HAL
open science

Equations fonctionnelles abéliennes et théorie des tissus

Luc Pirio

To cite this version:

Luc Pirio. Equations fonctionnelles abéliennes et théorie des tissus. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00335195

HAL Id: tel-00335195

https://theses.hal.science/tel-00335195v1

Submitted on 28 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Luc Pirio

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ABÉLIENNES ET GÉOMÉTRIE DES TISSUS

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ABÉLIENNES ET GÉOMÉTRIE DES TISSUS

Luc Pirio

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par **Luc Pirio**

Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus

Soutenue le 15 décembre 2004, devant le jury composé de

M. Dominique Cerveau	Rapporteur
M. Étienne Ghys	Président du Jury
M. Vladislav Goldberg	Examinateur
M. Alain Hénaut	Rapporteur
M. Gennadi Henkin	Directeur de thèse
M. Nessim Sibony	Examinateur
M. Jean-Marie Trépreau	Examinateur

Aux B.
Aux B.
Aux P.
Et aux P.

TABLE DES MATIÈRES

Présentation 5

Introduction 9

Partie I. Équations fonctionnelles abéliennes 29

1. Propriétés générales des solutions d'une équation fonctionnelle abélienne 31
1.1. Introduction et notations 31
1.2. Quelques résultats sur les solutions d'une équation fonctionnelle abélienne 36

2. Sur la détermination des solutions d'une équation fonctionnelle abélienne 41
2.1. La méthode d'Abel 41
2.2. La méthode de monodromie a priori 46

3. Résolution explicite de deux équations fonctionnelles abéliennes 55
3.1. Notations 55
3.2. L'équation de Spence-Kummer généralisée 56
3.3. Une équation dépendant d'un paramètre 61

Partie II. Géométrie des tissus 63

4. La géométrie des tissus de Blaschke et Bol 65
4.1. Tissus : généralités et premières définitions 65
4.2. Quelques exemples de tissus 73
4.3. Relation abélienne, rang et tissus algébriques 79
4.4. Algébrisation des tissus de rang maximal et tissus exceptionnels 85

5. Sur l'étude du rang d'un tissu 95
5.1. Caractérisation des tissus plans de rang maximal (d'après A. Pantazi) 96
5.2. Application de la méthode d'Abel à la caractérisation des tissus de rang maximal 120

6. Une famille à un paramètre de 5-tissus exceptionnels 131
1. Introduction 131
2. Remarques sur les tissus $\mathcal{W}\big(x, y, x+y, x-y, u(x,y)\big)$ 135
3. Fonctions thêta et tissus exceptionnels 137
4. Un système différentiel associé aux tissus de la section précédente 144

Bibliographie 151

7. Sur les tissus polylogarithmiques 155
7.1. Généralités sur les tissus polylogarithmiques 155
7.2. Étude explicite de quelques tissus polylogarithmiques 164
7.3. Tissus et configurations de points 175

8. Tissus exceptionnels et géométrie différentielle projective 183
8.1. Notations et introduction historico-mathématique 184
8.2. Géométrie différentielle projective des surfaces et tissu de Segre 188
8.3. Géométrisation des 5-tissus exceptionnels 198
8.4. Surfaces de Blaschke et tissus de Segre 201
8.5. Exemples 211

9. Sur la notion de tissu algébrique 221
9.1. Introduction 221
9.2. Quelques rappels sur les courbes algébriques 223
9.3. Une généralisation de la notion de tissu algébrique 227
9.4. Exemples de tissus exceptionnels G-algébriques 232
9.5. En guise de conclusion 235

A. Algorithmes pour l'étude effective du rang et des relations abéliennes 237
A.1. La méthode d'Abel 237
A.2. Calcul de la courbure et des coefficients de Pantazi 241

Bibliographie 255

PRÉSENTATION

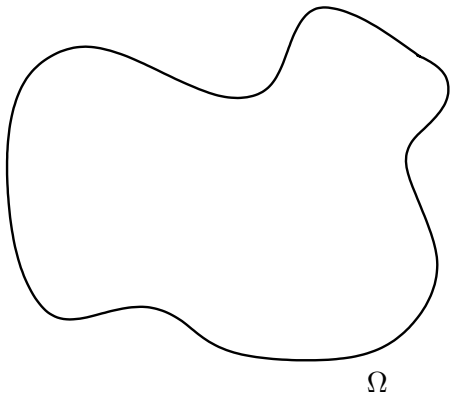
Dans ce mémoire, on s'intéresse aux **tissus plans** qui portent le nombre maximal possible de **relations abéliennes**. Les deux expressions en caractères gras sont les deux notions centrales sur lesquelles se développent les recherches dont les résultats sont exposés ici. On en fait ici une présentation rapide et on situe la problématique autour de laquelle s'articule cette thèse.

La notion de tissu a été formalisée par Blaschke et ses collaborateurs, dans les années trente. Sans vouloir entrer dans les détails, disons qu'un d-tissu sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ est la donnée d'une collection de d feuilletages dont les feuilles sont en position générale.

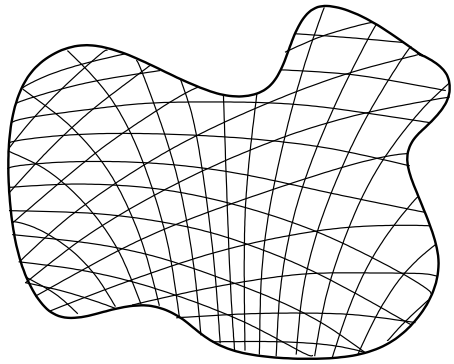
Dans cette thèse, on se restreindra essentiellement au cas où l'espace ambiant est de dimension 2. On parle alors de *tissu plan*. Dans cette situation, la notion de tissu devient particulièrement intuitive : un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ est une famille de feuilletages en courbes $\mathcal{F}_k$, dont les feuilles se coupent transversalement :

$$\mathcal{W}(d) = \left\{ \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d \right\}.$$

Un dessin réel donne une intuition immédiate de ce qu'est un tissu. Soit Ω le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe ci-dessous :



Le dessin ci-dessous est une représentation d'un 3-tissu sur Ω :



Les tissus sont des objets géométriques. On souhaite pouvoir reconnaître et identifier deux tissus géométriquement équivalents, c'est-à-dire tels que l'un est obtenu à partir de l'autre par un changement de coordonnées. Formalisons cette idée.

Soient Ω et Ω' deux domaines de $\mathbb{C}^2$ sur lesquels on s'est donné deux d-tissus $\mathcal{W}(d)$ et $\mathcal{W}'(d)$. On dira qu'ils sont *équivalents* s'il existe $\omega \in \Omega$ et $\omega' \in \Omega'$ ainsi qu'un germe de difféomorphisme $\phi : (\Omega, \omega) \xrightarrow{\sim} (\Omega', \omega')$ qui transforme $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}'$ au voisinage de ω.

Le problème fondamental de la théorie des tissus est celui de leur classification locale, modulo les germes de difféomorphismes. De ce point de vue, les notions de 1-tissu et de 2-tissu ne sont pas intéressantes. En effet, dans ces deux cas, on déduit du théorème d'inversion locale que tous les tissus sont équivalents. Dans tout ce qui suit, on supposera donc $d \geq 3$.

Suivant une approche classique en mathématiques, on peut entreprendre la classification des tissus plans au moyen d'invariants. Le *rang* en est un exemple classique et fondamental dans cette thèse. C'est un invariant discret que l'on peut attacher aux tissus. Il est construit à partir de la notion de relation abélienne que l'on va maintenant introduire.

Soit $\mathcal{W}(d) = \{\, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d \,\}$ un d-tissu sur un domaine plan Ω. Localement, chaque feuilletage $\mathcal{F}_i$ peut être décrit au moyen d'une intégrale première : si ω est un point de Ω, il existe une submersion U_i telle qu'au voisinage de ω, les feuilles de $\mathcal{F}_i$ correspondent aux ensembles de niveaux $\{U_i = cte\,\}$.

Avec ces notations, une relation abélienne de $\mathcal{W}(d)$ est une relation différentielle de la forme

$$(\star) \qquad \sum_i^d F_i(U_i)\, d\, U_i = 0\,.$$

L'espace $\mathcal{A}\big[\mathcal{W}(d)\big]$ des relations abéliennes de $\mathcal{W}(d)$ admet une structure naturelle d'espace vectoriel. On peut alors définir le rang de $\mathcal{W}$. Par définition, c'est

$$\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}(d)\big] := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}\big[\mathcal{W}(d)\big]\,.$$

Si les relations de la forme $(\star)$ dépendent du choix des intégrales premières U_i, on vérifie facilement que le rang est bien défini et qu'il ne dépend que de la classe d'équivalence analytique de $\mathcal{W}(d)$.

Un résultat classique et important de géométrie des tissus nous assure que le rang est fini et nous donne la borne explicite, dite “de Bol” :

$$\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}(d)\big] \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\,.$$

Un tissu pour lequel on a l'égalité dans la majoration ci-dessus est dit *de rang maximal*. C'est aux tissus de ce type que l'on s'intéresse dans ce mémoire. On peut montrer qu'un tissu générique est de rang 0, pour tout $d \geq 3$. Les tissus de rang maximal sont donc des tissus très particuliers.

On obtient une famille intéressante de tissus de rang maximal en considérant les tissus que l'on peut associer aux courbes algébriques planes.

On va préciser cette construction. Soit $C \subset \mathbb{CP}^2$ une courbe algébrique plane de degré d (que l'on suppose seulement réduite). La courbe duale de C est la courbe $C^* \subset \big(\mathbb{CP}^2\big)^*$ formée des droites tangentes à C. Elle est de classe d, c'est-à-dire que par un point générique $p \in \big(\mathbb{CP}^2\big)^*$ passent exactement d tangentes à C^*. On considère ces d droites comme les feuilles d'un d-tissu défini sur un ouvert de Zariski de $\big(\mathbb{CP}^2\big)^*$. Par définition, ce tissu est le *tissu algébrique associé à* C. Il est noté $\mathcal{W}_C$. On remarquera que les feuilles de ce tissu sont des droites : c'est un exemple de *tissu linéaire*.

En guise d'illustration, on donne ci-dessous un dessin réel du 3-tissu algébrique associé à la cubique

$$\mathcal{C} := \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \;\middle|\; (4\,x+4\,y+z)\,(x+y-2\,z)^2 + 27\,z\,(x-y)^2 = 0 \right\}\,.$$

La courbe duale de $\mathcal{C}$ est une quartique de classe 3, connue sous le nom d'*hypocycloïde à trois cusps*, dont les points réels sont formés par la trajectoire que décrit un point sur un cercle de rayon $R/3$ qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon R :

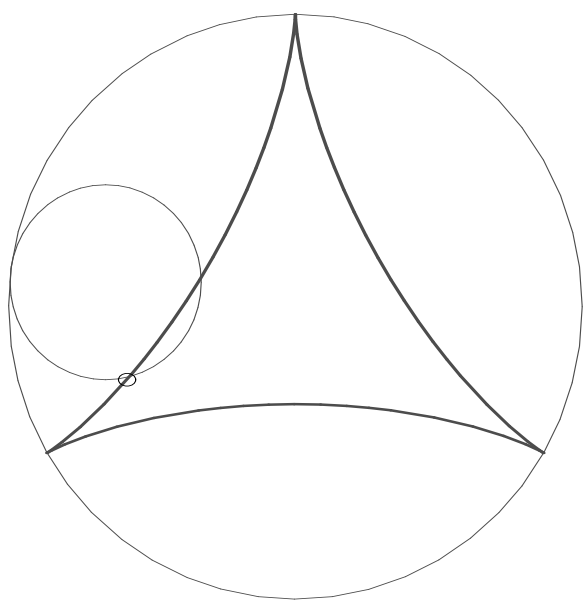


FIGURE 1. Les points réels d'une hypocycloïde à trois cusps.

À partir de cette figure, on peut obtenir un joli dessin du tissu algébrique $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ (tout du moins dans le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe ci-dessus) en traçant les tangentes de $\mathcal{C}^*$:

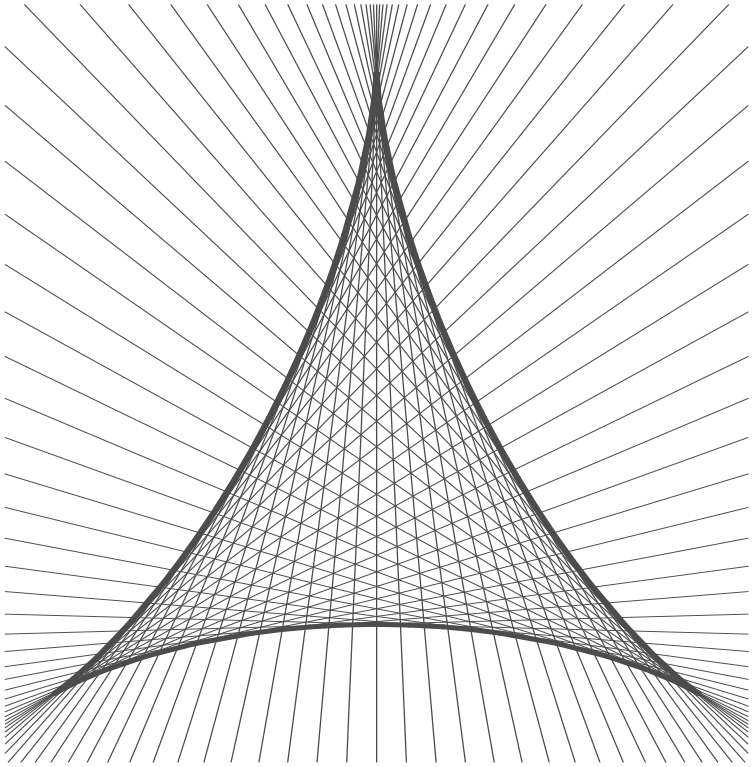


FIGURE 2. Un dessin réel du tissu algébrique $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$.

On peut déduire assez facilement du *Théorème d'addition d'Abel* qu'un tissu algébrique $\mathcal{W}_C$ est de rang maximal : les relations abéliennes de $\mathcal{W}_C$ sont données par l'annulation des sommes abéliennes des 1-formes de première espèce sur C.

Un point fondamental de la géométrie des tissus est l'existence de résultats d'algébrisation concernant les tissus de rang maximal. Pour les tissus plans, on citera :

— le théorème de Blaschke-Howe, assurant qu'un tissu linéaire est algébrique s'il porte au moins une relation abélienne $(\star)$ où tous les termes $F_i(U_i)$ ne sont pas identiquement nuls ;

— le théorème assurant qu'un d-tissu (pour $d = 3, 4$) de rang maximal est *algébrisable* (*i.e.* équivalent à un tissu algébrique). Le cas $d = 4$ est un résultat ancien de Lie.

Ce dernier théorème ne se généralise pas aux d-tissus pour $d \geq 5$. En effet, pour $d = 5$ déjà, il existe des 5-tissus de rang maximal qui ne sont pas équivalents à un tissu algébrique (on montre facilement qu'ils ne sont pas linéarisables). On parle alors de *tissus exceptionnels*.

Cette terminologie est justifiée par le fait que, pendant près de 70 ans, on n'a connu qu'un unique exemple de tissu plan exceptionnel : il s'agissait du 5-tissu "de Bol", découvert en 1935 et qui est lié à l'équation à cinq termes du dilogarithme.

Un problème particulièrement intéressant en géométrie des tissus est le **problème de Chern** : c'est celui de la détermination des tissus plans exceptionnels. C'est autour de lui que se développe ce mémoire.

INTRODUCTION

"Se mettre en quête d'une définition du tissage
par amour du tissage lui-même, aucun
homme de bon sens n'y consentirait."
Platon (Politique).

Pour bien mettre en lumière les résultats nouveaux obtenus dans cette thèse, il nous a semblé utile de les replacer dans un contexte historique, en dressant un portrait très rapide (et sans doute très grossier) des origines et de l'histoire de la géométrie des tissus.

La notion de tissu exceptionnel apparaît aujourd'hui comme particulièrement intéressante en raison de ses liens avec divers domaines des mathématiques. Mais elle n'a pas donné lieu jusqu'ici à une abondante littérature, c'est pourquoi il a semblé pertinent d'exposer le contexte de son apparition et les quelques avancées obtenues en ce domaine. Bien sûr, nous ne prétendons en aucun cas être complet.

1. – Introduction historique

1.1 – Les origines de la théorie des tissus

Si la géométrie des tissus est née au début des années trente, à Hambourg, on peut lui trouver des origines dès le milieu du 19ième siècle. Les concepts et les problèmes qui lui ont donné naissance trouvent leur source dans deux domaines distincts des mathématiques du 19ième siècle : la géométrie différentielle projective et la nomographie, encore appelée "Théorie des abaques". Nous allons discuter les liens de chacun de ces domaines avec la naissance de la géométrie des tissus.

1.1.1. Les origines de la théorie des tissus dans la géométrie différentielle projective

C'est principalement de la géométrie différentielle projective du 19ième siècle qu'émane la géométrie des tissus. Cette discipline provient de la vision de Klein sur la géométrie. Au 19ième siècle, elle consistait principalement dans l'étude des propriétés projectives des courbes et des surfaces de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des propriétés invariantes par les homographies projectives.

La géométrie gaussienne, plus ancienne, étudiait les propriétés des surfaces de l'espace euclidien usuel, qui sont invariantes par les transformations isométriques. Gauss et d'autres mathématiciens ont fait ressortir l'intérêt des première et deuxième formes fondamentales pour l'étude des surfaces, et des conceptss qui s'en déduisent, comme les notions de directions principales, de directions asymptotiques, de directions conjuguées, etc. En considérant les courbes intégrales de ces distributions de directions, les géomètres de l'époque considéraient ce qu'ils appelaient des *1-réseaux* et des *2-réseaux* de courbes sur les surfaces : c'est-à-dire la donnée d'une ou de deux familles de courbes, ou, en des termes plus modernes, de 1- ou de 2-tissus.

C'est en voulant généraliser ces constructions à la géométrie différentielle projective que sont apparus naturellement des "3-réseaux" projectivement attachés aux sufaces de $\mathbb{R}^3$ (par exemple, Darboux a introduit un 3-tissu qui porte son nom dans [**Dar 80**], voir aussi *4.2.1.1* dans cette thèse).

L'intérêt de ces réseaux était qu'on pouvait les utiliser pour "lire" certaines propriétés de la surface étudiée. L'article de Thomsen [**Th 27**] (qui est souvent cité comme l'acte de naissance de la théorie des tissus) illustre parfaitement cet aspect des choses : Thomsen y montre qu'une surface est isotherme-asymptotique(1) si et seulement si son 3-tissu de Darboux est hexagonal(2). À l'époque de ce résultat, l'étude des 3-réseaux sur les surfaces du point de vue de la géométrie différentielle projective était dans l'air(3).

La particularité du résultat de Thomsen est d'avoir caractérisé le fait qu'un 3-réseau est équivalent à $\mathcal{W}(x, y, x + y)$ par une propriété de fermeture que vérifie ou non une "configuration" tracée sur la surface elle-même. Ce fait motiva l'étude des tissus pour eux-mêmes, au début des années 30.

1.1.2. Les origines de la théorie des tissus dans la nomographie

L'autre origine de la théorie des tissus est la nomographie. Cette discipline (aujourd'hui quasiment disparue) faisait partie des mathématiques appliquées. C'est Maurice d'Ocagne qui l'a établie comme discipline mathématique autonome aux alentours des années 1900.

Il s'agissait d'une méthode de calcul graphique qui permettait aux ingénieurs de l'époque d'effectuer des calculs numériques relativement rapidement. Expliquons-en le principe (qui semble bien naïf aujourd'hui) : si $F(a_1, a_2, a_3) = 0$ est une loi reliant trois variables physiques (comme exemple très simple, pensons à la loi d'Ohm $U = RI$), le problème qui se posait était de déterminer rapidement et suffisamment précisément une variable a_i à partir des deux autres : a_j et a_k.

Pour résoudre ce problème, on avait introduit des abaques, encore appelées nomogrammes. Une

(1) Au 19ième siècle, il avait été établi un "bestiaire" très riche concernant les surfaces de $\mathbb{R}^3$. Les surfaces isothermes-asymptotiques (ou "surfaces F") rentraient dans leur classification. Pour une définition précise, voir [**Fe 00**].

(2) Le résultat exact de Thomsen s'applique aux surfaces réelles de $\mathbb{R}^3$ et son énoncé est différent suivant que l'on s'est placé au voisinage d'un point elliptique ou d'un point hyperbolique de la surface.

(3) Pour des précisions sur ce point, voir [**Si 51**].

abaque est un graphique qui représente des “lignes cotées”[4] suivant différentes valeurs des variables a_i. Pour trouver par exemple a_1 en fonction de α_2 et α_3, il fallait trouver le point d'intersection des lignes cotées $a_2 = \alpha_2$ et $a_3 = \alpha_3$. Par ou près de ce point, passait une ligne $a_1 = cte$, dont la cote donne la valeur cherchée.

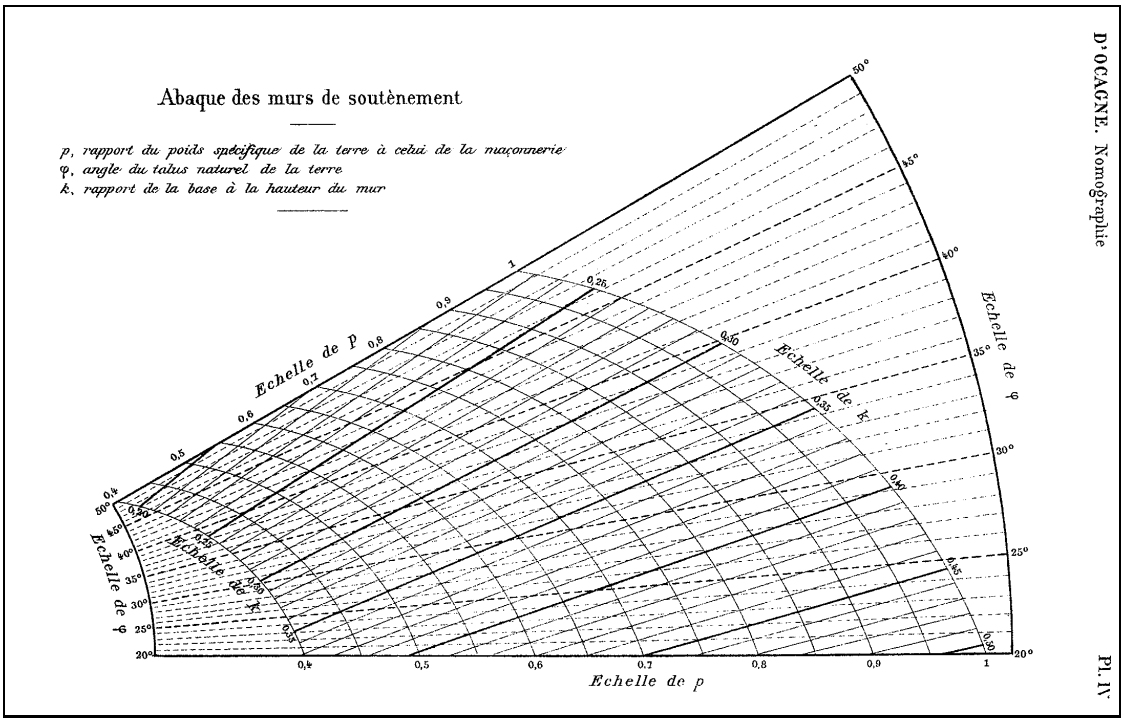


FIGURE 3. Une abaque (tirée d'un livre de M. D'Ocagne).

Ce procédé était reconnu comme assez satisfaisant et, à l'époque, la nomographie suscitait de nombreux travaux et problèmes, tant en “calcul graphique” que dans des branches “pures” des mathématiques. Par exemple, c'est relativement à certains résultats de nomographie que Hilbert formula l'un de ses célèbres 23 problèmes[5]. Notons aussi qu'elle fut enseignée jusqu'au milieu des années 60 dans les écoles d'ingénieurs en France, et jusque dans les années 80 en Union Soviétique.

Son inconvénient principal était un problème de lisibilité. Bien sûr, les abaques où les lignes cotées étaient des segments de droites étaient les plus faciles à utiliser. Ainsi s'est posée la question de savoir s'il était possible de linéariser les lignes cotées d'une abaque donnée. Le problème naturel de la linéarisation des tissus ressortait déjà de questions des mathématiques appliquées des années 1900.

1.2. – Les premiers développements : 1930-1950

La théorie des tissus fut constituée, comme discipline autonome, principalement par l'apport de ce qu'on appellera “l'école de Hambourg”, formée par Blaschke et de nombreux collaborateurs.

[4] “Ligne” était le terme utilisé à l'époque. Il s'agit bien sûr de courbes.
[5] Il s'agit du treizième.

L'activité intense de cette école allemande s'arrêta presque aussi vite qu'elle avait commencé, vers la fin des années 30. Pourtant, jusqu'à la fin des années 50, on trouve des groupes de chercheurs (certes plus modestes que l'école hambourgeoise) qui publièrent sur les tissus, de façon plus anonyme : ainsi, Bompiani, Terracini et Buzano, dans les années 37-40, obtinrent des résultats intéressants. Après la guerre, quelques autres mathématiciens italiens travaillèrent aussi sur les tissus, avec un autre point de vue. Pour finir, signalons les quelques chercheurs européens isolés (espagnols, turcs, roumains) qui s'intéressèrent aux tissus suite aux nombreuses conférences que fit Blaschke en Europe sur le sujet.

1.2.1. L'école de Hambourg

C'est peu après la publication de l'article [**Th 27**] de Thomsen que se mit en place à Hambourg un groupe de recherche sur les tissus, autour de Blaschke. En un peu moins de dix années, Blaschke et ses collaborateurs[(6)] obtinrent de nombreux résultats qui firent de la théorie des tissus une discipline bien établie, avec elle-même plusieurs sous-branches. Nous ne présenterons ici de leurs travaux que ce qui sera abordé dans cette thèse.

Le cadre théorique sur lequel s'appuie notre travail est constitué de résultats obtenus par Blaschke, Bol et Howe. L'interprétation en géométrie des tissus du théorème de Graf et Sauer (voir [**GS 24**]) fut faite par Blaschke. Ce théorème indique qu'un 3-tissu linéaire portant une relation abélienne est formé des tangentes à une courbe algébrique plane de classe trois. Très vite, en 1932, Blaschke et Howe généralisent ce théorème au cas des n-tissus linéaires admettant au moins une relation abélienne (non-dégénérée), faisant ainsi ressortir l'intérêt de la notion de relation abélienne. Le résultat de Bol donnant la borne explicite $(n-1)(n-2)/2$ sur la dimension de l'espace des relations abéliennes fut obtenue très peu de temps après[(7)], et permit la définition du rang d'un tissu. Avec ce formalisme, c'est Howe qui remarqua que le résultat ancien de Lie sur les surfaces de double translation pouvait s'interpréter en géométrie des tissus comme le fait qu'un 4-tissu de rang 3 est algébrisable. Le lien entre les tissus de rang maximal et le théorème d'Abel fut signalé un an plus tard, par Blaschke dans [**Bl 33-1**], donnant ainsi naissance à la notion de tissu algébrique. Blaschke y énonce aussi la généralisation du théorème de Lie au cas des 5-tissus, que l'on sait ne pas être valide. Un fait surprenant est que, dans ce même papier, on présente le 5-tissu de Bol $\mathcal{B}$ comme l'exemple d'un 5-tissu... de rang 5 ! Ainsi, ce n'est pas à partir de la considération de l'équation d'Abel du dilogarithme que Bol a découvert le tissu qui porte maintenant son nom. C'est seulement en 1935 que Bol s'aperçut que $\mathcal{B}$ porte une relation abélienne dilogarithmique supplémentaire et que c'est un exemple de 5-tissu de rang 6, qui n'est pas algébrique (car non-linéarisable).

À cette date (1935), toutes les notions sur lesquelles s'articule la problématique de cette thèse ont donc été mises à jour. On en a un aperçu complet dans le livre de référence sur le sujet [**BB**].

C'est aussi à ce moment que Blaschke et ses collaborateurs se détournent de la géométrie des tissus pour étudier des questions de géométrie intégrale. Peu des membres de l'école de Hambourg retravaillèrent sur les tissus par la suite. Après guerre, Blaschke fit de nombreux exposés sur les tissus en Europe, sans produire de nouveaux résultats. Seul Chern publia à nouveau sur le sujet, à la fin des années 70 (voir plus loin).

---

(6) Parmi lesquels on peut citer Bol, Chern, Howe, Reidemester, etc.
(7) Voir [**Bl 32**].

1.2.2. La géométrie des tissus italienne

Vers la même époque (1937-1940), des géomètres italiens obtinrent des résultats intéressants relatifs aux tissus plans. Ces résultats apparaissent dans plusieurs articles de Bompiani[(8)], de Terracini et de Buzano qui ont été rapportés[(9)] par des membres de l'école hambourgeoise (par exemple Bol) et qui donc étaient connus d'eux. Cependant, ces travaux ne sont quasiment pas référencés, alors que leurs résultats sont très intéressants relativement à l'étude des tissus exceptionnels. À partir d'une construction de Blaschke, et en s'appuyant sur une notion introduite par Corrado Segre, ils ont montré qu'on pouvait associer à un tissu exceptionnel une surface de $\mathbb{CP}^5$ dont la géométrie est très particulière. Terracini et Buzano ont alors déterminé explicitement de nouvelles surfaces avec cette géométrie, chaque surface portant un 5-tissu particulier. La question de savoir si ces tissus étaient exceptionnels n'est signalée qu'en petits caractères et en bas de page dans [**BB**], où elle est qualifiée de facile. Apparemment, personne avant nous n'a étudié leur caractère exceptionnel.

D'autres mathématiciens italiens (tels Vaona, Villa ...) étudièrent des problèmes de déformations des 3-tissus plans vers la fin des années 50 et le début des années 60. Ils obtinrent certains résultats intéressants, par exemple sur la conjecture de Gronwall (voir [**Va 61**] et 4.1.1 dans cette thèse).

1.2.3. La géométrie des tissus dans le reste de l'Europe

Comme on l'a dit, Blaschke fit de nombreuses conférences sur les tissus dans la période de l'après-guerre, ce qui éveilla sans-doute l'intérêt de certains chercheurs européens. Citons par exemple Ozkan, en Turquie, qui publia plusieurs articles sur les tissus dans les années 50, ou encore l'espagnol A. Dou, qui publia un mémoire inconnu et intéressant sur les 4-tissus plans [**Dou 53**].

On signalera aussi le travail des géomètres roumains Pantazi et Mihaileanu, qui, dans de courtes notes, obtinrent des résultats particulièrement importants sur le problème de la détermination du rang des tissus plans. Là encore, leurs travaux furent oubliés.

1.3. – La géométrie des tissus depuis 1960

On couvre là très rapidement une période très longue. Une étude historique sérieuse reste à faire.

La fin des années 60 voit la naissance d'une école russe, menée par Akivis et Goldberg, dont les publications ont été nombreuses et ont englobé tous les aspects (différentiels et algébriques) de la théorie des tissus. Cette école est encore très active aujourd'hui.

1.3.1. L'école russe de Akivis et Goldberg

Nous avons signalé plus haut les liens entre la naissance de la théorie des tissus et la géométrie différentielle projective. À partir du début du 20ième siècle, certains géomètres se mirent à étendre la géométrie différentielle projective à l'étude des sous-variétés des espaces projectifs de dimension arbitraire (on peut citer Cartan, Bol, Terracini, etc.). Pourtant, dans le même temps, cette discipline commençait à péricliter en Occident.

(8) Signalons que celui-ci collabora avec Blaschke ; par exemple, ils obtinrent des bornes sur le rang des tissus mixtes.
(9) On consultera la base de données Zentralblatt für Mathematik.

La situation fut toute différente en Union Soviétique, où une grande école de géométrie différentielle vit le jour, menée par Finikov, Laptev et Vasilyev. Les notions classiques de la géométrie différentielle projective des courbes et des surfaces furent généralisées. Les notions de formes fondamentales, de réseaux conjugués, furent étendues aux sous-variétés des espaces projectifs de dimension quelconque. Les techniques employées faisaient un usage important des apports d'Elie Cartan à la géométrie (méthode du repère mobile, théorie des systèmes différentiels extérieurs).

C'est sans doute encore l'étude des réseaux et des systèmes conjugués sur les variétés projectives de dimension arbitraire qui menèrent Akivis et Goldberg à étudier des tissus en dimension quelconque. Leurs résultats furent nombreux et conduisirent à l'élaboration d'une théorie riche, maintenant exposée dans plusieurs livres (comme par exemple [**G**], [**AG-2**], etc.).

Leurs résultats sont impossibles à décrire ici, tant ils sont nombreux, mais ils portent surtout sur les tissus en dimension plus grande que 2 (on parlera de "tissu multidimensionnel"). Sur les tissus plans, un de leurs résultats importants est [**AGL 04**], où ils apportent une réponse à une ancienne conjecture de Blaschke concernant la linéarisation des tissus plans. Plusieurs résultats sur le rang des tissus multidimensionnels furent également obtenus dans le milieu des années 80 par Goldberg, qui a aussi découvert trois 4-tissus exceptionnels de codimension 2 dans $\mathbb{C}^4$ (on renvoie au huitième chapitre du livre [**G**], où ces résultats sont décrits précisément).

1.3.2. Les travaux de Chern et Griffiths

Chern commença sa carrière mathématique à Hambourg, dans le milieu des années 30. Il fit sa thèse sur les tissus, sous la direction de Blaschke. Il obtint deux résultats (l'un est la borne de Castelnovo sur le rang des tissus de codimension 1, l'autre porte sur les invariants différentiels des 3-tissus de codimension 2 dans $\mathbb{R}^{2n}$) qui donnèrent lieu à ses deux premières publications, en 1935 et 1936 respectivement. Chern conserva tout au long de sa carrière un intérêt certain pour les tissus, et plus particulièrement pour la notion de tissu exceptionnel, comme le montre la lecture de [**Ch 82**], [**Ch 85**] et [**Ch 92**][(10)]. En 1978, il se remit à travailler sur les tissus de rang maximal, en collaboration avec Griffiths. Dans le long papier [**CG 78**], ils démontrent qu'un d-tissu de codimension 1 et de rang maximal est algébrique quand $n \geq 2$ et $d \geq 2n$. Cependant leur preuve n'était pas complète, et il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire non-naturelle pour assurer la validité du résultat. Ils obtinrent également une borne optimale sur le rang des tissus de codimension 2 dans [**CG 78-1**]. L'intérêt de Griffiths pour le sujet provenait sans doute des liens entre la géométrie des tissus et les théorèmes d'algébrisation du type Abel-inverse[(11)]. S'il ne publia pas d'autre article sur le sujet, il conserva toujours un certain intérêt pour les tissus, puisqu'il en discuta dans son exposé d'ouverture du bicentenaire de la naissance d'Abel, à Oslo, en 2001 (retranscrit dans [**AB**]).

1.3.3. Les travaux récents 1980-2000

Depuis une vingtaine d'années, de nouveaux résultats ont été obtenus. On va surtout signaler ceux qui sont relatifs au rang, aux relations abéliennes et aux tissus exceptionnels, puisque ce sont ces

(10) Citons la fin de [**Ch 92**] : "Due to my background I like algebraic manipulation [..]. Local differential geometry calls for such works. But good local theorems are difficult to come by. The problem on maximal rank webs discussed above is clearly an important problem, and will receive my attention. My mathematical education goes on."

(11) Voir les pages 5 et 6 du second tome des "Selected Works of P. Griffiths", récemment publiés par l'AMS.

notions qui sont centrales dans cette thèse.

Les relations abéliennes du tissu de Bol découlent toutes[12] de la relation dilogarithmique satisfaite par le dilogarithme de Rogers, qui, de ce point de vue, semble être plus fondamentale que les autres. En 1982, dans [**GM 82**], Gelfand et MacPherson obtiennent une interprétation géométrique de cette relation qui fait apparaître le tissu de Bol comme tissu sur l'espace des configurations projectives de 5-points dans $\mathbb{RP}^2$. Dans [**Da 83**], Damiano considère pour $n \geq 2$ le tissu en courbe $D(n)$ naturellement défini sur l'espace des configurations projectives de $n+3$ points dans $\mathbb{RP}^n$. En utilisant l'approche de Gelfand et MacPherson, il montre que ce tissu est de rang maximal et donne une interprétation géométrique de "la relation abélienne principale" de $D(n)$. Il obtient ainsi une famille de tissus exceptionnels généralisant le tissu de Bol (qui correspond au cas $n = 2$).

Après avoir montré qu'un d-tissu de codimension 2 sur $\mathbb{C}^4$ de 2-rang maximal est algébrisable dès que $d > 4$, Goldberg détermine des 4-tissus de codimension 2 dans $\mathbb{C}^4$ qui sont exceptionnels. Dans [**Gol 86**] et [**Gol 87**], il donne explicitement trois 4-tissus de codimension 2 dans $\mathbb{C}^4$, de rang maximal (égal à 1 dans ce cas) mais non-algébrisables. Il ne donne pas d'interprétation géométrique de la relation abélienne pour chacun de ces tissus mais étudie leur géométrie.

En 1989, Little dans [**Lit 89**] donne une construction générale (mais non-explicite) d'un $2n$-tissu de codimension 2, de rang maximal, sur l'espace des 0-cycles de degré $2n$ d'une surface K3. En s'appuyant sur un résultat de Mumford et Roitman, il montre que ces tissus ne sont pas linéarisables et donc sont exceptionnels.

Au début des années 90, Hénaut commence l'étude des tissus dans un cadre analytique complexe. Il publiera un peu moins d'une quinzaine d'articles, dont le plus récent [**Hé 04-1**] dans les "Annals of mathematics". Ses recherches concernent autant les tissus multidimensionels que les tissus plans et portent principalement sur les notions relatives au rang et aux relations abéliennes[13].

Sur les tissus plans, citons [**Hé 93**], où il caractérise les tissus plans qui sont linéarisables par un critère différentiel facilement utilisable dans la pratique. Sa dernière publication [**Hé 04-1**] est, elle aussi, particulièrement intéressante puisqu'on y trouve la construction d'une connexion attachée à un d-tissu plan dont la courbure est nulle si et seulement si le tissu est de rang maximal. Il en découle une caractérisation (non-explicite) des d-tissus plans de rang maximal, pour tout $d \geq 3$.

En 2001, date à laquelle nos recherches sur le sujet ont commencé, telle était la situation quant à l'étude des tissus exceptionnels : concernant les tissus exceptionnels plans, aucune avancée n'avait été faite depuis la découverte de Bol en 1935.

2. – Aperçu général de cette thèse

Nous décrivons maintenant la problématique qui nous a motivé au commencement de notre recherche, pour parler ensuite des résultats obtenus.

---

[12] Par prolongement analytique, voir *2.2.1.2.*

[13] Pour un aperçu des résultats qu'il a établis avant 2000, on renvoie à son exposé dans [**W**], qui constitue également une bonne introduction à la théorie des tissus dans le cadre holomorphe, qui est celui de cette thèse.

2.1. – Problématique

La notion de tissu exceptionnel a pris un intérêt nouveau il y a une vingtaine d'années, suite aux nouveaux exemples de Damiano et aux avancées concernant les polylogarithmes (cf. infra). Sur ce point, citons Chern dans [**Ch 85**] :

> *The high-dimensional Abelian equations constitute a subject which has contacts with many branches of mathematics (such as functional equations, partial differential equations, combinatorial characteristic classes, algebraic K-theory, etc.) and which should have a very promising future.*(14)

Dans le même papier, il écrit aussi

> *The determination of all webs of maximum rank will remain a fundamental problem in web geometry and the nonalgebraic ones, if there are any, will be most interesting.*(15)

On désignera le problème de la détermination des tissus exceptionnels comme le **Problème de Chern**. C'est à lui que nous nous sommes attaqué. Plus précisément, nous nous sommes concentré sur les tissus exceptionnels plans pour lesquels le problème de Chern est encore largement ouvert bien qu'il s'énonce de façon élémentaire dans ce cadre. Le premier cas pour lequel il se pose est celui des 5-tissus plans exceptionnels, au sujet desquels Chern pose la question (toujours dans [**Ch 85**]) :

$(\mathcal{Q}_{\mathcal{C}})$ "(For planar webs), *an important unsolved problem is whether there are other 5-webs of rank 6, besides the algebraic ones and Bol's example*".(16)

Nous décrirons plus loin les réponses que nous avons pu apporter à cette question.

Dans la quête des tissus exceptionnels (plans), un intérêt particulier doit être porté aux tissus polylogarithmiques. La relation abélienne "principale" du tissu de Bol est la relation

$$(\star) \qquad \mathbf{D}_2(x)-\mathbf{D}_2(y)-\mathbf{D}_2\big(\frac{x}{y}\big)-\mathbf{D}_2\big(\frac{1-y}{1-x}\big)+\mathbf{D}_2\big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\big)=0$$

satisfaite par le dilogaritme de Rogers $\mathbf{D}_2$(17). Vers la fin des années 70, il apparaît que le dilogarithme a des connexions avec de multiples domaines des mathématiques, comme la géométrie algébrique, l'homologie du groupe linéaire, la théorie des classe caractéristiques, etc. Le lien entre ces diverses apparitions du dilogarithme réside essentiellement dans la relation fonctionnelle $(\star)$.

Il était connu depuis le milieu du 19ième siècle que les polylogarithmes $\mathbf{Li}_n$ d'ordre $n \leq 5$ vérifient des équations fonctionnelles en deux variables semblables à $(\star)$. Par exemple, Spence et Kummer ont indépendamment établi que le trilogarithme $\mathbf{Li}_3$ satisfait l'équation (pour $0 < x < y < 1$) :

(14) "Les relations abéliennes de dimension supérieure constituent un sujet qui a des liens avec de nombreuses branches des mathématiques (comme les équations fonctionnelles, les équations aux dérivées partielles, les classes caractéristiques combinatoires, la K-théorie algébrique, etc.) et qui devrait avoir un avenir prometteur."

(15) "La détermination de tous les tissus de rang maximal demeure un problème fondamental en géométrie des tissus et les tissus non-algébriques, s'il en existe, seront les plus intéressants."

(16) "(Pour les tissus plans), un problème important et non résolu est de savoir s'il existe d'autres 5-tissus de rang 6, en plus des tissus algébriques et de l'exemple de Bol."

(17) Le dilogarithme de Rogers (défini en *2.2.1.2*) est une version modifiée du bilogarithme classique $\mathbf{Li}_2$

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathbf{Li}_3\big(x\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(y\big) - \mathbf{Li}_3\big(\frac{x}{y}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(\frac{1-y}{1-x}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(\frac{x\,(1-y)}{y\,(1-x)}\big) - \mathbf{Li}_3\big(xy\big)\\
(SK)\qquad &+ 2\,\mathbf{Li}_3\big(-\frac{x\,(1-y)}{(1-x)}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(-\frac{(1-y)}{y\,(1-x)}\big) - \mathbf{Li}_3\big(\frac{x\,(1-y)^2}{y\,(1-x)^2}\big)\\
&= 2\,\mathbf{Li}_3(1) - \log(y)^2 \log\big(\frac{1-y}{1-x}\big) + \frac{\pi^2}{3}\log(y) + \frac{1}{3}\log(y)^3\,.
\end{aligned}
$$

Il s'est naturellement posé la question de savoir si les polylogarithmes d'ordre supérieur vérifient eux aussi les mêmes propriétés d'ubiquité que le dilogarithme. Concernant les tissus plans, cela amène naturellement la question (posée explicitement dans [**Hé 01**]) de savoir si le 9-tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ (dit de "Spence-Kummer") défini par les neuf fractions rationnelles qui apparaissent comme argument de $\mathbf{Li}_3$ dans l'équation (SK), est exceptionnel ou non. Du fait que $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ admet le tissu de Bol comme sous-tissu, cette question se ramène à celle de savoir si le rang de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est bien 28. Notre premier résultat (également obtenu de façon indépendante par Gilles Robert) fut de montrer que c'était bien le cas, ce qui permit d'obtenir un second exemple de tissu plan exceptionnel.

Ce résultat indiquait la possibilité d'un lien entre les polylogarithmes, leurs équations fonctionnelles et les tissus plans exceptionnels. C'est ce qu'évoquait Griffiths dans son exposé d'ouverture du bicentenaire de la naissance d'Abel [**Gr 04**], en 2001 : après avoir rappelé les liens entre le tissu de Bol et le dilogarithme et signalé le résultat récent concernant le caractère exceptionnel du tissu de Spence-Kummer, il pose la question :

> $(\mathcal{Q}_{\mathcal{G}})$ *Are all webs of maximal rank which are not algebraizable of this type ?*
> *We do no attempt to formulate this question precisely – intuitively, we are asking whether or not for each k there is an integer $n(k)$ such that there is a "new" $n(k)$-web of maximal rank one of whose abelian relations is a (the ?) functional equation with $n(k)$ terms for the kth polylogarithm $\mathbf{L}i_k$?* [18]

Nous allons maintenant discuter les résultats que nous avons obtenus relativement au problème de Chern et à la question de Griffiths ci-dessus. On en donne une vue d'ensemble en 2.2. Dans la section suivante 3. suivra une description détaillée du contenu de chaque chapitre et de l'appendice.

2.2. – Résultats

Comme nous l'avons dit, notre premier résultat fut de montrer que le tissu de Spence-Kummer était bien de rang maximal. Pour cela, notre approche fut directe : nous avons cherché à résoudre l'équation fonctionnelle suivante qui caractérise les relations abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$:

$$
\begin{aligned}
&F_1\big(x\big) + F_2\big(y\big) + F_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + F_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + F_5\left(\frac{x\,(1-y)}{y\,(1-x)}\right) + \cdot\cdot\\
(\mathcal{SK})\qquad &\cdots + F_6\big(xy\big) + F_7\left(-\frac{x\,(1-y)}{1-x}\right) + F_8\left(-\frac{1-y}{y\,(1-x)}\right) + F_9\left(\frac{x\,(1-y)^2}{y\,(1-x)^2}\right) = 0\,.
\end{aligned}
$$

[18] "Les tissus de rang maximal qui ne sont pas algébriques sont-ils tous de ce type ? Nous n'essayons pas de donner de cette question une formulation précise – intuitivement, nous demandons si, pour tout k, il existe un entier $n(k)$ tel qu'il y ait un "nouveau" $n(k)$-tissu de rang maximal, dont l'une des relations abéliennes est une (l') équation fonctionnelle à $n(k)$ termes pour le k-ième polylogarithme $\mathbf{Li}_k$."

Nous nous sommes ensuite intéressé au problème plus général et naturel de l'étude et de la détermination des solutions d'une équation fonctionnelle abélienne efa, c'est-à-dire d'une équation de la forme $(\mathcal{E})$ ci-dessous, où les U_i sont des fonctions analytiques données, de deux variables :

$$(\mathcal{E}) \qquad F_1\big(U_1(x,y)\big) + \cdots + F_N\big(U_N(x,y)\big) = 0\,.$$

Nos résultats sur ce problème constituent la première partie de cette thèse. Principalement, on donne deux méthodes (l'une s'appliquant de façon générale, l'autre plus spécifique aux cas où les U_i sont des fractions rationnelles) pour résoudre une efa de la forme $(\mathcal{E})$. La plus générale de ces méthodes repose sur le fait que, par des différentiations et des éliminations adéquates, on peut obtenir (pour chaque indice i) une équation différentielle linéaire qui admet comme solution les fonctions F_i apparaissant dans la relation $(\mathcal{E})$. On a ainsi pu résoudre $(\mathcal{SK})$ complètement explicitement, et en déduire facilement que $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est bien exceptionnel.

Nous avons implémenté cette méthode sur ordinateur, obtenant ainsi un outil efficace de résolution des efa, c'est-à-dire un outil permetant de déterminer les relations abéliennes d'un tissu donné. Cela nous a permis de découvrir de nouveaux tissus exceptionnels, qui sont décrits dans la deuxième partie.

La seconde partie de la thèse porte véritablement sur la géométrie des tissus et comporte la majorité de nos résultats. Ceux-ci consistent principalement en la découverte d'un nombre relativement important de nouveaux tissus exceptionnels, apportant ainsi une réponse tant à la question de Chern $(\mathcal{Q}_{\mathcal{C}})$ qu'à celle de Griffiths $(\mathcal{Q}_{\mathcal{G}})$.

De plus, en nous appuyant sur les résultats oubliés de Pantazi, nous avons obtenu des moyens pratiques pour étudier le rang d'un tissu donné sans passer par la détermination de ses relations abéliennes. Cela nous a permis d'étudier les tissus associés aux équations de Kummer du tétralogarithme et du pentalogarithme. On montre que, contrairement aux tissus de Bol et de Spence-Kummer, ces deux "tissus polylogarithmiques" ne sont pas de rang maximal, et donc ne sont pas exceptionnels.

Les derniers chapitres de la thèse reposent sur la "découverte" de certaines publications de Bompiani, Terracini et Buzano. Celles-ci font apparaître que la géométrisation des 5-tissus de rang maximal au moyen de leurs relations abéliennes est une approche très riche, qui a été sous-exploitée. Nous avons appliqué ce point de vue à nos nouveaux exemples de 5-tissus exceptionnels, en déterminant pour chacun leur surface de Blaschke de façon explicite.

Il est alors apparu le fait surprenant que certains de ces tissus exceptionnels sont algébriques en un sens plus général que la notion classique, mais naturel. Cela semble indiquer que la dichotomie ancienne entre tissus algébriques et tissus exceptionnels est peut-être biaisée par une mauvaise définition de la notion de tissu algébrique. Cela s'explique sans doute par le fait que, pendant les 70 dernières années, on ne connaissait qu'un unique exemple de tissu plan exceptionnel.

3. – Plan de la thèse

Dans un premier temps, on décrit le contenu des deux parties et des différentes chapitres dont elles sont formées. On donne ensuite une liste de résultats nouveaux qui apparaissent dans la thèse.

3.1. – Plan détaillé

Partie I. – Équations fonctionnelles abéliennes

Dans cette partie, on étudie les solutions des équations fonctionnelles abéliennes. De par la forme simple de ces équations, il est naturel de chercher les propriétés générales que doivent satisfaire les solutions, et aussi de s'intéresser aux méthodes de résolution effective. Malgré l'aspect naturel et élémentaire de ce problème, il semble qu'il n'avait jamais été considéré pour lui-même auparavant.

La partie I est constituée des trois premiers chapitres et est beaucoup plus courte que la seconde. Si les mathématiques mises en œuvre ici sont très élémentaires, on obtient cependant des résultats nouveaux. Tout le matériel de la première partie sera constamment utilisé dans la seconde, parfois sans référence explicite.

Décrivons plus précisément le contenu de chacun des trois premiers chapitres.

Chapitre 1. – Propriétés générales des solutions d'une efa

Dans ce chapitre, on établit ou on rappelle certains résultats généraux sur les solutions des efa.

On commence par introduire les notions et les notations qui seront utilisées dans toute la première partie de la thèse (voire dans la seconde). On précise les quelques hypothèses naturelles qu'il convient de faire pour éviter certaines pathologies lorsqu'on s'intéresse à la résolution d'une efa. On montre ensuite très simplement que, lorsque ces hypothèses sont vérifiées, les solutions mesurables d'une efa réelle $(\mathcal{E})$ ont essentiellement la même régularité que les U_i. Puisque, dans la suite, on supposera les U_i analytiques, cela permet de se restreindre à la résolution de $(\mathcal{E})$ dans la classe holomorphe, sans perdre en généralité. Ensuite, par des arguments géométriques simples, on montre que les solutions holomorphes locales d'une efa sont en fait globales mais multivaluées. Pour finir, on rappelle un résultat classique de géométrie des tissus, donnant une borne finie explicite sur la dimension de l'espace des solutions d'une efa.

Chapitre 2. – Sur la détermination des solutions d'une efa

Dans ce chapitre, on donne deux méthodes de résolution des efa.

Dans [**Ab 23**], Abel décrit une méthode (conceptuellement élémentaire) pour résoudre les équations fonctionnelles en deux variables, par différentiations successives et éliminations. La première méthode de résolution qu'on propose découle de la remarque (qui n'avait pas été faite auparavant, semble-t-il) que la méthode d'Abel se formalise très bien quand on l'applique aux efa. On obtient ainsi une méthode pratique pour trouver les solutions d'une efa donnée. Signalons que la démarche mise en œuvre ici sera utilisée de façon plus sophistiquée au chapitre 5, pour caractériser certains tissus de rang maximal.

Dans un second temps, on décrit une méthode de résolution basée sur des arguments géométriques.

Elle est moins générale et systématique que la précédente et s'applique par exemple quand les U_i sont des fractions rationnelles. Elle repose sur la remarque que certaines solutions d'une efa $(\mathcal{E})$ sont déterminées par leur monodromie, qui peut-être déduite a priori à partir de $(\mathcal{E})$. Des exemples sont traités qui illustrent cette méthode.

Chapitre 3. – Résolution explicite de deux efa

Ce chapitre est très court. On y résout deux efa particulièrement intéressantes puisque la dimension de l'espace des solutions associé est la plus grande possible. Dans chaque cas, on donne une liste explicite d'une base de l'espace des solutions.

La première de ces équations est l'efa en 9 inconnues $(\mathcal{SK})$. Comme application de sa résolution, on obtient une caractérisation du trilogarithme par l'équation de Spence-Kummer (SK), sous des hypothèses de régularité très faibles.

La seconde efa considérée est une équation à 8 inconnues, qui dépend d'un paramètre a.

Signalons que, quand on les regardera du point de vue de la géométrie des tissus (au chapitre 7), les résultats obtenus ici nous donneront de nouveaux tissus exceptionnels.

Partie II. – Géométrie des tissus

C'est la plus grosse partie de la thèse puisqu'elle en représente plus des deux tiers. On y étudie les tissus plans exceptionnels. Un des apports majeurs de cette partie est de fournir de nombreux exemples entièrement nouveaux de tissus exceptionnels, amenant ainsi un éclairage nouveau et intéressant sur cette notion. Pour un aperçu de ces nouveaux tissus, on peut consulter les différentes tables à la fin de cette introduction.

En plus de recherches complètement personnelles (section 5.2, Chapitre 6, Chapitre 7, Chapitre 9), on a aussi réécrit certains résultats oubliés et particulièrement intéressants de géométrie des tissus (section 5.1, chapitre 8).

Signalons enfin que le dernier chapitre fait apparaître que la définition classique des tissus exceptionnels n'est sans doute pas la bonne. Les preuves n'y sont pas détaillées : il faut le voir comme un chapitre d'ouverture vers de nouvelles recherches.

Décrivons plus précisément les contenus respectifs des chapitres 4 à 9.

Chapitre 4. – La géométrie des tissus de Blaschke et Bol

Ce chapitre est un exposé de la théorie classique des tissus plans et peut être lu indépendamment du reste de la thèse. Il ne contient pas de résultats nouveaux et accorde une part importante aux notions de relations abéliennes, de rang, de tissus algébriques et de tissus exceptionnels. On y donne les définitions et les résultats de base concernant les tissus plans, ainsi que les notations qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

Les seules originalités sont la section 4.2, qui consiste en la description de plusieurs exemples de tissus (classiques ou non) collectés là en guise d'illustration, ainsi que la section 4.4, où l'on discute et l'on motive de façon argumentée l'étude des tissus exceptionnels.

Chapitre 5. – Sur l'étude du rang d'un tissu

Ce chapitre porte sur la caractérisation des tissus de rang maximal au moyen de critères différentiels. Il se compose de deux sections indépendantes.

La première comporte une introduction propre, à laquelle nous renvoyons pour davantage de précisions. Cette section consiste en la réecriture, dans un formalisme moderne, de résultats anciens mais mal connus dus à Alexandru Pantazi.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu en $(\mathbb{C}^2, 0)$. En suivant l'approche esquissée dans la note [**Pa 38**], on donne la construction d'une connexion dont les sections horizontales s'identifient aux relations abéliennes de $\mathcal{W}(d)$. Comme corollaire, on en déduit que $\mathcal{W}(d)$ est de rang maximal si et seulement si la courbure de cette connexion est identiquement nulle. Notons que cette construction est explicite et effective, ce qui permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes (ou d'autres, plus simples mais juste nécessaires) calculables pour qu'un tissu soit de rang maximal. Les contructions sont détaillées dans les cas $d = 3, 4, 5$.

Dans la section 5.2, on s'intéresse au même problème mais avec un point de vue beaucoup plus élémentaire. Soient d fonctions U_i de deux variables qui définissent un d-tissu $\mathcal{W}$. Au chapitre 2, on a vu comment la méthode d'Abel permet d'obtenir une équation différentielle linéaire $E(F_d) = 0$ que doit vérifier toute fonction F_d qui apparaît dans une équation fonctionnelle abélienne

$$F_1(U_1) + \cdots + F_d(U_d) = 0\,.$$

Quand $U_1, .., U_{d-1}$ sont fixées, on explique comment on peut utiliser cette équation différentielle pour obtenir un système différentiel que doit nécessairement satisfaire U_d pour que $\mathcal{W}$ soit de rang maximal. Cette approche ne conduit pas à des résultats généraux mais se révèle efficace quand on l'applique à des cas particuliers. Par exemple, on obtient une nouvelle formule pour la courbure de Blaschke d'un 3-tissu, dont l'expression analytique est particulièrement simple. On caractérise également les fonctions U (resp. V) telles que le tissu $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,U\,)$ $\big($resp. $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y\,,\,V)\big)$ est de rang maximal. On en déduit de nouveaux 5-tissus exceptionnels. Finalement, on montre comment déduire de l'équation E de nouveaux invariants analytiques associés à la classe de tissus (ordonnés) définie par $\mathcal{W}$.

Chapitre 6. – Une famille à un paramètre de 5-tissus exceptionnels

Il s'agit du texte d'un article écrit en collaboration avec Jean-Marie Trépreau. Il est "self-contained". La numérotation des sections et des résultats lui est propre, et il comporte sa propre bibliographie. Il peut être lu complètement indépendamment du reste de la thèse. On y décrit une famille à un paramètre de nouveaux tissus exceptionnels ainsi que cinq tissus particuliers obtenus par "dégénérescence". Pour chacun de ces tissus, on donne une base explicite de l'espace de ses relations abéliennes.

Un élément générique de cette famille est de la forme suivante (avec $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$) :

$$\mathcal{E}_\kappa := \mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,\mathrm{sn}_\kappa\, x\;\mathrm{sn}_\kappa\, y\,\Big)$$

où sn_κ désigne le "sinus elliptique de Jacobi", défini implicitement par la relation

$$z = \int_0^{\mathrm{sn}_\kappa z} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2\,x^2)}}\;.$$

Les relations abéliennes non-triviales de $\mathcal{E}_\kappa$ peuvent se déduire assez facilement de relations fonctionnelles classiques satisfaites par les fonctions thètas.

Ces nouveaux exemples de tissus exceptionnels sont surprenants : ils ne sont pas "algébriques" selon la terminologie classique en vigueur en géométrie des tissus. Pourtant, tant eux-mêmes que leurs relations abéliennes peuvent être décrits à partir de fonctions elliptiques et de fonctions thètas qui sont des objets classiques en géométrie algébrique. D'autre part, parmi les cinq tissus dégénérés figurent des exemples particulièrement simples, tel le tissu

$$\mathcal{W}\Big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x^2+y^2\Big)\,.$$

Bien que ce tissu soit exceptionnel, on montre que ses relations abéliennes sont toutes données par des relations polynomiales élémentaires. Ce tissu sera considéré de nouveau au chapitre 9.

Pour finir, en utilisant l'approche exposée en 5.2, on montre qu'un tissu exceptionnel de la forme $\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,U(x,y)\big)$ est équivalent à l'un de ceux décrits en amont dans le chapitre, sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,U(x,y)\big)$ est hexagonal.

Chapitre 7. – Sur les tissus polylogarithmiques

Ce chapitre comporte trois sections. Les deux premières sont consacrées à l'étude des tissus polylogarithmiques.

La section 7.1 ne comporte pas de résultats nouveaux. Après y avoir présenté les équations de Kummer $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$ du tétra- et du pentalogarithme, on précise la notion de "tissu polylogarithmique" et on explique pourquoi ceux-ci sont de bons candidats pour être des tissus exceptionnels.

En 7.2, on commence par étudier le rang du tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$. Des résultats de 3.2, on déduit qu'il est exceptionnel. On donne aussi ceux de ses sous-tissus qui sont exceptionnels. À l'aide des résultats obtenus en 5.1, on peut entreprendre l'étude des deux tissus associés aux équations $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$. Contrairement à ce qui était attendu, ces tissus ne sont pas de rang maximal. En balayant l'ensemble de leurs sous-k-tissus, pour k fixé, à l'aide d'un ordinateur et en utilisant un critère nécessaire simple pour qu'un tissu soit de rang maximal, on montre que chacun de ces deux tissus admet de nouveaux sous-tissus exceptionnels.

Dans la troisième section du chapitre, on déduit des résultats de 3.3 plusieurs nouvelles familles de k-tissus exceptionnels, pour $k=6$ et $k=8$. On signale aussi un lien entre certains de ces tissus et des configurations de points dans $\mathbb{CP}^2$.

Chapitre 8. – Tissus exceptionnels et géométrie différentielle projective

Ce huitième chapitre développe une approche géométrique pour l'étude des 5-tissus exceptionnels. Il comporte une introduction propre à laquelle on renvoie pour plus de détails.

Les résultats exposés ici sont dus aux géomètres italiens Bompiani, Terracini et Buzano mais ont apparemment été oubliés et ne sont cités nulle part dans la littérature contemporaine sur les tissus. Ils reposent sur les liens étroits entre deux constructions géométriques.

La première est classique en géométrie des tissus : c'est celle qui permet d'associer canoniquement[19] une surface (dite de Blaschke) $\mathcal{S}[\mathcal{W}]\subset\mathbb{CP}^5$ à un 5-tissu $\mathcal{W}$ de rang maximal 6, par une

[19] Modulo $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$.

construction géométrique "à la Poincaré". La seconde construction considérée est due à C. Segre et semble oubliée. Elle permet de définir un 5-tissu canonique sur une surface de $\mathbb{CP}^5$ satisfaisant certaines hypothèses génériquement vérifiées. Son intérêt est qu'elle permet de retrouver la classe d'équivalence analytique d'un 5-tissu exceptionnel $\mathcal{W}$ à partir de sa surface de Blaschke. Cela ramène ainsi l'étude des 5-tissus exceptionnels, modulo équivalence analytique, à celle de leur surface de Blaschke, modulo équivalence projective.

De la section 8.1 à la section 8.4, on expose et on discute ces constructions.

La section 8.5 contient des résultats nouveaux. On y détermine explicitement la surface de Blaschke de chacun des nouveaux 5-tissus exceptionnels obtenus dans les chapitres précédents. Ensuite, en faisant des considérations géométriques élémentaires sur leur surface de Blaschke, on montre que la plupart de ces tissus ne sont pas équivalents. Enfin pour chacun de ces tissus, on donne l'armure et d'autres invariants construits à partir du rang des sous-tissus, achevant ainsi de montrer leur non-équivalence.

Chapitre 9. – Sur la notion de tissu algébrique

Dans ce chapitre, on propose une généralisation de la notion de "tissu algébrique" qui englobe certains tissus exceptionnels selon la terminologie classique.

En s'appuyant sur les constructions géométriques décrites au chapitre 8, on explique que certains tissus dits exceptionnels sont algébriques dans le sens où ils sont décrits géométriquement à partir d'une courbe algébrique, leurs relations abéliennes étant données par l'annulation des sommes abéliennes de certaines formes rationnelles sur la courbe associée.

Appendice. – Algorithmes pour l'étude effective du rang et des relations abéliennes

Dans cet appendice, on donne des lignes de code `maple` pour effectuer sur ordinateur les calculs servant à l'étude du rang et à la détermination des relations abéliennes.

Dans une première section, on a implémenté la méthode d'Abel pour résoudre les efa. On donne un programme qui, si on lui donne un n-uplet de fonctions $(U_1, \ldots, U_n)$ définissant bien un tissu $\mathcal{W}$, renvoie les coefficients de l'équation différentielle E qui admet comme solutions les fonctions F_1.

Dans la deuxième section, on donne des procédures pour pouvoir calculer pratiquement la matrice de la courbure de Pantazi d'un d-tissu, quand $d = 3, 4, 5$. On donne ensuite les codes de procédures calculant les coefficients de Pantazi introduits dans [**Pa 38**] (redéfinis en *5.1.2.2* dans cette thèse).

Guide de lecture : la succession des chapitres a bien sûr été organisée de telle sorte que la lecture soit la plus progressive et cohérente possible. Cependant, si l'on ne désire pas faire une lecture linéaire, on donne ci-dessous la dépendance logique entre les différents chapitres.

La lettre I désigne l'introduction, la lettre A, l'appendice. Une flèche signifie que la lecture du chapitre source rend plus aisée (ou parfois, est nécessaire à la compréhension de) la lecture du chapitre but. Les cercles en gras désignent les parties qu'on peut lire indépendamment de tout le reste.

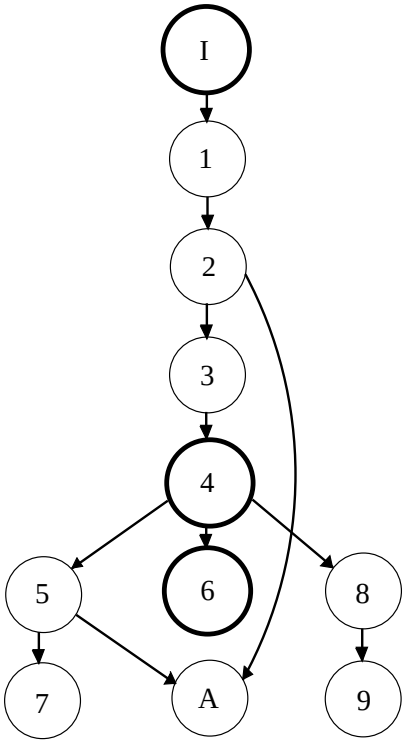


FIGURE 4. Dépendance logique entre les différentes partie de la thèse.

3.2. – Résultats nouveaux contenus dans la thèse

On donne une liste de résultats nouveaux obtenus dans cette thèse. Pour des énoncés précis, on se référera au corps de la thèse.

3.2.1. – De nouveaux tissus exceptionnels

Un de nos principaux résultats consiste en la découverte d'un nombre relativement conséquent de nouveaux k-tissus exceptionnels, pour $k = 5, 6, 7, 8, 9$. De plus, pour chacun de ces tissus, on trouvera dans la thèse une base explicite de ses relations abéliennes.

Ces nouveaux tissus exceptionnels, ainsi que les références les concernant, sont donnés dans les tableaux ci-dessous. Les références sont soit des articles publiés ou à paraître, soit un chapitre de cette thèse, avec entre parenthèses une référence plus précise à la partie du chapitre indiqué où il est question du tissu considéré.

Notons que certains 5-tissus exceptionnels apparaissent sous plusieurs modèles équivalents dans la thèse, et définissent donc la même classe d'équivalence analytique de tissus. Ces différents modèles sont signalés et regroupés dans une même case du tableau ci-dessous.

5-Tissu	Référence(s)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y\big)$	Chap. 6, Chap. 8 (*8.5.4.3*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y,\,\tanh x\,\tanh y\,\big)$ $\mathcal{B}uz(A)$ $\mathcal{W}_{\mathcal{SK},\,12369}$	Chap. 6, Chap. 8 (*8.5.3.1*) [**Buz 39**], [**Buz 39-2**], Chap. 8 (*8.1*) [**Pi**], Chap. 7 (*7.2.1*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y,\,e^x+e^y\,\big)$ $\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y,\,xy\big)$ $\mathcal{B}uz(B)$	[**Pi 04**], Chap. 6, Chap. 8 (*8.5.3.2*) Chap. 5 (*5.2.4*), Chap. 8 (*8.5.5.1*) [**Buz 39**], [**Buz 39-2**], Chap. 8 (*8.1*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x^2-y^2\big)$ $\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\big)$ $\mathcal{T}err(b)$	Chap. 8 (*8.5.2.1*), Chap. 9 [**Pi 04**], Chap. 5 (*5.1.2.3*) [**Te 37**], Chap. 8 (*8.1*)
$\mathcal{T}err(c)$	[**Te 37**], Chap. 8 (*8.5.2.2*)
$\mathcal{T}err(d)$ $\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y\,,\,xy/(x+y)\big)$ $\mathcal{K}(4)[1,2,3,7,8]$	[**Te 37**], Chap. 8 (*8.5.2.3*) Chap. 5 (*5.2.4*), Chap. 8 (*8.5.5.3*) Chap. 7 (*7.2.2*), Chap. 8 (*8.5.6.1*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x^2+y^2\big)$	[**Pi 04**], Chap. 5 (*5.2.4*), Chap. 6, Chap. 8 (*8.5.4.1*), Chap. 9
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y\,,\,x^2+xy+y^2\big)$	Chap. 5 (*5.2.4*), Chap. 8 (*8.5.5.2*), Chap. 9
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y\,,\,xy\,(x+y)\big)$ $\mathcal{K}(5)[1,2,21,25,27]$	Chap. 5 (*5.2.4*), Chap. 8 (*8.5.6.2*) Chap. 7 (*7.2.3*)

Tableau des nouveaux 5-tissus exceptionnels considérés dans cette thèse.

6-Tissu	Référence(s)
$\mathcal{W}_{\mathcal{SK},\,\widehat{369}}$	[**Pi**], Chap. 7 (*7.2.1*)
$\mathcal{W}_{\mathcal{SK},\,\widehat{248}}$	[**Pi**], Chap. 7 (*7.2.1*)
$\mathcal{K}(4)[1,2,3,8,9,10]$	Chap. 7 (*7.2.2*)
$\mathcal{W}_{a,\,\widehat{12}}$	[**Pi**], Chap. 7 (*7.3.2*)
$\mathcal{W}_{a,\,\widehat{38}}$	[**Pi**], Chap. 7 (*7.3.2*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,\big)$	App. (A.2.2)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x/y\,,\,x^2+y^2\,\big)$	App. (A.2.2)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x^2+y^2\,\big)$	App (A.2.2)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x^2-y^2\,\big)$	App (A.2.2)

Tableau des nouveaux 6-tissus exceptionnels considérés dans cette thèse.

7-Tissu	Référence(s)
$\mathcal{W}_{\mathcal{SK},\widehat{69}}$	[**Pi 02**], Chap. 7 (*7.2.1*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,,\,x^2+y^2\big)$	App. (A.2.2)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,,\,x^2-y^2\big)$	App. (A.2.2)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x^2+y^2\,,\,x^2-y^2\big)$	App. (A.2.2)

Tableau des nouveaux 7-tissus exceptionnels considérés dans cette thèse.

8-Tissu	Référence(s)
$\mathcal{W}_a$	[**Pi 02**], Chap. 3 (*3.3*), Chap. 7 (*7.3.2*)
$\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x^2+y^2\,,\,x^2-y^2\,,\,xy\,,\,x/y\big)$	App. (A.2.2)

Tableau des nouveaux 8-tissus exceptionnels considérés dans cette thèse.

9-Tissu	Référence(s)
$\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$	[**Pi 02**], [**Pi**], Chap. 3 (*3.2*), Chap. 7 (*7.2.1*)

Le nouveau 9-tissu exceptionnel considéré dans cette thèse.

3.2.2. – Autres résultats

On donne très succintement d'autres résultats nouveaux que nous avons obtenus. Pour des énoncés précis, on renvoie aux références données.

Chapitre 1 : on se donne une efa

$$(\mathcal{E}) \qquad F_1(U_1)+\cdots+F_n(U_n)=0\,.$$

– **Proposition 1.2.1 :** les solutions mesurables locales de $(\mathcal{E})$ au voisinage d'un point $\omega\in\mathbb{R}^2$ générique sont analytiques si les U_i le sont.

– **Théorème 1.2.2 :** les solutions holomorphes locales de $(\mathcal{E})$ (vue comme efa dans le domaine complexe, les U_i étant supposées analytiques) sont en fait globalement définies mais multivaluées.

Chapitre 2 :

– **Proposition 2.2.2 :** le dilogarithme de Rogers est l'unique fonction mesurable (modulo multiplication par une constante) qui satisfait la version homogène de l'équation fonctionnelle d'Abel.

Chapitre 3 :

– **3.2.1 :** on donne une base explicite des solutions holomorphes de l'efa ($\mathcal{SK}$).

– **Corollaire 3.2.2 :** le trilogarithme est l'unique fonction mesurable et dérivable en 0 qui satisfait l'équation de Spence-Kummer (SK).

– **3.3 :** pour $a > 1$, on donne une base explicite des solutions holomorphes de l'efa :

$$G_1(x) + G_2(y) \;+\; G_3\left(\frac{x}{y}\right) \;+\; G_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \;G_5\left(\frac{x\,(1-y)}{y\,(1-x)}\right) \cdot\cdot$$
$$\cdots + \;G_6\left(\frac{a-y}{a-x}\right) \;+\; G_7\left(\frac{x\,(a-y)}{y\,(a-x)}\right) \;+\; G_8\left(\frac{(1-y)\,(a-x)}{(1-x)\,(a-y)}\right) \;= 0\,.$$

Chapitre 5 :

– **Proposition 5.2.3 :** on donne une formule simple pour calculer la courbure de Blaschke d'un 3-tissu $\mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$ en fonction des U_i.

– **Proposition 5.2.5 :** on caractérise les 4-tissus $\mathcal{W}(U_1, \ldots, U_4)$ de rang maximal par des équations différentielles explicites sur les U_i.

– **Proposition 5.2.6 :** on caractérise les 5-tissus $\mathcal{W}(x, y, x+y, x+a\,y, U)$ de rang maximal par des équations différentielles explicites sur U.

– **Proposition 5.2.7 :** on caractérise les 5-tissus $\mathcal{W}(x, y, x+y, x/y, U)$ de rang maximal par des équations différentielles explicites sur U.

– **Proposition 5.2.9 :** soit $\mathcal{F}$ un feuilletage portant des relations abéliennes d'un tissu $\mathcal{W}$. On définit une *intégrale première privilégiée* pour $\mathcal{F}$, unique modulo multiplication par une constante. On en déduit de nouveaux invariants analytiques pour la paire $(\mathcal{W}, \mathcal{F})$.

Chapitre 6 :

– **Théorème 3 :** pour $\tau \in \{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; \Im m\, z > 0\}$, on montre que le tissu

$$\mathcal{E}_\tau := \mathcal{W}\left(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, \frac{\theta_1(x,\tau)\,\theta_1(y,\tau)}{\theta_4(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau)}\,\right)$$

est exceptionnel. On donne une base explicite de l'espace de ses relations abéliennes, et on caractérise les τ' tels que $\mathcal{E}_{\tau'}$ est équivalent à $\mathcal{E}_\tau$.

– **Théorème 4 :** on donne cinq autres tissus exceptionnels non-équivalents, de la forme $\mathcal{W}(x, y, x+y, x-y, U)$. On détermine explicitement les relations abéliennes de chacun de ces tissus.

– **Théorème 5 :** on montre qu'un tissu exceptionnel $\mathcal{W}(x, y, x+y, x-y, U)$, tel que $\mathcal{W}(x, y, U)$ est hexagonal, est équivalent à l'un des tissus considérés dans les Théorèmes 3 et 4.

– Tout à la fin de ce chapitre, on donne (sous forme d'un tableau) l'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ des 5-tissus exceptionnels des Théorèmes 3 et 4.

Chapitre 7 :

Ce chapitre contient de nombreux résultats concernants les tissus polylogarithmiques. On ne signale ci-dessous que les plus marquants.

– **Théorème 7.2.2 :** on montre que le tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est exceptionnel et on décrit tous ses sous-tissus qui sont exceptionnels.

– **Proposition 7.2.6 :** on montre que les tissus de Kummer $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$ ne sont pas exceptionnels.

– **Théorème 7.3.1 – Corollaire 7.3.3 :** on montre que le tissu $\mathcal{W}_a$ associé à l'efa de la section **3.3** est exceptionnel pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On en déduit une famille à un paramètre de 8-tissus exceptionnels non-équivalents.

Chapitre 8 :

La seule nouveauté du chapitre est la section **8.5** où l'on détermine explicitement la surface de Blaschke de tous les nouveaux 5-tissus exceptionnels considérés dans cette thèse. On donne aussi l'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ de chacun de ces tissus.

Chapitre 9 :

Dans ce chapitre on généralise la notion classique de tissu algébrique en introduisant la notion de tissu G-algébrique (voir **Définition 9.3.3**).

– **Proposition 9.4.3 :** on montre que le tissu $\mathcal{W}\big(x, y, x+y, x-y, x^2+y^2\big)$ est G-algébrique bien qu'il soit exceptionnel au sens classique.

PARTIE I

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ABÉLIENNES

CHAPITRE 1

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE ABÉLIENNE

Dans ce premier chapitre, on entreprend l'étude des équations fonctionnelles de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) = 0 \qquad (n \geq 3)\,,$$

d'inconnues les fonctions F_i, les U_i étant des fonctions fixées de deux variables. Une équation fonctionnelle de ce type sera appelée une *équation fonctionnelle abélienne* (et notée efa pour alléger le texte). La terminologie fait référence à la notion de relation abélienne en géométrie des tissus (voir 4.3.1). On s'intéressera principalement aux solution locales d'une telle équation, c'est-à-dire aux fonctions F_i qui vérifient $(\mathcal{E})$ au voisinage d'un point ω fixé dans le domaine de définition des U_i.

Dans la première section, après avoir motivé rapidement l'étude des solutions des efa, on introduit les notations qui seront utilisées dans le reste de la première partie de cette thèse. On justifie ensuite les quelques restrictions "naturelles" qu'il convient de faire sur les U_i et le point ω, ainsi que sur la régularité supposée des F_i, pour éviter certaines "pathologies" triviales.

Dans la section suivante, on établit trois résultats généraux sur les solutions d'une efa : en 1.2.1, on montre que, quand les "conditions naturelles" décrites en 1.1.2 sont vérifiées, les solutions d'une équation $(\mathcal{E})$ ont essentiellement la même régularité que les U_i. Dans la suite, on suppose les U_i analytiques et on s'intéresse aux solutions holomorphes de $(\mathcal{E})$. En 1.2.1, on montre que les solutions holomorphes locales sont en fait globales mais multivaluées. Pour finir, en 1.2.3, on rappelle un résultat important sur la finitude de la dimension de l'espace engendré par les solutions d'une efa.

1.1. Introduction et notations

La courte introduction ci-dessous a pour but de montrer au lecteur que la notion d'équation fonctionnelle abélienne est intéressante, de par son côté naturel et par le fait que des efa apparaissent dans différentes disciplines des mathématiques. On a cherché à motiver l'étude des efa d'un point de vue historique et mathématique.

1.1.1. Introduction. — La notion d'équation fonctionnelle nécessite la préexistence du concept de fonction, ce qui explique sans doute qu'elle n'apparaît pas dans les mathématiques antiques.

Quelques équations fonctionnelles furent considérées au moyen-âge, où elles servaient parfois de définition pour une fonction. Tel fut le cas du logarithme (introduit par Neper). Avant que ne soit considérée la "fonction logarithme", il fut d'abord question du "logarithme d'un nombre". Les propriétés des puissances (avec $a > 0$ et x, y rationnels)

$$a^x\, a^y = a^{x+y}$$

étaient connues au 16ième siècle, et on en déduisait la relation suivante pour les logarithmes :

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

Cette relation fut utilisée pour construire les logarithmes des nombres rationnels, puis, au 17ième siècle, pour construire les logarithmes des nombres réels : la construction de $\log(x)$ pour x réel reposait sur un passage à la limite et donc sous-entendait la continuité de log. Cette définition du logarithme peut être vue comme le premier exemple de définition d'une fonction par l'équation fonctionnelle qu'elle vérifie. Ce n'est que par la suite que le logarithme fut relié à la primitive de $1/x$.

La méthode qui consiste à définir une nouvelle fonction comme solution d'une équation fonctionnelle a l'avantage d'être particulièrement propre, directe et "économique" et est encore utilisée aujourd'hui. Sur le plan de la rigueur, elle nécessite de donner la preuve que la fonction considérée est bien l'unique solution de l'équation fonctionnelle de départ. Cela demande donc de savoir résoudre des équations fonctionnelles (avec des hypothèses de régularité minimales, pour avoir une définition la plus "forte" possible).

Mais savoir résoudre les efa a bien sûr d'autres applications que celle de permettre une définition"axiomatique" de fonctions (plus ou moins) usuelles.

Par exemple, la résolution d'une efa fut l'argument essentiel utilisé par Cauchy pour prouver ce qui fut un résultat d'analyse important au 19ième siècle, à savoir que la formule sommatoire de Newton

$$(N) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \cdots$$

est vérifiée pour $|x| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappelons ce fragment classique de l'histoire des mathématiques.

Cauchy montre tout d'abord que le membre de droite de (N) converge pour tout $|x| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il fixe alors x et le considère comme une fonction de α seulement, qu'il note $f(\alpha)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Cauchy montre qu'elle vérifie l'efa (sous forme multiplicative) :

$$(C) \qquad f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta)\,.$$

Pour montrer que f est continue, Cauchy invoque le fait que c'est une limite simple de fonction continue, argument qui n'est pas suffisant, comme Weierstrass le mit en lumière à l'époque. Modulo cette célèbre erreur, la preuve par Cauchy de la relation (N) découle ensuite du fait que les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui satisfont (C) sont de la forme $f(x) = A^x$, avec $A \in \mathbb{R}$ (c'est également un résultat de Cauchy). Comme $f(1) = 1 + x$, on déduit $f(\alpha) = (1+x)^\alpha$, ce qui termine la preuve.

La résolution d'une efa a donc permis d'établir un résultat qui fut important au 19ième siècle, comme le montre l'attention qu'il suscita chez plusieurs grands mathématiciens de l'époque (outre Cauchy, on peut citer Poisson, Crelle, Abel, etc.).

Mais les efa interviennent également dans des domaines très récents des mathématiques, comme par exemple, en K-théorie des corps de nombres, en géométrie hyperbolique (voir [**Za 89**], [**Go 93**], [**Ha 94**], [**Go 95**], etc.).

1.1.2. Notations et remarques préliminaires. — Dans toute la Partie I de cette thèse, on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou bien le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- n est un entier plus grand que 3, et i ou j désigne un nombre entier compris entre 1 et n.

- S (resp. X) désigne une variété réelle-analytique (resp. complexe) connexe paracompacte de dimension 2. Dans la suite M désignera S ou X selon que l'on se sera placé dans un cadre réel ou dans un cadre complexe. Le plus souvent X sera la complexifiée de S.
- pour $i = 1, \ldots, n$, $U_i : M \to \mathbb{K}$ désigne une fonction analytique non-constante.
- ω désigne un point de M, et pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $\omega_i := U_i(\omega)$.
- Ω désigne un ouvert non-vide de M contenant ω. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $\Omega_i := U_i(\Omega)$. En particulier, on a $M_i = U_i(M)$ et $X_i = U_i(X)$.

On s'intéresse ici à la résolution locale (au voisinage d'un point ω) ou globale (sur un ouvert Ω) de l'équation fonctionnelle abélienne

$$(\mathcal{E}) \qquad F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) = 0\,,$$

dans une certaine classe de fonctions. Pour bien formaliser cela, considérons les faisceaux suivants (avec $N = M, M_1, \ldots, M_n$ et $Z = X, X_1, \ldots, X_n$) :

- le faisceau $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ des germes de fonctions mesurables sur N à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- le faisceau $C^k_N(\mathbb{K})$ des germes de fonctions C^k sur N à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- le faisceau $\mathcal{O}_Z$ des germes de fonctions holomorphes sur Z ;
- le faisceau $\widetilde{\mathcal{O}}_Z$ des germes de fonctions holomorphes multivaluées sur Z.

Dans la suite, $\mathcal{F}$ désignera l'un de ces faisceaux et on notera $\underline{\mathcal{F}_\omega}$ ou $\underline{\mathcal{F}}(\omega)$ sa fibre en ω.

Soit γ un chemin reliant ω à ϖ dans Z. Sa classe d'homotopie dans l'espace des chemins dans Z d'extrémités ω et ϖ est notée $[\gamma]$. Si $F \in \underline{\mathcal{O}_\omega}$ admet un prolongement analytique le long de γ, on note $F^{[\gamma]}$ le germe holomorphe en ϖ obtenu par ce prolongement analytique (qui ne dépend que de $[\gamma]$). Si γ est un lacet, $F^{[\gamma]}$ sera parfois noté $\mathcal{M}_{[\gamma]}\, F$.

On peut alors définir rigoureusement *l'espace des solutions de* $(\mathcal{E})$ *sur* Ω *dans la classe* $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{\Omega}(\mathcal{E}) := \left\{ \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_N) \in \prod_{i=1}^{N} \mathcal{F}(\Omega_i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} F_i(U_i) = 0 \ \text{ sur } \Omega \right\},$$

ainsi que *l'espace des solutions locales de* $(\mathcal{E})$ *en* ω*, dans la classe* $\mathcal{F}$:

$$\underline{\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{\omega}}(\mathcal{E}) := \left\{ \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_N) \in \prod_{i=1}^{N} \underline{\mathcal{F}_{\omega_i}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} F_i(U_i) = 0 \ \text{ dans } \underline{\mathcal{F}_\omega} \right\}.$$

Ces espaces de solutions admettent une structure naturelle d'espace vectoriel. Si $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes telles que $c_1 + \ldots + c_n = 0$, le n-uplet $(c_1, \ldots, c_n)$ peut s'interpréter comme une solution (triviale) de $(\mathcal{E})$. Ces solutions constantes forment un espace de dimension $n-1$, noté $\mathbf{C}(n)$. Pour ne pas avoir à considérer ces solutions constantes, on introduit les espaces quotients :

$$\mathbf{S}^{\mathcal{F}}_{\Omega}(\mathcal{E}) := \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{\Omega}(\mathcal{E}) \big/ \mathbf{C}(n) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathbf{S}^{\mathcal{F}}_{\omega}}(\mathcal{E}) := \underline{\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{\omega}}(\mathcal{E}) \big/ \mathbf{C}(n)\,.$$

L'application $\Omega \mapsto \mathbf{S}^{\mathcal{F}}_{\Omega}$ définit un faisceau noté $\mathbf{S}^{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$: c'est le *faisceau des solutions de* $(\mathcal{E})$*, dans la classe* $\mathcal{F}$. Le problème fondamental concernant l'efa $(\mathcal{E})$ est celui de l'étude et de la détermination de ce faisceau. On vérifie que pour tout ouvert Ω, on peut reconstruire $\mathbf{S}^{\mathcal{F}}_{\Omega}(\mathcal{E})$ à partir des fibres $\underline{\mathbf{S}^{\mathcal{F}}_{\omega}}(\mathcal{E})$ pour $\omega \in \Omega$. On peut donc se restreindre à l'étude des solutions locales de $(\mathcal{E})$.

Si $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ est une solution (locale ou globale) de $(\mathcal{E})$, on définit sa *longueur* comme étant le nombre de F_k qui ne sont pas identiquement nulles. Si cette longueur vaut n, la solution $\mathbf{F}$ est dite *non-dégénérée*, ou encore, on dit que c'est une *véritable solution* de $(\mathcal{E})$. Dans le cas contraire, on dit que c'est une solution *dégénérée*, ou encore que c'est une *sous-solution* de $(\mathcal{E})$.

Dans les deux chapitres suivants, on considérera des efa qui admettent des solutions dont les composantes sont des intégrales itérées. On va donc définir très rapidement cette notion (due à K.T. Chen) dans le cas où l'espace ambiant est $Z = \mathbb{CP}^1$.

Soit $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_M\}$ un sous-ensemble de $M+1$ points distincts de Z. On suppose que $a_0 = \infty$ (cela n'est pas restrictif) et on se fixe un point base $\omega \notin \Sigma$. On va définir de façon inductive des fonctions notées $\mathbf{L}_{\underline{x}}$ où $\underline{x}$ désigne un mot construit sur l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_M\}$. Soit $\underline{x} = x_{i_0} x_{i_1} .. x_{i_m}$ (avec $1 \leq i_s \leq M$) un tel mot. Alors si $z \in Z$ et si γ est un chemin reliant ω à z dans Z, on pose :

$$\mathbf{L}_{\underline{x}}(z, \gamma) = \mathbf{L}_{x_{i_0} x_{i_1} .. x_{i_m}}(z, \gamma) := \int_\gamma \frac{\mathbf{L}_{x_{i_1} .. x_{i_m}}(\xi)}{a_{i_0} - \xi} \, d\xi \, .$$

On montre que cette définition ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$. On en déduit que $\mathbf{L}_{\underline{x}}$ est une fonction holomorphe sur le revêtement universel de Z. En d'autres termes, c'est une fonction holomorphe multivaluée sur Z. On note $\mathcal{I}\{Z\}$ ou $\mathcal{I}\{\Sigma\}$ l'espace engendré par les constantes et les fonctions $\mathbf{L}_{\underline{x}}$. Cet espace ne dépend pas du point base ω. C'est l'espace des intégrales itérées sur Z. Une intégrale itérée est donc une combinaison linéaire de fonctions $\mathbf{L}_{\underline{x}}$.

On discute maintenant les conditions naturelles qu'il faut imposer sur les U_i et sur la régularité des F_i pour éviter certaines situations pathologiques.

Tout d'abord, il faut clairement exclure le cas où il existe deux indices i, j distincts et une fonction g définie sur un ouvert de M_j tels que $U_i \equiv g \circ U_j$ sur un ouvert de M (on remarquera que cela impose que g est analytique et génériquement de rang 1). Dans cette situation, si ω est tel que g est inversible en ω_j, alors la relation

$$F(U_i) - \left(F \circ g^{-1}\right)(U_j) = F(U_i) - \left(F \circ g^{-1}\right)(g \circ U_i) = 0$$

est trivialement vérifiée par n'importe quel germe $F \in \underline{\mathcal{F}}(\omega_i)$ et c'est une solution locale de $(\mathcal{E})$ en ω dans la classe $\mathcal{F}$. En particulier, on a $\underline{\mathbf{S}}_\omega^{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ de dimension infinie. Afin de ne pas s'encombrer de ce genre de situation, on demande que la condition suivante soit vérifiée sur le domaine d'étude :

$$(\mathcal{W}) \qquad dU_i \wedge dU_j \not\equiv 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j) \, .$$

Cette condition signifie qu'en un point ω générique, on a $dU_i \wedge dU_j(\omega) \neq 0$. Cela se traduit géométriquement par le fait que les lignes de niveaux de U_i et U_j sont transverses dans un voisinage V de ω. Autrement dit, les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n$ définissent un tissu sur V.

À partir de maintenant, on suppose que la condition $\mathcal{W}$ est vérifiée.

On va expliciter deux autres conditions qu'il est nécessaire d'imposer pour que l'espace des solutions locales à $(\mathcal{E})$ en ω dans la classe $\mathcal{F}$ ait de "bonnes propriétés". L'une de ces conditions concerne la régularité minimale des F_i qu'il faut supposer, l'autre est une hypothèse de généricité sur ω.

La nécessité d'imposer ces deux conditions ressort déjà de la considération de l'équations de Cauchy généralisée $(\mathcal{C})$, qui est un exemple particulièrement élémentaire d'efa :

$$(\mathcal{C}) \qquad F_1(x) + F_2(y) + F_3(xy) = 0 \, .$$

À partir d'une base de Hamel $\mathcal{B}$ (*i.e.* une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$), on peut construire une application non-constante $A_{\mathcal{B}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive, c'est à dire telle que $A_{\mathcal{B}}(a+b) = A_{\mathcal{B}}(a) + A_{\mathcal{B}}(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. Alors l'application $M_{\mathcal{B}} := A_{\mathcal{B}} \circ \log : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifie

$$M_{\mathcal{B}}(x) + M_{\mathcal{B}}(y) - M_{\mathcal{B}}(xy) = 0 \qquad (x, y > 0) \, .$$

On en déduit que, quelle que soit $\mathcal{B}$, $(M_{\mathcal{B}}, M_{\mathcal{B}}, -M_{\mathcal{B}})$ est une solution globale de $(\mathcal{C})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Du fait que l'ensemble des bases de Hamel n'est pas dénombrable, il découle que si aucune hypothèse n'est faite sur la régularité des solutions d'une certaine efa, alors celles-ci peuvent engendrer un espace de dimension infinie non-dénombrable.

Cela contraste nettement avec le cas où l'on demande que les solutions soient au moins mesurables. En effet, au voisinage d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, toute solution mesurable de $(\mathcal{C})$ est un multiple de $(\log, \log, -\log)$ (modulo les solutions constantes). De plus, ces solutions sont analytiques : elles ont la régularité des fonctions intérieures qui apparaissent dans l'équation $(\mathcal{C})$.

Cet exemple fait clairement ressortir que l'hypothèse de mesurabilité est nécessaire si l'on veut que les solutions d'une efa satisfassent de "bonnes propriétés" de régularité et de finitude. On verra en 1.2 que cette hypothèse de mesurabilité est également suffisante. Tout ceci justifie qu'on ne s'intéresse qu'aux solutions au moins mesurables de $(\mathcal{E})$.

Puisqu'on s'intéresse à la résolution locale des efa en un point ω, il est également nécessaire de faire une hypothèse sur ω pour éviter des situations analogues à la suivante : si l'on considère $(\mathcal{C})$ comme équation dans le champ complexe, on montre facilement qu'elle admet une unique solution analytique non-constante (modulo multiplication par un scalaire) au voisinage de tout point $\omega := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$. Ainsi, pour tout $\omega \notin \Sigma := \{ xy = 0 \}$, on a :

$$\dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}_{\omega}^{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}) = 1 \,.$$

Ces solutions proviennent d'une solution globale de $(\mathcal{C})$ holomorphe mais multivaluée et peuvent toutes se déduire l'une de l'autre par prolongement analytique. Par contre, on montre facilement que $(\mathcal{C})$ n'admet aucune solution locale mesurable non-triviale au voisinage des points de la forme $\omega = (x, y)$ quand $xy = 0$. En d'autres termes, pour tout $\omega \in \Sigma$, on a :

$$\dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}_{\omega}^{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}) = 0 \,.$$

Pour une afe quelconque $(\mathcal{E})$, le même phénomène se produit : il existe un sous-ensemble analytique $S(\mathcal{E})$ de X en les points duquel la résolution locale de $(\mathcal{E})$ est problématique. On montrera que cet ensemble est inclus dans l'ensemble $\Sigma(\mathcal{E})$ formé des points où l'hypothèse $(\mathcal{W})$ n'est pas vérifiée :

$$S(\mathcal{E}) \subset \Sigma(\mathcal{E}) := \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \omega \in X \,\middle|\, dU_i \wedge dU_j(\omega) = 0 \right\} \,.$$

Dans la suite, on note Y l'ouvert dense $M \setminus \Sigma(\mathcal{E})$.

En 1.2.3, on montre que pour tout $\omega, \varpi \in Y$, les solutions holomorphes locales de $(\mathcal{E})$ en ϖ peuvent s'obtenir à partir des solutions holomorphes de $(\mathcal{E})$ en ω par prolongement analytique. En d'autres termes, les solutions holomorphes locales en $\omega \notin \Sigma(\mathcal{E})$ sont en fait globales (mais elles peuvent être multivaluées). Cela justifie qu'on se restreigne à la résolution locale de $(\mathcal{E})$ en les points $\omega \notin \Sigma(\mathcal{E})$.

Pour résumer, on a fait ressortir que si l'on s'intéresse à la résolution locale de $(\mathcal{E})$ en ω, il est nécessaire de supposer que

1. $\omega \notin \Sigma(\mathcal{E})$ (cela implique que la condition $\mathcal{W}$ est bien vérifiée au voisinage de ω) ;
2. les solutions $(F_1, \ldots, F_n)$ de $(\mathcal{E})$ étudiées sont supposées au moins mesurables.

Dans ce qui suit, on se placera toujours dans une situation où ces hypothèses sont satisfaites.

1.2. Quelques résultats sur les solutions d'une équation fonctionnelle abélienne

En 1.2.1, on commence par établir un résultat sur la régularité des solutions d'une efa réelle $(\mathcal{E})$. On en déduira que la détermination des solutions mesurables se ramène à la détermination des solutions holomorphes de $(\mathcal{E})$, considérée comme efa dans le domaine complexe. En 1.2.2, on montre que les solutions locales holomorphes d'une efa dans le domaine complexe sont en fait globales (mais multivaluées). Pour finir, on donne un résultat classique qui affirme la finitude de l'espace des solutions locales d'une efa.

1.2.1. Sur la régularité des solutions d'une équation fonctionnelle abélienne. — On se place ici dans un cadre réel. On fixe une efa $(\mathcal{E})$ et $\omega \in S \setminus \Sigma(\mathcal{E})$. On va montrer que les solutions mesurables de $(\mathcal{E})$ au voisinage de ω sont forcément analytiques. Comme il s'agit de prouver un résultat de régularité qui est une notion locale, on ne perd pas en généralité en supposant que $S = \{\, |x| < 1, |y| < 1 \,\}$, $\Sigma(\mathcal{E}) = \emptyset$, $\omega = 0$ et $U_i(0) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. De même, on peut se restreindre aux solutions dont les composantes sont à valeurs réelles.

Ces conventions étant posées, on peut énoncer la

Proposition 1.2.1. — *Soit* $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) \in (\underline{\mathcal{M}}_0)^n$ *tel que* $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) \equiv 0$ *dans un voisinage de* 0. *Alors les* F_i *sont analytiques. Les complexifiés* $F_i^{\mathbb{C}} \in \underline{\mathcal{O}}_0$ *sont tels que* $(F_1^{\mathbb{C}}, \ldots, F_n^{\mathbb{C}})$ *est une solution holomorphe locale de* $(\mathcal{E})$ *dans un voisinage complexe de l'origine.*

Démonstration : on garde les notations de l'énoncé. Par une application directe du Theorem 3.3 de [**Já 86**], on déduit que l'hypothèse de mesurabilité faite sur les F_i implique leur continuité[(1)]. Notons qu'on peut montrer que la mesurabilité des F_i implique leur continuité en supposant les U_i de classe C^2 seulement.

On montre par récurrence que les F_i sont lisses au voisinage de 0. Soit $k \geq 0$. Supposons qu'on ait montré que $F_1, \ldots, F_n$ sont C^k dans un voisinage de l'origine. Puisque $\omega = 0 \notin \Sigma(\mathcal{E})$, on a $dU_1 \wedge dU_2 \neq 0$ au voisinage de 0 et, quitte à prendre U_1 et U_2 comme nouvelles coordonnées, on peut supposer que $U_1(x, y) = x$ et $U_2(x, y) = y$. Alors pour (x, y) suffisamment proche de $(0, 0)$, on a :

$$(*) \qquad F_1(x) + F_2(y) + F_3\big(U_3(x, y)\big) + \cdots + F_n\big(U_n(x, y)\big) = 0\,,$$

d'où en intégrant :

$$y \times F_1(x) = -\int_0^y \Big(F_2(y) + F_3\big(U_3(x, y)\big) + \cdots + F_n\big(U_n(x, y)\big)\Big)\, dy\,.$$

Puisqu'on a supposé les F_i de classe C^k, le membre de droite de cette dernière égalité est de classe C^{k+1}. Il ne reste plus qu'à fixer $y \neq 0$ pour obtenir que F_1 est C^{k+1} dans un voisinage de l'origine. Vu qu'on peut supposer $U_i(x, y) = x$ et $U_j(x, y) = y$ quels que soient $i, j = 1, \ldots, n$ avec $i \neq j$, on montre ainsi par récurrence que les F_i sont C^∞ (notons que si l'on a supposé les U_i seulement C^{s+1}, le même argument montre que les F_i sont C^s au moins).

Montrons maintenant que les F_i sont analytiques. Pour $k = 1, \ldots, n$, posons

$$\phi_k := F_k(U_k) \qquad \text{et} \qquad X_k := \frac{\partial U_k}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial U_k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

(1) Le Theorem 4.1 du même article montre que la continuité des F_i est également assurée si l'on suppose que ceux-ci sont dans la première classe de Baire (*i.e.* qu'elles sont continues sur une intersection dénombrable d'ouverts denses). On en déduit que l'énoncé de la Proposition 1.2.1 est encore valide sous cette autre hypothèse de régularité.

Le n-uplet $(F_1, \dots, F_n)$ est solution de $(*)$ si et seulement si $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est solution du système :

$$(\mathcal{S}) \ : \qquad \begin{cases} X_k(\phi_k) = 0 \qquad (k = 1, \dots, n)\,, \\ \partial_x\big(\phi_1 + \cdots + \phi_n\big) = 0\,, \\ \partial_y\big(\phi_1 + \cdots + \phi_n\big) = 0\,. \end{cases}$$

C'est un système différentiel linéaire homogène du premier ordre. En l'écrivant sous forme matricielle et en considérant la matrice des symboles principaux associée, on montre que le système $(\mathcal{S})$ est elliptique (voir [**JR 86**]). Par des résultats classiques sur l'hypoellipticité des opérateurs différentiels linéaires elliptiques à coefficients analytiques, on déduit que les solutions de $(\mathcal{S})$ sont en fait analytiques si elles sont supposées suffisamment régulières. Il en découle immédiatement que les F_i sont analytiques.

Le fait que les $F_i^{\mathbb{C}}$ vérifient la version complexe de $(\mathcal{E})$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ est une conséquence directe du théorème d'unicité en analyse complexe. ■

Remarque : on montre de la même façon la version "avec second membre" de la Proposition 1.2.1, à savoir que les fonctions mesurables F_i sont analytiques si le germe $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n)$ l'est.

De cette proposition, on déduit un morphisme $\mathbb{R}$-linéaire injectif de "complexification" :

$$\begin{aligned} \varrho \quad : \quad & \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}) \\ & (F_k)_{k=1}^n \longmapsto \big(F_k^{\mathbb{C}}\big)_{k=1}^n\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a trivialement un morphisme de "restriction au domaine réel" :

$$\begin{aligned} \rho \quad : \quad & \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}) \\ & (G_k)_{k=1}^n \longmapsto \big(\Re e(G_k|_{\mathbb{R}})\big)_{k=1}^n\,. \end{aligned}$$

Il est clair que $\rho \circ \varrho$ est l'identité sur $\underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E})$: la détermination dans le champ réel des solutions mesurables de $(\mathcal{E})$ se ramène à la détermination des solutions holomorphes de $(\mathcal{E})$ considérée comme efa dans le champ complexe. Cela justifie que l'on ne s'intéresse plus qu'à l'étude des solutions holomorphes. À partir de maintenant, on se place dans un cadre analytique complexe.

1.2.2. Sur le prolongement analytique des solutions d'une équation fonctionnelle abélienne. — Dans cette section, on montre qu'une solution holomorphe locale d'une efa $(\mathcal{E})$ au voisinage d'un point $\omega \notin \Sigma(\mathcal{E})$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin qui évite $\Sigma(\mathcal{E})$.

On pose $Y := X \setminus \Sigma(\mathcal{E})$ et $Y_k := U_k(Y)$ pour $k = 1, \dots, n$. On a le

Théorème 1.2.2. — *Soit $\omega \in Y$ et des germes $F_k \in \underline{\mathcal{O}}(Y_k, \omega_k)$ $(k = 1, \dots, n)$ tels que $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n)$ admette un prolongement analytique le long de tout chemin dans Y. Alors pour tout k, le germe F_k est la détermination en ω_k d'une fonction holomorphe multivaluée sur Y_k.*

Démonstration : on fixe une métrique sur X, notée d. On va supposer que $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) \in \underline{\mathcal{O}}(Y, \omega)$ est identiquement nul. La démonstration dans le cas général est identique.

Posons $\sigma(\omega) := d\big(\omega, \Sigma(\mathcal{E})\big) > 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que les applications $\phi_k := F_k \circ U_k$ sont définies sur la boule ouverte $B(\omega, \varepsilon) := \{\varpi \,|\, d(\omega, \varpi) < \varepsilon\} \subset Y$. On en déduit que

$$\tau(\omega) := \inf\big\{t > 0 \;\big|\; \forall\, k\,,\ \phi_k \text{ se prolonge de façon holomorphe à } B(\omega, t)\big\} \geq \varepsilon > 0\,.$$

Montrons que $\tau(\omega) = \sigma(\omega)$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\tau(\omega) < \sigma(\omega)$. On pose $B_\omega := B(\omega, \tau(\omega))$. Vu la définition de $\tau(\omega)$, on a $\phi_k \in \mathcal{O}(B_\omega)$ pour $k = 1, \ldots, n$. Soit $\varpi \in \partial B(\omega, \tau(\omega))$. On va montrer que chaque ϕ_k admet un prolongement holomorphe au voisinage de ϖ.

On se fixe une carte holomorphe sur un voisinage ouvert Ω de ϖ et on note x, y les coordonnées holomorphes associées. Pour $k = 1, \ldots, n$, on considère les champs de vecteurs $\mathcal{X}_k := (\partial_y U_k)\, \partial_x - (\partial_x U_k)\, \partial_y$ définis sur Ω. De par la définition des ϕ_k, on a $\mathcal{X}_k(\phi_k) = 0$ sur $B_\omega \cap \Omega$ (quel que soit k) : la fonction ϕ_k est constante le long des lignes de niveaux $\{\, U_k = cte \,\}$. Un point essentiel est que ces lignes de niveaux sont globalement définies sur Y et en particulier au voisinage de ϖ. De plus, elles s'intersectent transversalement en ϖ. Ces deux faits vont nous permettre de prolonger chaque ϕ_k au voisinage de ϖ.

On note $\mathrm{T}_\varpi^{\mathbb{R}}\, \partial B_\omega$ l'espace tangent à ∂B_ω en ϖ. C'est un sous-espace réel à trois dimension de l'espace complexe tangent à Y en ϖ, noté $\mathrm{T}_\varpi Y$. L'espace $\mathrm{T}_\varpi^{\mathbb{R}}\, \partial B_\omega$ contient une unique droite complexe de $\mathrm{T}_\varpi Y$ que l'on note $\mathrm{T}_\varpi\, \partial B_\omega$. Pour $k \leq n$, soit $C_k(\varpi)$ la ligne de niveau $\{U_k = cte\}$ passant par ϖ. Comme on a supposé $\tau(\omega) < \sigma(\omega)$, on a $\varpi \notin \Sigma(\mathcal{E})$ et donc $d\, U_k(\varpi) \neq 0$ pour tout k. Ainsi, quitte à restreindre l'ouvert Ω, on peut supposer que l'intersection de $C^k(\varpi)$ avec Ω est une variété complexe de dimension 1. On note $\mathrm{T}_\varpi C^k$ son espace complexe tangent en ϖ.

On va prolonger ϕ_1 au voisinage de ϖ. Supposons que $\mathrm{T}_\varpi\, \partial B_\omega$ et $\mathrm{T}_\varpi C^1$ s'intersectent transversalement dans $\mathrm{T}_\varpi Y$. Appelons *condition* (T) cette condition de transversalité. Le fait que $\mathrm{T}_\varpi\, \partial B_\omega$ contienne une unique droite complexe implique que $\mathrm{T}_\varpi C^k \not\subset \mathrm{T}_\varpi\, \partial B_\omega$ (pour des raisons de dimension). On en déduit que $C^k(\varpi) \cap B_\omega \neq \emptyset$. Parce que tous les objets géométriques considérés ici sont analytiques et donc lisses, la *condition* (T) est ouverte, ce qui implique que, quitte à restreindre Ω, on peut supposer que pour tout $\zeta \in \Omega$, on a $C^1(\zeta) \cap B_\omega \neq \emptyset$. Soit alors $\zeta' \in C^1(\zeta) \cap B_\omega$: on définit la valeur de ϕ_1 en ζ en posant $\phi_1(\zeta) := \phi_1(\zeta')$. Comme ϕ_1 est constante le long des lignes de niveaux de U_1 dans B_ω, on en déduit que $\phi_1(\zeta)$ ne dépend pas de ζ'. On définit ainsi un prolongement de ϕ_1 à tout Ω, que l'on note encore ϕ_1. Il est constant le long des lignes de niveaux de U_1, et on montre sans difficulté qu'il est holomorphe (voir la Figure 1).

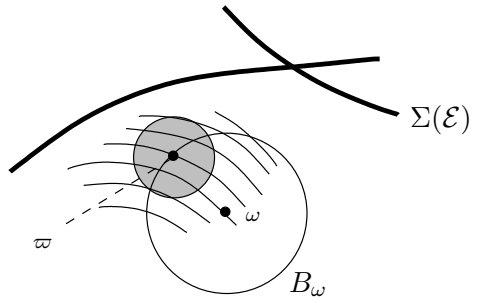


FIGURE 1. cas où la *condition* (T) est vérifiée.

Traitons maintenant le cas où la *condition* (T) n'est pas satisfaite en ϖ (cette situation est représentée par la Figure 2). On a : $\mathrm{T}_\varpi\, \partial B_\omega = \mathrm{T}_\varpi C^1$. L'hypothèse de position générale $dU_1 \wedge dU_k(\varpi) \neq 0$ est vérifiée pour $k = 2, \ldots, n$. Cela signifie que les courbes $C^k(\varpi)$ intersectent transversalement $C^1(\varpi)$ en ϖ. On en déduit que les courbes $C^k(\varpi)$ satisfont toutes la *condition* (T) en ϖ (pour $k = 2, \ldots, n$). Les mêmes arguments que ci-dessus impliquent que chaque ϕ_k admet un prolongement holomorphe dans un voisinage de ϖ. On note encore ϕ_k ces prolongements. On pose

alors, au voisinage de ϖ :

$$(\star) \qquad \phi_1 := -(\phi_2 + \cdots + \phi_n)\,.$$

Puisque l'équation $(\mathcal{E})$ est vérifiée sur B_ω, cela définit bien un prolongement holomorphe de ϕ_1.

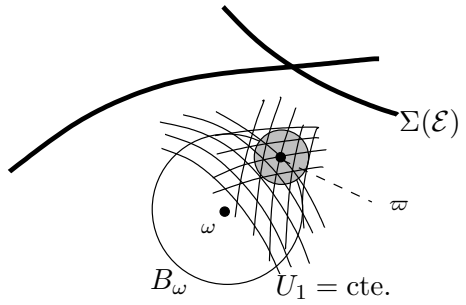


FIGURE 2. cas où la *condition* (T) n'est pas vérifiée

Ainsi, comme ϖ est arbitraire dans la discussion ci-dessus, on peut prolonger chaque ϕ_i au voisinage de n'importe quel point du bord de B_ω. Cela contredit la définition de $\tau(\omega)$. On en déduit qu'on a forcément $\tau(\omega) = \sigma(\omega)$.

Il est maintenant facile d'établir le théorème. Soit $\gamma : [0,1] \to Y$ un chemin reliant ω à un point $\omega' \in Y$. De ce qui précède, il découle immédiatement que tous les germes ϕ_k admettent un prolongement analytique le long de γ. On en déduit que ces ϕ_k sont des déterminations en ω de fonctions $\Phi_k \in \widetilde{\mathcal{O}}(Y)$ (pour $k = 1, \ldots, n$). D'autre part, dans la boule B_ω, la fonction ϕ_k est constante le long des lignes de niveaux de U_k. Par le théorème d'unicité, on en déduit que Φ_k satisfait cette propriété globalement sur Y. Cela implique qu'en tout point $\omega' \in Y$ toute détermination de Φ_k s'écrira $F_k(U_k)$. Il en découle que Φ_k est "globalement" de la forme $\mathrm{F}_k(U_k)$, où F_k est une fonction holomorphe multivaluée sur Y_k dont une détermination en ω_k est le germe F_k initial. Le théorème est démontré. ■

Remarque : comme on l'a vu plus haut, à toute solution de $(\mathcal{E})$ est associée une unique solution du système différentiel $(\mathcal{S})$ de la Proposition 1.2.1. On peut considérer le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ sur Y associé à ce système différentiel. On peut montrer que la variété caractéristique de $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ est la section nulle du fibré cotangent T^*Y. Ce $\mathcal{D}$-module est donc une connexion et, en particulier, est holonome. Un théorème très général sur la cohomologie du complexe des solutions d'un $\mathcal{D}$-module holonome ("le théorème de constructibilité" de Kashiwara) implique alors de façon immédiate le résultat précédent. Au lieu d'utiliser un tel "théorème-massue", nous avons préféré en donner une preuve géométrique élémentaire.

Dans le deuxième chapitre, on montre qu'il existe des équations différentielles linéaires L_k à coefficients méromorphes sur Y, telles que si $(F_1, \ldots, F_n)$ est une solution (locale) de $(\mathcal{E})$, alors F_k est une solution de L_k (pour $k = 1, \ldots, n$). On en déduit immédiatement que ces F_k se prolongent holomorphiquement sur le complémentaire O_k d'un ensemble analytique dans X_k. Cependant, il semble difficile d'établir qu'on a $O_k \supset Y_k$.

Du Théorème 1.2.2, il vient (avec les mêmes notations) :

Corollaire 1.2.3. — *Si γ est un chemin reliant ω à ϖ dans Y, alors le prolongement analytique le long de γ des solutions holomorphes locales en ω de $(\mathcal{E})$ donne lieu à un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{S}}_{\omega}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{S}}_{\varpi}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E}) \\ (F_1, \ldots, F_n) & \longmapsto & \left(F_1^{[\gamma_1]}, \ldots, F_n^{[\gamma_n]}\right). \end{array}$$

(On a posé $\gamma_k := U_k \circ \gamma$ pour $k = 1, \ldots, n$).

Ainsi, de la résolution locale de $(\mathcal{E})$ en un point, on pourra déduire la résolution locale en n'importe quel autre point.

A priori, les solutions globales d'une efa sont multivaluées. Dans certains cas explicites intéressants, il se trouve que les composantes de ces solutions sont hautement ramifiées. Cela aura deux conséquences pour nous :

– la première est que par prolongement analytique le long des lacets d'origine $\omega \in Y$, on pourra obtenir de nouvelles solutions de $(\mathcal{E})$ à partir d'une solution connue ;

– la deuxième est qu'il sera parfois possible de déterminer la monodromie des composantes d'une solutions de $(\mathcal{E})$ directement à partir de l'équation fonctionnelle. Cela donne lieu à une "méthode" pour résoudre les efa (voir 2.2).

1.2.3. Finitude de la dimension de l'espace des solutions d'une efa. — Il s'agit ici de rappeler la :

Proposition 1.2.4. — *Si $\omega \notin \Sigma(\mathcal{E})$, l'espace des solutions holomorphes locales en ω d'une* efa *est de dimension finie. On a la borne explicite et optimale :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}}_{\omega}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E}) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,.$$

Ce résultat, formulé dans le cadre de la géométrie des tissus plans, est dû à Bol et date de 1932. On renvoie au chapitre 4 (section 3) pour des précisions sur la borne $(n-1)(n-2)/2$, qui est fondamentale en géométrie des tissus. On ne donne pas ici de démonstration de cette proposition, qui sera obtenue comme corollaire des résultats de la section 5.1. (cf. Corollaire 5.1.12).

Notons que cette proposition reste valide dans le réel. La preuve de Bol demande, comme hypothèses de régularité, que les U_i soient C^d au moins, où d est une constante qui dépend de n. Dans [**Fr 70**], B. Fridman montre qu'on peut en fait prendre $d = 1$ dans tous les cas.

Exemple : au voisinage d'un point $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}$, on a :

$$\frac{d\,xy}{xy} = \frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = \frac{d\,x}{x} + \frac{d\,y}{y}\,.$$

On en déduit que, si L_κ désigne la fonction holomorphe $z \mapsto \int_\kappa^z dx/x$, alors $\mathbf{L} := \left(L_{x_0}, L_{y_0}, -L_{x_0 y_0}\right)$ est une solution non-triviale de $(\mathcal{C})$ au voisinage de ω. Parce que cette efa est à trois inconnues, on a $\dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}}_{\omega}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \leq 1$ par la proposition ci-dessus. On retrouve ainsi sans calculs le résulat bien connu :

$$\underline{\mathbf{S}}_{\omega}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) = \langle \mathbf{L} \rangle\,.$$

CHAPITRE 2

SUR LA DÉTERMINATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE ABÉLIENNE

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de la résolution effective d'une efa fixée

$$F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) = 0$$

qu'on désignera par $(\mathcal{E})$ dans toute la suite. On a dégagé deux méthodes de résolution, de nature distincte.

La première, exposée en 2.1, repose sur le fait que, suivant une méthode générale que l'on peut attribuer à Abel, il est possible d'éliminer les inconnues F_i pour construire des équations différentielles linéaires que les F_i solutions de $(\mathcal{E})$ devront nécessairement vérifier. Cela ramène la résolution d'une efa à la résolution de plusieurs équations différentielles linéaires. Cette méthode, que l'on appellera *la méthode d'Abel*, s'applique localement, se formalise rigoureusement et donne lieu à un algorithme efficace que l'on a implémenté sur `maple` (voir 2.1 ci-dessous et la section A.1 de l'appendice).

