



**HAL**  
open science

# Propagation des ondes dans les milieux désordonnés: étude de la phase des ultrasons et des ondes sismiques.

Domitille Anache-Ménier

► **To cite this version:**

Domitille Anache-Ménier. Propagation des ondes dans les milieux désordonnés: étude de la phase des ultrasons et des ondes sismiques.. Physique [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT: . tel-00335480

**HAL Id: tel-00335480**

**<https://theses.hal.science/tel-00335480>**

Submitted on 29 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

*N° attribué par la bibliothèque*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Thèse**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I**

*Spécialité : “Physique”*

préparée au

LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MODÉLISATION DES MILIEUX CONDENSÉS  
dans le cadre de *l'École Doctorale de Physique, Grenoble*

par

**Domitille Anache-Ménier**

---

**Propagation des ondes en milieu désordonné :  
des ultrasons aux ondes sismiques.  
Étude de la phase.**

---

*Sous la direction de :*

Bart VAN TIGGELEN et Ludovic MARGERIN

---

**Soutenue le 27 juin 2008 devant le jury composé de**

M. Yves COLIN DE VERDIÈRE	Professeur émérite, Université Grenoble I	Président du jury
M. Guust NOLET	Professeur, Université de Nice – Sophia Antipolis	Rapporteur
M. Jean-François PINTON	Directeur de recherche, CNRS ENS-Lyon	Rapporteur
M. Michel CAMPILLO	Professeur, Université Grenoble I	Examinateur
M. John PAGE	Professeur, Université du Manitoba	Examinateur
M. Bart VAN TIGGELEN	Directeur de recherche, CNRS LPMMC	Directeur de thèse
M. Ludovic MARGERIN	Chargé de recherche, CNRS CEREGE	Codirecteur de thèse



# Remerciements

*Mes premiers remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse sans lesquels ce travail n'aurait pas abouti. Je remercie tout particulièrement Bart van Tiggelen pour son encadrement, sa rigueur, ses multiples idées, la disponibilité qu'il a eue pour moi, mais aussi pour sa bonne humeur, toujours bienvenue après des heures de calculs infructueux ! Merci également à Ludovic Margerin, tant pour ses conseils et encouragements que pour les fructueuses discussions scientifiques que nous avons eues ensemble et qui ont permis à certains chapitres de cette thèse de voir le jour.*

*Durant ma thèse j'ai eu le plaisir de collaborer avec de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici : Philippe Roux, Eric Larose et Pierre Gouedard de l'équipe Ondes et Structure Interne du Globe du LGIT (Laboratoire de Géophysique Interne et de Tectonophysique) et plus particulièrement John Page de l'université du Manitoba.*

*Ma thèse s'est déroulée au Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés (LPM2C). Je souhaite ici remercier tous ses membres – permanents ou non – pour la chaleureuse ambiance qu'ils savent y faire régner et pour l'aide que chacun a toujours été prêt à m'accorder. Merci en particulier aux membres de l'équipe onde : Vincent Rossetto et Sergey Skipetrov. Je souhaite bonne chance et bon courage aux thésards Giulia Ferrini, Afifa Yedjour, Nicolas Cherroret, Nicolas Didier, Sébastien Kawka et Nicolas Pauget.*

*Je remercie également Yves Colin de Verdière, John Page et Michel Campillo d'avoir accepté d'être membres de mon jury et tout particulièrement les rapporteurs Jean François Pinton et Guust Nolet pour leurs commentaires constructifs et particulièrement pertinents sur le manuscrit.*

*J'ai eu l'occasion, dans le cadre du monitorat, d'enseigner à l'université Joseph Fourier et plus particulièrement à l'antenne Drôme Ardèche à Valence. Je tiens à remercier Isabelle Colomb, Eric Liatard, Jean Louis Oddou, Olivier Meplan et Marc Buonomo pour m'avoir accueillie dans leurs équipes respectives et pour les conseils pédagogiques et les encouragements qu'ils m'ont prodigués. J'ai également eu l'occasion de participer à plusieurs projets de vulgarisation scientifique coordonnés par Sylvie Zanier que je tiens à remercier également.*

*Enfin je remercie de tout coeur ma famille qui a su me soutenir et m'encourager au long de ces trois années de thèse. Merci particulièrement à mon frère Julien et à mes professeurs qui m'ont fait découvrir et aimer la physique au point que je souhaite en faire mon métier. Enfin un immense merci à mon mari Clément à qui je dédie cette thèse.*



# Table des matières

<b>Chapitre 1. Introduction</b>	1
1.1 Physique des ondes multiples diffusées	2
1.1.1 Propagation des ondes dans les milieux complexes	2
1.1.2 Les longueurs caractéristiques	3
1.1.3 Les différents régimes de propagation	4
1.1.4 Physique mésoscopique	6
1.1.5 Les tavelures	6
1.1.6 La coda	7
1.2 Objectifs et contenu de la thèse	8
1.2.1 Contexte de la physique mésoscopique	8
1.2.2 Cadre de travail	9
1.2.3 Une étude de la phase	9
<b>I Phase et diffuseurs en mouvement</b>	11
<b>Chapitre 2. Spectroscopie acoustique des ondes diffusées</b>	13
2.1 Spectroscopie acoustique des ondes diffusées	13
2.1.1 Description de la technique	14
2.1.2 Applications en matière molle	17
2.2 Interférométrie des ondes de coda	18
2.2.1 Description de la méthode	18
2.2.2 Application en prévention du risque volcanique	19
2.2.3 Mouvement d'ensemble des diffuseurs	19
2.2.4 Détermination d'un déplacement de la source	20
2.2.5 Changement de la vitesse de propagation dans le milieu	20
2.3 Application à la détection de faibles variations de température	20
2.3.1 Cas d'une cavité chaotique	20
2.3.2 Théorie en diffusion multiple	21
2.3.3 Observation de la diffusion multiple d'ultrasons dans une structure en béton et application à la détection de faibles changements	22
2.4 Conclusion	26

<b>Chapitre 3. Méscopie et statistique de la phase</b>	29
3.1 Définition de la phase	30
3.1.1 Signal analytique	30
3.1.2 Phase	31
3.1.3 Phase déroulée	31
3.2 Spécificité de la phase	31
3.3 Hypothèses	32
3.3.1 Hypothèse de champ scalaire	32
3.3.2 Hypothèses sur la nature du désordre	32
3.3.3 Hypothèse de champ de statistique gaussienne	33
3.3.4 Hypothèse de statistique circulaire	34
3.3.5 Signatures d'une statistique gaussienne	34
3.4 Étude théorique des statistiques et des fluctuations de la phase	35
3.4.1 Statistique des dérivées de la phase	35
3.4.2 Comportement asymptotique	38
3.4.3 Corrélations de phase	38
3.4.4 Corrélation de la phase déroulée	39
3.4.5 Variance	39
3.5 Diffuseurs en mouvement :	
fluctuations temporelles de la phase	39
3.5.1 Étude théorique préliminaire	40
3.5.2 Dispositif expérimental	41
3.5.3 Conclusion	41
3.6 Étude expérimentale : application à la diffusion d'ultrasons dans un milieu dynamique	44
<b>II Phase en sismologie</b>	53
<b>Chapitre 4. Diffusion multiple des ondes sismiques</b>	55
4.1 Phase et détermination de la structure de la Terre	56
4.1.1 Modèle de Terre latéralement homogène	56
4.1.2 Tomographie sismique	57
4.1.3 Diffusion simple	58
4.1.4 Analyse des fluctuations de phase sur un réseau	59
4.2 Diffusion multiple des ondes sismiques	60
4.2.1 La coda sismique	60
4.2.2 Facteur de coda $Q_c$	61
4.2.3 Approche mésoscopique	62
4.3 Étude théorique des fluctuations spatiales de phase dans la coda	63
4.3.1 Hypothèses	64
4.3.2 Statistiques	64
4.3.3 Corrélations	64

4.4	Étude en différences finies . . . . .	66
4.4.1	Déroulement de la phase . . . . .	67
4.4.2	Différences finies . . . . .	67
4.4.3	Distribution des différences de phase . . . . .	68
4.4.4	Corrélations en différences finies . . . . .	69
4.5	Conclusion et objectifs . . . . .	72
4.5.1	Caractère gaussien de la coda sismique . . . . .	72
4.5.2	Mesure du libre parcours moyen des ondes de Rayleigh dans la croûte . . . . .	72
4.5.3	Mesure du libre parcours moyen des ondes de Lamb . . . . .	73
<b>Chapitre 5. Diffusion d'ondes de flexion dans une plaque de Plexiglas® . . . . .</b>		<b>75</b>
5.1	Une modélisation en laboratoire de la croûte terrestre . . . . .	75
5.1.1	Cahier des charges . . . . .	75
5.1.2	Milieu diffusant . . . . .	76
5.1.3	Récepteurs . . . . .	77
5.1.4	Sources . . . . .	78
5.1.5	Études préliminaires nécessaires . . . . .	78
5.2	Caractérisation des ondes de Lamb . . . . .	79
5.2.1	Ondes de Lamb dans une plaque . . . . .	79
5.2.2	Relation de dispersion . . . . .	80
5.2.3	Coefficient d'équipartition $A_0$ et $S_0$ . . . . .	83
5.3	Diffusion d'ondes de flexion par une cavité cylindrique . . . . .	85
5.3.1	Calcul de la section efficace d'une cavité cylindrique dans une plaque . . . . .	85
5.3.2	Résultats . . . . .	87
5.4	Caractère gaussien de la coda élastique . . . . .	89
5.5	Étude statistique des variations de phase . . . . .	92
5.5.1	Distribution des différences de phase . . . . .	92
5.5.2	Distribution de la dérivée de la phase . . . . .	93
5.5.3	Distribution des dérivées d'ordre supérieur de la phase . . . . .	94
5.5.4	Exploitation des résultats . . . . .	96
5.6	Corrélations spatiales des différences de phase . . . . .	97
5.7	Discussion et conclusion . . . . .	100
<b>Chapitre 6. Diffusion d'ondes sismiques dans la croûte terrestre . . . . .</b>		<b>103</b>
6.1	Réseau temporaire déployé à l'observatoire de Pinyon Flat (Californie) . . . . .	104
6.1.1	Description du site . . . . .	104
6.1.2	Description du réseau . . . . .	105
6.1.3	Ondes de Rayleigh . . . . .	106
6.2	Statistique de la phase des ondes de coda sismique . . . . .	107
6.3	Introduction . . . . .	108
6.4	Phase measurements . . . . .	109
6.5	Gaussian interpretation . . . . .	112
6.6	Phase Difference Correlations . . . . .	114

6.6.1	Theory . . . . .	114
6.6.2	Data processing . . . . .	115
6.6.3	Numerical simulations vs. experimental results . . . . .	115
6.7	Conclusion . . . . .	116
<b>III Phase et topologie</b>		<b>119</b>
<b>Chapitre 7. Écrantage de charge topologique dans une figure de tavelures . .</b>		<b>121</b>
7.1	Généralités . . . . .	122
7.1.1	Singularités de phase . . . . .	122
7.1.2	Charge topologique . . . . .	123
7.1.3	Charge topologique totale dans une surface . . . . .	123
7.2	Statistiques de charge topologique dans les figures de tavelures . . . . .	124
7.2.1	Densité de charge topologique . . . . .	125
7.2.2	Valeur moyenne . . . . .	125
7.2.3	Fluctuations . . . . .	125
7.3	Écrantage et son lien avec le libre parcours moyen . . . . .	126
7.3.1	Cas de milieux $2\mathcal{D}$ et $3\mathcal{D}$ . . . . .	126
7.3.2	Principe des jumeaux . . . . .	128
7.3.3	Conclusion et perspectives . . . . .	129
<b>Chapitre 8. Fluctuations géantes de charge topologique dans un guide d'onde désordonné . . . . .</b>		<b>133</b>
8.1	Introduction . . . . .	134
8.2	Topological charge and screening . . . . .	134
8.3	Direct calculations . . . . .	136
8.4	Simulation . . . . .	140
8.5	Conclusion . . . . .	143
<b>Conclusion . . . . .</b>		<b>145</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>		<b>149</b>
<b>Diffusion des travaux de thèse . . . . .</b>		<b>159</b>

# Table des variables

$\otimes$	produit de convolution
$*$	complexe conjugué
$\sim$	transformée de Fourier
$\langle \dots \rangle$	moyenne d'ensemble
$\alpha$	chemin d'une onde partielle
$\beta$	autre indice caractérisant une onde partielle
$\gamma$	exposant caractérisant la décroissance de l'énergie de la coda
$\Gamma$	coefficient de dilatation temporelle des ondes
$\delta$	petite différence
$\Delta$	différence
$\epsilon_p$	2 si $p = 0$ , 1 sinon
$\epsilon$	$\rightarrow 0$
$\zeta$	distortion
$\eta$	partie imaginaire du champ analytique
$\theta$	coordonnée polaire angulaire dans le guide d'onde
$\Theta$	température
$\lambda$	longueur d'onde
$\nu$	module de Poisson
$\xi$	longueur caractéristique d'écrantage de charge
$\pi$	constante d'Archimède
$\rho$	coordonnée polaire radiale
$\sigma$	section efficace de diffusion
$\sigma^*$	section efficace de transport
$\tau$	temps de la dynamique du milieu
$\tau_c$	temps caractéristique de la dynamique
$\Upsilon$	temps de piégeage de l'onde dans un diffuseur
$\phi$	0 ou $\pi$
$\Phi$	phase du champ complexe
$\Phi_c$	phase déroulée ou cumulée
$\chi$	partie réelle du champ analytique
$\Psi$	champ analytique complexe
$\omega$	pulsation ou fréquence angulaire
$\Omega$	angle solide

---

$a$	rayon d'une cavité
$A$	amplitude du champ complexe
$A_0$	premier mode antisymétrique des ondes de Lamb
$\mathcal{C}$	contour
$C$	fonction de corrélation du champ
$C_{\Phi'}$	fonction de corrélation de la dérivée de la phase
$C_{\Delta\Phi}$	fonction de corrélation des différences de phase
$C_S$	vitesse des ondes S
$C_P$	vitesse des ondes P
$C^\varphi$	vitesse de phase
$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$	Matrice de corrélation
$d$	distance source-récepteur
$D$	diamètre d'un récepteur
$\mathcal{D}$	dimension de l'espace
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$	matrice diagonale
$E$	énergie
$f$	fréquence
$f_e$	fréquence d'échantillonnage
$f_c$	fréquence de coupure
$F$	$= g_1 \cos(\Delta\Phi)$
$\mathcal{F}(k)$	relation de dispersion
$\mathbf{F}$	transformée de Fourier
$\mathbf{F}^{-1}$	transformée de Fourier inverse
$G$	fonction de Green
$g_1$	$= C(\Delta x)$
$h$	demi-épaisseur
$h_d$	réponse impulsionnelle à la distance $d$
$H$	fonction de Heaviside
$H_p^{(1)}$	fonction de Hankel d'ordre $p$
$i$	$\sqrt{-1}$
$i$	indice entier
$I$	intensité du champ $= \Psi\Psi^*$
$\Im m$	partie imaginaire
$j$	indice entier
$J_p$	fonction de Bessel de première espèce d'ordre $p$
$k$	vecteur d'onde
$L$	taille du milieu de propagation
$l_a$	longueur d'absorption
$l_\phi$	longueur de cohérence
$\ell$	libre parcours moyen
$\ell^*$	libre parcours moyen de transport

$m$	exposant $1/2 < m < 1$ caractérisant la nature du mouvement des diffuseurs
$n$	densité des diffuseurs
$\mathcal{N}$	nombre de diffusions
$N$	entier, nombre de singularités de phase
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$P$	probabilité
$\underline{\mathbf{P}}$	matrice de passage
$p$	entier
$q$	charge topologique
$Q$	dans les parties 1 et 2 : paramètre de la distribution des variations de phase
$Q$	dans la partie 3 : charge topologique totale
$Q_c$	facteur de qualité de la coda
$r$	variable d'espace
$r_d$	enregistrement du récepteur à une distance $d$ de la source
$\mathbf{R}$	dans les parties 1 et 2 : paramètre des distributions des variations de phase
$R$	dans la partie 3 : rayon du contour $\mathcal{C}$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\Re$	partie réelle
$s$	abscisse curviligne
$\mathcal{S}$	surface
$S_0$	premier mode symétrique des ondes de Lamb
$S$	paramètre des distributions des variations de phase
$S(\vec{r}, t)$	source
$t$	temps de propagation des ondes
$t_c$	temps de coda
$T_w$	durée d'une fenêtre temporelle dans un signal
$\mathcal{T}$	temps d'arrivée d'une onde
$u$	lenteur : inverse de la vitesse de propagation
vp	partie principale
$v_P$	$= 2C_S \sqrt{1 - C_S^2/C_P^2}$ , vitesse de plaque des ondes de Lamb
$v_E$	vitesse de l'énergie
$\mathcal{V}^g$	vitesse de groupe
$W^{(i)}$	onde plane incidente
$W^{(s)}$	onde diffusée
$W^{(c)}$	onde dans une cavité
$x$	variable quelconque
$Y_p$	fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre $p$
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs



# CHAPITRE 1

## Introduction



**L**A PHYSIQUE DES ONDES joue un rôle prépondérant dans les communications, les phénomènes naturels ou en imagerie où elle est notre première source d'information. Or quasiment tous les milieux naturels ou artificiels sont désordonnés à une certaine échelle voire à plusieurs échelles. Ainsi il est important de comprendre la propagation des ondes dans ces milieux désordonnés, par exemple :

- d'une part pour sonder ces milieux tels que la Terre ou les tissus biologiques ; des progrès considérables ont pu ainsi être faits dans la localisation et la détection de tumeurs cancéreuses ; citons dans ce domaine les travaux de l'équipe du professeur C. Boccara [Boccara et Oraevsky, 2001] ;
- d'autre part pour remonter aux propriétés de l'onde incidente, par exemple à travers l'atmosphère ou un gaz interstellaire dans le cas des astrophysiciens ;
- ou encore pour développer de nouveaux matériaux et dispositifs qui profiteront du désordre pour avoir certaines propriétés inhabituelles et intéressantes ; soulignons la démonstration d'une résolution sub-longueur d'onde par retournement temporel à travers un milieu désordonné par l'équipe de M. Fink [Lerosey *et al.*, 2007].

Dans cette thèse nous étudions la phase des ondes qui se propagent dans les milieux complexes. Bien qu'aisément mesurable dans les domaines des ondes acoustiques et sismiques, la phase des ondes multiples diffusées a été relativement peu étudiée. L'objectif est de montrer son intérêt en tant qu'objet physique dans ces domaines.

Cette introduction comporte deux parties. Dans un premier temps (§1.1) nous proposons une présentation générale de la physique des ondes dans les milieux hétérogènes et désordonnés et notamment de la physique mésoscopique. Cette section s'adresse aux non-spécialistes. Elle introduit les principaux concepts nécessaires à la suite de ce travail. Ensuite nous précisons la problématique de la thèse et nous l'inscrivons dans le cadre de l'évolution des connaissances actuelles de la physique mésoscopique (§1.2).

## 1.1 Physique des ondes multiples diffusées

L'onde recouvre une grande variété de situations physiques très différentes. Toutefois des techniques et un formalisme communs ont pu être développés car comme le dit Brillouin "toutes les ondes se comportent de façon similaire" [Brillouin, 1960]. Cette thèse porte un intérêt particulier aux ondes acoustiques et élastiques qui se propagent dans les milieux complexes. Néanmoins, dans cette partie de l'introduction nous emprunterons de nombreux exemples au domaine de l'optique car ils sont très illustratifs.

### 1.1.1 Propagation des ondes dans les milieux complexes

Une onde est la propagation d'une perturbation réversible de propriétés physiques locales. Elle est représentée mathématiquement par un champ scalaire ou vectoriel, c'est à dire une fonction complexe de l'espace temps qui peut s'écrire sous la forme :  $\Psi(\vec{r}, t) = A \exp(i\Phi)$ . Dans le cas des ondes classiques, seule la partie réelle du champ est mesurable. Soulignons que la **phase**  $\Phi \in (-\pi : \pi]$  est certainement *la propriété la plus fondamentale de l'onde*, en effet elle gouverne les oscillations et la propagation.

Le comportement d'une onde est régi par son équation de propagation qui est une équation différentielle aux dérivées partielles spatiales et temporelles. Dans un milieu homogène, une onde se propage en ligne droite. En présence d'un gradient d'indice, l'onde est déviée, c'est ainsi que se produisent les mirages. Au niveau d'une discontinuité, l'onde peut être réfléchie comme la lumière sur un miroir. Voir l'illustration ci-dessous : figure 1.1.

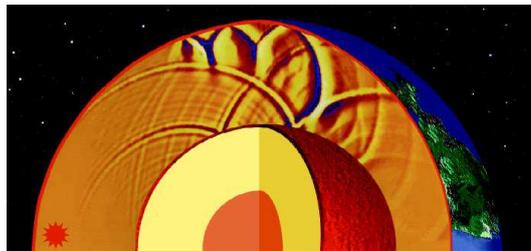


Fig. 1.1: *Instantané d'un champ d'onde : simulation numérique de la propagation d'une onde sismique de cisaillement dans le manteau terrestre générée par un séisme profond (étoile rouge en bas à gauche). Les gradients et les discontinuités de vitesse sont pris en compte. Source : M. E. Wysession et G. Caras.*

Lorsqu'une onde rencontre une hétérogénéité dont la taille est du même ordre de grandeur que sa longueur d'onde, telle qu'une particule ou une bulle en suspension dans un fluide, une fluctuation de densité, un défaut dans un solide cristallin ou une cellule dans un tissu biologique, alors l'onde est diffractée dans de multiples directions. On peut parler d'éparpillement. Ce phénomène est appelé **diffusion** et l'hétérogénéité est alors appelée diffuseur ou **centre diffuseur**. Un diffuseur est décrit par sa section efficace différentielle de diffusion  $d\sigma/d\Omega$ , qui

donne l'énergie de l'onde diffractée dans la direction qui forme un angle  $\Omega$  avec la direction d'incidence. La polarisation et la phase sont en général également modifiées suite à une diffusion mais elles ne sont pas décrites par la section efficace.

Dans le cas d'un milieu hétérogène et désordonné c'est beaucoup plus compliqué. Tous ces phénomènes peuvent se produire de nombreuses fois entre la source et le récepteur. C'est la raison pour laquelle on ne voit pas à travers le brouillard et pour laquelle on voit la lumière à travers sa main placée devant une lampe sans en apercevoir le squelette. La lumière est déviée dans tous les sens par les hétérogénéités et "oublie" sa direction d'origine. Pour un exemple de propagation dans un milieu avec de nombreux diffuseurs : voir la figure 1.2.

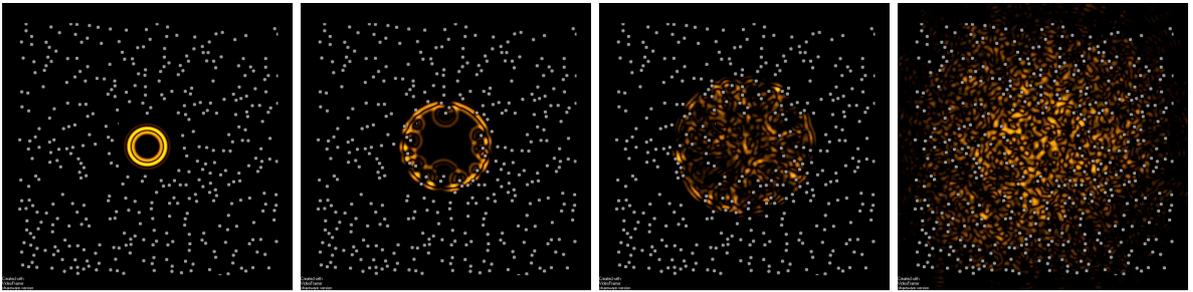


Fig. 1.2: *Instantanés successifs d'un champ d'onde : simulation par différences finies de la diffusion d'une onde acoustique sphérique dans un milieu bidimensionnel. Les diffuseurs, symbolisés par les points blancs sont des diffuseurs "mous" (condition de traction nulle) de diamètre  $\lambda/2$ . L'intensité de l'onde est représentée en niveaux arbitraires de couleurs. Source : M. Tanter, ACEL, LOA-ESPCI.*

### 1.1.2 Les longueurs caractéristiques

Outre la longueur d'onde  $\lambda$  et la taille  $L$  du milieu, quatre longueurs caractéristiques, que nous allons définir ci-dessous, interviennent dans la propagation d'une onde en milieu désordonné : le libre parcours moyen  $\ell$ , le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ , la longueur d'absorption  $l_a$  et la longueur de cohérence  $l_\phi$ .

**Le libre parcours moyen  $\ell$**  correspond à la distance moyenne entre deux diffusions de l'onde. On parle de faible désordre lorsque  $\ell > \lambda$ . Dans ce cas, il est donnée par  $\ell = \frac{1}{n\sigma}$  où  $n$  est la densité de diffuseurs et  $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$  est la section efficace des diffuseurs. Notons que dans un milieu 3D la section efficace est une surface tandis que dans un milieu 2D c'est une longueur.

**Le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$**  est la distance caractéristique que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction de propagation incidente. Soit  $\theta$  l'angle entre le vecteur d'onde incident et le vecteur d'onde diffusé, alors on définit  $\ell^*$  par :  $\ell^* = \frac{\ell}{1 - \langle \cos \theta \rangle}$ . On

voit dans cette expression que les contributions du diffuseur dans la direction de propagation incidente ( $\theta = 0$ ) s'annulent. Si la section efficace différentielle est isotrope alors  $\ell = \ell^*$ . Si la section efficace différentielle est plus importante vers l'avant, alors le rayon lumineux va rester plus longtemps dans sa direction d'incidence et on a effectivement  $\ell^* > \ell$ . Inversement dans le cas d'ondes élastiques on peut avoir  $\ell^* < \ell$  car pour des perturbations d'impédances on a davantage de diffusion vers l'arrière.

En optique,  $\ell^*$  est la distance au delà de laquelle on ne voit plus rien. Par exemple, dans un brouillard épais cette longueur est de l'ordre de quelques mètres pour une taille des gouttes d'eau entre 2 et 200  $\mu m$  et une densité de 300 à 600  $m^{-3}$ .

En sismologie, ni  $\ell$  ni  $\ell^*$  ne sont bien connus. Ils dépendent énormément de la fréquence et également de la partie de la Terre considérée. Pour les ondes sismiques à haute-fréquences ( $> Hz$ ), la croûte terrestre se comporte comme un milieu hétérogène. En revanche pour les ondes de longues périodes ( $< 0,1 Hz$ ) le principe de Fermat peut suffire à décrire la trajectoire des ondes sismiques dans le globe terrestre. Pour donner un ordre de grandeur, citons par exemple une expérience au Mexique qui a permis d'estimer le libre parcours moyen entre 20 et 100 km dans la gamme de fréquences 1 – 15Hz [Margerin *et al.*, 1999].

**La longueur d'absorption**  $l_a$  signifie que pour un système de taille  $L > l_a$  les ondes sont significativement absorbées et amorties. Elle peut s'écrire  $l_a = c\tau_a$  où  $c$  est la vitesse de propagation et  $\tau_a$  est le temps caractéristique d'absorption.

**La longueur de cohérence**  $l_\phi$  est propre aux systèmes quantiques. Elle décrit la longueur sur laquelle la fonction d'onde garde sa cohérence de phase. Pour des distances supérieures à  $l_\phi$  la phase est aléatoire et les effets d'interférence disparaissent suite au couplage avec l'environnement.

### 1.1.3 Les différents régimes de propagation

Le degré d'hétérogénéité du milieu quantifié par le libre parcours moyen  $\ell$  est une donnée fondamentale car il détermine la nature de la propagation dans le milieu (figure 1.5). Par exemple, lorsqu'on peut visualiser la trajectoire rectiligne d'un rayon lumineux, une partie de la lumière est diffusée par les poussières ambiantes vers nos yeux mais elle l'est au maximum une seule fois (photographie figure 1.3). On dit qu'on est dans un régime de **diffusion simple** (figure 1.5.a) dans lequel la distance entre la source et le récepteur sont de l'ordre du libre parcours moyen :  $L \lesssim \ell$ . Par contre un jour de très fort brouillard (photographie figure 1.4), le ciel apparaît uniformément lumineux et blanc, même en regardant en direction du soleil, ou de nuit, les phares des voitures créent des halos lumineux et ne donnent pas naissance à des faisceaux rectilignes. Dans ces situations nous sommes dans un régime de **diffusion multiple** de la lumière (figure 1.5.b). La lumière a été diffusée de nombreuses fois et a complètement

perdu la mémoire de sa direction initiale avant de nous parvenir : la distance parcourue par l'onde entre la source et le récepteur est grande devant le libre parcours moyen  $\ell$ . La thèse est centrée sur ce deuxième cas de figure. Enfin, le cas d'un désordre extrêmement fort, peut donner lieu à un troisième régime appelé "localisation forte" ou "localisation d'Anderson" dans lequel on observe l'arrêt complet du transport ondulatoire dû au désordre [Anderson, 1958] et qui a lieu lorsque  $\lambda > \ell$  (figure 1.5.c).



Fig. 1.3: Trajectoire des rayons lumineux au foyer d'un miroir concave visualisé par de la fumée. Cette photo été prise au four solaire de Mont-Louis. On est ici en présence d'un phénomène de diffusion simple : on visualise la propagation rectiligne des rayons lumineux à travers la fumée.



Fig. 1.4: Nuages dans la vallée de Grenoble : la perte totale de la visibilité du fond de la vallée indique un phénomène de diffusion multiple de la lumière par les nuages.

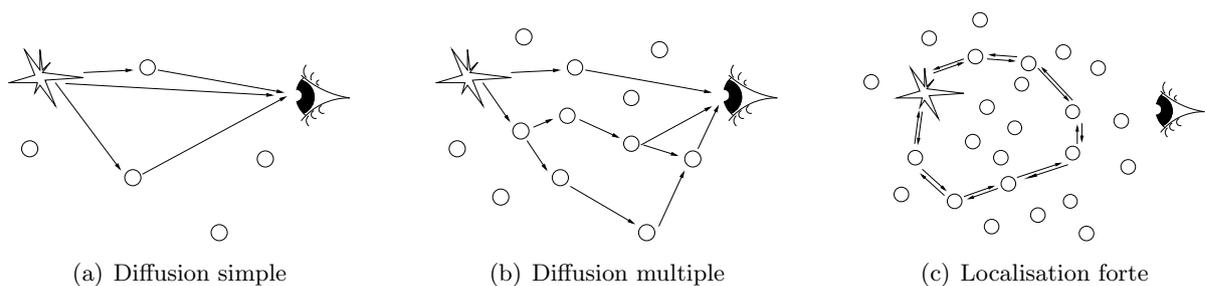


Fig. 1.5: Les différents régimes de propagation en milieux désordonnés. L'étoile symbolise une source et l'oeil symbolise un récepteur. (a) En régime de diffusion simple, l'onde a subi au maximum une seule diffusion avant de parvenir au récepteur. (b) En régime de diffusion multiple, l'onde enregistrée au niveau du récepteur est la superposition de nombreuses ondes partielles qui ont parcouru des chemins différents et qui ont chacune subi de nombreuses diffusions entre la source et le récepteur. (c) Dans le régime de localisation forte, l'énergie de l'onde est piégée par le désordre ambiant et ne parvient pas jusqu'au récepteur.

### 1.1.4 Physique mésoscopique

La propagation dans un milieu désordonné dans le régime de diffusion multiple peut elle-même être décrite à trois niveaux ou échelles. Le premier, qui est aussi le plus familier, est le niveau macroscopique. À cette échelle, avec une bonne approximation, l'intensité associée à l'onde a un comportement diffusif interprété comme le résultat d'une marche au hasard. À l'opposé, à l'échelle microscopique, le comportement de l'onde doit être entièrement décrit par son interaction avec les composantes élémentaires du milieu.

À l'échelle **mésoscopique**, les diffuseurs ne sont pas étudiés de façon individuelle mais les interférences entre les chemins de diffusion sont prises en compte. Deux éléments entrent en jeu : la diffusion de l'onde par un diffuseur et la propagation entre deux diffuseurs. Dans ce travail, nous nous plaçons à l'échelle mésoscopique.

À cette échelle, à cause de l'éparpillement par les diffuseurs, on peut représenter le champ d'onde comme une superposition de nombreuses ondes partielles  $\Psi_\alpha$  qui se propagent selon des chemins différents, c'est à dire différentes séquences de diffuseurs. Le champ en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  résulte de la superposition des ondes partielles :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

L'intensité en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  est donc :

$$I(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha, \beta} \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}^* = \sum_{\alpha} |\Psi_{\alpha}|^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}^* \quad (1.2)$$

Le premier terme correspond à la contribution de chaque chemin alors que le second correspond aux effets d'interférence entre les chemins.

### 1.1.5 Les tavelures

Les **tavelures** sont des fluctuations aléatoires de l'intensité. Il s'agit d'une caractéristique de la structure spatiale du champ en milieu désordonné ou aléatoire.

Lorsqu'une onde cohérente - lumineuse par exemple - s'est propagée à travers un milieu désordonné et a subi de multiples diffusions, sa cohérence spatiale est rapidement détruite. Les différentes ondes partielles qui se sont propagées selon différents chemins interfèrent les unes avec les autres en générant des variations aléatoires d'intensité dans le milieu avec une taille caractéristique de l'ordre de la longueur d'onde. On parle dans ce cas d'une figure de tavelures ou *speckle pattern* en anglais. C'est la figure de diffraction du milieu. Les tavelures sont surtout bien connues en optique où on dispose de capteurs bidimensionnels (cf. figures 1.6 et 1.7). De la même façon, le champ acoustique ou sismique dans un milieu désordonné hétérogène est dominé par des tavelures acoustiques ou élastiques.

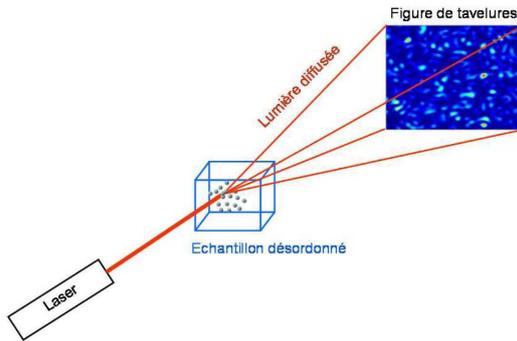


Fig. 1.6: Représentation schématique d'une expérience de diffusion multiple de la lumière. Un faisceau laser est diffusé dans un milieu désordonné (une suspension de petites particules diélectriques par exemple). La distribution de l'intensité diffusée est aléatoire et on l'appelle figure de tavelures. L'image de tavelures utilisée ici ainsi que dans la figure 1.7 est un résultat d'une simulation numérique effectuée par Andreas Völker (Université de Fribourg, Suisse).

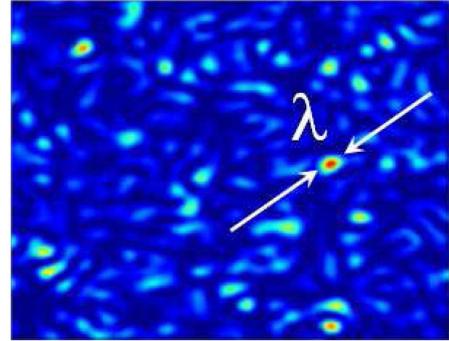


Fig. 1.7: Figure de tavelures à l'intérieur d'un milieu désordonné. Dans l'expérience de la figure 1.6, la taille des tavelures dépend de la longueur d'onde de la lumière, du rayon du faisceau incident et de la distance entre l'échantillon désordonné et l'écran. À l'intérieur de l'échantillon, les zones sombres et brillantes de la figure de tavelures ont une taille de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$ .

Malgré leur apparence aléatoire les figures de tavelures ne le sont pas complètement mais possèdent certaines corrélations spatiales. Par ailleurs chaque désordre donne lieu à une figure différente bien que de structure et d'apparence similaires. Les tavelures sont comme l'empreinte digitale du milieu. La figure d'interférence est même très sensible au moindre déplacement d'un diffuseur. C'est en utilisant les corrélations et la dynamique des tavelures qu'on pourra extraire des informations significatives des ondes dans le régime de diffusion multiple. Nous montrerons dans la suite de cette thèse qu'il est ainsi possible d'obtenir des informations sur la dynamique des diffuseurs, leur nature ou encore leur densité.

### 1.1.6 La coda

Lorsqu'on enregistre en fonction du temps la réponse impulsionnelle d'un milieu hétérogène et désordonné, on observe tout d'abord une première arrivée qui correspond au chemin le plus court entre la source et le récepteur et qui respecte le principe de Fermat. Cette arrivée dite directe est suivie d'un long signal d'apparence aléatoire et dépolarisée : c'est la **coda**. Elle résulte de la superposition des ondes partielles qui proviennent de toutes les directions et qui peuvent avoir parcouru une distance très grande devant la distance source-récepteur. Plus l'onde arrive tard dans la coda, plus elle a subi de diffusions et plus elle a exploré le milieu.

Dans le cas des ondes sismiques, la coda peut durer jusqu'à plusieurs dizaines de minutes

(Voir la figure 1.8).

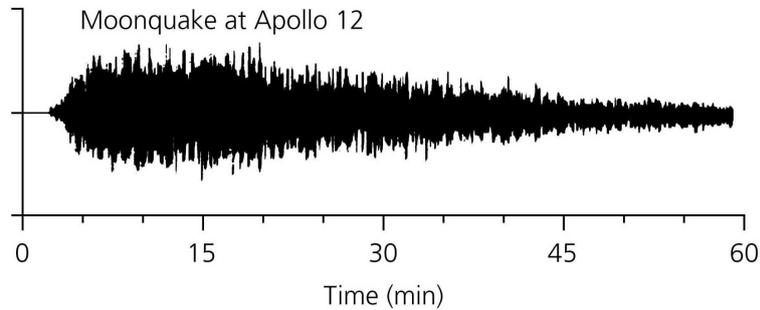


Fig. 1.8: *Séisme lunaire : sismogramme enregistré par Apollo 12 suite à l'impact de la fusée porteuse Saturn de Appollo 14 à une distance de 147 km. Ce sismogramme montre une longue coda à cause du régolithe très fracturé en surface et de la très faible atténuation. Source : Mitchell 1995, ©American Geophysical Union.*

## 1.2 Objectifs et contenu de la thèse

### 1.2.1 Contexte de la physique mésoscopique

La propagation des ondes en milieu aléatoire est un phénomène commun à de nombreux domaines de la physique. Son étude a connu un regain d'intérêt après la découverte en optique et en mécanique quantique d'effets cohérents inattendus dans un régime où on pensait que le désordre était suffisamment fort pour éliminer a priori tout effet d'interférences. Un défi récent consiste en l'élargissement du champ de la physique mésoscopique de l'échelle nanométrique – domaine de la mésoscopie optique et quantique actuelle – aux plus grandes échelles des milieux naturels tels que la croûte terrestre, l'atmosphère ou les tissus biologiques et des milieux complexes tels que les colloïdes, gels ou mousses. L'éventail est très vaste mais relève de la même approche mésoscopique des phénomènes ondulatoires.

Une des techniques expérimentales mises au point pour sonder un milieu complexe est la DWS (spectroscopie des ondes diffusées) qui permet d'obtenir des informations sur les propriétés d'un milieu complexe sans le perturber, notamment sur le vieillissement ou sur les propriétés mécaniques ou dynamiques du milieu. Récemment étendue aux ondes acoustiques, cette technique présente un grand intérêt pour les nombreuses applications des biotechnologies, de l'agroalimentaire et des cosmétiques.

Concernant l'application aux milieux naturels, et en particulier à la sismologie, jusqu'à ces dernières années l'attention a été principalement focalisée sur l'interprétation des temps d'arrivée à l'aide de la théorie des rais. En réalité, cette approche ne parvient à expliquer qu'une très faible partie des données car les observations montrent l'existence d'ondes diffusées par

la structure 3D de la Terre. Elles peuvent trouver leur origine dans les différentes couches de la Terre : dans la croûte, le manteau et même le noyau. Plusieurs expériences avec une approche mésoscopique ont confirmé de façon directe le rôle de la diffusion multiple en sismologie dans les hautes fréquences (de 1 Hz à 20 Hz) : citons notamment la rétrodiffusion cohérente et l'équipartition des ondes élastiques. Suite à cette observation, plusieurs techniques ont été mises au point pour sonder l'intérieur de la Terre en utilisant les ondes sismiques dans le régime de diffusion multiple : citons la CWI (interférométrie des ondes de coda) – proche de la DAWS (spectroscopie acoustique des ondes diffusées) – ainsi que l'utilisation des reconstructions des fonctions de Green à partir des corrélations dans la coda pour mesurer de très faibles variations de vitesses locales.

Plus généralement, le champ en régime de diffusion multiple est caractérisé par les figures de tavelures et la coda. Malgré cette structure d'apparence aléatoire, le champ est corrélé spatialement et temporellement à plus ou moins longue portée. C'est grâce à cette structure et à cette dynamique qu'on peut tirer de l'information des ondes en diffusion multiple. Cette structure est gouvernée par les phénomènes d'interférences, eux-mêmes gouvernés par la phase. En particulier, des études en optique et en micro-ondes ont mis en évidence le rôle important joué par les vortex de phase. Ces derniers se forment autour des noeuds du champ et sont étroitement liés à la structure et à la dynamique des figures de tavelures.

### 1.2.2 Cadre de travail

Notre étude est placée dans le régime dit *mésoscopique de faible désordre* défini par :  $\lambda \ll \ell^* \ll L \ll l_a$ . La propagation de l'onde est cohérente et de multiples diffusions ont lieu ( $\ell \ll L$ ). La longueur d'onde  $\lambda$  est petite devant le libre parcours moyen  $\ell$ . C'est donc le régime où on peut observer des phénomènes d'interférence tels que la localisation faible (ou rétrodiffusion cohérente) et les figures de tavelures.

Nous considérons plus particulièrement les ondes classiques – acoustiques et sismiques – dans un domaine fréquentiel allant de 10 Hz à 2,5 MHz. Les ondes ultrasonores et sismiques présentent un double avantage par rapport aux ondes optiques. D'une part il est possible de séparer temporellement et spatialement l'observation des différentes ondes et ainsi de sélectionner un phénomène physique spécifique. Notamment le régime mésoscopique des ondes classiques est borné par le temps de libre parcours moyen et par le temps d'absorption. D'autre part, compte tenu des longueurs d'onde en jeu, nous avons directement accès au champ et pas seulement à son intensité. Par conséquent, contrairement à l'optique il est aisé de mesurer la phase d'un champ acoustique ou sismique.

### 1.2.3 Une étude de la phase

Ce travail de thèse s'inscrit pleinement dans l'évolution des connaissances de la physique mésoscopique des ondes. D'une part, la phase est une propriété fondamentale des ondes puis-

qu'elle est la source des oscillations du champ et qu'elle contrôle la propagation. D'autre part, dans le domaine mésoscopique, la phase des ondes joue un rôle très important puisqu'elle est à l'origine des effets d'interférence. Pourtant elle n'a pas toujours eu l'attention qu'elle mérite. On l'utilise en interférométrie, ou encore en sismologie lorsqu'on mesure un temps d'arrivée d'une onde première. Toutefois dans le régime de diffusion multiple, dans des tavelures ou dans une coda sismique, on ne sait tout simplement pas comment l'exploiter.

Dans ce travail nous étudions la phase des ondes dans le régime de diffusion multiple (pour une définition rigoureuse de la phase voir le paragraphe 3.1). L'objectif de la thèse est de montrer qu'on peut considérer la phase comme un objet physique à part entière. Certes la phase ne contient qu'une partie de l'information du champ. Pourtant, compte tenu de son rôle fondamental, nous pensons qu'elle peut être un objet d'étude parfois plus pertinent que le champ lui-même. Nous chercherons à répondre à la question : quelles informations peut-on retirer de la phase sur le milieu de propagation ? En particulier, nous nous sommes focalisés sur deux enjeux principaux : comment sonder la dynamique des diffuseurs et comment mesurer l'hétérogénéité quantifiée par le libre parcours moyen ?

Nous avons choisi d'aborder le problème d'un point de vue à la fois théorique et expérimental. L'avantage de la théorie des ondes est que la plupart des résultats sont généraux et applicables à tout type d'onde et recouvrent une grande variété de situations physiques très différentes. Par conséquent nous avons pu explorer un spectre d'applications extrêmement large. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux ondes acoustiques et élastiques, dans les ultrasons et les ondes sismiques.

La caractéristique principale de cette étude de la phase est qu'il s'agit d'une étude statistique. En effet, le caractère aléatoire du champ dans le régime de diffusion multiple - mis en évidence par les figures de tavelures - nécessite et implique une approche de nature statistique : moyennes, distributions, corrélations. Nous nous baserons sur l'hypothèse que le champ est gaussien, et nous accorderons une importance particulière à la justification de cette hypothèse.

Première partie

Phase et diffuseurs en mouvement



## CHAPITRE 2

# Spectroscopie acoustique des ondes diffusées



LA PREMIÈRE partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la dynamique des diffuseurs. En acoustique, à la fois dans le domaine des ultrasons et en sismologie, des méthodes très efficaces ont été mises en place pour sonder la dynamique du milieu et mesurer le déplacement des diffuseurs : citons la vélocimétrie laser, la PIV (vélocimétrie par image de particule) et encore la détection hétérodyne. Cependant, dans le régime de diffusion multiple, ces techniques sont mises en défaut et il faut être plus astucieux. En effet, le champ acoustique multiplement diffusé est dominé par des tavelures qui proviennent de l'interférence entre les ondes diffusées qui ont suivi différents chemins à travers l'échantillon. Par conséquent l'information sur la position des diffuseurs est perdue. On peut toutefois utiliser les fluctuations de la figure de tavelures induites par le mouvement des diffuseurs pour étudier la dynamique collective du système. Il s'agit là de l'idée de la *spectroscopie acoustique des ondes diffusées* (DAWS) que nous présentons dans ce chapitre.

Ce chapitre consiste en un travail préliminaire introduisant la thèse. La technique de la DAWS ainsi que ses applications sont présentées dans la première partie (§2.1). Dans un deuxième temps (§2.2), nous présentons l'adaptation de cette technique à la sismologie et à la prévention du risque volcanique, appelée *interférométrie des ondes de coda*. Enfin, en illustration de la DAWS, nous décrivons une étude expérimentale montrant l'application à la détection de faibles changements dans une infrastructure en béton.

### 2.1 Spectroscopie acoustique des ondes diffusées

On doit le principe de la **spectroscopie acoustique des ondes diffusées** (DAWS) à John H. Page *et al.* dont les premiers résultats expérimentaux ont été publiés en 2000 [Cowan *et al.*, 2000, Page *et al.*, 2000]. Cette technique est une adaptation aux ondes acoustiques de la technique de **spectroscopie des ondes diffusées** (DWS, [Maret et Wolf, 1987]) créée pour l'étude des ondes lumineuses à la fin des années quatre-vingt. La différence entre

les deux est qu'en acoustique on a accès à l'amplitude et la phase du champ et pas seulement à son intensité.

