure we have for $0 < s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\|\mu_t - \mu_s\|\right] &\leq \mathbf{E}\left[\left\|\int_s^t f(\mu_{u-})du\right\|\right] \\
&\quad + \mathbf{E}\left[\left\|\int_s^t \int_{[0,1]} [q(\mu_{u-})]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{u-})]} N(.,dx,du)\right\|\right] \\
&\leq \int_s^t \mathbf{E}\left[\|f(\mu_{u-})\|\right] du \\
&\quad + \mathbf{E}\left[\int_s^t \int_{[0,K]} \left\|[q(\mu_{u-})]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{u-})]}\right\| N(.,dx,du)\right] \\
&\leq \int_s^t \mathbf{E}\left[\|f(\mu_{u-})\|\right] du + \mathbf{E}\left[\int_s^t \int_{[0,1]} \left\|q(\mu_{u-})\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{u-})]}\right\| dxdu\right] \\
&\leq \int_s^t \left(\sup_{\|R\|\leq 1} \|f(R)\| + 2\right) du \\
&\leq M\,(t-s)
\end{aligned}$$

where M is a constant. The result is then proved. □

We can now express the theorem concerning the convergence of the Euler scheme. This theorem is proved in details because the case of stochastic intensity is not really proved in the literature.

Theorem 13 *Let $T > 0$, let $(\tilde{\theta}_t)$ be the process $(B.47)$ constructed by the Euler-scheme on $[0,T]$, let (μ_t) be the unique solution of the jump-Belavkin equation $(B.31$.*

We define for $u < T$ and n large enough :

$$Z_u(n) = \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \left\|\tilde{\theta}_t(n) - \mu_t\right\|\right]. \tag{B.51}$$

So there exists some constant Γ which is independent of n such that for all $u < T$:

$$Z_u(n) \leq \frac{\Gamma}{n}. \tag{B.52}$$

Let $\mathcal{D}([0,T])$ denotes the space of càdlàg matrices process endowed with the Skorohod topology. Finally the Euler scheme approximation $(\tilde{\theta}_t)$ converges in distribution in $\mathcal{D}([0,T])$ for all T to the process-solution (μ_t) of the jump-Belavkin equation.

Proof: The equations concerning the Euler scheme and the solution of the jump-

Belavkin equation give us the following formula :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_t(n) - \mu_t &= \sum_{k=0}^{k_t-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [f(\theta_k) - f(\mu_{s-})]ds + \int_{k_t}^{t} [f(\theta_{k_t}) - f(\mu_{s-})]ds \\
&+ \sum_{k=0}^{k_t-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{[0,K]} \Big(q(\theta_k)\mathbf{1}_{0\le x\le Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])} \\
&\qquad - q(\mu_{s-})\mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} \Big) N(., dx, ds) \\
&+ \int_{k_t}^{t} \int_{[0,K]} \Big(q(\theta_{k_t})\mathbf{1}_{0\le x\le Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_{k_t})])} \\
&\qquad - q(\mu_{s-})\mathbf{1}_{0\le x\le Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} \Big) N(., dx, ds)
\end{aligned}$$

We consider for $u < T$, the quantity $Z_u(n) = \mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le u} \left\|\tilde{\theta}_t(n) - \mu_t\right\|\right]$. We consider separately the drift term and the term concerning the random measure. For the drift term by the fact that f is Lipschitz we have :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le u} \sum_{k=0}^{k_t-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \|f(\theta_k) - f(\mu_{s-})\|ds + \int_{k_t}^{t} \|f(\theta_{k_t}) - f(\mu_{s-})\|ds\right] \\
\le\ & \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left\|f(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}}) - f(\mu_{s-})\right\| ds + \int_{k_u}^{u} \left\|f(\tilde{\theta}_{\frac{k_u}{n}}) - f(\mu_{s-})\right\| ds\right] \\
\le\ & \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathbf{E}\left[\left\|f(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}}) - f(\mu_{\frac{k}{n}})\right\|\right] ds + \int_{k_u}^{u} \mathbf{E}\left[\left\|f(\tilde{\theta}_{\frac{k_u}{n}}) - f(\mu_{\frac{k_u}{n}})\right\|\right] ds \\
&+ \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathbf{E}\left[\left\|f(\mu_{s-}) - f(\mu_{\frac{k}{n}})\right\|\right] ds + \int_{k_u}^{u} \mathbf{E}\left[\left\|f(\mu_{s-}) - f(\mu_{\frac{k_u}{n}})\right\|\right] ds \\
\le\ & \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}} - \mu_{\frac{k}{n}}\right\|\right] ds + \int_{k_u}^{u} F\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k_u}{n}} - \mu_{\frac{k_u}{n}}\right\|\right] ds \\
&+ \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathbf{E}\left[\left\|f(\mu_{s-}) - f(\mu_{\frac{k}{n}})\right\|\right] ds + \int_{k_u}^{u} \mathbf{E}\left[\left\|f(\mu_{s-}) - f(\mu_{\frac{k_u}{n}})\right\|\right] ds \\
\le\ & \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le s} \left\|\tilde{\theta}_t - \mu_t\right\|\right] ds + \int_{k_u}^{u} F\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le s} \left\|\tilde{\theta}_t - \mu_t\right\|\right] ds \\
&+ \sum_{k=0}^{k_u-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} FM\left(s - \frac{k}{n}\right) ds + \int_{k_u}^{u} FM\left(s - \frac{k_u}{n}\right) ds \\
\le\ & A\left(\int_0^u Z_s ds + \frac{1}{n}\right) \text{ (A is a suitable constant)}
\end{aligned}$$

The analysis of the random measure terms is more complicated. We fixe an indice k, thanks to the properties of random measure we have :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left\|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}[q(\theta_k)]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])}-[q(\mu_{s-})]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}N(.,dx,ds)\right\|\right] \\
\leq\ & \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\left\|[q(\theta_k)]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])}-[q(\mu_{s-})]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}\right\|N(.,dx,ds)\right] \\
\leq\ & \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\left\|[q(\theta_k)]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])}-[q(\mu_{s-})]\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]}\right\|N(.,dx,ds)\right] \\
& +\mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\|[q(\mu_{s-})]\|\times\left|\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}-\mathbf{1}_{0\leq x\leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_k)])}\right|N(.,dx,ds)\right] \\
\leq\ & \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\left\|q(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}})-q(\mu_{s-})\right\|N(.,dx,ds)\right] \\
& +2\mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\left|\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]}-\mathbf{1}_{0\leq x\leq Tr[\mathcal{J}(\theta_k)]}\right|N(.,dx,ds)\right] \qquad \text{(B.53)}
\end{aligned}$$

As q is bounded by 2 on the set of states we have :

$$\begin{aligned}
(B.53)\ \leq\ & \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}Q\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}}-\mu_{s-}\right\|N(.,dx,ds)\right] \\
& +2\mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{[0,K]}\Big(\mathbf{1}_{0\leq x\leq \max(Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})],Re(Tr[\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}})]))}\right. \\
& \left.\qquad -\mathbf{1}_{0\leq x\leq \min(Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})],Re(Tr[\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}})]))}\Big)N(.,dx,ds)\right]
\end{aligned}$$

We have $Re(Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]) = Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]$ for all s. Moreover by continuity for any matrices A and B there exists some constant R such that :

$$|Re(Tr[\mathcal{J}(A)]) - Re(Tr[\mathcal{J}(B)])| \leq R\,\|A-B\|\,.$$

It implies :

$$\begin{aligned}
(B.53) &\leq \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} Q\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}} - \mu_{s-}\right\| ds\right] + \mathbf{E}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|Re(Tr[\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}})]) - Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]\right| ds\right] \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (R+Q)\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}} - \mu_{s-}\right\|\right] ds \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (R+Q)\,\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\theta}_{\frac{k}{n}} - \mu_{\frac{k}{n}}\right\|\right] ds + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (R+Q)\,\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\mu}_{\frac{k}{n}} - \mu_{s-}\right\|\right] ds \\
&\leq (R+Q)\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} Z_s ds + \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{(we do the same as the drift term)}
\end{aligned} \tag{B.54}$$

The term between k_u and u can be treated in the same way. By summing we obtain finally the same type of inequality for the term with the random measure. As a consequence there exists two constants F_1 and F_2 which depends only on T such that :

$$Z_u \leq F_1 \int_0^u Z_s ds + \frac{F_2}{n} \tag{B.55}$$

The Gronwall lemma implies that there exists a constant Γ such that for all $u < T$:

$$Z_u(n) \leq \frac{\Gamma}{n} \tag{B.56}$$

where Γ is a constant independent of n. The convergence in $\mathcal{D}([0,T])$ is an easy consequence of the above inequality. The result is then proved. □

Often the Euler scheme is treated by considering the L^2 norm (in order to apply Itô isometry). Because of the stochastic intensity we must use the L^1 norm in order to apply the Gronwall lemma. That is why we just obtain a weak convergence whereas in the usual case we can obtain almost sure convergence see [7].

In the following section we can compare the discrete process with the Euler scheme.

B.3.3 Convergence of the discrete process

In order to compare the discrete process with the Euler scheme process, we must realize our discrete quantum trajectory and the Euler scheme approximation in the same probability space. This method is called random variable coupling method.

Consider the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ where we have define the solution (μ_t) of the jump Belavkin equation $(B.31)$. Let n be fixed, we define the following sequence of random variable which are defined on the set of states :

$$\tilde{\nu}_{k+1}(\eta, \omega) = \mathbf{1}_{N(\omega, G_k(\eta))>0} \tag{B.57}$$

where $G_k(\eta) = \left\{(t,u)/\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, 0 \leq u \leq -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(n)(\eta)])\right\}$.

Let $\rho_0 = \rho$ be any state, we define the process $(\tilde{\rho}_k)$ for $k < [nT]$ by the recursive formula :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{k+1} &= \mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k) + \mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k) \\ &\quad + \left[-\frac{\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)]} + \frac{\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)]}\right](\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k,.) - Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)])\end{aligned} \tag{B.58}$$

This stochastic sequence and the operators $\mathcal{L}_i(n)$ depend naturally on n following the asymptotic of the unitary evolution. We suppress the dependance to lighten the notation. Thanks to the Poisson distribution property, the following proposition is obvious :

Proposition 9 *Let $T > 0$ be fixed. The discrete process $(\tilde{\rho}_k)_{k<[nT]}$ defined by $(B.58)$ have the same distribution of the discrete quantum trajectory $(\rho_k)_{k<[nT]}$ defined by the quantum repeated measurement.*

This proposition is a consequence of the fact that for all Borel subset $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$:

$$P[N(B) = k] = \frac{\Lambda(B)^k}{k!}\exp(-\Lambda(B)),$$

where Λ denotes the Lebesgue measure. We have then realized the Markov chain describing the discrete quantum measurement principle in the same space of the Euler scheme approximation and the solution of the jump-Belavkin equation. In $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ we have then the asymptotic for the process $(\tilde{\rho}_k)$:

$$\tilde{\rho}_{k+1} - \tilde{\rho}_k = \frac{1}{n}[f(\tilde{\rho}_k) + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)] + \left[\frac{\mathcal{J}(\tilde{\rho}_k)}{Tr(\mathcal{J}(\tilde{\rho}_k))} - \tilde{\rho}_k + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)\right]\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k,.) \tag{B.59}$$

Before to compare the discrete process $(B.58)$, we need another process. In $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, we define the random variable sequence defined on the set of states :

$$\overline{\nu}_{k+1}(\eta,\omega) = \mathbf{1}_{N(\omega,H_k(\eta))>0} \tag{B.60}$$

where $H_k(\eta) = \{(t,u)/\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, 0 \leq u \leq Tr[\mathcal{J}(\eta)]\}$. Let $\overline{\rho}_0 = \rho$ be any state, we define the following process in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, for $k < [nT]$:

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_{k+1} &= \mathcal{L}_0(\overline{\rho}_k) + \mathcal{L}_1(\overline{\rho}_k) \\ &\quad + \left[-\frac{\mathcal{L}_0(\overline{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_0(\overline{\rho}_k)]} + \frac{\mathcal{L}_1(\overline{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_1(\overline{\rho}_k)]}\right](\overline{\nu}_{k+1}(\overline{\rho}_k,.) - Tr[\mathcal{L}_1(\overline{\rho}_k)])\end{aligned} \tag{B.61}$$

Hence we have the same approximation :

$$\overline{\rho}_{k+1} - \overline{\rho}_k = \frac{1}{n}[f(\overline{\rho}_k) + \circ_{\overline{\rho}_k}(1)] + \left[\frac{\mathcal{J}(\overline{\rho}_k)}{Tr(\mathcal{J}(\overline{\rho}_k))} - \overline{\rho}_k + \circ_{\overline{\rho}_k}(1)\right]\overline{\nu}_{k+1}(\overline{\rho}_k,.) \tag{B.62}$$

Thus it defines a sequence of random variable valued on the set of spaces whose the behavior is alike the discrete quantum trajectory. The following proposition make the link between this process and the discrete quantum trajectory.

Proposition 10 *Let $(\tilde{\rho}_k)_{0\leq k\leq [nT]}$ be the discrete quantum trajectory defined by the formula $(B.59$ and let $(\overline{\rho}_k)_{0\leq k\leq [nT]}$ be the sequence defined by the formula $(B.61)$. Let assume that the two sequences are defined by the same initial state ρ.*

For $k \leq [nT]$ we define :

$$A_k(n) = \mathbf{E}\left[\sup_{0<i\leq k} \|\tilde{\rho}_i(n) - \overline{\rho}_i(n)\|\right].$$

We have for all $k \leq [nT]$:

$$A_k(n) \leq \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

where the little $\circ$ is uniform in k.

Proof: We do not express the dependance in n when we deal with the different process. Remember that our discrete quantum trajectory satisfies :

$$\tilde{\rho}_{k+1} - \tilde{\rho}_k = \frac{1}{n}[f(\tilde{\rho}_k) + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)] + \left[\frac{\mathcal{J}(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{J}(\tilde{\rho}_k)]} - \tilde{\rho}_k + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)\right]\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k, .) \tag{B.63}$$

We can remark that all the rest $\circ_{\tilde{\rho}^k}(1)$ are uniform in k because the process (ρ_k) is valued on the set of states and so is bounded. Hence we can write this equation with the following way using f and q :

$$\tilde{\rho}_{k+1} - \tilde{\rho}_k = \frac{1}{n}[f(\tilde{\rho}_k) + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)] + [q(\tilde{\rho}_k) + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1)]\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k, .) \tag{B.64}$$

We have the same for the process $(B.61)$. As a consequence we can compare the two process :

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_i - \overline{\rho}_i &= \sum_{j=0}^{i-1}\left[\frac{1}{n}(f(\tilde{\rho}_j) - f(\overline{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_k}(1) - \circ_{\overline{\rho}_k}(1)\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i-1}\left[\left(q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1)\right)\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j, .) - \left(q(\overline{\rho}_j) + \circ_{\overline{\rho}_k}(1)\right)\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\right]
\end{aligned}$$

Hence we have :

$$\begin{aligned}
\sup_{0<i\leq k}\|\tilde{\rho}_i - \overline{\rho}_i\| &\leq \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{n}\left\|(f(\tilde{\rho}_j) - f(\overline{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}^k}(1)\right\| \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\|(q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1))\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j, .) - q(\overline{\rho}_j)\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{n}F\|\tilde{\rho}_j - \overline{\rho}_j\| + \sum_{j=0}^{k-1}\|(q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1))(\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j, .) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\| \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left\|q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1)) - q(\overline{\rho}_j) - \circ_{\overline{\rho}_j}(1)))\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\right\|
\end{aligned} \tag{B.65}$$

By defining the filtration $\mathcal{G}_j = \sigma\{\tilde{\nu}_k(\tilde{\rho}_{k-1},.), \overline{\nu}_k(\overline{\rho}_{k-1},.), 0 < k \leq j\}$ for $j > 0$, we have by the independence of the increments of a Poisson process :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\|q(\tilde{\rho}^j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1)) - q(\overline{\rho}_j) - \circ_{\overline{\rho}_j}(1)))\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\|\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\|q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1)) - q(\overline{\rho}_j) - \circ_{\overline{\rho}_j}(1)))\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\|/\mathcal{G}_j\right]\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\|q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1)) - q(\overline{\rho}_j) - \circ_{\overline{\rho}_j}(1)))\mathbf{E}\left[\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\|/\mathcal{G}_j\right]\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\|q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1) - q(\overline{\rho}_j) - \circ_{\overline{\rho}_j}(1)\|\right]\left(1 - exp\left(-\frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)]\right)\right) \\
\leq \; & \mathbf{E}\left[Q\|\tilde{\rho}_j - \overline{\rho}_j\|\right]\left(\frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(B.66)}
\end{aligned}$$

because all the rest are uniform in j. With the same way by using the filtration we have :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left\|(q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1))(\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right\|\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\left\|q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1))\right\| \mathbf{E}\left[\left|\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right| /\mathcal{G}_j\right]\right]
\end{aligned}$$

By definition we have :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left|\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right| /\mathcal{G}_j\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\left|\mathbf{1}_{N(.,G_j(\tilde{\rho}_j))>0} - \mathbf{1}_{N(.,H_j(\overline{\rho}_j))>0}\right| /\mathcal{G}_j\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{N(.,G_j(\tilde{\rho}_j))>0\}\triangle\{N(.,H_j(\overline{\rho}_j))>0\}}/\mathcal{G}_j\right] \\
= \; & P\left[\{N(.,G_j(\tilde{\rho}_j)) > 0\} \triangle \{N(.,H_j(\overline{\rho}_j)) > 0\}/\mathcal{G}_j\right]
\end{aligned}$$

We denote by $W_j = \{(t,u)/\frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}, \min\left(Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)], -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(\rho_j)])\right) \leq u \leq \max\left(Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)], -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(\rho_j)])\right)\}$. Hence we have :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left|\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right| /\mathcal{G}_j\right] \\
= \; & P[\mathbf{1}_{W_j>0}/\mathcal{G}_j] \\
= \; & 1 - \exp\Bigg(-\frac{1}{n}\Big(\min\left(Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)], -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(\rho_j)])\right) \\
& \qquad\qquad - \max\left(\ldots, -n\ln(Tr[\mathcal{L}_0(\rho_j)])\right)\Big)\Bigg) \\
= \; & 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\left|Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}^j)] + n\ln[Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_j)]\right|\right) \\
= \; & \frac{1}{n}\left|Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)] + n\ln\left(Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_j)]\right)\right| + \circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Besides we have : $Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_j)] = p_{j+1} = 1 - \frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\rho_j)] + \circ(\frac{1}{n})$ then :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left[\left|\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right| / \mathcal{G}_j\right] \\ = & \frac{1}{n}\left|Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)] - Tr[\mathcal{J}(\tilde{\rho}_j)]\right| + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{B.67}$$

As $(\tilde{\rho}_k)$ is a process valued in the set of state, it is uniformly bounded then we have :

$$\mathbf{E}\left[\left\|(q(\tilde{\rho}_j) + \circ_{\tilde{\rho}_j}(1))(\tilde{\nu}_{j+1}(\tilde{\rho}_j,.) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right\|\right] \leq K\mathbf{E}\left[\|\overline{\rho}_j - \tilde{\rho}_j\|\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{B.68}$$

By taking expectation in $(B.65)$ and using the inequalities $(B.66, B.67)$ we obtain such an inequality :

$$\begin{aligned} A_k & \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{L}{n}\mathbf{E}\left[\left\|\tilde{\rho}_j - \overline{\rho}_j\right\|\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ & \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{L}{n}A_j + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{B.69}$$

hence we conclude with a discrete Gronwall lemma. □

Now we can compare the process obtained by the Euler scheme and the process defined by the formula. The result is resumed in the following proposition :

Proposition 11 *Let $(\overline{\rho}_k)_{0\leq k\leq [nT]}$ be the process defined by the formula and let $(\theta_k)_{0\leq k\leq [nT]}$ be the process obtained by the Euler scheme of the jump-Belavkin equation. Let assume that the two sequences are defined by the same initial state ρ.*

For $k \leq [nT]$ we define :

$$S_k(n) = \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq i\leq k} \|\theta_i(n) - \overline{\rho}_i(n)\|\right].$$

Hence there exists some constant F such that for all $k \leq [nT]$:

$$S_k(n) \leq \frac{F}{n}$$

We are going to see that a Gronwall Lemma is used to obtain the result in the same way of the proposition (10). But the proof is very interesting because it uses finer property of the random measure induced by the Poisson point process. This is a generalization of the Poisson approximation studied by Brown in [6].

Proof: Thanks to the fact that random sequence $(\overline{\rho}_j)$ is bounded, the $\circ_{\overline{\rho}_j} = \circ(1)$. It implies that for $i \leq k \leq [nT]$:

$$\begin{aligned}\theta_i - \overline{\rho}_i &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{n}[f(\theta_j) + \circ(1) - f(\overline{\rho}_j)] + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{[0,1]} [q(\theta_j)] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\theta_j)} N(., dx, ds) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{i-1} [q(\overline{\rho}_j) + \circ(1)] \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\end{aligned}$$

We treat the random measure part and the drift term part separately. Let us denote $S_k = \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq i \leq k} \|\theta_i - \overline{\rho}_i\|\right]$, we have :

$$\begin{aligned}S_k &\leq \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} \left\|[f(\theta_j) - f(\overline{\rho}_j) + \circ(1)]\right\|\right] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \left\| \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{[0,1]} q(\theta_j) \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\theta_j)]} N(., dx, ds) \; - \left(q(\overline{\rho}_j) + \circ(1)\right) \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)] \right\|\right]\end{aligned}$$

By the lipschitz character of f we have :

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} \left\|f(\theta_j) - f(\overline{\rho}_j) + \circ(1)\right\|\right] \leq F \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} S_j + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

For the second term we have :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \left\| \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{[0,1]} q(\theta_j] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Re(Tr[\mathcal{J}(\theta_j)])} N(., dx, ds) \; - \left(q(\overline{\rho}_j) + \circ(1)\right) \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)] \right\|\right] \\ = \; &\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \left\|q(\theta_j) N(., H_j(\theta_j)) - \left(q(\overline{\rho}_j) + \circ(1)\right) \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)]\right\|\right] \\ \leq \; &\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \left\|q(\theta_j) \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .) - \left(q(\overline{\rho}_j) + \circ(1)\right) \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)]\right\|\right] \\ &+ \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \|q(\theta_j)\| \times \left|N(., H_j(\theta_j)) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)\right|\right] \\ \leq \; &\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}\left[(Q\|\theta_j - \overline{\rho_j}\| + \circ(1)) \times |\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)|\right] \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}[\|q(\theta_j)\| \times |N(., H_j(\theta_j)) - \overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j, .)]|\end{aligned}$$

Here we define the discrete filtration in the same way of $\mathcal{G}_j$ in the proposition :

$$\mathcal{F}_j = \sigma\left\{\overline{\nu}_l(\overline{\rho}_{l-1},.), N(.,H_l(\theta_l))/l \leq j\right\}. \tag{B.70}$$

It was clear that the random variables $\overline{\rho}_j$ and θ_j are $\mathcal{F}_j$ measurable, we have then :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left\|q(\theta_j)N(.,H_j(\theta_j)) - \left(q(\overline{\rho}_j)+\circ(1)\right)\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)]\right\|\right] \\
\leq & \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}\left[(Q\|\theta_j-\overline{\rho_j}\|+\circ(1))\times\mathbf{E}\left[|\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)|/\mathcal{F}_j\right]\right] \\
& +\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}\left[\|q(\theta_j)\|\times\mathbf{E}[|N(.,H_j(\theta_j))-\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)/\mathcal{F}_j|]\right]
\end{aligned}$$

By conditioning with respect to $\mathcal{F}_j$, the random variable $\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)$ is of Bernoulli type. Hence we have :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)|/\mathcal{F}_j] &= 1-\exp(-\frac{1}{n}Tr(\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)) \\
&= \frac{1}{n}Tr(\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)+\circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

For the second part we have almost surely :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[|N(.,H_j(\theta_j))-\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)/\mathcal{F}_j|\right] \\
\leq & \mathbf{E}\left[|N(.,H_j(\theta_j))-N(.,H_j(\overline{\rho}_j))/\mathcal{F}_j\right]+\mathbf{E}\left[N(.,H_j(\overline{\rho}_j))-\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)/\mathcal{F}_j\right] \\
\leq & \frac{1}{n}\left|Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j))]-Tr[\mathcal{J}(\theta_j)]\right|+\mathbf{E}\left[N(.,H_j(\overline{\rho}_j))-\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)/\mathcal{F}_j\right] \\
\leq & \frac{1}{n}\left|Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j))]-Tr[\mathcal{J}(\theta_j)]\right|+\left[\frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)]-\left(1-\exp\left(-\frac{1}{n}Tr[\mathcal{J}(\overline{\rho}_j)]\right)\right)\right] \\
\leq & \frac{A}{n}\|\overline{\rho}_j-\theta_j\|+\frac{A'}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

The $\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$ are uniform in j because $(\overline{\rho}_j)_j$ is uniformly bounded (cf proposition). For the second term, the above inequalities and the fact that the Euler scheme is bounded implies that there exists two constant K_1 and K_2 such that :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}\left[\|q(\theta_j)\|\times\mathbf{E}[\left|N(.,H_j(\theta_j))-\overline{\nu}_{j+1}(\overline{\rho}_j,.)\right|/\mathcal{F}_j]\right] \\
\leq & K_1\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{n}S_j+\frac{K_2}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

For the first part we have an equivalent inequality. Thus we can conclude that there exists two constants G_1 and G_2 such that :

$$S_k \leq G_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} S_j + \frac{G_2}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{B.71}$$

The discrete Gronwall Lemma implies that there exists a constant F independent of n such that for all $k \leq [nT]$:

$$S_k \leq \frac{F}{n}.$$

The proposition is then proved. □

By using this two properties we can now express the final theorem :

Theorem 14 *Let $T > 0$ be a fixed time and let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be the probability space of the poisson point process N. Let n be an integer and let $(\tilde{\rho}_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ be the discrete quantum trajectory defined for $k < [nT]$ by the equation :*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{k+1} &= \mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k) + \mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k) \\ &\quad + \left[-\frac{\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_0(\tilde{\rho}_k)]} + \frac{\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)}{Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)]} \right] \left(\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k, .) - Tr[\mathcal{L}_1(\tilde{\rho}_k)] \right). \end{aligned}$$

Let $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ be the quantum trajectory solution of the jump Belavkin equation on $[0, T]$ which satisfies :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu_0 + \int_0^t f(\mu_{s-}) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{[0,K]} \left[\frac{\mathcal{J}(\mu_{s-})}{Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} - \mu_{s-} \right] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq Tr[\mathcal{J}(\mu_{s-})]} N(., dx, ds). \end{aligned}$$

If $\mu_0 = \tilde{\rho}_0$, then the discrete quantum trajectory $(\rho_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ converges in distribution to the continuous quantum trajectory $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ in $\mathcal{D}([0, T])$ for all T.

Proof: Let n be a large integer. For $k \leq [nT]$ we define $\tilde{\mu}_k = \mu_{\frac{k}{n}}$. We define :

$$B_k = \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq i \leq k} \|\tilde{\rho}_i - \tilde{\mu}_i\| \right]$$

Thanks to the proposition (8) and the theorem (5) concerning the Euler scheme, there exists a constant R independent of n such that for all $k \leq [nT]$:

$$B_k \leq \frac{R}{n} \tag{B.72}$$

The process $(\tilde{\mu}_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ converges in distribution to $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ for all T in $\mathcal{D}([0, T])$. Thanks to this fact and the inequality $(B.72)$ the convergence in distribution of $(\rho_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ to $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ is proved. □

Bibliographie

[1] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[2] S. Attal and Y. Pautrat. From $(n+1)$-level atom chains to n-dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.

[3] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[4] L. Bouten, M. Guţă, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[5] P. Brémaud. *Point processes and queues*. Springer-Verlag, New York, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics.

[6] T. C. Brown. Some Poisson approximations using compensators. *Ann. Probab.*, 11(3) :726–744, 1983.

[7] N. Bruti-Liberati and E. Platen. On the strong approximation of jump-diffusion processes. Research Paper Series 157, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, April 2005. available at http ://ideas.repec.org/p/uts/rpaper/157.html.

[8] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[9] J. Gough and A. Sobolev. Stochastic Schrödinger equations as limit of discrete filtering. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 11(3) :235–255, 2004.

[10] S. Haroche and J. M. Raimond. *Exploring the quantum*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2006. Atoms, cavities and photons.

[11] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[12] J. Jacod. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations : limit theorems. *Ann. Probab.*, 32(3A) :1830–1872, 2004.

[13] J. Jacod, T. G. Kurtz, S. Méléard, and P. Protter. The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :523–558, 2005.

[14] J. Jacod and P. Protter. Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques. In *Seminar on Probability, XVI*, volume 920 of *Lecture Notes in Math.*, pages 447–458. Springer, Berlin, 1982.

[15] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[16] B. Kümmerer and H. Maassen. An ergodic theorem for quantum counting processes. *J. Phys. A*, 36(8) :2155–2161, 2003.

[17] B. Kümmerer and H. Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *J. Phys. A*, 37(49) :11889–11896, 2004.

[18] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[19] T. G. Kurtz and P. Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[20] J. Ledoux. A Poisson limit theorem for reliability models based on Markov chains. *Comm. Statist. Theory Methods*, 35(1-3) :173–196, 2006.

[21] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[22] C Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation : the Diffusive case*. to appear in "The Annals of Probability", 2007.

[23] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

Annexe C

Article 3 : Poisson and Diffusion Approximation of Stochastic Schrödinger Equations with Control

Poisson and Diffusion Approximation of Stochastic Schrödinger Equations with Control

Clément PELLEGRINI

Institut C.Jordan
Université C.Bernard, Lyon 1
21, av Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex
France
e-mail : pelleg@math.univ-lyon1.fr

Abstract

"Quantum trajectories" are solutions of stochastic differential equations of non-usual type. Such equations are called "Belavkin" or "Stochastic Schrödinger Equations" and describe random phenomena in continuous measurement theory of Open Quantum System. Many recent investigations deal with the control theory in such model. In this article, stochastic models are mathematically and physically justified as limit of concrete discrete procedures called "Quantum Repeated Measurements". In particular, this gives a rigorous justification of the Poisson and diffusion approximation in quantum measurement theory with control. Furthermore we investigate some examples using control in quantum mechanics.

Introduction

Recent developments and applications in quantum mechanics deal with "Stochastic Schrödinger Equations" (also called Belavkin Equations [HR06]). These equations are classical stochastic differential equations ; they describe random phenomena in continuous measurement theory. The solutions of these equations are called "Quantum Trajectories", they

give account of the time evolution of reference states of open quantum system undergoing a continuous measurement.

A classical physical model ([15]) used in quantum optics is the one of an interaction between a two-level atom and a continuous field which describes the environment. The evolution of the small system (the atom) is observed by performing a quantum measurement. Because of the "Wave Packet Reduction", an indirect continuous measurement is then performed on the field in order not to destroy the information contained in the atom ; we get then partial data of this system. These partial information are rendered by a stochastic evolution of the reference state of the small system. Without control, one consider essentially two types of stochastic models described by stochastic differential equations. They are called classical Belavkin Equations or Stochastic Schrödinger Equations and their solutions are called "classical quantum trajectories".

1. The "diffusive equation" (Homodyne detection experiment) is given by

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + [\rho_t C^\star + C\rho_t - Tr\left(\rho_t(C + C^\star)\right)\rho_t]dW_t \tag{C.1}$$

   where W_t describes a one-dimensional Brownian motion.

2. The "jump equation" (Resonance fluorescence experiment) is

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt) \tag{C.2}$$

   where $\tilde{N}_t$ is a counting process with stochastic intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$.

First mathematical results concerning the evolution of an atom system undergoing a continuous measurement are due to Davies in [14]. He gives namely a description of the time evolution of the state of an atom system from which we study the detection of photon emission. With this description, heuristic rules can be used to derive stochastic Schrödinger equations. A way to obtain rigorous result is the use of Quantum Filtering Theory ([9],[10]). Such theory needs a high analytic machinery using Von Neumann algebra, conditional expectation in operator algebra and fine properties of the Non-commutative Probability Theory.

Many recent applications, in quantum optics or modern engineering, needs an exterior control in the interaction and measurement experiences. Such investigations was motivated by precision and optimization constraints in order to obtain reliable performance in experimental physics. Control actions can be of very different types and can be resumed by a continuous modification of the parameters of experiences. For example in quantum optics, the modification of the intensity of a laser are used to monitor the evolution of atoms. Such procedures are called "open loop control" or deterministic control. Finer strategies needs the use of stochastic control. Following the evolution of the system and the different results of measurements, the interaction is modified in order to control the progress of experiences. As the evolution of a system undergoing a measurement is stochastic (cf equations (1) and (2)), control, in such situations, own a random character. This is called "closed loop control" or "feedback control".

Usually, the evolution of an open quantum system is described by a unitary-evolution described in continuous time by a process (V_t) which satisfies a quantum Langevin equations. Mathematically, the control effect is then rendered by the modification of this unitary-evolution. The technical difficulties of Quantum Filtering Theory are increased by the introduction of control. In [30],[11],[10], it was investigated how classical Belavkin equations (1) and (2) are modified in presence of control with such tools.

A more intuitive approach in terms of physical and mathematical justification consists to use a discrete model called "Quantum Repeated Interactions". The setup is as follows. The field is represented as an infinite chain of identical small quantum system (a spin chain for example). Each pieces of environment interacts one after the other with the atom during a time interval of length h. Such discrete interaction model is shown in particular to converge ($h \to 0$) to continuous time models described by Quantum Langevin Equations (cf [4]). At each interaction, a measurement on the environment is performed. The random results of observations give rise to discrete stochastic processes describing the procedure. As regards just the small system, its evolution during the successive measurements is described by classical Markov chains called "discrete quantum trajectories". In [26] and [25] it is shown that these discrete trajectories (without control), converge in distribution to solutions of classical Belavkin Equations (1) and (2). In this article, we present a way to introduce control effects in the discrete model of quantum repeated interactions. Stochastic models of quantum measurement with control are then justified by convergence theorems in the same way of [26] and [25]. Next we investigate some applications.

This article is structured as follows.

The first section is devoted to the discrete model of quantum repeated interactions with control. We define the probabilistic framework which describe the random character of repeated quantum measurements. We show that the quantum trajectories which describe the evolution of the small system are classical controlled Markov chains. Next we focus on a particular case of a two-level atom in contact with a spin chain. We show that quantum trajectories describing this model satisfy finite difference stochastic equations which appears as approximations of continuous time stochastic differential equations. We present next asymptotic conditions to come into the problems of convergence.

The second section is then devoted to continuous models. From the approximation model of a two level system of Section 1, we establish Belavkin equations with control. Depending on the observable which is measured, it gives rise of two different continuous model. Next we justify such models by proving that the solutions of Belavkin equations can be obtained as limit of discrete quantum trajectories.

In the last section we present some applications of the continuous model. On the one hand, we study a concrete example of an atom monitored by a laser. By modelling a suitable interaction discrete model and by adapting the result of Section 2, we obtain a stochastic model for this concrete example. On the other hand we come into the problem of "optimal control" which uses general stochastic control results. This is applied to our subject in the diffusive case.

C.1 Discrete Controlled Quantum Trajectories

We make here precise the mathematical framework of quantum repeated measurements with control. It is shown that the principle of quantum repeated measurements gives rise to Markov chains which are called "discrete controlled quantum trajectories".

C.1.1 Repeated Quantum Measurements with Control

Quantum repeated interactions and measurements models are deeply studied in [26] and [25]. This section is devoted to the introduction of the Control Theory in this setting. In order to introduce the interaction model, let us start by describing this one without control.

A small system, represented by a Hilbert space $\mathcal{H}_0$, is in contact with an infinite chain of identical independent quantum systems. Each copy of the environment is represented by $\mathcal{H}$ and interacts one after the other with $\mathcal{H}_0$ during a time interval of length h.

The first interaction between $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}$ is described by the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. The evolution is given by a self-adjoint operator H_{tot} on the tensor product. This operator is called the total Hamiltonian and its general form is

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes H + H_{int}$$

where the operators H_0 and H are the free Hamiltonians of each system. The operator H_{int} represents the Hamiltonian of interaction. This defines the unitary-operator

$$U = e^{ih\,H_{tot}},$$

and the evolution of states of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, in the Schrödinger picture is given by

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^{\star}.$$

After this first interaction, a second copy of $\mathcal{H}$ interacts with $\mathcal{H}_0$ in the same fashion and so on.