En 2.2, on propose une deuxième méthode de résolution, qui repose sur des arguments de monodromie qui sont de nature globale. Elle pourra s'appliquer si les U_i sont des fonctions définies sur une variété complexe X et telles que la topologie de $X \setminus \Sigma(\mathcal{E})$ est non-triviale, par exemple si les U_i sont des fractions rationnelles. Elle repose sur le fait que, dans certains cas, certaines solutions d'une efa sont déterminées par leur monodromie, qui peut être déterminée "a priori" à partir de l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E})$. Si cette deuxième méthode repose sur des arguments de nature plus géométrique que ceux qui justifient la méthode d'Abel, elle est aussi moins bien formalisée et moins générale. On l'appliquera cependant avec succès dans plusieurs cas intéressants, dans ce chapitre et le suivant.

2.1. La méthode d'Abel

La première publication de Abel (voir [**Ab 23**]) consiste en la description d'une *méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables* (c'est d'ailleurs le titre de l'article).

Il y décrit les grandes lignes d'un procédé maintenant très classique pour résoudre les équations fonctionnelles en deux (ou plusieurs) variables : il explique qu'à partir de l'équation fonctionnelle considérée, il faut éliminer les différentes inconnues en procédant à des différentiations successives. Au final, on obtient une équation différentielle qui porte sur une unique inconnue. Il ne reste alors plus qu'à résoudre ces équations différentielles pour obtenir les formes les plus générales que peuvent prendre les inconnues qui apparaissent dans l'équation fonctionnelle de départ : sa résolution dans la plus grande généralité s'en déduit alors sans difficulté.

Bien sûr, cette approche avait déja été utilisée par des prédécesseurs d'Abel mais seulement dans des cas particuliers. C'est Abel qui en a fait une "méthode générale" et c'est pour cette raison qu'on l'appelle la "méthode d'Abel".

Dans [**Ab 23**], il illustre cette méthode en résolvant les deux équations fonctionnelles :

$$(\mathcal{A}) \qquad \begin{aligned} &F(x)+F(y)-F(xy)=0\,,\\ &G(x)+G(y)-G\big(\frac{x+y}{1-xy}\big)=0\,,\end{aligned}$$

sur lesquelles nous reviendrons (notons que Abel ne précise à aucun moment le domaine de validité supposé de l'équation considérée, ni les hypothèses de régularité faites sur l'inconnue).

Il se trouve que la méthode d'Abel s'applique de façon très efficace à la résolution des équations fonctionnelles abéliennes. Ce fait, somme toute assez élémentaire, n'est pourtant signalé nulle part dans la littérature où apparaît la notion d'efa (comme par exemple la littérature sur la "géométrie des tissus", voir la seconde partie de cette thèse). C'est peut-être parce que l'application pratique de cette méthode demande très vite beaucoup de calculs, qu'il n'est pas possible de traiter à la main la plupart du temps.

On dispose maintenant de moyens de calcul formel performants qui sont susceptibles de rendre cette méthode de résolution effective et donc digne d'intérêt. Dans le cas des efa, la méthode d'Abel se laisse suffisamment formaliser pour qu'on puisse construire un algorithme qui, à partir de $(U_1,\dots,U_n)$, renvoie les coefficients méromorphes $a_1,\dots,a_{m-1}$ d'une équation différentielle linéaire

$$a_1(u)\,F_1'(u)+\cdots+a_{m-1}(u)\,F_1^{(m-1)}(u)+F_1^{(m)}(u)=0$$

qui sera vérifiée par les composantes en U_1 des solutions de $(\mathcal{E})$.

C'est pour décrire précisément cet algorithme qu'on détaille maintenant comment la méthode d'Abel se formalise dans le cas des efa .

Dans tout ce qui suit, l'expression *équation différentielle linéaire* sera abrégée edl.

Pour faire le lien entre l'efa initale et les edl que l'on veut obtenir, il est pratique d'introduire une notion d'*équation fonctionnelle-différentielle abélienne* (abrégée efda) qui généralise à la fois la notion d'efa et celle d'edl. Nous allons poser quelques définitions précises.

Pour simplifier la présentation, on travaille dans les germes en $(\mathbb{C}^2,0)$ et on supposera que, pour $i=1,\dots,n$, on a $U_i(0)=0$. Soit $\underline{\mathcal{A}}=\big(\mathcal{A}_i^j\big)$ (avec $i=1,\dots,n$ et $j=0,\dots,m_i$) une famille de germes de fonctions méromorphes en l'origine telles que, pour tout i, il existe $j\le m_i$ avec $\mathcal{A}_i^{(j)}\not\equiv 0$.

Définition 2.1.1. — On dit que l'opérateur :

$$\mathsf{efda}\big[\underline{\mathcal{A}}\big] \quad : \quad \mathcal{O}(\mathbb{C},0)^n\ni(G_1,\dots,G_n)\mapsto\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{m_i}\mathcal{A}_i^j\,G_i^{(j)}(U_i)\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^2,0)$$

est un *opérateur fonctionnel-différentiel abélien* de *longueur* n. L'efda associée est l'équation

$$\mathsf{efda}(\underline{\mathcal{A}}) \qquad : \qquad \sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{m_i}\mathcal{A}_i^j\,G_i^{(j)}(U_i)=0\,,$$

dont l'*espace des solutions* est l'espace vectoriel

$$\underline{\mathcal{S}}\big[\underline{\mathcal{A}}\big]:=\operatorname{Ker}\Big(\mathsf{efda}\big[\underline{\mathcal{A}}\big]\ :\ \mathcal{O}(\mathbb{C},0)^n\to\mathcal{O}(\mathbb{C}^2,0)\Big)\,.$$

Le n-uplet $(m_1, \dots, m_n)$ est le *type* de $\mathsf{efda}(\underline{\mathcal{A}})$. On dit que c'est son *véritable type* si

$$\mathcal{A}_i^{m_i} \not\equiv 0 \qquad\qquad \text{pour } \ i = 1, \dots, n\,.$$

Avec cette définition, on peut dire que les efa et les edl sont des edfa particulières, de type respectif $(0, \dots, 0)$ et (k) (avec $k > 0$). Introduisons une relation d'ordre sur les types qui nous sera utile :

Définition 2.1.2. — Soient $\underline{m} = (m_i)_{i=1}^n$ et $\underline{w} = (w_k)_{k=1}^N$ deux types. On dit que $\underline{m}$ *est plus petit que* $\underline{w}$ si $n < N$, ou bien si $n = N$, et que $\underline{m}$ est plus petit que $\underline{w}$ pour l'ordre lexicographique inverse.

On a maintenant tous les éléments pour expliquer rigoureusement le *procédé d'élimination d'Abel* qui, à partir d'une edfa donnée de type $\underline{m}$, permet d'en déduire une edfa admettant les solutions de l' edfa initiale comme solutions et dont le véritable type est strictement plus petit que $\underline{m}$.

Soit $F_1, \dots, F_n$ des germes holomorphes en 0, vérifiant l'équation $\mathsf{efda}\left[\underline{\mathcal{A}}\right]$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} \mathcal{A}_i^j \, F_i^{(j)}(U_i) = 0\,.$$

On suppose que $\mathcal{A}_i^{m_i} \not\equiv 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Le véritable type de $\mathsf{efda}[\underline{\mathcal{A}}]$ est donc $(m_1, \dots, m_n)$.

Puisque $\mathcal{A}_n^{m_n} \not\equiv 0$, on peut diviser l'équation précédente par $\mathcal{A}_n^{m_n}$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{\mathcal{A}_i^j}{\mathcal{A}_n^{m_n}} \, F_i^{(j)}(U_i) + \sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\mathcal{A}_n^j}{\mathcal{A}_n^{m_n}} \, F_n^{(j)}(U_n) + F_n^{(m_n)}(U_n) = 0\,.$$

Deux cas sont à dinstinguer, suivant que tous les quotients $\mathcal{A}_n^j / \mathcal{A}_n^{m_n}$ sont des fonctions en la variable U_n ou pas. On suppose dans un premier temps que ce n'est pas le cas (on a donc $m_n > 0$).

En appliquant la dérivation $X_n := (\partial_y U_n)_y \, \partial_x - (\partial_x U_n) \, \partial_y$ à l'équation ci-dessus, il vient

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i} X_n \left(\frac{\mathcal{A}_i^j}{\mathcal{A}_n^{m_n}} \, F_i^{(j)}(U_i) \right) + \sum_{j=0}^{m_n-1} X_n \left(\frac{\mathcal{A}_n^j}{\mathcal{A}_n^{m_n}} \right) F_n^{(j)}(U_n) = 0\,.$$

On peut encore écrire cette relation

$$\mathsf{efda}\left[\underline{\widehat{\mathcal{A}}}\right] \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\widehat{m}_i} \widehat{\mathcal{A}}_i^j \, F_i^{(j)}(U_i) = 0\,,$$

où $\widehat{m}_n = m_n - 1 \geq 0$, $\widehat{m}_i = m_i + 1$ pour $i < n$ et $\underline{\widehat{\mathcal{A}}} = (\widehat{\mathcal{A}}_i^j)$, avec

$$(\star) \qquad \widehat{\mathcal{A}}_i^j = \begin{cases} X_n\big(\frac{\mathcal{A}_i^0}{\mathcal{A}_n^{m_n}}\big) & \text{pour } i < n \text{ et } \ j = 0\,, \\ X_n\big(\frac{\mathcal{A}_i^j}{\mathcal{A}_1^{m_1}}\big) + \frac{\mathcal{A}_i^{j-1}}{\mathcal{A}_n^{m_n}} X_n(U_i) & \text{pour } i < n \text{ et } \ 0 < j \leq m_i\,, \\ \frac{\mathcal{A}_i^{m_i}}{\mathcal{A}_n^{m_n}} \, X_n(U_i) & \text{pour } i < n \text{ et } \ j = m_i + 1\,, \\ X_n\big(\frac{\mathcal{A}_n^j}{\mathcal{A}_n^{m_n}}\big) & \text{pour } i = n \text{ et } \ 0 \leq j < m_n\,. \end{cases}$$

L'edfa associée à $\underline{\widehat{\mathcal{A}}}$ est de type $(\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_n)$ qui est plus petit que le véritable type $(m_1, \dots, m_n)$ de $\mathsf{edfa}(\underline{\mathcal{A}})$. A fortiori, cela sera vrai pour le véritable type de $\mathsf{edfa}(\underline{\widehat{\mathcal{A}}})$.

Traitons maintenant le cas où $X_n(\mathcal{A}_n^j / \mathcal{A}_n^{m_n}) \equiv 0$ pour $j = 0, \dots, m_n$. Par application de X_n à $\mathsf{efda}[\underline{\mathcal{A}}]$, on obtient que $(F_1, \dots, F_n)$ est solution de

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\widehat{m}_i} \widehat{\mathcal{A}}_i^j \, F_i^{(j)}(U_i) = 0\,,$$

où les $\widehat{m}_i$ et les coefficients $\widehat{\mathcal{A}}_i^j$ (pour $i < n$ et $j \leq \widehat{m}_i$) sont ceux qui viennent d'être définis ci-dessus.

De ce qui précède, on déduit que si $(F_1, \ldots, F_n)$ est une solution de $\mathsf{efda}[\underline{\mathcal{A}}]$, c'est encore une solution de $\mathsf{efda}[\underline{\widehat{\mathcal{A}}}]$ qui est de type strictement plus petit. On appellera l'application $\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\widehat{\mathcal{A}}}$, l'*application d'élimination d'Abel* ou encore, le *procédé d'élimination d'Abel*.

Remarques : 1. l'hypothèse de position générale faite sur les U_k implique que $X_n(U_k) \not\equiv 0$ pour $k < n$. Vu les formules $(\star)$ qui définissent $\widehat{\mathcal{A}}_i^{\widehat{m}_i}$ en fonction de $\mathcal{A}_i^{m_i}$, on déduit que le véritable type de $\underline{\widehat{\mathcal{A}}}$ est $(\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_{n-1})$ ou bien est de la forme $(\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_{n-1}, \kappa)$ avec $\kappa < m_n$.

2. les formules $(\star)$ montrent également que les coefficients de $\underline{\widehat{\mathcal{A}}}$ sont des expressions rationnelles en les U_i, leurs dérivées partielles et les dérivées partielles d'ordre 1 des coefficients de $\underline{\mathcal{A}}$.

Nous dirons que $\mathsf{edfa}[\underline{\mathcal{A}}]$ est *triviale* si les $\mathcal{A}_i^j$ sont tous identiquement nuls au voisinage de l'origine. Si $\mathsf{edfa}[\underline{\mathcal{A}}]$ est non-triviale, on dit qu'elle est *irréductible* si $\mathsf{edfa}[\underline{\widehat{\mathcal{A}}}]$ est triviale. Vu la Remarque 1 ci-dessus, il est clair qu'une efda ne peut être irréductible que si elle est de la forme

$$A_0\, F_1(U_1) + A_1\, F_1'(U_1) + \cdots + A_m\, F_1^m(U_1) = 0\,,$$

avec $X_1(A_k) = 0$ pour $k = 0, \ldots, m$, *i.e* si elle est de la forme

$$(*) \qquad a_0(U_1)\, F_1(U_1) + a_1(U_1)\, F_1'(U_1) + \cdots + a_m(U_1)\, F_1^m(U_1) = 0\,,$$

c'est-à-dire si c'est un équation différentielle linéaire en la variable U_1.

Par induction sur le type, on obtient facilement la

Proposition 2.1.3. — *Soit $\underline{\mathcal{A}}$ une* efda *non-triviale. Alors il existe une équation différentielle $(*)$ telle que si $(F_1, \ldots, F_n)$ est solution de $\underline{\mathcal{A}}$, F_1 est une solution de $(*)$. Celle* edl *est obtenue par l'application successive du procédé d'élimination d'Abel. Ses coefficients peuvent s'exprimer comme des expressions rationnelles en les coefficients de $\underline{\mathcal{A}}$, les U_k, et leurs dérivées partielles.*

Bien sûr, ce résulat s'applique aux efa, qui sont des efda de type particulier. Dans ce cas, les coefficients des edl obtenues par la méthode d'Abel sont des expressions rationnelles en les U_i et leurs dérivées partielles. Cette simple remarque sera utilisée de façon intéressante en 5.2.

Exemples : 1. soient $F_1, \ldots, F_5$ satisfaisant l'équation d'Abel généralisée

$$F_1\big(x\big) + F_2\big(y\big) + F_3\big(x/y\big) + F_4\Big((1-y)/(1-x)\Big) + F_5\Big((x/y)(1-y)/(1-x)\Big) = 0\,.$$

Par application de la méthode d'Abel, on montre que F_1 est solution de l'équation différentielle

$$F^{(4)}(x) + \frac{4(2x^3 - 3x^2 + x)}{x^2(1-x)^2}\, F'''(x) + \frac{2(1 - 7x + 7x^2)}{x^2(1-x)^2}\, F''(x) + \frac{2(2x-1)}{x^2(1-x)^2}\, F'(x) = 0$$

qui admet pour solutions générales les fonctions de la forme (avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$) :

$$x \longmapsto \alpha\,\big(\,\mathbf{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\,\log(x)\log(1-x)\,\big) + \beta\,\log(x) + \gamma\,\log(1-x) + \delta\,.$$

Pour une résolution complète de cette efa, on renvoie à la section *2.2.1.2* plus loin dans ce chapitre.

2. dans [**Wes 02**], Wesolowski cherche à résoudre l'équation de "Matsumoto-Yor" généralisée

$$(\mathcal{MY}) \qquad G_1(x) + G_2(y) + G_3\big(x(x+y)\big) + G_4\big(y(x+y)\big) = 0$$

sous l'hypothèse d'intégrabilité locale des G_i, en supposant $(\mathcal{MY})$ vérifiée pour $x, y > 0$. Par la Proposition 1.2.1, on sait que l'hypothèse de mesurabilité suffit. De plus, par application de la

méthode d'Abel, on établit que si les G_i sont solutions de $(\mathcal{MY})$ au voisinage d'un point générique $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$, alors G_1 et G_2 (resp. G_3 et G_4) satisfont l'équation différentielle

$$x^2\, G'''(x) + x\, G''(x) - G'(x) = 0 \qquad \Big(\text{resp.} \quad x\, G'''(x) + 2\, G''(x) = 0\Big)\,.$$

On en déduit que $(\mathcal{MY})$ possède deux solutions linéairement indépendantes non-triviales :

$$(x)^2 - (y)^2 - x(x+y) + y(x+y) = 0\,,$$
$$\text{et} \qquad \log(x) - \log(y) + \log\big(x(x+y)\big) - \log\big(y(x+y)\big) = 0\,.$$

Notre résolution de $(\mathcal{MY})$ est plus générale et plus complète que celle de [**Wes 02**].

Remarques : si on pose $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_n)$, la Proposition 2.1.3 ci-dessus donne la construction d'une équation linéaire qu'on note $\mathsf{edl}(\mathcal{U})$ qui sera vérifiée par toute fonction F_1 composante d'une solution $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) = 0$ de $(\mathcal{E})$. Cette équation dépend de l'ordre dans lequel sont effectués les multiples procédés d'élimination d'Abel. Si on note $\mathcal{U}_\sigma = (U_1, U_{\sigma(2)}, \ldots, U_{\sigma(n)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{\{2,\ldots,n\}}$, il peut arriver que, pour certaines permutations σ, les équations $\mathsf{edl}(\mathcal{U})$ et $\mathsf{edl}(\mathcal{U}_\sigma)$ ne soient pas du même ordre. Ainsi, il est possible que $\mathsf{edl}(\mathcal{U})$ ne caractérise pas les composantes selon U_1 des solutions de $(\mathcal{E})$. Il nous semble intéressant de parler un peu de ce problème.

Soit $\underline{\mathcal{M}}[\partial]$ l'anneau des (germes) d'opérateurs différentiels à coefficients méromorphes en l'origine. C'est un anneau (non-commutatif) qui admet une (en fait deux : à droite ou à gauche, on choisit cette dernière) division euclidienne naturelle. On note $\mathbf{F}_1$ le sous-espace engendré par les composantes F_1 des solutions de $(\mathcal{E})$.

Le problème qui se pose est celui de la construction d'un opérateur différentiel unitaire $P_1[\mathcal{U}] \in \underline{\mathcal{M}}[\partial]$ qui caractérise $\mathbf{F}_1$, *i.e.* tel que

$$Sol\big(P_1[\mathcal{U}]\big) := \big\{\, F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0) \;\big|\; P_1[\mathcal{U}]\big(F\,\big) = 0 \,\big\} = \mathbf{F}_1\,.$$

Il est clair qu'un tel opérateur existe toujours : si $\{F_1^1, F_1^2, \ldots, F_1^m\}$ est une base de $\mathbf{F}_1$, alors on peut considérer l'opérateur différentiel unitaire d'ordre m, défini par :

$$L_{\mathbf{F}_1}(G) := \frac{W_r\big(F_1^1, \ldots, F_1^m, G\big)}{W_r\big(F_1^1, \ldots, F_1^m\big)}$$

où W_r désigne le wronskien. D'après un lemme classique de théorie des équations différentielles linéaires, l'espace des solutions de l'équation $L_{\mathbf{F}_1}(G) = 0$ est exactement $\mathbf{F}_1$. L'unicité de $P_1[\mathcal{U}]$ découle de façon immédiate du fait que l'anneau $\underline{\mathcal{M}}[\partial]$ est principal (à droite).

On ne sait pas comment construire $L_{\mathbf{F}_1}$ à partir des U_k. Cependant, en notant $\mathsf{EDL}(\mathcal{U})$ le plus grand commun diviseur des $\mathsf{edl}(\mathcal{U}_\sigma)$ dans $\underline{\mathcal{M}}[\partial]$ (pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{\{2,\ldots,n\}}$), il s'est trouvé que $\mathsf{EDL}(\mathcal{U})$ caractérisait bien $\mathbf{F}_1$, dans **tous les cas que nous avons étudiés**. Il serait intéressant de savoir si cela est vrai en toute généralité et, si c'est bien le cas, pourquoi.

À de nombreux endroits dans cette thèse, on donne des listes de solutions pour ceraines efa. La plupart ont été obtenues par l'application de la méthode d'Abel, qui se révèle être un outil efficace pour résoudre les efa.

Lors de l'application de la méthode d'Abel, le procédé d'élimination d'Abel s'arrête avant l'obtention de l'edl $F_1'(U_1) = 0$ si et seulement si les U_i vérifient une certaine équation différentielle rationnelle en leurs dérivées partielles. On en déduit que, les U_k étant fixées pour $k = 2, \ldots, n$, on aura $\mathbf{F}_1 = \mathbb{C}$ si U_1 est suffisamment générique. De cette remarque on déduit que

si les U_i sont suffisamment génériques, l'efa $(\mathcal{E})$ *ne possède pas de solution non-constante.*

On va s'intéresser à des efa qui admettent beaucoup de solutions et plus particulièrement à celles dont les solutions engendrent un espace de la plus grande dimension possible. De par la remarque ci-dessus, ces efa sont "hautement non-génériques". On peut dire que le problème fondamental qui nous occupe dans cette thèse est celui de comprendre de quelle nature est la spécificité des efa pour lesquelles la borne de la Proposition 1.2.4 est atteinte.

2.2. La méthode de monodromie a priori

Dans cette section, on explique comment le fait pour $(F_1, \ldots, F_n)$ d'être solution d'une efa $(\mathcal{E})$ permet dans certains cas de déterminer *a priori* la monodromie des F_i. On montre ensuite que la connaissance de ces monodromies permet (dans certains cas) de construire des solutions de $(\mathcal{E})$.

Contrairement à la méthode précédente, celle qui est décrite ici ne s'applique pas dans le cas général : elle repose sur des arguments géométriques et demande donc que les objets considérés soient globalement définis. Une situation qui rentre dans ce cadre est celle où X est une surface algébrique complexe et les U_i des fonctions rationnelles sur X. Dans toute cette section, nous supposerons que l'on est dans ce cas, avec l'hypothèse supplémentaire que $X := \mathbb{CP}^2$. Ces hypothèses simplificatrices sont justifiées par le fait que tous les exemples explicites que nous considérerons dans ce chapitre et le suivant sont de ce type.

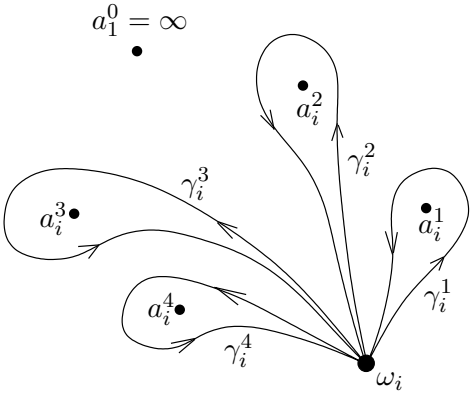
La méthode décrite ici permet de déterminer les solutions d'une efa qui sont à croissance logarithmique, quand les U_i satisfont une condition nommée *condition* (C) (définie ci-dessous). Cette condition n'est pas naturelle et est restrictive mais sera vérifiée dans les cas qui nous intéresseront, et elle permet d'exposer cette méthode de *monodromie a priori* de façon claire et relativement bien formalisée.

Pour i compris entre 1 et n, U_i désigne une fraction rationnelle non-constante en deux variables. On la considère comme une fonction rationnelle sur $X := \mathbb{CP}^2$. Le lieu singulier $\Sigma(\mathcal{E})$ déterminé par les U_i est de dimension 1. On pose $Y := X \setminus \Sigma(\mathcal{E})$ et on fixe un point courant $\omega \in Y$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, il existe un entier $m_i > 0$ et des points distincts a_i^κ de $\mathbb{CP}^1$ ($\kappa = 0, \ldots, m_i$) tels que

$$Y_i := U_i(Y) = \mathbb{CP}^1 \setminus \left\{ a_i^\kappa \,|\, 0 \leq \kappa \leq m_i \right\}.$$

Quitte à composer U_i à gauche par une transformation projective, on peut toujours supposer que $a_i^0 = \infty$. Pour $\kappa \leq m_i$, on choisit un lacet γ_i^κ d'origine ω_i, d'indice 1 par rapport à a_i^σ si $\sigma = \kappa$ et d'indice nul sinon. Alors les classes d'homotopies $[\gamma_i^\kappa]$ et leur inverses engendrent $\Pi_1(Y_i, \omega_i)$.



Pour $i \leq n$, on note δ_i le degré d'une courbe de niveau générique $\{\, U_i = \lambda \}$. Pour $k \neq i$, l'application $U_{ik} := (U_i, U_k) \,:\, Y \to Y_i \times Y_k$ est un revêtement fini à δ_{ik} feuillets, avec $0 < \delta_{ik} \leq \delta_i\, \delta_k$.

La *condition* (C) que l'on suppose vérifiée dans tout ce qui suit est que :

pour tout i compris entre 1 et n, il existe $\ell = \ell(i) \neq i$ tel que le revêtement $U_{i\ell}$ est 1-1.

Sous cette hypothèse, pour $\kappa = 1, \ldots, m_i$ il existe un lacet $\overline{\gamma}_{i\ell}^{\kappa}$ dans Y, d'origine ω, tel que

$$[U_i \circ \overline{\gamma}_{i\ell}^{\kappa}] = [\overline{\gamma}_i^{\kappa}] \quad \text{dans } \Pi_1(X_i, \omega_i) \qquad \text{et} \qquad [U_\ell \circ \overline{\gamma}_{i\ell}^{\kappa}] = [1] \quad \text{dans } \Pi_1(X_\ell, \omega_\ell)\,.$$

On fixe maintenant une solution non-dégénérée de $(\mathcal{E})$ en ω, notée $\mathbf{F} := (F_1, \ldots, F_n)$. On a

$$F_1(U_1) + F_2(U_2) + \cdots + F_n(U_n) = 0 \qquad (\text{dans } \underline{\mathcal{O}_\omega})\,.$$

D'après le Théorème 1.2.2, chaque F_k peut être analytiquement prolongé le long de n'importe quel chemin dans Y_k. On peut donc "prolonger l'équation" ci-dessus le long de $\overline{\gamma}_{i\ell}^{\kappa}$. On obtient :

$$F_1^{[U_1 \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]}(U_1) + \cdots + F_i^{[\gamma_i^{\kappa}]}(U_i) + \cdots + F_\ell^{[1]}(U_\ell) + \cdots + F_n^{[U_n \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]}(U_n) = 0 \qquad (\text{dans } \underline{\mathcal{O}_\omega})\,.$$

Cette nouvelle équation fonctionnelle est notée

$$\mathbf{F}^{[\overline{\gamma}_i^{\kappa}]} := \Big(F_1^{[U_1 \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]}, \ldots, F_n^{[U_n \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]} \Big) \in \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E})\,.$$

La différence $\mathbf{F}^{[\widetilde{\gamma}_i^{\kappa}]} - \mathbf{F}$ est une solution de $(\mathcal{E})$ en ω : on a $\mathbf{F}^{[\widetilde{\gamma}_i^{\kappa}]} - \mathbf{F} \in \underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E})$, ou de façon plus explicite :

$$\begin{aligned} &\big(F_1^{[U_1 \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]}(U_1) - F_1(U_1)\big) + \cdots + \big(F_i^{[\gamma_i^{\lambda}]}(U_i) - F_i(U_i)\big) + \cdot\cdot \\ &\qquad \cdot\cdot + \big(F_\ell^{[1]}(U_\ell) - F_\ell(U_\ell)\big) + \cdots + \big(F_n^{[U_n \circ \overline{\gamma}_i^{\kappa}]}(U_n) - F_n(U_n)\big) = 0\,. \end{aligned}$$

Du fait que $F_\ell^{[1]} - F_\ell \equiv 0$, on déduit que $\mathbf{F}^{[\overline{\gamma}_i^{\kappa}]} - \mathbf{F}$ est une sous-solution de $(\mathcal{E})$.

Supposons, d'autre part, que l'on connaisse une base $\{\, \mathbf{B}^\nu = (B_1^\nu, \ldots, B_n^\nu) \mid \nu = 1, \ldots, M \,\}$ de l'espace engendré par les sous-solutions de $(\mathcal{E})$ (on peut supposer que les $\mathbf{B}^\nu$ sont des sous-solutions).

Alors pour $\kappa = 1, \ldots, m_i$, $\mathbf{F}^{[\widetilde{\gamma}_i^{\kappa}]} - \mathbf{F}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des $\mathbf{B}^\nu$: on a

$$\mathbf{F}^{[\overline{\gamma}_i^{\kappa}]} - \mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{M} \beta_i^{\kappa,\nu}\, \mathbf{B}^\nu\,,$$

où les $\beta_i^{\kappa,\nu}$ sont des constantes complexes (qui dépendent de façon linéaire de $\mathbf{F}$). Ces relations sont les formes concises des relations suivantes ($i = 1, \ldots, n$) :

$$(\star)_i^{\kappa} \qquad \mathcal{M}_{[\gamma_i^{\lambda}]}\, F_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{M} \beta_i^{\kappa,\nu}\, B_i^\nu\,,$$

$$(\star\star)_{i,s}^{\kappa} \qquad \mathcal{M}_{[U_s \circ \overline{\gamma}_i^{\lambda}]}\, F_s = F_s + \sum_{\nu=1}^{M} \beta_i^{\kappa,\nu}\, B_i^\nu \qquad (s = 1, \ldots, n,\ s \neq i)\,.$$

Soit G une fonction holomorphe multivaluée sur une variété complexe Z. Connaître la monodromie de G signifie connaître une "représentation de monodromie"

$$\Pi_1(Z, z) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big[\underline{G}_z\big] \;:\; [\gamma] \longmapsto \Big(\mathcal{M}_{[\gamma]} \;:\; g \mapsto g^{[\gamma]} \Big)\,,$$

pour (au moins) un $z \in Z$ (où $\underline{G}_z$ désigne l'espace engendré par les déterminations de G en z).

Parce que les γ_i^{κ} sont tels que la famille $\{[\gamma_i^{\kappa}], [\gamma_i^{\kappa}]^{-1} \,|\, \kappa \leq m_i\}$ engendre $\Pi_1(Y_i, \omega_i)$, les relations $(\star)_i^{\kappa}$ nous donnent *a priori* la monodromie des composantes F_i de $\mathbf{F}$. On a la

Proposition 2.2.1. — *Si la condition (C) est vérifiée, alors la monodromie de la i-ème composante d'une véritable solution de $(\mathcal{E})$ peut être exprimée comme combinaison linéaire des i-èmes composantes des sous-solutions de $(\mathcal{E})$.*

Ce fait nous permet d'avoir un autre point de vue sur l'équation $(\mathcal{E})$: on oubliera la forme "fonctionnelle" initiale de $(\mathcal{E})$ pour ne prendre en compte que les relations de monodromie $(\star)_i^\kappa$ et $(\star\star)_{i,s}^\kappa$. Puisque les relations $(\star)_i^\kappa$ donnent la monodromie des solutions de $(\mathcal{E})$, on va les considérer comme "équations de monodromie". Avec ce point de vue, les relations $(\star\star)_{i,s}^\kappa$ apparaissent comme des "relations de compatibilité" portant sur ces équations de monodromie. On explique maintenant comment on peut obtenir des solutions de l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E})$ en résolvant les équations de monodromie $(\star)_i^\kappa$.

Supposons qu'il existe une solution non-dégénérée $(F_1, \ldots, F_n)$ de $(\mathcal{E})$ en ω. Alors il existe des constantes complexes $\beta_i^{\kappa,\nu}$ satisfaisant les relations $(\star)_i^\kappa$ et $(\star\star)_{i,s}^\kappa$. Soit $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_n)$ tel que, pour tout $i \leq n$, $H_i \in \widetilde{\mathcal{O}}(Y_i)$ possède une détermination en ω_i, encore notée H_i, qui satisfait les relations $(\star)_i^\kappa$. Alors le germe $H_i - F_i$ se prolonge comme une fonction holomorphe sur Y_i , qui n'est plus ramifiée. On en déduit que le germe $\mathcal{H} = \Sigma_1^n (H_i - F_i) \circ U_i$ est la restriction, à un voisinage de ω, d'une fonction holomorphe sur Y, encore notée $\mathcal{H}$.

Supposons maintenant que l'on peut trouver de tels H_i possédant en plus la propriété d'être à croissance modérée. Alors $\mathcal{H}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{CP}^2 \setminus \Sigma(\mathcal{E})$ également à croissance modérée. Par un théorème du type Liouville, on en déduit que $\mathcal{H}$ est constante.

Si les sous-solutions de $(\mathcal{E})$ sont connues, le problème de trouver une solution non-dégénérée dans $\underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E})$ à croissance modérée revient à la résolution des équations de monodromie $(\star)_i^\kappa$ dans l'espace $\Pi_i \, \underline{\mathcal{O}_{\omega_i}^{log}}(Y_i)$. Ce qui rend ce point de vue conceptuellement intéressant est qu'il ramène la résolution de $(\mathcal{E})$ à un problème linéaire en les inconnues F_i.

Remarques : 1. il semble qu'un grand nombre de solutions d'efa définies par des fractions rationnelles sont construites à partir d'intégrales itérées. Ainsi, si on cherche à résoudre une efa définie par des U_i rationnelles, il peut être intéressant de chercher à résoudre les équations de monodromie $(\star)_i^\kappa$ dans le sous-espace propre $\prod_i \underline{\mathcal{I}_i}$ de $\prod_i \underline{\widetilde{\mathcal{O}}_{\omega_i}^{log}}\,(Y_i)$, où pour $i = 1, .., n$, on a noté $\underline{\mathcal{I}_i}$ l'espace des déterminations en ω_i des intégrales itérées éléments de $\mathcal{I}\{Y_i\}$.

2. cette méthode de monodromie a priori semble être relativement efficace pour trouver les solutions construites à partir d'intégrales itérées des efa à fonctions intérieures rationnelles.

3. mais même dans le cas où toutes les U_i sont rationnelles, il existe des solutions à croissance modérée de $(\mathcal{E})$ qui ne sont pas construites à partir d'intégrales itérées. Par exemple, la fonction $z \mapsto \mathrm{Arctanh}(z)$ est multivaluée sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, à croissance modérée, mais n'est pas un élément de $\mathcal{I}\{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\}$ bien qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{Arctanh}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathrm{Arctanh}(xy) - \mathrm{Arctanh}\left(\frac{x}{y}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^2\right) = 0\,.$$

2.2.1. Exemples. — Il nous semble que c'est en l'utilisant à la résolution d'exemples concrets que cette méthode de monodromie a priori se comprend le mieux. On commence par l'appliquer à la résolution de la généralisation à trois inconnues de l'équation $(\mathcal{A})$.

2.2.1.1. Résolution de l'équation de l'arctangente généralisée. — On considère l'efa

$$(\mathcal{A}rc) \qquad F_1(x) + F_2(y) + F_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = 0\,.$$

Le lieu singulier du tissu associé aux fractions rationnelles $U_1 = x$, $U_2 = y$ et $U_3 = (x+y)/(1-xy)$ est

$$\Sigma(\mathcal{A}rc) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; (1+x^2)(1+y^2)(1-xy) = 0 \right\}.$$

On choisit $\omega = (0,0) \notin \Sigma(\mathcal{A}rc)$ comme point base. On va résoudre $(\mathcal{A}rc)$ en ω par la méthode de monodromie *a priori*. On note $Y = \mathbb{C}^2 \setminus \Sigma(\mathcal{A}rc)$.

On établit facilement que $U_1(Y) = U_2(Y) = U_3(Y) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} =: Y'$. D'après le Théorème 1.2.2, on en déduit que si (F_1, F_2, F_3) est une solution de $(\mathcal{A}rc)$ au voisinage de ω, alors F_i est une détermination en ω_i d'une fonction holomophe multivaluée sur Y'.

Pour $i \in \{i = 1,2,3\}$, on a $\omega_i = 0$. On considère deux lacets représentés par la Figure 1 :

$$c^+ \,:\, [0,1] \ni s \mapsto i\big(1 + e^{i\pi(1+2s)}\big) \qquad \text{et} \qquad c^- \,:\, [0,1] \ni s \mapsto -i\big(1 + e^{-i\pi(1-2s)}\big)\,.$$

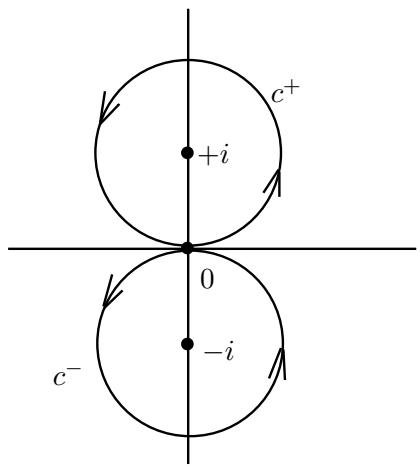


FIGURE 1. les deux lacets c^+ et c^-

Ces deux lacets engendrent $\Pi_1(Y', 0)$. La monodromie de $F \in \underline{\widetilde{\mathcal{O}}}(Y')$ est donnée par $F^{[c^+]}$ et $F^{[c^-]}$.

Pour $\epsilon = \pm$, on note $\gamma_1^\epsilon = (c^\epsilon, 0)$. C'est un lacet dans Y d'origine ω. Dans $\Pi_1(Y', 0)$, on vérifie que :

$$[U_1 \circ \gamma_1^\epsilon] = [c^\epsilon] \quad , \qquad [U_2 \circ \gamma_1^\epsilon] = [1] \qquad \text{et} \qquad [U_3 \circ \gamma_1^\epsilon] = [c^\epsilon]\,.$$

On en déduit que si $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est une solution holomorphe en l'origine de $(\mathcal{A}rc)$, après prolongement le long de γ_1^ϵ, on obtient

$$F_1^{[c^\epsilon]}(U_1) + F_2(U_2) + F_3^{[c^\epsilon]}(U_3) = 0\,,$$

d'où on déduit, en retranchant $\mathbf{F}$:

$$\big(F_1^{[c^\epsilon]} - F_1\big)(U_1) + \big(F_3^{[c^\epsilon]} - F_3\big)(U_3) = 0\,.$$

Cette dernière relation implique qu'il existe deux constantes τ^+ et τ^- telles que pour $\epsilon = \pm$, on a :

$$\mathcal{M}_{[c^\epsilon]} F_1 = F_1 + \tau^\epsilon \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{[c^\epsilon]} F_3 = F_3 - \tau^\epsilon\,.$$

Par un argument semblable on établit que F_2 a exactement la même monodomie que F_1.

Posons $x = u$ et $(x+y)/(1-xy) = v$. Alors $y = (v-u)/(1+uv)$ et dans les variables u, v, l'équation $(\mathcal{A}rc)$ devient :

$$F_1(u) + F_2\left(\frac{v-u}{1+uv}\right) + F_3(v) = 0\,.$$

Si on note $\overline{\gamma}_1^\epsilon$ le chemin $(c^\epsilon, 0)$ dans les coordonnées (u, v), on a, pour $\{\epsilon, \varepsilon\} = \{-, +\}$:

$$[U_1 \circ \overline{\gamma}_1^\epsilon] = [c^\epsilon] \quad , \qquad [U_2 \circ \overline{\gamma}_1^\epsilon] = [c^\varepsilon] \qquad \text{et} \qquad [U_3 \circ \overline{\gamma}_1^\epsilon] = [1]\,.$$

En prolongeant $\mathbf{F}$ le long de $\overline{\gamma}_1^\epsilon$ et en appliquant la même méthode, on déduit que $\tau^+ = \tau^-$. On a donc établi qu'il existe une constante $\tau := \tau^+ = \tau^-$ telle que

$$(\bigstar) \qquad \mathcal{M}_{c^+} F_i = F_i + \alpha_i \tau \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{c^-} F_i = F_i - \alpha_i \tau \qquad \text{avec} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = 1\,.$$

Pour $\epsilon = \pm$, considérons l'intégrale itérée, élément de $\mathcal{I}\{Y'\}$:

$$\mathbf{L}^\epsilon \,:\, z \mapsto \int_0^z \frac{ds}{\epsilon i - s}\,.$$

Sa monodromie est donnée par les relations (avec $\{\epsilon, \varepsilon\} = \{-, +\}$) :

$$\mathcal{M}_{c^\epsilon} \mathbf{L}^\epsilon = \mathbf{L}_\epsilon + 2i\pi \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{c^\varepsilon} \mathbf{L}^\epsilon = \mathbf{L}^\epsilon\,.$$

Posons $A := \mathbf{L}^+ - \mathbf{L}^-$. Alors les composantes de $\mathbf{A} := \tau\left(A, A, -A\right)$ satisfont aux relations de monodromie $(\bigstar)$. On en déduit que le germe holomorphe en l'origine

$$\mathcal{A} := A(x) + A(y) - A\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \setminus \Sigma(\mathcal{A}rc)$, et est à croissance modérée (car $\mathbf{L}^+$ et $\mathbf{L}^-$ le sont). Cela implique que $\mathcal{A}$ est une constante, qu'on évalue être 0 en prenant $(x, y) = (0, 0)$. Pour des raisons de dimension (cf. Proposition 1.2.4), on en déduit que

$$\underline{\mathbf{S}_0^{\mathcal{O}}}(\mathcal{A}rc) = \langle\, \mathbf{A}\,\rangle\,.$$

D'autre part, pour x suffisamment proche de l'origine, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= \mathbf{L}^+(x) - \mathbf{L}^-(x) \\ &= \int_0^x \frac{ds}{i-s} - \int_0^x \frac{ds}{-i-s} \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s}\right) ds \\ &= 2i \int_0^x \frac{ds}{1+s^2} \\ &= 2i\,\mathrm{Arctan}(x)\,. \end{aligned}$$

Par des arguments de nature géométrique, et relativement élémentaires, on a établi que, modulo les constantes, les solutions de $(\mathcal{A}rc)$ dans un voisinage de l'origine sont des multiples de l'équation de l'arctangente :

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = 0\,.$$

2.2.1.2. Résolution de l'équation d'Abel généralisée. — On cherche à résoudre la version généralisée en 5 inconnues de la version homogène de l'équation d'Abel du bilogarithme :

$$\text{(Ab)} \qquad F_1\left(x\right) + F_2\left(y\right) + F_3\left(\frac{x}{y}\right) + F_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + F_5\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0\,.$$

On note $U_1, U_2, \ldots, U_5$ les fractions rationnelles qui apparaissent comme arguments dans cette efa :

$$U_1 = x\,, \qquad U_2 = y\,, \qquad U_3 = \frac{x}{y}\,, \qquad U_4 = \frac{1-y}{1-x}\,, \qquad U_5 = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,.$$

Le lieu singulier défini par ces cinq fractions rationnelles est

$$\Sigma[\text{Ab}] := \left\{\, (z,\zeta) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; z\,\zeta\,(1-z)\,(1-\zeta)(z-\zeta) = 0 \,\right\}.$$

On fixe un point base $\omega = (1/3, 1/2) \in Y := \mathbb{CP}^2 \setminus \Sigma[\text{Ab}]$. On établit facilement que $U_i(X) = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ pour $i = 1, \ldots, 5$. Cela implique que si $(F_1, \ldots, F_5) \in \underline{\mathcal{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\text{Ab})$, alors chaque F_i est une détermination en ω_i d'une fonction multivaluée sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. On va déterminer $\underline{\mathcal{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\text{Ab})$ par la méthode de monodromie a priori. On ne détaillera pas tous les calculs. Par exemple, on construit sans difficulté les cinq solutions de longueur 3 :

$$\mathbf{\Delta_1} := \Big(\mathbf{L}_{x_0}, -\mathbf{L}_{x_0}, -\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\,, 0\Big) \qquad \mathbf{\Delta_2} := \Big(0\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_0}, \mathbf{L}_{x_0}, -\mathbf{L}_{x_0}\Big)$$

$$\mathbf{\Delta_3} := \Big(\mathbf{L}_{x_1}, -\mathbf{L}_{x_1}, 0, -\mathbf{L}_{x_0}\,, 0\Big) \qquad \mathbf{\Delta_4} := \Big(\mathbf{L}_{x_1}\,, 0\,, -\mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\Big)$$

$$\mathbf{\Delta_5} := \Big(\mathbf{L}_{x_1+x_0}, 0\,, -\mathbf{L}_{x_1+x_0}\,, \mathbf{L}_{x_1}\,, 0\Big).$$

Par la Proposition 1.2.4, l'espace $\underline{\mathcal{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\text{Ab})$ est de dimension au plus 6. On vérifie que les $\mathbf{\Delta_i}$ (pour $i = 1, \ldots, 5$) sont linéairement indépendants. Ils forment donc un espace de dimension 5. Modulo cet espace, il existe au plus "une"autre solution de (Ab). On va la déterminer.

Pour $\kappa = 1, \ldots, 5$, on a $\omega_\kappa \in]0,1[$, et on note respectivement c_0^κ et c_1^κ les lacets $\sigma \mapsto \omega_\kappa \exp(2i\pi\sigma)$ et $\sigma \mapsto 1 - (1-\omega_\kappa)\exp(2i\pi\sigma)$. Soit $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_5)$ une solution non-dégénérée de (Ab) en ω. Considérons le lacet $\gamma : [0,1] \ni \sigma \mapsto (\exp(2i\pi\sigma)/3, 1/2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \Sigma[\text{Ab}]$. On établit facilement que :

$$[U_1 \circ \gamma] = [c_0^1], \qquad [U_2 \circ \gamma] = [1], \qquad [U_3 \circ \gamma] = [c_0^3], \qquad [U_4 \circ \gamma] = [1], \qquad [U_5 \circ \gamma] = [c_0^5]\,,$$

ces égalités ayant respectivement lieu dans $\Pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, \omega_i)$ avec $i = 1, \ldots, 5$.

En prolongeant $\mathbf{F}$ le long de γ et en lui soustrayant le $\mathbf{F}$ initial, on obtient une nouvelle solution $\mathbf{F}^{[\gamma]} - \mathbf{F}$ de (Ab) en ω, dont la forme explicite est

$$\big(F_1^{[c_0^1]}(U_1) - F_1(U_1)\big) + \big(F_3^{[c_0^3]}(U_3) - F_3(U_3)\big) + \big(F_5^{[c_0^5]}(U_5) - F_5(U_5)\big) = 0\,.$$

Cette relation correspond donc à une solution de longueur 3 de (Ab) et elle va s'exprimer comme combinaison linéaire en les $\mathbf{\Delta_i}$. On a :

$$\mathbf{F}^{[\gamma]} - \mathbf{F} = a\,\big(\mathbf{L}_{x_1}\,,\, -\mathbf{L}_{x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\big) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}\,.$$

On en déduit les relations suivantes sur la monodromie des composantes de $\mathbf{F}$: on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0\, F_1 &= F_1 + a\,\mathbf{L}_{x_1} + a_1\,,\\
\mathcal{M}_0\, F_3 &= F_3 - a\,\mathbf{L}_{x_1} + a_2\,,\\
\mathcal{M}_0\, F_5 &= F_5 + a\,\mathbf{L}_{x_1} - (a_1 + a_2)\,,
\end{aligned}$$

où a, a_1 et a_2 sont des constantes complexes.

Par le même procédé, mais cette fois relativement au lacet $[0,1] \ni \sigma \mapsto (\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2}\exp(2i\pi\sigma))$ dans $\mathbb{C}^2 \backslash \Sigma[\mathrm{Ab}]$, on montre qu'il existe des constantes a', a'_1 et $a'_2 \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1\, F_2 &= F_2 + a'\, \mathbf{L}_{x_0} + a'_1\,, \\
\mathcal{M}_0\, F_4 &= F_4 + a'\, \mathbf{L}_{x_1} + a'_2\,, \\
\mathcal{M}_0\, F_5 &= F_5 - a'\, \mathbf{L}_{x_1} - (a'_1 + a'_2)\,.
\end{aligned}$$

De ces relations et des précédentes, on déduit $a = -a'$ et $a_1 + a_2 = a'_1 + a'_2$. En appliquant ce principe à différents lacets, on arrive à établir a priori que la monodromie des composantes de $\mathbf{F}$ est de la forme suivante $(k = 1, \ldots, 5)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0\, F_k &= F_k - \epsilon_k\, a\, \mathbf{L}_{x_1} + a_k\,, \\
\mathcal{M}_1\, F_k &= F_k + \epsilon_k\, a\, \mathbf{L}_{x_0} + b_k,
\end{aligned}$$

avec $\epsilon_k = 1$ pour $k = 1, 5$ et $\epsilon_k = -1$ sinon, les a_k et les b_k étant des constantes satisfaisant certaines relations qu'on n'explicitera pas, mais qu'on peut supposer nulles, quitte à additionner une combinaison linéaire $\mathbf{H} = \alpha_1\, \mathbf{\Delta}_1 + \cdots + \alpha_5\, \mathbf{\Delta}_5$ à $\mathbf{F}$. La monodromie de F_k est alors de la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0\, F_k &= F_k + \epsilon_k\, a\, \mathbf{L}_{x_1}\,, \\
\mathcal{M}_1\, F_k &= F_k + \epsilon_k\, a\, \mathbf{L}_{x_0}\,.
\end{aligned}$$

Le "dilogarithme de Rogers" $\mathbf{D}_2$ est défini par

$$\mathbf{D}_2(x) = \mathbf{L}\mathrm{i}_2(x) + \frac{1}{2}\, \mathbf{L}og(x)\, \mathbf{L}og(1-x) - \frac{\pi^2}{6} \qquad (0 < x < 1)\,.$$

Sa monodromie est donnée par les relations :

$$\mathcal{M}_0\, \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2 - i\pi\, \mathbf{L}_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_1\, \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2 - i\pi\, \mathbf{L}_{x_0}\,.$$

On en déduit que s'il existe une solution non-dégénérée $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_5)$ à (Ab) en ω, alors quitte à multiplier $\mathbf{F}$ par une constante, on peut supposer que la fonction

$$\mathbf{K} = \big(F_1 - \mathbf{D}_2\big) \circ U_1 + \big(F_2 + \mathbf{D}_2\big) \circ U_2 + \big(F_3 + \mathbf{D}_2\big) \circ U_3 + \big(F_4 + \mathbf{D}_2\big) \circ U_4 + \big(F_5 - \mathbf{D}_2\big) \circ U_5$$

se prolonge en une fonction holomorphe non ramifiée sur Y. Parce que $\mathbf{F}$ est une solution de (Ab), il vient

$$\mathbf{K} = -\mathbf{D}_2 \circ U_1 + +\mathbf{D}_2 \circ U_2 + \mathbf{D}_2 \circ U_3 + \mathbf{D}_2 \circ U_4 - \mathbf{D}_2 \circ U_5\,.$$

Comme $\mathbf{D}_2$ est à croissance logarithmique, il en va de même pour $\mathbf{K}$. Cette fonction étant non ramifiée sur $\mathbb{CP}^2$, elle est donc constante. On vérifie qu'au voisinage de ω, on a bien

$$\mathbf{D}_2(U_1) - \mathbf{D}_2(U_2) - \mathbf{D}_2(U_3) - \mathbf{D}_2(U_4) + \mathbf{D}_2(U_5) = \mathrm{cte}\,.$$

En d'autres termes :

$$\mathbf{\Delta}_6 := \big(\, \mathbf{D}_2\,,\, -\mathbf{D}_2\,,\, -\mathbf{D}_2\,,\, -\mathbf{D}_2\,,\, \mathbf{D}_2 \,\big) \in \underline{\mathcal{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\mathrm{Ab})\,.$$

On épargne au lecteur la vérification que les $\mathbf{\Delta}_k$ $(k = 1, \ldots, 6)$ sont linéairement indépendants modulo les constantes, mais c'est bien le cas. En utilisant la majoration de la Proposition 1.2.4, il vient :

$$10 = \ \dim_{\mathbb{C}} \big\langle \{\, \mathbf{\Delta}_k \,\} \big\rangle \leq \ \dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\mathrm{Ab}) \leq \frac{5\,(5-1)}{2} = 10\,,$$

d'où

$$\underline{\mathbf{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\mathrm{Ab}) = \big\langle \{\, \mathbf{\Delta}_k \,\big|\, k = -3, \ldots, 6 \,\} \big\rangle\,.$$

On a ainsi résolu l'équation (Ab) en ω, dans la classe holomorphe. On obtient les solutions holomorphes en $\varpi \notin \Sigma(\mathrm{Ab})$ par prolongement analytique des $\mathbf{\Delta}_k$.

Remarque : de ci-dessus, on déduit que la solution dilogarithmique Δ_6 engendre tout l'espace $\underline{\mathbf{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathrm{Ab})$ par prolongement analytique.

Une liste complète et explicite équivalente à celle donnée ci-desssus fut donnée pour la première fois par Bol en 1936 (voir [**Bol 36**]) en relation avec le problème de la linéarisation des tissus plans de rang maximal. Le fait que la dimension de $\underline{\mathbf{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathrm{Ab})$ soit maximale fait du "tissu défini par les U_i" un "tissu de rang maximal". Ce tissu est très spécial. Pendant longtemps, il fut l'unique exemple connu de "tissu exceptionnel", ce qui en faisait un tissu particulièrement intéressant en géométrie des tissus. On renvoie au chapitre 4 (section 4.4.3) pour des précisions.

Pour finir, donnons une application directe de la résolution de (Ab) obtenue ci-dessus.

Il est bien connu que le logarithme est l'unique fonction mesurable (modulo multiplication par une constante) qui satisfasse l'équation $F(xy) = F(x) + F(y)$. On a un résultat analogue pour le dilogarithme de Rogers :

Proposition 2.2.2. — *Soit $F :]\,0\,,\,1\,[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que*

$$F\big(\,x\,\big) - F\big(\,y\,\big) - F\left(\frac{x}{y}\right) - F\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + F\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

pour $0 < x < y < 1$. Alors F est un multiple du dilogarihtme de Rogers.

Vu la résolution de (Ab) ci-dessus, la preuve de cette proposition se ramène à un simple exercice d'algèbre linéaire qu'on ne détaille pas. Notons que ce résultat était déjà connu sous l'hypothèse que F soit de classe C^3. Il semble que c'est la première fois qu'il apparaît dans la littérature avec seulement la condition de mesurabilité.[1]

En fait, la résolution de l'équation (Ab) donne beaucoup plus que le résultat de la proposition ci-dessus. Par exemple, on peut énoncer la

Proposition 2.2.3. — *Soit $F, G :]\,0\,,\,1\,[\to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que*

$$F\big(\,x\,\big) - F\big(\,y\,\big) - F\left(\frac{x}{y}\right) - F\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + G\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

pour $0 < x < y < 1$. Alors $F \equiv G$ et cette fonction est un multiple du dilogarihtme de Rogers.

[1] Signalons que Bloch a montré que, modulo multiplication par une constante, le dilogarithme de Bloch-Wigner défini par $\mathcal{D}(z) = \Im\mathrm{m}\big(\mathbf{Li}_2(z) + \log|z|\,\log(1-z)\,\big)$ pour $z \in X = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est l'unique fonction mesurable qui satisfait **globalement** sur X l'équation fonctionnelle de la Proposition 2.2.2 (voir [**Blo**]).

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION EXPLICITE DE DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ABÉLIENNES

Dans ce chapitre, on résout de façon complètement explicite deux efa dont la particularité est qu'elles admettent des espaces de solutions dont la dimension est la plus grande possible.

En 3.2, on étudie l'équation de Spence-Kummer généralisée. C'est l'efa en 9 inconnues naturellement associée à l'équation de Spence-Kummer du trilogarithme. On résout cette équation en fournissant une base explicite de l'espace de ses solutions. Comme application, on montre que le trilogarithme est l'unique fonction mesurable dérivable en 0 satisfaisant l'équation de Spence-Kummer.

Ensuite, en 3.3, on résout explicitement une efa en huit inconnues qui dépend d'un paramètre a.

Les résultats obtenus ici ont des interprétations particulièrement intéressantes en géométrie des tissus. Cela sera détaillé dans la deuxième partie de cette thèse, au chapitre 7 plus précisément.

3.1. Notations

Dans tout le chapitre, a désigne un paramètre réel fixé, strictement plus grand que 1. On a besoin de fixer avec précision quelques notations concernant les intégrales itérées sur $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, a, \infty\}$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_s^{\pm}$ la demi-droite fermée $s + i\mathbb{R}^{\pm}$ de $\mathbb{C}$ et on pose

$$\Theta_a := \mathbb{C} \setminus \left(\Delta_0^- \cup \Delta_1^+ \cup \Delta_a^+\right).$$

Le domaine Θ_a est simplement connexe et ne contient pas $0, 1$ et a.

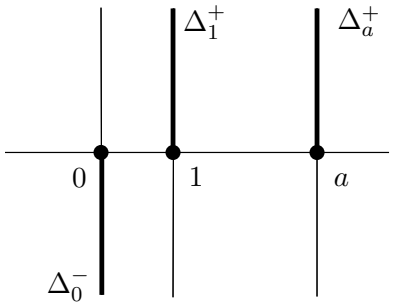


FIGURE 1. le domaine Θ_a.

On peut alors vérifier que pour tout $z \in \Theta_a$, la valeur d'une des fonctions ci-dessous en z est bien définie si on intègre le long d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(]0,1]) \subset \Theta_a$:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{L}_{x_0}(\bullet) = \mathbf{L}\mathrm{og}(\bullet) & \mathbf{L}_{x_\kappa}(\bullet) = -\mathbf{L}\mathrm{og}(\kappa - \bullet) & \mathbf{L}_{x_\epsilon^2}(\bullet) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbf{L}^2_{x_\epsilon}(\bullet) \\[2ex]
\mathbf{L}_{x_0x_1}(\bullet) = \mathbf{L}\mathrm{i}_2(\bullet) & \mathbf{L}_{x_1x_0}(\bullet) = \int_0^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_0}(\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta & \mathbf{L}_{x_0x_a}(\bullet) = \int_1^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_a}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \\[2ex]
\mathbf{L}_{x_ax_0}(\bullet) = \int_1^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_0}(\zeta)}{a-\zeta}\,d\zeta & \mathbf{L}_{x_ax_1}(\bullet) = \int_0^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_1}(\zeta)}{a-\zeta}\,d\zeta & \mathbf{L}_{x_1x_a}(\bullet) = \int_0^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_a}(\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta \\[2ex]
\mathbf{L}_{x_0^2x_1}(\bullet) = \mathbf{L}\mathrm{i}_3(\bullet) & \mathbf{L}_{x_0x_1x_0}(\bullet) = \int_0^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_1x_0}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta & \mathbf{L}_{x_1x_0^2}(\bullet) = \int_0^\bullet \frac{\mathbf{L}_{x_0^2}(\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta\,.
\end{array}$$

(avec $\kappa \in \{1, a\}$, $\epsilon \in \{0, 1, a\}$ et où $\mathbf{L}og$ désigne la détermination principale du logarithme sur Θ_a).

3.2. L'équation de Spence-Kummer généralisée

À l'équation de Spence-Kummer satisfaite par le trilogarithme, on peut associer l'efa en 9 inconnues

$$(\mathcal{SK}) \qquad \begin{aligned} &F_1(x) + F_2(y) + F_3(\frac{x}{y}) + F_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + F_5\left(\frac{x}{y}\,(\frac{1-y}{1-x})\right) + \cdot\cdot \\ &\cdots + F_6(xy) + F_7\left(-x\,(\frac{1-y}{1-x})\right) + F_8\left(-\frac{1-y}{y(1-x)}\right) + F_9\left(\frac{x}{y}\,(\frac{1-y}{1-x})^2\right) = 0\,. \end{aligned}$$

On note $U_1 = x$, $U_2 = y, \ldots, U_9 = \frac{x}{y}(\frac{1-y}{1-x})^2$ les fractions rationnelles qui apparaissent comme arguments dans cette équation. On calcule sans difficulté le lieu singulier du tissu associé :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathcal{SK}) := \big\{\, (x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\big|\; & xy(1-x)(1-y)(x-y)(1+x)(1+y)\ldots \\ & \ldots(1-xy)(2-xy)(2-2y-xy)(2xy-x-y) = 0 \,\big\}\,. \end{aligned}$$

On pose $Y := \mathbb{C}^2 \setminus \Sigma(\mathcal{SK})$ et on prend $\omega := (1/3, 1/2) \in Y$ comme point base.

On s'intéresse à la détermination des solutions holomorphes de $(\mathcal{SK})$ au voisinage de ω. En d'autres termes, on veut déterminer l'espace

$$\underline{\mathcal{S}^{\mathcal{O}}_{\omega}}(\mathcal{SK})\,.$$

On établit facilement que

$$Y_i := U_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} & \text{pour } i = 1, 2\,, \\ \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} & \text{pour } i = 3, \ldots, 9\,. \end{cases}$$

Cela implique que si les F_i sont des germes holomorphes en ω_i (respectivement) qui satisfont $(\mathcal{SK})$, alors F_i se prolonge en une fonction multivaluée sur Y_i. D'autre part, puisqu'on peut trouver un y' tel que, pour $i \geq 2$, $U_i(x, y')$ ne tende ni vers 0, ni vers 1 lorsque x tend vers -1, on en déduit que F_1 n'est pas ramifiée et est bornée en -1, donc se prolonge de façon holomorphe dans un voisinage. On montre de la même façon que F_2 peut-être supposée holomorphe au voisinage de -1.

On peut alors appliquer la méthode de monodromie a priori pour construire les solutions de $(\mathcal{SK})$ dont les composantes sont des intégrales itérées éléments de $\mathcal{I}\{0, 1\}$. La méthode est relativement efficace et permet de construire la plupart des solutions cherchées.

Cependant, certaines des solutions de $(\mathcal{SK})$ ne sont pas construites à partir d'intégrales itérées et

échappent donc à la méthode de monodromie a priori. Il s'avère que ces solutions sont toutes des 3-solutions de $(\mathcal{SK})$, qu'on détermine sans difficulté en utilisant la méthode d'Abel.

Avec l'utilisation des deux méthodes de résolution des efa exposées au chapitre précédent, on a pu résoudre complétement l'équation $(\mathcal{SK})$.

3.2.1. Résolution de l'équation de Spence-Kummer généralisée. — On donne ici une liste explicite d'éléments de $\underline{\mathcal{S}}_{\omega}^{\mathcal{O}}(\mathcal{SK})$, notés $\mathbf{F}_k = (F_k^1, \ldots, F_k^9)$, qui vont en former une base.

Il est clair que l'équation d'Abel généralisée (Ab) (étudiée au chapitre précédent) est une sous-équation de $(\mathcal{SK})$: du fait que $\omega \notin \Sigma(\mathrm{Ab})$, on déduit que les solutions de (Ab) en ω sont également des solutions de $(\mathcal{SK})$. Avec un abus d'écriture, on note $\mathbf{F}_i = \mathbf{\Delta}_i$, pour $i = 1, \ldots, 6$. Puis on vérifie que chacun des éléments dans la liste ci-dessous est bien une solution non-constante de $(\mathcal{SK})$ en ω :

$$\mathbf{F}_6 = \Big(\mathbf{L}_{x_0}\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,, 0, 0, 0, -\mathbf{L}_{x_0}\,, 0, 0, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_7 = \Big(\mathbf{L}_{x_0}\,, 0, 0, \mathbf{L}_{x_0}\,, 0, 0, -\mathbf{L}_{x_0} + i\pi, 0, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_8 = \Big(\mathbf{Iv}\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{Iv}\,,\, 0,\, \mathbf{Iv} - 1\,, 0\,, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_9 = \Big(\mathbf{L}_{x_1}\,, 0, 0, 0, 0,\, -\mathbf{L}_{x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\,, 0\,, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{10} = \Big(0,\, \mathbf{Id}\,, 0,\, \mathbf{Id}\,,\, 0,\, 0, \mathbf{Id} - 1, 0, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{11} = \Big(0\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0}\,, -\mathbf{L}_{x_0}\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \Big(0\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,, 0\,, 0\,, 0\,, 0\,, \mathbf{L}_{x_1}\,, -\mathbf{L}_{x_1}\,, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{13} = \Big(-2i\pi,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0}\,, \mathbf{L}_{x_0}\,, -\mathbf{L}_{x_0} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{14} = \Big(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0, \mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0,\, -\mathbf{L}_{x_1} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{15} = \Big(0,\, \mathbf{Iv},\, 0,\, 0,\, \mathbf{Id},\, 0,\, 0,\, \mathbf{Id} - 1, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{16} = \Big(\mathbf{Id}\,,\, 0,\, 0, \mathbf{Iv}\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{Iv},\, -1 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{17} = \Big(0,\, 0,\, \mathbf{A},\, 0,\, 0,\, -\mathbf{A},\, 0,\, 0,\, -\mathbf{A} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{18} = \Big(2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, 2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, -\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, 0,\, 0,\, -\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, 0,\, 0,\, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{19} = \Big(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0^2}\,, -2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, -2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, \mathbf{L}_{x_0^2} + 2i\pi\,\mathbf{L}_{x_0} - 2\pi^2 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{20} = \Big(0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0^2}\,, -2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, -2\,\mathbf{L}_{x_0^2}\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0^2} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{21} = \Big(\mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, \mathbf{D}\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{22} = \Big(\mathbf{D}\,,\, \mathbf{D} - \frac{i\pi}{2}\,\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0,\, 0,\, 0,\, -\mathbf{D}\,,\, \mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,, 0 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{23} = \Big(\pi^2, 0, 0, \mathbf{D} - \frac{i\pi}{2}\,\mathbf{L}_{x_0},\, \mathbf{D}\,,\, 0,\, \mathbf{D}\,,\, \mathbf{D} + \frac{i\pi}{2}\,\mathbf{L}_{x_0} + i\pi\mathbf{L}_{x_1}\,,\, -\mathbf{D} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{24} = \Big(\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0^2}\,, 0,\, -\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,, -\mathbf{L}_{x_0x_1} - \mathbf{L}_{x_0^2} + i\pi\,\mathbf{L}_{x_0}\,,\, \frac{\pi^2}{3} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{25} = \Big(0,\, \mathbf{L}_{x_0x_0}\,,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, \mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, -\mathbf{L}_{x_0x_1} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{26} = \Big(2\,\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, 0,\, -\mathbf{L}_{x_0x_1}\,, 0,\, 2\,\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, -\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, 2\,\mathbf{L}_{x_0x_1}\,,\, 0,\, -\mathbf{L}_{x_0x_1} \Big)$$

$$\mathbf{F}_{27} = \Big(2\,\ell_3\,,\, 2\,\ell_3\,,\, -\ell_3\,,\, 2\,\ell_3\,,\, 2\,\ell_3\,,\, -\ell_3\,,\, 2\,\widehat{\ell}_3\,,\, 2\,\widehat{\ell}_3\,,\, -\ell_3 \Big)$$

$$\mathbf{F}_{28} = \Big(2\,L_3\,,\, 2\,L_3\,,\, -L_3\,,\, 2\,L_3\,,\, 2\,L_3\,,\, -L_3\,,\, 2\,\widehat{L}_3\,,\, 2\,\widehat{L}_3\,,\, -L_3 \Big),$$

avec

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{Id}\ :\ z \mapsto z & \ell_3 := \mathbf{L}_{x_0^2x_1} + \mathbf{L}_{x_0x_1x_0} - 2\,\mathbf{L}_{x_1x_0^2} \\
\mathbf{Iv}\ :\ z \mapsto \dfrac{1}{z} & \widehat{\ell}_3 := \ell_3 - i\pi\,\mathbf{L}_{x_0x_1} + 2i\pi\,\mathbf{L}_{x_1x_0} + \pi^2\,\mathbf{L}_{x_1} + \dfrac{3}{2}\,\mathbf{Li}_3(1) \\
\mathbf{A}\ :\ z \mapsto \mathrm{Arcth}(\sqrt{z}) & L_3 := \mathbf{L}_{x_0^2x_1} - \mathbf{L}_{x_1x_0^2} - \dfrac{\pi^2}{6}\,\mathbf{L}_{x_0} \\
\mathbf{D} := \dfrac{1}{2}\left[\,\mathbf{L}_{x_0x_1} - \mathbf{L}_{x_1x_0}\right] - \dfrac{\pi^2}{6} & \widehat{L}_3 := L_3 + i\pi\,\mathbf{L}_{x_1x_0} + \dfrac{\pi^2}{2}\,\mathbf{L}_{x_1} + \dfrac{\pi^2}{12}\,\mathbf{L}_{x_0}\ .
\end{array}$$

On peut vérifier que les $\mathbf{F}_i$ (pour $i = 1, \ldots, 28$) sont 28 éléments de $\underline{\mathcal{S}}_\omega^{\mathcal{O}}(\mathcal{SK})$ qui sont linéairement indépendants, modulo les constantes (cette vérification est un exercice d'algèbre linéaire élémentaire mais fastidieux qu'on épargne au lecteur). Alors, modulo les solutions triviales (c'est-à-dire constantes) de $(\mathcal{SK})$ et en utilisant la majoration donnée par la Proposition 1.2.4, il vient :

$$28 = \ \dim_{\mathbb{C}} \left\langle \left\{ \mathbf{F}_i \,\middle|\, 1 \le i \le 28 \right\} \right\rangle \le \ \dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}}_\omega^{\mathcal{O}}(\mathcal{SK}) \le \frac{1}{2}\,(9-1)\,(9-2) = 28\,,$$

d'où on déduit

$$\underline{\mathbf{S}}_\omega^{\mathcal{O}}(\mathcal{SK}) = \left\langle \left\{ \mathbf{F}_i \,\middle|\, 1 \le i \le 28 \right\} \right\rangle.$$

Cela résout l'équation $(\mathcal{SK})$ en ω. On obtient les solutions holomorphes locales en $\varpi \notin \Sigma(\mathcal{SK})$ par prolongement analytique des $\mathbf{F}_i$.

Notons que la dimension de l'espace des solutions holomorphes de $(\mathcal{SK})$ est la plus grande possible. Cela est important du point de vue de la théorie des tissus (voir 7.2.2).

3.2.2. Application à la caractérisation du trilogarithme par l'équation de Spence-Kummer. — On a vu que le logarithme ainsi que le dilogarihtme de Rogers sont caractérisés comme étant les seules fonctions mesurables des équations $(\mathcal{C})$ et (Ab) (respectivement). On peut s'attendre à un résultat similaire pour le trilogarithme.

Dans [**Go 95**], Goncharov obtient (entre autres choses) un résultat de ce type : il considère le 3ième

polylogarithme modifié introduit par Ramakrishnann et Zagier[(1)], défini par

$$\mathcal{L}_3(z) := \Re e\left(\mathbf{L}\mathrm{i}_3(z) - \mathbf{L}\mathrm{i}_2(z)\log|z| + \frac{1}{3}\mathbf{L}\mathrm{i}_1(z)\log^2|z|\right) \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\})\,.$$

Cette fonction est bien définie, est réelle analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, et se prolonge par continuité en une fonction sur $\mathbb{CP}^1$. On renvoie au chapitre 7 pour davantage de précisions.

Par linéarité, on peut prolonger $\mathcal{L}_3$ en une fonction sur $\mathbb{R}[\mathbb{CP}^1]$.

Lorsqu'il est bien défini, Goncharov considère l'élément suivant de $\mathbb{Q}[\mathbb{CP}^1]$:

$$\begin{aligned} R_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) := \sum_{i=1}^{3}\Bigg(&\left\{-\frac{(\alpha_{i+2}\,\alpha_{i+1}-\alpha_{i+1}+1)\,\alpha_i}{\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1}\right\} - \left\{\frac{\alpha_{i+2}\alpha_{i+1}-\alpha_{i+1}+1}{(\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1)\,\alpha_{i+1}\,\alpha_{i+2}}\right\} \\ &+\left\{\frac{\alpha_{i+2}\,\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}+1}{(\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1)\,\alpha_{i+1}}\right\} + \left\{\frac{\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1}{\alpha_{i+2}\,\alpha_i}\right\} - \left\{\frac{\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1}{\alpha_{i+2}}\right\} \\ &+\big\{\alpha_{i+2}\,\alpha_i-\alpha_i+1\big\} + \big\{\alpha_{i+2}\big\} - \big\{1\big\}\Bigg) + \big\{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\big\}\,, \end{aligned}$$

avec $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{CP}^1$ (les indices i étant regardés modulo 3).

Il montre ensuite que $\mathcal{L}_3$ satisfait l'équation fonctionnelle à 22 termes :

$$(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{L}_3\Big(R_3(a,b,c)\Big) = 0 \qquad (a,b,c \in \mathbb{C})\,.$$

Il montre alors (point (a) du Theorem 1.10 de [**Go 95**]) que

> *the space of real continuous functions on $\mathbb{CP}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ that satisfy the functional equation $(\mathcal{G})$ is generated by the functions $z \mapsto \mathcal{L}_3(z)$ and $z \mapsto \mathcal{L}_2(z)\log|z|$.*
>
> [*l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{CP}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ qui satisfont l'équation fonctionnelle $(\mathcal{G})$ est engendré par les fonctions $z \mapsto \mathcal{L}_3(z)$ et $z \mapsto \mathcal{L}_2(z)\log|z|$.*]

En fait, la preuve de ce théorème donnée par Goncharov montre que celui-ci est encore valide sous l'hypothèse plus faible de mesurabilité. Ce résultat caractérise le trilogarithme modifié $\mathcal{L}_3$ par l'équation fonctionnelle en trois variables $(\mathcal{G})$.

Auparavant, Goncharov a signalé que si l'on spécialise l'équation $(\mathcal{G})$ en posant

$$(*) \qquad a = 1\,, \quad b = x \quad \text{et} \quad c = (1-y)/(1-x)\,,$$

alors cette équation se simplifie et en utilisant la formule d'inversion $\mathcal{L}_3(1/z) = \mathcal{L}_3(z)$ (vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C}$), on obtient que $\mathcal{L}_3$ vérifie la version homogène de l'équation $(\mathcal{SK})$. On note $(\mathcal{SK}h)$ cette équation (c'est l'équation de la Proposition 3.2.1 ci-dessous). Cela amène Goncharov à demander si $(\mathcal{SK}h)$ caractérise les solutions de $(\mathcal{G})$ (page 209 de [**Go 95**]).

La détermination explicite d'une base de $\underline{\mathcal{S}}^{\mathcal{O}}_{\omega}(\mathcal{SK})$ dans la section précédente nous permet de donner une réponse positive à la "version réelle" de cette question.

Le dilogarithme de Rogers se prolonge en une fonction continue sur $]-\infty\,,\,1\,[$ en posant pour $x < 1$:

$$\mathbf{D}_2(x) := \mathbf{L}\mathrm{i}_2(x) + \frac{1}{2}\,\log|x|\,\log(1-x) - \frac{\pi^2}{6} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_2(0) = 0\,.$$

(1) Voir 7.1.

Remarque : le bilogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_2$ est considéré comme une fonction définie sur $]-\infty\,,\,1\,[$ au moyen de la représentation intégrale (où $\mathbf{L}og$ est la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$) :

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_2(x) = \int_0^x \frac{-\mathbf{L}og(1-s)}{s}\,ds\,.$$

On introduit la fonction $\mathcal{L}_3 :]-\infty\,,\,1\,[\to\mathbb{R}$ définie par $\mathcal{L}_3(0)=0$ et

$$\mathcal{L}_3(x) := \begin{cases} \delta_2(x)\,\log|x| & \text{pour } \ 0<x<1\,,\\ \delta_2(x)\,\log|x| + \frac{\pi^2}{4}\,\log|x| & \text{pour } \ x<0\,. \end{cases}$$

On a alors la

Proposition 3.2.1. — *Soit* $\mathbf{L} :]-\infty,1\,[\to\mathbb{R}$ *une fonction mesurable qui satisfait l'équation*

$$\begin{aligned} 2\,\mathbf{L}\big(U_1(x,y)\big) + 2\,\mathbf{L}\big(U_2(x,y)\big) - \mathbf{L}\big(U_3(x,y)\big) + 2\,\mathbf{L}\big(U_4(x,y)\big) + 2\,\mathbf{L}\big(U_5(x,y)\big)\\ -\mathbf{L}\big(U_6(x,y)\big) + 2\,\mathbf{L}\big(U_7(x,y)\big) + 2\,\mathbf{L}\big(U_8(x,y)\big) - \mathbf{L}\big(U_9(x,y)\big) = cte. \end{aligned}$$

pour $0<x<y<1$. *Alors il existe* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tels que* $\mathbf{L} = \alpha\,\mathcal{L}_3 + \beta\,\mathcal{L}_3 + \gamma\,.$

Démonstration : avec la détermination explicite des solutions de $(\mathcal{SK})$, c'est juste un exercice un peu fastidieux d'algèbre linéaire qu'on ne détaille pas. ■

La fonction $\mathcal{L}_3$ semble jouer ici le rôle de la fonction $z\mapsto\mathcal{L}_2(z)\log|z|$, qui est bien une solution de $(\mathcal{G})$ mais dont la restriction à l'axe réel est identiquement nulle, et de ce fait donne une solution triviale de $(\mathcal{SK}h)$ par la spécialisation $(*)$ quand $x,y\in\mathbb{R}$. Mais la relation entre ces deux fonctions n'est pas claire, bien que, formellement, leurs définitions soient similaires.

La proposition précédente apporte une réponse à la version réelle de la question posée par Goncharov citée plus haut. Elle implique le résultat suivant de caractérisation du trilogarithme classique $\mathbf{L}\mathrm{i}_3$:

Corollaire 3.2.2. — *Soit* $\mathbf{L} :]-\infty,1\,[\to\mathbb{R}$ *une fonction mesurable qui vérifie*

$$\begin{aligned} &2\,\mathbf{L}\big(\,x\,\big) + 2\,\mathbf{L}\big(\,y\,\big) - \mathbf{L}\big(\,\frac{x}{y}\,\big) + 2\,\mathbf{L}\big(\,\frac{1-x}{1-y}\,\big) + 2\,\mathbf{L}\big(\,\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,\big) - \mathbf{L}\big(\,xy\,\big)\\ &\quad + 2\,\mathbf{L}\big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\big) + 2\,\mathbf{L}\big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\big) - \mathbf{L}\big(\,\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\,\big)\\ &\quad = 2\,\mathbf{L}i_3(1) - \log(y)^2\log\big(\frac{1-y}{1-x}\big) + \frac{\pi^2}{3}\log(y) + \frac{1}{3}\log(y)^3 \end{aligned}$$

pour $0<x<y<1$. *Si* $\mathbf{L}$ *est dérivable en 0, alors* $\mathbf{L}\equiv\mathbf{L}\mathrm{i}_3$.

En fait, ce résultat est encore vérifié sous certaines hypothèses de régularité plus faibles que la dérivabilité en 0 : par exemple, l'hypothèse que $\mathbf{L}$ est lipschitzienne en 0 suffit.

Remarque : dans ce corollaire, $\mathbf{L}\mathrm{i}_3$ est considérée comme une fonction analytique sur $]-\infty,1[$, via la formule de représentation intégrale :

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_3(x) = \int_0^x\int_0^\sigma -\frac{\mathbf{L}og(1-\eta)}{\sigma\eta}\,d\eta\,d\sigma \qquad (x<1)\,.$$

3.3. Une équation dépendant d'un paramètre

On s'intéresse ici à la résolution de l'efa suivante, notée $(\mathcal{E}_a)$:

$$G_1(x) + G_2(y) \;+\; G_3\left(\frac{x}{y}\right) \;+\; G_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \;G_5\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$$
$$+\; G_6\left(\frac{a-y}{a-x}\right) \;+\; G_7\left(\frac{x(a-y)}{y(a-x)}\right) \;+\; G_8\left(\frac{(1-y)(a-x)}{(1-x)(a-y)}\right) \;= 0\,.$$

Pour $i \leq 8$, on note U_i^a la fraction rationnelle qui apparaît comme argument de G_i dans cette efa.

Le lieu singulier du tissu défini par les U_i^a est

$$\Sigma(a) := \Big\{(z:\zeta) \in \mathbb{C}^2 \;\Big|\; z\,\zeta\,(1-z)\,(1-\zeta)(z-\zeta)(a-\zeta)(a-z)$$
$$.. \times (a-z-\zeta+z\zeta)(a-z\zeta)(z\zeta-a\zeta-az+a) = 0\;\Big\}\,.$$

On choisit à nouveau $\omega = (1/3, 1/2) \notin \Sigma(a)$ comme point-base et on veut déterminer les solutions holomorphes locales de $(\mathcal{E}_a)$ en ω. Par application de la méthode d'Abel, on a pu construire les 15 éléments suivants de $\underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}_a)$ (notés $\mathbf{G}_i^a$) :

$$\mathbf{G}_6^a = \Big(\mathbf{L}_{x_a},\, -\mathbf{L}_{x_a}\,,\, 0,\, 0,\, 0, -\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_7^a = \Big(\mathbf{L}_{x_0+x_a}\,,\, 0,\, -\mathbf{L}_{x_0+x_1}\,,\, 0,\, 0,\, \mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_8^a = \Big(-1\,,\, 0\,,\, \mathbf{J}\,,\, \frac{a}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, 0,\, \frac{-1}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, 0, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_9^a = \Big(0\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,,\, -\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_{10}^a = \Big(\mathbf{L}_{x_a}\,,\, 0\,, -\mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0,\, 0\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\,,\, \nu_a\Big)$$
$$\mathbf{G}_{11}^a = \Big(0\,,\, 0\,, \mathbf{J}\,,\, 0\,,\, \frac{1}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, 0\,,\, \frac{-a}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_{12}^a = \Big(0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\,,\, -\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\,,\, -\mathbf{L}_{x_0}\Big)$$
$$\mathbf{G}_{13}^a = \Big(\kappa_a\,,\, \mathbf{L}_{x_a}\,,\, 0\,,\, -\mathbf{L}_{x_1}\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\Big)$$
$$\mathbf{G}_{14}^a = \Big(1\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, \frac{1}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, \frac{-a}{a-1}\,\mathbf{J}\,,\, -\mathbf{J}\Big)$$
$$\mathbf{G}_{15}^a = \Big(\mathbf{D}\,, -\mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, \mathbf{D}\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_{16}^a = \Big(\mathbf{D}_a + \frac{\nu_a}{2}\,\mathbf{L}_{x_0+x_a}\,, -\mathbf{D}_a - \frac{\nu_a}{2}\,\mathbf{L}_{x_0+x_a}\,,\, -\mathbf{D}\,,\, 0\,,\, 0\,,\, -\mathbf{D}\,,\, \mathbf{D}\,,\, 0\Big)$$
$$\mathbf{G}_{17}^a = \Big(\mathbf{L}_{x_a x_1 - x_1 x_a}\,,\, -\mathbf{L}_{x_a x_1 - x_1 x_a}\,,\, 0\,,\, 2\,\mathbf{D} - \kappa_a\,\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\,,\, -2\,\mathbf{D} + \kappa_a\,\mathbf{L}_{x_0}\,,\, 0\,,\, -2\,\mathbf{D}\Big)$$
$$\mathbf{G}_{18}^a = \Big(0\,,\, 0\,,\, \mathbf{B}\,,\, \frac{-a}{a-1}\,\mathbf{B}\,,\, \frac{1}{a-1}\,\mathbf{B}\,,\, \frac{1}{a-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{L}_{x_0}\,,\, \frac{-a}{a-1}\,\mathbf{B}\,,\, \mathbf{B}\Big)$$

$$\mathbf{G}_{19}^a = \Big(\mathbf{L}_{x_0x_1-x_0x_a} - \nu_a\,\mathbf{L}_{x_0+x_a}\,,\ \mathbf{L}_{x_1x_0-x_ax_0} + \nu_a\,\mathbf{L}_{x_a}\,,\ 0\,,\ -\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1}\,,$$
$$\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1}\,,\ \mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1} - \ell_a\mathbf{L}_{x_1}\,,\ -\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1}\,,\ \frac{{\nu_a}^2}{2}\Big)$$

$$\mathbf{G}_{20}^a = \Big(\mathbf{L}_{x_ax_1+x_0x_1}\,,\ \mathbf{L}_{x_1x_a+x_1x_0}\,,\ -\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1} + \kappa_a\mathbf{L}_{x_0+x_1},\ \frac{{\kappa_a}^2}{2} + \frac{\pi^2}{3}\,,$$
$$\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1} - \kappa_a\mathbf{L}_{x_0+x_1},\ \mathbf{L}_{x_1^2+x_1x_0} - \kappa_a\mathbf{L}_{x_1},\ 0\,,\ -\mathbf{L}_{x_1^2+x_0x_1}\Big)$$

$$\mathbf{G}_{21}^a = \Big(0\,,\ 0\,,\ (a-1)^3\,\mathbf{C} + (a-1)^2\,\mathbf{J}\,,\ -a^3\,\mathbf{C} + a(2a^2-a-1)\,\mathbf{J}\,,\ \mathbf{C}\,,$$
$$\mathbf{C} + (a-1)\,\mathbf{J}\,,\ -a^3\,\mathbf{C}\,,\ (a-1)^3\,\mathbf{C} - 2a(a-1)^2\,\mathbf{J}\Big)\,,$$

avec

$$\mathbf{J} := \frac{1}{1-\mathbf{Id}} \qquad \mathbf{C} := \frac{1}{(1-\mathbf{Id})^2} \qquad \mathbf{B} := \frac{\mathbf{L}_{x_0}}{1-\mathbf{Id}}$$
$$\mathbf{D}_a := \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{x_0x_a} - \mathbf{L}_{x_ax_0}\right) \qquad \nu_a := \log(a) \qquad \kappa_a := \log(a-1)\,.$$

Les solutions de (Ab) sont des sous-solutions de $(\mathcal{E}_a)$ puisque les fonctions $U_1^a, \ldots, U_5^a$ sont celles qui apparaissent comme arguments dans (Ab). Avec un abus d'écriture, on définit cinq solutions de $(\mathcal{E}_a)$ en posant $\mathbf{G}_i^a := \mathbf{\Delta}_i$ pour $i = 1, \ldots, 5$. Alors on peut vérifier (on ne détaillera pas : c'est toujours élémentaire et fastidieux !) que les $\mathbf{G}_k^a$ (pour $1 \leq k \leq 21$) forment une famille libre d'éléments de $\underline{\mathcal{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}_a)$. On en déduit que (la dernière majoration étant donnée par la Proposition 1.2.4) :

$$21 = \dim_{\mathbb{C}} \left\langle \{\, \mathbf{G}_k^a \} \right\rangle \leq \dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathbf{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}_a) \leq \frac{1}{2}\,(8-1)\,(8-2) = 21\,.$$

Ce qui implique

$$\underline{\mathbf{S}_\omega^{\mathcal{O}}}(\mathcal{E}_a) = \left\langle \left\{ \mathbf{G}_k^a \;\middle|\; 1 \leq k \leq 21 \right\} \right\rangle.$$

Cela résout l'équation $(\mathcal{E}_a)$ en ω. On obtient les solutions holomorphes locales en $\varpi \notin \Sigma(a)$ par prolongement analytique des $\mathbf{G}_k^a$.

Les 8-uplets $\mathbf{G}_k^a$ dépendent de façon analytique de a et, par rapport à ce paramètre, admettent des prolongements holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. À partir de la liste ci-dessus, on peut obtenir une liste des solutions holomorphes de l'équation $(\mathcal{E}_a)$ pour a complexe, distinct de 0 ou 1.

Pour tout $a \neq 0, 1$, la dimension de l'espace des solutions holomorphes de $(\mathcal{E}_a)$ est la plus grande possible. Ce fait sera particulièrement important quand nous l'interpréterons en théorie des tissus (cf. 7.3).

PARTIE II

GÉOMÉTRIE DES TISSUS

CHAPITRE 4

LA GÉOMÉTRIE DES TISSUS DE BLASCHKE ET BOL

On donne ici une présentation quelque peu modernisée de la géométrie classique des tissus telle qu'elle est exposée dans [**BB**]. Pour d'autres présentations, on renvoie aux références suivantes : [**AG-2**], [**Ch 82**], [**Ch 85**], [**CG 78**], [**G**], et, plus particulièrement, à l'article de Hénaut dans [**W**].

On commence par rappeler quelques notions générales sur les tissus en toute dimension, pour se focaliser très vite sur le cas de la dimension deux. La majorité de nos résultats concerne les tissus plans, ce qui justifie qu'on en fasse les principaux objets de notre étude. Notons que de nombreuses questions intéressantes et non triviales sont encore ouvertes pour les tissus plans, bien qu'elles s'énoncent de façon élémentaire dans ce cadre.

En 4.2, on donne plusieurs exemples de tissus plans. Si certains font juste figure d'illustration, d'autres sont des objets fondamentaux en géométrie des tissus et seront constamment utilisés par la suite. En particulier, c'est ici qu'est introduite la notion de tissu algébrique.

Dans la section 4.3, on introduit les notions de relations abéliennes et de rang, avant de les illustrer sur l'exemple fondamental des tissus algébriques.

La dernière partie du chapitre porte sur les résultats d'algébrisation des tissus de rang maximal de type Lie ou Abel-inverse. On introduit ensuite la notion de tissu exceptionnel, qu'on illustre par l'exemple classique du 5-tissu de Bol. Pour finir, on explique l'importance des tissus exceptionnels.

Dans tout ce chapitre (comme dans la seconde partie de cette thèse), on se place implicitement dans un cadre holomorphe, bien que la théorie des tissus telle qu'elle est décrite ci-dessous puisse être considérée de façon analogue dans un cadre réel. Ainsi, le mot "régulier" signifiera "holomorphe" sauf s'il est précisé qu'on se place dans un cadre réel, et dans ce cas il signifiera "C^k avec k assez grand". Le choix du cadre holomorphe est justifié par l'objet principal de notre intérêt, à savoir la notion de tissu exceptionnel, puisque celle-ci se définit relativement à certains résultats d'algébrisation.

4.1. Tissus : généralités et premières définitions

On définit tout d'abord la notion *d'être en position générale* pour une famille finie de sous-espaces linéaires d'un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) E, de dimension finie $n > 1$.

On se donne $d \geq 2$ sous-espaces propres $E_1, E_2, ..., E_d$ de E.

Définition 4.1.1. — Les sous-espaces vectoriels $E_1, ..., E_m$ sont dits *en position générale* dans E si, pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, ..., d\}$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(1) \qquad \dim_{\mathbb{C}} \big(\sum_{i \in I} E_i \big) = \min \Big\{ n \,, \sum_{i \in I} \dim_{\mathbb{C}} \, (E_i) \Big\} \,;$$

$$(2) \qquad \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \big(\bigcap_{i \in I} E_i \big) = \min \Big\{ n \,, \sum_{i \in I} \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \, (E_i) \Big\} \,.$$

(Dans cette définition, il n'est pas supposé que les sous-espaces E_i sont de même dimension).

On désignera parfois par PG cette condition d'être en position générale.

Exemples : 1. Si $\Sigma_i \dim_{\mathbb{C}} E_i \leq n$, alors les E_i sont en position générale si et seulement si ils sont en somme directe dans E.
2. Si $E_1, E_2, ..., E_d$ sont des k-plans dans E de dimension $n = pk$, l'hypothèse de position générale se traduit par le fait que toute famille $E_{i_1}, E_{i_2}, .., E_{i_q}$ de $q \leq p$ de ses sous-espaces est en somme directe dans E.
3. En particulier, si tous les E_i sont des droites (*i.e.* sont de dimension 1), l'hypothèse qu'ils sont en position générale signifie que ces droites sont deux à deux distinctes et que $p \leq n$ d'entre elles sont en somme directe.
4. Enfin, en dimension deux (*i.e.* $\dim_{\mathbb{C}} E = 2$), les E_i (forcément de dimension un) sont en position générale si et seulement si ils sont deux à deux distincts.

À partir du concept de feuilletage (qu'on ne rappellera pas) et avec cette notion de position générale, la définition d'un d-tissu régulier sur un domaine simplement connexe Ω de $\mathbb{C}^n$ est élémentaire. Dans la définition qui suit, n, k et d sont des entiers, vérifiant les relations $d \geq 1$, $n \geq 2$ et $1 \leq k < n$.

Définition 4.1.2. — Un *d-tissu régulier de codimension k sur* Ω est la donnée d'une famille $\mathcal{W}(d) = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ de feuilletages réguliers de codimension k sur Ω tels qu'en tout point $\omega \in \Omega$, la famille $\{ \mathrm{T}_\omega \mathcal{F}_i \,|\, i = 1, \ldots, d \}$ de sous-espaces de $\mathrm{T}_\omega \Omega$ est en position générale.

(Pour $\omega \in \Omega$, on a noté $\mathrm{T}_\omega \mathcal{F}_i$ l'espace tangent en ω à la feuille du feuilletage $\mathcal{F}_i$ qui passe par ω).

Le mot tissu se traduit "web" en langue anglaise, ce qui explique la notation $\mathcal{W}$.

De cette définition, on déduit immédiatement les notions de *germe de tissu* et de *sous-tissu*. Si l'on demande que les $\mathcal{F}_i$ soient ordonnés, on obtient la notion de *tissu ordonné*. On notera souvent $\mathcal{W}\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ (resp. $\mathcal{W}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d)$) le tissu (resp. le tissu ordonné) formé par les $\mathcal{F}_i$.

Si $U_1, U_2, \ldots, U_d$ sont des applications holomorphes définies sur Ω telles que, pour chaque indice i, la fonction U_i est une intégrale première d'un feuilletage $\mathcal{F}_i$ sur Ω, on notera $\mathcal{W}\{U_1, \ldots, U_d\}$ le tissu formé par les $\mathcal{F}_i$ (avec une notation analogue pour les tissus ordonnés). Puisqu'en dimension deux, tout germe de feuilletage régulier possède une intégrale première holomorphe, on peut toujours, étant donné un (germe de) tissu plan $\mathcal{W} = \mathcal{W}\{\mathcal{F}_i\}$, trouver des applications holomorphes telles que $\mathcal{W} = \mathcal{W}\{U_i\}$. En général, il n'y a pas de choix canonique pour de telles intégrales premières.

On peut sans trop de difficultés imaginer des généralisations de la notion de tissu telle qu'on l'a définie ci-desssus :
- ces définitions s'étendent sans changement aucun à la situation réelle ;
- puisque la notion de position générale ne demande pas que les sous-espaces considérés soient tous de même dimension, on peut considérer des "tissus mixtes" formés de feuilletages en position générale, mais de codimensions différentes. Cette notion a été peu considérée (voir cependant [**BB 34**], [**Bom 34**] et [**Ch 85**]) ;

– une généralisation serait aussi de regarder le cas où l'on s'est donné une famille finie de distributions, non nécessairement intégrables, de sous-espaces linéaires en position générale dans l'espace tangent. Cette généralisation n'a été que très peu étudiée ;
– la notion de *tissu formel* est également intéressante. Si on appelle un feuilletage formel de $(\mathbb{C}^2, 0)$ la donnée d'un champ de vecteurs formel regardé modulo multiplication à gauche par les unités formelles, on définira un d-tissu formel de $(\mathbb{C}^2, 0)$ comme la donnée de d feuilletages formels tels que leurs jets d'ordre 0 (en l'origine) définissent des directions en position générale au sens de la Définition 4.1.1.

Dans le cas de la dimension deux qui nous intéresse particulièrement, la notion de tissu est très intuitive : un d-tissu est la donnée de d feuilletages en courbes holomorphes, deux à deux transverses en leur point d'intersection (voir la Figure 1).

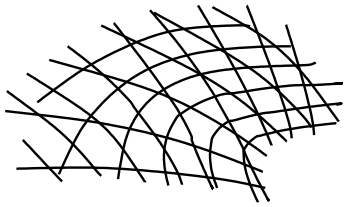


FIGURE 1. un 3-tissu plan

On peut (et on doit) élargir la définition d'un tissu pour pouvoir parler de tissu "à singularité".

Définition 4.1.3. — Un *d-tissu singulier* sur Ω est la donnée d'une famille $\mathcal{W}(d) = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ de feuilletages holomorphes singuliers sur Ω tels qu'en tout point générique $\omega \in \Omega$, la famille $\{\, \mathrm{T}_\omega \mathcal{F}_i \mid i = 1, \ldots, d \,\}$ de sous-espaces de $\mathrm{T}_\omega \Omega$ est en position générale.

On peut alors définir le *lieu singulier* d'un d-tissu singulier $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$. Par définition, c'est l'ensemble noté $\Sigma[\mathcal{W}]$, réunion des singularités $\Sigma[\mathcal{F}_i]$ des feuilletages $\mathcal{F}_i$ et du lieu où l'hypothèse de position générale PG n'est pas satisfaite.

Il est clair qu'un tissu sur Ω est régulier si et seulement si son ensemble singulier est vide. Quand il ne sera pas dit expressément qu'un tissu est singulier, c'est qu'il sera régulier.

Par exemple, en dimension deux, si F_1 et F_2 sont deux feuilletages sur Ω, on note $\Sigma[F_1, F_2]$ l'ensemble des points de Ω en lequels les feuilles des deux feuilletages F_1 et F_2 ne sont pas transverses. Alors, étant donné un d-tissu $\mathcal{W} = \{\, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_d \,\}$ sur Ω, on a :

$$\Sigma[\mathcal{W}] = \Big(\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{W}} \Sigma[\mathcal{F}] \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\substack{\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{W} \\ \mathcal{F} \neq \mathcal{F}'}} \Sigma[\mathcal{F}, \mathcal{F}'] \Big) .$$

L'introduction de cette notion de tissu singulier se justifie par deux raisons. La première est que la plupart des tissus que nous seront amenés à considérer dans la suite seront singuliers. La deuxième est que, de la même façon que les singularités d'une équation différentielle linéaire en une variable donnent des informations sur ses solutions, le lieu singulier d'un tissu sera susceptible de donner des informations sur les solutions de certaines équations fonctionnelles intéressantes que l'on peut lui attacher (voir 2.2 ainsi que la section 4.3 de ce chapitre).

Pour englober certains exemples fondamentaux de la théorie (tels les "tissus algébriques", voir

plus loin), il est nécessaire de définir la notion de tissu sur un espace qui ne soit pas forcément simplement connexe. Il est trop restrictif de définir un tissu global sur une variété complexe comme étant donné par d feuilletages dont les feuilles sont génériquement en position générale.

En effet, imaginons la situation (générale mais naturelle) où l'on s'est donné un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une surface complexe $\mathcal{S}_1$, ainsi qu'un revêtement $\pi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ de $\mathcal{S}_1$ sur une autre surface $\mathcal{S}_2$, génériquement d-1. Si $U \subset \mathcal{S}_2$ est un ouvert simplement connexe suffisamment petit, il va exister d ouverts $U_1, \ldots, U_d \subset \mathcal{S}_1$ tels que $\pi^{-1}(U) = \cup_i U_i$, l'application π induisant un isomorphisme de U_i sur U pour $i = 1, .., d$. En posant alors $\mathcal{F}_i = \pi_*(\mathcal{F}|_{U_i})$, et si les d feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont deux à deux distincts, on obtient un d-tissu sur U. On peut faire cette construction au voisinage de tout point générique. On obtient des tissus qui se recollent en un objet global que l'on voudra considérer comme un "d-tissu" sur $\mathcal{S}_2$. Pourtant ce "d-tisssu" n'est a priori pas formé de d feuilletages globaux de $\mathcal{S}_2$.

Après cet exemple très général, on peut citer le cas plus particulier du "tissu" qu'on aimerait pouvoir associer à un polynôme $P(x, y, t)$ de degré $d \geq 2$ en t, et que l'on définirait de la façon suivante : en un point générique $q = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{C}^2$, il va exister d racines distinctes t_i, à l'équation $P(x_0, y_0, t) = 0$. Les d ensembles de niveaux $\{P(x, y, t_i) = P(x_0, y_0, t_i)\}$ sont des courbes algébriques qui s'intersectent transversalement en q si P est suffisamment générique. On peut donc définir localement un d-tissu au voisinage de chaque point générique de $\mathbb{CP}^2$. De la même façon que dans l'exemple précédent, on obtient des tissus qui se recollent en un objet global que l'on voudra considérer comme un "d-tissu" sur $\mathbb{CP}^2$. Sauf dans des cas dégénérés, ce "tissu" ne sera pas formé de plusieurs feuilletages globaux de $\mathbb{CP}^2$.

On est donc amené à poser la définition suivante (voir [**Cer 92**]) : soit X une variété complexe de dimension $n \geq 2$, pas forcément simplement connexe.

Définition 4.1.4. — Un *d-tissu* sur X est la donnée d'un recouvrement $\{U_i \,|\, i \in I\}$ de X par des ouverts simplement connexes et d'un d-tissu $\mathcal{W}_i$ sur chaque U_i, tels que, pour tout $i, j \in I$, les tissus $\mathcal{W}_i$ et $\mathcal{W}_j$ se recollent (en un sens évident) sur l'intersection $U_i \cap U_j$ si elle est non vide.

(Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait définir un d-tissu sur X comme une classe d'équivalence de tels "recouvrements tissés " $\{(U_i, \mathcal{W}_i)\}$).

Dans la définition précédente, le mot "tissu" vaut pour "tissu régulier" ou pour "tissu singulier".

Il est bien sûr possible de donner une définition plus formalisée équivalente en termes de section holomorphe de fibré sur X (voir encore [**Cer 92**]). En dimension deux, par exemple, la donnée d'un d-tissu sur une surface $\mathcal{S}$ correspond à celle (modulo multiplication par une constante non nulle) d'une section holomorphe globale non nulle du produit par un fibré en droite L, du d-ième produit symétrique du fibré cotangent $\mathrm{T}^*\mathcal{S}$ (noté $\mathrm{Sym}^d(\mathrm{T}^*\mathcal{S})$), qui évite génériquement le "lieu discriminant" de ce fibré. Un d-tissu sur $\mathcal{S}$ peut donc se voir comme un élément

$$\mathcal{W}(d) \in \mathbb{P}\, H^0(\,\mathcal{S}\,,\, \mathrm{Sym}^d(\mathrm{T}^*\mathcal{S}) \otimes L\,)\,.$$

Avec ce point de vue, le tissu $\mathcal{W}(d)$ sera régulier si et seulement si il peut être représenté dans $H^0(\,\mathcal{S}, \mathrm{Sym}^d(\mathrm{T}^*\mathcal{S}) \otimes L\,)$ par une section qui ne s'annule et ne rencontre l'ensemble discriminant en aucun point. Cela implique que la classe d'Euler du fibré $\mathrm{Sym}^d(\mathrm{T}^*\mathcal{S}) \otimes L$ est nulle, et donc l'existence d'un tissu régulier global implique certaines contraintes topologiques sur $\mathcal{S}$. Par exemple, il n'existe pas de tissu sans singularités sur $\mathbb{CP}^2$.

Exemple : Le tissu $W = \mathcal{W}\{x, y, x^2 + y^2\}$ est un 3-tissu sur $\mathbb{CP}^2$. Notons $\mathbb{CP}^1_\infty$ la droite $\{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid z = 0\}$ que l'on considérera "à l'infini". Le lieu singulier de W est la réunion de 3 droites :

$$\Sigma[W] = \mathbb{CP}^1_\infty \cup \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, xy = 0 \}.$$

La Figure 2 ci-dessous donne une représentation réelle de ce tissu, au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$:

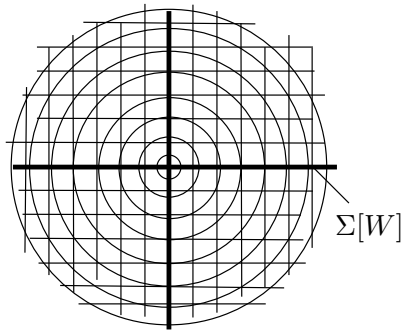


FIGURE 2. le tissu $\mathcal{W}(x, y, x^2 + y^2)$ et son lieu singulier.

Suivant les idées de Klein et de son fameux programme d'Erlangen, le problème général qui nous occupe est celui de la classification des objets géométriques que sont les tissus, modulo un certain "groupe de transformations".

On définit l'équivalence entre germes de tissu. Soit G un sous-groupe non-trivial de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Définition 4.1.5. — Considérons deux germes de tissus $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ et $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ en l'origine de $\mathbb{C}^n$. Ils sont dits *G-équivalents* s'il existe une application $g \in G$ telle que :

$$g_*(\mathcal{W}) = \{ g_*(\mathcal{F}_1), \ldots, g_*(\mathcal{F}_d) \} = \{ \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d \} = \mathcal{W}.$$

On en déduit la notion de G-équivalence locale :

Définition 4.1.6. — Soient $\mathcal{W}$ et $\widetilde{\mathcal{W}}$ deux tissus définis respectivement sur deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, notés Ω et $\widetilde{\Omega}$, de lieux singuliers respectifs Σ et $\widetilde{\Sigma}$. Ils sont dit *localement G-équivalents* s'il existe $\omega \in \Omega \smallsetminus \Sigma$ et $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \smallsetminus \widetilde{\Sigma}$ tels que les deux germes $(\mathcal{W}, \omega)$ et $(\widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\omega})$, rapportés en l'origine de $\mathbb{C}^n$, sont G-équivalents au sens de la définition précédente.

La G-équivalence locale entre deux tissus sera notée $\mathcal{W} \sim_G \widetilde{\mathcal{W}}$.

Remarque : Classiquement, on prend $G = \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ et on cherche à classifier les tissus à biholomorphisme local près. Quand rien n'est précisé, c'est qu'on s'est implicitement placé dans ce cadre : on parlera juste d'équivalence entre tissus, sans préciser le groupe de transformations.

Ces questions de classification et les définitions ci-dessus ont leurs équivalents immédiats pour les tissus réels C^k, les tissus mixtes, les tissus "non-intégrables", ou encore pour les tissus formels. On peut aussi s'intéresser à la classification formelle des tissus (analytiques ou formels), etc.

Il est clair que, dans le cas de la dimension deux, le théorème d'inversion locale implique que la notion de germe de d-tissu n'a pas d'intérêt pour $d = 1$ et $d = 2$ $\big($sauf si l'on considère des germes de 1 ou 2-tissus singuliers, mais le problème change alors de nature : par exemple, pour $d = 1$, cela correspond à la classification analytique des singularités des feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)\big)$.

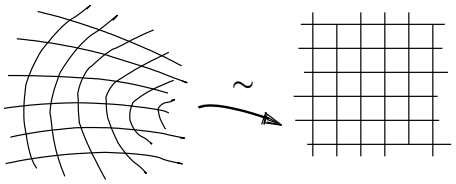


FIGURE 3. Tous les germes de 2-tissus plans réguliers sont équivalents $\big($modulo $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)\big)$.

Par contre, comme on va l'expliquer ci-dessous (en 4.1.1), il existe déjà des invariants locaux pour les 3-tissus plans. C'est la découverte de ce fait qui a donné naissance à la théorie des tissus.

Comme on l'a dit dans l'introduction, il était important pour les ingénieurs des années 1900 de pouvoir rectifier leurs abaques, pour des questions de lisibilité. Ce problème se traduit comme celui, très naturel, de savoir quand il est possible de rendre linéaires toutes les feuilles d'un 3-tissu donné. Ou plus fort encore, quand est-il possible de transformer ce tissu en un tissu formé de trois pinceaux de droites ? Cette problématique est illustrée par la figure ci-dessous :

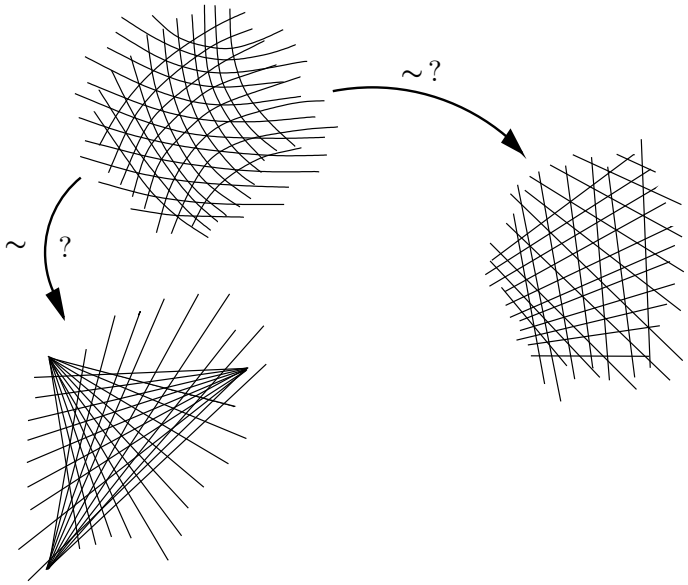


FIGURE 4. Le problème de la linéarisation d'un 3-tissu.

On pose la

Définition 4.1.7. — Un tissu défini sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sera dit *linéaire* si les feuilles des différents feuilletages qui le composent sont l'intersection avec Ω de sous-espaces linéaires de $\mathbb{C}^n$. Un tissu sera dit *G-linéarisable* s'il est localement G-équivalent à un tissu linéaire.

Un tissu plan sera dit *linéarisable* sans autre précision, s'il est localement équivalent, modulo changement de coordonnées holomorphes, à un tissu linéaire. Un tissu sera dit *parallélisable* s'il est linéarisable en un tissu formé d'espaces linéaires parallèles. Un tissu plan parallélisable est donc équivalent à un tissu formé de pinceaux de droites dont les sommets sont alignés.

On peut dire que c'est la solution du problème de la caractérisation des 3-tissus parallélisables (par

Thomsen et Blaschke-Dubourdieu) qui a motivé l'étude systématique des tissus (par Blaschke et ses collaborateurs). On rappelle ci-dessous quelques résultats classiques sur les 3-tissus plans.

4.1.1. Résultats classiques sur les 3-tissus plans. — Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ un 3-tissu défini sur un "petit" voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. Soient L_1, L_2 et L_3 les trois feuilles passant par l'origine des trois feuilletages de $\mathcal{W}$. Si p est un point de L_1 suffisamment proche de l'origine, la feuille de $\mathcal{F}_3$ passant par p intersecte L_2 en un point qu'on notera $h_1^2(p)$. On vérifie que l'application $p \mapsto h_1^2(p)$ définit un germe holomorphe de $(L_1, 0)$ dans $(L_2, 0)$.

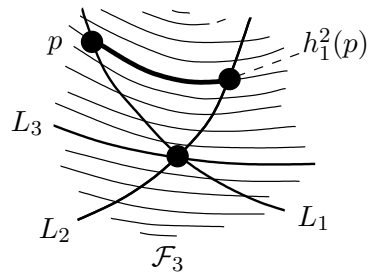
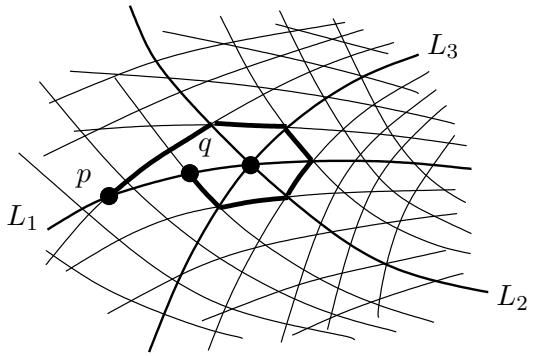


FIGURE 5. L'application h_1^2.

Plus généralement, quand i, j et k sont tels que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, en se déplaçant le long des feuilles de $\mathcal{F}_i$, on peut associer à tout point p de L_j (suffisamment proche de l'origine) un point $h_j^k(p)$ de L_k ; cela nous défini un germe d'application holomorphe $h_j^k : (L_j, 0) \to (L_k, 0)$. Par composition, on obtient un germe d'application

$$H_1 = h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 \circ h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 \,:\, (L_1\,,\,0) \longrightarrow (L_1\,,\,0)\,.$$

Pour $p \in L_1$ (toujours supposé suffisamment proche de l'origine), l'image $q = H_1(p)$ de p par H est obtenue en traçant un "hexagone" autour de l'origine en se déplaçant le long des feuilles de $\mathcal{W}$:



Définition 4.1.8. — Le 3-tissu $\mathcal{W}$ est dit *hexagonal* si tout hexagone tracé en partant de suffisamment près de l'origine se referme (*i.e.* si le germe H_1 défini ci-dessus est l'identité). Plus généralement, un d-tissu est dit *hexagonal* si tous ses sous-3-tissus le sont.

Dans [**Th 27**], Thomsen a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un 3-tissu soit parallélisable est qu'il soit hexagonal. D'autre part dans [**BD 28**], W. Blaschke et J. Dubourdieu montrent comment associer à tout 3-tissu une 2-forme de courbure $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}[\mathcal{W}]$, maintenant connue

comme la courbure de Blaschke (définie en 5.1 dans cette thèse) qui est un invariant différentiel du tissu et est identiquement nulle si et seulement si le tissu est parallélisable. On a donc le

Théorème 4.1.9. — *Pour un 3-tissu plan $\mathcal{W}(3)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{W}(3)$ *est hexagonal.*
2. $\mathcal{W}(3)$ *est parallélisable.*
3. $\mathcal{W}(3)$ *est équivalent à* $\mathcal{W}\{x, y, x+y\}$.
4. $\mathcal{W}(3)$ *est de coubure de Blaschke identiquement nulle.*

Deux tissus topologiquement équivalents ne peuvent être hexagonaux qu'en même temps. L'hexagonalité est donc une condition de fermeture de nature topologique. Le théorème précédent montre qu'elle est équivalente à l'annulation de la courbure de Blaschke, qui est une condition de nature différentielle. C'est ce fait remarquable qui a amené Blaschke à désigner sous l'appellation "Topologische Fragen der Differentiale Geometrie" ("Questions topologiques de géométrie différentielle") l'étude de ces questions de fermeture pour les tissus et de leurs liens avec la classification analytique des tissus. Par extension, c'est sous cette terminologie que furent publiés dans les années trente les travaux de l'école hambourgeoise sur les tissus.

L'étude de la linéarisation des 3-tissus non hexagonaux est encore plus subtile. À ce sujet, on signale le problème ancien de la détermination des linéarisations possibles d'un 3-tissu donné. La conjecture de Gronwall (énoncée sans démonstration dans [**Gron 12**]) est qu'un 3-tissu non hexagonal admet au plus une linéarisation, modulo les transformations projectives. Plus précisément, soit

$$\mathrm{Lin}\big[\mathcal{W}(3)\big] = \Big\{ \phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0) \;\big|\; \phi \text{ linéarise } \mathcal{W}(3) \Big\}$$

l'ensemble des linéarisation d'un 3-tissu $\mathcal{W}(3)$. Par composition à gauche avec les homographies, on a une action naturelle du groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Lin}\big[\mathcal{W}(3)\big]$. On note $N\big[\mathcal{W}(3)\big]$ le cardinal de l'espace quotient associé. On peut alors énoncer la

Conjecture 4.1.10 **(Gronwall)**. — *Pour tout $\mathcal{W}(3)$ non parallélisable, on a :*

$$N\big[\mathcal{W}(3)\big] \leq 1\,.$$

O. Borůvka et G. Bol (voir [**Bor 26**] et [**Bol 38**]) ont montré qu'on a la borne universelle $N[\mathcal{W}(3)] \leq 17$ pour les 3-tissus réels non-parallélisables. Ce résultat a été amélioré par G. Vaona au début des années soixante : dans [**Va 61**] il montre qu'on a $N[\mathcal{W}(3)] \leq 11$ et il esquisse une méthode pour établir la conjecture de Gronwall. Celle-ci aurait finalement été obtenue par S.V. Smirnov en 1964 dans la publication difficile à trouver [**Smi 64**]. Pourtant les avancées de Vaona et de Smirnov ne semblent pas être connues, comme le montrent les lectures de [**Ch 85**] ou de [**GMS 01**]...

Pour $d \geq 4$, c'est un résultat récent de A. Hénaut (voir [**Hé 93**]) qu'un d-tissu admet au plus une linéarisation, modulo les transformations projectives. Pour les tissus hexagonaux, cela avait été prouvé par K. Mayrhofer et K. Reidemester longtemps auparavant, avec des hypothèses de régularité très faibles (voir [**BB**] page 93).

Signalons aussi qu'un problème ancien et important sur la linéarisation des d-tissus plans (pour $d \geq 4$) a été résolu très récemment par M. Akivis, V. Goldberg et V. Lychagin : dans [**AGL 04**] ils donnent la construction d'invariants différentiels attachés aux d-tissus plans (pour tout $d \geq 4$) dont l'annulation caractérise les tissus linéarisables. En particulier, leurs résultats confirment une conjecture de Blaschke au sujet de la linéarisation des 4-tissus.

4.2. Quelques exemples de tissus

On va présenter ici certains exemples de tissus que l'on peut attacher de façon naturelle à différents objets classiques en mathématiques. Les exemples ci-dessous proviennent de divers domaines des mathématiques, à savoir la théorie des équations différentielles, la géométrie différentielle projective et la géométrie algébrique projective.

Certains des tissus décrits ci-dessous font juste figure d'illustration et ne seront plus considérés par la suite. Entrent dans cette catégorie le 3-tissu de Darboux, le 27-tissu de Burau, le 6-tissu de Clemens-Griffiths, les tissus associés aux feuilletages de $\mathbb{CP}^2$...

D'autres exemples sont centraux en théorie des tissus. Les notions de tissu algébrique et de 5-tissu de Segre sont fondamentales en vue des questions qui nous intéresseront.

4.2.1. Exemples de tissus en géométrie différentielle projective. — Comme on l'a signalé dans la partie historique de l'introduction, ce sont principalement des considérations provenant de la géométrie différentielle projective des surfaces qui ont donné naissance à la théorie des tissus. L'article fondateur de Thomsen [**Th 27**] cité plus haut utilise de façon essentielle la construction suivante, due à Darboux.

4.2.1.1. Le 3-tissu de Darboux attaché à une surface de $\mathbb{CP}^3$. — Dans [**Dar 80**], Darboux donne une construction d'un 3-tissu que l'on peut projectivement attacher à une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^3$ (la construction originelle de Darboux s'appliquait aux surfaces réelles de $\mathbb{R}^3$, mais n'est pleinement rigoureuse que dans un cadre complexe). La discussion suivante est tirée de [**CF**], pages 51-54.