La DWS est une technique expérimentale très puissante qui permet de sonder la dynamique des milieux désordonnés en utilisant les ondes optiques. Il s'agit d'une technique qui a fait ses preuves pour sonder les suspensions de petites particules, les émulsions, les mousses et d'autres milieux désordonnés [Maret, 1997]. Elle est désormais considérée comme un standard. Toutefois, les longueurs d'ondes lumineuses ne sont pas adaptées à l'étude de tous les milieux désordonnés, de plus il y a de nombreux milieux à la fois optiquement opaques et désordonnés. Par conséquent l'extension de cette technique aux ondes acoustiques et en particulier aux ultrasons s'avère également extrêmement intéressante.

### 2.1.1 Description de la technique

Le protocole type d'une expérience de DAWS est le suivant (Figure 2.1.a). À un instant  $t_1$ , un émetteur acoustique émet un signal source. Les ondes ainsi générées se propagent dans le milieu et subissent de multiples diffusions. Après un délai de propagation  $t$ , le champ est enregistré par un récepteur situé en  $\vec{r}$  :  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Ensuite, l'expérience est répétée à un instant ultérieur  $t_2$  tel que la durée  $\tau$  qui les sépare est  $\tau = t_2 - t_1$  où  $\tau \gg t$  est de l'ordre des temps caractéristiques de la dynamique de l'échantillon.

La DAWS est basée sur la fonction de corrélation qui mesure le degré de ressemblance entre deux signaux enregistrés à des dates différentes. Or plus les diffuseurs bougent moins les signaux se ressemblent d'un instant à l'autre. Il semble donc que la corrélation temporelle du champ acoustique soit l'outil approprié à la mesure de la dynamique du milieu étudié. De plus nous verrons que plus il y a de diffusions plus la corrélation est sensible au mouvement des diffuseurs ce qui représente une propriété très intéressante si on souhaite mesurer de très faibles variations.

Le principe est le suivant. Au temps de propagation  $t$ , une onde partielle a parcouru un certain chemin et la somme de toutes les ondes partielles donne lieu à une certaine valeur du champ  $\Psi(\vec{r}, t)$  au point  $\vec{r}$ . Après la durée  $\tau$ , à cause du mouvement des diffuseurs les ondes partielles parcourent des chemins légèrement modifiés. Si la durée  $\tau$  est petite ces chemins parcourent la même séquence de diffuseurs, mais ils ne sont pas identiques, car les diffuseurs se sont déplacés de petites distances  $\Delta\vec{r}(\tau)$ . Par conséquent, le nouveau champ  $\Psi(\vec{r}, t + \tau)$  n'est pas égal à  $\Psi(\vec{r}, t)$ . La nature (mouvement Brownien, mouvement directionnel ou autre) et l'intensité du mouvement collectif des diffuseurs peuvent être déduits de la fonction d'autocorrélation  $C(\tau)$  du champ de pression  $\Psi$  entre deux enregistrements distants de  $\tau$  qui est définie par :

$$C(t, \tau) = \frac{\langle \Psi(t)\Psi^*(t + \tau) \rangle}{\langle |\Psi(t)|^2 \rangle} \quad (2.1)$$

où  $\langle \dots \rangle$  désigne la moyenne d'ensemble. La moyenne d'ensemble est facile à obtenir dans le cas

des milieux turbides comme l'atmosphère ou les suspensions de diffuseurs dans un liquide (par exemple le lait) car le mouvement des diffuseurs permet si on attend suffisamment longtemps, de réaliser une moyenne sur différentes réalisations du milieu aléatoire. C'est à dire qu'on peut faire l'hypothèse d'ergodicité et remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne sur les instants  $t_1$  et  $t_2$ . La relation entre la corrélation  $C(\tau)$  et le déplacement quadratique moyen des particules diffusantes a été calculée par Cowan *et al.* [Cowan *et al.*, 2002]. Nous proposons d'en exposer la physique dans la suite de ce paragraphe.

En utilisant la représentation (Éq. 1.1) on obtient :

$$\langle \Psi(\vec{r}, t) \Psi^*(\vec{r}, t + \tau) \rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \Psi_{\beta}^*(\vec{r}, t + \tau) \rangle = \sum_{\alpha} \langle \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \Psi_{\alpha}^*(\vec{r}, t + \tau) \rangle \quad (2.2)$$

où les termes "croisés"  $\langle \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \Psi_{\beta}^*(\vec{r}, t + \tau) \rangle$  avec  $\alpha \neq \beta$  s'annulent à condition que la distance typique  $\ell$  entre deux diffusions (le libre parcours moyen) soit beaucoup plus grande que la longueur d'onde  $\lambda$ . Cette condition est largement vérifiée dans la plupart des milieux désordonnés et nous la supposons vérifiée dans ce chapitre. En effet, dans la limite  $\ell > \lambda$  on peut voir chaque onde partielle comme une succession de diffusions indépendantes les unes des autres, où chacune de ces diffusions induit un déphasage aléatoire. Si les chemins  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas identiques, ils doivent différer au minimum d'une diffusion, c'est à dire d'un déphasage aléatoire, on conclut alors que la différence de phase accumulée par deux ondes partielles, dont les chemins diffèrent au minimum d'une diffusion, est aléatoire. C'est cette différence de phases aléatoire qui annule la moyenne des termes croisés (*i.e.* pour  $\alpha \neq \beta$ ).

Par ailleurs, en représentant chaque onde partielle  $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$  arrivant au point  $\vec{r}$  en terme d'une amplitude  $A_{\alpha}$  et d'une phase  $\Phi_{\alpha}$ , sous la forme  $\Psi_{\alpha} = A_{\alpha} \exp(i\Phi_{\alpha})$ ; en supposant que l'amplitude est beaucoup moins affectée par le mouvement des diffuseurs que la phase et en supposant que les fluctuations de l'amplitude et de la phase sont indépendantes alors :

$$C(\tau) = \frac{\sum_{\alpha} \langle A_{\alpha} \rangle \langle \exp(i(\Phi_{\alpha}(t) - \Phi_{\alpha}(t + \tau))) \rangle}{\sum_{\alpha} \langle A_{\alpha} \rangle} = \sum_{\alpha} \langle \exp(i\Delta\Phi_{\alpha}(\tau)) \rangle \quad (2.3)$$

Pour calculer le déphasage  $\Delta\Phi_{\alpha}$ , on utilise l'approximation de diffusion dans laquelle on suppose que les ondes multiples diffusées voyagent dans l'échantillon selon une marche aléatoire caractérisée par la longueur moyenne de transport  $\ell^*$ , la vitesse de l'énergie  $v_E$  et le coefficient de diffusion  $D = v_E \ell^* / 3$ . On commence par le cas de la diffusion isotrope en considérant un seul chemin  $\alpha$  de marche aléatoire de  $N$  pas et donc de longueur totale  $s$  telle que :  $s = (N + 1)\ell$ . La contribution de ce chemin à la décroissance de  $C(\tau)$  est déterminée par le déphasage du mouvement de tous les diffuseurs sur le chemin. D'après la figure 2.1, on voit que entre les instants  $t$  et  $t + \tau$ , on a un déphasage total qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau) = \sum_{p=0}^{\mathcal{N}} \Delta\Phi_p(\tau) &= \sum_{p=0}^{\mathcal{N}} \left[ \vec{k}_p \cdot \{ \Delta\vec{r}_{p+1}(\tau) - \Delta\vec{r}_p(\tau) \} \right] \\
&= \sum_{p=1}^{\mathcal{N}-1} \vec{k}_p \cdot \Delta\vec{r}_{rel,p}(\tau, l) + \vec{k}_0 \cdot \Delta\vec{r}_1(\tau) - \vec{k}_{\mathcal{N}} \cdot \Delta\vec{r}_{\mathcal{N}}(\tau)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $\vec{k}_p$  est le vecteur de l'onde diffusée entre le  $p^{i\grave{e}me}$  et le  $(p+1)^{i\grave{e}me}$  diffuseur, et  $\Delta\vec{r}_{rel,p}(\tau) = \Delta\vec{r}_{p+1}(\tau) - \Delta\vec{r}_p(\tau)$  est le déplacement relatif des diffuseurs pendant l'intervalle de temps  $\tau$ .

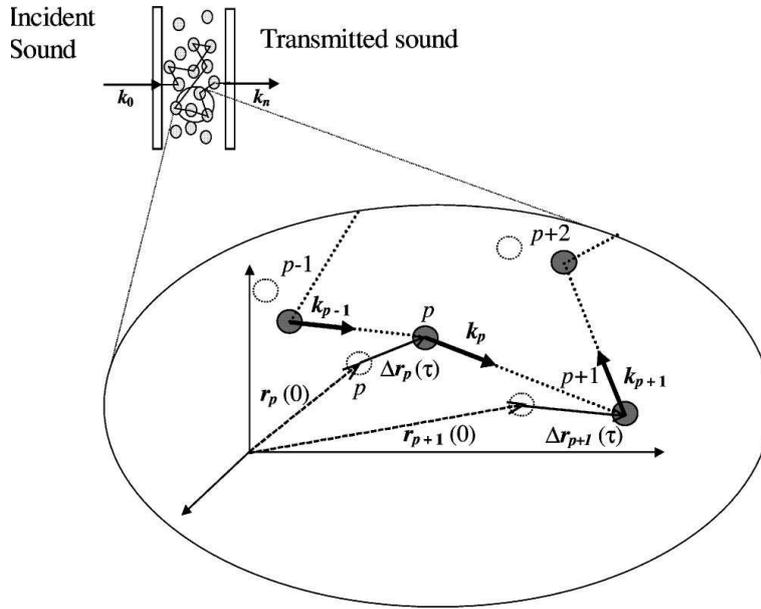


Fig. 2.1: Schéma type d'une expérience de DAWS. Gros plan sur un chemin de diffusion multiple avec des diffuseurs en mouvement. Les sphères pleines correspondent aux diffuseurs à l'instant  $\tau$  et les sphères creuses à l'instant initial. Source : [Cowan et al., 2002]

La fonction d'autocorrélation totale est obtenue en moyennant sur tous les chemins de  $\mathcal{N}$  diffuseurs, puis en sommant sur le nombre de pas  $\mathcal{N}$  de chaque chemin :

$$C(\tau) = \sum_{\mathcal{N}} P(\mathcal{N}) \langle e^{-i\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau)} \rangle \tag{2.5}$$

où  $P(\mathcal{N})$  est la fraction d'intensité diffusée dans les chemins de longueur  $\mathcal{N}$ . La moyenne  $\langle \dots \rangle$  dénote à la fois une moyenne configurationnelle sur le changement de position des diffuseurs et une moyenne sur tous les vecteurs d'onde possibles  $\vec{k}_p$ . Il faut ici distinguer deux façons différentes de procéder :

1. Dans une expérience en continu la somme s'étend nécessairement sur tous les  $\mathcal{N}$ .
2. Dans une expérience résolue en temps la longueur moyenne du chemin  $s$  est déterminée par le temps écoulé depuis l'émission du signal source  $t = s/v_E$  et on restreint la somme

aux chemins dont les longueurs diffèrent de la moyenne par la largeur temporelle du signal émis ( $\Delta tv_E$ ). En particulier pour une impulsion de largeur temporelle étroite,  $P(\mathcal{N})$  est quasi-constant dans la somme sur  $\mathcal{N}$  et la fonction de corrélation normée prend la forme très simple :

$$C(t_{\mathcal{N}}, \tau) \simeq \langle e^{i\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau)} \rangle \quad (2.6)$$

L'équation 2.6 montre immédiatement l'intérêt de la DAWS, en particulier pour les mesures utilisant un pulse. En effet,  $C(\tau)$  ne dépend pas des effets de conditions de bord, ni de l'absorption des ultrasons lors de la propagation à travers l'échantillon qui sont contenus dans le facteur  $P(\mathcal{N})$ . Dans la suite, nous nous limitons au cas 2 plus intéressant.

D'après le théorème de la limite centrale, si  $\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau) = \sum_{p=0}^{\mathcal{N}} \Delta\Phi_p(\tau)$  est une somme de variables aléatoires indépendantes (ce qui est une bonne approximation) avec  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  (valable en diffusion multiple, c'est à dire lorsque  $t > \ell/c$ ) alors  $\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau)$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle. Ainsi avec un développement en cumulants et sachant que pour une statistique gaussienne seul le cumulants d'ordre 2 est non nul, on obtient l'expression :

$$C(\tau) \simeq \langle e^{i\Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau)} \rangle \simeq e^{-\frac{1}{2}\langle \Delta\Phi^{(\mathcal{N})}(\tau)^2 \rangle}. \quad (2.7)$$

En utilisant de nouveau le fait que les déphasages de chaque diffusion sont indépendants ce qui est une bonne approximation pour les grandes valeurs de  $\mathcal{N}$ , on obtient à partir des équations 2.4 et 2.7 :

$$C(\tau) \simeq \exp \left[ -\frac{\mathcal{N}}{2} \langle [\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_{rel}(\tau)]^2 \rangle \right] \quad (2.8)$$

Enfin, lorsque les directions de  $\vec{k}$  et  $\Delta\vec{r}_{rel}$  ne sont pas corrélées, la moyenne donne :

$$C(\tau) \simeq \exp \left[ -\frac{\mathcal{N}k^2}{6} \langle \Delta r_{rel}^2(\tau) \rangle \right] \quad (2.9)$$

Cette expression montre que l'autocorrélation est une exponentielle décroissante avec le déplacement quadratique moyen et avec  $\mathcal{N}$  – directement relié au temps de parcours des ondes diffusées depuis leur émission. C'est à dire que l'expression 2.9 montre que plus  $\mathcal{N}$  est grand, c'est-à-dire plus il y a de diffusions, plus  $C$  est sensible au déplacement  $\langle \Delta r^2 \rangle$ . Pour illustrer cette sensibilité considérons l'exemple  $\mathcal{N} = 15$  : on est alors sensible à des déplacements de l'ordre du dixième de la longueur d'onde. Si on poursuit le calcul, il peut également être intéressant d'exprimer l'autocorrélation en fonction de l'évolution temporelle du tenseur des contraintes. Des expériences avec des suspensions de billes de verre dans un mélange d'eau et de glycérol ont validé l'efficacité de cette méthode [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002].

### 2.1.2 Applications en matière molle

La DAWS est devenue un outil quantitatif très important, notamment en physique des colloïdes [van Tiggelen et Skipetrov, 2003], grâce à son applicabilité à des systèmes contenant des très hautes concentrations de diffuseurs et de sa sensibilité extrême aux petits mouvements.

Cette sensibilité trouve son origine dans une amplification du déphasage due aux très longues trajectoires.

## 2.2 Interférométrie des ondes de coda

La technique de DAWS a également fait l'objet de nombreuses applications regroupées sous le nom d'**interférométrie des ondes de coda** (CWI) très utilisée en sismologie [Snieder, 2004, Snieder, 2006]. L'idée reste d'utiliser la corrélation du signal de diffusion multiple (coda) pour bénéficier de l'effet d'amplification induit par le grand nombre de diffusions et pour optimiser la précision de la mesure. La différence réside dans les propriétés du milieu de propagation. Contrairement à la DAWS créée pour l'étude de diffuseurs en mouvement dans un milieu fluide et où une moyenne sur les réalisations du désordre est possible, la CWI se focalise davantage sur des changements globaux des propriétés d'un milieu plutôt solide – notamment la Terre ou un bâtiment. Elle vise à étudier des milieux statiques susceptibles de subir de légères déformations telles qu'une dilatation, l'apparition d'une fissure ou un mouvement d'ensemble. Les paragraphes suivants proposent une description de la CWI et des principales applications qui en découlent à l'heure actuelle.

### 2.2.1 Description de la méthode

Soit une source d'ondes élastiques, artificielle ou naturelle, le signal transmis à travers le milieu désordonné est enregistré au niveau d'un récepteur. L'enregistrement qui en résulte est constitué en premier des ondes directes qui se sont propagées selon le chemin le plus court entre la source et le récepteur. Ensuite il est constitué d'un signal d'allure très compliquée, appelé **coda**, qui correspond aux ondes qui ont subi de nombreuses réflexions et diffusions avant de parvenir au récepteur (pour une description détaillée en sismologie : voir le paragraphe 4.2.1). On appelle **temps de coda**  $t_c$  ou **âge de la coda** le temps d'enregistrement compté à partir du temps initial d'émission de la source. Plus le temps de coda est grand plus les ondes enregistrées ont parcouru une grande distance et plus elles ont subi des diffusions.

Soit deux enregistrements différents du champ :  $\Psi_1(t_c)$  à la date 1 et  $\Psi_2(t_c)$  à la date 2. La CWI est basée sur le calcul de la fonction d'intercorrélation normalisée de  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  calculée sur une fenêtre de la coda centrée en  $t_c$  dans la coda et de courte durée  $T_w$  :

$$C_{1,2}^{t_c}(t) = \frac{\int_{t_c-T_w/2}^{t_c+T_w/2} \Psi_1(t') \Psi_2(t' + t) dt'}{\sqrt{\int_{t_c-T_w/2}^{t_c+T_w/2} \Psi_1^2(t') dt' \int_{t_c-T_w/2}^{t_c+T_w/2} \Psi_2^2(t') dt'}} \quad (2.10)$$

Contrairement à la DAWS, la moyenne d'ensemble est uniquement réalisée par une moyenne sur la fenêtre d'enregistrement de la coda de durée  $T_w$ , c'est à dire sur les différents chemins

de propagation de longueur  $\sim t_c v_e$ . L'exploration du milieu par les différentes ondes partielles permet d'obtenir une moyenne équivalente à la moyenne d'ensemble.

Les informations contenues dans la fonction de corrélation  $C_{1,2}^{t_c}$  sont apportées par son maximum dont les caractéristiques sont :

1. Le **décalage**  $t_{max}$  défini comme le temps du maximum :  $t_{max}$  est la moyenne de la différence des temps de propagation des ondes 1 et 2 qui arrivent dans la fenêtre temporelle  $T_w$  centrée en  $t_c$  ;
2. La **distortion**  $\zeta$  quantifiée par  $\zeta = 1 - C_{max} = 1 - C_{1,2}^{t_c}(t_{max})$  où  $C_{max}$  est le maximum de corrélation, c'est à dire la corrélation lorsque les enregistrements  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont "recalés" : la distortion est reliée à la variance  $\sigma_t$  de la différence des temps de propagation des ondes 1 et 2 par la relation suivante :

$$\zeta = \frac{1}{2}\omega^2\sigma_t^2 \quad (2.11)$$

où  $\omega$  est la pulsation centrale.

Les valeurs  $C_{max}(t_c)$  et  $t_{max}(t_c)$  sont les éléments clefs de la CWI et sont utilisées différemment selon l'objectif recherché. Les différentes applications qui existent sont exposées dans les paragraphes suivants.

### 2.2.2 Application en prévention du risque volcanique

La technique de CWI peut être utile en contrôle non destructif pour surveiller des infrastructures comme des tunnels, des volcans ou des failles. Un changement du milieu comme par exemple l'apparition d'une fissure induit une modification des formes d'onde et une augmentation de la distortion  $\zeta$ . Cet effet est significativement plus important dans la coda que dans les ondes directes. L'utilité en prévention du risque volcanique a été démontrée par Poupinet *et al.* dans le cas de la faille de Calaveras (Californie) [Poupinet *et al.*, 1984] et du Mont Merapi (Indonésie) [Ratdomopurbo et Poupinet, 1995]. Ces résultats ont été confirmés par Grêt *et al.* qui ont mis en évidence par cette technique un changement structural du volcan Mont Érebus le 8 janvier 2000 [Grêt *et al.*, 2005]. En effet, la technique est utilisable grâce à la forte hétérogénéité du sous-sol dans les régions volcaniques. Les applications d'une telle observation sont évidentes. On espère ainsi prévoir les éventuelles éruptions volcaniques parce qu'on s'attend à ce qu'elles soient précédées de modifications de la structure interne de l'édifice volcanique.

### 2.2.3 Mouvement d'ensemble des diffuseurs

J.E. Vidale a utilisé les ondes sismiques diffusées par la graine (le noyau solide) pour mesurer avec précision une rotation de  $0.15^\circ$  par an par rapport au manteau [Vidale *et al.*, 2000]. La carte des décalages  $t_{max}$  - en forme de papillon - a mis en évidence une différence entre le décalage des ondes passées par un côté ou l'autre de la graine.

### 2.2.4 Détermination d'un déplacement de la source

Lorsque la position de la source (par exemple un épicycle) change d'une distance  $\delta$ , seule la distance entre la source et le premier diffuseur change pour chaque chemin. Snieder *et al* [Snieder et Vrijlandt, 2005] ont étudié comment mesurer le déplacement  $\delta$  dans le cas de différentes natures de sources. En particulier, pour une source isotrope :

$$\begin{cases} t_{max}(t_c) = 0 \\ \sigma_t^2 = \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{c} \end{cases} \quad (2.12)$$

La précision de la mesure ainsi obtenue est meilleure que la différence des localisations individuelles des sources.

### 2.2.5 Changement de la vitesse de propagation dans le milieu

Dans le cas d'un changement de vitesse de propagation des ondes  $\Delta c$ , on peut conjecturer qu'un phénomène de dilatation temporelle des formes d'ondes de la coda va se produire. Ce phénomène implique :

$$t_{max} = \frac{\Delta c}{c} t_c \quad (2.13)$$

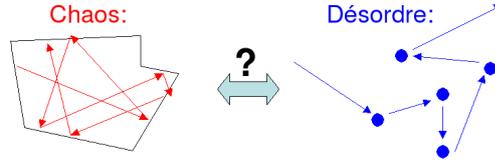
Une telle variation de vitesse peut être le révélateur d'un changement des contraintes ou de la température dans le milieu [Poupinet *et al.*, 1984, Pandolfi *et al.*, 2006, Brenguier *et al.*, 2008].

## 2.3 Application à la détection de faibles variations de température

Ce travail, préliminaire à la thèse, a été notamment l'objet de ma thèse de Master [Anache, 2005]. Il s'agit d'un travail à la fois théorique et expérimental qui consiste en une bonne illustration des possibilités offertes par les techniques de DAWS et CWI. La problématique est la suivante : comment une variation de température affecte-t-elle la diffusion multiple et modifie-t-elle les ondes de coda ?

### 2.3.1 Cas d'une cavité chaotique

En 2003, le professeur R. Weaver et son équipe ont montré expérimentalement dans un bloc d'aluminium que, lorsque la température augmente, les ondes sont ralenties ce qui conduit à une dilatation temporelle du signal avec un coefficient  $\Gamma$  ainsi qu'une légère distortion [Weaver et Lobkis, 2000, Lobkis et Weaver, 2003]. Soulignons que cette expérience n'est pas tout à fait de la diffusion multiple car l'aspect chaotique est dû aux réflexions aux surfaces. Comme l'indique la figure 2.2 les deux situations présentent cependant de nombreuses analogies.

Fig. 2.2: *Chaos vs. désordre*

R. Weaver propose la formule suivante pour la fonction d'intercorrélation à deux températures (Éq. 2.10 où les indices 1 et 2 se réfèrent aux deux températures) à la fréquence  $\omega$  :

$$C_{1,2}^{t_c}(t) \sim \exp(i\omega(t - \Gamma t_c)) \exp(-\zeta) \quad (2.14)$$

qui est maximale en  $t_{max} = \Gamma t_c$ , et où  $t_c$  est l'âge de la coda et  $t$  le temps de corrélation. Cette expression montre que le signal est dilaté temporellement d'un facteur  $\Gamma = \Delta c/c$  qui correspond à la moyenne pondérée des variations de vitesse des ondes S et des ondes P. Le signal est également distordu (distortion  $\zeta$ ) ; c'est une conséquence des conversions entre les ondes  $S$  et  $P$  à la surface et du fait que les vitesses de propagation des ondes de compression et de cisaillement varient différemment avec la température.

### 2.3.2 Théorie en diffusion multiple

Cette étude théorique a pour objectif de calculer le facteur de dilatation de la coda dans le régime de diffusion multiple. Dans l'équation 2.14, seul le changement de la vitesse entre les réflexions ou les diffusions  $\Delta c/c$  intervient. Dans le cas de diffuseurs, nous pensons qu'il peut y avoir des contributions supplémentaires non négligeables telles que la variation de vitesse à l'intérieur des diffuseurs  $\Delta c_1/c_1$  ainsi que le temps de piégeage de l'onde à l'intérieur d'un diffuseur. On fait l'hypothèse d'ondes scalaires afin de simplifier le problème et tout en gardant à l'esprit que les ondes élastiques sont vectorielles.

#### Principe du calcul :

Le calcul se place dans le cadre de la théorie du transfert radiatif et se base sur l'approximation de champ moyen (équation de Dyson) et sur l'équation de transport de Bethe-Salpeter [Lagendijk et van Tiggelen, 1996, Akkermans et Montambaux, 2004]. Nous obtenons ainsi une équation de Boltzman à deux températures [Anache, 2005].

#### Résultat :

Le résultat obtenu démontre qu'au premier ordre on a effectivement une dilatation temporelle du signal multiplement diffusé et que le facteur de dilatation  $\Gamma$  correspondant s'écrit :

$$\Gamma = \frac{\left(-\frac{\Delta c}{c} + \Upsilon c^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{-1} \left(\frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c}{c^3}\right)\right)}{1 + \Upsilon} \quad (2.15)$$

Interprétons les différents termes de ce facteur de dilatation :

- $\Upsilon$  est lié au temps de séjour des ondes dans les diffuseurs. C'est le rapport de l'énergie de l'onde uniquement dans les diffuseurs sur l'énergie de l'onde dans le milieu sans diffuseurs.
- $\frac{1}{1+\Upsilon}$  est une sorte de coefficient de normalisation lié à la conservation de l'énergie.
- $\frac{\Delta c}{c}$  est la contribution au facteur de dilatation qu'on a qualifiée de triviale car elle provient de la variation de la vitesse entre les diffuseurs.
- $\Upsilon c^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{-1} \left(\frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c}{c^3}\right)$  est la contribution des diffuseurs mêmes et qui est, par contre, non triviale. On voit qu'interviennent les variations de vitesse dans les diffuseurs et aussi à l'extérieur des diffuseurs. En facteur, on a  $\Upsilon$  c'est-à-dire la proportion d'énergie piégée dans les diffuseurs.  $\Upsilon$  dépend de la fréquence et peut présenter des résonances. Pour ces résonances, on a alors uniquement la contribution non triviale qui intervient dans le facteur de dilatation.

### 2.3.3 Observation de la diffusion multiple d'ultrasons dans une structure en béton et application à la détection de faibles changements

La problématique de notre étude expérimentale en collaboration avec E. Larose, J. De Rosny, P. Gouedard et M. Campillo a été la suivante : comment une variation de température affecte-t-elle la diffusion multiple et modifie-t-elle les ondes de coda ? Le but est de voir si les résultats de R. Weaver du paragraphe 2.3.1 peuvent être reproduits en milieu non contrôlé (une structure en béton) et se rapprochant des conditions des milieux naturels (roches...). Les résultats décrits ici sont reproduits en deuxième partie de l'article intitulé *Observation of multiple scattering of khz vibration in a concrete structure and application to weak changes monitoring* et publié dans Physical Review E **73**, 016609 (2006).

Nous étudions la propagation d'ondes élastiques avec une fréquence de l'ordre du kHz dans une structure en béton. Dans un premier temps, l'observation de la rétrodiffusion cohérente, par E. Larose *et al.* [Larose *et al.*, 2006] a démontré la présence de diffusion multiple dans la fin des enregistrements, avec un temps libre moyen de l'ordre d'une dizaine de millisecondes. Compte tenu des longueurs d'onde en présence ( $\lambda \sim 0.5 m$ ) qui sont beaucoup plus grandes que les hétérogénéités ( $\sim 3 cm$ ), la propagation est probablement essentiellement dans le régime de réverbération multiple.

Nous proposons ici une application de la DAWS/CWI à la réverbération multiple dans le béton : grâce à leur sensibilité aux faibles changements du milieu, les ondes tardives de la coda sont utilisées pour sonder des variations thermiques.

### Étude préliminaire :

Lors d'une expérience préliminaire, nous avons utilisé un marteau pour le signal source et nous avons comparé les enregistrements pour un écart de température de  $2^\circ\text{C}$  mesuré dans le béton. Suite à un filtrage entre 350 Hz et 550 Hz, nous avons mesuré la corrélation temporelle suivant l'équation 2.10. La figure 2.3 montre que le décalage  $t_{max}$  (définition §2.2.1) des formes d'onde varie linéairement avec le temps de coda  $t_c$ , ce qui signifie que la coda est dilatée temporellement [Anache, 2005].

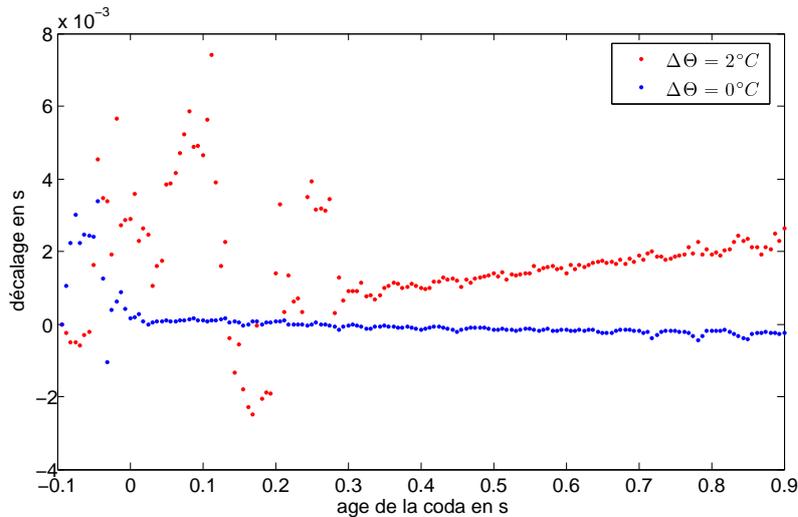


Fig. 2.3: Décalage temporel des fronts d'ondes en fonction du temps de coda  $t_c$  : en rouge, la mesure pour une variation de température de  $2^\circ\text{C}$  dans le béton et en bleu, la mesure témoin pour une variation de température nulle. La proportionnalité entre le décalage  $t_{max}$  et le temps de coda  $t_c$  démontre que la coda subit une dilatation temporelle suite à une variation de température. Pour les 300 premières millisecondes, c'est à dire les ondes directes, on constate qu'on n'arrive pas à mesurer le décalage temporel, probablement à cause de la saturation du système récepteur.

### Dispositif expérimental :

L'expérience a été menée au second étage d'un bâtiment (le L.G.I.T. à Grenoble) avec une ossature en béton. Un accéléromètre (BK-4381) a été placé à 7 mètres d'une source sismique ( $\sim \text{kHz}$ ). Une attention particulière a été portée à la reproductibilité de la source. En particulier, un coup de marteau, d'origine humaine, ne peut pas rester reproductible durant plusieurs heures. Par conséquent, un pot vibrant (TIRA TV-51120) a été utilisé. Il émet un balayage fréquentiel linéaire  $S(t)$  entre 20 Hz et 2 kHz et de durée 10 s. Afin d'améliorer le rapport-signal-sur-bruit, la réponse  $r_\Theta(t)$  de la structure en béton au signal source a été moyennée sur 10 enregistrements successifs. L'expérience a été répétée toutes les 5 minutes durant 13 heures.

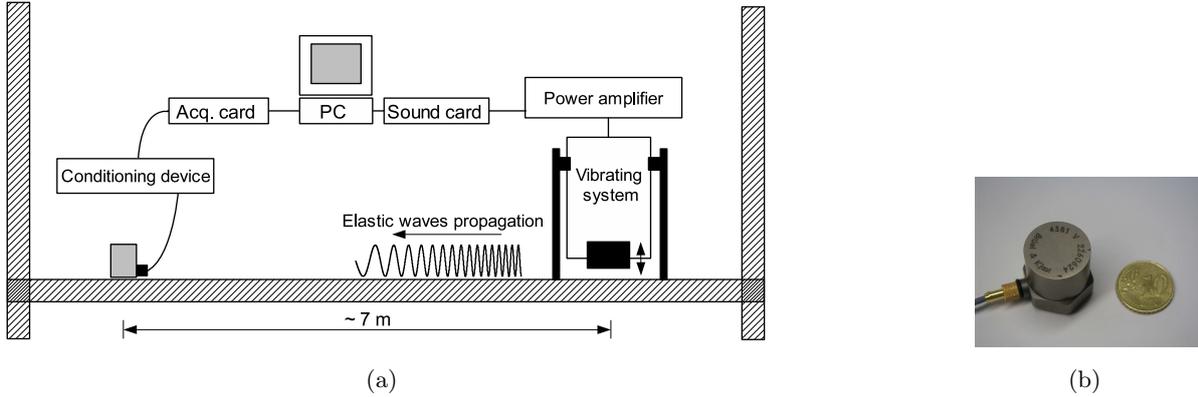


Fig. 2.4: Dispositif expérimental. (a) Un pot vibrant émet un balayage fréquentiel entre 20 Hz et 2 kHz, de durée 10 s. L'accélération à la surface de la structure en béton est enregistrée à 7 m de distance. Chaque enregistrement est moyenné sur 10 réalisations. Cette séquence est répétée toutes les 5 minutes durant 13 heures. (b) Photographie d'un accéléromètre (Vertical, BK 4381).

### Traitement du signal :

Les signaux  $r_{\Theta}(t)$  sont ensuite corrélés avec le signal source  $S(t)$ . Cette étape est nécessaire à la recompression temporelle du signal et permet d'obtenir une bonne estimation de la réponse impulsionnelle  $h_{\Theta}(t)$  :  $h_{\Theta}(t) = r_{\Theta}(t) \otimes S(t)$ .

Les formes d'onde  $h_{\Theta}(t)$  enregistrées à  $t_1 = 0h03$  et  $t_2 = 7h00$  sont représentées dans la figure 2.5. Elles correspondent à une chute de température de  $3^{\circ}C$  dans le béton. Le décalage temporel attendu n'est pas visible pour les ondes directes ( $t_c = 4 ms$ ). En revanche, pour les ondes de coda, un décalage est clairement visible ( $\sim 0.18 ms$  en moyenne autour de  $t_c = 40 ms$ ), ce qui correspond à un taux de dilatation de  $\Gamma = 0.45\%$ .

Ensuite, on calcule le décalage  $t_{max}$  entre les deux formes d'onde au temps de coda  $t_c$ . Comme Lobkis *et al.* [Lobkis et Weaver, 2003], on utilise la fonction d'intercorrélation à deux températures (Éq. 2.10) où les indices 1 et 2 désignent respectivement les températures intantanée  $\Theta$  et de référence  $\Theta_0$ . L'intercorrélation est calculée dans une fenêtre temporelle centrée en  $t_c = 40 ms$  où le décalage est bien visible et également dans une fenêtre temporelle centrée en  $t_c = 4 ms$  à titre d'expérience témoin.

### Résultats :

La mesure du décalage temporel en fonction de l'heure de la journée est présentée dans la figure 2.6 conjointement à la température extérieure mesurée. Les décalages sont calculés autour des arrivées directes  $t_c = 4 ms$  et pour les ondes multiples diffusées/réfléchies ( $t_c = 40 ms$ ). L'expérience a été menée durant l'été (le 28 juillet 2005), lorsque des amplitudes de températures très importantes étaient observées : de  $\Theta = 17^{\circ}C$  durant la nuit à  $\Theta = 32^{\circ}C$  à 13 heures. Ces variations induisaient une variation de la température du béton entre  $\Theta = 26^{\circ}C$  et  $\Theta = 30^{\circ}C$ . À partir de la variation de température mesurée de  $4^{\circ}C$  dans le béton et le retard

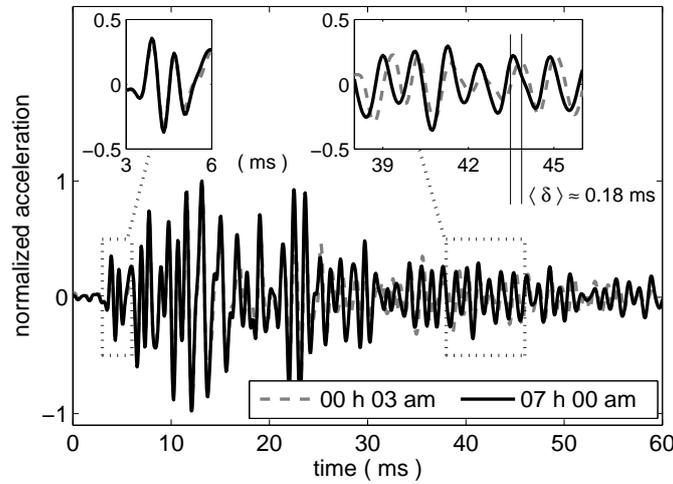


Fig. 2.5: Exemple de deux réponses impulsionnelles à deux différents moments de la journée : à minuit et à 7 heures du matin. Les ondes directes (i.e. les premières millisecondes de l'enregistrement) restent inchangées. Plus tard dans la coda, un léger décalage est observé. Ce décalage est dû aux faibles changements de température dans le béton qui induisent un accroissement de la vitesse de propagation des ultrasons. Dans cet exemple, on observe que la distorsion est faible.

associé de  $0,25\text{ ms}$  on déduit le taux de dilatation thermique des vitesses de propagation dans le béton dans notre expérience :  $0.15\%/^{\circ}\text{C}$ .

Durant la nuit, le béton était beaucoup plus chaud que la température extérieure et se refroidissait lentement. Durant la journée la température extérieure augmentait très rapidement et la structure de béton se réchauffait. Ceci est vérifié par le décalage observé dans la figure 2.6 : le décalage temporel décroît durant la nuit et augmente durant le jour. À cause de l'épaisseur de la dalle de béton (20 cm) et du processus de diffusion thermique, la variation de température à l'intérieur du béton est retardée ( $\sim 1$  heure) et atténuée. De plus des variations spatiales de la température à l'intérieur de la structure en béton sont observées : à certains moments des écarts de 4 degrés ont été observés dans la structure. Par conséquent, le décalage  $t_{max}$  mesuré doit être attribué à une variation de température moyennée sur toute la structure explorée par les ultrasons et non pas au seul changement mesuré à côté du récepteur.

Le but est de mesurer le coefficient de dilatation thermique de la coda  $\partial\Gamma/\partial\Theta$  avec le maximum de précision. Cela requiert de mesurer le retard dans une fenêtre temporelle loin dans la coda. Cependant il faut faire un compromis car la distorsion augmente également avec le temps de coda. Cette distorsion est due à une dépendance différente avec la température des ondes S et P [Lobkis et Weaver, 2003] ; elle peut également être due à un changement des propriétés de diffraction et de réverbération dû à la dilatation. Dans notre dispositif expérimental le temps de coda optimal était de  $40\text{ ms}$  soit une distorsion maximale de 12%.

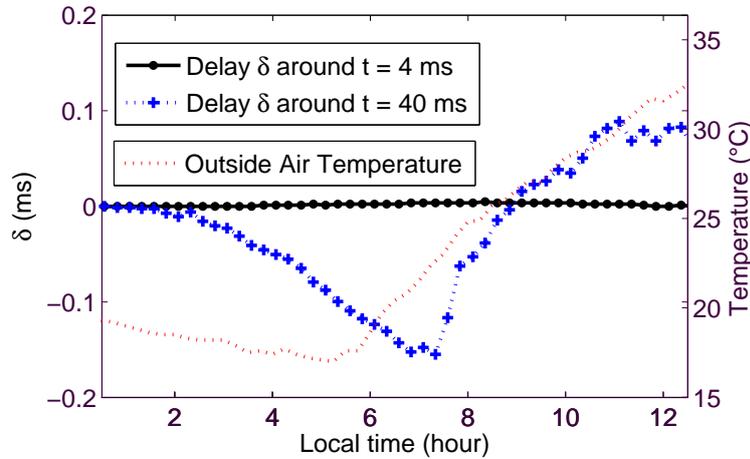


Fig. 2.6: Décalage temporel  $t_{max}$  calculé autour de  $t_c = 4ms$  (ondes directes) et autour de  $t_c = 40ms$  (ondes multiples diffusées) en fonction de l'heure de la journée. Durant la nuit, l'air frais refroidit le béton ce qui induit une augmentation de la vitesse de propagation et un décalage négatif. À partir de 7 heures du matin, l'air extérieur et les radiations du soleil réchauffent la structure en béton, ce qui induit un décalage croissant.

### Conclusion :

Tandis que l'effet de la variation thermique est pratiquement indécélable dans les ondes directes et le plus souvent négligé en ingénierie, nous démontrons que les ondes de coda présentent une dilatation temporelle mesurable. Par conséquent nous obtenons une estimation du changement de vitesse de propagation avec la température, ce qui est très difficile à obtenir avec les techniques standards "pulse-écho". Cette expérience est une première étape pour d'autres applications comme la mesure de contraintes, du vieillissement, de dommages, et des fissures dans les structures en béton. En effet, une fois la dépendance en température établie, on peut imaginer corriger la dilatation temporelle de la coda de manière à mesurer des changements encore plus faibles et causés par d'autres mécanismes. Cette technique peut être potentiellement très utile en contrôle non destructif, dans les structures en béton de centrales nucléaires, ou tout bâtiment d'intérêt stratégique.

## 2.4 Conclusion

Les techniques DAWS et CWI sont très performantes et ont fait leurs preuves. En particulier, cela est confirmé par la démonstration expérimentale de l'applicabilité à la détection de faibles changements – notamment de faibles variations de températures – dans une infrastruc-

ture en béton.

Plus généralement, ce chapitre met en évidence qu'en dépit de leur apparence aléatoire, les ondes de coda présentent des corrélations et sont intéressantes pour leur grande sensibilité aux faibles variations du milieu ou des diffuseurs. Ce travail, et en particulier la description détaillée de la DAWS, met également en évidence le rôle fondamental de la phase dans les décorrélations mesurées. On peut donc soulever la problématique suivante : plutôt qu'étudier les décorrélations du champ, ne serait-il pas plus intéressant de mesurer directement les déphasages ?



## CHAPITRE 3

# Mésoscopie et statistique de la phase



LA TECHNIQUE de la DAWS décrite dans le chapitre précédent est basée sur la mesure des décorrélatons du champ acoustique avec la dynamique du milieu. Elle permet de mesurer des variations très petites du mouvement des centres diffuseurs dans un milieu dynamique et désordonné. Si on regarde attentivement le développement de cette technique (section 2.1), on s'aperçoit que ces décorrélatons du champ sont essentiellement une conséquence du déphasage intervenu entre les 2 instants comparés, le long d'un même chemin de propagation. Il est donc important d'observer que l'objet pertinent pour étudier la dynamique du système désordonné n'est probablement pas le champ ou l'intensité des tavelures. L'acteur principal qui intervient est la phase du champ. En effet, les tavelures sont uniquement une conséquence des déphasages induits par la dynamique du système. Une conclusion s'impose : il faut étudier directement les variations, les fluctuations et les décorrélatons de la phase elle-même. Cette étude présente un intérêt intrinsèque pour la physique mais est également motivée par la perspective d'améliorer la précision des mesures obtenues par la technique plus classique de la DAWS. Le but de ce travail est plus largement de voir si la phase peut apporter des nouvelles informations intéressantes sur le milieu traversé.

Dans un premier temps, nous présentons les arguments de la spécificité et de l'intérêt de travailler à partir de la mesure de la phase et non pas à partir de la mesure du champ ou de l'intensité. Ensuite nous présentons l'hypothèse de statistique circulaire gaussienne bien connue dans le domaine d'étude des phénomènes de diffusion multiple et nous étendons cette méthode à l'étude statistique des fluctuations et des corrélations de la phase. L'étude théorique réalisée est applicable à tous les types ondes pourvu que le milieu dans lequel elles se propagent soit hétérogène et désordonné. Enfin, ces résultats théoriques sont validés par des résultats expérimentaux obtenus en collaboration avec l'équipe du professeur John Page. Nous montrons que les statistiques de la phase sont des mesures sensibles du mouvement des particules à la fois aux échelles de temps longues et courtes et peuvent donner des informations plus précises que la méthode plus traditionnelle de mesure des fluctuations du champ.

## 3.1 Définition de la phase

Commençons par définir la phase d'un champ scalaire.

### 3.1.1 Signal analytique

Soit un champ scalaire  $\chi(\vec{r}, t)$  mesurable. Le **signal analytique** associé  $\Psi(\vec{r}, t)$ , tel que  $\chi = \Re e(\Psi)$ , est défini de façon unique par la **transformation de Hilbert** [Appel, 2002]. Le champ  $\Psi$ , complexe, peut s'écrire comme la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire telles que :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r}, t) + i\eta(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

où les parties réelles et imaginaires sont liées par les relations de Kramers-Kronig :

$$\Re e\Psi(t) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im m\Psi(t')}{t' - t} dt' \quad \text{et} \quad \Im m\Psi(t) = -\frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re e\Psi(t')}{t' - t} dt' \quad (3.2)$$

Les physiciens appellent ces formules les relations de Kramers-Kronig tandis que les mathématiciens disent que le signal imaginaire  $\eta = \Im m\Psi$  est l'opposé de la transformée de Hilbert du signal réel mesurable  $\chi = \Re e\Psi$ . On rencontre également l'appellation transformée de Hilbert pour désigner le prolongement analytique  $\Psi$  de  $\chi$ .

Donnons l'interprétation de ces relations. Dans le cas d'ondes monochromatiques, on a l'habitude de travailler avec des signaux sinusoïdaux complexes du type  $e^{i2\pi ft}$  mais dont la seule partie réelle  $\cos(2\pi ft)$  est mesurable. Le signal analytique obtenu par transformée de Hilbert est tout simplement une généralisation aux signaux non monochromatiques de ce passage d'un signal réel  $\cos(2\pi ft)$  à un signal complexe  $e^{i2\pi ft}$ . Considérons un signal réel  $\chi(t)$  et cherchons le signal complexe qui lui est associé. On voit que dans le cas  $\chi(t) = \cos(2\pi ft)$ , avec  $f > 0$ , le spectre de  $\Psi$  contient deux fréquences  $f$  et  $-f$ . Cependant l'information est redondante car l'intensité de la fréquence  $f$  est la même que celle de la fréquence  $-f$ . En revanche la fonction complexe associée  $\Psi = e^{i2\pi ft}$  n'a dans son spectre que la fréquence  $f > 0$ . Ainsi on pose la définition suivante : on appelle signal analytique une fonction dont la transformée de Fourier est causale, c'est à dire une fonction dont la transformée de Fourier est nulle pour les fréquences négatives.