As the chain is supposed to be infinite, the whole sequence of interactions is described by the state space :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k \tag{C.3}$$

where $\mathcal{H}_k$ denotes the k-th copy of $\mathcal{H}$. The countable tensor product $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ means the following. Consider that $\mathcal{H}$ is of finite dimension and that $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ is a fixed orthonormal basis of $\mathcal{H}$. The orthogonal projector on $\mathbb{C}X_0$ is denoted by $|X_0\rangle\langle X_0|$. This is the ground state (or vacuum state) of $\mathcal{H}$. The tensor product is taken with respect to X_0 (for details, see [4]).

The unitary evolution describing the k-th interaction is given by U_k which acts as U on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_k$, whereas it acts like the identity operator on the other copies. If ρ is a state on $\mathbf{\Gamma}$, the effect of the k-th interaction is then :

$$\rho \mapsto U_k\,\rho\,U_k^{\star}$$

Hence the result of the k first interactions is described by the operator V_k on $\mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$ defined by the recursive formula :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{k+1} & = & U_{k+1} V_k \\ V_0 & = & I \end{array} \right. \tag{C.4}$$

and the evolution of states is given by

$$\rho \mapsto V_k \, \rho \, V_k^\star .$$

From this description, we can establish the principle of successive measurements. A main feature of this article is to present this theory in presence of control. The effect of control can be described as follows. After an interaction, a measurement is performed on the piece of environment which has just interact. The next interaction is modified ([11]). This modification can depend on the random result of the measurement, it is then taken into account in the definition of the unitary operator which describes this interaction. Therefore if U_k is the unitary-operator describing the k-th interaction, it depends then on the length time of interaction and on a parameter u_{k-1} which gives account of the control. Likewise this parameter depends on the length time of interaction ; the operator U_k is then denoted by $U_k(h, u_{k-1}(h))$. The whole sequence $\mathbf{u} = (u_k(h))$ is called the "control strategy". The complete definition of a control strategy is given in Definition 1 below. The k first interactions with control are then described by the unitary-operator $V_k^{\mathbf{u}}$:

$$V_k^{\mathbf{u}} = U_k(h, u_{k-1}(h)) \, U_{k-1}(h, u_{k-2}(h)) \, \ldots \, U_1(h, u_0(h)). \tag{C.5}$$

Finally, the evolution in presence of control is given by

$$\rho \mapsto V_k^{\mathbf{u}} \rho V_k^{\mathbf{u}\star} \tag{C.6}$$

In this setting, we describe the principle of indirect measurement of an observable of $\mathcal{H}_k$. Let A be any observable on $\mathcal{H}$ with spectral decomposition $A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j$, consider its natural ampliation as an observable on $\mathbf{\Gamma}$ by :

$$A^k := \bigotimes_{j=0}^{k-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{j \geq k+1} I \tag{C.7}$$

The accessible data are the eigenvalues of A^k and the result of the observation is random. If ρ is any state on $\mathbf{\Gamma}$, we observe λ_j with probability

$$P[\text{to observe } \lambda_j] = Tr[\, \rho \, P_j^k \,], \quad j \in \{1, \ldots, p\},$$

where the operator P_j^k corresponds to the ampliation of the eigenprojector P_j in the same way as $(C.7)$. If we have observed the eigenvalue λ_j the "projection" postulate called "wave packet reduction" imposes the state after the measurement to be

$$\rho_j = \frac{P_j^k \, \rho \, P_j^k}{Tr[\, \rho \, P_j^k \,]}.$$

Remark : This corresponds to the new reference state of our system. Another measurement of the same observable A^k (with respect to this state) should give $P[\text{to observe } \lambda_j] = 1$. Hence only one measurement give a significant information ; it justifies a principle of repeated interactions.

Quantum repeated measurements with control are the combination of this previous principle and the successive interactions $(C.6)$. After each interaction, a quantum measurement induces a random modification of the state of the system. It defines then a discrete process which is called "discrete quantum trajectory". The description is as follows.

The initial state on $\mathbf{\Gamma}$ is chosen to be

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{j\geq 1} \beta_j$$

where ρ is any state on $\mathcal{H}_0$ and each $\beta_i = \beta$ is any state on $\mathcal{H}$. The state after k interactions is denoted by $\mu_k^{\mathbf{u}}$, we have :

$$\mu_k^{\mathbf{u}} = V_k^{\mathbf{u}} \mu V_k^{\mathbf{u}\star}.$$

The probability space describing the experience is $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$ where $\Sigma = \{1, \ldots, p\}$. The integers i correspond to the indexes of the eigenvalues of A. We endow $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$ with the cylinder σ-algebra generated by the cylinder sets :

$$\Lambda_{i_1,\ldots,i_k} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} / \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_k = i_k\}.$$

Remarking that for all j, the unitary operator U_j commutes with all P^k for all $k < j$. For any set $\{i_1, \ldots, i_k\}$, we can define the following operator :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k^{\mathbf{u}}(i_1, \ldots, i_k) &= I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots \mu_k^{\mathbf{u}} I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots \\ &= P_{i_k}^k \ldots P_{i_1}^1 \mu_k^{\mathbf{u}} P_{i_1}^1 \ldots P_{i_k}^k. \end{aligned}$$

This is the non-normalized state corresponding to the successive observation of $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik}$. The probability to observe these eigenvalues is

$$P[\text{to observe } \lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik}] = Tr[\tilde{\mu}^{\mathbf{u}}(i_1, \ldots, i_k)].$$

By putting

$$P[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}] = P[\text{to observe } \lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik}],$$

it defines a probability measure on the cylinder sets of $\Sigma^{\mathbf{N}^\star}$ which satisfies the Kolmogorov Consistency Criterion. It defines then a unique probability measure on $\Sigma^{\mathbf{N}^\star}$. The discrete quantum trajectory with control strategy $\mathbf{u}$ on $\mathbf{\Gamma}$ is described by the following random sequence of states :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}} : & \Sigma^{\mathbf{N}^\star} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma}) \\ & \omega & \longmapsto & \tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \frac{\tilde{\mu}_k^{\mathbf{u}}(\omega_1,\ldots,\omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}_k^{\mathbf{u}}(\omega_1,\ldots,\omega_k))]} \end{array}$$

From this description, the following result is obvious.

Proposition 12 *Let* $\mathbf{u}$ *be any strategy and* $(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})$ *be the above random sequence of states we have for all* $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ *:*

$$\tilde{\rho}_{k+1}^{\mathbf{u}}(\omega) = \frac{P_{\omega_{k+1}}^{k+1} U_{k+1}(h, u_k(h))\ \tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}(\omega)\ U_{k+1}^{\star}(h, u_k(h)) P_{\omega_{k+1}}^{k+1}}{Tr\left[\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}(\omega)\ U_{k+1}^{\star}(h, u_k(h)) P_{\omega_{k+1}}^{k+1} U_{k+1}(h, u_k(h))\right]}.$$

Before to continue the description of discrete quantum trajectories, at this stage, we have to make precise the definition of control strategy. In this article we consider two kind of control.

Definition 4 *Let* $\mathbf{u} = (u_k(h))$ *be a control strategy and let* $(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})$ *be a quantum trajectory.*

1. *If there exists some function* u *from* $\mathbb{R}$ *to* $\mathbb{R}^n$ *such that for all* k *:*

$$u_k(h) = u(kh),$$

   the control strategy is called deterministic. It is also called "open loop control".

2. *If there exists some function* u *from* $\mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$ *to* $\mathbb{R}^n$ *such that for all* k *:*

$$u_k(h) = u(kh, \tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}),$$

   the control strategy is called Markovian. It is also called "closed loop control" or "feedback control". If for all k *we have* $u_k(h) = u(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})$*, this is an homogeneous Markovian strategy.*

The following theorem is an easy consequence of Proposition 12 and of the previous definition .

Theorem 15 *For all control strategy* $\mathbf{u}$*, the sequence* $(\tilde{\rho}_n^{\mathbf{u}})_n$ *is a non homogeneous Markov chain valued on the set of states of* $\mathbf{\Gamma}$*. It is described as follows :*

$$P\left[\tilde{\rho}_{n+1}^{\mathbf{u}} = \mu / \tilde{\rho}_n^{\mathbf{u}} = \theta_n, \ldots, \tilde{\rho}_0^{\mathbf{u}} = \theta_0\right] = P\left[\tilde{\rho}_{n+1}^{\mathbf{u}} = \mu / \tilde{\rho}_n^{\mathbf{u}} = \theta_n\right].$$

If $\tilde{\rho}_n^{\mathbf{u}} = \theta_n$ *then* $\tilde{\rho}_{n+1}^{\mathbf{u}}$ *takes one of the values :*

$$\mathcal{H}_i^{\mathbf{u},n+1}(\theta_n) = \frac{P_i^{n+1}\left(U_{n+1}(h, u_n(h))\, \theta_n\, U_{n+1}^{\star}(h, u_n(h))\, P_i^{n+1}\right.}{Tr\left[\left(U_{n+1}(h, u_n(h))\, \theta_n\, U_{n+1}^{\star}(h, u_n(h))\, P_i^{n+1}\right.\right]}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

with probability $Tr\left[U_{n+1}(h, u_n(h))\, \theta_n\, U_{n+1}^{\star}(h, u_n(h))\, P_i^{n+1}\right]$.

The discrete process $(\rho_k^{\mathbf{u}})$ *is called a controlled Markov chain.*

Proof: Property of being a Markov chain comes from the fact that a control strategy is either deterministic or Markovian. For the two case, the conclusion is obvious from the description of Proposition 12. □

In general, one is only interested in the reduced state of the small system. This state is given by the partial trace operation. Let us recall what partial trace is. Let $\mathcal{Z}$ be any Hilbert space, the notation $Tr_{\mathcal{Z}}[W]$ corresponds to the trace of any trace-class operator W on $\mathcal{Z}$.

Definition-Theorem 3 *Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ be any Hilbert spaces. Let α be a state on the tensor product $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. There exists a unique state η on $\mathcal{H}$ which is characterized by the property :*

$$Tr_{\mathcal{H}}[\,\eta\, X\,] = Tr_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}[\,\alpha(X\otimes I)\,].$$

for all $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. The state η is called the partial trace of α on $\mathcal{H}$ with respect to $\mathcal{K}$.

For any state α on $\mathbf{\Gamma}$, denote $\mathbf{E}_0[\alpha]$ the partial trace of α on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\bigotimes_{k\geq 1}\mathcal{H}_k$. We then define the discrete controlled quantum trajectory on $\mathcal{H}_0$ as follows. For all $\omega\in\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$:

$$\rho_n^{\mathbf{u}}(\omega) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_n^{\mathbf{u}}(\omega)]. \tag{C.8}$$

Remark : We adapt Definition 1 by considering Markovian strategy defined on $\mathbb{R}\times\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. An immediate consequence of Theorem 1 is the following result.

Theorem 16 *For all control strategy $\mathbf{u}$, the random sequence defined by formula $(C.8)$ is a non-homogeneous controlled Markov chain with values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. If $\rho_n^{\mathbf{u}}=\chi_n$ then $\rho_{n+1}^{\mathbf{u}}$ takes one of the values :*

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{I\otimes P_i\,\tilde{U}_{n+1}(h,u_n(h))(\chi_n\otimes\beta)\tilde{U}_{n+1}^\star(h,u_n(h))\,I\otimes P_i}{Tr[\,\tilde{U}_{n+1}(h,u_n(h))(\chi_n\otimes\beta)\tilde{U}_{n+1}^\star(h,u_n(h))\,I\otimes P_i]}\right]\quad i=1\ldots p$$

with probability $Tr\left[\tilde{U}_{n+1}(h,u_n(h))(\chi_n\otimes\beta)\tilde{U}_{n+1}^\star(h,u_n(h))\,P_i\right]$.

Remark : Let us stress that :

$$\frac{(I\otimes P_i)\,U\,(\chi_n\otimes\beta)\,U^\star\,(I\otimes P_i)}{Tr[\,U\,(\chi_n\otimes\beta)\,U^\star\,(I\otimes P_i)]}$$

is a state on $\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{H}$. In this situation, the notation $\mathbf{E}_0$ denotes the partial trace on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\mathcal{H}$. The infinite tensor product $\mathbf{\Gamma}$ is just needed to have a clear description of the repeated interactions and the probability space $\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$.

With the description of Theorem 2, we can express a discrete evolution equation describing the discrete quantum trajectory $(\rho_k^{\mathbf{u}})$. By putting

$$\mathcal{L}_i^{\mathbf{u},k}(\rho) = \mathbf{E}_0\left[I\otimes P_i\,\tilde{U}_k(h,u_{k-1}(h))\,(\rho\otimes\beta)\,\tilde{U}_k^\star(h,u_{k-1}(h))\,I\otimes P_i\right]\quad i=1\ldots p,$$

and $\mathbf{1}_i^k(\omega)=\mathbf{1}_i(\omega_k)$ for all $\omega\in\Sigma^{\mathbb{N}^\star}$. The discrete process $(\rho_k^{\mathbf{u}})$ satisfies

$$\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}(\omega) = \sum_{i=0}^{p}\frac{\mathcal{L}_i^{k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}(\omega))}{Tr[\mathcal{L}_i^{k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}(\omega))]}\mathbf{1}_i^{k+1}(\omega) \tag{C.9}$$

for all $\omega\in\Sigma^{\mathbb{N}}$ and all $k>0$.

The following section is devoted to the deeply study of the equation $(C.9)$ in a particular case of a two-level system in interaction with a spin chain.

C.1.2 A Two-Level Atom

The physical situation is described by $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. In this section, it is shown that the discrete controlled process $(\rho_k^{\mathbf{u}})$ is the solution of a finite difference stochastic equation which will appear as an approximation of stochastic differential equations in Section 3.

Let us show that we can obtain a formula for $(\rho_n^{\mathbf{u}})$ of the following type,

$$\rho_{k+1}^{\mathbf{u}} = f(\rho_k^{\mathbf{u}}, X_{k+1}). \tag{C.10}$$

where $(X_k)_k$ is a sequence of random variables. Such equation is obtained from the description of Theorem 2.

The state $\rho_k^{\mathbf{u}}$ can be namely considered as a initial state (according to the Markov property of Theorem 16). Thus we consider a single interaction with a system $(\mathcal{H}, \beta)$ (actually this is the $k+1$-th copy). As $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, consider an observable of the form $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$. The unitary operator describing the $k+1$-th interaction is a unitary 4×4 matrix. In order to compute the partial trace appearing in the expression of $\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}$, we choose a suitable basis. Let $(X_0 = \Omega, X_1 = X)$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. For the space $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, we consider the following basis

$$\Omega \otimes \Omega, X \otimes \Omega, \Omega \otimes X, X \otimes X.$$

In this basis, the unitary operator can be written by blocks as a 2×2 matrix :

$$U_{k+1}(h, u_k(h)) = \begin{pmatrix} L_{00}(kh, u_k(h)) & L_{01}(kh, u_k(h)) \\ L_{10}(kh, u_k(h)) & L_{11}(kh, u_k(h)) \end{pmatrix}$$

where each $L_{ij}(kh, u_k(h))$ are operators on $\mathcal{H}_0$. The reference state β of $\mathcal{H}$ is :

$$\beta = |\Omega\rangle\langle\Omega|.$$

As a consequence, the state after the interaction is :

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}^{\mathbf{u}} &= U_{k+1}(h, u_k(h))\,(\rho_k^{\mathbf{u}} \otimes \beta)\, U_{k+1}^{\star}(h, u_k(h)) \\ &= \begin{pmatrix} L_{00}(kh, u_k(h))\,\rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{00}^{\star}(kh, u_k(h)) & L_{00}(kh, u_k(h))\,\rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{10}^{\star}(kh, u_k(h)) \\ L_{10}(kh, u_k(h))\,\rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{00}^{\star}(kh, u_k(h)) & L_{10}(kh, u_k(h))\,\rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{10}^{\star}(kh, u_k(h)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem 2 gives the description of the two possible non-normalized states :

$$\mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho^{\mathbf{u}})_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_0\, \mu_{k+1}^{\mathbf{u}}\, I \otimes P_0] \tag{C.11}$$

$$\mathcal{L}_1^{\mathbf{u},k+1}(\rho^{\mathbf{u}})_k) = \mathbf{E}_0[I \otimes P_1\, \mu_{k+1}^{\mathbf{u}}\, I \otimes P_1]. \tag{C.12}$$

These are operators on $\mathcal{H}_0$. The non-normalized state $\mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}})$ appears with probability $p_{k+1}^{\mathbf{u}} = Tr[\mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}})]$ and $\mathcal{L}_1^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}})$ with probability $q_{k+1}^{\mathbf{u}} = Tr[\mathcal{L}_1^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}})]$.

In terms of this previous description the evolution equation $(C.9)$ for a two level system becomes

$$\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}(\omega) = \frac{\mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}(\omega))}{p_{k+1}^{\mathbf{u}}} \mathbf{1}_0^{k+1}(\omega) + \frac{\mathcal{L}_1^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}(\omega))}{q_{k+1}^{\mathbf{u}}} \mathbf{1}_1^{k+1}(\omega). \tag{C.13}$$

In order to obtain the final discrete quantum evolution equation we consider the centered and normalized random variable

$$X_{k+1} = \frac{\mathbf{1}_1^{k+1}(\omega) - q_{k+1}^{\mathbf{u}}}{\sqrt{q_{k+1}^{\mathbf{u}} p_{k+1}^{\mathbf{u}}}}.$$

We define the associated filtration on $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$:

$$\mathcal{F}_k = \sigma(X_i, i \leq k).$$

So by construction we have $\mathbf{E}[X_{k+1}/\mathcal{F}_k] = 0$ and $\mathbf{E}[X_{k+1}^2/\mathcal{F}_k] = 1$. In terms of (X_k) the discrete controlled quantum trajectory satisfies :

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}^{\mathbf{u}} &= \mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}) + \mathcal{L}_1^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}) \\ &\quad + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}^{\mathbf{u}}}{p_{k+1}^{\mathbf{u}}}} \mathcal{L}_0^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}) + \sqrt{\frac{p_{k+1}^{\mathbf{u}}}{q_{k+1}^{\mathbf{u}}}} \mathcal{L}_1^{k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}) \right] X_{k+1}. \end{aligned} \tag{C.14}$$

By computing the terms $\mathcal{L}_i^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}})$, the description of the two-level system is complete. Such terms depends on the expression of the eigenprojectors of the observable A. If the eigenprojector P_i is expressed as $P_i = \begin{pmatrix} p_{00}^i & p_{01}^i \\ p_{10}^i & p_{11}^i \end{pmatrix}$ in the basis (Ω, X) of $\mathcal{H}$, we have :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^{\mathbf{u},k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}}) &= p_{00} L_{00}(kh, u_k(h))\, \rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{00}^{\star}(kh, u_k(h)) + p_{01} L_{00}(kh, u_k(h))\, \rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{10}^{\star}(kh, u_k(h)) \\ &\quad + p_{10} L_{10}(kh, u_k(h))\, \rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{00}^{\star}(kh, u_k(h)) + p_{11} L_{10}(kh, u_k(h))\, \rho_k^{\mathbf{u}}\, L_{10}^{\star}(kh, u_k(h)) \end{aligned} \tag{C.15}$$

Finally, the equation $(C.14)$ can be considered in a general way and the unique solution starting from ρ_0 is our quantum trajectory. As the unitary evolution depends on the time length interaction h, the discrete quantum trajectory $(\rho_k^{\mathbf{u}})$ depends on h. This dependence allow us in Section 2 to consider continuous time limit $(h \to 0)$ of the discrete processes $(\rho_K^{\mathbf{u}})$. For the moment, the next section is devoted to present the asymptotic ingredients necessary to obtain such convergence results.

C.1.3 Description of Asymptotic

In this section, we describe suitable asymptotic for the coefficients of the unitary operators $U_k(h, u_k(h))$ in order to have an effective continuous time limit from discrete quantum trajectories. Let $h = 1/n$ be the length time of interaction, we have for (U_k)

$$U_{k+1}(n, u_k(n)) = \begin{pmatrix} L_{00}(k/n, u_k(n)) & L_{01}(k/n, u_k(n)) \\ L_{10}(k/n, u_k(n)) & L_{11}(k/n, u_k(n)) \end{pmatrix},$$

In our context, the choice of the coefficients L_{ij} is an adaptation of the works of Attal-Pautrat in [4]. In their work, they consider evolution of the type

$$U_{k+1}(n) = \begin{pmatrix} L_{00}(n) & L_{01}(n) \\ L_{10}(n) & L_{11}(n) \end{pmatrix},$$

that is, homogeneous evolution without control. They have shown that

$$V_{[nt]} = U_{[nt]}(n) \dots U_1(n)$$

converges (in operator algebra) to a non-trivial process V_t (solution of a quantum stochastic differential equation), only if the coefficients $L_{ij}(n)$ obey certain normalization. These coefficients must be of the form

$$L_{00}(n) = I + \frac{1}{n}\left(-iH_0 - \frac{1}{2}CC^\star\right) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{C.16}$$

$$L_{10}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}C + \circ\left(\frac{1}{n}\right), \tag{C.17}$$

where H_0 is the Hamiltonian of $\mathcal{H}_0$ and C is any operator on $\mathbb{C}^2$. With these expressions, classical Belavkin equations (without control) have been obtained as continuous limit of discrete quantum trajectories in [25] and [26]. Hence, in the control context, the coefficients $L_{ij}(k/n, u_k(n))$ must follow similar expressions. Let k be fixed, we put

$$\begin{aligned} L_{00}(k/n, u_k(n)) &= I + \frac{1}{n}\left(-iH_k(n, u_k(n)) - \frac{1}{2}C_k(n, u_k(n))C(_k(n, u_k(n))^\star\right) \\ &\quad + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$L_{00}(k/n, u_k(n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}C_k(n, u_k(n)) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \tag{C.19}$$

where $H_k(n, u_k(n))$ is a self-adjoint operator and $C_k(n, u_k(n))$ is an operator on $\mathbb{C}^2$. As the coefficients depends on k, n and on the control $u_k(n)$, it is natural to consider that the operators $H_k(n, u_k(n))$ and $C_k(n, u_k(n))$ depends also on these parameters. Let us stress that if for all k and n these operators are constant, we recover the expression $(C.16)$ of Attal-Pautrat.

In addition, in order to prove the convergence in Section 3, we suppose that there exist some function H and C such that

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{H}_2(\mathbb{C}) \\ & (t,s) & \longmapsto & H(t,s) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{rccc} C: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \\ & (t,s) & \longmapsto & C(t,s) \end{array}$$

where $\mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ designs the set of self-adjoint operators on $\mathbb{C}^2$ and

$$\begin{aligned} H_k(n, u_k(n)) &= H(k/n, u_k(n)) \\ C_k(n, u_k(n) &= C(k/n, u_k(n)) \end{aligned} \tag{C.20}$$

Furthermore we suppose that all the $\circ$ are uniform in k.

At this stage, by remarking that the terms $\mathcal{L}_i^{\mathbf{u},k}$ depends on $L_{ij}(n, u_k(n))$, we can include the previous asymptotic in the expression $(C.14)$ and $(C.15)$. As the expression $(C.15)$ of $\mathcal{L}_i^{\mathbf{u},k}$ depends on the eigen-projectors of A, computations show that there are two different behaviors.

1. If the observable A is diagonal in the basis (Ω, X), that is, it is of the form $A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, we obtain the asymptotic for the probabilities

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{u}}_{k+1}(n) &= 1 - \frac{1}{n} Tr\left[\mathcal{J}(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k(n))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ q^{\mathbf{u}}_{k+1}(n) &= \frac{1}{n} Tr\left[\mathcal{J}(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k(n))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

The discrete equation $(C.14)$ becomes

$$\begin{aligned} &\rho^{\mathbf{u}}_{k+1}(n) - \rho^{\mathbf{u}}_k(n) \\ &\quad = \frac{1}{n} L(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k(n)) + \circ(\frac{1}{n}) \\ &\qquad + \left[\frac{\mathcal{J}(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k(n))}{Tr\left[\mathcal{J}(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k(n))\right]} - \rho^{\mathbf{u}}_k(n) + \circ(1)\right] \sqrt{q^{\mathbf{u}}_{k+1}(n) p^{\mathbf{u}}_{k+1}(n)}\, X_{k+1}(n) \end{aligned} \quad \text{(C.21)}$$

where for all state ρ, we have defined

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t,s)(\rho) &= C(t,s)\ \rho\ C^\star(t,s) \ \text{ and} \\ L(t,s)(\rho) &= -i[H(t,s), \rho] - \frac{1}{2}\{C(t,s)C^\star(t,s), \rho\} + \mathcal{J}(t,s)(\rho). \end{aligned} \quad \text{(C.22)}$$

2. If the observable A is non diagonal in the basis (Ω, X), and if the eigenprojectors are express as $P_0 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ and $P_1 = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}$ we have

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{u}}_{k+1} &= p_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left[\rho^{\mathbf{u}}_k (p_{01} C(k/n, u_{k+1}(n)) + p_{10} C^\star(k/n, u_k(n)))\right] \\ &\quad + \frac{1}{n} Tr\left[\rho^{\mathbf{u}}_k p_{00} (C(k/n, u_k(n)) + C^\star(k/n, u_k(n)))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ q^{\mathbf{u}}_{k+1} &= q_{00} + \frac{1}{\sqrt{n}} Tr\left[\rho^{\mathbf{u}}_k (q_{01} C(k/n, u_k(n)) + q_{10} C^\star(k/n, u_k(n)))\right] \\ &\quad + \frac{1}{n} Tr\left[\rho^{\mathbf{u}}_k q_{00} (C(k/n, u_k(n)) + C^\star(k/n, u_k(n)))\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

The discrete equation $(C.14)$ becomes

$$\begin{aligned} &\rho^{\mathbf{u}}_{k+1} - \rho^{\mathbf{u}}_k = \\ &\quad \frac{1}{n} L(k/n, u_k(n))(\rho^{\mathbf{u}}_k) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \left[e^{i\theta} C(k/n, u_k(n)) \rho^{\mathbf{u}}_k + e^{-i\theta} \rho^{\mathbf{u}}_k C^\star(k/n, u_k(n))\right. \\ &\quad \left. - Tr[\rho^{\mathbf{u}}_k (e^{i\theta} C(k/n, u_k(n)) + e^{-i\theta} C^\star(k/n, u_k(n)))]\, \rho^{\mathbf{u}}_k + \circ(1)\right] \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}(n) \end{aligned} \quad \text{(C.23)}$$

where θ is a real parameter. This parameter can be explicitly expressed with the coefficients of the eigenprojectors (P_i). By putting $C_\theta(k/n, u_k(n)) = e^{i\theta}C(k/n, u_k(n))$ we have the same form for the equation $(C.23)$ for all θ, then we consider in the following that $\theta = 0$. The expression of L is the same as $(C.22)$.

In each case, we can define a process $(\rho_{[nt]})$ which satisfies

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbf{u}}_{[nt]} &= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} [\rho^{\mathbf{u}}_{i+1} - \rho^{\mathbf{u}}_i] \\
&= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} [\mathcal{L}_0^{\mathbf{u},i+1}(\rho^{\mathbf{u}}_i) + \mathcal{L}_1^{\mathbf{u},i+1}(\rho^{\mathbf{u}}_i) - \rho^{\mathbf{u}}_i] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \left[-\sqrt{\frac{q^{\mathbf{u}}_{i+1}}{p^{\mathbf{u}}_{i+1}}}\, \mathcal{L}_0^{\mathbf{u},i+1}(\rho^{\mathbf{u}}_i) + \sqrt{\frac{p^{\mathbf{u}}_{i+1}}{q^{\mathbf{u}}_{i+1}}}\, \mathcal{L}_1^{\mathbf{u},i+1}(\rho^{\mathbf{u}}_i) \right] X_{i+1} \\
&= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\mathcal{Y}(i/n, u_i(n), \rho^{\mathbf{u}}_i) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \mathcal{Z}(i/n, u_i(n), \rho^{\mathbf{u}}_i) X_{i+1} \qquad \text{(C.24)}
\end{aligned}$$

for some functions $\mathcal{Y}$ and $\mathcal{Z}$ which depend on the description $(C.21)$ or $(C.23)$.

Such equation $(C.24)$ appears as an approximation of a continuous time stochastic differential equation. In the next section, this idea is used in order to obtain the continuous time model of quantum trajectories with control as a limit of discrete processes $(\rho_{[nt]})$.

C.2 Convergence to Continuous Models

In this section, we present a way to rigorously justify stochastic models describing continuous time measurement with control as a limit of discrete controlled quantum trajectories $(\rho_{[nt]})$. Starting from the description $(C.24)$ with a Markovian strategy and following the asymptotic $(C.21)$ and $(C.23)$, we show that discrete processes $(\rho_{[nt]})$ converge in distribution to solutions of stochastic differential equations.

As in the classical case of Belavkin equations, we show that the evolution of a quantum system undergoing a continuous measurement with control is either described by a diffusive evolution or by an evolution with jump.

1. If (ρ_t) denotes the state of a quantum system, the diffusive evolution is given by

$$d\rho_t = L(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)dt + \Theta(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)dW_t \qquad \text{(C.25)}$$

where (W_t) describes a one-dimensional Brownian motion. The function L is expressed as $(C.22)$ and Θ is defined by

$$\Theta(t, a)(\mu) = C(t, a)\mu + \mu C^\star(t, a) - Tr\left[\mu\Big(C(t, a) + C^\star(t, a)\Big)\right]\mu \qquad \text{(C.26)}$$

for all $t > 0$, for all a in $\mathbb{R}$ and all operator μ in $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

2. The evolution with jump is given by

$$\begin{aligned} d\rho_t &= L(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)dt \\ &\quad + \left[\frac{\mathcal{J}(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)]} - \rho_t\right]\left(d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)]dt\right) \end{aligned} \quad \text{(C.27)}$$

where $\tilde{N}_t$ is a counting process with stochastic intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(s,u(s,\rho_s))(\rho_s)]ds$. The functions L and $\mathcal{J}$ are as $(C.22)$.

Such equations are called "controlled Belavkin equations" and the solutions are called "controlled quantum trajectories".

For the moment we do not speak about the regularity of the functions L, Θ and $\mathcal{J}$. This will be discussed when we deal with the question of existence and uniqueness of a solution for such equations.

In the next two sections, the question of existence, uniqueness and approximation of controlled Belavkin equations is treated. Let us begin with the diffusive case.

C.2.1 Diffusive Belavkin Equation with Control

In this section, we justify the diffusive model

$$d\rho_t = L(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)dt + \Theta(t,u(t,\rho_t))(\rho_t)dW_t$$

of controlled Belavkin equations by proving that the solution of equation $(C.25)$ is obtained from the limit of particular quantum trajectories $(\rho_{[nt]})$. In the same time, we show that the equation $(C.25)$ admits a unique solution with values in the set of states.

Let us investigate the problem of existence and uniqueness of a solution for $(C.25)$. For the moment, let u be any measurable function which defines a Markovian strategy as it is expressed in Definition 2. Usual conditions concerning existence and uniqueness of a solution for SDE of type $(C.25)$ is that for all $T > 0$ there exists a constant $M(T)$ and $K(T)$ such that the function L and Θ satisfy for all $t \leq T$ and $(\mu,\rho) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^2$:

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\|L(t,a)(\mu) - L(t,a)(\rho)\|, \|\Theta(t,a)(\mu) - \Theta(t,a)(\rho)\|\right\} \leq K(T)\|\mu-\rho\| \\ &\sup\left\{\|L(t,a)(\rho)\|, \|\Theta(t,a)(\rho)\|\right\} \leq M(T)(1+\|\rho\|+\|a\|). \end{aligned} \quad \text{(C.28)}$$

Such conditions is called global Lipschitz conditions. However even in the homogeneous case without control, such conditions are not satisfied. Indeed, in the homogeneous situation without control, for Θ we have

$$\Theta(t,a)(\mu) = \Theta(\mu) = C\mu + \mu C^\star - Tr\left[\mu\big(C + C^\star\big)\right]\mu.$$

Such function is not Lipschitz. Nevertheless it is C^∞ and then local Lipschitz. Such property is used in the classical case to obtain the existence and the uniqueness of a solution of Belavkin equations (see [25] and [26]). In the non-homogeneous context with control, the

local Lipschitz condition is expressed as follows. For all integer $k > 0$ and all $x \in \mathbb{R}$, define the function ϕ^k by

$$\phi^k(x) = -k\mathbf{1}_{]-\infty,-k[}(x) + x\mathbf{1}_{[-k,k]}(x) + k\mathbf{1}_{]k,\infty[}(x).$$

The function ϕ^k is called a truncation function. Its extension on the set of operator on $\mathbb{C}^2$ is given by

$$\tilde{\phi}^k(B) = (\phi^k(Re(B_{ij})) + i\phi^k(Im(B_{ij})))_{0\leq i,j\leq 1}$$

Hence, the local Lipschitz condition for the functions L and θ can be expressed as follows. For all $T > 0$ and for all integer $k > 0$ there exists a constant $M^k(T)$ and $K^k(T)$ such that the function L and Θ satisfy for all $t \leq T$ and $(\mu, \rho) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^2$:

$$\begin{aligned}
&\|L(t,a)(\tilde{\phi}^k(\mu)) - L(t,a)(\tilde{\phi}^k(\rho))\| \leq K^k(T)\|\mu - \rho\| \\
&\|\Theta(t,a)(\tilde{\phi}^k(\mu)) - \Theta(t,a)(\tilde{\phi}^k(\rho))\| \leq K^k(T)\|\mu - \rho\| \\
&\sup\left\{\|L(t,a)(\tilde{\phi}^k(\rho))\|, \|\Theta(t,a)(\tilde{\phi}^k(\rho))\|\right\} \leq M^k(T)(1 + \|\rho\| + \|a\|).
\end{aligned} \tag{C.29}$$

As a consequence we have the following existence and uniqueness theorem.

Theorem 17 *Let u be any measurable function. Let $k > 0$ be an integer. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space which supports a standard Brownian motion (W_t). Assume that L and Θ satisfy the conditions $(C.29)$. Let ρ_0 be any 2×2 matrix. The stochastic differential equation*

$$\rho_t^{\mathbf{u},k} = \rho_0 + \int_0^t L(s, u(s, \tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))ds + \int_0^t \Theta(s, u(s, \tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))dW_s, \tag{C.30}$$

admits a unique solution $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$. Furthermore the application $t \mapsto \rho_t^{\mathbf{u},k}$ is almost surely continuous.

This theorem is just a consequence of the local Lipschitz condition $(C.29)$ (cf [29]). The process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ is called a truncated solution. The link between such solution and a solution of the equation $(C.25)$ without truncature is expressed as follows. Usually, we define the random stopping time

$$T_k = \inf\{t > 0/\exists(ij),\ Re(\rho_t^{\mathbf{u},k}(ij)) = k \ or\ Im(\rho_t^{\mathbf{u},k}(ij)) = k\}$$

For any $k > 1$, we have $T_k > 0$ almost surely for ρ_0 is a state and the almost surely continuity of $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ (the coefficients of ρ_0 satisfy namely $|\rho_0(ij)| \leq 1$). Furthermore on $[0, T_k[$ we have

$$\tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k}) = \rho_t^{\mathbf{u},k}.$$

Therefore the process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ satisfy on $[0, T_k[$

$$\rho_t^{\mathbf{u},k} = \rho_0 + \int_0^t L(s, u(s, \rho_s^{\mathbf{u},k}))(\rho_s^{\mathbf{u},k})ds + \int_0^t \Theta(s, u(s, \rho_s^{\mathbf{u},k}))(\rho_s^{\mathbf{u},k})dW_s, \tag{C.31}$$

Hence the process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ solution of $(C.30)$ is the unique solution of the equation $(C.25)$ on $[0, T_k[$.

In our situation, we will prove that $T_k = \infty$ for all $k > 1$ by proving that the process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ is valued in the set of states. Indeed if the process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ takes value in the set of states, we have for all $t \geq 0$

$$\tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k}) = \rho_t^{\mathbf{u},k},$$

then $T_k = \infty$. As a consequence the process $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ satisfy for all $t > 0$ the equation $(C.25)$. The truncature method becomes actually not necessary, it just allow to exhibit a solution. As a consequence we have to prove that the solution obtained with a truncature method takes value in the set of states. This property follow from the convergence theorem.