Pour motiver cette construction, rappelons une définition géométrique des directions principales d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ en un de ses point z. Considérons les sphères osculatrices à $\mathcal{S}$ en z. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec une telle sphère S définit un germe de courbe singulier en z sur $\mathcal{S}$. Pour une sphère générique, ce germe aura une singularité double ordinaire en z et définira donc deux directions tangentes distinctes $d_1(S), d_2(S) \in \mathbb{P}\,\mathrm{T}_z\mathcal{S}$.

On peut montrer qu'il existe deux sphères osculatrices S_1 et S_2 telles que les deux directions tangentes $d_1(\mathrm{S}_\kappa)$ et $d_2(\mathrm{S}_\kappa)$ coïncident pour $\kappa = 1, 2$. Ces deux sphères sont les "sphères de courbure" de $\mathcal{S}$ en z et on montre que les deux directions $d_1(S_1)$ et $d_1(S_2)$ sont les directions principales de $\mathcal{S}$ en z. Vu la construction géométrique des directions principales que l'on vient d'esquisser, il est clair que les directions principales sont une notion gaussienne, c'est-à-dire bien définie relativement aux transformations isométriques de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

Si l'on veut généraliser la construction géométrique précédente en géométrie différentielle projective, il est naturel de remplacer les sphères considérées par des quadriques osculatrices puisqu'une sphère est transformée en quadrique par une transformation projective générique. On pourrait alors considérer le système linéaire des hypersurfaces quadriques ayant un contact d'ordre 2 avec $\mathcal{S}$ en z. Mais cela laisse trop d'arbitraire à ces quadriques et on est amené à considérer le système linéaire, noté $Q_z[\mathcal{S}]$, des hypersurfaces quadriques ayant un contact d'ordre 3 avec $\mathcal{S}$ en z.

L'intersection d'une quadrique $Q \in Q_z[\mathcal{S}]$ avec $\mathcal{S}$ définit un germe de courbe sur $\mathcal{S}$, avec une singularité triple en z, auquel on peut associer les trois directions tangentes à $\mathcal{S}$ qu'il définit, qu'on notera $\delta_1(Q)$, $\delta_2(Q)$ et $\delta_3(Q)$. Darboux montre que (sous certaines hypothèses génériquement vérifiées), il existe trois quadriques Q_1, Q_2 et Q_3 dans $Q_z[\mathcal{S}]$ telles que, pour $k = 1, 2, 3$, on a :

$$\delta_1(Q_k) = \delta_2(Q_k) = \delta_3(Q_k)\,.$$

Par définition, les *trois directions de Darboux à $\mathcal{S}$ en z* sont les trois directions $\delta_1(Q_k)$ pour $k = 1, 2, 3$. En effectuant cette construction en tous les points de $\mathcal{S}$, on obtient trois distributions (régulières) de directions tangentes, qui sont intégrables car de dimension 1. En considérant les courbes intégrales associées, on obtient un 3-tissu $\mathcal{S}$ qu'on définira comme étant le *3-tissu de Darboux* de $\mathcal{S}$. Vu la construction qu'on vient d'en esquisser, il est clair que c'est un invariant projectif de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que si g désigne une transformation projective, le 3-tissu de Darboux de $g(\mathcal{S})$ est l'image du 3-tissu de Darboux de $\mathcal{S}$ par g.

4.2.1.2. Le 5-tissu de Segre attaché à une surface de $\mathbb{CP}^5$. — Une construction géométrique similaire, due à Corrado Segre (voir [**Se-C 10**] et [**Se-C 21**]), permet d'attacher projectivement un 5-tissu sur toute surface générique $\mathcal{S}$ de $\mathbb{CP}^5$. Elle est importante dans l'étude des 5-tissus exceptionnels, et si elle a été utilisée de façon intéressante par certains géomètres italiens dans les années 40-50, elle ne semble plus être connue aujourd'hui. Pour une étude plus détaillée et pour des références, on renvoie au chapitre 8 de cette thèse.

Soit donc une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$, non dégénérée (*i.e.* non-incluse dans un hyperplan). On fait les hypothèses supplémentaires que $\mathcal{S}$ n'est pas incluse dans une surface de Véronèse $\mathcal{V}_2 \subset \mathbb{CP}^5$, et qu'elle n'est pas développable (sinon la construction qui va suivre ne peut pas se faire).

Soit $z \in \mathcal{S}$. Considérons le système linéaire de dimension 2 des hyperplans qui contiennent $T_z\mathcal{S}$:

$$\mathcal{H}(z) = \left\{ H \in \left(\mathbb{CP}^5\right)^* \mid \mathrm{T}_z\mathcal{S} \subset H \right\} .$$

Pour $H \in \left(\mathbb{CP}^5\right)^*$ passant par z, on note $\mathcal{C}(H)$ le germe de courbe en z sur $\mathcal{S}$, défini par l'intersection de H avec $\mathcal{S}$. Ce germe sera singulier en z si et seulement si H contient $\mathrm{T}_z\mathcal{S}$. Pour $H \in \mathcal{H}(z)$ générique, le germe $\mathcal{C}(H)$ aura une singularité double ordinaire en z. Considérons l'ensemble des hyperplans $H \in \mathcal{H}(z)$ pour lesquels cette singularité dégénère en un cusp :

$$\mathcal{C}(z) = \left\{ H \in \mathcal{H}(z) \mid C(H) \text{ est un cusp en } z \right\} .$$

Cet ensemble d'hyperplans "cuspidaux" est une conique dans $\mathcal{H}(z) \simeq \mathbb{CP}^2$, appelée "conique de Del Pezzo". Un cusp en z sur $\mathcal{S}$ définit une direction tangente à la surface en z. À $H \in \mathcal{C}(z)$ on peut donc associer $d(H) \in \mathbb{P}\,\mathrm{T}_z\mathcal{S}$. Rappelons qu'une "tacnode" est un cusp dégénéré formé de deux branches régulières tangentes. On a la

***Proposition 4.2.1* (C. Segre).** — *Il existe exactement*[1] *cinq hyperplans $H_1, \ldots, H_5 \in \mathcal{C}(z)$ tels que les cusps $\mathcal{C}(H_i)$ soient dégénérés en des tacnodes.*

On peut alors poser la

Définition 4.2.2. — Ces hyperplans sont les *hyperplans principaux* à $\mathcal{S}$ en z. Les directions tangentes $d(H_1), \ldots, d(H_5)$ qu'ils définissent sont les *directions principales*, à la surface, en z. Une courbe sur $\mathcal{S}$ tangente en tout point à une direction principale est une *courbe principale* sur $\mathcal{S}$.

S'il est possible que des directions principales coïncident en un point ou même globalement sur la surface, elles seront distinctes en chaque point si la surface considérée est suffisamment générique. Dans ce cas, on a alors cinq distributions régulières de directions tangentes sur $\mathcal{S}$, deux à deux distinctes, et qui sont intégrables car de dimension 1. En considérant les courbes intégrales de ces distributions, on obtient ainsi un 5-tissu sur $\mathcal{S}$.

[1] Comptés avec multiplicité.

Définition 4.2.3. — Quand il est bien défini, le 5-tissu formé par les courbes principales est le *tissu de Segre* de $\mathcal{S}$.

Vu la construction, il est clair que le tissu de Segre est projectivement attaché à $\mathcal{S}$: pour tout $g \in \mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$, le tissu de Segre de l'image de $\mathcal{S}$ par g est l'image par g du tissu de Segre de $\mathcal{S}$.

Dans [**Te 39**] et [**Te 40**], Alessandro Terracini a montré que tout 5-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ peut être réalisé (avec un certain arbitraire) comme tissu de Segre d'une certaine surface de $\mathbb{CP}^5$.

La situation est beaucoup plus intéressante pour les tissus exceptionnels $\mathcal{E}$ (voir plus loin dans ce chapitre pour une définition de ce qu'est un tissu exceptionnel) pour lesquels on peut construire de façon canonique (modulo $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$) une surface de $\mathbb{CP}^5$ dont le tissu de Segre est $\mathcal{E}$. De plus, la géométrie de cette surface est très particulière, ce qui permet d'entreprendre l'étude des 5-tissus exceptionnels par l'étude des surfaces de ce type. Pour plus de détails, on renvoie au chapitre 8.

4.2.2. Exemples de tissus en géométrie algébrique projective. —

4.2.2.1. Tissus algébriques associés aux courbes planes. — À une courbe algébrique plane $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$ de degré d plus grand que 3, que l'on supposera seulement réduite, mais pas forcément lisse ni même irréductible, on va associer un d-tissu linéaire, noté $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ sur le dual $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$. Cette construction est centrale et très classique en géométrie des tissus (voir [**BB**], chapitre 23).

On va tout d'abord définir $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ au voisinage d'une droite L_0 qui intersecte $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ transversalement en d points distincts. Par recollement, cela permettra de définir $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ comme d-tissu global sur $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$.

La condition imposée à L_0 implique que le 0-cycle $\mathcal{C}.L_0$ sur la courbe s'écrit $\mathcal{C}.L_0 = P_1(L_0) + \cdots + P_d(L_0)$, où les $P_i(L_0)$ sont d points distincts. Cette condition d'intersecter transversalement la partie régulière de $\mathcal{C}$ en d points distincts est ouverte. Il va donc exister un voisinage $U_0^\star$ de L_0 dans$\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$ tel que cette condition de transversalité soit vérifiée dessus. Quitte à prendre ce voisinage simplement connexe et "suffisamment petit", on va pouvoir suivre de façon holomorphe les points d'intersection de L avec $\mathcal{C}$ lorsque L varie dans $U_0^\star$. Plus précisément, il existe d applications holomorphes $P_i : U_0^\star \to \mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$, telles que, pour toute droite $L \in U_0^\star$, on ait en tant que 0-cycle, :

$$\mathcal{C}.L = P_1(L) + P_2(L) + \cdots + P_d(L)\,.$$

Pour $i = 1, \ldots, d$, notons alors $\mathcal{F}_{P_i}$ le feuilletage holomorphe de $U_0^\star$ dont les feuilles sont les lignes de niveaux $\{P_i = \mathrm{cte}\}$. Pour $L \in U_0^\star$, la feuille de $\mathcal{F}_{P_i}$ passant par L est le segment de droite

$$\mathcal{F}_{P_i}[L] = \left\{\, \mathcal{L} \in U_0^\star \;\middle|\; P_i(\mathcal{L}) = \mathcal{P}(\mathcal{L}) \,\right\} = \left\{\, \mathcal{L} \in U_0^\star \;\middle|\; P_i(L) \in \mathcal{L} \,\right\}.$$

Ainsi $\{\, \mathcal{F}_{P_1}, \ldots, \mathcal{F}_{P_d} \,\}$ est un d-tissu linéaire sur le voisinage $U_0^\star$ de L_0. Cette construction peut se faire au voisinage de toute droite $L_0 \in \left(\mathbb{CP}^2\right)^\star \setminus \mathcal{C}^\star$ où $\mathcal{C}^\star$ désigne la courbe duale de $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire la courbe de $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$ formée des droites qui sont tangentes à $\mathcal{C}$). Il est clair que les tissus ainsi obtenus se recollent pour former un d-tissu linéaire singulier sur $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$. On pose alors la

Définition 4.2.4. — Ce d-tissu est le *tissu algébrique* associé à la courbe $\mathcal{C}$. Il est noté $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$.

On peut montrer que le lieu singulier de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ est exactement la courbe duale $\mathcal{C}^\star$.

Il est possible de définir $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ d'autres façons. Par exemple, dans le cas où aucune des composantes irréductibles de $\mathcal{C}$ n'est une droite, le fait que $\mathcal{C}$ est de degré d équivaut à celui que sa courbe duale $\mathcal{C}^\star$ est de *classe* d, c'est-à-dire que par un point générique du dual $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$ passent d tangentes distinctes à $\mathcal{C}^\star$. Ce sont exactement les feuilles de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ passant par ce point. Ainsi $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ est le tissu

sur $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$ formé des tangentes à la courbe de classe d qu'est $\mathcal{C}^\star$.

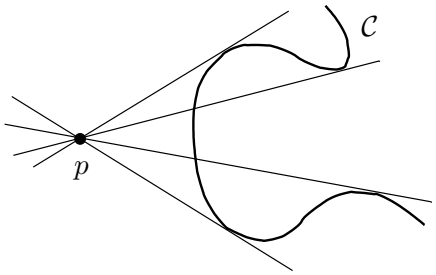


FIGURE 6. les feuilles passant par p du tissu associé à la courbe $\mathcal{C}$ de classe 4.

Cette dernière construction permet d'obtenir de jolis dessins réels de tissus algébriques (par exemple, voir [**BB**] page 29-30).

Signalons aussi la construction suivante qui nous a été signalée par David Marin et Jorge Peirera. La variété d'incidence sur $\mathbb{CP}^2$ est définie par

$$\mathcal{I} = \left\{ (p, H) \in \mathbb{CP}^2 \times \left(\mathbb{CP}^2\right)^* \mid p \in H \right\} .$$

C'est une variété algébrique de dimension 3 dans le produit $\mathbb{CP}^2 \times \left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$. Avec les deux projections sur $\mathbb{CP}^2$ et son dual, on a le diagramme classique

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{I} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Pi"] & \\ \mathbb{CP}^2 & & \left(\mathbb{CP}^2\right)^* \end{tikzcd}$$

À toute courbe algébrique réduite $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$, on peut associer la surface d'incidence $\mathcal{I}_\mathcal{C} = \pi^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{I}$. On note alors $\pi_\mathcal{C}$ et $\Pi_\mathcal{C}$ les projections π et Π restreintes à $\mathcal{I}_\mathcal{C}$. Ces deux projections sont génériquement $1-1$ et $d-1$ (respectivement). On a donc un feuilletage $\mathcal{F}[\pi]$ sur $\mathcal{I}_\mathcal{C}$ qui, si on le pousse en avant par Π, va définir un d-tissu sur un ouvert de Zariski de $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\star$. On vérifie que ce tissu est bien le tissu algébrique $\mathcal{W}_\mathcal{C}$ associé à $\mathcal{C}$.

Cette construction du tissu associé à une courbe algébrique repose essentiellement sur le théorème de Bézout ainsi que sur la dualité projective. Le théorème de Bézout se généralise aux variétés algébriques projectives de dimension quelconque. Ainsi, par le même principe, si d est le degré d'une telle variété $V_n \subset \mathbb{CP}^{n+k-1}$ de dimension n, on peut définir par dualité un d-tissu de codimension k sur la grassmannienne $G_{k-1}(\mathbb{CP}^{n+k-1})$ des $(k-1)$-plans projectifs dans $\mathbb{CP}^{n+k-1}$. Par définition, c'est le *d-tissu algébrique associé à V_n* (voir [**CG 78**], [**Hé 01**], [**Hé 04**], etc).

4.2.2.2. Le 27-tissu de Burau. — Dans [**Bur 36**], W. Burau donne une belle construction géométrique d'un 27-tissu sur toute hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{CP}^3$. On expose brièvement sa construction, en renvoyant à [**M**] (chapitre 8 en particulier) pour la justification des assertions de géométrie algébrique projective utilisées ci-dessous.

On se donne une hypersurface cubique lisse $C \subset \mathbb{CP}^3$. On a la proposition très classique :

***Proposition 4.2.5* (Cayley-Salmon 1846).** — *Il existe exactement 27 droites incluses dans C.*

Notons $L_1, L_2, \ldots, L_{27}$ ces droites. À chacune est associé le pinceau (*i.e.* le système linéaire de dimension 1) des hyperplans qui la contiennent. On le note $\mathcal{P}(L_i)$.

Fixons $i \in \{1, \ldots, 27\}$. Alors pour $H \in \mathcal{P}(L_i)$, l'intersection de C avec H est une courbe algébrique de degré 3 dans le 2-plan qu'est H. Cette cubique plane n'est pas irréductible : elle contient évidemment la droite L_i comme composante. On pourra donc écrire $C \cap H = L_i \cap \mathcal{C}_i(H)$ où $\mathcal{C}_i(H)$ est une conique plane. On a donc un pinceau de coniques sur C associé à chaque droite L_i, noté :

$$\mathcal{C}_i = \left\{ \mathcal{C}_i(H) \;\middle|\; H \in \mathcal{P}(L_i) \right\}.$$

Chacun de ces pinceaux de coniques définit un feuilletage singulier sur C. On vérifie que les vingt-sept coniques passant par un point générique z de C sont deux à deux transverses en z.

Définition 4.2.6. — Le 27-tissu de Burau $Bu(C)$ est le tissu (singulier) sur C formé par les vingt-sept pinceaux de coniques $\mathcal{C}_i$.

On explique maintenant comment on peut "réaliser" le tissu de Burau dans le plan projectif.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_6$ six points de $\mathbb{CP}^2$ en position générale par rapport aux droites (*i.e.* il n'existe pas de droite contenant trois des z_i parmi les six) et aux coniques (*i.e.* il n'existe pas de conique contenant les six points z_i). Notons $\underline{z} = z_1 + \cdots + z_6$ et $B_{\underline{z}}$ l'éclaté de $\mathbb{CP}^2$ aux points $z_1, \ldots, z_6$.

Proposition 4.2.7. — *La surface algébrique $B_{\underline{z}}$ peut se plonger comme hypersurface cubique lisse $\mathcal{B}_{\underline{z}}$ dans $\mathbb{CP}^3$. Son diviseur exceptionnel est formé de six droites particulières parmi les vingt-sept qui sont incluses dans $\mathcal{B}_{\underline{z}}$. Toute hypersurface cubique lisse de $\mathbb{CP}^3$ peut-être réalisée de cette façon.*

Ainsi il existe une application rationnelle $\pi : C \to \mathbb{CP}^2$ génériquement $1-1$, ramifiée en six points en position générale (relativement aux droites et aux coniques) notés $q_1, q_2, \ldots, q_6$. On peut donc pousser en avant le tissu de Burau sur $\mathbb{CP}^2$ par π. Le 27-tissu $\pi_*\big(Bu(C)\big)$ a la description suivante : c'est le tissu formé par :

1. les six pinceaux de droites de sommets $q_1, \ldots, q_6$;
2. les quinze pinceaux de coniques passant par quatre des points q_i ;
3. les six pinceaux de cubiques passant par tous les points q_i et avec un point double en l'un d'eux.

Dans [**Bur 36**] Burau étudie ensuite l'hexagonalité des sous-trois tissus de $Bu(C)$.

4.2.2.3. Le 6-tissu en droite sur une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{CP}^4$. — Soit $C \subset \mathbb{CP}^4$ une hypersurface cubique. Dans [**GC 72**] il est montré qu'en tout point générique p de C passent exactement 6 droites. Cela définit un 6-tissu en droites sur C, qui lui est projectivement attaché.

Cela semble se généraliser aux hypersurfaces lisses de degré n dans $\mathbb{CP}^{n+1}$: un résultat de Landsberg [**La 03**] montre qu'en un point générique d'une telle hypersurface $\mathcal{H}$ passent $n!$ droites. On pourrait avoir un $n!$-tissu en droites sur $\mathcal{H}$ (il reste à savoir si l'hypothèse PG est bien vérifiée).

4.2.3. Exemples de tissus en théorie des équations différentielles. —

4.2.3.1. Le 3-tissu associé à une équation différentielle du premier ordre. — On considère une équation différentielle du premier ordre, notée $(\mathcal{E})$, de la forme

$$dy = F(x, y)\, dx \quad \text{avec } F \in \mathcal{O}_2 \text{ vérifiant } F(0) \neq 0.$$

Les courbes intégrales de cette équation vont former un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$. À cette équation, on peut donc associer le 3-tissu $\mathcal{W}[\mathcal{E}] = \mathcal{W}(x, y, \mathcal{F})$.

La classification des 3-tissus de la forme $\mathcal{W}(x, y, \mathcal{F})$ modulo les germes de biholomorphismes de la forme $(x, y) \mapsto (\phi(x), \psi(y))$ est l'équivalent géométrique de la classification des équations différentielles $(\mathcal{E})$, modulo les changements de variables de la forme $(*)$ $\overline{x} = X(x)$, $\overline{y} = Y(y)$.

Une partie importante de l'œuvre de Elie Cartan a consisté en l'élaboration d'une théorie générale pour résoudre les problèmes de classification d'objets géométriques, modulo un groupe donné de transformations. Au paragraphe 13 du mémoire [**Ca 08**], il applique sa méthode à la classification des équations $(\mathcal{E})$ en fonction de leurs symétries, quand on se permet des changements de variables de la forme $(*)$.

Vu la remarque ci-desssus, les résultats de Cartan peuvent s'interpréter en géométrie des tissus : par exemple, $\mathcal{W}(x, y, \mathcal{F})$ admet un groupe à trois paramètres de symétrie si et seulement si il est parallélisable. L'équation $(\mathcal{E})$ admet un groupe à un paramètre de symétries si et seulement si elle est équivalente à une équation de la forme $dy = U(x + y)\, dx$ où U est une fonction d'une seule variable. Pour des précisions, on renvoie à l'article de M. Belliart, I. Liousse et F. Loray dans [**W**].

4.2.3.2. Le tissu associé à une équation différentielle implicite $F(x, y, y') = 0$. — On considère une équation différentielle implicite du premier ordre, polynomiale de degré $d \geq 3$ en y', à coefficients analytiques sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^2$:

$$0 = F(x, y, y') = a_0(x, y)\,(y')^d + \cdots + a_{d-1}(x, y)\, y' + a_d(x, y) \qquad \big(a_i \in \mathcal{O}(\Omega)\,,\ i = 0, \ldots, d\big).$$

On suppose que le p-résultant du polynôme analytique $F(x, y, p)$ (noté R) n'est pas identiquement nul sur Ω. Dans un voisinage V d'un point $\omega \in \Omega \setminus \{R = 0\}$ tel que $a_0(\omega) \neq 0$, il va exister d applications holomorphes $(x, y) \mapsto p_i(x, y)$ telles que, sur V, on ait :

$$F(x, y, p) = a_0(x, y) \prod_{i=1}^{d} \big(p - p_i(x, y)\big) \qquad \text{avec } \ p_i(\omega) \neq p_j(\omega) \ \text{ si } \ i \neq j\ .$$

Au voisinage de ω, l'équation $F(x, y, y') = 0$ admet d solutions $(x, y) \mapsto y_i(x, y)$ qui sont des intégrales premières des feuilletages définis par les champs de vecteurs $\partial_x + p_i\, \partial_y$. On peut donc considérer le tissu $\mathcal{W}(y_1, \ldots, y_d)$ au voisinage de ω.

La construction locale que l'on vient d'esquisser peut se faire au voisinage de tout point ω générique. Les tissus ainsi obtenus se recollent pour former un tissu global (singulier) sur Ω. On peut ainsi entreprendre l'étude géométrique de l'équation $F(x, y, y') = 0$ par celle du tissu qui lui est associé. Ce point de vue se généralise au système d'EDP du premier ordre (cf. l'article [**Na 96**] par I. Nakai, qui a par ailleurs obtenu certains résultats avec cette approche).

Il est clair que tout germe de d-tissu est susceptible d'être défini au moyen d'une équation différentielle du premier ordre et de degré d en y'. Cette "définition implicite" a l'avantage de ne privilégier aucun des feuilletages qui composent un tissu. En revanche, elle ne permet pas d'appliquer la méthode d'Abel pour déterminer les relations abéliennes.

4.2.3.3. Le tissu associé à un feuilletage de $\mathbb{CP}^2$. — Cette construction (dont on peut attribuer la paternité à Legendre) nous a été signalée par D. Marin et J. Peirera.

Par définition, le *degré* d'un feuilletage $\mathcal{F}$ (forcément singulier) de $\mathbb{CP}^2$ est le nombre (fini) de points de tangence qu'a une droite générique $L \subset \mathbb{CP}^2$ avec les feuilles de $\mathcal{F}$. On montre que ce nombre ne dépend que de $\mathcal{F}$ et qu'il existe des feuilletages de $\mathbb{CP}^2$ de tout degré.

Soit $\mathcal{F}$ un tel feuilletage, de degré $d \geq 3$. Soit L une droite. Si elle est suffisamment générique, il y

aura d points distincts sur L en lesquels elle est tangente avec une feuille de $\mathcal{F}$. Par dualité projective, cela nous définit d droites de $\left(\mathbb{CP}^2\right)^*$ en L vu comme point du dual. On peut ainsi construire un d-tissu linéaire sur un ouvert de Zariski de $\left(\mathbb{CP}^2\right)^*$. Ce sera le tissu associé à $\mathcal{F}$. Cette dualité entre les feuilletages et les tissus globaux sur $\mathbb{CP}^2$ semble très intéressante et est étudiée dans [**MP**].

Pour finir, signalons que différents auteurs ont été amenés à considérer des tissus via l'étude des feuilletages, dans des contextes quelque peu différents de celui évoqué ci-dessus. On peut citer l'article de Cerveau [**Cer 92**], où l'auteur s'intéresse à la dynamique des 3-tissus globaux, motivé par la description de la variété des feuilletages algébriques de codimension 1 des espaces projectifs.

4.3. Relation abélienne, rang et tissus algébriques

À partir de cette section, on se placera uniquement en dimension deux. Pour des généralisations en dimension supérieure des notions de relations abéliennes et de rang, on renvoie à [**AG-2**], [**BB**], [**CG 78**], [**Hé 04**], [**W**], etc.

4.3.1. Définitions. — On va introduire un certain invariant pour les tissus plans, le rang, à partir de certaines "équations fonctionnelles" qui sont susceptibles de leur être attachées.

Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ un (germe de) d-tissu régulier en l'origine de $\mathbb{C}^2$.

Définition 4.3.1. — Une *relation abélienne* pour $\mathcal{W}$ est la donnée d'une famille de 1-formes régulières $\underline{\omega} = \{\, \omega[\mathcal{F}] \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0) \;\big|\; \mathcal{F} \in \mathcal{W} \,\}$ telles que :

1. pour tout feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{W}$, la 1-forme $\omega[\mathcal{F}]$ est nulle le long des feuilles de $\mathcal{F}$,
2. on a la relation
$$\sum_{\mathcal{F}\in\mathcal{W}} \omega[\mathcal{F}] = 0\,.$$

Si $\omega[\mathcal{F}] \neq 0$, on dira que $\mathcal{F}$ *porte la relation abélienne* $\underline{\omega}$ (ou encore que $\underline{\omega}$ *est portée par* $\mathcal{F}$). La forme $\omega[\mathcal{F}]$ sera la *composante selon* $\mathcal{F}$ *de* $\underline{\omega}$. Le *support* de $\underline{\omega}$ sera l'ensemble $\{\, \mathcal{F} \in \mathcal{W} \mid \omega[\mathcal{F}] \neq 0 \,\}$. La *longueur* de $\underline{\omega}$ sera le cardinal de son support.

L'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$ sera noté $\mathcal{A}[\mathcal{W}]$. On vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $\mathcal{W}$ dans $\Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$.

La notion de relation abélienne s'étend de façon évidente aux tissus ordonnés et se comprend plus simplement si l'on se donne une intégrale première U_i pour chaque feuilletage $\mathcal{F}_i$.

Soit donc $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U_1, \ldots, U_d)$ un tissu ordonné. Alors toute relation abélienne $\underline{\omega}$ de $\mathcal{W}$ s'écrira

$$\underline{\omega} = \big(\omega[\mathcal{F}_1], \ldots, \omega[\mathcal{F}_d]\big) = \big(G_1(U_1)\,dU_1\,, \ldots,\, G_d(U_d)\,dU_d\big) \quad \text{avec } G_1, G_2, \ldots, G_d \in \mathcal{O}_1\,.$$

Ainsi, si l'on note $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_d)$, on a une identification

$$\mathcal{A}[\mathcal{W}] \simeq \mathcal{A}[\mathcal{U}\,] := \left\{ (G_1, \ldots, G_d) \in (\mathcal{O}_1)^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d} G_i(U_i)\,dU_i = 0 \right\}.$$

D'autre part, puisque

$$\sum_{i=1}^{d} G_i(U_i)\,dU_i = 0 \quad \big(\text{dans } \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)\big) \qquad \text{ssi} \qquad \sum_{i=1}^{d} \int^{U_i} G_i(u)\,du = \text{cte.} \;\big(\text{dans } \mathcal{O}_2\big)\,,$$

on a également l'identification $\mathcal{A}[\mathcal{U}\,] \simeq \underline{\mathrm{Sol}}(\mathcal{E}[\mathcal{U}], 0)$, où $\mathcal{E}[\mathcal{U}]$ est l'efa

$$F_1\big(U_1(x,y)\big) + F_2\big(U_2(x,y)\big) + \cdots + F_d\big(U_d(x,y)\big) = 0\,.$$

Ainsi, modulo les constantes et un choix d'un d-uplet $\mathcal{U}$ d'intégrales premières, les relations abéliennes d'un tissu s'interprètent comme les solutions de l'efa $\mathcal{E}[\mathcal{U}]$. Les résultats de la première partie de cette thèse peuvent donc être considérés comme des outils pour étudier et déterminer les relations abéliennes des tissus plans.

Une solution non constante $(F_1, \ldots, F_d)$ de $\mathcal{E}[\mathcal{U}]$ sera une *relation fonctionnelle abélienne* de $\mathcal{W}$ (relativement à $\mathcal{U}$). Dans la pratique, on l'identifiera souvent avec la relation abélienne $\big(F_1'(U_1)\,dU_1, \ldots, F_d'(U_d)\,dU_d\big)$ qu'elle définit.

Remarques : 4.1 Soit $\mathcal{W}$ un tissu sur une surface analytique $\mathcal{S}$ de lieu singulier $\Sigma \subsetneq \mathcal{S}$. La Définition 4.3.1 définit un espace des relations abéliennes $\mathcal{A}[\mathcal{W}](p)$ pour chaque point p de $\mathcal{S}$. Du Théorème 1.2.2, il découle facilement que ces espaces vectoriels se recollent pour former un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $X := \mathcal{S} \smallsetminus \Sigma$, encore noté $\mathcal{A}[\mathcal{W}]$. Si X est connexe, alors toutes les fibres $\mathcal{A}[\mathcal{W}](p)$ seront isomorphes par prolongement analytique. Dans la pratique, on ne fera pas la différence entre tout espace de sections $\mathcal{A}[\mathcal{W}](\Omega)$ au-dessus d'un ouvert simplement connexe $\Omega \subset X$, toute fibre $\mathcal{A}[\mathcal{W}](p)$ et le système local $\mathcal{A}[\mathcal{W}]$.
4.2 Cette notion de relation abélienne se généralise dans la plupart des cadres dans lesquels on peut définir raisonnablement ce qu'est un tissu : dans le réel, avec une régularité C^k, pour les tissus formels sur un corps de caractéristique 0, etc. En dimension supérieure, pour un tissu de codimension k, il est possible de définir les notions de r-relations abéliennes, pour $r = 0, \ldots, k$. Voir [**BB**], [**CG 78-1**], [**Hé 04**].

Le résultat suivant, obtenu par G. Bol dans [**Bol 32**], est fondamental en géométrie des tissus :

***Théorème 4.3.2* (Bol).** — *Soit $\mathcal{W}(d)$ un germe de d-tissu. On a la majoration suivante pour la dimension de l'espace de ses relations abéliennes :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}\big[\mathcal{W}(d)\big] \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Cette borne sera appelée la "*borne de Bol*" du rang d'un tissu. On verra plus loin qu'elle est optimale. La preuve géométrico-différentielle de G. Bol est valide dans le cadre analytique complexe ainsi que dans le cadre réel, avec des hypothèses de régularité C^k (k devant être plus grand qu'une constante dépendant de d). Cependant, dans [**Fr 70**], B. Fridman montre que cette borne est encore valide pour les tissus réels, avec des hypothèses de régularité C^1 seulement. A. Hénaut redémontre ce résultat pour les tissus analytiques, en utilisant la théorie des $\mathcal{D}$-modules : voir [**Hé 90**]. La preuve la plus élémentaire a été donnée par J.M. Trépreau, pour les tissus formels (définis sur un corps de caractéristique 0). Dans cette thèse, cette borne est obtenue comme corollaire des résultats exposés en 5.1. (cf. Corollaire 5.1.12).

Il existe également de nombreux résultats de finitude pour les dimensions des espaces des r-relations abéliennes en dimension plus grande. On a souvent des bornes explicites optimales qui sont reliées à la géométrie algébrique (voir encore [**AG-2**], [**CG 78-1**], [**G**], [**Hé 04**].)

La dimension de l'espace des relations abéliennes d'un tissu donné est localement constante, et donc est constante si le tissu vit sur une surface connexe, ce que l'on supposera désormais. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la définition suivante :

Définition 4.3.3. — Le *rang* d'un d-tissu $\mathcal{W}(d)$, noté $\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}(d)\big]$, est la dimension de l'espace de ses relations abéliennes. On a :

$$\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}(d)\big] := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}\big[\mathcal{W}(d)\big] \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Il est immédiat que les espaces des relations abéliennes de deux tissus équivalents sont isomorphes. On en déduit que le rang est un invariant : deux tissus équivalents sont de même rang. Si on peut montrer qu'un d-tissu générique est de rang 0, on va voir ci-dessous (section 4.3.2) que pour tout d, il existe des d-tissus pour lesquels la borne de Bol est atteinte.

Définition 4.3.4. — Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ est de *rang maximal* si la borne de Bol est atteinte, *i.e.* si

$$\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}(d)\big] = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Exemple : L'équation fonctionnelle de Cauchy $(\mathcal{C})$ satisfaite par le logarithme

$$(\mathcal{C}) \qquad \log(x) + \log(y) - \log(xy) = 0$$

peut s'interpréter comme une relation fonctionnelle abélienne pour le tissu $\mathcal{W}\{x, y, xy\}$ qui, d'après le Théorème 4.3.2, est de rang au plus 1. On en déduit que $\mathcal{W}\{x, y, xy\}$ est un tissu de rang maximal.

À partir des relations abéliennes, on peut définir d'autres invariants, plus fins que le rang.

Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu. On peut définir une filtration $F^\bullet\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$ sur l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$, en définissant $F^p\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$ comme le sous-espace engendré par les relations abéliennes de longueur plus petite que p :

$$F^p\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] := \sum_{\widetilde{\mathcal{W}}\subset\mathcal{W}\,,\,|\widetilde{\mathcal{W}}|=p} \mathcal{A}\big[\widetilde{\mathcal{W}}\big] \qquad (p = 2, \ldots, d)\,.$$

On remarquera qu'avec cette notation, on a $F^2\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] = (0)$.

Définition 4.3.5. — Un élément de $\mathrm{F}^p\mathcal{A}[\mathcal{W}] \smallsetminus \mathrm{F}^{p-1}\mathcal{A}[\mathcal{W}]$ est une *relation abélienne d'ordre p*. Une relation abélienne d'ordre strictement plus petit que d (resp. égal à d) est dite *dégénérée* (resp. *non-dégénérée*).

La filtration $F^\bullet\mathcal{A}[\mathcal{W}]$ est la *filtration par l'ordre* de l'espace des relations abéliennes. Il lui est naturellement associé l'espace vectoriel gradué $G^\bullet\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] = G^3\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] \oplus \cdots \oplus G^d\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$ avec

$$G^p\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] := \frac{F^p\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]}{F^{p-1}\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]} \qquad (p = 3, \ldots, d)\,.$$

Suivant A. Hénaut on peut alors poser la

Définition 4.3.6. — L'*armure* $\omega\big[\mathcal{W}\big]$ de $\mathcal{W}$ est le (d-2)-uplet $\big(\omega_3\big[\mathcal{W}\big], \ldots, \omega_d\big[\mathcal{W}\big]\big)$ formé par les dimensions notées $\omega_i\big[\mathcal{W}\big]$ des espaces $G^i\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$:

$$\omega\big[\mathcal{W}\big] := \big(\omega_3[\mathcal{W}], \ldots, \omega_d[\mathcal{W}]\big) := \Big(\dim_{\mathbb{C}} G^3\mathcal{A}[\mathcal{W}]\,,\, \dim_{\mathbb{C}} G^4\mathcal{A}[\mathcal{W}]\,, \ldots,\, \dim_{\mathbb{C}} G^d\mathcal{A}[\mathcal{W}]\Big)\,.$$

Soient $\mathcal{W}$ et W deux tissus. Tout difféomorphisme ϕ tel que $\phi_*W = \mathcal{W}$ induit un isomorphisme linéaire au niveau des relations abéliennes $\phi_* : \mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big] \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\big[W\big]$. On vérifie sans difficulté que celui-ci est compatible avec les filtrations par l'ordre sur $\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$ et $\mathcal{A}\big[W\big]$. On en déduit que l'armure est encore un invariant pour les tissus. Il est "plus fin" que le rang puisqu'on a la formule :

$$\mathrm{rg}\big[\mathcal{W}\big] = \omega_3\big[\mathcal{W}\big] + \cdots + \omega_d\big[\mathcal{W}\big]\,.$$

Si la majoration de Bol sur le rang implique que $\omega_i\big[\mathcal{W}(d)\big] \leq (d-1)(d-2)/2$ pour tout $i = 3, \ldots, d$, on ne connaît pas de majoration générale plus précise pour les composantes de l'armure d'un tissu.

À partir de la notion fondamentale de rang, on peut associer d'autres invariants à un tissu $\mathcal{W}$, de nature combinatoire. L'idée est de prendre en compte, en plus du rang des sous-tissus, la façon dont ceux-ci s'incluent dans $\mathcal{W}$. Formalisons cette idée.

Fixons-nous un d-tissu noté $\mathcal{W}$. Soit $A_r(\mathcal{W})$ le graphe orienté de sommets les sous-k-tissus $W \subset \mathcal{W}$ pour $k \geq 3$, pondérés par leur rang. On aura une arête $W_1 \to W_2$ si et seulement si on a l'inclusion $W_2 \subset W_1$. Cet arbre sera l'*arbre, pondéré par le rang, des sous-tissus de* $\mathcal{W}$. On montre sans difficulté que tout difféomorphisme ϕ induit un isomorphisme entre $A(\mathcal{W})$ et $A_r(\phi_*\mathcal{W})$. L'arbre $A_r(\mathcal{W})$ est donc un invariant associé à $\mathcal{W}$.

Il existe des variantes intéressantes de cette construction, plus faciles à manipuler. Par exemple, on peut considérer

- le sous-graphe $\mathsf{A}_r(\mathcal{W})$ de $A_r(\mathcal{W})$, constitué des mêmes sommets mais tel qu'on ait une arête $W_1 \to W_2$ si et seulement si $W_2 \subset W_1$ et $|W_1| - 1 = |W_2|$;
- le sous-arbre noté $A_r^m(\mathcal{W})$ de $A_r(\mathcal{W})$ où l'on ne prend comme sommets que les sous-tissus de rang maximal .

On peut ainsi imaginer de multiples constructions d'arbres pondérés (par le rang), permettant de classifier les tissus, à partir des rangs de leurs sous-tissus.

À un tissu ordonné $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d)$, on peut associer des constructions similaires, mais qui tiendront compte de l'ordre. Les sommets seront maintenant les sous-ensembles $I \subset \{1, \ldots, d\}$ à plus de trois éléments, pondérés par le rang du sous-tissu $\mathcal{W}_I := \{\, \mathcal{F}_i \mid i \in I \,\} \subset \mathcal{W}$.

Donnons une dernière définition d'invariants qu'on peut associer aux tissus, qu'il sera souvent pratique de considérer :

Définition 4.3.7. — Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu. Pour $p = 3, \ldots, d$, on note $\mathcal{R}_p\big[\mathcal{W}\big]$ (resp. $\mathcal{H}_p\big[\mathcal{W}\big]$) le nombre de sous-$p$-tissus de $\mathcal{W}$ qui sont de rang maximal (resp. qui sont hexagonaux) :

$$\mathcal{R}_p\big[\mathcal{W}\big] := \mathrm{Card}\left\{ W \subset \mathcal{W} \;\middle|\; |W| = p \;\text{ et }\; \mathrm{rg}\big[W\big] = \frac{1}{2}(p-1)\,(p-2) \right\} ;$$

$$\mathcal{H}_p\big[\mathcal{W}\big] := \mathrm{Card}\left\{ W \subset \mathcal{W} \;\middle|\; |W| = p \;,\; W \;\text{ est hexagonal} \right\} .$$

Il est immédiat que deux tissus équivalents auront leurs nombres $\mathcal{R}_p$ et $\mathcal{H}_p$ égaux.

4.3.2. L'exemple fondamental des tissus algébriques. — La notion de rang et la borne de Bol prennent tout leur sens quand on les considère à la lumière de la classe particulière formée par les tissus algébriques.

Comme en *4.2.2.1*, on se donne une courbe algébrique plane $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$ supposée seulement réduite, mais pas forcément lisse, ni même irréductible. Les relations abéliennes du tissu $\mathcal{W}_\mathcal{C}$ associé à $\mathcal{C}$ vont être décrites à partir des 1-formes régulières sur $\mathcal{C}$. On discute maintenant de cette notion.

Si $\mathcal{C}$ est lisse, c'est une surface de Riemann (*i.e.* une variété complexe de dimension un) et on peut définir sans difficulté le faisceau $\Omega^1_\mathcal{C}$ des 1-formes holomorphes sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est algébrique, le principe GAGA nous dit alors que les sections globales de ce faisceau sont en fait des objets de nature algébrique attachés à la courbe. Mais si la courbe est singulière, la définition de ce que doit être une 1-forme globale régulière sur $\mathcal{C}$ n'est pas immédiate, surtout du point de vue analytique qui

est le nôtre. On peut cependant définir un faisceau $\omega^1_{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ dont les fibres vont coïncider avec celles de $\Omega^1_{\mathcal{C}}$ en les points réguliers de la courbe. La description de la fibre de $\omega^1_{\mathcal{C}}$ aux points singuliers est plus subtile. On définira alors une 1-forme régulière sur $\mathcal{C}$ comme étant une section globale de ce faisceau. On renvoie au chapitre 9 pour des définitions plus rigoureuses. Précisons que cette notion de 1-forme régulière sur les courbes singulières n'a été bien dégagée que dans les années 1950.

Cependant, on peut sans doute faire remonter à Legendre, Abel (et d'autres...) la notion de "formes de première espèce" sur $\mathcal{C}$ qui, dans le cas des courbes planes, vont correspondre exactement aux sections globales de $\omega^1_{\mathcal{C}}$. Leur définition est élémentaire à partir d'un choix de coordonnées (notées (x, y)) sur un ouvert affine de $\mathbb{CP}^2$. Soit $\{F(x, y) = 0\}$ une équation de $\mathcal{C}$ dans cette carte, F étant un polynôme réduit de degré d en x et y. On suppose que la droite à l'infini n'est pas une composante irréductible de $\mathcal{C}$. Il est raisonnable d'appeler "forme rationnelle" sur $\mathcal{C}$ la restriction à (la partie régulière de) $\mathcal{C}$ de toute forme s'écrivant dans les coordonnées x, y

$$\omega = \frac{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy}{R(x, y)} \qquad \big(P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y]\big)$$

où P, Q et R sont sans facteurs multiples et R non identiquement nul sur $\mathcal{C}$. Sur la courbe considérée, on a $dF = \partial_x(F)\, dx + \partial_y(F)\, dy = 0$ (puisque $F|_{\mathcal{C}} = 0$) et ainsi sur un ouvert de Zariski de $\mathcal{C}$, on peut exprimer la différentielle dy en fonction de dx ; sur $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}} \setminus \{\partial_y(F) = 0\}$, on a :

$$dy = -\frac{\partial_x(F)}{\partial_y(F)}\, dx\ .$$

Les formes rationnelles sur $\mathcal{C}$ pourront donc s'écrire

$$\omega = \frac{P(x, y)\, dx}{R(x, y)\, \partial_y(F)(x, y)} \qquad \big(P, R \in \mathbb{C}[x, y]\big)$$

où P et R sont sans facteurs multiples, et R non identiquement nul sur $\mathcal{C}$. Dans cette écriture, il faut voir la partie polaire comme étant donnée par les zéros de R, le polynôme $\partial_y(F)$ devant être considéré comme ne s'annulant pas sur $\mathcal{C}$ (puisque F est réduit). On voudra donc considérer comme formes holomorphes sur $\mathcal{C}$ les formes rationnelles sans pôles. Ce seront les formes qui s'écrivent

$$(\star) \qquad \omega = \frac{P(x, y)}{\partial_y F(x, y)}\, dx \qquad \big(P \in \mathbb{C}[x, y]\big)\ .$$

Mais il est nécessaire d'imposer une borne sur le degré de P, afin que la droite à l'infini ne soit pas polaire pour ω (voir la discussion page 221 de [**GH**]).

Définition 4.3.8. — Les *formes de première espèce sur* $\mathcal{C}$ sont les formes rationnelles sur $\mathcal{C}$ qui, dans un système générique de coordonnées affines, s'écrivent sous la forme $(\star)$, avec $\deg(P) \leq d-3$.

On notera (de façon un peu abusive pour le moment) $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_{\mathcal{C}})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-formes de première espèce sur $\mathcal{C}$. La dimension de l'espace des polynômes $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ de degré plus petit que $d - 3$ est $(d - 1)(d - 2)/2$. On a donc le

Lemme 4.3.9. — *Si $\mathcal{C}$ est de degré d, on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_{\mathcal{C}}) = \frac{1}{2}\,(d - 1)(d - 2)\,.$$

Considérons la restriction de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ à un ouvert simplement connexe U_0^* qui ne rencontre pas $\Sigma[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}]$. On utilise les notations de 3.2.1 : quitte à prendre U_0^* assez petit, il existe d applications holomorphes $P_i : U_0^* \to \mathcal{C}$ telles que pour tout $L \in U_0^*$, on ait $\mathcal{C}.L = P_1(L) + \cdots + P_d(L)$.

On définit la somme de 1-formes $P_1^*(\omega) + \cdots + P_d^*(\omega)$ sur U_0^* comme étant la *somme abélienne* associée à ω sur U_0^*. On dit aussi que c'est la *trace* (ou encore, la *transformée d'Abel*) de ω relativement à la famille de droites U_0^*, et on la note $\mathrm{Tr}(\omega)$.

Avec ces notations, on a le très célèbre

***Théorème 4.3.10* (Théorème d'addition d'Abel).** — *Les sommes abéliennes associées aux formes de première espèce sont identiquement nulles, i.e. pour tout $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1)$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{d} P_i^\star(\omega) = 0\,.$$

L'énoncé ci-dessus n'est qu'un cas particulier des résultats obtenus par Abel. On renvoie à l'article de S. Kleiman dans [**AB**] pour une étude détaillée de ce qu'est le Théorème d'Abel. Celui-ci se généralise aux variétés algébriques projectives de toutes dimensions (voir [**Gr 76**], [**HP 99**]).

Par définition, la restriction à U_0^* du tissu algébrique associé à $\mathcal{C}$ est le tissu $\mathcal{W}\{P_1, \ldots, P_d\}$. On peut donc interpréter toute relation de la forme $P_1^*(\omega) + \cdots + P_d^*(\omega) = 0$ comme une relation abélienne pour $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. Ainsi la trace des formes de première espèce nous donne une application linéaire dont on peut vérifier qu'elle est injective :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \,:\, \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1) &\longrightarrow \mathcal{A}\big[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}\big] \\ \omega &\longmapsto P_1^*(\omega) + \cdots + P_d^*(\omega) = 0\,. \end{aligned}$$

Du Lemme 4.3.9 et du Théorème d'Abel, on déduit la chaîne d'égalités et d'inégalités suivante :

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}\big[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}\big] = \mathrm{rg}\big[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}\big] \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\,.$$

Ce qui prouve la

Proposition 4.3.11. — *Le tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ associé à la courbe $\mathcal{C}$ est de rang maximal. De plus la trace* Tr *établit un isomorphisme entre $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1)$ et $\mathcal{A}[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}]$: les relations abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ sont données par l'annulation des sommes abéliennes des formes de première espèce sur $\mathcal{C}$.*

Ainsi, si le rang d'un tissu générique est nul, le théorème d'Abel nous donne une classe de d-tissus de rang maximal, pour tout d plus grand que 3.

Exemple : Soient a et b, deux constantes réelles telles que le discriminant $4a^3 + 27b^2$ soit non nul. Alors la courbe C de $\mathbb{CP}^2$ d'équation affine $y^2 = P(x)$ avec $P(x) := x^3 + ax + b$ est une cubique lisse. La différentielle dx/y est l'unique forme de première espèce sur C (modulo multiplication par une constante). On peut montrer que si p_1 et p_2 sont deux points de C d'abscisse respective X et Y, alors le troisième point d'intersection de C avec la droite passant par p_1 et p_2 sera d'abscisse

$$q(X,Y) := \big((a + XY)(X+Y) - 2P(X)P(Y) + 2b\big)/(X^2 - Y^2)\,.$$

Par le théorème d'Abel, on a la relation

$$\int_0^X \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^3 + a\,\sigma + b}} + \int_0^Y \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^3 + a\,\sigma + b}} + \int_0^{q(X,Y)} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^3 + a\,\sigma + b}} = 0\,.$$

Cette relation est l'unique relation fonctionnelle abélienne du tissu $\mathcal{W}\{X, Y, q(X, Y)\}$ (modulo multiplication par une constante). Ce tissu est un modèle "en coordonnées" du 3-tissu algébrique $\mathcal{W}_C$ associé à C (on donne ci-dessous un dessin réel de ce tissu, voir Figure 7).

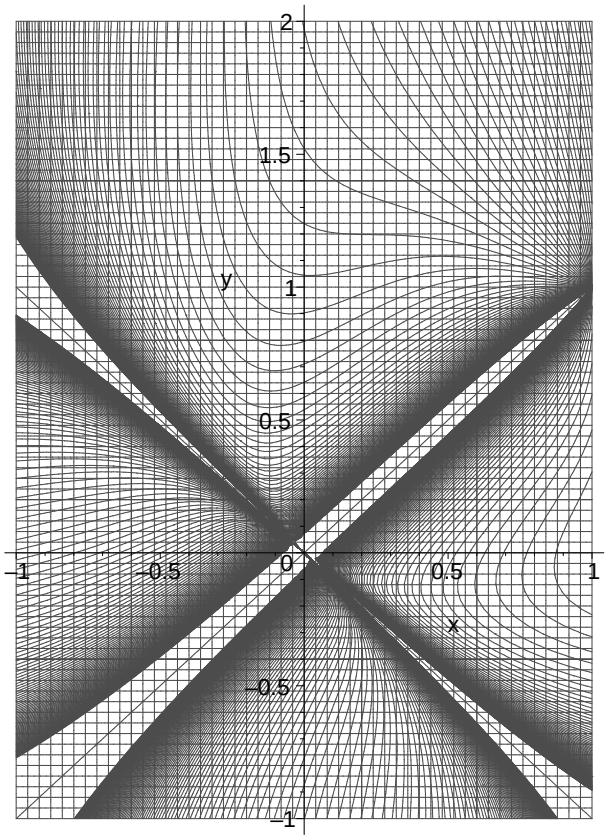


FIGURE 7. Un dessin réel du tissu $\mathcal{W}\{X, Y, q(X, Y)\}$, pour $a = 1$ et $b = 0$.

4.4. Algébrisation des tissus de rang maximal et tissus exceptionnels

La partie précédente a montré comment s'interprète le théorème d'Abel en géométrie des tissus. On va voir maintenant quels résultats peut nous donner sa réciproque, connue comme "le théorème d'Abel-inverse". Dans un second temps, on discutera l'application aux tissus d'un théorème d'algébrisation encore plus ancien, dû à Sophus Lie.

4.4.1. Algébrisation des tissus linéaires de rang maximal : le théorème d'Abel-inverse. — Commençons par décrire la situation géométrique dans laquelle s'énonce cette réciproque du théorème d'Abel : on se donne $d \geq 3$ points deux à deux distincts $P_1, \ldots, P_d$ sur une droite L_0 fixée ainsi que d germes de courbes régulières (C_i, P_i) transverses à L_0 en P_i. La condition de transversalité étant ouverte, il existe un voisinage U_0^* de L_0 dans le dual, ainsi que des applications régulières $P_i : U_0^* \to C_i$ telles que tout L dans U^* intersecte transversalement C_i en $P_i(L)$.

Dans cette situation on a le

***Théorème 4.4.1* (Abel-inverse).** — *Supposons que sur chaque germe de courbe C_i, il existe une forme régulière ω_i non-nulle telle qu'on ait l'annulation de "leur trace" sur U_0^* :*

$$P_1^*(\omega_1) + P_2^*(\omega_2) + \cdots + P_d^*(\omega_d) = 0\,.$$

Alors il existe une courbe algébrique plane $\mathcal{C}$ de degré d et une forme de première espèce ω sur $\mathcal{C}$ telles que $C_i \subset \mathcal{C}$ et $\omega_i = \omega|_{C_i}$ pour $i = 1, \ldots, d$.

On a formulé ce théorème de telle sorte qu'il est valide dans un cadre complexe (resp. réel) si pour "régulier" on comprend "holomorphe" (resp. C^k avec k assez grand).

H. Graf et R. Sauer ont donné une preuve du théorème d'Abel-inverse dans le cas $d = 3$ en 1924 dans [**GS 24**]. La première preuve générale semble être due à W. Blaschke et G. Howe dans [**BH 32**], et est d'ailleurs énoncée dans le cadre de la géométrie des tissus. Dans [**Gr 76**], P.A. Griffiths discute et prouve de différentes façons la généralisation de ce théorème au cas des hypersurfaces projectives. Les résultats de P. Griffiths sont repris et étendus par G. Henkin [**He 92**], [**He 95**] et Henkin-Passare dans [**HP 99**]. D'autres généralisations sont données dans la thèse [**Fa 00**] de B. Fabre.[(2)]

Le théorème de Blaschke et Howe s'énonce de la façon suivante :

Théorème 4.4.2. — *Soit $\mathcal{L}(d)$ un d-tissu linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{L}(d)$ porte une relation abélienne dont aucune composante n'est nulle.*
2. *$\mathcal{L}(d)$ est de rang maximal.*
3. *$\mathcal{L}(d)$ est algébrique.*

Esquisse de la preuve : Si l'on suppose connu le théorème d'Abel-inverse, la preuve est élémentaire : l'implication $3 \Rightarrow 2$ est classique (voir Proposition 4.3.11 ci-dessus), et $2 \Rightarrow 1$ est facile. Il reste à montrer $1 \Rightarrow 3$. Supposons $\mathcal{L}(d)$ donné sur un voisinage d'un point p du plan projectif par d feuilletages en segments de droite notés $\mathcal{L}_i$, $i = 1, .., d$. A chaque feuille de $\mathcal{L}_i$ on peut associer la droite support qui la contient, et donc, par dualité projective, un point de l'espace projectif dual. On peut ainsi construire d germes de courbes $(C_i, \mathcal{L}_i(p))$ dans $(\mathbb{CP}^2)^*$. Puisque $\mathcal{L}(d)$ satisfait l'hypothèse de position générale en p, ces germes de courbes sont exactement dans la configuration dans laquelle s'énonce (et donc s'applique !) le Théorème d'Abel-inverse. La condition 1. correspond à la donnée de 1-formes toutes non nulles sur les courbes C_i, de trace nulle. On en déduit que les C_i sont des morceaux d'une même courbe algébrique $\mathcal{C}$ de degré d. Il en découle que $\mathcal{L}(d)$ est la restriction de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ dans un voisinage de p, et donc est un tissu algébrique. ■

Ce résultat est valide tant dans un cadre holomorphe que dans un cadre réel C^k. En adaptant la preuve du Theorem 5 dans [**HP 99**], on voit que l'on peut prendre $k \geq 1$. Cela répond à une question de Blaschke posée dans [**Bl 32**].

On comprendra ce théorème comme un résultat d'algébrisation pour les tissus linéaires. On le résumera en disant que "les tissus linéaires de rang maximal sont algébriques". Ou encore : "si un tissu de rang maximal n'est pas algébrique, c'est qu'il n'est pas linéarisable".

---

(2) Signalons aussi un article surprenant [**Fu 42**] paru en 1942 dans les "Annals of Mathematics" dans lequel G. Fubini, inspiré par la preuve de Lie du Théorème 6, prouve le Théorème d'Abel-inverse dans le cas $d = 3$, en réduisant le problème à l'étude d'équations différentielles. Il n'y a aucune référence autre que [**Lie 82**] et vraisemblablement Fubini n'avait pas eu connaissance des résultats récents de Blaschke et Howe ni du papier plus ancien de Graf et Sauer. Ce papier de Fubini n'est d'ailleurs cité nulle part.

Un point important est que pour $d \geq 4$, la classe de la courbe $\mathcal{C}$, modulo transformations projectives, ne va dépendre que de la classe d'équivalence de $\mathcal{L}(d)$, modulo biholomorphisme.[3]

4.4.2. Algébrisation des tissus de rang maximal : Le théorème de Lie. — Bien avant les formulations et les preuves du théorème d'Abel-inverse, Sophus Lie avait déja obtenu dans [**Lie 82**] un résultat d'algébrisation du même type lié à la considération de certaines surfaces dites de "double-translation". Celui-ci s'interprète en géométrie des tissus comme le Théorème 4.4.4 ci-dessous. La preuve de Lie passe par l'étude des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles, et peut être considérée comme difficile à suivre. Georg Scheffers en a donné un exposé plus clair dans [**Sc 04**].

Lie n'apprécia pas (cf. la note en bas de page 3 de [**Ch 82**]) que Henri Poincaré reprenne son résultat en en "esquissant" une autre preuve dans [**Po 01**]. L'approche de Poincaré est géométrique et semble plus riche et prometteuse que celle de Lie, mais il ne l'a exposée que dans ses grandes lignes et de façon peu précise. Une preuve simple et rigoureuse, reprenant l'approche de Poincaré et utilisant la théorie des résidus, fut finalement donnée par Darboux (voir page 151 de [**Dar 14**]). C'est d'ailleurs cette preuve de Darboux qui inspira Blaschke et Howe et leur permit de prouver le Théorème 4.4.2. L'équivalent du théorème de Lie en dimension plus grande fut obtenu indépendamment par Tschebotarev [**Tsc 27**] et Wirtinger [**Wi 38**] en 1927 et 1938 respectivement. Comme références modernes concernant le théorème de Lie, on citera [**Lit 83**] et [**Fa 00**].

Au vu du théorème de Blaschke et Howe, la question qui se pose maintenant est celle de savoir si les tissus de rang maximal sont toujours linéarisables ou non.

Pour les 3-tissus, on a le résultat suivant dont la preuve est facile :

Théorème 4.4.3. — *Un 3-tissu est de rang maximal si et seulement si il est parallélisable.*

Esquisse de la preuve : Seul le sens direct n'est pas totalement immédiat. Soit $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{O}_2$ définissant un germe $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$ de 3-tissu en $(\mathbb{C}^2, 0)$, de rang maximal égal à 1. Alors il existe F_1, F_2 et $F_3 \in \mathcal{O}_1$ tels qu'au voisinage de l'origine, on ait :

$$(*) \qquad F_1(U_1) + F_2(U_2) + F_3(U_3) = 0\,.$$

Commençons par montrer qu'on a $F_i'(0) \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $U_1 = x$ et $U_2 = y$. Pour $i = 1, 2, 3$, on pose $F_i(z) = \Sigma_{k \geq 1} F_i^k z^k$. Soit $\kappa \geq 1$ le plus petit entier tel que $F_3^\kappa \neq 0$. Alors la composante de degré le plus petit possible de $F_3 \circ U_3$ est la composante de degré κ, à savoir $F_3^\kappa U_3[1]^\kappa$ (où $U_3[1]$ désigne la composante de degré 1 de U_3, qui n'est pas nulle puisque par hypothèse, le feuilletage $\{U_3 = cte.\}$ est régulier en l'origine). L'équation fonctionnelle $(*)$ implique que dans l'espace des polynômes homogènes de degré κ, on a une relation de la forme $F_1^\kappa x^\kappa + F_2^\kappa y^\kappa + F_3^\kappa U_3[1]^\kappa = 0$. Or si $F_3^\kappa \neq 0$, une telle relation n'est possible que si $\kappa = 1$. On a donc $F_3^1 \neq 0$, soit $F_3'(0) \neq 0$. Par symétrie, on en déduit que $F_i'(0) \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

De ce qui précède on déduit que l'application $\phi := \big(F_1(U_1), F_2(U_2)\big)$ définit un germe de biholomorphisme en l'origine de $\mathbb{C}^2$. Il est alors clair que l'image de $\mathcal{W}$ par ϕ n'est autre que le tissu $\mathcal{W}\{x, y, x+y\}$ qui est le 3-tissu parallélisable "par exellence". ■

Remarque : puisque les tissus algébriques associés aux cubiques planes sont de rang 1, on en déduit qu'il tous sont parallélisables. Ainsi, tous ces tissus algébriques sont équivalents entre eux.

[3] En fait, on a beaucoup plus fort puisque I. Nakai a montré dans [**Na 87**] que si deux tissus algébriques $\mathcal{W}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{W}_C$ sont topologiquement équivalents, alors C est transformée projective de $\mathcal{C}$.

Ce fait contraste nettement avec celui concernant les tissus algébriques associés aux courbes planes de degré $d \geq 4$, comme le montre le dernier commentaire de la section **4.1.** ci-dessus.

La reformulation en géométrie des tissus du résultat de Lie évoqué plus haut donne le

Théorème 4.4.4. — *Un 4-tissu $\mathcal{W}(4)$ de rang maximal 3 est (équivalent à un tissu) algébrique.*

On en esquissera une preuve suivant l'approche de Poincaré en 8.2.1. Signalons quand même que la preuve du théorème donnera une construction explicite et canonique (modulo $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$) de la courbe algébrique associée à un 4-tissu de rang maximal, à partir de ses relations abéliennes.

D'une façon générale, on pourrait s'attendre à ce que les tissus de rang maximal soient toujours linéarisables, et donc algébriques. Dans [**Bl 33**], W. Blaschke donne une preuve géométrico-différentielle du fait que les 5-tissus de rang maximal 6 sont également linéarisables (et donc algébriques). Mais sa preuve est fausse, ainsi que l'énoncé, puisqu'en 1936, G. Bol donne un exemple explicite d'un 5-tissu de rang 6, qui n'est pas linéarisable et donc ne peut être algébrique. Ce contre-exemple est fondamental en géométrie des tissus.

Dans les sections qui suivent on va présenter ce tissu ainsi que les exemples importants des tissus dit "polylogarithmiques", que l'on peut associer à certaines équations fonctionnelles satisfaites par les polylogarithmes d'ordre $n \leq 5$. On renvoie aux livres [**Le**] et [**P**] pour un aperçu du véritable zoo d'équations fonctionnelles vérifiées par les polylogarithmes.

4.4.3. Le tissu de Bol. — On présente maintenant le tissu de Bol considéré dans [**Bol 36**].

Plusieurs mathématiciens ont découvert au 19ème siècle que l'équation fonctionnelle suivante

$$\mathbf{Li}_2(x) - \mathbf{Li}_2(y) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{Li}_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = -\frac{\pi^2}{6} + \log(y)\,\log\left(\frac{1-y}{1-x}\right) \qquad (\mathcal{A}b)$$

est satisfaite, si $0 < x < y < 1$, par le bilogarithme défini par $\mathbf{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$ pour $|z| < 1$.

Cette équation a été établie en premier lieu par Spence (1809), puis redécouverte sous des formes équivalentes par Abel (1830), Hill (1830), Kummer (1840) et d'autres ... La forme ci-dessus est due à Schaeffer (1846). Cette équation est maintenant connue comme *l'équation d'Abel* ou *l'équation à cinq termes* du bilogarithme. Sa forme est presque celle d'une relation fonctionnelle abélienne, si ce n'est la présence d'un second membre logarithmique.

Cependant, dans [**Ro 07**], J. Rogers montre que le dilogarithme de Rogers $\mathbf{D}_2$, défini par

$$\mathbf{D}_2(x) := \mathbf{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\log(x)\log(1-x) - \frac{\pi^2}{6} \qquad (0 < x < 1)$$

satisfait la version homogène de l'équation d'Abel puisque, pour $0 < x < y < 1$, on a :

$$\mathbf{D}_2(x) - \mathbf{D}_2(y) - \mathbf{D}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{D}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{D}_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0\,. \qquad (\mathcal{R})$$

La relation $(\mathcal{R})$ a maintenant l'aspect d'une relation fonctionnelle abélienne pour le 5-tissu formé des lignes de niveau des fonctions rationnelles qui apparaissent comme arguments de $\mathbf{D}_2$ dans $(\mathcal{R})$.

Définition 4.4.5. — Le *tissu de Bol*, noté $\mathcal{B}$, est le tissu $\mathcal{W}\{U_1, U_2, \ldots, U_5\}$ où les U_i sont les cinq fonctions rationnelles

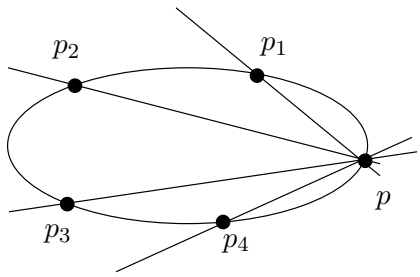
$$U_1 = x \qquad U_2 = y \qquad U_3 = \frac{x}{y} \qquad U_4 = \frac{1-y}{1-x} \quad \text{et} \quad U_5 = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,.$$

Ce tissu est globalement défini sur $\mathbb{CP}^2$ et son lieu singulier est la réunion de cinq droites. On a :

$$\Sigma[\mathcal{B}] = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \;\middle|\; xyz(x-y)(x+y-z)(x-z)(y-z) = 0 \right\} .$$

On a tracé une représentation réelle de ce tissu Figure 8 ci-dessous.

Dans la présentation ci-dessus, le tissu de Bol est défini à partir des cinq fractions rationnelles qui apparaissent dans l'équation d'Abel du bilogarithme. Mais on peut en donner une construction géométrique plus élégante : à quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 en position générale dans $\mathbb{CP}^2$, on peut associer le 5-tissu $\mathcal{B}(p_1, \ldots, p_4)$ de $\mathbb{CP}^2$ formé par les quatre pinceaux de droites $\mathcal{C}^1(p_i)$ et par le pinceau $\mathcal{C}^2(p_1 + \cdots + p_4)$ des coniques passant par les quatre points p_i. La Figure 4.4.3 ci-dessous représente les cinq feuilles du tissu $\mathcal{B}(p_1, \ldots, p_4)$ passant par un point p.



Le groupe projectif linéaire agissant transitivement sur les 4-uplets de points de $\mathbb{CP}^2$ en position générale, les tissus $\mathcal{B}(p_1, \ldots, p_4)$ sont tous projectivement équivalents. Le tissu $\mathcal{B}$ de la Définition 4.4.5 correspond au choix $p_1 = [1:0:0]$, $p_2 = [0:1:0]$, $p_3 = [0:0:1]$ et $p_4 = [1:1:1]$.

Dans [**Bol 36**], G. Bol donne une famille de six relations fonctionnelles abéliennes pour $\mathcal{B}$, équivalente à celle formée par les six relations fonctionnelles abéliennes suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1) && \log(U_1) - \log(U_2) - \log(U_3) = 0\,,\\
&(2) && \log(U_3) - \log(U_4) - \log(U_5) = 0\,,\\
&(3) && \log(1-U_1) - \log(1-U_2) + \log(U_4) = 0\,,\\
&(4) && \log(1-U_1) - \log(1-U_3) + \log(1-U_5) = 0\,,\\
&(5) && \log(\tfrac{1-U_1}{U_1}) - \log(\tfrac{1-U_3}{U_3}) + \log(1-U_4) = 0\,,\\
&(6) && \mathbf{D}_2(U_1) - \mathbf{D}_2(U_2) - \mathbf{D}_2(U_3) - \mathbf{D}_2(U_4) + \mathbf{D}_2(U_5) = 0\,.
\end{aligned}$$

On vérifie que ces six relations sont linéairement indépendantes, ce qui implique que $\mathrm{rg}[\mathcal{B}] \geq 6$. D'autre part, on a la borne de Bol $\mathrm{rg}[\mathcal{B}] \leq (5-1)(5-2)/2 = 6$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est de rang maximal égal à 6. Il est clair que toute linéarisation ϕ de $\mathcal{B}$ (locale ou non) linéarise a fortiori le sous-4-tissu linéaire $\mathcal{W}(U_1, U_2, U_3, U_4)$ formé de quatre pinceaux de droites. Le théorème de Mayrhofer et Reidemester cité en 4.1.1 implique alors que ϕ est une transformation projective. Or une telle application ne pourra jamais linéariser le pinceau de coniques $\{U_5 = cte.\}$ qui est un feuilletage de $\mathcal{B}$. On en déduit que le tissu de Bol n'admet pas de linéarisation. On a donc la

Proposition 4.4.6. — *Le tissu de Bol $\mathcal{B}$ est de rang maximal mais n'est pas linéarisable.*

En particulier, on en déduit que le tissu de Bol n'est pas algébrique.

Parce qu'on possède une base explicite des relations abéliennes de $\mathcal{B}$, on peut déterminer son armure

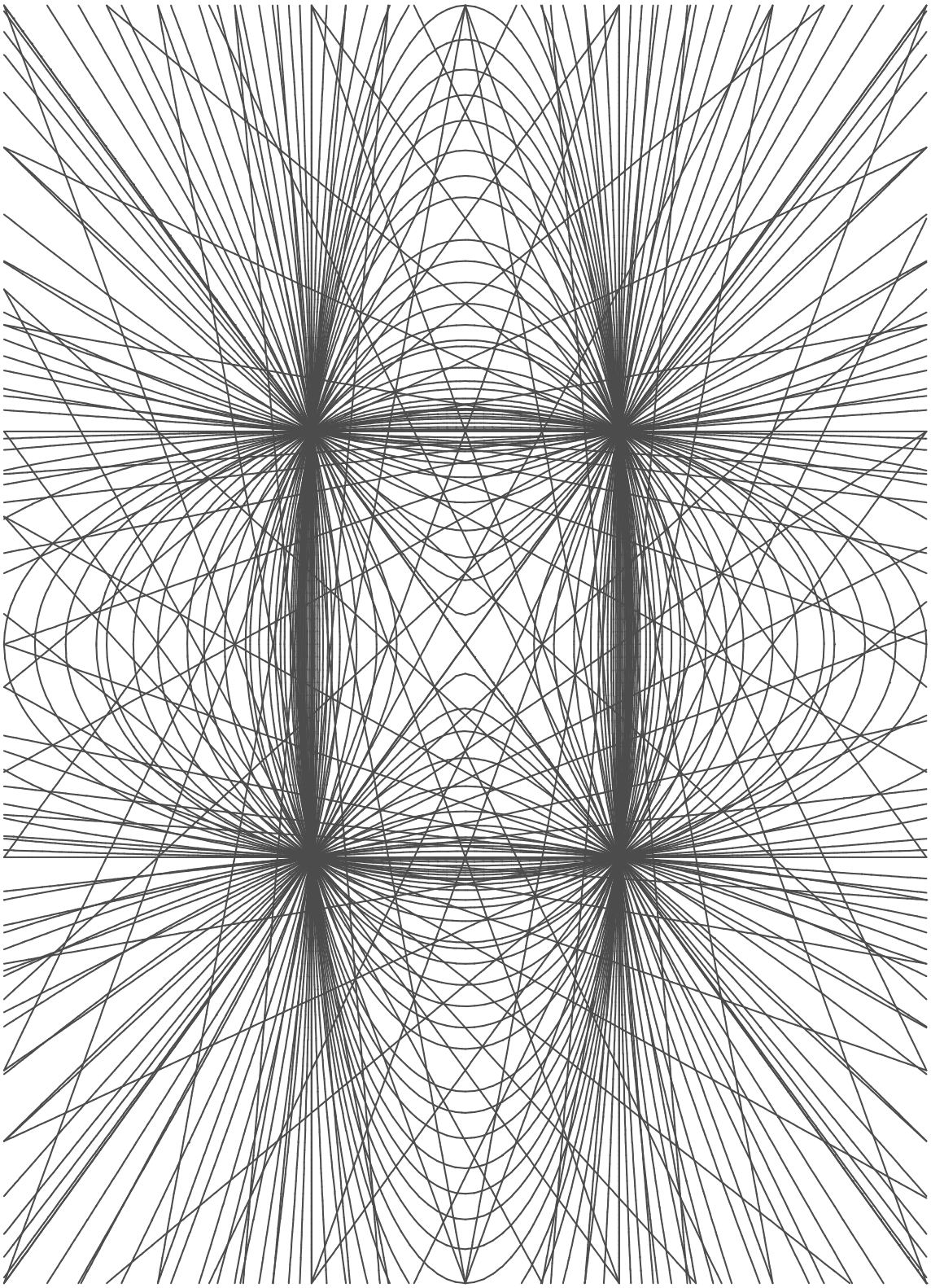


FIGURE 8. Le tissu de Bol

ainsi que les nombres de ses sous-k-tissus de rang maximal, pour $k = 3, 4$; on a :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{B}\big] = 10\ , \qquad \mathcal{R}_4\big[\mathcal{B}\big] = 5 \qquad \text{et} \qquad \omega\big[\mathcal{B}\big] = (5, 0, 1)\ .$$

Puisque $\mathcal{R}_3\big[\mathcal{B}\big] = 10$, tous les sous-3-tissus de $\mathcal{B}$ sont hexagonaux et donc $\mathcal{B}$ est hexagonal. Bol a montré que $\mathcal{B}$ est l'unique tissu hexagonal non formé de pinceaux de droites :

Proposition 4.4.7. — *Soit $\mathcal{W}(d)$ un (germe de) d-tissu hexagonal. Alors $\mathcal{W}(d)$ est équivalent à un tissu formé de d-pinceaux de droites, sauf si $d = 5$ et que $\mathcal{W}(d)$ est équivalent au tissu de Bol.*

Bol montre également que si $\mathcal{W}(5)$ est tel que $\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}(5)\big] \geq 9$, alors $\mathcal{W}(5)$ est équivalent à un tissu formé de cinq pinceaux de droites, sauf s'il est équivalent au tissu de Bol.

4.4.4. Tissus exceptionnels et tissus polylogarithmiques. — Au vu de l'exemple précédent du tissu de Bol, on peut poser la

Définition 4.4.8. — Un tissu est dit *exceptionnel* s'il est de rang maximal et non algébrique.

Avec cette définition, la Proposition 4.4.6 se résume en disant que $\mathcal{B}$ est exceptionnel.

La notion de tissu exceptionnel est sans doute une des plus importantes en géométrie des tissus (voir ci-dessous). Elle se généralise en dimension supérieure, même si des résultats d'algébrisation impliquent qu'elle est vide dans certains cas, comme par exemple pour les 3-tissus de courbes en dimension 3 et de rang maximal 5 (voir [**BW 34**]), ou pour les d-tissus de codimension n en dimension $2n$ et de rang maximal $\binom{d-1}{n+1}$ (voir [**Hé 98**]).

Pendant près de 70 ans, le tissu de Bol a été l'unique exemple de tissu exceptionnel plan connu, et ce jusqu'à notre étude récente du tissu de Spence-Kummer du trilogarithme (cf. [**Pi**]). Des exemples de tissus exceptionnels en dimension plus grande ont cependant été découverts entre temps :

- V. Goldberg a découvert trois 4-tissus de codimension 2 dans $\mathbb{C}^4$, de 2-rang maximal 1 mais non-algébriques. Pour une présentation de ces tissus, voir [**G**] ou [**AG-2**], page 100.
- dans [**Lit 89**], J. Little considère le $2n$-tissu $\mathcal{W}_X^{(2n)}$ naturellement défini sur l'espace des 0-cycles effectifs de degré $2n$ d'une surface K_3, ici notée X. Sur cet espace de cycles, on peut considérer le système différentiel extérieur d'Abel, défini par la trace de "l'unique" 2-forme de X (voir [**Gr 77**] pour cette notion). Une variété intégrale $\mathcal{V}$ de ce système différentiel sera de codimension 2 dans $X^{(2n)}$. En prenant alors la restriction de $\mathcal{W}_X^{(2n)}$ à $\mathcal{V}$, Little obtient un $2n$-tissu de codimension 2 sur un espace de dimension $4n$ et de 2-rang égal à la borne maximale possible, à savoir 1. En s'appuyant finalement sur un résultat profond de géométrie algébrique dû à Mumford et Roitman, il montre qu'un tel tissu n'est pas linéarisable et donc n'est pas algébrique au sens classique.
- dans [**Da 83**], D. Damiano considère (pour $n \geq 2$) le $(n+3)$-tissu en courbe $\mathcal{D}(n)$ dans $\mathbb{R}^n$, formé par $n+2$ pinceaux de droites de sommets $n+2$ points p_i en position générale, le dernier feuilletage étant formé par les courbes rationnelles extrémales passant par tous les p_i. Il montre que ces tissus sont de 1-rang maximal mais ne sont pas linéarisables : ils sont donc exceptionnels. La famille $\{\mathcal{D}(n) \,|\, n \geq 2\}$ généralise le tissu de Bol qui correspond au cas particulier $n = 2$. Le 6-tissu correspondant au cas $n = 3$ avait déja été considéré auparavant par Blaschke dans [**Bl 29**] et [**Bl 30**].

En *2.2.1.2*, on a vu que la relation abélienne dilogarithmique (notée Δ_6) engendre tout l'espace $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ par prolongement analytique. Elle doit donc être considérée comme la relation abélienne privilégiée

pour $\mathcal{B}$. D'autre part, depuis une trentaine d'années, cette équation fonctionnelle et les fonctions $\mathbf{Li}_2$ et $\mathbf{D}_2$ qui s'y rapportent ont été mises en relation avec de nombreux domaines distincts en mathématiques (voir chapitre 7). Puisqu'elles sont données par l'annulation de certaines sommes abéliennes et sont ainsi reliées au théorème d'Abel, les relations abéliennes des tissus algébriques sont des objets particulièrement intéressants. La brève esquisse qui vient d'être faite des nombreuses occurrences de l'équation $(\mathcal{R})$ en mathématiques montre que la relation abélienne "principale" du tissu exceptionnel qu'est $\mathcal{B}$ l'est tout autant, si ce n'est plus.

La relation abélienne portée par un tissu de Little est donnée par l'annulation de la restriction de la trace de "la" 2-forme de X à une sous-variété du produit symétrique $X^{(2n)}$. Cette relation abélienne est donc liée à un objet géométrique fondamental porté par la surface X.

Pour tout $n \geq 2$, le tissu de Damiano $\mathcal{D}(n)$ est défini de facon naturelle sur l'espace $\mathrm{C}_{n+3}(\mathbb{R}^2)$ des configurations de $n+3$ points dans $\mathbb{R}^2$. Son 1-rang est maximal, égal à $(n+1)(n+2)/2$. Toutes les relations abéliennes de $\mathcal{D}(n)$ sont dégénérées (car d'ordre trois), à l'exception d'une seule qui est obtenue à partir de la construction par I. Gelfand et R. MacPherson, dans [**GM 82**], d'une certaine forme P_n sur $\mathrm{C}_{n+3}(\mathbb{R}^2)$. Cette forme P_n est l'intégrale de la forme $\mathrm{GL}_{n+3}(\mathbb{R})$-invariante qui représente une certaine classe de Pontryagin du fibré tautologique sur la grassmannienne $G_n^{n+3}(\mathbb{R})$, le long des fibres d'une action naturelle de $\mathbb{R}_{>0}^{n+3}$. La géométrie des grassmanniennes et le théorème de Stokes impliquent que ces formes P_n vérifient certaines relations différentielles. Dans les cas qu'il considère, Damiano montre qu'on peut interpréter ces relations comme la relation abélienne non-dégénérée de $\mathcal{D}(n)$.

Bien qu'on ne connaisse pas d'interprétation géométrique des 2-relations abéliennes des tissus exceptionnels de Goldberg, la discussion ci-dessus a voulu montrer que les relations abéliennes des tissus de rang maximal (et particulièrement des tissus exceptionnels) sont des objets particulièrement intéressants. On comprendra donc l'opinion de S.S. Chern sur la question dans [**Ch 85**], où il écrit

> *The high-dimensional Abelian equations constitute a subject which has contacts with many branches of mathematics (such as functional equations, partial differential equations, combinatorial characteristic classes, algebraic K-theory, etc..) and which should have a very promising future.*
>
> [Les relations abéliennes de dimension supérieure constituent un sujet qui a des liens avec de nombreuses branches des mathématiques (comme les équations fonctionnelles, les équations aux dérivées partielles, les classes caractéristiques combinatoires, la K-théorie algébrique, etc..) et devraient avoir un avenir prometteur.]

Dans le même papier il écrit aussi :

> *The determination of all webs of maximum rank will remain a fundamental problem in web geometry and the nonalgebraic ones, if there are any, will be most interesting.*
>
> [La détermination de tous les tissus de rang maximal demeure un problème fondamental en géométrie des tissus et les tissus non-algébriques, s'il en existe, seront les plus intéressants.]

On désignera donc le problème de la classification des tissus exceptionnels comme le **problème de Chern**. Il est déjà non-trivial et encore largement ouvert pour les tissus plans. Le premier cas pour lequel il se pose est celui des 5-tissus plans exceptionnels. Dans [**Ch 85**], Chern écrit à ce sujet :

> (For planar webs), *an important unsolved problem is whether there are other 5-webs of rank 6, besides the algebraic ones and Bol's example.*
>
> [(Pour les tissus plans), un problème important et non résolu est de savoir s'il existe d'autres 5-tissus de rang 6, en plus des tissus algébriques et de l'exemple de Bol.]

C'est ce problème qui a motivé la plus grande partie de notre travail de recherche, dont cette thèse donne une présentation. Un point fondamental est de savoir s'il existe d'autres 5-tissus exceptionnels plans distincts du tissu de Bol.

Dans la quête des tissus exceptionnels et de leurs relations abéliennes, un intérêt particulier doit être porté aux tissus que l'on peut associer aux polylogarithmes.

Plusieurs mathématiciens du 19ème siècle ont découvert que les polylogarithmes $\mathbf{Li}_n$ (pour $n = 2, 3, 4, 5$) satisfont des relations fonctionnelles de forme similaire à celle de l'équation d'Abel du bilogarithme ($\mathcal{A}b$). Aux équations fonctionnelles en deux variables satisfaites par les polylogarithmes, on pourra de la même façon associer des tissus sur $\mathbb{CP}^2$, définis par des fractions rationnelles, qui porteront des relations fonctionnelles abéliennes polylogarithmiques. Ceux-ci seront susceptibles d'être de rang élevé, peut-être maximal, et seront donc particulièrement intéressants dans notre recherche des tissus exceptionnels.

De plus, comme dans le cas du tissu de Bol et du dilogarithme, les relations fonctionnelles polylogarithmiques qu'ils portent sont liées à d'autres domaines tels que la K-théorie des corps de nombres (voir [**Go 93**] pour davantage de précisions). On peut donc penser que ces tissus forment une famille de tissus exceptionnels.

À l'équation de Spence-Kummer SK du trilogarithme (voir l'introduction), on peut associer le 9-tissu dit de Spence-Kummer défini par les neuf fractions rationnelles qui apparaissent dans SK :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{SK}} := \mathcal{W}\left\{ x\,,\, y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{1-x}{1-y}\,,\, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\, xy\,,\, \frac{x(1-y)}{(1-x)}\,,\, \frac{(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2} \right\}.$$

Il a été établi indépendamment par Gilles Robert et l'auteur que le tissu de Spence-Kummer est bien exceptionnel (voir les chapitres 3 et 7 ainsi que [**Pi 02**] et [**Ro 02**]) confirmant ainsi l'intuition de Hénaut[(4)]. L'étude de ses sous-tissus a permis de découvrir d'autres k-tissus exceptionnels, pour $k = 5, 6, 7$, tous définis par des fractions rationnelles, et dont les relations abéliennes sont "polylogarithmiques" pour la plupart.

Dans l'exposé d'ouverture [**Gr 04**] de la célébration du bicentenaire de la naissance de N.H. Abel, P.A. Griffiths pose la question de savoir si les tissus polylogarithmiques sont les seuls à être exceptionnels. Relativement aux tissus de Bol et de Spence-Kummer, il écrit (page 197) :

> *Are all webs of maximal rank which are not algebraizable of this type ?*
>
> *We do no attempt to formulate this question precisely – intuitively, we are asking whether or not for each k there is an integer $n(k)$ such that there is a "new" $n(k)$-web of maximal rank one of whose abelian relations is a (the ?) functional equation with $n(k)$ terms for*

(4) Dans [**Hé 01**], il écrit (page 38) : "*... but above all [Spence-Kummer] web seems to be a good candidate as an exceptional web.*"

the kth polylogarithm $\mathbf{L}i_k$ *?*

[Les tissus de rang maximal qui ne sont pas algébriques sont-ils tous de ce type ?

Nous n'essayons pas de donner de cette question une formulation précise – intuitivement, nous demandons si, pour tout k, il existe un entier $n(k)$ tel qu'il y ait un "nouveau" $n(k)$-tissu de rang maximal, dont l'une des relations abéliennes est une (l') équation fonctionnelle à $n(k)$ termes pour le k-ième polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_k$?]

De ces interrogations on peut dégager deux questions distinctes :

- existe-t-il pour chaque polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_k$ une équation fonctionnelle du même type que $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{S}K)$ telle que le tissu associé soit exceptionnel ?
- un tissu exceptionnel est-il équivalent à un "tissu polylogarithmique" ?

(La notion de "tissu polylogarithmique" est discutée et précisée au septième chapitre).

Signalons tout de suite que la réponse à la deuxième question est négative. On renvoie au chapitre 6 pour des exemples de 5-tissus exceptionnels non-polylogarithmiques. Ces exemples sont surprenants : certains sont très "simples" et peuvent s'interpréter comme des tissus algébriques, quitte à généraliser de façon naturelle la définition classique "à la Blaschke-Bol" de ce qu'est un tissu algébrique (voir chapitre 9). D'autres exemples tout aussi surprenants de tissus non-algébriques, mais de rang maximal, sont reliés aux objets très classiques en géométrie algébrique que sont les courbes elliptiques et leurs fonctions thètas. En particulier, ces résultats apportent une réponse à la question de Chern posée plus haut : il existe de nombreux 5-tissus plans exceptionnels distincts de l'exemple de Bol.

Il se pourrait que la réponse à la première question soit négative également, puisqu'au chapitre 7, on montre que les tissus associés aux équations fonctionnelles connues les plus simples qui sont satisfaites par le tétralogarithme et le pentalogarithme ne sont pas de rang maximal.

CHAPITRE 5

SUR L'ÉTUDE DU RANG D'UN TISSU

On vient d'expliquer que les notions de relations abéliennes, de rang, et surtout de "rang maximal", sont certainement parmi les plus intéressantes en géométrie des tissus.

Parmi les problèmes les plus fondamentaux concernant les tissus **plans** de rang maximal figure sans doute, juste après l'établissement d'une classification, celui de les caractériser. C'est à cette question que l'on s'intéresse dans ce chapitre.

Plus précisément, le problème considéré ici est celui de la caractérisation, par un critère différentiel, des n-uplets $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de 1-formes (resp. des n-uplets d'intégrales premières $\underline{U} = (U_1 \ldots, U_n)$) qui définissent un tissu de rang maximal : on cherche des équations différentielles portant sur les coefficients des formes ω_i (resp. sur les intégrales premières U_i) qui sont satisfaites si et seulement si le tissu associé $\mathcal{W}(\underline{\omega})$ $\big($resp. $\mathcal{W}(\underline{U})\big)$ est de rang maximal. On s'intéresse aussi à l'utilisation effective d'un tel critère.

Dans la première partie, on s'appuie sur la publication méconnue [**Pa 38**] de A. Pantazi pour donner la construction générale d'un système différentiel (portant sur les ϵ_i) qui caractérise les tissus $\mathcal{W}\left(dx + \epsilon_1\, dy, \ldots, dx + \epsilon_n\, dy\right)$ de rang maximal.

Dans la seconde partie, on explique comment, à partir de la méthode d'Abel de résolution des **efa**, on peut obtenir des équations différentielles (sur les U_i) qui vont caractériser les tissus $\mathcal{W}(U_1, .., U_n)$ de rang maximal. Cette approche est complètement élémentaire, et s'il n'est pas aisé d'en déduire des résultats généraux, elle permet en contrepartie d'obtenir, dans certains cas particuliers, des équations différentielles beaucoup plus simples que celles données par la méthode de Pantazi. On illustrera cette approche en l'appliquant à plusieurs cas simples. On en déduira plusieurs nouveaux tissus exceptionnels (voir aussi les chapitres 6, 7 et 8).

Tous les objets considérés ici sont supposés holomorphes : on se place dans la catégorie analytique complexe, même si certains résultats du chapitre sont également valides dans un cadre réel, avec des hypothèses de régularité C^k, pour k assez grand.

Dans tout le chapitre, n désignera un entier naturel plus grand que 3 et on posera $N = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Tous les tissus considérés seront des tissus plans définis sur un petit voisinage ouvert autour de l'origine de $\mathbb{C}^2$. On notera $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$) l'anneau des germes de fonctions holomorphes en l'origine de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^2$).

Pour $\psi(x, y) \in \mathcal{O}_2$ et $k \in \mathbb{N}$ on notera :

$$\psi^{[k]}(x, y) := \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\psi(x, y)\right).$$

Dans la première partie 5.1, un n-tissu plan sera donné par un n-uplet de 1-formes $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega(\mathbb{C}^2, 0)^n$ et dans 5.2, par un n-uplet d'intégrales premières $\underline{U} = (U_1, ..., U_n) \in (\mathcal{O}_2)^n$. Il y a plusieurs façons de se donner un tissu et celles que nous utiliserons ici sont très naturelles. Mais ce ne sont pas les plus générales, puisqu'elles définissent davantage un "tissu ordonné" qu'un véritable "tissu". Ainsi, dans tout ce chapitre, il sera en fait question de "tissu ordonné" bien que cela ne soit plus précisé dans la suite. Puisqu'on travaillera localement au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, le terme "tissu" vaudra pour "germe de tissu ordonné en l'origine" dans tout ce qui suit.

5.1. Caractérisation des tissus plans de rang maximal (d'après A. Pantazi)

Une caractérisation satisfaisante des 3-tissus de rang maximal 1 a été obtenue dès le début de la théorie des tissus, par Blaschke et Dubourdieu. Dans [**BD 28**], ils associent à un 3-tissu $\mathcal{W}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ une certaine forme différentielle $K^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}} \in \Omega^2(\mathbb{C}^2, 0)$, maintenant connue comme la "courbure de Blaschke" de $\mathcal{W}$. Ils montrent que cette courbure est un invariant différentiel de $\mathcal{W}$[(1)] et que son annulation caractérise les 3-tissus de rang maximal. On donne ci-dessous une construction classique de cette courbure (tirée de [**Bl 55**]) : supposons que $\mathcal{W}$ soit défini par trois 1-formes holomorphes en $(\mathbb{C}^2, 0)$, notées σ_1, σ_2 et σ_3. Sans perdre en généralité, on peut faire l'hypothèse $(*)$ $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. On a donc $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_2 = \sigma_2 \wedge \sigma_3$. On note Ω cette 2-forme qui n'est pas nulle. Alors pour $i = 1, 2, 3$, il existe une fonction holomorphe h_i telle que $d\,\sigma_i = h_i\,\Omega$. La relation $(*)$ implique que $h_1 + h_2 + h_3 = 0$. On en déduit que $h_3\,\sigma_2 - h_2\,\sigma_3 = h_1\,\sigma_3 - h_3\,\sigma_1 = h_2\,\sigma_1 - h_2\,\sigma_2$. On note γ cette forme. Par définition, la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}$ est la 2-forme $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}} = d\,\gamma$. On a alors le

Théorème 5.1.1 **(Blaschke-Dubourdieu)**. — *Le tissu $\mathcal{W}$ est de rang maximal si et seulement si sa courbure $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}}$ est identiquement nulle.*

Une preuve consiste à montrer que chacun des deux membres de cette équivalence correspond au fait que $\mathcal{W}$ est parallélisable, *i.e.* qu'il existe $\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $\phi_*(\mathcal{W}) = \mathcal{W}(x, y, x + y)$.

Mais si ce problème de caractériser les tissus de rang maximal a été résolu de façon satisfaisante pour les 3-tissus aux alentours des années trente, il semblait qu'aucune véritable avancée n'avait été faite pour traiter le cas général des n-tissus, et ce jusqu'aux travaux très récents (2003) de Hénaut.

On décrit maintenant de façon rapide certains de ses résultats, qui ne sont pas loin d'apporter une réponse complète et satisfaisante au problème de la caractérisation des tissus de rang maximal, sur le plan théorique tout du moins.

Dans [**Hé 04**] (auquel on renvoie pour des détails), il montre comment associer, à un n-tissu $\mathcal{W}$, un fibré vectoriel complexe $\mathcal{E}$ de rang N sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ muni d'une connexion ∇, tel que l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$ soit isomorphe à l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{E}$ qui sont horizontales relativement à ∇. En outre, il obtient que, dans une base adaptée de sections, la courbure de ∇ a pour forme matricielle

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \ldots & K_N \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y\,, \qquad (K_1, \ldots, K_N \in \mathcal{O}_2)\,.$$

(1) Dans le sens où $\phi^* K^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}} = K^{\mathcal{B}}_{\phi^*(\mathcal{W})}$ pour tout ϕ germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Il en déduit que $\mathcal{W}$ est de rang maximal si et seulement si la courbure de cette connexion est nulle, ce qui correspond à l'annulation des 2-formes $K_i\, dx \wedge dy$, pour $i = 1, \ldots, N$.

Hénaut montre que, pour $n = 3$, la courbure $K_1\, dx \wedge dy$ donnée par son approche n'est autre que la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}$. Ses résultats apparaissent donc comme une généralisation naturelle du théorème de Blaschke-Dubourdieu au cas général des n-tissus.

Le cadre de travail pris par Hénaut pour obtenir ses résultats est le formalisme moderne des systèmes surdéterminés d'équations différentielles linéaires analytiques (dû principalement aux travaux de Spencer et Goldschmidt, voir [**BCGG**]). Il utilise en particulier la notion de complexe de Spencer d'un morphisme de $\mathcal{O}$-module, lui-même obtenu par prolongation successive, à certains espaces de jets, d'un autre morphisme de $\mathcal{O}$-module défini à partir d'un certain système différentiel linéaire. Les outils utilisés sont multiples et peu constructifs : sont utilisés des résultats sur les équations linéaires dans le champ complexe (l'archétype étant le théorème de Cauchy-Kowaleskaya), le langage de base de l'algèbre homologique (avec les notions de complexe, de suite exacte), ainsi que les formalismes des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules et des espaces de jets.

Les résultats décrits ci-dessus apportent une réponse théorique satisfaisante au problème de la caractérisation des tissus de rang maximal, mais leur mise en œuvre pratique et leur utilisation effective n'est pas aisée à première vue : il ne semble pas évident, étant donné explicitement n 1-formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ définissant un tissu $\mathcal{W}$, de construire effectivement la connexion ∇ ainsi que les coefficients K_i de la matrice de courbure.[(2)]

Si les résultats de Hénaut sont très récents, il s'avère que la caractérisation des tissus plans de rang maximal avait déjà été étudiée de façon intéressante par Pantazi[(3)], environ 60 ans plus tôt.

Les résultats qui nous intéressent ont été publiés en 1938 dans une note écrite en français, parue dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie* [**Pa 38**]. En relation avec les résultats contenus dans cet article ne sont parues, à notre connaissance, que deux autres publications : une autre de Pantazi [**Pa 40**], et un article de Nicolae Mihăileanu [**Mi 41**].

Bien que la note de Pantazi ait été commentée dans le Zentralblatt allemand par Bol (qui fut un des principaux contributeurs de l'école de Hambourg), il ne semble pas que les résultats qu'elle contient aient été connus par la communauté mathématique intéressée par les tissus. Cette note n'apparaît dans aucune bibliographie récente sur les tissus et n'est citée nulle part. Il nous semble que sa découverte est intéressante, tant sur un plan historique que mathématique.

La section 5.1 de ce chapitre consiste en notre tentative de réécriture, avec un point de vue plus moderne, des résultats de [**Pa 38**] qu'on va maintenant décrire rapidement.

Etant donné des 1-formes $dx + \epsilon_1\, dy, \ldots, dx + \epsilon_n\, dy$ définissant un n-tissu $\mathcal{W}$, Pantazi donne une construction effective de certaines expressions, notées $\mathcal{P}_k^{(\sigma)}$ (avec $\sigma = 0, \ldots, n-3$ et $k = \sigma + 2, \ldots, n-1$), rationnelles en les ϵ_i et leurs dérivées partielles. Il affirme qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{W}$ soit de rang maximal est que tous ces coefficients s'annulent.

Si l'approche de Pantazi est élémentaire et constructive, sa "démonstration" du caractère nécessaire

---

(2) Il convient cependant de signaler les travaux récents de O. Ripoll qui a implémenté des procédures sur maple qui permettent de calculer de façon effective les courbures de Hénaut $K_i\, dx \wedge dy$ des d-tissus, pour $d = 3, 4, 5$.

(3) Alexandru Pantazi était un géomètre Roumain, qui fut élève de Elie Cartan. Il a soutenu une thèse de géométrie différentielle projective à Paris en 1922. Après une dizaine d'années passées en France, il retourna en Roumanie où son activité mathématique se déroula ensuite jusqu'à sa mort prématurée en 1948.

et suffisant de sa condition ne satisfait pas aux critères de rigueur que doit vérifier une preuve mathématique moderne. On a donc voulu en donner une preuve plus formalisée. Mais la complexité induite par la manipulation répétée d'expressions compliquées (mais explicites) qui apparaissent (inévitablement ?) dans l'approche de Pantazi ne nous a permis d'établir que la nécessité de sa condition, mais pas sa suffisance.

D'autre part, une formulation moderne de l'approche de Pantazi conduit à des résultats très semblables à ceux de Hénaut dont il a été question plus haut : on peut ainsi construire un isomorphisme explicite entre l'espace des relations abéliennes d'un n-tissu donné et l'espace des sections plates du fibré trivial de rang N sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, pour une certaine connexion explicitement construite à partir des ϵ_i et de leurs dérivées partielles. On en déduit que le tissu est de rang maximal si et seulement si la connexion est intégrable, c'est-à-dire si et seulement si sa courbure est nulle.

Sans que cela soit prouvé en toute généralité (sauf dans le cas $n = 4$, et ce par un calcul formel sur `maple`), on a observé, dans tous les cas que nous avons été amené à considérer, que la matrice de courbure de la "connexion de Pantazi" est de la forme

$$(\blacktriangle) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_N \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y\ , \qquad (R_1, \dots, R_N \in \mathcal{O}_2)$$

et donc est essentiellement de la même forme que la courbure de Hénaut. De plus, il semble que les coefficients R_i de la matrice de courbure de Pantazi sont exactement les expressions de Pantazi $\mathcal{P}_k^{(\sigma)}$ dont il a été question plus haut. Cela a été vérifié (encore par des calculs formels) dans tous les cas étudiés. Il semble donc que la condition de Pantazi soit bien également suffisante. On montre aussi que pour les 3-tissus, la courbure de Pantazi est également la courbure de Blaschke et correspond au coefficient de Pantazi $\mathcal{P}_2^{(0)}$.

Voici maintenant le plan de la suite de la section 5.1 : en 5.1.1, après avoir décrit l'approche de Pantazi telle qu'elle est exposée dans [**Pa 38**] (dont on retranscrit une partie), on a essayé de reformuler dans un langage plus moderne la construction qui y est esquissée. On donne une construction d'une connexion dont l'espace des sections horizontales s'identifie avec les relations abéliennes. On montre ensuite comment la condition obtenue par Pantazi rentre dans notre formalisme. Son caractère nécessaire apparaît alors immédiatement. En 5.1.2, on calcule explicitement la connexion et la courbure de Pantazi d'un n-tissu général, pour $n = 3, 4, 5$. On traite à chaque fois des exemples explicites. La troisième et dernière partie 5.1.3 est consacrée à la formulation des nombreux commentaires, remarques et questions que l'on peut se poser au vu des résultats exposés.

Pour finir cette introduction, il nous semble important de souligner deux choses :

- notre reformulation "moderne" de la construction de Pantazi ne nous semble pas être satisfaisante en l'état où elle est présentée ci-dessous. Trop de choses ne sont pas encore comprises sur le plan théorique, comme par exemple celle de savoir pourquoi la courbure de Pantazi est bien toujours de la forme ($\blacktriangle$), comme il semble que ce soit le cas.
- la construction de Hénaut, par contre, présente en quelque sorte un visage oposé : elle est théoriquement bien formalisée, mais semble difficile à utiliser dans la pratique.

Ceci montre l'intérêt évident qu'il y aurait à comparer la construction plus intrinsèque de Hénaut avec celle plus élémentaire et explicite de Pantazi.

5.1.1. Une formulation moderne de l'approche de Pantazi. — On a essayé ici d'établir rigoureusement les résultats de Pantazi dans le langage moderne des connexions. Pour avoir des résultats effectifs et utilisables dans la pratique, nous avons adopté un point de vue calculatoire qui ne laisse peut-être pas assez apparaître les idées astucieuses mais conceptuellement simples qui guident l'approche de Pantazi. Pour les présenter au lecteur, on donne tout d'abord une retranscription assez fidèle d'une partie de la note [**Pa 38**], qui est très claire et qui laisse entrevoir la philosophie de la méthode de Pantazi.

Une autre raison de retranscrire cette note est que le périodique dans lequel elle a été publiée (les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie*) est quasi-introuvable. Il n'apparaît pas dans la liste de périodiques de la base de données MathSciNet et, en France, semble n'être disponible qu'à la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré à Paris. La restranscription ci-dessous permettra donc au lecteur d'avoir un accès plus immédiat à la "source".

5.1.1.1. L'approche originelle de Pantazi. — La note [**Pa 38**] comporte quatre pages. Dans la première, Pantazi pose la problématique et introduit les notations suivantes :

Soit $\mathcal{W}$ un n-tissu, défini par n germes holomorphes $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_2$.

Par définition, une relation abélienne pour $\mathcal{W}$ est une relation de la forme

$$g_1(U_1)\, d\,U_1 + g_2(U_2)\, d\,U_2 + \cdots + g_n(U_n)\, d\,U_n = 0 \qquad (\text{avec } g_i \in \mathcal{O}_1 \text{ pour } i = 1, \ldots, n\,)\,.$$

En faisant l'hypothèse (non restrictive) que $\partial_x U_i(0) \neq 0$ pour tout i, Pantazi écrit une telle relation

$$(\star) \qquad \nu_1 \big(dx + \epsilon_1\, dy\big) + \nu_2 \big(dx + \epsilon_2\, dy\big) + \cdots + \nu_n \big(dx + \epsilon_n\, dy\big) = 0$$

avec, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\nu_i = g_i(U_i)\,(\partial_x U_i) \qquad \text{et} \qquad \epsilon_i = \frac{\partial_y U_i}{\partial_x U_i}\,.$$

Remarquons que la condition de transversalité en l'origine des feuilletages constituant $\mathcal{W}$ implique que $\epsilon_i(0) \neq \epsilon_j(0)$ pour tout i, j distincts compris entre 1 et n.

En décomposant l'équation $(\star)$ selon dx et dy, on obtient que les relations abéliennes de $\mathcal{W}$ correspondent aux solutions $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in (\mathcal{O}_2)^n$ du système d'équations

$$S\,[\,\underline{\epsilon}\,] \;:\; \begin{cases} \sum_{i=1}^n \nu_i = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^n \nu_i\, \epsilon_i = 0 & (2) \\ \partial_y \nu_i = \partial_x\,(\epsilon_i\, \nu_i) & (3i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Pour $i = 1, \ldots, n$, l'équation $(3i)$ est la condition d'intégrabilité qui équivaut à l'existence de g_i holomorphe telle que $\nu_i = g_i(U_i)\,(\partial_x U_i)$.

On notera dorénavant $\mathcal{A}\,[\,\underline{\epsilon}\,]$ l'espace des solutions $\underline{\nu}$ du système d'équations $S\,[\,\underline{\epsilon}\,]$.

On retranscrit maintenant les trois dernières pages de la note de Pantazi [**Pa 38**].

Posons

$$v_i^{[1]} = \frac{\partial v_i}{\partial x} \tag{5}$$

nous aurons

$$dv_i = v_i^{[1]}\, dx + (\epsilon_i v_i^{[1]} + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} v_i)\, dy, \tag{6}$$

par conséquent

$$\frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_i v_i^{[1]} + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} v_i\right).$$

Posons encore

$$v_i^{[2]} = \frac{\partial v_i^{[1]}}{\partial x}$$

nous aurons de nouveau

$$dv_i^{[1]} = v_i^{[2]}\, dx + \left(\epsilon_i\, v_i^{[2]} + 2\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x}\, v_i^{[1]} + \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x^2} v_i\right)\, dy \tag{7}$$

par conséquent

$$\frac{\partial v_i^{[2]}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_i\, v_i^{[2]} + 2\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x}\, v_i^{[1]} + \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x^2} v_i\right).$$

Posons d'une manière générale

$$v_i^{[k+1]} = \frac{\partial v_i^{[k]}}{\partial x}$$

on arrivera de proche en proche à une relation de la forme

$$dv_i^{[k]} = v_i^{[k+1]}\, dx + \left(\epsilon_i\, v_i^{[k+1]} + l_i^{[k]}\right)\, dy\,, \tag{8}$$

$l_i^{[k]}$ *étant une expression linéaire et homogène en* $v_i^{[k]}$, $v_i^{[k-1]}$, $\ldots$, $v_i^{[1]}$, v_i, *les coefficients dépendant de* ϵ_i *et de ses dérivées jusqu'à l'ordre* k.

Posons enfin

$$S_\lambda^{[k]} = \sum \epsilon_i^\lambda\, v_i^{[k]}\,, \qquad \left(v_i^{[0]} = v_i,\, S_\lambda^{[0]} = S_\lambda\right)$$

les relations (1) *et* (2) *nous donnent*

$$S_0 = 0 \quad , \quad S_1 = \sum \epsilon_i\, v_i = 0\,. \tag{9}$$

109

Dérivons maintenant ces relations en tenant compte de (4) *et de* (5) *; nous obtenons*

$$(10) \qquad S_0^{[1]} = \sum v_i^{[1]} = 0 \quad , \quad S_1^{[1]} = \sum \epsilon_i \, v_i^{[1]} = -\sum \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \, v_i$$

$$S_2^{[1]} = -\sum \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial y} + \epsilon_i \, \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \right) v_i \; .$$

En dérivant de nouveau ces relations par rapport à x et y nous obtenons

$$S_0^{[2]} = 0, \quad S_1^{[2]} = -2 \sum \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \, v_i^{[1]} - \sum \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x^2} \, v_i, \quad S_2^{[2]} = -\sum \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial y} + 3 \, \epsilon_i \, \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \right) v_i^{[1]}$$

$$- \sum (\ldots) \, v_i$$

$$S_3^{[2]} = -3 \sum \epsilon_i \, \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial y} + \epsilon_i \, \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \right) v_i^{[1]} - \sum \left(\frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial y^2} + \epsilon_i \, \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x \partial y} + \epsilon_i^2 \, \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x} \right) v_i$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, on aura

$$(\mathrm{II}) \qquad S_0^{[k]} = 0, \quad S_0[k] = L_1^{[k]}, \ldots, \quad S_{k+1}^{[k]} = L_{k+1}^{[k]}$$

les quantités $L_m^{[n]}$ étant des expressions linéaires par rapport à toutes les quantités $v_i^{[n-1]}$, $v_i^{[n-2]}$, $\ldots$, $v_i^{[1]}$, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Or, puisque le déterminant

$$\Delta = \left| \; 1 \; \epsilon_i \; \epsilon_i^2 \ldots \; \epsilon_i^{n-1} \; \right|$$

est différent de zéro, les deux relations (9) *nous permettront de déterminer v_i en fonction linéaire et homogène des $(n-2)$ paramètres*

$$\alpha_1 = S_2 \, , \quad \alpha_2 = S_3 \, , \ldots , \; \alpha_{n-2} = S_{n-1} \quad :$$

les relations (10) *permettront ensuite de déterminer $v_i^{[1]}$ en fonction linéaire et homogène de α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-2} et de $(n-3)$ nouveaux paramètres*

$$\alpha_{n-1} = S_3^{[1]} \, , \quad \alpha_n = S_4^{[1]} \, , \ldots , \; \alpha_{2n-5} = S_{n-1}^{[1]}$$

et en utilisant ainsi de suite les relations (II) *pour $k = 2, 3, \ldots, n-3$ on arrive finalement à déterminer tous les $v_i^{[n-3]}$ en fonctions de α_1, α_2, $\ldots$, α_{N-1} et*

$$\alpha_N = S_{n-1}^{[n-3]} \qquad [N = \frac{1}{2} \, (n-1)(n-2) \,]$$

Enfin les relations (II) *correspondant à $k = n-2$, permettront de déterminer tous les $v_i^{[n-2]}$ en fonction de α_1,α_2, $\ldots$, α_N, tandis que* .....

110

... l'élimination des $v_i^{[n-1]}$ *entre les relations* (II) *correspondant à* $k = n-1$, *nous donnera finalement une relation de la forme*

$$A_1\,\alpha_1 + A_2\,\alpha_2 + \cdots + A_N\,\alpha_N = 0 \tag{12}$$

Remarquons maintenant que la dérivation d'une relation de la forme (12), *par rapport à* x *et à* y, *nous conduira, compte tenu des expressions des* α_j *et des relations entre les* $v_i^{[k]}$, *à deux relations toujours de la même forme. En dérivant successivement, il est clair que l'on devra arriver, en fin de compte, à l'une des situations suivantes :*

a) Ou toutes les relations de la forme (12), *que l'on obtient à un certain ordre de dérivation, dépendent linéairement des relations précédemment obtenues, ou bien*

b) Le nombre des relations linéairement indépendantes deviendra à un moment au moins égal à N *et dans ce cas l'on aura* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 0$.

Soit, d'une façon ou d'une autre, $N-p$ *le nombre des relations de la forme* (12), *que l'on obtient de cette manière, linéairement indépendante, l'hypothèse b) correspondant au cas* $p = 0$. *Les quantités* α_1,α_2, ..., α_N *pourront alors s'exprimer en fonction linéaire de* p *paramètres d'entre eux, soient* β_1, β_2, ..., β_p. *Mais dans ce cas les relations* (6), (7) *et les relations* (8) *pour* $k = 2, 3, \ldots, (n-3)$ *se réduiront seulement à* p *relations de la forme*

$$d\,\beta_i = \lambda_i\,dx + \mu_i\,dy \tag{13}$$

λ_i, μ_i *étant des formes linéaires par rapport aux* β_j. *En vertu de ce qui précède, le système formé par les* p *équations* (13) *est complètement intégrable, la solution qui détermine les* β_j, *par conséquent les* v_j, *dépendra linéairement de* p *constantes arbitraires. On s'aperçoit alors immédiatement que le nombre* p *ainsi obtenu est le rang du tissu donné. On arrive par la même voie à démontrer, d'une nouvelle manière, un théorème classique de Bol, d'après lequel la valeur maximum de* p *est*

$$N = \frac{1}{2}\,(n-1)(n-2) \tag{14}$$

et l'on voit de plus que le maximum (14) *est atteint lorsque la première relation* (12) *est identiquement vérifiée, ce qui donne une voie nouvelle, directe, pour la détermination des tissus d'ordre* n *de rang maximum.*

5.1.1.2. Formalisme moderne : connexion et courbure de Pantazi. — Comme le titre l'indique, on a essayé ici de formaliser les idées de Pantazi avec un point de vue moderne. Les idées sous-jacentes sont celles de Pantazi. Seul le langage est nouveau.

On introduit d'abord les notations que nous utiliserons dans la suite.

Dans toute la section, $\underline{\epsilon}$ désigne un n-uplet $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in (\mathcal{O}_2)^n$ vérifiant la propriété de position générale

$$\mathsf{PG}[\underline{\epsilon}] \ : \qquad \epsilon_i(0) \neq \epsilon_j(0) \qquad (\text{pour tout } i, j = 1, \dots, n\,,\ i \neq j)\,.$$

Alors les n 1-formes $\omega_i := dx + \epsilon_i\, dy$ définissent un n-tissu en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que l'on note $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$.

Pour $i = 1, \dots, n$ on pose $\underline{\epsilon}_{\hat{i}} := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n) \in (\mathcal{O}_2)^{n-1}$.

Pour $m \geq 1$, $k = 0, \dots, m$ et $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$, on note par $D_m(\underline{\alpha})$ le produit des $\alpha_j - \alpha_i$ pour $1 \leq i < j \leq m$ et $\sigma_k^m[\underline{\alpha}]$ ou bien σ_k^m (voire même σ_k quand m est fixé) désigne le k-ième polynôme symétrique élémentaire en les α_i :

$$D_m(\underline{\alpha}) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i) \qquad\qquad \sigma_k^m[\underline{\alpha}] = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq m} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}\,.$$

La matrice de VanderMonde construite sur $\underline{\epsilon}$ est notée $M[\underline{\epsilon}]$:

$$M[\underline{\epsilon}] := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \epsilon_1^{(n-1)} & \epsilon_2^{(n-1)} & \dots & \epsilon_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2\,)\,.$$

L'hypothèse $\mathsf{PG}[\underline{\epsilon}]$ implique que $M[\underline{\epsilon}]$ est inversible dans $\mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2\,)$. On note $\omega[\underline{\epsilon}]$ son inverse dont les coefficients sont donnés par le

Lemme 5.1.2. — *Pour i et j variant de 1 à n, on a :*

$$\omega[\underline{\epsilon}]_{ij} = (-1)^{i+j}\, \sigma_{n-j}^{n-1}[\underline{\epsilon}_{\hat{i}}]\, \frac{D_{n-1}[\underline{\epsilon}_{\hat{i}}]}{D_n[\underline{\epsilon}]}\,.$$

Soit $\mathcal{A}\,[\underline{\epsilon}]$ l'espace des solutions $\underline{\nu}$ du système d'équations $S\,[\underline{\epsilon}]$ (voir *5.1.1.1*). Cet espace vectoriel s'identifie avec l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$.

On considère l'application

$$\Pi \,:\, (\mathcal{O}_2)^n \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2) \quad , \quad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \Pi(\underline{\alpha}) := \big(\, \alpha_i^{[k-1]} \big)_{i,k=1}^n\,.$$

(On rappelle la notation $\psi^{[k]} = \partial^k \psi / \partial x^k$). On note P la restriction de cette application Π à $\mathcal{A}\,[\underline{\epsilon}]$.

Pour $\mathcal{Y} = (\, y_{ij}\,) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$, l'écriture $\mathcal{Y} = \big(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_n\,\big)$ correspondra à l'écriture de $\mathcal{Y}$ selon ses vecteurs colonnes, et on notera

$$T_1(\,\mathcal{Y}\,) := \sum_{i=1}^n y_{i1} \qquad \text{ainsi que} \qquad T_1(\,\underline{\epsilon}\,, \mathcal{Y}\,) := \sum_{i=1}^n \epsilon_i\, y_{i1}\,.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = 0, \dots, k$ et $i = 1, \dots, n$, on pose

$$\Theta_i^{[\,k\,,\sigma]} = C_k^\sigma\, \epsilon_i^{[\,k-\sigma]}\,.$$

Nous serons amené à considérer les matrices diagonales :

$$\Theta^{[\,k\,,\sigma]} = \begin{pmatrix} \Theta_1^{[\,k\,,\sigma]} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Theta_n^{[\,k\,,\sigma]} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} d\,x + \epsilon_1\,d\,y & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d\,x + \epsilon_n\,d\,y \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathcal{N}$ est une matrice carrée de 1-formes, tandis que $\Theta^{[\,k\,,\sigma]} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$.

Posons

$$\Delta_N := \left\{\, (k,p) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; k = 0,\ldots,n-3 \;\text{ et } p = k+2,\ldots,n-1 \,\right\}.$$

L'espace vectoriel complexe des applications de Δ_N dans $\mathbb{C}$ sera noté $\mathbb{C}^{\{N\}}$. Autrement dit les éléments de $\mathbb{C}^{\{N\}}$ sont les N-uplets $\underline{\lambda} = (\lambda_p^{[k]})$ de nombres complexes, indexés par les couples (k,p) éléments de Δ_N. Cet espace est isomorphe à $\mathbb{C}^N$, bien que cela ne soit pas de façon canonique.

On note $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$ l'espace des germes de sections holomorphes en l'origine du fibré trivial sur $\mathbb{C}^2$ de fibre $\mathbb{C}^{\{N\}}$. En termes plus simples, il s'agit de l'espace des N-uplets $\underline{S} = (S_p^{[k]})$ d'éléments de $\mathcal{O}_2$, indexés de la même façon que les éléments de $\mathbb{C}^{\{N\}}$.