Par conséquent, le spectre de  $\Psi(t)$  doit être le spectre tronqué de  $\chi(t)$  :

$$\tilde{\Psi}(f) = 2H(f)\tilde{\chi}(f) \quad (3.3)$$

où  $H(f)$  est la fonction de Heaviside dont la transformée de Fourier inverse est :

$$\mathbf{F}^{-1}[H(f)] = \mathbf{F}^{-1}[1 + \text{sgn}(f)] = \delta(t) + \text{vp} \frac{i}{\pi t} \quad (3.4)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse de l'équation 3.3 qui donne l'expression du signal analytique  $\Psi(t)$  associé au signal réel  $\chi(t)$  :

$$\Psi(t) = \left( \delta + \text{vp} \frac{i}{\pi t} \right) \otimes \chi(t) = \chi(t) - \frac{i}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(t')}{t' - t} dt' \quad (3.5)$$

Cette définition vérifie donc bien les relations de Kramers-Kronig et assure l'unicité du champ analytique complexe  $\Psi$ .

### 3.1.2 Phase

La phase est définie comme l'argument du signal analytique complexe. Le signal analytique  $\Psi$  peut s'écrire en fonction de sa partie réelle et de sa partie imaginaire mais également d'une amplitude  $A(\vec{r}, t) \in [0 : \infty[$  et d'une phase  $\Phi(\vec{r}, t) \in (-\pi : \pi]$  sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \exp(i\Phi(\vec{r}, t)) \quad (3.6)$$

Cette définition assure l'unicité de la phase  $\Phi \in (-\pi : \pi]$ .

Il est important de rappeler que le signal analytique ne contient pas davantage d'information que la partie réelle seule : la partie imaginaire contient la même information que la partie réelle puisqu'elle en est déduite. Le signal complexe est simplement plus adapté aux calculs et au traitement du signal. En revanche, l'amplitude  $A$  et la phase  $\Phi$  ne contiennent pas les mêmes informations, l'écriture sous la forme (3.6) consiste en une séparation des informations. En étudiant la phase seule dans la suite de ce chapitre on espère donc trier et conserver seulement les informations qui nous intéressent.

### 3.1.3 Phase déroulée

La phase  $\Phi$  est définie sur un cercle de rayon 1, elle présente donc des discontinuités de  $2\pi$  lors de passages entre  $\pm\pi$ . Pour éliminer ces discontinuités d'origine mathématique et parfois problématiques, on peut utiliser la **phase déroulée** ou cumulée, notée  $\Phi_c$ , c'est à dire la phase pour laquelle on a corrigé les discontinuités de  $2\pi$  et qui par conséquent est définie entre  $-\infty$  et  $+\infty$  :

$$\Phi_c = \int \frac{d\Phi}{dx} dx \quad (3.7)$$

Selon le problème considéré, cette continuation peut être effectuée par rapport au temps ou n'importe quel chemin dans l'espace mais le résultat ne sera pas forcément le même. L'opération de dépliement de la phase n'est pas topologiquement invariante mais elle dépend en général du chemin selon lequel l'opération est réalisée (voir partie 3). Il n'y a pas unicité de la phase déroulée.

## 3.2 Spécificité de la phase

Plusieurs arguments, de nature fondamentale ou pragmatique, sont en faveur d'une étude utilisant la phase du champ plutôt que le champ lui-même, son amplitude ou son intensité :

1. En tout premier lieu, la phase  $\Phi$  est une propriété absolument fondamentale des ondes puisqu'elle constitue la partie oscillante du champ  $\Psi = A \exp(i\Phi)$ . Elle est également responsable des phénomènes de propagation et d'interférences. De ce point de vue, il paraît naturel de s'intéresser à la phase plutôt qu'à l'amplitude d'une onde observée.
2. L'utilisation de la phase permet de s'affranchir de tous les problèmes de calibration liés à l'intensité de la source ou la sensibilité des capteurs puisque ceux-ci n'interviennent que dans la variable amplitude du champ  $A$ . En revanche, il existe des capteurs – notamment les sismomètres – pour lesquels il existe une correction de phase qui reste à effectuer.
3. Les décorrélations du champ ont deux causes, l'absorption et la diffusion. Il est impossible de discriminer les deux en mesurant le champ. En revanche, il est clair que l'absorption fait partie du terme d'amplitude  $A$  tandis que la diffusion intervient au travers des déphasages. Procéder à une étude basée sur la mesure de la phase permettra d'isoler les effets des déphasages spatiotemporels, par exemple reliés à la dynamique ou la densité des centres diffuseurs qu'on souhaite étudier.
4. La mesure de faibles déphasages par interférométrie a fait ses preuves pour son efficacité et sa précision dans de nombreux domaines de l'optique et des radars : citons Michelson et Moreley qui ont mis au point cette technique en 1887 [Michelson et Moreley, 1887], le *VLT interferometer* pour l'astronomie [E.S.O., Web, von der Lhe, 1996], le projet *Virgo* d'interférométrie des ondes gravitationnelles [Brillet, 2003] ou encore le projet INSAR de mesure des faibles mouvements du sol terrestre [Wicks Jr. *et al.*, 1998].
5. Dans les cas particuliers des ondes acoustiques et sismiques auxquelles nous nous intéressons plus spécifiquement il est possible d'obtenir une mesure directe de la phase à partir d'un traitement numérique simple. En effet, dans les domaines fréquentiels mis en jeu les capteurs acoustiques et sismiques sont capables de mesurer les oscillations du champ et pas seulement l'intensité comme en optique.
6. La phase des ondes dans le régime de diffusion multiple est un objet qui a été relativement peu étudié en comparaison de leur amplitude ou de leur intensité quel que soit le type d'ondes. Il est donc intrinsèquement intéressant de mener cette étude.

## 3.3 Hypothèses

### 3.3.1 Hypothèse de champ scalaire

Nous étudions un champ scalaire noté  $\Psi$ . Cette hypothèse convient notamment à l'étude des ondes acoustiques (voir l'application § 3.5) pour lesquelles on mesure le champ de pression. La généralisation aux champs vectoriels – par exemple dans le cas des ondes élastiques – pourra se faire en traitant chaque composante individuellement comme des champs scalaires.

### 3.3.2 Hypothèses sur la nature du désordre

On considère un milieu hétérogène ou désordonné dans lequel les ondes ne peuvent pas se propager en ligne droite mais subissent de multiples diffusions ou réflexions. Soit  $\lambda$  la longueur

d'onde,  $\ell$  le libre parcours moyen et  $s$  l'abscisse curviligne associée à l'onde, c'est à dire la distance parcourue par l'onde depuis la source.

- On suppose que le milieu présente des propriétés statistiques uniformes et par conséquent qu'il y a invariance par translation des fonctions statistiques ;
- On suppose qu'avant d'atteindre le récepteur l'onde a subi de multiples diffusions :  $s \gg \ell$  ;
- On suppose que les différents chemins des ondes partielles sont indépendants entre eux et consistent en une succession de diffusions indépendantes. C'est une bonne approximation si :  $\lambda \ll \ell$ .

Il est important de souligner qu'aucune autre hypothèse n'est faite sur la nature des ondes ni sur le milieu de propagation et que par conséquent les résultats théoriques que nous démontrons sont généraux à de nombreux domaines de la physique : des ondes électromagnétiques aux ondes acoustiques et sismiques.

### 3.3.3 Hypothèse de champ de statistique gaussienne

Nous étudions la propagation des ondes en milieu désordonné et hétérogène. Ce travail théorique est basé sur l'hypothèse que le champ analytique complexe se comporte comme une variable aléatoire de statistique gaussienne et circulaire. Cette hypothèse est largement utilisée et est basée sur plusieurs confirmations expérimentales, notamment en optique [Goodman, 1985]. Il existe un argument justifiant cette hypothèse que nous exposons ci-dessous.

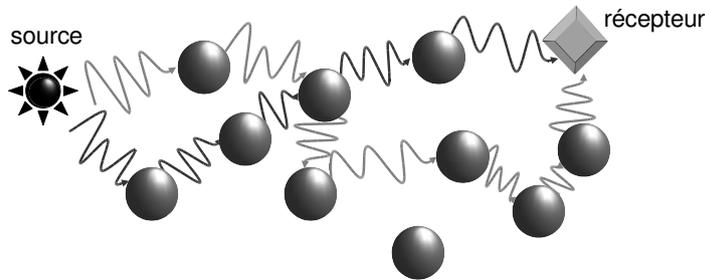


Fig. 3.1: Le champ mesuré en un point est la somme de nombreuses ondes partielles ayant parcouru des chemins différents de même longueur entre la source et le récepteur.

Dans le régime de diffusion multiple, le champ  $\Psi$  enregistré en un point est une superposition de nombreuses ondes partielles  $\Psi_\alpha$  qui ont parcouru des chemins  $\alpha$  différents et indépendants (cf. figure 3.1) :

$$\Psi = A \exp(i\Phi) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \exp(i\Phi_{\alpha}). \quad (3.8)$$

Après quelques libres parcours moyens et à cause des déphasages subis à chaque diffusion, la phase des ondes partielles devient aléatoire et uniforme dans l'intervalle  $(-\pi : \pi]$ . De plus les

ondes partielles ont subit des séquences de diffusions différentes et indépendantes, leurs phases sont donc également indépendantes. Dans ces conditions il est légitime d'appliquer le *théorème de la limite centrale* – ou *loi des grands nombres* – selon laquelle la somme d'un grand nombre de valeurs aléatoires et indépendantes tend vers une variable de statistique gaussienne.

Ainsi, en présence d'un phénomène de diffusion multiple où les ondes ont parcouru plusieurs libres parcours moyens et où la distance moyenne entre les centres diffuseurs est supérieure à la longueur d'onde  $\lambda$  (hypothèse d'ondes partielles indépendantes) alors le champ respecte en bonne approximation une statistique gaussienne corrélée de la forme :

$$P(\Psi_1 \dots \Psi_N) = \frac{1}{\pi^N \det(\underline{\underline{\mathbf{C}}})} \exp \left[ -(\Psi_1^* \dots \Psi_N^*) \underline{\underline{\mathbf{C}}} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} \right] \quad (3.9)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \langle \Psi_i \Psi_j^* \rangle$  est appelée matrice de corrélation ou matrice de covariance, *a priori* complexe, et où  $(\Psi_1 \dots \Psi_N)$  désigne  $N$  différentes observations ou mesures du champ. Il peut s'agir de différents temps  $t$ , différentes fréquences  $f$ , différentes positions spatiales  $r$  ou encore différentes réalisations de l'expérience.

### 3.3.4 Hypothèse de statistique circulaire

Nous supposons également que la statistique est **circulaire**, c'est à dire que :

$$\forall i, j \in [1 \dots N] \begin{cases} \langle \Re(\Psi_i) \Re(\Psi_j) \rangle = \langle \Im(\Psi_i) \Im(\Psi_j) \rangle \\ \langle \Re(\Psi_i) \Im(\Psi_j) \rangle = -\langle \Im(\Psi_i) \Re(\Psi_j) \rangle \end{cases} \quad (3.10)$$

En effet, puisque la phase est aléatoire avec une distribution uniforme et indépendante de l'amplitude, alors :  $\langle \Psi_i \rangle = \langle A_i \rangle \langle e^{i\Phi_i} \rangle = 0$ . De plus il paraît raisonnable que :  $\langle \Psi_i \Psi_j \rangle = \langle A_i A_j \rangle \langle e^{i(\Phi_i + \Phi_j)} \rangle = \langle A_i A_j \rangle \cdot 0 = 0$ . Les équations 3.10 se déduisent de cette dernière égalité. Dans la suite, nous supposons que le champ analytique complexe respecte une statistique gaussienne et circulaire (C.G.S.).

### 3.3.5 Signatures d'une statistique gaussienne

Soit  $N = 1$ . Une signature de la statistique gaussienne circulaire du champ analytique est que les parties réelles et imaginaires sont indépendantes et gaussiennes. En outre, l'amplitude, la phase et l'intensité du champ analytique sont telles que :

- l'intensité présente une probabilité exponentiellement décroissante :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp \left( -\frac{I}{\langle I \rangle} \right) \quad (3.11)$$

- l'amplitude présente une distribution dite de Rayleigh :

$$P(A) = \frac{2A}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{A^2}{\langle I \rangle}\right) \quad (3.12)$$

Notons que l'égalité entre la moyenne et l'écart type dans les deux expressions précédentes explique pourquoi les figures de tavelures sont si contrastées.

- la phase présente une probabilité uniforme :

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (3.13)$$

Soulignons que le caractère uniforme de la phase est peu intéressant car on ne peut en retirer de l'information sur le milieu ni sur la propagation. D'autre part il s'agit d'un mauvais test du caractère gaussien d'un signal puisque n'importe quel signal oscillant donne également une distribution de phase uniforme.

## 3.4 Étude théorique des statistiques et des fluctuations de la phase

Nous avons étendu la théorie sur la statistique de la phase – actuellement limitée à l'équation 3.13 dans le cadre de la C.G.S. – dans le but de traiter les statistiques et corrélations de l'évolution temporelle, spatiale ou fréquentielle de la phase. En considérant la probabilité jointe de 4 champs, nous avons calculé analytiquement la distribution des 3 premières dérivées de la phase, ainsi que la fonction de corrélation de la première dérivée de la phase et de la fonction de corrélation de la phase déroulée. Ces fonctions dépendent de la corrélation du champ  $C(x)$  où  $x$  représente respectivement la dépendance en temps  $t$ , en espace  $r$  ou en fréquence  $f$  selon le problème considéré. Les résultats de ces calculs sont présentés dans les paragraphes suivants (§ 3.4.1 et 3.4.3). Ensuite nous présentons l'intérêt de ces quantités pour l'étude de diffuseurs en mouvement dans le paragraphe 3.5. Cet intérêt est mis en évidence par les travaux expérimentaux de la section 3.6 menés en collaboration avec le professeur John Page.

### 3.4.1 Statistique des dérivées de la phase

La distribution de la phase elle-même (Éq. 3.13) se révèle peu intéressante. Intéressons-nous en premier lieu aux distributions des dérivées de la phase d'un champ de statistique gaussienne circulaire. Genack et ses collaborateurs [Genack *et al.*, 1999, Sebbah *et al.*, 1997] ont précédemment obtenu et vérifié expérimentalement l'expression de la distribution de la phase et de sa première dérivée dans le cadre particulier des variations fréquentielles dans des tavelures de micro-ondes. Cette étude expérimentale a consisté à étudier la propagation de micro-ondes dans un milieu désordonné constitué de sphères de polystyrène dans un guide d'onde cylindrique de cuivre de 7cm de diamètre. La dépendance fréquentielle (de 3 à 26 GHz) a été étudiée. La moyenne sur le désordre a été réalisée en déplaçant les sphères de polystyrène.

Nous avons étendu ces résultats aux dérivées d'ordre supérieur. Nous considérons dans la suite que la fonction de corrélation du champ est réelle – donc que  $\underline{\underline{C}}$  est réelle – car c'est le cas dans les situations étudiées dans cette thèse (voir les équations 2.7 et 4.5). Les résultats obtenus pour les trois premières dérivées sont donnés dans la page ci-contre. Les principales étapes du calcul analytique de la distribution jointe  $P(\Phi', \Phi'', \Phi''')$  sont décrites ci-dessous :

1. Le point de départ est la distribution jointe  $P(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$  de quatre champs,  $\Psi_1 = \Psi(x - \delta - \Delta)$ ,  $\Psi_2 = \Psi(x + \delta - \Delta)$ ,  $\Psi_3 = \Psi(x - \delta + \Delta)$  et  $\Psi_4 = \Psi(x + \delta + \Delta)$  où  $\delta \rightarrow 0$  et  $\Delta \rightarrow 0$ , qui s'écrit selon l'équation 3.9 en fonction de la matrice d'intercorrélation (symétrique) :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & C(\delta) & C(\Delta) & C(\Delta + \delta) \\ C(\delta) & 1 & C(\Delta - \delta) & C(\Delta) \\ C(\Delta) & C(\Delta - \delta) & 1 & C(\delta) \\ C(\Delta + \delta) & C(\Delta) & C(\delta) & 1 \end{pmatrix}$$

dans l'hypothèse de l'invariance par translation des propriétés statistiques du milieu qui implique  $C(|x_2 - x_1|) = \langle \Psi(x_1) \Psi^*(x_2) \rangle$ .

2. Un développement pour  $\delta \rightarrow 0$  puis  $\Delta \rightarrow 0$ , une diagonalisation de la matrice  $\underline{\underline{C}}$  et un changement de variable  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \rightarrow (\Psi, \Psi', \Psi'', \Psi^{(3)})$  donne :

$$P(\Psi, \Psi', \Psi'', \Psi''') = \frac{1}{\pi^4 |C'''(0)| \mu_1 \mu_2} \exp \left( - \frac{|\Psi''' - \frac{C^{(4)}(0)}{C'''(0)} \Psi'|^2}{\mu_2} \right) \\ \times \exp \left( - \frac{|\Psi'' - C'''(0) \Psi|^2}{\mu_1} \right) \\ \times \exp \left( - \frac{|\Psi'|^2}{|C'''(0)|} \right) \exp(-|\Psi|^2)$$

avec :

$$\mu_1 = C^{(4)}(0) - C'''(0)^2 \\ \mu_2 = -C^{(6)}(0)$$

notons que les dérivées impaires de la fonction de corrélation du champ s'annulent en  $x = 0$  à cause de la symétrie paire de la fonction de corrélation du champ  $C(x) = C(-x)$ .

3. Un changement de variable  $(\Re(\Psi), \Im(\Psi), \Re(\Psi'), \Im(\Psi'), \Re(\Psi''), \Im(\Psi''), \Re(\Psi^{(3)}), \Im(\Psi^{(3)})) \rightarrow (A, A', A'', A^{(3)}, \Phi, \Phi', \Phi'', \Phi^{(3)})$  est réalisé ;
4. Une intégration sur les variables  $(\Phi, A''', A'', A)$  dans cet ordre donne l'expression de la distribution  $P(\Phi', \Phi'', \Phi''')$  ;
5. Une intégration sur la variable  $\Phi'''$  donne la distribution jointe  $P(\Phi', \Phi'')$  réduite aux deux premières dérivées ;
6. Enfin, une intégration sur  $\Phi''$  permet de retrouver la distribution  $P(\Phi')$ .
7. Les résultats sont donnés en page suivante.

**Distribution des dérivées de la phase d'un champ complexe aléatoire décrit par une statistique gaussienne circulaire :**

- La distribution de la première dérivée  $P(\Phi')$  dépend d'un seul paramètre :  $Q$  (ou  $C'''(0)$ ) :

$$P(\Phi') = \frac{1}{2} \frac{Q}{[Q + \Phi'^2]^{3/2}} \quad (3.14)$$

- La probabilité jointe des deux premières dérivées  $P(\Phi', \Phi'')$  est une fonction de deux paramètres :  $Q$  et  $R$  (ou  $C'''(0)$  et  $C^{(4)}(0)$ ) :

$$P(\Phi', \Phi'') = \frac{Q}{\pi} \frac{[4\Phi'^2 + R]^{3/2}}{[\Phi''^2 + (4\Phi'^2 + R)(\Phi'^2 + Q)]^2} \quad (3.15)$$

- La probabilité jointe des 3 premières dérivées  $P(\Phi', \Phi'', \Phi''')$  est une fonction de trois paramètres :  $Q$ ,  $R$  et  $S$  (ou  $C'''(0)$ ,  $C^{(4)}(0)$  et  $C^{(6)}(0)$ ) :

$$P(\Phi', \Phi'', \Phi''') = \frac{3}{4\pi} Q \left[ R(S + 9\Phi'^2)(R + 4\Phi'^2 + \frac{9\Phi''^2}{S+9\Phi'^2}) \right]^2 \\ \times \left[ R(S + 9\Phi'^2)(\Phi''^2 + (Q + \Phi'^2)(R + 4\Phi'^2 + \frac{9\Phi''^2}{S+9\Phi'^2})) \dots \right. \\ \left. \dots + R(3\Phi'(\Phi'^2 - Q) + \Phi''' - \Phi'^3 + (R + Q)\Phi')^2 + (3\Phi''^2 - 2\Phi'(3\Phi'(\Phi'^2 - Q) + \Phi''' - \Phi'^3 + (R + Q)\Phi'))^2 \right]^{-5/2} \quad (3.16)$$

- où  $C(x)$  est la fonction de corrélation du champ et les paramètres  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont reliés à  $C(x)$  par :

$$\begin{cases} Q = \frac{-C'''(0)}{C^{(4)}(0) - C'''(0)^2} \\ R = \frac{-C'''(0)}{-C'''(0)} \\ S = \frac{-C^{(6)}(0) + \frac{C^{(4)}(0)^2}{C'''(0)}}{C^{(4)}(0) - C'''(0)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} C'''(0) = -Q \\ C^{(4)}(0) = QR + Q^2 \\ C^{(6)}(0) = -QRS - Q(R + Q)^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Les distributions  $P(\Phi'')$  et  $P(\Phi''')$  ne sont pas calculables analytiquement mais se déduisent facilement des équations 3.15 et 3.16 par une intégration numérique sur les variables  $\Phi'$  et  $(\Phi', \Phi'')$  respectivement.

### 3.4.2 Comportement asymptotique

On montre par un calcul analytique que les distributions  $P(\Phi')$ ,  $P(\Phi'')$  et  $P(\Phi^{(3)})$  présentent un comportement asymptotique en loi de puissance lorsque  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  et  $\Phi^{(3)}$  respectivement tendent vers l'infini. Le comportement asymptotique de  $P(\Phi^{(n)})$  pour  $\Phi^{(n)} \rightarrow \infty$  est conjecturé par extrapolation.

$$\left\{ \begin{array}{lll} P(\Phi') & \rightarrow & \Phi'^{-3} \\ P(\Phi'') & \rightarrow & \Phi''^{-2} \\ P(\Phi''') & \rightarrow & \Phi'''^{-5/3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(\Phi^{(n)}) & \rightarrow & \Phi^{(n)-(1+2/n)} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Ce comportement asymptotique est *universel* car il est indépendant des paramètres  $Q$ ,  $R$  et  $S$ . Les exposants  $1 + 2/n$  constituent donc une signature d'un champ gaussien. Ils peuvent être utilisés comme des tests plus exigeant et d'ordre supérieur des propriétés gaussiennes du champ diffusé que ceux présentés précédemment (section 3.3.5).

### 3.4.3 Corrélations de phase

La fonction de corrélation de la dérivée de la phase  $C_{\Phi'}(x)$  temporelle, spatiale ou fréquentielle peut également être calculée à partir de la distribution jointe de 4 champs complexes à respectivement 4 positions, temps ou fréquences différentes. Par conséquent, on comprend que  $C_{\Phi'}(x)$  va s'exprimer en fonction de la corrélation du champ  $C(x)$  et de ses deux premières dérivées  $C'(x)$  et  $C''(x)$ . Nous obtenons une expression analytique [van Tiggelen *et al.*, 2006] :

$$C_{\Phi'}(x) = C_{\Phi'}(|x' - x''|) = \left\langle \frac{d\phi}{dx}(x') \frac{d\phi}{dx}(x'') \right\rangle = \frac{1}{2} (\ln C)'' \ln(1 - C^2) \quad (3.19)$$

Pour  $x \equiv r > \lambda$  ou  $x \equiv t > 1/\nu$ , la corrélation du champ  $C(x)$  est suffisamment faible pour approcher  $C_{\Phi'}(x)$  par son comportement asymptotique et on obtient alors :

$$C_{\Phi'} \rightarrow \frac{1}{2} [(C')^2 - C''C] \quad (3.20)$$

Dans la deuxième partie de cette thèse qui traite le cas des ondes sismiques, nous observerons que cette approximation est valable dès  $x \sim \lambda/5$  ce qui n'est pas trivial (voir §4.4.4).

On peut observer dès à présent que la corrélation de la phase va être une fonction particulièrement intéressante. En effet dans le cas d'une onde plane monochromatique, on observe que  $(C'^2 - C''C)/C^2$  est égal à 1. Ainsi les décorrélatons dues aux oscillations naturelles du

champ vont s'éliminer entre elles ; seules vont rester les décorrélatons liées à la diffusion multiple [Ghyssels, 2005] et donc en particulier dues au libre parcours moyen ou à la dynamique des diffuseurs. Cette fonction est donc un bon candidat pour l'étude de ces derniers.

### 3.4.4 Corrélation de la phase déroulée

Considérons la phase déroulée définie par l'équation 3.7. Sa corrélation s'exprime en fonction de la corrélation de la dérivée de la phase :

$$\begin{aligned} C_{\Phi_c}(x) = \left\langle \Phi_c\left(-\frac{x}{2}\right) \Phi_c\left(\frac{x}{2}\right) \right\rangle &= \int_0^{-x/2} dx' \int_0^{x/2} dx'' \left\langle \frac{d\Phi}{dx}(x') \frac{d\Phi}{dx}(x'') \right\rangle \\ &= - \int_0^{x/2} dx' x' [C_{\Phi'}(x') + C_{\Phi'}(x - x')]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La deuxième égalité utilise le fait que la fonction de corrélation de la dérivée de la phase  $C_{\Phi'}(x', x'')$  dépend seulement de  $|x' - x''|$ .

### 3.4.5 Variance

La variance de la phase déroulée est déduite de l'équation 3.21 :

$$\langle \Phi_c^2(x) \rangle = 2 \int_0^x dx' (x - x') C_{\Phi'}(x'). \quad (3.22)$$

La variance de la phase déroulée a déjà fait l'objet d'études montrant son lien étroit avec les fluctuations des positions des zéros de la fonction d'onde [Berry et Dennis, 2000, Dennis, 2003, Freund et Wilkinson, 1998, Wilkinson, 2004]. Voir le paragraphe 7.3.1.

## 3.5 Diffuseurs en mouvement : fluctuations temporelles de la phase

L'étude théorique précédente est générale à tous les types d'ondes et aux variations de différentes natures. Appliquons ces résultats au cas particulier de diffuseurs en mouvement (i.e. variations temporelles) et reprenons le cas particulier des ondes acoustiques vu au chapitre précédent. Dans cette situation nous nous intéressons aux variations temporelles de la phase.

Dans les milieux fortement diffusants, le champ est dominé par les tavelures acoustiques. Les ultrasons sont multiples diffusés de sorte que les méthodes d'imagerie directe ne sont pas applicables. De plus, les mouvements des centres diffuseurs peuvent être complexes de telle sorte que la technique Doppler est difficilement utilisable. La problématique est la suivante : comment peut-on utiliser la phase des ondes ultrasonores multiples diffusées afin d'étudier la dynamique de matériaux fortement diffusants ? La *spectroscopie acoustique des ondes diffuses* (DAWS - §2.1) et l'*interferométrie des ondes de coda* (CWI - §2.2) sont des méthodes précises pour l'étude de la dynamique de milieux multiples diffusants et qui ont fait leurs

preuves. Ces méthodes utilisent les fluctuations et les corrélations du champ, nous proposons comme alternative l'utilisation des statistiques et des corrélations des dérivées temporelles de la phase.

Ainsi la question est : quelle information de la dynamique de matériaux mésoscopiques peut-on obtenir en mesurant les fluctuations de phase d'ondes multiples diffusées et par quelle méthode ? Dans cette section, nous présentons l'application de la théorie aux milieux dynamiques puis le protocole expérimental utilisé. L'étude expérimentale détaillée et la confrontation des résultats expérimentaux avec la théorie sont présentés dans l'article reproduit dans la section suivante (§3.6).

### 3.5.1 Étude théorique préliminaire

Pour décrire le type et l'intensité du mouvement des particules qui sont aussi les diffuseurs, différents modèles empiriques du déplacement quadratique moyen des diffuseurs peuvent être proposés. Aux échelles de temps courtes, le mouvement des particules est probablement balistique. Dans ce cas, leur déplacement quadratique moyen s'écrit :

$$\langle \Delta r^2(\tau) \rangle = \langle \Delta V_{rel}^2 \rangle \tau^2 \quad (3.23)$$

où  $\tau$  est le temps de la dynamique du milieu et des particules.

À des échelles de temps plus longues, le mouvement relatif est ralenti d'une part par les interactions hydrodynamiques et d'autre part par les interactions avec les autres particules. On peut proposer une loi phénoménologique :

$$\langle \Delta r^2(\tau) \rangle = \frac{\langle \Delta V_{rel}^2 \rangle \tau^2}{(1 + (\tau/\tau_c)^2)^m} \quad (3.24)$$

où  $\tau_c$  est le temps caractéristique auquel les interactions se manifestent. Pour  $\tau < \tau_c$  on retrouve le comportement balistique. Lorsque  $\tau > \tau_c$ , l'exposant  $m$  décrit le comportement : si  $m = 1/2$  le comportement limite est diffusif, si  $1/2 < m < 1$  le comportement limite est sous-diffusif.

Caractériser le mouvement des diffuseurs c'est estimer les paramètres  $\tau_c$  et  $m$  ainsi que la vitesse relative quadratique moyenne  $\langle \Delta V_{rel}^2 \rangle$ . Pour cela, il faut calculer les fonctions statistiques de la phase  $P(d\Phi/d\tau)$ ,  $P(d^2\Phi/d\tau^2)$ ,  $P(d^3\Phi/d\tau^3)$ ,  $C_{\Phi'}(\tau)$  et  $\langle \Phi_c^2(\tau) \rangle$  en fonction des paramètres caractéristiques de la dynamique des diffuseurs et ensuite les comparer aux mesures expérimentales. Nous avons montré que les distributions et les corrélations des variations de la phase s'expriment via la fonction de corrélation du champ et de ses dérivées. Par ailleurs on rappelle qu'un des résultats de la DAWS (cf § 2.1) est le suivant : si on mesure les ondes transmises séparées d'un intervalle de temps  $\tau$  durant lequel les centres diffuseurs ont manifesté un déplacement quadratique moyen  $\langle \Delta r^2(\tau) \rangle$ , alors leur corrélation  $C(\tau)$  est telle que (Eq. 2.9) :

$$C(\tau) \propto \exp \left[ -\frac{Nk^2}{6} \langle \Delta r^2(\tau) \rangle \right]$$

avec  $\mathcal{N}$  le nombre de diffusions pendant le temps de propagation  $t$  et avec  $k$  la norme du vecteur d'onde. Ainsi, en supposant que la fonction de corrélation est une fonction des trois paramètres  $\tau_{DAWS}$ ,  $\tau_c$  et  $m$ , on peut écrire la fonction de corrélation temporelle sous la forme :

$$C(\tau) \propto \exp \left[ -\frac{1}{6} \frac{\left( \frac{\tau}{\tau_{DAWS}} \right)^2}{\left( 1 + \left( \frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 \right)^m} \right] \quad (3.25)$$

où :

$$\tau_{DAWS} = (\mathcal{N}k^2 \langle \Delta V_{rel}^2 \rangle)^{(-1/2)} \quad (3.26)$$

est le temps caractéristique de la décorrélation du champ acoustique.

En particulier, on peut alors exprimer les 3 paramètres Q, R et S des distributions des trois premières dérivées de la phase (cf. équations 3.14-3.17) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Q} = -C''(0) = \frac{1}{3\tau_{DAWS}^2} \\ \text{R} = \frac{C^{(4)}(0) - C''(0)^2}{-C''(0)} = \frac{2}{3\tau_{DAWS}^2} + \frac{12m}{\tau_c^2} \\ \text{S} = \frac{-C^{(6)}(0) + \frac{C^{(4)}(0)^2}{C''(0)}}{C^{(4)}(0) - C''(0)^2} = \frac{\tau_c^4 + 270\tau_{DAWS}^4 m + 54\tau_{DAWS}^4 m^2 + 54\tau_{DAWS}^2 \tau_c^2 m}{\tau_{DAWS}^2 \tau_c^4 + 18\tau_{DAWS}^4 \tau_c^2 m} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

### 3.5.2 Dispositif expérimental

Les objectifs de l'étude expérimentale sont les suivants :

- Vérifier l'accord théorie/expérience pour les distributions et les corrélations des variations temporelles de la phase dans un milieu dynamique désordonné.
- Utiliser l'ajustement à la théorie pour caractériser la nature et l'intensité du mouvement des centres diffuseurs, c'est à dire estimer  $\langle \Delta r^2 \rangle(\tau)$  ou encore les paramètres  $\tau_c$ ,  $m$  et  $\langle \Delta V^2 \rangle$ .

Le dispositif expérimental décrit dans la figure 3.3 [Cowan *et al.*, 2000, Page *et al.*, 2000] et le protocole décrit dans la figure 3.4) ont été mis au point par l'équipe du professeur John Page.

### 3.5.3 Conclusion

L'étude développée dans l'article reproduit ci-après [Cowan *et al.*, 2007] confronte les résultats expérimentaux à la théorie sur les statistiques de la phase développée dans les paragraphes précédents. Cette étude montre un bon accord entre la théorie et l'expérience. Nous démontrons également que cette nouvelle technique permet de sonder avec précision le mouvement des particules.

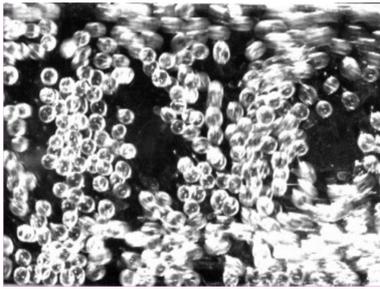


Fig. 3.2: Image par microscopie du milieu diffusant. Le milieu de propagation est constitué de billes de verre de diamètre 1mm en suspension dans un mélange constitué de 60% de glycérol et 40% d'eau. Le milieu liquide est pompé vers le haut afin de compenser la sédimentation des billes. La moyenne d'ensemble est faite sur les différentes réalisations de ce milieu désordonné.

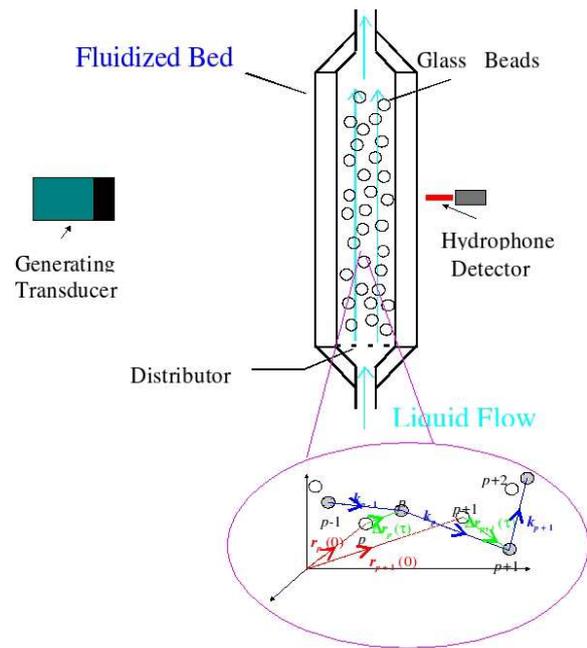


Fig. 3.3: Dispositif expérimental. Les mesures utilisent une technique impulsionnelle en transmission. Une impulsion est émise dans l'échantillon et le champ transmis multiplement diffusé est enregistré par un hydrophone miniature.

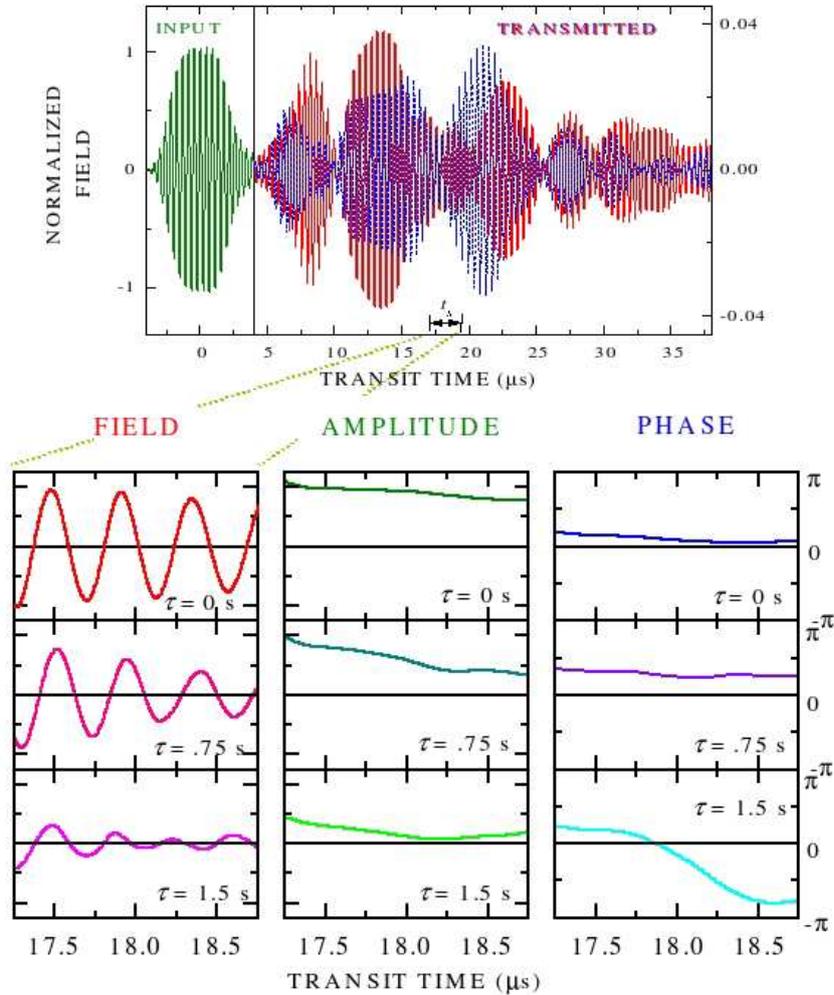


Fig. 3.4: *Protocole expérimental* : la procédure est répétée pour chacune des impulsions  $i$  émises avec une période  $\tau_{rep} = 2\text{ms}$  et une fréquence centrale  $2,25\text{MHz}$ . Le *champ transmis*  $\Psi(t, \tau)$  est mesuré en fonction du temps de propagation  $t$  de l'onde dans le milieu ( $\sim \mu\text{s}$ ) et des fluctuations  $\tau = i \times \tau_{rep}$ .  $\tau$  est de l'ordre des temps caractéristiques de la dynamique du milieu ( $\text{ms} \rightarrow \text{s}$ ). L'*amplitude*  $A(t, \tau)$  et la *phase*  $\Phi(t, \tau)$  sont extraites numériquement par une méthode analogue à la détection synchrone. Il a été vérifié expérimentalement que cette méthode fournit un résultat équivalent à l'argument du champ complexe obtenu par la transformation de Hilbert.

## 3.6 Étude expérimentale : application à la diffusion d'ultrasons dans un milieu dynamique

### Mesoscopic phase statistics of diffuse ultrasound in dynamic matter

M. L. Cowan, D. Anache-Ménier, W. K. Hildebrand, J. H. Page et B.A. van Tiggelen

Article publié dans *Physical Review Letters* **99**, 094301 (2007)

**Résumé :** *Les fluctuations temporelles de la phase d'ondes transmises à travers un échantillon dynamique, fortement diffusant, mésoscopique sont étudiées en utilisant des ondes ultrasonores. Les résultats sont comparés aux prédictions théoriques basées sur l'hypothèse de statistique circulaire gaussienne. Le rôle fondamental de la phase dans la DAWS est mis en évidence et il est démontré que les statistiques de la phase fournissent une technique sensible et précise pour sonder les mouvements des diffuseurs à la fois aux échelles de temps courtes et longues.*

**Abstract :** Temporal fluctuations in the phase of waves transmitted through a dynamic, strongly scattering, mesoscopic sample are investigated using ultrasonic waves, and compared with theoretical predictions based on circular Gaussian statistics. The fundamental role of phase in Diffusing Acoustic Wave Spectroscopy is revealed, and phase statistics are also shown to provide a sensitive and accurate way to probe scatterer motions at both short and long time scales.

For all waves, phase is irrefutably the most fundamental property. On macroscopic scales, however, phase is randomized by multiple scattering or obscured by decoherence. It is now generally accepted that a mesoscopic regime exists where wave phenomena persist on even hydrodynamic scales. Mesoscopic fluctuations can sometimes be long-range and non-Gaussian [Berkovits et Feng, 1994, van Tiggelen et Skipetrov, 2003]. The universal conductance fluctuations are best known, originally discovered for electrons [Lee et Stone, 1986], and later also observed with visible light [Feng *et al.*, 1988, Scheffold et Maret, 1998] and microwaves [Chabanov *et al.*, 2004]. In the optics of soft condensed matter, the existence of dynamic mesoscopic fluctuations has led to a new technique called *diffusing wave spectroscopy* (DWS) [Maret et Wolf, 1987, Pine *et al.*, 1988, Maret, 1997]. In the acoustic counterpart, *diffusing acoustic wave spectroscopy* (DAWS) [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002], the fluctuations of the scattered wave field are measured directly to probe the dynamics of disordered media. In seismology, the closely related technique of Coda Wave Interferometry [Snieder *et al.*, 2002] is extending the range of applications being studied.

For acoustic, seismic or radio waves, the phase can be easily extracted. While many applications, including interferometric techniques such as InSAR [Wicks Jr. *et al.*, 1998, Wicks Jr. *et al.*, 2006], make use of phase for precise measurements, the phase of multiply scattered waves has often been neglected, since it is generally more challenging to extract useful information from phase in multiple-scattering systems. Mesoscopic studies have revealed the fundamental relation of phase to the screening of zeros of random fields [Berry et Dennis, 2000, Freund et Wilkinson, 1998, Wilkinson, 2004], but most of the literature has focussed on quantities such as the probability distribution functions of intensity, transmission or conductance [Berkovits et Feng, 1994], and does not address the phase directly. Recent studies with microwaves [Genack *et al.*, 1999, van Tiggelen *et al.*, 1999, Genack *et al.*, 2003, Chabanov et Genack, 2001, Schomerus, 2001], infrared light [Vellekoop *et al.*, 2005] and Terahertz radiation [Pearce *et al.*, 2003] have explored frequency correlations of the phase. In this Letter, we study *time-dependent* phase fluctuations of ultrasound in a dynamic, strongly scattering medium, and examine the statistics of both the wrapped and cumulative phase evolution. This combination of theory and experiment reveals a deeper insight into the mesoscopic physics of multiply scattered waves, and explicitly shows the relationship between the average phase evolution of a typical multiple scattering path - a crucial concept in D(A)WS modelling

[Maret et Wolf, 1987, Cowan *et al.*, 2000] - and the measured phase evolution of the transmitted waves. We also find that phase statistics can sometimes provide a more accurate method of measuring the dynamics than the field autocorrelation method that is used in D(A)WS. In our materials, the temporal phase fluctuations are too complex for traditional Doppler ultrasound analysis. This Letter may be viewed as a way of overcoming these complications.

The ability of ultrasonic piezoelectric transducers to detect the wave field allows the phase of the scattered ultrasound to be measured directly. In our experiments, we used a pulsed technique, so that the phase of multiply scattered waves along paths spanning a narrow range of path lengths could be investigated. For most of the experiments, the sample was a 12.2-mm-thick fluidized bed, containing 1-mm-diameter glass spheres suspended at a volume fraction of 40% by an upward flowing solution of 60% glycerol and 40% water. A miniature hydrophone was used to capture the field transmitted through the sample in a single near-field speckle spot. The input pulses had a central frequency of 2.25 MHz ( $\lambda = 0.71$  mm), were roughly 5 periods wide, and were repeated every 2 ms. Since the beads were in constant motion, the scattered signal was different for each input pulse, allowing the phase to be measured as a function of the evolution time  $T$  of the sample and the propagation time  $t$  of the waves. Since the sample hardly changed during the propagation time, the system appeared “frozen” to the individual pulses. At a fixed lapse time after each pulse input pulse, a short segment (about 4.5 periods) of the transmitted waveform was recorded. Using a simple numerical technique [Page *et al.*, 2003], the wrapped phase  $\Phi(t) \in (-\pi : \pi]$  and the amplitude  $A(t) > 0$  in each segment were determined as a function of time from the digitized field data. This technique is equivalent to taking a Hilbert transform to produce the complex analytic signal  $A(t) \exp[i(\omega t + \Phi(t))]$ , where  $\omega$  is the central frequency of the pulse. To achieve good statistical accuracy, 10 sets of 8300 consecutive pulses were recorded.

In order to gain insight into the temporal phase fluctuations of the multiply scattered waves, we examine the statistics of the phase evolution and its derivatives with time. The wrapped phase probability distribution  $P(\Phi)$ , which gives the probability of measuring a phase  $\Phi$  at acoustic propagation time  $t$  and evolution time  $T$ , was found experimentally to be constant within statistical error, consistent with a complex random wave field described by Circular Gaussian Statistics (CGS) [Goodman, 1985]. We have extended the theory of the phase within CGS [van Tiggelen *et al.*, 1999, Genack *et al.*, 2003, Chabanov et Genack, 2001, Schomerus, 2001] to deal with the statistics of phase *evolution*, which involves the change in phase, or phase shift, with time. The joint probability distribution of  $N$  complex acoustic fields recorded at evolution times  $T_i$  of the sample is,

$$P(\psi_{T_1} \cdots \psi_{T_N}) = \frac{1}{\pi^N \det \mathbf{C}} \exp \left[ - \sum_{i,j} \psi_{T_i}^* \mathbf{C}_{ij}^{-1} \psi_{T_j} \right] \quad (3.28)$$

where  $\mathbf{C}_{ij} = \langle \psi_{T_i} \psi_{T_j}^* \rangle$  is the covariance matrix [Goodman, 1985]. It is convenient to use normalized fields so that  $\mathbf{C}_{ii} = 1$ . Then, the off-diagonal elements of  $\mathbf{C}_{ij}$  are equal to the field autocorrelation function used in DAWS [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002] :  $\mathbf{C}_{i \neq j} = g_1(T_i - T_j)$ .

For  $N = 2$ , two wave amplitudes and one phase can be integrated out from Eq. (3.28) at constant phase difference  $\Delta\Phi(\tau) = \Phi(T + \tau) - \Phi(T)$ . If we *rewrap* the phase difference into the interval  $(-\pi : \pi]$ , we get for the probability distribution of phase evolution

$$P(\Delta\Phi) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - g_1^2}{1 - F^2} \right] \left[ 1 + \frac{F \cos^{-1}(-F)}{\sqrt{1 - F^2}} \right], \quad (3.29)$$

where  $F \equiv g_1 \cos \Delta\Phi$ . As the scatterers move for time  $\tau$ , the acoustic fields  $\psi_T$  and  $\psi_{T+\tau}$  decorrelate. This process strongly affects the statistics of the temporal phase evolution  $\Delta\Phi(\tau)$ , with  $P(\Delta\Phi(\tau))$  finally approaching the flat distribution for large time differences ( $g_1 = 0$ ).