Indeed, let assume that there is a discrete quantum trajectory $(\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}})$ which converges in distribution to $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ (for some $k > 1$). Such convergence is denoted by

$$\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}} \Longrightarrow \rho_t^{\mathbf{u},k}.$$

Therefore for all measurable functions $\mathcal{V}$ defined on $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, we have

$$\mathcal{V}(\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}}) \Longrightarrow \mathcal{V}(\rho_t^{\mathbf{u},k})$$

We apply it for the functions $\mathcal{V}(\rho) = Tr[\rho]$, for $\mathcal{V}(\rho) = \rho^\star - \rho$ and $\mathcal{V}_z(\rho) = \langle z, \rho z\rangle$ for all $z \in \mathbb{C}^2$. By definition if ρ is a state we have from trace property $Tr[\rho] = 1$, from self-adjointness $\rho^\star - \rho = 0$ and from positivity $\langle z, \rho z\rangle \geq 0$ for all $z \in \mathbb{C}^2$. As discrete quantum trajectories take values in the set of states, these properties are then conserved at the limit. The limit process $\rho_t^{\mathbf{u},k}$ takes then also values in the set of states. Let us prove now the convergence result.

Back to the description $(C.24)$ of discrete quantum trajectories, with asymptotic $(C.23)$ in the case of a non-diagonal observable A and with a Markovian strategy, we have

$$\begin{aligned}\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}} &= \rho_0 + \sum_{k=1}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\Big[L\big(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}})\big)(\rho_k^{\mathbf{u}}) + \circ(1)\Big] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{[nt]-1} \Big[\Theta\big(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}})\big)(\rho_k^{\mathbf{u}}) + \circ(1)\Big]\frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}(n),\end{aligned} \tag{C.32}$$

From this description, we can define the following processes and functions :

$$\begin{aligned}W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \\ V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \\ \rho_n^{\mathbf{u}}(t) &= \rho_{[nt]}^{\mathbf{u}}(n) \\ u_n(t, W) &= u([nt]/n, W) \\ \Theta_n(t, s) &= \Theta([nt]/n, s) \\ L_n(t, s) &= L([nt]/n, s)\end{aligned} \tag{C.33}$$

for all $t > 0$, for all $s \in \mathbb{R}$ and for all $W \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

By observing that these processes and these functions are piecewise constant, we can describe the discrete quantum trajectory $(\rho_n^{\mathbf{u}}(t))$ as a solution of the following stochastic differential equation

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbf{u}}(t) &= \rho_0 + \int_0^t \Big[L_n\Big(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))\Big)(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)\Big]\, dV_n(s) \\
&\quad + \int_0^t \Big[\Theta_n\Big(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))\Big)(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)\Big]\, dW_n(s) \\
&= \rho_0 + \int_0^t \Big[L_n\Big(s_-, u_n(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))\Big)(\tilde{\phi}^k(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))) + \circ(1)\Big]\, dV_n(s) \\
&\quad + \int_0^t \Big[\Theta_n\left(s_-, u_n(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))\right)(\tilde{\phi}^k(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))) + \circ(1)\Big]\, dW_n(s) \qquad (C.34)
\end{aligned}$$

for all $k > 1$.

In order to prove the convergence of this process to the solution of the equation $(C.30)$ given by Theorem 17, we use a theorem of Kurtz and Protter [20] concerning weak convergence of stochastic integrals. Let us fix some notations.

For all $T > 0$ we define $\mathcal{D}[0,T]$ the space of càdlàg process of $\mathbb{M}_2C$ endowed with the Skorohod topology.

Let $T_1[0,\infty)$ denote the set of nondecreasing mapping λ from $[0,\infty)$ to $[0,\infty)$ with $\lambda(0) = 0$ such that $\lambda(t+h) - \lambda(t) \leq h$ for all $t, h \geq 0$. For any function G defined from $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ to $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, we define

$$\begin{array}{rccc}
\tilde{G}: & \mathcal{D}[0,\infty) \times T_1[0,\infty) & \longrightarrow & \mathcal{D}[0,\infty) \\
& (X,\lambda) & \longmapsto & G(X) \circ \lambda,
\end{array}$$

such that for all $t \geq 0$ we have $G(X) \circ \lambda(t) = G(\lambda(t), X_{\lambda(t)})$. We consider the same definition for all other functions. We introduce the two following condition concerning a function $\tilde{G}$ and a sequence $\tilde{G}_n$ as above.

$(C1)$ For each compact subset $\mathcal{K} \in \mathcal{D}[0,\infty) \times T_1[0,\infty)$ and $t > 0$,
$\sup_{(X,\lambda)} \sup_{s \leq t} \|\tilde{G}_n(X,\lambda)(s) - \tilde{G}(X,\lambda)(s)\| \to 0$

$(C2)$ For $(X_n, \lambda_n)_n \in \mathcal{D}[0,\infty) \times T_1[0,\infty) / \sup_{s \leq T} \|X_n(s) - X(s)\| \to 0$
and $\sup_{s \leq t} |\lambda_n(s) - \lambda(s)| \to 0$ for each $t > 0$ implies
$\sup_{s \leq t} \|\tilde{G}(X_n, \lambda_n)(s) - \tilde{G}(X,\lambda)(s)\| \to 0$ (C.35)

Furthermore, recall that the square-bracket $[X,X]$ is defined for a semi-martingale by the formula :

$$[X,X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_{s-} dX_s\,.$$

We shall denote by $T_t(V)$ the total variation of a finite variation processes V on the interval $[0,t]$. The Theorem of Kurtz and Protter [21] that we use is the following.

Theorem 18 *Let (H_n, H) and (K_n, K) be two couple of functions which satisfy the conditions $(C1)$ and $(C2)$. Let $(\mathcal{F}_t^n)$ be a filtration and let $X_n(t)$ be a $\mathcal{F}_t^n$-adapted process which satisfies*

$$X_n(t) = X(0) + \int_0^t H_n(s, X_n(s_-))dV_n(s) + \int_0^t K_n(s, X_n(s_-))dW_n(s) \tag{C.36}$$

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space. Let X_t be the unique solution of

$$X_n(t) = X(0) + \int_0^t H(s, X_s)ds + \int_0^t K(s, X_s)dW_s \tag{C.37}$$

where (W_t) is a standard Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Suppose that (W_n, V_n) converges in distribution in the Skorohod topology to (W, V) where $V_t = t$ for all $t \geq 0$ and suppose

$$\sup_n \left\{ \mathbf{E}^n \Big[[W_n, W_n]_t \Big] \right\} < \infty, \tag{C.38}$$

$$\sup_n \left\{ \mathbf{E}^n \left[T_t(V_n) \right] \right\} < \infty. \tag{C.39}$$

Hence the process $(X_n(t))$ converges in distribution in $\mathcal{D}[0,T]$ for all $T > 0$ to the process (X_t).

We wish then to apply this theorem to obtain the convergence result for discrete quantum trajectories $(\rho_{[nt]})$ described by $(C.34)$. Concerning the convergence of the processes (W_n) and V_n we use the following theorem which is a generalization of Donsker Theorem (see).

Theorem 19 *Let (M_n) be a sequence of martingales. Suppose that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left[\sup_{s \leq t} |M_n(s) - M_n(s_-)| \right] = 0$$

and

$$[M_n, M_n]_t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t.$$

Then M_n converges in distribution to a standard Brownian motion. The conclusion is the same if we just have :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t| \big] = 0.$$

In our context we have the following proposition.

Proposition 13 *Let $(\mathcal{F}_t^n)$ be the filtration*

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_i, i \leq [nt]). \tag{C.40}$$

The process $(W_n(t))$ defined by (C.33) is a $\mathcal{F}_t^n$-martingale. We have

$$W_n(t) \Longrightarrow W_t$$

where (W_t) is a standard Brownian motion.

Moreover we have

$$\sup_n \mathbf{E}\Big[[W_n, W_n]_t\Big] < \infty$$

Finally, we have the convergence in distribution for the process $(W_n, V_n,)$ to (W, V) when n goes to infinity.

Proof: Thanks to the definition of the random variable X_i, we have $\mathbf{E}[X_{i+1}/\mathcal{F}_i^n] = 0$ which implies $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i/\mathcal{F}_s^n\right] = 0$ for $t > s$. Thus if $t > s$ we have the martingale property :

$$\mathbf{E}[W_n(t)/\mathcal{F}_s^n] = W_n(s) + \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i/\mathcal{F}_s^n\right] = W_n(s).$$

By definition of $[Y, Y]$ for a stochastic process we have

$$[W_n, W_n]_t = W_n(t)^2 - 2\int_0^t W_n(s_-)dW_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} X_i^2$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}[X_i^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l < i\}]] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} 1 = \frac{[nt]}{n}.\end{aligned}$$

Hence we have

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] \leq t < \infty\,.$$

Let us prove the convergence of (W_n) to (W). According to Theorem 19 we must prove that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|\big] = 0$$

Actually we prove a L_2 convergence :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|^2\big] = 0,$$

which implies the L_1 convergence. In order to show this convergence, we use the following property

$$\mathbf{E}\left[X_i^2\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l < i\}]\right] = 1$$

and if $i < j$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)/\sigma\{X_l, l<j\}]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)\right]\mathbf{E}\left[(X_j^2-1)\right] \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

This gives

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left([W_n, W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right]\end{aligned}$$

Thanks to the fact that p_{00} and q_{00} are not equal to zero (because the observable A is not diagonal !) the terms $\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right]$ are bounded uniformly in i so we have :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\left([W_n, W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] = 0\,.$$

As $\frac{[nt]}{n} \longrightarrow t$ in L_2 we have the desired convergence. The convergence of (W_n, V_n) is then straightforward. □

In order to conclude to the convergence result by using Theorem 18 of Kurtz and Protter, we have to verify conditions $(C1)$ and $(C2)$ for the functions appearing in the equation $(C.34)$. We consider $\tilde{L}_n$ defined by

$$\tilde{L_n}(X)\circ(\lambda)(t) = L_n(\lambda(t), u_n(\lambda(t), X_{\lambda(t)}))(X_{\lambda(t)}) + \circ(1)$$

for all $t > 0$, for all $\lambda \in T_1[0,\infty)$ and all càdlàg process (X_t). Let us stress that in restriction to the processes (ρ_t) which takes values in the set of states, the $\circ$ are uniform in (ρ_t), we can then consider that the $\circ$ are uniform for all processes. We define $\tilde{\Theta}_n$ in the same way.

Theorem 20 *Let $\mathcal{F}_t^n$ be the filtration defined by $(C.40)$. Let ρ_0 be any state on $\mathcal{H}_0$. Let $(\rho_n^{\mathbf{u}}(t))$ be the discrete quantum trajectory satisfying :*

$$\begin{aligned}\rho_n^{\mathbf{u}}(t) &= \rho_0 + \int_0^t \left[L_n(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)))(, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)\right] dV_n(s) \\ &\quad + \int_0^t \left[\Theta_n(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)))(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)\right] dW_n(s) \qquad \text{(C.41)}\end{aligned}$$

Let $k > 1$ be any integer. Let $(\rho_t^{\mathbf{u},k})$ be the unique solution of

$$\rho_t^{\mathbf{u},k} = \rho_0 + \int_0^t L(s, u(s, \tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))ds + \int_0^t \Theta(s, u(s, \tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_s^{\mathbf{u},k}))dW_s, \tag{C.42}$$

Assume the function u is sufficiently regular such that $\tilde{L}_n$, $\tilde{\Theta}_n$, $\tilde{L}$ and $\tilde{\Theta}$ composed with the truncature function $\tilde{\phi}^k$ satisfy conditions $(C1)$ and $(C2)$.

Then for all $T > 0$, the process $(\rho_n^{\mathbf{u}}(t))$ converges in distribution in $\mathcal{D}[0,T]$ to the process (ρ_t).

Finally the process $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ is the unique solution of the controlled diffusive Belavkin equation

$$\rho_t^{\mathbf{u}} = \rho_0 + \int_0^t L(s, u(s, \rho_s^{\mathbf{u}})(\rho_s^{\mathbf{u}})ds + \int_0^t \Theta(s, u(s, \rho_s^{\mathbf{u},k}))(\rho_s^{\mathbf{u}})dW_s, \tag{C.43}$$

Proof: As the condition $(C1)$ and $(C2)$ are assumed to be satisfied, thanks to Proposition 13 and Theorem 18, we have the convergence result. The final part of the theorem comes from the fact that the property of being a state is conserved by passage to the limit (see the remark at the beginning of this section). □

As regards conditions $(C1)$ and $(C2)$, the assumption for the function u is satisfied for example when u is continuous. By definition of the functions L_n and Θ_n conditions $(C1)$ and $(C2)$ are namely satisfied for the functions L and Θ satisfy the local Lipschitz conditions $(C.29)$ (used in Theorem 17 of existence and uniqueness).

Hence, the model of diffusive stochastic differential equation $(C.25)$ for continuous measurement with control is physically justified by proving that solutions of such equations are obtained by limit of concrete discrete procedure. In the next section, we prove a similar result by considering continuous limit of discrete quantum trajectories of type $(C.21)$.

C.2.2 Poisson Approximation of Control Quantum Measurement

In this section, we investigate the convergence of discrete quantum trajectories which come from repeated measurements of a diagonal observable.

In all this section we fix a strategy $\mathbf{u}$ which defines a Markovian strategy. Furthermore, as in the diffusive case we suppose that this strategy is continuous. Let A be any diagonal observable. With the use of description $(C.21)$ and $(C.24)$, the discrete quantum trajectory satisfies

$$\begin{aligned}\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}} &= \rho_0 + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\Big[L(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}}) - \mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}}) \\ &\quad + Tr[\mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}})]\rho_k^{\mathbf{u}} + \circ(1)\Big] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \left[\frac{\mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}})}{Tr[\mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}})]} - \rho_k^{\mathbf{u}} + \circ(1)\right] \nu_{k+1}\end{aligned} \tag{C.44}$$

We aim to show that the process $(\rho_{[nt]})$ converges $(n \to \infty)$ to a process (ρ_t) which should be a solution of a stochastic differential equation of the form :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= L(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)dt \\ &\quad + \left[\frac{\mathcal{J}(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)]} - \rho_t\right] \left(d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(t, u(t, \rho_t))(\rho_t)]dt\right) \end{aligned} \tag{C.45}$$

where $\tilde{N}_t$ is a counting process with stochastic intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(s, u(s, \rho_s))(\rho_s)]ds$.

Let us stress that in this term, the notion of a solution and the way to express the equation $(C.46)$ are not clear. As we do not know if the equation $(C.46)$ admits a solution, we cannot consider a counting process $\tilde{N}_t$ whose the definition depends on such solution. Reciprocally we cannot consider a solution without to have defined the driving process $\tilde{N}_t$. As a consequence we use the following definition of a solution for equation of type $(C.46)$.

Definition 5 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space. A process-solution of $(C.45)$ is a càdlàg process (ρ_t) such that there exists a counting process $(\tilde{N}_t)$ and such that the couple $(\rho_t, \tilde{N}_t)$ satisfies :*

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big[L(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-}) + Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-})]\rho_{s_-} \\ &\qquad - \mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-})\Big] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-})}{Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-})]} - \rho_{s_-}\right] d\tilde{N}_s \end{aligned} \tag{C.46}$$

and the process

$$\tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s_-}))(\rho_{s_-})]ds$$

is a $\mathcal{F}_t$-martingale.

In order to construct a counting process with stochastic intensity, a general way is to consider Random Poisson Measure Theory (see [16]). In our context, we consider a particular Random Poisson Measure which is given by a Poisson Point Process N on $\mathbb{R}^2$. It is defined as follows.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. A Poisson point process N on $\mathbb{R}^2$ is a random distribution of points on $\mathbb{R}^2$ such that

1. For all Borel subset B we have :

$$P[N(B) = k] = \frac{\Lambda(B)^k}{k!} \exp(-\Lambda(B)), \tag{C.47}$$

   where Λ denotes the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$ and $N(B)$ corresponds to the number of points in B.

2. For all $l \in \mathbb{N}^\star$ and for all sequence $(A_i)_{1\leq i\leq l}$ of disjoints Borel subset the random variables $(N(A_i))$ are mutually independent.

For all $\omega \in \Omega$, the Poisson Point process N defines a counting measure $N(\omega, .)$ on the Borel σ-algebra. Define the measure

$$m(B) = E[N(B)]$$

for all Borel subset B. This measure is called the intensity measure of N and satisfies $m(B) = \Lambda(B)$ for all Borel subset B. The family $\{N(\omega, .), \omega \in \Omega\}$ is called a Random Poisson Measure whose the intensity measure is the Lebesgue Measure. This random measure allow us to write the equation $(C.46)$ in terms of the Poisson Point process and to define the process $\tilde{N}_t$ in a intrinsic way. This is made precise in the following theorem.

Theorem 21 *Let N be a Poisson Point Process on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Let ρ_0 be any state on $\mathbb{C}^2$, every solution of the stochastic differential equation*

$$\begin{aligned}\rho_t^{\mathbf{u}} &= \rho_0 + \int_0^t \Big[L(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}}) + Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})]\rho_{s-}^{\mathbf{u}} \\ &\qquad -\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})\Big] ds \qquad (C.48) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})}{Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})]} - \rho_{s-}^{\mathbf{u}}\right] \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s_-,u(s_-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-})]} N(ds, dx)\end{aligned}$$

gives rise to a process $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ and a process $(\tilde{N}_t)$ defined by

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s_-,u(s_-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-})]} N(ds, dx) \qquad (C.49)$$

By considering the filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\tilde{N}_s, s \leq t\},$$

the process

$$\tilde{N}_t - \int_0^t Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-})]ds$$

is a $\mathcal{F}_t$-martingale. Finally the processes $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ and $\tilde{N}_t$ on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ satisfy Definition 5.

This theorem is an adaptation of Theorem of Jacod and Protter in [16]. Now we consider the equation $(C.48)$ as the jump-model of continuous time measurement with control. It will be justified later as limit of discrete quantum trajectories. For the moment we deal with the problem existence and uniqueness of a solution for this equation. Let us denote

$$\begin{aligned}R(t,a)(\rho) &= L(t,a)(\rho) + Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)]\rho - \mathcal{J}(t,a)(\rho) \\ Q(t,a)(\rho) &= \left(\frac{\mathcal{J}(t,a)(\rho)}{Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)]} - \rho\right) \mathbf{1}_{Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)]>0}\end{aligned}$$

for all $t \geq 0$, for all $a \in \mathbb{R}$ and all state ρ. It was obvious that $(C.48)$ is equivalent to

$$\begin{aligned}\rho_t^{\mathbf{u}} &= \rho_0 + \int_0^t R(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Q(s_-, u(s_-, \rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-})]}N(ds,dx)\end{aligned}$$

A sufficient condition in order to prove existence and uniqueness of a solution for such equations is to have a Lipschitz property for the functions R an $\mathcal{J}$. In the same fashion of the diffusive case, this is not the case and a truncature method is used. We will have next to prove that the truncated solution takes values in the set of states. The conditions for the Poisson case are expressed in the following remark.

Remark : As in the diffusive case, this remark concerns the regularity of the different functions. Firstly we suppose that R and $\mathcal{J}$ satisfy the local Lipschitz condition $(C.29)$ defined in Section 2.1. Secondly as the set of states is compact, we can suppose for the stochastic intensity that for all $T > 0$ there exists a constant $K(T)$ such that

$$Tr[\mathcal{J}(t, u(t, X_t))(X_t)] \leq K(T)$$

for all $t \geq T$ and for all càdlàg process (X_t) with values in $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Finally in order to consider the stochastic differential equation for all càdlàg process, we consider the function

$$\tilde{Q}(t,a)(\rho) = \left(\frac{\mathcal{J}(t,a)(\rho)}{Re\big(Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)]\big)} - \rho\right)\mathbf{1}_{Re(Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)])>0} \tag{C.50}$$

and the stochastic differential equation

$$\begin{aligned}\rho_t^{\mathbf{u},k} &= \rho_0 + \int_0^t R(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))ds \qquad (C.51)\\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))\mathbf{1}_{0<x<Re(Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))])}N(ds,dx).\end{aligned}$$

where $\tilde{\phi}^k$ is a truncature function defined in Section 3.1. As in the diffusive case, if a solution of the equation $(C.51)$ takes value in the set of states, it is a solution of the equation $(C.48)$. In addition to the diffusive case, we have to remark that if ρ is a state

$$Re(Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)]) = Tr[\mathcal{J}(t,a)(\rho)] \geq 0$$

for all $t \geq 0$ and for all $a \in \mathbb{R}$.

Exactly in the same way as the diffusive case, if we show that a discrete quantum trajectory converges in distribution to a solution of the truncated equation $(C.51)$, it involves that this solution takes values in the set of states. Let us first deal with the problem of existence and uniqueness of a solution for the equation $(C.51)$. We have the following theorem due to Jacod and Protter in [16].

Theorem 22 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space of a Poisson point Process N. The stochastic differential equation*

$$\rho_t^{\mathbf{u},k} = \rho_0 + \int_0^t R(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))ds \tag{C.52}$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))\mathbf{1}_{0<x<Re(Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))]}N(ds,dx).$$

admits a unique solution $\rho_t^{\mathbf{u},k}$ defined for alt ≥ 0. Furthermore the process

$$\overline{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Re(Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))]}N(ds,dx)$$

allows to define

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\overline{N}_s, s \leq t\}.$$

Hence the process

$$\overline{N}_t - \int_0^t \left[Re(Tr[\mathcal{J}(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))\right]^+ ds$$

is a $\overline{\mathcal{F}}_t$-martingale.

The term $(x)^+$ denotes $\max(0,x)$. Such theorem is treated in details in [25] for quantum trajectories without control. We give here a way to express the solution of $(C.51)$ in a particular case.

Suppose that there exists a constant K such that :

$$\left[Re(\mathcal{J}(t, u(t, X_t))(X_t))\right]^+ < K, \tag{C.53}$$

for all $t \geq 0$ and all càdlàg process (X_t). With this property we can consider only the points of N contained in $\mathbb{R} \times [0, K]$. The random function

$$\mathcal{N}_t : t \to N(., [0,t] \times [0,K])$$

defines then a standard Poisson process with intensity K. Let $T > 0$, the Poisson Random Measure and the previous process generate on $[0,T]$ a sequence $\{(\tau_i, \xi_i), i \in \{1, \ldots, \mathcal{N}_t)\}\}$. Each τ_i represents the jump time of the process $(\mathcal{N}_t)$. Moreover the random variables ξ_i are random uniform variables on $[0,K]$. Let $k > 1$ be a fixed integer, we can write the solution of $(C.51)$ in the following way :

$$\begin{aligned}
\rho_t^{\mathbf{u},k} &= \rho_0 + \int_0^t R(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} Q(\tau_i-, u(\tau_i-, \tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k}))(\tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k}))\mathbf{1}_{0\leq\xi_i\leq(Re(Tr[\mathcal{J}(\tau_i-,u(\tau_i-,\tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k})]))^+} \\
\overline{N}_t &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} \mathbf{1}_{0\leq\xi_i\leq(Re(Tr[\mathcal{J}(\tau_i-,u(\tau_i-,\tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{\tau_i-}^{\mathbf{u},k})]))^+}.
\end{aligned} \tag{C.54}$$

The general case is treated in details in [16]. Let us make more precise how the solution of $(C.51)$ is defined from the expression $(C.54)$ in the particular case $(C.53)$. By applying Cauchy-Lipschitz Theorem, we consider the solution of the ordinary differential equation

$$\rho_t^{\mathbf{u},k} = \rho_0 + \int_0^t R(s_-, u(s_-, \tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_{s-}^{\mathbf{u},k}))ds \tag{C.55}$$

It gives rise to the function

$$t \mapsto \left[Re(Tr[\mathcal{J}(t, u(t, \tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k}))\right]^+.$$

Let define the first jump-time of the process $(\overline{N}_t)$. for this, we introduce the set

$$G_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x \leq t, 0 < y < \left[Re(Tr[\mathcal{J}(x, u(x, \tilde{\phi}^k(\rho_x^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_x^{\mathbf{u},k}))\right]^+\}$$

$$T_1 = \inf\{t / N(G_t) = 1\}$$

As a consequence on $[0, T_1[$ the solution of $(C.51)$ is given by the solution of the ordinary differential equation (C.55) and $\rho_{T_1}^{\mathbf{u},k}$ is defined by

$$\rho_{T_1}^{\mathbf{u},k} = \rho_{T_1-}^{\mathbf{u},k} + Q(T_1-, u(T_1-, \rho_{T_1-}^{\mathbf{u},k}))(\rho_{T_1-}^{\mathbf{u},k})$$

We solve the ordinary differential equation after T_1 with this initial condition, we obtain a second jump-time. We construct a sequence of jump-time T_n. The boundness property $(C.53)$ implies that the stochastic intensity is boundned, we can show $\lim T_n = \infty$ almost surely (see).

The solution of $(C.51)$ is then given by the solution of the ordinary differential equation

$$d\rho_t^{\mathbf{u},k} = R(t, u(t, \tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k}))dt$$

between the jump of the process $\tilde{N}_t$. The process $\tilde{N}_t$ corresponds to the number of point of the Poisson point process N included in the x axis and the curve

$$t \mapsto \left[Re(Tr[\mathcal{J}(t, u(t, \tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k})))(\tilde{\phi}^k(\rho_t^{\mathbf{u},k}))\right]^+.$$

The general case is more technical but can be expressed in the same way.

Now we prove that the general solution of $(C.51)$ can be obtained from the limit of the particular discrete quantum trajectory $(\rho_{[nt]})$ defined by the expression $(C.44)$.

From expression $(C.44)$, define

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbf{u}}(t) &= \rho_{[nt]}^{\mathbf{u}} \\
N_n(t) &= \sum_{k=1}^{[nt]} \nu_k, \\
V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \\
R_n(t,a)(\rho) &= R([nt]/n,a)(\rho), \\
Q_n(t,a)(\rho) &= Q([nt]/n,a)(\rho) \\
u_n(t,W) &= u([nt]/n,W)
\end{aligned}$$

for all $t \geq 0$, for all $a \in \mathbb{R}$ and all $W \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Hence the process satisfy the stochastic differential equation

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbf{u}}(t) &= \int_0^t [R_n(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)]\, dV_n(s) \\
&\quad + \int_0^t [Q_n(s_-, u_n(s_-, \rho_n^{\mathbf{u}}(s_-))(\rho_n^{\mathbf{u}}(s_-)) + \circ(1)]\, dN_n(s)
\end{aligned}$$

In this case we do not have directly an equivalent of the Donsker Theorem for the process $(N_n(t))$. The convergence result is here obtained by using a random coupling method, that is, we realize the process $(\rho_{[nt]})$ in the probability space of the Poisson Point Process N in order to compare directly continuous and discrete quantum trajectories. It is described as follows.

Remember that the random variables $(\mathbf{1}_1^k)$ satisfy :

$$\begin{cases}
\mathbf{1}_1^{k+1}(0) = 0 \quad \text{with probability} \quad p_{k+1}(n) = 1 - \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}})] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
\mathbf{1}_1^{k+1}(1) = 1 \quad \text{with probability} \quad q_{k+1}(n) = \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}(k/n, u(k/n, \rho_k^{\mathbf{u}}))(\rho_k^{\mathbf{u}})] + \circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{cases}$$

We define the following sequence of random variable which are defined on the set of states

$$\tilde{\nu}_{k+1}(\eta, \omega) = \mathbf{1}_{N(\omega, G_k(\eta))>0} \tag{C.56}$$

where $G_k(\eta) = \left\{(t,u)/\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, 0 \leq u \leq -n \ln(Tr[\mathcal{L}_0^{k+1}(n)(\eta)])\right\}$. Let $\rho_0 = \rho$ be any state and $T > 0$, we define the process $(\tilde{\rho}_k)$ for $k < [nT]$ by the recursive formula

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{k+1}^{\mathbf{u}} &= \mathcal{L}_0^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}) + \mathcal{L}_1^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}) \\
&\quad + \left[-\frac{\mathcal{L}_0^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})}{Tr[\mathcal{L}_0^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})]} + \frac{\mathcal{L}_1^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})}{Tr[\mathcal{L}_1^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})]} \right] \left(\tilde{\nu}_{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}, .) - Tr[\mathcal{L}_1^{k+1}(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})] \right)
\end{aligned} \tag{C.57}$$

Thanks to properties of Poisson probability measure, the random variables $(\mathbf{1}_1^k)$ and $(\tilde{\nu}_k)$ have the same distribution. It involves the following property concerning the realization of $(\rho_{[nt]})$. in the probability space of the Point Poisson Process.

Proposition 14 *Let T be fixed. The discrete process $(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})_{k\leq[nT]}$ defined by $(C.57)$ have the same distribution of the discrete quantum trajectory $(\rho_k^{\mathbf{u}})_{k\leq[nT]}$ defined by the quantum repeated measurement.*

The convergence result is then expressed as follows.

Theorem 23 *Let $T>0$. Let $(\Omega,\mathcal{F},P)$ be a probability space of a Poisson Point process N. Let $(\tilde{\rho}_{[nt]}^{\mathbf{u}})_{0\leq t\leq T}$ be the discrete quantum trajectory defined by the recursive formula $(C.57)$*

Hence, for all $T>0$ the process $(\tilde{\rho}_{[nt]}^{\mathbf{u}})_{0\leq t\leq T}$ converges in distribution in $\mathcal{D}[0,T]$ (for the Skorohod topology) to the process $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ solution of the stochastic differential equation :

$$\begin{aligned}\rho_t^{\mathbf{u}} &= \rho_0+\int_0^t R(s_-,u(s_-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}})(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})ds \\ &\quad+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Q(s_-,u(s_-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}})(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\rho_{s-}^{\mathbf{u}}))(\rho_{s-}^{\mathbf{u}})]})N(.,ds,dx).\end{aligned} \tag{C.58}$$

This theorem relies on the fact that the process $(\tilde{\rho}_{[nt]}^{\mathbf{u}})$ satisfies the same asymptotic of the discrete quantum trajectory $(\rho_{[nt]}^{\mathbf{u}})$; we have namely

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{[nt]} &= \rho_0+\sum_{k=0}^{[nt]-1}\frac{1}{n}\left[R(k/n,u(k/n,\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}))(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})+\circ(1)\right] \\ &\quad+\sum_{k=0}^{[nt]-1}\left[Q(k/n,u(k/n,\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}}))(\tilde{\rho}_k^{\mathbf{u}})+\circ(1)\right]\tilde{\nu}_{k+1}(\rho_k^{\mathbf{u}},.).\end{aligned} \tag{C.59}$$

The complete proof of this theorem is very technical. The idea is to compare the discrete process $(\rho_{[nt]})$ with an Euler Scheme of the solution of the jump-equation. More details for such technics can be found in [25] where the case without control is entirely developed.

In the next section, we expose examples and applications of such stochastic models.

C.3 Examples and Applications

This section is devoted to some applications of quantum measurement with control. On the one hand, by a discrete model, we justify a stochastic model for the experience of Resonance fluorescence. The setup is the one of a laser driving an atom in presence of a photon counter. On the other hand, we present general results in Stochastic Control Theory applied to quantum trajectories.

C.3.1 Laser Monitoring Atom : Resonance Fluorescence

In this section, we adapt result of discrete quantum trajectories with control in order to justify continuous time stochastic models for the experience of Resonance Fluorescence.

We describe a discrete model of an atom monitored by a laser. A measurement is performed by a photon counter which detects the photon emission. The setup of repeated quantum interactions is described as follows.

The length time of interaction is chosen to be $h = 1/n$. Let us describe one interaction. The atom system is represented by $\mathcal{H}_0$ equipped with a state ρ. The laser is representing by $(\mathcal{H}^l, \mu^l)$ and the photon counter by $(\mathcal{H}^c, \beta^c)$. Each Hilbert space are $\mathbb{C}^2$ endowed with the orthonormal basis (Ω, X) and the unitary operator is denoted by U. The compound system after interaction is :

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^c,$$

and the state after interaction is :

$$\alpha = U(\rho \otimes \mu^l \otimes \beta^c)U^\star$$

Let

$$\begin{gathered}\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega,\ X \otimes \Omega \otimes \Omega,\ \Omega \otimes X \otimes \Omega,\ X \otimes X \otimes \Omega,\\ \Omega \otimes \Omega \otimes X,\ X \otimes \Omega \otimes X,\ \Omega \otimes X \otimes X,\ X \otimes X \otimes X\end{gathered}$$

be an orthonormal basis of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^c$. As in the presentation of the discrete two level atom in contact with a spin chain, the unitary operator is here considered as a 4×4 matrix

$$U = (L_{i,j}(n))_{0 \le i,j \le 3}$$

where each $L_{ij}(n)$ are operator on $\mathcal{H}_0$.

If the different state of the laser and the counter as of the form

$$\mu^l = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \beta^c = |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

Hence for the state $\alpha = (\alpha_{uv})_{0 \le u,v \le 3}$ after interaction, we have

$$\alpha_{uv} = \Big(aL_{u0}(n)\rho + bL_{u1}(n)\rho\Big)L^\star_{v0}(n) + \Big(cL_{u0}(n)\rho + dL_{u1}(n)\rho\Big)L^\star_{v1}(n) \tag{C.60}$$

The measurement is performed on the counter photon side. Let A denotes any observable of $\mathcal{H}^c$ then $I \otimes I \otimes A$ denotes the corresponding observable on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^c$. We perform a measurement and by partial trace operation with respect to $\mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^c$ we obtain a new state on $\mathcal{H}_0$.

The control is rendered by the modification at each interaction of the intensity of the laser. This modification is here taken into account by the reference state of the laser. The reference state at the k-th interaction is denoted by μ^l_k. In the continuous case of Resonance fluorescence, the state of a laser is usually described by a coherent vector on a Fock space (see [9]). From works of Attal and Pautrat in approximation of Fock space ([1],[24]), in our context the discrete state of the laser can be described by

$$\mu^l_k = \begin{pmatrix} a(k/n) & b(k/n) \\ c(k/n) & d(k/n) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + |h(k/n)|^2} \begin{pmatrix} 1 & h(k/n) \\ \overline{h}(k/n) & |h(k/n)|^2 \end{pmatrix}. \tag{C.61}$$

The function h represents the evolution of the intensity of the laser and depends naturally on n.

If ρ_k denotes the state on $\mathcal{H}_0$ after k first measurement, the state

$$\alpha^{k+1}(n) = \left(\alpha_{uv}^{k+1}(n)\right)_{0\leq u,v\leq 3} = U_{k+1}(n)(\rho_k \otimes \mu_k^l \otimes \beta^c)U_{k+1}^\star(n)$$

after interaction satisfies

$$\begin{aligned}\alpha_{uv}^{k+1}(n) &= \Big(a(k/n)L_{u0}(n)\rho_k + b(k/n)L_{u1}(n)\rho_k\Big)L_{v0}^\star(n)\\ &\quad+\Big(c(k/n)L_{u0}(n)\rho_k + d(k/n)L_{u1}(n)\rho_k\Big)L_{v1}^\star(n)\end{aligned}$$

Let us stress that is not directly the application of discrete quantum trajectories. The control is namely not rendered by the modification of the unitary evolution. Moreover the interacting system is described by $(\mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^c, \mu_k^l \otimes \beta)$ and $\mu_k^l \otimes \beta$ is not of the form $|X_0\rangle\langle X_0|$ as in Section 1. In order to translate this setting in the case of discrete models of Section 1, one can use the G.N.S Representation Theory of a finite dimensional Hilbert space ([19],[18]). This theory allows to consider the state $\mu_k^l \otimes \beta$ as a state of the form $|X_0\rangle\langle X_0|$ in a particular Hilbert space. It is described as follows.

Let $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ be a finite dimensional Hilbert space endowed with a reference state ρ. We consider $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ the space of endomorphisms of $\mathcal{H}$ equipped with the scalar product :

$$\langle A, B\rangle = Tr[\rho A^\star B].$$

Let I be the identity operator, we choose it as a first vector of an orthonormal basis of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Then we have the G.N.S representation π of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ into $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ given by :

$$\pi(A)B = AB.$$

Hence we have : $\langle I, \pi(A)I\rangle = Tr[\rho A]$. With this representation we have that $\rho = |I\rangle\langle I|$. In this way ρ is a ground state.