Pour $\underline{S} \in \mathcal{O}_2^{\{N\}}$ et $k = 0,\ldots,n-3$, on note (avec $n_k = (k+1)(2n-4-k)/2$) :

$$\underline{S}^{(k)} := \left(S_{k+2}^{[k]},\ldots,S_{n-1}^{[k]}\right) \in (\mathcal{O}_2)^{n-k-2} \qquad \text{et} \qquad \underline{S}^{[k]} := \left(\,\underline{S}^{(0)},\ldots,\underline{S}^{(k)}\,\right) \in (\mathcal{O}_2)^{n_k}.$$

Pour $\underline{\nu}$ dans $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ et $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$S_p^{[k]}(\underline{\nu}) := \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^p\,\nu_i^{[k]} \in \mathcal{O}_2\,.$$

Avec ces notations on peut énoncer la

Proposition 5.1.3. — *Soit $\mathcal{Y} = \left(\,\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2,\ldots,\mathcal{Y}_n\,\right) \in \mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2)$. La matrice $\mathcal{Y}$ est dans l'image de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par P si et seulement si elle vérifie les relations suivantes :*

$$(a) \quad T_1(\,\mathcal{Y}\,) = 0 \qquad \textit{et} \qquad T_1(\,\underline{\epsilon}\,,\mathcal{Y}\,) = 0 \qquad (\textit{dans } \mathcal{O}_2)\,,$$

$$(b_k) \quad d\,\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_{k+1}\,d\,x + \sum_{\sigma=0}^{k} \Theta^{[\,k\,,\sigma]}\,\mathcal{Y}_{\sigma+1}\,d\,y \qquad (\textit{pour } \; k = 1,\ldots,n-1)\,.$$

Démonstration : c'est essentiellement une reformulation des relations (1), (2) et $(3i)$ satisfaites par les $\underline{\nu} \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$: les relations (a) correspondent aux relations (1) et (2) du système $S[\underline{\epsilon}]$ (dont les solutions sont les éléments de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par définition), tandis que les relations (b_k) correspondent aux relations que l'on peut déduire par dérivation des relations $(3i)$. ■

Considérons maintenant l'automorphisme de $\mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2)$:

$$\widehat{P}\;:\;\mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2) \longrightarrow \mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2) \quad , \quad \mathcal{Y} \longmapsto M[\,\underline{\epsilon}\,]\,\mathcal{Y}\,.$$

On note $\mathcal{P}$ la composée $\widehat{P} \circ P$. Explicitement, ce morphisme est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\;:\;\mathcal{A}[\underline{\epsilon}] &\longrightarrow \mathcal{M}_n\,(\mathcal{O}_2) \\ \underline{\nu} &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k^{(j-1)}\,\nu_k^{[i-1]}\right)_{i,j=1}^{n} \end{aligned}$$

Alors, en posant $\omega = \omega[\underline{\epsilon}]$, il vient la

Proposition 5.1.4. — *Soit $\mathcal{Z} = \big(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_n\big) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$. La matrice $\mathcal{Z}$ est dans l'image de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par $\mathcal{P}$ si et seulement si elle vérifie les relations suivantes :*

$$(\alpha) \qquad \mathcal{Z}_{11} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_{21} = 0 \qquad (\text{dans } \mathcal{O}_2)\,,$$

$$(\beta_k) \qquad d\,\mathcal{Z}_k = \sum_{\sigma=0}^{k-1} \omega^{-1}\,\Theta^{[k,\sigma]}\,\omega\,d\,y\,\mathcal{Z}_{\sigma+1} - \omega^{-1}\,d\,\omega\,\mathcal{Z}_k + \omega^{-1}\mathcal{N}\,\omega\,\mathcal{Z}_{k+1} \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Démonstration : on établit sans difficultés que les relations (α) (resp. (β)) sont équivalentes au fait que la matrice $\mathcal{Y} = \omega^{-1}\,\mathcal{Z}$ vérifie les équations (a) (resp. (b_k)) de la Proposition 5.1.3. ■

Soit maintenant $\underline{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$. En dérivant la relation $S_1^{[0]}(\underline{\nu}) = 0$ par rapport à x, il vient :

$$\sum_{i=1}^n \partial_x(\epsilon_i)\,\nu_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i\,\nu_i^{[1]} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad S_1^{[1]}(\underline{\nu}) = -\sum_{i=1}^n \partial_x(\epsilon_i)\,\nu_i\,. \tag{1}$$

De même, en dérivant par rapport à y, on obtient :

$$S_2^{[1]}(\underline{\nu}) = -\sum_{i=1}^n \big(\partial_y(\epsilon_i) + \epsilon_i\,\partial_x(\epsilon_i)\big)\,\nu_i\,. \tag{2}$$

Plus généralement, en suivant le schéma décrit dans [**Pa 38**], on montre que pour $\underline{\nu} \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$, k variant de 1 à $n-1$ et q de 1 à $k+1$, on peut exprimer $S_q^{[k]}(\underline{\nu})$ comme combinaison linéaire en les $\nu_i^{[\sigma]}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\sigma = 0, \dots, k$:

Proposition 5.1.5. — *Il existe des fonctions $P_{q,i}^{[k,\sigma]} \in \mathcal{O}_2$ telles que pour tout $\underline{\nu} \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$, on ait*

$$S_q^{[k]}(\underline{\nu}) = \sum_{\substack{i=1..n \\ \sigma=0..k-1}} P_{q,i}^{[k,\sigma]}\,\nu_i^{[\sigma]} \qquad (\text{pour } k = 1, \dots, n-1,\ q = 1, \dots, k+1).$$

Ces fonctions $P_{q,i}^{[k,\sigma]}$ sont des expression polynomiales universelles en les ϵ_i et leurs dérivées partielles d'ordre plus petit que k. Elles satisfont les relations de récurrence suivantes :

- $P_{1,i}^{[1,0]} = -\partial_x(\epsilon_i)$
- $P_{2,i}^{[1,0]} = -\partial_y(\epsilon_i) - \epsilon_i\,\partial_x(\epsilon_i)$
- $P_{k,i}^{[k-1,k-2]} = \epsilon_i\,P_{k-1,i}^{[k-2,k-3]} - \partial_y\,(\epsilon_i^{(k-1)}) - \epsilon_i^{(k-1)}\,\Theta_i^{[k-1,k-2]}$
- $P_{k,i}^{[k-1,0]} = \partial_y\big(P_{k-1,i}^{[k-2,0]}\big) + \sum_{t=0}^{k-3}\big(P_{k-1,i}^{[k-2,t]}\,\Theta_i^{[t+1,0]}\big) - \epsilon_i^{(k-1)}\,\Theta_i^{[k-1,0]}$
- $P_{k,i}^{[k-1,k-2]} = P_{k-1,i}^{[k-2,k-3]}\,\epsilon_i - \partial_y(\epsilon_i^{k-1}) - \epsilon_i^{k-1}\,\Theta_i^{[k-2,k-2]}$
- $P_{k,i}^{[k-1,\sigma]} = \partial_y\big(P_{k-1,i}^{[k-2,\sigma]}\big) + \epsilon_i\,P_{k-1,i}^{[k-2,\sigma-1]} + \sum_{t=\sigma}^{k-3}\big(P_{k-1,i}^{[k-2,t]}\,\Theta_i^{[t+1,\sigma]}\big) - \epsilon_i^{(k-1)}\,\Theta_i^{[k-1,\sigma]}$
- $P_{u,i}^{[\kappa,0]} = \partial_x(P_{u,i}^{[\kappa-1,0]})$
- $P_{u,i}^{[\kappa,s]} = \partial_x(P_{u,i}^{[\kappa-1,s]}) + P_{u,i}^{[\kappa-1,s-1]}$
- $P_{u,i}^{[\kappa,\kappa-1]} = P_{u,i}^{[\kappa-1,\kappa-2]} - \partial_x(\epsilon_i^u)$

avec les variations suivantes pour les indices $i, k, \sigma, u, \kappa, s$:

- $i = 1, \dots, n$
- $k = 3, \dots, n$
- $\sigma = 1, \dots, k-3$
- $u = 1, \dots, n-1$
- $\kappa = u, \dots, n$
- $s = 1, \dots, \kappa-2$

Remarque : si ces relations de récurrence sont compliquées, elles sont explicites et donc susceptibles d'être calculées (au pire, par un logiciel de calcul formel, quand n est trop grand).

Soit alors $\mathcal{Z} = \big(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n\big)$ dans l'image de $\mathcal{P}$: il existe $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ tel que $\mathcal{Z}_{ik} = S_i^{[k-1]}(\underline{\nu})$ pour $i, k = 1, \dots, n$. On pose

$$^{\mathsf{t}}\mathcal{Z}_1 = \big(0\,,\,0\,,\,Z_2^{[0]}\,,\,Z_3^{[0]}\,,\,\dots\,,\,Z_n^{[0]}\big) = \big(0\,,\,0\,,\,\underline{Z}^{[0]}\big)\,.$$

On a alors :

$$\nu_i = \sum_{q=3}^{n} \omega_{iq}\, Z_{q-1}^{[0]} \qquad \text{pour } \ i = 1, \dots, n.$$

Par les relations (1) et (2) établies à la page précédente, il vient

$$\mathcal{Z}_{22} = S_1^{[1]}(\underline{\nu}) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_x(\epsilon_i)\,\nu_i = \sum_{q=3}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} -\partial_x(\epsilon_i)\,\omega_{iq}\right) Z_{q-1}^{[0]}$$

$$\text{et} \qquad \mathcal{Z}_{32} = S_2^{[1]}(\underline{\nu}) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_x(\epsilon_i)\,\nu_i = \sum_{q=3}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} -\big(\partial_y(\epsilon_i) + \epsilon_i\,\partial_x(\epsilon_i)\big)\omega_{iq}\right) Z_{q-1}^{[0]}\,.$$

Introduisons les deux formes $\mathcal{O}$-linéaires sur ${\mathcal{O}_2}^{\{N\}}$:

$$L_1^{[1]}(\underline{S}) = L_1^{[1]}(\underline{S}^{[0]}) := \sum_{\substack{i=1\cdots n\\ q=3\cdots n}} \left(-\partial_x(\epsilon_i)\,\omega_{i\,q}\right) S_{q-1}^{[0]}\,,$$

$$L_2^{[1]}(\underline{S}) = L_1^{[1]}(\underline{S}^{[0]}) := \sum_{\substack{i=1\cdots n\\ q=3\cdots n}} \left(-\big(\partial_y(\epsilon_i) + \epsilon_i\,\partial_x(\epsilon_i)\big)\,\omega_{i\,q}\right) S_{q-1}^{[0]}\,.$$

De ce qui précède, on voit qu'il est possible d'exprimer les coefficients $\mathcal{Z}_{12}$, $\mathcal{Z}_{22}$ et $\mathcal{Z}_{32}$ de $\mathcal{Z} \in \mathrm{Im}(\mathcal{P})$ au moyen des formes linéaires qui viennent d'être introduites. On aura :

$$\mathcal{Z}_{12} = 0\,, \qquad \mathcal{Z}_{22} = L_1^{[1]}(\underline{Z}^{[0]}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_{32} = L_2^{[1]}(\underline{Z}^{[0]})\,.$$

Plus généralement, on va pouvoir exprimer les coefficients des éléments de l'image de $\mathcal{P}$ comme combinaison linéaire de N d'entre eux. De la Proposition 5.1.5, on déduit facilement la

Proposition 5.1.6. — *Il existe des formes $\mathcal{O}$-linéaires*

$$L_p^{[k]} \ : \ \mathcal{O}_2^{\{N\}} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \quad , \quad \underline{S} \longmapsto L_p^{[k]}\big(\underline{S}\big) = L_p^{[k]}\big(\underline{S}^{[k-1]}\big) = \sum_{\substack{\sigma=0,..,k-1\\ q=\sigma+2,..,n-1}} L_{p,\,q}^{[\,k,\sigma]}\, S_{q-1}^{[\sigma]}$$

(pour $k = 1, \dots, n-1$ et $p = 1, \dots, k+1$), telles que toute matrice $\mathcal{Z} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$ dans l'image de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par l'application $\mathcal{P}$ soit de la forme

$$\mathcal{Z} = \underline{\mathcal{L}}(\underline{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^{[1]} & L_1^{[2]} & \dots & L_1^{[n-3]} & L_1^{[n-2]} & L_1^{[n-1]} \\ \mathbf{S_2^{[0]}} & L_2^{[1]} & \dots & \dots & \dots & L_2^{[n-2]} & L_2^{[n-1]} \\ \mathbf{S_3^{[0]}} & \mathbf{S_3^{[1]}} & L_3^{[2]} & \dots & & \vdots & L_3^{[n-1]} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{S_4^{[2]}} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & L_{n-2}^{[n-3]} & \vdots & L_{n-2}^{[n-1]} \\ \mathbf{S_{n-1}^{[0]}} & \mathbf{S_{n-1}^{[1]}} & \dots & \dots & \mathbf{S_{n-1}^{[n-3]}} & L_{n-1}^{[n-2]} & L_{n-1}^{[n-1]} \end{pmatrix}$$

pour un certain $\underline{\mathbf{S}} \in \mathcal{O}_2^{\{N\}}$ *(on a noté* $L_p^{[k]}$ *pour* $L_p^{[k]}(\underline{\mathbf{S}})$ *afin d'alléger l'écriture).*
Les coefficients $L_{p,q}^{[k,\sigma]}$ *de ces formes s'écrivent* $R_{p,q}^{[k,\sigma]} \times D_n[\underline{\epsilon}]^{-1}$*, où* $R_{p,q}^{[k,\sigma]}$ *est un polynôme universel en les* ϵ_i *et leurs dérivées partielles d'ordre plus petit que* k*.*

On peut donc considérer l'application $\mathbb{C}$-linéaire injective $\underline{S} \mapsto \underline{\mathcal{L}}(\underline{S})$ de $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$, ainsi que l'application de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ dans $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$, notée $\underline{\mathcal{S}}$, qui à une relation abélienne $\underline{\nu}$ associe le N-uplet de fonctions holomorphes $\big(S_q^{[k]}(\nu)\big)$ (avec $k = 0, \ldots, n-3$ et $q = k+1, \ldots, n-1$).
On a alors un triangle commutatif d'espaces vectoriels où toutes les flèches sont des injections :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[\underline{\epsilon}] \arrow[rr, "\mathcal{P}"] \arrow[dr, "\underline{\mathcal{S}}"'] & & \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2) \\
& \mathcal{O}_2^{\{N\}} \arrow[ur, "\underline{\mathcal{L}}"'] &
\end{tikzcd}$$

À partir des équations sur $\mathcal{M}_n(\mathcal{O}_2)$ qui caractérisent l'image de $\mathcal{P}$ (nous parlons des équations (β_k) de la Proposition 5.1.4), on va construire une connexion sur $\mathbb{C}^{\{N\}}$, dont les sections holomorphes horizontales seront exactement l'image de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par $\underline{\mathcal{S}}$.

Soit $\underline{S} \in \mathcal{O}_2^{\{N\}}$ tel que son image par $\underline{\mathcal{L}}$ appartienne à l'image de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ par $\mathcal{P}$. Alors les vecteurs colonnes de $\underline{\mathcal{L}}(\underline{S})$ doivent vérifier les équations (β_k) de la Proposition 5.1.4. Au vu de la forme de $\underline{\mathcal{L}}(\underline{S})$ donnée par la Proposition 5.1.6, on déduit que pour $k = 0, \ldots, n-3$ et $q = k+2, \ldots, n$, les $S_q^{[k]}$ satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
d\,S_q^{[k]} = & \sum_{i=1..n} \Bigg(\sum_{\substack{\sigma=1..k \\ p=2..\sigma+2}} \epsilon_i^{q-1}\, \Theta_i^{[k+1,\sigma]}\, \omega_{ip}\, L_{p-1}^{[\sigma]}\big(\underline{S}^{(\sigma-1)}\big) + \sum_{\substack{\sigma=0..k \\ p=\sigma+3..n}} \epsilon_i^{q-1}\, \Theta_i^{[k+1,\sigma]}\, \omega_{ip}\, S_{p-1}^{[\sigma]} \Bigg)\, d\,y \\
(\mathsf{E}_q^{[k]}) \qquad & - \sum_{i=1..n} \Bigg(\sum_{p=2}^{k+2} \epsilon_i^{q-1}\, d\,\omega_{ip}\, L_{p-1}^{[k]}\big(\underline{S}^{(k-1)}\big) + \sum_{p=k+3}^{n} \epsilon_i^{q-1}\, d\,\omega_{ip}\, S_{p-1}^{[k]} \Bigg) \\
& + \sum_{i=1..n} \Bigg(\sum_{p=2}^{k+3} \epsilon_i^{q-1}\, (dx + \epsilon_i\, dy)\, \omega_{ip}\, L_{p-1}^{[k+1]}\big(\underline{S}^{(k)}\big) + \sum_{p=k+4}^{n} \epsilon_i^{q-1}\, (dx + \epsilon_i\, dy)\, \omega_{ip}\, S_{p-1}^{[k+1]} \Bigg).
\end{aligned}$$

Ces équations sont de la forme (avec $k = 0, \ldots, n-3$ et $q = k+2, \ldots, n$) :

$$d\,S_q^{[k]} = \sum_{\substack{\sigma=0..k+1 \\ p=k+3..n}} \Omega_{q-1,p-1}^{[k,\sigma]}\, S_{p-1}^{[\sigma]}\,,$$

où les $\Omega_{p-1,q-1}^{[k,\sigma]}$ sont des 1-formes holomorphes en $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont "calculables", puisqu'elles s'expriment à partir des formes $L_p^{[k]}$, elles-mêmes calculables à partir des récurrences explicites de la Proposition 5.1.5.

Les équations $(\mathsf{E}_q^{[k]})$ peuvent être condensées par l'équation matricielle

$$(\Diamond) \qquad\qquad d\,\underline{S} = \Omega\,\underline{S}$$

où Ω est la matrice à coefficients les $\Omega_{p-1,q-1}^{[k,\sigma]}$ (la forme de cette matrice va être précisée ci-dessous).

Insistons à nouveau sur le fait que la matrice Ω est calculable, et que ces coefficients sont des expressions universelles en les ϵ_i.

Cette matrice Ω définit un germe de connexion en l'origine sur le fibré trivial $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{\{N\}} \to \mathbb{C}^2$. Cette action agit comme une dérivation sur l'espace $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$ des germes en l'origine de sections de ce fibré.

Définition 5.1.7. — La connexion sur $\mathbb{C}^{\{N\}}$ définie par la matrice Ω est la *connexion de Pantazi* associée à $\underline{\epsilon}$. Elle sera notée $\nabla_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}}$. La matrice Ω sera la *matrice de Pantazi* associée à $\underline{\epsilon}$. Elle sera notée $\Omega_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}}$. La matrice $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}} = d\,\Omega_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}} + \Omega_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}} \wedge \Omega_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}}$ est la (matrice de la) *courbure de Pantazi* associée à $\underline{\epsilon}$.

Remarque : pour alléger les notations précédentes, on n'écrira pas la dépendance en $\underline{\epsilon}$ quand il n'y aura pas de risque de confusion.

Nous allons préciser un peu la forme de la (matrice de la) connexion de Pantazi. Regardons plus précisément la partie linéaire en $\underline{S}^{[k+1]}$ qui apparaît dans l'équation $(\mathsf{E}_q^{[k]})$. On a :

$$d\,S_{q-1}^{[k]} = \cdots \text{ termes en } \underline{S}^{(k)} \cdots \quad + \sum_{p=k+4}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^{q-1} \,(dx + \epsilon_i\, dy)\, \omega_{ip} \right) S_{p-1}^{[k+1]}$$

$$\text{soit} \quad d\,S_{q-1}^{[k]} = \cdots \text{ termes en } \underline{S}^{(k)} \cdots \quad + \sum_{p=k+4}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^{q-1}\, \omega_{ip} \right) dx\, S_{p-1}^{[k+1]} \cdots$$

$$\cdots + \sum_{p=k+4}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^{q}\, \omega_{ip} \right) dy\, S_{p-1}^{[k+1]} \,.$$

On va calculer les coefficients des $S_{p-1}^{[k+1]}$ dans cette expression (pour $p = k+4, \ldots, n$). On a le :

Lemme 5.1.8. — *Pour p et q variant de 1 à n, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^{n}\, \omega_{ip} = (-1)^{n+p}\, \sigma_{n+1-p}^{n} \qquad \textit{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^{(q-1)}\, \omega_{ip} = \begin{cases} 1 & \textit{si } \ p = q \\ 0 & \textit{si } \ p \neq q \end{cases} .$$

Démonstration : la seconde assertion est évidente, puisque par définition, les ω_{ip} sont les coefficients de l'inverse de la matrice $M[\,\underline{\epsilon}\,] = (\epsilon_i^{(q-1)})$. La première se vérifie directement en utilisant les expressions pour les ω_{ip} données par le Lemme 5.1.2. ■

De ce lemme, on déduit que pour k variant de 0 à $n-3$, les équations $(\mathsf{E}_q^{[k]})$ sont de la forme

$$d\,S_{k+2}^{[k]} = \cdots \text{ termes en } \underline{S}^{(k)} \cdots + d\,y\, S_{k+3}^{[k+1]}$$

$$d\,S_{q-1}^{[k]} = \cdots \text{ termes en } \underline{S}^{(k)} \cdots + d\,y\, S_{q}^{[k+1]} + d\,x\, S_{q-1}^{[k+1]} \qquad (q = k+4, \ldots, n-1)$$

$$\text{et} \quad d\,S_{n-1}^{[k]} = \cdots \text{ termes en } \underline{S}^{(k)} \cdots + d\,x\, S_{n-1}^{[k+1]} + \sum_{p=k+4}^{n} \left((-1)^{n+p}\, \sigma_{n+1-p}^{n} \right) d\,y\, S_{p-1}^{[k+1]} \,.$$

Ainsi la forme générale que prend la matrice de Pantazi est donnée par la Figure 1 page suivante.

On introduit l'application

$$\underline{\mathcal{V}} \,:\, \mathcal{O}_2^{\{N\}} \longrightarrow (\mathcal{O}_2)^n \quad , \quad \underline{S} \longmapsto \left(\sum_{q=3}^{n} \omega_{iq}\, S_{q-1}^{[0]} \right)_{i=1}^{n} .$$

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{\Omega^{[0,0]}_{2,2}\quad \Omega^{[0,0]}_{2,3}\quad \cdots\quad \cdots\quad \Omega^{[0,0]}_{2,n-1}}}^{n-2}\qquad \overbrace{\hphantom{d\,y\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{n-3}\qquad \overbrace{\hphantom{d\,y\quad \cdots\quad 0}}^{n-4}\qquad \overbrace{\hphantom{d\,y\quad 0}}^{n-5}\qquad \cdots \\
\left(\begin{array}{ccccc|cccc|ccc|cc|c}
\Omega^{[0,0]}_{2,2} & \Omega^{[0,0]}_{2,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[0,0]}_{2,n-1} & d\,y & 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & d\,x & \ddots & \ddots & \vdots & & & & & & \\
\vdots & & \Omega^{[0,0]}_{p,p} & & \vdots & \vdots & \ddots & d\,y & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & d\,x & d\,y & & & & & & \\
\Omega^{[0,0]}_{n-1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \Omega^{[0,0]}_{n-1,n-1} & (-1)^{n+1}\sigma^n_n\,dy & \cdots & \cdots & dx{+}\sigma^n_1\,d\,y & & & & & & \\
\Omega^{[1,0]}_{3,2} & \Omega^{[1,0]}_{3,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[0,0]}_{2,n-1} & \Omega^{[1,1]}_{3,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[1,1]}_{3,n-1} & dy & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & dx & \ddots & \vdots & & 0 & 0 \\
\vdots & & \Omega^{[1,0]}_{q,p} & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & dx & dy & & & \\
\Omega^{[1,0]}_{n-1,2} & \cdots & & \ddots & \Omega^{[1,0]}_{n-1,n-1} & \Omega^{[1,1]}_{n-1,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[1,1]}_{n-1,n-1} & *_{n-1} & \cdots & *_1 & & & \\
 & & & & & \Omega^{[1,1]}_{3,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[1,1]}_{3,n-1} & \Omega^{[1,2]}_{3,4} & \cdots & \Omega^{[1,2]}_{3,n-1} & d\,y & 0 & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & *_1 & 0 \\
 & & & & & \Omega^{[1,1]}_{n-1,3} & \cdots & \cdots & \Omega^{[1,1]}_{n-1,n-1} & \Omega^{[1,2]}_{n-1,4} & \cdots & \Omega^{[1,2]}_{n-1,n-1} & & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \ddots & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
*_1 = dx{+}\sigma^n_1\,dy \qquad \text{et} \qquad *_{n-1} = (-1)^{k+1}\,\sigma^n_{n+1-k}\,dy \quad \text{pour} \quad k = 2, \ldots, n\,.
$$

FIGURE 1. la forme générale de la matrice de Pantazi

On a alors le principal résultat de cette section :

Théorème 5.1.9. — *La restriction de l'application* $\underline{\mathcal{S}} : (\mathcal{O}_2)^n \to \mathcal{O}_2^{\{N\}}$ *établit un isomorphisme entre l'espace des relations abéliennes* $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ *et les éléments horizontaux pour la connexion de Pantazi. Son inverse est donnée par la restriction de l'application* $\underline{\mathcal{V}}$.

Démonstration : il est clair que l'application $\underline{\mathcal{S}}$ restreinte à $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ est injective et à valeurs dans les éléments de $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$ satisfaisant à l'équation ($\Diamond$), *i.e.* horizontaux pour la connexion de Pantazi (par définition de celle-ci). Reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit $\underline{S} \in \mathcal{O}_2^{\{N\}}$ vérifiant $d\,\underline{S} = \Omega_{\mathcal{P}}\,\underline{S}$. Montrons qu'alors l'élément $\underline{\nu} = \underline{\mathcal{V}}(\underline{S})$ de $(\mathcal{O}_2)^n$, premièrement, est bien une relation abélienne et, deuxièmement, est tel que $\underline{\mathcal{S}}(\underline{\nu}) = \underline{S}$.

Par construction, il est immédiat que les ν_i vérifient les relations

$$\nu_1 + \cdots + \nu_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \epsilon_1\,\nu_1 + \cdots + \epsilon_n\,\nu_n = 0\,.$$

Ainsi $\underline{\nu}$ sera dans $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ si et seulement si on a $\partial_y(\nu_i) = \partial_x(\epsilon_i\,\nu_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous préférerons écrire ces dernières conditions sous les formes différentielles suivantes :

$$d\left(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\,dy)\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Pour tout i plus petit que n, on a :

$$\begin{aligned}
& d\left(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\,dy)\right) = d\left(\left(\sum_{q=3}^{n} \omega_{iq}\,S_{q-1}^{[0]}\right)(dx + \epsilon_i\,dy)\right) \\
\text{soit}\quad & d\left(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\,dy)\right) = \sum_{q=3}^{n} d\left(\omega_{iq}\,S_{q-1}^{[0]}\right) \wedge (dx + \epsilon_i\,dy) + \sum_{q=3}^{n} \left(\omega_{iq}\,S_{q-1}^{[0]}\right) \partial_x(\epsilon_i)\,dx \wedge dy \\
\text{d'où}\quad & d\left(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\,dy)\right) = \sum_{q=3}^{n} \left(d\,\omega_{iq} \wedge (dx + \epsilon_i\,dy)\right) S_{q-1}^{[0]} + \sum_{q=3}^{n} \left(\omega_{iq}\,\partial_x(\epsilon_i)\,dx \wedge dy\right) S_{q-1}^{[0]} \\
& \qquad + \sum_{q=3}^{n} \omega_{iq}\,d\,S_{q-1}^{[0]} \wedge (dx + \epsilon_i\,dy) \\
\text{soit}\quad & d\left(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\,dy)\right) = \sum_{q=3}^{n} A_i^q\,S_{q-1}^{[0]} + \sum_{q=4}^{n} B_i^q\,S_{q-1}^{[1]}\,,
\end{aligned}$$

où les A_i^q et les B_i^q sont certaines 2-formes dépendant de $\underline{\epsilon}$ que l'on va expliciter.

L'hypothèse que $\underline{S}$ est horizontal pour $\nabla_{\mathcal{P}}$ implique les relations suivantes : (avec $q = 4, \ldots, n-1$)

$$\begin{aligned}
d\,S_2^{[0]} &= \sum_{p=3}^{n} \Omega_{2,p-1}^{[0,0]}\,S_{p-1}^{[0]} + d\,y\,S_3^{[1]} \\
d\,S_{q-1}^{[0]} &= \sum_{p=3}^{n} \Omega_{q-1,p-1}^{[0,0]}\,S_{p-1}^{[0]} + d\,x\,S_{q-1}^{[1]} + d\,y\,S_q^{[1]} \\
\text{et}\qquad d\,S_{n-1}^{[0]} &= \sum_{p=3}^{n} \Omega_{n-1,p-1}^{[0,0]}\,S_{p-1}^{[0]} + d\,x\,S_{n-1}^{[1]} + \sum_{p=4}^{n} \left((-1)^{n+p}\,\sigma_{n+1-p}^{n}\right) d\,y\,S_{p-1}^{[1]}\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\sum_{q=4}^{n} B_i^q\, S_{q-1}^{[1]} = \sum_{q=4}^{n-1} \omega_{iq} \left(d\,x\, S_{q-1}^{[1]} \;+\; d\,y\, S_q^{[1]} \right) \wedge (dx + \epsilon_i\, dy) \;+\; \omega_{i3}\, d\,y\, S_3^{[1]} \wedge (dx + \epsilon_i\, dy)$$

$$+\; \omega_{in} \left(d\,x\, S_{n-1}^{[1]} \;+\; \sum_{p=4}^{n} \left((-1)^{n+p}\, \sigma_{n+1-p}^{n} \right) d\,y\, S_{p-1}^{[1]} \right) \wedge (dx + \epsilon_i\, dy)$$

soit
$$\sum_{q=4}^{n} B_i^q\, S_{q-1}^{[1]} = -\omega_{i3}\, S_3^{[1]}\, dx \wedge dy \;+\; \sum_{q=4}^{n-1} \omega_{iq} \left(\epsilon_i\, S_{q-1}^{[1]} - S_q^{[1]} \right) dx \wedge dy$$

$$+\; \omega_{in}\, \epsilon_i\, S_{n-1}^{[1]}\, dx \wedge dy \;-\; \sum_{p=4}^{n} \left((-1)^{n+p}\, \omega_{in}\, \sigma_{n+1-p}^{n} \right) S_{p-1}^{[1]}\, dx \wedge dy$$

d'où
$$\sum_{q=4}^{n} B_i^q\, S_{q-1}^{[1]} = \sum_{q=4}^{n} \left(\omega_{iq}\, \epsilon_i - \omega_{iq-1} - \; (-1)^{n+q}\, \sigma_{n+1-q}^{n}\, \omega_{in} \right) S_{q-1}^{[1]}\, d\,x \wedge d\,y\,.$$

On a donc des expressions explicites pour les coefficients B_i^q. Pour les calculer, on utilise le

Lemme 5.1.10. — *Pour tout i et q variant entre 1 et n et 2 et n (respectivement), on a*

$$\omega_{iq}\, \epsilon_i - \omega_{iq-1} - \; (-1)^{n+q}\, \sigma_{n+1-q}^{n}\, \omega_{in} = 0\,.$$

Démonstration : par les expressions des coefficients ω_{ij} données par le Lemme 5.1.2, il vient que les relations ci-dessus sont équivalentes aux relations évidentes (avec $i = 1, \ldots, n$ et $q = 2, \ldots, n$) :

$$\sigma_{n-q}^{n-1}[\underline{\epsilon}_{\widehat{i}}]\epsilon_i + \sigma_{n+1-q}^{n-1}[\underline{\epsilon}_{\widehat{i}}] = \sigma_{n+1-q}^{n}[\underline{\epsilon}]\,.$$

Le lemme est donc prouvé. ■

Il découle de ce lemme que tout les B_i^q sont nuls, et on a donc $\sum_{q=4}^{n} B_i^q\, S_{q-1}^{[1]} = 0$.

On en déduit que, quel que soit $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$d\left(\nu_i\, (dx + \epsilon_i\, dy) \right) = \sum_{q=3}^{n} A_i^q\, S_{q-1}^{[0]}\,.$$

De même, en calculant les formes A_i^q explicitement, on obtient qu'elles sont toutes nulles. On en déduit que $d\,(\nu_i\,(dx + \epsilon_i\, dy)) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ ce qui implique que $\underline{\nu} = \underline{\mathcal{V}}(\underline{S})$ est bien un élément de $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$. Il reste à montrer que $\widehat{\underline{S}} = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\nu})$ est bien le $\underline{S}$ initial.

Comme $\nu \in \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$, $\widehat{\underline{S}}$ est horizontal pour $\nabla_{\mathcal{P}}$. Donc $\underline{\Sigma} = \widehat{\underline{S}} - \underline{S}$ l'est également, puisque l'espace des sections horizontales pour la connexion de Pantazi est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_2^{\{N\}}$. D'autre part, par construction de $\underline{\nu}$, il est clair que $\Sigma_p^{[0]} = 0$ pour $p = 2, \ldots, n-1$. Or on a le

Lemme 5.1.11. — *Si $\underline{\mathsf{S}}$ tel que $\underline{\mathsf{S}}^{[0]} = 0$ est horizontal pour la connexion de Pantazi, alors $\underline{\mathsf{S}} = 0$.*

Démonstration : c'est immédiat, vu la forme des équations $(\mathsf{E}_q^{[k]})$ (dont les solutions sont les sections horizontales pour la connexion de Pantazi, par définition). ■

On en déduit que $\underline{\Sigma} = 0$, soit que $\underline{S} = \underline{\mathcal{S}}\left(\underline{\mathcal{V}}(\underline{S}) \right)$. Cela prouve que $\underline{\mathcal{S}}$ est surjective, ce qui termine la démonstration du Théorème 5.1.9. ■

Le Théorème 5.1.9 redonne immédiatement la borne de Bol sur le rang :

Corollaire 5.1.12. — *L'espace $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}]$ est de dimension au plus $N = (n-1)(n-2)/2$.*

Mais elle donne aussi un critère nécessaire et suffisant pour que cette borne soit atteinte :

Corollaire 5.1.13. — *Le tissu $\mathcal{W}[\,\underline{\epsilon}\,]$ est de rang maximal ssi la courbure de Pantazi $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}^{[\underline{\epsilon}]}$ est nulle.*

Remarque : la condition nécessaire et suffisante caractérisant les tissus de rang maximal donnée par ce corollaire correspond à l'annulation de tous les coefficients d'une matrice $N \times N$ de 2-formes. Il y a, a priori, N^2 coefficients. La condition obtenue par Hénaut correspond à l'annulation de seulement N coefficients d'une certaine matrice de courbure. Le lien entre les deux conditions ne semble donc pas clair, à première vue. Une explication naïve serait que, de façon générale, la matrice de courbure de Pantazi soit de rang 1. C'est bien ce qui semble se produire. Il apparaît même que seule la dernière ligne de cette matrice n'est pas identiquement nulle. Et donc la condition nécessaire et suffisante de Hénaut et celle obtenue dans notre reformulation de l'approche de Pantazi semblent avoir des formes quasi-identiques.

Ainsi, *bien que cela ne soit pas prouvé en toute généralité, il semble que la matrice de la courbure de Pantazi soit toujours de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{K}_2^{[0]} & \mathcal{K}_3^{[0]} & \dots & \mathcal{K}_{n-1}^{[n-3]} \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y$$

On renvoie à la section 5.1.2 pour davantage de précisions.

Décrivons maintenant la condition caractérisant les tissus de rang maximal donnée dans [**Pa 38**]. Avec notre formalisme, on a seulement pu montrer qu'elle était nécessaire.

Soit donc fixé $\underline{\epsilon}$ définissant un germe de n-tissu en l'origine. Par la Proposition 5.1.5, il existe des coefficients dépendant des ϵ_i tels que, pour tout $\underline{\nu} \in \mathcal{A}[\,\underline{\epsilon}\,]$, on ait

$$(\spadesuit) \qquad S_n^{[n-1]}(\,\underline{\nu}\,) = \sum_{i=1..n} \epsilon_i^n\, \nu_i^{[n-1]} = \sum_{\substack{i=1..n \\ \sigma=0..n-2}} P_{n,\,i}^{[n-1,\sigma]}\, \nu_i^{[\sigma]}\,.$$

D'autre part, pour $i = 1, \dots, n$ et $k = 0, \dots, n-1$, si $\underline{S} = \underline{\mathcal{S}}(\,\underline{\nu}\,)$, on a :

$$\nu_i^{[k]} = \sum_{p=2..k+2} \omega_{ip}\, L_p^{[k]}(\,\underline{S}^{[k-1]}\,) \;+\; \sum_{p=k+3..n} \omega_{ip}\, S_{p-1}^{[k]}$$

$$\text{soit} \qquad \nu_i^{[k]} = \sum_{\substack{\sigma=0..k \\ p=\sigma+3..n}} \mathcal{N}_{i,p}^{[k,\sigma]}\, S_{p-1}^{[\sigma]}$$

où les $\mathcal{N}_{i,p}^{[k,\sigma]}$ sont des expressions rationnelles universelles en les ϵ_k et leurs dérivées partielles, qui sont "calculables" (puisqu'elles peuvent s'exprimer à partir des ω_{ij} et des $L_{p,q}^{[k,\sigma]}$). En injectant cela dans ($\spadesuit$), on obtient la relation suivante entre les composantes de $\underline{S}$:

$$\sum_{\substack{\sigma=0..n-2 \\ \tau=0...\sigma}} \sum_{\substack{i=1..n \\ p=\tau+3..n}} P_{n,\,i}^{[n-1,\sigma]}\, \mathcal{N}_{i,p}^{[\sigma,\tau]}\, S_{p-1}^{[\tau]} \;-\; \sum_{\sigma=0..n-1} \sum_{\substack{i=1..n \\ p=k+3..n}} \epsilon_i^n\, \mathcal{N}_{i,\,p}^{[n-1,\sigma]}\, S_{p-1}^{[\sigma]} \;= 0\,.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$(\mathcal{P}) \qquad \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{p=k+3}^{n} \mathcal{P}_{p-1}^{[k]}[\,\underline{\epsilon}\,]\, S_{p-1}^{[k]} = 0\,,$$

où les $\mathcal{P}_{p-1}^{[k]}[\underline{\epsilon}]$ sont encore des expressions (universelles, rationnelles et calculables) en les ϵ_i et leurs dérivées partielles. De ce qui précède vient alors immédiatement la

Proposition 5.1.14. — *Les sections $\underline{S}$ horizontales pour $\nabla_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}}$ vérifient la relation* $(\mathcal{P})$.

On pose alors la

Définition 5.1.15. — Les coefficients qui apparaissent dans la relation $(\mathcal{P})$ sont les *coefficients de Pantazi* associés à $\underline{\epsilon}$. On les note $\mathcal{P}_q^{[k]}[\underline{\epsilon}]$ (ou $\mathcal{P}_q^{[k]}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté).

De la proposition précédente, on déduit le

Corollaire 5.1.16. — *Une condition nécessaire pour que $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ soit de rang maximal est que les coefficients de Pantazi $\mathcal{P}_q^{[k]}[\underline{\epsilon}]$ associés à $\underline{\epsilon}$ soient tous identiquement nuls.*

Démonstration : si ces coefficients $\mathcal{P}_q^{[k]}[\underline{\epsilon}]$ ne sont pas tous nuls, alors on peut exprimer une certaine composante de $\underline{S}$ comme combinaison linéaire homogène (à coefficients dans $\mathcal{O}_2$) des autres, cela pour toute section $\underline{S}$ horizontale pour la connexion de Pantazi (car ces sections satisfont la relation $(\mathcal{P})$). Il est clair que, dans ce cas, la dimension de l'espace de ces sections est strictement plus petite que N, et donc $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ ne peut pas être de rang maximal. La contraposée de cette implication est exactement l'énoncé du Corollaire 5.1.16, qui se trouve ainsi démontré. ■

Un point important est que ces coefficients sont calculables dans la pratique. Dans l'appendice (en A.2.2), on donne un code Maple qui permet de les calculer à partir des ϵ_i.

Mais il semble difficile d'obtenir une formule théorique générale donnant les $\mathcal{P}_q^{[k]}$ en fonction de $\underline{\epsilon}$: on arrive très vite à manipuler des expressions extrêmement compliquées. Cependant N. Mihăileanu (dans la note [**Mi 41**]) a réussi à déterminer le coefficient $\mathcal{P}_{n-1}^{[n-3]}$ dans le cas le plus général (par un calcul explicite, qu'il ne détaille d'ailleurs pas). Cela nous donne la

***Proposition 5.1.17* (Mihăileanu)**. — *La 2-forme $\mathcal{P}_{n-1}^{[n-3]}[\underline{\epsilon}]\,dx \wedge dy$ est égale à la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus de $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$:*

$$\mathcal{P}_{n-1}^{[n-3]}[\underline{\epsilon}]\,dx \wedge dy = \sum_{\mathcal{W}(3) < \mathcal{W}[\underline{\epsilon}]} \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}(3)}\,.$$

On en déduit le

Corollaire 5.1.18. — *Une condition nécessaire pour qu'un tissu soit de rang maximal est que la somme des courbures de Blaschke de ses sous-3-tissus soit identiquement nulle.*

Cette dernière condition est facilement vérifiable dans la pratique, puisqu'on sait maintenant calculer explicitement la courbure de Blaschke d'un 3-tissu à partir des fonctions (ou des formes) qui le définissent (on peut utiliser la formule de la dernière remarque de 5.1.2.1 ci-dessous ou bien celle de la Proposition 5.2.3, ou bien encore [**Hé 00**]).

Pour les tissus linéaires, la condition de ce corollaire est également suffisante (cf. Théorème 5.1.21).

Remarque : une question intéressante est de savoir si la condition de Pantazi est également suffisante et quel est le lien avec la condition nécessaire et suffisante donnée par le Corollaire 5.1.13.

En fait, *bien que cela ne soit pas prouvé en toute généralité, il semble que la matrice de courbure de Pantazi soit toujours de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{P}_2^{[0]} & \mathcal{P}_3^{[0]} & \dots & \mathcal{P}_{n-1}^{[n-3]} \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

où les $\mathcal{P}_q^{[k]}$ sont les coefficients de Pantazi associés à $\underline{\epsilon}$.

5.1.2. Etude explicite des cas $n = 3, 4, 5$. — Dans cette partie, on donne les calculs explicites des coefficients de la matrice de courbure de Pantazi pour les n-tissus, quand n vaut $3, 4$ ou 5. Dans chacun de ces cas, il semble que seule la dernière ligne de cette matrice soit non nulle et que les coefficients de cette ligne soient les coefficients de Pantazi. Par un calcul formel, on a pu établir cette proposition pour les 3-tissus et les 4-tissus.

5.1.2.1. Cas des 3-tissus. — On se donne $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, définissant un germe de 3-tissu $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ en l'origine de $\mathbb{C}^2$. Pour $\underline{S} = S \in \mathcal{O}_2$ on aura

$$L(\,S\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^{[1]}(S) & L_1^{[2]}(S) \\ S & L_2^{[1]}(S) & L_2^{[2]}(S) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\,\mathcal{O}_2\,)\,.$$

Comme il n'y a qu'une unique variable, S, les formes linéaires de Pantazi de cette matrice vont s'écrire : une fonction dépendant de $\underline{\epsilon}$ fois S. En se permettant un abus d'écriture, on a :

$$L_1^{[1]}(S) = L_1^{[1]} \times S := \Big(-\sum_{k=1}^{3} \partial_x(\epsilon_k)\,\omega_{k3} \Big)\, S\,,$$

$$L_2^{[1]}(S) = L_2^{[1]} \times S := \Big(-\sum_{k=1}^{3} \big(\partial_y(\epsilon_k) + \partial_x(\epsilon_k)\epsilon_k\big)\,\omega_{k3} \Big)\, S\,,$$

$$\text{et} \quad L_1^{[2]}(S) = L_1^{[2]} \times S := \Big(-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=2}^{3} 2\,\partial_x(\epsilon_k)\,\omega_{kq}\,L_{q-1}^{[1]} - \sum_{k=1}^{3} \partial_{xx}^2(\epsilon_k)\;\omega_{k3} \Big)\, S\,.$$

On obtient alors que la matrice $L(S)$ vérifie les relations de la Proposition 5.1.4 si et seulement si S satisfait l'équation différentielle $d\,S = \Omega\,S = \big(\,\Omega_1\,dx + \Omega_2\,dy\,\big)\,S$ avec

$$\Omega_1 = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_k^2\,\partial_x(\omega_{k3}) + L_2^{[1]} \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_k^2 \Big(\partial_x(\epsilon_k)\,\omega_{k3} - \partial_y(\omega_{k3}) \Big) + \sigma_1^3\,L_2^{[1]} - \sigma_2^3\,L_1^{[1]}\,.$$

On en déduit la courbure de Pantazi associée à $\underline{\epsilon}$:

$$(\blacklozenge) \qquad \mathcal{K}_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}} = d\,\Omega + \Omega \wedge \Omega = d\,\Omega = \big(\partial_x(\Omega_2) - \partial_y(\Omega_1)\big)\,dx \wedge dy\,.$$

Proposition 5.1.19 (Maple). — *Pour les 3-tissus, les courbures de Blaschke et de Pantazi coïncident. De plus, cette courbure s'écrit $\mathcal{P}_2^{[0]}\,dx \wedge dy$, où $\mathcal{P}_2^{[0]}$ est le coefficient de Pantazi de la Définition 5.1.15.*

Démonstration : dans [**Hé 00**], il est donné une méthode explicite pour construire la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ en fonction de $\underline{\epsilon}$. En calculant formellement cette expression (sur Maple) et en la comparant avec la formule ($\blacklozenge$), on obtient la proposition. ■

Remarque : supposons que $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ soit de rang 1. On a donc $d\,\Omega = 0$. Le lemme de Poincaré implique alors qu'il existe $\gamma \in \mathcal{O}_2$, unique modulo l'addition d'une constante, telle que $d\,\gamma = \Omega$. Pour fixer γ, on supposera que $\gamma(0) = 0$. Alors l'espace des solutions de l'équation $d\,S = \Omega\,S$ est engendré par e^γ. L'isomorphisme identifiant les solutions de cette équation avec les relations abéliennes de $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ est ici complètement explicite : si l'on pose

$$\nu_i = \omega_{i3}\,e^\gamma = (-1)^{(i+1)}\,\frac{D_2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{i}}\,]}{D_3[\,\underline{\epsilon}\,]}\,e^\gamma \qquad \text{pour } i = 1,2,3,$$

alors on a la relation abélienne $\nu_1(dx + \epsilon_1\,dy) + \nu_2(dx + \epsilon_2\,dy) + \nu_3(dx + \epsilon_3\,dy) = 0$.

Par cette remarque, on a voulu montrer, que même pour le cas classique des 3-tissus, l'approche de Pantazi, de par son caractère explicite, donne des précisions nouvelles sur la façon dont la courbure de Blaschke et les relations abéliennes sont liées.

Remarque : Mihăileanu obtient l'expression suivante de la courbure de Blaschke comme différentielle extérieure :

$$\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}[\,\underline{\epsilon}\,]} = d\left(\left[\sum_{\kappa=1,2,3}\frac{\sigma_1^2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]\,D_2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]}{2\,D_3[\,\underline{\epsilon}\,]}\,\partial_x(\epsilon_\kappa) - \sum_{\kappa=1,2,3}\frac{D_2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]}{D_3[\,\underline{\epsilon}\,]}\,\partial_y(\epsilon_\kappa)\right]dx \right.$$
$$\left. + \left[\sum_{\kappa=1,2,3}\frac{\sigma_2^2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]\,D_2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]}{D_3[\,\underline{\epsilon}\,]}\,\partial_x(\epsilon_\kappa) - \sum_{\kappa=1,2,3}\frac{D_2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]\,\sigma_1^2[\,\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}\,]}{2\,D_3[\,\underline{\epsilon}\,]}\,\partial_y(\epsilon_\kappa)\right]dy\right).$$

Si le tissu considéré est linéaire, les ϵ_i vérifient les équations $\epsilon_i\,\partial_x(\epsilon_i) = \partial_y(\epsilon_i)$ (pour $i = 1,2,3$), et la formule précédente se simplifie et devient :

$$\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}[\,\underline{\epsilon}\,]} = \partial^2_{xx}\Big(\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i\Big)\,dx \wedge dy\,.$$

5.1.2.2. Cas des 4-tissus. — On se donne $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$, définissant un germe de 4-tissu $\mathcal{W}[\,\underline{\epsilon}\,]$ en l'origine de $\mathbb{C}^2$. Pour $\underline{S} = (S_2^{[0]}, S_3^{[0]}, S_3^{[1]}) \in \mathcal{O}_2^{\{3\}}$ on aura :

$$L(\,\underline{S}\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^{[1]} & L_1^{[2]} & L_1^{[3]} \\ S_2^{[0]} & L_2^{[1]} & L_2^{[2]} & L_2^{[3]} \\ S_3^{[0]} & S_3^{[1]} & L_3^{[2]} & L_3^{[3]} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathcal{O}_2)\,.$$

On peut calculer explicitement les formes qui apparaissent dans cette matrice. On a par exemple

$$L_1^{[1]}(\,\underline{S}\,) = \sum_{p=3,4} L_{1,p-1}^{[1,0]}\,S_{p-1}^{[0]} = \sum_{p=3,4}\left(-\sum_{k=1}^{4}\partial_x(\epsilon_k)\,\omega_{kp}\right)\,S_{p-1}^{[0]}\,,$$
$$L_2^{[1]}(\,\underline{S}\,) = \sum_{p=3,4} L_{1,p-1}^{[1,0]}\,S_{p-1}^{[0]} = \sum_{p=3,4}\left(-\sum_{k=1}^{4}\big(\partial_y(\epsilon_k) + \epsilon_k\,\partial_x(\epsilon_k)\big)\,\omega_{kp}\right)\,S_{p-1}^{[0]}\,.$$

La matrice de Pantazi est de la forme

$$\Omega^{\underline{\epsilon}}_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \Omega_{2,2}^{[0,0]} & \Omega_{2,3}^{[0,0]} & d\,y \\ \Omega_{3,2}^{[0,0]} & \Omega_{3,3}^{[0,0]} & dx + \sigma_1^4 dy \\ \Omega_{3,2}^{[1,0]} & \Omega_{3,3}^{[1,0]} & \Omega_{3,3}^{[1,1]} \end{pmatrix}\,.$$

Ses coefficients sont donnés explicitement par (avec $p = 3, 4$) :

$$\Omega^{[0,0]}_{2,p-1} = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k^2 \left(\Theta_k^{[10]} \omega_{kp}\, dy - d\omega_{kp} \right) \; + \; L^{[1,0]}_{2,\,p}\, dx\,,$$

$$\Omega^{[0,0]}_{3,p-1} = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k^3 \left(\Theta_k^{[10]} \omega_{kp}\, dy - d\omega_{kp} \right) \; + \; \sigma_3^4\, L^{[1,0]}_{1,\,p}\, dy - \sigma_2^4\, L^{[1,0]}_{2,\,p}\, dy\,,$$

$$\Omega^{[1,0]}_{3,p-1} = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k^3 \left(\partial^2_{xx}\,(\epsilon_k)\, \omega_{kp}\, dy + \sum_{q=2,3} (\, 2\, \partial_x\,(\epsilon_k)\, \omega_{kq}\, dy - d\omega_{kq}\,)\, L^{[10]}_{q-1,p} \right)$$
$$+ \quad \sigma_3^4\, L^{[2,0]}_{1,p}\, dy \; - \; \sigma_2^4\, L^{[2,0]}_{2,p}\, dy + (dx + \sigma_1^4\, dy) L^{[2,0]}_{3,p}\,,$$

et $$\Omega^{[1,1]}_{3,3} = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k^3 \left(\Theta_k^{[10]} \omega_{k4}\, dy - d\omega_{k4} \right) \; + \; \sigma_3^4\, L^{[2,1]}_{1,4}\, dy \; - \; \sigma_2^4\, L^{[2,1]}_{2,4}\, dy + (dx + \sigma_1^4\, dy) L^{[2,1]}_{3,4}\,.$$

Proposition 5.1.20. — (Maple) *La courbure de Pantazi du 4-tissu $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ est de la forme*

$$\mathcal{K}^{[\underline{\epsilon}]}_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}^{[0]}_2 & \mathcal{P}^{[0]}_3 & \mathcal{P}^{[1]}_3 \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y\,,$$

où les coefficients $\mathcal{P}^{[k]}_p$ sont les coefficients de Pantazi associés à $\underline{\epsilon}$.

Démonstration : la preuve résulte d'un calcul formel sous Maple. ■

Dans ce cas, la condition de Pantazi est donc bien nécessaire **et** suffisante.

Exemple : pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1, 0\}$, considérons le 4-tissu $\mathcal{W}_q := \mathcal{W}(x, x-y, x-qy, x^2-y^2)$.
Le 4-uplet associé est alors $\underline{\epsilon}_q = (0, -1, -q, -y/x)$. En calculant avec les formules qui viennent d'être données, on peut calculer explicitement la courbure de Pantazi de $\mathcal{W}_q$.

On a :

$$\mathcal{K}^{\underline{\epsilon}_q}_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_3 & B_3 \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y$$

avec

$$A_2 = \frac{(1+q)^2 (y^3 + (q+1)x^3)(q(x+y) - 2y)}{x(qx-y)^3 y^3}$$
$$A_3 = \frac{(1+q)(y^3 + (q+1)x^3)(q(x+y) - 2y)}{x(qx-y)^3 y^3}$$
et $$B_3 = \frac{(1+q)(y-x)(q(x+y) - 2y)}{y^2 (qx-y)^2}\,.$$

Par le Corollaire 5.1.13, on déduit que $\mathcal{W}_q$ est de rang maximal 3 si et seulement si q vaut -1.

5.1.2.3. Cas des 5-tissus. — On se donne $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_5)$, définissant un germe de 5-tissu $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$ en l'origine de $\mathbb{C}^2$. Pour $\underline{S} = (S_2^{[0]}, S_3^{[0]}, S_4^{[0]}, S_3^{[1]}, S_4^{[1]}, S_4^{[2]}) \in \mathcal{O}_2^{\{6\}}$ on aura :

$$L(\underline{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^{[1]} & L_1^{[2]} & L_1^{[3]} & L_1^{[4]} \\ S_2^{[0]} & L_2^{[1]} & L_2^{[2]} & L_2^{[3]} & L_2^{[4]} \\ S_3^{[0]} & S_3^{[1]} & L_3^{[2]} & L_3^{[3]} & L_1^{[4]} \\ S_4^{[0]} & S_4^{[1]} & S_4^{[2]} & L_4^{[3]} & L_4^{[4]} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathcal{O}_2)\,.$$

Si on peut calculer explicitement les formes qui apparaissent dans cette matrice, leurs expressions sont compliquées. En annexe, on donne des routines maple qui permettent de calculer ces formes. On rappelle la notation

$$L_p^{[k]}(\underline{S}) = \sum_{\substack{\sigma=0..k-1 \\ q=\Sigma+2..n-1}} L_{p,q-1}^{[k,\sigma]}\, S_{q-1}^{[\sigma]}\,.$$

La matrice de Pantazi est de la forme

$$\Omega_{\mathcal{P}}^{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \Omega_{2,2}^{[0,0]} & \Omega_{2,3}^{[0,0]} & \Omega_{2,4}^{[0,0]} & dy & 0 & 0 \\ \Omega_{3,2}^{[0,0]} & \Omega_{3,3}^{[0,0]} & \Omega_{3,4}^{[0,0]} & dx & dy & 0 \\ \Omega_{4,2}^{[0,0]} & \Omega_{4,3}^{[0,0]} & \Omega_{4,4}^{[0,0]} & -\sigma_2^5\, dy & dx + \sigma_1^5\, dy & 0 \\ \Omega_{4,2}^{[1,0]} & \dots & & \Omega_{3,4}^{[1,1]} & \Omega_{3,4}^{[1,2]} & dy \\ \Omega_{4,2}^{[1,0]} & \Omega_{4,3}^{[1,0]} & \dots & \dots & \Omega_{4,4}^{[1,2]} & dx + \sigma_1^5\, dy \\ \Omega_{4,2}^{[2,0]} & \Omega_{4,3}^{[2,0]} & \dots & \dots & \dots & \Omega_{4,4}^{[2,2]} \end{pmatrix}.$$

On peut déterminer explicitement les coefficients de cette matrice en fonction des composantes $L_{p,q-1}^{[k,\sigma]}$ des formes $L_p^{[k]}$. Par exemple, pour $p, q = 3, 4, 5$ et $a, b, r = 4, 5$, on a

$$\Omega_{p-1,q-1}^{[0,0]} = \sum_{k=1}^{5} \left(\epsilon_k^{(p-1)} \left(\Theta_k^{[10]} \omega_{kq}\, dy - d\omega_{kq} \right) + \sum_{s=2}^{3} \epsilon_k^{(p-1)} \left(dx + \epsilon_k\, dy \right) \omega_{ks}\, L_{s-1,q-1}^{[1,0]} \right),$$

$$\Omega_{r-1,q-1}^{[1,0]} = \sum_{k=1}^{5} \left(\epsilon_k^{(r-1)} \Theta_k^{[2,0]}\, \omega_{kq}\, dy + \sum_{s=2}^{3} \epsilon_k^{(r-1)} \left(\Theta_k^{[2,1]}\, \omega_{ks}\, dy - d\,\omega ks \right) L_{s-1,q-1}^{[1,0]} \right.$$
$$\left. + \sum_{s=2}^{4} \epsilon_k^{(r-1)} \left(dx + \epsilon_k\, dy \right) \omega_{ks}\, L_{s-1,q-1}^{[2,0]} \right),$$

$$\Omega_{a-1,b-1}^{[1,1]} = \sum_{k=1}^{5} \left(\epsilon_k^{(a-1)} \left(\Theta_k^{[2,1]}\, \omega_{kb}\, dy - d\,\omega_{kb} \right) + \sum_{s=2}^{4} \epsilon_k^{(a-1)} \left(dx + \epsilon_k\, dy \right) \omega_{ks}\, L_{s-1,b-1}^{[2,1]} \right),$$

$$\Omega_{4,4}^{[2,2]} = \sum_{k=1}^{5} \left(\epsilon_k^{4} \left(\Theta_k^{[3,2]}\, \omega_{k5}\, dy - d\,\omega_{k5} \right) + \sum_{s=2}^{5} \epsilon_k^{4} \left(dx + \epsilon_k\, dy \right) \omega_{ks}\, L_{s-1,4}^{[3,2]} \right).$$

On peut alors calculer la matrice de la courbure de Pantazi à partir des coefficients.

Dans absolument tous les cas étudiés (qu'ils aient été formels ou non), on obtient que la courbure

de Pantazi est exactement de la forme

$$(\clubsuit) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}_2^{[0]} & \mathcal{P}_3^{[0]} & \mathcal{P}_4^{[0]} & \mathcal{P}_3^{[1]} & \mathcal{P}_4^{[1]} & \mathcal{P}_4^{[2]} \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y\,.$$

Ce fait est établi, par un calcul formel sur maple, par exemple lorsque $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = -1$ avec ϵ_4 et ϵ_5 arbitraires.

Exemple : considérons le tissu $\mathcal{W}_\tau = \mathcal{W}\big(x, x+y, x-y, x+\tau\, y, x(x-y)\big)$ où τ est un paramètre. On a alors $\mathcal{W}_\tau = \mathcal{W}\big[\,\underline{\epsilon}(\tau)\,\big]$ avec $\underline{\epsilon}(\tau) = \big(0, 1, -1, \tau, x/(y-2x)\big)$.

On peut calculer sans difficulté la courbure de Pantazi associée. Celle-ci est de la forme ($\clubsuit$) ci-dessus. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{[1]}\big[\,\underline{\epsilon}(\tau)\,\big] &= \frac{4(1+3\tau)(7x^2+y^2-4xy)(\tau x^2+2\tau xy-\tau y^2+2x^2)x}{(x+2\tau x-\tau y)^3(3x-y)^3(2x-y)(x-y)} \\ \mathcal{P}_4^{[2]}\big[\,\underline{\epsilon}(\tau)\,\big] &= \frac{2(1+3\tau)(\tau x^{+}2\tau xy-\tau y^2+2x^2)}{(3x-y)^2(x-\tau y+2\tau x^2)}\,. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une condition nécessaire pour que le tissu $\mathcal{W}_\tau$ soit de rang maximal est que $\tau = -1/3$. Par un changement de variable évident, cela implique que pour que le 5-tissu

$$\mathcal{W}\big(x, y, x+y, x-t\,y, xy\big)$$

soit de rang maximal 6, il faut que t soit égal à -1. En fait cette condition est également suffisante, puisqu'on montrera en 5.2 que le tissu suivant est bien de rang 6 :

$$\mathcal{W}\big(x, y, x+y, x-y, xy\big)\,.$$

On verra plus loin qu'il est exceptionnel et non-équivalent au tissu de Bol.

5.1.3. Remarques, commentaires et questions. — Dans cette section, on prouve un théorème intéressant énoncé sans démonstration dans [**Pa 40**], et on pose certaines questions quant à l'ensemble des résultats obtenus par l'approche de Pantazi et leurs relations avec ceux de Hénaut.

5.1.3.1. Le cas particulier des tissus linéaires. — Le résultat suivant est seulement énoncé (en 3.) dans la seconde note de Pantazi :

Théorème 5.1.21. — *Soient n 1-formes $dx + \epsilon_1\, dy, \ldots, dx + \epsilon_n\, dy$ définissant un tissu linéaire $\mathcal{L}[\,\underline{\epsilon}\,]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{L}[\,\underline{\epsilon}\,]$ est algébrique.*
2. *$\mathcal{L}[\,\underline{\epsilon}\,]$ est de rang maximal.*
3. *$\mathcal{L}[\,\underline{\epsilon}\,]$ admet une relation abélienne dont aucune composante n'est triviale.*
4. *la somme des courbures de Blaschke des sous 3-tissus de $\mathcal{L}[\,\underline{\epsilon}\,]$ est identiquement nulle.*

Démonstration : le fait que les conditions (1), (2) et (3) soient équivalentes est très classique en géométrie des tissus (voir le chapitre 4). L'implication (2) $\Rightarrow$ (4) découle immédiatement du Corollaire 5.1.18.

Montrons que la condition (4) entraîne la (1). Si $\mathcal{L}[\underline{\epsilon}]$ est un tissu linéaire, alors chacun de ses sous-3-tissus l'est également, et on aura, d'après la dernière remarque de *5.1.2.1* :

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{i,j,k} = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \partial^2_{xx}\left(\sum_{\kappa=i,j,k} \epsilon_\kappa\right) dx\wedge dy = (n-2)\left(\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{xx}(\epsilon_i)\right) dx\wedge dy$$

($\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{i,j,k}$ désigne la courbure de Blaschke du 3-tissu défini par les formes $dx+\epsilon_\alpha\, dy$ pour $\alpha=i,j,k$).

Si l'on suppose la condition (4) satisfaite, on aura donc la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{xx}(\epsilon_i) = 0\,.$$

Cette relation est justement celle qui permet d'appliquer un résultat d'algébrisation de type Reiss-inverse, qui implique que $\mathcal{L}[\underline{\epsilon}]$ est algébrique (voir [**GH**] pages 675-677, [**Wo 84**], [**He 95**] ainsi que le Théorème 1 de [**Hé 97**], qui généralise le théorème précédent en dimension plus grande). ■

5.1.3.2. Commentaires et questions. — On signale ici quelques points qui ne sont pas encore clairs et dont l'étude semble présenter un intérêt :

1. il existe donc trois caractérisations générales des tissus de rang maximal par un critère différentiel : celle de Hénaut, celle de Pantazi (qui à ce jour n'a pas été rigoureusement établie) et celle développée ici. La question essentielle qui se pose est celle des relations entre ces critères. On sait qu'ils coïncident pour les 3-tissus. Ce fait se généralise-t-il aux tissus d'ordre quelconque ? [(4)]

2. c'est en voulant établir rigoureusement les résultats de Pantazi que nous avons écrit la section 5.1. Mais il n'est toujours pas sûr que notre contruction corresponde bien à celle de Pantazi. Nous pensons néanmoins que c'est bien le cas. Un résultat qu'il faudrait prouver pour aller dans ce sens est que seule la dernière ligne de la matrice de la courbure de Pantazi est non nulle. Si cela peut être établi, il faudra ensuite prouver que ses coefficients sont bien les coefficients de Pantazi.

3. Hénaut a montré que la courbure qu'il associe aux relations abéliennes d'un 4-tissu est un invariant différentiel du tissu. A-t-on un résulat analogue pour la courbure de Pantazi ? Il serait aussi intéressant de savoir si cela se généralise aux tissus d'ordre quelconque.

4. le résultat de Mihăileanu fait apparaître que, pour tout n, le dernier coefficient de Pantazi $\mathcal{P}^{[n-3]}_{n-1}$ d'un n-tissu s'exprime à partir des coefficients $\mathcal{P}^{[0]}_2$ de ses sous-3-tissus. Une question naturelle est de savoir si cela se généralise aux autres coefficients de Pantazi : par exemple, pour $n\geq 4$, les coefficients $\mathcal{P}^{[n-4]}_k$ avec $k=n-2, n-1$ d'un n-tissu $\mathcal{W}$ peuvent-ils s'exprimer à partir des coefficients $\mathcal{P}^{[0]}_2$ et $\mathcal{P}^{[0]}_3$ des sous-4-tissus de $\mathcal{W}$?

5. les constructions de la courbure de Pantazi et des coefficients de Pantazi d'un tissu $\mathcal{W}$ demandent de connaitre un n-uplet $\underline{\epsilon}=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$ tel que $\mathcal{W}=\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$. On montre sans difficulté que ces constructions ne dépendent en fait que des polynômes symétriques $\sigma^n_k[\underline{\epsilon}]$. Un problème qui se pose est celui du calcul effectif de $\mathcal{K}^{[\underline{\epsilon}]}_{\mathcal{P}}$ et des $\mathcal{P}^{[\sigma]}_k$ à partir de ces polynômes symétriques.

---

(4) Nous avons établi la relation suivante entre la courbure de Hénaut K_2 et les coefficients de Pantazi d'un 4-tissu général : $\mathcal{P}^{[0]}_3 = K_2 + \mathcal{A}[\underline{\epsilon}]\times\mathcal{P}^{[1]}_3$ avec $\mathcal{A}[\underline{\epsilon}] = \Sigma_\kappa\,\epsilon_\kappa\, D_3[\underline{\epsilon}_{\hat{\kappa}}]\,\big(\epsilon_\kappa\partial_x(\epsilon_\kappa)+2\,\partial_y(\epsilon_\kappa)\big)/D_4[\underline{\epsilon}]$. Cela sugère la possibilité que les courbures de Hénaut s'expriment comme combinaisons linéaires des coefficients de Pantazi dans tous les cas.

5.2. Application de la méthode d'Abel à la caractérisation des tissus de rang maximal

Les résultats de Pantazi que l'on vient d'exposer donnent une méthode effective pour construire des polynômes "universels" $P_k^{[\sigma]} \in \mathbb{C}[X_{ab}^i]$ $(i = 1, ..., n,\ a, b \in \mathbb{N},\ a + b \leq \sigma + 1)$ tels que les tissus $\mathcal{W}\{dx + e^1 dy, \ldots, dx + e^d dy\}$ de rang maximal sont caractérisés par les équations :

$$P_k^{[\sigma]}(e^1, .., e^d, e_x^1, .., e_x^d, e_y^1, .., e_y^d, ...) = 0 \qquad (\sigma = 0, \ldots, n-3 \ \text{ et } \ k = \sigma + 2, \ldots, n-1)\,.$$

($P_k^{[\sigma]}$ est le numérateur du coefficient de Pantazi $\mathcal{P}_k^{[\sigma]}$ introduit en 5.1).
S'il est difficile d'obtenir une formule pour ces polynômes $P_k^{[\sigma]}$, on peut cependant les construire de façon inductive (cf. l'Appendice 9.2.2). Ainsi, pour d fixé, on peut construire (par ordinateur) les $P_k^{[\sigma]}(\underline{e})$ pour un $\underline{e}$ donné et vérifier si ces expressions sont nulles ou pas. On a donc un outil effectif performant pour vérifier si un tissu donné est de rang maximal.

Par contre, la complexité des expressions $P_k^{[\sigma]}(\underline{e})$ qui sont obtenues par le calcul est telle qu'il semble impossible, tant sur un plan pratique que théorique, d'entreprendre la détermination des tissus de rang maximal en cherchant à résoudre le système d'équations différentielles $P_k^{[\sigma]}(\underline{e}) = 0$.

Cette complexité peut s'illustrer en considérant l'exemple très simple des tissus notés $\mathcal{W}_Q = \mathcal{W}\{dx, dx+dy, dx-dy, dx+Qdy\}$, pour $Q \in \mathcal{O}_2$, où l'on a donc spécialisé de façon particulièrement élémentaire trois des 1-formes qui définissent ce tissu. La courbure de Pantazi de $\mathcal{W}_Q$ est de la forme

$$\frac{1}{(Q-1)^3(Q+1)^3Q^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_Q & B_Q \end{pmatrix} d\,x \wedge d\,y\,,$$

où A_Q et B_Q sont des polynômes en Q et ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} A_Q = {} & Q^6\big(Q_{xx}Q_x - 3Q_{yy}Q_x + Q_{xxy} - Q_{yyy}\big) + Q^5\big(-2Q_{xy}Q_x - Q_{xx}Q_y - 2Q_x^3 + 3Q_{yy}Q_y + 6Q_xQ_y^2\big) \\ & + Q^4\big(Q_{yy}Q_x - Q_{xx}Q_x - 2Q_{xy}Q_y - 2Q_{yyy} - 2Q_{xxy} - 2Q_x^2Q_y\big) + Q^3\big(2Q_{xx}Q_y + 4Q_xQ_{xy} \\ & - 4Q_{yy}Q_y - 2Q_xQ_y\big) + Q^2\big(-2Q_{xy} + 2Q_{yy}Q_x + Q_{yyy} + Q_{xxy} - 4Q_x^2Q_y\big) + Q\,\big(-2Q_xQ_{xy} \\ & - Q_{xx}Q_y + 2Q_y^2Q_x + Q_{yy}Q_y\big) + 2Q_x^2Q_y\ ; \\ B_Q = {} & \big[Q^4\big(-3Q_{yy} + Q_{xx}\big) + Q^3\big(2Q_{xy} + 6Q_y^2 - 2Q_x^2\big) + Q^2\big(3Q_{yy} - 6Q_yQ_x - Q_{xx}\big) \\ & - 2QQ_{xy} + 2Q_xQ_y\big]\,(Q^2-1)Q\,. \end{aligned}$$

La résolution du système d'équations différentielles $A_Q = B_Q = 0$ afin de déterminer les $\mathcal{W}_Q$ de rang maximal n'est pas faisable dans la pratique, même assisté d'un solveur d'équations différentielles.

Le plan de la section 5.2 est le suivant : en 5.2.1, on expose une méthode basée sur la méthode d'Abel (introduite au chapitre 2) pour obtenir des équations différentielles que U doit satisfaire afin que $\mathcal{W}\{U_1, \ldots, U_n, U\}$ soit de rang maximal.

Si cette approche est complètement élémentaire, elle se formule avec difficulté dans une situation générale. Par contre, si les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ont été particularisées et si le rang de $\mathcal{W}(U_1, \ldots, U_n)$ est connu, on pourra obtenir facilement des équations sur U_{n+1} pour que le rang de $\mathcal{W}(U_1, \ldots, U_{n+1})$ soit maximal. Cette méthode s'applique au cas par cas, et donne des équations plus simples que celles obtenues par l'approche de Pantazi.

En 5.2.2 et 5.2.3, on applique cette méthode pour caractériser les k-tissus de rang maximal, pour $k = 3$ et $k = 4$ respectivement. Au passage, on obtient une nouvelle formule particulièrement simple

pour la courbure de Blaschke d'un 3-tissu.

En 5.2.4, on applique cette méthode aux 5-tissus, dans deux cas particuliers :

1. on obtient un système différentiel explicite qui caractérise les fonctions U telles que le tissu $\mathcal{W}(x, y, x+y, x-y, U)$ soit de rang maximal. L'analyse de ce système fait l'objet du chapitre 6.
2. on obtient un système différentiel explicite qui caractérise les fonctions U telles que le tissu $\mathcal{W}(x, y, x+y, x/y, U)$ soit de rang maximal. On trouve encore de nouveaux tissus exceptionnels.

La section 5.2.5, qui est la dernière du chapitre, est à part. On y montre comment la méthode d'Abel permet d'obtenir de nouveaux invariants pour les tissus qui portent des relations abéliennes. Un exemple est traité de façon explicite.

5.2.1. La méthode. — Comme on l'a montré au deuxième chapitre, on peut, étant donné une équation fonctionnelle abélienne $(\mathcal{E})$, construire des équations différentielles qui admettront comme solutions les composantes des solutions de $(\mathcal{E})$. On explique maintenant comment on peut utiliser ces équations différentielles pour obtenir des conditions sur les intégrales premières qui définissent un tissu, pour que celui-ci soit de rang maximal. Il est cependant difficile de formuler un résulat général avec cette méthode. C'est pourquoi elle est juste esquissée ci-dessous. Dans les parties qui suivent, nous l'appliquerons à des cas particuliers pour obtenir des résultats précis et explicites.

Supposons que l'on se soit fixé $n \geq 2$ fonctions $U^1, U^2, \ldots, U^n \in \mathcal{O}_2$ qui définissent un tissu $\overline{\mathcal{W}}$ en l'origine. Supposons d'autre part que l'on connaisse le rang de ce tissu, que l'on note ϱ.

On cherche des conditions sur $U = U^{n+1}$ pour que le tissu $\mathcal{W}[U] := \mathcal{W}(U^1, \ldots, U^{n+1})$ soit de rang maximal. On note $\mathcal{E}[U]$ l'équation fonctionnelle $F_1(U^1) + F_2(U^2) + \cdots + F_{n+1}(U) = 0$ et $\Pi[U]$ l'espace vectoriel des composantes F_{n+1} de ces solutions :

$$\Pi[U] := \left\{ F \in \mathcal{O}_1 \;\middle|\; \exists\, F_1, \ldots F_n \in \mathcal{O}_1 \text{ t.q. } (F_1, \ldots, F_n, F) \text{ est solution de } \mathcal{E}[U] \right\}.$$

Si $\mathcal{W}[U]$ est de rang maximal $n(n-1)/2$, alors du théorème du rang vient l'égalité

$$\operatorname{rg} \mathcal{W}[U] = \operatorname{rg}\left[\overline{\mathcal{W}}\right] + \dim_{\mathbb{C}} \Pi[U] - 1\,,$$

d'où on tire

$$\dim_{\mathbb{C}} \Pi[U] = \gamma(n, \varrho) := \frac{1}{2} n(n-1) + 1 - \varrho \geq 0\,.$$

Remarquons que, quel que soit U, on a $\dim_{\mathbb{C}} \Pi[U] \leq \gamma(n, \varrho)$. Que cette inégalité soit en fait une égalité est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{W}[U]$ soit de rang maximal. On va utiliser cette condition pour obtenir des équations différentielles sur les U^i $(i = 1, \ldots, n+1)$.

Notons $X_i := U^i_y\, \partial_x - U^i_x\, \partial_y$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $X_U := U_y\, \partial_x - U_x\, \partial_y$.

En 2.1, on a montré comment construire un (germe d') opérateur différentiel linéaire $\mathbf{P}$ et des (germes de) fonctions méromorphes $\mathcal{A}_k$ (avec $M > 1$, $k = 1, \ldots, M$ et $\mathcal{A}_M \not\equiv 0$), tels que pour tout $G_1, \ldots, G_n, G \in \mathcal{O}_1$, on ait

$$(\bigstar) \qquad \mathbf{P}\left(G_1(U^1) + \cdots + G_n(U^n) + G(U)\right) = \mathcal{A}_1 G^{(1)}(U) + \cdots + \mathcal{A}_M G^{(M)}(U)\,.$$

La construction de cet opérateur différentiel fait apparaître qu'on a une écriture $\mathbf{P} = P_n P_{n-1} \ldots P_2 X_1$ où, pour $i = 2, \ldots, n$, P_i est un opérateur différentiel de la forme

$$P_i = \alpha^i_{p_i} X_i \ldots\ \alpha^i_2 X_i\ \alpha^i_1 X_i\,,$$

les α^i_k étant des expressions rationnelles en les $U^1, \ldots, U^{i-1}, U^i$ et leurs dérivées partielles.

Une condition nécessaire sur $U^1, .., U^n$ pour qu'il puisse exister U telle que $\mathcal{W}[U]$ soit de rang maximal est qu'on ait $M \geq \gamma(n, \varrho)$. L'étude de cette condition en général est très difficile. Dans la pratique cependant, on peut l'utiliser pour montrer que certains tissus ne sont pas de rang maximal.

On suppose maintenant que cette condition est satisfaite. Pour simplifier la discussion qui suit, on suppose en plus que $M = \gamma(n, \varrho)$. Par hypothèse, on a donc $\mathcal{A}_M \not\equiv 0$. On peut donc diviser par $\mathcal{A}_M$. Si on applique X_U au membre de droite de l'égalité ($\bigstar$) divisée par $\mathcal{A}_M$, on obtient :

$$X_U\left(\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_M}\,G^{(1)}(U) + \cdots + \frac{\mathcal{A}_{M-1}}{\mathcal{A}_M}\,G^{(M-1)}(U) + G^{(M)}(U)\right) = \sum_{k=1}^{M-1} X_U\big(\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}_M}\big)\,G^{(k)}(U)\,.$$

Si l'un des $X_U(\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_M)$ n'est pas identiquement nul, alors il est clair que $\dim_{\mathbb{C}} \Pi[U] < \gamma(n, \varrho)$ et le rang de $\mathcal{W}[U]$ ne peut être maximal. On a donc montré l'assertion suivante :

> *Une condition nécessaire pour que le rang de $\mathcal{W}[U]$ soit maximal est que les équations suivantes soient vérifiées :*
>
> $$(\blacklozenge) \qquad X_U\left(\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}_M}\right) = 0 \quad , \quad (k = 1, .., M)\,.$$

D'autre part, pour tout $G \in \mathcal{O}_1$, on a l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}\big(G(U)\big) = \alpha^n_{p_n} X_n \ldots \alpha^n_1 X_i \ldots \alpha^2_{p_2} \ldots \alpha^2_1 X_2 X_1\big(G(U)\big) = \mathcal{A}_1 G^{(1)}(U) + \cdots + \mathcal{A}_M G^{(M)}(U)\,.$$

Du fait que les α^j_k sont des fractions rationnelles en les U^i et leurs dérivées partielles, et puisque les coefficients des champs X_i sont les dérivées partielles des U^i, il vient que les coefficients $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_M$ sont également des expressions de ce type. On en déduit que la condition notée ($\blacklozenge$) ci-dessus est en fait un système différentiel rationnel en les U^i $(i = 1, \ldots, n+1)$ et leurs dérivées partielles, qui doit être nécessairement vérifié si $\mathcal{W}[U]$ est de rang maximal.

En général, les U^i étant fixées (pour $i = 1, \ldots, n$), on ne sait pas si le système différentiel ($\blacklozenge$) caractérise exactement les U telles que $\mathcal{W}[U]$ soit de rang maximal. Mais cela sera vérifié dans les cas plus particuliers que l'on va étudier ci-dessous.

Pour illustrer cette méthode, on traite maintenant un exemple général très simple.

On se donne n formes linéaires $L_1, L_2, \ldots, L_n$ linéairement indépendantes. Elles définissent un n-tissu en l'origine, formé de n-pinceaux de droites parallèles (*i.e.* les sommets de ces pinceaux sont sur la droite à l'infini). C'est un exercice facile de montrer que ce tissu est de rang maximal (cela découle également du fait que c'est un tissu algébrique).

Pour $i = 1, \ldots, n$, on note X_i un champ de vecteurs à coefficients constants tel que $X_i(L_i) = 0$.

On va appliquer la méthode exposée ci-dessus pour caractériser les $U \in \mathcal{O}_2$ tels que $\mathcal{W}(L_1, \ldots, L_n, U)$ soit de rang maximal. On a le lemme suivant, dont la preuve est immédiate :

Lemme 5.2.1. — *Soit $F \in \mathcal{O}_1$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{O}_1$ telles que $F_1(L_1) + \cdots + F_n(L_n) + F(U) = 0$.*
2. *dans $\mathcal{O}_2$, on a $X_1 X_2 \cdots X_n\big(F(U)\big) = 0$.*

Notons A_k les coefficients des $F^{(k)}$ qui apparaissent quand on calcule formellement $X_1..X_n\big(F(U)\big)$:

$$X_1 X_2 \cdots X_n\big(F(U)\big) = \sum_{k=1}^{n} A_k\, F^{(k)}(U)\,.$$

On remarquera que $A_n = X_1(U)\cdots X_n(U)$ et donc A_n n'est pas nul en l'origine, par hypothèse.

Si $X_U(A_k/A_n) = 0$, cela signifie que la fonction A_k/A_n, a priori de deux variables, ne dépend en fait que de la variable U. On en déduit que si $X_U(A_k/A_n) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$, alors l'espace des fonctions F telles que $X_1 \cdots X_n \big(F(U)\big) = 0$ est de dimension n. Par le Lemme 5.2.1, cela implique que le rang de $\mathcal{W}(L_1, \ldots, L_n, U)$ est maximal. Inversement, l'assertion ($\blacklozenge$) montre dans ce cas que ces annulations sont nécessaires pour que le rang soit maximal. On a donc montré la

Proposition 5.2.2. — *Le tissu $\mathcal{W}(L_1, \ldots, L_n, U)$ est de rang maximal si et seulement si U vérifie*

$$X_U\left(\frac{A_k}{A_n}\right) = 0 \qquad \textit{pour} \;\; k = 1, \ldots, n\,.$$

Dans ce qui suit, on utilise des versions explicites de cette proposition dans certains cas particuliers.

5.2.2. Application aux 3-tissus. — Donnons-nous U^1, U^2 et U^3 dans $\mathcal{O}_2$ s'annulant en l'origine et qui définissent un tissu en ce point. On note $\mathcal{W}$ le germe de tissu $\mathcal{W}\{U^1, U^2, U^3\}$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Soit Π_3 l'espace des composantes en U^3 des équations fonctionnelles abéliennes de $\mathcal{W}$:

$$\Pi_3 = \big\{\, F \in \mathcal{O}_1 \;\big|\; \exists\, F_1, F_2 \in \mathcal{O}_1 \text{ t.q. } F_1(U^1) + F_2(U^2) + F(U^3) = 0 \,\big\}\,.$$

Le tissu $\mathcal{W}$ est de rang 1 si et seulement si Π_3 est de dimension 2.

Pour $i = 1, 2, 3$, posons $\partial_i = U^i_y\, \partial_x - U^i_x\, \partial_y$. Alors :

$$\begin{array}{lll}
F \in \Pi_3 & \text{ssi} & \exists\, F_2 \in \mathcal{O}_1 \;\text{ t.q. }\; \partial_1\big(F_2(U^2) + F(U^3)\big) = 0\,, \\
\text{"} & \text{ssi} & \exists\, F_2 \in \mathcal{O}_1 \;\text{ t.q. }\; F_2'(U^2) + \dfrac{\partial_1(U^3)}{\partial_1(U^2)}\, F'(U^3) = 0\,, \\
\text{"} & \text{ssi} & \partial_2\left(\dfrac{\partial_1(U^3)}{\partial_1(U^2)}\, F'(U^3)\right) = 0\,, \\
\text{"} & \text{ssi} & \partial_2\left(\dfrac{\partial_1(U^3)}{\partial_1(U^2)}\right) F'(U^3) + \dfrac{\partial_1(U^3)\partial_2(U^3)}{\partial_1(U^2)}\, F^{(2)}(U^3) = 0\,.
\end{array}$$

L'hypothèse de position générale des tissus implique que $\partial_1(U^3)\partial_2(U^3)\partial_1(U^2)^{-1}$ ne s'annule pas en l'origine. On a donc

$$\Pi_3 = \big\{\, F \in \mathcal{O}_1 \;\big|\; \mathcal{K}\, F'(U^3) + F''(U^3) = 0 \,\big\} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{K} = \frac{\partial_1(U^2)}{\partial_1(U^3)\partial_2(U^3)} \times \partial_2\left(\frac{\partial_1(U^3)}{\partial_1(U^2)}\right)\,.$$

Il est clair que, si $\mathcal{K}$ n'est pas une fonction de U^3 seulement (*i.e.* si $\partial_3(\mathcal{K}) \neq 0$), toute fonction $F \in \Pi_3$ vérifiera $\partial_3(\mathcal{K})\, F'(U_3) = 0$ et donc sera constante. Ce qui impliquera que $\mathrm{rg}[\mathcal{W}] = 0$.

Ainsi Π_3 est de dimension 2 si et seulement si $\partial_3(\mathcal{K}) = 0$. L'équation différentielle $\partial_3(\mathcal{K}) = 0$ caractérise donc les 3-uplets (U^1, U^2, U^3) qui définissent un tissu de rang maximal 1.

On sait qu'un 3-tissu est de rang un si et seulement si sa coubure de Blaschke $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}\, dx \wedge dy$ s'annule, ce qui correspond à l'équation scalaire $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = 0$. On en déduit que $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ est identiquement nulle si et seulement si $\partial_3(\mathcal{K})$ est identiquement nulle. On peut s'attendre à ce que ces deux expressions soient liées. Par un calcul formel, on peut établir qu'elles sont égales, ce qui donne une nouvelle formule pour la courbure de Blaschke :

Proposition 5.2.3. — *La courbure de Blaschke du 3-tissu $\mathcal{W}\{U^1, U^2, U^3\}$ est donnée par*

$$\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}} = \partial_3(\mathcal{K})\, dx \wedge dy \qquad \textit{avec} \qquad \mathcal{K} = \frac{\partial_1(U^2)}{\partial_1(U^3)\,\partial_2(U^3)} \times \partial_2\left(\frac{\partial_1(U^3)}{\partial_1(U^2)}\right) \in \mathcal{O}_2\,.$$

Donc $\mathcal{W}(U^1, U^2, U^3)$ est de rang maximal 1 si et seulement si $\partial_3(\mathcal{K}) = 0$.

D'autres formules pour la courbure de Blaschke étaient déja connues (par exemple, voir [**Hé 00**] ou [**Mi 99**]). Bien que cette nouvelle expression ne soit pas symétrique en les U^i, son intérêt réside dans sa simplicité.

5.2.3. Application aux 4-tissus. — Les 4-tissus de rang maximal 3 sont bien compris puisque, d'après le théorème de Lie, ce sont les tissus équivalents aux tissus algébriques associés aux quartiques planes.Il peut cependant être intéressant (pour l'étude pratique des tissus par exemple) d'avoir un critère sur $U_1, U_2, \ldots, U_4$ pour que $\mathcal{W}(U_1, \ldots, U_4)$ soit de rang maximal. On peut en obtenir un par l'application de la méthode d'Abel.

Avec la Proposition 5.2.3, il est facile de vérifier si un 4-tissu $\mathcal{W}$ donné admet un sous-3-tissu de rang maximal. Supposons que cela soit le cas. Alors on peut supposer que $\mathcal{W}$ est de la forme $\mathcal{W}[U] := \mathcal{W}(x, y, x+y, U)$ pour $U \in \mathcal{O}_2$ (telle que $U(0) = 0$).

Le tissu $\mathcal{W}[U]$ est de rang maximal 3 si et seulement si l'espace

$$\Pi_4 := \left\{ F \in \mathcal{O}_1 \;\middle|\; \exists\, F_1, \ldots, F_3 \;\text{ t.q. }\; F_1(x) + F_2(y) + F_3(x+y) + F(U) = 0 \right\}$$

est de dimension 3. En posant $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$ et $X_3 = \partial_x - \partial_y$, par le Lemme 5.2.1, on sait que

$$F \in \Pi_4 \quad \text{si et seulement si} \quad X_3 X_2 X_1 \big(F(U)\big) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or} \quad X_3 X_2 X_1 \big(F(U)\big) &= X_3 X_2 \big(U_x F'(U)\big) \\
&= X_3 \big(U_{xy} F'(U) + U_y U_x F''(U)\big) \\
&= (U_{xxy} - U_{xyy})\, F'(U) + \big(U_{xy}(U_x - U_y) + (\partial_x - \partial_y)(U_x U_y)\big) F^{(2)}(U) \\
&\qquad + U_x U_y (U_x - U_y)\, F^{(3)}(U)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $F \in \Pi_4$ si et seulement si F satisfait

$$(*) \qquad A_U\, F'(U) + B_U\, F^{(2)}(U) + F^{(3)}(U) = 0$$

avec

$$A_U = \frac{U_{xxy} - U_{xyy}}{U_x U_y (U_x - U_y)} \qquad \text{et} \qquad B_U = \frac{U_{xy}(U_x - U_y) + (\partial_x - \partial_y)(U_x U_y)}{U_x U_y (U_x - U_y)}\,.$$

Pour que les solutions de l'équation $(*)$ forment un espace de dimension 3, il est nécessaire et suffisant que les coefficients A_U et B_U ne dépendent que de U. On pose $X_U = U_y\, \partial_x - U_x\, \partial_y$.

Proposition 5.2.4. — *Le tissu $\mathcal{W}(x, y, x+y, U)$ est de rang maximal 3 si et seulement si*

$$X_U\big(A_U\big) = 0 \qquad \textit{et} \qquad X_U\big(B_U\big) = 0\,.$$

Supposons maintenant le tissu donné sous la forme $\mathcal{W}(U^1, U^2, U, V)$. On pose

$$\begin{aligned}
\partial_i &= U^i_y\, \partial_x - U^i_x\, \partial_y \quad \text{pour} \quad i = 1, 2\,, & \delta_i &= (\partial_i U^j)^{-1}\, \partial_i \quad \text{pour} \quad \{i, j\} = \{1, 2\}\,, \\
\partial_F &= F_y\, \partial_x - F_x\, \partial_y \quad \text{pour} \quad F = U, V\,, & \delta_F &= (\partial_F G)^{-1}\, \partial_F \quad \text{pour} \quad \{F, G\} = \{U, V\}\,.
\end{aligned}$$

En supposant que $\mathcal{W}(U_1, U_2, U)$ est de rang 1, et en utilisant la même méthode que plus haut, on peut établir la

Proposition 5.2.5. — *Sous l'hypothèse que $\mathcal{W}(U_1, U_2, U)$ est de rang 1, le 4-tissu $\mathcal{W}(U_1, U_2, U, V)$ est de rang maximal si et seulement les équations suivantes sont vérifiées*

$$\partial_V \left(\delta_U \left(\frac{(\delta_2\delta_1)\,(U)}{\delta_1\,(U)\,\delta_2\,(U)} \right) \times \mathcal{J}^{-1} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_V \left(\left(\frac{(\delta_2\delta_1)(V)}{\delta_1(U)\,\delta_2(U)} + \delta_U \left(\frac{\delta_1(U)\,\delta_2(V)}{\delta_1(U)\,\delta_2(U)} \right) \right) \times \mathcal{J}^{-1} \right) = 0$$

avec $\mathcal{J} = \delta_1(V)\,\delta_2(V)/\big(\delta_1(U)\,\delta_2(U)\big) \neq 0$.

5.2.4. Application aux 5-tissus. — On applique la méthode d'Abel pour caractériser les 5-tissus qui admettent un sous-4-tissu parallélisable. La restriction à ce cas bien particulier donne une caractérisation simple d'une classe particulièrement intéressante de tissus de rang maximal qui ne sont pas tous algébriques.

Un 5-tissu qui admet un sous-4-tissu parallélisable est équivalent à un tissu de la forme

$$\mathcal{W}_{a,\,U} := \mathcal{W}\big(x, y, x+y, x+a\,y, U\big)\,,$$

avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et où U est un élément de $\mathcal{O}_2$ tel que le discriminant $\Delta := U_x\,U_y\,(U_x - U_y)\,(U_x - a\,U_y)$ ne s'annule pas en l'origine. Dans ce cas particulier, la Proposition 5.2.2 se formule de la façon suivante : posons $X_U = U_y\,\partial_x - U_x\,\partial_y$ ainsi que

$$\begin{aligned} A &= (\partial_x - \partial_y)\,\partial^2_{xy}\,(\,U\,) & \Omega_1 &= (\partial_x - a\,\partial_y)\,(\,A\,) \\ B &= (U_x - U_y)\,U_{xy} + (\partial_x - \partial_y)(U_x\,U_y) & \Omega_2 &= (U_x - a\,U_y) \times A + (\partial_x - \partial_y)\,(\,B\,) \\ C &= U_x\,U_y\,(U_x - U_y) & \Omega_3 &= (U_x - a\,U_y) \times B + (\partial_x - \partial_y)\,(\,C\,)\,. \end{aligned}$$

Alors on a la

Proposition 5.2.6. — *Le 5-tissu $\mathcal{W}_{a,\,U}$ est de rang maximal 6 si et seulement si la fonction U vérifie les équations différentielles*

$$X_U(\,\Omega_1/\Delta) = 0\,, \qquad X_U(\,\Omega_2/\Delta) = 0 \quad \text{et} \quad X_U(\,\Omega_3/\Delta) = 0\,.$$

Exemple : on vérifie sans difficulté que la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est solution de ce système différentiel. On en déduit que $\mathcal{W}(x, y, x+y, x-y, x^2+y^2)$ est de rang maximal. Cet exemple sera étudié plus en détail dans le chapitre suivant.

Il ne semble pas possible de résoudre directement le système différentiel précédent dans toute sa généralité afin de déterminer tous les 5-tissus de rang 6 qui admettent un sous-4-tissu parallélisable. On peut cependant chercher des solutions en demandant à U d'être d'une forme simple. Imposer que U s'écrive $U(x, y) = A(x) + B(y)$ est particulièrement intéressant, puisque cela implique immédiatement que $\operatorname{rg}[\mathcal{W}_{a,\,U}] \geq 4$, tout en simplifiant considérablement les équations. On renvoie au chapitre 6 pour la détermination des solutions sous ces hypothèses.

On peut appliquer la même méthode pour déterminer les tissus de rang maximal qui admettent un sous 4-tissu parallélisable, équivalent à un tissu formé de quatre pinceaux de droites dont exactement trois des sommets sont sur une même droite. Quitte à composer par un germe de biholomorphisme, on peut supposer qu'un tel (germe de) tissu est de la forme

$$\mathcal{W}[U] := \mathcal{W}\big(x, y, x+y, x/y, U\big)\,,$$

où U est un élément de $\mathcal{O}_2$ tel que le discriminant $\mathcal{D} := U_x U_y (U_x - U_y)(x\,U_x + y\,U_y)$ est non nul en un point base ω que l'on se sera fixé auparavant. Notons que ce point base doit être en dehors du lieu singulier $\Sigma := \{\, xy(x+y) = 0 \,\}$ du sous-tissu $P := \mathcal{W}(x, y, x+y, x/y)$ de $\mathcal{W}[U]$. On supposera

aussi que $U(\omega) = 0$.

Le tissu P est hexagonal donc de rang maximal. On en déduit que $\mathcal{W}[U]$ est de rang maximal 6 si et seulement l'espace Π_5 défini ci-dessous est de dimension 4 :

$$\Pi_5 := \left\{ G \in \mathcal{O}_1 \;\middle|\; \exists\, F_i \text{ holomorphe } (i = 1, \ldots, 4) \;\text{ t.q. }\; G(U) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(x+y) + F_4(\frac{x}{y}) \right\} .$$

On pose $X_1 = \partial_y$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = \partial_x - \partial_y$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y$ et $X_U = U_y\,\partial_x - U_x\,\partial_y$. On a :

$$G \in \Pi_5 \quad \text{ssi} \quad \exists\, F_i\,(i = 1, 2, 3) \;\text{ t.q. } X_4\big(G(U) + F_1(x) + F_2(y) + F_3(x+y)\big) = 0\,.$$

Or

$$X_4\big(G(U) + F_1(x) + F_2(y) + F_3(x+y)\big) = X_4\big(G(U)\big) + xF_1'(x) + yF_2'(y) + (x+y)F_3'(x+y)\,.$$

On en déduit que

$$G \in \Pi_5 \quad \text{ssi} \quad \exists\, H_i\,(i = 1, 2, 3) \quad \text{t.q.} \quad X_4\big(G(U)\big) + H_1(x) + H_2(y) + H_3(x+y) = 0\,.$$

Du Lemme 5.2.1, il vient alors :

$$G \in \Pi_5 \quad \text{ssi} \quad X_1X_2X_3X_4\big(G(U)\big) = 0\,.$$

On remarquera ici que les champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 et X_4 ne commutent pas. L'ordre dans lequel ils sont appliqués dans l'équivalence précédente est important.

On peut calculer formellement l'expression $X_1X_2X_3X_4(G(U))$. On a :

$$X_1X_2X_3X_4\big(G(U)\big) = \mathcal{A}_1\,G'(U) + \mathcal{A}_2\,G''(U) + \mathcal{A}_3\,G^{(3)}(U) + \mathcal{A}_4\,G^{(4)}(U)\,,$$

avec
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &:= X_1X_2X_3X_4(U)\,,\\
\mathcal{A}_2 &:= X_1(U)X_2X_3X_4(U) + X_1\big[X_3X_4(U)X_2(U)\big] + X_1X_2\big[X_3(U)X_4(U)\big]\,,\\
\mathcal{A}_3 &:= \big[X_3X_4(U)X_2(U) + X_2\big(X_3(U)X_4(U)\big)\big]X_1(U) + X_1\big[X_2(U)X_3(U)X_4(U)\big]\,,
\end{aligned}$$
et
$$\mathcal{A}_4 := X_1(U)\,X_2(U)\,X_3(U)\,X_4(U) = \mathcal{D} \neq 0\,.$$

On peut alors énoncer la

Proposition 5.2.7. — *Le tissu $\mathcal{W}(x, y, x+y, x/y, U)$ est de rang maximal 6 si et seulement si U satisfait les trois équations différentielles :*

$$X_U\left(\frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_4}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Exemple : on vérifie sans difficulté que les fonctions ci-dessous sont solutions des équations données par cette proposition :

$$\begin{array}{lll}
(x,y) \longmapsto xy\,, & (x,y) \longmapsto x(x+y)\,, & (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2\,,\\
(x,y) \longmapsto (x+y)/(xy)\,, & (x,y) \longmapsto x(x+y)/y\,, & (x,y) \longmapsto xy\,(x+y)\,.
\end{array}$$

On en déduit que les tissus suivants sont de rang 6 (on verra au chapitre 8 qu'ils sont exceptionnels) :

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,xy\right) & \mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,xy\,(x+y)\right)\\
\mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,\frac{x+y}{y}\right) & \mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,x(x+y)\right)\\
\mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,\frac{x(x+y)}{y}\right) & \mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,x^2+xy+y^2\right)\,.
\end{array}$$

5.2.5. Forme normale pour les intégrales premières des feuilletages portant des relations abéliennes. — On décrit ici une autre application du fait qu'il existe des équations différentielles satisfaites par les composantes des relations fonctionnelles abéliennes d'un tissu.

Etant donné un $(n+1)$-tissu $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F})$ tel que le feuilletage $\mathcal{F}$ porte des relations abéliennes, on va indiquer un choix (presque) canonique pour une intégrale première de $\mathcal{F}$ et montrer comment on peut en déduire des invariants pour la classe de tissus ordonnés définie par $\mathcal{W}$.

On note $\Pi_{\mathcal{F}}$ l'espace vectoriel des $\mathcal{F}$-composantes des relations abéliennes de $\mathcal{W}$. On a supposé que cet espace est de dimension p plus grande que 1. On se fixe une intégrale première quelconque u de $\mathcal{F}$ telle que $u(0) = 0$. Toute autre intégrale première s'écrira $h \circ u$ avec $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

On va construire une intégrale première $U = \underline{h} \circ u$ de $\mathcal{F}$ qui ne dépendra que du tissu.

Posons $\Pi_u := \left\{ G \in \mathcal{O}_1 \;\middle|\; G'(u)\, du \in \Pi_{\mathcal{F}} \right\} \simeq \Pi_{\mathcal{F}}$. On sait qu'il existe une équation différentielle

$$E(u) \quad : \qquad Y^{(m)}(u) + a_1(u)\, Y^{(m-1)}(u) + \cdots + a_{m-1}(u)\, Y'(u) = 0$$

qui caractérise les éléments de Π_u (avec $m = p+1$). Quitte à prendre comme point courant un point suffisamment proche de l'origine, on peut supposer que tous les coefficients a_i sont holomorphes.

Soit $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ fixé. Notons $\overline{u}$ l'intégrale première pour $\mathcal{F}$ définie par $\overline{u} = h \circ u$. Il lui correspond l'équation différentielle suivante qui caractérise les éléments de $\Pi_{\overline{u}} = \left\{ H \in \mathcal{O}_1 \;\middle|\; H'(\overline{u})\, d\overline{u} \in \Pi_{\mathcal{F}} \right\}$:

$$E(\overline{u}) \quad : \qquad \overline{Y}^{(m)}(\overline{u}) + \overline{a}_1(\overline{u})\, \overline{Y}^{(m-1)}(\overline{u}) + \cdots + \overline{a}_{m-1}(\overline{u})\, \overline{Y}'(\overline{u}) = 0\,.$$

Bien sûr, les coefficients de $E(\overline{u})$ vont s'exprimer à partir de ceux de $E(u)$. En particulier, on a le

Lemme 5.2.8. — *En notant g l'inverse du germe de biholomorphisme h, on a*

$$\overline{a}_1(\overline{u}) = (a_1 \circ g)(\overline{u})\, g'(\overline{u}) - \frac{m(m-1)}{2}\, \frac{g''(\overline{u})}{g'(\overline{u})}\,.$$

Considérons une équation différentielle en $(\mathbb{C}, 0)$, d'ordre m, à coefficients holomorphes, de la forme

$$F^{(m)}(z) + \alpha_2(z)\, F^{(m-2)}(z) + \cdots + \alpha_{m-1}(z) F(z) + \alpha_m(z) = 0\,.$$

L'équation obtenue par le changement de variable $\zeta = h(z)$ est

$$\mathrm{F}^{(m)}(\zeta) + \widehat{\alpha}_1(\zeta)\, \mathrm{F}^{(m-1)}(\zeta) + \widehat{\alpha}_2(\zeta)\, \mathrm{F}^{(m-2)}(\zeta) + \cdots + \widehat{\alpha}_{m-1}(\zeta)\, \mathrm{F}(\zeta) + \widehat{\alpha}_m(\zeta) = 0$$

avec, en posant $g = h^{-1}$:

$$(*) \qquad \widehat{\alpha}_1(\zeta) = -\frac{m(m-1)}{2}\, \frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\,.$$

Pour $\widehat{\alpha}_1$ fixée, les solutions les plus générales de $(*)$ vue comme équation en g, sont les fonctions de la forme :

$$\zeta \mapsto \lambda \int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{\Gamma(u)}{m(m-1)} \right) du\,,$$

où Γ est la primitive de $\widehat{\alpha}_1$ qui s'annule en l'origine et λ une constante non nulle (arbitraire).

On en déduit qu'il existe un germe de biholomorphisme $\mathbf{h} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, unique modulo multiplication par une constante complexe non nulle, tel que, relativement à la variable $\mathsf{u} = \mathbf{h}(u)$, les éléments de Π_{u} soient caractérisés par l'équation différentielle (où l'inconnue est maintenant notée Z) :

$$E(\mathsf{u}) \quad : \qquad Z^{(m)}(\mathsf{u}) + A_2(\mathsf{u})\, Z^{(m-1)}(\mathsf{u}) + \cdots + A_{m-1}(\mathsf{u})\, Z'(\mathsf{u}) = 0\,.$$

On notera que, si l'on effectue le changement de variable $\mathbf{u} = \lambda \mathsf{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les éléments de $\Pi_{\mathbf{u}}$ sont caractérisés par l'équation différentielle

$$E(\mathbf{u}) \quad : \qquad \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{u})\,\mathbf{Z}^{(m-2)}(\mathbf{u}) + \cdots + \mathbf{A}_{m-1}(\mathbf{u})\,\mathbf{Z}'(\mathbf{u}) = 0\,,$$

les coefficients de $E(\mathsf{u})$ et $E(\mathbf{u})$ étant liés par les relations $\mathbf{R}_k$ définies ci-dessous ($k = 2, \ldots, m-1$) :

$$\mathbf{A} \equiv A \mod \mathbf{R}_k \qquad \text{ssi} \qquad \exists\, \sigma \neq 0 \ \text{ t.q. } \mathbf{A}(z) = \sigma^k\, A(\sigma z)\,.$$

Pour $k = 2, \ldots, m-1$, on notera $[B]_k$ la classe de $B \in \mathcal{O}_1$ modulo $\mathbf{R}_k$.

On donc établi la :

Proposition 5.2.9. — *Soient $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_2$ définissant un tissu noté W, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ portant des relations abéliennes du tissu $\mathcal{W} = W \cup \mathcal{F}$. Alors il existe une intégrale première $U \in \mathcal{O}_2$ de $\mathcal{F}$, unique modulo multiplication par une constante, telle que les fonctions F solutions de $F_1(U_1) + \cdots + F_n(U_n) + F(U) = 0$ sont caractérisées comme étant les solutions d'une équation différentielle linéaire de la forme*

$$F^{(m)}(U) + A_2(U)\,F^{(m-1)}(U) + \cdots + A_{m-1}(U)\,F'(U) = 0\,.$$

De plus le $(m-3)$-uplet $([A_k]_k)_{k=1}^{m-1}$ est un invariant du tissu ordonné $\mathcal{W} := \mathcal{W}(U_1, \ldots, U_n, U)$. On note :

$$\mathcal{I}_{n+1}(\mathcal{W}) := \big([A_2]_2, \ldots, [A_{m-1}]_{m-1}\big) \in \mathcal{O}_1{}_{/\mathbf{R}_2} \times \ldots \times \mathcal{O}_1{}_{/\mathbf{R}_{m-1}}\,.$$

Une intégrale première U donnée par cette proposition sera appelée *intégrale première privilégiée* du feuilletage $\mathcal{F}$, pour le tissu $\mathcal{W}$.

Exemples : on montre que les composantes en xy des relations fonctionnelles

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(x+y) + F_4(x-y) + F(xy) = 0$$

sont exactement les solutions de l'équation différentielle

$$F^{(4)}(u) + \frac{3}{u}\,F^{(3)}(u) = 0\,.$$

La fonction $u \mapsto u^2$ est solution de l'équation différentielle $3\,h'(u)/h(u) = 2(4-1)\,h''(u)/h'(u)$. On en déduit que $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ est l'intégrale première privilégiée du feuilletage $\mathcal{F}(xy)$, pour le tissu

$$\mathsf{W}(xy) := \mathcal{W}\big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,\big)\,.$$

Un calcul simple montre que les fonctions G qui apparaissent dans une relation

$$G_1(x) + G_2(y) + G_3(x+y) + G_4(x-y) + G(\sqrt{xy}) = 0$$

sont exactement les solutions de l'équation différentielle

$$G^{(4)}(U) - \frac{3}{U^2}\,G^{(2)}(U) + \frac{3}{U^3}\,G^{(1)}(U) = 0\,,$$

d'où on déduit

$$\mathcal{I}_5\Big(\mathsf{W}(xy)\Big) = \left(\,\big[-\frac{3}{U^2}\big]_2\,,\,\big[\frac{3}{U^3}\big]_3\right)\,.$$

On montre que les composantes H_5 en $x^2 + y^2$ des relations fonctionnelles

$$H_1(x) + H_2(y) + H_3(x+y) + H_4(x-y) + H_5(x^2+y^2) = 0$$

sont exactement les solutions de l'équation différentielle

$$F^{(4)}(u) = 0\,.$$

Ainsi $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est l'intégrale première privilégiée du feuilletage qu'elle définit, pour le tissu

$$\mathsf{W}(x^2 + y^2) := \mathcal{W}\big(\, x \,,\, y \,,\, x + y \,,\, x - y \,,\, x^2 + y^2 \,\big) \,.$$

Il en découle immédiatement que

$$\mathcal{I}_5\Big(\mathsf{W}(x^2 + y^2)\Big) = \Big(\, \big[\, 0 \,\big]_2 \,,\, \big[\, 0 \,\big]_3 \,\Big) \,.$$

Du fait que $U \mapsto -3/U^2$ n'est pas équivalente à l'application identiquement nulle, modulo $\mathbf{R}_2$, on déduit que $\mathsf{W}(xy)$ et $\mathsf{W}(x^2 + y^2)$ ne sont pas équivalents comme tissus ordonnés. D'autre part, chacun de ces tissus admet $\mathcal{W}\{x, y, x + y, x - y\}$ comme unique sous 4-tissu parallélisable. Avec le point précédent, cela montre qu'il ne sont pas équivalents en tant que tissus (non-ordonnés).

CHAPITRE 6

UNE FAMILLE À UN PARAMÈTRE DE 5-TISSUS EXCEPTIONNELS

Par

Luc Pirio et Jean-Marie Trépreau

Résumé : le 5-tissu de Bol, découvert en 1936, est resté longtemps le seul exemple avéré de tissu plan exceptionnel. En 2002, Robert [**16**] et Pirio [**13**] ont trouvé un 9- et des 6- et 7-tissus plans exceptionnels, en relation avec l'équation fonctionnelle de Spence-Kummer du trilogarithme. Plus récemment encore, Pirio [**14**] a découvert trois nouveaux 5-tissus exceptionnels, très simples. Dans cet article, nous présentons une famille à un paramètre de 5-tissus plans exceptionnels, qui contient ces derniers comme cas limites.

Dans leur présentation la plus naturelle, les tissus de cette famille sont composés d'un système harmonique de quatre faisceaux de droites parallèles, définis respectivement par les équations $\{x = \text{cte}\}$, $\{y = \text{cte}\}$, $\{x+y = \text{cte}\}$ et $\{x-y = \text{cte}\}$, et d'un feuilletage dont les feuilles sont les courbes de niveau de la fonction $\mathrm{sn}_k x\, \mathrm{sn}_k y$, où sn_k est une fonction elliptique de Jacobi.

1. Introduction

Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans une situation locale, dans la catégorie analytique. On note (x, y) le point courant de $\mathbb{C}^2$ et on choisit un point de base (x_0, y_0) ; fonction voudra dire germe de fonction analytique en (x_0, y_0), etc.

Étant donné une fonction u telle que $du(x_0, y_0) \neq 0$, on note $\mathcal{F}(u)$ le feuilletage dont les feuilles sont les courbes de niveau $\{u(x, y) = \text{cte}\}$ de la fonction u. On dit que u est une fonction de définition du feuilletage. Si f est une fonction définie au voisinage de $u(x_0, y_0)$ et si $f'(u(x_0, y_0)) \neq 0$, la fonction $f(u) := f \circ u$ définit le même feuilletage que u.

Soit $d \geq 3$ un entier. Un d-tissu en (x_0, y_0) est une famille non ordonnée de d feuilletages $\mathcal{F}(u_k)$, deux à deux transverses, *i.e.* tels que :

$$\text{si } j, k = 1, \ldots, d \text{ et } j \neq k, \qquad du_j(x_0, y_0) \wedge du_k(x_0, y_0) \neq 0.$$

On notera ce tissu :

$$\mathcal{W}(u_1, \ldots, u_d) := \{\mathcal{F}(u_1), \ldots, \mathcal{F}(u_d)\} \tag{1}$$

On dira que deux (germes de) d-tissus $\mathcal{W}_0$ en (x_0, y_0) et $\mathcal{W}_1$ en (x_1, y_1) sont *équivalents* s'il existe un (germe de) difféomorphisme ϕ, avec $\phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, qui envoie $\mathcal{W}_0$ sur $\mathcal{W}_1$.

Le livre [**3**] de Blaschke et Bol dresse le bilan des résultats fondamentaux obtenus entre 1927 et 1938. Les résultats que nous rappelons maintenant sont tous présentés dans [**3**], sauf la découverte récente de nouveaux tissus plans exceptionnels et certains travaux oubliés des années 1937–1939 que nous évoquons à la fin de cette introduction.

Après la guerre et surtout après 1970, de nouveaux résultats ont été obtenus, en particulier en dimension ou en codimension plus grandes. Citons seulement, à titre d'exemples, les articles de Chern et Griffiths [**9**], d'Akivis et Goldberg [**1**] et de Hénaut [**11**], dont on pourra consulter les bibliographies.

Une *relation abélienne* du tissu $\mathcal{W}(u_1, \ldots, u_d)$ est une relation fonctionnelle de la forme :

$$\sum_{j=1}^{d} \phi_j(u_j)\, du_j = 0,$$

où ϕ_j est une fonction définie au voisinage de $u_j(x_0, y_0)$. On identifie une telle relation au d-uplet $(\phi_1(u_1), \ldots, \phi_d(u_d))$. Les relations abéliennes forment un espace vectoriel, ici sur le corps des complexes. La dimension ρ de cet espace est appelée *le rang du tissu*. Elle vérifie *l'inégalité de Bol* :

$$\rho \leq \rho(d), \qquad \rho(d) := \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \tag{2}$$

On a par exemple $\rho(3) = 1$, $\rho(4) = 3$, $\rho(5) = 6$, $\rho(6) = 10$...

Définition 1. — Un d-tissu de rang $\rho(d) = (d-1)(d-2)/2$ est dit de rang maximal.

On écrira plutôt une relation abélienne sous la forme intégrée :

$$\sum_{j=1}^{d} f_j(u_j) = \text{cte},$$

où f_j est une fonction définie au voisinage de $u_j(x_0, y_0)$. En faisant cela, on introduit des relations triviales, les constantes $f = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{C}^d$; le rang du tissu est la dimension de l'espace des d-uplets $(f_1'(u_1), \ldots, f_d'(u_d))$.

Par exemple, considérons $d \geq 3$ formes linéaires $l_1, \ldots, l_d$ sur $\mathbb{C}^2$, deux à deux linéairement indépendantes. Le tissu $\mathcal{W}(l_1, \ldots, l_d)$, composé de d faisceaux différents de droites parallèles, est de rang maximal. On peut le voir en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le système $(l_1^n, \ldots, l_d^n)$ est de rang $\min(n+1, d)$ dans l'espace des polynômes homogènes de degré n en (x, y), qui est un espace de dimension $n+1$. Si $1 \leq n \leq d-2$, il existe donc $d-n-1$ relations linéaires indépendantes entre $l_1^n, \ldots, l_d^n$. En sommant par rapport à n, on obtient $(d-2) + (d-3) + \cdots + 1 = (d-1)(d-2)/2$

relations abéliennes.

C'est déjà un exercice plus difficile de montrer directement qu'un tissu composé de d faisceaux de droites non nécessairement parallèles est de rang maximal. C'est un cas très particulier d'un résultat que nous rappelons maintenant.

On note $\check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$ l'espace projectif dual de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$: un point $p \in \check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$ représente une droite $l(p)$ de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$; à tout point $z \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$ est associé le faisceau de droites de sommet z, donc une droite l_z de $\check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$.

Soit $C \subset \check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$ une courbe algébrique réduite de degré d. Si z est un « point générique » de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$, la droite l_z de $\check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$ coupe la courbe C en d points distincts $p_1, \ldots, p_d$ de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$. En associant à z les d droites $l(p_1), \ldots, l(p_d)$ (elles passent par z), on définit un « d-tissu avec singularités » sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$. Au point générique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$, on obtient un d-tissu au sens usuel. C'est un *tissu en droites*, c'est-à-dire que ses feuilles sont des morceaux de droites.

En général, le tissu obtenu s'interprète comme le tissu des tangentes à la courbe duale de C. Dans le cas particulier où la courbe C est la réunion de d droites distinctes, on obtient un tissu de d faisceaux de droites.

Définition 2. — Un tissu obtenu de la façon qu'on vient de décrire est dit algébrique.

Les deux résultats suivants sont fondamentaux. Le premier est une interprétation, due à Blaschke, du théorème d'addition d'Abel en termes de tissus :

Théorème 1 **([3])**. — *Tout tissu algébrique est de rang maximal.*

Le second, dû à Blaschke et Howe, est souvent cité comme « le théorème d'Abel inverse » :

Théorème 2 **([3])**. — *Tout tissu en droites de rang maximal est un tissu algébrique.*

Définition 3. — Un tissu équivalent à un tissu algébrique est dit *algébrisable*. Un tissu de rang maximal non algébrisable est dit *exceptionnel*.

Par exemple, et c'est trivial, tout 3-tissu $\mathcal{W}(u_1, u_2, u_3)$ de rang $\rho(3) = 1$ est algébrisable. En effet, si $f_1(u_1)+f_2(u_2)+f_3(u_3) = \text{cte}$ est une relation abélienne non triviale du tissu, on vérifie facilement que $f_j'(u_j(x_0, y_0)) \neq 0,\ j = 1, 2, 3$. On peut donc prendre $f_1(u_1), f_2(u_2)$ et $-f_3(u_3)$ comme fonctions de définition des feuilletages. En changeant de notation, la relation abélienne s'écrit $u_3 = u_1 + u_2$ et, en prenant (u_1, u_2) comme coordonnées locales, on voit que le tissu est équivalent au tissu $\mathcal{W}(x, y, x + y)$.

De même et ce n'est pas trivial, *tout* 4*-tissu de rang maximal est algébrisable*. Sous une forme différente, ce résultat est essentiellement dû à Lie.