The phase dynamics can be described quantitatively in terms of the variance of the change in phase along *one typical* path taken by the waves,  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle$ , which we call simply the “path phase variance”<sup>1</sup>. The DAWS auto-correlation function [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002] is related directly to this variance according to  $g_1(\tau) \approx \exp[-\frac{1}{2}\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle]$ . From Eq. (3.29) we can establish that the path phase variance is significantly different to the wrapped phase shift variance  $\langle \Delta\Phi^2(\tau) \rangle$ . The latter is associated with the *superposition* of the waves from all paths at the detector that, for the phase, implies a highly nonlinear transformation. Yet, a *universal* relation  $\langle \Delta\Phi^2 \rangle = f(\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2 \rangle)$  is predicted, with no parameter that depends on the details of the dynamics. We exploit this universality below to find  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle$  directly from the wrapped phase shift variance. Quite surprisingly, we will see later that unwrapping the phase destroys this universality.

The path phase variance can be related to the particle motion according to [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002]  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle \simeq \frac{1}{3}nk^2\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau, \ell^*) \rangle$ . Here  $k$  is the wave vector,  $n$  is the average number of scattering events and  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau, \ell^*) \rangle$  is the relative mean square displacement of two scatterers separated by the transport mean free path  $\ell^*$  of the sound. At early times we expect ballistic motion,  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau) \rangle = \langle \Delta V_{\text{rel}}^2 \rangle \tau^2$ , and it is convenient to write  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle = \frac{1}{3}\tau^2/\tau_{\text{DAWS}}^2$ , where  $\tau_{\text{DAWS}} = 1/\sqrt{nk^2\langle \Delta V_{\text{rel}}^2 \rangle}$  is the characteristic time scale beyond which the particle motion destroys the correlation of the acoustic field.

At short times and small  $\Delta\Phi$ , Eq. (3.29) simplifies to  $P(\Delta\Phi) = \frac{1}{2}\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2 \rangle / [\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2 \rangle + \Delta\Phi^2]^{3/2}$ , showing directly its dependence on  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle$ , and hence  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau, \ell^*) \rangle$ . This expression has the same form as the probability distribution of the phase derivative  $\Phi'$  with evolution time,  $P(\Phi') = \frac{1}{2}Q/[Q + \Phi'^2]^{3/2}$ , where  $Q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau) \rangle / \tau^2 = (3\tau_{\text{DAWS}}^2)^{-1}$ .

Figure 3.5 shows our experimental data for  $P(\Delta\Phi)$  at five values of  $\tau$ , along with fits to Eq. (3.29). The early times show a narrow peak centered at  $\Delta\Phi = 0$ , which broadens as the particles move further from their original positions. As  $\tau$  gets larger, the probability distribution is indeed seen to approach the flat distribution [Fig. 3.5(d)]. The agreement between theory and experiment is excellent over the entire range of phases and times, and for  $P(\Delta\Phi)$  spanning

<sup>1</sup> Since our samples do not undergo any uniform dilation, such as could arise from changes in wave velocity due to temperature changes, the average phase  $\langle \Delta\phi_{\text{path}} \rangle$  is zero, and the variance  $\langle \Delta\phi_{\text{path}}^2 \rangle$  characterizes the dynamics.

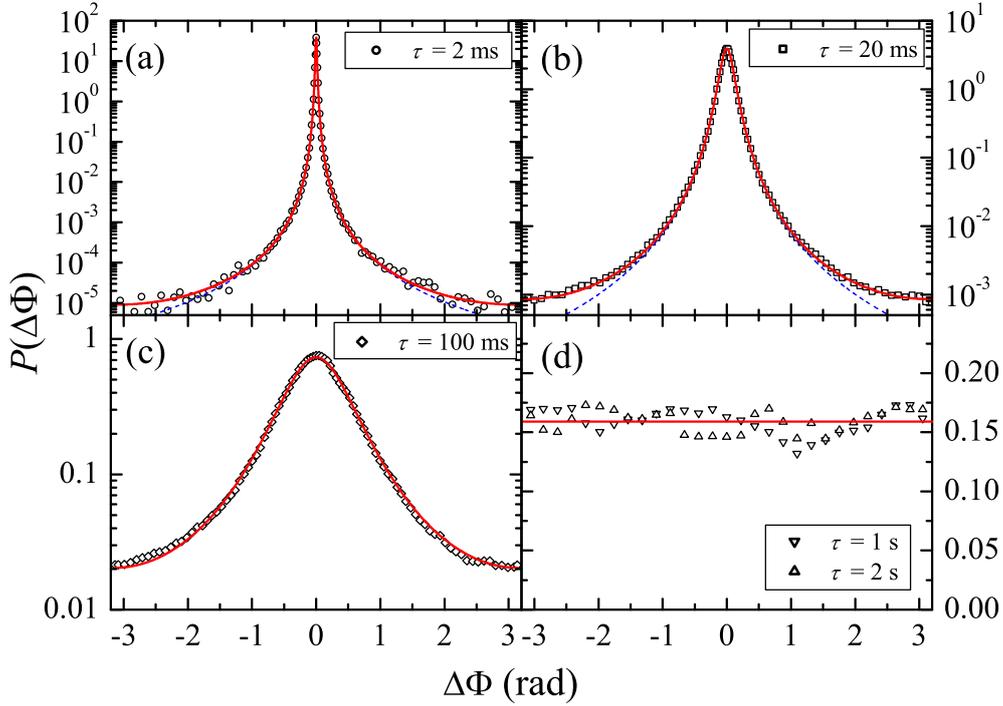


Fig. 3.5: (color online) The observed probability distribution of the wrapped phase evolution at five different time intervals  $\tau$  (symbols) and the corresponding theoretical predictions (solid curves). The dashed curves in (a) and (b) are the small  $\tau$ , small  $\Delta\Phi$  predictions (see text). The only fitting parameter (via the dependence of  $P(\Delta\Phi)$  on  $g_1$ ) is the path phase variance  $\langle\Delta\phi_{\text{path}}^2\rangle$  at time  $\tau$ , which gives  $\tau_{\text{DAWS}} = 89$  ms. For these data, the number of scattering events  $n = 34 \pm 2$ . Note the wide variation in vertical scales from (a) to (d).

nearly seven orders of magnitude. The fits provide accurate measurements of  $\langle\Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau)\rangle$  and hence of the relative mean square displacement of the particles. Alternatively, by using the universal relationship  $\langle\Delta\Phi^2\rangle = f(\langle\Delta\phi_{\text{path}}^2\rangle)$  (Fig. 3.6(a)),  $\langle\Delta\phi_{\text{path}}^2(\tau)\rangle$  can directly be determined from the measured variance  $\langle\Delta\Phi^2\rangle$  - a simpler procedure than fitting  $P(\Delta\Phi)$ . Both methods work well so long as  $\langle\Delta\Phi^2\rangle$  is less than its upper limit of  $\pi^2/3$  when the phase difference distribution has become flat. In Fig. 3.6(b),  $\langle\Delta r_{\text{rel}}^2\rangle$  measured from the wrapped phase fluctuations and the conventional field autocorrelation are compared. The agreement between the two methods is excellent, giving direct experimental confirmation of the universal relationship shown by the solid curve in Fig. 3.6(a).

In cases where the noise in the measured signals affects the amplitude rather than the phase (eg. gain or DC offset fluctuations), the phase method is more robust for small  $\tau$ . This is illustrated in the inset to Fig. 3.6(b), which shows the effect of 2% random gain fluctuations in the field data; this amplitude noise clearly degrades the measurement of  $\langle\Delta r_{\text{rel}}^2\rangle$  from  $g_1$ ,

but does not affect the phase measurement.

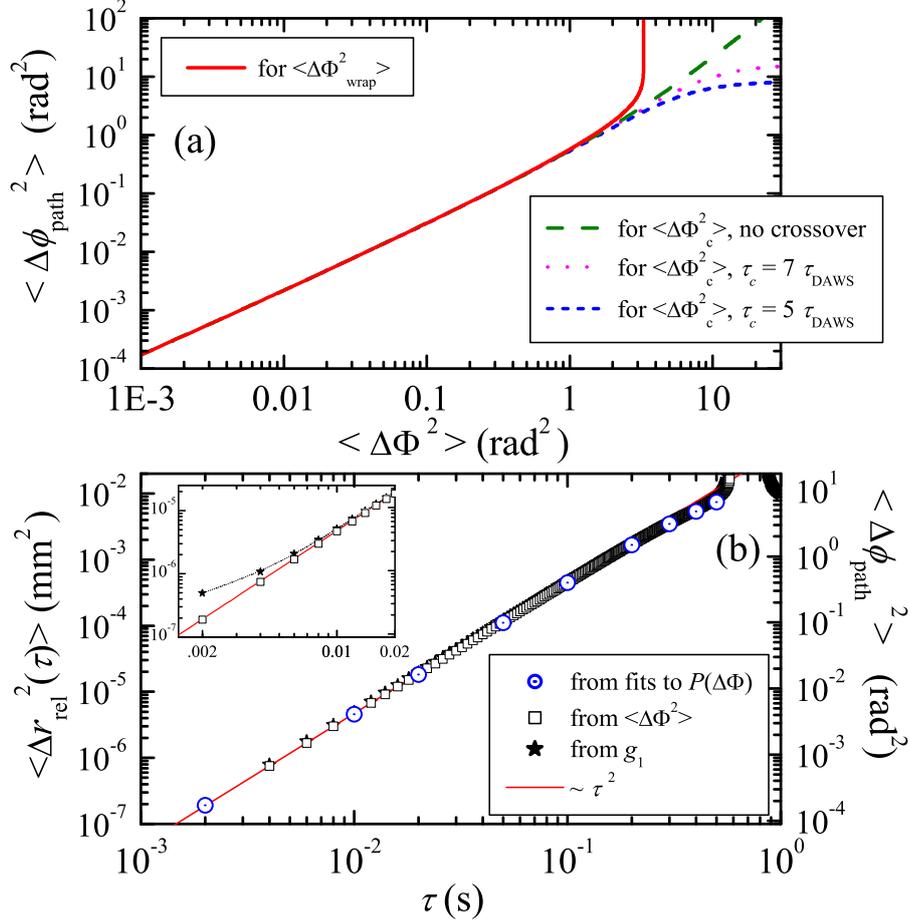


Fig. 3.6: (color online) (a) The universal relationship (solid curve), calculated from Eq. 3.29, between the variance of the phase shift along one path (y-axis), and the measured phase of the transmitted field (x-axis). Dashed and dotted lines apply when the phase is unwrapped, making the relation explicitly depend on the motion of the particles. (b) The relative mean square displacement of the particles,  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau) \rangle$  (left axis), determined from the wrapped phase via the corresponding  $\langle \Delta \phi_{\text{path}}^2 \rangle$  (right axis). We compare the results from the wrapped phase shift distribution ( $\odot$ ) and variance ( $\square$ ) with traditional DAWS measurements ( $\star$ ). The inset shows the effect of amplitude noise (see text).

By considering the joint probability distribution of  $N = 4$  fields in Eq. (3.28) and by integrating out one phase and four amplitudes, we have obtained an analytic expression for the joint probability distribution of the first three phase derivatives with evolution time  $P(\Phi', \Phi'', \Phi''')$ <sup>2</sup>, from which the individual distribution functions  $P(\Phi')$ ,  $P(\Phi'')$  and  $P(\Phi''')$  can be computed.

<sup>2</sup> See thesis, section 3.4.1, or EPAPS Document No. E-PRLTAO-99-071734 for formulae. This document can be reached through a direct link in the online article's HTML reference section or via the EPAPS homepage

They depend on three parameters  $Q, R$  and  $S$ , that in turn relate to time derivatives of the field correlation function  $g_1(\tau)$  at  $\tau = 0$  :  $Q = -g_1''(0)$ ,  $R = -[g_1^{(4)}(0) - g_1''(0)^2]/g_1''(0)$ , and  $S = [-g_1^{(6)}(0) + (g_1^{(4)}(0)^2/g_1''(0))] / [g_1^{(4)}(0) - g_1''(0)^2]$ . The fits to the three distributions give the values of  $Q, S$  and  $R$ . (Fig. 3.7). These in turn provide a sensitive probe of the early time behavior of the particle motion,  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2 \rangle$  in powers of  $x = \tau/\tau_{\text{DAWS}}$  :  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2 \rangle = 324x^2 - 57x^4 - 3.3x^6 \mu\text{m}^2$ . We emphasize that, by using this method, details about the motion *up to the 6<sup>th</sup> power in time* can be retrieved, which would be impossible from the conventional DAWS method. Figure 3.7 also shows that both theoretical and experimental distributions follow an asymptotic power law decay with exponents  $-3, -2, -\frac{5}{3}$  (which suggests  $-(1 + \frac{2}{n})$  for the  $n^{\text{th}}$  derivative). These slopes provide a *fit-independent* test for CGS.

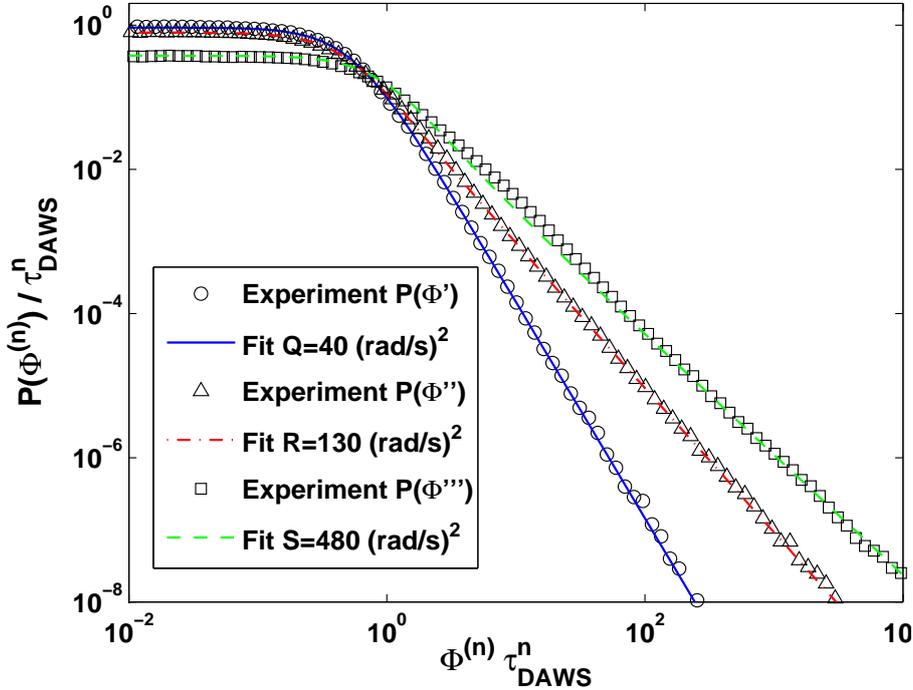


Fig. 3.7: (color online) Comparison of theory and experiment for the phase derivative distribution functions  $P(\Phi^{(n)})$ , where  $n = 1, 2$  or  $3$  denotes the  $n^{\text{th}}$  derivative of  $\Phi$  with respect to evolution time  $T$ . From  $Q = 40 \text{ rad}^2/\text{s}^{-2}$ , we find  $\tau_{\text{DAWS}} = 91 \text{ ms}$ .

To investigate the evolution of the phase over longer times, we study the *cumulative* (unwrapped) phase  $\Phi_c(T)$ , which can be obtained by adding or subtracting  $2\pi$  whenever there is a jump of  $\pm 2\pi$  in the wrapped phase. The cumulative phase can be defined as  $\Phi_c(T) = \int_0^T \Phi'(\tilde{T}) d\tilde{T}$ , and is, by construction, a continuous random variable that is no longer constrained to the interval  $(-\pi : \pi]$ . Its ensemble-average vanishes for fields described by CGS. For sufficiently long time intervals, we expect the cumulative phase shift  $\Delta\Phi_c(\tau)$  to approach the normal distribution with zero mean [Sebbah *et al.*, 1997]. Its variance is related to the cumu-

lative phase derivative correlation function,  $C_{\Phi'}(\tau) \equiv \langle \Phi'(T - \frac{1}{2}\tau)\Phi'(T + \frac{1}{2}\tau) \rangle$ , which in CGS has the simple analytic form  $C_{\Phi'}(\tau) = \frac{1}{2}(\ln g_1)'' \ln(1 - g_1^2)$  [van Tiggelen *et al.*, 2006]. Fig. 3.8(a) compares theory and experiment for  $C_{\Phi'}$ , where predictions based on a simple empirical crossover model for the particle dynamics are also included [Cowan *et al.*, 2000, Cowan *et al.*, 2002], for which  $\langle \Delta r_{\text{rel}}^2(\tau) \rangle = \langle \Delta V_{\text{rel}}^2 \rangle \tau^2 / (1 + \tau^2/\tau_c^2)$ . The best fit is obtained for  $\tau_c = 7\tau_{\text{DAWS}}$ , showing that both  $\tau_{\text{DAWS}}$  and  $\tau_c$  can be determined from  $C_{\Phi'}$ .

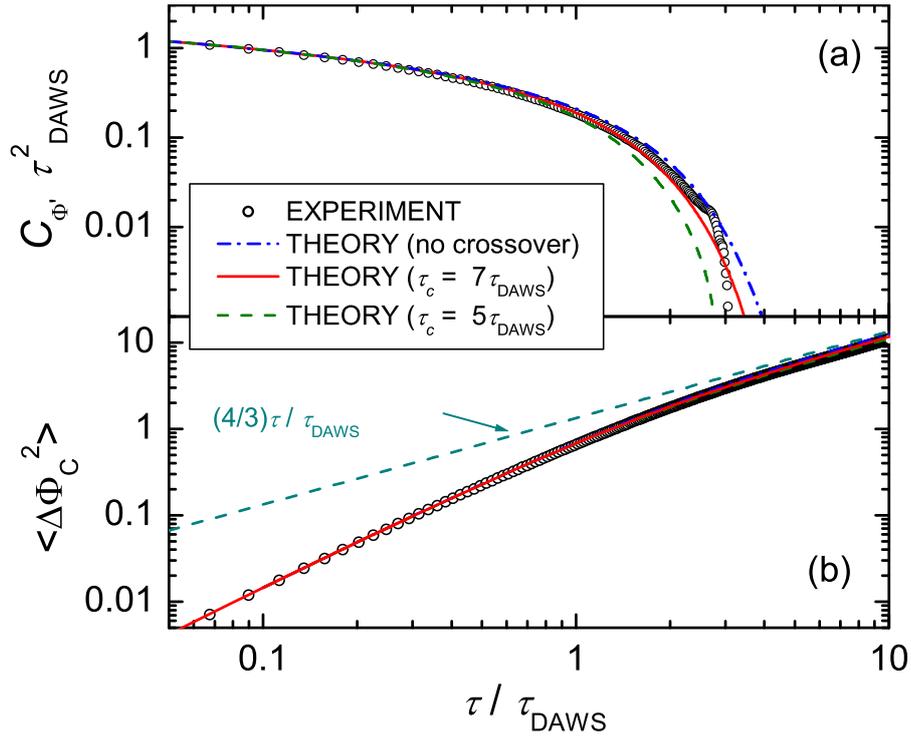


Fig. 3.8: (color online) Comparison of theory and experiment for (a) the phase derivative correlation function  $C_{\Phi'}$ , (b) the cumulative phase shift variance  $\langle \Delta \Phi_c^2(\tau) \rangle$ .

The cumulative phase shift variance can be calculated from  $C_{\Phi'}$  since  $\langle \Delta \Phi_c^2(\tau) \rangle = 2 \int_0^\tau d\nu (\tau - \nu) C_{\Phi'}(\nu)$  [van Tiggelen *et al.*, 2006]. Recalling the expression for  $C_{\Phi'}(\tau)$  reveals that the variance of cumulative phase evolution is determined by  $g_1$  and its first two derivatives. This destroys the universal relation with the path phase variance, but at the same time this increases the sensitivity to details in particle motion at long times (see Fig. 3.6(a)). At short times, the cumulative phase variance increases as a power law with a logarithmic correction,  $\langle \Delta \Phi_c^2(\tau) \rangle = \frac{1}{3}\tau^2/\tau_{\text{DAWS}}^2 [1.5 - \ln(\tau/\sqrt{3}\tau_{\text{DAWS}})]$ , while at long times, the cumulative phase shift evolves as a 1D random process with finite diffusion constant :  $\langle \Delta \Phi_c^2(\tau) \rangle \rightarrow D_{\Delta\Phi} \tau$  (Fig. 3.8(b)). For  $\tau_c \gg \tau_{\text{DAWS}}$ , we find  $D_{\Delta\Phi} = \frac{4}{3}\tau_{\text{DAWS}}$ . The cumulative phase variance is quite different from the path phase variance  $\langle \Delta \phi_{\text{path}}^2 \rangle$ , which has a finite diffusion constant *only* if the particles undergo Brownian motion, which they do not here. By comparing measured and theoretical  $\langle \Delta \Phi_c^2(\tau) \rangle$  in Fig. 3.8(b), the accurate value of  $\tau_{\text{DAWS}} = 89$  ms was deduced from

an appropriate translation along the  $x$  direction.

We have studied the phase evolution of ultrasonic waves in strongly scattering, dynamic media. It is important to discriminate the random phase evolution along one scattering path, usually studied in D(A)WS, from the observed phase evolution in a single speckle spot. Our experiments are extremely well modelled by circular Gaussian statistics. This theory accurately predicts the behavior of the wrapped phase difference probability distribution, the variance of both the wrapped and cumulative phase shifts, and the phase derivative distributions and correlation function. The excellent agreement of theory and experiment has allowed us to relate the observed fluctuations in phase evolution to the relative mean square displacement of the scatterers. The phase statistics are sensitive probes of the particle motion on both short and long time scales, and can provide more accurate information than the more traditional field fluctuation measurements.

We wish to thank NSERC for its support, and T. Norisuye for assisting with some of the data analysis.

Deuxième partie

Phase en sismologie



## CHAPITRE 4

# Diffusion multiple des ondes sismiques



**L**ES ONDES SISMIQUES sont des ondes élastiques avec un spectre très large pouvant aller de  $3 \cdot 10^{-4}$  Hz à 20 Hz [Bernard, 2003, Madariaga, 1998, Montagner, 1997]. Bien que de même nature que les ultrasons utilisés dans l'expérience de laboratoire menée dans la partie précédente, elles sont en de nombreux points bien plus complexes. Les ondes sismiques sont des ondes polarisées qui incluent à la fois des ondes de volume – de compression (dites P) et de cisaillement (dites S) – et des ondes de surface – les ondes de Rayleigh et les ondes de Love. Ces ondes se “mélangent” suite à des conversions lors des réflexions aux interfaces. Par ailleurs, les sources sismiques ne sont pas contrôlables et présentent des mécanismes de rupture avec des géométries particulières. Enfin, le régime de propagation dépend de la fréquence.

La sismologie globale étudie la structure interne de la Terre à partir des enregistrements de séismes de forte magnitude et en utilisant les différents temps d'arrivée, c'est à dire la phase des ondes correspondant à différents chemins de propagation dans le cadre du principe de Fermat [Wallace, 1995, Stein et Wysession, 2003]. En revanche, la phase des ondes sismiques multiplement diffusées est peu étudiée car on ne sait pas comment exploiter l'information qu'elle contient.

Dans un premier temps un bref état de l'art du rôle de la phase dans l'étude de la propagation des ondes sismiques dans le globe terrestre est donné. Ensuite nous nous intéressons plus spécifiquement à la propagation dans la croûte terrestre à haute fréquence ( $f > 1$  Hz). En particulier, une problématique est soulevée : comment obtenir une mesure de l'hétérogénéité de la croûte quantifiée par le libre parcours moyen des ondes ? Pour répondre à cette question, nous appliquons le formalisme développé dans le chapitre 3 aux variations spatiales de la phase et nous montrons théoriquement et numériquement comment l'étude des fluctuations de la phase dans la coda devrait permettre de mesurer le libre parcours moyen des ondes de Rayleigh dans la croûte.

## 4.1 Phase et détermination de la structure de la Terre

Cette section illustre comment la phase des ondes sismiques a été utilisée jusqu'à présent pour sonder l'intérieur de la Terre. Nous montrerons que la phase joue un rôle très important dans ces analyses. Notons que la phase des ondes sismiques multiples diffusées n'a pas encore été exploitée.

### 4.1.1 Modèle de Terre latéralement homogène

Un sismogramme contient de nombreuses **arrivées** correspondant à différents chemins de propagation ou **rais sismiques** à l'intérieur de la Terre. Certains sont simples et sont les premiers enregistrés. D'autres ont été réfractés ou réfléchis par les discontinuités majeures et arrivent avec quelques secondes ou quelques minutes de retard (Figure 4.1). L'analyse des grandes anomalies de propagation a permis d'identifier les structures majeures de la Terre. Par exemple les zones d'ombre des ondes P ont mis en évidence l'existence du noyau externe ; l'absence d'onde de cisaillement S passant par le noyau externe a permis à Richard Dixon Oldham de confirmer sa nature liquide [Oldham, 1906]. Des triplications mettant en évidence un accroissement de vitesse ont permis d'identifier la présence de la graine solide.

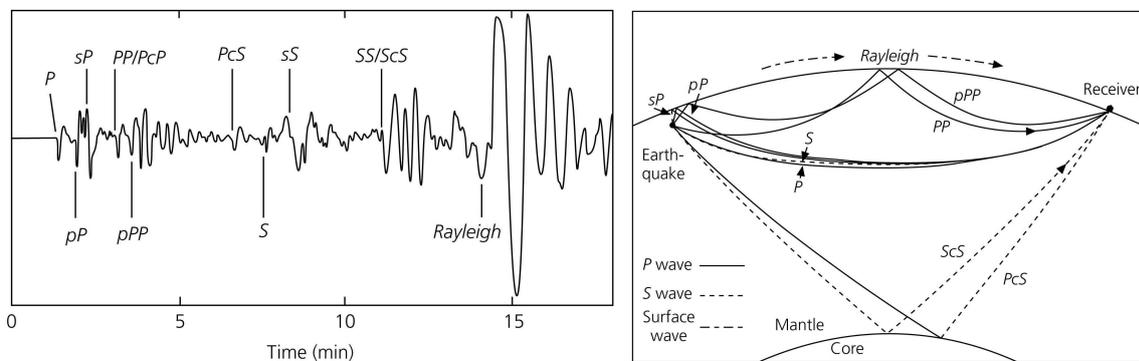


Fig. 4.1: Sismogramme à Golden Colorado présentant différentes arrivées directes pour les longues périodes et la composante verticale. À droite, les rais sismiques correspondants. Source : S. Stein et M. Wyssession [Stein et Wyssession, 2003]

L'étude des temps d'arrivée – ou **phases** – est basée sur la théorie des rais sismiques qui, par équivalence au principe de Fermat des rayons optiques, considère que les rayons sismiques traversent la Terre selon des chemins courbés car les vitesses de propagation changent avec la profondeur. L'analyse de tous les temps de parcours enregistrés sur toute la surface du globe a permis de calculer le *Preliminary Reference Earth Model* (figure 4.2) [Dziewonski et Anderson, 1981]. Il s'agit d'un modèle à symétrie sphérique définissant la variation de la vitesse des ondes sismiques et de la densité en fonction de la profondeur. Ce modèle de Terre latéralement homogène

est certes simple mais très fiable pour des opérations de routine telles que la localisation d'épicentres, ou des interprétations en géochimie (telles que les transitions de phase de l'olivine ou les grands changements chimiques).

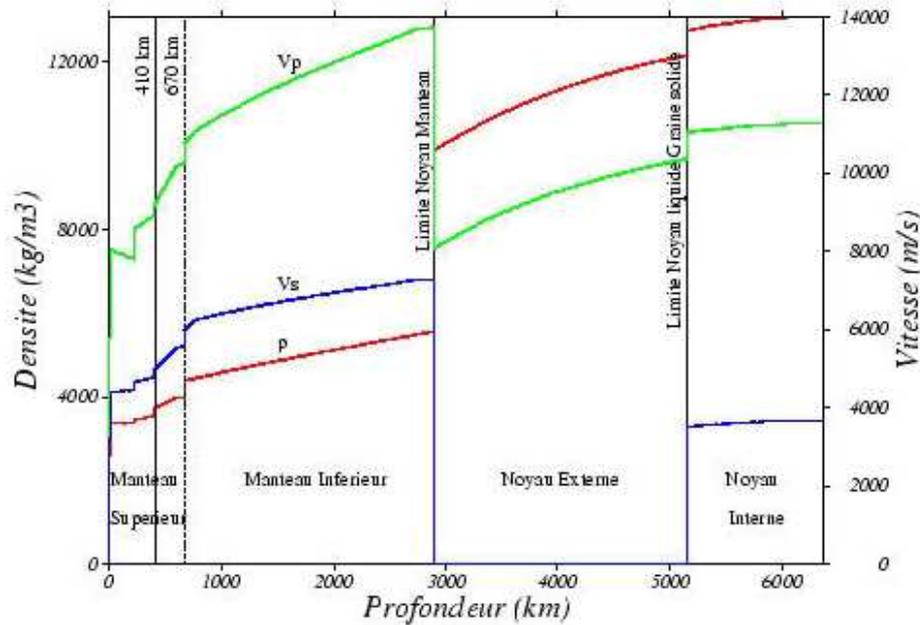


Fig. 4.2: Modèle PREM de Terre latéralement homogène : vitesse des ondes de compression  $P$ , de cisaillement  $S$  et densité  $\rho$  en fonction de la profondeur en kilomètres.

#### 4.1.2 Tomographie sismique

En très bonne approximation, la Terre peut être vue comme une planète avec des couches sphériques homogènes. Un modèle unidimensionnel, au premier ordre, tel que le modèle PREM décrit avec précision les temps de trajet des ondes  $P$  qui se sont propagées à travers toute la planète avec une erreur inférieure à 1%. Cependant on sait qu'il y a des hétérogénéités latérales à toutes les profondeurs. Ceci est directement révélé par la dispersion des temps d'arrivée à toutes les distances. La résolution des variations au second ordre est cruciale pour comprendre la dynamique à l'intérieur de la Terre.

Depuis une vingtaine d'année, la tomographie sismique, basée sur les variations locales des phases, permet de cartographier ces variations de vitesse au second ordre dans le manteau terrestre et d'identifier les hétérogénéités de dimensions supérieures ou égales à 500 km (Figure 4.3).

La tomographie sismique utilise les anomalies de temps de trajet par rapport à un modèle de référence avec une symétrie sphérique, à une période donnée. Le principe sous-jacent est qu'un front d'onde (la phase) sismique a un temps de trajet  $\mathcal{T}$  donné par une intégrale de chemin :

$$\mathcal{T} = \int \frac{ds}{c(s)} = \int u(s) ds \quad (4.1)$$

où  $u(s) = 1/c(s)$  est la lenteur (l'inverse de la vitesse de propagation  $c(s)$ ) le long de l'abscisse curviligne  $s$  du rai sismique. La fluctuation du temps d'arrivée  $\mathcal{T} - \mathcal{T}_{ref} = \int \Delta u(s) ds$  peut être due à une perturbation de la lenteur en n'importe quel endroit du rai sismique. Cette formule reflète également le caractère local de l'information ainsi obtenue puisqu'on est uniquement sensible à la vitesse à proximité du rai sismique entre la source et le récepteur. En utilisant de nombreuses paires séisme-station et la redondance de l'information, des techniques numériques d'inversion (telle que la méthode SIRT) ont permis d'obtenir une carte tridimensionnelle des vitesses en profondeur.

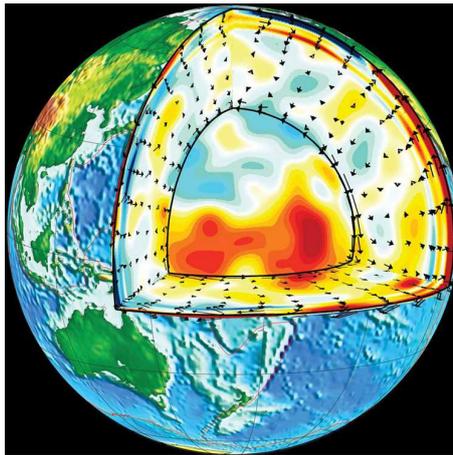


Fig. 4.3: *Tomographie sismique du manteau de la Terre. En bleu le milieu est caractérisé par des vitesses d'ondes sismiques lentes, en rouge les vitesses sont élevées. © GEOSCOPE. Département de Sismologie (CNRS-IPGP).*

### 4.1.3 Diffusion simple

Depuis quelques années, la tomographie sismique intègre les effets de diffusion simple, en prenant en compte la sensibilité des temps de trajet aux structures situées au delà du rai sismique théorique [Nolet *et al.*, 2005]. Le diamètre de la zone de Fresnel de sensibilité significative est de l'ordre de  $\sqrt{\lambda L}$  pour une onde de longueur d'onde  $\lambda$  et un rai de longueur  $L$ . À cause de leur forme ces zones sont appelées “banana-doughnuts”. Par exemple, des images des plumes mantelliques situées sous les points chauds ont ainsi pu être obtenues [Montelli *et al.*, 2006].

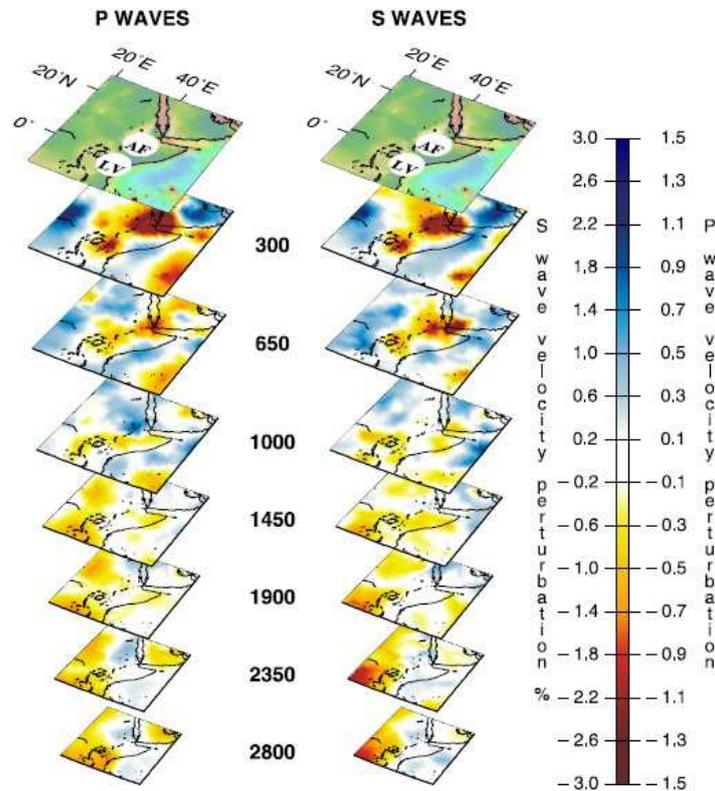


Fig. 4.4: Vue tridimensionnelle des plumes localisées sous la corne de l'Afrique - AF (Afar) et LV (Lac Victoria) - avec les modèles tomographiques (à gauche) d'ondes P et (à droite) d'ondes S. L'échelle verticale est exagérée pour éviter la superposition des vues et correspond à 2800 km de profondeur. Source : [Montelli et al., 2006]

Chacune de ces évolutions de l'imagerie sismique a permis d'améliorer la résolution des modèles.

#### 4.1.4 Analyse des fluctuations de phase sur un réseau

Nous avons vu dans les paragraphes précédents le rôle de la phase dans les méthodes de tomographie déterministes. Nous présentons ici un dernier exemple de technique utilisant la phase. Cet exemple est d'autant plus intéressant qu'il met en évidence la présence d'hétérogénéités dans la lithosphère.

La méthode utilise les ondes directes uniquement mais utilise explicitement la phase. L'idée est la suivante. On utilise l'enregistrement d'une onde télésismique – dont l'épicentre est à grande distance – qui est quasiment plane et avec une incidence quasiment verticale. Les inhomogénéités de la lithosphère provoquent une distortion du front d'onde et par conséquent des fluctuations de phase. La mesure de la cohérence de la phase du front d'onde enregistré sur un réseau de stations sismiques permet d'accéder au spectre des hétérogénéités [Aki, 1973, Flatté et Wu, 1988, Zheng *et al.*, 2007].

## 4.2 Diffusion multiple des ondes sismiques

Dans la suite, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la propagation dans la croûte terrestre. La croûte et le manteau terrestres, séparés par le Moho, sont de compositions et de natures très différentes. Le manteau est homogène chimiquement et formé majoritairement d'olivine dans sa partie supérieure. À l'inverse, la croûte est beaucoup plus hétérogène chimiquement. Son hétérogénéité et sa grande diversité minéralogique proviennent de la différenciation chimique, des processus tectoniques de déformation et des phénomènes d'érosion et de sédimentation. En sismique-réflexion, la croûte apparaît réfléchissante et hétérogène alors que le manteau semble plus transparent. De plus, les vitesses étant plus élevées dans le manteau, la croûte se comporte comme un guide d'onde très efficace.

Du fait de cette hétérogénéité de la croûte terrestre, le régime de propagation des ondes sismiques présente des propriétés de diffusion multiple pour les courtes périodes ( $f > 1$  Hz) similaires à celui des ultrasons étudiés dans les chapitres précédents.

### 4.2.1 La coda sismique

Dès 1969, les travaux de Keiiti Aki [Aki, 1969, Aki et Richards, 2002] mettent en évidence que la croûte terrestre peut se comporter comme un milieu multiple diffuseur pour les ondes sismiques - les diffuseurs sont alors des zones dans lesquelles les paramètres élastiques sont différents de ceux du reste du milieu ou des discontinuités. En effet, on remarque sur un sismogramme que les ondes directes S et P, dont les temps de trajets ne sont que de quelques secondes, sont suivies pendant plusieurs minutes de trains d'ondes continus et s'amortissant lentement dans le temps (figure 4.5). Ainsi certaines de ces ondes ont parcouru plusieurs dizaines de fois la distance source-station, soit plusieurs centaines de kilomètres avant d'être détectées.

Ce train d'onde est appelé **coda sismique** par analogie à la coda musicale qui marque la fin d'un morceau de musique. Aki a été le premier à s'être intéressé à ce train d'onde et à reconnaître en lui un marqueur de l'hétérogénéité de la lithosphère. Il faudra cependant attendre les années 80 pour que leur exploitation – pour l'étude de la croûte – commence.

Soulignons que depuis cette découverte, d'autres zones hétérogènes ont été mises en évidence dans la Terre profonde. Aux mêmes fréquences, il existe une coda du noyau et une coda du manteau. Les grandes interfaces sont particulièrement hétérogènes. Par exemple, la diffusion à la base du manteau donne naissance à des précurseurs dans les zones d'ombre [Margerin et Nolet, 2003].

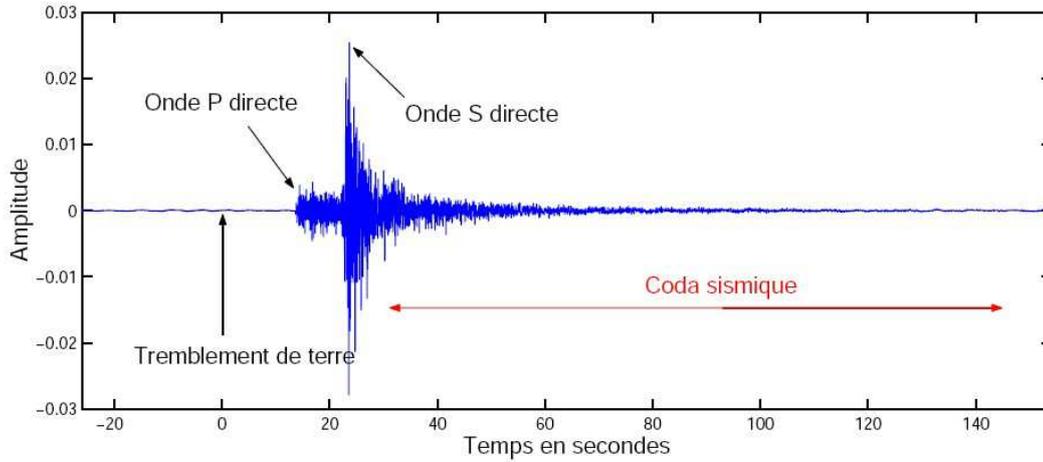


Fig. 4.5: Sismogramme d'un tremblement de Terre de magnitude 4.3 sur l'échelle de Richter enregistré au Mexique en 1998. La distance entre l'épicentre et le réseau de sismomètres est de 30 km. Nous voyons distinctement les arrivées des ondes directes P et S suivies d'une longue coda.

#### 4.2.2 Facteur de coda $Q_c$

L'analyse des données sismiques montre que l'énergie  $E$  de la coda obéit à une loi exponentielle en fonction du temps  $t$  de la coda. Il s'agit d'une loi empirique proposée dans les années soixante-dix par Aki et Chouet [Aki et Chouet, 1975] :

$$E \sim t^{-\gamma} \exp(-2\pi ft/Q_c) \quad (4.2)$$

où  $f$  est la fréquence et où  $\gamma$  est un exposant dont les valeurs observées sont de l'ordre de 1.  $Q_c$  est appelé **facteur de qualité de la coda**. Il s'agit d'un paramètre robuste, indépendant de la localisation, de la distance source-station ou de la magnitude du séisme mais dépendant de l'environnement géologique ou tectonique local. On pourrait donc imaginer que le facteur  $Q_c$  permet de quantifier l'hétérogénéité du milieu.

La théorie du transfert radiatif a permis de modéliser la décroissance temporelle de l'énergie de la coda en prenant en compte la diffusion multiple des ondes dans la croûte [Sato et Fehler, 1998, Margerin, 1998, Margerin, 2005, Trégourès *et al.*, 2002]. Soit  $I_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$ , l'énergie élastique moyenne en  $\vec{r}$  se propageant dans la direction  $\vec{k}$ . Sa décroissance vient de la diffusion vers les autres directions, ainsi que de l'absorption. Les sources d'énergie décrites par leur émissivité  $\epsilon(\vec{r}, t)$ , ainsi que les diffusions vers la direction  $\vec{k}$  (avec un taux  $W(\vec{k}' \rightarrow \vec{k})$ ) participent à augmenter  $I_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$ . L'équation du transfert radiatif exprime ce bilan d'énergie, elle se réduit à une équation de diffusion lorsque la distribution de l'énergie est isotrope. Dans le cas de la croûte terrestre bornée en haut par une surface libre et en profondeur à  $h \simeq 30 \text{ km}$  par l'interface solide-solide avec le manteau homogène (Moho), la solution asymptotique obtenue est :

$$E(\vec{r}, t) \sim \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \exp\left(-\frac{\zeta^2 Dt}{h^2} - \frac{t}{\tau_a}\right) \quad (4.3)$$

avec  $\zeta$  un paramètre sans dimension dépendant de la profondeur du Moho. La ressemblance avec l'équation 4.2 suggère d'interpréter le temps caractéristique de la coda comme une combinaison de l'absorption et de la fuite de l'énergie vers le manteau entravée par la diffusion multiple et les réflexions internes. Ces modèles permettent d'expliquer la décroissance de l'énergie de la coda avec des dissipations réalistes. Néanmoins la controverse de l'identification *directe* du régime de propagation reste ouverte : la décroissance de la forme 4.2 ne suffit pas à conclure sur le régime de propagation. Les paragraphes suivants donnent les nouveaux éléments apportés à cette discussion lors de ces dernières années.

### 4.2.3 Approche mésoscopique

Trois expériences particulièrement marquantes ont mis en évidence des phénomènes caractéristiques du régime de la diffusion multiple [Margerin *et al.*, 2005].

#### Équipartition

Le phénomène de diffusion multiple dans la croûte terrestre a été confirmé par la mesure d'une équipartition de l'énergie dans tous les modes de vibration possibles de la croûte. Rappelons que ce concept a été introduit pour les systèmes en équilibre thermique pour lesquels une énergie moyenne de  $k_B T/2$  est attribuée à chaque degré de liberté. Dans le cas de la diffusion multiple des ondes sismiques, l'origine est très différente. La présence de désordre se traduit par des couplages entre les modes de propagation qui conduit à une distribution uniforme de l'énergie dans l'espace des phases. Une expérience réalisée au Mexique par R. Hennino *et al.* [Hennino *et al.*, 2001] a permis de mesurer un rapport des énergies des ondes de cisaillement ( $S$ ) et de compression ( $P$ ), dans la coda, égal à  $7.2 \pm 0.7$  en accord avec la valeur de 7.19 prédite par un modèle d'équipartition prenant en compte la conversion des modes à la surface de la Terre et incluant les ondes S, P et de Rayleigh.

#### Reconstruction de la fonction de Green

Dans la coda sismique, l'équipartition et les fluctuations du champ sont dues à la présence de nombreuses hétérogénéités. Le théorème de fluctuation-dissipation devrait donc s'appliquer avec pour conséquence la proportionnalité entre la corrélation espace-temps du champ dans la coda et la fonction de Green symétrique en temps [Weaver et Lobkis, 2004]. C'est ce qui a été observé par l'équipe du professeur M. Campillo [Campillo et Paul, 2003, Paul *et al.*, 2005].

L'application de ce résultat au bruit sismique couplée à la méthode d'interférométrie des ondes de coda (voir Chapitre 2) a très récemment permis d'identifier un signal précurseur plusieurs jours avant le début des éruptions volcaniques du volcan du Piton de la Fournaise sur

l'île de la Réunion [Brenquier *et al.*, 2008]. Ces résultats devraient permettre de mieux prédire l'éventualité d'une éruption volcanique et aussi son intensité qui est un paramètre essentiel pour la prévention des risques volcaniques. Hormis la volcanologie, le nouveau procédé devrait intéresser d'autres domaines. Ainsi, l'application de cette méthode à l'étude des failles générant de grands tremblements de Terre devrait permettre d'améliorer la prévention du risque sismique.

### Rétrodiffusion cohérente

E. Larose *et al.* ont mis en évidence un effet de **localisation faible** [Larose *et al.*, 2004], plus connu sous le nom de **rétrodiffusion cohérente** qui est la manifestation de l'interférence d'ondes multiples diffusées dans des milieux désordonnés. Cet effet a été observé pour la première fois il y a vingt ans en mécanique quantique [Abrahams *et al.*, 1979], puis à la fois en optique [Wolf et Maret, 1985, van Albada et Lagendijk, 1985] et en acoustique [Tourin *et al.*, 2000]. Il a été démontré que le temps caractéristique de croissance du pic d'énergie donne le temps typique entre 2 diffusions  $t^*$  et ainsi une bonne mesure du libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  (définition Chapitre 1). L'inconvénient principal de cette mesure en sismologie est qu'elle nécessite des enregistrements dans le champ proche de la source sismique, c'est à dire dans le voisinage de l'épicentre.

## 4.3 Étude théorique des fluctuations spatiales de phase dans la coda

Les phénomènes d'équipartition ou de rétrodiffusion cohérente observés pour les ondes sismiques sont des signatures caractéristiques du régime de diffusion multiple et permettent une identification désormais certaine du régime de propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre. Néanmoins une problématique soulevée dans le paragraphe précédent n'a pas été résolue : aucune mesure directe du désordre de la croûte terrestre n'existe. En outre il est difficile d'isoler les effets d'absorption et de diffusion. L'objet de cette section est de présenter les nouveaux éléments apportés par la phase à cette problématique posée par [Campillo et Lemarchand, 2002] : comment, en étudiant la coda sismique, accéder au degré d'hétérogénéité des enveloppes superficielles de la Terre ?