The discrete model of Resonance fluorescence can be described with this theory. The reference state of the interacting system is then of the form $|X_0\rangle\langle X_0|$ (ground state) as in the model of discrete quantum trajectories of Section 1. The G.N.S representation (at each interaction) involves the modification of the unitary operator U_k. As this representation depends on μ_k^l, the modification of the unitary operator U_k depends on this state and then on the control. As a consequence we can recover the theory of Section 1. Such theory is used in [2]. In our context, we can adapt the convergence result of the Section 2 without this theory.

The principle of measurement is the same as in Section 1. The counting case is also given by a diagonal observable of $\mathcal{H}_c$. We shall focus on this case which renders the emission of photon ([9]). The asymptotic for the unitary operator follows the asymptotic of Attal-Pautrat in [4]. Let $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$ we denote :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j})$$

The coefficients must follow the convergence condition :

$$\lim_{n\to\infty} n^{\epsilon_{ij}}(L_{ij}(n) - \delta_{ij}I) = L_{ij}$$

where L_{ij} are operator on $\mathcal{H}_0$.

Let $P_0 = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ and $P_1 = |X\rangle\langle X|$ be eigenprojectors of a diagonal observable A. If ρ_k denotes the random state after k measurements we denote :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k) &= \mathbf{E}_0[I\otimes I\otimes P_0(U_{k+1}(n)(\rho_k\otimes\mu_k^l\otimes\beta)U_{k+1}^\star(n))I\otimes I\otimes P_0] \\
&= \alpha_{00}^{k+1}(n) + \alpha_{11}^{k+1}(n) \\
\mathcal{L}_1^{k+1}(\rho_k) &= \mathbf{E}_0[I\otimes I\otimes P_1(U_{k+1}(n)(\rho_k\otimes\mu_k^l\otimes\beta)U_{k+1}^\star(n))I\otimes I\otimes P_1] \\
&= \alpha_{22}^{k+1}(n) + \alpha_{33}^{k+1}(n)
\end{aligned} \tag{C.62}$$

This is namely the two non normalized state, the operator $\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)$ appears with probability $p_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)]$ and $\mathcal{L}_1^{k+1}(\rho_k)$ with probability $q_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)]$.

From works of Attal-Pautrat in approximation and asymptotic in Fock space, we put

$$h(k/n) = \frac{1}{\sqrt{n}}f(k/n) + \circ\left(\frac{1}{n}\right),$$

where f is a function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$. In the same way of Section 2, we assume that the intensity of the laser f is continuous.

With the same arguments of Section 1, the evolution of the discrete quantum trajectory is described by

$$\rho_k = \frac{\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)}{p_{k+1}} + \left[-\frac{\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)}{p_{k+1}} + \frac{\mathcal{L}_1^{k+1}(\rho_k)}{q_{k+1}}\right]\mathbf{1}_1^{k+1} \tag{C.63}$$

For a further use, convergence results will be established in the case $L_{01} = -L_{10}^\star$, and $L_{11} = L_{21} = L_{31} = L_{30} = 0$. Conditions about asymptotic of U and the fact that it is a unitary-operator we have

$$L_{00} = -(iH + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} L_{i0}^\star L_{i0}) \tag{C.64}$$

In the same way of Section 2.2 convergence result in this situation is expressed as follows.

Proposition 15 *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space of a Poisson point process N on $\mathbb{R}^2$.*

The discrete quantum trajectory $(\rho_{[nt]})_{0\le t\le T}$ defined by the discrete equation (C.63) weakly converges in $\mathcal{D}([0,T])$ for all T to the solution of the following stochastic differential

equation :

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \Big[-i[H,\rho_{s-}] + \frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{2} L_{i0}^\star L_{i0}, \rho_{s-}\} + L_{10}\rho_{s-}L_{10}^\star \\ &\qquad + [\overline{f}(s_-)L_{10}\rho_{s-} - f(s_-)L_{10}^\star, \rho_{s-}] - Tr[L_{20}\rho_{s-}L_{20}^\star]\rho_{s-}\Big] ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[-\rho_{s-} + \frac{L_{20}\rho_{s-}L_{20}^\star}{Tr[L_{20}\rho_{s-}L_{20}^\star]} \right] \mathbf{1}_{0<x<Tr[L_{20}\rho_{s-}L_{20}^\star]} N(dx,ds). \end{aligned} \tag{C.65}$$

Proof: For example we have the following asymptotic for $\mathcal{L}_0^{k+1}(\rho_k)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\rho_k) &= \rho_k + \frac{1}{n}\left[L_{00}\rho + \rho L_{00}^\star + L_{10}\rho L_{10}^\star + f(\frac{k}{n})[L_{01}\rho + \rho L_{10}^\star] + \overline{f}(\frac{k}{n})[L_{10}\rho + \rho L_{01}^\star] \right] \\ &\quad + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{C.66}$$

This above asymptotic, the condition about the operator L_{ij} and the theorem (23) prove the proposition. □

The stochastic differential equation $(C.65)$ is then the continuous time stochastic model of Resonance fluorescence. In this model, the control is deterministic. What is follow concerns an application of such model in a particular case.

Consider the model where the Hamiltonian $H = 0$. Let put

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ L_{10} = k_l C, \ L_{20} = k_c C,$$

with $|k_l|^2 + |k_c|^2 = 1$. The constant k_f and k_c are called decay rates ([9]).

Without control, the stochastic model of a two level atom in presence of a photon counter is given by :

$$\begin{aligned}\mu_t &= \mu_0 + \int_0^t \Big[+ \frac{1}{2}\{C, \mu_{s-}\} + C\mu_{s-}C^\star - Tr[C\mu_{s-}C^\star]\mu_{s-} \Big] ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[-\mu_{s-} + \frac{C\mu_{s-}C^\star}{Tr[C\mu_{s-}C^\star]} \right] \mathbf{1}_{0<x<Tr[C\mu_{s-}C^\star]} N(dx,ds). \end{aligned} \tag{C.67}$$

Let denote $\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Tr[C\mu_{s-}C^\star]} N(dx,ds)$ and $T = \inf\{t > 0;\ \tilde{N}_t > 0\}$. In [5] it was proved that :

$$\mu_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |\Omega\rangle\langle\Omega|. \tag{C.68}$$

for all $t > T$. Physically, it means that at most one photon appears on the photon counter. The mathematical reason is that if we write the equation $(C.67)$ in the following way :

$$\mu_t = \int_0^t \Psi(\mu_{s-})ds + \int_0^t \Phi(\mu_{s-})d\tilde{N}_s,$$

we have for $\mu = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

$$\Phi(\mu) = \Psi(\mu) = 0.$$

The state $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ is an equilibrium state.

In the presence of laser, the control f gives rise to the term $[\overline{f}L_{10} - fL_{10}^{\star}, .]$. Hence if $\mu = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ we still have $\Phi(\mu) = 0$ but we do not have anymore $\Psi(\mu) = 0$ and the property $(C.68)$ is not satisfied. The state $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ is no more an equilibrium state. As a consequence it is possible to observe more than one photon in the photon counter.

In the next section we deal with general strategy and the particular problem of optimal control. Considerations about optimal control is an interesting mean to point out the importance of Markovian strategy.

C.3.2 Optimal Control

This section is then devoted to what is called the "optimal control" problem. It deals with finding a particular control strategy which must satisfy optimization constraints. In this section, we give the classical mathematical description of such problem and investigate general results in the discrete and in the continuous model of controlled quantum trajectories. Let us begin with the discrete model.

The Discrete Case

We come back to the description of a discrete quantum trajectory for a two-level system as a Markov chain.

Let n be fixed, thanks to Theorem 2, a discrete controlled quantum trajectory $(\rho_k^{\mathbf{u}})$ is described as follows. Let ρ be any state, if $\rho_k^{\mathbf{u}} = \rho$ then $\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}$ takes one of the value :

$$\mathcal{H}_i^{\mathbf{u},k}(\rho) = \frac{L_{i0}(k/n, u_k(n))(\rho)L_{i0}^{\star}(k/n, u_k(n))}{Tr[L_{i0}(k/n, u_k(n))(\rho)L_{i0}^{\star}(k/n, u_k(n))]} \quad i = 0, 1$$

with probability,

$$\begin{aligned} p_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho) &= Tr[L_{00}(k/n, u_k(n))(\rho)L_{00}^{\star}(k/n, u_k(n))] \text{ for } i = 0 \\ q_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho) &= Tr[L_{10}(k/n, u_k(n))(\rho)L_{10}^{\star}(k/n, u_k(n))] \text{ for } i = 1. \end{aligned}$$

With this previous description, the property of a strategy (u_k) can be enlarged. We can namely consider more general strategies such that for all k the term u_k depend on all (ρ_i) for $i \leq k$. We define $\mathcal{U}$ the set of all admissible strategies which satisfy this condition. Let us stress that in this situation, the discrete quantum trajectory is no more a Markov chain because the strategy at time k depends on all the past of the strategy.

With this remark concerning the definition of strategies we can expose the general problem of "optimal control". In this article, we only consider finite horizon problem. It is described as follows.

Let N be a fixed integer and let c and ϕ be two measurable function, the optimal control problem in finite horizon is to consider what is called the "optimal cost" :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} c(k,\rho_k^{\mathbf{u}},u_k)+\phi(\rho_N^{\mathbf{u}})\right] \tag{C.69}$$

If there is some strategy which realizes the minimum, this strategy is called the "optimal strategy". One can also consider a "stopping time" version of this optimal control problem. Let $\mathbf{u}\in\mathcal{U}$ be a fixed strategy and let $\mathcal{T}$ be the set of stopping time, a variant of "optimal control" theory is to consider :

$$\min_{\tau\in\mathcal{T}/\tau<N} \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau} c(k,\rho_k^{\mathbf{u}},u_k)+\phi(\rho_\tau^{\mathbf{u}})\right] \tag{C.70}$$

We do not develop this theory in this article. This is the theory of optimal stopping time problem. Let us investigate the classical result in stochastic control for the finite horizon problem.

For this we define :

$$V^k(\rho)=\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\sum_{j=k}^{N-1} c(k,\rho_j^{\mathbf{u}},u_j)+\phi(\rho_N^{\mathbf{u}})\Big/\rho_n^{\mathbf{u}}=\rho\right]$$

Remark The function c and ϕ are determined by the optimization constraint imposed by the experience. The equation which appears in the following theorem is called the cost equation and the function c and ϕ are called cost function.

Theorem 24 *Let $\mathcal{U}$ be a compact set and suppose that c is a continuous function. The solution of :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} V^k(\rho) & = & \min_{u\in\mathcal{U}}\{p_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho)\mathcal{H}_0^{\mathbf{u},k}(\rho)+q_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho)\mathcal{H}_1^{\mathbf{u},k}(\rho)+c(k,\rho,u_k)\} \\ V^N(\rho) & = & \phi(\rho) \end{array}\right. \tag{C.71}$$

give the optimal cost :

$$V^k(\rho)=\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\sum_{j=k}^{N-1} c(k,\rho_j^{\mathbf{u}},u_j)+\phi(\rho_N^{\mathbf{u}})\Big/\rho_n=\rho\right].$$

The optimal strategy is given by :

$$u^\star:\rho\to u_k^\star(\rho)\in\arg\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}}\{p_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho)\mathcal{H}_0^{\mathbf{u},k}(\rho)+q_{k+1}^{\mathbf{u}}(\rho)\mathcal{H}_1^{\mathbf{u},k}(\rho)+c(k,\rho,u_k)\} \tag{C.72}$$

Furthermore this strategy is Markovian.

Proof: The proof is based of what is called dynamic programming in stochastic control theory. Let $\mathbf{u}$ be any strategy and let V defined by the formula $(C.71)$, we have

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(V^{k+1}\left(\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}\right) - V^{k}\left(\rho_{k}^{\mathbf{u}}\right))/\sigma\{\rho_i^{\mathbf{u}}, i \leq k\}] \\ = \; & p_{k+1}^{\mathbf{u}} V^{k+1}\left(\mathcal{H}_0^{\mathbf{u},k}(\rho_k^{\mathbf{u}})\right) + q_{k+1}^{\mathbf{u}} V^{k+1}\left(\mathcal{H}_1^{\mathbf{u},k}(\rho_k^{\mathbf{u}})\right) - V^k(\rho_k^{\mathbf{u}})) \end{aligned}$$

then we have

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left[V^N(\rho_N^{\mathbf{u}}) - V^0(\rho)\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\left[V^{k+1}(\rho_{k+1}^{\mathbf{u}}) - V^k(\rho_k^{\mathbf{u}})\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\left[p_{k+1}^{\mathbf{u}} V^{k+1}\left(\mathcal{H}_0^{\mathbf{u},k}(\rho_k^{\mathbf{u}})\right) + q_{k+1}^{\mathbf{u}} V^{k+1}\left(\mathcal{H}_1^{\mathbf{u},k}(\rho_k^{\mathbf{u}})\right) - V^k(\rho_k^{\mathbf{u}}))\right] \\ \geq \; & -\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\left[c(k, \rho_k^{\mathbf{u}}, u_k)\right] \quad \text{(by definition of the min)} \end{aligned}$$

Hence for all strategy $\mathbf{u}$, we have

$$V^0(\rho) \leq \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} c(k, \rho_k^{\mathbf{u}}, u_k) + \phi(\rho_N^{\mathbf{u}})\right].$$

Moreover we have equality if we choose the strategy given by the formula $(C.72)$. This strategy is Markovian because the function c depends only on ρ_k at time k. □

The system $(C.71)$ which describes the cost equation is called the discrete Hamilton-Jacobi Bellman equation.

The fact that the optimal strategy is Markovian is another justification of the choice of such model of control for the discrete quantum trajectory. This theorem claims that we need just Markovian strategy in order to solve the "optimal control" problem.

The next last section is devoted to the same investigation in the continuous time model of quantum trajectories.

The Continuous Case

In the third section, we have proved the Poisson and the diffusion approximation in quantum measurement theory. We have the diffusive evolution equation

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(s, \rho_s^{\mathbf{u}}, u(s, \rho_s^{\mathbf{u}}))ds + \int_0^t \Theta(s, \rho_s^{\mathbf{u}}, u(s, \rho_s^{\mathbf{u}}))dW_s, \tag{C.73}$$

and the jump-equation is

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t R(s_-, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}, u(s_-, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}))ds \tag{C.74}$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Q(s, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}, u(s_-, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}))\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s-,u(s-,\rho^{\mathbf{u}}_{s-}))(\rho^{\mathbf{u}}_{s-})]}N(dx, ds) \tag{C.75}$$

where the functions L, Θ, R and Q are defined in Section 2.

In this section we consider the same problem of "optimal control" as in the discrete case. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space where we consider the diffusive equation

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(s, \rho^{\mathbf{u}}_s, u_s)ds + \int_0^t \Theta(s, \rho^{\mathbf{u}}_s, u_s)dW_s,$$

and the jump-equation

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t R(s_-, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}, u_{s-})ds$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Q(s, \rho^{\mathbf{u}}_{s-}, u_{s-})\mathbf{1}_{0<x<Tr[\mathcal{J}(s-,u_{s-})(\rho^{\mathbf{u}}_{s-})]}N(dx, ds)$$

where the strategy $\mathbf{u} = (u_t)$ is just supposed to be a function $\mathcal{F}_t$ adapted (not only Markovian). In the case where $\mathcal{F}_t$ corresponds to the filtration generated by the process (ρ_t), we recover the same definition as the discrete case. Concerning existence and uniqueness of a solution, with the condition $(C.29)$ of Section 2.1 for the functions L, R and θ the previous equations admit a unique solution. Furthermore the solution takes values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. The set of all admissible strategy which satisfy the condition of adaptation is also denoted by $\mathcal{U}$. The optimal control problem in this situation is expressed as follows.

Let c and ϕ be two cost function. Let $T > 0$, the optimal problem in finite horizon is given by

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\int_0^T c(s, \rho^{\mathbf{u}}_s, u_s)ds + \phi(\rho^{\mathbf{u}}_T)\right]. \tag{C.76}$$

As in the discrete model, we introduce the following function :

$$V(t, \rho) = \min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\int_t^T c(s, \rho^{\mathbf{u}}_s, u_s)ds + \phi(\rho^{\mathbf{u}}_T) \Big/ \rho^{\mathbf{u}}_t = \rho\right]. \tag{C.77}$$

which satisfies

$$V(0, \rho_0) = \min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\int_0^T c(s, \rho^{\mathbf{u}}_s, u_s)ds + \phi(\rho^{\mathbf{u}}_T)\right].$$

The function $(C.77)$ represents the result of optimal control after t assuming $\rho_t = \rho$.

In this article, we just give the result for the optimal control problem for the diffusive case. A similar result for the Poisson case can be found in [10].

As in the discrete case, it appears a continuous time version of the Hamilton-Jacobi-Bellmann Equation. Its expression use the notion of infinitesimal generator of $(\rho_t^{\mathbf{u}})$. It is described as follow in our context. A quantum trajectory $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ is considered as a process which takes values in $\mathbb{R}^3$ with the identification of the state and the Bloch sphere $\mathbb{B}_1(\mathbb{R}^3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, that is,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{B}_1(\mathbb{R}^3) & \longmapsto & \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+iz \\ y-iz & 1-x \end{pmatrix} \end{array}$$

The map Φ is injective and its range is the set of states. By considering that the functions L and Θ are applications from $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$, the stochastic differential equation concerning the diffusive case can be written as a system of stochastic differential equation on $\mathbb{R}^3$ of the form :

$$(\rho_t^{\mathbf{u}})_i = \rho_0 + \int_0^t L_i(s, \rho_s^{\mathbf{u}}, u_s)ds + \int_0^t \Theta_i(s, \rho_s^{\mathbf{u}}, u_s)dW_s \quad i \in \{1,2,3\}$$

where $(\rho_t^{\mathbf{u}})_i$ (respectively Θ_i and L_i) corresponds to the coordinate function of $\rho_t^{\mathbf{u}}$ (respectively Θ and L).

We introduce the 3×3 matrix Π defined by $\Pi_{ij} = \Theta_i \Theta_j$. The infinitesimal generator $\mathcal{A}^{u,t}$ of the process $(\rho_t^{\mathbf{u}})$ acts on the functions f which are C^2 and bounded in the following way

$$\mathcal{A}^{u,t} f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \Pi_{ij}(t,x,u)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} L_i(t,x,u)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \tag{C.78}$$

for all $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}^3$. In particular if u is a fixed constant, let (ρ_t) be the solution of

$$(\rho_t)_i = \rho_0 + \int_0^t L_i(s, \rho_s, u)ds + \int_0^t \Theta_i(s, \rho_s, u)dW_s \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Hence for all function f which is C^2 and bounded, the following process

$$\mathcal{M}_t = f(\rho_t) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}^{u,s} f(\rho_s)ds$$

is a martingale for the filtration generated by (ρ_t).

The following theorem express the result in optimal control for the diffusive quantum trajectory.

Theorem 25 *Suppose there is a function $(t,\rho) \to V(t,\rho)$ which is C^1 in t and C^2 in ρ such that :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial V(t,\rho)}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{U}}\{\mathcal{A}^{u,t}V(t,\rho) + c(t,\rho,u)\} & = & 0 \\ V(T,\rho) & = & \phi(\rho) \end{array} \right. \tag{C.79}$$

where $\mathcal{A}^{u,t}f(x)$ is defined by the expression $(C.78)$. The function V gives the solution of the optimal problem, that is,

$$V(t,\rho) = \min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \mathbf{E}\left[\int_t^T c(s,\rho_s^{\mathbf{u}},u_s)ds + \phi(\rho_T^{\mathbf{u}}) \Big/ \rho_t^{\mathbf{u}} = \rho\right].$$

Furthermore if the strategy $\mathbf{u}$ defined by

$$u^\star(t,\rho) \in \arg\min_{u\in\mathcal{U}}\{\mathcal{A}^{u,t}V(t,\rho) + c(t,\rho,u)\} \tag{C.80}$$

is an admissible strategy then it defines an optimal strategy. Moreover this strategy is Markovian.

The equation $(C.79)$ is the Hamilton-Jacobi-Bellmann equation in the continuous case.

A proof of this theorem can be found in [22] or [28]. The interest of such theorem in our context is to notice that the optimal strategy is Markovian, this confirms the choice of such strategy in the model of quantum trajectories with control.

A similar result holds for the Poisson case. The infinitesimal generator for such process is given in [13], explicit computations can be found in [27].

Bibliographie

[1] S. Attal. Approximating the Fock space with the toy Fock space. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 477–491. Springer, Berlin, 2003.

[2] S. Attal and A. Joye. The Langevin equation for a quantum heat bath. *J. Funct. Anal.*, 247(2) :253–288, 2007.

[3] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[4] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[5] S. Attal and C. Pellegrini. *Contributions to quantum trajectory.* preprint, 2007.

[6] A. Barchielli and G. Lupieri. Quantum stochastic models of two-level atoms and electromagnetic cross sections. *J. Math. Phys.*, 41(11) :7181–7205, 2000.

[7] A. Barchielli and G. Lupieri. Instrumental processes, entropies, information in quantum continual measurements. *Quantum Inf. Comput.*, 4(6-7) :437–449, 2004.

[8] A. Barchielli, A. M. Paganoni, and F. Zucca. On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability. *Stochastic Process. Appl.*, 73(1) :69–86, 1998.

[9] L. Bouten, M. Guţă, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[10] L. Bouten and R. van Handel. Quantum filtering : a reference probability approach, 2005.

[11] L. Bouten, R. van Handel, and M. James. An introduction to quantum filtering, 2006.

[12] N. Bruti-Liberati and E. Platen. On the strong approximation of jump-diffusion processes. Research Paper Series 157, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, April 2005. available at http ://ideas.repec.org/p/uts/rpaper/157.html.

[13] P. Cheridito, D. Filipovic, and M. Yor. Equivalent and absolutely continuous measure changes for jump-diffusion processes. *Annals of Applied ProbaBILITY*, 15 :1713, 2005.

[14] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[15] S. Haroche and J.-M. Raimond. *Exploring the quantum.* Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2006. Atoms, cavities and photons.

[16] J. Jacod and P. Protter. Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques. In *Seminar on Probability, XVI*, volume 920 of *Lecture Notes in Math.*, pages 447–458. Springer, Berlin, 1982.

[17] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[18] R. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 15 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Elementary theory, Reprint of the 1983 original.

[19] R. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Advanced theory, Corrected reprint of the 1986 original.

[20] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[21] T. G. Kurtz and P. Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[22] H. Kushner. *Introduction to stochastic control.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1971.

[23] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[24] Y. Pautrat. From Pauli matrices to quantum Itô formula. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 8(2) :121–155, 2005.

[25] C. Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation of stochastic Schrödinger equation : the Poisson case.* submitted, 2007.

[26] C. Pellegrini. *Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation : the Diffusive Case.* to appear in The Annals of Probability, 2008.

[27] C. Pellegrini. *Markov Chains Approximation of Jump-Diffusion Quantum Trajectories.* preprint, 2008.

[28] H. Pham. On some recent aspects of stochastic control and their applications. *Probability Surveys*, 2 :506, 2005.

[29] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[30] R. van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :768, 2005.

Annexe D

Article 4 : Return to Equilibrium and Heat Baths for Quantum Trajectories

Return to Equilibrium and Heat Baths for Quantum Trajectories

Stéphane ATTAL and Clément PELLEGRINI

Institut C.Jordan
Université C.Bernard, Lyon 1
21, av Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex
France
e-mail : pelleg@math.univ-lyon1.fr

Abstract

We consider the situation of a two-level quantum system undergoing a continuous indirect measurement, giving rise to so-called "quantum trajectories". We first describe these quantum trajectories in a physically realistic discrete-time setup and we then justify, by going to the continuous-time limit, the "stochastic Schrödinger equation" attached to this model. We prove return to equilibrium properties for these equations. We finally consider the case when the field is a heat bath and compute the associated continuous-time quantum trajectories.

D.1 Introduction

Recent experiments of continuous measurement in quantum mechanics (Haroche's team in particular), or more precisely in quantum optics, have put into evidence the random evolutionof the state of a quantum open system. In particular, one has experimentally observed "quantum jumps". These experiments allow to study the evolution of a quantum system interacting with some environment. They are based of the principle of indirect measurement on the environment, in order not to perturb the evolution of the small system.

The stochastic models attached to these phenomenons are descied by stochastic differential equations, called "Stochastic Schrödinger Equations" or also "Belavkin Equations" ([BGM],[Ba2]). Their solutions are called "quantum trajectories", they describe the evolution of the state of the small open quantum system. The stochastic differential equations

which are usually obtained in this context are of two different types. Either they are of "jump-type" :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left(\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho - t\right)\left(d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt\right) .$$

where $\tilde{N}_t$ is a stochastic counting proces with stochatic intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$. The operator L corresponds to a Lindblad type operator and the operator $\mathcal{J}$ describes the eolution of the system during the quantum jumps. This equation describes experiments which are called "resonance-fluorescence" (observation of the photon emission by an atom excited by a laser).

Or it can be an equation of diffusive type :

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + F(\rho)dWt$$

where W_t is a standard Brownian motion. In quantum optics, this equation describes experiments called "Heterodyne detection".

In the usual litterature, obtaining and jstifyng rigorously these equations makes use of Quantum Filtering Theory. It is the quantum probability version of the usual filtering technics, it makes use of fine quantum stochastic calculus and heavy von Neumann algebra theory.

A maybe more intuitive and more physical approach for these equations is to start from a discrete-time procedure, that is, repeated quantum interactions with measurement of the environment ([AP1]). Then one obtains the stochastic Schrödinger equations by passing to the limit to a continuous-time model.

In this article, we come back and apply results obtained in [Pe1] and [Pe2], in which Belavkin equations are obtained with this approach. We show a property of return to equilibrium of the solution.

We also investigate the case where the environment is in a thermal Gibbs state and we compute the corresponding limit equation. It is interesting to see that in the jump case, the noise disseapears when the temperature is non-zero.

D.2 Discrete-Time Quantum Trajectories

In this section we describe the physical model and the mathematical setup of indirect repeated quantum measurements. We describe the evolution of the small system undergoing successive measurements through the "discrete quantum trajectories". We focus on the probabilistic properties of the sequence representing the discrete quantum trajectories, in particular their Markov character.

D.2.1 Repeated Quantum Interactions

The physical situation that we want to study is the following. A quantum system, with state space $\mathcal{H}_S$ (often called *small system* for it is in general finite-dimensional and small

compared to the environment) is having repeated interactions with a chain of quantum systems $\otimes_{\mathbb{N}^*}\mathcal{H}$. That is, we consider an environment which is made up of a sequence of identical copies of a quantum system, each with state space $\mathcal{H}$. Each piece $\mathcal{H}$ of the environment is going to interact, one after the other, with the small system $\mathcal{H}_S$. This interaction lasts for a time duration τ and is driven by a total Hamiltonian H_{tot} on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$. Hence, each interation is described by the unitary operator

$$U = e^{-i\tau H_{\text{tot}}}$$

on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$. In the Schrödinger picture, if ρ denotes any initial state on the tensor product $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$ then the evolution of the state after this interaction is given by :

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^* \,.$$

After this interaction, the systems $\mathcal{H}_S$ and $\mathcal{H}$ stop interacting together, the system $\mathcal{H}_S$ comes to meet a second copy of $\mathcal{H}$ and they interact together in the same way as before (that is, with following the same unitary operator U).

Let us develop the mathematical framework which allows to describe these repeated quantum interactions. We follow the setup of the article [AP1], in which these models and their continuous limit were first introduced.

The state space describing the whole game is

$$\Gamma = \mathcal{H}_S \otimes \bigotimes_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{H}_k \,, \tag{D.1}$$

where each $\mathcal{H}_k$ is a copy of the Hilbert space $\mathcal{H}$. But, mathematically we have to be clear about what we mean with the above *countable* tensor product

$$T\Phi = \bigotimes_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{H}_k \,.$$

This Hilbert space is well-defined only if one construct the tensor product with respect to a choice of a particular unit vector u_k in each copy $\mathcal{H}_k$ (the sequence (u_k) is usually called the *stabilizing sequence* of the tensor product). In our case, for each copy $\mathcal{H}_k$ of $\mathcal{H}$ we choose the same orthonormal basis

$$\{X^i;\, i \in \mathcal{N} \cup \{0\}\}$$

where $\mathcal{N}$ is a set of the form $\{1, \dots N\}$ or $\mathbb{N}^*$, depending on if $\mathcal{H}$ is finite dimensional or not (in this article we are only concerned with the finite dimensional case, but the discussion we have here is general). A particular role is played by the vector X^0 which has to be considered as a reference vector for the system $\mathcal{H}$. We denote by X^i_k the vector X^i leaving in the k-th copy $\mathcal{H}_k$ of $\mathcal{H}$. A Hilbertian orthonormal basis of $T\Phi$ is then given by all the tensor products $\otimes_k v_k$ where all the vectors v_k are equal to X^0_k, except for a finite number of them which might be equal to some $X^{i_k}_k$, $i_k \in \mathcal{N}$. This stands for a definition of the countable tensor product $T\Phi = \otimes_{k\in\mathbb{N}^*}\mathcal{H}_k$.

The repeated quantum interaction setup is based on two elements : the time length τ and the Hamiltonian $H_{\rm tot}$ which describes each basic interaction. Consider the unitary operator $U = \exp(-i\tau H_{\rm tot})$ acting on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$ and consider the unitary operator U_k on Γ which acts as U on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_k$ and which acts like the identity operator on the other copies $\mathcal{H}_{k'}$. This operator U_k describes the effect of the k-th interaction.

The unitary operator

$$V_k = U_k \dots U_1$$

describes the effect of the k first interactions. Indeed, if ρ is any initial state on Γ, then

$$V_k \, \rho \, V_k^*$$

is the state of the whole system (small system + environment) after k interactions.

Define the elementary operators a^i_j, $i, j \in \mathcal{N} \cap \{0\}$ on $\mathcal{H}$ by

$$a^i_j \, X^k = \delta_{i,k} \, X^j \, .$$

We denote by $a^i_j(n)$ their natural ampliation to $T\Phi$ acting on the n-th copy of $\mathcal{H}$ only.

One can easily prove (in the finite dimensional case this is obvious, in the infinite dimensional case it is an exercise) that U can always be written as

$$U = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j$$

for some bounded operators U^i_j on $\mathcal{H}_0$ such that :

– the series above is strongly convergent,

– $\sum_{k \in \mathcal{N} \cup \{0\}} (U^k_i)^* \, U^k_j = \sum_{k \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^k_j \, (U^k_i)^* = \delta_{i,j} \, I$.

With this representation for U, it is clear that the operator U_n, representing the n-th interaction, is given by

$$U_n = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j(n) \, .$$

With these notations, the sequence (V_n) of unitary operators describing the n first repeated interactions can be represented as follows :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} \, V_n \\ &= \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j(n+1) V_n \, . \end{aligned}$$

But, inductively, the operator V_n acts only on the n first sites of the chain $T\Phi$, whereas the operators $a^i_j(n+1)$ act on the $(n+1)$-th site only. Hence they commute. In the following, we shall drop the $\otimes$ symbols, identifying operators like $a^i_j(n+1)$ with $I_{\mathcal{H}_0} \otimes a^i_j(n+1)$, the operator U^i_j with $U^i_j \otimes I_{T\Phi}$, etc. This gives finally

$$V_{n+1} = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \, V_n \, a^i_j(n+1) \, . \tag{D.2}$$

On $T\Phi$, one vector plays a particular role, the vector

$$\Omega = \otimes_k X_k^0 \,.$$

For any bounded operator K on Γ, we define the operator $\mathbb{E}_0[K]$ on $\mathcal{H}_S$ as the unique operator on $\mathcal{H}_S$ such that, for all trace-class operator ρ on $\mathcal{H}_S$ we have

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(\rho\, \mathbb{E}_0[K]) = \mathrm{Tr}_{\Gamma}\left((\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)\, K\right) \,.$$

That is, $\mathbb{E}_0[K]$ is the partial trace of K with respect to the state $|\Omega >< \Omega|$ on $T\Phi$.

We then have the following fundamental action of the repeated interactions, when restricted to the small system.

Theorem 26 (cf [AP1]) *The effect of the repeated interaction dynamics when restricted to $\mathcal{H}_S$ is given as follows. For all observable X on $\mathcal{H}_S$, for all $n \in \mathbb{N}$, we have*

$$\mathbb{E}_0[V_n^*(X \otimes I)V_n] = L^n(X)\,,$$

where L is a completely positive map on $\mathcal{H}_S$ whose Krauss decomposition is

$$L(X) = \sum_{i \in \mathcal{N}} (U_i^0)^*\, X\, U_i^0 \,.$$

Any (discrete) semigroup (L^n) of completely positive maps can be obtained this way.

Note that the completely positive map L defined above acts on observables. It also induces a completely positive "dual map" L^* acting on states as follows :

$$L^*(\rho) = \sum_{i \in \mathcal{N}} U_i^0\, \rho\, (U_i^0)^* \tag{D.3}$$

and which satisfies

$$\mathrm{Tr}\,(\rho\, L(X)) = \mathrm{Tr}\,(L^*(\rho)\, X)$$

for all state ρ and all bounded operator X on $\mathcal{H}_S$. Recall the usual notion of partial trace defined as follows.

Definition-Theorem 4 *If we have a state α on a tensor product $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, then there exists a unique state η on $\mathcal{H}$ which is characterized by the property :*

$$\mathrm{Tr}\,[\,\eta\, X\,] = \mathrm{Tr}\,[\alpha\,(X \otimes I)\,]\,,$$

for all $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. The state η is denoted by $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(\alpha)$ and is called the partial trace of η with respect to $\mathcal{K}$.

With these notations we have the following result.

Theorem 27 *For every state ρ on $\mathcal{H}_S$ and all $n \in \mathcal{N}$ we have*

$$\mathrm{Tr}_{T\Phi}(V_n(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)V_n^*) = (L^*)^n(\rho)\,.$$

Preuve: We have, for all X bounded operator on $\mathcal{H}_S$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,((L^*)^n(\rho)\,X) &= \mathrm{Tr}\,(\rho\, L^n(X)) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left(\rho\, \mathbb{E}_0[V_n^*(X \otimes I)V_n]\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left((\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)\, V_n^*(X \otimes I)V_n\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left(V_n(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)V_n^*\,(X \otimes I)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{Tr}_{T\Phi}\,(V_n(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)V_n^*)\;X\right)\,.
\end{aligned}$$

This proves the announced result. □

D.2.2 Repeated Quantum Measurements

We now somehow consider a more complicated procedure. After each interaction is finished, the piece $\mathcal{H}_k$ of environment which has just finished to interact with $\mathcal{H}_S$ is undergoing a quantum measurement of one of its observables. The random result of this quantum measurement will give some information on the state of the whole system and in particular on the state of $\mathcal{H}_S$. The so-called quantum trajectory is the random process we obtain this way, by looking at the knowledge we have of the state of $\mathcal{H}_S$ after each measurement.

We assume here that $\mathcal{H}$ is finite-dimensional. The discussion in this section can be extended easily to a more general setup, but it is of no use for us in this article.

Let A be any observable on $\mathcal{H}$, with spectral decomposition

$$A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j\,,$$

the λ_j's being the eigenvalues, the P_j's being the eigenprojectors. We consider the natural ampliations of A which defines an observable on $\mathbf{\Gamma}$ by making A acting on the k-th site $\mathcal{H}_k$ only :

$$\begin{aligned}
A^k &= \bigotimes_{j=0}^{k-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{j\geq k+1} I \\
&= \bigotimes_{j=0}^{k-1} I \otimes \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j\right) \otimes \bigotimes_{j\geq k+1} I \\
&= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j^k\,,
\end{aligned}$$

with obvious notations.

As a consequence, if ρ is the state of $\mathbf{\Gamma}$ then a quantum measurement of the observable A^k gives the values λ_j with probability :

$$P[\text{to observe } \lambda_j] = Tr[\,\rho\, P_j^k\,], \quad j \in \{1, \ldots, p\}\,.$$

If we have observed the eigenvalue λ_j as a result of the measurement, then the "projection postulate" of quantum mechanics imposes the new state of the system to be

$$\rho_j = \frac{P_j^k\, \rho\, P_j^k}{Tr[\,\rho\, P_j^k\,]}\,.$$

This state is now the new state of our system. If we perform another measurement of the observable A^k we obtain $P[\text{to observe } \lambda_j] = 1$. As a consequence, a naive repeated measurement operation gives no information on the evolution of the system. The repeated measurement procedure has to be combined with the repeated interaction procedure in order to give non-trivial informations on the behaviour of the system.