Le premier exemple de tissu exceptionnel fut donné par Bol en 1936 [**3**] ; c'est le 5-tissu suivant :

$$\mathcal{B} = \mathcal{W}(\, x,\, y,\, \frac{y}{x},\, \frac{1-y}{1-x},\, \frac{x-xy}{y-xy}\,). \tag{3}$$

Il est composé de quatre faisceaux de droites dont les sommets sont en position générale dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ (on ne peut pas en extraire trois points alignés) ; le dernier feuilletage est le faisceau des coniques qui passent par les quatre sommets. L'une des relations abéliennes du tissu de Bol fait intervenir le dilogarithme.

L'exemple de Bol est resté longtemps isolé. En 2002, Robert [**16**] et le premier auteur [**13**] ont montré indépendamment que le 9-tissu associé à l'équation fonctionnelle de Spence-Kummer du trilogarithme est exceptionnel, ainsi que certains des 6- et des 7-tissus qu'on peut en extraire.

En 2003, le premier auteur [**14**] a donné les trois exemples suivants, très simples, de 5-tissus exceptionnels :

$$\mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y,\,x^2+y^2\,),$$
$$\mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y,\,x^2-y^2\,),$$
$$\mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y,\,e^x+e^y\,).$$

Dans cet article, nous présentons une famille à un paramètre de 5-tissus exceptionnels ainsi que cinq tissus exceptionnels « isolés » qui apparaissent comme des tissus limites de la famille. On retrouve en particulier les trois exemples précédents.

Ces tissus sont présentés, ainsi que leurs relations abéliennes, dans la section §3, dont la lecture est suffisante si l'on ne s'intéresse qu'aux résultats. Tous ces tissus sont de la forme :

$$\mathcal{W}[u] := \mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y,\,u(x,y)\,). \tag{4}$$

Dans tout l'article, on notera :

$$\mathcal{W}_0 := \mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y\,). \tag{5}$$

Dans la section §2, on fait quelques remarques sur les symétries du 4-tissu $\mathcal{W}_0$ et les transformations qui envoient un tissu de la forme (4) sur un tissu de la même forme. Dans la section §4, on écrit le système d'équations que doit vérifier la fonction $u(x,y)$ pour que le tissu (4) soit de rang maximal. On le résout sous l'hypothèse supplémentaire que le 3-tissu extrait $\mathcal{W}(\,x,\,y,\,u(x,y)\,)$ est aussi de rang maximal. On vérifie que les seules solutions sont, à équivalence de tissus près, les tissus présentés dans la section §3.

En fait, les tissus dont nous allons parler sont déjà apparus dans la littérature, sans que leur caractère exceptionnel ait été reconnu.

Avant que Bol obtienne son contre-exemple, Blaschke [**2**] a cherché à montrer que tout 5-tissu de rang 6 est algébrisable. La méthode qu'il proposait généralise une méthode de Poincaré, qui permet de démontrer assez facilement le résultat de Lie, que tout 4-tissu de rang 3 est algébrisable. Cet article de Blaschke et le contre-exemple de Bol ont suscité plusieurs travaux, de Bompiani et Bortolotti [**4**] et de Terracini [**17**] en 1937, de Buzano [**5**] [**6**] en 1939.

Ces auteurs s'intéressent à la question des 5-tissus exceptionnels en relation avec un problème de géométrie différentielle projective. Il s'agit de trouver les surfaces (S) de l'espace $\mathbb{PR}^5$ qui admettent cinq systèmes de courbes (= un 5-tissu) tels que (S) soit tangente le long de chaque courbe à un hyperplan de $\mathbb{PR}^5$. Ils trouvent plusieurs solutions à ce problème. *On sait maintenant que toutes ces solutions correspondent à des tissus exceptionnels* [**15**].

L'article [**6**] est écrit en termes de tissus et tous les tissus que nous considérons ici apparaissent dans cet article. Buzano distingue ces tissus pour certaines propriétés de leurs sous-tissus, mais il ne voit pas qu'ils sont de rang maximal ; essentiellement, il manque à chaque fois *une relation* pour que leur nature exceptionnelle soit révélée. Bien que nous n'ayons eu connaissance de [**6**] qu'après avoir obtenu nos résultats, il y a coïncidence entre certains calculs de la section §4 et ceux de [**6**].

Quoi qu'il en soit, Blaschke et Bol connaissaient ces travaux. L'appendice à la section §30 de [**3**], page 261, contient un commentaire sur les articles [**4**] et [**17**], dont voici un extrait :

« … ist noch nicht festgestellt, ob die hierzu gehörigen Kurvengewebe wirklich den Rang sechs haben, das wäre aber leicht nachzuprüfen ».(1)

(1) "...pas encore bien établi si les tissus ci-dessus sont effectivement de rang six ; ce serait toutefois facile à vérifier".

Nous ne savons pas si cette vérification facile a jamais été faite. Un peu plus tard, Bol écrit les résumés des deux articles de Buzano pour le *Zentralblatt* sans commentaire qui aille au-delà de ce que l'auteur dit démontrer. En 1985, Chern [**7**] pose comme un problème important et non résolu de savoir si le tissu de Bol est le seul 5-tissu non algébrisable de rang 6. En 2004, après la découverte des tissus exceptionnels liés au trilogarithme, Griffiths [**10**] repose la question, sous une forme modifiée : les tissus exceptionnels ont-ils toujours à voir avec les polylogarithmes ? Tous nos exemples montrent que la réponse est non.

2. Remarques sur les tissus $\mathcal{W}\big(x, y, x+y, x-y, u(x,y)\big)$.

Le tissu

$$\mathcal{W}_0 := \mathcal{W}(\, x,\, y,\, x+y,\, x-y\,)$$

est composé de quatre faisceaux de droites parallèles, de sommets les points $p_1 = [0 : 1 : 0]$, $p_2 = [1 : 0 : 0]$, $p_3 = [1 : -1 : 0]$ et $p_4 = [1 : 1 : 0]$ de $\mathbb{PC}^2$. En particulier, les sommets sont alignés, alors que les sommets du 4-tissu en droites extrait du tissu de Bol (3) sont en position générale.

Le tissu $\mathcal{W}_0$ est encore plus particulier que cela. Rappelons que le birapport d'un système (q_1, q_2, q_3, q_4) de quatre points distincts d'une droite projective est donné par :

$$b(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4} : \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4},$$

où $t_k = \xi_k/\eta_k \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et les $[\xi_k : \eta_k]$ sont les coordonnées homogènes des q_k dans un repère projectif de la droite ; c'est un invariant projectif du système. On vérifie que $b(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$. *Autrement dit, les sommets p_1, p_2, p_3, p_4 forment une division harmonique de la droite à l'infini.*

Le tissu $\mathcal{W}_0$ est évidemment invariant par les dilatations

$$(x, y) \mapsto (kx + x', ky + y'), \qquad (k \in \mathbb{C}^*,\ (x', y') \in \mathbb{C}^2).$$

Si l'on se restreint à $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, les feuilles de $\mathcal{W}_0$ issues de $O = (0, 0)$ rencontrent le cercle de centre O et de rayon 1 aux sommets d'un octogone régulier. Il est clair que le tissu $\mathcal{W}_0$ est invariant par le groupe des isométries de cet octogone. C'est un groupe à 16 éléments, isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_8$ et qu'on notera abusivement $\mathbb{D}_8$. Il permet de substituer à (x, y) un des couples suivants :

$$(\pm x, \pm y),\ \ (\pm y, \pm x),\ \ (\pm\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \pm\frac{x-y}{\sqrt{2}}),\ \ (\pm\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \pm\frac{x+y}{\sqrt{2}}),$$

avec deux choix indépendants des signes pour chaque couple. Il est engendré par les symétries orthogonales

$$\rho(x, y) = (y, x), \qquad \sigma(x, y) = ((x+y)/\sqrt{2}, (x-y)/\sqrt{2}), \tag{6}$$

par rapport aux droites d'angles polaires $\pi/4$ et $\pi/8$, respectivement : $\tau \circ \sigma$ engendre le groupe des huit rotations de $\mathbb{D}_8$ et, en conjuguant τ et σ par ces rotations, on obtient les huit réflexions de $\mathbb{D}_8$.

Les lemmes qui suivent nous seront utiles pour reconnaître les tissus exceptionnels de la forme (4) et les classer à équivalence près.

Lemme 1. — *Soit ϕ un difféomorphisme local de $\mathbb{C}^2$. Si ϕ transforme localement les quatre faisceaux de $\mathcal{W}_0$ en faisceaux de droites, ϕ est le germe d'une tranformation projective. Si ϕ conserve localement trois des faisceaux de $\mathcal{W}_0$, ϕ est le germe d'une dilatation.*

Démonstration : pour la première propriété, en composant ϕ avec une transformation projective, on peut supposer que :

$$\phi(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(x), \qquad \phi(\mathcal{F}(y)) = \mathcal{F}(y),$$

et que

$$\phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x+y) \quad \text{ou} \quad \phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x/y),$$

selon que les sommets des faisceaux $\phi(\mathcal{F}(x))$, $\phi(\mathcal{F}(y))$ et $\phi(\mathcal{F}(x+y))$ sont ou ne sont pas alignés. De la première propriété, il découle que ϕ^{-1} est de la forme :

$$\phi^{-1}(x,y) = (X(x), Y(y)).$$

Si $\phi(\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x+y)$, on a :

$$(\partial/\partial x - \partial/\partial y)(X(x) + Y(y)) = X'(x) - Y'(y) = 0,$$

d'où $X(x) = kx + x'$, $Y(y) = ky + y'$ avec $k \in \mathbb{C}^*$: ϕ est une dilatation (la deuxième partie de l'énoncé en découle).

Si $\phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x/y))$, on a :

$$(x\partial/\partial x + y\partial/\partial y)(X(x) + Y(y)) = xX'(x) + yY'(y) = 0,$$

d'où $X(x) = k\log x + x'$, $Y(y) = -k\log y + y'$. On obtient alors

$$\phi(\mathcal{F}(x-y)) = \mathcal{F}(X(x) - Y(y)) = \mathcal{F}(xy),$$

qui n'est pas un faisceau de droites ; c'est une contradiction. ■

Lemme 2. — *Le groupe* $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$ *des transformations projectives qui conservent le tissu* $\mathcal{W}_0$ *est engendré par les dilatations de* $\mathbb{C}^2$ *et le groupe* $\mathbb{D}_8$*. De plus, si* ϕ *est un difféomorphisme local qui conserve le tissu* $\mathcal{W}_0$*,* ϕ *est le germe d'un élément de* $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$*.*

Démonstration : une transformation projective ϕ qui conserve le tissu $\mathcal{T}_0$ conserve la famille $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ des sommets des faisceaux de droites de $\mathcal{W}_0$. Elle conserve donc la droite à l'infini (c'est une tranformation affine) et induit une permutation s de $1, 2, 3, 4$: $\phi(p_k) = p_{s(k)}$. De plus, elle conserve le birapport. Comme les points p_1, p_2, p_3, p_4 forment une division harmonique, si l'on permute ces points, le birapport peut prendre trois valeurs, qui sont -1, 2 et $1/2$. Il y a donc $4!/3 = 8$ permutations de (p_1, p_2, p_3, p_4) qui conservent le birapport. D'autre part, le groupe $\mathbb{D}_8$ opère sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ et le noyau de l'opération est $\{\pm\,\mathrm{Id}\}$. On en déduit que les 8 permutations ci-dessus sont réalisables avec des éléments de $\mathbb{D}_8$. On se ramène ainsi au cas où ϕ conserve chaque feuilletage de $\mathcal{W}_0$: ϕ est une dilatation d'après le lemme précédent. La deuxième partie de l'énoncé résulte aussi du lemme précédent. ■

Rappelons que si u est une fonction définie au voisinage de (x_0, y_0) qui vérifie la condition (de transversalité)

$$u_x(x_0,y_0)u_y(x_0,y_0)(u_x(x_0,y_0)^2 - u_y(x_0,y_0)^2) \neq 0, \tag{7}$$

(u_x et u_y désignent les dérivées partielles de u), on a défini :

$$\mathcal{W}[u] := \mathcal{W}(\,x,\, y,\, x+y,\, x-y, u(x,y)\,).$$

Lemme 3. — *Si* $u(x,y)$ *et* $u'(x,y)$ *sont deux germes de fonctions qui vérifient (7) et si* ϕ *est un difféomorphisme local qui envoie* $\mathcal{W}[u]$ *sur* $\mathcal{W}[u']$*,* ϕ *est une transformation projective. Si de plus* $\mathcal{F}(u)$ *n'est pas un faisceau de droites parallèles,* ϕ *est un élément de* $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$*.*

Démonstration : si ϕ est comme dans l'énoncé, au moins trois des faisceaux de droites de $\mathcal{W}_0$ sont envoyés sur des faisceaux de droites de $\mathcal{W}_0$. On en déduit qu'il existe une transformation affine ψ telle que $\psi \circ \phi$ conserve ces trois faisceaux. D'après le Lemme 1, ϕ est une transformation affine. Si $\mathcal{F}(u)$ n'est pas un faisceau de droites parallèles, ϕ conserve nécessairement le sous-tissu $\mathcal{W}_0$; le Lemme 2 s'applique. ■

Lemme 4. — *Si $u(x,y)$ est une fonction qui vérifie (7), le tissu $\mathcal{W}[u]$ est algébrisable si et seulement s'il est algébrique. C'est le cas si et seulement si $\mathcal{F}(u)$ est un germe de faisceau de droites.*

Démonstration : on sait (voir l'introduction) qu'un tissu formé de faisceaux de droites est algébrique. On suppose que le germe de tissu $\mathcal{W}[u]$ est algébrisable. Soit ϕ un difféomorphisme local tel que le tissu $\phi(\mathcal{W}[u])$ soit un germe de tissu algébrique. Il est associé à une courbe réduite C_5 de $\check{\mathbb{P}}\mathbb{C}^2$, de degré 5.

En particulier, $\phi(\mathcal{W}[u])$ est un tissu en droites, donc son sous-tissu $\phi(\mathcal{W}_0)$ est un tissu en droites. De plus $\phi(\mathcal{W}_0)$ est de rang maximal. C'est donc, d'après le Théorème 2, un tissu algébrique, associé à une courbe $C_4 \subset C_5$, de degré 4. Il est alors clair que C_5 est la réunion de C_4 et d'une droite, donc que $\mathcal{F}(u)$ est un faisceau de droites. En appliquant le même argument à tous les 3-tissus extraits de $\mathcal{W}_0$ (ils sont de rang maximal), on montre que la courbe C_4 est une réunion de droites. Finalement, $\phi(\mathcal{W}[u])$ est formé de cinq faisceaux de droites, donc ϕ est une transformation projective d'après le Lemme 1 et $\mathcal{W}[u]$ est un tissu algébrique. ■

3. Fonctions thêta et tissus exceptionnels

Cette section contient nos principaux résultats. Pour la plus grande part, elle peut être lue indépendamment des autres sections. Nous présentons une famille à un paramètre de 5-tissus exceptionnels, ainsi que cinq 5-tissus exceptionnels « limites ». Tous ces tissus sont construits par l'adjonction d'un feuilletage $\mathcal{F}(u)$ au tissu $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y\,)$, *i.e.* sont de la forme (4) :

$$\mathcal{W}[u] := \mathcal{W}(\,x,\,y,\,x+y,\,x-y,\,u(x,y)\,),$$

où u vérifie la condition de transversalité (7). De plus, ils ont tous la propriété que le sous-tissu

$$\mathcal{W}(\,x,\,y,\,u(x,y))$$

est de rang maximal.

Dans la section §4, nous montrerons que tout tissu exceptionnel de la forme $\mathcal{W}[u]$, tel que $\mathcal{W}(\,x,\,y,\,u(x,y)\,)$ est de rang maximal, est équivalent à l'un des tissus présentés dans cette section.

D'autre part, mais on verra dans la section §4 que c'est une conséquence des conditions ci-dessus, ces tissus ont la propriété que le sous-tissu

$$\mathcal{W}(\,x+y,\,x-y,\,u(x,y))$$

est aussi de rang maximal.

Un tissu de la forme $\mathcal{W}[u]$ possède les relations abéliennes du tissu $\mathcal{W}_0$, dont voici une base :

$$\begin{aligned} x+y-(x+y) &= 0,\\ x-y-(x-y) &= 0,\\ 2x^2+2y^2-(x+y)^2-(x-y)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le tissu $\mathcal{W}[u]$ est de rang maximal $\rho(5)=6$ si et seulement si il possède trois relations abéliennes supplémentaires, indépendantes modulo les relations précédentes et les constantes, autrement dit trois relations de la forme :

$$f_k(u(x,y)) = g_k(x) + h_k(y) + j_k(x+y) + l_k(x-y), \qquad k=1,2,3,$$

avec f_1', f_2', f_3' linéairement indépendantes au point $u(x_0, y_0)$. D'autre part, les fonctions $u(x, y)$ seront de la forme :

$$u(x, y) = v(x) + w(y). \tag{8}$$

C'est une relation abélienne du sous-tissu $\mathcal{W}(x, y, u(x, y))$. Pour prouver que le rang est maximal, il restera encore, dans chaque cas, à exhiber deux relations abéliennes. La condition d'indépendance sera facile à vérifier dans tous les cas.

Remarque 3.1. – Souvent, pour faire l'économie d'un logarithme, on écrira les relations abéliennes sous forme multiplicative. En particulier, on pourra choisir une fonction de définition de la forme :

$$u(x, y) = v(x)w(y). \tag{9}$$

On note $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Le groupe des homographies $\tau \mapsto (a\tau + b)/(c\tau + d)$ à coefficients entiers et de déterminant 1, ou groupe modulaire, opère sur $\mathcal{H}$.

Si $\tau \in \mathcal{H}$, on note $q := e^{i\pi\tau}$ et on associe à τ les quatre fonctions thêta :

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, \tau) &= -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)x},\\
\theta_2(x, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)x},\\
\theta_3(x, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{i2nx},\\
\theta_4(x, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nx}.
\end{aligned}$$

Pour alléger les formules, on notera simplement :

$$\theta_i(x) := \theta_i(x, \tau), \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

quand la valeur du paramètre est τ ; sinon, on écrira le paramètre.

Les fonctions thêta sont des fonctions entières de $x \in \mathbb{C}$. La fonction θ_1 est impaire et les fonctions θ_2, θ_3 et θ_4 sont paires. La formule fondamentale suivante est classique et se démontre facilement à partir des définitions ci-dessus (voir par exemple Lawden [**12**], chapitre 1) :

$$\theta_3(x)\,\theta_4(y) = \theta_4(x + y, 2\tau)\,\theta_4(x - y, 2\tau) - \theta_1(x + y, 2\tau)\,\theta_1(x - y, 2\tau).$$

Après changement de variables :

$$\theta_3((x + y)/2, \tau/2)\,\theta_4((x - y)/2, \tau/2) = \theta_4(x)\,\theta_4(y) - \theta_1(x)\,\theta_1(y). \tag{10}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3. — *Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, le tissu $\mathcal{W}[u]$ associé à la fonction*

$$u(x, y) = \frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}\,\frac{\theta_1(y)}{\theta_4(y)}, \tag{11}$$

en un point où (7) est vérifié, est exceptionnel. Les tissus associés à $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$ sont équivalents si et seulement si τ et τ' sont congrus modulo le groupe G d'automorphismes de $\mathcal{H}$ engendré par les transformations $\tau \mapsto \tau + 2$, $\tau \mapsto \tau/(\tau + 1)$ et $\tau \mapsto -2/\tau$.

Notons que $\tau \mapsto -2/\tau$ n'est pas une transformation modulaire. La deuxième partie de l'énoncé, qu'on démontrera à la fin de cette section, a le sens suivant : si τ et $\tau' \in \mathcal{H}$ sont congrus modulo le groupe G, les tissus associés sont équivalents par un élément du groupe $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$; de plus (c'est une conséquence de la propriété précédente et du Lemme 3), si des germes des tissus associés à $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$, en des points où la condition (7) est vérifiée, sont équivalents, alors τ et τ' sont congrus modulo G.

Démonstration : rappelons que (11) est une relation abélienne (sous forme multiplicative) du tissu $\mathcal{W}[u]$. On en obtient une deuxième en divisant les deux membres de (10) par $\theta_4(x)\,\theta_4(y)$:

$$1 - u(x,y) = \frac{\theta_3((x+y)/2, \tau/2)\,\theta_4((x-y)/2, \tau/2)}{\theta_4(x)\,\theta_4(y)}$$

et une troisième en remplaçant (x,y) par $(x,-y)$ et en tenant compte des parités des fonctions thêta :

$$1 + u(x,y) = \frac{\theta_3((x-y)/2, \tau/2)\,\theta_4((x+y)/2, \tau/2)}{\theta_4(x)\,\theta_4(y)}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}(u)$ n'est pas un faisceau de droites. Compte tenu du Lemme 4, le tissu $\mathcal{W}[u]$ est exceptionnel. ■

En divisant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient une relation à 3 facteurs :

$$\frac{1-u(x,y)}{1+u(x,y)} = \frac{\theta_3((x+y)/2, \tau/2)/\theta_4((x+y)/2, \tau/2)}{\theta_3((x-y)/2, \tau/2)/\theta_4((x-y)/2, \tau/2)}. \tag{12}$$

Plus bas, nous rappellerons la définition des fonctions elliptiques de Jacobi. La relation (12) s'écrit simplement en termes de ces fonctions.

Pour faire la liaison entre cette famille et les cinq tissus exceptionnels que nous allons présenter maintenant, notons seulement que la famille de tissus du Théorème 3 est équivalente à la famille $\mathcal{W}[u_k]$ définie par les fonctions

$$k \in \mathbb{C},\ k^2 \neq 0, 1\,, \qquad u_k(x,y) = \mathrm{sn}_k x\, \mathrm{sn}_k y\ ,$$

et qu'on a les limites classiques suivantes :

$$\tanh x = \lim_{k\to 1} \mathrm{sn}_k x, \qquad \sin x = \lim_{k\to 0} \mathrm{sn}_k x\ . \tag{13}$$

Théorème 4. — *On obtient cinq 5-tissus exceptionnels $\mathcal{W}[u]$ deux à deux non équivalents pour les choix suivants de la fonction $u(x,y)$:*

(A) $u(x,y) = \tanh x \tanh y,$
(B) $u(x,y) = \sin x \sin y,$
(C) $u(x,y) = e^x + e^y,$
(D) $u(x,y) = x^2 - y^2,$
(E) $u(x,y) = x^2 + y^2.$

Remarque : les symétries $(x,y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ et $(x,y) \mapsto (\pm y, \pm x)$ du tissu $\mathcal{W}_0$ transforment les tissus (A)–(D) en des tissus qui leur sont équivalents par dilatation. En démontrant le théorème, on verra que la symétrie $\sigma(x,y) = ((x+y)/\sqrt{2}, (x-y)/\sqrt{2})$ transforme les tissus (A)–(D) en des tissus de la forme $\mathcal{W}[u_\sigma]$ qui, modulo une dilatation, peuvent être définis par les fonctions suivantes :

(A) $u_\sigma(x,y) = \cosh x / \cosh y,$
(B) $u_\sigma(x,y) = \cos x + \cos y,$
(C) $u_\sigma(x,y) = e^x \cosh y,$
(D) $u_\sigma(x,y) = xy,$

$$\text{(E)} \qquad u_\sigma(x,y) = x^2 + y^2.$$

Remarque : les formules (13) montrent que les tissus (A) et (B) sont « des cas limites » des tissus du Théorème 3. Les limites ci-dessous montrent qu'on peut considérer les tissus (C), (D) et (E) comme des limites de suites de tissus tous équivalents au tissu (B).

$$e^x + e^y = \lim_{k\to+\infty} 2e^{-k}(\cosh(x+k) + \cosh(y+k)),$$
$$x^2 \pm y^2 = \lim_{\epsilon\to 0} 2\epsilon^{-2}((\cosh(\epsilon x) - 1) \pm (\cosh(\epsilon y) - 1)).$$

Démonstration : elle consiste à exhiber, dans chaque cas, trois relations abéliennes qui, avec les relations de $\mathcal{W}_0$, prouvent que le tissu $\mathcal{W}[u]$ est de rang maximal. Selon les cas, il est plus commode d'écrire ces relations sous forme additive ou sous forme multiplicative. Ceci fait, on obtient que $\mathcal{W}[u]$ est exceptionnel comme une conséquence immédiate du Lemme 4.

Pour construire une fonction de définition u_σ de la forme (8) ou (9) du tissu $\sigma(\mathcal{W}[u])$, en fait modulo une dilatation, on écrit une relation abélienne du sous-tissu $\mathcal{W}(x+y, x-y, u(x,y))$ et on la transforme par σ.

La non-équivalence des cinq tissus se vérifie, compte tenu du Lemme 3, en comparant les dix fonctions u ou u_σ obtenues.

Dans chaque cas, on indiquera le cas échéant un changement de variables qui transforme le tissu $\mathcal{W}[u]$ en un tissu dont les feuilles sont des (germes de) courbes algébriques.

(A). — On a les relations abéliennes :

$$u(x,y) = \tanh x \tanh y,$$
$$1 + u(x,y) = \frac{\cosh(x+y)}{\cosh x \cosh y},$$
$$1 - u(x,y) = \frac{\cosh(x-y)}{\cosh x \cosh y}.$$

En divisant membre à membre les deux dernières identités, on obtient :

$$\frac{1+u(x,y)}{1-u(x,y)} = \frac{\cosh(x+y)}{\cosh(x-y)},$$

dont on déduit :

$$u_\sigma(x,y) = \cosh x / \cosh y.$$

En posant $e^{2x} = \xi$, $e^{2y} = \eta$, on obtient que le tissu $\mathcal{W}[\tanh x\ \tanh y]$ est équivalent au tissu

$$\mathcal{W}(\xi,\ \eta,\ \xi\eta,\ \xi/\eta,\ \frac{(\xi-1)(\eta-1)}{(\xi+1)(\eta+1)}),$$

formé de trois faisceaux de droites et de deux faisceaux de coniques.

(B). — On a les relations abéliennes :

$$u(x,y) = \sin x \sin y,$$
$$2\,u(x,y) = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$
$$4\,u(x,y)^2 = \cos^2(x-y) + \cos^2(x+y) - \cos 2x - \cos 2y.$$

De la deuxième relation, on déduit :

$$u_\sigma(x,y) = \cos x + \cos y.$$

En posant $e^{ix} = \xi$, $e^{iy} = \eta$, on obtient que le tissu $\mathcal{W}[\sin x \sin y]$ est équivalent au tissu

$$\mathcal{W}(\xi, \eta, \xi\eta, \xi/\eta, \frac{(\xi^2-1)(\eta^2-1)}{\xi\eta}),$$

formé de trois faisceaux de droites, un faisceau de coniques et un faisceau de quartiques.

(C). — On a les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x + e^y, \\ u(x,y)^2 &= e^{2x} + e^{2y} + 2e^{(x+y)}, \\ u(x,y) &= 2e^{(x+y)/2} \cosh \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

De la dernière relation, on déduit :

$$u_\sigma(x,y) = e^x \cosh y.$$

En posant $e^x = \xi$, $e^y = \eta$, on obtient que le tissu $\mathcal{W}[e^x + e^y]$ est équivalent au tissu

$$\mathcal{W}(\xi, \eta, \xi\eta, \xi/\eta, \xi+\eta),$$

formé de quatre faisceaux de droites et d'un faisceau de coniques.

(D). — On a les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2, \\ 6\,u(x,y)^2 &= 8x^4 + 8y^4 - (x+y)^4 - (x-y)^4, \\ u(x,y) &= (x+y)(x-y). \end{aligned}$$

De la dernière relation, on déduit :

$$u_\sigma(x,y) = xy.$$

(E). — On a les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + y^2, \\ 6\,u(x,y)^2 &= 4x^4 + 4y^4 + (x+y)^4 + (x-y)^4, \\ 10\,u(x,y)^3 &= 8x^6 + 8y^6 + (x+y)^6 + (x-y)^6. \end{aligned}$$

La relation à trois termes $2u(x,y)^2 = (x+y)^2 + (x-y)^2$ est (aussi) une relation du 4-tissu $\mathcal{W}_0$. Le tissu $\mathcal{W}[x^2+y^2]$ est invariant par σ. ■

On va maintenant traduire le Théorème 3 en termes des fonctions elliptiques de Jacobi, en démontrer la deuxième partie et donner des modèles de ces tissus qui ont la propriété d'être « à feuilles algébriques ».

On note :

$$\theta_i := \theta_i(0,\tau), \qquad i = 1,2,3,4.$$

À $\tau \in \mathcal{H}$ on associe les nombres :

$$k = \theta_2^2/\theta_3^2, \qquad k' = \theta_4^2/\theta_3^2.$$

Les fonctions elliptiques de Jacobi *de paramètre* τ ou *de module* k sont définies par :

$$\mathrm{sn}_k x = \frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(x/\theta_3^2)}{\theta_4(x/\theta_3^2)}, \quad \mathrm{cn}_k x = \frac{\theta_4}{\theta_2}\frac{\theta_2(x/\theta_3^2)}{\theta_4(x/\theta_3^2)}, \quad \mathrm{dn}_k x = \frac{\theta_4}{\theta_3}\frac{\theta_3(x/\theta_3^2)}{\theta_4(x/\theta_3^2)}.$$

Le nombre k' est appelé *le module conjugué de* k. On a $k^2 + k'^2 = 1$. Ces fonctions ne dépendent en fait que du carré du module. La fonction

$$\mathcal{H} \ni \tau \mapsto k(\tau)^2 \tag{14}$$

est une fonction modulaire, c'est-à-dire invariante par un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire. Elle prend toutes les valeurs complexes sauf 0 et 1. Elle est étudiée par exemple dans Chandrasekharan [**7**], livre auquel on renvoie pour plus de détails, en particulier sur les relations entre le paramètre τ et le module k, qu'on ne discutera pas.

Avec ces notations, la famille de fonctions $u(x, y)$ du Théorème 3 s'écrit $u(x, y) = k\,\mathrm{sn}_k(\theta_3^2 x)\,\mathrm{sn}_k(\theta_3^2 y)$. Modulo les dilatations de $\mathbb{C}^2$, on peut remplacer cette famille par la suivante :

$$k \in \mathbb{C},\ k^2 \neq 0, 1, \qquad u_k(x, y) = \mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y. \tag{15}$$

Compte tenu du Lemme 4 et de propriétés de la fonction (14) qu'on trouvera dans [**7**], la deuxième partie du Théorème 3 est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soit $k, l \in \mathbb{C}$ avec $k^2, l^2 \neq 0, 1$. Les tissus (avec singularités) $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y\,]$ et $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_l x\ \mathrm{sn}_l y\,]$ sont équivalents sous l'action du groupe* $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$ *si et seulement si*

$$l \in \{\,\pm k,\ \pm\frac{1}{k},\ \pm\frac{1-k}{1+k},\ \pm\frac{1+k}{1-k}\,\}. \tag{16}$$

Compte tenu du Lemme 3, cette proposition règle aussi la question de l'équivalence dans les germes. Avant de démontrer cette proposition, nous écrivons la relation (12) sous une autre forme :

Lemme 5. — *On a l'identité :*

$$\frac{1 + k\,\mathrm{sn}_k x\,\mathrm{sn}_k y}{1 - k\,\mathrm{sn}_k x\,\mathrm{sn}_k y} = \frac{\mathrm{dn}_k(x + y) - k\,\mathrm{cn}_k(x + y)}{\mathrm{dn}_k(x - y) - k\,\mathrm{cn}_k(x - y)}. \tag{17}$$

Démonstration : on pourrait partir de (12) mais on utilisera plutôt le formulaire des fonctions elliptiques. On part des formules d'additions (voir [**12**] (2.4.1)–(2.4.3) ; on n'écrit pas l'indice k) :

$$\mathrm{cn}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,y \mp \mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}\,y\,\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,y}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{sn}^2 y},$$

$$\mathrm{dn}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,y \mp k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}\,y\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,y}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{sn}^2 y}.$$

En substituant les seconds membres à $\mathrm{cn}(x \pm y)$ et $\mathrm{dn}(x \pm y)$ dans le second membre de (17), on obtient le résultat. ■

Remarque : en remplaçant (x, y) par $\sigma(x, y)$ dans (17), on voit que le tissu $\sigma(\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y\,])$ est un dilaté du tissu $\mathcal{W}[v]$, où $v(x, y) = (\mathrm{dn}_k x - k\mathrm{cn}_k x)/(\mathrm{dn}_k y - k\mathrm{cn}_k y)$. Pour éviter d'écrire des formules précises de la théorie des fonctions elliptiques, on convient de noter :

$$u'(x, y) \sim u(x, y) \tag{18}$$

s'il existe $c, d \in \mathbb{C}^*$ et $x', y', u_0 \in \mathbb{C}$ tels qu'on ait l'identité

$$(x, y) \in \mathbb{C}^2, \qquad u'(x, y) = cu(dx + x', dy + y') + u_0.$$

On utilisera une convention analogue pour les fonctions $u(x)$ d'une variable.

Démonstration de la Proposition : pour un module k fixé, on a les formules « de périodicité » suivantes, voir ([**12**] (2.1.21), (2.2.17)) :

$$\mathrm{sn}_k x \sim 1/\mathrm{sn}_k x, \qquad \mathrm{sn}_k x \sim \mathrm{dn}_k x/\mathrm{cn}_k x. \tag{19}$$

On aura besoin de la version plus précise de la première formule : il existe $T \in \mathbb{C}$, qui ne dépend que de k, tel que :

$$x \in \mathbb{C}, \qquad k\,\mathrm{sn}_k(x+T) = 1/\mathrm{sn}_k x. \tag{20}$$

D'autre part, on a les formules suivantes, qui relient des fonctions elliptiques de modules différents (voir [**12**] (3.9.4), (3.9.24), (2.6.12)) :

$$\mathrm{sn}_{1/k} x \sim \mathrm{sn}_k x, \qquad \mathrm{dn}_k x - k\mathrm{cn}_k x \sim 1/\mathrm{dn}_{l'} x, \qquad \mathrm{dn}_{k'} x \sim \mathrm{dn}_k x/\mathrm{cn}_k x,$$

où $l = (1-k)/(1+k)$ et k' et l' sont les modules conjugués de k et l. On a donc :

$$\frac{\mathrm{dn}_k x - k\mathrm{cn}_k x}{\mathrm{dn}_k y - k\mathrm{cn}_k y} \sim \frac{\mathrm{dn}_{l'} y}{\mathrm{dn}_{l'} x} \sim \frac{\mathrm{dn}_l y/\mathrm{cn}_l y}{\mathrm{dn}_l x/\mathrm{cn}_l x} \sim \frac{\mathrm{sn}_l y}{\mathrm{sn}_l x} \sim \mathrm{sn}_l y\,\mathrm{sn}_l x.$$

Il résulte du Lemme 5, de la remarque qui le suit et des équivalences ci-dessus que le tissu $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_l x\ \mathrm{sn}_l y\,]$ est équivalent par dilatation à l'image du tissu $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y\,]$ par la symétrie σ. Avec (19), ceci montre que, dans l'énoncé de la proposition, la condition (16) est suffisante.

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y\,]$ et $\mathcal{W}[\,\mathrm{sn}_l x\ \mathrm{sn}_l y\,]$ sont dans la même orbite sous l'action du groupe $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$. Quitte à remplacer l par $(1-l)/(1+l)$, on peut supposer qu'ils sont dans la même orbite sous l'action du groupe engendré par les dilatations de $\mathbb{C}^2$ et les symétries $(x,y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ et $(x,y) \mapsto (\pm y, \pm x)$ (« on a enlevé σ »). Comme ces symétries laissent ces tissus invariants, on peut supposer qu'ils sont équivalents par dilatation. On a alors nécessairement $\mathrm{sn}_k x\ \mathrm{sn}_k y \sim \mathrm{sn}_l x\ \mathrm{sn}_l y$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{sn}_k x = c\,\mathrm{sn}_l(dx + x') + e,$$

avec $c, d \in \mathbb{C}^*$ et $x', e \in \mathbb{C}$. D'autre part, et c'est une propriété classique, la fonction $\mathrm{sn}_k x$ est solution de l'équation différentielle :

$$(z')^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2).$$

On en déduit que $\mathrm{sn}_l x$ vérifie l'équation différentielle :

$$(z')^2 = (1-(cz+e)^2)(1-k^2(cz+e)^2)/(c^2d^2).$$

Le second membre doit être identique au second membre de l'équation différentielle $(z')^2 = (1-z^2)(1-l^2z^2)$. On obtient $e = 0$, puis $l^2 = k^2$ ou $l^2 = 1/k^2$. Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

On obtient un « modèle à feuilles algébriques » du tissu $\mathcal{W}[\mathrm{sn}_k x\,\mathrm{sn}_k y]$ en posant :

$$\mathrm{sn}_k^2 x = \xi, \qquad \mathrm{sn}_k^2 y = \eta.$$

On obtient le tissu équivalent :

$$\mathcal{W}(\,\xi,\ \eta,\ u_+(\xi,\eta),\ u_-(\xi,\eta),\ \xi\eta\,),$$

où $u_\pm(\xi,\eta) = \mathrm{sn}_k^2(x \pm y)$ peut être calculé grâce aux formules d'additions

$$\mathrm{sn}_k(x \pm y) = \frac{\mathrm{sn}_k x\,\mathrm{cn}_k y\,\mathrm{dn}_k y\ \pm\ \mathrm{sn}_k y\,\mathrm{cn}_k x\,\mathrm{dn}_k x}{1 - k^2\,\mathrm{sn}_k^2 x\,\mathrm{sn}_k^2 y}$$

et aux identités :

$$\mathrm{sn}_k^2 x + \mathrm{cn}_k^2 x = 1, \qquad \mathrm{dn}_k^2 x + k^2\,\mathrm{sn}_k^2 x = 1.$$

On écrit :

$$\mathrm{sn}_k(x \pm y) = \sqrt{A(\xi,\eta)} \pm \sqrt{A(\eta,\xi)},$$

avec

$$A(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{sn}_k^2 x \operatorname{cn}_k^2 y \operatorname{dn}_k^2 y}{(1-k^2 \operatorname{sn}_k^2 x \operatorname{sn}_k^2 y)^2} = \frac{\xi(1-\eta)(1-k^2\eta)}{(1-k^2\xi\eta)^2}.$$

On a donc :

$$u_+(\xi,\eta) + u_-(\xi,\eta) = 2(A(\xi,\eta) + A(\eta,\xi)),$$
$$u_+(\xi,\eta)u_-(\xi,\eta) = (A(\xi,\eta) - A(\eta,\xi))^2.$$

On vérifie que

$$A(\xi,\eta) - A(\eta,\xi) = \frac{\xi-\eta}{1-k^2\xi\eta}.$$

Au point (ξ,η) de $\mathbb{C}^2$, $u_+(\xi,\eta)$ et $u_-(\xi,\eta)$ sont les deux racines de l'équation en t :

$$(1-k^2\xi\eta)^2 t^2 - 2\big(\xi(1-\eta)(1-k^2\eta) + \eta(1-\xi)(1-k^2\xi)\big)t + (\xi-\eta)^2 = 0. \tag{21}$$

On en déduit que les feuilles des feuilletages $\mathcal{F}(u_+)$ et $\mathcal{F}(u_-)$ sont des germes des quartiques obtenues en fixant $t \in \mathbb{C}$ dans l'équation (21).

4. Un système différentiel associé aux tissus de la section précédente

Dans cette section, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 5. — *Soit u un germe de fonction qui vérifie (7). Si le tissu $\mathcal{W}[u]$ est exceptionnel et si le tissu $\{\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(u)\}$ est de rang maximal, le tissu $\mathcal{W}[u]$ est l'image, par un élément du groupe* $\operatorname{Sym}(\mathcal{W}_0)$*, d'un germe d'un des tissus considérés dans les Théorèmes 3 et 4.*

La démonstration repose sur la simplicité du système différentiel que doit vérifier une fonction $u(x,y)$, choisie de la forme $v(x) + w(y)$, pour que le tissu $\mathcal{W}[u]$ soit de rang maximal.

Plus généralement, on peut obtenir une condition différentielle assez simple (à écrire, pas toujours à résoudre) sur la fonction $u(x,y)$ pour qu'un tissu de la forme

$$\mathcal{W}(\, l_1, \ldots, l_p, u\,), \tag{22}$$

où $l_1, \ldots, l_p$ sont des formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes, soit de rang maximal. Les feuilles des feuilletages qui constituent le tissu (22) sont aussi les courbes intégrales des champs de vecteurs

$$X_k = \frac{\partial l_k}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial l_k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 1, \ldots, p\,; \qquad X_u = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Les champs $X_1, \ldots, X_p$ sont constants. Le p-tissu $\mathcal{W}(l_1, \ldots, l_p)$, formé de p faisceaux de droites parallèles, est de rang maximal $\rho(p) = (p-1)(p-2)/2$. En raisonnant comme au début de la section §3, on voit que le $(p+1)$-tissu (22) est de rang maximal $\rho(p+1) = \rho(p) + p - 1$ si et seulement si l'espace des fonctions $f'(u)$ telles que $f(u)$ vérifie une relation de la forme :

$$f(u) = \sum_{k=1}^{p} f_k(l_k) \tag{23}$$

est de dimension $p-1$, si et seulement si l'espace des fonctions $f(u)$ de cette forme est de dimension p. On a le lemme élémentaire :

Lemme 6. — *Avec les notations qu'on vient d'introduire, une fonction h est de la forme $h = \sum_{k=1}^{p} f_k(l_k)$ si et seulement si $X_1 \ldots X_p\, h = 0$.*

Démonstration : ce qui, à la rigueur, demande une démonstration, est le fait que, si $X_1 \dots X_p\, h = 0$, alors h est de la forme annoncée. C'est clair si $p = 1$ et, si c'est connu à l'ordre $p-1$,

$$(X_1 \dots X_{p-1})\, X_p h = 0$$

donne $X_p h = \sum_{k=1}^{p-1} f_k(l_k)$. Si, pour $k = 1, \dots p-1$, g_k est une primitive de f_k, $X_p g_k(l_k) = (X_p l_k) f_k(l_k)$ avec $X_p l_k \in \mathbb{C}^*$ (car l_k et l_p sont indépendantes). On en déduit l'existence de g_p tel que :

$$h = \sum_{k=1}^{p-1} g_k(l_k)/(X_p l_k) + g_p(l_p).$$

■

On en déduit le critère suivant :

Proposition 2. — *Avec les notations précédentes, soit $a_1, \dots, a_p$ les coefficients dans la formule*

$$X_1 \dots X_p\, f(u) \equiv \sum_{k=1}^{p} a_k(x,y) f^{(k)}(u), \tag{24}$$

obtenue en calculant formellement $X_1 \dots X_p\, f(u)$. Pour que le tissu $\mathcal{W}(\, l_1, \dots, l_p, u\,)$ soit de rang maximal, il faut et il suffit que u vérifie le système d'équations :

$$k = 1, \dots, p-1, \qquad X_u\,(a_k/a_p) \equiv 0. \tag{25}$$

On peut calculer facilement les fonctions a_k en termes de u et de ses dérivées, mais on n'utilisera que les cas $p = 2$ et $p = 4$. Notons seulement que

$$a_p \equiv (X_1 u) \dots (X_p u) \neq 0$$

au point d'étude ; c'est la condition de transversalité des feuilletages.

Démonstration : on note $b_k = a_k/a_p$, $k = 1, \dots, p-1$. Compte tenu de la discussion qui précède l'énoncé, le tissu est de rang maximal si et seulement si l'équation

$$f^{(p)}(u(x,y)) + \sum_{k=1}^{p-1} b_k(x,y) f^{(k)}(u(x,y)) = 0$$

a un espace de solutions de dimension p. Si l'on prend un système de coordonnées locales (u, v) dont u fait partie, l'équation précédente est une équation différentielle ordinaire, avec u comme variable de dérivation et v comme paramètre. Il est clair que le premier membre ne doit pas dépendre explicitement de v. D'où la proposition. ■

Revenons au cas particulier des tissus $\mathcal{W}[u]$, pour lesquels $p = 4$ et

$$X_1 = \partial/\partial y, \;\; X_2 = \partial/\partial x, \;\; X_3 = \partial/\partial x - \partial/\partial y, \;\; X_4 = \partial/\partial x + \partial/\partial y.$$

On suppose aussi que $u(x,y)$ est de la forme

$$u(x,y) = v(x) + w(y)$$

et vérifie la condition (de transversalité) :

$$v_x w_y (v_x^2 - w_y^2) \neq 0. \tag{26}$$

(Par exemple, v_x, v_{xx}... désignent les dérivées successives de v). On a :

$$X_1X_2f(u) = (f(u))_{xy} = f''(u)v_xw_y,$$
$$X_1X_2X_3X_4f(u) = (f''(u)v_xw_y)_{xx} - (f''(u)v_xw_y)_{yy},$$

avec par exemple :

$$\begin{aligned}(f''(u)v_xw_y)_{xx} &= w_y(f'''(u)v_x^2 + f''(u)v_{xx})_x \\ &= w_y(f''''(u)v_x^3 + 3f'''(u)v_xv_{xx} + f''(u)v_{xxx}).\end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient :

$$X_1X_2X_3X_4f(u) = f''''(u)v_xw_y(v_x^2 - w_y^2) + 3f'''(u)v_xw_y(v_{xx} - w_{yy}) + f''(u)(w_yv_{xxx} - v_xw_{yyy}).$$

La proposition précédente s'applique : u définit un tissu de rang maximal si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées :

$$X_u\left(\frac{v_{xx} - w_{yy}}{v_x^2 - w_y^2}\right) = 0, \tag{27}$$

$$X_u\left(\frac{w_yv_{xxx} - v_xw_{yyy}}{v_xw_y(v_x^2 - w_y^2)}\right) = 0. \tag{28}$$

On a le lemme *a priori* surprenant suivant :

Lemme 7. — *Si $u(x,y) = v(x) + w(y)$ vérifie (26), l'équation (27) est une condition nécessaire et suffisante pour que le 3-tissu $\mathcal{W}(\,x+y,\, x-y,\, u(x,y)\,)$ soit de rang maximal.*

Démonstration : on a :

$$X_3X_4f(u) = f(u)_{xx} - f(u)_{yy} = f''(u)(v_x^2 - w_y^2) + f'(u)(v_{xx} - w_{yy}).$$

La Proposition 2 et la comparaison avec (27) donnent le résultat. ■

On a $X_u = v_x\partial/\partial y - w_y\partial/\partial x$. L'équation (27) s'écrit :

$$v_x\left(\frac{v_{xx} - w_{yy}}{v_x^2 - w_y^2}\right)_y = w_y\left(\frac{v_{xx} - w_{yy}}{v_x^2 - w_y^2}\right)_x. \tag{29}$$

On est amené à traiter à part les cas où l'une des fonctions v_{xx} ou w_{yy} s'annule identiquement. Si les deux fonctions sont nulles, u est une fonction affine et $\mathcal{F}[u]$ un faisceau de droites parallèles. Si par exemple $v_{xx} \equiv 0$ et $w_{yy} \not\equiv 0$, soit $v_x \equiv c \in \mathbb{C}^*$, on obtient :

$$\left(\frac{w_{yy}}{c^2 - w_y^2}\right)_y = 0, \tag{30}$$

d'où, pour un $k \in \mathbb{C}^*$, $w_{yy} = k(c^2 - w_y^2)$ et $w_{yyy} = -2kw_yw_{yy} = -2k^2w_y(c^2 - w_y^2)$. Pour le moment, on se contente de remarquer que l'équation (28), qui se réduit dans ce cas à :

$$\left(\frac{w_{yyy}}{w_y(c^2 - w_y^2)}\right)_y = 0$$

est impliquée par l'équation (27).

On suppose maintenant que les fonctions v_{xx} et w_{yy} ne sont pas identiquement nulles. On développe d'abord (29) sous la forme :

$$(\frac{v_{xxx}}{v_x} + \frac{w_{yyy}}{w_y})(v_x^2 - w_y^2) = 2(v_{xx}^2 - w_{yy}^2). \tag{31}$$

Il en résulte que la fonction

$$h := v_x^2 \frac{w_{yyy}}{w_y} - w_y^2 \frac{v_{xxx}}{v_x}$$

est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y. Donc $h_{xy} = 0$, ce qui donne :

$$v_x v_{xx} \left(\frac{w_{yyy}}{w_y} \right)_y = w_y w_{yy} \left(\frac{v_{xxx}}{v_x} \right)_x ,$$

ou mieux :

$$\frac{1}{w_y w_{yy}} \left(\frac{w_{yyy}}{w_y} \right)_y = \frac{1}{v_x v_{xx}} \left(\frac{v_{xxx}}{v_x} \right)_x \equiv 4p \in \mathbb{C},$$

puisque le premier membre ne dépend que de y et le deuxième que de x.

On a obtenu que v_x et w_y, comme fonctions d'une variable, sont solutions de la même équation différentielle :

$$\left(\frac{z''}{z} \right)' = 4pzz'. \tag{32}$$

Si $z \not\equiv 0$ vérifie (32), $z'' = 2pz^3 + qz$ pour un $q \in \mathbb{C}$, donc $z''z' = 2pz^3 z' + qzz'$, et finalement :

$$(z')^2 = pz^4 + qz^2 + r, \qquad q, r \in \mathbb{C}. \tag{33}$$

Réciproquement, supposons que :

$$v_{xx}^2 = pv_x^4 + qv_x^2 + r\,; \;\; w_{yy}^2 = pw_y^4 + q'w_y^2 + r',$$

donc :

$$\frac{v_{xxx}}{v_x} = 2pv_x^2 + q\,; \;\; \frac{w_{yyy}}{w_y} = 2pw_y^2 + q'.$$

L'équation (31) est vérifiée si et seulement si :

$$((2pv_x^2 + q) + (2pw_y^2 + q'))(v_x^2 - w_y^2) = 2((pv_x^4 + qv_x^2 + r) - (pw_y^4 + q'w_y^2 + r')).$$

Après simplification, on obtient $(q - q')v_x^2 + 2r = (q' - q)w_y^2 + 2r'$ et donc $q = q'$, $r = r'$.

Finalement, si $q = q'$ et $r = r'$, le premier membre de l'équation (28) devient :

$$X_u \left(\frac{v_{xxx}/v_x - w_{yyy}/w_y}{v_x^2 - w_y^2} \right) = 2pX_u 1 = 0.$$

L'équation (28) est vérifiée. En résumé, on a démontré :

Proposition 3. — *Soit $u(x, y) = v(x) + w(y)$ un germe de fonction qui vérifie (26). Le tissu $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal si et seulement si le tissu $\mathcal{W}(\, x + y,\, x - y,\, u(x, y)\,)$ est de rang maximal, si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *v_x et w_y sont constantes ;*
2. *v_x est une constante $c \in \mathbb{C}^*$ et $w_{yy} = k(c^2 - w_y^2)$ pour un $k \in \mathbb{C}^*$;*
3. *w_y est une constante $c \in \mathbb{C}^*$ et $v_{xx} = k(c^2 - v_x^2)$ pour un $k \in \mathbb{C}^*$;*
4. *il existe $p, q, r \in \mathbb{C}$ (non tous nuls) tels que v_x et w_y sont des solutions non constantes de l'équation différentielle $(z')^2 = pz^4 + qz^2 + r$.*

Démonstration du Théorème 5 : c'est un exercice assez rébarbatif qui consiste à réécrire les équations de la proposition, en distinguant une petite multitude de cas, et à vérifier qu'à chaque fois la solution $u(x, y)$ définit, à l'action près du groupe $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{W}_0)$, un tissu du Théorème 3 ou de l'un des types (A), (B), (C), (D) ou (E) du Théorème 4. Les fonctions u qui vont intervenir sont des fonctions classiques. On ne fera pas référence au point de base, qui peut être n'importe quel point tel que (26) soit vérifié. Soit $u(x, y)$ et $u'(x, y)$ deux fonctions du type considéré dans la Proposition

3. On suppose de plus que les feuilletages qu'elles définissent ne sont pas des faisceaux de droites. Sous cette condition, on sait qu'elles définissent le même tissu si et seulement si elles définissent le même feuilletage. C'est le cas si et seulement si u' est de la forme

$$u'(x,y) = cu(x,y) + e, \qquad (c \in \mathbb{C}^*,\ e \in \mathbb{C}).$$

(En effet, la forme imposée $u(x,y) = v(x) + w(y)$ est une relation abélienne non triviale du 3-tissu $\mathcal{W}(\,x,\ y,\ u(x,y))$. Toute autre relation de ce tissu est une combinaison linéaire de celle-ci et d'une « relation constante ».)

On utilisera la notation (18).

1. — Si u vérifie la première propriété de la proposition, u est une fonction affine, $\mathcal{F}(u)$ un faisceau de droites parallèles et $\mathcal{W}[u]$ un tissu algébrique.

2. — Si u vérifie la deuxième propriété de la proposition, quitte à remplacer u par $u' \sim u$, on se ramène au cas où $c = 1$, $k = 1$. L'équation $w_{yy} = 1 - w_y^2$ a la solution $w_y = \tanh y$. On obtient $u(x,y) \sim x + \log\cosh y$ et des tissus du type (C).

3. — Si u vérifie la troisième propriété de la proposition, la symétrie $(x,y) \mapsto (y,x)$ permet de se ramener au cas précédent.

4. — On suppose maintenant que u vérifie la quatrième propriété. On note :

$$\mathrm{E(p,q,r)}: \qquad (z')^2 = pz^4 + qz^2 + r,$$

l'équation différentielle vérifiée par $v_x = u_x$ et $w_y = u_y$. Si z est une solution particulière de l'équation précédente, la solution générale est $t \mapsto \pm z(t + t')$. Donc, étant donné une primitive v de z, on a :

$$u(x,y) \sim v(x) \pm v(y).$$

Selon les cas les tissus associés à des signes différents sont équivalents ou ne le sont pas.

D'autre part, en remplaçant u par $u' \sim u$, on peut remplacer l'équation E(p,q,r) par l'équation E(c^2d^2p, c^2q/d^2,r/(c^2d^2)) pour tout $c, d \in \mathbb{C}^*$.

4-a. — Si $p = 0$ et $q = 0$, on se ramène à $r = 2$, d'où $z(t) = t/2$ et $v(x) = x^2$. On obtient $u(x,y) \sim x^2 \pm y^2$ et, selon le signe, des tissus du type (D) ou du type (E).

4-b. — Si $p = 0$ et $r = 0$, on se ramène à $q = 1$, d'où $z(t) = e^t$, $v(x) = e^x$. On obtient $u(x,y) \sim e^x \pm e^y$. Une translation permet de passer du signe $-$ au signe $+$. On obtient des tissus du type (C).

4-c. — Si $p = 0$ et $qr \neq 0$, on se ramène à $q = 1$, $r = 1$, $z(t) = \sinh t$, $v(x) = \cosh x$. On obtient $u(x,y) \sim \cosh x \pm \cosh y$. Une translation permet de passer du signe $-$ au signe $+$. On obtient des tissus du type (B).

4-d. — Si $q = 0$ et $r = 0$, on se ramène à $p = 1$, d'où $z(t) = 1/t$, $v(x) = \log x$. On obtient : $u(x,y) \sim \log x \pm \log y$. Si le signe est $-$, on obtient un faisceau de droites, donc un tissu algébrique. Si le signe est $+$, on obtient des tissus du type (D).

4-e. — On suppose maintenant $p \neq 0$, $(q,r) \neq (0,0)$. En remplaçant u par $u' \sim u$, on se ramène au cas où l'équation E(p,q,r) est de la forme suivante :

$$\mathrm{E(k)}: \qquad (z')^2 = (1 - z^2)(1 - k^2z^2). \tag{34}$$

Cette équation a comme solution particulière la fonction de Jacobi $\mathrm{sn}_k t$ si $k \neq 0, 1$, la fonction $\sin t$ si $k = 0$ et la fonction $\tanh t$ si $k = 1$. On a

$$\int \mathrm{sn}_k t\, dt = \frac{1}{k}\log(\mathrm{dn}_k t - \mathrm{cn}_k t) + \mathrm{cte} \sim \log(\mathrm{sn}_{\mathrm{l}} t),$$

où $l = (1-k)/(1+k)$ (voir [**12**] (2.7.1)).

4-e (i). — Si $k^2 = 0$, on obtient $u(x,y) \sim \log\sin x \pm \log\sin y$. Selon que le signe est $+$ ou $-$, les tissus obtenus sont du type (B) ou du type (A).

4-e (j). — Si $k^2 = 1$, on obtient $u(x,y) \sim \log\tanh x \pm \log\tanh y$. Une translation permet de passer du signe $-$ au signe $+$. On obtient des tissus du type (A).

4-e (k). — Si $k^2 \neq 0, 1$, on obtient $u(x,y) \sim \log \mathrm{sn}_l x \pm \log \mathrm{sn}_l y$. Compte tenu de (20), une translation permet de passer du signe $-$ au signe $+$. On obtient les tissus du Théorème 3. ■

On donne ici quelques invariants relatifs aux relations abéliennes des tissus dont il vient d'être question. Pour $u(x,y) \in \mathcal{O}_2$, on note $\mathcal{R}_3\,[u]$, $\mathcal{R}_4\,[u]$ et $\omega\,[u]$, les invariants $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ et l'armure du tissu

$$\mathcal{W}[u] := \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, u(x,y)\,\big)\,.$$

On a alors le tableau suivant :

$u(x,y)$	$\mathcal{R}_3\,[u]$	$\mathcal{R}_4\,[u]$	$\omega\,[u]$
$\mathrm{sn}_k\, x\ \mathrm{sn}_k\, y$	8	1	$(4,1,1)$
$\tanh x\ \tanh y$	6	3	$(4,2,0)$
$\sin x\ \sin y$	6	1	$(4,1,1)$
$e^x + e^y$	8	3	$(4,2,0)$
$x^2 - y^2$	6	3	$(4,1,1)$
$x^2 + y^2$	6	1	$(4,0,2)$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. Akivis, V.V. Goldberg, Differential geometry of webs, *Handbook of differential geometry, Vol. I, 1–152, North-Holland, Amsterdam*, 2000.

[2] W. Blaschke, Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse, *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ.* **19** (1933), 313–317.

[3] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 49, *J. Springer, Berlin*, 1938 .

[4] E. Bompiani, E. Bortolotti, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese, *Math. Z.* **42** (1937), 411–429.

[5] P. Buzano, Determinazione e studio di superficie di S_5 le cui linee principali presentano una notevole particolarità, *Ann. Mat. Pura Appl.* **18**, (1939), 51–76.

[6] P. Buzano, Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane, *Boll. Un. Mat. Ital. (2), 1* (1939), 7–11.

[7] K. Chandrasekharan, *Elliptic functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 281, *Springer-Verlag, Berlin*, 1985.

[8] S.S. Chern, Wilhelm Blaschke and Web Geometry, in *Wilhelm Blaschke, Gesammelte Werke, Band 5, Thales Verlag* 1985, 25–27.

[9] S.S. Chern, P. Griffiths, Abel's theorem and webs, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **80** (1978), *no.* 1-2, 13-110. Corrections and addenda to our paper : "Abel's theorem and webs", *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **83** (1981), *no.* 2, 78–83.

[10] P.A. Griffiths, The Legacy of Abel in Algebraic Geometry, *in* The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial, Oslo 2002, *Springer*, 179–205.

[11] A. Hénaut, On planar web geometry through abelian relations and connections, *Ann. of Math.* (2) **159** (2004), *no.* 1, 425–445.

[12] D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications,* Applied Mathematical Sciences, 80, *Springer-Verlag, New-York,* 1989.

[13] L. Pirio, Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms, *Selecta Math. (NS)*, à paraître 2004.

[14] L. Pirio, Sur les tissus plans de rang maximal et le problème de Chern, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **339** (2004), 131–136.

[15] L. Pirio, Thèse de doctorat en préparation, Université Paris 6.

[16] G. Robert, Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans, *Prépublication n°* **146** (2002), *Université Bordeaux 1.*

[17] A. Terracini, Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie I, II, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser.* **26** (1937), 84–91 et 153–158.

On a tracé ci-dessous des dessins réels des feuilletages $U = \text{cte.}$ pour quelques-une des fonctions U telles que $\mathcal{W}(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, U\,)$ est exceptionnel.

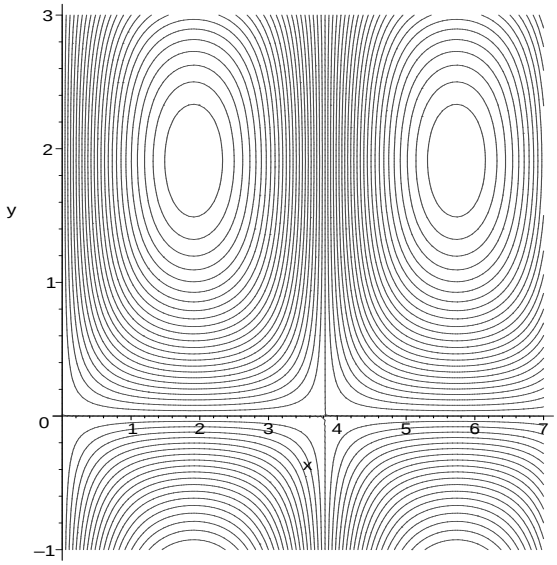


FIGURE 1. dessin réel du feuilletage $\mathrm{sn}_k\, x\, \mathrm{sn}_k\, y = \text{cte.}$ pour $k = 3/4$.

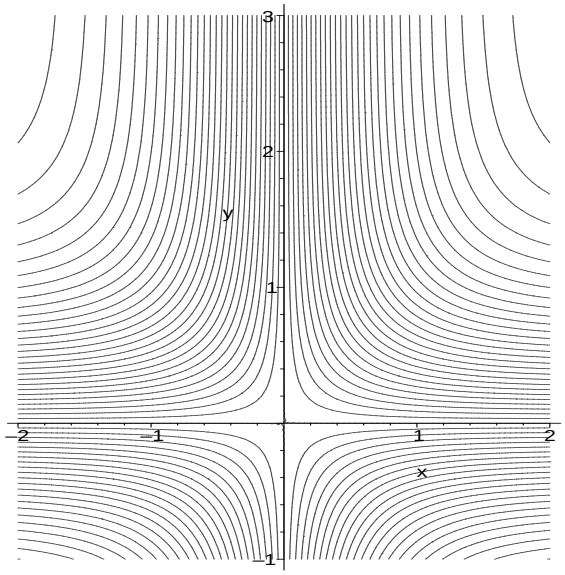


FIGURE 2. dessin réel du feuilletage tanh x tanh $y =$ cte.

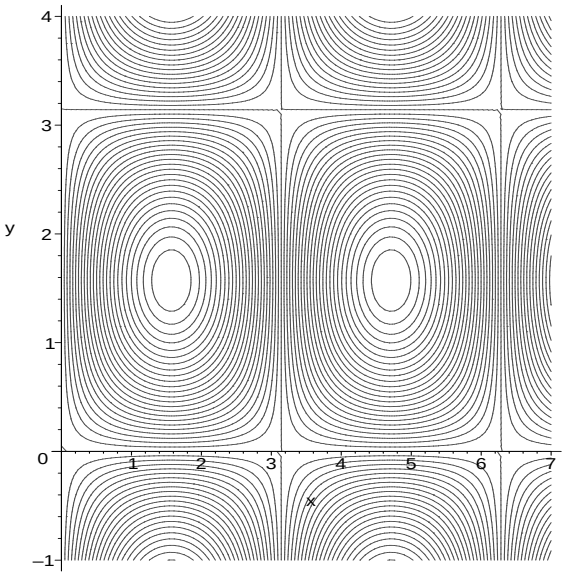


FIGURE 3. dessin réel du feuilletage sin x sin $y =$ cte.

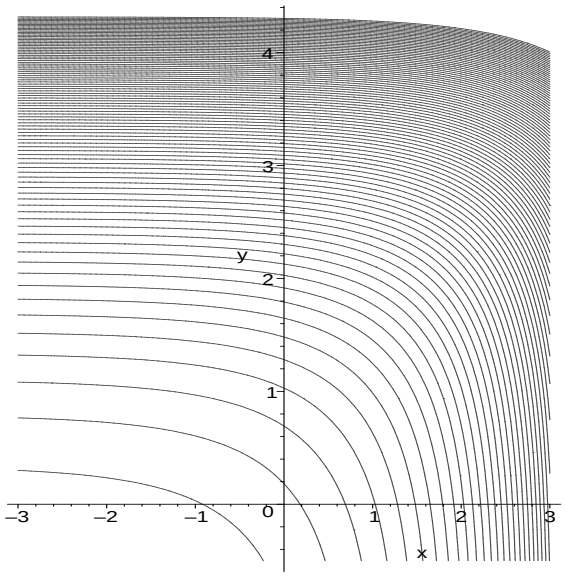


FIGURE 4. dessin réel du feuilletage $e^x + e^y = \text{cte}$.

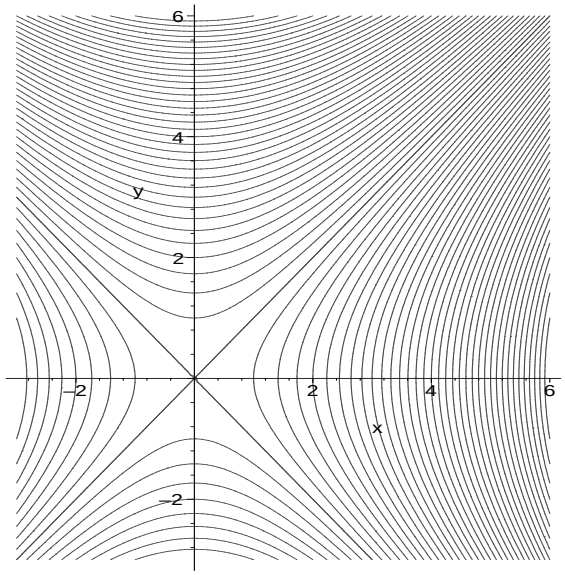


FIGURE 5. dessin réel du feuilletage $x^2 - y^2 = \text{cte}$.

CHAPITRE 7

SUR LES TISSUS POLYLOGARITHMIQUES

Dans ce chapitre, on étudie les polylogarithmes et les équations fonctionnelles qu'ils vérifient du point de vue de la géométrie des tissus. On peut découper le chapitre en trois parties :

Dans la première, on motive l'étude des "tissus polylogarithmiques". Après avoir présenté les équations fonctionnelles connues des polylogarithmes $\mathbf{Li}_k$ (pour $k \leq 5$) en 7.1.1, on donne une définition de ce qu'est un tissu polylogarithmique général en 7.1.2. On explique pourquoi ceux-ci sont des tissus susceptibles de porter "beaucoup" de relations abéliennes non-triviales, ce qui en fait des candidats intéressants dans la recherche de nouveaux tissus exceptionnels. Pour finir, on essaye de préciser la question de Griffiths citée à la fin de 4.4.4 quant à l'existence d'un "k-ième tissu polylogarithmique fondamental".

La seconde partie 7.2 est consacrée à l'étude explicite (du point de vue du rang et des relations abéliennes) des tissus polylogarithmiques associés aux équations fonctionnelles présentées en 7.1.1. En 7.2.1, on montre que le tissu de Spence-Kummer et certains de ses sous-tissus sont exceptionnels. Puis on étudie les tissus associés aux équations de Kummer du tétralogarithme (en 7.2.2) et du pentalogarithme (en 7.2.3). On montre que ces tissus ne sont pas de rang maximal mais admettent des sous-tissus qui sont exceptionnels.

Finalement, en 7.3.2, on donne plusieurs nouvelles familles à un paramètre complexe de k-tissus exceptionnels (pour $k = 6, 8$). S'il ne s'agit pas ici de "tissus polylogarithmiques", on a expliqué auparavant que ceux-ci peuvent sêtre définis à partir d'une configuration de points dans $\mathbb{CP}^2$, à l'instar des tissus de Bol et de Spence-Kummer. Pour finir, en 7.3.2, on introduit ce qui pourrait être une famille à deux paramètres de 10-tissus exceptionnels.

7.1. Généralités sur les tissus polylogarithmiques

Pour commencer, faisons quelques rappels généraux sur les polylogarithmes. Dans toute la suite, on désignera par log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Soit n un entier strictement positif et $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ le disque unité.

Définition 7.1.1. — Le *n-ième polylogarithme* $\mathbf{Li}_n$ est la somme de la série entière

$$\mathbf{Li}_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \ .$$

Le rayon de convergence de la série ci-dessus vaut 1. A priori, $\mathbf{Li}_n$ est donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Cependant, pour $|z| < 1$ et $k > 0$, on a :

$$\mathbf{Li}_1(z) := -\log(1-z) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{I}_k) \ : \quad \mathbf{Li}_{k+1}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{Li}_k(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$$

où l'intégration a lieu le long d'un chemin inclus dans $\mathbb{D}$. Ainsi, $\mathbf{Li}_1$ se prolonge comme une fonction holomorphe multivaluée sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. En utilisant les formules de représentation intégrale $(\mathcal{I}_k)$, on montre par récurrence que chaque $\mathbf{Li}_n$ se prolonge en une fonction holomorphe multivaluée sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. On continuera d'appeler n-ième polylogarithme et de noter $\mathbf{Li}_n$ ce prolongement. On prend la convention que, sur le disque unité, $\mathbf{Li}_n$ désigne toujours la somme de la série donnée par la Définition 7.1.1. Notons que pour tout $n \geq 2$, cette série converge pour $z = 1$ et sa somme vaut $\zeta(n)$, où ζ désigne la fonction zéta de Riemann. On notera alors $\mathbf{Li}_n(1) = \zeta(n)$.

Pour des précisions sur les polylogarithmes (par exemple, pour leurs propriétés de monodromie), on renvoie à [**Oe 92**] ou bien au livre [**P**].

7.1.1. Équations fonctionnelles des polylogarithmes. — Les polylogarithmes satisfont de nombreuses équations fonctionnelles. Euler déjà, qui introduisit le bilogarithme $\mathbf{Li}_2$, avait montré que celui-ci vérifie l'équation fonctionnelle suivante en une variable (pour $0 < x < 1$) :

$$\mathbf{Li}_2(x) + \mathbf{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log(x)\,\log(1-x)\,.$$

Au cours du 19ième siècle, de nombreuses recherches ont porté sur les polylogarithmes et les équations fonctionnelles qu'ils vérifient. Il a été établi de façon indépendante par de nombreux mathématiciens que les polylogarithmes $\mathbf{Li}_n$ d'ordre n plus petit que 5 satisfont des équations fonctionnelles en deux variables, toutes sensiblement du même type. On décrit ci-dessous ces équations sous des formes équivalentes à celles qui ont été obtenues au 19ième siècle.

Spence le premier (en 1809), suivi par Abel (1829), Hill (1830), Kummer (1840), Scheffers (1846) (et d'autres...), ont établi que le bilogarithme satisfait, pour $0 < x < y < 1$,

l'équation d'Abel du bilogarithme

$$(\mathcal{A}b) \qquad \mathbf{Li}_2\big(x\big) - \mathbf{Li}_2\big(y\big) - \mathbf{Li}_2\big(\frac{x}{y}\big) - \mathbf{Li}_2\big(\frac{1-y}{1-x}\big) + \mathbf{Li}_2\big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\big) = -\frac{\pi^2}{6} + \log(y)\,\log\big(\frac{1-y}{1-x}\big)\,.$$

(La forme ci-dessus est due à Scheffers. Cette équation est maintenant appelée *équation à cinq termes* ou *équation d'Abel* du bilogarithme, ce qui explique qu'on la note $(\mathcal{A}b)$).

Spence (1809) et Kummer (1840), indépendamment, ont établi que le trilogarithme $\mathbf{Li}_3$ satisfait

l'équation de Spence-Kummer du trilogarithme.

$$\begin{aligned}(\mathcal{SK}) \qquad & 2\,\mathbf{Li}_3\big(x\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(y\big) - \mathbf{Li}_3\big(\frac{x}{y}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(\frac{1-x}{1-y}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\big) - \mathbf{Li}_3\big(xy\big) \\ & + 2\,\mathbf{Li}_3\big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\big) + 2\,\mathbf{Li}_3\big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\big) - \mathbf{Li}_3\big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\big) \\ & = 2\,\mathbf{Li}_3(1) - \log(y)^2 \log\big(\frac{1-y}{1-x}\big) + \frac{\pi^2}{3}\log(y) + \frac{1}{3}\log(y)^3\,,\end{aligned}$$

(pour $0 < x < y < 1$).

Kummer a établi que le tétralogarithme et le pentalogarithme vérifient des équations semblables : dans ce qui suit, on pose $\zeta = 1 - x$ et $\eta = 1 - y$ et on suppose $0 < x < y < 1$.

Le tétralogarithme $\mathbf{Li}_4$ satisfait

l'équation de Kummer du tétralogarithme :

$$\mathcal{K}(4) \qquad \begin{aligned}
&\mathbf{Li}_4\big(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\big) + \mathbf{Li}_4\big(-\frac{y^2x\zeta}{\eta}\big) + \mathbf{Li}_4\big(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\big) + \mathbf{Li}_4\big(\frac{y^2x}{\zeta^2\eta}\big)\\
&- 6\,\mathbf{Li}_4\big(xy\big) - 6\,\mathbf{Li}_4\big(\frac{xy}{\eta\zeta}\big) - 6\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{xy}{\eta}\big) - 6\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{xy}{\zeta}\big)\\
&- 3\,\mathbf{Li}_4\big(x\eta\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(y\zeta\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(\frac{x}{\eta}\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(\frac{y}{\zeta}\big)\\
&- 3\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{x\eta}{\zeta}\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{y\zeta}{\eta}\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{x}{\eta\zeta}\big) - 3\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{y}{\eta\zeta}\big)\\
&+ 6\,\mathbf{Li}_4\big(x\big) + 6\,\mathbf{Li}_4(y) + 6\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{x}{\zeta}\big) + 6\,\mathbf{Li}_4\big(-\frac{y}{\zeta}\big) = -\frac{3}{2}\log^2(\zeta)\log^2(\eta)\,.
\end{aligned}$$

Le pentalogarithme $\mathbf{Li}_5$ satisfait

l'équation de Kummer du pentalogarithme :

$$\mathcal{K}(5) \qquad \begin{aligned}
&\mathbf{Li}_5\big(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\big) + \mathbf{Li}_5\big(-\frac{xy^2\zeta}{\eta}\big) + \mathbf{Li}_5\big(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\big) + \mathbf{Li}_5\big(\frac{xy^2}{\eta\zeta^2}\big) + \mathbf{Li}_5\big(\frac{x^2\eta}{y^2\zeta}\big)\\
&+ \mathbf{Li}_5\big(\frac{x\zeta}{y\eta}\big) + \mathbf{Li}_5\big(\frac{x^2\zeta\eta^2}{y}\big) + \mathbf{Li}_5\big(-\frac{x}{y\zeta^2\eta}\big) + \mathbf{Li}_5\big(\frac{x\eta^2}{y^2\zeta}\big)\\
&- 9\,\mathbf{Li}_5\big(xy\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{x}{y}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(x\eta\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{xy}{\eta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{x\eta}{y}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{xy}{\zeta}\big)\\
&- 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{x}{y\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{x\eta}{\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{x}{\eta\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{xy}{\eta\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{x\eta}{y\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\zeta y\big)\\
&- 9\,\mathbf{Li}_5\big(\eta\zeta\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{y\zeta}{\eta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{y}{\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{\eta}{\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{y}{\eta\zeta}\big) - 9\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{x}{\eta}\big)\\
&+ 18\,\mathbf{Li}_5\big(\frac{x}{\zeta}\big) - 18\,\mathbf{Li}_5\big(x\big) + 18\,\mathbf{Li}_5\big(\zeta\big) + 18\,\mathbf{Li}_5\big(y\big) + 18\,\mathbf{Li}_5\big(\eta\big) + 18\,\mathbf{Li}_5\big(-\frac{y}{\eta}\big)\\
&= -18\,\mathbf{Li}_5(3) - 18\,\mathbf{Li}_4(1)\,\log(\zeta) - 3\,\mathbf{Li}_2(1)\,\log^2(\zeta)\log\big(\frac{\zeta}{\eta^3}\big)\\
&\quad - \frac{3}{2}\,\log^2(\zeta)\,\log^2(\eta)\log\big(\frac{y^3}{\eta}\big) - \frac{3}{20}\,\log^4(\zeta)\,\log\big(\frac{\zeta^2y^5}{x^5}\big)\,.
\end{aligned}$$

Remarque : dans les quatre équations ci-dessus, on a considéré les fonctions $\mathbf{Li}_n$ $(n = 2, \ldots, 5)$ comme étant définies sur $I =]-\infty, 1\,[$ en utilisant les formules de représentation intégrale $(\mathcal{I}_k)$ sur I.

Depuis les travaux de Kummer et jusqu'à très récemment, il n'y a pas eu de découverte notable concernant les polylogarithmes et les équations fonctionnelles qu'ils vérifient. Depuis une trentaine d'années, cependant, on a pu voir un véritable regain d'intérêt pour les polylogarithmes et leurs

équations fonctionnelles puisque ceux-ci sont apparus dans de nombreux domaines distincts des mathématiques, parmi lesquels on peut citer

- la description du groupe K_3 des corps de nombres,
- l'expression du volume des simplexes en géométrie hyperbolique de dimension 3,
- la géométrie des grassmanniennes et des espaces de configurations de points,
- la cohomologie du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,
- les valeurs spéciales des fonctions zéta des corps de nombres,
- la théorie des tissus !

Pour des panoramas plus détaillés et plus complets, voir [**Za 89**], [**Oe 92**], [**Ha 94**], [**Go 95**] et [**P**].

En 1995, H. Gangl a découvert de nouvelles équations fonctionnelles satisfaites par les polylogarithmes $\mathbf{Li}_k$ pour $k \leq 7$ (à l'aide d'un ordinateur, en utilisant un critère algébrique dû à Zagier caractérisant les équations fonctionnelles des polylogarihtmes). Ces équations pour $k = 6$ et $k = 7$ sont d'une grande complexité puisqu'elles comportent respectivement 87 et 274 occurrences du polylogarithme concerné. On renvoie à [**Ga 96**] et [**Ga 03**] pour leur description.

Pour $n = 2, 3, 4, 5$, les polylogarithmes $\mathbf{Li}_n$ satisfont donc des sortes de relations fonctionnelles abéliennes non-homogènes, avec un second membre "logarithmique". Comme on l'a vu (en 4.4.3), le bilogarithme classique $\mathbf{Li}_2$ admet une variante (le dilogarihtme de Rogers $\mathbf{D}_2$) qui satisfait l'équation fonctionnelle abélienne homogène (*i.e.* sans second membre) associée à $(\mathcal{A}b)$.

Ce fait se généralise aux polylogarithmes de tout ordre, comme on va l'expliquer ci-dessous.

7.1.2. Polylogarithmes univalués et tissus polylogarithmiques. — On introduit les notations suivantes : si K est un corps, on pose $K^\bullet = K \setminus \{0, 1\}$ et si E est un ensemble non vide, $\mathbb{Z}[E]$ désigne le groupe libre engendré par les éléments de E. Un élément de $\mathbb{Z}[E]$ est une somme formelle à support fini $\Sigma\, n_e\{e\}$ avec $n_e \in \mathbb{Z}$ et $e \in E$.

Toutes les équations fonctionnelles connues, en deux variables, qui sont satisfaites par les polylogarithmes classiques $\mathbf{Li}_n$ sont de la forme

$$(\mathcal{E}_n) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mathbf{Li}_n(U_i) = \mathbf{E}\mathrm{lem}(n)$$

où

- $N \geq 3$ et $a_1, \ldots, a_N$ sont des entiers relatifs,
- $U_1, .., U_N$ sont des fractions rationnelles non constantes,
- $\mathbf{E}\mathrm{lem}(n)$ est de la forme $P\big(\mathbf{Li}_{k_1}(V_1), \ldots, \mathbf{Li}_{k_m}(V_m)\big)$ où $P(X_1, \ldots, X_m)$ est un polynôme, les $V_1, \ldots, V_m$ sont des fractions rationnelles non-constantes, et les entiers k_i vérifient $1 \leq k_i < n$.

Remarque : une telle équation $(\mathcal{E}_n)$ est dite *en deux variables* si on peut trouver U_i et U_j tels que $dU_i \wedge dU_j \not\equiv 0$. Elle est dite *en une variable* sinon. On s'intéressera principalement aux équations en deux variables, puisque c'est à ces équations qu'on pourra associer un tissu. Il semble d'autre part (cf. les conjectures plus bas) que toutes les équations en une variables satisfaites par les polylogarithmes peuvent être déduites par spécialisation d'équations en deux variables.

Le fait que les polylogarithmes classiques soient multivalués sur $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ implique qu'une équation de la forme $(\mathcal{E}_n)$ ne peut être vérifiée que localement et pour un choix bien particulier des déterminations des fonctions polylogarithmiques qui apparaissent dans l'équation. Cela rend délicat l'étude des équations fonctionnelles de cette forme satisfaites par les polylogarithmes.

Les polylogarithmes classiques ont la propriété remarquable d'avoir des "cousins" univalués, notés $\mathcal{L}_n$, définis et continus sur tout $\mathbb{CP}^1$ et qui satisfont globalement sur $\mathbb{CP}^2$ la version homogène d'une équation $(\mathcal{E}_n)$ vérifiée localement par $\mathbf{L}\mathrm{i}_n$.

Définition 7.1.2. — Pour $n \geq 2$, le *n-ième polylogarithme modifié* est défini par

$$\mathcal{L}_n(z) := \Re_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k\, B_k}{k!} \log^k |z|\, \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-k}(z) \right) \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}\big)\,.$$

Cette fonction est bien définie et (réelle) analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Elle se prolonge par continuité sur $\mathbb{CP}^1$ en posant $\mathcal{L}_n(0) = 0$, $\mathcal{L}_n(\infty) = 0$ et $\mathcal{L}_n(1) = \zeta(n)$ si n est impair, $\mathcal{L}_n(1) = 0$ sinon.

(Dans cette définition, $\Re_n$ désigne la partie réelle si n est impair, la partie imaginaire sinon, et B_k est le k-ième nombre de Bernoulli : $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, etc.).

L'existence de versions univaluées des polylogarithmes a été établie par D. Ramakrishnan. La formule explicite ci-dessus est due à Zagier. Il existe d'autres versions de polylogarithmes univalués (voir [**Bro 04**]), mais toutes n'ont pas la propriété vérifiée par les polylogarithmes univalués de Zagier qui satisfont les versions "propres" des équations des polylogarithmes classiques.

Notons $\mathcal{F}(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fontions réelles définies sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{CP}^2$. On peut étendre $\mathcal{L}_n$ par linéarité en un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \,:\, \mathbb{Z}\big[\mathbb{C}(x,y)^\bullet\big] &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R}) \\ \sum n_i \{U_i\} &\longmapsto \sum n_i\, \mathcal{L}_n(U_i)\,. \end{aligned}$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a le

Théorème 7.1.3. — *Soit $\Sigma_1^N a_i\{U_i\} \in \mathbb{Z}\big[\mathbb{C}(x,y)^\bullet\big]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

– *il existe un ouvert simplement connexe de $\mathbb{CP}^2$ sur lequel est vérifié une relation fonctionnelle*

$$(\mathcal{E}_n) \qquad : \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mathbf{L}i_n(U_i) = P\left(\mathbf{L}i_{k_1}(V_1), \ldots, \mathbf{L}i_{k_m}(V_m)\right)\,.$$

– *pour $k = 2, \ldots, n$, on a l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{CP}^2$*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \log^{n-k} |U_i|\, \mathcal{L}_k(U_i) = \text{cte.}$$

Pour une référence concernant ce théorème, on renvoie à [**Oe 92**] ainsi qu'à [**C**] (page 45-46). On y trouvera un critère algébrique qui caractérise les éléments σ de $\mathbb{Z}\big[\mathbb{C}(x,y)^\bullet\big]$ tels que $\mathcal{L}_n(\sigma) = \text{cte}$. On note $\mathcal{E}P_n$ l'ensemble formé par ces éléments :

$$\mathcal{E}P_n := \Big\{ \sum_i n_i\{U_i\} \in \mathbb{Z}\big[\mathbb{C}(x,y)^\bullet\big] \;\Big|\; \sum_i n_i \mathcal{L}_n(U_i) = \text{cte.} \Big\}\,.$$

Au vu du théorème précédent, on peut dire que $\mathcal{E}P_n$ est l'ensemble des "équations fonctionnelles abéliennes à coefficients entiers satisfaites par $\mathcal{L}_n$".

Ce théorème aura pour nous deux intérêts :

– le premier est qu'il permet une manipulation plus aisée des relations fonctionnelles de la forme $(\mathcal{E}_n)$: on ne précisera pas le domaine de validité de l'équation, ni le choix des branches des polylogarithmes classiques qui entrent en compte dans l'équation. De plus, $\mathcal{E}P_n$ a une structure algébrique :

c'est clairement un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}\big[\mathbb{C}(x,y)^\bullet\big]$.

– le second est le suivant : à une équation $\mathcal{E}_n \in \mathcal{E}P_n$ en deux variables, on peut associer le tissu, noté $\mathcal{W}[\mathcal{E}_n]$, défini par les fractions rationnelles U_i non-constantes qui apparaissent comme arguments de $\mathbf{Li}_n$ dans $(\mathcal{E}_n)$. On obtient un tissu global sur $\mathbb{CP}^2$, formé de pinceaux de courbes algébriques.

Définition 7.1.4. — Le tissu $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$ est le *tissu polylogarithmique associé à l'équation* $\mathcal{E}_n$. Plus généralement, un tissu sera dit *polylogarithmique* s'il est équivalent à un tissu $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$.

On remarquera que si N est le nombre d'occurrences de $\mathbf{Li}_n$ dans $(\mathcal{E}_n)$, $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$ n'est pas forcément un N-tissu : il peut arriver que deux fonctions U_i aient les mêmes ensembles de niveaux et définissent donc le même feuilletage de $\mathbb{CP}^2$. Par exemple, $\mathcal{W}\big[\mathcal{K}(4)\big]$ est un 18-tissu bien qu'il y ait 20 occurrences de $\mathbf{Li}_4$ dans $\mathcal{K}(4)$.

7.1.3. Sur les relations abéliennes des tissus polylogarithmiques. — Soit $(\mathcal{E}_n)$ une relation fonctionnelle en deux variables, satisfaite par $\mathcal{L}_n$.

Le Théorème 7.1.3 ci-dessus nous indique que $\mathcal{W}[\mathcal{E}_n]$ porte des relations fonctionnelles abéliennes de la forme $\Sigma_i\, a_i\, \mathcal{L}_n(U_i) = \text{cte.}$ Il faut noter que les composantes de cette équation ne sont pas holomorphes mais réelles-analytiques. Une telle équation ne correspond donc pas directement à une relation abélienne pour $\mathcal{W}[\mathcal{E}_n]$ dans le sens de la Définition 4.3.1. Cependant, si les U_i sont à coefficients réels[(1)] et si $\mathcal{L}_n$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* si n est impair), alors la restriction de l'équation $\Sigma_i\, a_i\, \mathcal{L}(U_i) = \text{cte.}$ à $\mathbb{R}^2$ va donner une relation fonctionnelle non-triviale dans le champ réel. Puisque les composantes de cette relation sont analytiques, celle-ci se complexifie et donne une véritable relation abélienne (holomorphe) pour $\mathcal{W}[\mathcal{E}_n]$.

Par exemple, d'après le Théorème 7.1.3, la fonction $\mathcal{L}_3$ vérifie la version homogène et globale de l'équation de $(\mathcal{SK})$. On en déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} &2\,\mathcal{L}_3\,(x) + 2\,\mathcal{L}_3\,(y) - \mathcal{L}_3\,(\frac{x}{y}) + 2\,\mathcal{L}_3\,(\frac{1-y}{1-x}) + 2\,\mathcal{L}_3\,(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}) \\ (\mathcal{SK}')\qquad &- \mathcal{L}_3\,(xy) + 2\,\mathcal{L}_3\,(-\frac{x(1-y)}{1-x}) + 2\,\mathcal{L}_3\,(-\frac{1-y}{y(1-x)}) - \mathcal{L}_3\,(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}) = \frac{\zeta(3)}{2}\,. \end{aligned}$$

Cette équation se complexifie en la relation fonctionnelle abélienne dans le champ complexe :

$$\begin{aligned} &2\,\ell_3(\,x\,) + 2\,\ell_3(\,y\,) - \ell_3(\,\frac{x}{y}\,) + 2\,\ell_3(\,\frac{1-x}{1-y}\,) + 2\,\ell_3(\,\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,) \\ &\qquad - \ell_3(\,xy\,) + 2\,\widehat{\ell}_3(\,-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\,) + 2\,\widehat{\ell}_3(\,-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\,) - \ell_3(\,\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\,) = 0 \end{aligned}$$

qui est satisfaite pour $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ proche de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, par les fonctions holomorphes (définies en 3.1)

$$\ell_3 := \mathbf{L}_{x_0^2 x_1} + \mathbf{L}_{x_0 x_1 x_0} - 2\,\mathbf{L}_{x_1 x_0^2} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\ell}_3 := \ell_3 - i\pi\,\mathbf{L}_{x_0 x_1} + 2i\pi\,\mathbf{L}_{x_1 x_0} + \pi^2\,\mathbf{L}_{x_1} + \frac{3}{2}\,\zeta(3)\,.$$

Si $n > 2$ est pair, cette construction ne peut s'appliquer à $\mathcal{L}_n$ puisque, dans ce cas, on a $\mathcal{L}_n \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. Mais on pourra par contre l'appliquer à la fonction $z \mapsto \log|z|\,\mathcal{L}_{n-1}(z)$, dont la restriction à $\mathbb{R}$ n'est pas identiquement nulle. Cela nous donnera une relation fonctionnelle abélienne holomorphe dont les

(1) Comme c'est le cas pour les équations $\mathcal{SK}$, $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$.

composantes sont des produits d'intégrales itérées polylogarithmiques. Les relations de mélanges que satisfont ces intégrales itérées impliquent que ces composantes sont des fonctions polylogarithmiques d'ordre n. Ainsi, même dans le cas où n est pair et $\mathcal{L}_n|_{\mathbb{R}} \equiv 0$, il existe une véritable relation abélienne dont les composantes sont des fonctions polylogarithmiques holomorphes construites à partir de $\mathbf{Li}_n$ et des $\mathbf{Li}_k$ avec $k < n$.

Le cas $n = 2$ ne rentre pas dans le cadre de la dernière remarque, puisque la fonction $\mathcal{L}_2 : z \mapsto \Im m\big(\mathbf{Li}_2(z) + \log|z| \log(1-z)\big)$, dite de Bloch-Wigner, est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Mais le dilogarithme de Rogers est bien composante d'une relation abélienne holomorphe de $\mathcal{B} = \mathcal{W}[\mathcal{A}b]$.

Pour résumer, la discussion ci-dessus montre que le Théorème 7.1.3 implique la

Proposition 7.1.5. — *Soit $n > 2$. Si $\mathbf{L}i_n$ vérifie une équation $(\mathcal{E}_n)$ où les U_i sont à coefficients réels, alors le tissu $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$ porte au moins une relation abélienne de longueur maximale, dont les composantes sont des intégrales itérées polylogarithmiques d'ordre n.*

Remarques : 1. pour toutes les équations $(\mathcal{E}_n)$ satisfaites par $\mathcal{L}_n$ qui sont connues, les fractions rationnelles U_i sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (modulo composition à droite par une application rationnelle). La condition de la proposition sur la réalité des U_i n'est peut-être pas restrictive en général.

2. l'hypothèse $n > 2$ n'est pas véritablement problématique. En un sens un peu vague, on peut dire que les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont compris du point de vue de la géométrie des tissus, puisque $\mathcal{W}(x, y, xy)$ (resp. $\mathcal{B}$) porte la relation fonctionnelle fondamentale satisfaite par le logarithme (resp. par le dilogarithme).

Dans tout ce qui suit, on suppose que $(\mathcal{E}_n)$ est formé par des fractions rationnelles réelles.

La proposition ci-dessus nous indique que $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$ portera toujours une relation abélienne particulière, dont les composantes sont des fonctions polylogarithmiques d'ordre n. Du fait que ces fonctions sont multivaluées et possèdent une monodromie non triviale, il est naturel de penser que cette relation abélienne va en engendrer beaucoup d'autres par prolongement analytique. C'est ce qui se produit pour les équations $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{SK})$. Par exemple, on a vu (en *2.2.1.2*) que la relation abélienne dilogarithmique de $\mathcal{B} = \mathcal{W}\big[\mathcal{A}b\big]$ engendre tout $\mathcal{A}\big[\mathcal{B}\big]$ par prolongement analytique.

Cet argument fait des $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big]$ de bons candidats pour être des tissus de rang élevé. D'autre part, il est maintenant établi que $\mathcal{W}\big[\mathcal{A}b\big]$ et $\mathcal{W}\big[\mathcal{SK}\big]$ sont de rang maximal et exceptionnels. Ces remarques suggèrent que les tissus associés aux équations $(\mathcal{E}_n)$ sont de bons candidats pour être des tissus exceptionnels. La question de P. Griffiths $(\mathcal{Q}_{\mathcal{G}})$ citée dans l'introduction va également dans ce sens.

Il faut cependant apporter une restriction naturelle sur une équation fonctionnelle $(\mathcal{E}_n)$ pour que le tissu associé puisse être de rang maximal. La nature de cette restriction ressort clairement de l'exemple suivant : supposons qu'on ait une équation $\Sigma_1^N a_i\, \mathcal{L}_n(U_i) = \text{cte.}$ notée $(\mathcal{E}_n)$ et une application rationnelle $\phi : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$, génériquement de rang 2. Alors on a évidemment :

$$(\mathcal{E}'_n) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mathcal{L}_n(U_i) + \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mathcal{L}_n(U_i \circ \phi) = \text{cte}\,.$$

Pour les tissus associés, on pourra écrire $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}'_n\big] = \mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n\big] \cup \mathcal{W}\big[\mathcal{E}_n \circ \phi\big]$. Si ϕ est suffisamment générique, on aura $\mathcal{A}\big[\mathcal{E}'_n\big] = \mathcal{A}\big[\mathcal{E}_n\big] \oplus \mathcal{A}\big[\mathcal{E}_n \circ \phi\big]$ et il est clair que $\mathcal{W}\big[\mathcal{E}'_n\big]$ ne sera pas de rang maximal.

Pour éviter ce genre de pathologie, on va définir la notion d'être irréductible pour une équation $(\mathcal{E}_n)$. On définit une filtration sur $\mathcal{EP}_n$, en posant pour $p \geq 3$:

$$\mathcal{EP}_n^{(p)} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \{U_i\} \in \mathcal{EP}_n \;\middle|\; k \leq p \right\}.$$

Un élément $\sigma \in \mathcal{EP}_n^{(p)}$ est dit *d'ordre au plus* p, et il est *d'ordre* p s'il n'est pas d'ordre au plus $p-1$. Une équation fonctionnelle $(\mathcal{E}_n)$ d'ordre p est *irréductible* si elle ne peut pas s'écrire comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire d'équations d'ordre strictement plus petit que p.

On va s'intéresser aux tissus associés aux équations $(\mathcal{E}_n)$ irréductibles, puisque c'est pour eux que le rapport du rang sur l'ordre du tissu est susceptible d'être le plus grand.

Du fait qu'en géométrie des tissus on travaille à équivalence locale près, il n'est pas nécessaire de distinguer deux équations dont les tissus associés sont équivalents. Ainsi, on dira que $\mathcal{E}'_n$ *découle de* $\mathcal{E}_n$ si $\mathcal{E}'_n$ est obtenue en composant $\mathcal{E}_n$ à droite par une application rationnelle $\phi : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$ génériquement de rang 2. Cela sera noté $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n \circ \phi \succ \mathcal{E}_n$ et définit une relation d'ordre sur $\mathcal{EP}_n$.

Il est clair que si $\mathcal{E}'_n$ découle de $\mathcal{E}_n$ alors $\mathcal{W}[\mathcal{E}_n]$ et $\mathcal{W}[\mathcal{E}'_n]$ sont équivalents comme tissus. D'autre part, on montre facilement que toute équation $\mathcal{E}_n$ découle d'une équation minimale pour $\succ$.

Dans [**Gr 04**], Griffiths évoque l'existence, pour chaque $n \geq 2$, d'"une" équation particulière et en quelque sorte "fondamentale" qui serait vérifiée par $\mathcal{L}_n$. Dans le cas où cette équation existerait bel et bien, il pose la question de savoir si le tissu polylogarithmique associé est exceptionnel ou non. On va essayer de préciser cette idée d'une "équation fondamentale " satisfaite par chaque polylogarithme en s'appuyant sur les conjectures données ci-dessous, qui font partie du folklore concernant les polylogarithmes et leurs équations fonctionnelles. Nous n'avons pas trouvé de références satisfaisantes les concernant.

Il est clair qu'une équation "fondamentale" pour un polylogarithme se doit d'être irréductible. Posons

$$\varrho_n := \min \left\{ p \geq 3 \;\middle|\; \exists\, \mathcal{E}_n \text{ en deux variables, irréductible et d'ordre } p \right\} \in \{3, 4, \ldots\} \cup \{\infty\}.$$

Cet entier ϱ_n est plus petit que m si et seulement si il existe au moins une équation $\mathcal{E}_n$ en deux variables d'ordre m. On en déduit que ϱ_n est fini s'il est établi qu'il existe bien une équation $\mathcal{E}_n$ en deux variables non triviale satisfaite par $\mathbf{Li}_n$.

À l'heure actuelle, on ne connaît pas d'équations fonctionnelles $(\mathcal{E}_n)$ en deux variables satisfaites par $\mathbf{Li}_n$ pour $n \geq 8$ et donc seule la finitude des ϱ_k pour $k \leq 7$ est rigoureusement établie.

Le résultat suivant de Gilles Robert nous donne une minoration pour ϱ_n quel que soit $n \geq 2$:

Théorème 7.1.6 **([Ro 02])**. — *Pour $n \geq 2$, une équation $\mathcal{E}_n$ satisfaite par $\mathbf{L}i_n$ est forcément d'ordre plus grand que $3n$ si $n \geq 3$, et d'ordre plus grand que 5 si $n = 2$.*

Il est immédiat que $\varrho_1 = 3$. D'autre part, de 7.1.1 on déduit les majorations :

$$\varrho_2 \leq 5 \qquad \varrho_3 \leq 9 \qquad \varrho_4 \leq 20 \qquad \varrho_5 \leq 33 \qquad \varrho_6 \leq 87 \qquad \varrho_7 \leq 274\,.$$

Du fait que $\mathbf{Li}_2$ et $\mathbf{Li}_3$ satisfont respectivement les équations $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{SK})$ d'ordre respectif 5 et 9, le théorème ci-dessus implique que $\varrho_2 = 5$ et $\varrho_3 = 9$. Il est clair qu'une relation d'ordre ϱ_n est irréductible. Les équations $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{SK})$ sont donc irréductibles.

Il est conjecturé qu'il existe pour tout $n > 0$ une équation d'ordre ϱ_n qui va impliquer formellement toutes les équations $(\mathcal{E}_n)$ vérifiées par $\mathcal{L}_n$. Formulons cela plus précisément :

Conjectures : *Soit n un entier positif non nul.*

- $\mathbf{C}^1(n)$: *on a $\varrho_n < \infty$ i.e. $\mathbf{L}i_n$ satisfait au moins une équation $(\mathcal{E}_n)$ en deux variables.*
- $\mathbf{C}^2(n)$: *soient $\mathcal{E}_n^1$ et $\mathcal{E}_n^2$ deux équations en deux variables satisfaites par $\mathbf{L}i_n$, d'ordre le plus petit possible ϱ_n et minimales pour $\succ$. Alors $\mathcal{E}_n^1$ découle de $\mathcal{E}_n^2$ par composition à droite avec une application birationnelle (et inversement). En d'autres termes : modulo composition à droite avec une application rationnelle, il n'existe qu'une unique équation $\mathcal{E}_n$ d'ordre ϱ_n satisfaite par $\mathbf{L}i_n$.*

On note $\mathcal{P}(n)$ cette équation conjecturale d'ordre ϱ_n.

- $\mathbf{C}^3(n)$: *toute équation $\mathcal{E}_n$ satisfaite par $\mathbf{L}i_n$, en une ou deux variables, est combinaison linéaire d'équation obtenues par spécialisations de compositions à droite de l'équation $\mathcal{P}(n)$.*

On peut reformuler les résultats ci-dessus en disant que $\mathbf{C}^1(n)$ est établie pour $n \leq 7$. Il n'est pas difficile de montrer que $\mathbf{C}^2(1)$ est satisfaite. D'après [**Go 93**], deux équations dilogaritmiques réalisant ϱ_2 définissent des tissus équivalents (voir aussi le Théorème 1.4 dans [**Ro 02**]).

Si l'on admet que les conjectures ci-dessus sont vérifiées pour tout $n \geq 1$, alors la définition suivante a bien un sens :

Définition 7.1.7. — Pour $n \geq 1$, le *n-ième tissu polylogarithmique fondamental* (ou de façon plus concise le *n-ième tissu polylogarithmique*) est le tissu $\big($encore noté $\mathcal{P}(n)\big)$ associé à l'équation $\mathcal{P}(n)$ d'ordre le plus petit possible ϱ_n donnée par $\mathbf{C}^2(n)$.

Dans les cas où elle a bien un sens, cette définition caractérise plus une classe d'équivalence de tissus (modulo transformations birationnelles) qu'un tissu particulier. Cela est sans importance puisqu'on regarde les tissus modulo équivalence et, en ayant cela en tête, on parlera "du" n-ième tissu polylogarithmique $\mathcal{P}(n)$. Si l'on veut faire un choix plus "canonique", on peut demander, par exemple, que la somme des degrés des feuilles passant par un point générique soit la plus petite possible.

Dans l'état actuel des connaissances, seuls $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont bien définis : on a

$$\mathcal{P}(1) = \mathcal{W}(x, y, xy) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}(2) = \mathcal{B}\,.$$

Il n'est pas complètement établi que toute équation à neuf termes satisfaite par $\mathcal{L}_3$ découle de $(\mathcal{SK}')$, ni que la conjecture $\mathbf{C}^3(3)$ est satisfaite pour cette équation, mais cela est attendu. Le tissu de Spence-Kummer est le 9-tissu noté $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}\mathcal{K}$ associé à l'équation $(\mathcal{SK})$. Il est sans doute le tissu polylogarithmique $\mathcal{P}(3)$. On a :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{SK}} = \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, xy\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{1-x}{1-y}\,,\, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{x(1-y)}{(1-x)}\,,\, \frac{(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2} \right).$$

Les équations d'ordre le plus petit possible satisfaites par $\mathbf{L}\mathrm{i}_4$ et $\mathbf{L}\mathrm{i}_5$ qui sont connues sont (respectivement) les équations de Kummer notées $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$ plus haut. Celles-ci ont une structure semblable à celle de $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{SK})$ (voir le second article de G. Wechsung dans [**P**]). On peut penser que ces équations sont irréductibles ou même sont les "équations fondamentales" du tétralogarithme et du pentalogarithme mais cela n'est pas prouvé.

Notons

$$\mathcal{P}log(2) = \mathcal{B}\,, \qquad \mathcal{P}log(3) = \mathcal{W}_{\mathcal{SK}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}log(k) = \mathcal{W}\big[\mathcal{K}(s)\big] \qquad (s = 4, 5)\,.$$

On peut vérifier que pour $n = 3, 4, 5$, chaque tissu $\mathcal{P}log(n)$ admet plusieurs $\mathcal{P}log(n-1)$ comme sous-tissus (voir 7.2). En particulier, tous ces tissus contiennent le tissu de Bol (de différentes façons) et donc ne sont pas linéarisables (car toute linéarisation de $\mathcal{P}log(n)$ induirait une linéarisation pour $\mathcal{B}$, qui n'en admet pas).

Ainsi $\mathcal{P}log(2)$ est exceptionnel, et pour $n = 3, 4, 5$, les points discutés ci-dessus indiquent que $\mathcal{P}log(n)$:

1. porte au moins une relation abélienne polylogarithmique de longueur maximale ;
2. cette relation est susceptible d'en engendrer beaucoup d'autres par prolongement analytique ;
3. n'est pas linéarisable.

Ces trois points font des tissus $\mathcal{P}log(n)$ de "bons candidats" $\big($pour reprendre l'expression de Hénaut dans [**Hé 01**]$\big)$ pour être des tissus exceptionnels. Ces tissus sont étudiés ci-dessous. On montre que $\mathcal{P}log(3)$ est exceptionnel. Par contre, contrairement à ce qui était attendu, les tissus $\mathcal{P}log(4)$ et $\mathcal{P}log(5)$ ne sont pas de rang maximal, et donc ne sont pas exceptionnels.

7.2. Étude explicite de quelques tissus polylogarithmiques

On étudie, dans l'ordre, le tissu de Spence-Kummer, le tissu de Kummer du tétralogarithme et enfin le tissu associé à l'équation $\mathcal{K}(5)$ du pentalogarithme. Grâce aux outils effectifs introduits au chapitre 5, on a pu étudier non seulement leur rang, mais aussi le rang de leurs sous-tissus. On a ainsi obtenu des résultats intéressants, comme la découverte de nouveaux 5-tissus exceptionnels.

7.2.1. Étude du tissu de Spence-Kummer et de ses sous-tissus. — On étudie tout d'abord les propriétés de base du tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{S}K}$. On s'attarde ensuite à une étude plus approndie des questions relatives au rang et aux relations abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathcal{S}K}$ et de certains de ses sous-tissus.

7.2.1.1. Quelques généralités sur le tissu de Spence-Kummer. — On note et numérote de la façon suivante les fractions rationnelles qui définissent $\mathcal{W}_{\mathcal{S}K}$ comme tissu ordonné :

$$U_1 = x \qquad U_4 = \frac{1-y}{1-x} \qquad U_7 = -x\,\big(\frac{1-y}{1-x}\big)$$
$$U_2 = y \qquad U_5 = \frac{x}{y}\,\big(\frac{1-y}{1-x}\big) \qquad U_8 = -\frac{1}{y}\,\big(\frac{1-y}{1-x}\big)$$
$$U_3 = \frac{x}{y} \qquad U_6 = xy \qquad U_9 = \frac{x}{y}\,\big(\frac{1-y}{1-x}\big)^2 .$$

Le tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{S}K} = \mathcal{W}(U_1, .., U_9)$ est un tissu globalement défini sur $\mathbb{CP}^2$. Son lieu singulier noté $\Sigma(\mathcal{S}\mathcal{K})$ a été donné en 3.2.

Soit ϕ l'application birationnelle définie par

$$\phi : (x, y) \longmapsto \big(\,(1+x)/x\,,\,(1+y)/y\,\big)\,.$$

Comme tissu ordonné, on a $\phi^*\big(\mathcal{W}_{\mathcal{S}K}\big) = \mathcal{W}(V_1, \ldots, V_9)$ où les V_i sont définies par

$$V_1 = x \qquad V_4 = \frac{x}{y} \qquad V_7 = -\frac{1+x}{y}$$
$$V_2 = y \qquad V_5 = \frac{1+x}{1+y} \qquad V_8 = -\frac{x}{1+y}$$

$$V_3 = \frac{y}{x}\frac{1+x}{1+y} \qquad V_6 = \frac{(1+x)(1+y)}{xy} \qquad V_9 = \frac{x}{y}\frac{1+x}{1+y}\ .$$

On note $W_{\mathcal{SK}} = \mathcal{W}(V_1, \ldots, V9)$ ce tissu. C'est un modèle de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ qui est plus facile à étudier. Son lieu singulier $\Sigma[W_{\mathcal{SK}}]$ est la réunion de 12 droites :

$$\begin{aligned}\Sigma\big[W_{\mathcal{SK}}\big] = \mathbb{CP}^1_\infty \cup \{\, x=0 \,\} \cup \{\, y=0 \,\} \cup \{\, 1+x=0 \,\} \cup \{\, 1+y=0 \,\} \cup \{\, 2x+1=0 \,\} \ldots \\ .. \cup \{\, 2y+1=0 \,\} \cup \{\, x-y=0 \,\} \cup \{\, x+y=0 \,\} \cup \{\, x-y=1 \,\} \ldots \\ .. \cup \{\, x-y=-1 \,\} \cup \{\, x+y=-2 \,\}\ .\end{aligned}$$

La Figure 1 ci-dessous représente la configuration formée dans $\mathbb{C}^2$ par les onze droites de $\Sigma[W_{\mathcal{SK}}]$ qui sont distinctes de la droite à l'infini.

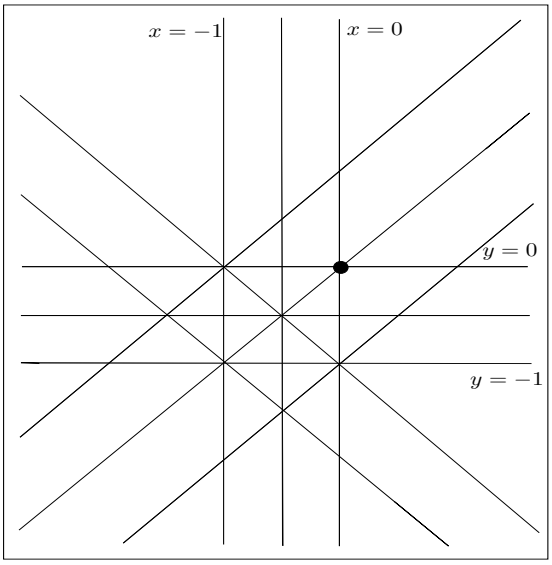
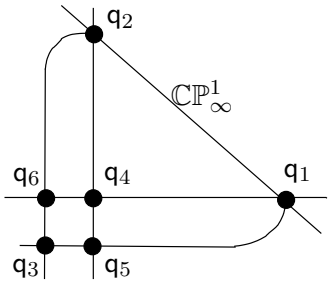


FIGURE 1. Le lieu singulier de W_{SK}.

Dans [**Bol 36**], Bol a donné une définition géométrique de $\mathcal{B}$ à partir d'une configuration de quatre points en position générale dans $\mathbb{CP}^2$. Il se trouve qu'avec la présentation $W_{\mathcal{SK}}$, le tissu de Spence-Kummer peut également être décrit géométriquement à partir d'une configuration de points.

Considérons la configuration de "Spence-Kummer" $\mathbf{C}_{\mathcal{SK}}$, définie par la figure ci-dessous :



Configuration $\mathbf{C}_{\mathcal{SK}}$:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{q}_1 = [\,1:0:0\,] & \mathsf{q}_2 = [\,0:1:0\,] \\ \mathsf{q}_3 = [1:1:-1] & \mathsf{q}_4 = [\,0:0:1\,] \\ \mathsf{q}_5 = [-1:0:1] & \mathsf{q}_6 = [0:-1:1] \end{array}$$

Le tissu $W_{\mathcal{SK}}$ peut-être décrit de la façon suivante : c'est le 9-tissu formé

– des 6 pinceaux de droites de sommets q_i (pour $i = 1, \ldots, 6$).

– des 3 pinceaux de coniques associés aux trois sous-configurations de $\mathbf{C}_{\mathcal{S}K}$ constituées des 4-uplets de points parmi les q_i qui sont en position générale.

À chaque 4-uplet de points $\mathsf{q}_{i_1}, \dots, \mathsf{q}_{i_4}$ en position générale, il va correspondre un tissu de Bol qui sera un sous-tissu de $W_{\mathcal{SK}}$. Ainsi $W_{\mathcal{SK}}$ admet trois tissus de Bol comme sous-tissus, à savoir :

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{W}(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)\,, \qquad \mathcal{B}_2 = \mathcal{W}(V_1, V_2, V_6, V_7, V_8) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_3 = \mathcal{W}(V_4, V_5, V_7, V_8, V_9)\,.$$

En utilisant la formule de la Proposition 5.2.3, on peut calculer aisément les courbures de Blaschke des sous-3-tissus de $W_{\mathcal{SK}}$. On en déduit que les seuls sous-5-tissus hexagonaux sont les trois tissus de Bol $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ ainsi que tous les sous-5-tissus de $\mathcal{W}(V_1, V_2, V_4, V_5, V_7, V_8)$ (ces derniers sont formés de pinceaux de droites). Puisqu'un tissu de Bol est hexagonal, on en déduit que l'on connaît tous les sous-5-tissus de $W_{\mathcal{SK}}$ qui sont des tissus de Bol : ce sont les trois qui viennent d'être considérés. Le tissu $H_{\mathcal{SK}} := \mathcal{W}(V_1, V_2, V_4, V_5, V_7, V_8)$ est formé de 6 pinceaux de droites, donc est hexagonal. On montre facilement que c'est le seul sous-6-tissu hexagonal de $W_{\mathcal{SK}}$.

De cela, on peut déduire sans difficulté les symétries de $W_{\mathcal{S}}\mathcal{K}$: soient ω et ϖ deux points de $\mathbb{CP}^2 \setminus \Sigma[W_{\mathcal{SK}}]$. Supposons qu'on ait un germe de biholomorphisme $\psi : (\mathbb{C}^2, \omega) \to (\mathbb{C}^2, \varpi)$ tel que $\psi_*(W_{\mathcal{SK}}) = W_{\mathcal{SK}}$. Alors, comme $H_{\mathcal{SK}}$ est l'unique sous-6-tissu hexagonal de $W_{\mathcal{SK}}$, on a forcément $\psi_*(H_{\mathcal{SK}}) = H_{\mathcal{SK}}$. Du théorème de Mayrhofer et Reidemester (voir § 10 dans [**BB**]), il vient que ψ est une transformation projective qui laisse invariante la configuration $\mathbf{C}_{\mathcal{SK}}$.

On vérifie sans difficulté que les trois transformations suivantes sont des symétries de $W_{\mathcal{SK}}$:

$$\psi_1 : (x, y) \mapsto (y, x)\,, \quad \psi_2 : (x, y) \mapsto \big(x, -(1 + y)\big)\,, \quad \psi_3 : (x, y) \mapsto \Big(\frac{1 + y}{x - y}\,, \frac{-x}{x - y}\Big)\,.$$

On note G le sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ engendré par les ψ_k $(k = 1, 2, 3)$.

Les trois ensembles de 4 points parmis les q_i qui sont en position générale sont :

$$\mathbf{C}_1 = \{\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3, \mathsf{q}_4\}\,, \qquad \mathbf{C}_2 = \{\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{C}_3 = \{\mathsf{q}_3, \mathsf{q}_4, \mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6\}\,.$$

Soit ψ une symétrie projective de $W_{\mathcal{SK}}$. Alors il existe i tel que $\psi\,(\mathbf{C}_3) = \mathbf{C}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Du fait que $\psi_2(\mathbf{C}_2) = \mathbf{C}_1$ et $\psi_3(\mathbf{C}_3) = \mathbf{C}_1$, on déduit, quitte à remplacer ψ par $g \circ \psi$ où g est un élément de G, que l'on peut supposer que $\psi(\mathbf{C}_3) = \mathbf{C}_3$. Puisque d'autre part $\psi(\mathbf{C}_{\mathcal{S}K}) = \mathbf{C}_{\mathcal{S}K}$, cela implique que $\psi(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}$: ψ fixe la droite à l'infini $\mathbb{CP}^1_\infty$, donc c'est une transformation affine. Quitte à composer à gauche par ψ_1, on peut supposer que $\psi(\mathsf{q}_1) = \mathsf{q}_1$ et $\psi(\mathsf{q}_2) = \mathsf{q}_2$. Sous ces hypothèses, ψ est de la forme $\psi : (x, y) \mapsto (\,ax + b\,,\, \alpha y + \beta\,)$ avec $a\,\alpha \neq 0$.

Alors ψ envoie le pinceau de sommet q_4 sur celui de sommet q_4 ou bien sur celui de sommet q_3. Quitte à composer avec $\psi_4 := \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi_2 \in G$ qui est telle que $\psi_4(\mathsf{q}_1) = \mathsf{q}_1$, $\psi_4(\mathsf{q}_2) = \mathsf{q}_2$, $\psi_4(\mathsf{q}_3) = \mathsf{q}_4$ et $\psi_4(\mathsf{q}_4) = \mathsf{q}_3$, on peut supposer que $\psi(\mathsf{q}_4) = \mathsf{q}_4$. On en déduit facilement que ψ est l'identité.

On a donc montré la

Proposition 7.2.1. — *Les symétries locales de $W_{\mathcal{SK}}$ sont en fait globales et projectives. Le groupe de ses symétries* $\mathrm{Aut}\big(W_{\mathcal{SK}}\big) = \{\, \phi \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \;\big|\; \phi^*\big(W_{\mathcal{SK}}\big) = W_{\mathcal{SK}} \,\}$ *est engendré par les ψ_k.*

On peut montrer que ce groupe a douze éléments.

On déduit de cette proposition qu'une symétrie locale pour $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est en fait globale et birationnelle. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}})$ des symétries birationnelles de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est bien sûr isomorphe à $\mathrm{Aut}(W_{\mathcal{SK}})$.