Le chapitre 3 a mis en évidence la pertinence et l'intérêt d'utiliser les variations et les fluctuations *temporelles* de la phase dans le but de caractériser la nature et l'intensité du mouvement de diffuseurs dans un milieu dynamique. Dans cette section, les variations et les fluctuations *spatiales* de la phase dans les tavelures sont étudiées afin de caractériser le désordre du milieu de propagation qui est quantifiable par une mesure du libre parcours moyen  $\ell$ .

De nouveau la phase est intuitivement l'objet pertinent à considérer. En effet, on imagine

que les effets de l'absorption vont plutôt affecter l'amplitude du champ alors qu'en revanche les effets de diffusion vont plutôt affecter la phase. Étudier la phase c'est donc isoler les effets de la diffusion multiple des effets d'absorption. Cette étude apparaît donc comme une bonne alternative au problème soulevé dans le paragraphe 4.2.2.

Dans un premier temps, les variations et les fluctuations spatiales de la phase sont reliées au libre parcours moyen. Ensuite, l'applicabilité à la détermination du libre parcours moyen dans la croûte terrestre est mise en évidence par des simulations en différences finies.

### 4.3.1 Hypothèses

On suppose que le régime de propagation est celui de la diffusion multiple. Le milieu est caractérisé par un désordre dans lequel le libre parcours moyen des ondes est  $\ell$ . Les propriétés statistiques du désordre sont supposées homogènes. Dans ce cadre, l'argument présenté dans le paragraphe 3.3.3 reste valable et on peut supposer que les ondes présentent une statistique gaussienne circulaire. Cette hypothèse sera validée expérimentalement dans les chapitres 5 et 6 pour les ondes acoustiques de Lamb et les ondes sismiques de surface respectivement.

Aucune hypothèse sur la nature de l'onde ou du milieu n'est formulée. Ces développements théoriques sont donc très généraux bien que réalisés avec l'idée d'une application à la coda sismique.

### 4.3.2 Statistiques

Les expressions des distributions  $P(\Phi')$ ,  $P(\Phi'')$  et  $P(\Phi''')$  restent valides pour  $x \equiv r$  où  $r$  est la variable position (voir les équations 3.14 3.15 et 3.16). Les paramètres Q, R et S s'expriment en fonction des 6 premiers termes du développement de Taylor de la fonction de corrélation spatiale du champ à courte distance.

Dans l'hypothèse d'une onde de surface telle que les ondes de Rayleigh (cf. Éq. 4.5), pour  $\ell \gg \lambda$ , on peut utiliser l'expression de Q qui permet de retrouver la longueur d'onde  $\lambda$  :

$$Q \simeq \frac{1}{2}k^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \quad (4.4)$$

Par ailleurs, comme il a été évoqué précédemment au paragraphe 3.4.2, le comportement asymptotique en loi de puissance de ces distributions des dérivées de la phase  $\Phi$  constitue un critère pertinent pour tester le caractère gaussien de la coda.

### 4.3.3 Corrélations

La fonction de corrélation de la dérivée de la phase est un objet particulièrement intéressant pour mesurer le libre parcours moyen  $\ell$ . En effet, un calcul préliminaire pour les cas simples

2D et 3D montre que cette fonction décroît avec la distance  $r$  avec pour *seule échelle caractéristique* le libre parcours moyen.

### Corrélations spatiales du champ

Considérons la fonction de corrélation du champ. Dans l'approximation de diffusion, on peut montrer qu'elle s'écrit [Shapiro, 1986, Aki, 1957, Legendijk et van Tiggelen, 1996] :

$$C(r) = C(|r' - r''|) = \langle \Psi(r') \Psi^*(r'') \rangle = \begin{cases} J_0(kr) \exp(-r/2\ell) & (2\mathcal{D}) \\ \text{sinc}(kr) \exp(-r/2\ell) & (3\mathcal{D}) \end{cases} \quad (4.5)$$

respectivement pour des ondes de surface et des ondes de volume, avec  $k = 2\pi/\lambda$  le vecteur d'onde. Les oscillations à l'échelle de la longueur d'onde proviennent uniquement du caractère aléatoire et équiprobable des directions d'incidence. Ces oscillations empêchent d'observer les vrais déphasages qui se produisent sur la plus grande échelle du libre parcours moyen.

### Corrélations spatiales des variations de phase

La fonction de corrélation de la dérivée de la phase par rapport à la position  $r$  se calcule à partir de la corrélation du champ (Éq. 4.5) en utilisant la formule 3.20 [van Tiggelen *et al.*, 2006] :

$$C_{\Phi'}(r > \lambda) \rightarrow \frac{1}{2}[(C')^2 - C''C] = \begin{cases} (k/\pi r) \exp(-r/\ell) & (2\mathcal{D}) \\ (1/2r^2) \exp(-r/\ell) & (3\mathcal{D}) \end{cases} \quad (4.6)$$

$C_{\Phi'}$  présente une décroissance algébrique pour  $r < \ell$  et une décroissance exponentielle pour  $r \gtrsim \ell$ . Contrairement à la corrélation du champ  $C$ ,  $C_{\Phi'}$  n'oscille pas à l'échelle de la longueur d'onde. Le libre parcours moyen est la seule longueur caractéristique qui intervient dans les décorrélations des variations de phase. De plus, soulignons que l'absorption n'intervient pas dans la décorrélation.

Il serait extrêmement intéressant d'appliquer ces résultats à la sismologie afin d'obtenir une mesure de l'hétérogénéité de la croûte terrestre quantifiable par  $\ell$ .

### Corrélations spatiales de la phase déroulée

La fonction de corrélation de la phase déroulée (ou cumulée)  $C_{\Phi_c}(r)$  est représentée dans la figure 4.6 en fonction de  $r/\ell$  dans les cas 2D et 3D. On la calcule à partir des équations 3.21 et 4.5. En 2D, quelle que soit la valeur du produit  $k\ell$ , la corrélation suit un comportement décroissant exponentiel universel vers la valeur asymptotique  $-k\ell/\pi$ . En 3D la valeur asymptotique dépend logarithmiquement de  $k\ell$  et deux longueurs caractéristiques interviennent,  $\lambda$  et  $\ell$ . En principe, une mesure de  $C_{\Phi_c}(r)$  donnerait directement accès à la valeur du libre parcours moyen, indépendamment de l'absorption, dans les deux cas [van Tiggelen *et al.*, 2006].

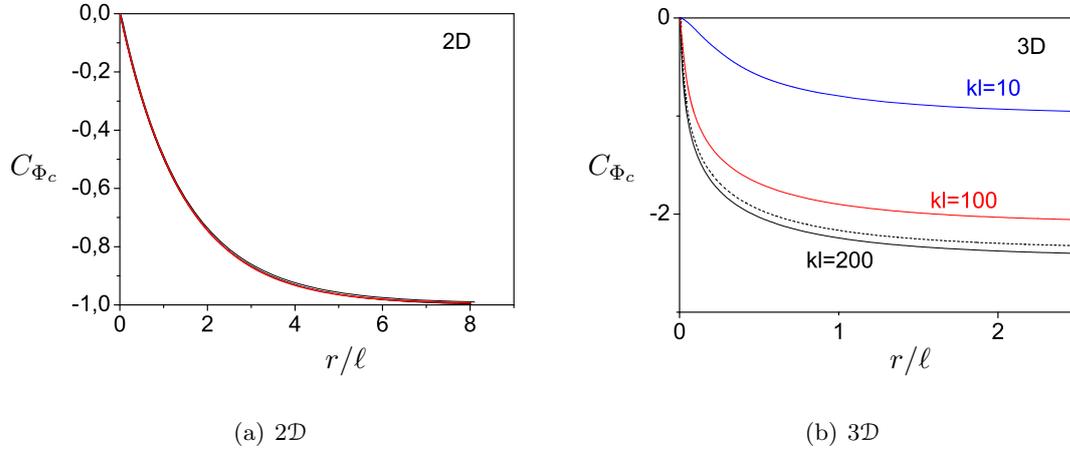


Fig. 4.6: *Corrélation spatiale de la phase cumulée (déroulée)  $C_{\Phi_c}(r)$  en fonction de la distance  $r$  adimensionnée par le libre parcours moyen  $\ell$ . (a) Cas 2D : Pour un milieu aléatoire bidimensionnel : la corrélation a été normalisée par  $k\ell/\pi$ , c'est à dire l'opposé de la valeur asymptotique pour les grandes valeurs de  $kr$ . Les courbes pour  $k\ell = 10, 100, 200$  se superposent et suivent une décroissance exponentielle (en rouge). (b) Cas 3D : Pour un milieu aléatoire tridimensionnel et différentes valeurs de  $k\ell$  : la valeur asymptotique dépend seulement logarithmiquement de  $k\ell$  ; la courbe en pointillés correspond à l'intégration simple de la formule asymptotique (4.6).*

L'utilisation de la fonction de corrélation de la phase déroulée est plus difficilement applicable à la sismologie. En effet, la mesure de  $C_{\Phi_c}$  requiert de dérouler la phase sur plusieurs libre parcours moyen ce qui paraît irréalisable expérimentalement. Il faut chercher une méthode permettant la mesure de  $\ell$  sur une échelle plus petite.

$C_{\Phi'}$  est un meilleur candidat pour mesurer  $\ell$ .

## 4.4 Étude en différences finies

Il n'existe pas d'instrument de sismologie mesurant spécifiquement les dérivées spatiales du champ. Il faut donc estimer les dérivées par différences finies en comparant les enregistrements de deux stations sismiques voisines. Il est donc absolument nécessaire d'étudier dans quelle mesure les résultats précédents restent valides en différences finies, pour l'application aux ondes sismiques. De plus, la phase  $\Phi \in (-\pi : \pi]$  est un objet défini sur un cercle de rayon unité et non dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . Nous verrons que ce fait, conjugué à l'échantillonnage spatial et la nécessité de travailler avec les formules de différences finies, induit des difficultés de traitement du signal spécifiques à la phase qui nécessitent des précautions particulières.

### 4.4.1 Déroutement de la phase

Le déroutement de la phase a pour objectif de retrouver la phase réelle du signal – définie sur  $\mathbb{R}$  – en fonction de la distance  $r$ . Cette opération permet de supprimer les discontinuités de  $2\pi$  d'origine géométrique qui apparaissent lors d'un passage en  $\pm\pi$ . En pratique, à cause de l'échantillonnage spatial, il n'est pas possible de distinguer une variation de phase importante d'origine physique d'une petite fluctuation provoquant un saut de  $2\pi$ . Inversement, il n'est pas possible de distinguer une forte fluctuation induisant un saut de  $2\pi$  d'une faible fluctuation. La seule possibilité pour un réseau de mesures  $1\mathcal{D}$  est de supposer que les variations de phase supérieures à  $\pi$  en valeur absolue entre deux points de mesure voisins ne sont très probablement pas d'origine physique. C'est sur cette hypothèse que sont basés les algorithmes usuels de calcul de la phase déroulée : ces derniers ajoutent des multiples de  $2\pi$  de façon à supprimer les sauts supérieurs à  $\pi$  en valeur absolue entre deux mesures distantes de  $\Delta r$  où  $\Delta r$  est le pas d'échantillonnage spatial. Plus le pas d'échantillonnage sera grand plus le nombre d'erreurs augmentera lors du déroutement.

### 4.4.2 Différences finies

La dérivée de la phase  $\Phi' \in \mathbb{R}$  peut être estimée en différences finies par :

$$\Phi'(r) \simeq \frac{\Phi(r + \frac{\Delta r}{2}) - \Phi(r - \frac{\Delta r}{2})}{\Delta r} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \quad (4.7)$$

où  $\Delta r$  est le pas de l'échantillonnage spatial et où la différence de phase  $\Delta\Phi$  peut être calculée de trois façons différentes :

1. La différence de phase est calculée par différence "brute" des deux phases mesurées à un intervalle  $\Delta r$ . Comme la phase  $\Phi$  est définie dans  $(-\pi : \pi]$ , la différence  $\Delta\Phi$  est définie dans l'intervalle  $(-2\pi : 2\pi]$ . Nous appellerons  $\Delta\Phi$  la différence des phases enroulées (par opposition à déroulées).
2. La différence de phase est redéfinie sur un cercle, en effet un déphasage est aussi une phase :  $\Delta\Phi \in (-\pi : \pi]$ . Nous appellerons alors  $\Delta\Phi$  la différence de phase enroulée ;
3. La différence de phase est calculée par soustraction des phases déroulées de façon à éviter les erreurs induites par une éventuelle discontinuité dans l'intervalle  $\Delta r$  :  $\Delta\Phi = \Delta\Phi_c$ . La différence  $\Delta\Phi_c$  est a priori définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que différence de deux phases déroulées elles-mêmes définies sur  $\mathbb{R}$ , mais en pratique son intervalle de variation est  $(-\pi : \pi]$  : c'est une conséquence directe de l'opération de déroutement qui a supprimé toutes les variations supérieures à  $\pi$  en valeur absolue (cf. paragraphe ci-dessus).

On montre que les différences 2. et 3. sont équivalentes. Dans la suite nous noterons  $\Delta\Phi$  la différence des phases enroulées (définition 1) et  $\Delta\Phi_c$  la différence des phases déroulées (définitions 2 et 3). Dans la limite  $\Delta r \rightarrow 0$ , les 3 définitions sont équivalentes et  $\Delta\Phi/\Delta r \rightarrow \Phi'$ .

La dérivée de la phase est *a priori* définie sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, lorsqu'elle est estimée par différences finies, la dérivée  $\Phi'$  varie uniquement dans un intervalle :

1. si  $\Phi' = \frac{\Delta\Phi}{\Delta r}$  alors  $\Phi' \in (-2\pi : 2\pi]/\Delta r$  ;
2. si  $\Phi' = \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta r}$  alors  $\Phi' \in (-\pi : \pi]/\Delta r$ .

#### 4.4.3 Distribution des différences de phase

La distribution de la dérivée de la phase peut être estimée par différences finies :

$$P(\Phi') \simeq P(\Delta\Phi) \frac{d(\Delta\Phi)}{d\Phi'} \simeq P(\Delta\Phi) \Delta r \quad (4.8)$$

si l'équation 4.7 s'applique. La distribution des différences de phase enregistrées par deux récepteurs voisins distants de  $\Delta r$  peut être calculée analytiquement à partir de la distribution jointe de 2 champs gaussiens. Selon la définition de la différence de phase choisie, la probabilité  $P(\Delta\Phi)$  s'exprime de deux façons différentes mais équivalentes dans la limite  $\Delta r \rightarrow 0$  :

1. si  $\Delta\Phi$  est la différence des phases enroulées définie entre  $-2\pi$  et  $2\pi$  [Cowan *et al.*, 2007] :

$$P(\Delta\Phi) = \frac{2\pi - |\Delta\Phi|}{4\pi^2} \left[ \frac{1 - g_1^2}{1 - F^2} \right] \left[ 1 + \frac{F \cos^{-1}(-F)}{\sqrt{1 - F^2}} \right] \quad \text{avec } F = g_1 \cos(\Delta\Phi) \quad (4.9)$$

2. si  $\Delta\Phi_c$  est la différence des phases déroulées définie sur un cercle entre  $-\pi$  et  $\pi$  :

$$P(\Delta\Phi_c) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - g_1^2}{1 - F^2} \right] \left[ 1 + \frac{F \cos^{-1}(-F)}{\sqrt{1 - F^2}} \right] \quad \text{avec } F = g_1 \cos(\Delta\Phi_c) \quad (4.10)$$

où  $g_1 = C(\Delta r)$  est la corrélation du champ à la distance  $\Delta r$ . Un ajustement aux données pourra donner accès au paramètre  $g_1 = C(\Delta r)$  relié lui même au paramètre Q (cf. Chapitre 3 section 3.4.1) par :

$$g_1 = C(\Delta r) \simeq 1 + \frac{1}{2} C''(0) \Delta r^2 \simeq 1 - \frac{1}{2} Q \Delta r^2 \quad (4.11)$$

ou réciproquement :

$$Q = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{2(1 - g_1)}{\Delta r^2} \quad (4.12)$$

Dans l'équation 4.10, il est intéressant de remarquer que si les champs sont totalement décorrélés à la distance  $\Delta r$  alors la distribution  $P(\Delta\Phi)$  est uniforme comme la distribution de la phase elle-même.

## 4.4.4 Corrélations en différences finies

La corrélation des variations de phase peut également être approchée par différences finies :

$$C_{\Phi'}(r) = C_{\Phi'}(|r' - r''|) = \langle \Phi'(r')\Phi'(r'') \rangle \simeq \langle \Delta\Phi_c(r')\Delta\Phi_c(r'') \rangle / \Delta r^2 = C_{\Delta\Phi_c}(r) / \Delta r^2 \quad (4.13)$$

Il n'est pas possible d'obtenir simplement une expression analytique de la corrélation  $\langle \Delta\Phi(r')\Delta\Phi(r'') \rangle$ . En revanche il est aisé d'obtenir une bonne estimation du résultat par simulation numérique. Nous avons simulé un champ avec une statistique circulaire gaussienne enregistré par un réseau de récepteurs avec une géométrie unidimensionnelle et qui enregistre une seule composante du champ. Le schéma de la simulation réalisée est décrit dans la figure 4.7. Il met en oeuvre un générateur de nombres aléatoires gaussien et N-corrélé décrit dans la figure 4.8. Le résultat est présenté dans la figure 4.9.

Soit un réseau sismique fictif de  $N$  stations alignées, situées en  $r_i$  et enregistrant le champ  $\Psi_i$ . Une réalisation du champ analytique complexe est un vecteur :

$$\underline{\Psi} = (\Psi_1(r_1) \dots \Psi_N(r_N)) \equiv (\Re(\Psi_1) \dots \Re(\Psi_N), \Im(\Psi_1) \dots \Im(\Psi_N)).$$

1. Calcul de la matrice de corrélation  $\underline{C} = (C_{ij})_N$  du champ réel (exemple du cas 2D) :

$$C_{ij} = J_0(k|r_i - r_j|) \exp(-|r_i - r_j|/2\ell)$$

où  $\underline{C}$  est une matrice symétrique donc diagonalisable ;

2. La matrice de corrélation du champ analytique complexe s'écrit :

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \underline{C} & 0 \\ 0 & \underline{C} \end{pmatrix}$$

dans l'hypothèse d'une statistique circulaire.

3. On génère une réalisation  $\underline{\Psi}$  du champ analytique complexe en utilisant le générateur aléatoire présenté dans la figure 4.8 ;
4. On en déduit une réalisation de la phase :  
 $\underline{\Phi} = (\Phi_1(r_1) \dots \Phi_N(r_N)) = \Im(\ln(\underline{\Psi})) ;$
5. Déroulement de la phase : correction des discontinuités de  $2\pi$ .
6. Calcul de la corrélation :  $C_{\Delta\Phi_c}(r)$

$= C_{\Delta\Phi_c}(|r_i - r_j|) = \langle \Delta\Phi_c(r_i)\Delta\Phi_c(r_j) \rangle = \langle (\Phi_i - \Phi_{i-1})(\Phi_j - \Phi_{j-1}) \rangle$   
où la moyenne est réalisée sur les différents tirages aléatoires et les différents couples de station  $(i, j)$  tels que  $r = |r_i - r_j|$ .

Fig. 4.7: Schéma et étapes de la simulation numérique visant à estimer la corrélation des variations de phase en différences finies.

Étant donné un événement  $\underline{\Psi} = (\Psi_1 \dots \Psi_N)$  d'une distribution gaussienne :

$$P(\Psi_1 \dots \Psi_N) = \frac{1}{\pi^N \det(\underline{\underline{\mathbf{C}}})} \exp \left[ -(\Psi_1 \dots \Psi_N) \underline{\underline{\mathbf{C}}} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} \right]$$

avec une matrice de corrélation  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ . Une réalisation est obtenue par les étapes :

1. Calcul de la matrice diagonale  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = (D_{ii})_N$  et calcul de la matrice de passage associée  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ .
2. Utilisation de  $N$  générateurs aléatoires gaussiens indépendants de variance  $D_{ii}$  : un tir est alors un vecteur  $\underline{\psi} = (\psi_1 \dots \psi_N)$ .
3. Une réalisation est obtenue en multipliant par la matrice de passage :  $\underline{\Psi} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\psi}$

Fig. 4.8: Générateur aléatoire gaussien  $N$ -corrélé

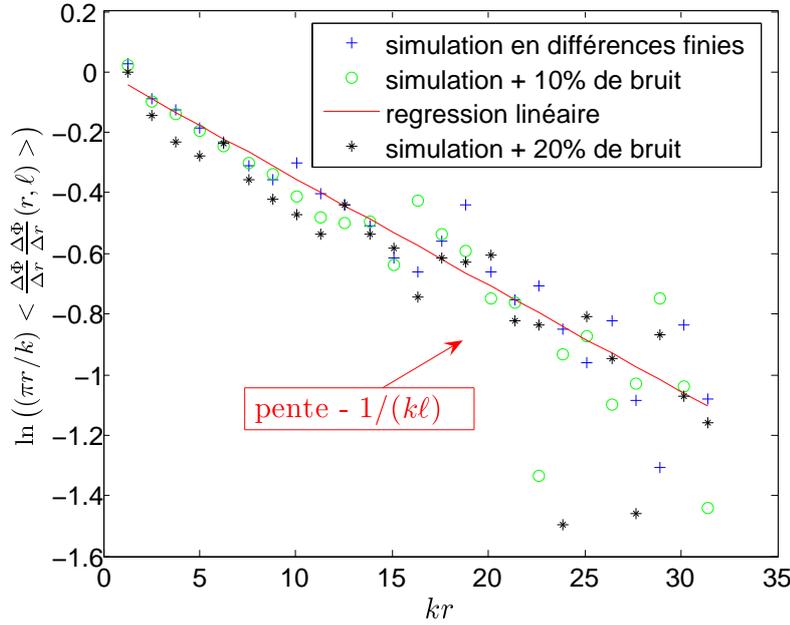


Fig. 4.9: Résultat de la simulation de la corrélation estimée en différences finies par  $C_{\Delta\Phi}(r)/\Delta r^2$  pour  $\ell = 5\lambda = 50\Delta r$  et 2 millions de tirages. Le logarithme de la corrélation normalisée par  $\pi r/k$  est représenté en fonction de la distance normalisée par le vecteur d'onde  $k$ . Cette représentation met en évidence le comportement asymptotique attendu en  $(k\pi/r) \exp(-r/\ell)$ . L'influence de différents niveaux de bruit blanc est étudiée.

Soulignons la nécessité d'utiliser la différence des phases déroulées (§4.4.2 méthode 2.) pour calculer la corrélation afin de limiter les artéfacts dus à l'échantillonnage spatial. En effet, dans le cas contraire la corrélation est dominée par les contributions, même peu nombreuses, des grands déphasages de  $2\pi$  qui sont causés par les discontinuités de la phase enroulée au niveau d'un passage en  $\pm\pi$ . Ces déphasages de  $2\pi$  n'ont pas de signification physique et leur contribution est à éliminer. Notons que cela induit en contrepartie l'élimination des grandes variations de phase  $\Delta\Phi > \pi$  d'origine physique mais il n'y a pas d'autre choix possible.

Le résultat du calcul de la corrélation des variations de phase en différences finies est présenté figure 4.9. Cette simulation met en évidence les points suivants :

- Conservation du comportement asymptotique de décroissance exponentielle avec le libre parcours moyen  $\ell$  attendu pour  $\Delta r \rightarrow 0$  ;
- Comportement asymptotique atteint non seulement pour  $r \sim \ell$  mais dès  $r \sim \lambda/5$  ;
- Changement des amplitudes de corrélations : en particulier la corrélation de  $\Phi'$  est divergente en zéro, en revanche  $C_{\Delta\Phi_c}(0) = \langle \Delta\Phi_c^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta\Phi_c)^2 P(\Delta\Phi_c) d\Delta\Phi_c$  est bien définie ;
- Stabilité du résultat par rapport au bruit testée en superposant différents niveaux de bruit blanc ( $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{1}}$ ) ;
- Convergence relativement lente. Ceci s'explique par les deux raisons suivantes : non seulement il s'agit d'une statistique d'ordre 4, mais encore on cherche à observer la contribution en  $\exp(-x/\ell)$  de la décroissance pour  $r \lesssim \ell$  c'est à dire dans le domaine dominé par la décroissance en  $1/r$  ;
- La dispersion croissante des points lorsque  $r$  augmente met en évidence une convergence d'autant plus lente que  $r$  est grand : en effet pour un réseau sismique de taille finie, il y a d'autant moins de réalisations  $(i, j)$  que  $r$  est grand.

## 4.5 Conclusion et objectifs

Une étude théorique (§4.3) ainsi que des simulations numériques (§4.4) ont montré que dans l'hypothèse où le champ présente une statistique gaussienne, les décorrélations des variations de phase donnent accès à une mesure du libre parcours moyen  $\ell$  privé de l'absorption. Bien que cette étude présente un caractère très général, elle a été menée avec l'idée d'une application aux ondes acoustiques et sismiques. Ainsi, nous proposons de discuter dans les paragraphes suivants l'application de ces résultats à la mesure du degré d'hétérogénéité de la croûte terrestre.

### 4.5.1 Caractère gaussien de la coda sismique

Nous avons supposé dans les sections 4.3 et 4.4 que la coda, qui résulte d'une superposition de nombreux chemins de diffusion multiple, se comporte comme un signal avec une statistique gaussienne circulaire. Cette hypothèse est toujours discutée parmi les géophysiciens [Sebe, 2004]. Il est donc important d'en vérifier la légitimité ce que nous ferons dans les chapitres 5 (§5.4) et 6. En particulier nous démontrerons que les distributions de l'intensité, de la phase et de ses trois premières dérivées spatiales obéissent aux lois prédites par la théorie gaussienne pour des enregistrements sismiques à l'observatoire de Pinyon Flat.

Il est également intéressant de se poser la question réciproque : si la diffusion multiple donne lieu à une statistique gaussienne, inversement, peut-on exclure la diffusion simple à partir de l'observation d'une statistique gaussienne ? Peut-on conclure sur le régime de propagation des ondes sismiques ? Voici quelques éléments de réflexion sur ce problème. Dans le cas d'une diffusion simple avec des diffuseurs peu efficaces (par exemple des diffuseurs de Rayleigh), les phases sont peu modifiées lors d'une diffusion et la phase reste essentiellement  $\omega t$  ce qui exclut le caractère indépendant et aléatoire de la phase des ondes partielles. Il faut beaucoup de diffusions pour rendre la phase aléatoire. En revanche, le cas particulier d'une diffusion simple avec des diffuseurs très efficaces, pour lesquels le déphasage induit dépend fortement de l'angle de diffusion, est possible. Dans ce cas le champ mesuré résulte de la superposition d'ondes partielles ayant subi une seule diffusion mais avec des angles très différents donc des déphasages assez différents. Le caractère aléatoire de la phase provient alors de la position aléatoire des diffuseurs. Dans ce cas, il est donc possible que le champ présente des propriétés gaussiennes et des fluctuations proches de celles observables dans le cadre de la diffusion multiple.

### 4.5.2 Mesure du libre parcours moyen des ondes de Rayleigh dans la croûte

Dans le cas de mesures sismiques, dont la composante verticale est dominée par les ondes de Rayleigh ( $\sim 2\mathcal{D}$ , voir figure 6.3), les corrélations de phase constituent une nouvelle opportunité de mesurer le libre parcours moyen des ondes de surface. Une telle mesure ne serait pas sensible à l'absorption, ni à la position précise des stations sismiques, contrairement aux techniques habituelles qui utilisent le champ cohérent ou l'intensité [Sato et Fehler, 2006]. En

outre, nous avons démontré avec une simulation que cette méthode doit permettre de mesurer  $\ell$  à “courte distance”. En revanche, il est nécessaire que les stations sismiques soient alignées et au moins par paires avec une distance inférieure à la longueur d’onde.

Dans le chapitre 6, nous étudierons des enregistrements sismiques réalisés en 1990 sur le site de Pinyon Flat, situé en Californie à mi-chemin entre les failles de San Andreas et San Jacinto, avec un réseau temporaire PASSCAL. Les résultats confirmeront la possibilité de mesurer le libre parcours moyen à partir de la fonction de corrélation des différences de phase.

### 4.5.3 Mesure du libre parcours moyen des ondes de Lamb

Il est intéressant auparavant de réaliser une étude de laboratoire visant à vérifier le caractère gaussien de la coda des ondes élastiques et la possibilité de mesurer le libre parcours moyen avec les corrélations de phase. L’intérêt d’une telle étude expérimentale préliminaire est de pouvoir contrôler aisément les paramètres. Nous proposons dans le chapitre 5 l’étude expérimentale de la diffusion d’ondes de Lamb dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> rendue diffusante par la perforation de nombreuses cavités disposées aléatoirement.



## CHAPITRE 5

# Diffusion d'ondes de flexion dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup>



**C**E CHAPITRE présente l'étude expérimentale de la propagation des ondes de flexion dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> rendue hétérogène et diffusante par la perforation de cavités cylindriques. L'objectif est de réaliser une expérience de laboratoire - analogue à la sismologie - permettant de vérifier non seulement le caractère gaussien de la coda des ondes élastiques dans le régime de diffusion multiple mais aussi la possibilité de mesurer le libre parcours moyen  $\ell$  à partir des corrélations de la dérivée spatiale phase (Éq. 4.6). Il s'agit d'une expérience mise au point au Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique de Grenoble en collaboration avec Eric Larose, Ludovic Margerin et Philippe Roux.

Dans un premier temps nous décrivons le dispositif expérimental et les études préliminaires réalisées. Ensuite, les statistiques et les corrélations des fluctuations de la phase dans la coda élastique sont étudiées et l'interprétation des résultats est développée à la lumière des développements théoriques du chapitre précédent.

## 5.1 Une modélisation en laboratoire de la croûte terrestre

### 5.1.1 Cahier des charges

Le cahier des charges du dispositif expérimental contient les critères suivants :

- le milieu de propagation doit être un milieu diffusif bidimensionnel dans lequel se propagent des ondes analogues aux ondes de Rayleigh qui sont prédominantes dans les enregistrements sismiques à la surface de la croûte terrestre ;
- le milieu doit être peu absorbant (de taille  $L \gg l_a$ ) de manière à mesurer une longue coda avec un bon rapport signal sur bruit ;
- le dispositif expérimental doit être peu coûteux ;



Fig. 5.1: Dispositif expérimental photographié lors de tests préliminaires. (a) Une plaque de Plexiglas<sup>®</sup>, perforée aléatoirement de cavités cylindriques, est suspendue par des tendeurs afin d'avoir des conditions de bords libres pour les ondes de flexion. (b) Gros plan sur les accéléromètres utilisés, ici disposés en carré  $4 \times 4$  et collés avec de l'adhésif double face. Le collage des récepteurs sera par la suite réalisé par de l'acide phénylesalicylique réalisant un meilleur couplage.

- le milieu doit présenter une bonne adaptation d'impédance avec les accéléromètres dont dispose l'équipe ;
- le dispositif expérimental doit concilier 3 ordres de grandeurs :  $D \ll \lambda \sim a \ll \ell < L$  avec  $D$  le diamètre des récepteurs,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $a$  la taille des diffuseurs,  $\ell$  le libre parcours moyen des ondes et  $L$  la taille du milieu de propagation :
  - la distance entre les récepteurs (accéléromètres) doit être petite devant la longueur d'onde afin d'estimer correctement la dérivée de la phase et afin que la mesure du champ ne soit pas moyennée spatialement :  $D \ll \lambda$  ;
  - on souhaite se placer dans le régime de faible désordre où les ondes partielles sont indépendantes :  $\lambda \ll \ell$  ;
  - l'efficacité des centres diffuseurs impose que leur taille soit de l'ordre de la longueur d'onde :  $a \sim \lambda$  ;
  - pour observer la diffusion multiple dans le milieu il faut que :  $\ell \ll L$ .

Le dispositif expérimental mis au point à partir de ce cahier des charges est présenté en photographie (Figure 5.1(a)). Les trois paragraphes suivants en donnent une description détaillée.

### 5.1.2 Milieu diffusant

On étudie la diffusion des ondes de Lamb, à des fréquences de l'ordre du kilohertz soit avec des longueurs d'onde de quelques centimètres, dans une plaque en Plexiglas<sup>®</sup> (polyméthacrylate de méthyle) de taille  $1,5 \times 1,5$  m. L'épaisseur de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> est de 6 mm ce qui permet de sélectionner les seuls modes fondamentaux symétrique  $S_0$  et antisymétrique  $A_0$

(voir section suivante, 5.2) dans la gamme de fréquence de travail. Du désordre est introduit en perforant cette plaque de 500 cavités cylindriques de rayon  $a = 1\text{ cm}$ . La disposition des cavités (Figure 5.2) est obtenue en utilisant un générateur de nombres aléatoires et en imposant une répulsion de sphère dure : la distance minimale entre deux centres est fixée à  $3\text{ cm}$ . La plaque est posée sur un cadre en aluminium de sorte que le poids de la plaque repose sur les bords mais que les surfaces supérieures et inférieures restent libres.

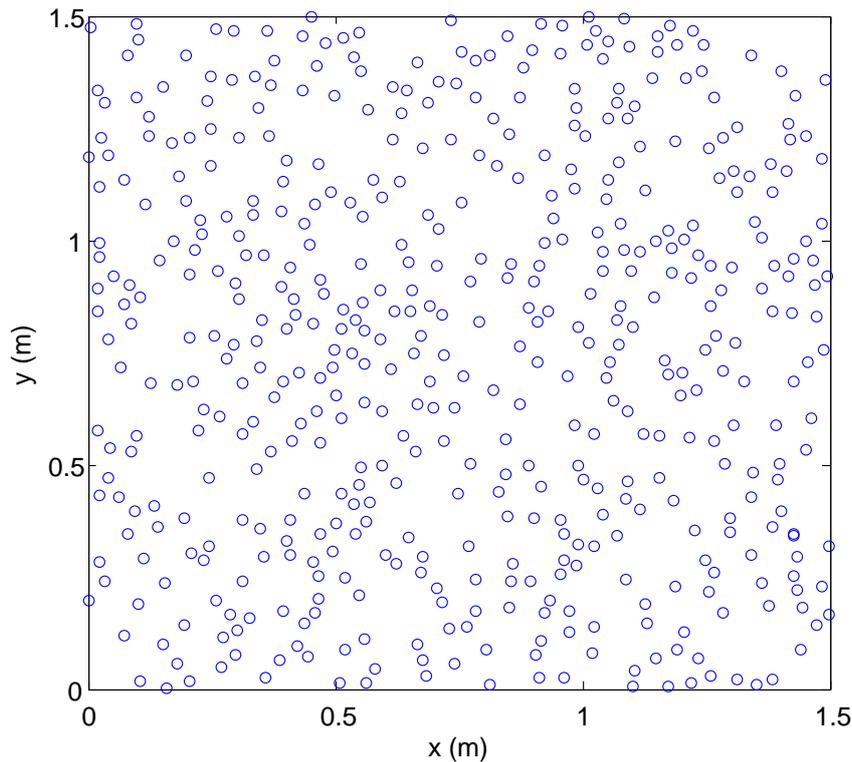


Fig. 5.2: Plan de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> de dimensions  $1,5 \times 1,5\text{ m}$ . La position des 500 diffuseurs cylindriques de rayon  $a = 1\text{ cm}$  est déterminée par un générateur de nombres aléatoires en prenant en compte une répulsion de sphère dure de rayon  $1,5 \times a$ .

Cette plaque perforée dans laquelle se propagent à la fois des ondes dispersives ( $A_0$ ) et peu dispersives ( $S_0$ ) et qui présente de la réverbération, de la diffusion et de l'absorption, possède des propriétés semblables à la croûte terrestre vis-à-vis des ondes sismiques. Ainsi elle constitue un bon candidat pour des expériences à petite échelle analogues à la sismologie.

### 5.1.3 Récepteurs

L'enregistrement du déplacement normal à la surface est réalisé à l'aide de 16 accéléromètres hexagonaux, synchronisés et de diamètre  $7,5\text{ mm}$  mesuré entre les cotés, ou  $8\text{ mm}$  mesuré entre les arêtes. Ce sont des capteurs large bande qui présentent une réponse plate de  $20\text{ Hz}$  à  $70\text{ kHz}$  (ref.# 4518 - Bruel&Kjaer ; cf zoom fig. 5.1(b)). Le couplage avec le Plexiglas<sup>®</sup> est assuré par

collage avec de l'acide phényl-salicylique qui cristallise en dessous de  $43^{\circ}C$ . La dureté de la colle est particulièrement importante afin que l'enregistrement des hautes fréquences soit de bonne qualité. Différentes colles ont été essayées - dont l'utilisation d'adhésif double-face extra-fort - et ont montré que l'acide phényl-salicylique donnait les meilleurs résultats.

La séparation des modes  $A_0$  et  $S_0$  est rendue possible par la transparence du Plexiglas® qui permet de poser avec précision 2 accéléromètres en vis-à-vis de part et d'autre de la plaque. Ainsi, à partir de l'enregistrement des accélérations  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  de part et d'autre de la plaque, on peut déduire la contribution du mode symétrique  $S_0$  par la formule  $\Psi_{S_0} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2}$  et la contribution du mode antisymétrique  $A_0$  par la formule :  $\Psi_{A_0} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2}$ .

#### 5.1.4 Sources

Différents types de sources peuvent être utilisés :

- **type sismique** : des impacts sont générés “à la main” sur la plaque à l'aide d'une tige métallique (par exemple une pointe de tournevis). En première approximation, il s'agit d'une source ponctuelle  $S = \delta(\vec{r}, t)$ . L'objet utilisé doit être relativement dur et pointu pour exciter des fréquences suffisamment hautes.
- **source contrôlée** : un polymère piézoélectrique émet un balayage fréquentiel linéaire  $S(t)$  dans une gamme de fréquence allant par exemple de  $1\text{ kHz}$  à  $60\text{ kHz}$ , la réponse dynamique impulsionnelle  $h_d(t)$  de la plaque à une distance  $d$  peut être reconstruite par la corrélation de l'enregistrement  $r_d(t)$ , à la distance  $d$ , avec le signal source  $S(t)$  qui permet la recompression temporelle du signal :  $h_d(t) = r_d(t) \otimes S(t)$  ;
- **bruit** : jet provenant d'une bombe d'air comprimé [Larose *et al.*, 2007] ;

#### 5.1.5 Études préliminaires nécessaires

La configuration précise du dispositif expérimental (choix de l'épaisseur de la plaque, choix du nombre et de la taille des cavités diffusantes) et le choix des paramètres de travail (tels que le domaine fréquentiel) ont nécessité plusieurs études préliminaires détaillées dans les sections suivantes :

- Étude des ondes de Lamb qui se propagent dans la plaque : fréquences de coupure, vitesse des ondes S et P, relation de dispersion des différents modes (cf. section 5.2) ;
- Estimation de la section efficace des diffuseurs et estimation du libre parcours moyen attendu (cf. section 5.3) ;
- Vérification du caractère gaussien de la coda ultrasonore (cf. section 5.4).

Nous verrons que ces études ont également été nécessaires à l'interprétation des observations.

## 5.2 Caractérisation des ondes de Lamb

### 5.2.1 Ondes de Lamb dans une plaque

Soit une plaque de demi-épaisseur  $h$  (Fig. 5.3).

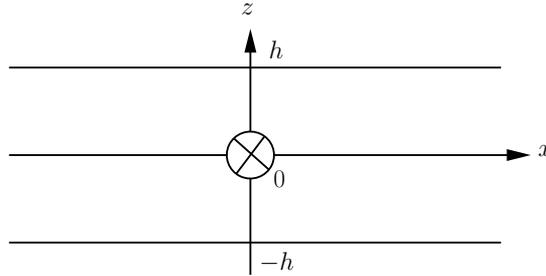


Fig. 5.3: Schéma en coupe d'une plaque de demi-épaisseur  $h$  ;  $h = 3\text{ mm}$  dans notre dispositif.

On appelle **ondes de Lamb** les ondes se propageant dans une plaque isotrope et telles que le déplacement des particules élémentaires est polarisé dans un plan parallèle à la normale de la plaque et à la direction de propagation. Dans une plaque isotrope se propagent également les ondes transverses horizontales (notées TH ou SH) telles que le déplacement des particules élémentaires est perpendiculaire à la fois à la normale de la plaque et à la direction de propagation. Les ondes transverses horizontales n'induisent donc pas de déplacement de la surface libre de la plaque et ne seront pas détectées par les accéléromètres mis en place. De plus, l'onde transverse horizontale se propage seule dans une structure plane stratifiée car sa polarisation est conservée lors d'une réflexion ou d'une réfraction – contrairement aux modes de Lamb qui se couplent entre eux. Dans la suite nous considérons donc uniquement les modes de Lamb.

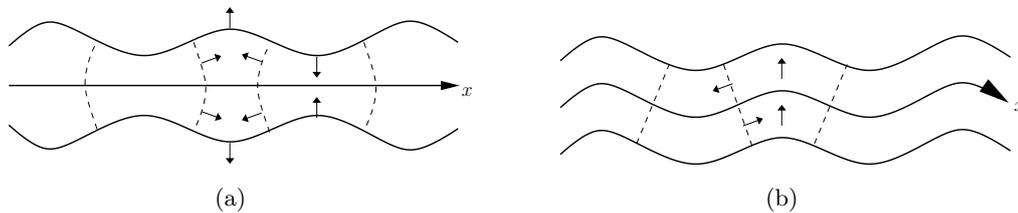


Fig. 5.4: Modes de Lamb se propageant dans la direction  $x$  : (a) symétrique (b) antisymétrique.

Il existe deux types d'ondes de Lamb (figure 5.4). Les *modes symétriques*, notés  $S_p$ , sont tels que la composante longitudinale (c'est à dire dans la direction de propagation) est une fonction paire de  $z$  et tels que la composante transverse (c'est à dire selon  $(0z)$ ) est une fonction impaire de  $z$ . Les *modes antisymétriques*, notés  $A_p$ , sont tels que la composante longitudinale est une fonction impaire de  $z$  et tels que la composante transversale est une fonction paire de  $z$ .

On appelle communément **onde de flexion** le premier mode antisymétrique de Lamb noté  $A_0$ .

### Fréquence de coupure :

La fréquence de coupure des modes symétriques  $S_p$  s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_c = p C_S / 4h & \text{si } p \text{ pair} \\ f_c = p C_P / 4h & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \quad (5.1)$$

La fréquence de coupure des modes antisymétriques  $A_p$  s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_c = p C_P / 4h & \text{si } p \text{ pair} \\ f_c = p C_S / 4h & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $C_P$  et  $C_S$  désignent respectivement les vitesses de propagation des ondes de compression (P) et des ondes de cisaillement (S).

### Choix de l'épaisseur de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> :

Pour se placer dans un cas simple et plus facilement interprétable, on souhaite choisir l'épaisseur de la plaque de manière à sélectionner uniquement les modes fondamentaux  $A_0$  et  $S_0$ . Par conséquent, il faut se placer dans un domaine de fréquences  $f$  inférieures à la fréquence de coupure du mode  $A_1$  qui est le premier mode supérieur de Lamb, donc tel que  $f < f_c = \frac{C_S}{4h}$ , soit une demi-épaisseur  $h < \frac{C_S}{4f_{max}}$ . Or on sait que la vitesse des ondes S dans le Plexiglas<sup>®</sup> est telle que  $C_S \lesssim 1500 \text{ m.s}^{-1}$ . De plus pour respecter la bande passante des accéléromètres il ne faut pas excéder la fréquence :  $f_{max} \lesssim 80 \text{ kHz}$ . Dans ces conditions, on estime qu'il faut prendre comme demi-épaisseur de la plaque en Plexiglas<sup>®</sup> :  $h < 6 \text{ mm}$ . Une épaisseur totale de  $6 \text{ mm}$  a été choisie, soit  $h = 3 \text{ mm}$ .

## 5.2.2 Relation de dispersion

### Relation de Rayleigh-Lamb

La relation de dispersion des modes dans une plaque est donnée par la relation de Rayleigh-Lamb avec  $\phi = 0$  pour les modes symétriques et  $\phi = \pi/2$  pour les modes antisymétriques [Royer et Dieulesaint, 1999] :

$$\frac{\omega^4}{C_S^4} = 4k^2 \kappa^2 \left( 1 - \frac{K \tan(Kh + \phi)}{\kappa \tan(\kappa h + \phi)} \right) \quad (5.3)$$

où  $k$  est le vecteur d'onde,  $\omega$  la pulsation et où  $K$  et  $\kappa$  sont définis par :

$$\begin{cases} K^2 & = \frac{\omega^2}{C_P^2} - k^2 \\ \kappa^2 & = \frac{\omega^2}{C_S^2} - k^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

**Limite basse fréquence :**

À basse fréquence, les relations de dispersion des modes  $A_o$  et  $S_o$  peuvent s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\begin{aligned}\omega_{S_o} &\sim 2kC_S \sqrt{1 - \frac{C_S^2}{C_P^2}} \sim v_P k \\ \omega_{A_o} &\sim 2k^2 C_S \sqrt{1 - \frac{C_S^2}{C_P^2}} \frac{h}{\sqrt{3}} \sim v_P k^2 \frac{h}{\sqrt{3}}\end{aligned}\quad (5.5)$$

où  $v_P = 2C_S \sqrt{1 - C_S^2/C_P^2}$  est appelée **vitesse de plaque**.

**Mesure expérimentale :**

Pour mesurer la relation de dispersion des modes  $A_0$  et  $S_0$  des ondes de Lamb dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> telle que celle utilisée dans notre expérience, une plaque de même dimensions mais non perforée a été utilisée. Une source de type contrôlée (constituée d'un polymère piézoélectrique) est placée dans un coin de la plaque à environ 30 cm de chaque bord et émet un signal balayant une gamme de fréquences allant de 1 kHz à 60 kHz. Un récepteur est initialement placé à 1 cm de la source et dans la direction du centre de la plaque le long d'une ligne droite graduée. Après chaque acquisition  $r_d(t)$ , le récepteur est éloigné d'un centimètre de la source le long de la ligne graduée. L'opération est répétée une centaine de fois afin de couvrir 1 mètre de la plaque. La réponse impulsionnelle dynamique  $h_d(t)$  est reconstruite pour chaque distance  $d$  par recompression temporelle, c'est à dire en calculant la corrélation avec le signal source  $S(t)$  :  $h_d(t) = \int r_d(\tau)S(\tau + t) d\tau$ . (cf. §5.1.3)

Les réponses impulsionnelles  $h_d(t)$  ainsi mesurées sont représentées dans la figure 5.5(a). On observe que cet enregistrement est dominé par le mode antisymétrique  $A_0$  mais le mode  $S_0$ , plus lent, est également visible. Le temps de propagation à l'intérieur de la plaque est de quelques millisecondes. Le temps caractéristique d'absorption de la plaque dépend fortement de la fréquence ; il est de l'ordre de quelques centaines de millisecondes. Le rapport signal sur bruit n'autorise pas un enregistrement de durée supérieure à quelques dizaines de millisecondes. Les enregistrements sont ainsi dominés pas les ondes ballistiques mais les fronts d'ondes réverbérés par les bords sont également visibles.