The quantum repeated measurement principle is the combination of the measurement principle and the repeated quantum interactions. Physically this means that each copy $\mathcal{H}_k$ of $\mathcal{H}$ interacts with $\mathcal{H}_S$ and we perform a measurement of A^k on $\mathcal{H}_k$ after it has interacted with $\mathcal{H}_S$. After each measurement we have a new (random) state of the whole system, given by the projection postulate. This is the so-called *discrete quantum trajectory.*

Let us be more precise, mathematically. The initial state on $\mathbf{\Gamma}$ is chosen to be of the form

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{j \geq 1} \eta_j$$

where ρ is any state on $\mathcal{H}_0$ and each $\eta_i = \eta$ is a reference state on $\mathcal{H}$. We denote by μ_k the state representing the new state after the k first interactions, that is,

$$\mu_k = V_k\, \mu\, V_k^*\,.$$

Let us now define the probabilistic framework in order to describe the effect of the successive measurements. We put $\Omega = \{1, \ldots, p\}$ and on $\Omega^{\mathbb{N}}$ we define the cylinders of size k :

$$\Lambda_{i_1,\ldots,i_k} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} / \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_k = i_k\}\,.$$

We endow $\Omega^{\mathbb{N}}$ with the σ-algebra $\mathcal{F}$ generated by all these sets, this is the *cylinder σ-algebra.* Note that for all j, the unitary operator U_j commutes with all the projectors P_i^k such that $k < j$. Hence, the state of the system after k interactions and k measurements which have given the respective values $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ is (up to normalization by the trace)

$$\begin{aligned} P_{i_k}^k\, U_k\, \ldots\, P_{i_1}^1 U_1\, \mu\, (U_1)^*\, P_{i_1}^1\, \ldots (U_k)^*\, P_{i_k}^k = & \\ &= P_{i_k}^k\, \ldots\, P_{i_1}^1\, U_k\, \ldots\, U_1\, \mu\, (U_1)^*\, \ldots\, (U_k)^*\, P_{i_1}^1\, \ldots\, P_{i_k}^k \\ &= P_{i_k}^k\, \ldots\, P_{i_1}^1\, \mu_k\, P_{i_1}^1\, \ldots\, P_{i_k}^k\,, \end{aligned}$$

where we have used that U_k commutes with any $P_{k'}$ such that $k' \neq k$.

We denote by $\tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k)$ the quantity

$$P^k_{i_k} \ldots P^1_{i_1} \mu_k P^1_{i_1} \ldots P^k_{i_k} .$$

By the Kolmogorov Consistancy Theorem we can define a probability measure P on $(\Omega^{\mathbf{N}}, \mathcal{F})$ only by specifying

$$P[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}] = Tr[\tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k)] .$$

We also define a random sequence of states on Γ by

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{\rho}^k(.) & : & \Omega^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma}) \\ & & \omega & \longmapsto & \tilde{\rho}_k(\omega_1 \ldots \omega_k) = \frac{\tilde{\mu}(\omega_1 \ldots \omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}(\omega_1 \ldots \omega_k)]} . \end{array}$$

This random sequence of states is our discrete quantum trajectory and the operator $\tilde{\rho}^k(i_1, \ldots, i_k)$ represents the state of the system, after having observed the results $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ for the k first measurements. This fact is made precise in the following proposition.

Proposition 16 *Let $(\tilde{\rho}_k)$ be the above random sequence of states we have, for all $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}$*

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\omega) = \frac{P^{k+1}_{\omega_{k+1}} U_{k+1} \, \tilde{\rho}_k(\omega) \, (U_{k+1})^* P^{k+1}_{\omega_{k+1}}}{\mathrm{Tr} \left[\tilde{\rho}_k(\omega) \, (U_{k+1})^* P^{k+1}_{\omega_{k+1}} U_{k+1} \right]} .$$

This proposition is obvious but summarizes the quantum repeated measurement principle. The sequence $\tilde{\rho}_k$ is the quantum trajectory, showing up the effect of the successive measurements on $\mathbf{\Gamma}$. The following theorem is an easy consequence of the previous proposition.

Theorem 28 *The sequence $(\tilde{\rho}^n)_n$ is a Markov chain, valued in the set of states of Γ. It is described as follows :*

$$P \left[\tilde{\rho}^{n+1} = \mu \,|\, \tilde{\rho}^n = \theta_n, \ldots, \tilde{\rho}^0 = \theta_0 \right] = P \left[\tilde{\rho}^{n+1} = \mu \,|\, \tilde{\rho}^n = \theta_n \right] .$$

If $\tilde{\rho}^n = \theta_n$ then $\tilde{\rho}^{n+1}$ takes one of the values :

$$\frac{P^{n+1}_i U_{n+1} \, \theta_n \, (U_{n+1})^* P^{n+1}_i}{\mathrm{Tr} \left[U_{n+1} \, \theta_n \, (U_{n+1})^* P^{n+1}_i \right]} , \quad i = 1, \ldots, p ,$$

with probability $\mathrm{Tr} \left[U_{n+1} \, \theta_n \, (U_{n+1})^* \, P^{n+1}_i \right]$.

The most interesting behaviour of the Markov chain of states above is obtained when one restricts it to the small system $\mathcal{H}_S$. This way we obtain a quantum trajectory on the states of $\mathcal{H}_S$ by considering the sequence of random states on $\mathcal{H}_S$:

$$\rho_n(\omega) = \mathrm{Tr}_{T\Phi}(\tilde{\rho}_n(\omega)) . \tag{D.4}$$

This defines a sequence of state on $\mathcal{H}_S$ which contains the "partial" information given by the measurement and we have the following theorem which completely describes the behaviour of this random sequence.

Theorem 29 *The random sequence defined by formula* $(D.4)$ *is a Markov chain with values in the set of states on* $\mathcal{H}_S$*. If* $\rho_n = \chi_n$ *then* ρ_{n+1} *takes one of the values :*

$$\frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[(I\otimes P_i)\,U(\chi_n\otimes\eta)U^*\,(I\otimes P_i)\right]}{Tr[\,U(\chi_n\otimes\eta)U^*\,(I\otimes P_i)]}\,,\quad i=1,\ldots,p\,,$$

with probability $\mathrm{Tr}\,[U(\chi_n\otimes\eta)U^*\,(I\otimes P_i)]$.

The expectation of ρ_n *satisfies*

$$\mathbb{E}[\rho_n] = (L^*)^n(\rho_0)\,,$$

where L^* *is the completely positive map described in Theorem 27.*

Preuve: Assume, by induction, that ρ_n is given. This means that $\mathrm{Tr}_{T\Phi}(\tilde{\rho}_n) = \rho_n$. The next step of the quantum measurement gives (by Theorem 28)

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \frac{P_i^{n+1}U_{n+1}\,\tilde{\rho}_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1}}{\mathrm{Tr}\,\left[U_{n+1}\,\theta_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1}\right]}\,,$$

for some i. Hence, we have to compute

$$\mathrm{Tr}_{T\Phi}(P_i^{n+1}U_{n+1}\,\tilde{\rho}_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1})\,.$$

Decomposing, with obvious notations, the space $T\Phi$ into $\mathcal{H}_S\otimes\Gamma_{[0,n]}\otimes\mathcal{H}_{n+1}\otimes\Gamma_{[n+2,+\infty[}$, one notes that, by induction, the state $\tilde{\rho}_n$ is of the form

$$\theta_n\otimes\eta\otimes\bigotimes_{k\geq n+2}\eta$$

where θ_n is a state on $\mathcal{H}_S\otimes\Gamma_{[0,n]}$, satisfying

$$\mathrm{Tr}_{\Gamma_{[0,n]}}(\theta_n) = \rho_n\,.$$

Hence, for all X, bounded operator on $\mathcal{H}_S$, we have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{Tr}_{T\Phi}(P_i^{n+1}U_{n+1}\,\tilde{\rho}_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1})\,X\right) = \\
&\qquad = \mathrm{Tr}\,\left((P_i^{n+1}U_{n+1}\,\tilde{\rho}_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1})\,(X\otimes I)\right)\\
&\qquad = \mathrm{Tr}\,\left(U_{n+1}\,\tilde{\rho}_n\,(U_{n+1})^*\,(X\otimes I_{[0,n]}\otimes P_i^{n+1}\otimes I_{[n+2,+\infty[})\right)\\
&\qquad = \mathrm{Tr}\,\left(U_{n+1}\left(\theta_n\otimes\eta\otimes\bigotimes_{k\geq n+2}\eta\right)(U_{n+1})^*\,(X\otimes I_{[0,n]}\otimes P_i^{n+1}\otimes I_{[n+2,+\infty[})\right)\\
&\qquad = \mathrm{Tr}\,\left((\,\theta_n\otimes\eta)\;(U_{n+1})^*(X\otimes I_{[0,n]}\otimes P_i^{n+1})U_{n+1}\right)\,. \qquad (D.5)
\end{aligned}$$

But U_{n+1} acts only on $\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_{n+1}$, hence the operator $(U_{n+1})^*(X\otimes I_{[0,n]}\otimes P_i^{n+1})U_{n+1}$ is an operator on $\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_{n+1}\otimes\Gamma_{[0,n]}$ (note the interchange of space, for simplicity of the notations) which is of the form

$$((U_{n+1})^*(X\otimes P_i^{n+1})U_{n+1})\otimes I_{[0,n]}\,.$$

Hence, the quantity (D.5) is equal to

$$\mathrm{Tr}\,\Big(\mathrm{Tr}_{\,\Gamma_{[0,n]}}\,(\,\theta_n\otimes\eta)\;(U_{n+1})^*(X\otimes P_i^{n+1})U_{n+1}\Big)\;.$$

But $\mathrm{Tr}_{\,\Gamma_{[0,n]}}\,(\,\theta_n\otimes\eta)$ is equal to $\mathrm{Tr}_{\,\Gamma_{[0,n]}}\,(\,\theta_n)=\rho_n\otimes\eta\,$. This gives finally

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{Tr}_{\,T\Phi}(P_i^{n+1}U_{n+1}\,\tilde\rho_n\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1})\,X\big)&=\\ =\mathrm{Tr}\,\big((P_i^{n+1}U_{n+1}\,(\rho_n\otimes\eta)\,(U_{n+1})^*P_i^{n+1})\,X\big)\,.&\end{aligned}$$

But in this expression, the index $n+1$ plays no more role and the expression above may as well be written

$$\mathrm{Tr}\,\big((P_iU\,(\rho_n\otimes\eta)\,(U)^*P_i)\,X\big)$$

on $\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}$. This proves the first part of the theorem.

Let us check, the one concerning the expectation of ρ_n. Note that the expectation of ρ_1 is equal to

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\rho_1]&=\sum_{i=1}^{p}P(\{i\})\,\frac{\mathrm{Tr}_{\,\mathcal{H}}(P_i\,U(\rho_0\otimes\eta)U^*P_i)}{P(\{i\})}\\ &=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Tr}_{\,\mathcal{H}}(U(\rho_0\otimes\eta)U^*P_iP_i)\qquad\text{for } P_i \text{ acts on } \mathcal{H} \text{ only}\\ &=\mathrm{Tr}_{\,\mathcal{H}}(U(\rho_0\otimes\eta)U^*\sum_{i=1}^{p}P_i)\\ &=\mathrm{Tr}_{\,\mathcal{H}}(U(\rho_0\otimes\eta)U^*)\\ &=L^*(\rho_0)\,.\end{aligned}$$

□

Thanks to the above description we can express a discrete-time evolution equation for the quantum trajectories. Let us put

$$\mathcal{L}_i(\rho)=\mathbf{E}_0\left[(I\otimes P_i)\,U(\rho\otimes\eta)U^*\,(I\otimes P_i)\right]\,,$$

$i=1,\ldots,p$. We then have for all $\omega\in\Sigma^{\mathbb{N}}$ and all $k>0$:

$$\rho_{k+1}(\omega)=\sum_{i=0}^{p}\frac{\mathcal{L}_i(\rho_k)(\omega)}{Tr[\mathcal{L}_i(\rho_k)(\omega)]}\mathbf{1}_i^{k+1}(\omega)\tag{D.6}$$

where $\mathbf{1}_i^k(\omega)=\mathbf{1}_i(\omega_k)$.

D.2.3 The two-level atom model

In this section we specialise to the case where $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^2$, this is the so-called *two-level atom model*. In most of the physical applications that we have in mind, the interacting system is also of the form $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. We denote by X_0, X_1 an orthonormal basis where the reference state η is diagonal :

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix} .$$

Let Ω, X be any orthonormal basis of $\mathcal{H}_0$. For describing the interactions between $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}$ we choose $\Omega \otimes X_0, X \otimes X_0, \Omega \otimes X_1, X \otimes X_1$ as an orthonormal basis of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. In such a basis, the unitary operator U, describing the elementary interaction, can be written as a 2×2 matrix with coefficients being operators on $\mathcal{H}_0$. That is, we can write U as :

$$U = \begin{pmatrix} U_0^0 & U_0^1 \\ U_1^0 & U_1^1 \end{pmatrix} .$$

Let A be an observable of $\mathcal{H}$ on which we want to perform a measurement. It can be written as $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ where λ_i are its eigenvalues and P_i the corresponding eigenprojectors. Let $(P^i_{k,l})_{k,l=0,1}$ be the matrix elements of the projector P^i in the basis X_0, X_1. Put

$$\mathcal{L}_i(\rho) = \sum_{k,l=0,1} P^i_{k,l} \left(\eta_0 U_0^k \, \rho \, (U_0^l)^* + \eta_1 U_1^k \, \rho \, (U_1^l)^* \right) .$$

Then, if ρ_k denotes the state of the system $\mathcal{H}_S$ after the k-th measurement, the state ρ_{k+1} takes one of the two possibles values

$$\frac{\mathcal{L}_i(\rho_k)}{Tr(\mathcal{L}_i(\rho_k)}$$

with probability

$$p_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)] \tag{D.7}$$

$$q_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)] , \tag{D.8}$$

respectively.

We aim at considering this discrete-time model but depending on a time-length parameter h which we shall make tend to 0. That is, we want to pass from a discrete time interaction model to a continuous time one. This way we shall obtain the classical Belavkin equations for quantum trajectories associated to continuous measurement. In the litterature, these equations describe a model where a two-level atom is in contact with a photon-stream at zero temperature. In our approach, we can consider any temperature for the photon stream.

Let $h = \frac{1}{n}$ be the time of interaction between the small system and one element of the environment. Let us denote by $U(n)$ the unitary operator associated to each interaction,

it now depends of the time of interaction. If we had no measurement process of te environment, we will be back to the problem of going from a discrete-time repeated quantum interaction model, to a continuous time one. This problem has been completely studied in [AP1]. In their article they show that, in order to get a limit evolution when h goes to 0, we have to ask the operator $U(n)$ to satisfy certain renormalization conditions. They have shown that the coefficients $U^i_j(n)$ must follow well-defined time scaling in order to obtain a non-trivial limit. Namely they have shown that the operator $(V_{[nt]} = U([nt])\dots U_1)_{t>0}$ converges to an evolution $(V_t)_t$ which is a continuous operator process. This process naturally satisfies a quantum Langevin equation which represents the evolution equation of the small system + bath.

Our continuous measurement procedure does not differ much from their approach, excpet that we perform a measurement on the environment after each interaction. This why we have to keep the same normalization for the coefficients $U^i_j(n)$ in order to get a limit. Following [AP1] we assume that the coefficients of $U(n)$ are of the form

$$U^0_0(n) = I + \frac{1}{n}\left(-iH - i\gamma_0 I + \frac{1}{2}C^*C\right) + \circ(\frac{1}{n}) \tag{D.9}$$

$$U^0_1(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}C + \circ(\frac{1}{n}) \tag{D.10}$$

$$U^1_0(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}C^* + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{D.11}$$

$$U^1_1(n) = I + \frac{1}{n}\left(-iH - i\gamma_1 I + \frac{1}{2}C^*C\right) + \circ(\frac{1}{n})\,. \tag{D.12}$$

Up to higher orders in $1/n$, which do not appear in the limit, such a unitary operator is obtained by considering an interaction Hamiltonian of the form

$$H_{tot} = H \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(C \otimes a^0_1 + C^* \otimes a^1_0\right)\,.$$

That is, a typical dipole-type interaction Hamiltonian with a renormalization in $1/\sqrt{n}$ of the field operators a^0_1 and a^1_0, in order to strengthen the force of the interaction, while the interaction-time decreases.

D.3 Continuous Trajectories

In this section we investigate the case $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ and $\eta = |X_0\rangle\langle X_0|$. This is the setup of the discrete model which converges to the usual Belavkin equations.

Proposition 17 *In the 2-dimensional case, if ρ_0 is a pure state, $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, and if the measurement is non-trivial (A is not a multiple of the identity), then the state of the small system $\rho_n(\omega)$ is always a pure state.*

Preuve: If $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ with $P_k = (p^k_{ij})_{0\leq i,j\leq 1}$, after computation the two possible unormalized state satisfy :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(\rho_n) &= p^0_{00} U^0_0 \rho_n (U^0_0)^* + p^0_{10} U^0_1 \rho_n (U^0_0)^* + p^0_{01} U^0_0 \rho_n (U^0_1)^* + p^0_{11} U^0_1 \rho_n (U^0_1)^* \\
\mathcal{L}_1(\rho_n) &= p^1_{00} U^0_0 \rho_n (U^0_0)^* + p^1_{10} U^0_1 \rho_n (U^0_0)^* + p^1_{01} U^0_0 \rho_n (U^0_1)^* + p^1_{11} U^0_1 \rho_n (U^0_1)^*
\end{aligned}$$

By induction, assume that $\rho_n(\omega) = |\psi_n(\omega)\rangle\langle\psi_n(\omega)|$ for some $|\psi_n\rangle$. Consider a vector $(\mu,\nu) \in Ker(P_0 - I)$, with $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$. A direct computation shows that

$$\mathcal{L}_0(\rho_n) = \left| \left[\mu U^0_0 + \nu U^0_1)\right] \psi_n \right\rangle \left\langle \left[\mu U^0_0 + \nu U^0_1)\right] \psi_n \right| .$$

In the same way, we get

$$\mathcal{L}_1(\rho_n) = \left| \left[\bar{\nu} U^0_0 - \bar{\mu} U^0_1)\right] \psi_n \right\rangle \left\langle \left[\bar{\nu} U^0_0 - \bar{\mu} U^0_1)\right] \psi_n \right| .$$

Put

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0(|\psi\rangle) &= \left| \left[\mu U^0_0 + \nu U^0_1)\right] \psi \right\rangle \\
\mathcal{F}_1(|\psi\rangle) &= \left| \left[\bar{\nu} U^0_0 - \bar{\mu} U^0_1)\right] \psi \right\rangle .
\end{aligned}$$

Hence, by equation (D.6) we get immediatly

$$|\psi_{k+1}(\omega)\rangle = \frac{\mathcal{F}_0(|\psi_k(\omega)\rangle)}{\|\mathcal{F}_0(|\psi_k(\omega)\rangle)\|} \mathbf{1}^{k+1}_0(\omega) + \frac{\mathcal{F}_1(|\psi_k(\omega)\rangle)}{\|\mathcal{F}_1(|\psi_k(\omega)\rangle)\|} \mathbf{1}^{k+1}_1(\omega) . \tag{D.13}$$

□

This is the discrete equation which describes a quantum trajectory for a wave function. Recall that the interaction time between the small system and a piece of environment is given by $h = 1/n$. Now we wish to pass to the continuous limit (i.e. $n \to +\infty$) on this equation, using the asymptotic hypothesis (D.9)-(D.12).

As in shown in [Pe1] and [Pe2], the continuous limit of the evolution equation is completely different, depending on wether the observable A is diagonal or not in the basis of η. The point isthat the limit equation is of diffusive type when A is non-diagonal and of Poisson type in the diagonal case. Inside each case, the behaviours are very comparable and differ only by some coefficients. This is why, it is enough here to consider only two cases :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

as representing the diagonal case, or

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

as representing the non-diagonal case.

D.3.1 The Poisson case

We first start with the case $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, for which we have $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $\mu = 1$, $\nu = 0$. Applying the hypothesis (D.9)-(D.12), we obtain the probabilities

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= Tr[\rho_k P_0] = \|U_0^0|\psi_k\rangle\| = 1 - \frac{1}{n}\frac{1}{2}\mu_k(n) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ q_{k+1} &= Tr[\rho_k P_1] = \|U_1^0|\psi_k\rangle\| = \frac{1}{n}\frac{1}{2}\mu_k(n) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

where $\mu_k(n) = \langle \psi_k, C^*C\,\psi_k\rangle$. By remarking that $\mathbf{1}_0^k = 1 - \mathbf{1}_1^k$, we have the following difference equation for (ψ_k) :

$$|\psi_{k+1}\rangle - |\psi_k\rangle = \frac{1}{n}\left(-iH - \frac{1}{2}C^*C|\psi_k\rangle + \frac{1}{2}\mu_k|\psi_k\rangle + \circ(1)\right) + \\ + \left(\frac{C|\psi_k\rangle}{\sqrt{\mu_k}} - |\psi_k\rangle + \circ(1)\right)\mathbf{1}_1^{k+1}. \quad \text{(D.14)}$$

In the continuous limit, we shall see that this difference equation converges to an equation of the form

$$d|\psi_t\rangle = \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C + \mu_{t-}\,I\right) + \sqrt{\mu_{t-}}\,C\right)|\psi_{t-}\rangle\,dt + \\ + \frac{(C - \sqrt{\mu_{t-}}\,I)}{\sqrt{\mu_{t-}}}\,|\psi_{t-}\rangle\,(d\tilde{N}_t - \mu_{t-}\,dt) \quad \text{(D.15)}$$

where $\mu_t = \langle \psi_t, C^*C\,\psi_t\rangle$ and $(\tilde{N}_t)$ is a counting process such that $t \to \tilde{N}_t - \int_0^t \mu_s\,ds$ is a martingale. This is to say that $(\tilde{N}_t)$ is a counting process with stochastic intensity equal to $\int_0^t \mu_s\,ds$. A first problem is that equation (D.15) is ill-defined. Indeed, the intensity of the counting process depends on the solution itself. We need to be more precise about what we mean by a "solution to equation (D.15)".

Definition 6 *Let $\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. A* process-solution *of the jump-equation (D.15) is a process (ψ_t) and a counting process $\tilde{N}_t$, with intensity $\int_0^t \mu_s\,ds$ where $\mu_t = \langle \psi_t, C^*C\,\psi_t\rangle$, such that for all t we have*

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle + \int_0^t \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C + \mu_{s-}I\right) + \sqrt{\mu_{s-}}C\right)|\psi_{s-}\rangle ds + \\ + \int_0^t \frac{(C - \sqrt{\mu_{s-}}I)}{\sqrt{\mu_{s-}}}|\psi_{s-}\rangle(d\tilde{N}_s - \mu_{s-}ds)\,. \quad \text{(D.16)}$$

This notion of solution imposes the simultaneous existence of the process $|\psi_t\rangle$ and the counting process $\tilde{N}_t$. In order to construct such a counting process, we use a Poisson point process.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, on which is living a Poisson point process N on $\mathbb{R}^2$ such that the expectation of the number of points $N(\omega, B)$ lying inside a Borel set B is given by

$$\mathbf{E}[N(\,\cdot\,, B)] = \lambda(B)$$

where λ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$.

This way, N defines a *random measure* $B \mapsto N(\omega, B)$ on $\mathbb{R}^2$, whose volume element is denoted by $N(\omega,\, dx \times ds)$. The following theorem shows how the random Poisson measure is used to construct the counting process.

Theorem 30 ([Pe2]) *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a filtered probability space on which lives a Poisson point process N. Consider a solution of the following equation*

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle + \int_0^t \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C - \mu_{s-}\, I\right)\right)|\psi_{s-}\rangle\, ds + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{(C - \sqrt{\mu_{s-}}\, I)}{\sqrt{\mu_{s-}}} |\psi_{s-}\rangle\, \mathbf{1}_{0 \le x \le \mu_{s-}}\, N(\,\cdot\,,\, dx \times\, ds)\,. \quad \text{(D.17)}$$

Then the process $(|\psi_t\rangle)$ together with the counting process

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{0 \le x \le \mu_{s-}} N(ds, dx) \quad \text{(D.18)}$$

constitute a process-solution for equation (D.15).

The theorem above shows the existence of a solution. Uniqueness is given by the following theorem.

Theorem 31 ([Pe2]) *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a filtered probability space on which lives a Poisson point process N. The following equation*

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle + \int_0^t \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C - \mu_{s-}\, I\right)\right)|\psi_{s-}\rangle\, ds + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{(C - \sqrt{\mu_{s-}}\, I)}{\sqrt{\mu_{s-}}} |\psi_{s-}\rangle\, \mathbf{1}_{0 \le x \le \mu_{s-}}\, N(\,\cdot\,,\, dx\, ds)\,. \quad \text{(D.19)}$$

admits a unique solution. Furthermore, almost surely, we have $\|\psi_t\| = 1$

Even if this theorem is just an application of the results of [Pe2], let us explain roughtly how it is proved.

In equation (D.19) there are two parts. There is the ordinary differential part and the one driven by the Poisson process. Consider the collection of jumping times of the Poisson

process. If there is no jump of the Poisson process N, we deal with an ordinary differential equation

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle + \int_0^t \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C - \mu_{s-}\, I\right)\right) |\psi_{s-}\rangle\, ds\,.$$

This equation admits a unique solution, from which we deduce the curve $t \to \mu_t$. The first time T_1 when the Poisson process has a jump under this curve, the solution $|\psi_t\rangle$ jumps and takes the value

$$\frac{C|\psi_{T_1-}\rangle}{\sqrt{\mu_{T_1-}}}\,.$$

After this first jump, we have a new "initial" value for $|\psi_t\rangle$ and the process starts again in the same way : we solve the ordinary differential equation and the solution follows it, until it meets a jump of N which is bellow the curve, the it jumps. And so on.

Now that equation (D.19) is well understood, we wish to pass to the continuous time limit on equation (D.15). The appropriate topology for the convergence theorem proved in [Pe2] is the Skorohod topology. Let us recall it. For all $T > 0$ we denote by $\mathcal{D}([0,T])$ the space of all càdlàg matricial process on $[0,T]$ endowed with the Skorohod topology, that is, the topology of the weak convergence of cadlag process (the convergence in distribution).

Now, let us write equation (D.19) in another way. Let T be fixed, for all $t < T$ we define :

$$\begin{aligned}
|\psi_{[nt]}\rangle &= |\psi_0\rangle + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \left(|\psi_{k+1}\rangle - |\psi_k\rangle\right)) \\
&= |\psi_0\rangle + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\left(-iH - \frac{1}{2}C^*C|\psi_k\rangle + \frac{1}{2}\mu_k|\psi_k\rangle + \circ(1)\right) + \\
&\quad + \left(\frac{C|\psi_k\rangle}{\sqrt{\mu_k}} - |\psi_k\rangle + \circ(1)\right) \mathbf{1}_1^{k+1}\,. \qquad \text{(D.20)}
\end{aligned}$$

Theorem 32 ([Pe2]) *Let T be fixed. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space in which lives a Poisson point process N. Let $(|\psi_{[nt]}\rangle)_{0\le t\le T}$ be the discrete quantum trajectory defined by the equation (D.20). This discrete quantum trajectory converges in $\mathcal{D}([0,T])$ to the process $(|\tilde{\psi}_t\rangle)_{0\le t\le T}$ which is the unique solution of the stochastic differential equation*

$$|\tilde{\psi}_t\rangle = \int_0^t \frac{1}{2}\left(-C^*C|\tilde{\psi}_s\rangle + \mu_t|\tilde{\psi}_s\rangle\right) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{C|\tilde{\psi}_{s-}\rangle}{\mu_{s-}} - |\tilde{\psi}_{s-}\rangle\right) \mathbf{1}_{0<x<\mu_{s-}}\, N(.,ds,dx) \qquad \text{(D.21)}$$

where $\mu_t = \langle \tilde{\psi}_t\,,\, C^*C\tilde{\psi}_t\rangle$.

D.3.2 The diffusive case

We now consider the case where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

We have $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ and $\mu = \nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hence, after computation we obtain :

$$p_{k+1} = Tr[\rho_k P_0] = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(U_0^0 + U_1^0)|\psi_k\rangle \right\| = \frac{1}{2} + \frac{\nu_k(n)}{\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) , \tag{D.22}$$

$$q_{k+1} = Tr[\rho_k P_1] = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1^0 - U_0^0)|\psi_k\rangle \right\| = \frac{1}{2} - \frac{\nu_k(n)}{\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) , \tag{D.23}$$

where $\nu_k(n) = Re\,(\langle \psi_k, C\psi_k\rangle)$. Let us put

$$X_{k+1} = -\frac{\mathbf{1}_1^k - q_{k+1}}{\sqrt{p_{k+1}q_{k+1}}} .$$

Then the evolution equation takes the form

$$|\psi_{k+1}\rangle - |\psi_k\rangle = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}C^*C|\psi_k\rangle + \nu_k C|\psi_k\rangle + \circ(1)\right) + \\ + \left(C|\psi_k\rangle - \nu_k|\psi_k\rangle + \circ(1)\right)\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1} . \tag{D.24}$$

The continuous diffusive equation which is candidate to be the limit of equation (D.24) is

$$d|\psi_t\rangle = (C - \nu_t I)|\psi_t\rangle dW_t + \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C - 2\nu_t C + \nu_t^2 I\right)\right)|\psi_t\rangle dt \tag{D.25}$$

where $\nu_t = Re\,(\langle \psi_t, C\psi_t\rangle)$ and $(W_t)_t$ is a one-dimensionnal Brownian motion.

Before hands, we need to discuss the existence and uniqueness property of equation (D.25). Indeed, this equation is not of the usual stochastic differential equation type, for its coefficients are typically non-lipschitz. By a truncation and approximation method the following is proved in [Pe1].

Theorem 33 ([Pe1]) *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space on which is defined a standard Brownian motion $(W_t)_t$. The following stochastic differential equation*

$$d|\psi_t\rangle = (C - \nu_t I)|\psi_t\rangle dW_t + \left(-iH - \frac{1}{2}\left(C^*C - 2\nu_t C + \nu_t^2 I\right)\right)|\psi_t\rangle dt \tag{D.26}$$

admits a unique solution. Furthermore, almost surely, for all t we have $\|\psi_t\| = 1$.

We can now consider the approximation procedure. Consider the difference equation

$$\begin{aligned}
|\psi_{[nt]}\rangle &= |\psi_0\rangle + \sum_{k=0}^{[nt]-1} (|\psi_{k+1}\rangle - |\psi_k\rangle)) \\
&= |\psi_0\rangle + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}C^*C|\psi_k\rangle + \nu_k C|\psi_k\rangle + \circ(1)\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{[nt]-1} \left(C|\psi_k\rangle - \nu_k|\psi_k\rangle + \circ(1)\right)\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}\,. \qquad \text{(D.27)}
\end{aligned}$$

We have the following result.

Theorem 34 *Let T be fixed. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ be a probability space on which is defined a standard Brownian motion $(W_t)_t$. Let $(|\psi_{[nt]}\rangle)_{0\le t\le T}$ be the discrete quantum trajectory defined by the equation (D.27). This discrete quantum trajectory converges in $\mathcal{D}([0,T])$ for all T to the process $(|\tilde{\psi}_t\rangle)_{0\le t\le T}$ which is the unique solution on Ω of the following stochastic differential equation :*

$$|\tilde{\psi}_t\rangle = \int_0^t \left(-\frac{1}{2}C^*C|\tilde{\psi}_s\rangle + \nu_t C|\tilde{\psi}_s\rangle\right) ds + \int_0^t (C|\tilde{\psi}_t\rangle - \nu_t|\tilde{\psi}_t\rangle)dW_s \qquad \text{(D.28)}$$

where $\nu_t = Re(\langle\tilde{\psi}_t, C\tilde{\psi}_t\rangle)$.

Preuve: Define

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= |\psi_{[nt]}\rangle \\
V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \\
W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]-1} X_{k+1} \\
\varepsilon_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[nt]-1} \circ(1) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]-1} \circ(1)X_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

The process $(\psi_n(t))$ satisfies

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= \int_0^t \left(-\frac{1}{2}C^*C\psi_n(s-) + Re(\psi_n(s-), C\psi_n(s-)\rangle)C\psi_n(s-)\right) dV_n(s) \\
&\quad + \int_0^t (C\psi_n(s-) - Re(\psi_n(s-), C\psi_n(s-)\rangle)\psi_n(s-)dW_n(s) + \varepsilon_n(t) \qquad \text{(D.29)}
\end{aligned}$$

In order to show that $\psi_n(t)$ converges in the Skorohod space to the solution of

$$|\psi_t\rangle = \int_0^t \left(-\frac{1}{2}C^*C|\psi_s\rangle + \nu_t C|\psi_s\rangle\right) ds + \int_0^t (C|\psi_t\rangle - \nu_t|\psi_t\rangle)dW_s$$

we make use of the celebrated Kurtz-Protter theorem. Let us recall it.

Recall that $[X, X]$ is defined for a semi-martingale by the formula $[X, X]_t = X_t^2 - \int_0^t X_{s-}dX_s$. For a finite variation process V we put $T_t(V)$ to be the total variation of V on $[0, t]$.

Theorem 35 (Kurtz-Protter, [K-P]) *Suppose that W_n is a martingale and V_n is a finite variation process. Assume that for each $t \geq 0$:*

$$\sup_n \mathbf{E}[[W_n, W_n]_t] < \infty$$
$$\sup_n \mathbf{E}[T_t(V_n)] < \infty$$

and that $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ converges in distribution to $(W, V, 0)$ where W is a standard brownian motion and $V(t) = t$ for all t. Let $X_n(t)$ be a process satisfying

$$X_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t L(X_n(s-)dV_n(s) + \int_0^t \Theta(X_n(s-))dW_n(s)$$

Suppose that X satisfies :

$$X_t = X_0 + \int_0^t L(X_s)ds + \int_0^t \Theta(X_s)dW_s$$

and that the solution of this stochastic differential equation is unique. Then X_n converges in distribution to X.

In our case, the different hypothesis above are satisfied. Indeed, define a filtration for the process $(W_n(.))$:

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_i, i \leq [nt]).$$

The following is proved in [Pe1].

Proposition 18 *We have that $(W_n(.), \mathcal{F}_.^n)$ is a martingale. The process $(W_n(.))$ converges to a standard Brownian motion $W_.$ when n goes to infinity and $sup_n \mathbf{E}[[W_n, W_n]_t] < \infty$.*

Furthemore, we have the convergence in distribution for the process $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ to $(W, V, 0)$ when n goes to infinity.

This proves the announced convergence.

□

D.3.3 Return to Equilibrium

Now that the limit equations are established, we are interested into the long time behaviour of the solutions. We wish to prove a return to equilibrium theorem in a particular case. This is the case when $H = 0$ and $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. In this particular case, it is easy to check that if $|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ is such that x_0, y_0 are real numbers, then, for all $t > 0$, the wave function $|\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ is also valued in $\mathbb{R}^2$. We shall stick to this case, for if $|\psi_0\rangle$ is complex valued, one can separate its real and imaginary parts.

With our hypothesis, the Belavkin equations take the form

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} y_s(1 - x_s^2) \\ -x_s y_s^2 \end{pmatrix} dW_s + \int_0^t \begin{pmatrix} x_s y_s^2 \\ -y_s/2 \end{pmatrix} ds \tag{D.30}$$

in the diffusive case, and

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \int_0^t \int_{[0,1]} \begin{pmatrix} -x_{s-} + 1 \\ -y_{s-} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{0<x<y_{s-}^2} N(., dx, ds) + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_s y_s^2 \\ -y_s + y_s^3 \end{pmatrix} ds \tag{D.31}$$

in the Poisson case.