7.2.1.2. Relations abéliennes et rang du tissu de Spence-Kummer. — La résolution de l'équation fonctionnelle qui caractérise les relations fonctionnelles abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$

$$F_1(U_1) + F_2(U_2) + \cdots + F_9(U_9) = 0$$

a été faite en 3.2.1. On en déduit que le tissu de Spence-Kummer est de rang maximal. D'autre part, il admet trois tissus de Bol $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ comme sous-tissus, et donc n'est pas linéarisable puisqu'une linéarisation pour $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ en induirait une pour chacun des $\mathcal{B}_i$, et ils n'en admettent pas. Ainsi $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ n'est pas linéarisable. On a donc montré le

Théorème 7.2.2. — *Le tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ est exceptionnel.*

Remarque : La détermination d'une base de l'espace des relations abéliennes du tissu de Spence-Kummer a été obtenue de façon indépendante par l'auteur et par Gilles Robert. La première publication contenant une liste explicite des relations abéliennes et un énoncé équivalent au Théorème 7.2.2 ci-dessus est le preprint [**Pi 02**]. Les résultats de G. Robert ont quant à eux fait l'objet de la prépublication [**Ro 02**].

Si $\mathcal{W}$ est un sous-tissu de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$, on note $\mathrm{Orb}(\mathcal{W})$ l'orbite de $\mathcal{W}$ sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}})$:

$$\mathrm{Orb}(\mathcal{W}) = \left\{ \overline{\mathcal{W}} < \mathcal{W}_{\mathcal{SK}} \;\middle|\; \exists\, \psi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{SK}) \ \text{ telle que } \overline{\mathcal{W}} = \phi^* \left(\mathcal{W}\right) \right\} .$$

Pour $K \subset \{1, \ldots, 9\}$, on note $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^K$ le sous-tissu du tissu de Spence-Kummer défini par les fractions rationnelles U_k pour $k \in K$. On rappelle que le complémentaire de $\{k_1, \ldots, k_p\}$ est noté $\widehat{k_1..k_p}$.

Du fait que l'on dispose d'une liste explicite des relations abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$, l'étude du rang de ses sous-tissus se ramène à des questions d'algèbre linéaire élémentaire. On ne justifiera donc pas en détail les assertions ci-dessous :

1– on calcule sans difficulté l'armure du tissu de Spence-Kummer. On a :

$$\omega\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}\big] = \big(17, 3, 3, 3, 0, 0, 2\big) .$$

2– de même, on obtient que exactement 48 des 84 sous-3-tissus de $\mathcal{W}_{SK}$ sont hexagonaux :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}\big] = 48 .$$

3– aucun des sous-8-tissus du tissu de Spence-Kummer n'est de rang maximal. Ainsi :

$$\mathcal{R}_8\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}\big] = 0 .$$

On peut calculer le rang de ces sous-8-tissus. On a :

$$rg\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{k}}\big] = \begin{cases} 19 & \text{pour } k = 1, 2, 4, 5, 7, 8\,; \\ 20 & \text{pour } k = 3, 6, 9\,. \end{cases}$$

4– le tissu de Spence-Kummer admet exactement trois sous-7-tissus de rang maximal, d'où

$$\mathcal{R}_7\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}\big] = 3 .$$

Ces sous-7-tissus sont

$$\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{69}} \quad , \qquad \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{39}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{36}} ,$$

et forment une unique orbite sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{SK})$. Ils donc sont projectivement équivalents. Ils contiennent des tissus de Bol comme sous-tissus, et ne sont pas linéarisables : on a le

Théorème 7.2.3. — *Le tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{69}}$ est un 7-tissu exceptionnel.*

5– le tissu de Spence-Kummer possède exactement 11 sous-6-tissus de rang maximal. Un seul est linéarisable, il s'agit de $H_{\mathcal{SK}}$ qui est hexagonal. Les 10 autres 6-tissus forment deux orbites sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}})$, respectivement à 4 et 6 éléments :

$$\mathrm{Orb}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}) = \left\{ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{257}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{158}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{248}} \right\},$$

$$\mathrm{Orb}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{679}}) = \left\{ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{679}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{689}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{349}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{236}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{389}}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{136}} \right\}.$$

On obtient ainsi deux nouveaux 6-tissus exceptionnels non-équivalents :

Théorème 7.2.4. — *Les deux 6-tissus $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}$ et $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{679}}$ sont exceptionnels et non équivalents.*

Preuve abrégée : dans ce qui suit, on pose $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}$ et $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{679}}$.

Le sous-5-tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{6789}}$ de $\mathcal{W}_2$ est un tissu de Bol. On en déduit que $\mathcal{W}_2$ n'est pas linéarisable et donc est exceptionel.

Par contre, tous les sous-5-tissus de $\mathcal{W}_1$ sont de rang 5 et pas forcément non-linéarisables. Pour montrer que $\mathcal{W}_2$ est exceptionnel, on raisonne par l'absurde : supposons que $\mathcal{W}_1$ soit équivalent à un tissu algébrique $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ associé à une courbe algébrique $\mathcal{C}$ de degré 6. Alors le fait que exactement 8 de ses sous-3-tissus sont hexagonaux implique (par application du théorème d'Abel-inverse) que $\mathcal{C}$ contient exactement 8 cubiques distinctes. Il n'y a alors pas d'autre possibilité pour $\mathcal{C}$ que d'être l'union de quatre droites distinctes et d'une conique non-dégénérée. Dans ce cas, $\mathcal{C}$ contient exactement cinq courbes algébriques de degré 5, à savoir les courbes formées par la conique et trois des quatre droites qui composent $\mathcal{C}$. En particulier, cela implique que

$$\mathcal{R}_5\big[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}\big] = 5\,.$$

Il suffit alors de noter que $\mathcal{R}_5\big[\mathcal{W}_1\big] = 0$ pour conclure que $\mathcal{W}_1$ n'est pas algébrique. Ainsi $\mathcal{W}_1$ n'est pas linéarisable et donc il est exceptionnel.

Finalement, on obtient que $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ ne sont pas équivalents, en observant que

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}_1\big] = 8 \neq 16 = \mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}_2\big]\ .$$

■

6– le tissu de Spence-Kummer admet des sous-5-tissus exceptionnels (formant une unique orbite sous $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}})$), qui ne sont pas des tissus de Bol. Nous avons remarqué cela au cours de la rédaction de cette thèse. Cela n'apparaît pas dans les prépublications [**Pi 02**], [**Pi**] et [**Ro 02**].

Théorème 7.2.5. — *Le 5-tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12369}$ est exceptionnel et non-équivalent au tissu de Bol.*

Preuve abrégée : dans ce qui suit, on note $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12369}$.

En effectuant le changement de variables $(X, Y) = (\log(x)/2, \log(y)/2)$, on montre que $\mathcal{W}$ est équivalent au tissu

$$\mathcal{W}\big(\,X\,,\,Y\,,\,X+Y\,,\,X-Y\,,\,\sinh(X)/\sinh(Y)\,\big)\,.$$

Ce tissu est un "translaté" du tissu (A) considéré dans le Théorème 3 du chapitre 6. On en déduit que $\mathcal{W}$ est bien exceptionnel. D'autre part, seulement 6 des 10 sous-3-tissus de $\mathcal{W}$ sont hexagonaux, donc $\mathcal{R}_3[\mathcal{W}] = 6 < 10 = \mathcal{R}_3[\mathcal{B}]$. On en déduit que $\mathcal{W}$ n'est pas équivalent au tissu de Bol. ■

L'orbite de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12369}$ sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}})$ a trois éléments :

$$\mathrm{Orb}(\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12369}) = \left\{ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12369}\,,\ \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{34569}\,, \mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{36789} \right\}.$$

On peut vérifier que les sous-tissus du tissu de Spence-Kummer qui sont exceptionnels et qui ne sont pas des tissus de Bol sont ceux qui sont dans les orbites des tissus qui apparaissent dans les trois théorèmes ci-dessus. On a donc décrit tous les sous-tissus de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ qui sont exceptionnels.

7.2.2. Sur le tissu $\mathcal{K}(4)$ associé à l'équation de Kummer du tétralogarithme. — On note encore $\mathcal{K}(4)$ le tissu associé à l'équation de Kummer $\mathcal{K}(4)$ du tétralogarithme :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(4) := \mathcal{W}\Bigg(& x\,,\, y\,,\, xy\,,\, x\,(1-y)\,,\, y\,(1-x)\,,\, \frac{x}{1-y}\,,\, \frac{y}{1-x}\,,\, \frac{xy}{1-x}\,, \\ & \frac{xy}{1-y}\,,\, \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{x(1-y)}{1-x}\,,\, \frac{y(1-x)}{1-y}\,,\, \frac{x}{(1-x)(1-y)}\,, \\ & \frac{y}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{y^2x}{(1-x)^2(1-y)}\,,\, \frac{x^2y}{(1-y)^2(1-x)}\,,\, \frac{y^2x(1-x)}{1-y}\,,\, \frac{x^2y(1-y)}{1-x} \Bigg)\,.\end{aligned}$$

Son lieu singulier $\Sigma\big[\mathcal{K}(4)\big]$ est la réunion de 16 droites et de 32 coniques qu'on ne donnera pas explicitement, mais qu'il est facile de déterminer.

On note $(A_1, \ldots, A_{18})$ le 18-uplet de fractions rationnelles qui définissent $\mathcal{K}(4)$ comme tissu ordonné. Dans la suite de ce paragraphe on notera $\mathcal{K}(4)[I]$ le sous-tissu $\mathcal{W}(A_i \,|\, i \in I)$ de $\mathcal{K}(4)$, quand I est une partie non-vide de $\{1, \ldots, 18\}$.

En utilisant la formule de la Proposition 5.2.3 pour la courbure de Blaschke d'un 3-tissu, et à l'aide d'un ordinateur, on peut établir les points suivants :

1– exactement 186 des 816 sous-3-tissus de $\mathcal{K}(4)$ sont hexagonaux. Ainsi :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{K}(4)\big] = 186\,.$$

2– $\mathcal{K}(4)$ ne contient aucun sous-k-tissu hexagonal, pour $k \geq 7$.

3– par contre, il admet exactement 4 sous-6-tissus hexagonaux : ce sont les $\mathcal{H}_k = \mathcal{W}(A_i \,|\, i \in I_k\,)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$, avec

$$I_1 = \{1, 2, 3, 4, 8, 11\} \qquad I_2 = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$$
$$I_3 = \{1, 2, 6, 9, 10, 13\} \qquad I_4 = \{1, 2, 7, 8, 10, 14\}\,.$$

4– on peut établir que $\mathcal{K}(4)$ n'admet que quatre sous-9-tissus de rang maximal. Ce sont des tissus de Spence-Kummer, notés $\mathcal{W}SK_k$ pour $k = 1, \ldots, 4$. Chacun de ces tissus admet $\mathcal{H}_k$ comme unique sous-6-tissu hexagonal. Pour $k = 1, \ldots, 4$, on a $\mathcal{W}SK_k = \mathcal{W}(A_j \,|\, j \in J_k\,)$ avec

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 14, 18\} \qquad J_2 = \{1, 2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 17\}$$
$$J_3 = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 16\} \qquad J_4 = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 15\}\,.$$

5– la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus de $\mathcal{K}(4)$ n'est pas identiquement nulle :

$$\sum_{\mathcal{W}(3) < \mathcal{K}(4)} \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{W}(3)} \not\equiv 0\,.$$

Par le Corollaire 5.1.17, on en déduit que $\mathcal{K}(4)$ n'est pas de rang maximal.

6– plus généralement, soit $S = \{8, \dots, 18\} \setminus \{9\}$. Alors, pour $p \in S$, on peut établir qu'aucun des sous-p-tissus de $\mathcal{K}(4)$ ne vérifie la propriété d'avoir la somme des courbures de Blaschke de ses sous-3-tissus identiquement nulle. On en déduit qu'aucun des sous-p-tissus de $\mathcal{K}(4)$ n'est de rang maximal. En d'autres termes, on a :

$$\mathcal{R}_p\big[\mathcal{K}(4)\big] = 0 \qquad\qquad p = 8, 10, 11, \dots, 18\,.$$

7– le tissu $\mathcal{K}(4)$ admet exactement 24 sous-5-tissus non-hexagonaux (donc non-équivalents à $\mathcal{B}$) tels que la somme des courbures de Blaschke de leurs sous-3-tissus est identiquement nulle. Douze de ces tissus sont inclus dans un sous-tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}SK_k$ de $\mathcal{K}(4)$ et sont équivalents à $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{12339}$. Parmis les douze autres tissus de ce type, seuls trois ne sont pas de rang maximal. Les neuf autres tissus sont tous équivalents à :

$$\mathsf{W} := \mathcal{K}(4)\big[1, 2, 3, 7, 8\big] = \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, xy\,,\, \frac{y}{1-x}\,,\, \frac{xy}{1-x}\right)\,.$$

Ce tissu n'est pas linéarisable.[(2)] D'autre part, il est de rang maximal puisqu'on vérifie sans difficulté que la liste suivante est bien celle d'une famille libre à 6 éléments de relations abéliennes pour W :

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{1}\ : & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{\left(\frac{xy}{1-x}\right)} = 0 \\[2ex]
\mathbf{2}\ : & y - \dfrac{y}{1-x} + \dfrac{xy}{1-x} = 0 \\[2ex]
\mathbf{3}\ : & \log(x) + \log(y) - \log(xy) = 0 \\[2ex]
\mathbf{4}\ : & \log(1-x) - \log(y) + \log(\dfrac{y}{1-x}) = 0 \\[2ex]
\mathbf{5}\ : & \log(1-x) - \log(xy) + \log(\dfrac{xy}{1-x}) = 0 \\[2ex]
\mathbf{6}\ : & 2\log(x)\log(1-x) - \log^2(y) + \log^2(xy) + \log^2(\dfrac{y}{1-x}) - \log^2(\dfrac{xy}{1-x}) = 0\,.
\end{array}$$

On en déduit : $\omega[\mathsf{W}] = (5, 0, 1)$. Ainsi l'armure de W est différente des armures des tissus du chapitre précédent. Par contre, on a aussi $\omega[\mathcal{B}] = (5, 0, 1)$. On montre que $\mathcal{W}$ et W ne sont pas équivalents en remarquant que $\mathcal{R}_3[\mathsf{W}] = 8 < 10 = \mathcal{R}_3[\mathcal{B}]$. Le tissu W est donc un nouveau tissu exceptionnel.

8– de même, on montre que $\mathcal{K}(4)$ admet exactement 47 sous-6-tissus non-hexagonaux et tels que la somme des courbures de Blaschke de leurs sous-3-tissus est identiquement nulle. Parmi ces 47 sous-6-tissus figurent les sous-6-tissus exceptionnels des tissus de Spence-Kummer $\mathcal{W}SK_k$. On dénombre exactement 40 tels sous-tissus (10 pour chaque $\mathcal{W}SK_k$, avec $k = 1, \dots, 4$). Les 7 autres sont les tissus $\mathcal{K}(4)[K]$ pour K dans la liste ci-dessous :

(2) Cela sera montré en *8.5.6.1.*

$$K_1 = \{1,2,5,7,12,14\} \qquad K_2 = \{1,2,5,7,11,13\} \qquad K_3 = \{1,2,3,8,9,10\}$$
$$K_4 = \{1,2,4,5,6,7\} \qquad K_5 = \{1,2,11,12,13,14\} \qquad K_6 = \{1,2,4,6,11,13\}$$
$$K_7 = \{1,2,4,6,12,14\}\ .$$

Parmi ces 6-tissus, un seul est de rang maximal. Il s'agit du tissu

$$\mathfrak{W} = \mathcal{K}(4)[K_3] = \mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,xy\,,\,\frac{xy}{1-x}\,,\,\frac{xy}{1-y}\,,\,\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right)\ .$$

On vérifie que son rang est maximal en montrant que les 10 relations abéliennes ci-dessous sont bien linéairement indépendantes :

$$\mathbf{1}: \qquad \log(A_1)+\log(A_2)-\log(A_3)=0$$
$$\mathbf{2}: \qquad \log(\frac{A_1}{1-A_1})+\log(A_2)-\log(A_8)=0$$
$$\mathbf{3}: \qquad \log(A_1)+\log(\frac{A_2}{1-A_2})-\log(A_9)=0$$
$$\mathbf{4}: \qquad \frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_3}-\frac{1}{A_9}=0$$
$$\mathbf{5}: \qquad \frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}-\frac{1}{A_8}=0$$
$$\mathbf{6}: \qquad \log(A_8)+\log(A_9)-\log(A_{10})=0$$
$$\mathbf{7}: \qquad \frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}-\frac{1}{A_{10}}=-1$$
$$\mathbf{8}: \qquad \frac{1}{(A_3)^2}-\frac{1+2A_8}{(A_8)^2}-\frac{1+2A_9}{(A_9)^2}+\frac{1}{(A_{10})^2}=-1$$
$$\mathbf{9}: \qquad \frac{3}{2}\frac{1}{(A_1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(A_2)^2}+\frac{1-3(A_3)^2}{(A_3)^3}-\frac{1+\frac{9}{2}A_8+3(A_8)^2}{(A_8)^3}\ \cdots$$
$$\cdots-\frac{1+\frac{9}{2}A_9+3\,(A_9)^2}{(A_9)^3}+\frac{1}{(A_{10})^3}=-1$$
$$\mathbf{10}: \qquad F(A_1)+F(A_2)-G(A_3)+G(A_8)+G(A_9)-H(A_{10})=0\ .$$

où l'on a noté $F(u)=\log(1-u)/u$, $G(u)=\log(u)/u+\log(u)$ et $H(u)=\log(u)/u$.

Ce 6-tissu n'est pas algébrique (et donc n'est pas linéarisable), car une courbe algébrique plane réduite de degré 6 ne peut contenir exactement $\mathcal{R}_3[\mathfrak{W}]=12$ cubiques. Ainsi $\mathfrak{W}$ est exceptionnel. Il n'est pas équivalent à un sous-6-tissu du tissu de Spence-Kummer, puisque $\mathcal{R}_3[\mathfrak{W}]=12$ alors qu'un sous-6-tissu de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ admet exactement 8 ou 16 sous-3-tissus hexagonaux.

À partir de la liste de relation abélienne ci-dessus, on établit :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathfrak{W}\big]=12 \qquad \mathcal{R}_4\big[\mathfrak{W}\big]=7 \qquad \mathcal{R}_5\big[\mathfrak{W}\big]=0 \qquad \text{et} \qquad \omega\big[\mathfrak{W}\big]=(6,1,0,2)\,.$$

9– de même, on montre que $\mathcal{K}(4)$ admet exactement 12 sous-7-tissus non-hexagonaux et tels que la somme des courbures de Blaschke de leurs sous-3-tissus est identiquement nulle. On vérifie que ces 7-tissus sont en fait les sous-7-tissus exceptionnels des tissus de Spence-Kummer $\mathcal{W}SK_k$ ($k=1,\ldots,4$) inclus dans $\mathcal{K}(4)$. Ainsi, tous les sous-7-tissus exceptionnels de $\mathcal{K}(4)$ sont équivalents entre eux (et équivalents, par exemple, à $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{69}}$).

7.2.3. Sur le tissu $\mathcal{K}(5)$ associé à l'équation de Kummer du pentalogarithme. — On note encore $\mathcal{K}(5)$ le tissu associé à l'équation de Kummer du pentalogarithme. C'est le 29-tissu :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(5) := \mathcal{W}\Bigg(& x\,,\, y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, xy\,,\, \frac{y}{1-x}\,,\, \frac{x}{1-y}\,,\, \frac{x}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{y}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{1-x}{1-y}\,,\\ & \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\,,\, \frac{y(1-x)}{1-y}\,,\, \frac{1-x}{(1-y)x}\,,\, (1-x)(1-y),\, x(1-y), y(1-x)\,,\\ & \frac{xy}{1-x}\,,\, \frac{xy}{1-y}\,,\, \frac{x}{y(1-x)}\,,\, \frac{y}{x(1-y)}\,,\, \frac{y(1-x)^2}{x(1-y)^2}\,,\, \frac{y^2(1-x)}{x^2(1-y)}\,,\\ & \frac{x(1-x)}{y(1-y)}\,,\, \frac{x}{y(1-x)^2(1-y)}\,,\, \frac{y}{x(1-y)^2(1-x)}\,,\\ & \frac{xy^2}{(1-y)(1-x)^2}\,,\, \frac{yx^2}{(1-x)(1-y)^2}, \frac{xy^2(1-x)}{1-y}\,,\, \frac{yx^2(1-y)}{1-x}\Bigg)\,.\end{aligned}$$

Son lieu singulier $\Sigma\big[\mathcal{K}(5)\big]$ est la réunion de 28 droites et de 77 coniques qu'on ne donnera pas explicitement, mais qu'il est facile de déterminer.

On note $(B_1, \ldots, B_{29})$ le 29-uplet de fractions rationnelles qui définissent $\mathcal{K}(5)$ comme tissu ordonné. Dans la suite de ce paragraphe on notera $\mathcal{K}(5)[\mathrm{K}]$ le sous-tissu $\mathcal{W}(B_k \,|\, k \in \mathrm{K})$ de $\mathcal{K}(5)$, quand K est une partie non vide de $\{1, \ldots, 29\}$.

On établit les points suivants :

1– exactement 474 des 3654 sous-3-tissus de $\mathcal{K}(5)$ sont hexagonaux. Ainsi :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{K}(5)\big] = 474\,.$$

2– $\mathcal{K}(5)$ ne contient aucun sous-k-tissu hexagonal, pour $k \geq 7$.

3– par contre, il admet exactement 15 sous-6-tissus hexagonaux : ce sont les tissus $\mathfrak{H}_k := \mathcal{W}\{B_i \,|\, i \in \alpha_k\}$, pour $k = 1, 2, \ldots, 6$, avec

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 = \{1,2,3,5,6,10\} & \alpha_2 = \{1,2,3,11,19,20\} & \alpha_3 = \{1,2,4,12,16,18\} \\
\alpha_4 = \{1,2,4,13,15,17\} & \alpha_5 = \{1,2,5,8,9,17\} & \alpha_6 = \{1,2,6,7,9,18\} \\
\alpha_7 = \{1,2,7,14,16,19\} & \alpha_8 = \{1,2,8,14,15,20\} & \alpha_9 = \{1,2,10,11,12,13\} \\
\alpha_{10} = \{3,10,11,21,22,23\} & \alpha_{11} = \{4,12,13,21,28,29\} & \alpha_{12} = \{5,6,9,23,26,27\} \\
\alpha_{13} = \{7,16,18,24,27,28\} & \alpha_{14} = \{8,15,17,25,26,29\} & \alpha_{15} = \{14,19,20,22,24,25\}\,.
\end{array}$$

On s'attend à ce que $\mathcal{K}(5)$ admette des tissus de Spence-Kummer et des tissus $\mathcal{K}(4)$ comme sous-tissus. Les sous-tissus de Spence-Kummer admettent forcément un 6-tissu $\mathfrak{H}_k$ comme sous-6-tissu et, d'autre part, ils sont de rang maximal, et donc la somme des courbures de Blaschke de leurs sous-3-tissus est identiquement nulle. On peut ainsi déterminer tous les sous-tissus de $\mathcal{K}(5)$ qui sont des tissus de Spence-Kummer.

4– parmi les sous-9-tissus de $\mathcal{K}(5)$, exactement 11 sont tels que la somme des courbures de leurs sous-3-tissus est identiquement nulle. Ce sont les tissus $\mathcal{V}_j = \mathcal{K}(5)[\nu_j]$ avec

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = \{1,2,3,5,6,9,10,11,23\} && \nu_2 = \{3,7,8,10,11,15,16,17,18\}\\
&\nu_3 = \{4,5,6,9,12,13,14,19,20\} && \nu_4 = \{1,2,5,6,7,12,13,16,18,27\}\\
&\nu_5 = \{1,2,4,7,12,13,16,18,28\} && \nu_6 = \{1,2,7,14,16,18,19,20,24\}\\
&\nu_7 = \{1,2,3,10,11,14,19,20,22\} && \nu_8 = \{1,2,3,4,10,11,12,13,21\}\\
&\nu_9 = \{1,2,4,8,12,13,15,17,29\} && \nu_{10} = \{1,2,5,6,8,9,15,17,26\}\\
&\nu_{11} = \{1,2,8,14,15,17,19,20,25\}\ .
\end{aligned}$$

Parmi ces 11 tissus, seuls 9 sont susceptibles d'être des tissus de Spence-Kummer, puisqu'on a $\mathcal{R}_3[\mathcal{V}_j\,] = \mathcal{R}_3[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}] = 46$ pour $j \in \{1,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ alors que $\mathcal{R}_3[\mathcal{V}_2] = \mathcal{R}_3[\mathcal{V}_3] = 6$.

Pour $\{i,j,k,l\} \subset \{1,\dots,11\}$, on note $\nu_{ijkl} = \nu_i \cup \nu_j \cup \nu_k \cup \nu_l$ et $\mathcal{V}_{ijkl} = \mathcal{K}(5)[\nu_{ijkl}]$. Les fractions rationnelles B_s pour $s \in \nu_{45910}$ sont celles qui définissent le tissu $\mathcal{K}(4)$ du paragraphe précédent. Du fait que l'on connaît tous les sous-tissus de Spence-Kummer de $\mathcal{K}(4)$, on déduit que les tissus $\mathcal{V}_\kappa$ sont bien de ce type pour $\kappa = 4,5,9$ et 10. D'autre part, les fractions rationnelles B_σ pour $\sigma \in \nu_1$ sont celles qui définissent le tissu noté $W_{\mathcal{SK}}$ en 7.1.3 (modulo composition à droite par une transformation projective) ; donc $\mathcal{V}_1$ est également un tissu de Spence-Kummer. On montre sans difficulté que les deux applications $(x,y) \mapsto (y,x)$ et $(x,y) \mapsto (1-x,y)$ sont des symétries de $\mathcal{K}(5)$. En regardant les images des tissus $\mathcal{V}_i$ (pour $i = 1,4,5,9,10$) par ces symétries, on déduit que les tissus $\mathcal{V}_\kappa$ sont bien des tissus de Spence-Kummer, pour $\kappa \in \{1,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Ainsi le tissu $\mathcal{K}(5)$ admet exactement neuf sous-9-tissus équivalents à $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$.

5– on sait qu'un tissu équivalent à $\mathcal{K}(4)$ (on dira un "tissu tétralogarithmique") est la réunion de quatre tissus de Spence-Kummer. À partir du point précédent, on peut montrer que les sous-tissus tétralogarithmiques de $\mathcal{K}(5)$ sont les tissus $\mathcal{V}[K] = \mathcal{K}(5)[\nu_K]$ pour $K = \{i,j,k,l\}$ dans la liste ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&K_1 = \{1,4,5,8\} && K_2 = \{1,4,6,7\} && K_3 = \{1,7,10,11\}\\
&K_4 = \{1,8,9,10\} && K_5 = \{4,5,9,10\} && K_6 = \{4,6,10,11\}\\
&K_7 = \{5,6,7,8\} && K_8 = \{5,6,9,11\} && K_9 = \{7,8,9,11\}\ .
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{K}(5)$ admet exactement 9 sous-18-tissus tétralogarithmiques.

6– on connaît tous les 5-tissus exceptionnels de $\mathcal{K}(4)$. Le point 5 ci-dessus nous donne tous les sous-tissus tétralogarithmiques de $\mathcal{K}(5)$. On peut donc déterminer tous les sous-5-tissus non-hexagonaux de $\mathcal{K}(5)$ tels que la somme des courbures de leurs sous-3-tissus soit nulle, et qui ne sont pas inclus dans un tissu tétralogarithmique $\mathcal{V}[K_i]$. Ces tissus sont particulièrement intéressants car suceptibles d'être de nouveaux 5-tissus exceptionnels. Parmi les 120 sous-5-tissus de $\mathcal{K}(5)$ non-hexagonaux et dont la somme des courbures de leurs sous-3-tissus est nulle, 99 sont inclus dans l'un des tissus tétralogarithmique de $\mathcal{K}(5)$. Il en reste donc 21 qu'il est intéressant d'étudier.

Certains de ces tissus sont de rang maximal mais algébriques, comme par exemple le tissu

$$\mathcal{K}(5)\big[1,2,3,7,8\big] = \mathcal{W}\left(x,\, y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{x}{(1-x)(1-y)}\,,\, \frac{y}{(1-x)(1-y)} \right).$$

(on peut montrer que ce tissu est linéarisable et que c'est le tissu associé à une courbe de degré 5 formée d'une conique non-dégénérée et de trois droites distinctes).

D'autres sont exceptionnels, comme par exemple le tissu :

$$\mathcal{W} := \mathcal{K}(5)\big[1,2,21,25,27\big] = \mathcal{W}\Big(\, x\,,\, y\,,\, \frac{y(1-x)^2}{x(1-y)^2}\,,\, \frac{x(1-x)(1-y)^2}{y}\,,\, \frac{x^2y}{(1-x)(1-y)^2}\Big)\,.$$

La liste de relations abéliennes ci-dessous montre que $\mathcal{W}$ est bien de rang maximal.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}\ :\ \log(\frac{(1-B_1)^2}{B_1}) + \log(\frac{(1-B_2)^2}{B_2}) - \log(B_{21}) = 0\\
&\mathbf{2}\ :\ 2\log(1-B_1) - \log(B_{21}) - \log(B_{25}) = 0\\
&\mathbf{3}\ :\ 3\log(\frac{B_1}{1-B_1}) + \log(B_{21}) - \log(B_{27}) = 0\\
&\mathbf{4}\ :\ \sqrt[3]{B_{21}} - 1/\sqrt[3]{B_{25}} + \sqrt[3]{B_{27}} = 0\\
&\mathbf{5}\ :\ \frac{3\,B_2}{(1-B_2)^2} + B_{21} - \frac{1}{B_{25}} + B_{27} = 0\\
&\mathbf{6}\ :\ 6\,F_1(B_1) + 6\,F_2(B_2) - \log(B_{21})^2 - \log(B_{25})^2 - \log(B_{27})^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big(\text{avec}\quad & F_1(u) := \log(1-u)^2 + \log(u)^2 - \log(1-u)\log(u)\\
\text{et}\quad & F_2(u) := 2\log(1-u)^2 + \log(u)^2/2 - 2\log(1-u)\log(u)\big).
\end{aligned}$$

Le tissu $\mathcal{W}$ n'est pas algébrique car il n'existe pas de courbe plane de degré 5 contenant exactement $\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}\big] = 7$ cubiques. On en déduit que $\mathcal{W}$ est bien exceptionnel. Le fait que $\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}\big] = 7$ montre également que $\mathcal{W}$ n'est pas équivalent ni à $\mathcal{B}$, ni à W, ni à l'un des tissus du chapitre 6.

À partir de la liste précédente, on peut déterminer l'armure et l'invariant $\mathcal{R}_4$ de $\mathcal{W}$. On a :

$$\mathcal{R}_4\big[\mathcal{W}\big] = 1 \qquad \text{et} \qquad \omega\big[\mathcal{W}\big] = (4,1,1)\,.$$

Les résultats ci-dessus n'épuisent pas l'étude des sous-tissus de $\mathcal{K}(5)$ susceptibles d'être exceptionnels. On peut montrer que $\mathcal{K}(5)$ admet 42 sous-7-tissus (resp. 21 sous-8-tissus) dont la somme des courbures de Blaschke de leurs sous-3-tissus est nulle et qui ne sont pas inclus dans un sous-tissu tétralogarithmique de $\mathcal{K}(5)$. Il faudrait savoir si certains de ces tissus sont exceptionnels ou non.

7– la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus de $\mathcal{K}(5)$ n'est pas identiquement nulle. On en déduit que $\mathcal{K}(5)$ n'est pas de rang maximal et donc n'est pas exceptionnel.

8– plus généralement, pour $k = 20, 21, \ldots, 28$, aucun des sous-k-tissus de $\mathcal{K}(5)$ ne vérifie la propriété d'avoir la somme des courbures de Blaschke de ses sous-3-tissus identiquement nulle. On a :

$$\mathcal{R}_k\big[\mathcal{K}(5)\big] = 0 \qquad\qquad (k = 20, \ldots, 28)\,.$$

Pour conclure les deux études qui viennent d'être faites, on énonce les deux points les plus marquants sous la forme de la

Proposition 7.2.6. — *Les tissus $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$ ne sont pas de rang maximal.*

Ce résultat n'est pas celui qui était attendu puisque, comme on l'a dit, l'équation $\mathcal{K}(4)$ (resp. $\mathcal{K}(5)$) est l'équation connue (en deux variables) la plus simple qui soit satisfaite par le tétralogarithme (resp. le pentalogarithme). D'autre part, ces deux équations ont chacune une structure semblable à celles des équations $(\mathcal{A}b)$ et $(\mathcal{SK})$. On sait que le tissu $\mathcal{K}(4)$ porte au moins une relation abélienne tétralogarithmique : celle obtenue par complexification de l'équation ci-dessous qui, d'après le Théorème 7.1.2, est vérifiée globalement par la fonction $L_4 : z \mapsto \log|z|\,\mathcal{L}_3(z)$:

$$\begin{aligned}
&L_4\,(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\,) + L_4\,(-\frac{y^2x\zeta}{\eta}\,) + L_4\,(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\,) + L_4\,(\frac{y^2x}{\zeta^2\eta}\,)\\
&- 6\,L_4\,(\,xy\,) - 6\,L_4\,(\frac{xy}{\eta\zeta}\,) - 6\,L_4\,(-\frac{xy}{\eta}\,) - 6L_4(-\frac{xy}{\zeta}\,)\\
&- 3\,L_4(\,x\eta\,) - 3\,L_4(\,y\zeta\,) - 3\,L_4(\frac{x}{\eta}\,) - 3\,L_4(\frac{y}{\zeta}\,)\\
&- 3\,L_4(-\frac{x\eta}{\zeta}\,) - 3\,L_4\,(-\frac{y\zeta}{\eta}\,) - 3\,L_4\,(-\frac{x}{\eta\zeta}\,) - 3\,L_4\,(-\frac{y}{\eta\zeta}\,)\\
&+ 6\,L_4\,(\,x\,) + 6\,L_4\,(y) + 6\,L_4(-\frac{x}{\zeta}\,) + 6\,L_4\,(-\frac{y}{\zeta}\,) = 0
\end{aligned}$$

(avec $\zeta = 1 - x$ et $\eta = 1 - y$).

Pour $k = 4, 5$, on peut tenter d'expliquer le fait que $\mathcal{K}(k)$ n'est pas de rang maximal en se demandant s'il n'existe pas une équation "plus fondamentale" que $\mathcal{K}(k)$ qui soit vérifiée par $\mathbf{Li}_k$. D'ailleurs, il n'est pas prouvé que l'équation $\mathcal{K}(k)$ est bien irréductible.

Cependant, certains travaux de A. Goncharov sur les polylogarithmes et leurs liens avec la K-théorie et la cohomologie motivique, montrent que les polylogarithmes $\mathcal{L}_n$ pour $n \geq 4$ ne vérifient plus certaines propriétés satisfaites par $\mathbf{Li}_1$, $\mathbf{Li}_2$ et $\mathbf{Li}_3$. Il serait intéressant de savoir si le fait que les tissus $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$ ne sont pas de rang maximal est une expression en géométrie des tissus de cette dichotomie entre les polylogarithmes d'ordre $n \leq 3$ et les autres.

7.3. Tissus et configurations de points

On commence par motiver l'étude des tissus que l'on peut associer aux configurations de points. En 7.3.2, on décrit une famille de tissus exceptionnels obtenue en considérant les tissus associés aux configurations de cinq points dont (exactement) trois sont alignés.

7.3.1. Motivations. — Comme on l'a dit plus haut, les tissus de Bol et de Spence-Kummer peuvent être décrits à partir d'une configuration de points dans $\mathbb{CP}^2$.

Certains résultats de [**GM 82**] s'interprètent, en géométrie des tissus, comme le fait que le tissu de Bol $\mathcal{B}$ est géométriquement défini sur l'espace des configurations projectives de cinq points en position générale dans $\mathbb{CP}^2$. Ce point de vue est particulièrement intéressant, puisqu'il permet en outre une interprétation géométrique de la relation abélienne dilogarithmique de $\mathcal{B}$.

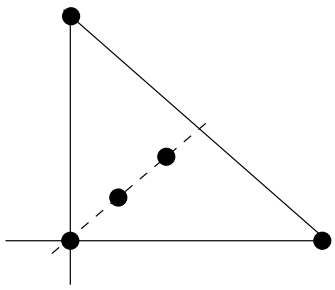
D'autre part, dans [**Go 95**], Goncharov met en lumière des liens entre le trilogarithme $\mathcal{L}_3$, l'équation fonctionnelle de Spence-Kummer, et des configurations projectives dégénérées de sept points de $\mathbb{CP}^2$.

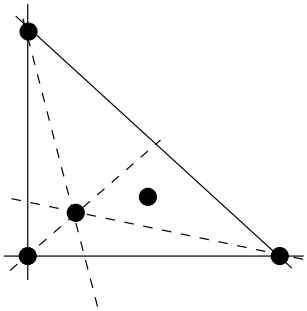
Tout cela indique la possibilité d'un lien entre les polylogarithmes, les configurations de points et les tissus exceptionnels. On peut peut-être découvrir de nouveaux tissus exceptionnels en considérant

des tissus définis à partir de configurations de points.

Si $\mathbf{C} = (p_1, \ldots, p_m)$ est une configuration de m points distincts de $\mathbb{CP}^2$, on peut considérer le tissu, noté $\mathcal{W}_{\mathbf{C}}$, formé des m pinceaux de droites de sommets p_i, et des pinceaux de coniques passant par quatre points $p_{i_1}, \ldots, p_{i_4}$ en position générale.

On montre facilement que si $\mathbf{C}$ est formée de $m \leq 4$ points, alors le tissu associé est de rang maximal. Pour les configurations de cinq points, les seuls cas pour lesquels il n'est pas immédiat que le tissu associé soit de rang maximal, correspondent aux configurations du type





La première de ces configurations de points dépend (modulo $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$) d'un paramètre $a \in \mathbb{C}$ avec $a\,(1-a) \neq 0$. Le tissu associé est noté $\mathcal{W}_a$. Il est formé de cinq pinceaux de droites et des trois pinceaux de coniques correspondant aux trois 4-uplets de points en position générale parmi les cinq points de la configuration. Ce 8-tissu est étudié en 7.3.2 ci-dessous.

À une configuration générique de cinq points de $\mathbb{CP}^2$, on peut associer un 10-tissu, formé de cinq pinceaux de droites et de cinq pinceaux de coniques. Une configuration générique de cinq points dépend (modulo transformation projective) d'un point $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $ab\,(1-a)(1-b) \neq 0$. On obtient ainsi une famille à deux paramètres de 10-tissus plans. On discute du caractère exceptionnel de ces tissus en 7.3.3.

7.3.2. Une nouvelle famille de tissus exceptionnels. — On note $A := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Pour $a \in A$ on pose :

$$\mathcal{W}_a := \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{1-y}{1-x}\,,\, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{a-y}{a-x}\,,\, \frac{x(a-y)}{y(a-x)}\,,\, \frac{(1-x)(a-y)}{(1-y)(a-x)} \right).$$

On note U_i^a (pour $i = 1, \ldots, 8$) les fractions rationnelles qui définissent $\mathcal{W}_a$ comme tissu ordonné. Quand la fraction rationnelle U_i^a ne dépend pas de a, on se permettra de ne pas écrire l'indice a.

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{W}_a\big(I\,\big) := \mathcal{W}(U_i^a \,|\, i \in I)$ pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, 8\}$.

L'efa qui caractérise les relations fonctionnelles abéliennes de $\mathcal{W}_a$ est l'équation $(\mathcal{E}_a)$ qui a été étudiée et résolue en 3.3. On en déduit que $\mathcal{W}_a$ est de rang maximal 21. D'autre part, il est clair que $\mathcal{B}$ en est un sous-tissu, puisque les 5 fractions rationnelles qui définissent le tissu de Bol font partie des fractions rationnelles qui définissent $\mathcal{W}_a$. Cela implique que $\mathcal{W}_a$ n'est pas linéarisable, d'où le

Théorème 7.3.1. — *Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, le 8-tissu $\mathcal{W}_a$ est exceptionnel.*

Du fait que l'on connaît une base explicite des relations abéliennes de $\mathcal{W}_a$ pour tout $a \in A$, on établit les points suivant par des calculs d'algèbre linéaire qu'on ne détaille pas :

1– l'armure de $\mathcal{W}_a$ est

$$\omega\big[\mathcal{W}_a\big] = (14, 0, 3, 4, 0, 0)\,.$$

2– parmi les 8 sous-7-tissus de $\mathcal{W}_a$, aucun n'est de rang maximal :

$$\mathcal{R}_7\big[\mathcal{W}_a\big] = 0\,.$$

3– $\mathcal{W}_a$ admet exactement 4 sous-6-tissus de rang maximal :

$$\mathcal{R}_6\big[\mathcal{W}_a\big] = 4\,.$$

Ce sont les tissus $\mathcal{W}_{a,k} := \mathcal{W}_a\big(I_k\big)$ avec I_k dans la liste ci-dessous :

$$I_1 := \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \qquad I_2 := \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$$
$$I_3 := \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \qquad I_4 := \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}\,.$$

Ces tissus sont tous exceptionnels et sont étudiés plus loin. Cependant, signalons dès maintenant que les tissus $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ sont équivalents pour $\kappa = 1, 2, 3$.

4– exactement 8 des 56 sous-5-tissus de $\mathcal{W}_a$ sont de rang maximal :

$$\mathcal{R}_5\big[\mathcal{W}_a\big] = 8\,.$$

Parmi ces 8 tissus, 4 sont linéarisables. Les 4 autres sont des tissus de Bol. Ces 4 tissus de Bol inclus dans $\mathcal{W}_a$ sont les tissus $\mathcal{W}_a\big(I_k\big)$, avec I_k dans la liste ci-dessous :

$$I_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad I_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\} \qquad I_3 = \{1, 2, 4, 6, 8\} \qquad I_4 = \{1, 2, 5, 7, 8\}\,.$$

5– exactement 34 des sous-4-tissus de $\mathcal{W}_a$ sont de rang maximal.

$$\mathcal{R}_4[\mathcal{W}_a] = 34\,.$$

Parmi ces 34 sous-4-tissus, 20 sont inclus dans un des 4 tissus de Bol de $\mathcal{W}_a$ (et donc sont hexagonaux). Parmi les 14 autres tissus restants, exactement 8 sont hexagonaux.

6– exactement 38 des sous-3-tissus de $\mathcal{W}_a$ sont hexagonaux :

$$\mathcal{R}_3[\mathcal{W}_a] = 38\,.$$

Les $\mathcal{W}_a$ forment une famille de 8-tissus exceptionnels paramétrée par A. On la note $\mathbf{W}_A$. Il est naturel de se demander si deux éléments distincts de $\mathbf{W}_A$ sont localement, birationnellement ou projectivement équivalents. Montrons d'abord que pour ces tissus, l'équivalence analytique locale et l'équivalence birationnelle coïncident :

Proposition 7.3.2. — *Soient $a, \alpha \in A$. Si ϕ est un biholomorphisme local tel que $\phi_*\,(\mathcal{W}_a) = \mathcal{W}_\alpha$, alors ϕ est la restriction d'une application birationnelle.*

Démonstration : soit ϕ un bihomomorphisme local comme dans l'énoncé.

Pour $i = 1, \ldots, 8$ et pour $\mathsf{a} \in A$, on note $\mathcal{F}_i^a$ le feuilletage $\{U_i^{\mathsf{a}} = cte.\}$. Par hypothèse, on a $\phi_*\big(\{\mathcal{F}_i^a\}\big) = \{\mathcal{F}_i^\alpha\}$, d'où on déduit l'existence d'une permutation $\sigma = \sigma_\phi \in \mathfrak{S}_8$ telle que

$$\big\{U_i^\alpha \circ \phi = cte.\big\} = \big\{U_{\sigma(i)}^a = cte.\big\} \qquad\qquad (\text{pour } i = 1, \ldots, 8)\,.$$

Pour $\mathsf{a} \in A$, le 6-tissu $\mathcal{W}_{\mathsf{a},4} = \{\,\mathcal{F}_i^{\mathsf{a}} \mid i = 3, \ldots, 8\}$ est l'unique sous-6-tissu de $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}$ qui est exceptionnel et qui possède exactement 8 sous-3-tissus hexagonaux (voir ci-dessous). On en déduit que $\{3, \ldots, 8\}$ est stable par σ, et donc son complémentaire aussi : on a $\sigma\{1, 2\} = \{1, 2\}$. Quitte à composer par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$ qui est une symétrie pour chacun des $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}$, on peut supposer que $\sigma(1) = 1$

et $\sigma(2) = 2$. Cela implique que ϕ est de la forme $\big(\phi_1(x), \phi_2(y)\big)$.

Considérons les applications projectives et birationnelles suivantes :

$$G_1^{\mathsf{a}} : (x,y) \longmapsto \big(1-x\,,\,1-y\big) \qquad G_2^{\mathsf{a}} : (x\,,\,y) \longmapsto \big(ax, ay\big)$$
$$G_3^{\mathsf{a}} : (x,y) \longmapsto \big((1-a)x+a\,,\,(1-a)y+a\big) \qquad G_4^{\mathsf{a}} : (x,y) \longmapsto \big(1/x\,,\,1/y\big)\,.$$

Elles transforment $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}$ en un autre tissu de la famille $\mathbf{W}_A$. Plus précisément, pour $i = 1, \ldots, 4$, on a :

$$G_i{}^*\,(\mathcal{W}_{\mathsf{a}}) = \mathcal{W}_{\mathsf{a}_i} \quad \text{avec} \quad \mathsf{a}_1 = 1-\mathsf{a}\,, \quad \mathsf{a}_2 = 1/\mathsf{a}, \quad \mathsf{a}_3 = \mathsf{a}/(\mathsf{a}-1) \quad \text{et} \quad \mathsf{a}_4 = 1/\mathsf{a}\,.$$

Les permutations $\sigma_i := \sigma_{G_i}$ telles que $\mathcal{F}^{\mathsf{a}_i}_{\sigma_i(k)} = G_i{}^*\,(\mathcal{F}^{\mathsf{a}}_k)$ (pour $k = 1, \ldots, 8$) sont les suivantes :

$$\sigma_1 = (34)(78) \qquad \sigma_2 = (46)(57)$$
$$\sigma_3 = (36)(58) \qquad \sigma_4 = (45)(67)\,.$$

Notons $\mathfrak{E}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_8$ engendré par les permutations σ_k pour $k = 1, \ldots, 4$.

De ce qui précède, on sait que $\sigma(3) \in \{3, \ldots, 8\}$. Quel que soit $\kappa \in \{4, \ldots, 8\}$, on peut trouver un élément s de $\mathfrak{E}$ tel que $s(k) = 3$. On en déduit qu'il existe une application birationnelle β de $\mathbb{CP}^2$ qui s'exprime comme composée d'éléments G_i^{a} telle que $\psi := \phi \circ \beta$ vérifie

1. ψ est de la forme $\psi(x,y) = \big(\psi_1(x), \psi_2(y)\big)$,
2. $\psi^*\,(\mathcal{W}_\alpha)$ est un tissu $\mathcal{W}_{\widehat{a}}$ pour un certain $\widehat{a} \in A$,
3. la permutation $\widehat{\sigma}$ associée à ψ vérifie $\widehat{\sigma}(3) = 3$.

Le fait que les lignes de niveaux de $U_3 \circ \psi$ coïncident avec celle de U_3 implique la relation :

$$(x\,\partial_x + y\,\partial_y)\left(\frac{\psi_1(x)}{\psi_2(y)}\right) = 0\,,$$

d'où il vient

$$x\,\frac{\psi_1'(x)}{\psi_2(y)} - y\,\frac{\psi_1(x)\,\psi_2'(y)}{\psi_2(y)^2} = 0\,,$$

soit

$$x\,\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} = y\,\frac{\psi_2'(y)}{\psi_2(y)}\,.$$

Puisque les membres de cette égalité dépendent respectivement de deux variables distinctes, on déduit qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{C}$ (forcément non nulle) telle que

$$(\blacklozenge) \qquad x\,\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} = y\frac{\psi_2'(y)}{\psi_2(y)} = \gamma\,.$$

L'intégration de ces relations est immédiate : on obtient que ψ_1 et ψ_2 sont de la forme :

$$(\blacklozenge\blacklozenge) \qquad \psi_1(x) = \lambda x^\gamma \quad \text{et} \quad \psi_2(y) = \lambda' y^\gamma \qquad (\text{avec } \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*)\,.$$

Puisque $\{1,2,3\}$ est invariant par $\widehat{\sigma}$, on déduit que ou bien $\widehat{\sigma}(4) \in \{4,5,6,7\}$ ou alors $\widehat{\sigma}(4) = 8$.

Dans le premier cas, quitte à composer à nouveau à droite par des applications birationnelles G_2^a et G_4^a, on peut supposer que $\widehat{\sigma}(4) = 4$. Dans ce cas, les lignes de niveaux de $U_4 \circ \psi$ coïncident avec celles de U_4, ce qui implique la relation

$$\big((1-x)\,\partial_x + (1-y)\,\partial_y\big)\left(\frac{1-\psi_2(y)}{1-\psi_1(x)}\right) = 0\,,$$

d'où il vient

$$(1-x)\,\frac{\psi_1'(x)}{1-\psi_1(x)} = (1-y)\,\frac{\psi_2'(x)}{1-\psi_2(x)}\,.$$

On en déduit qu'il existe une constante non nulle γ' telle que, pour $k=1,2$, on a :

$$\psi_k'(z) = \gamma'\,\frac{1-\psi_k(z)}{1-z}\,.$$

Combiné avec la relation ($\blacklozenge$), cela donne pour $k=1,2$:

$$\psi_k(z) = \frac{\gamma' z}{\gamma + (\gamma'-\gamma)\,z}\,.$$

Vu ($\blacklozenge\blacklozenge$), on a forcément $\gamma=\gamma'$, d'où $\psi_1=\psi_2=\mathrm{Id}$ et donc ψ est l'identité.

En conclusion, si ϕ est comme dans l'énoncé de la proposition, on peut trouver une composée g d'applications G_i^a (pour différents $a\in A$) telle que $\phi\circ g$ soit l'identité. Vu que les G_i^a sont des applications birationnelles, on en déduit la proposition dans ce cas.

Le cas restant où $\widehat{\sigma}(4)=8$ se traite par des arguments similaires. ■

Considérons le groupe $\mathfrak{G} := \{\, g\in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1) \mid g(A)=A \,\}$ qui agit sur A de façon naturelle. Nous dirons que deux éléments a et α de A sont $\mathfrak{G}$-équivalents s'il existe $g\in\mathfrak{G}$ tel que $g(a)=\alpha$. C'est bien sûr une relation d'équivalence sur A.

Il est bien connu que le groupe $\mathfrak{G}$ est engendré par les applications

$$\mathsf{a}\mapsto 1-\mathsf{a}\,,\qquad \mathsf{a}\mapsto 1/\mathsf{a}\qquad \text{et}\qquad \mathsf{a}\mapsto \mathsf{a}/(\mathsf{a}-1)\,.$$

De la preuve de la proposition précédente on déduit immédiatement le

Corollaire 7.3.3. — *Deux tissus $\mathcal{W}_a$ et $\mathcal{W}_\alpha$ de la famille $\mathbf{W}_A$ sont équivalents si et seulement si a et α sont $\mathfrak{G}$-équivalents.*

Notons $\mathfrak{A}$ le quotient de A sous l'action de $\mathfrak{G}$. C'est un résultat classique que l'application rationnelle

$$\mathcal{J}\,:\,a\longmapsto \frac{(a^2-a+1)^3}{\big(a\,(1-a)\big)^2}$$

est $\mathfrak{G}$-invariante et induit un isomorphisme $J:\mathfrak{A}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$. On en déduit que la famille $\mathbf{W}_A$ définit une famille paramétrée par $\mathbb{C}$ de classes d'équivalence (locales) de 8-tissus exceptionnels.

Comme on l'a signalé au point **3**– ci-dessus, un tissu $\mathcal{W}_a$ admet quatre sous-6-tissus de rang maximal dont trois sont équivalents. On va maintenant étudier les tissus notés $\mathcal{W}_{a,1}$ et $\mathcal{W}_{a,4}$ plus haut.

Proposition 7.3.4. — *Pour $a,\alpha\in A$, les tissus $\mathcal{W}_{a,1}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,4}$ sont deux 6-tissus exceptionnels qui ne sont pas équivalents. De plus, il ne sont pas équivalents à l'un des sous-6-tissus exceptionnels du tissu de Spence-Kummer.*

Démonstration : à partir des relations abéliennes de $\mathcal{W}_a$, on établit que les deux tissus de l'énoncé sont bien de rang maximal, et on détermine leur invariant $\mathcal{R}_3$. On a :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathcal{W}_{a,1}\big]=12\qquad\text{et}\qquad \omega\big[\mathcal{W}_{a,4}\big]=8$$

d'où on déduit immédiatement que ses deux 6-tissus ne sont pas équivalents.

En utilisant le théorème d'Abel-inverse, on montre que si W est un 6-tissu algébrique tel que $\mathcal{R}_3[W]\geq 9$, alors $\mathcal{R}_3[W]=20$ (car une courbe algébrique plane de degré 6 contenant plus de neuf cubiques est nécessairement la réunion de six droites distinctes).

On en déduit que $\mathcal{W}_{a,1}$ n'est pas algébrique et donc est exceptionnel.

Cet argument ne s'applique pas à $\mathcal{W}_{a,4}$, dont le nombre de sous-3-tissus hexagonaux est le même que celui d'un 6-tissu algébrique W_C associé à une courbe algébrique C de degré 6, formée de quatre droites et d'une conique non-dégénérée (il n'y a pas d'autre possibilité pour la courbe C). Mais parce que $\mathcal{R}_5[\,\mathcal{W}_{a,4}\,] = 0$, les mêmes arguments que ceux de la preuve de la Proposition 7.2.4 montrent que $\mathcal{W}_{a,4}$ est exceptionnel.

Il reste à montrer que les tissus de la proposition ne sont pas équivalents à l'un des sous-6-tissus exceptionnels de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$. Cela ne présente pas de difficulté pour $\mathcal{W}_{a,1}$: son invariant $\mathcal{R}_3$ vaut 12 et est différent des invariants $\mathcal{R}_3$ des sous-6-tissus exceptionnels de $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$.

Les tissus $\mathcal{W}_{a,4}$ et $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{679}}$ ne sont pas équivalents puisque leurs invariants $\mathcal{R}_3$ sont distincts.

L'invariant $\mathcal{R}_3$ ne permet pas de différencier $\mathcal{W}_{a,4}$ et $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}$. Le fait que ces deux tissus ne sont pas équivalents découle de la comparaison de leurs invariants $\mathcal{R}_4$:

$$\mathcal{R}_4\big[\mathcal{W}_{a,4}\big] = 3 < 6 = \mathcal{R}_4\big[\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}^{\widehat{147}}\big]\,.$$

La proposition est démontrée. ■

On a donc deux familles disjointes de 6-tissus exceptionnels :

$$\mathbf{W}_{A,\,1} := \big\{\mathcal{W}_{a,1} \;\big|\; a \in A\big\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W}_{A,\,4} := \big\{\mathcal{W}_{a,4} \;\big|\; a \in A\big\}\,.$$

Il est naturel d'étudier l'équivalence locale entre les éléments de chacune de ces familles.

Proposition 7.3.5. — *Soient $a, \alpha \in A$. Pour $\kappa = 1$ ou $\kappa = 4$, les tissus $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,\kappa}$ sont équivalents si et seulement si a et α sont $\mathfrak{G}$-équivalents.*

Démonstration esquissée : on vérifie qu'une application G_i^{a} définie plus haut transforme un tissu $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ en un tissu de la même famille. On en déduit que pour $a \in A$ fixé, l'ensemble des $\alpha \in A$ tels que $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,\kappa}$ sont localement équivalents est l'orbite de a par $\mathfrak{G}$. Cela démontre le "si" de la proposition.

Supposons maintenant que $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,\kappa}$ sont équivalents. Cela signifie qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{I_\kappa}$, un germe de biholomorphisme Φ ainsi que des germes holomorphes inversibles h_i (pour $i \in I_\kappa$) tels que au voisinage d'un point n'appartenant pas au lieu singulier de $\mathcal{W}_{a,\kappa}$, on ait

$$(\spadesuit) \qquad U_i^a = h_{\sigma i} \circ U_i^\alpha \circ \Phi \qquad (\text{pour } i \in I_\kappa)\,.$$

Dans le cas $\kappa = 1$, la suite de la preuve est similaire à celle de la Proposition 7.3.2 : on montre que $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}^{4567}$ est l'unique sous-4-tissu de $\mathcal{W}_{\mathsf{a},1}$ qui soit de rang maximal (pour tout $\mathsf{a} \in A$). Cela implique que $\mathcal{W}_{\alpha,1}^{4567}$ est l'image de $\mathcal{W}_{a,1}^{4567}$ par Φ, ce qui nous donne $\sigma\{4,5,6,7\} = \{4,5,6,7\}$. On en déduit que $\sigma\{1,2\} = \{1,2\}$. Quitte à composer par $(x,y) \mapsto (y,x)$ (qui est une symétrie pour chaque $\mathcal{W}_{\mathsf{a},1}$), on peut donc supposer que $\sigma 1 = 1$ et $\sigma 2 = 2$. De cela découle que ϕ est de la forme

$$\Phi(x,y) = \big(\phi_1(x), \phi_2(y)\big)\,.$$

Parmi les sous-3-tissus $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}^{14s}$ de $\mathcal{W}_{\mathsf{a},1}$ (avec $s = 2,5,6,7$), seul $\mathcal{W}_{\mathsf{a}}^{147}$ n'est pas hexagonal. On en déduit que $\sigma\{4,7\} = \{4,7\}$. Quitte à composer par une application birationnelle obtenue par composition des G_i^{a}, on peu supposer que $\sigma 4 = 4$ et $\sigma 7 = 7$.

Puisque U_4^a est constante sur les ensembles $\{U_4^\alpha = cte\}$, le même argument que celui utilisé dans la preuve de la Proposition 7.3.2 montre qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$(*) \qquad \phi_k'(z) = c\,\big(1 - \phi_k(z)\big)/\big(1 - z\big) \qquad (\text{pour } k = 1,2)\,.$$

Parce que U_7^a est constante le long des courbes $\{U_7^\alpha = cte\}$, on déduit qu'il existe $\widehat{c} \neq 0$ tel que

$$(**) \qquad \phi_k'(z) = \widehat{c}\,\phi_k(z)\,\big(\alpha - \phi_k(z)\big)/\big(z(a-z)\big) \qquad (\text{pour } k = 1, 2)\,.$$

Des deux équations différentielles $(*)$ et $(**)$ on déduit que $\phi_k(z) = z$, et donc Φ est l'identité.

Traitons le cas $\kappa = 4$. Quitte à composer Φ avec des applications G_i^{a}, on peut supposer que $\sigma 3 = 3$ et $\sigma 4 = 4$. Dans ce cas, il n'est pas évident de déduire davantage d'informations sur σ à partir de son action sur les sous-tissus de $\mathcal{W}_{a,4}$.

Nous allons utiliser le fait que le biholomorphisme Φ induit un isomorphisme linéaire, noté $\underline{\Phi}$, entre les espaces de relations abéliennes de $\mathcal{W}_{a,4}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,4}$. Il est clair que $\underline{\Phi}$ est compatible avec la filtration par l'ordre définie en 4.3. En particulier, $\underline{\Phi}$ établit un isomorphisme de $F^3\mathcal{A}\big[\mathcal{W}_{\alpha,4}\big]$ sur $F^3\mathcal{A}\big[\mathcal{W}_{a,4}\big]$.

D'autre part, du fait que l'on possède une base explicite des relations abéliennes de $\mathcal{W}_{\mathsf{a},4}$ pour $\mathsf{a} \in A$, on déduit que pour $i \in I_4$, les composantes selon U_i^{a} des relations fonctionnelles abéliennes d'ordre 3 de $\mathcal{W}_{\mathsf{a},4}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions[(3)]

$$\mathbf{L}_{x_0} : z \mapsto \log z\,, \qquad \mathbf{L}_{x_1} : z \mapsto \log(1-z) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{J} : z \mapsto 1/(1-z)\,.$$

Les relations (♠) impliquent que pour $\mathbf{F} \in \{\mathbf{L}_{x_0}, \mathbf{L}_{x_1}, \mathbf{J}\}$ et $i \in I_4$, on a :

$$\mathbf{F} \circ h_i \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\big\langle\, \mathbf{L}_{x_0}\,,\, \mathbf{L}_{x_1}\,,\, \mathbf{J}\,\big\rangle\,.$$

On en déduit que pour $i \in I_4$, h_i est soit l'identité $\mathrm{Id} : z \mapsto z$, soit la fonction inverse $\mathrm{Iv} : z \mapsto 1/z$.

On peut toujours supposer que $h_3 = \mathrm{Id}$ (quitte à composer par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$ qui laisse les tissus inchangés). Si $h_4 = \mathrm{Iv}$, les relations (♠) impliquent que

$$\frac{x}{y} = \frac{\phi_1(x,y)}{\phi_2(x,y)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-y}{1-x} = \frac{1-\phi_1(x,y)}{1-\phi_2(x,y)}\,.$$

De ces relations, on déduit immédiatement ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\phi_1(x,y) = \phi_2(y,x) = \frac{x}{x+y-1}\,.$$

Dans ce cas, on a

$$U_5 \circ \Phi(x,y) = \frac{x\,(1-x-y)}{y}$$

et Φ ne transforme pas pas $\mathcal{W}_{a,4}$ en un tissu de $\mathbf{W}_{A,4}$ ce qui est absurde. Le cas $h_4 = \mathrm{Iv}$ est donc impossible. On est forcément dans la situation où $h_4 = \mathrm{Id}$, d'où les relations

$$\frac{x}{y} = \frac{\phi_1(x,y)}{\phi_2(x,y)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-x}{1-y} = \frac{1-\phi_1(x,y)}{1-\phi_2(x,y)}\,.$$

Il est alors immédiat que Φ est l'identité.

Résumons : dans les deux cas $\kappa = 1$ et $\kappa = 4$, on a montré que si Φ transforme un tissu de $\mathbf{W}_{A,\kappa}$ en un tissu de la même famille, alors on peut l'obtenir comme composée d'applications G_i^{a}. Vu que pour tout i, on a $(G_i^a)_*\,(\mathcal{W}_{a,\kappa}) = \mathcal{W}_{a_i,\kappa}$ avec a_i $\mathfrak{G}$-équivalent à a, on en déduit que si $\mathcal{W}_{a,\kappa}$ et $\mathcal{W}_{\alpha,\kappa}$ sont équivalents, alors a et α sont $\mathfrak{G}$-équivalents, ce qui termine la preuve. ■

(3) On travaille modulo les constantes. Il n'est donc pas nécessaire de préciser un choix d'une détermination pour les logarithmes.

7.3.3. Une famille de 10-tissus intéressante. — Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $ab\,(1-a)(1-b) \neq 0$. Le tissu associé à la configuration formée des points

$$[\,1:0:0\,]\,, \qquad [\,0:1:0\,]\,, \qquad [\,0:0:1\,]\,, \qquad [\,1:1:1\,] \qquad \text{et} \qquad [\,a:b:1\,]\,,$$

est le 10-tissu

$$\mathcal{W}_{a\,b} := \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{1-y}{1-x}\,,\, \frac{b-y}{a-x}\,,\, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{x(b-y)}{y(a-x)}\,, \right.$$
$$\left. \frac{(1-x)(b-y)}{(1-y)(a-x)}\,,\, \frac{(bx-ay)(1-y)}{(y-x)(b-y)}\,,\, \frac{(bx-ay)(1-x)}{(y-x)(a-x)} \right)\,.$$

Plusieurs des sous-5-tissus de $\mathcal{W}_{a\,b}$ sont des tissus de Bol. On en déduit immédiatement que $\mathcal{W}_{a\,b}$ n'est pas linéarisable. D'autre part, des calculs par ordinateur montrent que les coefficients de Pantazi de $\mathcal{W}_{a\,b}$[(4)] sont tous identiquement nuls. D'après la note [**Pa 38**], cela implique que $\mathcal{W}_{a\,b}$ est de rang maximal. Il serait intéressant de vérifier ce fait, par exemple en établissant une liste explicite d'une base des relations abéliennes de $\mathcal{W}_{a\,b}$.

Si les $\mathcal{W}_{a\,b}$ sont bien de rang maximal, ils forment une famille à deux paramètres de tissus exceptionnels, dont il serait naturel d'étudier l'équivalence.

Par ailleurs, si certains tissus associés à une configuration de six points sont exceptionnels (comme le tissu de Spence-Kummer), on peut montrer que les tissus associés aux configurations de six points en position générale ne sont pas de rang maximal (on vérifie que la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus d'un tel tissu n'est pas identiquement nulle).

Nous trouvons donc intéressant le problème de l'étude du rang et de la description des relations abéliennes des tissus associés aux configurations de points.

(4) Définis en 5.1.15.

CHAPITRE 8

TISSUS EXCEPTIONNELS ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

Dans plusieurs des chapitres précédents, on a étudié au cas par cas plusieurs **exemples particuliers** de 5-tissus exceptionnels, dont la plupart sont nouveaux et apparaissent pour la première fois dans cette thèse. Dans le présent chapitre, il s'agit de **résultats généraux** concernant les 5-tissus exceptionnels plans. Plus précisément, on explique le lien entre ces tissus et la géométrie différentielle projective de certaines surfaces analytiques complexes de l'espace projectif $\mathbb{CP}^5$.

Voici un plan sommaire de ce chapitre : la première partie 8.1 est de nature historique. La plupart des résultats exposés ici apparaissent dans des publications quasi-inconnues (en géométrie des tissus, tout du moins) de certains géomètres italiens des années 35-50. On explique que, dès 1937, au vu de certains de leurs résultats, il était déjà possible de trouver de nouveaux 5-tissus exceptionnels. La suite de ce chapitre est un exposé moderne de leurs travaux.

En 8.2, après avoir fait quelques rappels sur la géométrie différentielle projective des surfaces, on expose la construction de Corrado Segre des "directions principales" sur une surfaces de $\mathbb{CP}^5$. C'est l'une des deux constructions centrales du chapitre.

En 8.3, on explique comment on peut "géométriser" un 5-tissu $\mathcal{W}$ de rang maximal, en construisant une surface dans $\mathbb{CP}^5$, à partir de ses relations abéliennes. On montre qu'une telle surface possède une géométrie bien particulière, et en s'appuyant sur la construction de Segre qui vient d'être évoquée, on montre que sa classe d'équivalence projective est canoniquement attachée à la classe d'équivalence analytique de $\mathcal{W}$. Cela permet d'entreprendre l'étude des 5-tissus exceptionnels par l'étude des surfaces qui leur sont attachées. L'intérêt est évident : on est ramené à un problème de géométrie différentielle projective.

Dans la dernière partie 8.4, on détermine explicitement les surfaces associées aux 5-tissus exceptionnels décrits aux chapitres 5, 6 et 7.

Ce chapitre porte quasi-essentiellement sur l'étude des 5-tissus de rang maximal 6. Ainsi, quand le d de "d-tissu" n'est pas précisé, c'est qu'il faut prendre $d = 5$. Comme souvent dans cette thèse, on se place dans un cadre analytique complexe, avec un point de vue localisé en l'origine. On utilisera le langage des germes.

8.1. Notations et introduction historico-mathématique

Introduisons tout d'abord quelques notations qui seront utilisées par la suite.

L'espace des germes de d-tissus en l'origine de $\mathbb{C}^2$ sera noté $\mathbf{W}[d]$:

$$\mathbf{W}[\,d\,] = \Big\{\, \{\,\mathcal{F}_i\}_{i=1}^d \;\Big|\; \text{ les } \mathcal{F}_i \text{ sont des germes de feuilletages en l'origine, en position générale} \,\Big\}\,.$$

Un élément quelconque de $\mathbf{W}[\,d\,]$ sera le plus souvent noté $\mathcal{W}(d)$.

On considère plus particulièrement les espaces des (germes de) tissus de rang maximal, de tissus algébriques, de tissus exceptionnels, respectivement notés $\mathbf{RW}[\,d\,]$, $\mathbf{AW}[\,d\,]$ et $\mathbf{EW}[\,d\,]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{RW}[\,d\,] &:= \big\{\, \mathcal{W}(d) \in \mathbf{W}[\,d\,] \;\big|\; \mathcal{W}(d) \text{ est de rang maximal } \big\}\,,\\
\mathbf{AW}[\,d\,] &:= \big\{\, \mathcal{W}(d) \in \mathbf{W}[\,d\,] \;\big|\; \mathcal{W}(d) \text{ est algébrisable } \big\}\,,\\
\mathbf{EW}[\,d\,] &:= \big\{\, \mathcal{W}(d) \in \mathbf{W}[\,d\,] \;\big|\; \mathcal{W}(d) \text{ est exceptionnel } \big\}\,.
\end{aligned}$$

Il est clair qu'on a les relations ensemblistes :

$$\mathbf{AW}[\,d\,] \sqcup \mathbf{EW}[\,d\,] = \mathbf{RW}[\,d\,] \subset \mathbf{W}[\,d\,]\,.$$

Le groupe $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ des germes de biholomorphisme en l'origine agit de façon naturelle sur $\mathbf{W}[\,d\,]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbf{W}[\,d\,] &\longrightarrow \mathbf{W}[\,d\,]\\
\big(\,\phi\,,\, \mathcal{W}(d)\,\big) &\longmapsto \phi_\star\big(\mathcal{W}(d)\big)\,,
\end{aligned}$$

et plus généralement agit par restriction sur les sous-ensembles $\mathbf{RW}[\,d\,]$, $\mathbf{AW}[\,d\,]$ et $\mathbf{EW}[\,d\,]$ de $\mathbf{W}[\,d\,]$. Ainsi, si $\mathbf{Mot}$ désigne l'un des mots $\mathbf{W}$, $\mathbf{RW}$, $\mathbf{AW}$ ou $\mathbf{EW}$, on note $\underline{\mathbf{Mot}}[\,d\,]$ le quotient de $\mathbf{Mot}[\,d\,]$ par l'action de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$:

$$\underline{\mathbf{Mot}}[\,d\,] := {}_{\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2,0)}\backslash \mathbf{Mot}[\,d\,]\,.$$

Si $\mathcal{W}(d)$ est un élément de $\mathbf{W}[\,d\,]$, sa classe d'équivalence analytique $\big($*i.e.* son orbite sous l'action de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)\big)$ sera notée $\underline{\mathcal{W}}(d)$.

Le problème qui nous intéresse dans ce chapitre est celui de la description de $\underline{\mathbf{EW}}[5]$.

On peut dire que les méthodes qui sont à la base des constructions dont il est question ici apparaissent déjà dans la preuve de Poincaré du théorème de Lie affirmant l'algébricité des 4-tissus plans de rang maximal 3. L'idée est de géométriser la situation en utilisant les relations abéliennes.

Étant donné un (germe de) 5-tissu $\mathcal{W}$ de rang maximal, en généralisant un peu l'approche de Poincaré, on va pouvoir construire un germe de paramétrisation noté PB d'une surface $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\mathcal{W}]$ dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^5$. Cette surface sera la *surface de Blaschke* du tissu $\mathcal{W}$. La construction qui vient d'être évoquée dépend en fait du choix d'une base de l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$ et, en conséquence, seule la classe de $\mathcal{S}$, modulo $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$, va être canoniquement attachée à $\mathcal{W}$ (on fera cependant l'abus de parler de "la" surface de Blaschke de $\mathcal{W}$). On a donc une application

$$\mathbf{RW}[5] \longrightarrow \big\{\, \text{germes de surfaces } \mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5 \,\big\}_{/\ \mathrm{PGL}_{(6,\mathbb{C})}}\,.$$

C'est autour de cette construction que se développe tout le chapitre. C'est par elle qu'on peut entreprendre l'étude des 5-tissus exceptionnels par des méthodes géométriques. Notons qu'on peut construire une paramétrisation explicite de la surface de Blascke dès qu'on a une base explicite de l'espace des relations abéliennes.

On peut déjà faire quelques remarques qui montrent l'intérêt de cette construction :

– on montre sans difficulté que la surface de Blaschke $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ d'un tissu $\mathcal{W}$ de rang maximal ne dépend en fait que de sa classe d'équivalence analytique $\underline{\mathcal{W}}$. On en déduit que tout invariant projectivo-différentiel de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ donne un invariant analytique pour $\mathcal{W}$.

– on peut prouver que $\mathcal{W}$ est algébrisable si et seulement si la surface de Blaschke associée est incluse dans une surface de Véronèse de $\mathbb{CP}^5$ (voir la Proposition 8.4.6).

Cette dernière remarque est très utile pour vérifier si un tissu de rang maximal est algébrique ou non. Par exemple, la surface de Blaschke du tissu de Bol $\mathcal{B}$ est transcendante. On en déduit immédiatement que $\mathcal{B}$ n'est pas algébrique et donc est exceptionnel. Ce dernier point apparaît déja dans l'article de Bol [**Bol 36**] où il est question pour la première fois de ce fameux tissu qui porte son nom. La construction d'une surface associée à un 5-tissu plan de rang maximal est connue depuis les débuts de la théorie. Plusieurs pages de la référence classique [**BB**] discutent d'ailleurs ce sujet.

L'idée de construire des objets géométriques "à la Poincaré" à partir des relations abéliennes pour étudier les tissus de rang maximal a été reconnue comme particulièrement intéressante et fertile en géométrie des tissus. Elle a été utilisée de nombreuses fois par des auteurs anciens et modernes, pour étudier des problèmes d'algébricité en théorie des tissus. On peut citer les travaux de Blaschke [**Bl 33**] sur l'algébrisation des 5-tissus plans de rang 6 (qui comportaient une erreur) ou les articles de Chern et Griffiths [**CG 78**], [**CG 78-1**] concernant l'algébrisation des tissus de codimension 1 et de rang maximal. Citons encore les résultats récents de Hénaut concernant la caractérisation des tissus plans de rang maximal qui sont linéarisables [**Hé 93**] ou d'autres portant sur l'algébrisation des tissus de codimension n dans $\mathbb{C}^{2n}$ et de n-rang maximal [**Hé 98**]. Tous ces travaux prennent l'approche géométrique de Poincaré comme point de départ.

Dans ce chapitre, on expose les travaux de certains géomètres italiens qui se sont intéressés à l'étude des surfaces de Blaschke associées aux tissus exceptionnels. En suivant l'ordre de leurs publications sur le sujet, on peut citer trois mathématiciens : Enrico Bompiani, Alessandro Terracini et Piero Buzano. En s'appuyant sur une construction de 1910 de Corrado Segre (voir [**Se-C 10**] et [**Se-C 21**]), ils se sont rendu compte que la géométrie des surfaces de Blaschke était très riche et en ont entrepris l'étude. La construction de Segre permet d'attacher projectivement un 5-tissu (le *tissu de Segre*) à toute surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{CP}^5$ qui satisfait certaines hypothèses de non-dégénérescence génériquement vérifiées. Dans [**Te 39**] et [**Te 40**], Terracini a montré que tout 5-tissu pouvait être réalisé comme tissu de Segre, avec un certain arbitraire. Par contre, la situation est complètement différente pour un tissu exceptionnel $\mathcal{W}$, puiqu'il s'avère que le tissu de Segre de la surface de Blaschke $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ est (équivalent à) $\mathcal{W}$. Ainsi, toute l'information concernant un tissu exceptionnel et ses relations abéliennes est en quelque sorte "contenue" dans la surface de Blaschke associée.

Il semble que le premier à avoir fait le lien entre les tissus exceptionnels et les tissus de Segre des surfaces de Blaschke associées soit Bompiani, bien que celui-ci attribue à Blaschke la paternité de cette découverte. En tout cas, c'est bien Bompiani qui a remarqué que les surfaces de Blaschke des 5-tissus exceptionnels vérifient une propriété géométrique bien particulière, celle de porter

> *cinque sistemi ∞^1 di linee tali che i piani tangenti alla superficie nei punti di ciascuna di esse stanno in un $\mathbb{CP}^4$.*[(1)]

[(1)] Cf. [**Bom 37**], en haut de la page 27.

> [cinq systèmes ∞^1 de courbes telles que les plans tangents à la surface en les points de chacune de ces courbes sont dans un $\mathbb{CP}^4$.]

(pour une définition précise de cette propriété, notée $\mathcal{B}$ dans cette introduction, voir la Définition 8.4.10). Dans [**Bom 37**], Bompiani montre que l'image d'un tissu exceptionnel par l'application de Poincaré-Blaschke est le tissu de Segre de la surface de Blaschke associée (cf. Proposition 8.4.8 et le corollaire qui suit). Remarquant que la surface de Blaschke du tissu de Bol satisfait l'hypothèse géométrique $\mathcal{B}$, il pose le problème de montrer que c'est la seule surface de ce type.

Terracini répond par la négative à cette question très peu de temps après. Dans [**Te 37**], il observe que la surface de Blaschke de $\mathcal{B}$ possède une propriété géométrique particulière en plus de $\mathcal{B}$, celle que

> *... tre dei sistemi ∞^1 di linee [...] fossero sistemi "conici", ossia segati sulla superficie ciascuno da ∞^1 $\mathbb{CP}^3$ passanti per un piano fisso, coi tre piani vertici dei coni* appartenenti ad un medesimo iperpiano $\mathbb{CP}^4$.(2)

> [trois des systèmes ∞^1 de courbes forment des systèmes "coniques", c'est-à-dire chacun obtenu par intersection de la surface avec ∞^1 $\mathbb{CP}^3$ qui passent par un plan fixe, avec les trois plans sommets de ces cônes inclus dans un même hyperplan $\mathbb{CP}^4$.]

Il entreprend alors la détermination de toutes les surfaces vérifiant $\mathcal{B}$ et cette dernière propriété. Il ramène cela à la résolution d'un système différentiel (non-linéaire). Il arrive à en déterminer les solutions et obtient ainsi quatre paramétrisations explicites de quatre surfaces projectivement non-équivalentes, qu'on note $\mathcal{S}_k$ $(k = a, b, c, d)$. Bien sûr, l'une des surfaces obtenues (disons $\mathcal{S}_a$) est la surface de Blaschke $\mathcal{S}[\mathcal{B}]$, dont le tissu de Segre est $\mathcal{B}$, qui est exceptionnel.

La première question qui se pose alors est celle de savoir si les tissus de Segre des surfaces $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ et $\mathcal{S}_d$ (dits *tissus de Terracini*) sont exceptionnels ou non. Puisqu'aucune de ces surfaces n'est incluse dans une surface de Véronèse, cela revient à savoir si leur tissu de Segre est de rang maximal, ou pas. Il est surprenant que cette question n'ait pas été abordée par Terracini, ni même signalée. Ces tissus sont uniquement étudiés du point de vue de l'hexagonalité de leurs sous-3-tissus.

Un fait encore plus étrange est que dans le livre [**BB**] qui rassemble les résultats significatifs sur les tissus obtenus entre les années 1927 et 1938, la question de savoir si les trois 5-tissus de Terracini sont exceptionnels est clairement posée, et signalée comme "facile" ! En effet, page 261 on peut lire :

> *Bei [die Fläsche] b), c) und d) ist noch nicht festgestellt, ob die hierzu gehörigen Kurvengewebe wirklich den Rang sechs haben, das wäre aber leicht nachzuprüfen.*

> [Pour les surfaces b), c) et d), il n'est pas encore déterminé si les tissus associés sont véritablement de rang six, mais cela serait aisé à prouver.]

Pour autant que nous le sachions, cette vérification n'a jamais été faite. Pire encore, cette question n'est signalée absolument nulle part ailleurs que dans [**BB**] (où elle apparaît en bas de page et en petits caractères).

(2) Cf. [**Buz 39**], en haut de la page 52.

Les trois 5-tissus de Terracini admettent pour modèles les tissus suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}err(b) &= \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, x^2-y^2 \Big)\,,\\
\mathcal{T}err(c) &= \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, \frac{(x+y)^2}{1+y^2}\,,\, \frac{y(x^2y-2x-y)}{1+y^2}\,,\, \frac{x^2y-2x-y}{x^2-2xy-1} \right)\,,\\
\mathcal{T}err(d) &= \mathcal{W}\left(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{x}{y}\,(x+y) \right)\,.
\end{aligned}$$

On montre plus loin (section 8.4) que ces trois tissus sont bien de rang maximal. Le tissu $\mathcal{T}err(b)$ admet une base de relations abéliennes particulièrement simple, qu'il est facile de déterminer, même "à la main". Ainsi, dès 1937, on pouvait trouver dans la littérature de quoi répondre à la question de Chern au sujet de l'existence d'autres 5-tissus exceptionnels distincts de $\mathcal{B}$!

Deux ans plus tard, dans [**Buz 39**], suivant l'approche de Terracini mais en faisant d'autres hypothèses géométriques simplificatrices, Buzano détermine explicitement deux surfaces possédant la propriété $\mathcal{B}$ et dont les tissus de Segre sont équivalents aux deux tissus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}uz(A) &:= \mathcal{W}\big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, \tanh(x)\,\tanh(y) \big)\,,\\
\mathcal{B}uz(B) &:= \mathcal{W}\big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, \exp(x)+\exp(y) \big)\,.
\end{aligned}$$

La question (si naturelle) de savoir si ces tissus sont bien de rang maximal n'est même pas signalée dans l'article de Buzano. Ces deux tissus sont bien exceptionnels, comme on l'a montré au chapitre 6 (voir aussi la section 8.4).

Ces résultats des géomètres italiens dont il vient d'être question étaient sans doute connus des membres de l'école de Hambourg, comme l'atteste la page 261 du livre [**BB**]. Cependant ils ont été obtenus à l'époque où Blaschke et ses collaborateurs se détournaient de l'étude des tissus pour s'intéresser à des questions de géométrie intégrale. Conjugué au déroulement de la guerre qui suivit peu après, ce fait explique sans doute pourquoi les travaux des Italiens sont tombés dans l'oubli. Ils ne sont référencés nulle part dans la littérature "moderne" portant sur les tissus, que ce soit dans les articles de l'école russe de Akivis et Goldberg, ou bien dans les travaux de Chern et Griffiths, ou encore dans ceux plus récents de Hénaut.

Signalons qu'avant d'avoir découvert cette intéressante littérature "italienne", nous avions établi l'existence de certains tissus exceptionnels qui nous semblaient tous être "nouveaux" (voir [**Pi 04**], [**PT 04**] ainsi que le chapitre 6). Or certains de ces tissus avaient déjà été considérés par Terracini et Buzano. Par des voies élémentaires mais non-géométriques, nous avons (re)découvert les tissus $Buz(A)$, $Buz(B)$ et $\mathcal{T}err(b)$ et montré qu'ils sont exceptionnels en construisant des bases explicites de leur espace de relations abéliennes.

Ce chapitre contient peu de résultats nouveaux[(3)]. On a voulu exposer et peut-être remettre au goût du jour la très belle approche des géomètres italiens sus-cités pour l'étude géométrique des 5-tissus plans exceptionnels. Les références italiennes seront rappelées au fur et à mesure. On signale cependant que, dans l'ensemble, elles sont réunies dans le traité de géométrie différentielle projective [**L**], qui est peut-être la source la plus commode.

[(3)] Les seules véritables nouveautés sont des bases explicites de relations abéliennes, ainsi que les paramétrisations explicites des surfaces de Blaschke qui s'en déduisent.

8.2. Géométrie différentielle projective des surfaces et tissu de Segre

On commence par rappeler quelques points classiques de géométrie différentielle projective. Ces rappels sont loin d'être exhaustifs et ne servent qu'à rendre compréhensibles les constructions ultérieures du chapitre. Pour des présentations plus systématiques, on renvoie aux traités [**B**], [**CF**], [**L**], ainsi qu'à la principale référence moderne [**AG-1**]. Le troisième chapitre de [**IL**] donne également une bonne introduction au formalisme moderne, avec une orientation nette vers des questions de géométrie algébrique projective.

En 8.2.2 et 8.2.3, on introduit la notion, due à Corrado Segre, de *direction principale en un point d'une surface de* $\mathbb{CP}^5$. On en donne une définition analytique en 8.2.2, qui, si elle ne fait pas ressortir le pourquoi de la construction, a l'avantage de permettre une définition rigoureuse de ce qu'est la multiplicité d'une telle direction principale. Ensuite, en 8.2.3, on fait le lien avec la définition originelle de Segre, qui est de nature géométrique. On introduit alors la notion d'*hyperplan principal*.

Tous les objets considérés ci-dessous seront supposés holomorphes. Ainsi, par "immersion", il faudra comprendre "immersion holomorphe", par "plongement", "plongement holomorphe", etc.

La projection canonique $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ sera toujours notée π.

La grassmannienne des hyperplans d'un espace projectif $\mathbb{P}V$ de dimension n a, elle aussi, la structure d'un espace projectif à n dimensions et sera notée $\mathbb{P}V^*$. On a un isomorphisme canonique $(\mathbb{P}V^*)^* \simeq \mathbb{P}V$: c'est le phénomène de "dualité projective", dont il sera constamment fait usage dans ce chapitre. Si L est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}V$, de dimension $k < n$, on note L^* l'ensemble des hyperplans qui le contiennent. C'est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}V^*$, de dimension $n-k-1$.

Si Z est un vecteur non-nul de $\mathbb{C}^6$, il définit un point de $\mathbb{CP}^5$ que l'on note encore Z. Nous dirons que les coordonnées de Z sont des *coordonnées homogènes* pour Z vu comme point de $\mathbb{CP}^5$. Pour $Z_1, \dots, Z_p \in \mathbb{CP}^5$, le plus petit sous-espace projectif contenant les Z_i sera noté $\overline{Z_1 \dots Z_p}$. On dit que c'est l'espace (projectif) *engendré* par les Z_i.

Si $z_0, \dots, z_5$ (resp. $h_0, \dots, h_5$) sont des coordonnées homogènes d'un point $Z \in \mathbb{CP}^5$ $\big($resp. d'un hyperplan $H \in (\mathbb{CP}^5)^*\big)$, on note :

$$Z.H = z_0\, h_0 + \cdots + z_5\, h_5\,.$$

Ce scalaire n'a pas de signification du point de vue projectif, sauf s'il est nul : cela signifie alors que $Z \in H$ $\big($ou de façon équivalente, que $H \in Z$, en considérant Z comme un hyperplan de $(\mathbb{CP}^5)^*\big)$.

8.2.1. Surfaces projectives. — On commence par rappeler des généralités.

Définition 8.2.1. — Une *surface* (analytique complexe) $\mathcal{S}$ dans un espace projectif $\mathbb{CP}^5$ est l'image d'une variété complexe connexe S de dimension 2 par une immersion $f : S \to \mathbb{CP}^5$.

Une surface $\mathcal{S} = f(S) \subset \mathbb{CP}^5$ est dite *non-dégénérée* si elle n'est pas incluse dans un hyperplan. Un point $p \in \mathcal{S}$ est dit *régulier* s'il existe un voisinage U de p tel que $\mathcal{S} \cap U$ soit une sous-variété lisse. Un point de $\mathcal{S}$ qui n'est pas régulier est dit *singulier*. L'ensemble des points singuliers de $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble analytique de codimension plus grande que 1 dans $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{sing}(\mathcal{S})$. Son complémentaire forme la *partie régulière* de $\mathcal{S}$, notée $\mathrm{reg}(\mathcal{S})$. La surface est dite *lisse* ou *régulière* si son ensemble singulier est vide, *i.e.* si tous ses points sont réguliers.

Si $\mathcal{S}$ est une suface, on note $[\mathcal{S}]_p$ le germe de surface défini par $\mathcal{S}$ au voisinage d'un point $p \in \mathcal{S}$.

On donne maintenant un exemple classique de surface qui va jouer un rôle important dans la suite.

Exemple 1. — Considérons l'application $v_2 : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^5$, définie en coordonnées homogènes par

$$\big[\, x_0 \,:\, x_1 \,:\, x_2 \,\big] \longmapsto \big[\, x_0 \,:\, x_1 \,:\, x_2 \,:\, x_0x_1 \,:\, x_0x_2 \,:\, x_1x_2 \,\big]\,.$$

L'image de $\mathbb{CP}^2$ par v_2 est une surface algébrique lisse, notée V_2. Par définition, une *surface de Véronèse* dans $\mathbb{CP}^5$ est l'image de V_2 par une homographie projective.

Pour une définition plus intrinsèque, voir [**IL**], page 85.

Définition 8.2.2. — Une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$ est dite *réglée*, s'il existe une courbe C sur $\mathcal{S}$ telle que

– en chaque point p de C passe un segment de droite[(4)] $L(p)$ inclus dans $\mathcal{S}$;
– $\mathcal{S}$ est la réunion des $L(p)$.

Si $L(p)$ est inclus dans la droite tangente à C en chaque $p \in C$, la surface est dite *développable*.

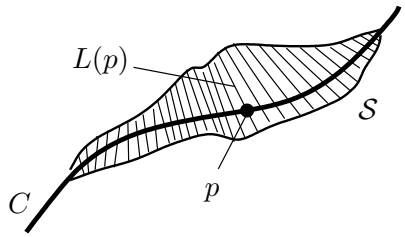


FIGURE 1. Une surface réglée.

On va s'intéresser aux propriétés des surfaces de $\mathbb{CP}^5$ qui sont invariantes par transformations projectives. On définit maintenant l'équivalence projective de deux surfaces :

Définition 8.2.3. — Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces dans $\mathbb{CP}^5$. Elles sont dites *projectivement équivalentes* s'il existe une application projective $g \in \mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$ telle que $g(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.

La notion d'équivalence projective de deux germes de surfaces s'en déduit sans ambiguïté.

Notations : on note $\mathbf{S}(\mathbb{CP}^5)$ ou plus simplement $\mathbf{S}^5$ l'espace des germes de surfaces régulières non-dégénérées immergées dans $\mathbb{CP}^5$:

$$\mathbf{S}(\mathbb{CP}^5) := \left\{ \mathcal{S} = F\big(\,\mathbb{C}^2, 0\,\big) \;\middle|\; F : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{CP}^5\,,\ dF(0) \ \text{ est de rang 2, } \mathcal{S} \ \text{ est non-dégénérée} \right\}.$$

Le groupe projectif $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$ agit de façon naturelle sur cet espace :

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_6(\mathbb{C}) \times \mathbf{S}^5 &\longrightarrow \mathbf{S}^5 \\ \big(\, g\,,\, \mathcal{S}\,\big) &\longmapsto g\,(\mathcal{S})\ . \end{aligned}$$

On note $\underline{\mathbf{S}}^5$ l'espace des orbites pour cette action. Il est clair que deux germes de surfaces sont congruents si et seulement s'ils sont dans la même orbite sous $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$: $\underline{\mathbf{S}}^5$ est l'espace des classes d'équivalence projective de germes de surfaces régulières non-dégénérées dans $\mathbb{CP}^5$.

(4) On définit un segment de droite comme un domaine d'une droite projective incluse dans $\mathbb{CP}^5$.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$ un germe régulier de surface en p. Il existe un germe de plongement $P : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$ avec $P(0) = p$ tel que la classe de son image soit $\mathcal{S}$. En coordonnées homogènes, on a

$$P(u,v) = \left[\, x_0(u,v) : x_1(u,v) : \ldots : x_5(u,v) \,\right],$$

où les fonctions $(u,v) \mapsto x_i(u,v)$ sont des germes de fonctions holomorphes en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Un autre germe de plongement $\widehat{P} = [\widehat{x_0} : \ldots : \widehat{x_5}]$ définit le même germe de surface que P si et seulement s'il existe un germe de biholomorphisme $\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ et un germe de fonction holomorphe $\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ ne s'annulant pas en l'origine tels que $x_k = \lambda \times (\widehat{x_k} \circ \phi)$ (pour $k = 0, \ldots, 5$).

On remarquera qu'une paramétrisation P d'un germe de surface, donnée en coordonnées homogènes, correspond au choix d'un relèvement $\overline{P} : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}^6 - \{0\}$ de P relativement à la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^6 - \{0\} \to \mathbb{CP}^5$. On identifiera dorénavant la donnée d'une *paramétrisation en coordonnées homogènes* avec le relèvement à $\mathbb{C}^{n+1}$ qu'elle définit.

À l'aide de la notion de paramétrisation en coordonnées homogènes, on définit maintenant le k-ième plan osculateur à une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$. Pour une présentation plus intrinsèque, on renvoie à la section 2.3 de [**AG-1**]. Puisqu'il s'agit de notions locales, on travaillera avec des germes de surfaces.

Soit $P : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{CP}^5$ une paramétrisation d'un germe de surface $\mathcal{S}$, donné en coordonnées homogènes par $P = [x_0 : \ldots : x_5]$. On pose $p = P(0)$. Pour $k \geq 1$, notons $O(P,k)$ le sous espace-vectoriel de $\mathbb{C}^6$ engendré par les dérivées partielles $\partial P / \partial u^i \partial v^j(0)$ avec $i + j \leq k$:

$$O(P,k) := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \left\{ \frac{\partial P(0)}{\partial u^i \partial v^j} \;\middle|\; i + j \leq k \right\} \right\rangle \subset \mathbb{C}^6 .$$

On montre facilement que si $\widehat{P}$ est une autre paramétrisation de $\mathcal{S}$ en p alors $O(P,k) = O(\widehat{P},k)$. Ainsi l'espace $O(P,k)$ ne dépend pas de P mais uniquement du germe de surface $\mathcal{S}$ qu'il définit. Avec ces notations, on peut poser la

Définition 8.2.4. — Pour $k \geq 1$, le *k-ième plan osculateur à $\mathcal{S}$ en p*, noté $O(\mathcal{S})_p^k$ (ou O_p^k quand aucune confusion n'est possible), est l'image par la projection π de l'espace $O(P,k)$.

La remarque qui précède cette définition montre que celle-ci est bien rigoureuse (elle ne dépend pas de la paramétrisation P mais seulement de la surface $\mathcal{S}$ au voisinage de p). Cette notion de k-ième plan osculateur se généralise aux sous-variétés projectives de dimension arbitraire.

Remarques : 1. on peut donner une définition purement géométrique du k-ième plan osculateur en un point régulier p d'une sous-variété V immergée dans $\mathbb{CP}^n$: si cette sous-variété est une courbe, le k-ième plan osculateur à V en p est défini comme étant la limite (qui existe et est unique, dans une grassmannienne convenable) des sous-espaces projectifs $\overline{q_0 \ldots q_k}$ engendrés par $k+1$ points distincts génériques $q_0, \ldots, q_k$ de la courbe lorsque les q_i tendent vers p. Si V est de dimension quelconque, le plan osculateur $O(V)_p^k$ sera défini comme étant le plus petit sous-espace projectif de $\mathbb{CP}^n$ contenant tous les k-plans osculateurs en p aux courbes tracées sur V passant par p.

2. étant donné un point régulier p d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$, on a $O_p^0 = \{p\}$. Le premier plan osculateur non trivial O_p^1 peut être considéré comme la projectivisation du plan tangent en p à $[\mathcal{S}]_p$ vu comme germe de surface dans tout espace affine inclus dans $\mathbb{CP}^5$. Il est donc de dimension 2.

3. il est clair que pour tout $k \geq 0$, on a $\mathcal{O}(\mathcal{S})_p^k \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})_p^{k+1}$. Les plans osculateurs en un point d'une surface forment une suite croissante de sous-espaces projectifs (pour l'inclusion). Pour des raisons de dimension, cette suite se stabilise. On note $O(\mathcal{S})_p$ ou plus simplement O_p la réunion des espaces

osculateurs à $\mathcal{S}$ en p. En général, on a $O_p = \mathbb{CP}^5$, mais il arrive que cela ne soit pas le cas.

Considérons un germe de surface $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{CP}^5$, image d'un plongement $P : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{CP}^5$. Supposons que la dimension d du deuxième plan osculateur à $\mathcal{S}$ soit constante dans un voisinage de p. Il est clair que $2 \leq d \leq 5$, le cas $d = 5$ correspondant au cas générique. Si $d < 5$, alors on est dans l'un des cas suivants :

Proposition 8.2.5. — *Avec les notations précédentes, si $d = 2$, le germe considéré est inclus dans un sous-espace $\mathbb{CP}^2$ de $\mathbb{CP}^5$. C'est donc un morceau de 2-plan projectif. Si $d = 3$, alors $\mathcal{S}$ est un germe de surface développable s'il n'est pas dégénéré. Dans le cas contraire, le 2-plan osculateur O_q^2 est fixe (il ne dépend pas de q) et la surface $\mathcal{S}$ est incluse dedans.*

Pour des preuves, voir [**AG-1**], section 2.5. Les surfaces pour lesquelles $d = 4$ sont appelées *surfaces F*. La définition suivante n'est pas classique mais nous sera utile :

Définition 8.2.6. — Une surface régulière non-dégénérée $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^5$ est dite *générale* si son 2-plan osculateur est de dimension maximale 5 en tout point générique.

On introduit l'ensemble des surfaces générales dans $\mathbb{CP}^5$

$$\mathbf{GS}^5 := \left\{ \mathcal{S} \in \mathbf{S}^5 \,\middle|\, \mathcal{S} \text{ est générale} \right\}$$

et on note $\underline{\mathbf{GS}}^5$ l'espace des classes d'équivalence projective des surfaces de ce type.

8.2.1.1. Liens avec la théorie des systèmes différentiels linéaires homogènes. — On explique maintenant le lien étroit qui existe entre l'étude des surfaces de $\mathbb{CP}^5$, modulo équivalence projective, et celle de certains systèmes différentiels linéaires homogènes. L'approche dont il est question est très classique et se généralise. On renvoie aux livres cités plus haut ainsi qu'aux articles [**Se-B 63**] et [**MSY 93**] pour des exposés plus systématiques.

Le formalisme qui va être introduit ci-dessous sera utilisé en 8.4.2 pour caractériser certaines surfaces susceptibles d'être attachées aux 5-tissus exceptionnels, ce qui justifie qu'on le décrive rapidement.

Soit $P : U \subset \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^5$, un plongement défini sur un voisinage simplement connexe de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, tel que son image soit une surface générale régulière. Supposons que P soit donné en coordonnées homogènes par $P = \mathbf{x} = [x_0 : \ldots : x_5]$. On prend les notations suivantes : dans tout ce qui suit, a, b, i et j désignent des entiers naturels et (u, v) est toujours un élément de U. On note $\mathbf{x}_{ij}(u, v)$ le vecteur de $\mathbb{C}^6$ (ou indifféremment le point de $\mathbb{CP}^5$ qu'il définit, s'il n'est pas nul) dont les coordonnées sont les dérivées partielles $\partial x_k(u, v)/\partial u^i \partial v^j$ avec $k = 0, \ldots, 5$.

L'hypothèse que $\mathcal{S}$ est générale implique qu'en tout (u, v), les vecteurs $\mathbf{x}_{ij}(u, v)$ pour $i + j \leq 2$ engendrent linéairement $\mathbb{C}^6$. On en déduit que pour tout (u, v), les quatre dérivées partielles d'ordre 3 en (u, v) du vecteur $\mathbf{x}$ peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des $\mathbf{x}_{ij}(u, v)$ (avec $i+j \leq 2$).

Ainsi, il existe des fonctions C_{ab}^{ij} (pour $a + b = 3$ et $i + j \leq 2$) telles que sur U, on ait :

$$\mathbf{x}_{ab} = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i+j=k} C_{ab}^{ij} \mathbf{x}_{ij} \qquad (a, b \geq 0,\ a + b = 3).$$

À la paramétrisation en coordonnées homogènes $\mathbf{x}$, on peut donc associer le système linéaire homogène d'équations aux dérivées partielles en deux variables et d'inconnue une fonction scalaire

$$\mathcal{S}[\underline{C}] : \qquad x_{ab} = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i+j=k} C_{ab}^{ij} x_{ij} \qquad (a, b \geq 0, \quad a + b = 3).$$

Inversement, étant donné un ensemble $\underline{\mathcal{C}}$ de 24 germes de fonctions $\mathcal{C}_{ab}^{ij}$ (avec $a+b=3$ et $i+j\leq 2$), on peut considérer le système linéaire homogène $\mathcal{S}\big[\underline{\mathcal{C}}\big]$. Par définition, le *rang* r d'un tel système est le nombre de germes $(\mathbb{C}^2,0)\to\mathbb{C}$ linéairement indépendants (sur $\mathbb{C}$) qui en sont solutions.

On peut écrire un tel système sous la forme matricielle $dX = M\big[\underline{\mathcal{C}}\big]\,X$ avec

$$X=\begin{pmatrix} x\\ x_{10}\\ x_{01}\\ x_{20}\\ x_{11}\\ x_{02}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad M\big[\underline{\mathcal{C}}\big]=\begin{pmatrix} 0 & du & dv & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & du & dv & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & du & dv\\ M_{41} & M_{42} & \dots & & \cdots & M_{46}\\ \vdots & \vdots & & & & \vdots\\ M_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & M_{66}\end{pmatrix},$$

où les coefficients M_{uv} sont des 1-formes qui s'expriment de façon simple (mais un peu longue à écrire) en les $\mathcal{C}_{ab}^{ij}$. Avec ce formalisme, il est clair que le rang d'un système $\mathcal{S}\big[\underline{\mathcal{C}}\big]$ est au plus 6 et que cette borne est atteinte si et seulement si est vérifiée la condition d'intégrabilité :

$$d\,M\big[\underline{\mathcal{C}}\big]+M\big[\underline{\mathcal{C}}\big]\wedge M\big[\underline{\mathcal{C}}\big]=0\,.$$

On notera $G\mathcal{S}$ l'ensemble des 24-uplets $\underline{\mathcal{C}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2,0)$ qui satisfont cette condition. Les systèmes $\mathcal{S}\big[\underline{\mathcal{C}}\big]$ de rang maximal 6 seront notés $G\mathcal{S}\big[\underline{\mathcal{C}}\big]$. Les paramétrisations des surfaces générales de $\mathbb{CP}^5$ satisfont des systèmes de ce type, ce qui explique la terminologie : le G de $G\mathcal{S}$ valant pour "générale" et $\mathcal{S}$ pour "système".

Inversement, si $u_0,u_1,\dots,u_5$ est une famille linéairement indépendante de solutions en $(\mathbb{C}^2,0)$ d'un système $G\mathcal{S}[\underline{\mathcal{C}}]$, alors $[u_0:u_1:\cdots:u_5]:(\mathbb{C}^2,0)\to\mathbb{CP}^5$ définit un germe de paramétrisation d'une surface générale $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{CP}^5$. Il est aisé de voir que si $v_0,v_1,\dots,v_5$ est une autre famille linéairement indépendante de solutions, la surface associée est projectivement équivalente à $\mathcal{S}$. La classe d'équivalence projective de surface ainsi définie sera notée $\mathcal{S}\,[\,\underline{\mathcal{C}}\,]$. On a donc une application

$$Sol\ :\ G\mathcal{S}\longrightarrow \underline{\mathbf{GS}}^5\ :\ \underline{\mathcal{C}}\longmapsto \mathcal{S}\,[\,\underline{\mathcal{C}}\,]\ .$$

Sur $G\mathcal{S}$, on peut définir une relation d'équivalence notée $\approx$ de la façon suivante :

$$\underline{C}\approx\underline{\mathcal{C}}\qquad\text{ssi}\qquad \begin{array}{l}\exists\,\phi\in\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2,0),\ \exists\,\lambda:(\mathbb{C}^2,0)\to\mathbb{C}^\star\\ \text{t.q. }\lambda\times(x\circ\phi)\text{ est solution de }G\mathcal{S}\big[\underline{C}\big]\\ \qquad\text{ssi } x\text{ est solution de }G\mathcal{S}\big[\underline{\mathcal{C}}\big].\end{array}$$

On notera $\underline{G\mathcal{S}}$ le quotient de $G\mathcal{S}$ par cette relation d'équivalence. L'application Sol définie ci-dessus passe au quotient et donne une bijection

$$\underline{Sol}\ :\ \underline{G\mathcal{S}}\xrightarrow{\sim}\underline{\mathbf{GS}}^5\,.$$

On a ainsi explicité le lien entre l'étude projective des surfaces générales de $\mathbb{CP}^5$ et celle des systèmes différentiels du type $G\mathcal{S}[\underline{C}]$, modulo $\approx$.

8.2.2. Directions principales de Segre I. — On va donner une définition de la notion (due à Corrado Segre) de direction principale en un point régulier d'une surface générale de $\mathbb{CP}^5$. L'approche originelle de Segre dans [**Se-C 21**] est très géométrique mais n'est pas très rigoureuse. C'est pourquoi nous allons commencer par donner une définition analytique de cette notion de direction principale, définition qui a l'avantage d'être bien formalisée.(5) Cependant, parce que ce point de

(5) Pour des définitions analytiques équivalentes, mais qui utilisent la méthode du repère mobile, voir par exemple [**Pa 38-2**] ou la référence plus moderne [**Sa 90**].

vue ne fait pas apparaître la géométrie sous-jacente, on expose ensuite la définition originelle des directions principales, avec le point de vue géométrique de Segre.

Dans ce qui suit, $\mathcal{S}$ désigne une surface non-dégénérée générale et régulière de $\mathbb{CP}^5$ et

$$\mathbf{x} \,:\, (u,v) \mapsto \left[\, x^0(u,v) \,:\, \ldots \,:\, x^5(u,v) \,\right]$$

en est une paramétrisation en coordonnées homogènes définie sur un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que $\mathbf{x}$ est un plongement. On note alors $p := \mathbf{x}(0)$.

Rappel : soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Alors pour $k \geq 0$, on note $\mathrm{S}^k V^*$ l'espace des formes k-linéaires symétriques sur V. La somme directe $S\,V^* := \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{S}^k V^*$ est une $\mathbb{C}$-algèbre pour le produit. On identifie souvent $\mathrm{S}^k V^*$ à l'espace des polynômes homogènes de degré k sur V. À tout fibré F de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur une variété M, on peut associer de façon naturelle le fibré $\mathrm{S}^k F$ sur M, de fibre $\mathrm{S}^k F(z)$ en $z \in M$.

En se souvenant que la paramétrisation $\mathbf{x}$ peut être vue comme une application de U dans $\mathbb{C}^6$, on définit une section du fibré $\mathrm{S}^5\,\mathrm{T}^*U$ en posant :

$$\mathbb{F}_{\mathbf{x}} := \Big| \, \mathbf{x} \,,\, \mathbf{x}_u \,,\, \mathbf{x}_v \,,\, \mathbf{x}_{uu}\, du + \mathbf{x}_{uv}\, dv \,,\, \mathbf{x}_{uv}\, du + \mathbf{x}_{vv}\, dv \,,\, \cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot\, \mathbf{x}_{uuu}\, du^3 + 3\,\mathbf{x}_{uvv}\, du\, dv^2 + \mathbf{x}_{vvv}\, dv^3 \,\Big|$$

où $|\cdot|$ désigne le déterminant pris dans $\mathcal{M}_6\,(S\,\mathrm{T}^*U)$.

Bien sûr, cette forme dépend de la paramétrisation $\mathbf{x}$. Pour pouvoir lui associer un objet qui ne dépend que de la surface $\mathcal{S}$, il faut connaître les dépendances de $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}$ par rapport aux transformations permises sur la paramétrisation $\mathbf{x}$. Celles-ci sont données par la propriété suivante, qui se démontre sans difficulté par des calculs directs un peu fastidieux que l'on ne détaillera pas.

Proposition 8.2.7. — *La forme $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}$ possède les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_1$ tel que $\lambda(0) \neq 0$, on a (dans un voisinage de l'origine) :*
$$\mathbb{F}_{\lambda.\mathbf{x}} = \lambda^6 \times \mathbb{F}_{\mathbf{x}}\,;$$
2. *pour tout $\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, il existe un germe γ non nul en l'origine, s'exprimant à partir des dérivées partielles des composantes de ϕ, tel que dans un voisinage de l'origine, on ait :*
$$\mathbb{F}_{\mathbf{x}\circ\phi} = \gamma \times \phi^*\left(\mathbb{F}_{\mathbf{x}}\right)\,;$$
3. *pour tout $g \in GL_6(\mathbb{C})$, on a :*
$$\mathbb{F}_{g\circ\mathbf{x}} = \det(g) \times \mathbb{F}_{\mathbf{x}}\,.$$

Les points 1. et 2. de cette proposition montrent que le fait que la forme $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}$ soit nulle en l'origine est une propriété de la surface $\mathcal{S}$. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, encore des points 1. et 2, on déduit que la classe de $\mathbf{x}_*\left(\mathbb{F}_{\mathbf{x}}\right)$ dans $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}^5\,\mathrm{T}^*_p\mathcal{S}\right)$ est canoniquement attachée au germe défini par $\mathcal{S}$ au voisinage de p. On le note $\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}$ (ou $\mathbb{F}^p$ si aucune ambiguïté n'est possible). Du point 3, il découle que c'est un invariant projectif de $\mathcal{S}$: pour tout $g \in \mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$ on a

$$g_*\left(\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}\right) = \mathbb{F}^{g(p)}_{g(\mathcal{S})}\,.$$

Si $\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}$ est bien défini en tout point générique p de $\mathcal{S}$, on a donc attaché projectivement à $\mathcal{S}$ une section du fibré $\mathbb{P}(\mathrm{S}^5\,\mathrm{T}^*\mathcal{S})$ (définie sur un ouvert dense), que l'on note $\mathbb{F}_{\mathcal{S}}$. Le cas où la forme $\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}$ n'est définie en aucun point de $\mathcal{S}$ est bien compris et caractérise les surfaces de Véronèse d'après la

Proposition 8.2.8. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la surface $\mathcal{S}$ est incluse dans une surface de Véronèse ;*
2. *pour toute paramétrisation $\mathbf{x}$ de $\mathcal{S}$, on a $\mathbb{F}_{\mathbf{x}} \equiv 0$;*
3. *pour au moins une paramétrisation $\mathbf{x}$ de $\mathcal{S}$, on a $\mathbb{F}_{\mathbf{x}} \equiv 0$.*

De la Proposition 8.2.7 découle immédiatement l'équivalence de 2. et 3. L'implication 1. $\Rightarrow$ 2. est facile et se montre directement par le calcul. La seule implication difficile est 2. $\Rightarrow$ 1. Elle est due à Segre (voir [**Se-C 21**] partie II, ainsi que [**Bom 37**]).

On suppose dorénavant que la surface $\mathcal{S}$ n'est pas incluse dans une surface de Véronèse. Quitte à se restreindre à un ouvert dense, on suppose aussi que la forme $\mathbb{F}_{\mathcal{S}}$ est globalement définie et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

Pour tout $p \in \mathcal{S}$, on peut voir $\mathbb{F}^p$ comme une application polynomiale non-nulle sur $\mathbb{P}(\mathrm{T}^*_p\mathcal{S})$, de degré 5. On peut donc lui associer un diviseur effectif de degré 5, que l'on note $\mathcal{D}^p_{\mathcal{S}}$.

Définition 8.2.9. — Le diviseur $\mathcal{D}^p_{\mathcal{S}}$ est le *diviseur de Segre* de $\mathcal{S}$ en p.

Au vu des résultats précédents, celui-ci ne dépend que de $\mathbb{F}^p$ et donc est projectivement attaché au germe $[\mathcal{S}]_p$. En se rappelant que $\mathcal{D}^p_{\mathcal{S}}$ est une somme formelle de cinq points de $\mathbb{P}(\mathrm{T}^*_p\mathcal{S})$ et que cet espace projectif s'identifie canoniquement avec $\mathbb{P}(\mathrm{T}_p\mathcal{S})^*$, on peut poser la définition suivante :

Définition 8.2.10. — Un point L dans le support de $\mathcal{D}^p_{\mathcal{S}}$ (*i.e.* une droite passant par l'origine dans $\mathrm{T}_p\mathcal{S}$) est une *direction principale* ou une *direction de Segre* à $\mathcal{S}$ en p. La *multiplicité* de L est sa multiplicité comme point du support de $\mathcal{D}^p_{\mathcal{S}}$.

En d'autres termes, en tout point p de $\mathcal{S}$, on a donné une définition de 5 directions (comptées avec multiplicité) tangentes à $\mathcal{S}$ en p, qui lui sont projectivement attachées. Il est possible que plusieurs de ces directions coïncident ponctuellement ou même globalement sur $\mathcal{S}$.

On peut poser la

Définition 8.2.11. — Une *courbe principale* (ou encore une *courbe de Segre*) sur $\mathcal{S}$ est une courbe dont la tangente en chacun de ses points est une direction principale de $\mathcal{S}$.

Remarque : puisque la notion de direction principale est une notion projective, il en va de même pour les courbes de Segre : l'image d'une courbe principale d'une surface $\mathcal{S}$ par une transformation projective g est une courbe principale de $g(\mathcal{S})$.

Sous l'hypothèse que $\mathbb{F}_{\mathcal{S}}$ est bien définie en tout point de $\mathcal{S}$, les directions principales forment cinq distributions holomorphes de directions sur $\mathcal{S}$, qui sont intégrables car de dimension 1. Les courbes intégrales d'une de ces distributions vont donc former un feuilletage en courbe holomorphe sur $\mathcal{S}$. Pour une surface $\mathcal{S}$ générique, les courbes de Segre vont s'intersecter transversalement en un point générique. Dans cette situation, on pose la

Définition 8.2.12. — Le tissu de Segre sur $\mathcal{S}$ est le 5-tissu dont les feuilles sont les courbes principales de $\mathcal{S}$. On le notera $\mathfrak{W}\big[\,\mathcal{S}\,\big]$.

De la remarque précédente, il vient que, quand il est bien défini, $\mathfrak{W}\big[\,\mathcal{S}\,\big]$ est projectivement attaché à $\mathcal{S}$: si g est une transformation projective, on a

$$g_*\left(\,\mathfrak{W}\big[\mathcal{S}\big]\,\right) = \mathfrak{W}\big[\,g(\mathcal{S})\,\big]\,.$$

Si deux champs de directions principales coïncident sur $\mathcal{S}$ on dira que son tissu de Segre est *dégénéré*.

8.2.3. Directions principales de Segre II. — On va maintenant donner une définition des directions principales en un point régulier d'une surface générale de $\mathbb{CP}^5$ suivant l'approche originelle de Segre (voir [**Se-C 21**]).

On commence par faire quelques rappels concernant les singularités des courbes planes.

Soit f un élément réduit non-constant de $\mathcal{O}_2$. Il définit un germe réduit de courbe noté $\mathcal{C}$ en l'origine. On note $f[k]$ la composante homogène de degré k de f. L'origine est une *singularité de multiplicité* m pour $\mathcal{C}$ si $f[k] = 0$ pour $k < m$ et $f[m] \neq 0$.

L'origine est un *point double* pour $\mathcal{C}$ si c'est une singularité de multiplicité 2. On suppose à partir de maintenant que l'on est dans cette situation : on a $f[0] = f[1] = 0$ et $f[2] \neq 0$. On montre que, quitte à faire un changement de coordonnées holomorphes en $(\mathbb{C}^2, 0)$, on peut supposer que f est sous forme normale $f = x^2 + y^{n+1}$ avec $n > 0$. L'entier n est un invariant analytique de $\mathcal{C}$. Dans ce cas, on dit que l'origine est une singularité de type A_n pour $\mathcal{C}$.

On dit encore qu'une singularité de multiplicité 2 et de type A_1 est une *singularité double ordinaire*. Les germes de courbes de ce type sont formés de deux germes de courbes réguliers qui s'intersectent transversalement en l'origine.

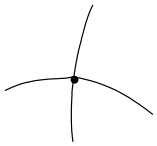


FIGURE 2. Une singularité double ordinaire.

Nous dirons qu'un *cusp* est un germe avec une singularité double de type A_n avec $n \geq 2$. Notons qu'un cusp définit une unique direction tangente en l'origine. Ce fait caractérise les cusps parmi les germes à singularité double.

FIGURE 3. Un cusp de type A_2.

Nous appellerons *tacnode* un germe de courbe avec une singularité double de type A_m avec $m \geq 3$. En particulier, une tacnode est un cusp. Par exemple, un germe formé de deux germes réguliers tangents est une tacnode.

FIGURE 4. Une tacnode de type A_3.

Remarque : les notions de cusp et de tacnode qui viennent d'être introduites ne correspondent pas aux notions classiques. Nous les utilisons pour coller à la terminologie utilisée par C. Segre.

On a le

Lemme 8.2.13. — *Soit $f[2] = ax^2 + 2bxy + cy^2 \neq 0$ la composante homogène de degré 2 d'un germe $f \in \mathcal{O}_2$ avec une singularité double en l'origine. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le germe de courbe défini par f est un cusp ;*
2. *le discriminant $b^2 - ac$ est nul ;*
3. *$f[2]$ est de la forme $f[2] = \gamma\,(\alpha x + \beta y)^2$;*
4. *il existe $(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^2$ non-nul, solution des équations $\frac{\partial f[2]}{\partial x}(\zeta,\eta) =$ et $\frac{\partial f[2]}{\partial y}(\zeta,\eta) = 0$.*

Dans le cas où ces assertions sont vérifiées, la direction tangente au cusp en l'origine est $\zeta\,\partial_x + \eta\,\partial_y$ où (ζ, η) est une solution non-nulle des équations mentionnées en 4.