Une transformation de Fourier spatio-temporelle (f-k) des réponses impulsionnelles  $h_d(t)$  est effectuée. Les courbes de relation de dispersion qui en résultent sont tracées dans la figure 5.5(b). On y observe les courbes de dispersion du mode  $A_0$  et du mode  $S_0$  moins dispersif. L'ajustement des relations de dispersion théoriques de chacun des deux modes (Éq. 5.3) aux résultats expérimentaux permet d'obtenir une estimation des vitesses des ondes de compression (P) et de cisaillement (S) :

$$\begin{aligned}C_S &= 1310 \text{ ms}^{-1} (\pm 5\%) \\ C_P &= 3130 \text{ ms}^{-1} (\pm 10\%)\end{aligned}\quad (5.6)$$

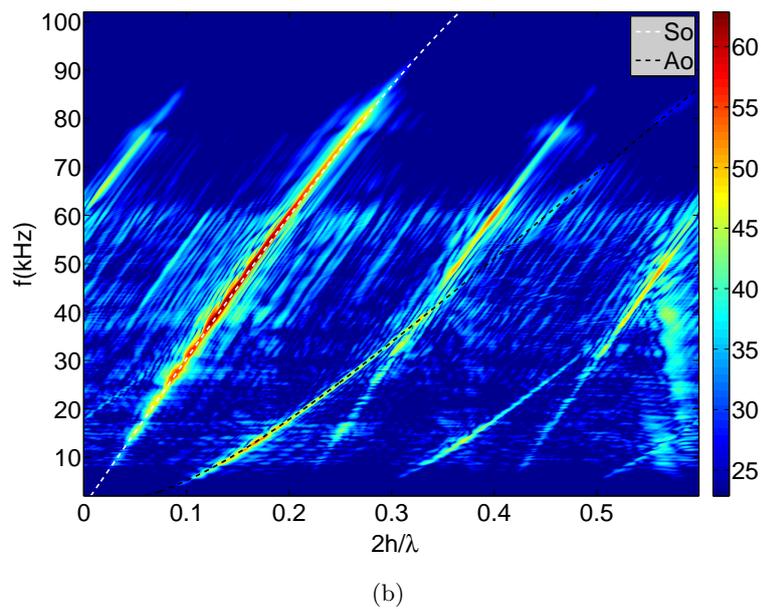
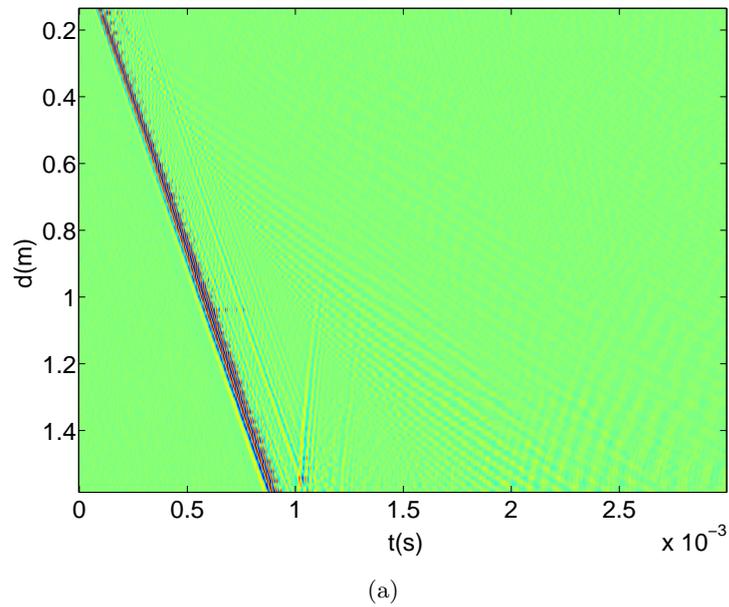


Fig. 5.5: Mesure de la relation de dispersion des ondes de Lamb. (a) Réponses impulsionnelles de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> (sans diffuseurs) en fonction du temps d'arrivée des ondes et de la distance à la source  $d$ . (b) Transformée de Fourier spatiotemporelle des réponses impulsionnelles représentée en échelle arbitraire linéaire de couleurs. Les courbes en traits pleins noirs et blancs représentent respectivement les ajustements des courbes de dispersion des modes  $A_0$  et  $S_0$ . Dans (a) et (b), les maximas secondaires correspondent aux réflexions sur les bords de la plaque.

Il faut noter que l'expression asymptotique (Éq. 5.5) n'est pas suffisante dans la gamme de fréquences utilisée, en revanche elle constitue un bon initiateur pour la résolution numérique de la relation de dispersion exacte nécessaire pour réaliser l'ajustement.

La même mesure de la relation de dispersion des ondes de Lamb dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> a été réalisée par une technique dite passive qui utilise les corrélations spatiales du bruit par Eric Larose *et al.* [Larose *et al.*, 2007]. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de recourir à des sources contrôlées. L'accord entre les résultats donnés par ces deux techniques est de très bonne qualité.

On déduit des vitesses  $C_S$  et  $C_P$  une abaque donnant la longueur d'onde en fonction de la fréquence (figure 5.6). On observe en particulier que pour une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> de  $6\text{mm}$  il faut choisir une fréquence inférieure à  $4\text{kHz}$  de manière à respecter la condition  $\lambda \gg D$  (§5.1.1) avec au minimum  $\lambda > 10D$  où on note  $D$  le diamètre des récepteurs.

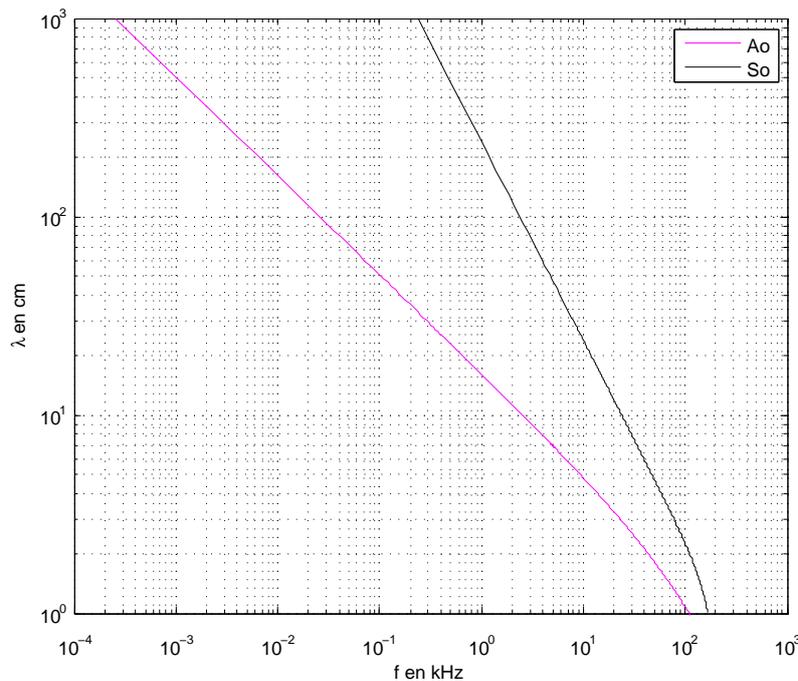


Fig. 5.6: Longueur d'onde  $\lambda$  des modes fondamentaux de Lamb en fonction de la fréquence  $f$ .

### 5.2.3 Coefficient d'équipartition $A_0$ et $S_0$

Dans le domaine fréquentiel étudié et pour l'épaisseur de plaque de notre dispositif expérimental, seuls les modes  $A_0$  et  $S_0$  se propagent. Par ailleurs, nous rappelons que l'objectif final de ce travail est de mener l'étude des statistiques et des corrélations de la phase dans la coda élastique. Ainsi, on peut s'interroger : dans le régime d'équipartition entre les modes atteint dans la coda, y-a-t-il un des modes qui domine ? Pour répondre à cette question, on peut esti-

mer le poids énergétique relatif des modes symétriques  $S_0$  et antisymétriques  $A_0$  dans la coda en calculant le rapport des coefficients d'équipartition des deux modes. Attention, il faut noter qu'il s'agit du rapport des énergies globales des deux modes dans toute la plaque et non pas en surface là où est effectuée la mesure. Ce dernier calcul - plus sophistiqué - pourrait également être réalisé afin de préciser cette estimation, mais nous pensons que ce n'est pas indispensable car ce n'est pas l'objet principal de cette étude.

Notons  $\mathcal{F}_{A_0}(k) = 0$  et  $\mathcal{F}_{S_0}(k) = 0$  respectivement les relations de dispersions des modes  $A_0$  et  $S_0$ . Pour calculer le rapport des énergies totales des modes  $A_0$  et  $S_0$  dans le régime d'équipartition, on utilise la relation [Trégourès et van Tiggelen, 2002] :

$$\frac{E_{S_0}}{E_{A_0}} = \frac{\mathcal{F}'_{A_0}(k_{A_0})}{\mathcal{F}'_{S_0}(k_{S_0})} = \frac{C_{A_0}^\varphi \mathcal{V}_{A_0}^g}{C_{S_0}^\varphi \mathcal{V}_{S_0}^g} \quad (5.7)$$

où  $C^\varphi$  et  $\mathcal{V}^g$  désignent respectivement les vitesses de phase et de groupe des ondes.

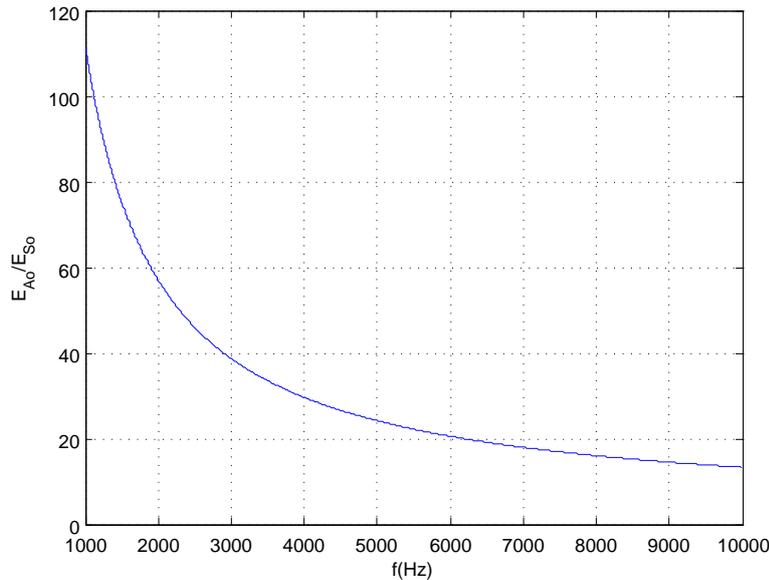


Fig. 5.7: Énergies relatives des deux modes fondamentaux de Lamb en régime d'équipartition en fonction de la fréquence.

Ce rapport calculé numériquement en fonction de la fréquence (Figure 5.7) montre que le mode  $A_0$  (les ondes de flexion) domine au minimum d'un facteur 10 dans la gamme de fréquences de travail. Il est de 40 à la fréquence de  $3kHz$  choisie pour l'étude des statistiques de la phase (§5.5 et §5.6). Par conséquent, en bonne approximation, nous poursuivrons ce travail en nous limitant à l'étude des ondes de flexion ( $A_0$ ) et dans un premier temps nous interpréterons les résultats en négligeant le rôle du mode fondamental symétrique  $S_0$ .

## 5.3 Diffusion d'ondes de flexion par une cavité cylindrique

Pour configurer l'expérience, il est important d'obtenir une estimation de la section efficace  $\sigma$  des cavités cylindriques et une estimation du libre parcours moyen  $\ell$  dans la plaque en fonction de la fréquence  $f$  et du rayon  $a$ , en particulier pour les ondes de flexion ( $A_0$ ) qui prédominent (§5.2.3). Dans ce but, nous avons repris les calculs de Pao et Mow [Mow et Pao, 1971] confirmés par les travaux de Norris *et al.* [Norris et Vemula, 1995]. Ces calculs sont exposés ci-après puis les estimations numériques de  $\sigma$  et  $\ell$  appliquées aux paramètres définitifs de notre dispositif expérimental sont données dans le paragraphe 5.3.2.

### 5.3.1 Calcul de la section efficace d'une cavité cylindrique dans une plaque

Soit une plaque de dimensions infinies et de demi-épaisseur  $h$  dans laquelle se trouve un diffuseur cylindrique de rayon  $a$ .

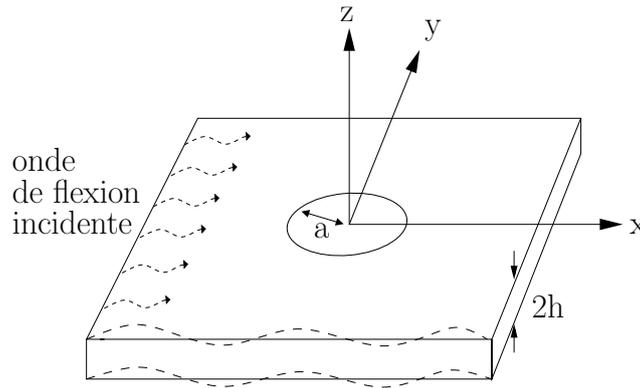


Fig. 5.8: Diffusion d'une onde de flexion par une cavité cylindrique de rayon  $a$  dans une plaque infinie de demi épaisseur  $h$

#### Onde incidente :

On considère une onde plane incidente de flexion dont le déplacement transversal  $W^{(i)}$  s'écrit de la façon suivante en coordonnées cylindriques :

$$W^{(i)} = W_0 \exp(i(kx - \omega t)) = W_0 \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p i^p J_p(kr) \cos(p\theta) \exp(-i\omega t) \quad (5.8)$$

où les  $J_p$  sont les fonctions de Bessel et  $\epsilon_p$  vaut 2 si  $p = 0$  et 1 sinon.

**Onde diffusée :**

Pao et Mow montrent que l'onde diffusée  $W^{(s)}$  peut alors s'écrire :

$$W^{(s)} = W_0 \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p i^p \left[ A_p H_p^{(1)}(kr) + B_p H_p^{(1)}(ikr) \right] \cos(p\theta) \exp(-i\omega t) \quad (5.9)$$

où les fonctions de Hankel  $H_p$  (*i.e.* les fonctions de Bessel de troisième espèce) définies par  $H_p = J_p + iY_p$  avec  $J_p$  les fonctions de Bessel de première espèce et  $Y_p$  les fonctions de Bessel de deuxième espèce.

**Onde dans le cylindre :**

Pao et Mow montrent que l'onde stationnaire dans le diffuseur cylindrique s'écrit :

$$W^{(c)} = -W_0 \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p i^p [C_p J_p(k_c r) + D_p J_p(ik_c r)] \cos(p\theta) \quad (5.10)$$

Dans cette expression, l'indice  $c$  se réfère au milieu du cylindre et l'absence d'indice se réfère au milieu Plexiglas<sup>®</sup>.

**Cas d'une cavité cylindrique :**

Les coefficients  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  se calculent à partir des conditions aux limites. Dans le cas particulier où le cylindre est une cavité, on suppose que les bords sont libres ce qui implique :

$$\begin{cases} C_p = 0 \\ D_p = 0 \\ A_p = \frac{\Re e [\mathcal{M}_p(ka)] \mathcal{L}_p(ika) - \Re e [\mathcal{L}_p(ka)] \mathcal{M}_p(ika)}{\Xi} \\ B_p = \frac{\Re e [\mathcal{L}_p(ka)] \mathcal{M}_p(ka) - \Re e [\mathcal{M}_p(ka)] \mathcal{L}_p(ka)}{\Xi} \end{cases} \quad (5.11)$$

avec :

$$\begin{cases} \Xi = \mathcal{L}_p(ka) \mathcal{M}_p(ika) - \mathcal{L}_p(ika) \mathcal{M}_p(ka) \\ \mathcal{L}_p(x) = -[x^2 + (1 - \nu)p^2] x H_p^{(1)'}(x) + (1 - \nu)p^2 H_p^{(1)}(x) \\ \mathcal{M}_p(x) = -(1 - \nu)x H_p^{(1)'}(x) + [(1 - \nu)p^2 - x^2] H_p^{(1)}(x) \end{cases} \quad (5.12)$$

et avec  $\nu$  le module de Poisson qui s'exprime en fonction des vitesses des ondes  $S$  et  $P$  :

$$\nu = \frac{C_P^2 - 2C_S^2}{2C_P^2 - 2C_S^2} \quad (5.13)$$

**Section efficace de diffusion :**

La section efficace de diffusion est habituellement définie par le rapport entre l'énergie totale rayonnée par l'onde diffusée et l'énergie de l'onde incidente. Dans notre problème elle s'écrit :

$$\sigma = \frac{2}{k} \left( 2|A_0|^2 + \sum_{p=1}^{\infty} |A_p|^2 \right) \quad (5.14)$$

**Critère de vérification :**

On peut tester les résultats obtenus en utilisant le théorème optique [Born et Wolf, 1964, Ishimaru, 1979, Kriegsmann *et al.*, 1985] qui implique l'identité suivante :

$$|A_0|^2 + \Re e A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \{ |A_p|^2 / 2 + \Re e ((-i)^p A_p) \} = 0 \quad (5.15)$$

**5.3.2 Résultats**

La section efficace  $\sigma$  des cavités cylindriques de notre dispositif expérimental est estimée numériquement en appliquant les calculs ci-dessus. Elle est représentée pour les paramètres expérimentaux  $a = 1\text{cm}$ ,  $C_S = 1310\text{ m.s}^{-1}$ ,  $C_P = 3130\text{ m.s}^{-1}$  et  $h = 3\text{ mm}$ , dans la figure 5.9.

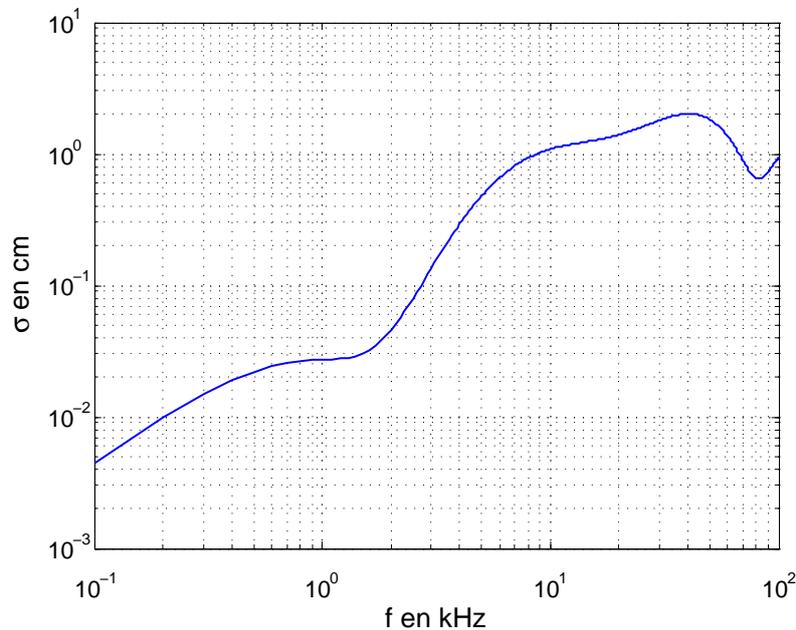


Fig. 5.9: Estimation de la section efficace en cm des cavités de rayon  $a = 1\text{cm}$  dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> perforée d'épaisseur 6mm en fonction de la fréquence en kHz pour les ondes de flexion.

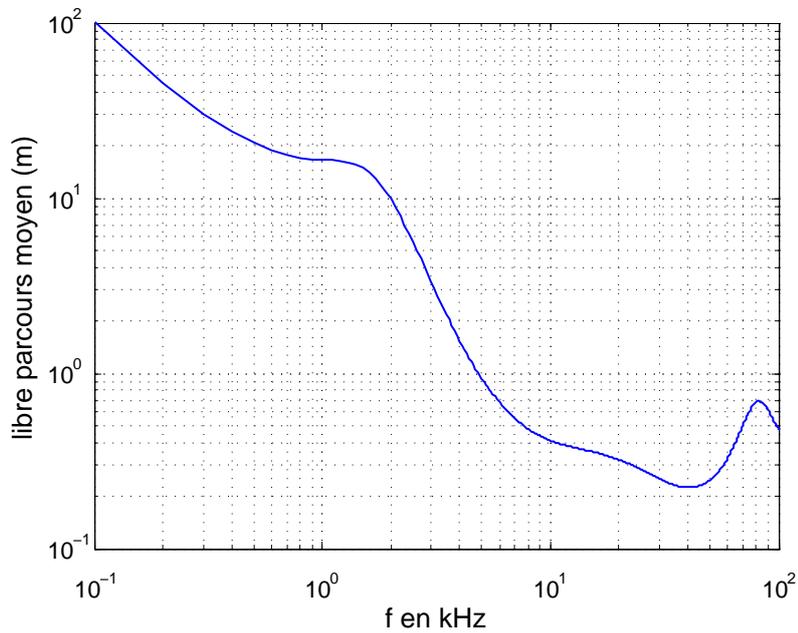


Fig. 5.10: Estimation du libre parcours moyen en m des ondes de flexion dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> perforée en fonction de la fréquence en kHz.

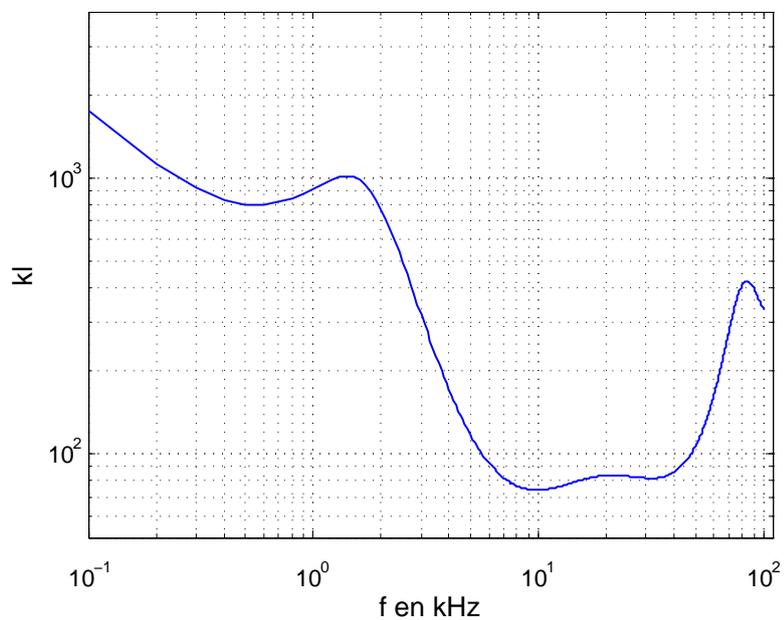


Fig. 5.11: Estimation du produit  $kl$  pour les ondes de flexion dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> perforée en fonction de la fréquence en kHz.

Le libre parcours moyen noté  $\ell_{A_0}$  des ondes de flexion se déduit de la section efficace  $\sigma$  et de la densité de diffuseurs  $n = 225 \text{ m}^{-2}$  par la relation  $\ell = 1/n\sigma$  : figure 5.10. On observe en particulier qu'il faut choisir une fréquence de travail supérieure à  $2,5 \text{ kHz}$  afin que le libre parcours moyen des ondes de flexion soit inférieur à la moitié de la taille  $L = 1,5 \text{ m}$  de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup>.

## 5.4 Caractère gaussien de la coda élastique

Dans cette section nous présentons quelques tests préliminaires visant à vérifier le caractère gaussien de la coda élastique et donc visant à justifier la pertinence des hypothèses formulées dans le chapitre 4.

Le test utilise les signatures caractéristiques d'une statistique gaussienne présentées dans le paragraphe 3.3.5. Le protocole expérimental et le traitement du signal mis en oeuvre pour cette étude sont détaillés dans les figures 5.12 et 5.13. La comparaison (figure 5.14) entre les distributions mesurées et les distributions théoriques d'une statistique gaussienne circulaire montre que l'accord est relativement bon :

- l'intensité présente une distribution exponentielle sur 5 ordres de grandeur ;
- la partie réelle du champ vérifie bien une loi gaussienne ; l'écart à la courbe théorique autour de zéro est caractéristique des erreurs d'arrondi numérique pour les petites valeurs ;
- la distribution de la phase est uniforme.

L'expérience est réalisée selon les étapes suivantes :

1. collage de 16 accéléromètres en alignement et avec un espacement d'un millimètre, soit un pas d'échantillonnage spatial du champ  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$  ;
2. réalisation d'une centaine d'impacts sources répartis aléatoirement sur la totalité de la plaque ;
3. enregistrement déclenché et synchronisé du signal sur  $135 \text{ ms}$  à la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 500 \text{ kHz}$  avec une mémoire tampon de  $15 \text{ ms}$  avant le déclenchement de la source.

Fig. 5.12: *Protocole expérimental*

Le traitement des données comporte les étapes suivantes :

1. sélection d'une fenêtre temporelle dans la coda entre 35 et 50 *ms* (élimination des ondes directes et des ondes de coda avec un mauvais rapport signal sur bruit).
2. filtrage autour de 3 *kHz* pour satisfaire les deux critères donnés dans les paragraphes 5.3.2 et 5.2.2, avec une bande passante étroite de  $\pm 10\%$  pour ne pas être sensible à la dispersion des ondes et un filtre *butterworth* d'ordre 2 peu élevé afin d'éviter une distorsion trop forte de la phase.
3. prolongement analytique par transformée de Hilbert ;
4. Cas A : on souhaite étudier le champ  $\Psi$  ou son intensité  $\Psi\Psi^*$  :
  - normalisation par rapport à l'intensité de la source ;
  - normalisation par rapport à la sensibilité du récepteur ;
  - compensation de la décroissance de l'énergie de la coda qui provient uniquement de l'absorption puisque c'est un milieu fermé.Cas B : on souhaite étudier la phase  $\Phi$  :
  - la phase est l'argument du champ complexe  $\Psi$  :  $\Phi = \Im m(\ln(\Psi))$ .
  - la phase déroulée  $\Phi_c$  est estimée en supprimant les variations supérieures à  $\pi$  en valeur absolue (§4.4.1).
5. étude de la statistique :
 

on considère comme des réalisations différentes :

  - les différentes sources ;
  - les différentes positions des récepteurs ;
  - les différents temps de coda.

Fig. 5.13: *Traitement du signal*

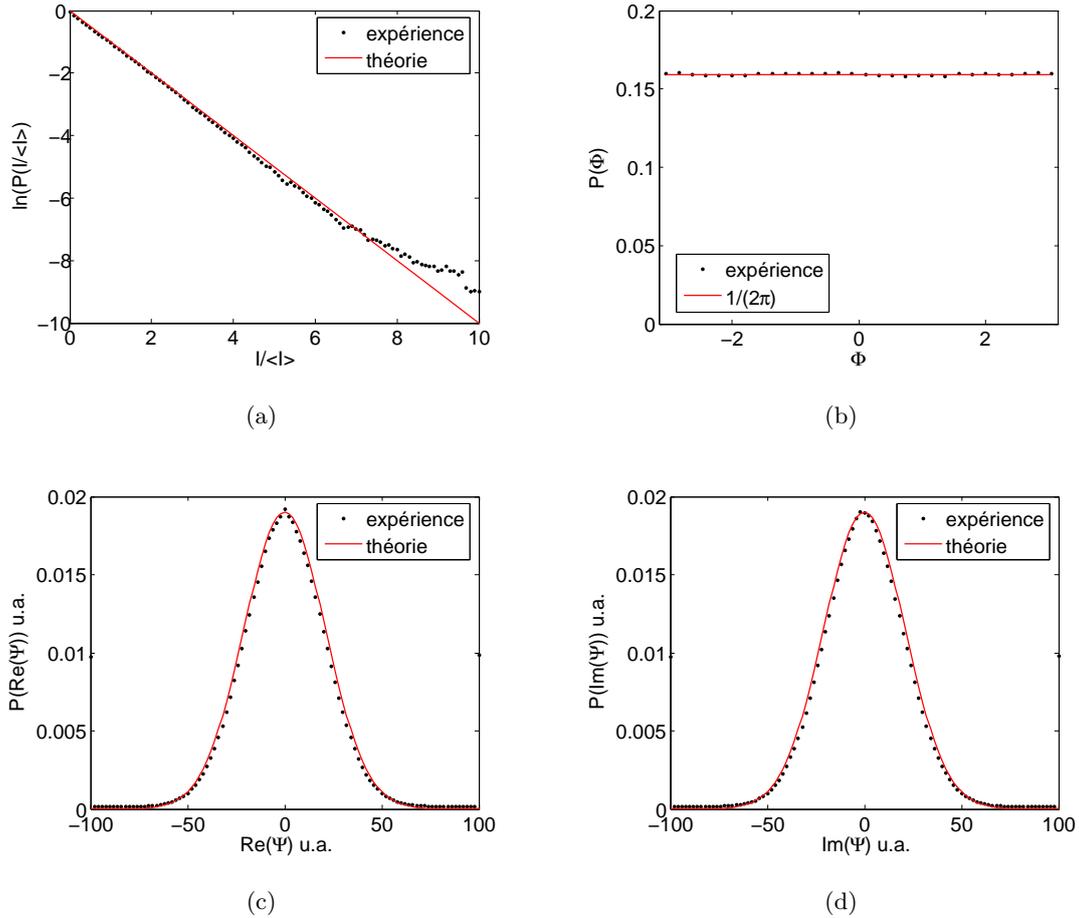


Fig. 5.14: Tests du caractère gaussien des ondes de coda ultrasonores mesurées à la surface de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> avec en noir les distributions mesurées et en rouge les ajustements à la prédiction théorique pour un champ gaussien circulaire. (a) Distribution de l'intensité, loi exponentielle décroissante. (b) Distribution de la phase, distribution uniforme. (c) Distribution de la partie réelle du champ en unités arbitraires, loi gaussienne. (d) Distribution de la partie imaginaire du champ en unités arbitraires, loi gaussienne.

## 5.5 Étude statistique des variations de phase

L'étude statistique des distributions des trois premières dérivées de la phase est présentée dans cette section. Elle est réalisée selon le protocole présenté dans les figures 5.12 et 5.13. Les résultats expérimentaux sont décrits puis confrontés aux prédictions théoriques développées dans le chapitre précédent (§ 4.3 et 4.4) dans l'hypothèse d'un champ élastique gaussien. Le comportement des distributions est en particulier relié aux décorrélations du champ à l'échelle de la longueur d'onde.

### 5.5.1 Distribution des différences de phase

Dans un premier temps, nous avons mesuré les distributions des différences de phase enregistrées par deux récepteurs voisins, distants de  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$ , selon les deux méthodes différentes présentées dans le Chapitre 4 (§4.4.3) :

1. si  $\Delta\Phi$  est la simple différence des phases enroulées mesurées à la distance  $\Delta r$  qui est définie dans l'intervalle  $(-2\pi : 2\pi]$  : la distribution  $P(\Delta\Phi)$  est donnée dans la figure 5.15 (a) ;
2. si  $\Delta\Phi_c$  est le déphasage enroulé à la distance  $\Delta r$  (ou la différences des phases déroulées) défini dans l'intervalle  $(-\pi : \pi]$  : la distribution  $P(\Delta\Phi_c)$  est donnée dans la figure 5.15 (b).

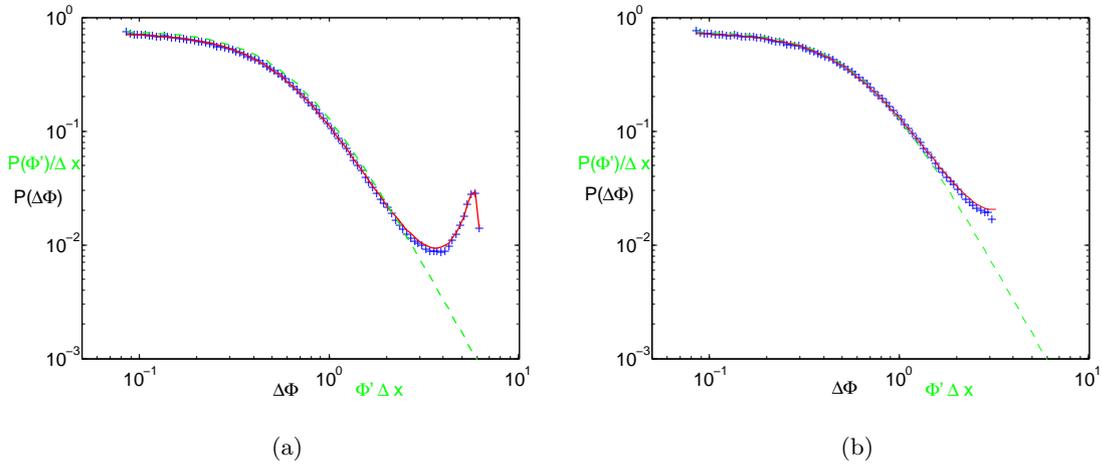


Fig. 5.15: Distribution des différences de phase  $P(\Delta\Phi)$  et  $P(\Delta\Phi_c)$  entre deux récepteurs distants de  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$  (+) et comparaison avec les formules théoriques dans le cadre de l'hypothèse d'une statistique circulaire gaussienne (-). Le comportement théorique pour  $\Delta r \rightarrow 0$  est superposé en pointillés verts (- - -). La bande passante est centrée autour de  $3 \text{ kHz}$ . L'ajustement donne  $g_1 = C(\Delta r) = 0.82$ . (a) Cas de la simple différence des phases enroulées  $\Delta\Phi \in (-2\pi : 2\pi]$ . (b) Cas de la différence des phases déroulées définie sur un cercle  $\Delta\Phi_c \in (-\pi : \pi]$ .

Les distributions  $P(\Delta\Phi)$  et  $P(\Delta\Phi_c)$  sont paires. Elles sont donc représentées uniquement pour les valeurs positives et en échelle logarithmique dans la figure 5.15.

On observe que les deux distributions  $P(\Delta\Phi)$  et  $P(\Delta\Phi_c)$  suivent la théorie (Éqs. 4.9 et 4.10) pour une statistique circulaire gaussienne avec une très bonne concordance. L'ajustement entre la théorie et la distribution mesurée par notre protocole expérimental donne :  $g_1 = 0.82$ . Nous avons observé que l'utilisation d'un filtrage de bande étroite est cruciale. Cela provient de la dépendance du paramètre  $g_1$  avec la fréquence. Ce paramètre d'ajustement dépend également fortement de la distance  $\Delta r$  entre les récepteurs. Comme le paramètre  $g_1$  dépend de la fonction de corrélation du champ entre deux points, cette technique semble utilisable pour mesurer les décorrélations fréquentielles ou spatiales du champ. En particulier, on peut imaginer mesurer la relation de dispersion de cette façon.

### 5.5.2 Distribution de la dérivée de la phase

La dérivée de la phase est estimée à partir de la mesure des différences de phase entre deux récepteurs voisins séparés d'une distance minimale de  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$  puis en utilisant les formules de différences finies :  $P(\Phi') \simeq P(\Delta\Phi)\Delta r$  (méthode 1) ou  $P(\Phi') \simeq P(\Delta\Phi_c)\Delta r$  (méthode 2).

La figure 5.16 montre que l'accord entre d'une part la mesure expérimentale et d'autre part la distribution théorique  $P(\Phi')$  (Éq. 3.14), est très bon pour les petites valeurs de la dérivée (jusqu'à  $\Phi' = 10^2 \text{ rad/m}$ ) et cela quelle que soit la méthode de calcul de  $\Phi'$ . Dans les deux cas, un écart est nettement visible pour les plus grandes valeurs de la dérivée (*i.e.* lorsque  $\phi' \times \Delta r$  est de l'ordre de  $\pi$ ). Cet écart est expliqué par la distance finie entre les récepteurs qui n'est pas négligeable par rapport à la longueur d'onde de l'ordre de quelques centimètres :

1. Si  $\Phi' \simeq \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \in \left(-\frac{2\pi}{\Delta r} : \frac{2\pi}{\Delta r}\right]$ , la distribution présente un excès important de valeurs en  $2\pi/\Delta r$  qui est un artéfact dû à la distance finie entre les accéléromètres et qui correspond à la probabilité d'avoir une discontinuité de la phase de  $2\pi$  dans  $\Delta r$  ;
2. Si  $\Phi' \simeq \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta r} \in \left(-\frac{\pi}{\Delta r} : \frac{\pi}{\Delta r}\right]$ , il n'y a pas de réalisations possibles au delà de  $\pi/\Delta r$ . On remarque également un excès de valeurs légèrement inférieures à  $\pi$  qui correspond à un repliement dans l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{\Delta r} : \frac{\pi}{\Delta r}\right]$  de la courbe  $P(\Phi')$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

On remarque que l'estimation de la distribution de la dérivée  $\Phi'$  à partir des différences brutes ( $\Delta\Phi \in (-2\pi : 2\pi]$ ) est en meilleur accord avec la distribution théorique de  $\Phi'$ . Par conséquent nous conserverons cette méthode de calcul des différences de phase (méthode 1) pour le calcul des dérivées d'ordre supérieur par différences finies dans le paragraphe suivant.

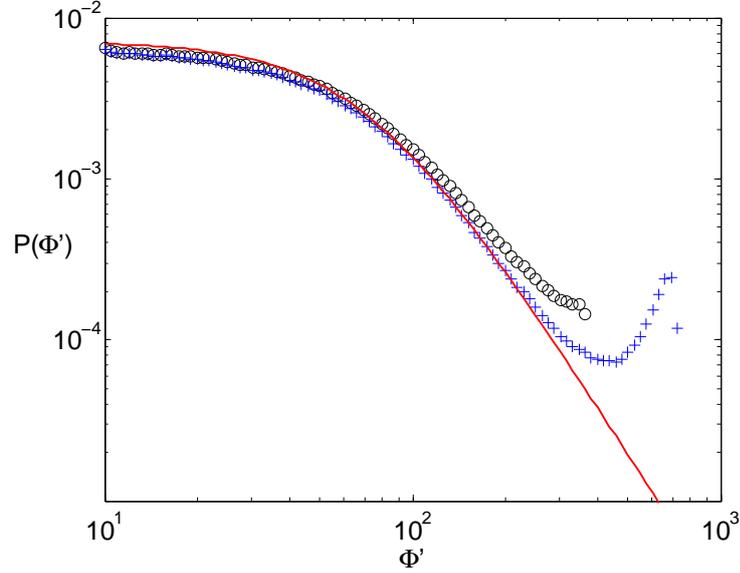


Fig. 5.16: *Distribution de la première dérivée de la phase. Les symboles représentent la distribution mesurée expérimentalement en estimant la dérivée de la phase par une méthode de type différences finies : les cercles noirs (○) en calculant la simple différence des phases enroulées et les croix bleues (+) en calculant la différence des phases déroulées. La courbe rouge en traits pleins (-) représente l'ajustement à l'expression théorique  $P(\Phi')$  dans la limite  $\Delta r \rightarrow 0$ . L'accord avec la théorie est meilleur dans un plus grand intervalle avec la mesure basée sur le calcul de la simple différence des phases enroulées.*

### 5.5.3 Distribution des dérivées d'ordre supérieur de la phase

Les dérivées d'ordre supérieur sont estimées par différences finies à partir de la phase enroulée  $\Phi \in (-\pi : \pi]$  à partir des formules :

$$\Phi''(r) \simeq \frac{\Phi(r + \Delta r) + \Phi(r - \Delta r) - 2\Phi(r)}{\Delta r^2} \in \left( -\frac{4\pi}{\Delta r^2} : \frac{4\pi}{\Delta r^2} \right) \quad (5.16)$$

$$\Phi'''(r) \simeq \frac{\Phi(r + \frac{3}{2}\Delta r) - 3\Phi(r + \frac{1}{2}\Delta r) + 3\Phi(r - \frac{1}{2}\Delta r) - \Phi(r - \frac{3}{2}\Delta r)}{\Delta r^3} \in \left( -\frac{8\pi}{\Delta r^3} : \frac{8\pi}{\Delta r^3} \right) \quad (5.17)$$

Les mesures des distributions de la seconde et de la troisième dérivée sont confrontées à la théorie pour  $\Delta r \rightarrow 0$  dans les figures 5.17 et 5.18 respectivement. Elles sont représentées uniquement pour les valeurs positives des dérivées car ce sont des fonctions paires par construction.

L'écart observé pour les grandes valeurs (*i.e.* à partir de  $\phi'' \times \Delta r^2 \sim \pi$  et  $\phi''' \times \Delta r^3 \sim \pi$ ) est dû à l'utilisation des différences finies. Cet écart se manifeste particulièrement lorsque  $\Phi''\Delta r^2$  et  $\Phi'''\Delta r^3$  sont de l'ordre des multiples de  $2\pi$  et correspondent à la probabilité des passages de

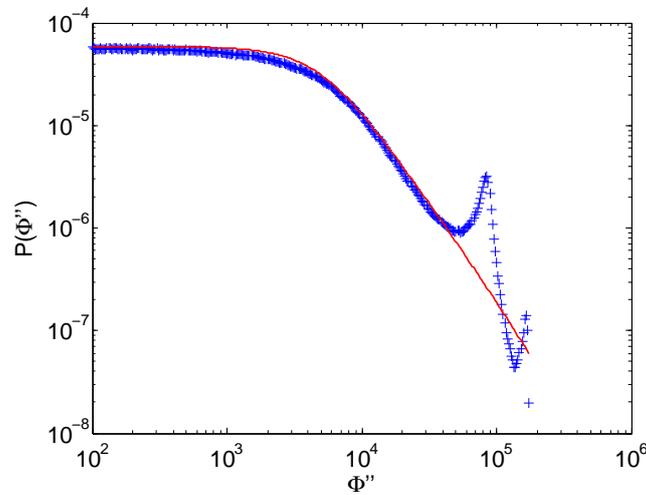


Fig. 5.17: *Distribution de la seconde dérivée de la phase en représentation logarithmique. Seules les valeurs positives sont représentées car c'est une fonction paire. Les croix bleues (+) représentent le résultat expérimental obtenu en estimant la seconde dérivée par la méthode des différences finies. La courbe en trait plein rouge représente l'ajustement à l'expression théorique  $P(\Phi'')$  lorsque  $\Delta r \rightarrow 0$  calculée dans l'hypothèse d'une statistique gaussienne circulaire.*

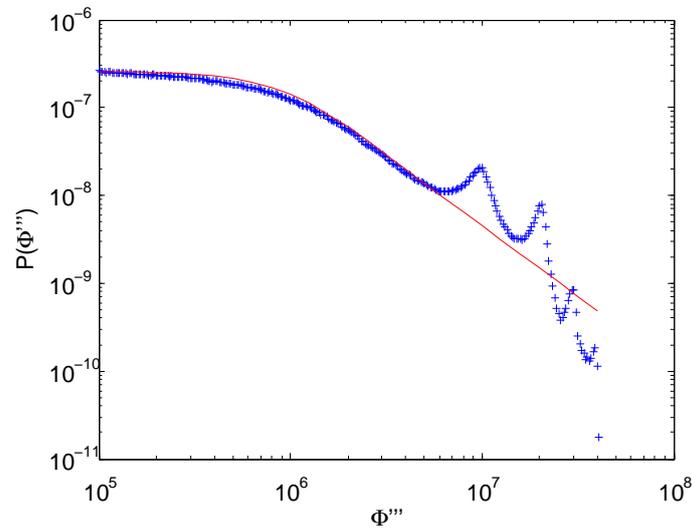


Fig. 5.18: *Distribution de la troisième dérivée de la phase en représentation logarithmique. Seules les valeurs positives sont représentées car c'est une fonction paire. Les croix bleues (+) représentent le résultat expérimental obtenu en estimant la seconde dérivée par la méthode des différences finies. La courbe en trait plein rouge représente l'ajustement à l'expression théorique  $P(\Phi''')$  lorsque  $\Delta r \rightarrow 0$  calculée dans l'hypothèse d'une statistique gaussienne circulaire.*

la phase en  $\pm\pi$ . La partie de la courbe où l'accord est bon permet de vérifier la loi asymptotique de puissance prévue. Soulignons que l'utilisation de la phase déroulée dans les formules 5.16 et 5.17 empêcherait de vérifier la puissance intervenant dans la décroissance asymptotique à cause des artéfacts des différences finies. Ceci justifie *a posteriori* notre choix d'utiliser ici la phase enroulée.

#### 5.5.4 Exploitation des résultats

##### Retour sur le caractère gaussien de la coda élastique :

L'accord entre la mesure expérimentale des distributions des trois premières dérivées de la phase et la prédiction théorique est très bon, notamment concernant le comportement asymptotique et malgré les écarts liés aux effets de différences finies. Ceci démontre que la coda des ondes de flexion est un champ de statistique gaussienne circulaire en très bonne approximation.

##### Exploitation des paramètres d'ajustement :

L'ensemble des 3 ajustements qui apparaissent dans les figures 5.16, 5.17 et 5.18 donnent les valeurs des trois paramètres Q, R et S :

$$\begin{cases} Q = 5000 \pm 10\% m^{-2} \\ R = 6500 \pm 10\% m^{-2} \\ S = 30000 \pm 10\% m^{-2} \end{cases} \quad (5.18)$$

À partir de ces paramètres et de l'équation 4.4 on peut remonter à la valeur du vecteur d'onde. En effet les décorrélation du champ à courtes distances sont à l'échelle de la longueur d'onde :

$$Q = -C''(0) \simeq \frac{1}{2}k^2 \Rightarrow k = 100 m^{-1} \Rightarrow \lambda = 6,28 \pm 20\% cm \quad (5.19)$$

Cette valeur est à comparer à la valeur de 9 cm issue de la mesure de la relation de dispersion (cf. figure 5.6) et à la valeur de 7,4 cm donnée par le premier zéro de la fonction de corrélation du champ (cf. figure 5.19).

##### Fonction de corrélation du champ :

Par ailleurs, ces trois paramètres d'ajustement donnent un développement à l'ordre 6 de la fonction de corrélation du champ près de zéro :

$$C(r) = 1 - 2,5 \cdot 10^3 r^2 + 2,4 \cdot 10^6 r^4 - 2,3 \cdot 10^9 r^6 \quad (5.20)$$

La figure 5.19 montre un relativement bon accord du développement de Taylor ainsi obtenu avec la fonction de corrélation du champ à courte distance valide pour  $r \leq 3\Delta r$ . La décorrélation indiquée par ce développement est légèrement plus importante. Cet écart indique la raison pour

laquelle la longueur d'onde calculée à partir du paramètre  $Q$  (Éq. 5.19) est un peu sous-estimée.