In the Poisson case, note that the intensity is $\mu_t = y_{s-}^2$, so that one can restrict ourselves to the case where the jumps of the Poisson process ae in between the lines $y = 1$ and $y = 0$. The function $t \to card(N(., [0,1] \times [0,t])) = \mathcal{N}_t$ then defines a standard Poisson process with intensity 1. The Poisson random measure and the previous process generate on $[0, T]$ (for a fixed T) a sequence $\{(T_i, \xi_i), i \in \{1, \ldots, \mathcal{N}_t)\}\}$ where each T_i representes the jump time of $\mathcal{N}$. Moreover the random variables ξ_i are uniform random variables on $[0, 1]$. Consequently we can write our quantum trajectory as follows

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} \begin{pmatrix} -x_{T_i-} + 1 \\ -y_{T_i-} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{0<\zeta_i<y_{T_i-}^2} + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_s y_s^2 \\ -y_s + y_s^3 \end{pmatrix} ds \tag{D.32}$$

If the initial state is $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, it is easy to see that the solution of the ordinary differential equation is $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ for all t and $\mu_t = 0$ for all t. This means that there is no jump, the solution is constant, equal to $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In the same way, in the diffusive case, the stochastic differential equation is of the form

$$d|\psi_t\rangle = f(|\psi_t\rangle)dt + h(|\psi_t\rangle)dW_t$$

with

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = h(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0\,.$$

By uniqueness of the solution, we have $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ for all t.

This is to say that the state $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is a stationnary state. We are going to show that every initial state converges to this state, in both cases.

Theorem 36 *Let* $|\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ *be the solution of the jump-equation starting from* $|\psi_0\rangle \in \mathbb{R}^2$ *with* $x_0 \neq 0$ *then*

$$y_t^2 \xrightarrow[t\to\infty]{a.s} 0\,. \tag{D.33}$$

Let $|\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ *be the solution of the diffusive-equation starting from* $|\psi_0\rangle \in \mathbb{R}^2$ *then :*

$$\mathbf{E}[y_t^2] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\,. \tag{D.34}$$

Corollary 1 *Let* $|\psi_t\rangle$ *be the solution of the jump-Belavkin equation then*

$$|\psi_t\rangle\langle\psi_t| \xrightarrow[t\to\infty]{a.s} |X_0\rangle\langle X_0|\,. \tag{D.35}$$

Let $|\psi_t\rangle$ *be the solution of the diffusive-Belavkin equation then*

$$|\psi_t\rangle\langle\psi_t| \xrightarrow[t\to\infty]{L^2} |X_0\rangle\langle X_0|\,. \tag{D.36}$$

Preuve: Let us first treat the case of the jump-equation. We shall show that if there is a jump the state jumps to the stationnary state $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. If there is no jump, we shall show that the state converges exponentially to the same state.

At the first jumping time T_1 we have

$$\begin{pmatrix} x_{T_1} \\ y_{T_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{T_1-} \\ y_{T_1-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_{T_1-}+1 \\ -y_{T_1-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

After this first jump, we have seen that the state stays at $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Before the first jump, we have

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_s y_s^2 \\ -y_s + y_s^2 \end{pmatrix} ds\,,$$

that is,

$$y_t = y_0 + \int_0^t (-y_s + y_s^2) ds\,.$$

The function $t \to y_t$ is C^∞. Derivating, we get

$$\frac{d}{dt}(y_t^2) = 2y_t \frac{d}{dt}(y_t) = -y_t^2(1-y_t^2)\,.$$

By the Cauchy-Lipschitz Theorem (the coefficients are indeed local Lipschitz) we have $y_t^2 > 0$ if $y_0 \neq 0$. Dividing by y_t^2 we obtain

$$y_t^2 = y_0^2 \times \exp\left(-2(t - \int_0^t y_s^2 ds\right))\,.$$

In particular $t \to y_t^2$ is decreasing and

$$y_t^2 \leq y_0^2 \exp\left(-(1-y_0^2)t\right)\,.$$

As $x_0 \neq 0$ we have $-1 < y_0 < 1$ and we conclude that :

$$y_t^2 \xrightarrow[t\to\infty]{a.s} 0\,.$$

Let us now treat the diffusive case. In order to prove the result we shall use that $x_t^2 + y_t^2 = 1$ almost surely and the Ito rules. In particular we have

$$\begin{aligned} dy_t^2 &= 2y_t dy_t + dy_t dy_t \\ &= 2y_t(-x_t y_t^2 dW_t + (\frac{-y_t}{2})dt) + x_t^2 y_t^4 dt. \end{aligned}$$

As a consequence we have almost surely :

$$y_t^2 = y_0^2 + \int_0^t (-y_s^2 + (1-y_s^2)y_s^4)ds + \int_0^t -2x_s y_s^3 dW_s.$$

Hence we have

$$\mathbf{E}[y_t^2] = y_0^2 + \int_0^t \mathbf{E}[y_s^2(-1 + (1-y_s^2)y_s^2)]ds\,.$$

Studying the variations of the function $x \to (-1 + (1-x)x)$ for $x \in [0,1]$ we have

$$\mathbf{E}[y_t^2] \leq y_0^2 - \frac{3}{4}\int_0^t \mathbf{E}[y_s^2]ds\,.$$

It is then easy to conclude that

$$\mathbf{E}[y_t^2] \underset{t\to\infty}{\to} 0\,.$$

The fact that (y_t) is uniformly bounded implies the convergence in L^p for all $p \geq 1$. $\square$

D.4 Temperature Case

In this section, we keep the same model as the previous section, but we assume that the state η of each piece of the environment is a thermal Gibbs state. In a suitable basis we have

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}$$

with $0 < \eta_i < 1$ and $\eta_1 + \eta_2 = 1$. In terms of the Hamiltonian $H = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ and the inverse temperature β, we have

$$\eta_0 = \frac{e^{-\beta\gamma_0}}{e^{-\beta\gamma_0} + e^{-\beta\gamma_1}}$$

and

$$\eta_1 = \frac{e^{-\beta\gamma_1}}{e^{-\beta\gamma_0} + e^{-\beta\gamma_1}} \,.$$

Let $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ be any observable on $\mathcal{H}$ with eigenprojectors $P_i = (p^i_{kl})_{0\leq k,l\leq 1}$ for $i \in \{0,1\}$. With the notation of the Section 1, if ρ_k is the state on $\mathcal{H}_0$ after k measurement we have

$$\mathcal{L}_i(\rho_k) = p^i_{00}\mathcal{L}_{00}(\rho_k) + p^i_{10}\mathcal{L}_{01}(\rho_k) + p^i_{01}\mathcal{L}_{10}(\rho_k) + p^i_{11}\mathcal{L}_{11}(\rho_k) \;\; i \in \{0,1\} \tag{D.37}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{00}(\rho) &= \eta_1 L_{00}\rho L^*_{00} + \eta_2 L_{01}\rho L^*_{01}\,, \;\; \mathcal{L}_{01}(\rho) = \eta_1 L_{00}\rho L^*_{10} + \eta_2 L_{01}\rho L^*_{11}\,, \\ \mathcal{L}_{10}(\rho) &= \eta_1 L_{10}\rho L^*_{00} + \eta_2 L_{11}\rho L^*_{01}\,, \;\; \mathcal{L}_{11}(\rho) = \eta_1 L_{10}\rho L^*_{10} + \eta_2 L_{11}\rho L^*_{11}\,. \end{aligned}$$

We define $p_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_0(\rho_k)]$ and $q_{k+1} = Tr[\mathcal{L}_1(\rho_k)]$, the unormalised state $\mathcal{L}_0(\rho_k)$ appears with probability p_{k+1} and $\mathcal{L}_1(\rho_k)$ with probability q_{k+1}.

The discrete equation is of the following form, for all $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ we have :

$$\rho_{k+1} = \frac{\mathcal{L}_0(\rho_k)}{p_{k+1}}\mathbf{1}^{k+1}_0(\omega) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_k)}{q_{k+1}}\mathbf{1}^{k+1}_1(\omega)\,. \tag{D.38}$$

The aim of this section is to obtain the Belavkin equation in this temperature situation. Again, we will obtain it by passing to the continuous limit on the model above.

We use again the asymptotics for the unitary operator. As in the case of zero temperature there are two cases.

D.4.1 The Diagonal case

If A is diagonal, that is, of the form $A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, we have the asymptotics for the probabilities

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= Tr[\mathcal{L}_{00}(\rho_k)] && \text{(D.39)} \\ &= \eta_0 \left(1 - \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(\rho_k)]\right) + \eta_1 \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\star}(\rho_k)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) && \text{(D.40)} \\ q_{k+1} &= Tr[\mathcal{L}_{11}(\rho_k)] && \text{(D.41)} \\ &= \eta_1 \left(1 - \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\star}(\rho_k)]\right) + \eta_0 \frac{1}{n} Tr[\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(\rho_k)] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) && \text{(D.42)} \end{aligned}$$

where $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(\rho) = C\rho C^\star$ and $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^*}(\rho) = C^\star \rho C$. We use the variable

$$X_{k+1} = \frac{\mathbf{1}_1^{k+1} - q_{k+1}}{\sqrt{p_{k+1} q_{k+1}}}$$

and we get the following expression for the discrete evolution equation :

$$\rho^{k+1} = \mathcal{L}_0(\rho^k) + \mathcal{L}_1(\rho^k) + \left[-\sqrt{\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}} \mathcal{L}_0(\rho^k) + \sqrt{\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}} \mathcal{L}_1(\rho^k) \right] X_{k+1} \,. \tag{D.43}$$

With the asymptotics, the equation becomes

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \frac{1}{n} \left(L(\rho_k) + \circ(1) \right) + \frac{1}{n} \left(\widetilde{H}(\rho_k) + \circ(1) \right) X_{k+1} \tag{D.44}$$

where

$$L(\rho) = -i[H, \rho] - \frac{1}{2} \left(\beta_0 \{C^* C, \rho\} + \beta_1 \{C C^\star, \rho\} \right) + \beta_0 C \rho C^* + \beta_1 C^\star \rho C \,.$$

The exact expression of the term $\widetilde{H}$ is not necessary, for this term disappears when we consider the continuous time limit.

Again, in order to pass to the limit, we shall use the Kurtz-Protter Theorem [K-P]. Put

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \,, \\ V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \,, \\ \rho_n(t) &= \rho_{[nt]} \,, \\ \varepsilon_n(t) &= \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ(1) \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i+1} \,. \end{aligned}$$

We then get

$$\rho_n(t) \quad = \quad \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t L(\rho_n(s-))dV_n(s) + \int_0^t H_n(\rho_n(s-))dW_n(s)$$

where $H_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{H}(\rho) + \circ(1)\right)$. In particular, we have $H_n(\rho) \to_{n\to\infty} 0$.

By the Kurtz-Protter Theorem [K-P], if we show that $W_n(t)$ converges to a standard Brownian motion, the limit equatio will be an ordinary differential equation, for $H_n(\rho) = \circ(1)$ uniformly on the space of states.

In order to show the convergence of $W_n(t)$ we use the folowing result.

Theorem 37 *Let (M_n) be a sequence of martingales. Suppose that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\sup_{s\leq t} |M_n(s) - M_n(s-)|\right] = 0$$

and

$$[M_n, M_n]_t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t.$$

Then M_n converges in distribution to a standard Brownian motion. The conclusion is the same if we just have :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|\big] = 0.$$

Consider the filtration

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_i, i \leq [nt]).$$

Proposition 19 *Let $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$ be the processes defined above. We have that $(W_n(t))$ is a $\mathcal{F}_t^n$-martingale. The process (W_n) converges to a standard Brownian motion W when n goes to infinity. Furthermore we have*

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] < \infty\,.$$

Finally, we have the convergence in distribution to $(W, V, 0)$, for the processes $(W_n, V_n, \varepsilon_n)$, when n goes to infinity.

Preuve: Thanks to the definition of the random variables X_k, we have $\mathbf{E}[X_{i+1}/\mathcal{F}_i^n] = 0$ which implies $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i \,/\, \mathcal{F}_s^n\right] = 0$ for $t > s$. Thus if $t > s$ we have the martingale property :

$$\mathbf{E}[W_n(t) \,/\, \mathcal{F}_s^n] = W_n(s) + \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} X_i \Big/ \mathcal{F}_s^n\right] = W_n(s).$$

We have

$$[W_n, W_n]_t = W_n(t)^2 - 2\int_0^t W_n(s-)\, dW_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} X_i^2 \,.$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}[X_i^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l<i\}]] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} 1 = \frac{[nt]}{n}.\end{aligned}$$

In particular,

$$\sup_n \mathbf{E}\big[[W_n, W_n]_t\big] \le t < \infty \,.$$

Let us now prove the convergence of (W_n) to (W). According to Theorem (37) we must prove that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|\big] = 0 \,.$$

Actually we shall prove a L_2-convergence :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[|[M_n, M_n]_t - t|^2\big] = 0,$$

which implies the L_1-convergence. In order to show this convergence, we use the following property

$$\mathbf{E}\left[X_i^2\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X_i^2/\sigma\{X_l, l<i\}]\right] = 1$$

and if $i<j$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)/\sigma\{X_l, l<j\}]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)\right]\mathbf{E}\left[(X_j^2-1)\right] \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

This gives

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left([W_n, W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i<j} \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)(X_j^2-1)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right] \,.\end{aligned}$$

In order to conclude, it is sufficient to see that $\mathbf{E}\left[(X_i^2-1)^2\right]$ is uniformly bounded in i. This appears clearly form the expression of X_k and the fact that η_0 and η_1 do not vanish. Note that in the case where the temperature is null, this is no more the case.

As a consequence, we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left([W_n, W_n]_t - \frac{[nt]}{n}\right)^2\right] = 0\,.$$

As $\frac{[nt]}{n} \longrightarrow t$ in L_2 we have the desired convergence. Finally, the convergence in distribution of (W_n) and (V_n) implies the convergence of (ε_n) to 0. □

As a conclusion, we have proved the following.

Theorem 38 *The discrete quantum trajectory $(\rho_n(t))$ converges in distribution to the solution (ρ_t) of the master equation*

$$d\rho_t = L(\rho_t)dt\,.$$

D.4.2 The Non-diagonal case

Let us now study the case where A is not diagonal. As in the case of zero temperature we fix A to be $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Here we have for the asymptotics of the probabilities.

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{1}{2}\Bigg[\eta_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Tr[\rho_k(C^* + C)]\right) \\ &\quad +\eta_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Tr[\rho_k(C + C^\star)]\right)\Bigg] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}(Tr[\rho_k(C^* + C)]) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(D.45)} \\ q_{k+1} &= \frac{1}{2}\Bigg[\eta_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}Tr[\rho_k(C^* + C)]\right) \\ &\quad +\eta_1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}Tr[\rho_k(C + C^\star)]\right)\Bigg] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}(Tr[\rho_k(C^* + C)]) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(D.46)} \end{aligned}$$

Using X_{k+1} in this situation, after computation we obtain the following discrete equation :

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \frac{1}{n}\left(L(\rho_k) + \circ(1))\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(F(\rho_k) + \circ(1)\right)X_{k+1} \qquad \text{(D.47)}$$

where L has the same definition as above. The function F is defined as follows :

$$\begin{aligned} F(\rho) &= -\Big[\eta_0(\rho C^* + C\rho) + \eta_1(\rho C + C^\star\rho)\Big] + \Big[\eta_0 Tr[\rho(C + C^*)] + \eta_1 Tr[\rho(C^\star + C)]\Big]\rho \\ &= -\Big[\eta_0(\rho C^* + C\rho) + \eta_1(\rho C + C^\star\rho)\Big] + Tr[\rho(C^\star + C)]\rho\,. \qquad \text{(D.48)} \end{aligned}$$

As in the case of zero temperature, we consider the process :

$$\rho_{[nt]} = \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \rho_{k+1} - \rho_k \,. \tag{D.49}$$

Using the asymptotics, we have

$$\begin{aligned} \rho_{[nt]} &= \rho_0 + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{n} \left(L(\rho_k) + \circ(1)\right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \frac{1}{\sqrt{n}} (F(\rho_k) + \circ(1)) X_{k+1} \,. \end{aligned} \tag{D.50}$$

Again we define the processes

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k(n) \,, \\ V_n(t) &= \frac{[nt]}{n} \,, \\ \rho_n(t) &= \rho^{[nt]}(n) \,, \\ \varepsilon_n(t) &= \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ(\frac{1}{n}) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \circ(1) \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i+1} \,. \end{aligned}$$

By observing that this four processes are piecewise constant we can write the process $(\rho_n(t))_{t\geq 0}$ like a solution of a stochastic differential equation in the following way for the non diagonal case :

$$\rho_n(t) = \rho_0 + \varepsilon_n(t) + \int_0^t L(\rho_n(s-))dV_n(s) + \int_0^t F(\rho_n(s-))dW_n(s) \,.$$

Once again. We use Kurtz-Protter Theorem [K-P]. The proof is exactly the same as in the diagonal case, except that the term in front of the noise does not vanish in the limit.

Theorem 39 *In the non diagonal case the process $\rho_{[nt]}$ converges in distribution to the process (ρ_t) solution of the stochastic differential equation :*

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t L(\rho_s)ds + \int_0^t F(\rho_s)dW_s. \tag{D.51}$$

Bibliographie

[Att] S. Attal. *The Theory of Quantum Noises.* book to appear. Springer Verlag, 2008.

[A-J] S. Attal and A. Joye. The Langevin equation for a quantum heat bath. *J. Funct. Anal.*, 247(2) :253–288, 2007.

[AP1] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[AP2] S. Attal and Y. Pautrat. From $(n+1)$-level atom chains to n-dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.

[Ba1] A. Barchielli. Applications of quantum stochastic calculus to quantum optics. In *Quantum probability & related topics*, QP-PQ, VI, pages 111–125. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[Ba2] A. Barchielli. Stochastic differential equations and a posteriori states in quantum mechanics. In *Proceedings of the International Quantum Structures Association, Part II (Castiglioncello, 1992)*, volume 32, pages 2221–2233, 1993.

[Ba3] A. Barchielli. Continual measurements in quantum mechanics and quantum stochastic calculus. In *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Math.*, pages 207–292. Springer, Berlin, 2006.

[BGM] L. Bouten, M. Guţă, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[Dav] E.B. Davies. *Quantum theory of open systems.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[Har] S. Haroche. Quantum information in cavity quantum electrodynamics : logical gates, entanglement engineering and 'Schrödinger-cat states'. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 361(1808) :1339–1347, 2003. Practical realizations of quantum information processing (London, 2002).

[Jac] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1979.

[K-P] T.G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[Pe1] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the diffusive case. 2008.

[Pe2] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the poisson case. 2008.

[Pe3] C Pellegrini. Poisson and diffusion approximation of stochastic schrödinger equations with control. 2008.

Annexe E

Article 5 : Markov Chains Approximation of Jump-Diffusion Quantum Trajectories

Markov Chains Approximation of Jump-Diffusion Quantum Trajectories

Clément PELLEGRINI

Institut C.Jordan
Université C.Bernard, Lyon 1
21, av Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex
France
e-mail : pelleg@math.univ-lyon1.fr

Abstract

"Quantum trajectories" are solutions of stochastic differential equations also called Belavkin or Stochastic Schrödinger Equations. They describe random phenomena in quantum measurement theory. Two types of such equations are usually considered, one is driven by a one-dimensional Brownian motion and the other is driven by a counting process. In this article, we present a way to obtain more advanced models which use jump-diffusion stochastic differential equations. Such models come from solutions of martingale problems for infinitesimal generators. These generators are obtained from the limit of generators of classical Markov chains which describe discrete models of quantum trajectories. Furthermore, stochastic models of jump-diffusion equations are physically justified by proving that their solutions can be obtained as the limit of the discrete trajectories.

Introduction

In quantum mechanics, many recent investigations make a heavy use of Quantum Trajectory Theory with wide applications in quantum optic or in quantum information (cf [18], [8]). A quantum trajectory is a solution of a stochastic differential equation which describes the random evolution of quantum systems undergoing continuous measurement. These equations are called Stochastic Schrödinger Equations or Belavkin Equations (see [11]).

The result of a measurement in quantum mechanic is inherently random, as is namely expressed by the axioms of the theory. The setup is as follows. A quantum system is characterized by a Hilbert space $\mathcal{H}$ (with finite or infinite dimension) and an operator ρ, self-adjoint, positive, trace class with $Tr[\rho] = 1$. This operator is called a "state" or a "density matrix". The measurable quantities (energy, momentum, position...) are represented by the self-adjoint operators on $\mathcal{H}$ and are called "observable" of the system. The accessible data are the values of the spectrum of the observable. In finite dimension for example, if $A = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$ denotes the spectral decomposition of an observable A, the observation of an eigenvalue λ_i, in the state ρ, is random and it is obtained with probability :

$$P_\rho[\text{to observe}\,\lambda_i] = Tr[\rho\ P_i]. \tag{E.1}$$

Besides, conditionally to the result, the reference state of the system is modified. If we have observed the eigenvalue λ_i, then the principle called "Wave Packet Reduction" imposes the state ρ to collapse to the new reference state

$$\rho_i^1 = \frac{P_i \rho P_i}{Tr[\rho\, P_i]}. \tag{E.2}$$

Quantum Trajectory Theory is then the study of the modification of the state of a system undergoing a sequence of measurements. In this way, with the fact that $P_i P_j = 0$ if $i \neq j$, a second measurement of the same observable A, in the state ρ_i^1, should give

$$P_{\rho_i^1}[\text{to observe}\,\lambda_i] = 1.$$

The principle $(E.2)$ imposed the new state to be $\rho_i^2 = \rho_i^1$. It means that after one measurement, the information contained in the system is destroyed in the sense that the evolution is stopped.

Actually, in physics applications, a model of indirect measurement is used in order to not destroy the dynamic. The physical setup is the one of interaction between a small system (atom) and a continuous field (environment). By performing a continuous time quantum measurement on the field, after the interaction, we get a partial information of the evolution of the small system without destroying it.

This partial information is governed by stochastic models of Belavkin equations. In the literature, there are essentially two different evolutions.

1. If (ρ_t) designs the state of the system, then one evolution is described by a diffusive equation :
$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + [\rho_t C^\star + C\rho_t - Tr\,[\rho_t(C + C^\star)]\,\rho_t]\,dW_t, \tag{E.3}$$
where W_t describes a one-dimensional Brownian motion.
2. The other is given by a stochastic differential equation driven by a counting process :
$$d\rho_t = L(\rho_t)dt + \left[\frac{\mathcal{J}(\rho_t)}{Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]} - \rho_t\right](d\tilde{N}_t - Tr[\mathcal{J}(\rho_t)]dt), \tag{E.4}$$
where $\tilde{N}_t$ is a counting process with intensity $\int_0^t Tr[\mathcal{J}(\rho_s)]ds$.

Equations $(E.3)$ and $(E.4)$ are called classical Belavkin Equations. The solutions of these equations are called "continuous quantum trajectories". Such models describe essentially the interaction between a two-level atom and a spin chain ([28],[29]). More complicated models (with high degree of liberty) are given by diffusive evolution with jump described by jump-diffusion stochastic differential equations.

Even in the classical cases $(E.3)$ and $(E.4)$, Belavkin equations pose tedious problems in terms of physical and mathematical justifications. First rigorous results are due to Davies [14] which has described the evolution of a two-level atom undergoing a continuous measurement. Heuristic rules can be used to obtain classical Belavkin equations $(E.3)$ and $(E.4)$. A rigorous way to obtain these stochastic models is to use Quantum Filtering Theory ([11], [4]). Such approach needs high analytic technologies as Von Neumann algebra and conditional expectation in operator algebra. The physical justification in this way is far from being obvious and clear. Furthermore technical difficulties are increased by introducing more degrees of liberty and such problems are not really treated.

A more intuitive approach consists in using a discrete model of interaction called "Quantum Repeated interactions". Instead of considering an interaction with a continuous field, the environment is represented as an infinite chain of identical and independent quantum system (with finite degree of liberty). Each part of the environment interacts with the small system during a time interval of length h. After each interaction, a quantum measurement of an observable of the field is performed. As regards the small system, the result of observation is rendered by a random modification of its reference state in the same fashion of $(E.2)$. Then the results of measurements can be described by classical Markov chains called "discrete quantum trajectories". Discrete quantum trajectories depend on the time interaction h. By using Markov Chain Approximation Theory (using notion of infinitesimal generators for Markov processes), stochastic models for Continual Quantum Measurement Theory can be justified as continuous time limit of discrete trajectories. These models are mathematically justified as follows. Infinitesimal generators are obtained as limit $(h \to 0)$ of generators of the Markov chains. These limit generators give then rise to general problems of martingale ([23],[19]). In this article, we show that such problems of martingale are solved by solution of particular jump-diffusion stochastic differential equations, which should model continuous time measurement theory. This approach and these models are next physically justified by proving that the solutions of these SDEs can be obtained naturally as a limit (in distribution) of discrete quantum trajectories.

This article is structured as follows.

Section 1 is devoted to the description of the discrete model of quantum repeated interactions with measurement. A probability space is defined to give account of the random character and the Markov chain property of discrete quantum trajectories. Next we shall focus on the dependence on h for these Markov chains and we introduce asymptotic assumption in order to come into the question of convergence.

In Section 2, by using Markov chain approximation technics, we obtain continuous time stochastic models as limits of discrete quantum trajectories. We compute natural infinitesimal generators of Markov chains ; these generators also depend on the time interaction h.

Therefore we obtain infinitesimal generators as limit ($h \to 0$) of those. It gives then rise to general problems of martingale which are solved by jump-diffusion stochastic differential equations.

Finally in Section 3, we show that discrete quantum trajectories converge in distribution to the solution of stochastic differentials equations described in Section 2. The stochastic model of jump-diffusion equations is then physically justified as the limit of this concrete physical procedure.

E.1 Discrete Quantum Trajectories

E.1.1 Quantum Repeated Measurements

This section is devoted to make precise the mathematical model of indirect measurement and the principle of "Quantum Repeated Interactions". Such model is highly used in physical applications in quantum optics or in quantum information (see Haroche [18]). Let us start by describing the interaction model without measurement.

A small system is in contact with an infinite chain of identical and independent quantum systems. Each copy of the chain interacts with the small system during a defined time h. A single interaction is described as follows.

The small system is represented by the Hilbert space $\mathcal{H}_0$ equipped with the state ρ. A copy of the environment is described by a Hilbert space $\mathcal{H}$ with a reference state β. The compound system describing the interaction is given by the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. The evolution during the interaction is given by a self-adjoint operator H_{tot} on the tensor product. This operator is called the total Hamiltonian. Its general form is

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes H + H_{int}$$

where the operators H_0 and H are the free Hamiltonian of each system. The operator H_{int} represents the Hamiltonian of interaction. This defines the unitary-operator

$$U = e^{ih\,H_{tot}}$$

and the evolution of states of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, in the Schrödinger picture, is given by

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^{\star}.$$

After this first interaction, a second copy of $\mathcal{H}$ interacts with $\mathcal{H}_0$ in the same fashion and so on.

As the chain is supposed to be infinite, the Hilbert space describing the whole sequence of interactions is

$$\mathbf{\Gamma} = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k \tag{E.5}$$

where $\mathcal{H}_k$ denotes the k-th copy of $\mathcal{H}$. The countable tensor product $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$ means the following. Consider that $\mathcal{H}$ is of finite dimension and that $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ is a fixed

orthonormal basis of $\mathcal{H}$. The orthogonal projector on $\mathbb{C}X_0$ is denoted by $|X_0\rangle\langle X_0|$. This is the ground state (or vacuum state) of $\mathcal{H}$. The tensor product is taken with respect to X_0 (for details, see [3]).

Remark : A vector Y in a Hilbert space $\mathcal{H}$ is represented by the application $|Y\rangle$ from $\mathbb{C}$ to $\mathcal{H}$ which acts with the following way $|Y\rangle(\lambda) = |\lambda Y\rangle$. The linear form on $\mathcal{H}$ are represented by the operators $\langle Z|$ which acts on the vector $|Y\rangle$ by $\langle Z||Y\rangle = \langle Z, Y\rangle$, where $\langle\,,\rangle$ denotes the scalar product of $\mathcal{H}$.

The unitary evolution describing the k-th interaction is given by the operator U_k which acts as U on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_k$, whereas it acts as the identity operator on the other copies of $\mathcal{H}$. If ρ is a state on $\mathbf{\Gamma}$, the effect of the k-th interaction is :

$$\rho \mapsto U_k\, \rho\, U_k^\star$$

Hence the result of the k first interactions is described by the operator V_k on $\mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$ defined by the recursive formula :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V_{k+1} & = & U_{k+1} V_k \\ V_0 & = & I \end{array} \right. \tag{E.6}$$

and the evolution of states is then given, in the Schrödinger picture, by :

$$\rho \mapsto V_k\, \rho\, V_k^\star. \tag{E.7}$$

We present now the indirect measurement principle. The idea is to perform a measurement of an observable of the field after each interaction.

A measurement of an observable of $\mathcal{H}_k$ is modelled as follows. Let A be any observable on $\mathcal{H}$, with spectral decomposition $A = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j P_j$. We consider its natural ampliation on $\mathbf{\Gamma}$:

$$A^k := \bigotimes_{j=0}^{k-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{j \geq k+1} I. \tag{E.8}$$

The result of the measurement of A^k is random, the accessible data are its eigenvalues. If ρ denotes the reference state of $\mathbf{\Gamma}$, the observation of λ_j is obtained with probability

$$P[\text{to observe } \lambda_j] = Tr[\,\rho\, P_j^k\,], \quad j \in \{0, \ldots, p\},$$

where P_j^k is the ampliation of P_j in the same way as $(E.8)$. If we have observed the eigenvalue λ_j, the "wave packet reduction" imposes that the state after measurement is

$$\rho_j = \frac{P_j^k\, \rho\, P_j^k}{Tr[\,\rho\, P_j^k\,]}\,.$$

Remark : This corresponds to the new reference state depending on the result of the observation. Another measurement of the observable A^k (with respect to this new state) would give $P[\text{to observe } \lambda_j] = 1$ (because $P_i P_j = 0$ if $i \neq j$). This means that only one

measurement after each interaction gives a significant information. We recover the phenomena expressed in the introduction. This justifies the principle of repeated interactions.

The repeated quantum measurements are the combination of the previous description and the successive interactions $(E.7)$. After each interaction, the measurement procedure involves a random modification of the system. It defines namely a sequence of random states which is called "discrete quantum trajectory".

The initial state on $\mathbf{\Gamma}$ is chosen to be

$$\mu = \rho \otimes \bigotimes_{j\geq 1} \beta_j$$

where ρ is some state on $\mathcal{H}_0$ and each $\beta_i = \beta$ is a fixed state on $\mathcal{H}$. We denote by μ_k the new state after k interactions, that is :

$$\mu_k = V_k \, \mu \, V_k^\star.$$

The probability space describing the experience of repeated measurements is $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$, where $\Omega = \{0, \ldots, p\}$. The integers i correspond to the indexes of the eigenvalues of A. We endow $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$ with the cylinder σ-algebra generated by the sets :

$$\Lambda_{i_1,\ldots,i_k} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^\star} / \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_k = i_k\}.$$

The unitary operator U_j commutes with all P^k, for any k and j with $k < j$. For any set $\{i_1, \ldots, i_k\}$, we can define the following non normalized state

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k) &= (I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots) \; \mu_k \; (I \otimes P_{i_1} \otimes \ldots \otimes P_{i_k} \otimes I \ldots) \\ &= (P^k_{i_k} \ldots P^1_{i_1}) \; \mu_k \; (P^1_{i_1} \ldots P^k_{i_k}). \end{aligned}$$

It is the non-normalized state which corresponds to the successive observation of the eigenvalues $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ during the k first measurements. The probability to observe these eigenvalues is

$$P[\Lambda_{i_1,\ldots,i_k}] = P[\text{to observe } (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})] = Tr[\tilde{\mu}(i_1, \ldots, i_k)].$$

This way, we define a probability measure on the cylinder sets of $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$ which satisfies the Kolmogorv Consistency Criterion. Hence it defines a unique probability measure on $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$. The discrete quantum trajectory on $\mathbf{\Gamma}$ is then given by the following random sequence of states :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho}_k : & \Omega^{\mathbb{N}^\star} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma}) \\ & \omega & \longmapsto & \tilde{\rho}_k(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \frac{\tilde{\mu}(\omega_1,\ldots,\omega_k)}{Tr[\tilde{\mu}(\omega_1,\ldots,\omega_k)]} \end{array}$$

This next proposition follows from the construction and the remarks above.

Proposition 20 *Let $(\tilde{\rho}_k)$ be the above random sequence of states. We have for all $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^\star}$:*

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\omega) = \frac{P^{k+1}_{\omega_{k+1}} \, U_{k+1} \; \tilde{\rho}_k(\omega) \; U^\star_{k+1} \, P^{k+1}_{\omega_{k+1}}}{Tr\left[\, \tilde{\rho}_k(\omega) \, U^\star_{k+1} \, P^{k+1}_{\omega_{k+1}} \, U_{k+1}\right]}.$$

The following theorem is an easy consequence of the previous proposition.

Theorem 40 *The discrete quantum trajectory $(\tilde{\rho}_n)_n$ is a Markov chain, with values on the set of states of $\mathcal{H}_0 \bigotimes_{i\geq 1} \mathcal{H}_i$. It is described as follows :*

$$P\left[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n, \ldots, \tilde{\rho}_0 = \theta_0\right] = P\left[\tilde{\rho}_{n+1} = \mu / \tilde{\rho}_n = \theta_n\right]$$

If $\tilde{\rho}_n = \theta_n$, then the random state $\tilde{\rho}_{n+1}$ takes one of the values :

$$\frac{P_i^{n+1}\,(U_{n+1}\,\theta_n\,U_{n+1}^{\star})\,P_i^{n+1}}{Tr\left[\,(U_{n+1}\,\theta_n\,U_{n+1}^{\star})\,P_i^{n+1}\,\right]} \quad i = 0, \ldots, p$$

with probability $Tr\left[\,(U_{n+1}\,\theta_n\,U_{n+1}^{\star})\,P_i^{n+1}\,\right]$.

In general, one is more interested into the reduced state on the small system $\mathcal{H}_0$ only. This state is given by taking a partial trace on $\mathcal{H}_0$. Let us recall what partial trace is. If $\mathcal{H}$ is any Hilbert space, we denote by $Tr_{\mathcal{H}}[W]$ the trace of a trace-class operator W on $\mathcal{H}$.

Definition-Theorem 5 *Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ be two Hilbert spaces. If α is a state on a tensor product $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, then there exists a unique state η on $\mathcal{H}$ which is characterized by the property*

$$Tr_{\mathcal{H}}[\,\eta\,X\,] = Tr_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}[\,\alpha\,(X \otimes I)\,]$$

for all $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. This unique state η is called the partial trace of α on $\mathcal{H}$ with respect to $\mathcal{K}$.

Let α be a state on $\mathbf{\Gamma}$, we denote by $\mathbf{E}_0(\alpha)$ the partial trace of α on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\bigotimes_{k\geq 1} \mathcal{H}_k$. We define a random sequence of states on $\mathcal{H}_0$ as follows. For all ω in $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$, define the discrete quantum trajectory on $\mathcal{H}_0$

$$\rho_n(\omega) = \mathbf{E}_0[\tilde{\rho}_n(\omega)]. \tag{E.9}$$

An immediate consequence of Theorem 1 is the following result.

Theorem 41 *The quantum trajectory $(\rho_n)_n$ defined by formula $(E.9)$ is a Markov chain with values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. If $\rho_n = \chi_n$, then ρ_{n+1} takes one of the values :*

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{(I \otimes P_i)\,U(\chi_n \otimes \beta)U^\star\,(I \otimes P_i)}{Tr[\,U(\chi_n \otimes \beta)U^\star\,(I \otimes P_i)]}\right] \quad i = 0 \ldots p$$

with probability $Tr\,[U(\chi_n \otimes \beta)U^\star\,(I \otimes P_i)]$.

Remark : Let us stress that

$$\frac{(I \otimes P_i)\,U\,(\chi_n \otimes \beta)\,U^\star\,(I \otimes P_i)}{Tr[\,U\,(\chi_n \otimes \beta)\,U^\star\,(I \otimes P_i)]}$$

is a state on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. In this situation, the notation $\mathbf{E}_0$ denotes the partial trace on $\mathcal{H}_0$ with respect to $\mathcal{H}$. The infinite tensor product $\mathbf{\Gamma}$ is just needed to have a clear description of the repeated interactions and the probability space $\Omega^{\mathbb{N}^\star}$.