En utilisant les mêmes notations, on établit facilement le

Lemme 8.2.14. — *Soit $f \in \mathcal{O}_2$ un cusp en l'origine de direction cuspidale tangente engendrée par $\eta\,\partial_x + \zeta\,\partial_y$. Ce cusp est une tacnode si et seulement si l'équation suivante est vérifiée :*

$$f[3](\eta, \zeta) = 0.$$

Ces rappels faits, on va définir "à la Segre" les directions principales en un point régulier p d'une surface générale régulière et non-dégénérée. Dans ce qui suit, $\mathcal{S}$ désigne telle une surface de $\mathbb{CP}^5$ et

$$\mathbf{x} = \left[\, x^0 : \ldots : x^5 \,\right]$$

en sera une paramétrisation en coordonnées homogènes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$. On suppose que $0 \in U$ et que U est assez petit pour que $\mathbf{x}$ soit un plongement. On note alors $p := \mathbf{x}(0) \in reg(\mathcal{S})$.

Soit H un hyperplan de $\mathbb{CP}^5$ passant par p. La surface $\mathcal{S}$ étant supposée non-dégénérée, son intersection avec H définit un germe de courbe analytique en p. On le note $C_{\mathcal{S}}(p, H)$ ou plus simplement $C(p, H)$. Pour discuter des différentes formes qu'il est susceptible de prendre, on va le "rapatrier" en $(\mathbb{C}^2, 0)$, via la paramétrisation $\mathbf{x}$.

En considérant $\mathbf{x}$ comme application à valeur dans $\mathbb{C}^6$, son développement en série en 0 s'écrit :

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{\kappa,\ell \geq 0} \mathbf{x}_{\kappa\ell}\, \frac{u^\kappa v^\ell}{\kappa!\ell!} \qquad \Big(\text{avec } \ \mathbf{x}_{\kappa\ell} := \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial_u^\kappa \partial_v^\ell} \in \mathbb{C}^6 \ \text{ pour } \ \kappa, \ell \geq 0\Big)\,.$$

Pour un choix $[H_0 : \ldots : H_5]$ de coordonnées homogènes pour H, l'image inverse $\mathbf{x}^* C(p, H)$ de $C(p, H)$ par $\mathbf{x}$ est le germe de courbe en $(\mathbb{C}^2, 0)$ d'équation

$$q_{\mathbf{x}}^H(u, v) := \sum_{\kappa,\ell \geq 0} \big(\, H \,.\, \mathbf{x}_{\kappa\ell} \,\big)\, \frac{u^\kappa v^\ell}{\kappa!\ell!} = 0\,.$$

Si $\widetilde{\mathbf{x}}$ désigne la paramétrisation en coordonnées homogènes de $\mathcal{S}$ obtenue en multipliant les coordonnées de $\mathbf{x}$ par une même fonction holomorphe ne s'annulant pas en l'origine, il est clair que $\widetilde{\mathbf{x}}^* C(p, H)$ va coïncider avec $\mathbf{x}^* C(p, H)$. Mais puisque $\mathbf{x} \circ \phi$ est encore une paramétrisation de $\mathcal{S}$ en

p quand ϕ est un germe de biholomorphisme, le germe $\mathbf{x}^*C(p,H)$ ne dépend pas uniquement du germe $[\mathcal{S}]_p$ mais également de $\mathbf{x}$. Pour obtenir un objet bien défini à partir de $\mathcal{S}$ (et de H), il faut considérer la classe du germe $\mathbf{x}^*C(p,H)$ modulo $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2,0)$. On la note $\underline{C}(p,H)$.

Pour H générique, cette classe de germe de courbe (plus succinctement, ce germe de courbe) est régulier (en l'origine). En fait on a l'équivalence :

Lemme 8.2.15. — *Le germe $C(p,H)$ est singulier (en p) si et seulement si H contient le plan tangent à $\mathcal{S}$ en p, si et seulement si $q^H_{\mathbf{x}}[1]\equiv 0$ pour une (et alors pour toutes) paramétrisation(s) $\mathbf{x}$.*

On a besoin des notations suivantes :

Notation : soit $P^k\subset\mathbb{CP}^n$ un sous-espace projectif de dimension $k\leq n$. On note $\mathcal{P}[P^k]$ le système linéaire des hyperplans de $\mathbb{CP}^n$ qui contiennent P^k. C'est un espace projectif de dimension $n-k-1$. On note $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(p)$ ou plus simplement $\mathcal{P}(p)$ le système linéaire $\mathcal{P}\big[O(\mathcal{S})^1_p\big]$. C'est un espace projectif de dimension 2. On remarquera que $\big((H,\mathbf{x}_{20}),(H,\mathbf{x}_{11}),(H,\mathbf{x}_{02})\big)$ définit un système de coordonnées homogènes sur cet espace projectif.

À partir de maintenant, H désigne un hyperplan élément de $\mathcal{P}(p)$ et on a donc $q^H_{\mathbf{x}}[1]\equiv 0$.

Puisque $\mathcal{S}$ a été supposée générale, la forme quadratique $q[2]^H_{\mathbf{x}}$ n'est pas nulle. Le germe $C(p,H)$ $\big($resp. $\mathbf{x}^*C(p,H)\big)$ admet donc une singularité double en p (resp. en l'origine). Pour H générique $\big($dans $\mathcal{P}(p)\big)$, $C(p,H)$ est une singularité double ordinaire. Plus précisément, le Lemme 8.2.13 implique que c'est un cusp si et seulement si c'est un élément de la *conique de Del Pezzo* définie par

$$CdP(\mathcal{S},p):=\big\{H\in\mathcal{P}(p)\;\big|\;(H,\,\mathbf{x}_{11})^2-(H,\,\mathbf{x}_{20})\,(H,\,\mathbf{x}_{02}\,)=0\;\big\}\,.$$

La conique de Del Pezzo à $\mathcal{S}$ en p est formée des hyperplans contenant le 1-plan osculateur O^1_p dont l'intersection avec $\mathcal{S}$ est un cusp. Elle est projectivement attachée à $\mathcal{S}$: elle ne dépend que de $[\mathcal{S}]_p$ et pour toute transformation projective g, on a :

$$g\big(\,CdP(\mathcal{S},p)\,\big)=CdP\big(\,g(\mathcal{S})\,,\,g(p)\big)\,.$$

Supposons que $\mathcal{S}$ n'est pas une surface de Véronèse et que $\mathbb{F}_{\mathcal{S}}$ est bien définie en p. Alors on a la

***Proposition 8.2.16* (Segre)**. — *Il existe 5 hyperplans $H^1,\dots,H^5$ dans la conique de Del Pezzo*[(6)] *tels que chaque germe $C(p,H^k)$ est une tacnode en p. Si L^k est la direction cuspidale tangente définie par $C(p,H^k)$, alors les L^i ($i=1,..,5$) sont les cinq directions principales de $\mathcal{S}$ en p.*

Démonstration : soit $\mathbf{x}:(u,v)\mapsto\big[x_i(u,v)\big]_{i=0}^5$ une paramétrisation en coordonnées homogènes de $\mathcal{S}$ définie au voisinage de l'origine, telle que $\mathbf{x}(0)=p$. Soient $[\,H_0:\ldots:H_5\,]$ des coordonnées homogènes d'un hyperplan principal H.

Puisque $C(p,H)$ est supposé être une tacnode, les lemmes 8.2.13 et 8.2.14 impliquent que :

1. $q^H_{\mathbf{x}}[0]\equiv q^H_{\mathbf{x}}[1]\equiv 0$ et $q^H_{\mathbf{x}}[2]\not\equiv 0$;
2. il existe $(\zeta,\eta)\in\mathbb{C}^2$ non nul, solution des équations

$$\partial_u\left(q^H_{\mathbf{x}}[2]\right)(\zeta,\eta)=\partial_v\left(q^H_{\mathbf{x}}[2]\right)(\zeta,\eta)=0\quad\text{ et }\quad q^H_{\mathbf{x}}[3](\zeta,\eta)=0\,.$$

(6) Il faudrait rajouter "*comptés avec multiplicité*".

De par la définition de $q_{\mathbf{x}}^H$, ces relations sont équivalentes aux suivantes :

$$(\blacklozenge)\qquad \begin{gathered} \mathbf{x}_{00}.H = \mathbf{x}_{10}.H = \mathbf{x}_{01}.H = 0 \\ \big(\mathbf{x}_{20}.H\big)\,\zeta + \big(\mathbf{x}_{11}.H\big)\,\eta = \big(\mathbf{x}_{11}.H\big)\,\zeta + \big(\mathbf{x}_{02}.H\big)\,\eta = 0 \\ \big(\mathbf{x}_{30}.H\big)\,\zeta^3 + 3\,\big(\mathbf{x}_{21}.H\big)\,\zeta^2\eta + 3\,\big(\mathbf{x}_{12}.H\big)\,\zeta\eta^2 + \big(\mathbf{x}_{03}.H\big)\,\eta^3 = 0. \end{gathered}$$

On peut les écrire sous la forme matricielle :

$$\Big(\,\mathbf{x}_{00}\,,\,\mathbf{x}_{10}\,,\,\mathbf{x}_{01}\,,\,\zeta\,\mathbf{x}_{20} + \eta\,\mathbf{x}_{11}\,,\,\zeta\,\mathbf{x}_{11} + \eta\,\mathbf{x}_{02}\,,\,\mathbf{x}_{30}\,\zeta^3 + 3\,\mathbf{x}_{21}\,\zeta^2\eta + 3\,\mathbf{x}_{12}\,\zeta\eta^2 + \mathbf{x}_{03}\,\eta^3\,\Big)\,H = 0$$

(où $\mathbf{x}_{00}$, $\mathbf{x}_{10}, \ldots,$ et H sont considérés comme des vecteurs colonnes). Puisque les H_i ne sont pas tous nuls (ce sont des coordonnées homogènes de l'hyperplan H), on en déduit que la matrice ci-dessus est singulière et donc de déterminant nul. On a :

$$\Big|\,\mathbf{x}_{00}\,,\,\mathbf{x}_{10}\,,\,\mathbf{x}_{01}\,,\,\zeta\,\mathbf{x}_{20} + \eta\,\mathbf{x}_{11}\,,\,\zeta\,\mathbf{x}_{11} + \eta\,\mathbf{x}_{02}\,,\,\mathbf{x}_{30}\,\zeta^3 + 3\,\mathbf{x}_{21}\,\zeta^2\eta + 3\,\mathbf{x}_{12}\,\zeta\eta^2 + \mathbf{x}_{03}\,\eta^3\,\Big| = 0\,.$$

Par la définition de $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(0)$, cette dernière relation s'écrit aussi :

$$\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(0)\big(\,\zeta\,\partial_u + \eta\,\partial_v\,\big) = 0\,.$$

On en déduit que la direction $\mathbb{C}\big(\,\zeta\,\partial_u + \eta\,\partial_v\,\big)$ qui est la direction cuspidale définie par $C(p, H)$ est bien une direction principale à $\mathcal{S}$ en p.

D'autre part, des relations ($\blacklozenge$), on déduit que H est engendré par les points

$$\mathbf{x}_{00}\,,\quad \mathbf{x}_{10}\,,\quad \mathbf{x}_{01}\,,\quad \mathbf{x}_{20}\,\zeta + \mathbf{x}_{11}\,\eta \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{11}\,\zeta + \mathbf{x}_{02}\,\eta\,.$$

La correspondance entre les hyperplans de la proposition et les directions principales est donc bijective, ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Il est donc naturel de poser la

Définition 8.2.17. — Les hyperplans donnés par la Proposition 8.2.16 sont les *hyperplans principaux* ou encore les *hyperplans de Segre* à $\mathcal{S}$ en p.

Notre définition des directions principales données en 8.2.2 est analytique, contrairement à celle de Segre qui est de nature plus géométrique. Chacune de ces approches possède des avantages et des inconvénients : avec le formalisme pris pour poser la Définition 8.2.10, la notion de multiplicité d'une direction principale est rigoureusement définie alors qu'elle n'est pas claire a priori avec l'approche de Segre. D'un autre côté, la définition "à la Segre" des directions principales nécessite d'introduire la notion d'hyperplan principal qui va donner toute sa richesse à ces objets pour l'étude géométrique des 5-tissus exceptionnels.

8.3. Géométrisation des 5-tissus exceptionnels

Dans cette section, on explique comment associer à un 5-tissu de rang maximal une paramétrisation d'un germe de surface dans $\mathbb{CP}^5$. Cette construction est assez classique. Elle est fortement inspirée de la "preuve" de nature géométrique du théorème de Lie 4.4.4 donnée par Poincaré dans [**Po 01**]. Cette preuve est esquissée en 8.3.1 ci-dessous. Elle sert d'introduction aux constructions faites dans le paragraphe 8.3.2 qui concernent les 5-tissus plans de rang maximal.

8.3.1. Le théorème de Lie-Poincaré : algébrisation des 4-tissus de rang maximal. — On donne maintenant une preuve succincte du théorème suivant, qui a juste été énoncé au chapitre 4 :

Théorème 8.3.1. — *Un 4-tissu $\mathcal{W}(4)$ de rang maximal 3 est (équivalent à un tissu) algébrique.*

Démonstration abrégée : avec l'approche de Poincaré, la preuve se ramène au fait que, sous les hypothèses du théorème, on peut linéariser $\mathcal{W}(4)$. On pourra alors conclure en appliquant le théorème de Blaschke et Howe. Soit $\mathcal{W}(4)$ un 4-tissu de rang maximal sur un voisinage Ω de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. Quitte à restreindre Ω, on peut trouver quatre fonctions holomorphes U_1, U_2, U_3 et U_4 sur Ω qui sont des intégrales premières pour les feuilletages du tissu : $\mathcal{W}(4) = \mathcal{W}(U_1, \ldots, U_4)$. Puisque $\mathcal{W}(4)$ est de rang maximal égal à 3, on peut considérer trois relations abéliennes linéairement indépendantes :

$$(\star^\sigma) \qquad F_1^\sigma(U_1)\, dU_1 + F_2^\sigma(U_2)\, dU_2 + F_3^\sigma(U_3)\, dU_3 + F_4^\sigma(U_4)\, dU_4 = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3)\,.$$

L'idée de Poincaré consiste à utiliser ces relations abéliennes pour "géométriser" le tissu.
On considère les quatre applications

$$Z_i := \left[\, F_i^1(U_i) : F_i^2(U_i) : F_i^3(U_i) \,\right] \;:\; \Omega \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \qquad (i = 1, \ldots, 4)\,.$$

Par construction, Z_i est constante le long des lignes de niveau de U_i et donc son image, notée $\mathcal{C}_i$, est une courbe dans $\mathbb{CP}^2$. Les relations $(\star^\sigma)$ impliquent que pour tout $\omega \in \Omega$ les points $Z_i(\omega)$ sont sur une même droite, que l'on note $\mathbb{P}^1_\omega$. On peut donc considérer l'application dite "de Poincaré"

$$\begin{aligned} P \;:\; \Omega &\longrightarrow \left(\mathbb{CP}^2\right)^* \\ \omega &\longmapsto \mathbb{P}^1_\omega\,. \end{aligned}$$

Le fait que les trois relations abéliennes $(\star^\sigma)$ soient linéairement indépendantes implique que l'on peut supposer (quitte à restreindre Ω) que P est un biholomorphisme. L'image de la feuille $\{U_i = U_i(\omega_0)\}$ par P est formée de l'ensemble des droites de $\mathrm{Im}(P)$ qui passent par $Z_i(\omega_0)$. C'est un segment de droite. Le tissu $P_*(\mathcal{W})$ est donc linéaire et de rang maximal car équivalent à $\mathcal{W}$. Par application du théorème d'Abel-inverse, il vient que les courbes $\mathcal{C}_i$ sont des "morceaux" d'une même courbe algébrique $\mathcal{C}$ de degré quatre. On en déduit que $P_*(\mathcal{W})$ est le tissu algébrique associé à cette courbe $\mathcal{C}$, ce qui termine la preuve. ■

L'idée fondamentale dans cette preuve est d'utiliser les relations abéliennes d'un tissu de rang maximal donné pour construire des "objets géométriques" (des courbes, des surfaces, etc.) susceptibles d'être plus facilement étudiés que le tissu initial.

C'est encore cette philosophie qui guide et inspire les constructions du paragraphe ci-dessous.

8.3.2. Application de Poincaré-Blaschke et surface de Blaschke. — L'idée d'effectuer des constructions "à la Poincaré" à partir des relations abéliennes des 5-tissus de rang maximal apparaît clairement pour la première fois dans l'article [**Bl 33**] où Blaschke pense démontrer que les 5-tissus de rang 6 sont linéarisables et donc algébriques. Malheureusement (ou heureusement ?), sa preuve est fausse, comme le résultat qu'il escomptait démontrer.

La construction qu'on expose dans ce paragraphe est similaire à celle de Blaschke sans être tout à fait identique. En substance, elle est déjà présente dans la méthode utilisée par Bol dans [**Bol 32**] pour prouver la borne sur le rang. Elle apparaît explicitement pour la première fois dans le papier [**Bol 36**], dans le cas particulier du tissu de Bol. Dans [**Bom 37**], Bompiani établit quelques

résultats généraux (qu'il attribue à Blaschke) sur les surfaces qui sont données par cette construction. Ceux-ci, ainsi que des références aux travaux de Bompiani et de Terracini, sont signalés dans [**BB**] (aux pages 256-261), mais en "petits caractères".

Soit $\mathcal{W}$ un 5-tissu de rang maximal défini sur un "petit" ouvert simplement connexe U de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. De la même façon que précédemment, on suppose que les feuilletages de $\mathcal{W}$ sont donnés par des intégrales premières holomorphes définies sur U :

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}\big(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\big) \qquad \big(\text{avec } U_i \in \mathcal{O}(U) \text{ pour } i = 1, \ldots, 5\big)\,.$$

Donnons-nous une base, notée $\mathfrak{B}$, de l'espace des relations abéliennes $\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$:

$$(\star^\sigma) \qquad F_1^\sigma(U_1)\,dU_1 + F_2^\sigma(U_2)\,dU_2 + F_3^\sigma(U_3)\,dU_3 + F_4^\sigma(U_4)\,dU_4 + F_5^\sigma(U_5)\,dU_5 = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, 6)\,.$$

En s'inspirant de la preuve du Théorème 8.3.1, on peut considérer les cinq applications

$$Z_i := \big[\, F_i^1(U_i) : \ldots : F_i^6(U_i) \,\big] \;:\; U \longrightarrow \mathbb{CP}^5 \qquad (i = 1, \ldots, 5)\,.$$

Celles-ci sont évidemment constantes sur les courbes $\{\, U_i = \text{cte.} \,\}$ (respectivement) et leur image dans $\mathbb{CP}^5$ est donc un morceau de courbe analytique autour de $Z_i(0)$, noté $\mathcal{C}_i$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut alors regarder le sous-espace projectif engendré par les cinq points $Z_i(\omega)$.

Les relations $(\star^\sigma)$ peuvent s'écrire de façon concise $\big(\text{dans } \mathbb{C}^6 \otimes \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)\big)$:

$$(\Diamond) \quad : \quad \sum_{i=1}^{5} Z_i\, dU_i = 0\,.$$

En prenant (U_1, U_2) comme nouveau système de coordonnées, on aura des écritures $(i = 1, \ldots, 5)$:

$$dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial U_1}\, dU_1 + \frac{\partial U_i}{\partial U_2}\, dU_2 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial U_i}{\partial U_1}, \frac{\partial U_i}{\partial U_2} \in \mathcal{O}_2\,.$$

En développant la relation $(\Diamond)$ selon dU_1 ou dU_2, il vient, pour $k = 1, 2$:

$$Z_k = -\sum_{i=3}^{5} Z_i \frac{\partial U_i}{\partial U_k}$$

soit

$$Z_k \in \overline{Z_3(\omega) Z_4(\omega Z_5(\omega)}\,.$$

On en déduit que le sous-espace projectif $\overline{Z_1(\omega) ... Z_5(\omega)}$ est de dimension 2, au plus. Du fait que les relations $(\star^\sigma)$ sont indépendantes, il vient que cette dimension est exactement 2. On peut donc considérer une sorte "d'application de Poincaré", définie sur Ω et à valeurs dans la grassmannienne $G_2(\mathbb{CP}^5)$ des 2-plans projectifs de $\mathbb{CP}^5$: $\widehat{P} \,:\, \omega \mapsto \overline{Z_1(\omega) ... Z_5(\omega)}$. L'idée serait d'étudier les propriétés géométrico-différentielles de la surface image de Ω par cette application. Mais on se trouve alors confronté au problème d'étudier une surface dans une grassmannienne de dimension 15, ce qui limite l'intérêt de cette approche.

Pour $\omega \in \Omega$, on va plutôt considérer l'espace engendré non seulement par les $Z_i(\omega)$ mais également par les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_i$ en ces points. Les relations $(\star^\sigma)$ et le fait qu'elles sont linéairement indépendantes montrent que cet espace est de dimension exactement 4. On le note :

$$\mathbb{P}^4_\omega := \overline{Z_1(\omega) ... Z_5(\omega) Z_1'(\omega) ... Z_5'(\omega)}\,.$$

avec, pour $i = 1, \ldots, 5$:

$$Z_i'(\omega) := \Big[\big(F_i^1\big)'(\omega_i) : \ldots : \big(F_i^6\big)'(\omega_i)\Big] \qquad \big(\omega_i := U_i(\omega)\big)\,.$$

On remarquera, que pour $i, j, k \in \{1, \ldots, 5\}$ tous distincts, on a (cf. [**BB**] page 237) :

$$\mathbb{P}^4_\omega = \overline{Z_i(\omega) Z_j(\omega) Z_k(\omega) Z'_j(\omega) Z'_k(\omega)}\ .$$

On peut alors considérer l'application *de Poincaré-Blaschke* (relative à $\mathfrak{B}$), définie par :

$$\begin{aligned} PB\big[\mathfrak{B}\big]\ :\ \Omega &\longrightarrow \big(\mathbb{CP}^5\big)^* \\ \omega &\longmapsto \mathbb{P}^4_\omega\ . \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{B}'$ est une autre base de $\mathcal{A}\big[\mathcal{W}\big]$, alors il existe $g \in \mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$ telle que $PB\big[\mathfrak{B}'\big] = g \circ PB\big[\mathfrak{B}\big]$. On se permettra donc de parler de *l'application de Poincaré-Blaschke* du tissu $\mathcal{W}$, en ayant conscience qu'on définit là une classe d'équivalence d'applications, modulo composition à gauche par une transformation projective. On note $PB\big[\mathcal{W}\big]$ cette "application" (ou PB s'il n'y a pas d'ambiguïté).

L'application PB est maintenant à valeurs dans un espace projectif de dimension 5 et est plus facile à étudier que l'application $\widehat{P}$ définie plus haut. On montre que cette application PB est de rang deux (par exemple, voir [**BB**] page 256). On peut donc la considérer comme une paramétrisation d'un germe de surface régulière dans $\mathbb{CP}^5$. Notons que c'est en fait une classe d'équivalence projective de germes de surface qui est ainsi définie, mais on se permettra l'abus de langage de parler simplement de "surface". On peut alors poser la

Définition 8.3.2. — La *surface de Blaschke* d'un (germe de) 5-tissu de rang maximal $\mathcal{W}$ est le germe de surface dans $\mathbb{CP}^5$ défini par la paramétrisation $PB\big[\mathcal{W}\big]$. On la note $\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big]$.

De façon moins précise, nous dirons que les surfaces images d'une application de Poincaré-Blaschke associée à un 5-tissu de rang 6 sont des *surfaces de Blaschke*. Signalons tout de suite qu'on donnera plus loin une définition précise (et peut-être plus générale) de la notion de *surface de Blaschke*.

8.4. Surfaces de Blaschke et tissus de Segre

On va faire le lien entre les constructions géométriques des deux sections précédentes.

On va tout d'abord étudier les surfaces de Blaschke des tissus algébrisables. Soient x, y des coordonnées affines sur $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ et $\mathcal{C}$ une courbe algébrique réduite de degré 5 rencontrant la droite $\{x = 0\}$ transversalement en cinq points distincts. Soit F un polynôme réduit de degré 5, équation affine de C. Il existe cinq germes $Y_i(a, b)$ définis pour (a, b) proche de $(0, 0)$ tels que

$$F\big(\, a\, Y_i(a,b) + b\,,\ Y_i(a,b)\,\big) \equiv 0 \qquad \text{avec} \quad Y_i(0,0) \neq Y_j(0,0) \qquad (i, j = 1, \ldots, 5,\ i \neq j)\,.$$

Pour $i = 1, \ldots, 5$, posons $X_i(a, b) := Y_i(a, b) + b$.

Au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, le tissu algébrique $\mathcal{W}_\mathcal{C}$ associé à $\mathcal{C}$ est le tissu $\mathcal{W}(Y_1, \ldots, Y_5)$. D'après le théorème d'Abel (voir 4.3.2), on sait que ses relations abéliennes sont de la forme

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{P(X_i, Y_i)}{F_x(X_i, Y_i)}\, dY_i = 0 \qquad (\text{avec}\ \ P \in \mathbb{C}[X, Y]\ ,\ \deg(P) \leq 2)\,.$$

L'espace des polynômes de degré 2 admet la famille $\mathfrak{E} := (1, X, Y, X^2, Y^2, XY)$ comme base naturelle, d'où on déduit une base de l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}_\mathcal{C}$. Relativement à celle-ci, les paramétrisations des courbes $\mathcal{C}_i$ définies plus haut sont de la forme :

$$Z_i = \big[\, 1\ :\ X_i\ :\ Y_i\ :\ X_i^2\ :\ Y_i^2\ :\ X_i Y_i\,\big]\ .$$

Vu ces expressions, il est clair que les courbes $\mathcal{C}_i$ sont incluses dans la surface de Véronèse V_2 (définie comme image du plongement $v_2 : (x,y) \mapsto [1 : x : y : x^2 : y^2 : xy]$). D'autre part, de la définition des X_i, on déduit que pour (a,b) suffisamment proche de l'origine, les cinq points $Z_i(a,b)$ sont sur la conique $C(a,b)$ de V_2, définie comme l'image de la droite $x = ay + b$ par v_2. On a le

Lemme 8.4.1. — *La réunion des plans tangents à V_2 le long de la conique $C(a,b)$ engendre un hyperplan projectif $H(a,b) \subset \mathbb{CP}^5$.*

La démonstration est immédiate. Un calcul direct nous donne :

$$(\star) \qquad H(a,b) = \left[\, b^2 \,:\, -2\,b \,:\, 2\,ab \,:\, 1 \,:\, a^2 \,:\, -2\,a \,\right].$$

Une analyse facile de la situation montre que l'application de Poincaré-Blaschke relative à la base $\mathfrak{E}$ considérée plus haut n'est autre que l'application $(\mathbb{C}^2, 0) \ni (a,b) \mapsto H(a,b) \in \mathbb{CP}^5$. Vu $(\star)$, cette application est une paramétrisation d'une surface de Véronèse. On a la

Proposition 8.4.2. — *La surface de Blaschke d'un 5-tissu algébrisable est incluse dans une surface de Véronèse.*

Il se trouve que la réciproque de cette proposition est elle aussi vérifiée (voir la Proposition 8.4.6). Cette réciproque découle facilement de certaines propriétés géométriques particulières que possèdent les surfaces de Blaschke associées aux 5-tissus de rang 6, que l'on va maintenant établir.

On garde les notations introduites ci-dessus. Tout d'abord, on montre la

Proposition 8.4.3. — *La surface de Blaschke d'un tissu $\mathcal{W}$ de rang maximal est non-dégénérée.*

Ce résultat est classique. Une preuve consiste à raisonner par l'absurde en supposant que cette surface est incluse dans un hyperplan. On montre alors que cela implique que le rang de $\mathcal{W}$ est cinq au plus, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\mathcal{W}$ (voir par exemple [**CG 78**]).

La surface de Blaschke d'un tissu de rang maximal $\mathcal{W}$ "porte" un 5-tissu exceptionnel : le poussé-en-avant $PB_*(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$ par l'application de Poincaré-Blaschke. Ses feuilles sont données par l'intersection de $\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big]$ avec un espace projectif de dimension 3. On a :

$$\mathcal{F}_i(\omega) := PB\Big(\{\, U_i = U_i(\omega) \,\}\Big) = \Big\{\, H \in \mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big] \;\Big|\; H \in \overline{Z_i(\omega) Z_i'(\omega)}^{\,*} \,\Big\}\,.$$

En particulier, au voisinage de $PB(\omega)$, la feuille $\mathcal{F}_i(\omega)$ est la section hyperplane de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ avec $Z_i(\omega)$.

En fait, on a beaucoup plus, comme on l'explique maintenant. Par construction, l'application de Poincaré-Blaschke PB est une paramétrisation en coordonnées homogènes de la surface de Blaschke $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$. Il est clair que pour tout ω suffisamment proche de l'origine, on a $(i = 1, \ldots, 5)$:

$$PB(\omega)\,.\,Z_i(\omega) = 0\,.$$

Par différentiation extérieure, il vient :

$$d\,PB(\omega)\,.\,Z_i(\omega) + PB(\omega)\,.\,Z_i'(\omega)\,dU_i(\omega) = 0\,.$$

Mais puisque $PB(\omega)\,.\,Z_i'(\omega) = 0$ (par définition de PB), on obtient :

$$d\,PB(\omega)\,.\,Z_i(\omega) = 0\,.$$

Or l'image de $d\,PB(\omega)$ est le plan tangent à $\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big]$ en $PB(\omega)$. On en déduit (avec $1 \le i < j < k \le 5$) :

$$\mathrm{T}_{PB(\omega)}\,\mathcal{S}[\mathcal{W}] = \overline{Z_1(\omega)\ldots Z_5(\omega)}^{\,*} = \overline{Z_i(\omega) Z_j(\omega) Z_k(\omega)}^{\,*}\,.$$

On a alors la

Proposition 8.4.4. — *Le second plan osculateur $\mathcal{O}(\mathcal{S}[\mathcal{W}])^2_p$ est de dimension 5 en tout point p de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$. Les surfaces de Blaschke des 5-tissus de rang maximal sont des surfaces générales*[7].

Démonstration : on note x, y des coordonnées au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $U_4 = x$ et $U_5 = y$. On fixe $\omega \in (\mathbb{C}^2, 0)$ dans le domaine de définition de PB. Pour $i = 1, \ldots, 5$, on vient de voir que, si on pose $A = PB(\omega)$, on a :

$$A.Z_i(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad A.Z_i'(\omega) = 0\,.$$

Comme $PB.Z_i \equiv 0$, cela implique, par dérivation par rapport à x et par rapport à y :

$$B.Z_i(\omega) = 0 \qquad\qquad C.Z_i(\omega) = 0\,.$$

où l'on a posé $B = \partial_x(PB)(\omega)$ et $C = \partial_y(PB)(\omega)$.

En dérivant à nouveau, et en utilisant le fait que $U_4 = x$ et $U_5 = y$, il vient :

$$\begin{aligned}
&D.Z_4(\omega) + B.Z_4'(\omega) = 0 && D.Z_5(\omega) = 0\\
&E.Z_4(\omega) = 0 && E.Z_5(\omega) + B.Z_5'(\omega) = 0\\
&E.Z_4(\omega) + C.Z_4'(\omega) = 0 && E.Z_5(\omega) = 0\\
&F.Z_4(\omega) = 0 && F.Z_5(\omega) + C.Z_5'(\omega) = 0\,.
\end{aligned}$$

avec

$$D = \partial^2_{xx}(PB)(\omega) \qquad E = \partial^2_{xy}(PB)(\omega) \qquad \text{et} \qquad F := \partial^2_{yy}(PB)(\omega)\,.$$

Par définition, le deuxième plan osculateur à $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ en p est le sous-espace projectif de $\left(\mathbb{CP}^5\right)^*$ engendré par les points A, B, C, D, E et F. S'il n'est pas de dimension 5, c'est qu'on a une relation non-triviale de la forme suivante, où a, b, c, d, e et f sont des constantes complexes :

$$(\blacktriangle) \qquad a\,A + b\,B + c\,C + d\,D + e\,E + f\,F = 0\,.$$

Notons que d, e et f ne peuvent être nulles simultanément : cela impliquerait que l'espace engendré par A, B et C est de dimension 1. Or ce dernier est le premier plan osculateur à $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ en p, et l'on sait qu'il coïncide avec le projectivisé du plan tangent $\mathrm{T}_p\,\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ et donc est de dimension 2.

Des relations précédentes, on déduit :

$$\begin{aligned}
(a\,A + b\,B + c\,C + d\,D + e\,E + f\,F)\,.Z_4(\omega) &= d\,D.Z_4(\omega) = -d\,B.Z_4'(\omega) = 0\\
(a\,A + b\,B + c\,C + d\,D + e\,E + f\,F)\,.Z_5(\omega) &= f\,F.Z_5(\omega) = -f\,C.Z_5'(\omega) = 0
\end{aligned}$$

Si $d \neq 0$, alors pour $\mathcal{Z}$ désignant l'un des points $Z_3(\omega), Z_4(\omega), Z_5(\omega), Z_4'(\omega)$ ou $Z_5'(\omega)$, on a :

$$\mathcal{Z}.A = \mathcal{Z}.B = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{Z} \in \overline{AB}^*\,.$$

Cela n'est pas possible, car l'espace engendré par $Z_3(\omega), Z_4(\omega), Z_5(\omega), Z_4'(\omega)$ et $Z_5'(\omega)$ est $\mathbb{P}^4_\omega$ qui est de dimension 4, alors que $\overline{AB}^*$ n'est que de dimension 3. De même, le cas $f \neq 0$ est impossible.

Reste le cas $d = f = 0$ et $e \neq 0$. On recommence alors le raisonnement précédent en prenant comme nouvelles coordonnées $x = U_4$ et $y = U_3$. L'hypothèse de position générale faite sur les feuilles de $\mathcal{W}$ implique que $\partial U_3/\partial U_5 \neq 0$ au voisinage de l'origine. On en déduit que dans la relation ($\blacktriangle$) obtenue dans cette situation, on a $f \neq 0$ et on peut conclure comme précédemment. ■

Si les surfaces de Blaschke associées aux tissus de rang maximal sont générales, ce sont en plus des

[7] Au sens de la Définition 8.2.6.

surfaces très particulières : une étude plus approfondie, que l'on va maintenant détailler, montre que leur géométrie est très spécifique.

On a vu plus haut, que pour $i = 1, \ldots, 5$, on a :

$$\mathrm{T}_{PB(\omega)}\, \mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big] \subset Z_i(\omega)^*\,.$$

Puisque $Z_i(\omega)$ ne dépend que de $U_i(\omega)$, on en déduit que les plans tangents à $\mathcal{S}$ le long d'une courbe $\mathcal{F}_i(\omega) = PB\big(\{U_i = \text{cte.}\}\big)$ sont tous inclus dans l'hyperplan $Z_i(\omega)^*$. Si on note $\mathbb{P}_i(\omega)$ l'espace engendré par les plans tangents à $\mathcal{S}$ le long de $\mathcal{F}_i(\omega)$, on a :

$$\mathbb{P}_i(\omega) := \bigcup_{q \in \mathcal{F}_i(\omega)} \mathrm{T}_q\, \mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big] \subset Z_i(\omega)^*\,.$$

Cela implique que la dimension de $\mathbb{P}_i(\omega)$ est au plus 4. En fait, cette dimension vaut exactement 4 (et donc $\mathbb{P}_i(\omega) = Z_i(\omega)^*$). Cela découle du

Lemme 8.4.5. — *Soit $(\mathbb{C}^2, 0) \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{C}^6$ une paramétrisation en coordonnées homogènes d'un germe de surface $\mathcal{S}$ en $p = \mathbf{x}(0)$ dans $\mathbb{CP}^5$. Soit $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ définissant un germe de courbe régulier, tel que l'espace L engendré par réunion des plans tangents à $\mathcal{S}$ le long de $x \circ \gamma$ soit contenu dans un hyperplan fixe H. Alors si $\mathcal{O}(\mathcal{S})_p^2$ est de dimension 5, on a $L = H$.*

Démonstration : pour s suffisamment proche de l'origine, on note $\mathbf{x}(s), \mathbf{x}_u(s), \mathbf{x}_v(s)$ pour $\mathbf{x}(\gamma(s)), \mathbf{x}_u(\gamma(s))$ et $\mathbf{x}_v(\gamma(s))$ (respectivement). Si $T_{\gamma(s)}\, \mathcal{S}$ désigne le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{x}(s)$, on a :

$$T_{\gamma(s)}\, \mathcal{S} = \overline{\mathbf{x}(s), \mathbf{x}_u(s), \mathbf{x}_v(s)} \subset L\,,$$

d'où il vient

$$(*) \qquad \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_u(s), \mathbf{x}_v(s) \in L\,,$$

et en particulier

$$(**) \qquad \mathbf{x}(0), \mathbf{x}_u(0), \mathbf{x}_v(0) \in H\,.$$

D'autre part, parce que γ est régulier en l'origine, on a une écriture $\big($avec $(\delta u, \delta v) \neq (0, 0)\big)$:

$$\gamma(s) = (0, 0) + s(\delta u, \delta v) + \mathcal{O}(s^2)\,.$$

On en déduit (toujours pour s suffisamment proche de l'origine) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(0) + \big(\mathbf{x}_u(0)\,\delta u + \mathbf{x}_v(0)\,\delta v\big)\, s + \mathcal{O}_1(s^2)\,,\\
\mathbf{x}_u(s) &= \mathbf{x}_u(0) + \big(\mathbf{x}_{uu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{uv}(0)\,\delta v\big)\, s + \mathcal{O}_2(s^2)\,,\\
\mathbf{x}_v(s) &= \mathbf{x}_v(0) + \big(\mathbf{x}_{vu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{vv}(0)\,\delta v\big)\, s + \mathcal{O}_3(s^2)\,.
\end{aligned}$$

Vu $(*)$ et $(**)$, les écritures précédentes impliquent que (pour $s \in (\mathbb{C}, 0)$ et $s \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(0)\,\delta u + \mathbf{x}_v(0)\,\delta v + \mathcal{O}_1(s) &\in L\,,\\
\mathbf{x}_{uu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{uv}(0)\,\delta v + \mathcal{O}_2(s) &\in L\,,\\
\mathbf{x}_{vu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{vv}(0)\,\delta v + \mathcal{O}_3(s) &\in L\,.
\end{aligned}$$

En faisant tendre s vers 0, on déduit que $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}_u(0), \mathbf{x}_v(0), \mathbf{x}_{uu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{uv}(0)\,\delta v$ et $\mathbf{x}_{vu}(0)\,\delta u + \mathbf{x}_{vv}(0)\,\delta v$ sont contenus dans L. L'hypothèse faite sur le deuxième plan osculateur à $\mathcal{S}$ en p est géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation $\mathbf{x}$. Quitte à composer $\mathbf{x}$ à droite par un germe de biholomorphisme, on peut donc supposer que $\delta u = 1$ et $\delta v = 0$. On a donc :

$$\mathbf{x}(0)\,,\ \mathbf{x}_u(0)\,,\ \mathbf{x}_v(0)\,,\ \mathbf{x}_{uu}(0)\,,\ \mathbf{x}_{vu}(0) \in L\,.$$

Le fait que $\dim \mathcal{O}(\mathcal{S})_p^2 = 5$ implique que ces cinq points sont linéairement indépendants. Donc $\dim L \geq 4$. Puisque par hypothèse $L \subset H$, on déduit que $L = H$ et le lemme est démontré. ■

On peut maintenant déduire la réciproque de la Proposition 8.4.2. On a :

Proposition 8.4.6. — *La surface de Blaschke $\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big]$ d'un 5-tissu de rang maximal $\mathcal{W}$ est incluse dans une surface de Véronèse si et seulement si $\mathcal{W}$ est algébrisable.*

Démonstration : l'une des deux implications qui constituent cette équivalence est donnée par la Proposition 8.4.2. Montrons l'autre : on suppose que $\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big]$ est un "morceau" d'une surface de Véronèse. Montrons que $\mathcal{W}$ est algébrique.

On a besoin du lemme suivant (V_2 désigne la surface de Véronèse, image du plongement v_2) :

Lemme 8.4.7. — *Soit C une courbe tracée sur V_2 telle que les plans tangents à V_2 le long de C sont tous inclus dans un même hyperplan H. Alors C est l'image par v_2 d'un segment de droite.*

Démonstration du lemme : on considère une application $\gamma : s \mapsto (x(s), y(s))$ telle que $v_2 \circ \gamma$ paramétrise C sur un voisinage Ω de 0. On note $[H_0 : \ldots : H_5]$ des coordonnées homogènes de H.

Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, on a :

$$\partial_x\big(v_2\big)(x,y) = \big[\,0 : 1 : 0 : 2\,x : y : 0\,\big] \qquad \text{et} \qquad \partial_y\big(v_2\big)(x,y) = \big[\,0 : 0 : 1 : 0 : x : 2\,y\,\big]\,.$$

Puisque $\mathrm{T}_{v_2(x,y)}V_2$ est engendré par $v_2(x,y)$, $\partial_x\big(v_2\big)(x,y)$ et $\partial_y\big(v_2\big)(x,y)$, l'hypothèse faite sur C implique que pour $s \in \Omega$, on a les relations :

$$\big[\,0 : 1 : 0 : 2x(s) : y(s) : 0\,\big] \in H\,, \qquad \big[\,0 : 0 : 1 : 0 : x(s) : 2\,y(s)\,\big] \in H\,,$$
$$\text{et} \qquad \big[\,1 : x(s) : y(s) : x(s)^2 : y(s)\,x(s) : y(s)^2\,\big] \in H\,.$$

Soit

$$H_0 + H_1\,x(s) + H_2\,y(s) + H_3\,x(s)^2 + H_4\,y(s)\,x(s) + H_5\,y(s)^2 = 0\,,$$
$$H_1 + 2\,H_3\,x(s) + H_4\,y(s) = 0 \quad \text{et} \quad H_2 + H_4\,x(s) + 2\,H_5\,y(s) = 0\,.$$

La première relation montre qu'on ne peut avoir $H_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, 5$ car cela impliquerait que $H_0 = 0$ et les coordonnées homogènes de H seraient toutes nulles. Si $H_3 = H_4 = H_5 = 0$, alors cette première relation montre que pour $s \in \Omega$, on a $H_0 + x(s)\,H_1 + y(s)\,H_2 = 0$ et donc γ paramétrise un segment de droite. Maintenant, si l'un des H_i est non nul pour $i \geq 3$, l'une ou l'autre des deux dernières relations permet d'arriver à la même conclusion. Le lemme est donc démontré. ■

À partir de ce lemme, la démonstration de la Proposition 8.4.6 se résume à ceci : sans perdre en généralité, on peut supposer que $S[\mathcal{W}]$ est exactement V_2. Si $\mathcal{F}_i(p)$ est une feuille (locale) du tissu $PB_*(\mathcal{W})$, on vient de voir que la réunion des plans tangents à $S[\mathcal{W}]$ le long de $\mathcal{F}_i(p)$ est contenue dans un hyperplan fixe. D'après le Lemme 8.4.7, c'est l'image d'une droite par v_2. On en déduit que $v_2^*\,(PB_*(\mathcal{W}))$ est un tissu linéaire. Comme il est de rang maximal (car équivalent à $\mathcal{W}$), on sait qu'il est algébrique. Donc $\mathcal{W}$ est bien un tissu algébrisable : la Proposition 8.4.6 est démontrée. ■

La preuve qui vient d'être donnée explique complètement les liens entre les 5-tissus algébrisables et leurs surfaces de Blaschke. On ne va dorénavant s'intéresser qu'aux surfaces de Blaschke des tissus exceptionnels. Dans toute la suite, $\mathcal{W}$ désigne un 5-tissu de rang 6 qui n'est pas algébrisable.

Puisqu'on travaille localement, on peut supposer que $\mathcal{W}$ $\big($et donc $PB_*(\mathcal{W})\big)$ est formé de 5 feuilletages en courbes holomorphes. On vient de voir la particularité des feuilles de $PB_*(\mathcal{W})$ en relation

avec la géométrie différentielle projective de la surface $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$. On a le résultat suivant qui va nous permettre de faire le lien entre $PB_*(\mathcal{W})$ et le tissu de Segre de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$.

***Proposition 8.4.8* (Bompiani).** — *Soit $\mathcal{S}$ une surface générale de $\mathbb{CP}^5$ portant un feuilletage en courbe $\mathcal{F}$ au voisinage d'un point p où $\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}$ n'est pas nulle. Si le long des feuille de $\mathcal{F}$, les plans tangents à $\mathcal{S}$ engendrent un hyperplan, alors ces feuilles sont des lignes principales de $\mathcal{S}$.*

Démonstration : on garde les notations utilisées ci-dessus. Quitte à faire un changement de coodonnées, on peut supposer que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont données par $u = \text{cte}$.

Par hypothèse, pour (u_0, v_0) suffisamment proche de l'origine, il existe un hyperplan $H(u_0)$ tel que la réunion des plans tangents à $\mathcal{S}$ le long de la courbe $\{u = u_0\}$ est incluse dans $H(u_0)$.

Cela implique que pour tout $v \in (\mathbb{C}, 0)$, on a :

$$\mathbf{x}(u_0, v) \in H(u_0)\,, \qquad \mathbf{x}_u(u_0, v) \in H(u_0) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x}_v(u_0, v) \in H(u_0)\,,$$

et en dérivant par rapport à v pour $u = u_0$ fixé, on obtient que

$$\mathbf{x}_{uv}(u_0, v)\,,\ \mathbf{x}_{vv}(u_0, v)\,,\ \mathbf{x}_{uvv}(u_0, v)\,,\ \mathbf{x}_{vvv}(u_0, v) \in H(u_0)\,.$$

On en déduit l'annulation du déterminant ci-dessous :

$$\big|\, \mathbf{x}\,,\ \mathbf{x}_u\,,\ \mathbf{x}_v\,,\ \mathbf{x}_{uv}\,,\ \mathbf{x}_{vv}\,,\ \mathbf{x}_{vvv} \,\big| = 0\,.$$

Par définition de la forme $\mathbb{F}^p_{\mathcal{S}}$, cette annulation se réécrit, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{C}^2, 0)$:

$$\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(u, v)(\partial_v) = 0\,.$$

Ainsi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_*(\partial_v)$ est un champ de directions principales sur $\mathcal{S}$ dont les courbes intégrales associées sont les images par $\mathbf{x}$ des segments $\{u = \text{cte.}\}$, c'est-à-dire les feuilles de $\mathcal{F}$. La proposition est démontrée. ■

On vient de voir que les feuilles de chacun des cinq feuilletages dont $PB_*(\mathcal{W})$ est formé satisfont l'hypothèse qui permet d'appliquer cette proposition. On en déduit immédiatement le

Corollaire 8.4.9. — *Soient $\mathcal{W}$ un 5-tissu exceptionnel et PB une application de Poincaré-Blaschke associée à une base de l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$. L'image de $\mathcal{W}$ par PB est le tissu de Segre de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$. On a :*

$$PB_*(\mathcal{W}) = \mathfrak{W}\Big(\mathcal{S}[\mathcal{W}]\Big)\,.$$

On pose alors les définitions suivantes :

Définition 8.4.10. — Une *surface de Blaschke* est une surface générale $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{CP}^5$ telle que :

1. elle n'est pas incluse dans une surface de Véronèse ;
2. son tissu de Segre est non-dégénéré ;
3. la réunion des plans tangents à $\mathcal{S}$ le long d'une de ses lignes principales engendre un hyperplan.

Une surface de Blaschke est dite *exceptionnelle* si son tissu de Segre est exceptionnel (*i.e.* de rang 6).

On introduit alors l'espace des surfaces de Blaschke, noté $\mathbf{BS}^5$, ainsi que l'espace $\mathbf{ES}^5$ des surfaces exceptionnelles :

$$\mathbf{BS}^5 := \big\{\, \mathcal{S} \in \mathbf{GS}^5 \;\big|\; \mathcal{S} \text{ est de Blaschke} \,\big\} \qquad \mathbf{ES}^5 := \big\{\mathcal{S} \in \mathbf{BS}^5 \;\big|\; \mathcal{S} \text{ est exceptionnelle} \,\big\}\,.$$

Les espaces de classes d'équivalence projective associés sont respectivement notés $\underline{\mathbf{BS}}^5$ et $\underline{\mathbf{ES}}^5$.

On a alors une application de "géométrisation" des 5-tissus exceptionnels :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \ : \ \underline{\mathbf{EW}}[5] &\longrightarrow \underline{\mathbf{ES}}^5 \\ \underline{\mathcal{W}} &\longmapsto \big[\, \mathcal{S}[\mathcal{W}] \,\big] \,, \end{aligned}$$

qui est une bijection : son inverse est l'application qui à la classe d'équivalence projective d'une surface exceptionnelle $\mathcal{S}$ associe la classe d'équivalence analytique définie par le tissu de Segre de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1} \ : \ \underline{\mathbf{ES}}^5 &\longrightarrow \underline{\mathbf{EW}}[5] \\ \big[\mathcal{S}\big] &\longmapsto \underline{\mathfrak{W}}[\mathcal{S}] \,. \end{aligned}$$

Si l'on a fait la différence entre les notions de surface de Blaschke et de surface exceptionnelle, c'est que l'on ne sait pas à l'heure actuelle si les conditions projectivo-différentielles qui définissent les surfaces de Blaschke sont suffisantes pour impliquer que le tissu de Segre soit de rang maximal.

> **Question : le tissu de Segre d'une surface de Blaschke est-t-il forcément de rang maximal ? En d'autres termes, a-t-on $\underline{\mathbf{ES}}^5 = \underline{\mathbf{BS}}^5$?**

Quoi qu'il en soit, il est clair que les conditions que doit satisfaire une surface de Blaschke sont très restrictives. D'ailleurs Bompiani, dont on ne peut que reconnaître l'intuition géométrique, pose le problème (dans [**Bom 37**]) de montrer qu'il n'existe qu'un seule surface de Blaschke (la surface de Blaschke du tissu de Bol). Par ailleurs, on a maintenant des outils effectifs performants pour vérifier si un 5-tissu est de rang maximal ou non. Ainsi, sans savoir si la réponse à la question fondamentale ci-dessus est positive ou non, il semble possible d'entreprendre la détermination des 5-tissus de rang maximal, modulo le **pseudo-groupe de transformations** $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, par la détermination des surfaces de Blaschke, modulo le **groupe de Lie** $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$. L'intérêt conceptuel de cette nouvelle approche est évident : la théorie du repère mobile et celle des systèmes différentiels extérieurs ont toutes deux été façonnées (par Élie Cartan) et utilisées avec beaucoup d'efficacité pour résoudre ces questions d'équivalences géométriques, modulo l'action d'un groupe de Lie.

Le problème qui se pose est donc le

Problème de la détermination des surfaces de Blaschke.

Il semble que ce soit un problème difficile. Les seuls résultats généraux connus sont dus à Terracini et à Buzano (voir la section 8.4.2 du présent chapitre).

Signalons aussi le fait théorique important que, via l'application $\mathcal{G}$, les invariants projectivo-différentiels des surfaces exceptionnelles constituent une famille complète d'invariants analytiques pour les 5-tissus exceptionnels. On remarquera aussi que, d'un certain point de vue, ce procédé de "géométrisation" résout également le problème de la forme normale pour les 5-tissus exceptionnels.

8.4.1. Courbes et configuration de Poincaré Blaschke. — On donne ici la construction de l'objet géométrique dual de la surface de Blaschke d'un 5-tissu exceptionnel : la *configuration des courbes de Poincaré-Blaschke*. L'intérêt de cette notion (qui est totalement équivalente à celle de surface de Blaschke) est justifiée par le fait qu'elle est souvent plus simple à étudier que la surface de Blaschke associée à un tissu exceptionnel.

Soit $\mathcal{W}$ un 5-tissu exceptionnel en $(\mathbb{C}^2, 0)$. À partir des composantes de ses relations abéliennes, on a vu comment construire cinq germes de paramétrisations ($i = 1, \ldots, 5$) :

$$Z_i \ : \ (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{CP}^5 \,.$$

Pour $i = 1, .., 5$, on pose $z_i = Z_i(0)$ et on note $\mathcal{C}_i$ le germe de courbe (régulier en z_i) dans $\mathbb{CP}^5$ défini comme étant l'image de Z_i. Par définition, un tel germe de courbe est une des cinq *courbes de Poincaré-Blaschke* associées à $\mathcal{W}$. Leurs réunion forme ce qu'on appelle la *configuration (des courbes) de Poincaré-Blaschke de* $\mathcal{W}$ et on la note $\mathcal{C}[\mathcal{W}] := \{\, \mathcal{C}_i \,|\, i = 1, \ldots, 5 \,\}$.

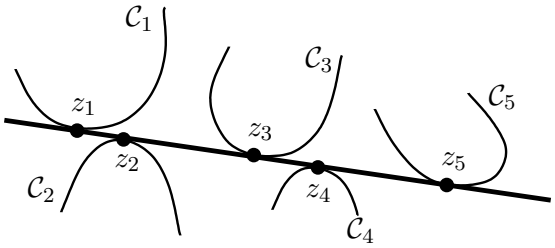


FIGURE 5. configuration des courbes de Poincaré-Blaschke.

On montre sans difficulté que la classe d'équivalence projective de $\mathcal{C}[\mathcal{W}]$ ne dépend que de la classe d'équivalence analytique de $\mathcal{W}$. Mais il y a plus, puisque la donnée de $\mathcal{C}[\mathcal{W}]$ est équivalente à celle de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ et permet donc de retrouver la classe d'équivalence analytique $\underline{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$. Pour montrer cela, il est nécessaire de faire quelques rappels sur la dualité projective.

Soit Ω un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et soit $Z : \Omega \to \mathbb{CP}^5$ la paramétrisation d'une courbe holomorphe régulière notée C. Par définition, la variété duale de C est l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{CP}^5$ qui sont tangents à C en au moins un de ses points. On la note C^*. Étant donné qu'un hyperplan est tangent à C en z si et seulement s'il contient la droite tangente $\mathrm{T}_z C$, il vient que :

$$C^* = \bigcup_{z \in C} (\mathrm{T}_z C)^* \qquad \text{avec} \qquad (\mathrm{T}_z C)^* := \Big\{\, H \in \big(\mathbb{CP}^5\big)^* \;\big|\; \mathrm{T}_z C \subset H \,\Big\}\,.$$

Quel que soit z, $\mathrm{T}_z C$ est de dimension 1 et donc l'espace projectif dual $(\mathrm{T}_z C)^*$ dans $\big(\mathbb{CP}^5\big)^*$ est de dimension 3. Ainsi C^* est la réunion des éléments d'une famille à un paramètre de 3-plans projectifs de $\big(\mathbb{CP}^5\big)^*$ et donc est au plus de dimension 4. Si C^* est de dimension 3, c'est que c'est forcément un $\mathbb{CP}^3$ dans le dual $\big(\mathbb{CP}^5\big)^*$. Cela implique qu'il existe une droite $L \subset \mathbb{CP}^5$ qui est incluse dans n'importe quel hyperplan tangent à C. On en déduit facilement que C est un segment de L. Ainsi, si C n'est pas un segment de droite, C^* est une hypersurface de l'espace projectif dual.

Au moyen de l'application $C \mapsto C^*$, on peut obtenir "géométriquement" $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ à partir de $\mathcal{C}[\mathcal{W}]$ de la façon suivante : notons H l'hyperplan image de l'origine par l'application de Poincaré-Blaschke considérée ici. Pour κ variant entre 1 et 5, on montre facilement que la courbe $\mathcal{C}_\kappa$ n'est pas un segment de droite (cela impliquerait que $\mathcal{W}$ n'est pas de rang maximal)et on en déduit que $\mathcal{C}_\kappa^*$ est un germe d'hypersurface au voisinage de H. Par la définition de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ au moyen de l'application de Poincaré-Blaschke en 8.3.2, il est clair qu'au voisinage de H, on a :

$$\mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big] = \bigcap_{\kappa=1}^{5} \mathcal{C}_\kappa^*\,.$$

Cette description de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ comme intersection d'hypersurfaces duales de courbes est canonique : on note $\{\, \mathcal{L}^\kappa(\lambda) \,|\, \lambda \in (\mathbb{C}, 0) \,\}$ les cinq familles de lignes principales de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ au voisinage de H. Si λ est suffisamment proche de l'origine, on sait qu'il existe un hyperplan principal H_κ^λ tel que

$$\mathcal{L}^\kappa(\lambda) = \mathcal{S}\big[\mathcal{W}\big] \cap H_\kappa^\lambda \qquad (\kappa = 1, \ldots, 5)\,.$$

De plus, on peut demander que les applications $\mathcal{H}_\kappa : \lambda \mapsto H_\kappa^\lambda$ soient holomorphes. En considérant les hyperplans de $\left(\mathbb{CP}^5\right)^*$ comme des points de $\mathbb{CP}^5$, on peut considérer que les $\mathcal{H}_\kappa$ sont à valeurs dans $\mathbb{CP}^5$. On montre alors que, sous cette identification, leurs images sont les courbes de Poincaré-Blaschke $\mathcal{C}_\kappa$ associées à $\mathcal{W}$. On peut donc bien retrouver $\mathcal{C}[\mathcal{W}]$ à partir de $\mathcal{S}[\mathcal{W}]$ comme annoncé.

Soient $\mathfrak{C}_\kappa$ cinq germes de courbes en cinq points distincts ζ_κ de $\mathbb{CP}^5$, qui ne sont pas des segments de droite. Supposons que leur droites tangentes $\mathrm{T}_{\zeta_\kappa}\mathfrak{C}_\kappa$ engendrent un hyperplan H. Alors, pour $\kappa = 1, \ldots, 5$, $\mathfrak{C}_\kappa^*$ est un germe d'hypersurface en H et on pose $\mathcal{S} := \mathfrak{C}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{C}_5^* \subset \left(\mathbb{CP}^5\right)^*$.

Génériquement, on aura $\mathcal{S} = \{\mathrm{H}\}$ et donc la dimension de $\mathcal{S}$ (notée δ dans ce qui suit) vaut 0. On ne considérera pas les cas hautement non-génériques où δ vaut 3 ou 4 et, dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{S}$ est de dimension 2 puisque c'est la situation qui présente un intérêt pour nous (on exclut aussi le cas "trop général" $\delta = 1$). Alors, à l'aide de la Proposition 8.4.8, on montre que dans le cas où $\mathcal{S}$ est de dimension deux, c'est une surface de Blaschke. Puisqu'on vient de voir que les surfaces de Blaschke peuvent toutes être obtenues par cette construction géométrique, on peut énoncer une version "géométrique" du problème de la détermination des surfaces de Blaschke posé plus haut :

Problème de la détermination des surfaces de Blaschke (forme géométrique) :

déterminer les famille $\{\mathfrak{C}_\kappa\}_{\kappa=1}^5$ telles que $\mathfrak{C}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{C}_5^*$ soit de dimension 2.

Une telle configuration de courbes $\{\mathfrak{C}_\kappa\}_{\kappa=1}^5$ sera appelée une *configuration de Poincaré-Blaschke*. Par dualité, il lui est associé la surface de Blaschke $\mathcal{S} = \mathfrak{C}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{C}_5^*$. Quitte à prendre les $\mathfrak{C}_\kappa$ "suffisamment petites", les cinq applications $P_\kappa : \mathcal{S} \to \mathfrak{C}_\kappa$ qui, à un hyperplan $H \in \mathcal{S}$, associent les points de tangence de H avec $\mathfrak{C}_\kappa$ sont bien définies. Le tissu de Segre de $\mathcal{S}$ est le tissu défini par les P_κ. On peut alors donner une version géométrique du problème de la maximalité du rang des tissus de Segre des surfaces de Blaschke :

Problème du caractère exceptionnel des surfaces de Blaschke (forme géométrique) :

soit $\{\mathfrak{C}_\kappa\}_{\kappa=1}^5$ une configuration de Poincaré-Blaschke. Existe-t-il sur chaque courbe $\mathfrak{C}_\kappa$ six 1-formes holomorphes ω_κ^σ (avec $\sigma = 1, \ldots, 6$) telles qu'on ait six relations linéairement indépendantes

$$P_1^*\omega_1^\sigma + \cdots + P_5^*\omega_5^\sigma = 0 \ \textbf{?}$$

Au vu de l'énoncé du théorème d'Abel-inverse 4.4.1, il est naturel de se poser d'abord le

Problème d'Abel-inverse "généralisé" :

Soit $\{\mathfrak{C}_\kappa\}_{\kappa=1}^5$ une configuration de Poincaré-Blaschke. Supposons que sur chacune des courbes $\mathfrak{C}_\kappa$, il existe une 1-forme hlomorphe non-nulle ω_κ avec

$$P_1^*\omega_1 + \cdots + P_5^*\omega_5 = 0\,\textbf{.}$$

Que peut on alors dire des $\mathfrak{C}_\kappa$ et des ω_κ ?

Ce dernier problème est formulé de façon très générale mais il n'est pas difficile de le préciser de façon intéressante. Par exemple, tous les exemples de configurations de Poincaré-Blaschke que l'on connaît pour le moment (et qui sont présentés dans la section 8.5) sont formés de courbes "globales" de $\mathbb{CP}^5$ (*i.e.* des courbes algébriques ou des courbes entières). Est-ce un fait général ?

Signalons dès maintenant que certaines configurations de Poincaré-Blaschke sont formées de courbes

$\mathfrak{C}_\kappa$ algébriques qui se recollent dans $\mathbb{CP}^5$ de façon bien particulière (voir ci-dessous). Dans ces cas-là, la courbe $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}_5$ joue un rôle particulièrement important dans la description des relations abéliennes du tissu de Segre associé (voir le chapitre 9). On se permettra alors de parler de la *courbe de Poincaré-Blaschke* pour désigner $\mathfrak{C}$.

8.4.2. Sur la détermination des surfaces de Blaschke. — Dans [**Te 37**] et [**Buz 39**], Terracini et Buzano ont entrepris la détermination des surfaces de Blaschke par l'étude des systèmes différentiels linéaires homogènes satisfaits par les paramétrisations de ces surfaces.

Avant de s'attaquer à la détermination explicite des surfaces de Blaschke qui satisfont certaines hypothèses géométriques particulières, Terracini a obtenu des équations qui caractérisent les systèmes éléments de $G\mathcal{S}$ dont les solutions sont des surfaces de Blaschke.

En *8.2.1.1* on a montré qu'à toute classe d'équivalence projective de germe de surface générale, on peut associer un sytème différentiel de la forme suivante :

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} x_{uuu} = a_1\, x_{uu} + b_1\, x_{uv} + c_1\, x_{vv} + d_1\, x_u + e_1\, x_v + f_1\, x\,, \\ x_{uuv} = a_2\, x_{uu} + b_2\, x_{uv} + c_2\, x_{vv} + d_2\, x_u + e_2\, x_v + f_2\, x\,, \\ x_{uvv} = a_3\, x_{uu} + b_3\, x_{uv} + c_3\, x_{vv} + d_3\, x_u + e_3\, x_v + f_3\, x\,, \\ x_{vvv} = a_4\, x_{uu} + b_4\, x_{uv} + c_4\, x_{vv} + d_4\, x_u + e_4\, x_v + f_4\, x\,, \end{cases}$$

avec $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in \mathcal{O}_2$ pour $i = 1, \ldots, 4$.

On suppose dorénavant que la classe d'équivalence projective considérée est une classe de surface de Blaschke. On montre facilement qu'un champ de vecteurs $\zeta\,\partial_u + \eta\,\partial_v$ définit un champ de directions principales (via la paramétrisation x) si et seulement si ses composantes ζ et η satisfont l'équation

$$(1) \qquad c_1\zeta^5 + \mathfrak{A}\,\zeta^4\eta + \mathfrak{B}\,\zeta^3\,\eta^2 + \mathfrak{C}\,\zeta^2\,\eta^3 + \mathfrak{D}\,\zeta\,\eta^4 + a_4\,\eta^5 = 0\,,$$

dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, avec

$$\mathfrak{A} := 3\,c_2 - b_1\,, \qquad \mathfrak{C} := 3\,a_2 + c_4 - 3\,b_3\,,$$
$$\mathfrak{B} := a_1 - 3\,b_2 + 3\,c_3\,, \qquad \mathfrak{D} := 3\,a_3 - b_4\,.$$

Dans ce qui suit, $\zeta\,\partial_u + \eta\,\partial_v$ désignera toujours un tel champ de vecteurs.

Quitte à composer par un biholomorphisme, on peut supposer que les courbes $\{u = \text{cte.}\}$ et $\{v = \text{cte.}\}$ s'envoient sur des lignes principales. Cela équivaut à ce que les champs ∂_v et ∂_u soient des champs de directions principales, et, au vu de l'équation précédente, cela signifie que c_1 et a_4 sont identiquement nuls. L'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad \mathfrak{A}\,\zeta^4\eta + \mathfrak{B}\,\zeta^3\,\eta^2 + \mathfrak{C}\,\zeta^2\,\eta^3 + \mathfrak{D}\,\zeta\,\eta^4 = 0\,.$$

Les 5 directions principales de la (classe de) surface étudiée sont toutes distinctes (car c'est une surface de Blaschke), donc le discriminant du polynôme homogène (2) est non nul. On a :

$$\mathcal{D} := 18\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} - 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 - 4\,\mathfrak{D}\mathfrak{B}^3 - 27\,\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 \neq 0\,.$$

De la preuve de la Proposition 8.4.8, il vient que, pour tout $\omega \in (\mathbb{C}^2, 0)$, l'hyperplan principal noté $H(\omega)$ associé à la direction principale $x_*(\partial_u)$ en $p = x(\omega)$ est engendré par les points $x(\omega), x_u(\omega), x_v(\omega), x_{uu}(\omega)$ et $x_{uv}(\omega)$. Si cet hyperplan est fixe pour v fixé, alors en dérivant par rapport à u, on obtient que $x_{uuu}(\omega) \in H$ et $x_{uuv}(\omega) \in H$. On en déduit que dans un voisinage de l'origine, les points x_{uuu} et x_{uuv} sont dans l'espace engendré par x, x_u, x_v, x_{uu} et x_{uv} et donc dans $(\bigstar)$, on a $c_1 = c_2 = 0$. Par un raisonnement analogue, on obtient que $a_3 = a_4 = 0$.

Avec ces notations, Terracini montre dans [**Te 37**] que les coefficients de (★) qui définissent une (classe de) surface de Blaschke sont les solutions d'un certain système différentiel qu'on peut explicitement écrire. Posons

$$\begin{aligned}
\ell_0 &:= \mathfrak{D}_v + 3\,\mathfrak{D}\,(2\,a_2 - b_3)\,,\\
\ell_1 &:= \mathfrak{D}_u + \mathfrak{C}_v + 3\,\mathfrak{D}\,(c_3 + a_1 - 2\,b_2) + 2\,\mathfrak{C}\,(2\,a_2 - b_3)\,,\\
\ell_2 &:= \mathfrak{C}_u + \mathfrak{B}_v - 3\,\mathfrak{D}\,b_1 + 2\,\mathfrak{C}\,(c_3 + a_1 - 2\,b_2) + \mathfrak{B}\,(2\,a_2 - b_3)\,,\\
\ell_3 &:= \mathfrak{B}_u + \mathfrak{A}_v - 2\,\mathfrak{C}\,b_1 + 2\,\mathfrak{B}\,(c_3 + a_1 - 2\,b_2)\,,\\
\ell_4 &:= \mathfrak{A}_u - \mathfrak{B}\,b_1\,.
\end{aligned}$$

Alors on a la

Proposition 8.4.11 **(Terracini)**. — *Soit un système différentiel de la forme* (★) *ci-dessus de rang 6 et tel que* $\mathcal{D} \neq 0$. *Alors la (classe de) surface associée aux solutions de ce système est une (classe de) surface de Blaschke si et seulement les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\ell_1 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,\ell_0 + \mathfrak{D}^2\,\ell_4\,,\\
\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\ell_2 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\ell_0 + \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\ell_4\,,\\
\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\ell_3 &= \mathfrak{A}^2\,\ell_0 + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\ell_4\,.
\end{aligned}$$

Une façon de déterminer toutes les surfaces de Blaschke (et donc tous les 5-tissus exceptionnels) est de résoudre ce système. Malheureusement, cela semble très difficile ! Cependant, en faisant certaines hypothèses géométriques simplificatrices, Terracini et Buzano ont réussi le tour de force de trouver des solutions explicites à ce système. On a le

Théorème 8.4.12 **(Terracini** [**Te 37**]**)**. — *Il existe exactement quatre surfaces de Blaschke telles que trois des courbes de Poincaré-Blaschke associées soient planes, chacune incluse dans un 2-plan projectif de* $\mathbb{CP}^5$*, ces trois 2-plans ayant un point commun. L'une est la surface de Blaschke du tissu de Bol, et les trois autres sont les surfaces de Blaschke des tissus* $\mathcal{T}err(k)$ *pour* $k = b, c, d$.

Par les même méthodes que Terracini, Buzano établit le

Théorème 8.4.13 **(Buzano** [**Buz 39**]**)**. — *Il existe exactement deux surfaces de Blaschke telles que trois des courbes de Poincaré-Blaschke associées soient planes, chacune incluse dans un 2-plan projectif de* $\mathbb{CP}^5$*, ces trois 2-plans n'ayant pas de point commun et étant tels que deux d'entre eux engendrent un hyperplan. Ce sont les surfaces de Blaschke des tissus* $Buz(A)$ *et* $Buz(B)$.

Dans la section qui suit, on donne une paramétrisation explicite de chacune des surfaces de Blaschke données dans ces deux théorèmes.

8.5. Exemples

Dans cette partie on détermine explicitement et on étudie les surfaces de Blaschke des tissus exceptionnels données dans ce chapitre et dans les deux précédents.

Pour la majorité des tissus considérés, cette étude se déroulera selon le plan suivant : on donnera un modèle du tissu avec lequel on va travailler, puis on dressera une base explicite des relations abéliennes de ce tissu. Sans chercher à détailler les calculs, on donnera l'expression de l'application de Poincaré-Blaschke associée à la base considérée. Suivront ensuite, s'il il y a lieu de les faire, diverses remarques concernant la surface de Blaschke du tissu. En particulier, par des considérations géométriques simples sur cette surface de Blaschke (ou sur la configuration de Poincaré-Blaschke

associée), on montre que le tissu considéré n'est pas équivalent à ceux étudiés avant. On donne à la fin l'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ du tissu considéré.

8.5.1. Géométrisation du tissu de Bol. — La surface de Blaschke du tissu de Bol a été déterminée par Bol dans [**Bol 36**]. Avec les notations de cet article, la surface de Blaschke du tissu de Bol admet une paramétrisation particulièrement simple. C'est pourquoi, comme modèle du tissu de Bol, on prend ici le tissu

$$\widehat{\mathcal{B}} := \mathcal{W}\,(\,t_1\,,\,t_2\,,\,t_3\,,\,t_4\,,\,t_5\,,\,) := \mathcal{W}\left(\frac{y}{x}\,,\,\frac{x+y-1}{y}\,,\,\frac{x-y}{1-y}\,,\,\frac{1-y}{x}\,,\,\frac{x(1-x)}{(y(1-y)}\right),$$

dont une base des relations fonctionnelles abéliennes est donnée par :

$$\begin{aligned}
&(1) && \log(t_1)+\log(t_2)-\log(1-t_4)=0\,,\\
&(2) && \log(t_2)+\log(t_3)-\log(1-t_5)=0\,,\\
&(3) && \log(t_3)+\log(t_4)-\log(1-t_1)=0\,,\\
&(4) && \log(t_4)+\log(t_5)-\log(1-t_2)=0\,,\\
&(5) && \log(t_5)+\log(t_1)-\log(1-t_3)=0\,,\\
&(6) && \mathbf{D}_2(t_1)+\mathbf{D}_2(t_2)+\mathbf{D}_2(t_3)+\mathbf{D}_2(t_4)+\mathbf{D}_2(t_5)=0\,.
\end{aligned}$$

Relativement à ces relations abéliennes, la surface de Blaschke de $\widehat{\mathcal{B}}$ admet la paramétrisation

$$(x,y)\mapsto\left[\log(t_1)\,:\,\log(t_2)\,:\,\log(t_3)\,:\,\log(t_4)\,:\,\log(t_5)\,:\,-1\right].$$

Les courbes de Poincaré-Blaschke associées sont toutes projectivement équivalentes à l'image de la paramétrisation

$$z\longmapsto\left[\frac{1}{1-z}\,:\,0\,:\,\frac{1}{z}\,:\,\frac{1}{z}\,:\,0\,:\,\frac{\log(z)}{1-z}+\frac{\log(1-z)}{z}\right].$$

En particulier ce sont des courbes transcendantes planes.

8.5.2. Géométrisation des tissus de Terracini. — On donne ici pour la première fois les relations abéliennes des tissus de Terracini.

8.5.2.1. Géométrisation de $\mathcal{T}err(b)$. — On rappelle que :

$$\mathcal{T}err(b)=\mathcal{W}\Big(x,y,x+y,x-y,x^2-y^2\Big).$$

La base de l'espace des relations abéliennes à partir de laquelle on travaille est celle qui est donnée au chapitre 6. On a :

$$\begin{aligned}
&(1) && (x)+(y)-(x+y)=0\,,\\
&(2) && (x)-(y)-(x-y)=0\,,\\
&(3) && 2\,(x)^2+2\,(y)^2-(x+y)^2-(x-y)^2=0\,,\\
&(4) && (x)^2-(y)^2-(x^2-y^2)=0\,,\\
&(5) && 8\,(x)^4+8\,(y)^4-(x+y)^4-(x-y)^4-6\,(x^2-y^2)^2=0\,,\\
&(6) && \log(x+y)+\log(x+y)-\log(x^2-y^2)=0\,.
\end{aligned}$$

Relativement à cette base, on obtient la paramétrisation suivante de la surface de Blaschke associée :

$$(x,y)\mapsto\left[32\,(x^3+y^3):32\,(x^3-y^3):-12\,(x^2+y^2):-24\,(x^2-y^2):1:12\,(x^2-y^2)^2\right].$$

La surface de Blaschke de $\mathcal{T}err(b)$ est une surface algébrique rationnelle de $\mathbb{CP}^5$ qui n'est pas une surface de Véronèse car ses lignes principales ne sont pas indéterminées. Donc $\mathcal{T}err(b)$ est exceptionnel et non équivalent à $\mathcal{B}$. Les courbes de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{T}err(b)$ sont des courbes algébriques rationnelles. Trois sont planes, et parmi celles-ci, deux sont projectivement équivalentes. Les deux autres courbes non-planes sont projectivement équivalentes et chacune incluse dans un $\mathbb{CP}^3$.

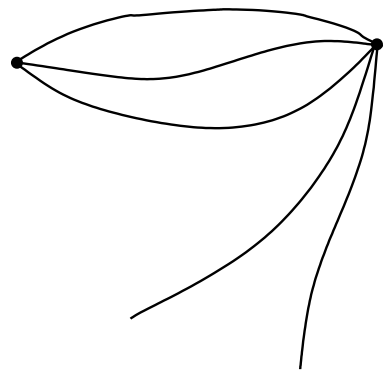


FIGURE 6. configuration de la courbe de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{T}err(b)$

Les invariants de $\mathcal{T}err(b)$ relatifs aux relations abéliennes ont été donnés à la fin du chapitre 6.

8.5.2.2. Géométrisation de $\mathcal{T}err(c)$. — On a :

$$\mathcal{T}err(c) := \mathcal{W}\left(U_1, \ldots, U_5\right) ,$$

avec

$$U_1 = x, \qquad U_2 = y, \qquad U_3 := \frac{(x+y)^2}{1+y^2}, \qquad U_4 := \frac{y(x^2y-2x-y)}{1+y^2}, \qquad U_5 := \frac{x^2y-2x-y}{x^2+2xy-1} .$$

La famille suivante est une base de l'espace des relations abéliennes de ce tissu :

$$U_1^2 - U_3 - U_4 = 0 , \tag{1}$$

$$2\,\ln(1+U_1^2) - \ln(1+U_2^2) - 2\,\ln(1-U_3) - \ln(1+U_5^2) = 0 , \tag{2}$$

$$2\,\arctan(U_1) + \arctan(U_2) - \arctan(U_5) = 0 , \tag{3}$$

$$\ln(U_2) + \ln(1-U_3) - \ln(U_4) + \ln(U_5) = 0 , \tag{4}$$

$$\operatorname{arctanh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{1+U_2^2}}\right) - 2\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+U_4^2}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{1+U_5^2}}\right) = 0 , \tag{5}$$

$$\operatorname{arcsinh}(U_2) - 2\operatorname{arctanh}(\sqrt{U_3}\,) + \operatorname{arcsinh}(U_5) = 0 . \tag{6}$$

Relativement à cette base, on obtient la paramétrisation suivante de la surface de Blaschke associée :

$$(x,y) \mapsto \left[1 : -\frac{3x^2+1}{2} : 2x^3 : -\frac{3x^2y^2-y^2-6xy+2}{1+y^2} : \frac{2\,(x-y)^3}{y^3(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} : -\frac{2\,(y+x)^3}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right] .$$

Les courbes de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{T}err(c)$ sont toutes des courbes entières, dont trois sont planes, les deux autres étant chacune incluse dans un $\mathbb{CP}^3$. Elles sont toutes distinctes, donc $\mathcal{T}err(c)$ n'est pas équivalents à $\mathcal{T}err(b)$. D'autre part, ces courbes ne sont pas toutes projectivement équivalentes deux à deux : une seule de ces cinq courbes est une cubique plane. Cela contraste avec les courbes

de la configuration de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{B}$. On en déduit que $\mathcal{T}err(c)$ n'est pas équivalent à $\mathcal{B}$: c'est donc un nouveau 5-tissu exceptionnel.

D'autre part, à partir de la liste de relations abéliennes ci-dessus, on établit sans difficulté :

$$\omega\big[\mathcal{T}err(c)\big] = (4,2,0) \qquad \mathcal{R}_3\big[\mathcal{T}err(c)\big] = 4 \qquad \mathcal{R}_4\big[\mathcal{T}err(c)\big] = 3\,.$$

8.5.2.3. Géométrisation de $\mathcal{T}err(d)$. — On rappelle la définition de ce tissu :

$$\mathcal{T}err(d) = \mathcal{W}\left(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,\frac{x}{y}\,,\,\frac{x}{y}\,(x+y)\right)\,.$$

On vérifie que la famille suivante est une base de l'espace de ses relations abéliennes :

$$(1) \qquad (x)+(y)-(x+y)=0\,,$$

$$(2) \qquad \ln(x)-\ln(y)-\ln\big(\tfrac{x}{y}\big)=0\,,$$

$$(3) \qquad \ln(y)-\ln(x+y)+\ln\big(1+\tfrac{x}{y}\big)=0\,,$$

$$(4) \qquad \tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x+y}-\tfrac{1}{\left(\frac{x}{y}\,(x+y)\right)}=0\,,$$

$$(5) \qquad \log(x+y)+\ln\big(\tfrac{x}{y}\big)-\log\big(\tfrac{x}{y}\,(x+y)\big)=0\,,$$

$$(6) \qquad \log(x)^2-\log(y)^2+\log(x+y)^2+2\,\log\big(\tfrac{x}{y}\big)\,\log\big(1+\tfrac{x}{y}\big)-\log\big(\tfrac{x}{y}\,(x+y)\big)^2=0\,.$$

Cela prouve que ce tissu est bien de rang maximal. Relativement à cette base, on obtient la paramétrisation suivante de la surface de Blaschke de $\mathcal{T}err(d)$:

$$(x,y)\mapsto\left[-1\,:\,2\,x+y+y\,\log(x)\,:\,2\,(x+y)+y\,\log\big(\frac{x}{y}\big)\,:\,x\,(x+y)\,:\,y\,\big(1+\log((x+y)\,\frac{x}{y})\big)\,:\,-\frac{y}{2}\right].$$

La surface de Blaschke de $\mathcal{T}err(d)$ est une surface globale transcendante de $\mathbb{CP}^5$, et donc n'est pas une surface de Véronèse. On en déduit que $\mathcal{T}err(d)$ est exceptionnel. La surface $\mathcal{S}[\mathcal{T}err(d)]$ n'étant pas algébrique, elle n'est pas projectivement congruente à $\mathcal{S}[\mathcal{T}err(b)]$, ce qui montre la non-équivalence de $\mathcal{T}err(d)$ avec $\mathcal{T}err(b)$.

Les courbes de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{T}err(d)$ sont des courbes transcendantes de $\mathbb{CP}^5$. Parmis ces cinq courbes, deux sont planes : celles-ci sont projectivement équivalentes. Les trois autres sont chacune incluse dans un $\mathbb{CP}^3$, et exactement deux de ces trois courbes sont congrues modulo $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$. En particulier, aucune des courbes formant la configuration de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{T}err(d)$ n'est une cubique plane. Vu *8.5.2.2*, cela montre que $\mathcal{T}err(d)$ n'est pas équivalent à $\mathcal{T}err(c)$.

Par ailleurs, à partir de la liste de relations abéliennes ci-dessus, on obtient sans difficulté :

$$\omega\big[\mathcal{T}err(d)\big] = (5,0,1) \qquad \mathcal{R}_3\big[\mathcal{T}err(d)\big] = 8 \qquad \mathcal{R}_4\big[\mathcal{T}err(d)\big] = 3\,.$$

8.5.3. Géométrisation des tissus de Buzano. — On donne les relations abéliennes et de nouvelles paramétrisations des surfaces de Blaschke des deux tissus de Segre associés aux deux surfaces de Blaschke découvertes par Buzano dans [**Buz 39**].

Avant d'avoir eu connaissance de ce papier de Buzano, nous avions découvert deux modèles de ces tissus et établi qu'ils sont bien exceptionnels (voir [**Pi 04**], [**PT 04**] et le chapitre 6).

Les paramétrisations données par Buzano dans [**Buz 39**] des surfaces de Blaschke des deux tissus étudiés ci-dessous sont plus simples que celle que nous obtenons. Mais les nôtres ont l'avantage de

ne s'exprimer qu'en termes de fonctions entières non ramifiées. Notons que l'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ de $\mathcal{B}uz(A)$ et $\mathcal{B}uz(B)$ ont été donnés à la fin du chapitre 6.

8.5.3.1. Géométrisation de $\mathcal{B}uz(A)$. — Comme modèle du tissu noté A par Buzano, on a pris

$$\mathcal{B}uz(A) := \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, \tanh(x)\,\tanh(y) \Big)\,.$$

Au chapitre 6, on a donné les six relations abéliennes de $\mathcal{B}uz(A)$:

$$(1) \qquad (x)+(y)-(x+y)=0\,,$$

$$(2) \qquad (x)-(y)-(x-y)=0\,,$$

$$(3) \qquad 2\,(x)^2+2\,(y)^2-(x-y)^2-(x+y)^2=0\,,$$

$$(4) \qquad \log\big(\tanh(x)\big)+\log\big(\tanh(y)\big)-\log(U)=0\,,$$

$$(5) \qquad \log\big(\cosh(x+y)\big)-\log\big(\cosh(x-y)\big)-\log\big(\tfrac{1+U}{1-U}\big)=0\,,$$

$$(6) \qquad \log\big(\cosh(x)\big)+\log\big(\cosh(y)\big)-\log\big(\cosh(x-y)\big)+\log(1-U)=0\,.$$

$\big($on a posé $U=\tanh(x)\,\tanh(y)\big)$.

Relativement à cette base, on obtient la paramétrisation suivante de la surface de Blaschke associée :

$$\begin{aligned}(x,y)\mapsto \Big[&\mathrm{sh}(x+y)\mathrm{ch}(x-y)-(y+x)\,:\,\mathrm{sh}(x-y)\mathrm{ch}(x-y)-(y-x)\,:\,\frac{1}{2}\,:\\ &2\left(\mathrm{ch}(x)^4\,\mathrm{ch}(y)^2-\mathrm{ch}(x)^2\,\mathrm{sh}(x)^2\,\mathrm{ch}(y)^2-\mathrm{ch}(x)^2\,\mathrm{ch}(y)^2-\mathrm{sh}(x)^2\,\mathrm{sh}(y)^2\right)\,:\\ &\mathrm{ch}(x+y)^2\,:\,\mathrm{ch}(x+y)^2-\mathrm{ch}(x-y)^2\,\Big]\,.\end{aligned}$$

C'est la paramétrisation d'une surface transcendante, ce qui prouve que $\mathcal{B}uz(A)$ est bien exceptionnel. La configuration de Poincaré-Blaschke $\mathcal{C}\big[\mathcal{B}uz(A)\big]$ est formée de trois courbes entières planes (dont l'une est une conique) et de deux autre courbes entières chacune contenue dans un $\mathbb{CP}^3$. Ces faits montrent que $\mathcal{B}uz(A)$ n'est pas équivalent aux tissus exceptionnels ci-dessus.

8.5.3.2. Géométrisation de $\mathcal{B}uz(B)$. — Comme modèle du tissu noté B par Buzano, on a pris

$$\mathcal{B}uz(B) := \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, e^x+e^y \Big)\,.$$

Au chapitre 6, on a donné les six relations abéliennes de $\mathcal{B}uz(B)$:

$$(1) \qquad (x)+(y)-(x+y)=0\,,$$

$$(2) \qquad (x)-(y)-(x-y)=0\,,$$

$$(3) \qquad 2\,(x)^2+2\,(y)^2-(x-y)^2-(x+y)^2=0\,,$$

$$(4) \qquad e^x+e^y-(e^x+e^y)=0\,,$$

$$(5) \qquad e^{2x}+e^{2y}+2\,e^{x+y}-(e^x+e^y)^2=0\,,$$

$$(6) \qquad \log\big(2\,\exp(\tfrac{x+y}{2})\big)+\log\big(\cosh(\tfrac{x-y}{2})\big)-\log(e^x+e^y)=0\,.$$

Relativement à cette base, on obtient la paramétrisation suivante de la surface de Blaschke associée :

$$\begin{aligned}(x,y)\mapsto \Big[&2\,e^{x+y}\left(1+\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})^2-(x+y)\right)\,:\,2\,e^{x+y}\left(2+(y-x)-4\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})^2+e^{x-y}\right)\\ &:\,e^{x+y}\,:\,-4\,(e^x+e^y)\,:\,1\,:\,8\,e^{x+y}\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})^2\,\Big]\,.\end{aligned}$$

C'est n'est pas la paramétrisation d'une surface de Véronèse, donc $\mathcal{B}uz(B)$ est bien exceptionnel. La configuration de Poincaré-Blaschke $\mathcal{C}\big[\mathcal{B}uz(B)\big]$ est formée de deux courbes entières planes (dont l'une est une conique) et de trois autres courbes entières transcendantes non planes, chacune contenue dans un $\mathbb{CP}^3$. Cela montre que $\mathcal{B}uz(B)$ n'est pas équivalent aux tissus exceptionnels ci-dessus.

8.5.4. Géométrisation des tissus exceptionnels du chapitre 6. — Certains des tissus considérés au chapitre 6 avaient déjà été considérés par Terracini et Buzano et on vient de les étudier. On n'en reparlera donc pas ici. Pour l'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ des tissus de la présente section, on renvoie au tableau à la fin du chapitre 6.

8.5.4.1. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x{+}y\,,\,x{-}y,\,x^2{+}y^2\,)$. — Ce tissu, noté W dans ce paragraphe, apparaît pour la première fois dans la note [**Pi 04**] et a déjà été considéré au chapitre 6. On y donne la base suivante de l'espace de ses relations abéliennes :

$$(1)\qquad (x)+(y)-(x+y)=0\,,$$

$$(2)\qquad (x)-(y)-(x-y)=0\,,$$

$$(3)\qquad (x)^2-(y)^2-(x^2+y^2)=0\,,$$

$$(4)\qquad 2\,(x)^2+2\,(y)^2-(x+y)^2-(x-y)^2=0\,,$$

$$(5)\qquad 4\,(x)^4+4\,(y)^4+(x+y)^4+(x-y)^4-6\,(x^2+y^2)^2=0\,,$$

$$(6)\qquad 8\,(x)^6+8\,(y)^6+(x+y)^6+(x-y)^6-10\,(x^2+y^2)^3=0\,.$$

Relativement à celle-ci, la surface de Poincaré-Blaschke de W admet la paramétrisation

$$(x,y)\mapsto\Big[16\,(x^2-3xy+y^2)(x+y)^3\ :\ 16\,(x^2+3xy+y^2)(x-y)^3\ :\ ..$$
$$\cdots\ 30\,(x^2+y^2)^2\ :\ -15\,(x-y)^2(x+y)^2\ :\ -5\,(x^2+y^2)\ :\ 1\Big]\,.$$

C'est encore une surface algébrique rationnelle de $\mathbb{CP}^5$. Ce n'est pas une surface de Véronèse car ses directions principales ne sont pas indéterminées, comme on le vérifie facilement. On en déduit une preuve "géométrique" que W est bien exceptionnel. La courbe de Poincaré-Blaschke associée est la réunion de cinq courbes rationnelles de $\mathbb{CP}^5$ qui se rencontrent toutes en un même point :

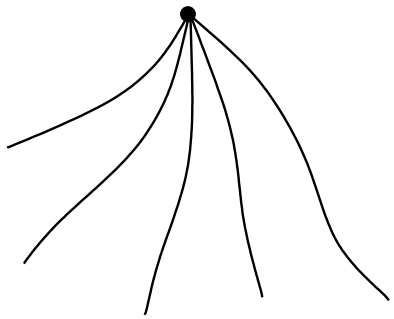


FIGURE 7. configuration de la courbe de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{W}(x,y,x+y,x-y,x^2+y^2)$.

On en déduit immédiatement que $\mathcal{C}[W]$ n'est pas projectivement équivalente à $\mathcal{C}[\mathcal{T}err(b)]$. Il en découle que W n'est pas équivalent aux 5-tissus exceptionnels considérés ci-dessus.

8.5.4.2. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y,\,\sin x\sin y\,)$. — Ce tissu, noté W dans ce paragraphe, apparaît pour la première fois dans le chapitre 6 de cette thèse. On y donne la base suivante de l'espace de ses relations abéliènnes :

$$(1) \qquad (x)+(y)-(x+y)=0\,,$$

$$(2) \qquad (x)-(y)-(x-y)=0\,,$$

$$(3) \qquad (x)^2-(y)^2-(x^2+y^2)=0\,,$$

$$(4) \qquad \log\big(\sin x\big)+\log\big(\sin y\big)-\log\big(\sin x\,\sin y\big)=0\,,$$

$$(5) \qquad \cos(x+y)-\cos(x-y)+2\,\big(\sin x\,\sin y\big)=0\,,$$

$$(6) \qquad \cos(2\,x)+\cos(2\,y)-\cos^2(x+y)-\cos^2(x-y)+4\,\big(\sin x\,\sin y\big)^2=0\,.$$

Relativement à celle-ci, la surface de Poincaré-Blaschke de W admet la paramétrisation

$$(x,y)\longmapsto\Big[\,H_1(x,y)\,:\,H_2(x,y)\,:\,H_3(x,y)\,:\,H_4(x,y)\,:\,H_5(x,y)\,:\,1\,\Big]$$

avec

$$H_1(x,y)=2\,(x+y)\big(2\,\sin^2 x\sin^2 y-2\,\cos^2 x\cos^2 y+1\,\big)+2\,\sin(x+y)\,\big(4\,\sin x\sin y+\cos(x+y)\big)\,;$$

$$H_2(x,y)=2\,(x-y)\,\big(2\,\sin^2 x\sin^2 y-2\,\cos^2 x\cos^2 y+1\big)+2\,\sin(x+y)\big(\cos(x-y)-4\,\sin x\sin y\big)\,;$$

$$H_3(x,y)=2\,\cos^2 x\cos^2 y-4\,\sin^2 x\sin^2 y-1\,;$$

$$H_4(x,y)=-8\,\big(\cos^2 x-1\big)\,\big(\,\cos^2 y-1\,\big)\,;$$

$$H_5(x,y)=-8\,\sin x\,\sin y\,.$$

Ce n'est pas une paramétrisation d'une surface de Véronèse : W est donc bien exceptionnel. La courbe de Poincaré-Blaschke associée est la réunion d'une conique plane et de quatre courbes transcendantes, chacune transformée projective de la courbe image de la paramétrisation :

$$z\longmapsto\big[\,\sin z\,:\,0\,:\,0\,:\,z\,\sin z\,:\,\cos z\,:\,\sin 2\,z\,\sin z\,\big]\,.$$

On en déduit immédiatement que $\mathcal{C}[W]$ n'est pas projectivement équivalente à une des configurations de Poincaré-Blaschke d'un des tissus étudiés ci-dessus. Il en découle que W est un nouveau tissu exceptionnel.

8.5.4.3. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y,\,\mathrm{sn}_k\,x\,\mathrm{sn}_k\,y\,)$. — On fixe $k\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ et on note W_k le tissu

$$\mathcal{W}\Big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y,\,U_k(x,y)\Big)\,,$$

avec

$$U_k(x,y)=\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}\,\frac{\theta_1(y)}{\theta_4(y)}\,.$$

Comme base de l'espace des relations abéliennes de ce tissu, on prend exactement la famille donnée à la section 3 du chapitre 6 dont on garde les notations concernant les fonctions thètas.

On pose par ailleurs :

$$u_1=x \qquad u_2=y \qquad u_3=x+y \qquad u_4=x-y \qquad \text{et} \qquad u_5=U_k\,,$$

ainsi que

$$F(x):=\theta_4^2\,\frac{\theta_2(x)\,\theta_3(x)}{\theta_1(x)\,\theta_4(x)} \qquad \text{et} \qquad S(x):=\frac{\theta_4'(x)}{\theta_4(x)}\,.$$

Alors la paramétrisation de $\mathcal{S}[W_k]$ associée avec notre choix de la base des relations abéliennes est

$$(x,y) \longmapsto \big[\, H_1(x,y) \,:\, H_2(x,y) \,:\, H_3(x,y) \,:\, 1 \,:\, H_5(x,y) \,:\, H_6(x,y) \,:\,\big]$$

avec

$$\begin{aligned}
H_1(x,y) &= F(u_1)\, u_5^2 + F(u_2)\, u_5^2 + 4\, u_1\, u_5 + S(u_1)\ ,\\
H_2(x,y) &= F(u_1)\, u_5^2 - F(u_2)\, u_5^2 + 4\, u_2\, u_5 + S(u_2)\ ,\\
H_3(x,y) &= \frac{F'(u_1)\,\big(4\ u_5^4 - 8\, u_5^3 + 4\ u_5^2\big) + u_5 + 1}{1 - u_5^2}\ ,\\
H_5(x,y) &= \frac{8\, F'(u_1)\, u_5^2\,\big(1 - u_5\big)^2 + 1}{\big(1 - u_5\big)^2}\ ,\\
H_6(x,y) &= S'(u_1) + 4\, u_5\ .
\end{aligned}$$

À partir de ces formules, on peut aussi obtenir une paramétrisation (relativement compliquée) de $\mathcal{S}[W_k]$ dont les composantes homogènes sont des polynômes en x et en les $\theta_k(z)$, les $\theta_k'(z)$ et $\theta_4''(x)$ (pour $k = 1, \ldots, 4$ et $z = x, y$). Les surfaces de Blaschke des W_k forment une famille à un paramètre de surfaces exceptionnelles (sans doute transcendantes) dans $\mathbb{CP}^5$ qu'il serait intéressant d'étudier.

8.5.5. Géométrisation d'autres 5-tissus exceptionnels. — En 5.2.4, on a montré que les tissus ci-dessous sont bien de rang maximal. Il s'avère qu'ils sont exceptionnels. Certains ne sont que des avatars de tissus considérés plus haut. D'autres sont "nouveaux".

8.5.5.1. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y,\,xy\,)$. — Via le changement de variables $x = e^X$, $y = e^Y$, on obtient que le tissu considéré ici est équivalent à

$$\mathcal{W}\,\big(\,X\,,\,Y\,,\,X+Y\,,\,X-Y,\,e^X + e^Y\,\big)\ ,$$

et donc est équivalent au tissu $\mathcal{B}uz(B)$ étudié plus haut.

8.5.5.2. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y,\,x^2+xy+y^2\,)$. — Ce tissu est noté W dans ce paragraphe. On vérifie que la liste suivante est bien celle d'une base de ses relations abéliennes :

$$\begin{aligned}
&(1) && (x) + (y) - (x+y) = 0\,,\\
&(2) && \log(x) - \log(y) - \log(x/y) = 0\,,\\
&(3) && \log(y) - \log(x+y) + \log(1 + x/y) = 0\,,\\
&(4) && (x)^2 + (y)^2 + (x+y)^2 - 2\,(U) = 0\,,\\
&(5) && (x)^4 + (y)^4 + (x+y)^4 - 2\,(U)^2 = 0\,,\\
&(6) && 2\,\log(y) + \log(\,1 + x/y + (x/y)^2\,) - \log(U) = 0\,.
\end{aligned}$$

(On a posé $U = x^2 + xy + y^2$).

Relativement à cette base, la surface de Poincaré-Blaschke de W admet la paramétrisation

$$\begin{aligned}
(x,y) \mapsto \Big[\, & 4\,xy(x+y) \,:\, x^2\,(x^2 - 2xy - 2\,y^2) \,:\, \ldots\\
& \cdots - (x+y)^2(x^2 + 4\,xy + y^2)^2 \,:\, -(x^2 + xy + y^2) \,:\, 1 \,:\, (x^2 + xy + y^2)^2\,\Big]\,.
\end{aligned}$$

C'est donc encore une surface rationnelle de $\mathbb{CP}^5$, qui n'est pas une surface de Véronèse puisque les directions principales ne sont pas indéterminées. On en déduit que W est exceptionnel.

La courbe de Poincaré-Blaschke associée est la réunion de cinq courbes rationnelles et a la configuration suivante :

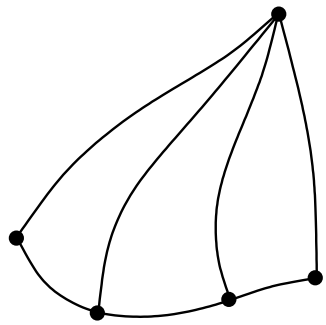


FIGURE 8. configuration de la courbe de Poincaré-Blaschke de $\mathcal{W}(x, y, x+y, x/y, x^2+xy+y^2)$.

Clairement, cette courbe n'est pas projectivement équivalente aux courbes de Poincaré-Blaschke des tissus exceptionnels étudiés avant, ce qui implique que $\mathcal{W}(x, y, x+y, x/y, x^2+xy+y^2)$ est un nouveau tissu exceptionnel.

D'autre part, à partir de la liste de relations abéliennes ci-dessus, on établit sans difficulté :

$$\omega\big[W\big] = (4,2,0) \qquad \mathcal{R}_3\big[W\big] = 7 \qquad \mathcal{R}_4\big[W\big] = 3\,.$$

8.5.5.3. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y,\,xy/(x+y))\,)$. — Par le changement de variable $(x,y) \mapsto (x+y, -y)$, on obtient que ce tissu est équivalent au tissu $\mathcal{T}err(d)$ étudié ci-dessus.

8.5.5.4. Géométrisation de $\mathcal{W}(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x/y,\,x(x+y)\,)$. — Via le changement de variable $x = -e^X$ et $y = e^X + e^Y$, on obtient que le tissu considéré ici est équivalent à

$$\mathcal{W}\,\big(\,X\,,\,Y\,,\,X+Y\,,\,X-Y,\,e^X+e^Y\,\big)\ ,$$

et donc est équivalent au tissu $\mathcal{B}uz(B)$ étudié plus haut.

8.5.6. Géométrisation des sous-5-tissus exceptionnels des tissus $\mathcal{K}(4)$ et $\mathcal{K}(5)$. — Au chapitre précédent, on a découvert que les tissus polylogarithmiques associés aux équations de Kummer du tétralogarithme et du pentalogarithme admettent des 5-tissus exceptionnels comme sous-tissus. On détermine leur surface de Blaschke ci-dessous.

8.5.6.1. Géométrisation de $\mathcal{K}(4)\big[1,2,3,7,8\big]$. — On a :

$$\mathcal{K}(4)\big[1,2,3,7,8\big] = \mathcal{W}\big(\,x\,,\,y\,,\,xy\,,\,\frac{y}{1-x}\,,\,\frac{xy}{1-x}\,\big)\,.$$

Dans les nouvelles coordonnées (X,Y) définies par $x = Y/Y$ et $y = Y$, ce tissu devient

$$\mathcal{W}\big(\,X\,,\,Y\,,\,X+Y\,,\,\frac{X}{Y}\,,\,\frac{X}{Y(X+Y)}\,\big)\,,$$

et celui-ci est le tissu de Terracini $\mathcal{T}err(d)$, étudié en *8.5.2.3.*

8.5.6.2. Géométrisation de $\mathcal{K}(5)\big[1,2,21,25,27\big]$. — On note :

$$\mathcal{W} := \mathcal{K}(5)\big[1,2,21,25,27\big] = \mathcal{W}\left(\,X\,,\,Y\,,\,\frac{Y(1-X)^2}{X(1-Y)^2}\,,\,\frac{X(1-X)(1-Y)^2}{Y}\,,\,\frac{X^2Y}{(1-X)(1-Y)^2}\,\right)\,.$$

Si on a déjà donné une base de l'espace des relations abéliennes de $\mathcal{W}$ au chapitre 7 par rapport à laquelle on pourrait géométriser $\mathcal{W}$, on préfère travailler avec le modèle suivant de $\mathcal{W}$:

$$W := \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, \frac{x}{y}\,,\, xy\,(x+y)\,\big)$$

qu'on obtient à partir de $\mathcal{W}$ en effectuant le changement de variables $(X,Y) \mapsto (x,y)$ avec

$$x = -X/Y \qquad \text{et} \qquad x\,(1-x)\,y^3 = Y/(1-Y)^2\,.$$

La liste ci dessous est celle d'une base des relations abéliennes de W :

$$(1) \qquad (x) + (y) - (x+y) = 0\,,$$

$$(2) \qquad \log(x) - \log(y) - \log(x/y) = 0\,,$$

$$(3) \qquad \log(y) - \log(x+y) + \log(1+x/y) = 0\,,$$

$$(4) \qquad 3\,\log(x+y) - \big(\log(1+x/y) + \log(1+y/x)\,\big) - \log(U) = 0\,,$$

$$(5) \qquad (x)^3 + (y)^2 - (x+y)^3 + 3\,(U) = 0\,,$$

$$(6) \qquad 3\,\log(x)^2 + 3\,\log(y)^2 + 3\,\log(x+y)^2 - F(x/y) - \log(U)^2 = 0\,.$$

(on a posé $U = xy(x+y)$ et $F(z) := \log(z)^2 + \log(1+z)^2 + \ln(1+1/z)^2$).

Relativement à cette base, la surface de Poincaré-Blaschke de W admet la paramétrisation

$$(x,y) \mapsto \Big[\, -3\,(x^2+xy+y^2)\ :\ x\big(\,2\,(x^2+y^2) + y(1-\log(x))(3x+y)\,\big)\ :$$
$$(x+y)\,\big(\,2(x+y)^2 - 3\,xy\,\log(xy)\,\big)\ :\ -xy(x+y)\,\big(\,\log\big(xy(x+y)\big) - 1\,\big)\ :\ \frac{1}{3}\ :\ xy\,\frac{x+y}{2}\Big]\,.$$

Les courbes de Poincaré-Blaschke associées sont des courbes entières. L'une d'entre elles est plane, et les quatre autres sont chacune incluse dans un $\mathbb{CP}^3$. Parmi ces quatre courbes, trois sont projectivement équivalentes à l'image de la paramétrisation

$$z \longmapsto \big[\,1\ :\ z\ :\ e^z\ :\ e^{3z}\ :\ 0\ :\ 0\,\big]\,.$$

L'armure et les invariants $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ de W ont déjà été donnés au chapitre 7 :

$$\mathcal{R}_3\big[W\big] = 7 \qquad \mathcal{R}_4\big[W\big] = 1 \qquad \text{et} \qquad \omega\big[W\big] = (4,1,1)\,.$$

CHAPITRE 9

SUR LA NOTION DE TISSU ALGÉBRIQUE

Dans les chapitres précédents, on a exhibé un nombre relativement conséquent de nouveaux tissus exceptionnels. On explique maintenant comment il est encore possible de considérer certains de ces tissus comme des "tissus algébriques" en proposant une généralisation de cette notion.

Voici un plan sommaire du chapitre : dans l'introduction 9.1, on discute les considérations qui nous ont amené à proposer une généralisation de la notion de tissu algébrique. Après avoir rappelé quelques points concernant les courbes algébriques dans la section 9.2, on donne une définition des notions de *tissu D-algébrique* et de *tissu G-algébrique* dans la section 9.3. En 9.4, on illustre cette nouvelle notion en montrant que le tissu $\mathcal{W}(x, y, x+y, x-y, x^2+y^2)$, qui est exceptionnel selon la terminologie de Blaschke et Bol, est algébrique en ce sens plus général.

Dans tout ce chapitre, le terme "courbe algébrique" désigne un schéma sur $\mathbb{C}$ de dimension pure égale à 1, sans composante irréductible non-réduite, mais pas forcément lisse ni même irréductible. Le plus souvent, une telle courbe sera notée $\mathcal{C}$.

D'autre part, sauf précision contraire, il sera toujours question de tissu plan.

9.1. Introduction

Au chapitre 4, on a défini les notions de *relations abéliennes*, de *rang* et de *tissu algébrique*. C'est relativement à ces concepts que se formule la problématique centrale de cette thèse, à savoir l'étude et la description des tissus plans exceptionnels.

Ces notions ont été dégagées autour des années 1931-32, principalement par Blaschke, qui a fait apparaître l'intérêt de l'idée de relation abélienne en la reliant à certains résultats d'algébrisation pour les tissus. Avec l'aide de Howe, c'est lui qui a établi les résultats qui fondent la théorie présentée au chapitre 4 de cette thèse, aux exceptions notables de la borne sur le rang d'un tissu et de la découverte d'un 5-tissu exceptionnel, qui ont été obtenues par Bol en 1932 et 1936 respectivement. On peut donc dire que le cadre dans lequel s'énonce le problème de la détermination des tissus de rang maximal était bien dégagé dès 1936. Il n'a guère évolué depuis.

Concernant la détermination des tissus exceptionnels, il n'y a eu aucune avancée pendant près de 70 ans puisque les résultats nouveaux sont très récents (et datent de 2002). Il s'agit de la preuve du caractère exceptionnel du tissu de Spence-Kummer $\mathcal{W}_{\mathcal{SK}}$ (par G. Robert et l'auteur, de façon indépendante), ainsi que de la découverte de nouveaux k-tissus exceptionnels pour $k = 5, 6, 7, 8$, dont certains vont en famille (pour $k = 5, 6, 8$). On renvoie aux chapitres 6 et 7 de cette thèse pour davantage de précisions sur ces points.

Parmi les nouveaux tissus exceptionnels qui ont été découverts, figurent des exemples particulièrement surprenants de par leur “simplicité”. On peut citer le tissu noté $\mathfrak{W}_1$ ci-dessous, qui a été considéré pour la première fois dans [**Pi 04**] :

$$\mathfrak{W}_1 := \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, x^2+y^2 \,\big)\ .$$

Ce tissu est formé de quatre pinceaux de droites parallèles dont les sommets forment une division anharmonique de la droite à l'infini et du pinceau des cercles centrés en l'origine.

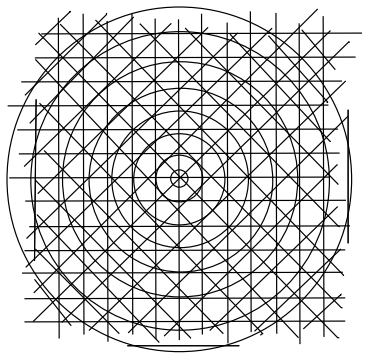


FIGURE 1. Une représentation réelle de $\mathfrak{W}_1$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

Les relations abéliennes de $\mathfrak{W}_1$ sont particulièrement élémentaires et peuvent être déterminées à la main sans difficulté. On établit facilement que la liste ci-dessous est bien celle d'une base de l'espace de ses relations fonctionnelles abéliennes (modulo les relations triviales) :

$$(x)+(y)-(x+y)=0\ ,$$
$$(x)-(y)-(x-y)=0\ ,$$
$$(x)^2+(y)^2-(x^2+y^2)=0\ ,$$
$$(x+y)^2+(x-y)^2-2\,(x^2+y^2)=0\ ,$$
$$4\,(x)^4+4\,(y)^4+(x+y)^4+(x-y)^4-6\,(x^2+y^2)^2=0\ ,$$
$$8\,(x)^6+8\,(y)^6+(x+y)^6+(x-y)^6-10\,(x^2+y^2)^3=0\ .$$

Les feuilletages de $\mathfrak{W}_1$ sont définis par des polynômes très simples et toutes ses relations abéliennes sont données par des identités polynomiales élémentaires. Pourtant ce tissu n'est pas algébrique au sens de la Définition 4.2.4 (nous dirons qu'il n'est pas algébrique au sens de Blaschke et Bol).

Ce fait surprenant fait apparaître que la notion classique de tissu algébrique n'est pas véritablement satisfaisante. Si la dichotomie tissus algébriques/tissus exceptionnels[(1)] a semblé pertinente pendant aussi longtemps, c'est sans doute qu'on ne disposait que du tissu de Bol pour en rendre compte. Quand on la regarde à la lumière des nouveaux tissus exceptionnels que nous avons découverts, elle apparaît comme n'étant plus tout à fait appropriée.

Dans le chapitre précédent, on a expliqué comment il est possible de géométriser un 5-tissu exceptionnel, en lui attachant de façon canonique[(2)] une surface de $\mathbb{CP}^5$, dite de “Blaschke”, obtenue

(1) Avec les définitions classiques du chapitre 4.
(2) Modulo $\mathrm{PGL}_6(\mathbb{C})$.

comme image d'une paramétrisation construite à partir des relations abéliennes du tissu. Quand on l'applique à $\mathfrak{W}_1$, ce procédé de géométrisation fait apparaître que la surface de Blaschke de $\mathfrak{W}_1$ est algébrique et que ce tissu peut être décrit en termes géométriques (en un sens qu'on précisera plus loin) relativement à la courbe de Poincaré-Blaschke associée, qui, dans ce cas, est une courbe algébrique (voir chapitre 8 et plus particulièrement *8.5.4.1*).

Ce fait peut nous amener aux réflexions suivantes concernant la notion de tissu algébrique : la construction classique permet d'associer un d-tissu sur $\left(\mathbb{CP}^2\right)^*$ à toute courbe algébrique $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$ de degré d, sans composante multiple. Elle repose essentiellement sur la dualité projective et le théorème de Bezout, et se généralise donc à n'importe quelle courbe algébrique plongée dans un espace projectif. Mais elle ne permet d'obtenir un tissu plan de rang maximal que dans le cas d'une courbe plane.

Ce qui rend particulièrement intéressants les tissus algébriques au sens de Blaschke et Bol est qu'ils forment une vaste classe de tissus de rang maximal. Ce dernier point découle du Théorème d'addition d'Abel 4.3.10. La version de ce théorème qu'on a donnée en 4.3.2 ne porte que sur les courbes planes et on peut dire qu'elle est énoncée avec le même formalisme que celui utilisé par Abel il y a plus de 150 ans. De nombreux progrès ont depuis été faits sur le sujet, et les versions modernes du théorème d'Abel (cf. Théorème 9.2.5) s'énoncent pour toutes les courbes algébriques, et cela de façon intrinsèque (*i.e.* sans que la courbe soit nécéssairement plongée dans un espace projectif).

Dans le formalisme actuel très général, le théorème d'Abel caractérise les sous-ensembles de l'espace des 0-cycles effectifs sur lesquels les traces des 1-formes régulières de $\mathcal{C}$ s'annulent identiquement. Pour essayer de définir une "nouvelle" notion de tissu algébrique qui soit plus générale que la notion classique (et qui par exemple, englobe le tissu $\mathfrak{W}_1$), l'idée est de se placer dans ce cadre à la fois plus abstrait et plus naturel.

Le fait est que l'espace $\mathcal{C}^{(d)}$ des 0-cycles effectifs de degré fixé d porte naturellement un d-tissu de codimension 1, qu'on note $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}$ (voir 9.3). Puisqu'on ne s'occupe que de tissus plans, on va s'intéresser aux familles de 0-cycles paramétrées par un ensemble analytique T de dimension 2. Quand c'est bien défini, on obtient un d-tissu sur T en tirant en arrière le tissu $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}$.

Lorsque T est une surface algébrique, on obtient la notion de "tissu D-algébrique". Cette notion est très générale. On définira alors ce qu'est un "tissu G-algébrique" : c'est un tissu D-algébrique dont les relations abéliennes sont toutes données par l'annulation de la trace d'éléments d'un sous-espace H de l'espace des 1-formes rationnelles sur $\mathcal{C}$. Quand on prend $H = \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1)$, on retrouve la notion classique de tissu algébrique si l'on se restreint à considérer des tissus de rang maximal. Par contre, si l'on se permet d'autres choix pour H, on peut alors décrire avec ce formalisme des tissus qui sont exceptionnels selon la terminologie classique.

En 9.4 on illustre les notions introduites auparavant en les illustrant sur un exemple explicite : on montre que $\mathfrak{W}_1$ est G-algébrique bien qu'il soit exceptionnel selon la terminologie classique.

9.2. Quelques rappels sur les courbes algébriques

Dans cette partie on commence par rappeler les notions de diviseurs, diviseurs effectifs, etc., sur une courbe algébrique $\mathcal{C}$. Ces notions sont très classiques en géométrie algébrique complexe. Notre référence principale est [**ACGH**]. On donne ensuite une définition analytique de ce qu'est une

1-forme régulière sur $\mathcal{C}$.[3] Dans le cas où la courbe est singulière, cette notion de 1-forme est un peu subtile et est due à M. Rosenlicht.

9.2.1. La notion de 0-cycle sur une courbe. — Le lieu singulier d'une courbe $\mathcal{C}$ est noté $S(\mathcal{C})$, ou S quand la confusion n'est pas possible. C'est un ensemble fini. On note $reg(\mathcal{C})$ la partie régulière de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est singulière, elle admet essentiellement une unique normalisation

$$\pi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$$

où la courbe $\mathcal{C}'$ est lisse et π établit un biholomorphisme de $\mathcal{C}' \setminus \pi^{-1}(S)$ sur $\mathcal{C} \setminus S$. On note $\mathcal{C}^d$ le produit cartésien de d exemplaires de $\mathcal{C}$ et, pour $i = 1, \ldots, d$, on désigne par π_i la i-ème projection :

$$\pi_i : \big(p_1, \ldots, p_d\big) \in \mathcal{C}^d \longmapsto p_i \in \mathcal{C}\,.$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit de façon naturelle sur $\mathcal{C}^d$. L'espace quotient pour cette action est noté $\mathcal{C}^{(d)}$. Par définition, c'est le *d-ième produit symétrique de la courbe* $\mathcal{C}$. On note $\pi^d_{\mathcal{C}}$ la projection $\mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^{(d)}$ et $reg(\mathcal{C})^{(d)}$ l'image de $reg(\mathcal{C})^d$ par $\pi^d_{\mathcal{C}}$. La *diagonale* $\Delta^{(d)}$ de $\mathcal{C}^{(d)}$ est définie comme étant la projection par $\pi^d_{\mathcal{C}}$ de l'ensemble des éléments $(p_1, \ldots, p_d) \in \mathcal{C}^d$ tels que deux des p_i coïncident. On note alors

$$\widehat{\mathcal{C}}^{(d)} := reg(\mathcal{C})^{(d)} \setminus \Delta^{(d)}\,.$$

C'est un ouvert analytique dense inclus dans la partie lisse de $\mathcal{C}^{(d)}$, sur lequel on définira en 9.3 un d-tissu de codimension 1 qui jouera un rôle important dans la suite.

Si P est un point de $\mathcal{C}^{(d)}$, on peut l'écrire comme une somme formelle de points p_i de $\mathcal{C}$, deux à deux distincts, à coefficients des entiers positifs n_i tels que $\Sigma\, n_i = d$. Plus généralement, un *0-cycle* P sur $\mathcal{C}$ est une somme formelle finie, à coefficients entiers : $P = \Sigma_i\, m_i\, p_i$, avec $m_i \in \mathbb{Z}$, et où les p_i sont des points de $\mathcal{C}$ deux à deux distincts.

Si q est un point de $\mathcal{C}$, la *multiplicité en* q d'un tel 0-cycle est le nombre

$$m_q(P) = \sum_{i, p_i = q} n_i \in \mathbb{Z}\,.$$

On peut alors définir le *degré de* P :

$$\deg(P) := \sum_{p \in \mathcal{C}} m_p(P) \in \mathbb{Z}\,.$$

Le *support* $\mathrm{supp}(P)$ de P est l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ où la multiplicité de P n'est pas nulle :

$$\mathrm{supp}(P) := \{\, q \in \mathcal{C} \,|\, m_q(P) \neq 0 \,\}\,.$$

Un 0-cycle est dit *effectif* s'il n'admet pas de point de multiplicité strictement négative. Dans l'écriture $P = \Sigma_i\, n_i\, p_i$, cela correspond à ce que tous les n_i soient positifs. On en déduit que l'espace des 0-cycles effectifs de degré d sur $\mathcal{C}$ s'identifie au d-ième produit symétrique $\mathcal{C}^{(d)}$ de $\mathcal{C}$.