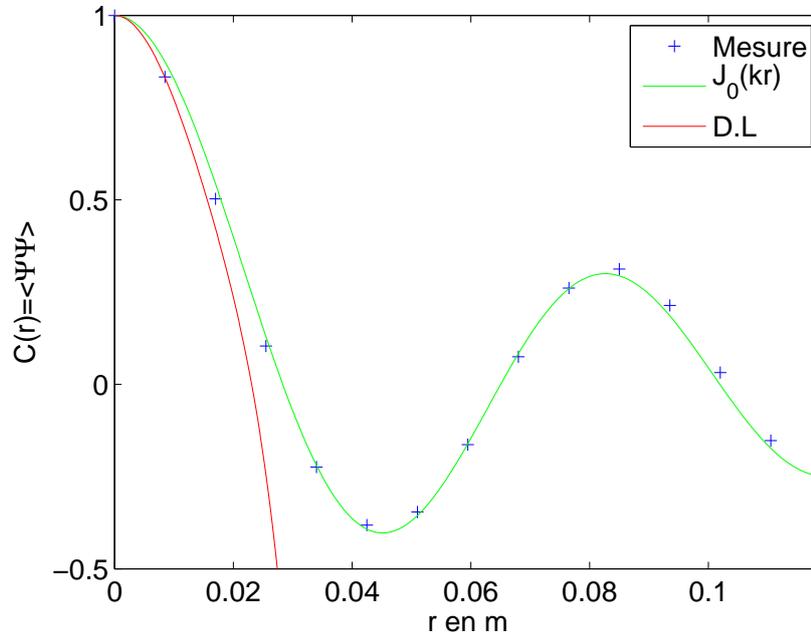


Fig. 5.19: *Fonction de corrélation du champ* : (+) les symboles bleus représentent la corrélation mesurée dans la coda des ondes de flexion, (—) en traits pleins verts la fonction théorique  $C(r) = J_0(2\pi r/\lambda)$  avec  $\lambda = 7,4\text{ cm}$  et (—) en traits pleins rouge son développement limité à courte distance obtenu par les paramètres d'ajustement des 3 premières dérivées de la phase.

## 5.6 Corrélations spatiales des différences de phase

L'étude de la statistique des trois premières dérivées de la phase démontre que la coda des ondes de flexion est un champ de statistique gaussienne. Par ailleurs, la mesure de la corrélation du champ dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> perforée correspond parfaitement à la fonction de corrélation théorique prédite pour des ondes bidimensionnelles (Éq. 4.5). Les ingrédients sont donc réunis pour mettre en œuvre la méthode de mesure du libre parcours moyen proposée dans le chapitre 4 (§4.4.4, éq 4.6). Par ailleurs, notons que la décroissance exponentielle de la corrélation du champ avec le libre parcours moyen  $\ell$  n'est pas visible (voir la figure 5.19) ce qui indique que  $\ell$  est probablement plus grand que le réseau d'accéléromètres utilisé pour les mesures des distributions de la phase :  $\ell > 12\text{ cm}$ .

Dans cette section, nous proposons donc de calculer la corrélation des différences de phase déroulée dans la coda des ondes de flexion avec la même géométrie du réseau d'accéléromètres

que précédemment dans le but de mesurer  $\ell$ . Le protocole et le traitement du signal mis en oeuvre pour cette étude sont les mêmes que précédemment (voir les figures 5.12 et 5.13). En revanche, contrairement à la section précédente (§5.5) où nous utilisons la phase définie dans l'intervalle  $(-\pi : \pi]$  et la différence de phase  $\Delta\Phi \in (-2\pi : 2\pi]$ , il est ici nécessaire de rajouter au traitement du signal l'étape de déroulement de la phase par rapport à la variable d'espace pour les raisons évoquées au paragraphe 4.4.4.

La corrélation des variations de phase est estimée par différences finies :

$$C_{\Phi'}(r) = C_{\Phi'}(r' - r'') = \langle \Phi'(r')\Phi'(r'') \rangle \simeq \frac{\langle \Delta\Phi_c(r')\Delta\Phi_c(r'') \rangle}{\Delta r^2} = \frac{C_{\Delta\Phi_c}(r)}{\Delta r^2} \quad (5.21)$$

La mesure de  $C_{\Delta\Phi_c}$  obtenue est présentée dans la figure 5.20.

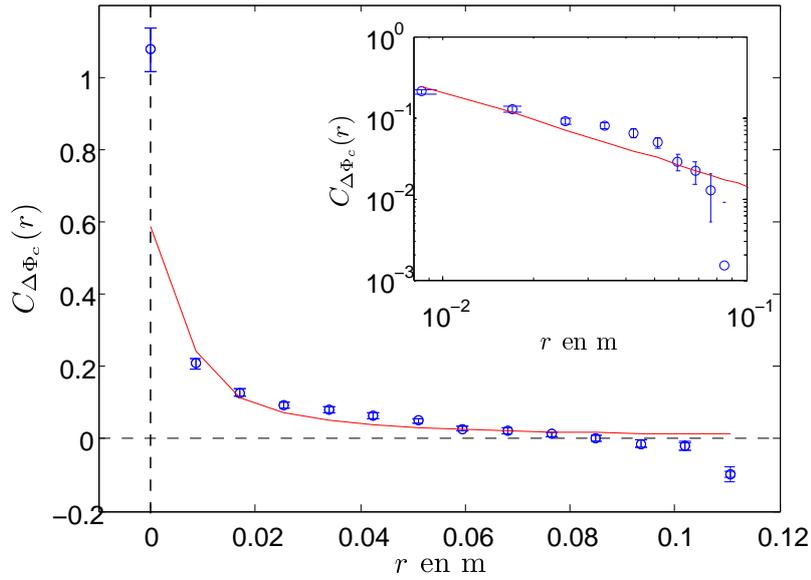


Fig. 5.20: Fonction de corrélation de la différence de phase déroulée mesurée en échelle linéaire et en échelle logarithmique dans l'insert. Les symboles bleus représentent la mesure et le trait plein rouge représente une simulation du comportement prédit pour  $\lambda = 7,4 \text{ cm}$  et  $\ell = 40 \text{ cm}$ . Les barres d'erreur représentent uniquement l'erreur statistique quantifiée par l'écart type divisé par la racine du nombre de sources différentes égal à 100.

On observe :

- La décorrélation des variations de phase est à l'échelle de la longueur d'onde : la corrélation devient négative pour  $r > 8 \text{ cm}$  soit pour les distances plus grandes que la longueur d'onde.
- La représentation logarithmique, en insert, montre que le comportement observé n'est pas

incompatible avec la loi de décroissance en  $1/r$  prévue par la théorie à courte distance par rapport à  $\ell$ , compte tenu des incertitudes.

- Notons que la valeur de la fonction de corrélation à l'origine  $C_{\Delta\Phi_c}(0) = 1,07$  est relativement en accord avec le calcul de la variance  $C_{\Delta\Phi_c}(0) = \langle \Delta\Phi_c^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\Delta\Phi_c (\Delta\Phi_c)^2 P(\Delta\Phi_c)$  à partir de la valeur  $g_1 = 0.82$  obtenue dans le paragraphe 5.5.

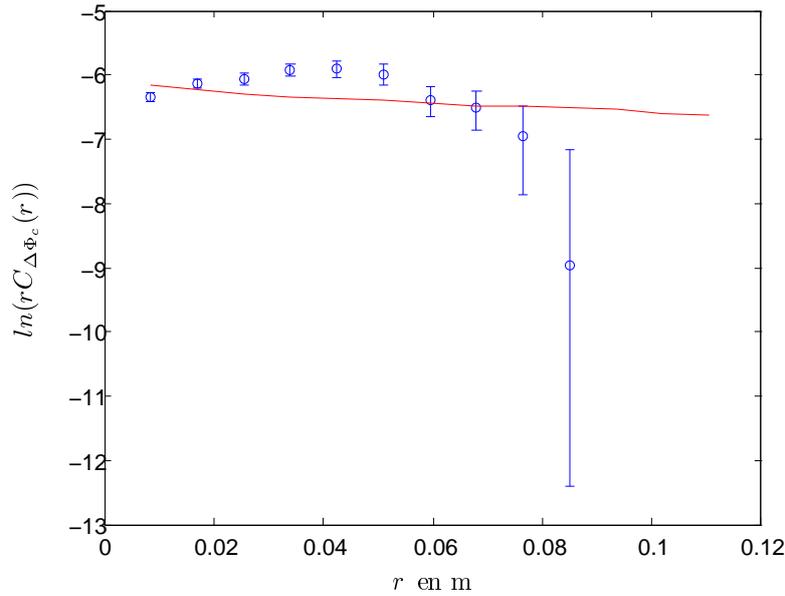


Fig. 5.21: Représentation du logarithme de la fonction de corrélation des variations de phase multipliée par la distance. Les barres d'erreur représentent uniquement l'erreur statistique quantifiée par l'écart type divisé par la racine du nombre de sources différentes égal à 100.

Comme on peut s'y attendre au vu de la figure 5.20 où un écart significatif est observé entre la théorie et l'expérience, la figure 5.21 montre que nous ne pouvons pas observer la décroissance asymptotique linéaire en  $-1/\ell$  de  $\ln(r C_{\Delta\Phi_c})$  prédite par les simulations (§4.4.4). Toutefois nous comprenons pourquoi :

- malgré la prépondérance du mode  $A_0$  à  $3\text{ kHz}$ , la superposition de plusieurs modes ( $A_0$  et  $S_0$ ) peut induire des oscillations et des décorrélatons à l'échelle de la longueur d'onde qui masquent le rôle du libre parcours moyen.
- la longueur  $N \times D$  couverte par les  $N = 16$  accéléromètres est probablement petite devant le libre parcours moyen  $\ell$  (dont l'estimation théorique est  $\ell = 40\text{ cm}$  à  $3\text{ kHz}$ ), ce qui empêche de voir les décorrélatons des variations de phase à cette échelle ;
- le nombre d'accéléromètres limité à 16 n'est pas suffisant. On ne peut pas à la fois séparer les modes symétrique et antisymétrique (en disposant les accéléromètres par deux en vis-à-vis) et en même temps couvrir une grande distance (pour voir la décroissance avec  $\ell$ ) bien échantillonnée (pour assurer l'opération de déroulement de la phase).

L'équipe dispose désormais de 32 accéléromètres. Ainsi, nous suggérons de refaire l'expérience en procédant de la façon suivante : en disposant les accéléromètres deux par deux de part et d'autre de la plaque pour séparer les modes symétrique et antisymétrique et en les alignant avec une distance alternativement de 3 cm et de un millimètre (soit  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$  entre les centres). Cette géométrie devrait permettre de séparer les modes symétrique et antisymétrique et d'estimer les dérivées de la phase – grâce aux paires telles que  $\Delta r = 8,5 \text{ mm}$ . De plus l'envergure du réseau d'accéléromètres ainsi constitué est de 58 cm c'est à dire de l'ordre du libre parcours moyen théorique.

## 5.7 Discussion et conclusion

Cette étude expérimentale de la diffusion des ondes de flexion dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> avec des cavités diffusantes a été conçue et menée dans le but d'étudier un cas analogue à la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre. On retrouve en effet dans cette expérience des ingrédients communs importants :

- milieu quasi-2D ( $\equiv$  croûte terrestre) ;
- modes 2D de Lamb ( $\equiv$  ondes de Rayleigh) ;
- présence de désordre conduisant à une diffusion multiple des ondes ;
- mesure du déplacement vertical avec des accéléromètres ( $\equiv$  stations sismiques) ;
- ondes acoustiques ultrasonores ( $\equiv$  ondes acoustiques sismiques).

Il est toutefois important de rappeler qu'il ne s'agit pas d'une expérience de type modèle réduit : il n'y a pas de similarité des échelles entre la plaque et la croûte terrestre. Par conséquent, il faut être vigilant à ne pas trop exploiter la comparaison.

Lors de cette étude expérimentale nous nous sommes heurtés à plusieurs difficultés :

- la difficulté de réaliser un dispositif avec trois ordres de grandeurs en présence, tels que  $D \ll \lambda \sim a \ll \ell < L$  tout en sachant que la taille des récepteurs  $D$  est imposée par le matériel disponible et que la taille du dispositif expérimental  $L$  est limitée par taille du laboratoire ; dans ces conditions il a fallu faire des compromis entre une fréquence suffisamment élevée pour que la section efficace des cavités soit la plus grande possible et pas trop élevée pour que la longueur d'onde reste supérieure à la distance entre les récepteurs afin d'obtenir une estimation raisonnable de la dérivée de la phase ( $\lambda \gg \Delta r \sim D$ ) ;
- l'absorption non négligeable des ondes acoustiques par le Plexiglas<sup>®</sup> ; nous avons mesuré un temps caractéristique d'absorption de 4 ms soit un facteur de coda  $Q_c \simeq 70$  à 3 kHz ;
- dans la gamme de fréquences utilisée, la diffusion par les cavités est peut être dominée par les réflexions sur les bords, ce qui n'était pas souhaité.

Les résultats sont toutefois relativement satisfaisants et permettent de conclure sur les points suivants :

- les distributions de l'intensité, de la phase et du champ montrent le caractère gaussien de la coda ultrasonore dans notre dispositif expérimental ;

- le bon accord théorie-expérience concernant les distributions des premières dérivées de la phase confirme ce caractère gaussien ;
- les distributions des dérivées de la phase contiennent de l'information sur la propagation à courte distance ;
- en revanche, les corrélations de la dérivée de la phase n'ont pas pu être mesurées avec suffisamment de précision, mais nous comprenons pourquoi.

Le caractère encourageant de ces résultats a permis d'envisager une étude basée sur des enregistrements sismiques qui est présentée dans le chapitre suivant. De plus, le dispositif expérimental mis au point ainsi que les études préliminaires sont actuellement utilisés par l'équipe du professeur Michel Campillo pour réaliser d'autres travaux, en analogie avec les ondes sismiques dans la croûte terrestre, portant sur :

- l'équipartition de l'énergie des différents modes de Lamb dans la coda ;
- la reconstruction passive de la relation de dispersion à partir de la corrélation du bruit acoustique [Larose *et al.*, 2007].

Nous avons souligné dès le début du chapitre 3 les intérêts que présente la phase par rapport à l'amplitude ou l'intensité moyenne. Au terme de ce chapitre, il est intéressant de faire le bilan sur ce point, notamment concernant l'aspect traitement du signal. L'allègement du traitement de données lorsqu'on travaille sur la mesure de la phase est non négligeable : la compensation de la décroissance énergétique de la coda ou le fenêtrage, la calibration par rapport à la sensibilité des récepteurs et la calibration par rapport à l'intensité de la source ne sont plus nécessaires dans une étude de phase. En revanche, notre étude a révélé que la phase en tant qu'objet nouveau doit être manipulée avec précautions. Différents points sont particulièrement délicats :

1. Certains filtres dénaturent de façon dramatique la phase. En particulier, il faut éviter les filtres d'ordre trop élevé.
2. La phase est un objet défini sur un cercle. Il faut donc être méfiant avec notre intuition plus familière avec le monde  $1\mathcal{D}$  défini entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Pour palier à ce problème, et en particulier aux discontinuités de  $2\pi$  qui apparaissent chaque fois que la phase a parcouru un tour du cercle trigonométrique, il est possible de calculer la phase déroulée ou cumulative.
3. Pour un réseau unidimensionnel, le déroulement de la phase nécessite un très bon échantillonnage du signal. En effet si la phase varie trop vite entre deux échantillons on ne peut pas savoir si la variation est de  $\Delta\Phi$  ou de  $\Delta\Phi - 2\pi$ . De plus, une erreur faite à partir d'un point induit une erreur sur toute la suite du signal. Notons qu'en  $2\mathcal{D}$  et  $3\mathcal{D}$ , il existe des solutions développées dans le domaine du traitement d'image [Koetter *et al.*, 2001, Cusack *et al.*, 1995, Bhalerao *et al.*, 1997].
4. La variable par rapport à laquelle la phase est déroulée doit être choisie précautionneusement.



## CHAPITRE 6

# Diffusion d'ondes sismiques dans la croûte terrestre



CONTRAIREMENT à la phase des arrivées principales des rais sismiques sur laquelle repose essentiellement l'étude de la structure interne de la Terre, la phase des ondes de coda est actuellement peu voire pas exploitée. Des travaux en théorie du transfert radiatif et en physique mésoscopique démontrent que cette coda à haute fréquence correspond à une propagation dans le régime de diffusion multiple des ondes sismiques principalement dans la croûte terrestre. Ainsi la problématique de notre travail est la suivante : comment exploiter la phase des ondes de coda sismique ? Peut-on obtenir de l'information sur la structure interne de la croûte terrestre et sur son degré d'hétérogénéité ? Nous avons apporté des éléments de réponse dans les travaux préliminaires des deux chapitres précédents. Ces travaux ont consisté d'une part en une étude théorique et numérique et d'autre part en une étude expérimentale des ondes élastiques dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> diffusante. Les résultats obtenus démontrent que les distributions et les corrélations des variations spatiales de la phase dans la coda sismique doivent permettre de sonder la décorrélation du champ à l'échelle de la longueur d'onde et du libre parcours moyen.

Pour mettre en oeuvre l'étude de la phase des ondes de coda sismique nous avons indiqué dès les chapitres 4 et 5 qu'il est nécessaire d'utiliser un réseau dense de sismomètres, alignés avec une distance entre les stations inférieure à la longueur d'onde par paires et avec la plus grande envergure possible. Le réseau temporaire PASSCAL déployé à l'observatoire de Pinyon Flat (Californie) en 1990 remplit ces critères. Il présente des distances de 7 m et 21 m entre les stations pour une longueur d'onde  $\lambda \simeq 270$  m à 10 Hz. Concernant l'envergure de 300 m – de l'ordre de la longueur d'onde – elle est probablement beaucoup plus petite que le libre parcours moyen qu'on souhaite mesurer. Certes il s'agit d'un handicap, toutefois nous pensons que sa mesure est possible puisque nous avons mis en évidence par une simulation numérique pour un réseau fictif de géométrie identique à celui de Pinyon Flat que la décroissance asymptotique avec  $\ell$  de la fonction de corrélation des différences de phase  $C_{\Delta\Phi_c}(r - r') = \langle \Delta\Phi_c(r)\Delta\Phi_c(r') \rangle$  était atteinte dès  $\lambda/5$  (§ 4.4.4).

Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons le réseau et les données sismiques sur lesquelles notre travail est fondé. La seconde partie présente l'étude statistique de la phase dans la coda sismique et l'exploitation des résultats à la lumière de l'hypothèse de champ gaussien. Il s'agit de la reproduction d'un article soumis prochainement au journal *Geophysical Research Letters* [Anache-Ménier *et al.*, 2008].

## 6.1 Réseau temporaire déployé à l'observatoire de Pinyon Flat (Californie)

### 6.1.1 Description du site

Le site de Pinyon Flat est localisé au sud de la Californie centrale, à environ 15 kilomètres au sud de *Palm desert*, à mi-chemin entre la faille de *San Andreas* et la faille de *San Jacinto* (voir figure 6.1).

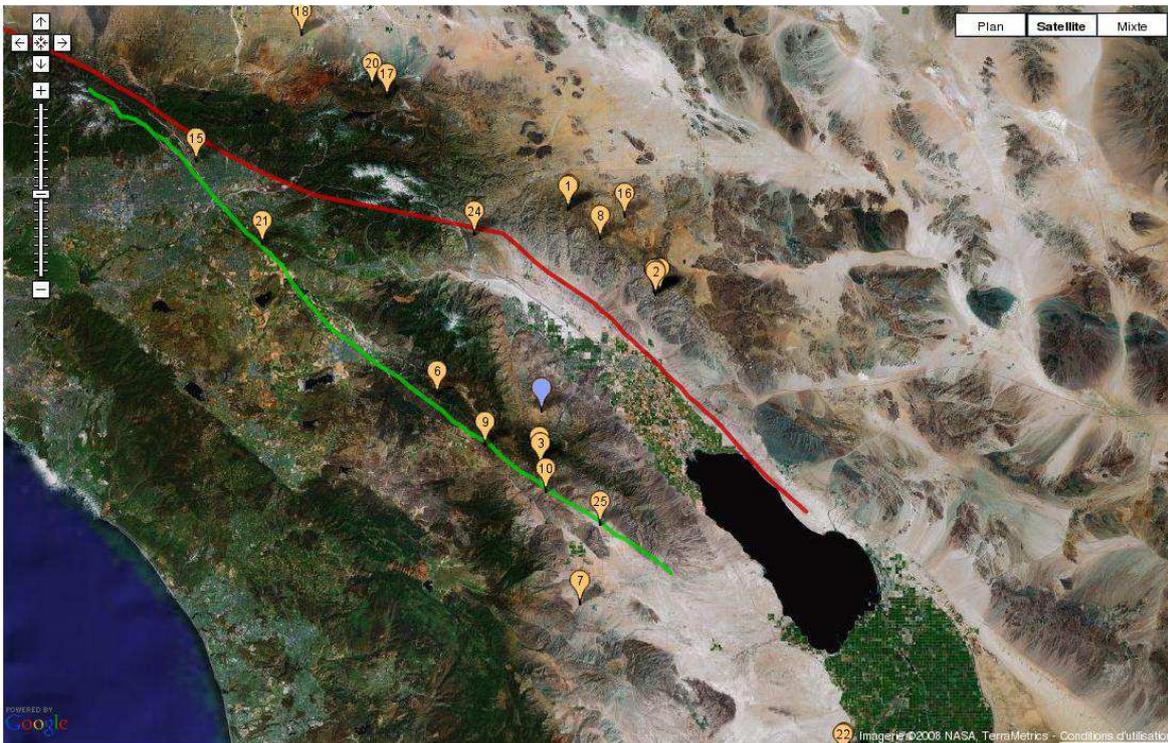


Fig. 6.1: Site de Pinyon Flat (marqueur bleu) et localisation des épicentres des séismes étudiés (marqueurs oranges). En trait plein rouge la faille de San Andreas et en trait plein vert la faille de San Jacinto. Source : Google Maps - NASA, TerraMetrics.

La géologie locale présente des alluvions du quaternaire (de type sablonneux), venant de

roches granitiques du mésozoïque présentes dans la région. De plus, l'observatoire se situe au niveau d'un réseau compliqué de failles. Les propriétés géologiques et sismiques du site ont été étudiées précédemment [Wyatt, 1982, Wyatt, 1989, Fletcher *et al.*, 1990, Vernon *et al.*, 1998]. Ces études mettent en évidence de la diffusion à faible profondeur. En revanche, nous ne disposons d'aucune estimation du libre parcours moyen dans cette région.

Cette région est caractérisée par son haut niveau d'activité sismique locale. Dans ce chapitre, nous travaillons sur une présélection de 25 séismes de magnitude supérieure à 2. Leurs épicentres sont situés à des distances comprises entre 6 et 240 km de l'observatoire. La position des épicentres est donnée sur la carte de la figure 6.1.

### 6.1.2 Description du réseau

Les données sismiques proviennent d'un réseau temporaire déployé sur le site de Pinyon Flat entre le 18 avril 1990 et le 27 mai 1990. Le réseau était constitué de 58 capteurs L-22 (2Hz), avec une fréquence d'échantillonnage de 250 Hz. Nous avons choisi ce réseau pour sa configuration très dense constituée d'une grille de 36 stations sismiques avec un pas de 7 m et également de 2 bras orthogonaux de 12 stations distantes de 21 m les unes des autres soit une envergure de 252 m. Les distances interstations sont petites devant la longueur d'onde aux fréquences étudiées ( $\lambda \simeq 267\text{ m}$  à  $\sim 10\text{ Hz}$ ) ce qui nous permet de suivre la phase en fonction de la distance. Le plan du réseau est donné dans la figure 6.2.

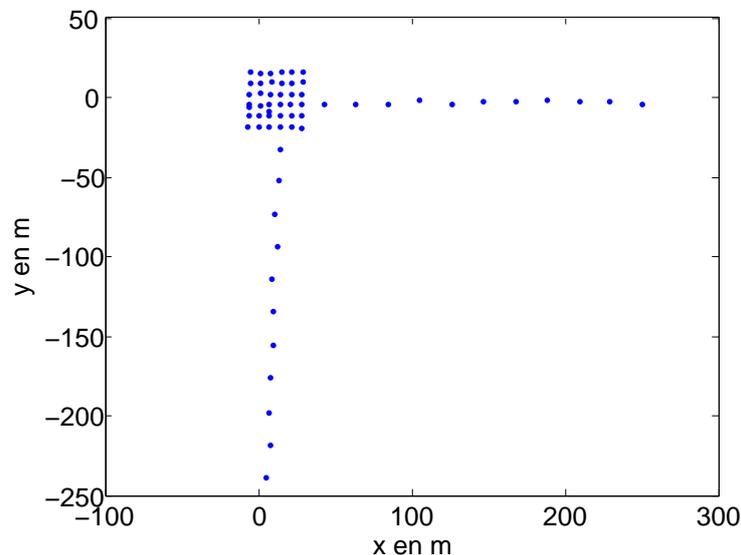


Fig. 6.2: Géométrie du réseau

Ce réseau avait été déployé pour analyser les conversions d'ondes de volume en ondes de surface. Notamment la grille était dédiée à l'analyse des ondes de volume et les bras à l'analyse

des ondes de surface.

### 6.1.3 Ondes de Rayleigh

Dans le domaine des fréquences étudiées, il est démontré expérimentalement que la composante verticale de la coda est dominée par les ondes de Rayleigh mutliplement diffusées [Margerin *et al.*, 2008]. Une description des ondes de Rayleigh est donnée dans la figure 6.3. Nous limiterons notre étude à la composante verticale et nous supposerons qu'elle est dominée par des ondes quasi-2D.

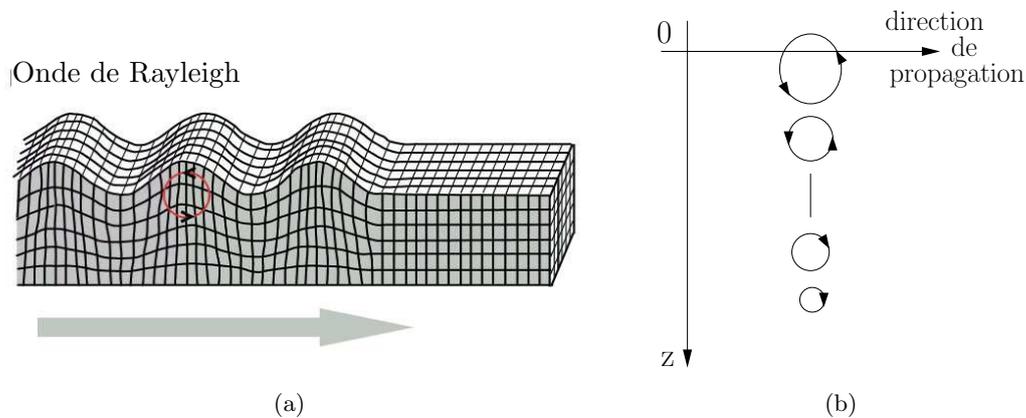


Fig. 6.3: Ondes de Rayleigh. (a) Les ondes de Rayleigh sont des ondes de surface évanescentes qui se propagent à une vitesse inférieure de quelques pourcents aux ondes  $S$  et qui induisent un déplacement dans un plan. La dispersion des ondes de Rayleigh est reliée aux propriétés dépendant de la profondeur. (b) Les particules se déplacent avec une trajectoire elliptique assez semblable à celle d'une poussière portée par une vague. C'est un mouvement elliptique à la fois vertical et horizontal, qui est rétrograde près de la surface libre. En dessous d'une certaine profondeur, qui dépend de la fréquence, le mouvement des particules dans une onde de Rayleigh est dominé par la partie cisailante et devient elliptique prograde.

## 6.2 Statistique de la phase des ondes de coda sismique

### Phase statistics of seismic coda waves

Domitille Anache-Ménier, Ludovic Margerin et Bart van Tiggelen

Article soumis prochainement à *Geophysical Review Letters*.

**Résumé :** Dans ce travail, nous décrivons l'analyse des statistiques des fluctuations de la phase dans la coda de séismes enregistrés lors d'une expérience temporaire déployée à l'observatoire de Pinyon Flat (Californie). Les mesures des distributions de la phase et de ses dérivées spatiales sont analysées à la lumière de la théorie de champ aléatoire gaussien. Nous trouvons que les distributions de probabilité sont essentiellement gouvernées par la longueur d'onde. De plus nous analysons la fonction de corrélation de la dérivée de la phase le long du réseau. Nous montrons que cette quantité est indépendante de la longueur d'onde. Bien que nous n'ayons pas pu obtenir une valeur précise pour le libre parcours moyen sur le site géographique de Pinyon Flat, nous démontrons que la forme de la décroissance dépend uniquement du degré d'hétérogénéité.

**Abstract :** We report the analysis of the statistics of the phase fluctuations in the coda of earthquakes recorded during a temporary experiment deployed at Pinyon Flats Observatory (PFO), California. The experimental distribution of the phase and its spatial derivatives are analyzed in the light of the theory of Gaussian random fields. The practical measurement of the phase is discussed in details and the main pitfalls are underlined. Since the phase itself does not contain information on the medium heterogeneity, we study the probability distribution of its first, second and third spatial derivatives. For large values, these quantities obey universal power-law decays whose exponents are remarkably well predicted by circular Gaussian statistics. For small values, the statistics of the derivatives are flat. The details of the transition between the plateau and the power-law behavior are governed by the wavelength. The correlation function of the first phase derivative along the array shows a simple algebro-exponential decay with a length scale equal to the mean free path of the waves. Due to the limited aperture of the array and the limited amount of data, only loose bounds are provided in this study. Our work suggests a new method to estimate the degree of heterogeneity of the crust.

## 6.3 Introduction

A seismic phase refers to a well identified arrival in a seismogram which can be associated to a ray trajectory inside the Earth. In the framework of ray theory, the phase of the signal can be defined as  $\omega(t - t_0) + \delta\phi$  where  $\omega$  is the dominant frequency of the signal and  $t$ ,  $t_0$  denote the arrival and origin time, respectively. The term  $\delta\phi$  represents phase shifts due to diffraction effects such as passages through caustics, or total reflections [Aki et Richards, 2002]. In the short period band ballistic arrivals are often masked by scattered waves due to small-scale heterogeneities in the lithosphere. The scattered waves form the pronounced tail of the seismogram known as the seismic coda [Aki, 1969, Aki et Chouet, 1975]. Even when scattering is prominent, it is still possible to define the phase of the seismic record by introducing the associated analytic signal  $\psi(t, \mathbf{r}) = A(t, \mathbf{r})e^{i\phi(t, \mathbf{r})}$ , with  $A$  the amplitude and  $\phi$  the phase.

Many studies have focused on the modeling of the mean field intensity  $I(t) = \langle A(t)^2 \rangle$  [Sato et Fehler, 1998, Fehler et Sato, 2003]. Recently [Campillo, 2006] has summarized recent theoretical and experimental developments which put forward the role of the phase in seismic scattering. There are both fundamental and practical arguments to study the phase rather than the intensity of the wave field. First of all, the measured displacements result from the superposition of many partial waves which have propagated along different paths between the source and the receiver. Each path consists of a sequence of scattering events which affect differently the phase of the corresponding partial wave. Consequently, the spatio-temporal fluctuations

of the phase should contain information on the propagation characteristics and the scattering properties of the medium. Since the phase is dominated by the uninteresting  $\omega t$  term, it is necessary to consider the spatial phase shifts between two neighboring points. Such measurements are made possible by the development of dense arrays of seismometers. The second argument is of practical interest. The phase measurement requires the calculation of a Hilbert Transform which is a routine operation. For narrow-band signals the information carried by the phase is not affected by absorption effects, earthquake magnitude and sensitivity of the seismometers. Therefore the phase appears as a good candidate to isolate scattering properties from absorption effects. In the following we present results from phase analysis of coda waves. For the statistical analysis of amplitude and phase fluctuations of direct transmitted waves, we refer the reader to e.g. [Aki, 1973, Wu et Flatté, 1990, Flatté et Wu, 1991, Wu, 2002, Zheng et Wu, 2005].

## 6.4 Phase measurements

We study data sets from a temporary experiment deployed at Pinyon Flat Observatory (California) in 1990 by an IRIS program. This site presents a high level of regional seismic activity. The array contained 58 3-components L-22 sensors (2Hz) and was configured as a grid and two orthogonal arms with sensor spacings of 7 meters within the grid and 21 meters on the arms [Owens *et al.*, 1991]. We selected 8 earthquakes of magnitude greater than 2 with good signal to noise ratio in the coda. Typically, epicentral distances are less than 110 km and the coda lasts more than 30 seconds. In what follows the phase measurement is discussed in details. Although we shall occasionally refer to the Figures, they will be presented and analyzed at greater depth in section 3.

To perform the statistical analysis, we filtered the signal in a narrow frequency band centered around 7 Hz ( $\pm 5\%$ ) and selected a 15 s time window starting around 5 seconds after the direct arrivals. In this time window, the signal is dominated by multiple scattering and is highly coherent along the array [Margerin *et al.*, 2008]. We evaluate the Hilbert transform of the vertical displacement which yields the imaginary part of the complex analytic signal  $\psi(t, \mathbf{r}) = A(t, \mathbf{r})e^{i\phi(t, \mathbf{r})}$ .

From the complex field, two definitions of the phase can be given :

1. The wrapped phase  $\phi$  is defined as the argument of the complex field  $\psi$  in the range  $(-\pi : \pi]$ .
2. The unwrapped phase  $\phi_u$  is obtained by correcting for the  $2\pi$  jumps – occurring when  $\phi$  goes through the value  $\pm\pi$  – to obtain a continuous function with values in  $\mathbb{R}$ .

In Figure 6.4, we present the statistical properties of the real amplitude (a), intensity (b), phase (c) and correlation function of the vertical component of the wavefield in the coda. Figure 6.4(c) shows that the  $\phi$  distribution of the vertical components in the coda is uniform. This does not give information on the random nature of the phase since any narrow band wave signal is expected to verify this distribution.

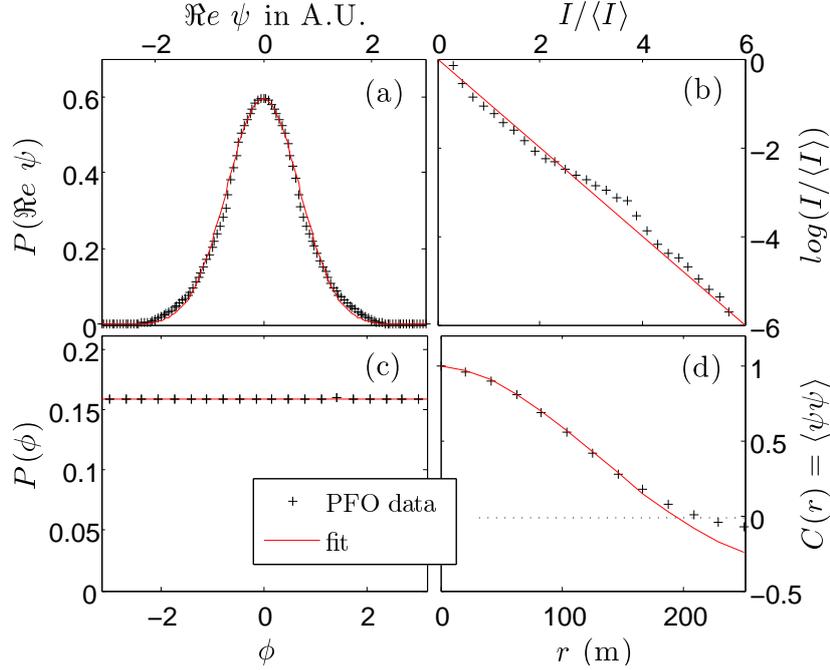


Fig. 6.4: *Preliminary tests* : (a) the measured vertical displacement follows a Gaussian distribution, (b) the measured intensity distribution can be fitted by  $\exp(-I/\langle I \rangle)$  which is specific to Gaussian statistics, (c) the phase distribution is flat (d) the field correlation function is fitted by  $J_0(kr) \exp(-r/2\ell)$ .

More information can be extracted by considering higher-order statistics. For this purpose we consider the spatial derivative of the phase, which can be estimated in two different ways :

1. The first measurement relies on the difference of wrapped phases  $\Delta\phi$  between two seismometers located  $\delta$  meters apart. Applying the simple finite difference formula  $\phi' \approx \Delta\phi/\delta$  an estimate of the derivative is obtained. Note that the phase difference  $\Delta\phi$  takes values between  $-2\pi$  and  $+2\pi$  which does not allow precise estimate of the distribution of the derivative for values roughly larger than  $\pi/\delta$ . Beyond this value our measurements will be dominated by finite difference artefacts and the distribution is biased by the  $2\pi$  jumps occurring within the distance  $\delta$ .
2. The second method uses the difference of the phase  $\phi_u$  spatially unwrapped at each time step. This yields another estimate of the derivative :  $\phi' \approx \Delta\phi_u/\delta$  which is expected to suppress finite difference artefacts. In practice it is impossible to discriminate a rare but physical large phase fluctuation from a small fluctuation that causes a  $2\pi$  jump within  $\delta$ . The only possibility along 1-D arrays is to impose that the largest admissible phase difference between two stations be smaller than  $\pi$ . Hence this  $\phi'$  estimate takes values in  $(-\pi/\delta : \pi/\delta]$  and is biased close to  $\pi/\delta$  by the unwrapping processing errors.

In the limit  $\delta \rightarrow 0$ , the two definitions are equivalent because the probability of phase jumps between the two stations tends to 0. Passing to the limit requires a precise synchronization of acquisition systems. Typically, the sampling rate should be two orders of magnitude larger

than the central frequency of the waves.

By averaging over the 8 seismic records, the lag-time in the coda, the est-west and north-south orientations, and the sensor positions within the array's grid at fixed  $\delta = 7\text{m}$ , we calculate the two resulting phase derivative distributions which are shown to be non-uniform in Figure 6.5. It is also instructive to consider the second (third) derivatives of the phase which are governed by the 3 (4)-point statistics which are plotted in Figure 6.6. Higher-order derivatives are obtained by applying standard finite difference formulas to the wrapped phase (this choice is explained in the next section). Since the 3 first derivative distributions are even functions, we only represent the positive values. The 3 probability distributions plotted in Figure 6.5 and 6.6 have similar properties. For small values of the random variables, the distributions are nearly flat. For larger values, the distributions are governed by a power-law decay except for some peaks which stem from the finite distance between the seismic stations. In the following section, we will demonstrate that the power-law decay is a signature of the Gaussian statistical properties of the vertical displacements.

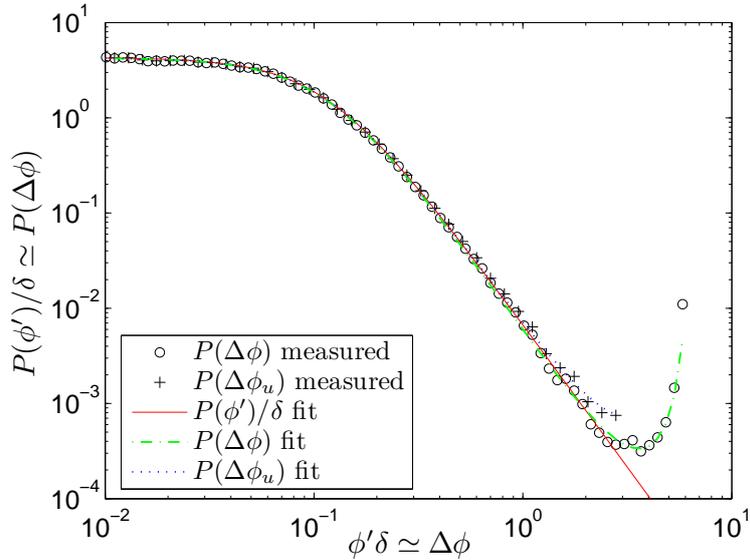


Fig. 6.5: Distribution of the first derivative of phase normalized by the inter-station distance  $\delta$  and measured using finite difference formula. The symbols ( $\circ$ ) and ( $+$ ) denote respectively the measured distribution of the wrapped phase difference and the unwrapped phase difference. The colored lines represent the fits for Gaussian theory : the dashed green curve for the wrapped phase difference distribution, the dashed blue curve for the unwrapped phase difference distribution and the red curve for the phase derivative distribution normalised by  $\delta$ . The fitting parameters are  $Q = 2.774 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}$  and  $g = 0.993204$ .

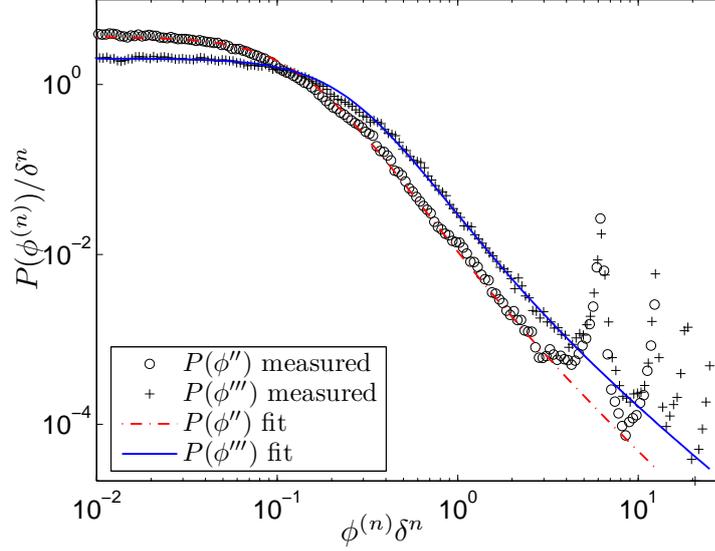


Fig. 6.6: Comparison of the Gaussian theory and experiments for the phase derivatives distribution  $P(\phi^{(n)})$  where  $n = 1$  or  $2$  denotes the  $n^{\text{th}}$  derivative of  $\phi$  with respect to the spatial coordinate. From the fit we find :  $Q = 2.774 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}$ ,  $R = 2.75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2}$  and  $S = 4.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2}$ .

## 6.5 Gaussian interpretation

To interpret our results we assume that the coda waves can be described by circular Gaussian statistics (CGS). The joint probability of  $N$  field displacements  $\psi_i$  recorded at positions  $r_i$  can be written as :

$$P(\psi_1 \cdots \psi_N) = \frac{1}{\pi^N \det \mathbf{C}} \exp \left[ - \sum_{i,j} \psi_i^* \mathbf{C}_{ij}^{-1} \psi_j \right], \quad (6.1)$$

where  $\mathbf{C}_{ij} = \langle \psi_i \psi_j^* \rangle$  is the covariance matrix [Goodman, 1985]. It is convenient to use normalized fields so that  $\mathbf{C}_{ii} = 1$ . Then, the off-diagonal elements are equal to the field correlation function  $\mathbf{C}_{ij} = C(|r_i - r_j|)$ . The Gaussian hypothesis can be justified by the following simple argument. The coda results from a superposition of many partial waves corresponding to different paths in the medium. Upon scattering, the partial waves are prone to random and independent phase shifts which allows application of the central limit theorem. As a result we expect the field to be Gaussian which is corroborated by the preliminary tests in Figure 6.4(a) and (b). From the joint distribution of two fields, the probability distribution of the phase difference at two points located  $\delta$  apart can be obtained by integrating over the amplitudes [Cowan *et al.*, 2007] :

$$P(\Delta\phi) = \tilde{P} \left[ \frac{1 - g_1^2}{1 - F^2} \right] \left[ 1 + \frac{F \cos^{-1}(-F)}{\sqrt{1 - F^2}} \right] \quad (6.2)$$

where  $F$  is given by  $F = g \cos(\Delta\phi)$  and  $g$  equals the field correlation at distance  $\delta$ , and where the prefactor  $\tilde{P}$  is given by  $\tilde{P} = (2\pi - |\Delta\phi|)/4\pi^2$  if  $\Delta\phi$  is the difference of the wrapped phase and by  $\tilde{P} = \frac{1}{2\pi}$  if  $\Delta\phi$  is the difference of the unwrapped phase  $\Delta\phi_u$ . In the limit  $g \rightarrow 0$  of totally decorrelated fields  $P(\Delta\phi) = \tilde{P}$ . In the limit  $\delta \rightarrow 0$ , we get the following formula for the phase derivative :

$$P(\phi') = \frac{1}{2} \frac{Q}{[Q + \phi'^2]^{3/2}}. \quad (6.3)$$

where the parameter  $Q$  is related to the field correlation function at zero distance by  $Q = -C''(0)$  and is related to  $g$  by  $Q = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2 - g)/\delta^2$ . Figure 6.5 demonstrates that the phase difference between two nearby seismometers follows Gaussian circular statistics with excellent accuracy. On the same plot we observe a good agreement between the theoretical distribution of  $\phi'$  and the measurements over 3 orders of magnitude in probability and 2 orders of magnitude in derivative. A clear discrepancy occurs for large values – typically when  $\phi'$  is of order  $\pi/\delta$  – which can be perfectly explained by taking into account the finite distance between the seismic stations. This is demonstrated in Figure 6.5 which shows excellent agreement between formula (6.2) and the measured finite-difference statistics of the phase. We observe that the formula for the derivative (6.3) agrees with the observations on a larger range when the estimate of  $\phi'$  is based on the wrapped phase difference. As a consequence, we choose this method to calculate the higher derivatives. Note that estimating the second and third derivatives using the unwrapped phase hampers the observation of the asymptotic power-law behaviour.

In the frequency band of interest, there is experimental evidence that the vertical component of the coda is dominated by scattered Rayleigh waves [Margerin *et al.*, 2008]. As a consequence, we expect the correlation function of the field to be given by [Aki, 1957, Shapiro, 1986] :

$$C(r) = C(|r' - r''|) = \langle \psi(r') \psi(r'') \rangle = J_0(kr) \exp(-r/2\ell), \quad (6.4)$$

which agrees well with observations as shown in Figure 6.4(d). Equation 6.4 contains two decorrelation length scales : the wavelength  $2\pi/k$  and the scattering mean free path  $\ell$ . Note that formula (6.4) is valid even when the medium is anelastic. In other words, weak absorption plays no role in the correlation function of a diffuse wavefield. The form of the correlation function (6.4) implies the following relation between the parameter  $Q$  and the wavenumber  $k$  :

$$Q \simeq \frac{1}{2} k^2. \quad (6.5)$$

The formula 6.5 is valid in the usual limit  $k\ell \gg 1$ . Using the parameter  $Q$  obtained by fitting the data with equation (6.3), we infer a dominant wavelength  $\lambda$  of the order of 267m which agrees with the velocity profile under the PFO array [Fletcher *et al.*, 1990]. Relation (6.5) offers a way of estimating the wavelength akin to SPAC measurements [Aki, 1957]. Note that the use of a narrow band signal is crucial because the parameters  $g$  and  $Q$  strongly depend on frequency.