It is worth noticing that this Markov chain (ρ_k) depends on the time interaction h. By putting $h = 1/n$, we can define for all $t > 0$

$$\rho_n(t) = \rho_{[nt]}. \tag{E.10}$$

It defines then a sequence of processes $(\rho_n(t))$ and we aim to show next that this sequence of processes converges in distribution $(n \to \infty)$. As announced in the introduction, such convergence is obtained from the convergence of Markov generators of Markov chains. The following section is then devoted to present these generators for quantum trajectories.

E.1.2 Infinitesimal Generators

In all this section we fix a integer n. Let A be an observable and let $\rho_n(t)$ be the process defined from the quantum trajectory describing the successive measurements of A. In this section, we investigate the explicit computation of the Markov generator $\mathcal{A}_n$ of the process $(\rho_n(t))$ (we will make no distinction between the infinitesimal generators of the Markov chains (ρ_k) and the process $(\rho_n(t))$ generated by this Markov chain). For instance, let us introduce some notation.

Let work with $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{K+1}$. The set of operators on $\mathcal{H}_0$ can be identified with $\mathbb{R}^P$ for some P (we have $P = 2^{(K+1)^2}$, we will see later that we do not need to give any particular identification). We set $E = \mathbb{R}^P$ and the set of states becomes then a compact subset of $\mathbb{R}^P$ (a state is an operator positive with trace 1). We denote by $\mathcal{S}$ the set of states and $E = \mathbb{R}^P$. For any state $\rho \in \mathcal{S}$, we define

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^{(n)}(\rho) &= \mathbf{E}_0 \left[\frac{(I \otimes P_i)\, U(n)(\rho \otimes \beta) U^\star(n)\, (I \otimes P_i)}{Tr[\, U(n)(\rho \otimes \beta) U^\star(n)\, (I \otimes P_i)]} \right] \quad i = 0 \ldots p \\ p^i(\rho) &= Tr[U(n)(\rho \otimes \beta) U^\star(n) I \otimes P_i] \end{aligned} \tag{E.11}$$

The operators $\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)$ represent transition states of Markov chains described in Theorem (41) and the numbers $p^i(\rho)$ are the associated probabilities. Markov generators for $(\rho_n(t))$ are then expressed as follows.

Definition 7 *Let (ρ_k) be a discrete quantum trajectory obtained from the measurement of an observable A of the form $A = \sum \lambda_i P_i$. Let $(\rho_n(t)$ be the process obtained from (ρ_k) by the expression $(E.10)$. Let define $P^{(n)}$ the probability measure which satisfies*

$$P^{(n)}[\rho_n(0) = \rho] = 1 \tag{E.12}$$

$$P^{(n)}[\rho_n(s) = \rho_k,\, k/n \leq s < (k+1)/n] = 1 \tag{E.13}$$

$$P^{(n)}[\rho_{k+1} \in \mathbf{\Gamma} / \mathcal{M}_k^{(n)}] = \Pi_n(\rho_k, \mathbf{\Gamma}) \tag{E.14}$$

where $\Pi_n(\rho, .)$ *is the transition function of the Markov chain* (ρ_k) *given by*

$$\Pi_n(\rho, \mathbf{\Gamma}) = \sum_{i=0}^{p} p^i(\rho)\delta_{\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)}(\mathbf{\Gamma}) \tag{E.15}$$

for all Borel subset $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^P)$.

For all state $\rho \in \mathcal{S}$ *and all functions* $f \in C_c^2(E)$ *(i.e* C^2 *with compact support), we define*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n f(\rho) &= n \int (f(\mu) - f(\rho))\Pi_n(\rho, d\mu) \\ &= n \sum_{i=0}^{p} \big(f(\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)) - f(\rho)\big)p^i(\rho). \end{aligned} \tag{E.16}$$

The operator $\mathcal{A}_n$ *is called the "Markov generator" of the Markov chain* (ρ_k) *(or for the process* $(\rho_n(t))$*).*

The complete description of the generator $\mathcal{A}_n$ needs the explicit expression of $\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)$ for all ρ and all $i \in \{0, \ldots, p\}$. In order to establish this, we need to compute the partial trace operation $\mathbf{E}_0$ on the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. A judicious choice of basis for the tensor product allow to make computations easier.

Let $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^{K+1}$ and let $(\Omega_0, \ldots, \Omega_K)$ be any orthonormal basis of $\mathcal{H}_0$. Recall that $(X_0, \ldots, X_N)$ denotes an orthonormal basis of $\mathcal{H}$. For the tensor product we choose the basis

$$\mathcal{B} = (\Omega_0 \otimes X_0, \ldots, \Omega_K \otimes X_0, \Omega_0 \otimes X_1, \ldots, \Omega_K \otimes X_1, \ldots, \Omega_0 \otimes X_N, \ldots, \Omega_K \otimes X_N).$$

In this basis, any $(N+1)(K+1) \times (N+1)(K+1)$ matrix M on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ can be written by blocks as a $(N+1) \times (N+1)$ matrix $M = (M_{ij})_{0 \le i,j \le N}$ where M_{ij} are operators on $\mathcal{H}_0$. Furthermore we have the following result which allows to compute easily the partial trace.

Claim 1 *Let* W *be a state acting on* $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$*. If* $W = (W_{ij})_{0 \le i,j \le N}$*, is the expression of* W *in the basis* $\mathcal{B}$*, where the coefficients* W_{ij} *are operators on* $\mathcal{H}_0$*, then the partial trace with respect to* $\mathcal{H}$ *is given by the formula :*

$$\mathbf{E}_0[W] = \sum_{i=0}^{N} W_{ii}.$$

From this result, we can give the expression of the operators $\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)$. The reference state of $\mathcal{H}$ is chosen to be the orthogonal projector on $\mathbb{C}X_0$, that is, with physical notations

$$\beta = |X_0\rangle\langle X_0|.$$

This state is called the ground state (or vacuum state) in quantum physics. From general result of G.N.S representation in $C^\star$ algebra, it is worth noticing that it is not a restriction.

Indeed such representation allows to identify any quantum system $(\mathcal{H}, \beta)$ with another system of the form $(\mathcal{K}, |X_0\rangle\langle X_0|)$ where X_0 is the first vector of an orthonormal basis of a particular Hilbert space $\mathcal{K}$ (see [24] for details).

The unitary operator $U(n)$ is described by blocks as $U(n) = (U_{ij}(n))_{0\leq i,j\leq N}$ where the coefficients U_{ij} are $(K+1)\times(K+1)$ matrices acting on $\mathcal{H}_0$. For $i \in \{0,\ldots,p\}$, we denote $P_i = (p^i_{kl})_{0\leq k,l\leq N}$ the eigen-projectors of the observable A. Hence the non-normalized states $\mathbf{E}_0[I\otimes P_i\, U(h)(\rho\otimes\beta)U(h)^\star\, I\otimes P_i]$ and the probabilities $p^i(\rho)$ satisfy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0[I\otimes P_i\, U(n)(\rho\otimes\beta)U(n)^\star\, I\otimes P_i] &= \sum_{0\leq k,l\leq N} p^i_{kl}\, U_{k0}(n)\rho U^\star_{l0}(n)\\ p^i(\rho) &= \sum_{0\leq k,l\leq N} p^i_{kl} Tr\left[U_{k0}(n)\rho U^\star_{l0}(n)\right]. \end{aligned} \tag{E.17}$$

By observing that the operator $\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho)$ satisfies

$$\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho) = \frac{\mathbf{E}_0[I\otimes P_i\, U(n)(\rho\otimes\beta)U(n)^\star\, I\otimes P_i]}{p^i(\rho)}, \tag{E.18}$$

for all $i \in \{0,\ldots,p\}$, we have a complete description of the generator $\mathcal{A}_n$. In order to consider the limit of $\mathcal{A}_n$, we present asymptotic assumption for the coefficient $U_{ij}(n)$ in the following section.

E.1.3 Asymptotic Assumption

The choice of asymptotic for $U(n) = (U_{ij}(n))$ are based on the works of Attal-Pautrat in [3]. They have namely shown that the operator process defined for all $t > 0$ by

$$V_{[nt]} = U_{[nt]}(n)\ldots U_1(n),$$

which describes the quantum repeated interactions, weakly converges (in operator theory) to a process $(\tilde{V}_t)$ satisfying a Quantum Langevin equation. Moreover, this convergence is non-trivian, only if the coefficients $U_{ij}(n)$ obey to certain normalization. When translated in our context, it express that there exists operators L_{ij} such that we have for all $(i,j) \in \{0,\ldots,N\}^2$ (recall $N+1$ is the dimension of $\mathcal{H}$)

$$\lim_{n\to\infty} n^{\varepsilon_{ij}}\ (U_{ij}(n) - \delta_{ij}I) = L_{ij} \tag{E.19}$$

where $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j})$. As the expression $(E.17)$ given the expression of $\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho)$ only involves the first column of $U(n)$, we only keep the following asymptotic

$$\begin{aligned} U_{00}(n) &= I - \frac{1}{n}L_{00} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\\ U_{i0}(h) &= \frac{1}{\sqrt{n}}L_{i0} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{for } i > 0 \end{aligned}$$

Another fact which will be important in the computation of limit generators is the following claim.

Claim 2 *The unitary condition implies that there exists a self-adjoint operator H such that :*

$$L_{00} = -\left(iH + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_{i0}L_{i0}^{\star}\right)$$

Furthermore we have for all $\rho \in \mathcal{S}$:

$$Tr\left[L_{00}\rho + \rho L_{00}^{\star} + \sum_{1\leq k\leq N} L_{k0}\rho L_{k0}^{\star}\right] = 0$$

because $Tr[U(n)\rho\, U^{\star}(n)] = 1$ for all n.

We can now apply these considerations to give the asymptotic expression of non-normalized states and probabilities given by the expression $(E.17)$. For the non-normalized states, we have

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_0[I\otimes P_i\, U(n)(\rho\otimes\beta)U(n)^{\star}\, I\otimes P_i] \\ = \; & p_{00}^{i}\,\rho + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq k\leq N}\left(p_{k0}^{i}L_{k0}\rho + p_{0k}^{i}\rho L_{k0}^{\star}\right) \\ & + \frac{1}{n}\left[p_{00}^{i}\left(L_{00}\rho + \rho L_{00}^{\star}\right) + \sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^{i}L_{k0}\rho L_{l0}^{\star}\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{E.20}$$

with probabilities

$$\begin{aligned} p^{i}(\rho) &= Tr\left[I\otimes P_i\, U(h)(\rho\otimes\beta)U(h)^{\star}\, I\otimes P_i\right] \\ &= Tr\Big[\mathbf{E}_0[I\otimes P_i\, U(h)(\rho\otimes\beta)U(h)^{\star}\, I\otimes P_i]\Big] \\ &= p_{00}^{i} + \frac{1}{\sqrt{n}}Tr\left[\sum_{1\leq k\leq N}\left(p_{k0}^{i}L_{k0}\rho + p_{0k}^{i}\rho L_{k0}^{\star}\right)\right] \\ & \quad + \frac{1}{n}Tr\left[\left(p_{00}^{i}\left(L_{00}\rho + \rho L_{00}^{\star}\right) + \sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^{i}L_{k0}\rho L_{l0}^{\star}\right)\right] + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{E.21}$$

The asymptotic expression of $\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)$ given by the expression $(E.18)$ follows then from $(E.20)$ and $(E.21)$. Following the fact that p_{00}^{i} is equal to zero or not, we consider three cases.

1. If $p_{00}^{i} = 0$, then we have

$$\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho) = \frac{\sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^{i}L_{k0}\rho L_{l0}^{\star} + \circ(1)}{Tr[\sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^{i}L_{k0}\rho L_{l0}^{\star} + \circ(1)]}\mathbf{1}_{Tr[\sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^{i}L_{k0}\rho L_{l0}^{\star}]\neq 0} + \circ(1) \tag{E.22}$$

2. If $p^i_{00} = 1$, then we have

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho) &= \rho + \frac{1}{n}\left[(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right] \\ &\quad -\frac{1}{n} Tr\left[(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right]\rho + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{E.23}$$

3. If $p^i_{00} \notin \{0,1\}$, then we have

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho) \\ =\ & \rho + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{p^i_{00}}\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{p^i_{00}} Tr\left(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\right)\times\rho\right] \\ &+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{p^i_{00}}\left(p^i_{00}\left(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}\right) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl}L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right)\right. \\ &\qquad + \frac{1}{(p^i_{00})^2} Tr\left(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\right)^2\times\rho \\ &\qquad -\frac{1}{p^i_{00}} Tr\left(p^i_{00}\left(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}\right) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl}L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right)\times\rho \\ &\qquad \left. -\frac{1}{(p^i_{00})^2}\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\times Tr\left(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\right)\right] \\ &+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned} \tag{E.24}$$

It is worth noticing that all the $\circ$ are uniform in ρ because we work in the set of states $\mathcal{S}$ which is compact.

With this description, we can now compute the generator limit of $\mathcal{A}_n$ for any quantum trajectory. Next we can establish continuous time model for quantum measurement. This is the main subject of the following section.

E.2 Jump-Diffusion Models of Quantum Measurement

In this section, we show that the limit ($n \to \infty$) of generators $\mathcal{A}_n$ of discrete quantum trajectories gives rise to explicit infinitesimal generators. From martingale problem tech-

nics, we interpret these generators as generators of Markov processes. Besides we show that these processes are solution of jump-diffusion stochastic differential equations which are a generalization of the classical Belavkin equations $(E.3)$ and $(E.4)$ presented in Introduction.

Let us make precise the notion of martingale problem in our framework (see [23],[19],[13] and [15] for complete references). We still consider the identification of the set of states as a compact subset of $E = \mathbb{R}^P$ for some P. Let Π be a transition kernel on E, let $a(.) = (a_{ij}(.))$ be a measurable mapping on E with values in the set of positive semi-definite symmetric $P \times P$ matrices and let $b(.) = (b_i(.))$ be a measurable function from E to E. Let f be any $C_c^2(E)$ and let $\rho \in E$. In this article, we consider infinitesimal generators $\mathcal{A}$ of the form

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(\rho) &= \sum_{i=1}^{P} b_i(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{P} a_{ij}(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \\ &\quad + \int_E \left[f(\rho+\mu) - f(\rho) - \sum_{i=1}^{P} \mu_i \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i} \right] \Pi(\rho, d\mu) \end{aligned} \tag{E.25}$$

The notion of problem of martingale associated with such generators is expressed as follows.

Definition 8 *Let $\rho_0 \in E$. We say that a measurable stochastic process (ρ_t) on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is a solution of the martingale problem for $(\mathcal{A}, \rho_0)$, if for all $f \in C_c^2(E)$,*

$$\mathcal{M}_t^f = f(\rho_t) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(\rho_s)ds, \;\; t \geq 0 \tag{E.26}$$

is a martingale with respect to $\mathcal{F}_t^\rho = \sigma(\rho_s, \; s \leq t)$.

It is worth noticing that we must also define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ to make explicit a solution of a problem of martingale.

In the following section, we show that Markov generators of discrete quantum trajectory converges to infinitesimal generators of the form $(E.25)$.

E.2.1 Limit Infinitesimal Generators

Before to express the proposition which gives the limit infinitesimal generators of $\mathcal{A}_n$ defined in Section 1, we define some functions which appears in the limit. For all i and all

state $\rho \in \mathcal{S}$, set

$$\begin{aligned}
g_i(\rho) &= \left(\frac{\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}}{Tr[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}]} - \rho \right) \\
v_i(\rho) &= Tr\left[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0} \right] \\
h_i(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{p^i_{00}}} \left[\sum_{1\le k\le N} \left(p^i_{k0} L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right) - Tr\Big[\sum_{1\le k\le N} \left(p^i_{k0} L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right) \Big]\rho \right] \\
L(\rho) &= L_{00}\rho + \rho L^\star_{00} + \sum_{1\le k\le N} L_{k0}\rho L^\star_{k0}. \qquad \text{(E.27)}
\end{aligned}$$

This next proposition concerning limit generators follows from results of asymptotic described in Section 1.

Proposition 21 *Let A be an observable with spectral decomposition $A = \sum_{i=0}^p \lambda_i P_i$ where $P_i = (p^i_{kl})_{0\le k,l\le N}$ are its eigen-projectors. Up to permutation of eigen-projectors, we can suppose that $p^0_{00} \neq 0$. We define the sets*

$$\begin{aligned}
I &= \{i \in \{1,\dots,p\}/p^i_{00} = 0\} \text{ and} \\
J &= \{1,\dots,p\} \setminus I.
\end{aligned}$$

Let $(\rho^J_n(t))$ be the corresponding quantum trajectory obtained from the measurement of A and let $\mathcal{A}^J_n$ be its infinitesimal generator (cf Definition 1). Let $\mathcal{A}^J$ be the limit generator (if it exists) of $\mathcal{A}^J_n$. It is described as follows.

1. *If $I = \{1,\dots,p\}$, then $p^0_{00} = 1$ and $J = \emptyset$, we have for all $f \in C^2_c(E)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\rho\in\mathcal{S}} \left|\mathcal{A}^J_n f(\rho) - \mathcal{A}^J f(\rho)\right| \qquad \text{(E.28)}$$

where $\mathcal{A}^J$ satisfies

$$\mathcal{A}^J f(\rho) = D_\rho f\Big(L(\rho)\Big) + \int_E \Big[f\Big(\rho + \mu\Big) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)\Big] \Pi(\rho, d\mu), \qquad \text{(E.29)}$$

the transition kernel Π being defined as

$$\Pi(\rho, d\mu) = \sum_{i=1}^p v_i(\rho)\delta_{g_i(\rho)}(d\mu).$$

2. *If $I \neq \{1,\dots,p\}$, then $p^0_{00} \neq 1$ and $J \neq \emptyset$, we have for all $f \in C^2_c(E)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\rho\in\mathcal{S}} \left|\mathcal{A}^J_n f(\rho) - \mathcal{A}^J f(\rho)\right| \qquad \text{(E.30)}$$

where $\mathcal{A}^J$ *satisfies*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^J f(\rho) &= D_\rho f(L(\rho)) + \frac{1}{2}\sum_{i\in J\bigcup\{0\}} D^2_\rho f(h_i(\rho), h_i(\rho)) \\ &\quad + \int_E [f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)]\,\Pi(\rho, d\mu), \end{aligned} \tag{E.31}$$

the transition kernel Π *being defined as*

$$\Pi(\rho, d\mu) = \sum_{i\in I} v_i(\rho)\delta_{g_i(\rho)}(d\mu).$$

Proof: Recall that $\mathcal{S}$ is the set of states and it is a compact subset of E. For any $i \in \{0, \dots, p\}$ and for any $\rho \in \mathcal{S}$, let compute

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}^J_n f(\rho)$$

For this aim, we use asymptotic results of Section 1. As was described, there are three cases.

1. Suppose $p^i_{00} = 0$, we have,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\left(f(\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho)) - f(\rho)\right) p^i(\rho) \\ &= \left[f\left(\frac{\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}}{Tr[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}]}\right) - f(\rho)\right] Tr\left[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right] \end{aligned} \tag{E.32}$$

   Moreover, since we have $f \in C^2_c$ and since $\mathcal{S}$ is compact, the function defined on $\mathcal{S}$ by

$$\left[f\left(\frac{\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}}{Tr[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}]}\right) - f(\rho)\right] Tr\left[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right]$$

   is uniformly continuous. As a consequence, the asymptotic concerning this case (and the fact that all the $\circ$ are uniform on $\mathcal{S}$ cf Section 1) implies the uniform convergence.

2. Suppose $p^i_{00} = 1$, by using the Taylor formula of order one, we have

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\left(f(\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho)) - f(\rho)\right) p^i(\rho) \\ &= D_\rho f\Bigg(\Big[(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\Big] \\ &\qquad - Tr\Big[(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\Big]\rho\Bigg) \end{aligned} \tag{E.33}$$

   To obtain the uniform result, we use asymptotic of Section 1 and the uniform continuity of Df on $\mathcal{S}$.

3. Suppose $P^i_{00} \notin \{0,1\}$. By applying the Taylor formula of order two, we get the convergence

$$\begin{aligned}
&\sum_{i/p^i_{00}\notin\{0,1\}} \lim_{n\to\infty} n\left(f(\mathcal{L}^{(n)}_i(\rho)) - f(\rho)\right) p^i(\rho) \\
= &\sum_{i/p^i_{00}\notin\{0,1\}} \Bigg[D_\rho f\Bigg(\Big(p^i_{00}\left(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}\right) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\Big) \\
&\qquad -Tr\Big[p^i_{00}\left(L_{00}\rho + \rho L^\star_{00}\right) + \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\Big]\rho\Bigg) \\
&+\frac{1}{2p^i_{00}} D^2_\rho f\Bigg(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right) - Tr\Big[\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\Big]\rho \\
&\qquad , \sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right) - Tr\Big[\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\Big]\rho\Bigg)\Bigg].
\end{aligned} \tag{E.34}$$

Let explain more precisely the last equality. When we use the Taylor formula for each i such that $p^i_{00} \notin \{0,1\}$, the term

$$G_i(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n}} D_\rho f\left(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right) - Tr\left(\sum_{1\le k\le N}\left(p^i_{k0}L_{k0}\rho + p^i_{0k}\rho L^\star_{k0}\right)\right)\rho\right)$$

appears, but we have

$$\sum_{i/p^i_{00}\notin\{0,1\}} G_i(\rho) = 0$$

since $\sum_{i/p^i_{00}\notin\{0,1\}} p^i_{k0} = \sum_{i/p^i_{00}\notin\{0,1\}} p^i_{0k} = \sum_{i=0}^p p_{0k} = \sum_{i=0}^p p_{k0} = 0$ for any $k > 0$ (indeed we have $\sum_{i=0}^p P_i = I$). Furthermore this convergence is uniform for the same arguments as previously.

These three convergence allow us to obtain the two different cases of the proposition. The first case of Proposition 2 follows from the first two convergences described above, the second case follows from the first and the third convergences above. Before to describe this in details, we have to notice that

$$\sum_{i=0}^p \sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0} = \sum_{1\le k\le N} L_{k0}\rho L^\star_{k0}$$

since we work with eigen-projectors ($\sum_{i=0}^p P_i = Id$). This fact will be used several times. Moreover, we have

$$Tr[L(\rho)] = Tr\left[L_{00}\rho + \rho L^\star_{00} + \sum_{1\le k\le N} L_{k0}\rho L^\star_{k0}\right] = 0$$

because of Claim 2 in Section 1 concerning the fact that U is a unitary operator.

Using these facts, in case $p^i_{00} = 0$, the limit can be written as

$$\int_E \big[f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)\big] v_i(\rho)\delta_{g_i(\rho)}(d\mu) + D_\rho f(g_i(\rho))v_i(\rho).$$

Besides, we have

$$D_\rho f(g_i(,\rho))v_i(\rho) = D_\rho f\left(\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0} - Tr\left[\sum_{1\le k,l\le N} p^i_{kl} L_{k0}\rho L^\star_{l0}\right]\rho\right).$$

Hence it implies the first case of Proposition 2. For $I = \{1,\dots,p\}$, we get indeed

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^J_f(\rho) &= D_\rho f(L(\rho) - Tr[L(\rho)]\rho) + \int_E [f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)]\Pi(\rho, d\mu)\\ &= D_\rho f(L(\rho)) + \int_E [f(\rho+\mu) - f(\rho) - D_\rho f(\mu)]\Pi(\rho, d\mu).\end{aligned}$$

A similar reasonment gives the expression of the infinitesimal generator in the second case where $I \neq \{1,\dots,p\}$ and the proposition is proved. □

It is worth noticing that generators $\mathcal{A}^J$ are generators of type $(E.25)$, it suffices to expand the differential terms $D_\rho f$ and $D^2_\rho f$ in terms of partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial \rho_j}$ and $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho_i \partial \rho_j}$.

In the next section, we present continuous time stochastic models which follows from problems of martingale for the limit infinitesimal generators $\mathcal{A}^J$.

E.2.2 Solutions of Problem of Martingale

In all this section, we consider an observable A with spectral decomposition

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i P_i + \sum_{j\in J\bigcup 0} \lambda_j P_j, \tag{E.35}$$

where I and J are the subsets of $\{1,\dots,p\}$ involved in Proposition 2. Let $\mathcal{A}^J$ be the associated limit generator and let ρ_0 be a state. In order to solve the problem of martingale for $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$, by Definition 8, we have to define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and a stochastic process (ρ^J_t) such that the process

$$\mathcal{M}^f_t = f(\rho^J_t) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}^J f(\rho^J_s)ds \tag{E.36}$$

is a martingale for the natural filtration of (ρ^J_t).

A classical way to solve the problem of martingale is to define the solution through a stochastic differential equation ([13],[16]).

Let define a suitable probability space which satisfies the martingale problem. Consider $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a probability space which supports a $(p+1)$-dimensional Brownian motion $W = (W_0, \ldots, W_p)$ and p independent Poisson point processes $(N_i)_{1\leq i\leq p}$ on $\mathbb{R}^2$ and independent of the Brownian motion.

As there are two types of limit generators in Proposition 21, we define two types of stochastic differential equations in the following way. Let ρ_0 be an initial deterministic state.

1. In case $J = \emptyset$, we define the following stochastic differential equation on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int L(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right]. \quad \text{(E.37)}$$

2. In case $J \neq \emptyset$, we define

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int L(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right]. \end{aligned} \quad \text{(E.38)}$$

In this way of writing, these stochastic differential equations have a meaning only if the process-solution takes values in the set of states (in general the term $v_i(\rho)$ is not real for all operator ρ). We must modify the expression in order to consider such equation in a general way for all process which takes values in operators on $\mathcal{H}_0$. For all i, we define when it has a meaning :

$$\tilde{g}_i(\rho) = \frac{\sum_{1\leq k,l\leq N} p_{kl}^i L_{k0}\rho L_{l0}^\star}{Re(v_i(\rho))}.$$

Hence we consider the modified stochastic differential equations

$$\rho_t^J = \rho_0 + \int L(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^J))} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right] \quad \text{(E.39)}$$

and

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int L(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^J))} \left[N_i(dx, ds) - dxds\right], \end{aligned} \quad \text{(E.40)}$$

Let ρ be a state. The fact that $Re(v_i(\rho)) = v_i(\rho)$ and $\tilde{g}_i(\rho) = g_i(\rho)$ implies that a solution (ρ_t^J) of the equation $(E.39)$ (resp $(E.40)$) is a solution of the equation $(E.37)$ (resp $(E.38)$) when the process (ρ_t^J) takes values in the set of states.

We proceed in the following way to solve the problem of martingale $(E.36)$. Firstly we show that the modified equations $(E.39)$ and $(E.40)$ admit a unique solution (we will see below that it needs another modification), secondly we show that solutions of $(E.39)$ and $(E.40)$ can be obtained as limit (in distribution) of discrete quantum trajectories (cf Section 3). Finally we show that the property of being a process valued in the set of states follows from convergence (cf Section 3) and we conclude that solutions of $(E.39)$ and $(E.40)$ takes values in the set of states. Moreover, we show that they are solutions of problem of martingale $(E.36)$.

The fact that if solutions of $(E.39)$ and $(E.40)$ takes values in the set of states, they are solutions of martingale problem $(E.36)$ is expressed in the following proposition.

Proposition 22 *Let ρ_0 be any initial state.*

If the modified stochastic differential equations $(E.39)$ admits a solution (ρ_t^J) which takes values in the set of states, then it is a solution of the problem of martingale $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ in the case $I = \{1, \ldots, p\}$.

If the modified stochastic differential equations $(E.40)$ admits a solution (ρ_t^J) which takes values in the set of states, then it is a solution of the problem of martingale $(\mathcal{A}^J, \rho_0)$ in the case $J \neq \emptyset$.

As a consequence, if $\tilde{\mathcal{A}}^J$ designs the infinitesimal generator of a solution of $(E.40)$ or $(E.39)$, then we have $\tilde{\mathcal{A}}^J f(\rho) = \mathcal{A}^J f(\rho)$ for all state ρ and all functions $f \in C_c^2$.

Proof: Recall we assume that processes take values in the set of states. For any state ρ, we have $Re(v_i(\rho)) = v_i(\rho)$ and $\tilde{g}_i(\rho) = g_i(\rho)$ and the part concerning the generators follows. Concerning the martingale problem, it is a consequence of the Itô formula. Let $\rho_t^J = (\rho_1^J(t), \ldots, \rho_P^J(t))$ denote the coordinates of a solution of $(E.37)$ or $(E.38)$ (with identification between the set of operators on $\mathcal{H}_0$ and $\mathbb{R}^P$), we have for all $f \in C_c^2$

$$\begin{aligned} f(\rho_t^J) - f(\rho_0) &= \sum_{i=1}^{P} \int_0^t \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} d\rho_i^J(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{P} \int_0^t \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J \partial \rho_j^J} d[\rho_i^J(s), \rho_j^J(s)]^c \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \left[f(\rho_s^J) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^{P} \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} \Delta \rho_i^J(s) \right] \end{aligned} \tag{E.41}$$

where $[\rho_i^J(.), \rho_j^J(.)]^c$ denotes the continuous part of $[\rho_i^J(.), \rho_j^J(.)]$.

Let us deal with the case where $J \neq \emptyset$. If $(e_i)_{1 \leq i \leq P}$ designs the canonical basis of $\mathbb{R}^P$, then we have $\rho_i^J(t) = \langle \rho_t^J, e_i \rangle$ for all $t \neq 0$. Hence we have $d\rho_i^J(t) = \langle d\rho_t^J, e_i \rangle$. As a

consequence we have for all $i \in \{1, \ldots, P\}$

$$\begin{aligned}\rho_i^J(t) &= \rho_0 + \int \langle L(\rho_{s-}^J), e_i\rangle ds + \sum_{k\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t \left\langle h_k(\rho_{s-}^J), e_i\right\rangle dW_k(s) \\ &\quad + \sum_{k\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle g_k(\rho_{s-}^J), e_i\rangle \mathbf{1}_{0<x<v_k(\rho_{s-}^J)} \left[N_k(dx, ds) - dxds\right]. \end{aligned} \tag{E.42}$$

It implies that

$$[\rho_i^J(t), \rho_j^J(t)]^c = \sum_{k\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t \left\langle h_k(\rho_{s-}^J), e_i\right\rangle \left\langle h_k(\rho_{s-}^J), e_i\right\rangle ds$$

since $[W_i(t), W_j(t)] = \delta_{ij}t$. Furthermore, if we set by $g_k^i(\rho) = \langle g_k(\rho), e_i\rangle$, then we get that the process

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le s\le t} \left[f(\rho_s^J) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i} \Delta\rho_i^J(s)\right] \\ &- \sum_{k\in J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[f(\rho_{s-}^J + g_k(\rho_{s-}^J)) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i} g_k^i(\rho_{s-}^J)\right] \mathbf{1}_{0<x\le v_k(\rho_{s-}^J)} N_k(dx, ds)\end{aligned}$$

is a martingale. Hence we have

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[f(\rho_{s-}^J + g_k(\rho_{s-}^J)) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} g_k^i(\rho_s^J-)\right] \mathbf{1}_{0<x\le v_k(\rho_{s-}^J)} N_k(dx, ds) \\ &- \sum_{k\in J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[f(\rho_{s-}^J + g_k(\rho_{s-}^J)) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} g_k^i(\rho_s^J-)\right] \mathbf{1}_{0<x\le v_k(\rho_{s-}^J)} dxds\end{aligned} \tag{E.43}$$

is a martingale because each N_k is a Poisson point process with intensity measure $dx \otimes ds$. Furthermore we have

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[f(\rho_{s-}^J + g_k(\rho_{s-}^J)) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} g_k^i(\rho_s^J-)\right] \mathbf{1}_{0<x\le v_k(\rho_{s-}^J)} dxds \\ &= \sum_{k\in J} \int_0^t \left[f(\rho_{s-}^J + g_k(\rho_{s-}^J)) - f(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^P \frac{\partial f(\rho_{s-}^J)}{\partial \rho_i^J} g_k^i(\rho_s^J-)\right] v_k(\rho_{s-}^J) ds \\ &= \int_0^t \left[f(\rho_{s-}^J + \mu) - f(\rho_{s-}^J) - D_{\rho_{s-}^J} f(\mu)\right] \Pi(\rho_{s-}^J, d\mu).\end{aligned} \tag{E.44}$$

As the Lebesgue measure of the set of times where $\rho_{s-}^J \neq \rho_s^J$ is equal to zero, we get that

$$f(\rho_t^J) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}^J f(\rho_{s-}^J) ds = f(\rho_t^J) - f(\rho_0) - \int_0^t \mathcal{A}^J f(\rho_s^J) ds$$

and it defines a martingale with respect to the natural filtration of (ρ_t) and the proposition is proved. $\square$

As announced, the first step consists in proving that equations $(E.39)$ and $(E.40)$ admit a unique solution. Concerning the equation $(E.39)$, we consider the following way of writing

$$\begin{aligned}\rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^p \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J) Re(v_i(\rho_{s-}^J))ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^J))} N_i(dx, ds), \end{aligned} \tag{E.45}$$

and in the same way for equation $(E.40)$ we consider

$$\begin{aligned}\rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}^J) - \sum_{i\in I} \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J) Re(v_i(\rho_{s-}^J))ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^J) dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^J))} N_i(dx, ds) \end{aligned} \tag{E.46}$$

Sufficient conditions (see [22]), in order to prove that equations $(E.45)$ and $(E.46)$ admit a unique solution can be expressed as follows. On the one hand the functions $L(.)$, $h_i(.)$ and $\tilde{g}_i(.)Re(v_i(.))$ must be Lipschitz for all i. On the other hand functions $Re(v_i(.))$ must satisfy that there exists a constant K such that we have, for all i and all operator ρ on $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{R}^P$

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R}^P} |Re(v_i(\rho))| \leq K \tag{E.47}$$

Actually such conditions (Lipschitz and $(E.47)$) are not satisfied by the functions $L(.)$, $h_i(.)$, $Re(v_i(.))$ and $\tilde{g}_i(.)Re(v_i(.))$. However these functions are C^∞, hence these conditions are in fact locally satisfied. Therefore a truncature method cam be used to make the functions $L(.)$, $h_i(.)$ and $\tilde{g}_i(.)Re(v_i(.))$ Lipschitz and functions $Re(v_i(.))$ bounded. It is described as follows.

Fix $k > 0$. A truncature method means that we compose the functions $L(.)$, $h_i(.)$, $Re(v_i(.)$ and $\tilde{g}_i(.)Re(v_i(.))$ with a truncature function ϕ^k of the form

$$\phi^k(x) = (\psi^k(x_i))_{i=1,\dots,P} \quad \text{where} \tag{E.48}$$

$$\psi^k(x_i) = -k\mathbf{1}_{x_i\leq -k} + x_i\mathbf{1}_{|x_i|<k} + k\mathbf{1}_{x_i\neq k} \tag{E.49}$$

$$\tag{E.50}$$

for all $x = (x_i) \in \mathbb{R}^P$. Hence, if F is any function defined on $\mathbb{R}^P$, we define the function F^k on $\mathbb{R}^P$ by

$$F^k(x) = F\left(\phi^k(x)\right)$$

for all $x \in \mathbb{R}^P$. By extension we will note $F^k(\rho)$ when we deal with operators on $\mathcal{H}_0$.

As a consequence, functions $L^k(.)$, $h_i^k(.)$ and $\tilde{g}_i^k(.)Re(v_i^k(.)$ become Lipschitz. Furthermore, as ϕ^k is a bounded function, we have

$$\sup_i \sup_{\rho \in \mathbb{R}^P} |Re(v_i^k(\rho))| \leq K.$$

This theorem follows from these conditions.

Theorem 42 *Let $k \in \mathbb{R}^+$ and let ρ_0 be any operator on $\mathcal{H}_0$. The following stochastic differential equations, in case $J = \emptyset$,*

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t L^k(\rho_{s-}^J) - \sum_{i=1}^p \tilde{g}_i^k(\rho_{s-}^J) Re(v_i^k(\rho_{s-}^J)) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i^k(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i^k(\rho_{s-}^J))} N_i(dx, ds), \end{aligned} \tag{E.51}$$

and in case $J \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t L^k(\rho_{s-}^J) - \sum_{i \in I} \tilde{g}_i^k(\rho_{s-}^J) Re(v_i^k(\rho_{s-}^J)) ds + \sum_{i \in J \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i^k(\rho_{s-}^J) dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_i^k(\rho_{s-}^J) \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i^k(\rho_{s-}^J))} N_i(dx, ds) \end{aligned} \tag{E.52}$$

admit a unique solution.