Soit $F \in \mathbb{C}(\mathcal{C})^*$ une fonction rationnelle inversible. Alors au voisinage d'un point p de $\mathcal{C}$, on a une écriture $F = a/b$ avec $a, b \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},p}$ et $b \neq 0$. Si p est un point régulier, il existe une coordonnée locale holomorphe au voisinage de $p = z(0)$. Il est alors naturel de définir la multiplicité de F en p, notée $m_p(F)$, comme étant la différence $m_0(a(z)) - m_0(b(z))$, où on a noté $m_0(c(z))$ la multiplicité de 0 pour le germe $c(z)$ (avec $c = a, b$). On montre que cette dernière est égale à la dimension de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}/(c)$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On a donc

$$m_p(F) = \dim_{\mathbb{C}} \big(\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}/(a)\big) - \dim_{\mathbb{C}} \big(\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}/(b)\big)\,.$$

[3] Cela donne une définition rigoureuse de la notion de “forme de première éspèce utilisée en 4.3.2.

En prenant cette dernière relation comme définition quand p est singulier, on définit le *0-cycle principal associé à* F, noté (F), en posant :

$$(F) := \sum_{p \in \mathcal{C}} m_p(F)\, p\,.$$

On vérifie qu'un tel 0-cycle principal est de degré 0.

Soient D et D' deux 0-cycles de degré d sur $\mathcal{C}$ à support dans la partie régulière de $\mathcal{C}$. On dit qu'ils sont *linéairement équivalents* si leur différence $D - D'$ est un 0-cycle principal (F) où F est une fonction rationnelle sur $\mathcal{C}$, régulière et inversible en les points singuliers de $\mathcal{C}$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'espace des diviseurs de degré d qu'on appelle l'*équivalence linéaire*. Si D est un 0-cycle, on note $|D|$ l'ensemble des 0-cycles effectifs linéairement équivalents à D.

Soit D un 0-cycle effectif tel que $\mathrm{supp}(D) \subset reg(\mathcal{C})$. On peut lui associer un fibré en droites sur $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{O}(D)$. Si σ en est une section globale, on vérifie que le diviseur (σ) qu'elle définit est linéairement équivalent à D. On a ainsi une bijection qui fait de $|D|$ un espace projectif :

$$\Gamma_D \ : \ \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0\big(\mathcal{C}, \mathcal{O}(D)\big) \xrightarrow{\sim} |D| \quad , \quad [\sigma] \longmapsto (\sigma)\ .$$

La notion de *famille méromorphe de* 0*-cycles (effectifs, de degré d) sur* $\mathcal{C}$ est rigoureusement définie dans la section 0. de [**Fa 03**]. On rappelle seulement qu'une telle famille peut être décrite à partir d'une application méromorphe[(4)] $\phi \ : \ T \to \mathcal{C}^{(d)}$, où T est un espace analytique réduit. On dit que ϕ est une paramétrisation de cette famille. Dans ce chapitre, on se restreindra en prenant toujours T une variété complexe connexe et en demandant que ϕ établisse un biméromorphisme de T sur son image.

Quand X est une variété algébrique (réduite), nous dirons qu'une famille méromorphe de 0-cycles donnée par une paramétrisation $X \to \mathcal{C}^{(d)}$ est une *famille algébrique de* 0*-cycles (effectifs, de degré d) sur* $\mathcal{C}$. Par le principe GAGA, on sait que le graphe de cette paramétrisation est un ensemble algébrique dans $\mathbb{CP}^n \times \mathcal{C}^{(d)}$, ce qui justifie la terminologie. Dans le cas où $X = \mathbb{CP}^n$, on parle de *famille rationnelle de 0-cycles*.

Remarque : ces notions de famille algébrique ou rationnelle de 0-cycles ne correspondent pas tout à fait aux notions classiques. Notons qu'on demande que ϕ soit birationnelle sur son image.

9.2.2. La notion de formes régulières sur une courbe. — On donne maintenant une définition analytique rigoureuse de ce qu'est une forme régulière sur une courbe algébrique. Si cette définition ne pose pas de difficulté quand la courbe considérée est lisse, puisque dans ce cas c'est une surface de Riemann, la définition est plus subtile dans le cas d'une courbe singulière.

Il y a différentes façons, plus ou moins algébriques et plus ou moins abstraites, de définir ce qu'est une forme régulière sur une courbe algébrique. Le point de vue analytique n'est peut-être pas le plus direct ni le mieux formalisé, mais c'est celui pour lequel notre intuition nous fait le moins défaut, de par notre formation d'analyste. C'est donc celui que l'on choisira.

On va définir localement ce qu'est une forme régulière au voisinage d'un point p de $\mathcal{C}$ (*i.e.* on va définir le faisceau des germes de formes régulières sur $\mathcal{C}$, noté $\omega^1_{\mathcal{C}}$). Les formes régulières sur $\mathcal{C}$ seront obtenues par recollement (*i.e.* seront les sections globales de ce faisceau).

(4) Une application $\phi \ : \ X \to Y$ entre deux espaces analytiques réduits est dite méromorphe si elle est holomorphe sur un ouvert de Zariski dense $U \subset X$ et si l'adhérence G du graphe $\mathrm{Gr}(\phi|_U) \subset U \times Y$ est un ensemble analytique de $X \times Y$ tel que la projection $G \to X$ soit propre.

Soient $p_1, \ldots, p_s$ les points singuliers de la courbe $\mathcal{C}$. On note S leur réunion qui forme donc la partie singulière de la courbe. Si p est un point régulier de $\mathcal{C}$, la définition de la fibre en p du faisceau que l'on cherche à définir ne pose pas de problème et est naturelle : on pose

$$\omega^1_{\mathcal{C},p} := \Omega^1_{\mathcal{C},p}\,.$$

La définition de la fibre $\omega^1_{\mathcal{C}}$ en un point singulier p_i est plus subtile. On va la donner dans le cadre analytique plus général : soit X un germe singulier en q de variété analytique (réduite) de dimension pure égale à un. Soit $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_s$ sa décomposition en composantes irréductibles.

Pour k compris entre 1 et s, on considère la normalisation :

$$\gamma_k : X'_k \longrightarrow X_k$$

où X'_k est lisse, et γ_k un homéomorphisme qui établit un biholomorphisme de $X'_k \setminus \{q_k\}$ sur $X_k \setminus \{q\}$ (avec $q_k := \gamma_k^{-1}(q)$). On va d'abord définir ce qu'est une forme méromorphe en p :

Définition 9.2.1. — Soit ω une forme méromorphe sur $X \setminus \{q\}$. Elle est dite *méromorphe en* q si, quel que soit k compris entre 1 et s, la forme $\gamma_k^*(\omega)$ se prolonge en une forme méromorphe sur X'_k.

Une forme w méromorphe en $(\mathbb{C}, 0)$ est holomorphe si elle n'a pas de pôle en l'origine, ou, de façon équivalente, si $\mathrm{Res}_0\left[fw\right] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}_1$. C'est cette dernière formulation qui se généralise :

Définition 9.2.2. — Soit ω une forme méromorphe sur X. Elle est dite *régulière* en q si, pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,q}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}_{q_k}\left[\,\gamma_k^*\big(f\omega\big)\,\right] = 0\,.$$

Les germes de 1-formes régulières en q sur X forment un $(\mathcal{O}_{X,q})$ -module qu'on note $\omega^1_{X,q}$.

Revenons à la courbe algébrique $\mathcal{C}$. En appliquant la Définition 9.2.2 quand p est un point singulier, on définit en chaque $p \in \mathcal{C}$ l'espace des germes de 1-formes régulières en ce point, noté $\omega^1_{\mathcal{C},p}$. Ces espaces de germes se recollent pour former un faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$-cohérent sur $\mathcal{C}$ que l'on note $\omega^1_{\mathcal{C}}$: c'est le *faisceau des germes de 1-formes régulières sur* $\mathcal{C}$. Si la courbe est lisse, il coïncide avec le faisceau $\Omega^1_{\mathcal{C}}$ des 1-formes holomorphes (au sens usuel) $\mathcal{C}$. On pose alors la

Définition 9.2.3. — Une forme *régulière* sur $\mathcal{C}$ est une section globale du faisceau $\omega^1_{\mathcal{C}}$.

Remarques : 1. cette appellation n'est pas la plus usitée, mais aucune n'est communément acceptée. On rencontre les terme de "forme abélienne", "forme holomorphe", "forme de Rosenlicht", et parfois le mot "forme" est remplacé par le terme de "différentielle"...

2. $\omega^1_{\mathcal{C}}$ est clairement un sous-faisceau du faisceau (noté $\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}$) des 1-formes méromorphes sur $\mathcal{C}$.

L'espace des 1-formes régulières sur $\mathcal{C}$ est l'espace $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_{\mathcal{C}})$ des sections globales de $\omega^1_{\mathcal{C}}$. D'après les théorèmes généraux sur les faisceaux analytiques cohérents sur les espaces analytiques compacts, celui-ci est de dimension finie. Pour les courbes algébriques, sa dimension est donnée par la

Proposition 9.2.4. — *La dimension de l'espace des 1-formes régulières sur* $\mathcal{C}$ *est égale au genre arithmétique de la courbe :*

$$(*) \qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_{\mathcal{C}}) = p_a(\mathcal{C})\,.$$

On rappelle que par définition, on a $p_a(\mathcal{C}) = 1 - \mathcal{X}(\mathcal{O}_\mathcal{C})$, où $\mathcal{X}(\mathcal{O}_\mathcal{C}) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}) - h^1(\mathcal{O}_\mathcal{C})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau $\mathcal{O}_\mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{C}$ est connexe, on a $\mathcal{X}(\mathcal{O}_\mathcal{C}) = 1 - h^1(\mathcal{O}_\mathcal{C})$, et la relation $(*)$ de la proposition ci-dessus s'écrit $\dim_\mathbb{C} \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_\mathcal{C}) = \dim_\mathbb{C} \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C})$. Cette égalité découle de l'isomorphisme $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_\mathcal{C}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C})^*$, qui est un cas très particulier d'un phénomène beaucoup plus général (la "dualité de Serre").

9.2.3. Le théorème d'Abel. — On rappelle ici la version moderne du théorème d'Abel.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique de genre arithmétique g supposé être strictement plus grand que 1. Alors la Proposition 9.2.4 implique que $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_\mathcal{C})$ est de dimension g.

Soit $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base (ordonnée) de $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \omega^1_\mathcal{C})$. Si γ est un lacet sur $\mathcal{C}$ qui évite ses singularités, alors pour $\kappa = 1, \ldots, g$ l'intégrale de ω_κ le long de γ est bien définie, et on peut poser

$$\int_\gamma \underline{\omega} := \big(\int_\gamma \omega_1 \,, \ldots, \int_\gamma \omega_g \big) \in \mathbb{C}^g \,.$$

On dira qu'un tel g-uplet est un *g-uplet de périodes de la courbe $\mathcal{C}$*. On montre que l'ensemble $\Lambda_\mathcal{C}$ de ces g-uplets de périodes forme un réseau discret dans $\mathbb{C}^g$. Le quotient $J(\mathcal{C}) := \mathbb{C}^g/\Lambda_\mathcal{C}$ est donc une variété complexe de dimension g, qu'on appelle la *jacobienne de $\mathcal{C}$*.

Soient p et q deux points quelconques de $reg(\mathcal{C})$. Alors si α désigne un chemin joignant p à q dans $reg(\mathcal{C})$, il est clair que la classe de $\int_\alpha \underline{\omega}$ dans $J(\mathcal{C})$ ne dépend que de p et q, mais pas de α. Supposons maintenant que q est fixé. On peut alors définir *l'application d'Abel-Jacobi* :

$$\begin{array}{rcl} AJ \ : \ reg(\mathcal{C}) & \longrightarrow & J(\mathcal{C}) \\ p & \longmapsto & \int_q^p \underline{\omega} \end{array}$$

en intégrant le long de n'importe quel chemin joignant q à p dans $reg(\mathcal{C})$. Cette application ne dépend pas de q, modulo l'addition d'un constante dans $J(\mathcal{C})$. On peut alors étendre l'application d'Abel-Jacobi sur $reg(\mathcal{C})^{(d)}$ en posant

$$\begin{array}{rcl} AJ \ : \ reg(\mathcal{C})^{(d)} & \longrightarrow & J(\mathcal{C}) \\ \sum_{\kappa=1}^d p_\kappa & \longmapsto & \int_{q_1}^{p_1} \underline{\omega} + \cdots + \int_{q_d}^{p_d} \underline{\omega} \,. \end{array}$$

Avec ce formalisme, on peut énoncer le résultat ci-dessous qui est communément appelé "Théorème d'Abel" dans les livres modernes de géométrie algébrique[(5)] :

***Théorème 9.2.5* (forme moderne du théorème d'Abel).** — *Soit P et P' deux 0-cycles effectifs de degré d sur $\mathcal{C}$ à support dans la partie régulière de $\mathcal{C}$. Ils sont linéairement équivalents si et seulement si $AJ(P) = AJ(P')$, ou de façon équivalente :*

$$AJ^{-1}\big(AJ(P)\big) = |P| \,.$$

9.3. Une généralisation de la notion de tissu algébrique

Dans cette section, on va définir trois notions distinctes de "tissus algébriques", chacune étant une généralisation de la suivante :

1. la notion de "tissu algébriquement défini" ;

(5) Sur ce qu'il conviendrait d'appeler "théorème d'Abel", voir l'article de S. Kleiman dans [**AB**].

2. la notion de “tissu algébrique généralisé” ;
3. la notion de “tissu algébrique au sens de Blaschke et Bol”.

La troisième de ces notions est la notion classique de tissu algébrique :

Définition 9.3.1. — Un tissu sur $\mathbb{CP}^2$ est dit algébrique au sens de Blaschke et Bol (ou est BB-algébrique) s'il est algébrique au sens de la Définition 4.2.4.

Introduisons maintenant la notion de “tissu algébriquement défini”. Comme on l'a dit dans l'introduction de ce chapitre, ces tissus algébriquement définis sont construits de façon naturelle et intrinsèque sur les espaces de 0-cycles effectifs. Signalons que cette notion apparaît déja dans une remarque de Beauville (cf. [**Be 80**] page 106).

Soit P un 0-cycle effectif de degré d sur $\mathcal{C}$, dont le support est formé de d points distincts de $reg(\mathcal{C})$:

$$P = p_1 + \cdots + p_d \qquad \big(p_i \in reg(\mathcal{C})\,, i = 1, \ldots, d\big)\,.$$

Numérotons (de façon arbitraire) les d points distincts du support de P. On se donne des petits disques U_i sur $reg(\mathcal{C})$ contenant p_i (respectivement) de telle sorte que $U_i \cap U_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Alors la projection $\pi^d_{\mathcal{C}}$ établit un biholomorphisme de $U = U_1 \times \ldots \times U_d$ sur son image

$$\begin{array}{rcccl} \pi^d_{\mathcal{C}} & : & U & \longrightarrow & \pi(U) \subset \mathcal{C}^{(d)} \\ & & \big(q_1, \ldots, q_d\big) & \longmapsto & q_1 + \cdots + q_d\,. \end{array}$$

Sur U, la restriction de la i-ième projection $\pi_i : U \to U_i$ est une submersion dont les ensembles de niveaux vont constituer un feuilletage de codimension 1, noté $\mathcal{F}_i$. Si l'image $\pi_*(\mathcal{F}_i)$ de ce feuilletage par π dépend de la numérotation des points du support de P qu'on s'est fixée, la collection $\{\, \pi_*(\mathcal{F}_\kappa) \,|\, \kappa = 1, \ldots, d \,\}$ est canoniquement attachée à $\mathcal{C}^{(d)}$ au voisinage de P. Il est clair que les feuilles des $\pi_*(\mathcal{F}_\kappa)$ sont en position générale en tout point de $\pi(U)$; par conséquent, ces feuilletages forment un d-tissu de codimension 1 sur $\pi(U)$.

Cette construction peut s'effectuer au voisinage de n'importe quel 0-cycle élément de $\widehat{\mathcal{C}}^{(d)}$. Les tissus ainsi obtenus se recollent pour former un tissu global qu'on note $\mathcal{W}^{(d)}_{\mathcal{C}}$. Il est canoniquement attaché à $\mathcal{C}$ et est défini sur $\widehat{\mathcal{C}}^{(d)}$(6). Remarquons que la structure locale de ce tissu est triviale. Ce qui fait son intérêt est qu'il est globalement défini.

On va maintenant expliquer comment construire des tissus plans à partir de $\mathcal{W}^{(d)}_{\mathcal{C}}$ puisque ce sont les tissus de ce type qui nous intéressent. Soit T une variété complexe connexe de dimension plus grande que 2 et soit $\Gamma : T \to \mathcal{C}^{(d)}$ une paramétrisation d'une famille méromorphe de 0-cycles de degré d telle que, pour $t \in T$ générique, $\Gamma(t)$ est formé de d points distincts de $reg(\mathcal{C})$. Alors il va exister un voisinage ouvert $U \subset T$ d'un tel t, ainsi que d applications holomorphes $P_\kappa : U \to reg(\mathcal{C})$ telles que, pour tout $\tau \in U$, on ait

$$\Gamma(\tau) = \sum_{\kappa=1}^{d} P_\kappa(\tau)\,.$$

Par définition, nous dirons que la paramétrisation Γ est $\mathcal{W}$-*admissible* si les P_κ introduits ci-dessus sont de rang 1 et si les d feuilletages $\{\, P_\kappa = \text{cte.} \,\}$ forment un d-tissu au voisinage de t générique (cette condition définit bien une propriété de Γ). En d'autres termes, Γ est $\mathcal{W}$-admissible si l'on peut tirer en arrière le tissu $\mathcal{W}^{(d)}_{\mathcal{C}}$ par Γ au voisinage d'un t générique. Quand cette condition est vérifiée,

(6) On rappelle que $\widehat{\mathcal{C}}^{(d)}$ est l'ensemble des 0-cycles formés de d points réguliers distincts de $reg(\mathcal{C})$.

les tissus obtenus localement au voisinage des points génériques de T se recollent pour former un d-tissu régulier de codimension 1 sur un ouvert de Zariski de T. Ce tissu sera noté $\Gamma^*\big(\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}\big)$.

L'idée, pour obtenir une notion de tissu algébriquement défini, est alors d'appliquer cette construction à des paramétrisations algébriques de 0-cycles. Puisqu'on ne s'intéresse qu'aux tissus plans, on ne considérera que des paramétrisations de dimension deux. Soit $\mathcal{S}$ une surface algébrique.

Définition 9.3.2. — Un tissu $\Gamma^*\big(\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}\big)$ sur $\mathcal{S}$, associé à une paramétrisation algébrique $\mathcal{W}$-admissible $\Gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{C}^{(d)}$, est un *tissu algébriquement défini* (ou encore, est un tissu *D-algébrique*).

Le D de "D-algébrique" réfère au terme "défini" dans l'expression "tissu algébriquement défini".

Cette notion de tissu algébrique défini est donnée par des constructions algébriques naturelles mais très générales. Bien sûr, elle généralise celle de tissu BB-algébrique, mais la D-algébricité est bien plus générale que cela. On montre facilement que tous les tissus exceptionnels dont il est question dans cette thèse sont des exemples de tissus D-algébriques. Plus généralement, un tissu $\mathcal{W}(U_1, \ldots, U_d)$ défini par des fractions rationnelles $U_i \in \mathbb{C}(x, y)$ est aussi de cette sorte.

Il faut bien comprendre qu'avec la Définition 9.3.2, on définit une classe très étendue de tissus, et pas forcément des tissus de rang maximal. Intuitivement (et de façon très vague), un tissu est D-algébrique s'il est susceptible d'être décrit à partir d'objets algébriques (tels que des fractions rationnelles, des fonctions algébriques, etc.).

Telle qu'elle est définie ci-dessus, la D-algébricité n'est pas une notion véritablement précise, dans le sens où il n'y a pas unicité de la courbe $\mathcal{C}$, de la surface $\mathcal{S}$ et de la paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible $\Gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{C}^{(d)}$ dans la description d'un tissu comme tissu D-algébrique.

Par contre, il en va différement pour les d-tissus exceptionnels (on ne discutera ici que le cas $d = 5$). En effet, on a vu au chapitre précédent que certains 5-tissus exceptionnels avaient la particularité d'avoir leur configuration de Poincaré-Blaschke formée de courbes algébriques. Soit $\mathcal{W}$ un tel tissu, et $\mathcal{C}$ sa configuration de Poincaré-Blaschke, qui est supposée être la réunion de cinq courbes algébriques $\mathcal{C}_\kappa$ (pour $\kappa = 1, \ldots, 5$). Alors la surface de Blaschke $\mathcal{S}$ de $\mathcal{W}$ est l'intersection des hypersurfaces duales des courbes $\mathcal{C}_\kappa$:

$$\mathcal{S} = \bigcap_{\kappa=1..5} {\mathcal{C}_\kappa}^* \, .$$

On décrit alors $\mathcal{W}$ comme tissu D-algébrique sur $\mathcal{S}$, au moyen de la paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible

$$\Gamma \, : \, \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}^{(5)} \, , \quad H \longmapsto \sum_{m_p(H.\mathcal{C}) \geq 2} p \, .$$

L'intérêt de cette description dans cette situation est qu'elle est canonique. Le fait qu'il existe plusieurs exemples de 5-tissus exceptionnels qui peuvent être décris ainsi justifie qu'on pose la

Définition 9.3.3. — Un 5-tissu exceptionnel est dit *canoniquement D-algébrique* si sa configuration de Poincaré-Blaschke est formée de courbes algébriques.

À l'heure actuelle, on connait seulement trois exemples de 5-tissus exceptionnels canoniquement D-algébriques : il s'agit de

$$\mathfrak{W}_1 \quad , \quad \mathcal{T}err(b) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{W}\big(\, x \, , \, y \, , \, x + y \, , \, x/y \, , \, x^2 + xy + y^2 \, \big) \, .$$

Nous ne savons pas s'il existe d'autres tissus de ce type, mais il serait surprenant que cela ne soit pas le cas. Ainsi, il nous semble qu'un problème intéressant est le

Problème de la détermination des 5-tissus exceptionnels à configuration de Poincaré-Blaschke algébrique (*i.e.* canoniquement D-algébriques).

Un tissu BB-algébrique $\mathcal{W}_C$ a la propriété d'être de rang maximal, ses relations abéliennes étant données par l'annulation des sommes abéliennes des formes régulières sur la courbe C. Puisqu'on cherche à généraliser la notion de tissu algébrique afin qu'elle englobe certains tissus qui sont exceptionnels au sens de la Définition 4.4.8, on va s'intéresser aux tissus D-algébriques qui possèdent la même propriété, c'est-à-dire dont les relations abéliennes sont données par l'annulation des sommes abéliennes de "1-formes algébriques" (*i.e.* rationnelles) sur la courbe associée.

Soient $\Gamma : T \to \mathcal{C}^{(d)}$ une paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible et ω une 1-forme rationelle sur $\mathcal{C}$. On peut définir la trace $\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega)$ de ω relativement à Γ en posant au voisinage d'un point t générique :

$$\bigstar \qquad \mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) := \sum_{\kappa=1}^{d} P_\kappa^*(\omega)$$

(avec les notations utilisées dans la définition de la notion de "paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible").

On définit ainsi une 1-forme méromorphe sur un ouvert de Zariski de T. On remarquera que, vu $\bigstar$, la relation $\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) \equiv 0$ peut s'interpréter comme une relation abélienne pour $\Gamma^*\big(\mathcal{W}_\mathcal{C}^{(d)}\big)$. Toutes les relations abéliennes des tissus BB-algébriques s'obtiennent ainsi à partir des formes régulières de la courbe associée. On définira une classe plus générale de tissus portant des relations abéliennes d'origine algébrique avec la construction suivante :

Définition 9.3.4. — Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0\big(\mathcal{C}, \mathcal{M}_\mathcal{C}^1\big)$, de dimension finie non nulle. Un tissu D-algébrique $\Gamma^*\big[\mathcal{W}_\mathcal{C}^{(d)}\big]$ est un *tissu algébrique généralisé* (ou encore *est G-algébrique*) relativement à H si :

1. pour toute 1-forme $\omega \in H$, on a $\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) \equiv 0$;
2. toutes les relations abéliennes de W sont de ce type.

En d'autres termes, $\Gamma^*\big[\mathcal{W}_\mathcal{C}^{(d)}\big]$ est G-algébrique (relativement à H) si on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{A}\left[\Gamma^*\big(\mathcal{W}_\mathcal{C}^{(d)}\big)\right] \\ \omega &\longmapsto \mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Un tissu BB-algébrique associé à une courbe plane $\mathcal{C}$ de degré $d > 2$ est G-algébrique relativement à $\mathrm{H}^0\big(\mathcal{C}, \omega_\mathcal{C}^1\big)$. Dans la section qui suit, on montrera que la notion de tissu G-algébrique est strictement plus générale que celle de tissu BB-algébrique.

Dans un premier temps, discutons cette nouvelle notion dans le cas d'un tissu D-algébrique de rang maximal $\Gamma^*\big[\mathcal{W}_\mathcal{C}^{(d)}\big]$ relativement à $H = \mathrm{H}^0\big(\mathcal{C}, \omega_\mathcal{C}^1\big)$. L'hypothèse faite sur le rang implique que le genre arithmétique de $\mathcal{C}$ vaut $(d-1)(d-2)/2$. D'autre part, du fait que $\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) \equiv 0$ pour tout $\omega \in \mathrm{H}^0\big(\mathcal{C}, \omega_\mathcal{C}^1\big)$, il découle que l'image de Γ dans $reg(\mathcal{C})^{(d)}$ est dans une fibre de l'application d'Abel-Jacobi $AJ : reg(\mathcal{C})^{(d)} \to J(\mathcal{C})$. D'après le théorème d'Abel 9.2.5, cela implique que cette image est incluse dans une série linéaire complète $|P|$ de dimension $N \geq 2$ $\big($où P est un 0-cycle élément de

$reg(\mathcal{C})^{(d)}\big)$. Notons L le fibré $\mathcal{O}(P)$. L'application Γ_P nous donne une paramétrisation rationnelle

$$\begin{aligned} \Gamma_P \ : \ \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, L) &\xrightarrow{\sim} |P| \subset \mathcal{C}^{(d)} \\ [\sigma] \quad &\longmapsto (\sigma)\ . \end{aligned}$$

Il existe une application $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, L)$ birationnelle sur son image telle que $\Gamma = \Gamma_P \circ \mu$.

Le fait que Γ soit $\mathcal{W}$-admissible implique qu'elle est sans point base. On en déduit que Γ_P aussi. Si p est un point de $reg(\mathcal{C})$, alors l'ensemble des sections de L qui s'annulent en p forment un hyperplan de $\mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, L)$ que l'on note $H(p)$. On a donc une application

$$\begin{aligned} \phi_{|P|} \ : \ \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, L)^* \\ p &\longmapsto H(p) \end{aligned}$$

dont l'image, notée C, est une courbe algébrique non-dégénérée dans l'espace projectif dual $\mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, L)^*$. Parce que Γ a été suposée $\mathcal{W}$-admissible, on peut montrer que $\phi_{|P|}$ est birationnelle, d'où on déduit que la paramétrisation Γ_P est elle aussi $\mathcal{W}$-admissible. Il en découle que $\mu_* \Gamma^*[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}] = \Gamma_P^*[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}]$ est le tissu algébrique (dans le sens classique) associé à la courbe C, noté $\mathcal{W}_C$. Puisque cela implique que le rang de $\mathcal{W}_C$ est $(d-1)(d-2)/2$, la courbe C est forcément plane : on a $N = 2$. On conclut finalement que $\Gamma^*[\mathcal{W}_{\mathcal{C}}^{(d)}]$ est équivalent au tissu BB-algébrique $\mathcal{W}_C$.

On a donc montré que *"un tissu de rang maximal, G-algébrique relativement aux formes régulières d'une courbe algébrique est BB-algébrique "*. Pour obtenir des tissus algébriques plus généraux que les tissus BB-algébriques avec la notion de la Définition 9.3.4, il faut donc chercher à obtenir des relations abéliennes à partir de forme rationnelles pas forcéments régulières.

On a vu que la notion de tissu D-algébrique à un sens particulièrement intéressant quand elle s'applique aux 5-tissus exceptionnels. Il en va de même pour la notion de G-algébricité. On pose la

Définition 9.3.5. — Soit W un 5-tissu exceptionnel canoniquement D-algébrique, de courbe de Poincaré-Blaschke notée $\mathcal{C}$. Nous dirons qu'il est *canoniquement G-agébrique* si le tissu défini par la paramétrisation $\mathcal{S}[W] \to \mathcal{C}^{(5)}$ est G-algébrique $\big($relativement à un sous-espace $H \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^1)\big)$.

En d'autres termes, un tissu exceptionnel est canoniquement G-algébrique, non seulement si sa configuration de Poincaré-Blaschke est formées de courbes algébriques, mais si en plus ses relations abéliennes proviennent de 1-formes rationnelles sur celle-ci.

On vérifie sans difficulté que les trois exemples de 5-tissus exceptionnels canoniquement D-algébriques connus sont également canoniquement G-algébriques. On peut se poser le problème de savoir si cela est vérifié pour tout les tissus exceptionnels canoniquement D-algébriques :

> **Question : si un 5-tissu exceptionnel est à configuration de Poincaré-Blaschke $\mathcal{C}$ formée de courbes algébriques, ses relations abéliennes sont-elles données par l'annulation de la trace de certaines 1-formes rationnelles sur $\mathcal{C}$?**

Plus généralement, on peut poser la question suivante, en relation avec le théorème d'Abel-inverse :

> **Soit $\Gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{C}^{(d)}$ une paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible et s_0 un point lisse de $\mathcal{S}$ tel que $\Gamma(s_0) = P_1(s_0) + \cdots + P_d(s_0)$, où les $P_i(s_0)$ sont d points distincts de $reg(\mathcal{C})$. Supposons qu'on ait d germes de 1-formes holomorphes ω_i en $P_i(s_0)$ tels que**
>
> $$P_1^*(\omega_1) + \cdots + P_d^*(\omega_d) = 0$$

dans un voisinage de s_0. Alors existe-t-il une 1-forme rationnelle ω sur $\mathcal{C}$ telle que ω_i soit la restriction de ω au voisinage de $P_i(s_0)$, pour tout $i = 1, \ldots, d$?

9.4. Exemples de tissus exceptionnels G-algébriques

Dans cette section on va détailler l'étude du tissu $\mathfrak{W}_1$. On montre que c'est un exemple de tissu G-algébrique. Le fait qu'il ne soit pas linéarisable[7] implique qu'il n'est pas BB-algébrique, ce qui montre que la notion de G-algébricité est strictement plus générale que la notion classique.

9.4.1. Interprétation de $\mathfrak{W}_1$ comme tissu G-algébrique. — Posons :

$$U_1 = x \qquad U_2 = y \qquad U_3 = x + y \qquad U_4 = x - y \qquad \text{et} \qquad U_5 = x^2 + y^2 \,.$$

Alors, avec ces notations, on a :

$$\mathfrak{W}_1 = \mathcal{W}\big(U_1, \ldots, U_5\big) \,.$$

On va commencer par expliciter la configuration de Poincaré-Blaschke de $\mathfrak{W}_1$.

Dans tout ce qui va suivre, on désignera par κ un élément quelconque de l'ensemble d'indices $\mathcal{K} := \{1, \ldots, 5\}$. On considère cinq copies de $\mathbb{CP}^1$, une pour chaque κ, que l'on note C_κ.

La liste ci-dessous est une liste de six relations abéliennes pour $\mathfrak{W}_1$, sous forme différentielle et qui sont linéairement indépendantes :

$$(\spadesuit) \qquad \begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 : & d\,U_1 + d\,U_2 - d\,U_3 = 0\,, \\
\mathcal{R}_2 : & d\,U_1 - d\,U_2 - d\,U_4 = 0\,, \\
\mathcal{R}_3 : & 2\,U_1\,dU_1 + 2\,U_2\,dU_2 - dU_5 = 0\,, \\
\mathcal{R}_4 : & U_3\,d\,U_3 + U_4\,d\,U_4 - d\,U_5 = 0\,, \\
\mathcal{R}_5 : & 4\,U_1^3\,d\,U_1 + 4\,U_2^3\,d\,U_2 + U_3^3\,d\,U_3 + U_4^3\,d\,U_4 - 3\,U_5\,d\,U_5 = 0\,, \\
\mathcal{R}_6 : & 8\,U_1^5\,d\,U_1 + 8\,U_2^5\,d\,U_2 + U_3^5\,d\,U_3 + U_4^5\,d\,U_4 - 5\,U_5^2\,d\,U_5 = 0\,.
\end{array}$$

Considérons les cinq applications rationnelles $Z_\kappa : C_\kappa \to \mathbb{CP}^5$ définies par :

$$Z_1 \,:\, z \longmapsto \big[\,1 : 1 : 2\,z : 0 : 4\,z^3 : 8\,z^5\,\big] \qquad Z_2 \,:\, z \longmapsto \big[\,1 : -1 : 2\,z : 0 : 4\,z^3 : 8\,z^5\,\big]$$
$$Z_3 \,:\, z \longmapsto \big[\,-1 : 0 : 0 : z : z^3 : z^5\,\big] \qquad Z_4 \,:\, z \longmapsto \big[\,0 : -1 : 0 : z : z^3 : z^5\,\big]$$
$$\text{et} \qquad Z_5 \,:\, z \longmapsto \big[\,0 : 0 : -1 : -1 : -3\,z : -5\,z^2\,\big]\,.$$

Pour $\kappa \in \mathcal{K}$, l'image de Z_κ dans $\mathbb{CP}^5$ est une courbe algébrique rationnelle qu'on note $\mathcal{C}_\kappa$. La courbe $\mathcal{C}_5$ est une conique plane incluse dans le 2-plan projectif $\big\{\, x_0 = x_1 = x_4 = 0 \,\big\} \subset \mathbb{CP}^5$. Quant aux courbes $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ (resp. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$), elles sont projectivement équivalentes, chacune incluse dans un $\mathbb{CP}^3$.

Vu ($\spadesuit$), il est clair que la configuration de Poincaré-Blaschke de $\mathfrak{W}_1$ (relativement à la base de $\mathcal{A}\big[\mathfrak{W}_1\big]$ donnée ci-dessus) est la courbe algébrique $\mathcal{C}$ réunion des $\mathcal{C}_\kappa$:

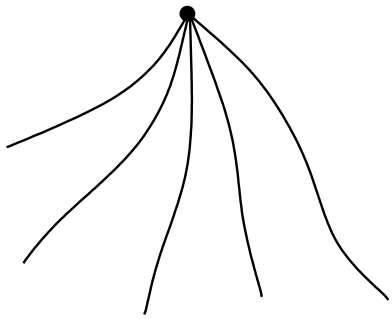
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_5 \,.$$

[7] Cela découle du fait que sa surface de Blaschke n'est pas une surface de Véronèse (voir *8.5.4.1*).

Ces cinq courbes forment une configuration bien particulière dans $\mathbb{CP}^5$ que l'on va décrire. On pose

$$\alpha := \big[\, 0 \,:\, 0 \,:\, 0 \,:\, 0 \,:\, 0 \,:\, 1 \,\big] \in \mathbb{CP}^5 \,.$$

Pour tout κ, on a $Z_\kappa(\infty) = \alpha$ et ce point est l'unique point singulier de $\mathcal{C}_\kappa$. Les courbes $\mathcal{C}_\kappa$ sont cinq courbes rationnelles de $\mathbb{CP}^5$ qui ont toutes leur unique point singulier en commun. On représente cela par le schéma suivant :



On va maintenant donner explicitement la paramétrisation $\mathcal{W}$-admissible $\Gamma : \mathcal{S}\big[\mathfrak{W}_1\big] \to \mathcal{C}^{(5)}$ qui, à $H \in \mathcal{S}\big[\mathfrak{W}_1\big]$, associe les cinq points de tangence de H avec $\mathcal{C}$.

La surface de Blaschke de $\mathfrak{W}_1$ est une surface rationnelle. Il existe donc une application birationnelle (explicite, cf. *8.5.4.1*) $\mu : \mathbb{CP}^2 \to \mathcal{S}\big[\mathfrak{W}_1\big]$. Considérons les application de $\mathbb{CP}^2$ dans $\mathbb{CP}^1$ définies par :

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 \,:\, [\,x : y : z\,] \longmapsto [\,x \,:\, z\,]\,, && \Gamma_2 \,:\, [\,x : y : z\,] \longmapsto [\,y \,:\, z\,]\,, \\ &\Gamma_3 \,:\, [\,x : y : z\,] \longmapsto [\,x + y \,:\, z\,]\,, && \Gamma_4 \,:\, [\,x : y : z\,] \longmapsto [\,x - y \,:\, z\,]\,, \\ &\qquad \text{et} \qquad \Gamma_5 \,:\, [\,x : y : z\,] \longmapsto [\,x^2 + y^2 \,:\, z\,]\,. \end{aligned}$$

Posons :

$$\Gamma' := Z_1 \circ \Gamma_1 + Z_2 \circ \Gamma_2 + Z_3 \circ \Gamma_3 + Z_4 \circ \Gamma_4 + Z_5 \circ \Gamma_5 \;:\; \mathbb{CP}^2 \to \mathcal{C}^{(5)}\,.$$

On vérifie alors qu'on a bien $\Gamma \circ \mu = \Gamma'$. La paramétrisation Γ' est la version "en coordonnées" de la paramétrisation "canonique" $\Gamma : \mathcal{S}\big[\mathfrak{W}_1\big] \to \mathcal{C}^{(5)}$. On va voir maintenant que $\mathfrak{W}_1$ est G-algébrique.

Pour $\kappa \in \mathcal{K}$, soit ω_κ une forme rationnelle sur $C_\kappa \simeq \mathbb{CP}^1$. Alors

$$\omega := (Z_1)_*(\omega_1) + (Z_2)_*(\omega_2) + (Z_3)_*(\omega_3) + (Z_4)_*(\omega_4) + (Z_5)_*(\omega_5)$$

est une forme rationnelle sur $\mathcal{C}$. En fait, toutes les formes rationnelles sur $\mathcal{C}$ s'écrivent ainsi (de façon unique). On prend la convention d'écrire une telle forme comme une somme

$$\omega_1(z_1) + \omega_2(z_2) + \omega_3(z_3) + \omega_4(z_4) + \omega_5(z_5)\,,$$

chacune des formes $\omega_\kappa(z)$ étant une forme rationnelle sur $\mathbb{CP}^1$, z_κ désignant la variable Z_κ^{-1}.

D'autre part, on vérifie sans difficulté que si $\omega = \omega_1(z_1) + \cdots + \omega_5(z_5)$ est rationnelle sur $\mathcal{C}$, alors

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) = \big(Z_1 \circ \Gamma_1\big)^*(\omega) + \big(Z_2 \circ \Gamma_2\big)^*(\omega) + \big(Z_3 \circ \Gamma_3\big)^*(\omega) + \big(Z_4 \circ \Gamma_4\big)^*(\omega) + \big(Z_5 \circ \Gamma_5\big)^*(\omega)\,,$$

ce qui s'écrit, en coordonnées :

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(\omega) = U_1^*\big(\omega_1(z)\big) + U_2^*\big(\omega_2(z)\big) + U_3^*\big(\omega_3(z)\big) + U_4^*\big(\omega_4(z)\big) + U_5^*\big(\omega_5(z)\big)\,.$$

Avec ce formalisme, il est clair que chacune des relations abéliennes $\mathcal{R}_\kappa$ de $\mathfrak{W}_1$ s'écrit

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(\eta_\kappa) = 0$$

où η_κ est une forme rationnelle sur $\mathcal{C}$. Ces formes sont données explicitement par :

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 2\,dz_1 + dz_2 - dz_3\,,\\
\eta_2 &= 4\,dz_1 - dz_2 - dz_4\,,\\
\eta_3 &= 2\,z_1\,dz_1 + 2\,z_2\,dz_2 - dz_5\,,\\
\eta_4 &= z_3\,d\,z_3 + z_4\,d\,z_4 - d\,z_5\,,\\
\eta_5 &= z_1^3\,d\,z_1 + 4\,z_2^3\,d\,z_2 + z_3^3\,d\,z_3 + z_4^3\,d\,z_4 - 3\,z_5\,d\,z_5\,,\\
\eta_6 &= 8\,z_1^5\,d\,z_1 + 8\,z_2^5\,d\,z_2 + z_3^5\,d\,z_3 + z_4^5\,d\,z_4 - 5\,z_5^2\,d\,z_5\,.
\end{aligned}$$

On remarquera que ces formes sont holomorphes sur la partie régulière de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{H}$ l'espace engendré par les η_κ : $\mathcal{H} = \langle\, \eta_\kappa \,|\, \kappa = 1\ldots,6\,\rangle \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}})$. On peut énoncer la

Proposition 9.4.1. — *Le tissu $\mathfrak{W}_1$ est G-algébrique (relativement à $\mathcal{H}$).*

Ces notions de tissus canoniquement D- et G-algébriques sont intéressantes car elle permettent d'étudier qualitativement les tissus exceptionnels. Nous voulons maintenant montrer rapidement qu'elles ne sont pas spécifiques aux 5-tissus exceptionnels.

Soit $\mathcal{E}(d) = \mathcal{W}(U_1, \ldots, U_d)$ un d-tissu exceptionnel en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Étant donné $n_d = (d-1)(d-2)/2$ relations abéliennes linéairement indépendantes (avec $\lambda = 1, \ldots, n_d$) :

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{d} F_i^\lambda(U_i)\,d\,U_i = 0\,,$$

on peut considérer les d applications holomorphes ($i = 1, \ldots, d$) :

$$Z_i = \big[F_i^1(U_i) : \ldots : F_i^{n(d)}(U_i)\big] \;:\; (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}\,,$$

dont les images sont des germes de courbes dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}$, notés $\mathcal{C}_i$. On définit la *configuration de Poincaré-Blaschke de* $\mathcal{E}(d)$ comme étant la famille $\mathcal{C}\big[\mathcal{E}(d)\big] = \{\,\mathcal{C}_\kappa \,\big|\, \kappa = 1, \ldots, d\,\}$. On vérifie que sa classe d'équivalence projective est canoniquement associée à la classe d'équivalence analytique $\underline{\mathcal{E}}(d)$ de $\mathcal{E}(d)$. De plus, on peut retrouver $\underline{\mathcal{E}}(d)$ à partir de $\mathcal{C}\big[\mathcal{E}(d)\big]$, comme on va l'expliquer.

Si C est une courbe de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}$, on note $C^{*,\sigma}$ la réunion des hyperplans $H \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}$ qui contiennent un σ-plan osculateur de C :

$$C^{*,\sigma} = \bigcup_{p \in C} \big(O(C)_p^\sigma\big)^* \subset \Big(\mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}\Big)^*\,.$$

Pour une courbe C générique, $C^{*,\sigma}$ est de dimension $n_d - \sigma - 1$ (pour σ "suffisamment petit").

Posons $\sigma_d = d - 4 > 0$. On montre que les relations ($\star$), jointes au fait que les U_i définissent un tissu en $(\mathbb{C}^2, 0)$, impliquent que l'intersection des $\mathcal{C}_i^{*,\sigma_d}$ est de dimension 2 dans $\big(\mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}\big)^*$. Par définition, c'est la *surface de Blaschke* de $\mathcal{E}(d)$. Celle-ci est notée :

$$\mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big] := \bigcap_{1 \le i \le d} \mathcal{C}_i^{*,\sigma_d} \subset \Big(\mathbb{C}\mathbb{P}^{(n_d-1)}\Big)^*\,.$$

Soit H_0 un élément de $\mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big]$. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, il existe un point $p_i \in \mathcal{C}_i$ tel que H_0 contient le σ_d-plan osculateur $O(\mathcal{C}_i)_{p_i}^{\sigma_d}$. Alors $\mathcal{F}_i(H_0) = \big\{\, \mathcal{H} \in \mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big] \;\big|\; p_i \in \mathcal{H} \,\big\}$ est un germe de courbe sur $\mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big]$, au voisinage de H_0. L'ensemble des courbes $\mathcal{F}_i(H)$ pour H voisin de H_0 est un feuilletage en courbe sur $\mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big]$, que l'on note $\mathcal{F}_i$. On vérifie alors que la collection des $\mathcal{F}_i$ forme un tissu sur la surface de Blaschke $\mathcal{S}\big[\mathcal{E}(d)\big]$, et que celui-ci est équivalent au tissu exceptionnel initial $\mathcal{E}(d)$.

On a donc montré comment on peut obtenir géométriquement un d-tissu exceptionnel à partir de sa configuration de Poincaré-Blaschke (qui, rappellons-le, lui est canoniquement attachée).

Remarque : cette construction généralise aux d-tissus exceptionnels la construction explicitée au chapitre précédent (et qui ne concernait que le cas $d = 5$). Il faut signaler que, puisque l'on ne dispose pas pour le moment d'une généralisation de la notion de direction principale pour les surfaces d'un espace projectif de dimension $n_d - 1$, on ne sait pas, a priori, s'il est possible de déterminer la classe d'équivalence analytique d'un d-tissu exceptionnel à partir de sa surface de Blaschke.[8]

On peut donc définir les notions de *d-tissus exceptionnels canoniquement D-algébriques* (resp. *canoniquement G-algébriques*) pour tout $d \geq 5$, en adaptant de façon naturelle la Définition 9.3.3 (resp. la Définition 9.3.5).

Ces généralisations sont justifiées puisqu'on peut donner des exemples de d-tissus exceptionnels (pour $d = 6, 7$) qui sont canoniquement G- (et donc D-) algébriques.

Par exemple, les tissus suivants sont exceptionnels (voir la fin de la section A.2.2 de l'Appendice) :

$$\mathbf{W}_\gamma(6) = \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x^2+y^2\,\big)\,;$$
$$\mathbf{W}_\gamma(7) = \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x^2+y^2\,,\, x^2-y^2\,\big)\,.$$

Qu'ils sont canoniquement G-algébriques se déduit facilement du fait que leurs relations abéliennes sont toutes de la forme suivante (on pose $U_1 = x$, $U_2 = y$, $\ldots$, $U_7 = x^2 - y^2$ et $d = 6, 7$) :

$$\sum_{i=1}^{d} c_i \left(U_i\right)^{n_i} d\,U_i = 0\,,$$

avec $c_i \in \mathbb{C}$ et $n_i \in \mathbb{Z}$.

9.5. En guise de conclusion...

Les notions de D- et G-algébricité sont les premières qui permettent de parler qualitativement du caractère exceptionnel d'un tissu. Elles sont définies à partir de l'objet fondamental qu'est la configuration de Poincaré-Blaschke d'un tissu (exceptionnel) et sont susceptibles d'être affinées, dans le sens suivant : certains tissus (comme le tissu de Bol) ont la propriété que leur configuration de Poincaré-Blaschke est formée de cinq courbes transcendantes. Ils apparaissent comme étant "plus exceptionnels" (car "moins algébriques") que les tissus canoniquement G-algébriques. Entre ces deux extrêmes, on peut trouver des tissus dont la configuration de Poincaré-Blasche est constituée de κ courbes algébriques et de $5 - \kappa$ courbes transcendantes (avec $0 < \kappa < 5$).

Plus généralement, soit $\mathcal{E}(d)$ un d-tissu exceptionnel. Le nombre $\kappa\left[\mathcal{E}(d)\right]$ de courbes algébriques qui apparaissent dans sa configuration de Poincaré-Blaschke ne dépend que de la classe d'équivalence de $\mathcal{E}(d)$. C'est donc un invariant. En quelque sorte, il mesure l'existence de dépendances algébriques entre les composantes des relations abéliennes portées par les différents feuilletages du tissu et nous renseigne sur son "caractère exceptionnel".

Il nous semble qu'on peut voir se dessiner la possibilité de l'étude du caractère exceptionnel des tissus via l'étude qualitative de leur configuration de Poincaré-Blaschke.

[8] Ce problème pose tout d'abord la question intéressante de généraliser aux surfaces projectives de $\mathbb{CP}^{(n_d-1)}$ les notions de directions et d'hyperplans principaux.

Les tissus exceptionnels $\mathcal{E}(d)$ tels que $\kappa\big[\mathcal{E}(d)\big] = 0$ nous apparaissent comme étant les plus mystérieux.

Ceux tels que $0 < \kappa\big[\mathcal{E}(d)\big] < d$ excitent particulièrement la curiosité puiqu'ils rendent compte de l'existence d'objets formés à la fois de courbes algébriques et de courbes transcendantes, et qui sont intéressants d'un point de vue géométrique.

Enfin, les tissus $\mathcal{E}(d)$ tels que $\kappa\big[\mathcal{E}(d)\big] = d$ (*i.e.* les tissus canoniquement D-algébriques) montrent l'existence d'un lien entre l'étude des tissus exceptionnels et celle des variétés intégrales des systèmes différentiels engendrés par les traces de formes rationnelles sur les produits symétriques de courbes algébriques. L'intérêt de ce lien avait déja été souligné par Beauville dans [**Be 80**], où il écrit :

> *C'est ainsi que l'étude des diviseurs et de l'équivalence linéaire sur (une courbe algébrique) C apparaît étroitement liée à la géométrie différentielle de la variété $C^{(d)}$, en particulier aux systèmes différentiels et aux tissus définis sur cette variété.*
>
> *La même construction s'applique à une variété V de dimension $k > 1$; elle fournit une relation non-triviale entre les 0-cycles sur V d'une part, les tissus et les systèmes différentiels sur $V^{(d)}$ d'autre part. Cette méthode d'attaque des 0-cycles semble très prometteuse et donne une motivation puissante pour l'étude des tissus.*

Les exemples de tissus exceptionnels G-algébriques présentés dans ce chapitre nous font penser qu'à l'inverse, l'étude des variétés intégrales des systèmes différentiels sur les produits symétriques de variétés algébriques pourrait être fructueuse pour celle des tissus exceptionnels.

APPENDICE A

ALGORITHMES POUR L'ÉTUDE EFFECTIVE DU RANG ET DES RELATIONS ABÉLIENNES

Dans cet appendice, on présente différents algorithmes de calcul formel qui permettent d'étudier le rang et les relations abéliennes des tissus plans, d'un point de vue effectif.

Nous avons implémenté ces algorithmes sur le système de calcul formel maple, et c'est selon la syntaxe de ce logiciel que nous les présenterons. Les procédures qui suivent requièrent l'utilisation de certains packages maple. On commencera donc toujours une session avec les lignes suivantes :

```
> restart:
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
```

On introduit une procédure maple générale qu'on utilisera dans les deux sections ci-dessous :

la procédure `oper` définie par

```
oper:=proc(f,g):
diff(f,y)*diff(g,x)-diff(f,x)*diff(g,y):
end proc:
```

calcule l'expression $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}$ quand f et g sont deux fonctions.

A.1. La méthode d'Abel

On utilise la terminologie de la section 2.1.

On va donner le code maple de la procédure `ABELmethod` qui prend comme argument un n-uplet $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ ainsi qu'un point base (x_0, y_0) et qui renvoie les coefficients de l'équation différentielle linéaire associée à $\mathcal{U}$ donnée par la Proposition 2.1.3. Les arguments seront rentrés sous la forme suivante en langage maple : $\mathcal{U}$ sera écrit $[\mathtt{U}_1, \mathtt{U}_2, \ldots, \mathtt{U}_n]$ et `Pb` sera le tableau `[x0,y0]` des coordonnées du point base (x_0, y_0) choisi. Notons que pour que la procédure `ABELmethod` telle qu'elle est donnée ci-dessous marche, il doit exister une unique solution à l'équation $U_1(x_0, y_0) = u$ que maple doit pouvoir déterminer de façon explicite. La sortie de `ABELmethod` est l'équation différentielle linéaire donnée par la Proposition 2.1.3 et sera sous la forme

$$\mathtt{a}_1(\mathtt{u})\left(\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{du}}\,\mathtt{Y}(\mathtt{u})\right) + \cdots + \mathtt{a}_\mathtt{k}(\mathtt{u})\left(\frac{\mathtt{d}^\mathtt{k}}{\mathtt{du}^\mathtt{k}}\,\mathtt{Y}(\mathtt{u})\right) + \left(\frac{\mathtt{d}^{\mathtt{k}+1}}{\mathtt{du}^{\mathtt{k}+1}}\,\mathtt{Y}(\mathtt{u})\right) = \mathtt{0}\,.$$

Le corps de `ABELmethod` fera appel à plusieurs procédures que l'on va commencer par donner. Le coeur de l'algorithme est en fait la procédure `ABELimination` qui effectue ce que nous avons appelé "le procédé d'élimination d'Abel" en 2.1.

Les procédures suivantes manipulent de façon formelle des edfa. L'efda associée à $\underline{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_i^j)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m-i} \mathcal{A}_i^j \, F_i^{(j)}(U_i) = 0$$

sera codée sous la forme d'un tableau à une ligne de tableaux à une ligne :

$$\texttt{AA} := \Big[\big[\texttt{A}[1,1], \texttt{A}[1,2], \ldots, \texttt{A}[1,\texttt{m}[1]]\big], \big[\texttt{A}[2,1], \ldots, \texttt{A}[2,\texttt{m}[2]]\big], \ldots, \big[\texttt{A}[\texttt{n},1], \ldots, \texttt{A}[\texttt{n},\texttt{m}[\texttt{n}]]\big] \Big],$$

où `A[i,j]` est l'expression correspondant à $\mathcal{A}_i^j$.

La procédure `Domin` ci-dessous renvoie le coefficient `A[n,m[n]]` quand on lui donne `AA` :

```
Domin:=proc(AA);
p:=nops(AA): k:=nops(AA[p]):d:=MM[p][k];
end proc:
```

On peut alors construire la procédure suivante, qui renvoie une "version propre" de l'argument `AA` :

```
Normalize:=proc(AA);
p:=nops(AA);c:=AA;
if p>1 then while Domin(c)=0 do
s:=nops(c[p]);
if c[p]=[0] then p:=p-1; c:=[seq(c[i],i=1..p)];
else q :=s-1; c[p]:=[seq( c[p,i],i=1..q)]; c:=[seq(c[j],j=1..p)]:
end if;
end do;
end if;
c;
end proc:
```

On introduit deux procédures intermédiaires (de différentiation) :

```
opp:=proc(i,j,f,U);
F:=oper(U[j],f)/oper(U[j],U[i]):
end proc:
```

```
oppe:=proc(p,i,U);
F:=opp(p-1,p,U[i],U);
end proc:
```

On construit alors deux procédures `NOL` et `NEW` qui calculent les coefficients de l'efda obtenue par une application du procédé d'élimination d'Abel, à partir de ceux de l'efda de départ :

```
NOL:=proc(U,A,i,j);
p:=nops(A);
kk:=[seq(nops(A[s]),s=1..p)];
if i<p then
if (1<j and j<kk[i]+1) then
N[i,j]:=opp(p-1,p,A[i,j]/A[p,kk[p]],U)+A[i,j-1]*oppe(p,i,U)/A[p,kk[p]];
else
N[i,1]:=opp(p-1,p, A[i,1]/A[p,kk[p]],U);
N[i,kk[i]+1]:=A[i,kk[i]]*oppe(p,i,U)/A[p,kk[p]];
```

```
end if ;
else N[i,j]:=opp(p-1,p,AA[p,j]/AA[p,kk[p]],U) ;
end if ;
N[i,j] ;
end proc:
```

```
NEW:=proc(U,A,i,j) ;
p:=nops(A):
for l from 1 to p do
k[l]:=nops(MM[l]) ;
end do ;
if j=1 then
M[i,1]:=opp(p-1,p,A[i,1]/A[p,k[p]],U) ;
else
if j=k[i]+1 then
M[i,j]:=A[i,k[i]]*oppe(p,i,U)/A[p,k[p]] ;
else M[i,j]:=opp(p-1,p,A[i,j]/A[p,k[p]],U )+A[i,j-1]*oppe(p,i,U)/A[p,k[p]] ;
end if ;
end if ;
M[i,j] ;
end proc:
```

On donne alors la procédure `ABELimination` qui effectue le procédé d'élimination d'Abel lorsque l'efda est à plus de deux inconnues :

```
ABELimination:=proc(U,A):
MM:=Normalize(A) ;p:=nops(MM) ;kp:=nops(MM[p]) ;
if p>1 then
if kp=1 then
p:=p-1 ;
for i from 1 to p do
kk[i]:=nops(MM[i])+1 ;
for j from 1 to kk[i] do
M[i,j]:=NEW(U,MM,i,j) ;
end do ;
end do ;
else for s from 1 to p-1 do
kk[s]:=nops(MM[s])+1:
end do ;
kk[p]:=nops(MM[p])-1 ;
for i from 1 to p do
for j from 1 to kk[i] do
M[i,j]:=NOL(U,MM,i,j) ;
end do ;
end do ;
end if ;
for i from 1 to p do
e[i]:=[seq(M[i,j],j=1..kk[i])]:
```

```
end do ;
t:=[seq(e[i],i=1..p)]:
else t:=A ;
end if ;
t ;
end proc:
```

La procédure ci-dessous effectue l'élimination d'Abel pour les efda en une seule inconnue :

```
ABEliminationI:=proc(U,A) ;
MM:=Normalize(A) ;
p:=nops(MM) ;
kp:=nops(MM[p]) ;
s:=kp-1 ;
if p=1 then
if kp>1 then
if (opp(2,1, MM[1,s]/MM[1,kp],U)<>0) then
for d from 1 to s do
N[d]:=opp(2,1,MM[1,d]/MM[1,kp],U) ;
end do ;
N:=[[seq(N[d],d=1..s)]] ;
else N:=Normalize(MM) ;
end if ;
end if ;
else print(L'argument n'est paq adapté) ;
end if ;
end proc:
```

On a maintenant tous les éléments pour construire la procédure `ABELmethod` :

```
ABELmethod:=proc(Pb,U):
Y0:=Pb[2]:
n:=nops(U) ;
efda:=[seq(1,i=1..n)] ;
while (nops(efda)<>1) do
efda:=Normalize(ABELimination(U,efda)):
end do:
edl:=efda:
while nops(ABEliminationI(U,edl)[1])<>nops(edl[1]): do
edl:=Normalize(ABEliminationI(U,edl)):
end do:
z:=solve(U[1]=u,x) ;
s:=subs(y=Y0,z) ;
Edl:=subs(y=Y0,x=s,edl) ;
EDl:=Normalize(Edl):
k:=nops(EDl[1]) ;
EDL:=sum('simplify(EDl[1,l]/EDl[1,k])*diff(Y(u),u$l)',l=1..k) ;
EDL ;
end proc:
```

A.2. Calcul de la courbure et des coefficients de Pantazi

La courbure de Pantazi ainsi que les coefficients de Pantazi ont été introduits dans la première partie du cinquième chapitre. On commence par donner des routines maple, pour $n = 4, 5$, qui permettent de calculer la matrice ainsi que la courbure de Pantazi d'un tissu $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}] = \mathcal{W}(dx+\epsilon_1\, dy, \ldots, dx+\epsilon_n\, dy)$ en fonctions des ϵ_i et des leurs dérivées partielles. On donne ensuite différentes procédures qui permettent de calculer les coefficients de Pantazi des n-tissus $\mathcal{W}(dx + \epsilon_1\, dy, \ldots, dx + \epsilon_n\, dy)$ quel que soit l'entier n plus grand que 3.

A.2.1. Calcul de la courbure de Pantazi. — On a besoin de quelques procédures pour manipuler des 1-formes différentielles.

La 1-forme $f\, dx + g\, dy$ sera écrite `f*DX+g*DY` en langage maple. Le logiciel comprendra `DX` et `DY` comme deux variables formelles (qui ne commutent pas). La 2-forme $h\, dx \wedge dy$ sera écrite `h*DX*DY`.

Les deux procédures suivantes calculent respectivement la différentielle extérieure d'une fonction et d'une 1-forme :

```
DIFEXT0:=proc(f):
r:=diff(f,x)*DX+diff(f,y)*DY:
end proc:

DIFEXT1:=proc(F):
r:=diff(coeff(F,DY),x)-diff(coeff(F,DX),y):
end proc:
```

On en déduit la procédure suivante qui calcule la matrice scalaire qui, multipliée par `DX*DY`, donne la différentielle extérieure d'une matrice de 1-formes :

```
DIFEXTMATRIX:=proc(A):
n:=Dimension(A):
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do
g[i,j]:=DIFEXT1(A[i,j]):
end do:
end do:
R:=Matrix(n,g):
end proc:
```

Pour calculer le scalaire qui, multiplié par $d\,x \wedge d\,y$, est égal au produit extérieur de deux 1-formes, on fera appel à la procédure

```
WEDGE:=proc(P,Q):
r:=coeff(P,DX)*coeff(Q,DY)-coeff(P,DY)*coeff(Q,DX):
end proc:
```

On peut alors construire une procédure qui calcule le produit extérieur de deux matrices carrées de 1-formes :

```
WEDGEMATRIX:=proc(A,B):
n:=Dimension(A):
```

```
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do
g[i,j]:=add(WEDGE(A[i,k],B[k,j]),k=1..n):
end do:
end do:
H:=Matrix(n,g):
end proc:
```

A.2.1.1. Cas des 4-tissus. — On donne des routines maple qui permettent de calculer les expressions de la partie *5.1.2.2*.

Étant donné un 4-uplet de fonctions `E=(e[1],e[2],e[3],e[4])` définissant un tissu, on construit les polynômes symétriques élémentaires en les `e[i]` :

```
EE:=(z-e[1](x,y))*(z-e[2](x,y))*(z-e[3](x,y))*(z-e[4](x,y)):
for i from 0 to 4 do sigma[4-i]:=(-1)^i*coeff(EE,z,i):
```

On définit la matrice $M[\underline{\epsilon}]$ (notée `M`) ainsi que son inverse $\omega[\underline{\epsilon}]$ (notée `W`) qui jouent des rôles importants pour les calculs :

```
M:=Transpose(VandermondeMatrix(<e[1](x,y), e[2](x,y),e[3](x,y),e[4](x,y)>));
W:=convert(inverse(M),Matrix):
```

On construit maintenant les composantes $L_{p,q}^{[k,s]}$ (notées `L[k,s][p,q]`) des formes $L_p^{[k]}$ qui sont des coefficients de la matrice $L(\underline{S})$ (voir le paragraphe *5.1.3.2*) :

```
L[1,0][1,3]:=-add(diff(e[k](x,y),x)*W[k,3],k=1..4):
L[1,0][1,4]:=-add(diff(e[k](x,y),x)*W[k,4],k=1..4):
L[1,0][2,3]:=-add((diff(e[k](x,y),y)+e[k](x,y)*diff(e[k](x,y),x))
*W[k,3],k=1..4):
L[1,0][2,4]:=-add((diff(e[k](x,y),y)+e[k](x,y)*diff(e[k](x,y),x))
*W[k,4],k=1..4):
L[2,0][1,3]:=-(add(diff(e[k](x,y),x$2)*W[k,3]+ add(2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,p]
*L[1,0][p-1,3],p=2..3),k=1..4)):
L[2,0][1,4]:=-(add(diff(e[k](x,y),x$2)*W[k,4]+ add( 2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,p]
*L[1,0][p-1,4],p=2..3),k=1..4)):

for k from 1 to 4 do
a[k]:=diff(e[k](x,y),y)+3*e[k](x,y)*diff(e[k](x,y),x):
b[k]:=diff(diff(e[k](x,y),y)+e[k](x,y)*diff(e[k](x,y),x),x):
end do:

L[2,0][2,3]:=-(add(b[k]*W[k,3]+add(a[k]*W[k,p]*L[1,0][p-1,3],p=2..3),k=1..4));
L[2,0][2,4]:=-(add(b[k]*W[k,4]+add(a[k]*W[k,p]*L[1,0][p-1,4],p=2..3),k=1..4));

for k from 1 to 4 do
alpha[k]:=(diff(e[k](x,y),y)+e[k](x,y)*diff(e[k](x,y),x)):
c[k]:=3*e[k](x,y)*alpha[k]:
```

```
d[k]:=simplify(diff(alpha[k],y)+alpha[k]*diff(e[k](x,y),x)+e[k](x,y)^2
*diff(e[k](x,y),x,x)):
end do:
L[2,0][3,3]:=-(add(d[k]*W[k,3]+add(c[k]*W[k,p]*L[1,0][p-1,3],p=2..3),k=1..4));
L[2,0][3,4]:=-(add(d[k]*W[k,4]+add(c[k]*W[k,p]*L[1,0][p-1,4],p=2..3),k=1..4));
L[2,1][1,4]:=-(add(2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,4],k=1..4)) :
L[2,1][2,4]:=-(add( a[k]*W[k,4],k=1..4)):
L[2,1][3,4]:=-(add(c[k]*W[k,4],k=1..4)):
```

On peut alors construire les coefficients de la matrice de Pantazi $\Omega^{\epsilon}_{\mathcal{P}}$ associée. On construit ses coefficients $\Omega^{[k,s]}_{p,q}$ (notés `Omega[k,s][p,q]`) un par un, avec les lignes de commandes suivantes :

```
Omega[0,0][2,2]:=(L[1,0][2,3]*DX+add(e[k](x,y)^2*( diff(e[k](x,y),x)*W[k,3]*DY
-DIFEXTO(W[k,3])),k=1..4)):
Omega[0,0][2,3]:=(L[1,0][2,4]*DX+add(e[k](x,y)^2*( diff(e[k](x,y),x)*W[k,4]*DY
-DIFEXTO(W[k,4])),k=1..4)):
Omega[0,0][3,2]:=(add(e[k](x,y)^3*( diff(e[k](x,y),x)*W[k,3]*DY-DIFEXTO(W[k,3])
),k=1..4)+ sigma[3]*L[1,0][1,3]*DY-sigma[2]*L[1,0][2,3]*DY):
Omega[0,0][3,3]:=(add(e[k](x,y)^3*(diff(e[k](x,y),x)*W[k,4]*DY-DIFEXTO(W[k,4])),
k=1..4)+ sigma[3]*L[1,0][1,4]*DY-sigma[2]*L[1,0][2,4]*DY):
Omega[0,1][2,3]:=DY:
Omega[0,1][3,3]:=DX+sigma[1]*DY:
Omega[1,0][3,2]:=(sigma[3]*L[2,0][1,3]*DY-sigma[2]*L[2,0][2,3 ]*DY+(DX+sigma[1]
*DY)*L[2,0][3,3]+add(e[k](x,y)^3*diff(e[k](x,y),x,x)* W[k,3]*DY+add(e[k](x,y)^3*
(2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,p]*DY -DIFEXTO(W[k,p]))*L[1,0][p-1,3],p=2..3),k=1..4));
Omega[1,0][3,3]:=(sigma[3]*L[2,0][1,4]*DY-sigma[2]*L[2,0][2,4 ]*DY+(DX+sigma[1]*
DY)*L[2,0][3,4]+ add(e[k](x,y)^3*diff(e[k](x,y),x,x)*W[k,4]*DY+add(e[k](x,y)^3
(2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,p]*DY -DIFEXTO(W[k,p]))*L[1,0][p-1,4],p=2..3),k=1..4));
Omega[1,1][3,3]:=(add(e[k](x,y)^3*(2*diff(e[k](x,y),x)*W[k,4]*DY-DIFEXTO(W[k,4])
),k=1..4)+ sigma[3]*L[2,1][1,4]*DY-sigma[2]*L[2,1][2,4]*DY+(DX+sigma[1]*DY)*
L[2,1][3,4]):
```

On peut alors construire la matrice de Pantazi :

```
MATRICEPANTAZI:=-<<Omega[0,0][2,2],Omega[0,0][3,2 ],Omega[1,0][3,2 ]>|
<Omega[0,0][2,3],Omega[0,0][3,3],Omega[1,0 ][3,3]>|
<Omega[0,1][2,3],Omega[0,1][3,3],Omega[1,1][3,3]]>>:
```

Finalement, on calcule sa courbure en utilisant les procédures introduites plus haut :

```
COURBUREPANTAZI:=simplify(matadd(DIFEXTMATRIX(MATRICEPANTAZI),WEDGEMATRIX(MA
TRICEPANTAZI,MATRICEPANTAZI)));
```

A.2.1.2. Cas des 5-tissus. — La construction de la matrice de Pantazi et de la matrice de courbure associée dans le cas des 5-tissus que l'on donne ci-dessous suit en gros le même chemin que la construction analogue pour les 4-tissus.

Étant donné un 5-uplet de fonctions `E=(e[1],e[2],e[3],e[4],e[5])` définissant un 5-tissu, on construit les polynômes symétriques élémentaires en les `e[i]` :

```
EE:=(z-e[1](x,y))*(z-e[2](x,y))*(z-e[3](x,y))*(z-e[4](x,y))*(z-e[5](x,y));
for i from 0 to 5 do sigma[5-i]:=(-1)^(i+1)*simplify(coeff(EE,z,i)):
end do:
```

On calcule ensuite les coefficients $\Theta_i[k,\sigma]$ (définis en *5.1.1.2*) :

```
for i from 1 to 5 do for k from 0 to 5 do for s from 0 to k do
if (s=k)=0 then Theta[k,s][i]:=e[i](x,y): else
Theta[k,s][i]:=binomial(k,s)*diff(e[i](x,y),(k-s)$x):
end if: end do: end do: end do:
```

On définit la matrice $M[\underline{\epsilon}]$ (notée `M`) ainsi que son inverse $\omega[\underline{\epsilon}]$ (notée `W`) qui jouent des rôles importants pour les calculs :

```
M:=Transpose(VandermondeMatrix(<e[1](x,y),e[2](x,y),e[3](x,y),e[4](x,y),
e[5](x,y),>)):
W:=convert(inverse(M),Matrix):
```

On construit maintenant les composantes $L_{p,q}^{[k,s]}$ (notées `L[k,s][p,q]`) des formes $L_p^{[k]}$ qui sont des coefficients de la matrice $L(\underline{S})$ (voir le paragraphe 5.1.3.2). La construction diffère du cas des 4-tissus. On se donne a priori la matrice $L(\underline{S})$ et on va construire par récurrence les colonnes de cette matrice.

```
L(S):=Transpose(<<0,0,0,0>|<0,LL[1][1],LL[2][1],LL[3][1]>|<S[0][2],LL[1][2],
LL[2][2],LL[3][2]>|<S[0][3],S[1][3],LL[2][3],LL[3][3]>|<S[0][4], S[1][4],
S[2][4],LL[3][4]>>):

VV:=multiply(W,L(S)):
for i from 1 to 5 do
for s from 0 to 3 do
nu[s][i]:=simplify(VV[i,s+1]):
end do:
end do :

for i from 1 to 5 do
aa[i]:=simplify(diff(e[i](x,y),y)+e[i](x,y)*diff(e[i](x,y),x)):
end do :

LL[1][1]:=-add(diff(e[i](x,y),x)*nu[0][i],i=1..5):
LL[1][2]:=-add(aa[k]*nu[0][k],k=1..5):

for q from 3 to 5 do
L[1,0][1,q-1]:=coeff(LL[1][1],S[0][q-1]): L[1,0][2,q-1]:=coeff(LL[1][2],
S[0][q-1]): end do:
```

```
L(S):=Transpose(<<0,0,0,0>|<0,LL[1][1],LL[2][1],LL[3][1]>|<S[0][2],LL[1][2],
LL[2][2],LL[3][2]>|<S[0][3],S[1][3],LL[2][3],LL[3][3]>|<S[0][4], S[1][4],
S[2][4],LL[3][4]>>):

VV:=multiply(W,MatL):
for i from 1 to 5 do
for s from 0 to 3 do
nu[s][i]:=(VV[i,s+1]):
end do: end do:

LL[2][1]:=-add(2*diff(e[i](x,y),x)*nu[1][i]+diff(e[i] (x,y),x,x)*nu[0][i],
i=1..5): LL[2][2]:=-add((diff(e[i](x,y),y)+3*e[i](x,y)*diff(e[i](x,y),x))*
nu[1][i]+diff(aa[i],x)*nu[0][i],i=1..5):

LL[2][3]:=-add((aa[i]*e[i](x,y)+2*e[i](x,y)^2*diff(e[i](x,y),x)+diff(e[i]
(x,y)^2,y))*nu[1][i]+(e[i](x,y)^2*diff(e[i](x,y),x,x)+diff(aa[i],y)+diff(
e[i](x,y),x)*aa[i])*nu[0][i],i=1..5)):

for s from 0 to 1 do for q from s+3 to 5 do
L[2,s][1,q-1]:=coeff(LL[2][1],S[s][q-1]): L[2,s][2,q-1]:=coeff(LL[2][1],
S[s][q-1]): L[2,s][3,q-1]:=coeff(LL[2][3],S[s][q-1]):
end do: end do:

L(S):=Transpose(<<0,0,0,0>|<0,LL[1][1],LL[2][1],LL[3][1]>|<S[0][2],LL[1][2],
LL[2][2],LL[3][2]>|<S[0][3],S[1][3],LL[2][3],LL[3][3]>|<S[0][4], S[1][4],
S[2][4],LL[3][4]>>):

VV:=multiply(W,MatL):
for i from 1 to 5 do for s from 0 to 3 do
nu[s][i]:=simplify(VV[i,s+1]):
end do: end do:

for i from 1 to 5 do
delta[2,1][1,i]:=2*diff(e[i](x,y),x):
delta[2,0][1,i]:=(diff(e[i](x,y),x,x):
delta[2,1][2,i]:=simplify(diff(e[i](x,y),y)+3*e[i](x,y)*diff(e[i](x,y),x));
delta[2,0][2,i]:=(diff(aa[i],x)):
delta[2,1][3,i]:=(aa[i]*e[i](x,y)+2*e[i](x,y)^2*diff(e[i](x,y),x)+diff(e[i]
(x,y)^2,y)):
delta[2,0][3,i]:=e[i](x,y)^2*diff(e[i](x,y),x,x)+diff(aa[i],y)+diff(e[i](x,y)
,x)*aa[i]:
end do:

LL[3][1]:=-add((diff(e[i](x,y),x)+delta[2,1][1,i])*nu[2][i]+(diff(
delta[2,1][1,i],x)+delta[2,0][1,i])*nu[1][i]+diff(e[i](x,y),x,x,x)*nu[0][i],
i=1..5):

LL[3][2]:=-add((diff(e[i](x,y)^2,x)+delta[2,1][2,i])*nu[2][i]+(diff(
delta[2,1][2,i],x)+delta[2,0][2,i])*nu[1][i]+diff(delta[2,0][2,i],x)*
nu[0][i],i=1..5):

LL[3][3]:=-add((diff(e[i](x,y)^3,x)+delta[2,1][3,i])*nu[2][i]+(diff(
```

```
delta[2,1][3,i],x)+delta[2,0][3,i])*nu[1][i]+diff(delta[2,0][3,i],x)*nu[0][i],
i=1..5):

LL[3][4]:=-(add(diff(e[i](x,y)^3,y)*nu[2][i]+e[i](x,y)^3*(3*diff(e[i](x,y)
,x)*nu[2][i]+3*diff(e[i](x,y),x,x)*nu[1][i]+diff(e[i](x,y),x$3)*nu[0][i])
+diff(delta[2,1][3,i],y)*nu[1][i]+delta[2,1][3,i]*(e[i](x,y)*nu[2][i]+2*
diff(e[i](x,y),x)*nu[1][i]+diff(e[i](x,y),x$2)*nu[0][i])+diff(delta[2,0][3,i]
,y)nu[0][i]+delta[2,0][3,i]*(e[i](x,y)*nu[1][i]+diff(e[i](x,y),x)*nu[0][i]),
i=1..5):

for s from 0 to 2 do for q from s+3 to 5 do
L[3,s][1,q-1]:=coeff(LL[3][1],S[s][q-1]):
L[3,s][2,q-1]:=coeff(LL[3][2],S[s][q-1]):
L[3,s][3,q-1]:=coeff(LL[3][3],S[s][q-1]):
L[3,s][4,q-1]:=coeff(LL[3][4],S[s][q-1]):
end do: end do:
```

On peut alors construire les coefficients de la matrice de Pantazi $\Omega^{\epsilon}_{\mathcal{P}}$ associée. On construit ces coefficients $\Omega^{[k,s]}_{p,q}$ (notés `Omega[k,s][p,q]`) un par un, avec les lignes de commandes suivantes :

```
for p from 3 to 5 do for q from 3 to 5 do
Omega[0,0][p-1,q-1]:=add(e[k](x,y)^(p-1)*(Theta[1,0][k]*W[k,q]*DY-
DIFEXT0(W[k,q]))+add(e[k](x,y)^(p-1)*(DX+e[k](x,y)*DY)*W[k,r]*L[1,0]
[r-1,q-1],r=2..3),k=1..5):
end do: end do :

Omega[0,1][2,3]:=DY: Omega[0,1][2,4]:=0: Omega[0,2][2,4]:=0:
Omega[0,1][3,3]:=DX: Omega[0,1][3,4]:=DY: Omega[0,2][3,4]:=0:
Omega[0,1][4,3]:=-sigma[2]*DY: Omega[0,1][4,4]:=DX+sigma[1]*DY:
Omega[0,2][4,4]:=0 :

for p from 4 to 5 do for q from 4 to 5 do
Omega[1,1][p-1,q-1]:=add(e[k](x,y)^(p-1)*(Theta[2,1][k]*W[k,q]*DY-
DIFEXT0(W[k,q]))+add(e[k](x,y)^(p-1)*(DX+e[k](x,y)*DY)*W[k,r]*L[2,1][r-1,q-1],
r=2..4),k=1..5):
end do: end do:

for p from 4 to 5 do for q from 3 to 5 do
Omega[1,0][p-1,q-1]:=add(e[k](x,y)^(p-1)*Theta[2,0][k]*W[k,q]*DY+add(e[k](x,y)
^(p-1)*(Theta[2,1][k]*W[k,r]*DY-DIFEXT0(W[k,r]))*L[1,0][r-1,q-1],r=2..3)+add
(e[k](x,y)^(p-1)*(DX+e[k](x,y)*DY)*W[k,r]*L[2,0][r-1,q-1],r=2..4),k=1..5);
end do: end do :

Omega[1,2][3,4]:=DY: Omega[1,2][4,4]:=DX+sigma[1]*DY:

for q from 3 to 5 do
Omega[2,0][4,q-1]:=add( e[k](x,y)^4*Theta[3,0][k]*W[k,q]*DY+add(e[k](x,y)^
4*Theta[3,1][k]*W[k,r]*DY*L[1,0][r-1,q-1],r=2..3)+add(e[k](x ,y)^4*
(Theta[3,2][k]*W[k,z]*DY-DIFEXT0(W[k,z]))*L[2,0][z-1,q-1],z=2..4)+add(e[k](x,y)
^4*(DX+e[k](x,y)* DY)*W[k,r]*L[3,0][r-1,q-1],r=2..5),k=1..5):
```

```
end do:
Omega[2,2][4,4]:=add(e[k](x,y)^4*(Theta[3,2][k]*W[k,5]*DY-DIFEXTO
(W[k,5]))+add(e[k](x,y)^4*(DX+e[k](x,y)*DY)*W[k,s]*L[3,2][s-1,4],
s=2..5),k=1..5):
```

On peut alors construire la matrice de Pantazi :

```
MATRICEPANTAZI:-Transpose(<<Omega[0,0][2,2],Omega[0,0][2,3],
Omega[0,0][2,4],Omega[0,1][2,3],Omega[0,1][2,4],Omega[0,2][2,4]>|
<Omega[0,0][3,2 ],Omega[0,0][3,3],Omega[0,0][3,4],Omega[0,1][3,3],
Omega[0,1][3,4],Omega[0,2][3,4]>|<Omega[0,0][4,2],Omega[0,0][4,3],
Omega[0,0][4,4],Omega[0,1][4,3],Omega[0,1][4,4],Omega[0,2][4,4]>|
<Omega[1,0][3,2],Omega[1,0][3,3],Omega[1,0][3,4],Omega[1,1][3,3],
Omega[1,1][3,4],Omega[1,2][3,4]>|<Omega[1,0][4,2],Omega[1,0][4,3],
Omega[1,0][4,4],Omega[1,1][4,3],Omega[1,1][4,4],Omega[1,2][4,4]>|
<Omega[2,0][4,2],Omega[2,0][4,3],Omega[2,0][4,4],Omega[2,1][4,3],
Omega[2,1][4,4],Omega[2,2][4,4]>>):
```

Finalement, on calcule sa courbure en utilisant les procédures introduites plus haut :

```
COURBUREPANTAZI:=simplify(matadd(DIFEXTMATRIX(MATRICEPANTAZI),WEDGE
MATRIX(MATRICEPANTAZI,MATRICEPANTAZI)));
```

A.2.2. Calcul des coefficients de Pantazi. — On donne maintenant un algorithme qui, recevant un n-uplet $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de fonctions de deux variables définissant un n-tissu $\mathcal{W}[\underline{\epsilon}]$, renvoie les coefficients $\mathcal{P}_k^\sigma[\underline{\epsilon}]$ ($\sigma = 0, \ldots, n-3$, $k = \sigma+2, \ldots, n-1$) de la Définition 5.1.15.

On construit d'abord la matrice $M[\underline{\epsilon}]$ définie en *5.1.1.2* à l'aide de la procédure suivante :

```
MatricePANTAZI:=proc(K):n:=nops(K):F:=<seq(K[i],i=1..n)>:
N:=Transpose(VandermondeMatrix(F)):
end proc:
```

De même, on construit les $\Theta_i^{[k,\sigma]}$ en utilisant la procédure :

```
THETA:=proc(R):E:=R:n:=nops(E): pp:=array(1..n,0..n,0..n):
for i from 1 to n do
for s from 0 to n do
for t from 0 to s do
pp[i,s,t]:=binomial(s+1,t)*diff(Ee[i],x$(s+1-t)):
end do:
for t from s+1 to n do pp[i,s,t]:=0:
end do:
end do:
end do:
pp:
end proc :
```

On peut alors calculer les coefficients $L_{p,q}^{[k,\sigma]}$ des formes linéaires $L_q^{[k]}$ de la Proposition 5.1.6 :

```
FormL:=proc(R):E:=R: n:=nops(E):
LL:=array(0..n,0..n):KK:=array(0..n-1,0..n-1):
P:=array(0..n,0..n,1..n,-1..n):
pp:=THETA(E):

LL[1,0]:=0:
for i from 1 to n do
for k from 0 to n do
for u from 0 to n do
P[u,k,i,-1]:=0:
end do:
end do:
P[1,0,i,0]:=0:
P[2,1,i,0]:=-(diff(E[i],y)+E[i]*diff(E[i],x)):LL[0,i-1]:=0:
end do:

for i from 1 to n do
for u from 3 to n do
P[u,u-1,i,0]:=(diff(P[u-1,u-2,i,0],y)+add(P[u-1,u-2,i,t]*pp[i,t,0],
t=0..u-3)-E[i]^(u-1)*pp[i,u-2,0]):
for t from 1 to u-3 do
P[u,u-1,i,t]:=(diff(P[u-1,u-2,i,t],y)+E[i]*P[u-1,u-2,i,t-1]+add(
P[u-1,u-2,i,q]*pp[i,q,t],q=t..u-3)-E[i]^(u-1)*pp[i,u-2,t]):
end do:
P[u,u-1,i,u-2]:=P[u-1,u-2,i,u-3]*E[i]-diff(E[i]^(u-1),y)-E[i]^(u-1)*
pp[i,u-2,u-2]:
end do: end do:

for i from 1 to n do
for u from 1 to n-1 do
for k from u to n-1 do
P[u,k,i,0]:=diff(P[u,k-1,i,0],x):
for s from 1 to k-2 do
P[u,k,i,s]:=diff(P[u,k-1,i,s],x)+P[u,k-1,i,s-1]:
end do:
P[u,k,i,k-1]:=P[u,k-1,i,k-2]-diff(E[i]^u,x)):
end do ;
end do ;
end do ;

for k from 0 to n-1 do
for u from 1 to min (k+1,n) do
LL[u,k]:=add(add(P[u,k,i,z]*V[i,z],i=1..n),z=0..k-1):end do:
for u from k+2 to n-1 do LL[u,k]:=alpha[u+1,k]:
end do ;
end do ;
```

```
for s from 0 to n-2 do
LL[n,s]:=0:
end do:

LL[n,n-1]:=add(add(P[n,n-1,i,z]*V[i,z],i=1..n),z=0..n-2):

for u from 0 to n-1 do
for k from 0 to n-1 do
K[u,k]:=LL[u,k]:
end do:
end do:

KK:=LL[n,n-1]:

simplify([K,KK]):

end proc :
```

Alors la procédure suivante calcule les coefficients de Pantazi :

```
COEFFICIENTSdePANTAZI:=proc(E);n:=nops(E):
M:=convert(inverse(MatricePANTAZI(E)),Matrix):
L:=formL(E)[1]:H:=formL(E)[2]:

for s from 0 to n-2 do
X[s]:=<seq(L[u,s],u=0..n-1)>:
W[s]:=MatrixVectorMultiply(M,X[s]):
for j from 1 to n do
VV[j,s]:=(W[s][j]):
end do:

for u from 0 to n-1 do
for k from 0 to n-1 do
for j from 1 to n do
L[u,k]:=simplify(subs(V[j,s]=VV[j,s],L[u,k])):
H:=subs(V[j,s]=VV[j,s],H):
end do;
end do;
end do;
end do;

X[n-1]:=<seq(L[u,n-1],u=0..n-1)>:
W[n-1]:=MatrixVectorMultiply(M,X[n-1]):

for j from 1 to n do
VV[j,n-1]:=simplify(W[n-1][j]):
end do :

K:=add(E[j]^n*VV[j,n-1],j=1..n)-H:
```

```
for p from 0 to n-3 do
for s from p+3 to n do
P[s,p]:=(coeff(K,alpha[s,p],1)):
end do:

PP[p]:=[seq(P[s,p],s=p+3..n)]:

end do:

PPP:=simplify([seq(PP[p],p=0..n-3)]);

end proc:
```

Nous allons illustrer l'utilisation de ces procédures sur un exemple et en déduire quelques résultats.

On cherche à savoir pour quelles valeurs du paramètre s le tissu ci-dessous est de rang maximal :

$$\mathcal{W}\big(\, x\,,\, xs+y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x/y\,\big)\ .$$

Le n-uplet `E` associé est

$$\mathtt{E} := \big[0, 1/\mathtt{s}, 1, -1, \mathtt{x}/\mathtt{y}, -\mathtt{x}/\mathtt{y}\big]$$

On calcule les coefficients de Pantazi à l'aide de la procédure `COEFFICIENTSdePANTAZI` :

```
P:=COEFFICIENTSdePANTAZI(E):
```

Alors, on a par exemple

$$\begin{aligned}
\mathtt{P}[4,1] =& \big(2*\mathtt{s}(8*\mathtt{x\hat{}3}*\mathtt{y}*\mathtt{s}+3*\mathtt{x\hat{}4}-10*\mathtt{x\hat{}2}*\mathtt{y\hat{}2}-\mathtt{y\hat{}4}\big)/\big((\mathtt{x}*\mathtt{s}-\mathtt{y})\mathtt{\hat{}}2*(\mathtt{x\hat{}2}-\mathtt{y\hat{}2})\mathtt{\hat{}}2\big)\\
\mathtt{P}[3,1] =& -2*2*\big(20*\mathtt{s\hat{}2}*\mathtt{y}*\mathtt{x\hat{}5}+12*\mathtt{s\hat{}2}*\mathtt{y\hat{}3}*\mathtt{x\hat{}3}+9*\mathtt{s}*\mathtt{x\hat{}6}-21*\mathtt{s}*\mathtt{y\hat{}2}*\mathtt{x\hat{}4}-\mathtt{s}*\\
&*\mathtt{y\hat{}4}*\mathtt{x\hat{}2}-3*\mathtt{s}*\mathtt{y\hat{}6}+4*\mathtt{y\hat{}3}*\mathtt{x\hat{}3}-20*\mathtt{x}*\mathtt{y\hat{}5}\big)/\big(\mathtt{y}*(\mathtt{x}*\mathtt{s}-\mathtt{y})\mathtt{\hat{}}2*(\mathtt{x\hat{}2}-\mathtt{y\hat{}2})\mathtt{\hat{}}3\big)\\
\mathtt{P}[3,2] =& 2*\mathtt{x}*\mathtt{s}*\big(76*\mathtt{s\hat{}3}*\mathtt{x\hat{}5}*\mathtt{y\hat{}}+12*\mathtt{s\hat{}3}*\mathtt{x\hat{}3}*\mathtt{y\hat{}3}+27*\mathtt{s\hat{}2}*\mathtt{x\hat{}6}\\
&-134*\mathtt{s\hat{}2}*\mathtt{x\hat{}4}*\mathtt{y\hat{}2}-29*\mathtt{s\hat{}2}*\mathtt{x\hat{}2}*\mathtt{y\hat{}4}-18*\mathtt{s}*\mathtt{x\hat{}5}*\mathtt{y}+56*\mathtt{s}*\mathtt{x\hat{}3}*\mathtt{y\hat{}3}\\
&-6*\mathtt{s}*\mathtt{x}*\mathtt{y\hat{}5}-4*\mathtt{x\hat{}2}*\mathtt{y\hat{}4}+20*\mathtt{y\hat{}6}\big)/\big((\mathtt{x}*\mathtt{s}-\mathtt{y})\mathtt{\hat{}}3*(\mathtt{x\hat{}2}-\mathtt{y\hat{}2})\mathtt{\hat{}}3*(\mathtt{x}*\mathtt{s}+\mathtt{y})\big)
\end{aligned}$$

etc.

Tous ces coefficients sont nuls pour $s=0$. On en déduit que le tissu ci-dessous est de rang maximal.

$$\mathbf{W}_\alpha(6) := \mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x/y\,\big)\ .$$

On peut donner une base explicite de l'espace des relations abéliennes de ce tissu. Notons qu'il porte les six relations abéliennes de son sous-5-tissu $\mathcal{W}\big(\, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\big)$ qui est exceptionnel (voir le chapitre précédent)[1]. Il reste à exhiber quatre autres relations linéairement indépendantes portées par x/y.

On vérifie que la famille ci-dessous constitue bien la liste d'une base de l'espace des relations abéliennes de $\mathbf{W}_\alpha(6)$:

[1] Cela implique que $\mathbf{W}_\alpha(6)$ est exceptionnel.

$$(x)+(y)-(x+y)=0\,, \tag{1}$$
$$(x)-(y)-(x-y)=0\,, \tag{2}$$
$$2\,(x)^2+2\,(y)^2-(x+y)^2-(x-y)^2=0\,, \tag{3}$$
$$(x+y)^2-(x-y)^2-4\,(xy)=0\,, \tag{4}$$
$$\log(x)+\log(y)-\log(xy)=0\,, \tag{5}$$
$$2\,(x)^4+2\,(y)^4-(x+y)^4-(x-y)^4+12\,(xy)^2=0\,, \tag{6}$$
$$\log(x)-\log(y)-\log(x/y)=0\,, \tag{7}$$
$$\log(y)-\log(x+y)+\log(1+x/y)=0\,, \tag{8}$$
$$\log(y)-\log(y-x)+\log(1-x/y)=0\,, \tag{9}$$
$$2\,\log^2(x)+2\,\log^2(y)-\log^2(xy)-\log^2(x/y)=0\,. \tag{10}$$

On en déduit l'armure de ce tissu :

$$\omega\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big]=(7,2,1,0)\,,$$

ainsi que ses invariants $\mathcal{R}_\kappa$ (pour $\kappa=3,4,5$) :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big]=16 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}_4\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big]=9 \qquad\qquad \mathcal{R}_5\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big]=4\,.$$

On remarquera que les fractions rationnelles qui définissent ce nouveau tissu exceptionnel sont peut-être les plus simples que l'on puisse imaginer. Notons aussi qu'on a une suite d'inclusions :

$$\mathcal{W}\big(\,x\,,\,y,x+y\big)\subset\mathcal{W}\big(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\big)\subset\mathcal{W}\big(x,y,x+y,x-y,xy\big)\subset\mathbf{W}_\alpha(6)\,.$$

Cette suite de tissus de rang maximal continue. En effet, on a

$$\mathbf{W}_\alpha(6)\subset\mathbf{W}_\alpha(7)\subset\mathbf{W}(8)\,,$$

avec

$$\mathbf{W}_\alpha(7):=\mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,,\,x^2-y^2\Big)$$
$$\text{et}\qquad \mathbf{W}(8):=\mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,,\,x^2-y^2\,,\,x^2+y^2\Big)\,.$$

Le 8-tissu $\mathbf{W}(8)$ est de rang maximal. On vérifie que les dix relations abéliennes de $\mathbf{W}_\alpha(6)$ données ci-dessus jointes aux onze relations abéliennes données ci-dessous forment bien une base de $\mathcal{A}\big[\mathbf{W}(8)\big]$:

$$(x)^2-(y)^2-(x^2-y^2)=0\,, \tag{11}$$
$$\log(x+y)+\log(x-y)-\log(x^2-y^2)=0\,, \tag{12}$$
$$8\,(x)^4+8\,(y)^4-(x+y)^4-(x-y)^4-6\,(x^2-y^2)^2=0\,, \tag{13}$$
$$16\,(x)^8+16\,(y)^8-(x+y)^8-(x-y)^8+224\,(xy)^4-14\,(x^2-y^2)^4=0\,, \tag{14}$$
$$2\,\log(x+y)^2+2\,\log(x-y)^2-\log\big(\tfrac{x/y-1}{x/y+1}\big)^2-\log(x^2-y^2)^2=0\,, \tag{15}$$

$$(x)^2 + (y)^2 - (x^2 + y^2) = 0\,, \tag{16}$$

$$2\,\log(y) + \log\big(1 + (x/y)^2\big) - \log(x^2 + y^2) = 0\,, \tag{17}$$

$$2\,(x)^4 + 2\,(y)^4 - (x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0\,, \tag{18}$$

$$8\,(x)^6 + 8\,(y)^6 + (x + y)^6 + (x - y)^6 - 10\,(x^2 + y^2)^3 = 0\,, \tag{19}$$

$$64\,(x)^8 + 64\,(y)^8 + 3\,(x + y)^8 + 3\,(x - y)^8 - 14\,(x^2 - y^2)^4 - 56\,(x^2 + y^2)^4 = 0\,, \tag{20}$$

$$64\,(x)^{12} + 64\,(y)^{12} + (x + y)^{12} + (x - y)^{12} - 1408\,(xy)^6 - 22\,(x^2 - y^2)^6 - 44\,(x^2 + y^2)^6 = 0\,. \tag{21}$$

Du fait que $\mathbf{W}(8)$ ne soit pas linéarisable, on en déduit qu'il est exceptionnel.

À partir de la liste des relations abéliennes de $\mathbf{W}(8)$ données ci-dessus, on établit facilement que

$$\omega\big[\mathbf{W}(8)\big] = (11, 4, 3, 2, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}(8)\big] = 36\,.$$

Par ailleurs, l'étude des sous-tissus de $\mathbf{W}(8)$ du point de vue du rang et des relations abéliennes est très riche puisqu'elle mène à la découverte de nouveaux tissus exceptionnels. En effet, en utilisant les algorithmes donnés dans cet appendice, ou en utilisant la liste des relations abéliennes de $\mathbf{W}(8)$, on montre que ce tissu admet de nombreux sous-k-tissus exceptionnels pour $k = 6, 7$.

Par exemple, les 6-tissus suivants sont exceptionnels :

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_\alpha(6) &= \mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x/y\,\Big)\,,\\
\mathbf{W}_\beta(6) &= \mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,x/y\,,\,x^2+y^2\,\Big)\,,\\
\mathbf{W}_\gamma(6) &= \mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x^2+y^2\,\Big)\,,\\
\mathbf{W}_\delta(6) &= \mathcal{W}\Big(\,x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,x-y\,,\,xy\,,\,x^2-y^2\,\Big)\,.
\end{aligned}$$

Ces tissus $\mathcal{W}_s(6)$ $(s = \alpha, \beta, \ldots, \delta)$ ne sont pas équivalents, comme on le montre maintenant.

Pour $s, t \in \{\alpha, \ldots, \delta\}$ distincts, on note $\mathcal{N}(s, t)$ l'assertion

$$\text{“}\mathbf{W}_s(6) \;\; \textit{et} \;\; \mathbf{W}_t(6) \;\; \textit{ne sont pas équivalents}\text{”}\,.$$

Si W est un tissu, on note $\mathcal{M}\big[W\big]$ la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus de W et on définit $\mathcal{Z}_k\big[W\big]$ comme étant égal au nombre des sous-k-tissus $\mathcal{W}$ de W tels que $\mathcal{M}\big[\mathcal{W}\big] = 0$:

$$\mathcal{Z}_k[W] := \big\{\, \mathcal{W} \subset W \;\big|\; |\mathcal{W}| = k\,,\; \mathcal{M}\big[\mathcal{W}\big] = 0 \,\big\}\,.$$

Les entiers $\mathcal{Z}_k\big[W\big]$ sont clairement des invariants de W.

On établit facilement que

$$\mathcal{Z}_5\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big] = 4 \qquad \mathcal{Z}_5\big[\mathbf{W}_\beta(6)\big] = 2 \qquad \mathcal{Z}_5\big[\mathbf{W}_\gamma(6)\big] = 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_5\big[\mathbf{W}_\delta(6)\big] = 2\,,$$

d'où on déduit immédiatement $\mathcal{N}(s, \alpha)$ pour $s = \beta, \gamma, \delta$. D'autre part, on a :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\alpha(6)\big] = \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\beta(6)\big] = 16 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\gamma(6)\big] = 10 \qquad \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\delta(6)\big] = 8\,.$$

Il en découle $\mathcal{N}(s, t)$ pour tout s et tout t distinct de s, ce que l'on voulait démontrer.

De même, les tissus ci-dessous sont exceptionnels :

$$\mathbf{W}_\alpha(7) = \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x/y\,,\, x^2-y^2 \Big)$$
$$\mathbf{W}_\beta(7) = \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x/y\,,\, x^2+y^2 \Big)$$
$$\mathbf{W}_\gamma(7) = \mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x^2-y^2\,,\, x^2+y^2 \Big)\,.$$

À partir de la liste des relations abéliennes de $\mathbf{W}(8)$, on vérifie qu'ils sont bien de rang maximal et on déduit qu'il ne sont pas linéarisable du fait qu'ils admettent le tissu exceptionnel $\mathcal{W}(x, x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy)$ comme sous-tissu. On obtient que ces trois 7-tissus ne sont pas équivalents par la considération de leurs invariants $\mathcal{R}_3$, puiqu'on a :

$$\mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\alpha(7)\big] = 23 \neq \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\beta(7)\big] = 25 \neq \mathcal{R}_3\big[\mathbf{W}_\gamma(7)\big] = 15\,.$$

Pour finir, on peut poser la question naïve de savoir si la suite de tissus exceptionnels

$$\mathbf{W}_\alpha(6) \subset \mathbf{W}_\alpha(7) \subset \mathbf{W}(8)$$

est susceptible d'être prolongée, *i.e.* on peut se poser la question de savoir s'il existe un 9-tissu $\mathbf{W}(9)$ exceptionnel admettant $\mathbf{W}(8)$ comme sous-8-tissu ; ou encore, en d'autres termes, existe-t-il une fonction de deux variables $U(x, y)$ telle que

$$\mathcal{W}\Big(x\,,\, y\,,\, x+y\,,\, x-y\,,\, xy\,,\, x/y\,,\, x^2-y^2\,,\, x^2+y^2\,,\, U(x,y) \Big)$$

soit de rang maximal ?

BIBLIOGRAPHIE

[**Ab 23**] N.H. Abel, *Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables* (1823), Œuvres complètes de N.H. Abel, tome 1, Grondhal Son, 1981, p. 1-10.

[**AB**] O. Laudal, R. Piene (éditeurs), *The Legacy of Niels Henrik Abel – the Abel Bicentennial, Oslo, 2002*, Springer-Verlag, 2004.

[**ACGH**] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **267**, Springer-Verlag, 1985.

[**AD**] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **31**, Cambridge University Press, 1989.

[**Ak**] M. Akivis, A. Shelekhov, *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, Mathematics and its Applications Vol. **82**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[**AG-1**] M. Akivis, V. Goldberg, *Projective differential geometry of submanifolds*, North-Holland Mathematical Library **49**, North-Holland Publishing Co., 1993.

[**AG-2**] M. Akivis, V. Goldberg, *Differential geometry of webs*, in "Handbook of differential geometry" Vol. **1**, p. 1-152, North-Holland, 2000.

[**AGL 04**] M. Akivis, V. Goldberg, V. Lychagin, *Linearizability of d-webs, $d \geq 4$, on two-dimensional manifolds*, eprint arXiv:math.DG/0209290 (2002).

[**BCGG**] R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt and P. Griffiths, *Exterior differential systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Vol. **18**, Springer-Verlag, 1991.

[**Be 80**] A. Beauville, *Géométrie des tissus* [*d'après S. S. Chern et P. A. Griffiths*], Séminaire Bourbaki (1978/79), Exp. No. 531, Lecture Notes in Math. **770**, Springer, 1980, p. 103–119.

[**Bl 29**] W. Blaschke, *Kurvenscharen im Raum*, Abh. Hambourg **7** (1929), p. 67-69.

[**Bl 30**] W. Blaschke, *Flächengewebe und ihre diagonale Kurvenscharen*, Abh. Hambourg **8** (1930), p. 287-300.

[**Bl 32**] W. Blaschke, *Results and problems about n-webs of curves in a plane*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), p. 827-830.

[**Bl 33**] W. Blaschke, *Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse*, Abh. Hambourg **19** (1933), p. 313-317.

[**Bl 33-1**] W. Blaschke, *Textilegeometrie und Abelsche Integrale*, Jber. Deutsche Math.-Ver. **43** (1933), p. 87-97.

[**Bl 55**] W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.

[**BB**] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Die Grundlehren der Math., Vol. **49**, Springer, Berlin, 1938.

[**BB 34**] W. Blaschke, E. Bompiani, *Ragionamenti enumerativi sui tessuti misti*, Rend. Accad. Lincei (1934), p. 469-473.

[**BD 28**] W. Blaschke, J. Dubourdieu, *Invarianten von Kurvengeweben*, Abh. Hambourg **6** (1928), p. 198-215.

[**BH 32**] W. Blaschke, G. Howe, *Über die Tangenten einer ebenen algebraischen Kurve*, Abh. Hambourg **9** (1932), p. 166-172.

[**BW 34**] W. Blaschke, P. Walberer, *Die Kurven-3-Gewebe höchsten Ranges im* R_3, Abh. Hambourg **10** (1934), p. 180-200.

[**Blo**] S. Bloch, *Higher regulators, algebraic* K*-theory, and zeta functions of elliptic curves*, CRM Monograph Series, **11**, AMS, 2000.

[**Bol 32**] G. Bol, *On* n*-webs of curves in a plane*, Bull. Amer. math. Soc. **38** (1932), p. 855-857.

[**Bol 36**] G. Bol, *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. **11** (1936), p. 387-393.

[**Bol 38**] G. Bol, *Über Geradengewebe*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), p. 45-58.

[**B**] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie. I, II, III*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1950, 1954, 1967.

[**Bom 34**] E. Bompiani, *Sui tessuti misti di superficie e di curve*, Abh. Hambourg **10** (1934), p. 317-324.

[**Bom 37**] E. Bompiani, E. Borlotti, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*, Math. Zeitschr. Vol **42**, (1937), p. 411-429.

[**Bor 26**] O. Borůvka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, Publ. Fac. Sci. Masaryk **72** (1926) et **85** (1927).

[**Bro 04**] F. Brown, *Polylogarithmes multiples uniformes en une variable*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **338** (2004).

[**Bur 36**] W. Burau, *Die Kegelschnittscharen einer Fläche dritter Ordnung*, Abh. Hambourg **11** (1936), p. 381-386.

[**Buz 39**] P. Buzano, *Determinazione e studio di superficie di* S_5 *le cui linee principali presentano una notevole particolarità*, Ann. Mat. pura appl., Bologna (4), Vol. **18** (1939), p. 51-76.

[**Buz 39-2**] P. Buzano, *Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane*, Boll. Unione Mat. Ital. **1** (1939), p. 7-11.

[**Ca 08**] E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Éc. Norm. **25** (1908), p. 57-194.

[**CF**] E. Čech, G. Fubini, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[**Cer 92**] D. Cerveau, *Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés*, Complex analytic methods in dynamical systems, Astérisque **222** (1994), p. 49–92.

[**Ch 82**] S.S. Chern, *Web geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), p. 1-8.

[**Ch 85**] S.S. Chern, *Wilhelm Blaschke and Web Geometry*, Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke, Vol. 5, Thales, Essen (1985), p. 21-23.

[**Ch 92**] S.S. Chern, *My mathematical education*, in Chern—a great geometer of the twentieth century, Internat. Press, Hong Kong (1992), p. 1–17.

[**CG 78**] S.S. Chern, P. Griffiths, *Abel's Theorem and Webs*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **80** (1978), p. 13-110.

[**CG 78-1**] S.S. Chern, P. Griffiths, *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), p. 539–557.

[**C**] P. Colmez, *Arithmétique de la fonction zêta*, dans *La fonction zêta*, Ed. Éc. Polytech. (2003), p. 37–164.

[**Da 83**] D. Damiano, *Webs and characteristic forms of Grassmann manifolds*, Amer. J. Math. **105** (1983), p. 1325-1345.

[**Dar 80**] G. Darboux, *Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bulletin Soc. Math. France, **4** (1880), p. 348-384.

[**Dar 14**] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, 2nd ed. Gauthier-Villars, Paris, 1914.

[**Dou 53**] A. Dou, *Cuatritejidos Planos*, Mem. Real Acad. Ci. Art. Barcelona **31** (1953), p. 133–218.

[**Fa 00**] B. Fabre, *Nouvelles variations sur les théorèmes d'Abel et de Lie*, Thèse, Univ. P. et M. Curie, 2000.

[**Fa 03**] B. Fabre, *On a problem of Griffiths: an inversion of Abel's theorem for families of zero-cycles*, Ark. Mat. **41** (2003), p. 61–84.

[**Fe 00**] E. Ferapontov, *Integrable systems in projective differential geometry*, Kyushu J. Math. **54** (2000), p. 183–215.

[**Fr 70**] B. Fridman, *Estimation of the dimension of the space of zeros of linear superpositions*, Mat. Sb. (N.S.) **82 (124)** (1970), p. 111–125.

[**Fu 42**] G. Fubini, *On Abel's converse theorem*, Ann. of Math. (2), **43** (1942), p. 471–500.

[**Ga 96**] H. Gangl, *Families of functional equations for polylogarithms*, Algebraic K-theory, Contemp. Math. **199** (1996), p. 83–105.

[**Ga 03**] H. Gangl, *Functional equations for higher logarithms*, Selecta Math. (N.S.) **9** (2003), p. 361–377.

[**GM 82**] I. Gelfand, R. MacPherson, *Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm*, Adv. in Math. **44** (1982), p. 279-312.

[**Gol 86**] V. Goldberg, *Isoclinic webs* $W(4,2,2)$ *of maximum* 2*-rank*, Lecture Notes in Math., **1209** (1986), p. 168–183.

[**Gol 87**] V. Goldberg, *Nonisoclinic* 2*-codimensional* 4*-webs of maximum* 2*-rank*, Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1987), p. 701–708.

[**G**] V. Goldberg, *Theory of multicodimensional* $(n+1)$*-webs*, Mathematics and its Applications,Vol. 44, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

[**Go 93**] A. Goncharov, *The classical polylogarithms, algebraic* K*-theory and* $\zeta_F(n)$, The Gelfand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkhäuser, Boston (1993), p. 3-135.

[**Go 95**] A. Goncharov, *Polylogarithms in arithmetic and geometry*, Proceedings of the ICM, Birkhäuser, Basel, Vol. 1 (1995), p. 374–387.

[**GS 24**] H. Graf, R. Sauer, *Űber dreifach Geradensysteme*, Akad. Math.-naturwiss. Abt. (1924), p. 135-198.

[**Gr 76**] P. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, Invent. Math. **35** (1976), p. 321-390

[**Gr 77**] P. Griffiths, *On Abel's differential equations*, Algebraic geometry (J. J. Sylvester Sympos), (1977), p. 26–51.

[**Gr 04**] P. Griffiths, *The Legacy of Abel in Algebraic Geometry* dans [**AB**] (2004), p. 179-205.

[**GC 72**] P. Griffiths, C. Clemens, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math, **95**, (1972), p. 281–356.

[**GH**] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc. 1994.

[**GMS 01**] J. Grifone, J. et M. Zoltán, J. Saab, *On the linearizability of 3-webs*, Nonlinear Anal. **47** (2001), p. 2643–2654.

[**Gron 12**] T. Gronwall, *Sur les équations en trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés*, J. de Liouville **8** (1912), p. 59-102.

[**Ha 94**] R. Hain, *Classical polylogarithms*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Amer. Math. Soc. (1994), p. 3–42.

[**Hé 90**] A. Hénaut, $\mathcal{D}$*-modules et géométrie des tissus de* $\mathbf{C}^2$, Math. Scand. **66** (1990), p. 161–172.

[**Hé 93**] A. Hénaut, *Sur la linéarisation des tissus de* $\mathbf{C}^2$, Topology **32** (1993), p. 531–542.

[**Hé 97**] A. Hénaut, *Tissus linéaires et théorèmes d'algébrisation de type Abel-inverse et Reiss-inverse*, Geom. Dedicata **65** (1997), p. 89–101.

[**Hé 98**] A. Hénaut, *Sur l'algébrisation des tissus de codimension* n *de* $\mathbf{C}^{2n}$, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1998), p. 131–143.

[**Hé 00**] A. Hénaut, *Sur la courbure de Blaschke et le rang des tissus de* $\mathbb{C}^2$, Natural Sci. Report, Ochanomizu Univ. **51**, No 1 (2000), p. 11-25.

[**Hé 01**] A. Hénaut, *Analytic web geometry*, dans [**W**], p. 6–47.

[**Hé 04**] A. Hénaut, *Formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et géométrie des tissus*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), p. 25–57.

[**Hé 04-1**] A. Hénaut, *On planar web geometry through abelian relations and connections*, Annals of Math. (2004).

[**He 92**] G. Henkin, *La transformation de Radon pour la cohomologie de Dolbeault et un théorème d'Abel inverse*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315**, (1992), p. 973–978.

[**He 95**] G. Henkin, *The Abel-Radon transform and several complex variables*, Ann. of Math. Stud. **137**, Princeton Univ. Press (1995), p. 223–275.

[**HP 99**] G. Henkin, M. Passare, *Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths*, Invent. Math **135** (1999), p. 297-328.

[**IL**] T. Ivey, J. Landsberg, *Cartan for beginners: differential geometry via moving frame and exterior differential systems*, AMS Providence, 2003.

[**Já 86**] A. Járai, *On regular solutions of functional equations*, Æquationes Math. **30** (1986), p. 21-54.

[**JR 86**] J.L. Joly, J. Rauch, *Ondes oscillantes semi-linéaires en une dimension*, Journées "Equations aux dérivées partielles"(Saint-Jean de Monts, 1986), Ecole polytechnique, Palaiseau (1986).

[**La 03**] J. Landsberg, *Lines on projective varieties*, J. Reine Angew. **562** (2003), p. 1–3.

[**L**] E. Lane, *A Treatise on Projective Differential Geometry*, Univ. of Chicago Press, 1942.

[**Le**] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, Elsevier North-Holland 1981.

[**Lie 82**] S. Lie, *Bestimmung aller Fläschen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden*, Arch. für Math. Bd **7**, Heft 2 (1882), p. 450-467.

[**Lit 83**] J. Little, *Translation manifolds and the converse of Abel's theorem*, Compositio Math. **49** (1983), p. 147–171.

[**Lit 89**] J. Little, *On webs of maximum rank*, Geom. Dedicata **31** (1989), p. 19–35.

[**MP**] D. Marin, J.V. Peirera, *Global web geometry on projective surfaces*, en préparation.

[**MSY 93**] K. Matsumoto, T. Sasaki, M. Yoshida, *Recent progress of Gauss-Schwarz theory and related geometric structures*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Vol. **47** (1993), p. 283–381.

[**Mi 99**] G. Mignard, *Rang et courbure des 3-tissus de* $\mathbb{C}^2$, C. R. Acad. Sci. Paris t. 329, Série I (1999), p. 629-632.

[**Mi 41**] N. Mihăileanu, *Sur les tissus plans de première espèce*, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **43** (1941), p. 23-26.

[**M**] D. Mumford, *Algebraic geometry I*, Classics in Mathematics, Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition, Springer-Verlag 1995.

[**Na 87**] I. Nakai, *Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves*, Topology **26** (1987), p. 475–504.

[**Na 96**] I. Nakai, *Web geometry and the equivalence problem of the first order partial differential equations*, dans [**W**], p. 150–204.

[**Oe 92**] J. Oesterlé, *Polylogarithmes*, Séminaire BOURBAKI, Vol. 1992/93, Astérisque **216**, Exp. n 762, (1993), p. 49-67.

[**Pa 38**] A. Pantazi, *Sur la détermination du rang d'un tissu plan*, C. R. Acad. Sc. Roumanie **2** (1938), p. 108-111.

[**Pa 38-2**] A. Pantazi, *Sur une surface remarquable de S_5.*, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, (1938), p. 197-204.

[**Pa 40**] A. Pantazi, *Sur une classification nouvelle des tissus plans*, C. R. Acad. Sc. Roumanie **4** (1940), p. 230-232.

[**Pi 02**] L. Pirio, *Study of a functional equation associated to the Kummer's equation of the trilogarihtm. Applications*, preprint math. CV/0206172 (2002).

[**Pi**] L. Pirio, *Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms*, à paraître dans Selecta Math. (N.S.)

[**Pi 04**] L. Pirio, *Sur les tissus plans de rang maximal et le problème de Chern*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), p. 131-136.

[**PT 04**] L. Pirio, J-M. Trépreau, *Une famille de 5-tissus plans exceptionnels* (Chapitre 6 de ce thèse), à paraitre.

[**Po 01**] H. Poincaré, *Les surfaces de translations et les fonctions abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, **29** (1901), p. 61-86.

[**P**] L. Lewin (ed.), *Structural Properties of Polylogarithms*, Math. Surveys and Monographs, Vol. **37** Amer. Math. Soc. 1991.

[**Ro 02**] G. Robert, *Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans*, Prépublication n^o **146**, Université Bordeaux 1 (2002).

[**Ro 07**] L. J. Rogers, *On Function Sum Theorems Connected with the Series* $\sum_1^\infty x^n/n^2$, Proc. London Math. Soc. **4** (1907), p. 169-189.

[**Sa 90**] T, Sasaki, *On the Veronese embedding and related system of differential equations*, dans Global differential geometry and global analysis, Lecture Notes in Math. **1481** (1991), p. 210–247.

[**Sc 04**] G. Scheffers, *Das Abel'sche Theorem und das Lie'sche Theorem über Translationsflächen*, Acta. Math. **28** (1904), p. 65-91.

[**Se-C 10**] C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circ. mat. di Palermo, **XXX** (1910).

[**Se-C 21**] C. Segre, *Sulle linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Rend. della R. Acc. dei Lincei **5**, Vol. XXX (1921).

[**Se-B 63**] B. Segre, *Differentiable varieties imbedded in a projective space and homogeneous systems of linear partial differential equations*, Tensor (N.S.), Vol. **13** (1963), p. 101–110.

[**Si 51**] F. Simonart, *Le théorème fondamental de la géométrie textile*, Colloque de Géométrie Différentielle, Louvain (1951), p. 167–174.

[**Smi 64**] S. Smirnov, *On certain problems of uniqueness in the theory of webs*, Volž. Mat. Sb. Vyp. **2** (1964), p. 128–135.

[**Tsc 27**] N. Tschebotarev, *Über Flächen welche Imprimitivitätsysteme in Bezug auf eine gegebene Kontinuirliche Transformations gruppe enthulten*, Recueie Math. (Sbornik) **34** (1927), p. 149-204.

[**Te 37**] A. Terracini, *Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie. I, II.*, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Sci. fis. mat. Vol. **26** (1937), p. 84-91 et p. 153-158.

[**Te 39**] A. Terracini, *Sur l'existence des surfaces ayant des lignes principales données*, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), p. 616-618.

[**Te 40**] A. Terracini, *Sobre la existencia de superficies cuyas lineas principales son dadas*, Un. Mat. Argentina, Publ. n. **16** (1940).

[**Th 27**] G. Thomsen, *Un teoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica sulle superficie isotermo-asintotiche*, Boll. Un. Mat. Ital. Bologna **6** (1927), p. 80-85.

[**Va 61**] G. Vaona, *Sul teorema fondamentale della nomografia*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **16** (1961), p. 258–263.

[**W**] J. Grifone, E. Salem (editeurs), *Web theory and related topics*, World scientific, 2001.

[**Wi 38**] W. Wirtinger, *Lie's Translationsmannigfaltigkeiten und das Abelsche Integrale*, Monatsh. Math. Phys. **46** (1938), p. 384-431.

[**Wes 02**] J. Wesolowski, *On a functional equation related to the Matsumoto-Yor property*, Aequationes Math., **63** (2002), p. 245–250.

[**Wo 84**] J. Wood, *A simple criterion for local hypersurfaces to be algebraic*, Duke Math. J., **51** (1984), p. 235–237.

[**Za 89**] D. Zagier, *The dilogarithm function in Geometry and number theory*, Tata inst. Fund. Res. Math. Stud, Bombay (1989).