Let $\overline{\mathcal{A}}_k^J$ be the infinitesimal generator of the solution of an equation of the form $(E.51)$ or $(E.52)$. For any $f \in C_c^2$ and any state ρ, we have for all $k > 1$

$$\overline{\mathcal{A}}_k^J f(\rho) = \mathcal{A}^J f(\rho).$$

where $\mathcal{A}^J$ are the infinitesimal generators defined in Proposition 2. Furthermore in all cases, the processes defined by

$$\overline{N}_t^i = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i^k(\rho_{s-}^J))} N_i(dx, ds) \tag{E.53}$$

are counting processes with stochastic intensity

$$t \to \int_0^t \left[Re(v_i(\rho_{s-}^J)) \right]^+ ds,$$

where $(x)^+ = max(0, x)$.

Proof: The part of this theorem concerning generators is the equivalent of Proposition 22. This follows from Proposition 22 and from the fact that, on the set of states $\mathcal{S}$, we have $\phi^k(\rho) = \rho$ for all $k > 1$. Indeed if $\rho = (\rho_i)_{i=1,\ldots,P}$ is a state, we have $|\rho_i| \leq 1$ for all i.

The last part of this theorem follows from properties of Random Poisson Measure Theory and is treated in details in [29] for classical Belavkin equations $(E.4)$. The proof of Theorem 3 follows from Lipschitz character and works of Jacod and Protter in [22].

Let us investigate the proof in the case where $J \neq \emptyset$ (the case $J = \emptyset$ is easy to adapt to this case with a similar proof).

Let us prove that equation $(E.52)$ admits a unique solution (we suppress the index J in the solution to lighten the way of writing ; we suppress also the index k concerning the truncature). As we have $\sup_i \sup_{\rho \in \mathbb{R}^P} |Re(v_i(\rho))| \leq K$, we can consider Poisson point process on $\mathbb{R} \times [0, K]$; the part concerning the counting process can be then written as

$$\int_0^t \int_{[0,K]} \tilde{g}_i(\rho_{s-}) \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}))} N(dx, ds)$$

Hence for all $i \in I$ the process

$$\mathcal{N}_i(t) = card\{N_i(., [0, t] \times [0, K])\} \tag{E.54}$$

defines a classical Poisson process of intensity K. As a consequence, for all t, it defines a random sequence $\{(\tau_k^i, \xi_k^i), k \in \{1, \ldots \mathcal{N}_i(t)\}\}$ where τ_k^i designs the jump time of $\mathcal{N}_i(.)$ and the ξ_k^i's are independent uniform random variables on $[0, K]$. Consequently, the solution of the stochastic differential equation is given by

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}) ds - \sum_{i \in I} \int_0^t \tilde{g}_i(\rho_{s-}) Re(v_i(\rho_{s-}) ds \\ &+ \sum_{i \in j \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}) dW_i(s) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_i(t)} \tilde{g}_i(\rho_{\tau_k^i -}) \mathbf{1}_{0<\xi_k^i \leq Re\left(v_i(\rho_{\tau_k^i -}\right)} \end{aligned} \tag{E.55}$$

The solution $(E.55)$ is described as follow. Thanks to the Lipschitz property (following from the truncature), there exists a unique solution (ρ_t^1) of the equation

$$\begin{aligned} \rho_t^1 &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}^1) ds - \sum_{i \in I} \int_0^t \tilde{g}_i(\rho_{s-}^1) Re(v_i(\rho_{s-}^1) ds \\ &+ \sum_{i \in j \bigcup \{0\}} \int_0^t h_i(\rho_{s-}^1) dW_i(s) \end{aligned} \tag{E.56}$$

For all $i \in I$, this solution (ρ_t^1) defines the function $t \to Re(v_i(\rho_{t-}^1))$. We define the random stopping time

$$T_1 = \inf \left\{ t / \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^1))} N_i(dx, ds) > 1 \right\}.$$

By definition of Poisson point processes and by independence, we have for all $i \neq j$:

$$P\left[\exists\, t \Big/ \int_0^t \int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^1))} N_i(dx, ds) = \int_0^t \int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho_{s-}^1))} N_j(dx, ds) \right] = 0$$

As a consequence at T_1, there exists a unique index i_{T_1} such that

$$\int_0^{T_1}\int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re\left(v_{i_{T_1}}(\rho^1_{s-})\right)} N_{i_{T_1}}(dx,ds) = 1,$$

and all the other terms concerning the other Poisson point processes (for different indexes of i_{T_1}) are equal to zero. Moreover, we have almost surely

$$\int_0^{T_1}\int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re\left(v_{i_{T_1}}(\rho^1_{s-})\right)} N_{i_{T_1}}(dx,ds) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_{i_{T_1}}} \mathbf{1}_{0<\xi_k^{i_{T_1}}<Re\left(v_{i_{T_1}}(\rho^1_{T_1-})\right)}$$

We define then the solution of $(E.51)$ on $[0,T_1]$ in the following way

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_t & = & \rho^1_t \quad \text{on } [0,T_1[\\ \rho_{T_1} & = & \tilde{g}_{i_{T_1}}(\rho_{T_1-}) \end{array}\right. \tag{E.57}$$

The operator ρ_{T_1} can then be considered as the initial condition of the equation $(E.56)$. Therefore we consider for $t > T_1$ the process (ρ^2_t) defined by

$$\begin{aligned} \rho^2_t &= \rho_{T_1} + \int_{T_1}^t L(\rho^2_{s-})ds - \sum_{i\in I}\int_{T_1}^t \tilde{g}_i(\rho^2_{s-})Re(v_i(\rho^2_{s-})ds \\ &\quad + \sum_{i\in j\bigcup\{0\}}\int_{T_1}^t h_i(\rho^2_{s-})dW_i(s). \end{aligned} \tag{E.58}$$

In the same fashion as the definition of T_1, we can define the random stopping time T_2 as

$$T_2 = \inf\left\{t > T_1 / \sum_{i\in I}\int_{T_1}^t\int_{[0,K]} \mathbf{1}_{0<x<Re(v_i(\rho^2_{s-}))} N_i(dx,ds) > 1\right\}.$$

By adapting the expression $(E.57)$, we can define the solution on $[T_1,T_2]$ and so on. By induction, we define then the solution of $(E.51)$. The uniqueness comes from the uniqueness of solution for diffusive equations of type of $(E.58)$. Because of the fact that the intensity of the counting process is bounded, we do not have time of explosion and we have a solution defined for all time t (see [29] or [22] for all details concerning such stochastic differential equations). □

Equations $(E.51)$ or $(E.52)$ (with truncature) admit then a unique solution (ρ_t). In Section 3, from convergence result, we show that these solutions are valued in the set of states, the truncature method will be then not necessary. Therefore solutions of $(E.51)$ and $(E.52)$ become solutions of $(E.45)$ and $(E.46)$ and as they are valued in the set of states they become solutions of $(E.37)$ and $(E.37)$.

Before to tackle the problem of convergence in Section 3, let us give a proposition concerning martingale problem for $(\overline{\mathcal{A}}^J, \rho_0)$ (for some ρ_0) and uniqueness of the solution for such problem. This will be namely useful in Section 3.

Proposition 23 *Let ρ_0 be any operator. Let $\overline{\mathcal{A}}_k^J$ be the infinitesimal generator of the process (ρ_t^J), solution of a truncated equation of the form $(E.51)$ or $(E.52)$.*

The process (ρ_t^J) is then the unique solution in distribution of the martingale problem $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$.

The fact that the solution of a stochastic differential equation $(E.51)$ or $(E.52)$ is a solution of the martingale problem for the corresponding infinitesimal generator follows from Ito formula as in Proposition 3.

This proposition means that all other solution of the martingale problem for $(\overline{\mathcal{A}}^J, \rho_0)$ have the same distribution of the solution (ρ_t^J) of the associated stochastic differential equation. This result is classical in Markov Process Generator Theory, it follows from the pathwise uniqueness of the solutions of equations $(E.51)$ and $(E.52)$ (see [15] for a complete reference about existence and uniqueness of solutions for problems of martingale).

E.3 Convergence of Discrete Quantum Trajectories

In all this section, we consider an observable A of the form $(E.35)$ with associated subset J and I as in Proposition 2. Furthermore we consider an integer $k > 1$ and the associated truncated stochastic differential equations $(E.51)$ or $(E.52)$.

In this section, we show that the discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ (describing the successive measurements of A) converges in distribution to the solution of the martingale problem for $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$ given by the solution of the corresponding truncated equations $(E.51)$ or $(E.52)$. Next we show that such convergence results allow to conclude that solutions of $(E.51)$ or $(E.52)$ are valued in the set of states.

Let ρ_0 be any initial state. In order to prove that the discrete trajectory starting from ρ_0 converges in distribution, we show at first that the finite dimensional distributions of the discrete process $(\rho_n^J(t))$ converge to the finite dimensional distribution of the solution of the martingale problem $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$. Secondly we show that the discrete process $(\rho_n^J(t))$ is tight and the convergence follows. For the weak convergence of finite dimensional distributions, we use the following theorem of Ethier and Kurtz [15] translated in the context of quantum trajectories.

Theorem 43 *Let $\overline{\mathcal{A}}_k^J$ be the infinitesimal generator of the solution of the corresponding equation $(E.51)$ or $(E.52)$. Let $(\mathcal{F}_t^n)$ be a filtration and let $(\rho_n^J(.))$ be a càdlàg $\mathcal{F}_t^n$ adapted-process which is relatively compact (or tight). Let ρ_0 be any state.*

Suppose that :

1. *The martingale problem $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$ has a unique solution(in distribution) ;*
2. $\rho_n^J(0) = \rho_0$;

3. *for all $m \geq 0$, for all $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, for all function $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ and for all f in C_c^2 we have :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \overline{\mathcal{A}}_k^J f(\rho_n^J(s))ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] = 0. \quad \text{(E.59)}$$

Then $(\rho_n^J(.))$ converges in distribution to the solution of the martingale problem for $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$.

Theorem 4 of Ethier and Kurtz imposes to have uniqueness of solution for the martingale problem, this follows from Proposition 4 of Section 2. This Theorem expresses the fact that if a subsequence of $(\rho_n(t))$ converges in distibution to a stochastic process (Y_t), necessarily this process is a solution of the problem of martingale associated with $(\overline{\mathcal{A}}_k^J, \rho_0)$.. Indeed, from the convergence property $(E.59)$, the process (Y_t) satisfies

$$\mathbf{E}\left[\left(f(Y_{t+s}) - f(Y_t) - \int_t^{t+s} \overline{\mathcal{A}}_k^J f(Y_s)\, ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] = 0. \quad \text{(E.60)}$$

As this equality is satisfied for all $m \geq 0$, for all $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, for all function $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ and for all f in C_c^2, this implies the martingale property of the process

$$t \to f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t \mathcal{A}^J f(Y_s)ds.$$

Hence, the uniqueness of the solution of the problem of martingale allow to conclude to the convergence of finite dimensional distributions and the tightness property allow to conclude to the convergence in distribution for stochastic processes.

Let us deal with the application of Theorem 4 in the context of quantum trajectories. Concerning the definition of a filtration $(\mathcal{F}_t^n)$, we consider the natural filtration of the discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$, that is, if $r/n \leq t < (r+1)/n$ we have

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma(\rho_n^J(s), s \leq t) = \sigma(\rho_p^J, p \leq r).$$

It is obvious that $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_{r/n}^n$.

Assume tightness for instance. In order to conclude, it suffices to prove the assertion $(E.59)$. As k is supposed to be strictly larger than 1, recall that infinitesimal generators of quantum trajectories $\mathcal{A}^J$ satisfy for all $f \in C_c^2$ and for all states ρ

$$\overline{\mathcal{A}}_k^J f(\rho) = \mathcal{A}^J f(\rho).$$

The assertion $(E.59)$ follows then from this proposition.

Proposition 24 *Let ρ_0 be any state. Let $(\rho_n^J(.))$ be a quantum trajectory starting from ρ_0. Let $\mathcal{F}_t^n$ be the natural filtration of $(\rho_n^J(.))$. We have :*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \overline{\mathcal{A}}_k^J f(\rho_n^J(s))ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] \\
= &\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] \\
= &\ 0 \qquad (E.61)
\end{aligned}$$

for all $m \geq 0$, for all $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, for all functions $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ and for all f in C_c^2.

Proof: The discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ is valued in the set of states, we then have for all $s \geq 0$

$$\overline{\mathcal{A}}_k^J f(\rho_n^J(s)) = \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s)).$$

Let $m \geq 0$, let $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t < t+s$, let $(\theta_i)_{i=1,\ldots,m}$ and let f be functions in C_c^2, we have

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] \\
= &\ \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))ds\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right]/\mathcal{F}_t^n\right] \\
= &\ \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^i f(\rho_n(s))ds\right)/\mathcal{F}_t^n\right]\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right] \qquad (E.62)
\end{aligned}$$

Let n be fixed, from definition of infinitesimal generators for Markov chains (see [31]) we have that

$$f(\rho_n^J(k/n)) - f(\rho_0) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n}\mathcal{A}_n^J f(\rho_n^J(j/n)) \qquad (E.63)$$

is a $(\mathcal{F}_{k/n}^n)$ martingale (this is the discrete equivalent of solutions for problems of martingale for discrete processes).

Suppose $r/n \leq t < (r+1)/n$ and $l/n \leq t+s < (l+1)/n$, we have $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_{r/n}^n$. The random states $\rho_n^J(t)$ and $\rho_n^J(t+s)$ satisfy then $\rho_n^J(t) = \rho_n^J(r/n)$ and $\rho_n^J(t+s) = \rho_n^J(l/n)$.

The martingale property $(E.63)$ implies then

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t)\Big/\mathcal{F}_t^n\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[f(\rho_n^J(l/n)) - f(\rho_n^J(k/n)\Big/\mathcal{F}_{r/n}^n\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\sum_{j=k}^{l-1}\frac{1}{n}\mathcal{A}_n^J f(\rho_n(j/n))\Big/\mathcal{F}_{r/n}^n\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\int_t^{t+s}\mathcal{A}_n^J f(\rho_n^J(s))ds\Big/\mathcal{F}_t^n\right] \\
& +\mathbf{E}\left[\left(t-\frac{r}{n}\right)\mathcal{A}_n^J f(\rho_n^J(t)) + \left(\frac{l}{n}-(t+s)\right)\mathcal{A}_n^J f(\rho_n^J(t+s))\Big/\mathcal{F}_t^n\right]. \qquad \text{(E.64)}
\end{aligned}$$

As a consequence, we have

$$\begin{aligned}
& \left|\mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s}\mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right]\right| \\
\leq \; & \mathbf{E}\left[\left|\int_t^{t+s}\left(\mathcal{A}_n^J f(\rho_n(s)) - \mathcal{A}^J f(\rho_n^J(s))\right)ds\right|\right]\prod_{i=1}^m \|\theta_i\|_\infty \\
& +\mathbf{E}\left[\left|\left(t-\frac{[nt]}{n}\right)\mathcal{A}_n f(\rho_n^J(t)) + \left(\frac{[n(t+s)]}{n}-(t+s)\right)\mathcal{A}_n^J f(\rho_n^J(t+s))\right|\right]\prod_{i=1}^m \|\theta_i\|_\infty \\
\leq \; & M\sup_{\rho\in\mathcal{S}}\left|\mathcal{A}_n^J f(\rho) - \mathcal{A}^J f(\rho)\right| + \frac{L}{n}\sup_{\rho\in\mathcal{S}}\left|\mathcal{A}_n^J f(\rho)\right| \qquad \text{(E.65)}
\end{aligned}$$

where M and L are constant depending on $\|h_i\|$ and s. Thanks to the condition of uniform convergence of Proposition 2, we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{E}\left[\left(f(\rho_n^J(t+s)) - f(\rho_n^J(t) - \int_t^{t+s}\mathcal{A}_i f(\rho_n^J(s))\right)\prod_{i=1}^m \theta_i(\rho_n^J(t_i))\right]\right| = 0 \qquad \text{(E.66)}$$

□

Finally, in order to apply Theorem 4 of Ethier and Kurtz, it suffices to prove the tightness of the discrete quantum trajectory. The following lemma will be useful when we deal with this question.

Lemma 2 *There exists a constant K_J such that for all $(r,l)\in(\mathbb{N}^\star)^2$ satisfying $r<l$, we have almost surely :*

$$\mathbf{E}\left[\|\rho_l^J - \rho_r^J\|^2\Big/\mathcal{M}_r^{(n)}\right] \leq K_J\frac{l-r}{n}, \qquad \text{(E.67)}$$

where $\mathcal{M}_r^{(n)} = \mathcal{F}_{r/n}^n = \sigma\{\rho_j^J, j\leq r\}$.

Proof: Let us deal with the case where $J \neq \emptyset$ and $I \neq \emptyset$ (this is the most general case). Let $r < l$, we have

$$\mathbf{E}\left[\|\rho_l^i - \rho_r^i\|^2/\mathcal{M}_r^{(n)}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\|\rho_l^i - \rho_r^i\|^2/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\Big/\mathcal{M}_r^{(n)}\right]$$

Hence we have

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\|\rho_l^J - \rho_r^J\|^2/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] &= \mathbf{E}\left[\left\|\sum_{j=0}^{p}\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)\mathbf{1}_j^{l+1} - \rho_r^J\right\|^2\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{p}\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{p}\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_{l-1}^J + \rho_{l-1}^J - \rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \\
&= \sum_{j\in I}\mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_{l-1}^J + \rho_{l-1}^J - \rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \quad \text{(E.68)} \\
&\quad + \sum_{j\in J\bigcup\{0\}}\mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_{l-1}^i + \rho_{l-1}^i - \rho_k^i\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1})\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \\
&\qquad \text{(E.69)}
\end{aligned}$$

As I is supposed to be not empty, for the first term of $(E.68)$ we have for all $i \in I$

$$p_l^i(\rho_{l-1}^J) = \frac{1}{n}(v_i(\rho_{l-1}^J) + \circ(1))$$

where functions $v_i(.)$ are defined in Section 2. As $\mathcal{L}_i^{(n)}(\rho)$ converges uniformly in $\rho \in \mathcal{S}$, set

$$R = \sup_{j\in I}\sup_{n}\sup_{(\rho,\mu)\in\mathcal{S}^2}\left\{\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho) - \mu\right\|^2(v_i(\rho) + \circ(1))\right\}.$$

This constant is finite because all the $\circ's$ are uniform in ρ. We have then almost surely

$$\sum_{j\in I}\mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_{l-1}^J + \rho_{l-1}^J - \rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \leq \frac{card(J)\times R}{n}$$

For the second term of $(E.68)$ we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J+\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\\
=&\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\\
&+\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[2Re\left(\langle\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J,\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\rangle\right)p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\\
&+\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[\left\|\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right] \qquad \text{(E.70)}
\end{aligned}$$

Concerning the indexes $j\in J\bigcup\{0\}$, we have

$$\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J=\frac{1}{\sqrt{n}}(h_j(\rho_{l-1}^J)+\circ(1)).$$

In the same way as the constant R, we define

$$S=\sup_{j\in J\bigcup\{0\}}\sup_n\sup_{\rho\in\mathcal{S}}\|h_j(\rho)+\circ(1)\|^2 p_j(\rho).$$

For the first term of $(E.70)$, it implies that we have almost surely

$$\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[\left\|\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\leq\frac{(cardJ+1)\times S}{n}.$$

Furthermore, as we have $\sum_{j\in J\bigcup\{0\}}p_l^j(\rho_{l-1}^J)\leq 1$ almost surely, we get almost surely

$$\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[\left\|\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\|^2 p_l^j(\rho_{l-1})\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\leq\mathbf{E}\left[\left\|\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\|^2\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right].$$

For the second term of $(E.70)$, we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E}\left[2Re\left(\left\langle\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J,\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\rangle\right)p_l^j(\rho_{l-1}^J)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]\\
=&\ \mathbf{E}\left[2Re\left(\left\langle\sum_{j\in J\bigcup\{0\}}\left(\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J)-\rho_{l-1}^J\right)p_l^j(\rho_{l-1}^J)\,,\,\rho_{l-1}^J-\rho_r^J\right\rangle\right)\Big/\mathcal{M}_{l-1}^{(n)}\right]
\end{aligned}$$

Let us treat this term. As in the proof of Proposition 2 concerning infinitesimal generators, with the asymptotic of $\mathcal{L}_i^{(n)}$ in this situation, we have uniformly in $\rho\in\mathcal{S}$:

$$\sum_{j\in J\bigcup\{0\}}\left(\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho)-\rho\right)p_l^j(\rho)=\frac{1}{n}(H(\rho)+\circ(1)),$$

since the terms in $1/\sqrt{n}$ disappear by summing over $j \in J \bigcup \{0\}$. As a consequence, by defining the finite constant W as

$$W = \sup_n \sup_{(\rho,\mu)\in\mathcal{S}^2} \left\{ \left| 2Re \left(\left\langle \sum_{j\in J\bigcup\{0\}} n \left(\mathcal{L}_j^{(n)}(\rho) - \rho \right) p_l^j(\rho) \, , \, \rho - \mu \right\rangle \right) \right| \right\},$$

we have then almost surely

$$\sum_{j\in J\bigcup\{0\}} \mathbf{E} \left[2Re \left(\left\langle \mathcal{L}_j^{(n)}(\rho_{l-1}^J) - \rho_{l-1}^J, \rho_{l-1}^J - \rho_r^J \right\rangle \right) p_l^j(\rho_{l-1}^J) \Big/ \mathcal{M}_{l-1}^{(n)} \right] \leq \frac{W}{n}$$

Let us stress that the constant W are independent of l and r. Therefore, we can conclude that there exists a constant K_J such that for all $r < l$, we have almost surely

$$\mathbf{E} \left[\|\rho_l^J - \rho_r^J\|^2 / \mathcal{M}_{l-1}^{(n)} \right] \leq \frac{K_J}{n} + \mathbf{E} \left[\left\|\rho_{l-1}^J - \rho_r^J\right\|^2 / \mathcal{M}_{l-1}^{(n)} \right]. \tag{E.71}$$

It implies that almost surely

$$\mathbf{E} \left[\|\rho_l^J - \rho_r^J\|^2 / \mathcal{M}_k^{(n)} \right] \leq \frac{K_J}{n} + \mathbf{E} \left[\left\|\rho_{l-1}^J - \rho_r^J\right\|^2 / \mathcal{M}_r^{(n)} \right]. \tag{E.72}$$

Thus by conditioning successively by $\mathcal{M}_{l-i}^{(n)}$ with $i \in \{2, \ldots, l-r\}$ and by induction, we can show

$$\mathbf{E} \left[\|\rho_l^J - \rho_r^J\|^2 / \mathcal{M}_r^{(n)} \right] \leq \frac{K_J(l-r)}{n}.$$

The same results hold when $J = \emptyset$ or $I = \emptyset$ by similar computations. □

This lemma implies the following proposition which expresses the tightness property of the discrete quantum trajectory.

Proposition 25 *Let $(\rho_n^J(t))$ be the quantum trajectory. There exists some constant Z_J such that for all $t_1 < t < t_2$:*

$$\mathbf{E} \left[\|\rho_n(t_2) - \rho_n(t)\|^2 \|\rho_n(t) - \rho_n(t_1)\|^2 \right] \leq Z_J (t_2 - t_1)^2. \tag{E.73}$$

Therefore, the discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ is tight.

Proof: The inequality $(E.73)$ implies the tightness of $(\rho_n(t))$ (see [10]). Let us prove $(E.73)$. It is worth noticing that $\mathcal{M}_k^{(n)} = \mathcal{F}_{k/n}^n$ where $\mathcal{F}_t^n$ is the natural filtration of (ρ_n^J).

Thanks to the previous lemma we then have :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\|\rho_n^J(t_2)-\rho_n^J(t)\|^2\|\rho_n^J(t)-\rho_n(t_1)\|^2\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\|\rho_n^J([nt_2])-\rho_n^J([nt])\|^2\|\rho_n^J([nt])-\rho_n^J([nt_1])\|^2\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\|\rho_n^J([nt_2])-\rho_n^J([nt])\|^2\|\rho_n^J([nt])-\rho_n^J([nt_1])\|^2/\mathcal{F}^n_{[nt]/n}\right]\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\|\rho_n^J([nt_2])-\rho_n^J([nt])\|^2/\mathcal{F}^n_{[nt]/n}\right]\|\rho_n^J([nt])-\rho_n([nt_1])\|^2\right] \\
\leq \; & \mathbf{E}\left[\frac{K_J([nt_2]-[nt])}{n}\|\rho_n^J([nt])-\rho_n^J([nt_1])\|^2\right] \\
\leq \; & \frac{K_J([nt_2]-[nt])}{n}\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\|\rho_n^J([nt])-\rho_n^J([nt_1])\|^2/\mathcal{F}^n_{[nt_1]/n}\right]\right] \\
\leq \; & \frac{K_J([nt_2]-[nt])}{n}\frac{K_J([nt]-[nt_1])}{n} \\
\leq \; & Z_J(t_2-t_1)^2,
\end{aligned}$$

with $Z_J = 4(K_J)^2$ and the result follows. □

Therefore we have proved the tightness property of discrete quantum trajectories and we can now express the final theorem.

Theorem 44 *Let A be an observable on $\mathcal{H}=\mathbb{C}^{N+1}$ with spectral decomposition*

$$A=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i P_i=\sum_{i\in I}\lambda_i P_i+\sum_{j\in J\bigcup 0}\lambda_j P_j, \tag{E.74}$$

where :

1. *For $i\in\{0,\ldots,p\}$ the operators $P_i=(p^i_{kl})_{0\leq k,l\leq N}$ are the eigen-projectors of A (satisfying $p^0_{00}\neq 0$)*
2. *The sets I and J satisfy that $I=\{i\in\{1,\ldots,p\}/p^i_{00}=0\}$ and $J=\{1,\ldots,p\}\setminus I$.*

Let ρ_0 be a state on $\mathcal{H}_0$. Let $(\rho_n^J(t))$ be the discrete quantum trajectory describing the repeated quantum measurements of A and starting with ρ_0 as initial state.

1. *Suppose $J=\emptyset$. Then the discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ converges in distribution in $\mathcal{D}[0,T)$ for all T to the solution (ρ_t^J) of the stochastic differential equation $(E.51)$. Therefore the process (ρ_t^J) takes values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. The discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ converges then in distribution to the unique solution of the following jump-diffusion Belavkin equation*

$$\rho_t^J=\rho_0+\int L(\rho_{s-}^J)ds+\sum_{i=1}^{p}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)}\left[N_i(dx,ds)-dxds\right] \tag{E.75}$$

2. *Suppose $J\neq\emptyset$. Then the discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ converges in distribution in $\mathcal{D}[0,T)$ for all T to the solution (ρ_t^J) of the stochastic differential equation $(E.52)$.*

The process (ρ_t^J) takes values in the set of states on $\mathcal{H}_0$. The discrete quantum trajectory $(\rho_n^J(t))$ converges then in distribution to the unique solution of the following jump-diffusion Belavkin equation

$$\begin{aligned}\rho_t^J &= \rho_0 + \int L(\rho_{s-}^J)ds + \sum_{i\in J\bigcup\{0\}} h_i(\rho_{s-}^J)dW_i(s) \\ &\quad + \sum_{i\in I}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} g_i(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)}\left[N_i(dx,ds) - dxds\right]. \end{aligned} \tag{E.76}$$

Furthermore the processes defined by

$$\tilde{N}_t^i = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)}N_i(dx,ds) \tag{E.77}$$

are counting processes with stochastic intensities

$$t \to \int_0^t v_i(\rho_{s-}^J)ds.$$

As in Theorem 3, the last assertion concerning the counting processes of Theorem 5 follows from properties of Poisson Point processes N_i. It means actually that processes defined by

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<x<v_i(\rho_{s-}^J)}N_i(dx,ds) - \int_0^t v_i(\rho_{s-}^J)ds \tag{E.78}$$

are martingale with respect to the natural filtration of (ρ_t^J) (see [9],[12]). Let us prove the convergence results of Theorem 5.

Proof: In all cases, the convergence result follows from Theorem 4 and Propositions 5 for the finite dimensional distribution convergence and from proposition 6 for the tightness. In order to finish the proof of this theorem, we have to prove that solutions of stochastic differential equations $(E.51)$ and $(E.52)$ takes values in the set of states. It is given by the convergence in distribution.

Indeed, let $(\rho_n^J(t))$ be converging to the corresponding solution (ρ_t^J) of equation $(E.51)$ or $(E.52)$, we have to prove that this solution is self-adjoint, positive with trace 1. By using the convergence in distribution, we have for all $z \in \mathbb{C}^2$

$$\rho_n^J(t) - (\rho_n^J(t))^\star \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longmapsto}} \rho_t^J - (\rho_t^J)^\star \tag{E.79}$$

$$Tr\left[\rho_n^J(t)\right] \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longmapsto}} Tr\left[\rho_t^J\right] \tag{E.80}$$

$$\langle z, \rho_n^J(t)z\rangle \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longmapsto}} \langle z, \rho_t^J z\rangle \tag{E.81}$$

where $\mathcal{D}$ denotes the convergence in distribution for processes. As $(\rho_n^J(t))$ takes values in the set of states, we have almost surely for all t and all $z \in \mathbb{C}^2$

$$\rho_n^J(t) - (\rho_n^J(t))^\star = 0, \quad Tr\left[\rho_t^J\right] = 1, \quad \langle z, \rho_n^J(t)z\rangle \geq 0.$$

These properties are conserved at the limit in distribution and the process (ρ_t^J) takes then values in the set of states. The proof of Theorem 5 is then complete. $\square$

This theorem is then a mathematical and physical justification of stochastic models of continuous time quantum measurement theory. Let us stress that in general it is difficult to prove that equations () and () admit a unique solution which takes values in the set of states. One can notice that such equations preserve the self adjoint and trace properties. Concerning the positivity property, it is far from being obvious and it points out the importance of the convergence result.

Let us conclude this article with some remarks concerning these continuous stochastic models.

The first remark concerns the average of solutions of $(E.75)$ or $(E.76)$. Let (ρ_t^J) be a solution of $(E.75)$ or $(E.76)$. In all cases, we have

$$\mathbf{E}[\rho_t^J] = \int_0^t L(\mathbf{E}[\rho_s^J])ds. \tag{E.82}$$

This follows namely from martingale property of the Brownian motion and counting processes. This remark concerning $(E.82)$ means that the function

$$t \to \mathbf{E}[\rho_t^J]\,,$$

is the solution of the ordinary differential equation

$$d\mu_t = L(\mu_t)dt.$$

This equation is called the "Master Equation" in quantum mechanics and describes the evolution of the reference state of the small system $\mathcal{H}_0$ without measurement. In average continuous quantum trajectories evolve then as the solution of the Master equation (for all measurement experiences).

The second remark concerns the classical Belavkin equations $(E.3)$ and $(E.4)$ presented in Introduction. In [28] and [29], it is shown that such continuous model are justified from convergence of stochastic integral and random coupling method (it does not use infinitesimal generators theory) . With Theorem 5, we recover these equations by considering the case where the measured observable A is of the form $A = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$. Indeed in this case, we just have one noise at the limit as in the classical case.

The last remark concerns the uniqueness of a solution of the martingale problems. In this article, we have made an identification with the set of operators on $\mathcal{H}_0$ and $\mathbb{R}^P$ in order to introduce definition of infinitesimal generators and notion of martingale problem (see Section 2, Definition 2). As observed, the infinitesimal generators of quantum trajectories can be written in term of the partial derivative in the following way

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in J\bigcup\{0\}} D_\rho^2 f(h_i(\rho), h_i(\rho)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{P} a_{ij}(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho_i\partial\rho_j} \tag{E.83}$$

$$D_\rho f(L(\rho) = \sum_{i=1}^{P} b_i(\rho)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho_i} \tag{E.84}$$

by expanding the differential terms. The matrix $a(.) = (a_{ij}(.)$ is a semi definite matrix. Let W be a P dimensional Brownian motion, the solution of the problem of martingale can also be expressed as the solution of

$$\begin{aligned} \rho_t^J &= \rho_0 + \int_0^t L(\rho_{s-}^J)ds + \int_0^t \sigma(\rho_s^J)dW_s \\ &\quad + \sum_{k\in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_k(\rho_{s-}^J)\mathbf{1}_{0<x<Re(v_k(\rho_{s-}^J))} \left[N_k(dx,ds) - dxds\right], \end{aligned} \tag{E.85}$$

where $\sigma(.)$ is as matrix defined by $\sigma(.)\sigma^t(.) = a(.)$ (see [13], [31] for more details on such writing). Let us stress that, in this description we deal with a P dimensional Brownian motion corresponding to the dimension of $\mathbb{R}^P$ (which depends only on the dimension of $\mathcal{H}_0$) whereas in Theorem 5 we consider a $(p+1)$-dimensional Brownian motion corresponding to the number of eigenvalues (which only depends on the dimension of the interacting quantum system $\mathcal{H}$). As a consequence from uniqueness of martingale problem (Proposition 4) we have two different descriptions of continuous quantum trajectories, but they are the same as regards their distributions.

Bibliographie

[1] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. III*, volume 1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Recent developments, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.

[2] S. Attal and Y. Pautrat. From $(n+1)$-level atom chains to n-dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :391–407, 2005.

[3] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.

[4] A. Barchielli and V. P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 24(7) :1495–1514, 1991.

[5] A. Barchielli and A. M. Paganoni. A note on a formula of the Lévy-Khinchin type in quantum probability. *Nagoya Math. J.*, 141 :29–43, 1996.

[6] A. Barchielli and A. M. Paganoni. Stochastic differential equations for trace-class operators and quantum continual measurements. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002)*, volume 227 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 53–67. Dekker, New York, 2002.

[7] A. Barchielli, A. M. Paganoni, and F. Zucca. On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability. *Stochastic Process. Appl.*, 73(1) :69–86, 1998.

[8] A. Barchielli and F. Zucca. On a class of stochastic differential equations used in quantum optics. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 66 :355–376 (1998), 1996.

[9] R. F. Bass. Stochastic differential equations with jumps. *Probab. Surv.*, 1 :1–19 (electronic), 2004.

[10] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[11] L. Bouten, M. Guţă, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.

[12] P. Brémaud. *Point processes and queues*. Springer-Verlag, New York, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics.

[13] P. Cheridito, D. Filipović, and M. Yor. Equivalent and absolutely continuous measure changes for jump-diffusion processes. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3) :1713–1732, 2005.

[14] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1976.

[15] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[16] T. Fujiwara and H. Kunita. Limit theorems for stochastic difference-differential equations. *Nagoya Math. J.*, 127 :83–116, 1992.

[17] J. Gough and A. Sobolev. Stochastic Schrödinger equations as limit of discrete filtering. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 11(3) :235–255, 2004.

[18] S. Haroche and J.-M. Raimond. *Exploring the quantum.* Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2006. Atoms, cavities and photons.

[19] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1979.

[20] J. Jacod. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations : limit theorems. *Ann. Probab.*, 32(3A) :1830–1872, 2004.

[21] J. Jacod, T. G. Kurtz, S. Méléard, and P. Protter. The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :523–558, 2005.

[22] J. Jacod and P. Protter. Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques. In *Seminar on Probability, XVI*, volume 920 of *Lecture Notes in Math.*, pages 447–458. Springer, Berlin, 1982.

[23] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[24] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 15 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Elementary theory, Reprint of the 1983 original.

[25] B. Kümmerer and H. Maassen. An ergodic theorem for quantum counting processes. *J. Phys. A*, 36(8) :2155–2161, 2003.

[26] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3) :1035–1070, 1991.

[27] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[28] C. Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation for stochastic Schrödinger equation : the Diffusive case.* to appear in the Annals of Probability, 2007.

[29] C. Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation for stochastic Schrödinger equation : the Poisson case.* submitted, 2007.

[30] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[31] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.