From the joint Gaussian distribution of 3 and 4 fields, we can derive analytically the joint probability functions  $P(\phi', \phi'')$ ,  $P(\phi', \phi'', \phi''')$ . From these formulas, the marginal distributions  $P(\phi'')$ ,  $P(\phi''')$  can be evaluated by a numerical quadrature. The probability distributions of

the first, second, and third derivatives of the phase exhibit an asymptotic power-law decay with exponents  $-3$ ,  $-2$ ,  $-5/3$ , respectively. These universal exponents (i.e. independent of the medium properties) can be obtained analytically and provide a fit-independent test of the gaussianity of the field. The distributions of the first 3 derivatives of the phase depend on three parameters denoted by  $Q$ ,  $R$  and  $S$  which are related to the coefficients of the Taylor expansion of the field correlation function  $C(r)$  [Cowan *et al.*, 2007] :

$$\begin{cases} C''(0) &= -Q \\ C^{(4)}(0) &= QR + Q^2 \\ C^{(6)}(0) &= -QRS - Q(R + Q)^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

For our data set, we obtain  $C(r) = 1 - 1.387 \cdot 10^{-4}r^2 + 3.21 \cdot 10^{-7}r^4 - 7.21 \cdot 10^{-10}r^6$ . In Figure 6.6 the excellent agreement between the measured and fitted probability functions of the 2nd and 3rd derivatives of the phase confirm that the higher-order statistics of the seismic coda waves is Gaussian. This observation supports the idea that coda waves are in the multiple scattering regime.

The same analysis has been carried out in a systematic way for all frequencies between 4 and 30 Hz, and reveals a similar Gaussian behaviour for frequencies in the range 4-12 Hz and 22-30 Hz. Between 13 and 21 Hz, the asymptotic power law decay does not follow the predicted exponent. This frequency range corresponds to brutal changes in the ellipticity of the Rayleigh eigenfunctions. This change depends on the local stratification and does not occur at the same frequency all over the array. We may therefore question the validity of the spatial average performed in our analysis to suppress fluctuations. This may explain the failure of Gaussian statistics in some frequency bands.

## 6.6 Phase Difference Correlations

### 6.6.1 Theory

We have shown that the distributions of the phase derivatives provide information on the short-range correlation properties of the field. In this section we use the phase difference correlations to put some constraints on the degree of heterogeneity which is responsible for long-range decorrelations along the array. In the Gaussian hypothesis and for surface waves, we calculate the theoretical phase derivative correlation function :

$$C_{\phi'}(r > \lambda) \rightarrow \frac{1}{2}[(C')^2 - C''C] = (k/\pi r) \exp(-r/\ell) \quad (6.7)$$

The formula (6.7) relies on the form of the field correlation function (6.4) and is derived from the Gaussian joint probability of 4 fields [van Tiggelen *et al.*, 2006]. Formula (6.7) has particularly interesting properties. Contrary to the field correlation function  $C$ ,  $C_{\phi'}$  does not oscillate on the wavelength scale and decreases with the mean free path as the only characteristic length scale. The determination of the mean free path based on formula (6.4) in the usual regime

$k\ell \gg 1$  is impossible because the exponential decay is masked by the oscillations around 0 on the wavelength scale. We will show that the phase difference correlations allow an estimate of the mean free path on a scale of order  $\ell/10$ .

### 6.6.2 Data processing

As above, we estimate the phase derivative correlation function in a finite difference approximation using the formula  $C_{\phi'}(r) \simeq \langle (\Delta\phi_u(r')\Delta\phi_u(r'')) \rangle / \delta^2 = C_{\Delta\phi_u}(|r' - r''|) / \delta^2$ . Contrary to the probability distribution, we found that we should use the unwrapped phase difference to estimate the phase derivative. In fact, the wrapped phase difference correlation function is largely dominated by the contribution of the rare but large  $2\pi$  jumps with no physical interest.

The unwrapped phase difference correlation  $C_{\Delta\phi_u}(r)$  is measured along the two orthogonal arms with an aperture of 252 m and  $\delta = 21$  m interstation distance. The data are averaged over orientation, lag-time in the coda and seismic events. The result is presented in linear scale in the main part of Figure 6.7 and shows a decay dominated by the  $1/r$  factor along the arms of the array as predicted by formula (6.7). Contrary to the limit  $C_{\phi'}$ , the correlation achieves a finite value at  $r = 0$ , which we found to be consistent with the variance of the unwrapped phase difference calculated using  $\langle \Delta\phi_u^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\Delta\phi_u (\Delta\phi_u)^2 P(\Delta\phi_u)$  and  $g = 0.98$ . The parameter  $g$  has been determined independently by fitting the observed distribution of  $P(\Delta\phi_u)$  with formula (6.2) for  $\delta = 21$  m.

We note that it is much more difficult to measure the correlation function of the phase derivative than its probability distributions, for two main reasons. First, we have to deal with 4th-order statistics which requires much more averaging to suppress unwanted fluctuations in the data. The second reason is inherent to our experimental setup. Because the interstation distance is  $\delta = 21$  m along the arms, the correlation between the fields at two nearby stations is lower and the estimates of the derivative are less accurate. In addition, due to frequent breakdowns of the sensors located near the ends of the arms, the data could not be averaged over many sensor positions and seismic events. As a consequence the results for distance lag  $r > 180$  m had to be dropped out.

### 6.6.3 Numerical simulations vs. experimental results

Since formula 6.7 is valid in the limit  $\delta \rightarrow 0$ , we have to evaluate the impact of the finite inter-station distance inherent to our experimental set-up. To do so, we have simulated  $N$  correlated Gaussian random field displacements on a virtual array with the PFO geometry. The results for different values of  $\ell$  at fixed  $k$  are shown in Figure 6.7 together with the experimental results. By multiplying the simulated  $C_{\Delta\phi_u}$  by  $r$  and taking the logarithm, we can see a linear decay with a slope  $-1/\ell$  as for  $C_{\phi'}$ , as predicted by formula (6.7) (see inset in Figure 6.7). Therefore the slope, in logarithmic scale, of the correlation of unwrapped phase derivative corrected from the geometrical spreading factor offers direct access to the mean free path of the waves in the crust. Note that, the variance of the unwrapped phase difference (value at  $r = 0$ ) is not a good candidate to probe the mean free path because it also depends on the

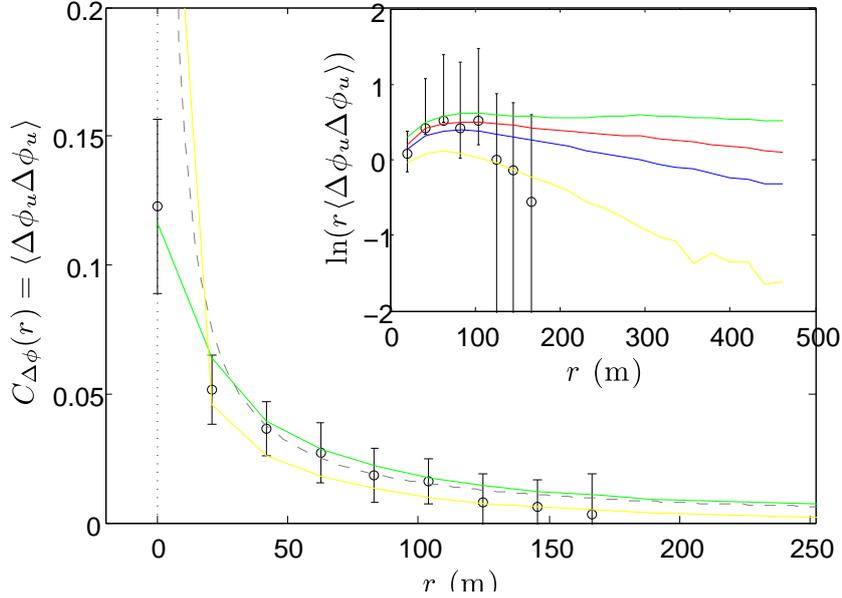


Fig. 6.7: Unwrap phase difference correlation function : the symbols ( $\circ$ ) denote the experimental measure and the dashed line a  $1/r$  fit. In the inset the logarithm of the correlation multiplied by  $r$  is represented both for the experimental measure and the simulation results at fixed  $k$  and  $\ell = 10$  km (green),  $\ell = 1$  km (red),  $\ell = 500$  m (red) and  $\ell = 200$  m (yellow). The value at  $r = 0$  m is not represented because it is undefined.

correlation length of the disorder [Rytov *et al.*, 1989]. It is quite encouraging to see on Figure 6.7 that the asymptotic exponential regime is already reached for  $r > \lambda/5$ . In addition, we find that the  $-1/\ell$  slope could in principle be measured if the aperture of the network were a few wavelengths, which in general is much smaller than the mean free path. Unfortunately, the experimental error bars of our data set are too large to permit accurate estimates of  $\ell$  at PFO but it can roughly be bounded between 1 km and 10 km. According to our assumption that the wavefield is at equipartition, this has to be interpreted as a gross estimate of the mean free path of the Rayleigh waves.

## 6.7 Conclusion

Seismic coda waves are proved to obey Gaussian statistics up to the third order in spatial derivatives with excellent accuracy. While the phase first derivatives distributions provide information on propagation at the wavelength scale, we demonstrate that the phase spatial derivative correlation function must offer a new opportunity to measure directly the mean free path  $\ell$  in Earth's crust. This measure is neither sensitive to absorption nor to scattering anisotropy. As opposed to the coherent backscattering effect [Larose *et al.*, 2004], the proposed method does not require the sensors to be located in the near field of the epicentre but demands

a dense array of seismic stations, with sub-wavelength spacing between stations and a total aperture of a few wavelengths. Our work highlights the phase as a useful physical object to study seismic coda waves.



Troisième partie

Phase et topologie



## CHAPITRE 7

# Écrantage de charge topologique dans une figure de tavelures



LORSQU'UNE ONDE cohérente - une onde lumineuse par exemple - est diffusée dans un milieu désordonné, sa cohérence spatiale est rapidement détruite et la distribution spatiale de l'intensité de l'onde dans le milieu devient aléatoire. On parle dans ce cas de tavelures (ou *speckle* en anglais) [Goodman, 1985]. Malgré leur apparence aléatoire, les figures de tavelures ne le sont pas complètement. Elles possèdent certaines corrélations spatiales et elles présentent un réseau compliqué de singularités, ou vortex de phase, centrées autour de points où l'intensité s'annule, qui n'est pas dénué de structure. L'évolution de la figure de tavelures est étroitement liée au mouvement de ces singularités.

Ces vortex de phase ont fait l'objet d'études en optique non-linéaire [Arecchi *et al.*, 1991, Swartzlander et Law, 1992], champs lasers [Wang *et al.*, 2005] et micro-ondes [Zhang *et al.*, 2007a]. Par exemple dans ce dernier domaine, la statistique du mouvement des vortex a été reliée à la nature du régime de propagation – diffusion ou localisation. Soulignons qu'ils sont analogues aux solutions spirales des équations de Ginzburg-Landau qui décrivent un modèle phénoménologique de la supraconductivité [Bethuel *et al.*, 1994].

Dans les figures de tavelures, un phénomène d'écrantage de charge a été observé entre ces singularités. L'écrantage de charge est un phénomène très important dans les domaines de la physique atomique, physique du solide, électrochimie, thermodynamique chimique ou encore cinétique réactionnelle. La différence entre nos études et ces derniers exemples est qu'il s'agit de charges topologiques et non pas électrostatiques : les vortex positifs tendent à être entourés de vortex négatifs et vice-versa. Il a également été montré que l'écrantage est un acteur important dans les champs optiques aléatoires et qu'il est probablement relié au désordre.

La section 7.1 introduit la notion de singularité de phase et de charge topologique. Ensuite dans la section 7.2 nous étudions les propriétés statistiques de la charge topologique associée aux singularités. La section 7.3 présente les résultats que nous avons obtenus dans les cas

particuliers des milieux  $2\mathcal{D}$  et  $3\mathcal{D}$  [van Tiggelen *et al.*, 2006] et leur interprétation à l'aide du principe des jumeaux (§ 7.3.2). Nous y mettons en évidence l'existence d'un écrantage entre les charges topologiques et nous mettons en relation ce phénomène avec le libre parcours moyen des ondes dans le milieu.

## 7.1 Généralités

### 7.1.1 Singularités de phase

Soit un champ scalaire  $\Psi(\vec{r})$ . Une **singularité de phase** ou dislocation est un point où le champ complexe est d'amplitude nulle. En effet, quand à la fois la partie réelle est nulle  $\chi = 0$  et la partie imaginaire est nulle  $\eta = 0$ , le champ  $\Psi = \chi + i\eta$  est nul. C'est un nœud du champ. L'amplitude est nulle mais la phase  $\Phi$  n'est pas déterminée. Dans un espace  $3\mathcal{D}$ , les équations  $\chi(\mathbf{r}) = 0$  et  $\eta(\mathbf{r}) = 0$  représentent deux surfaces dont l'intersection est une ligne de dislocations (Fig. 7.1.a). Si on observe le champ tridimensionnel dans une surface de contour  $\mathcal{C}$ , alors les singularités de phase sont des points (Fig. 7.1.b). Plus généralement dans un espace à  $n\mathcal{D}$  dimensions, les singularités sont localisées sur des hypersurfaces de dimension  $n - 2$ .

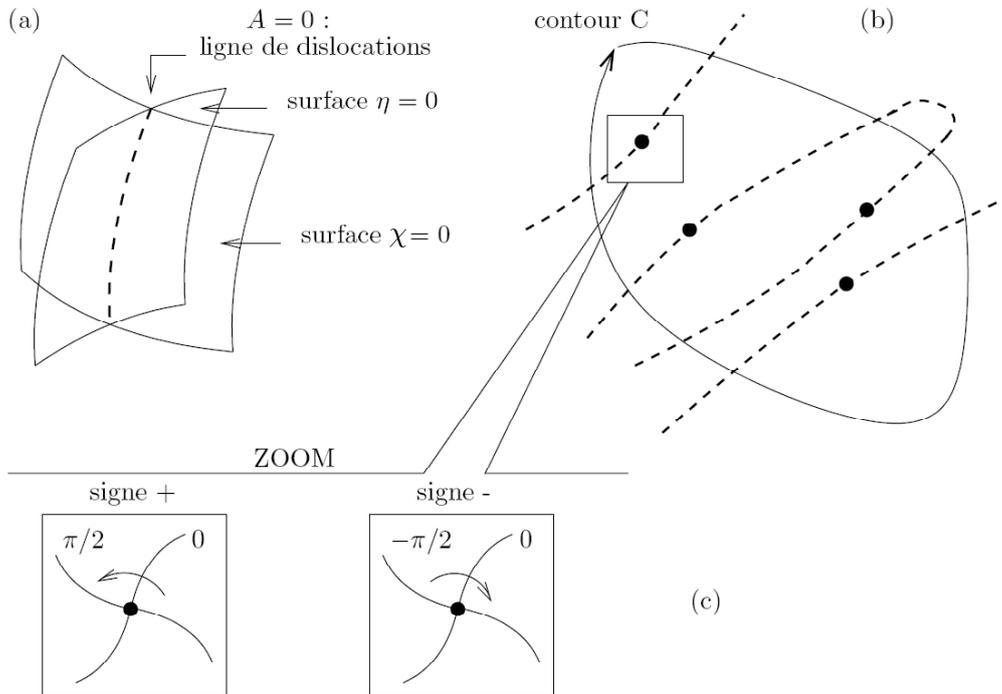


Fig. 7.1: Définition d'une singularité de phase : (a) en  $3\mathcal{D}$  il s'agit des lignes d'intersection entre les surfaces  $\eta = 0$  et  $\chi = 0$  où la phase n'est pas définie ; (b) si l'observation est réalisée dans une surface  $\mathcal{S}$  de contour  $\mathcal{C}$  alors les singularités observées sont des points situés à l'intersection des lignes de dislocation et de la surface  $\mathcal{S}$  ; (c) un signe est attribué à chaque singularité.

Les singularités de phase se trouvent à l'intersection des lignes de phase constante appelées équiphasés (Fig. 7.1.c et 7.2). En particulier, elles se trouvent à l'intersection des lignes équiphasés définies par  $\eta = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$  ou  $\pi$  et  $\chi = 0 \Leftrightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$ .

### 7.1.2 Charge topologique

Le comportement du champ au voisinage de la singularité est décrit par une quantité appelée charge topologique et notée  $q$ . En tournant autour d'une singularité, on voit changer la phase de  $2\pi q$ , où  $q \in \mathbb{Z}$  puisque le champ  $\Psi = A \exp(i\Phi)$  est défini de façon unique quel que soit  $\vec{r}$ . Le signe de la dislocation correspond au signe de la multiplicité  $q$  (Fig. 7.2.c), c'est à dire positif si on observe que la phase est croissante en tournant dans le sens trigonométrique et négatif si on observe que la phase est croissante en tournant dans le sens rétrograde.  $q$  est appelé **charge topologique** associée à la singularité.

L'exemple de la figure 7.2.c montre que les lignes équiphasés sont disposées en étoile autour de la singularité, cette dernière est donc entourée d'une sorte de vortex de phase. On constate en particulier que le gradient  $\vec{\nabla}\Phi$  atteint des valeurs très élevées autour de la singularité. Ceci explique la décroissance en loi de puissance (§3.4.1) de la distribution  $P(\partial_r\Phi)$  qui permet de très grands gradients  $\partial_r\Phi$ . Les grandes valeurs de  $\vec{\nabla}\Phi$  se manifestent également dans la variance  $\langle(\partial_r\Phi)^2\rangle$  qui diverge.

### 7.1.3 Charge topologique totale dans une surface

Considérons la surface  $\mathcal{S}$  définie par le contour  $\mathcal{C}$ . Les lignes de dislocation coupent la surface en différents points et dans différents sens (Fig. 7.1b). La **charge topologique totale**  $Q$  associée à la surface  $\mathcal{S}$  est définie comme le nombre de singularités dans  $\mathcal{S}$  en tenant compte de leur charge.

$$Q = \sum_i q_i \quad (7.1)$$

D'après le théorème de Stokes, la charge topologique totale est également égale au déphasage cumulé en parcourant le contour  $\mathcal{C}$  :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}\Phi. \quad (7.2)$$

Pour se convaincre de cette relation, nous proposons au lecteur de considérer l'exemple de la figure 7.2.c.

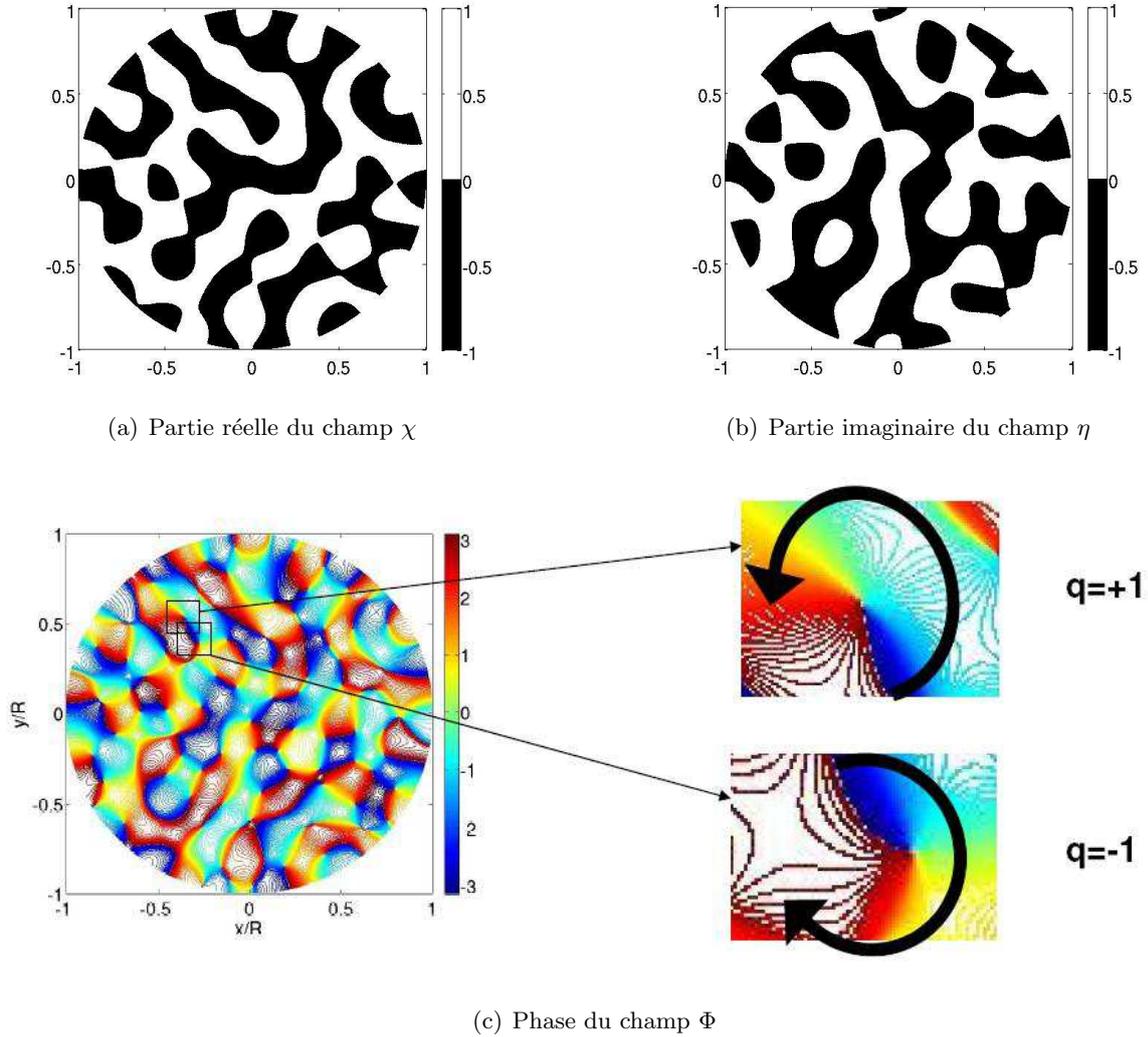


Fig. 7.2: *Illustration : il s'agit de tavelures observées dans une section de guide d'onde désordonné. (a) et (b) : Les parties imaginaire  $\eta$  et réelle  $\chi$  sont représentées en noir (valeurs négatives) et blanc (valeurs positives). Les singularités se situent à l'intersection des lignes frontières entre les domaines noirs et blancs des deux figures. (c) Les lignes de couleur représentent des équiphasés. On visualise les singularités de phase à l'intersection des équiphasés. Le signe de la charge topologique est donné par le signe du vortex de phase.*

## 7.2 Statistiques de charge topologique dans les figures de tavelures

Nous avons vu dans le paragraphe 3.3.3 que les figures de tavelures sont très bien modélisées par un champ de statistique gaussienne circulaire. Nous allons donc nous placer dans le cadre de cette hypothèse. De plus, pour un champ complexe gaussien aléatoire, les singulari-

tés dont la charge topologique est différente de  $\pm 1$  sont fortement improbables [Berry, 1978, Berry et Robnik, 1986]. On se limitera donc à ce cas et nous négligerons les singularités d'ordre supérieur.

### 7.2.1 Densité de charge topologique

Berry et Dennis ont calculé plus précisément la distance moyenne entre deux singularités [Berry et Dennis, 2000] pour des ondes monochromatiques. Ils montrent que la densité de lignes de dislocation est égale à  $k^2/(3\pi)$  et que pour une section plane du même champ, la densité de singularités est  $d = k^2/(6\pi) = 2\pi/(3\lambda^2)$ . On peut donc estimer la distance moyenne entre deux singularités par  $1/\sqrt{d} = 0.691\lambda$ . Par ailleurs, la figure de tavelures à l'intérieur d'un milieu désordonné présente des zones sombres et brillantes qui ont une taille de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  à l'intérieur de l'échantillon [Skipetrov, 2007], soit une surface caractéristique égale à  $\lambda^2$ . Par conséquent, dans le cas d'une figure de tavelures gaussiennes, presque toutes les tâches contiennent deux singularités de phase ou dislocation qui sont – avec une probabilité très élevée – de charge opposée.

### 7.2.2 Valeur moyenne

La valeur moyenne  $\langle Q \rangle$  est nulle puisqu'il n'y a pas de raison pour que la symétrie  $+/-$  soit brisée. En effet, la symétrie paire de la distribution  $P(\vec{\nabla}\Phi)$  (Eq. 3.14) implique que les vortex de phase négatifs sont équiprobables aux vortex positifs et donc que :

$$\langle Q \rangle = \langle \sum_i q_i \rangle = \sum_i \langle q_i \rangle = \sum_i 0 = 0.$$

### 7.2.3 Fluctuations

Dans une figure de tavelures, le champ  $\Psi$  fluctue et par conséquent la charge topologique  $Q$  fluctue elle aussi. Les fluctuations de la charge topologique totale  $Q$  peuvent être quantifiées par la variance  $\langle Q^2 \rangle$ . À l'aide du théorème de Stokes (Eq. 8.1), la variance  $\langle Q^2 \rangle$  dans un contour  $\mathcal{C}$  peut être exprimée en fonction des corrélations de la dérivée de la phase :

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \langle \vec{\nabla}\Phi(\vec{s}) \vec{\nabla}\Phi(\vec{s}') \rangle \cdot d\vec{s}' \quad (7.3)$$

Dans le cas particulier d'une surface  $\mathcal{S}$  de contour  $\mathcal{C}$  circulaire de rayon  $R$ , cette équation se simplifie. Lors du passage aux coordonnées polaires, l'intégrande se réduit à une forme non tensorielle [Ghyssels, 2005] :

$$\langle Q^2(R) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta d\theta' \left\langle \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\Phi(\theta')}{\partial\theta'} \right\rangle \quad (7.4)$$

et dans le cas particulier où la statistique est invariante par rotation :

$$\langle Q^2(R) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Delta\theta \left\langle \frac{\partial\Phi(0)}{\partial\theta} \frac{\partial\Phi(\Delta\theta)}{\partial\Delta\theta} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Delta\theta C_{\Phi'}(\Delta\theta) \quad (7.5)$$

La variance de la charge topologique est donc directement reliée à la corrélation de la dérivée angulaire de la phase  $C_{\Phi'}(\Delta\theta = \theta' - \theta) \equiv \langle \partial_\theta \Phi(\theta) \partial_{\theta'} \Phi(\theta') \rangle$ . Cette dernière est elle-même directement reliée à la corrélation du champ par l'équation 3.19 dans l'hypothèse d'un champ gaussien, avec  $(') \equiv \partial_{\Delta\theta}$  et  $C = C[2R\sin(\Delta\theta/2)]$  [Ghysseles, 2005].

Il est important de souligner que la conséquence d'un éventuel écrantage entre les charges topologiques serait de diminuer les fluctuations du déséquilibre entre les charges positives et négatives à l'intérieur d'une région donnée et donc d'atténuer fortement les fluctuations de charge topologique. Ainsi, la variance  $\langle Q^2 \rangle$  s'avère être une quantité extrêmement intéressante puisqu'elle est le révélateur d'un éventuel écrantage. Elle est étudiée plus en détail dans la section suivante dans le cas particulier des milieux 2D et 3D infinis.

## 7.3 Écrantage et son lien avec le libre parcours moyen

### 7.3.1 Cas de milieux 2D et 3D

Considérons de nouveau une surface circulaire de rayon  $R$ . Un premier résultat est bien connu. Si on suppose que les singularités de phase  $i$  possèdent des charges aléatoires  $q_i = \pm 1$  indépendantes, alors on trouverait  $\langle Q^2 \rangle = \langle (\sum_{i \in \mathcal{S}} q_i)^2 \rangle = \langle \sum_{i \in \mathcal{S}} q_i^2 \rangle + \langle \sum_{i \neq j \in \mathcal{S}} q_i q_j \rangle = \langle \sum_{i \in \mathcal{S}} q_i^2 \rangle + 0 = N = d\pi R^2 \sim R^2$ , avec  $N$  le nombre de singularités incluses dans  $\mathcal{S}$  et  $d$  la densité surfacique de singularités, c'est à dire une variance proportionnelle à la surface  $\mathcal{S} = \pi R^2$ . En réalité, il est observé que les charges ne sont pas indépendantes mais tendent à être écrantées [Halperin, 1981, Berry et Dennis, 2000]. Par conséquent, on s'attend à ce que la croissance de la variance de la charge topologique  $Q$  avec le rayon  $R$  soit plus lente que cette loi quadratique.

Définissons la longueur caractéristique d'écrantage  $\xi$  comme la longueur caractéristique pour atteindre l'allure asymptotique de la variance.

Wilkinson et Freund [Freund et Wilkinson, 1998] proposent un comportement asymptotique linéaire "diffus" :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\langle Q^2(R) \rangle}{R} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{C'(x)^2}{1 - C(x)^2} \quad (7.6)$$

Berry et Dennis [Berry et Dennis, 2000] ont par ailleurs calculé  $\langle Q^2(R) \rangle$  à partir de la fonction de corrélation des charges topologiques, qui est sensible aux effets de bords à cause de l'écrantage. Lorsque la distribution de charge est lissée par une gaussienne  $\exp(-R^2/R_0^2)$  (sur une surface moyenne  $\pi R_0^2$ ), la loi quadratique, qui reste valide pour les petits  $R_0$ , a pour comportement asymptotique :

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \langle Q_{\text{sm}}^2(R_0) \rangle = \int_0^\infty dx x \frac{C'(x)^2}{1 - C(x)^2} \quad (7.7)$$

pourvu que l'intégrale converge; *i.e.* une variance indépendante de la surface  $\mathcal{S}$ .

En utilisant les équations 4.5, 8.7 et 7.5 dans cet ordre, nous avons vérifié que l'équation (7.5) est en accord avec la "loi de diffusion" proposée par Wilkison et Freund, *i.e.* une variance proportionnelle à la circonférence (Fig. 7.3.a). On peut préciser à titre de remarque que la "constante de diffusion" de la charge topologique est égale à celle pour la phase cumulée le long d'une ligne droite de longueur  $2\pi R$  (voir l'analogie entre les équations 3.22 et 7.5).

Dans les figures 7.3a et 7.3b nos résultats sont représentés pour  $\langle Q^2 \rangle$  calculé pour un disque de rayon  $R$  inclus dans des milieux  $3\mathcal{D}$  et  $2\mathcal{D}$  respectivement. Nos observations sont les suivantes :

1. Pour  $kR$  petit, on observe que  $\langle Q^2 \rangle \sim k^2 R^2$  dans les deux dimensions. À cette échelle l'écrantage est faible.
2. Comportement asymptotique :
  - En  $3\mathcal{D}$  et pour les rayons  $R$  grands,  $\langle Q^2 \rangle$  dépend très faiblement du libre parcours moyen  $\ell$ . En effet, l'intégrale dans l'équation (7.6) converge même pour  $\ell = \infty$ , donc  $\ell$  n'est pas une longueur caractéristique.
  - Pour la fonction de corrélation du champ  $C(x) = 2J_1(kx)/kx$  (diffusion d'une lumière laser cohérente par un échantillon circulaire, fortement aléatoire et uniformément éclairé [Freund et Shvartsman, 1995, Freund, 1995]), le comportement est très similaire bien qu'avec une constante de diffusion légèrement plus faible. Dans les deux cas, la conséquence est une longueur d'écrantage proportionnelle à la longueur d'onde.
  - Pour un milieu aléatoire  $2\mathcal{D}$ , on observe que  $\langle Q^2 \rangle$  dépend de façon logarithmique du libre parcours moyen  $\ell$ . La longueur d'écrantage topologique dépend alors légèrement du libre parcours moyen.
3. Cependant, la variance de la charge lissée (*smoothed* en anglais)  $\langle Q_{\text{sm}}^2 \rangle$  (fig. 7.3c) converge vers une constante  $k\ell/\pi$  en  $2\mathcal{D}$  et vers  $0.54 \ln k\ell$  en  $3\mathcal{D}$  en accord avec Berry et Denis. La longueur d'écrantage est typiquement égale à  $\ell$ .
4. Il faut noter que dans le cas d'un milieu chaotique  $2\mathcal{D}$  pour lequel  $C(x) = J_0(kx)$ , les intégrales (7.6) et (7.7) divergeraient et la variance de la charge topologique serait une fonction croissante de la forme  $\langle Q^2 \rangle \propto kR \ln(kR)$ , c'est à dire avec un comportement légèrement super-diffusif, tandis que la version moyennée  $\langle Q_{\text{sm}}^2 \rangle$  ne tend plus vers une constante mais présente alors un comportement diffusif :  $\langle Q_{\text{sm}}^2 \rangle \rightarrow kR_0/(2\sqrt{\pi})$ .

Nous venons de montrer que le libre parcours moyen  $\ell$  gouverne les fluctuations spatiales de la charge topologique totale à l'intérieur d'une surface  $\mathcal{S}$ . L'écrantage empêche les fluctuations de  $Q$  d'augmenter trop vite avec la surface. Si on définit la longueur d'écrantage  $\xi$  comme la distance au delà de laquelle le comportement limite est atteint, alors il est proportionnel au libre parcours moyen  $\ell$  en  $2\mathcal{D}$  et à la longueur d'onde  $\lambda$  en  $3\mathcal{D}$ . Si maintenant on réalise une moyenne pondérée par une gaussienne en suivant Berry *et al.* (Fig. 7.3.c), alors la distance

d'écrantage est typiquement égale au libre parcours moyen  $\ell$  dans les deux cas. Ceci souligne le rôle très délicat du lissage de la charge topologique totale. Nous proposons d'interpréter une partie de ces résultats dans la section suivante (§7.3.2) en recourant au principe des jumeaux introduit par Freund *et al.* [Freund et Shvartzsman, 1994].

### 7.3.2 Principe des jumeaux

Le signe des singularités semble respecter un principe dit **principe de signe** qui s'énonce de la façon suivante : *des singularités de phase adjacentes sur une ligne où s'annule la partie réelle ou la partie imaginaire doivent être de signes opposés*. Dit autrement, deux singularités de phase connectées directement par une ligne équiphasse sont de signes opposés.

Il existe un argument mathématique simple [Freund et Shvartzsman, 1994] qui permet de justifier ce principe de signe basé sur la continuité et l'unicité du champ. Prenons l'hypothèse que les parties réelles  $\chi$  et imaginaires  $\eta$  du champ complexe sont partout continues et différentiables. Parcourons la ligne  $\chi = 0$  : on appelle  $s_\chi$  l'abscisse curviligne associée, et  $n_\chi$  la normale à  $s_\chi$  et enregistrons simultanément la valeur de la partie imaginaire  $\eta$ . L'observation est représentée figure 7.4. On constate que le signe de la pente  $\frac{\partial \eta}{\partial s_\chi}$  alterne entre chaque intersection avec  $\eta = 0$  *i.e.* entre chaque singularité (Fig.7.4.b) . C'est une conséquence directe du fait que la partie imaginaire doit être une fonction injective, *i.e.* le champ n'a qu'une seule valeur en un point (Fig. 7.4(a)). Par ailleurs, en avançant le long de la ligne  $\chi = 0$  on a conservé la valeur  $\frac{\partial \chi}{\partial n_\chi}$  constante. Sachant que le signe de la singularité est déterminé par le signe du jacobien  $\partial(\chi, \eta)/\partial(s_\chi, n_\chi)$ , cela signifie que le long de l'équiphasse  $\chi = 0$  le signe des singularités alterne. La démonstration reste valide réciproquement si on se promène le long d'une ligne telle que  $\eta = 0$ .

Les conséquences du principe de signe sont les suivantes. Le signe d'une seule singularité fixe le signe de toutes les autres singularités. Dans un milieu infini (espace libre) les singularités sont créées par paires de signes opposés. C'est le **principe des jumeaux**. Par contre, en présence de conditions aux limites où le champ change brusquement, le principe des jumeaux ne s'applique plus et des singularités isolées peuvent être créées ou détruites au niveau du bord.

On comprend ainsi directement les résultats précédents (section 7.3.1). Le principe de signe explique l'origine de l'écrantage de charges topologiques. En effet, chaque charge est compensée par celle de son jumeau et ainsi la charge topologique totale  $Q$  devrait s'annuler dans un espace libre  $2\mathcal{D}$  ou  $3\mathcal{D}$ . Mais attention cela ne signifie pas que le jumeau est le plus proche voisin mais seulement qu'il existe un jumeau qui écrante la charge. Cela ne donne pas d'information sur la distance caractéristique de l'écrantage  $\xi$  mais indique seulement qu'il existe un écrantage.

Si on calcule la charge topologique totale à l'intérieur d'un contour  $\mathcal{C}$  on crée une limite artificielle à l'intérieur de laquelle on a un écrantage. Cependant, au bord de cette limite, les singularités vont paraître indépendantes parce que il est probable que leurs jumeaux soient

situés de l'autre côté. Ainsi en comptant la charge topologique totale à l'intérieur du contour, on a un nombre proportionnel à la surface de singularités qui sont parfaitement écrantées et un nombre de singularités proportionnel à la longueur du contour  $\mathcal{C}$  dont les charges semblent être aléatoires et indépendantes. Il est donc naturel d'observer  $\langle Q^2 \rangle \sim R$  et non  $\langle Q^2 \rangle \sim R^2$ . En revanche si on réalise une moyenne de la variance de la charge topologique totale sur des contours de rayon  $R - \delta R$  à  $R + \delta R$  avec  $\delta R$  de l'ordre de la distance caractéristique de l'écrantage  $\xi$ , alors, en moyenne, les charges des jumeaux situés de part et d'autre de la frontière vont s'annuler. Ce qui permet d'interpréter également le résultat selon lequel les fluctuations  $\langle Q^2 \rangle$  ne dépendent pas de la taille de la surface  $\mathcal{S}$  obtenu par Berry et Dennis (Éq 7.7, [Berry et Dennis, 2000]) et en figure 7.3.c dans le cas d'un lissage gaussien.

### 7.3.3 Conclusion et perspectives

Nous avons étudié l'écrantage topologique de façon quantitative dans des milieux infinis de différentes dimensions et plus particulièrement le rôle joué par le libre parcours moyen dans cet écrantage.

En particulier on conclut qu'il serait possible d'estimer le libre parcours moyen en connaissant la phase sur un contour. On peut ainsi imaginer "compter" le libre parcours moyen des ondes sismiques. Il s'agit d'une alternative intéressante à la méthode proposée dans la partie précédente. Elle est applicable à plus basse fréquence et nécessite de s'intéresser à une surface telle qu'une région ou un État particulièrement bien couvert en stations sismiques comme la Californie ou le Japon.

Dans cette partie nous avons étudié l'écrantage topologique en définissant une surface  $\mathcal{S}$  arbitraire, sans signification physique. Il serait intéressant d'étudier ce qu'il en est pour une surface  $\mathcal{S}$  de contour  $\mathcal{C}$  correspondant à de vraies conditions aux limites. Dans une telle configuration, réaliser un lissage gaussien perd son sens et il n'y a plus de risque d'oublier d'éventuelles contributions à l'écrantage. Nous étudions ce problème dans l'article reproduit dans le chapitre suivant [Anache-Ménier et van Tiggelen, 2008]. Nous allons nous placer dans le cas particulier d'un milieu désordonné confiné dans un guide d'onde cylindrique. C'est une géométrie particulièrement intéressante puisqu'elle intervient dans de nombreux domaines de la physique, de l'acoustique à l'optique en passant par les micro-ondes.

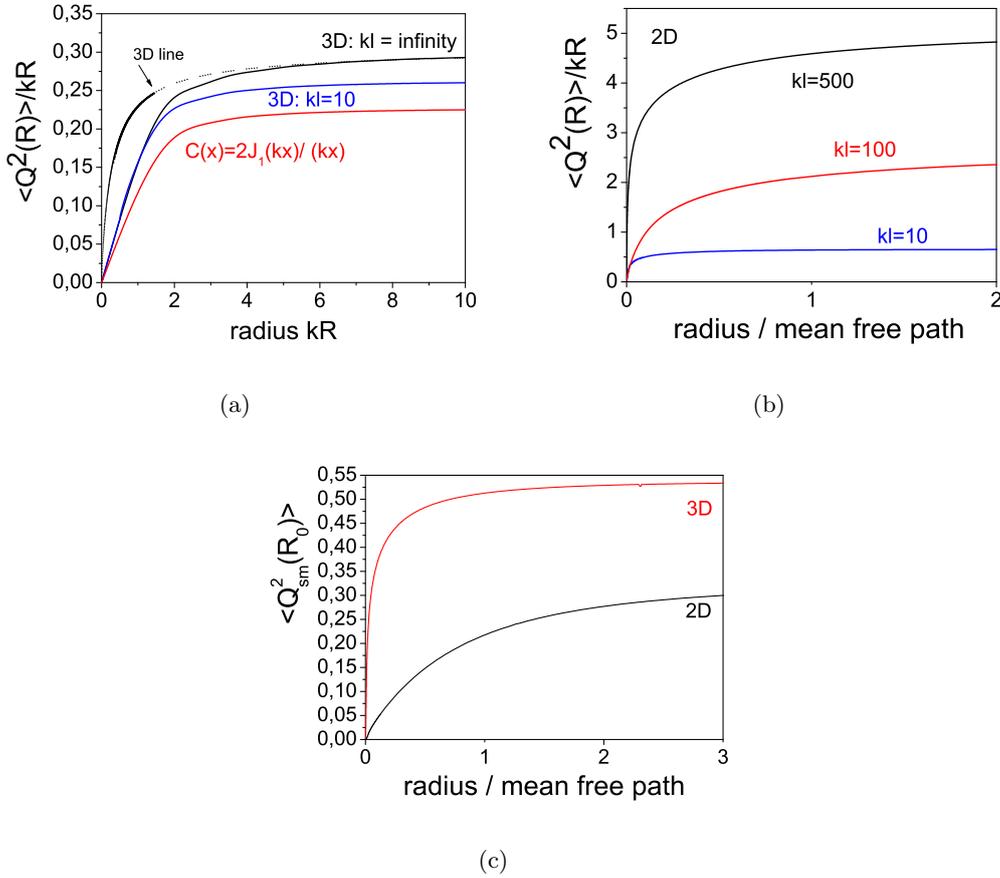
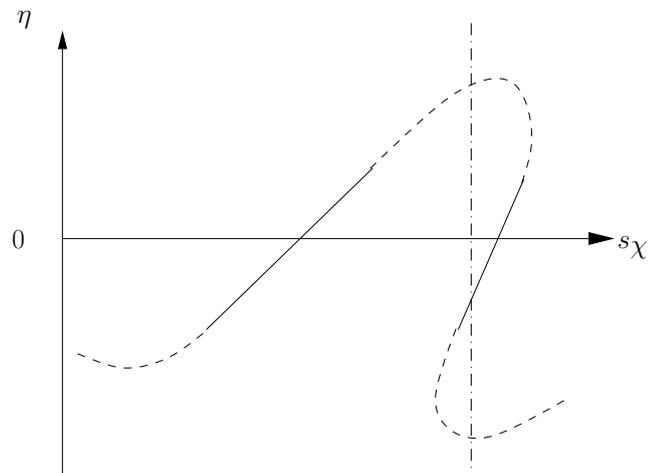


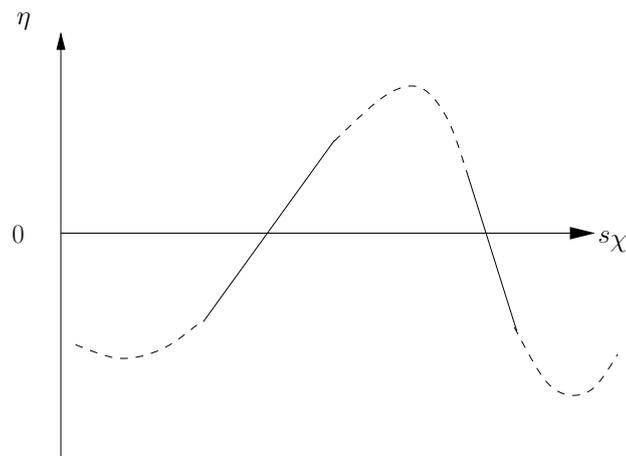
Fig. 7.3: (a) Fluctuations de la charge topologique d'un champ aléatoire gaussien contenue dans un cercle de rayon  $R$ . En ordonnée est représentée la variance  $\langle Q^2 \rangle$  divisée par  $2\pi R/\lambda$ , i.e. la circonférence en unités de longueur d'onde. En traits pleins bleu et noir : dans le cas d'un milieu aléatoire 3D tel que  $kl = \infty$  ou  $kl = 10$ . En traits pointillés : la variance de la phase cumulative – divisée par  $2\pi$ , cf. Eq. (3.22) – obtenue en marchant le long d'une ligne droite de longueur  $2\pi R$ . La courbe en traits pleins rouge est calculée pour une fonction de corrélation du champ  $C(x) = 2J_1(kx)/kx$  [Freund et Wilkinson, 1998]. Dans tous les cas, la longueur caractéristique est la longueur d'onde et non pas le libre parcours moyen.

(b) Fluctuations de la charge topologique en 2D accumulée dans un cercle de rayon  $R$ . En ordonnée est représentée la variance  $\langle Q^2 \rangle$  divisée par la circonférence  $2\pi R/\lambda$  en unités de longueur d'onde. En abscisse le rayon du cercle est normalisé par le libre parcours moyen. La longueur caractéristique en 2D est le libre parcours moyen. La variance de la charge topologique dépend logarithmiquement du produit  $kl$ .

(c) Variance de la charge topologique moyennée en 3D (normalisée par  $kl$ ) et en 2D (normalisée par  $\ln(kl)$ ). Le lissage est effectué sur  $Q(R)$  par une gaussienne  $\exp(-R^2/R_0^2)$ , en fonction de  $R_0$  en unités de libre parcours moyen. Pour  $R_0 > \ell$  il y a convergence vers une constante dépendant de la dimension.



(a)



(b)

Fig. 7.4: Représentation de la partie imaginaire  $\eta$  du champ en fonction de l'abscisse curviligne associée à une ligne  $\chi = 0$  (i.e. où la partie réelle s'annule). Lorsque  $\eta = 0$ , il y a une singularité. (a) Pour avoir deux singularités adjacentes de même signe sur la ligne équi-phase  $\chi = 0$ , il faut admettre que le champ puisse avoir trois valeurs différentes en un même point, ce qui n'est pas admissible pour la physique. (b) Si on prend en compte le fait que le champ admet une unique valeur en un point, le signe de la pente de la partie imaginaire alterne à chaque singularité.



## CHAPITRE 8

# Fluctuations géantes de charge topologique dans un guide d'onde désordonné



### Giant fluctuations of topological charge in a disordered wave guide

Domitille Anache-Ménier et Bart van Tiggelen

Article publié dans *Waves in Random and Complex Media*, 18(2) :293–301, Mai 2008.

***Résumé :** Nous étudions les fluctuations de la charge topologique totale d'une onde scalaire se propageant dans un guide d'onde conducteur creux rempli de centres diffuseurs. Nous étudions la dépendance de l'écrantage avec le libre parcours moyen et avec l'existence de conditions de bord. Près des fréquences de coupure du guide d'onde, l'écrantage est fortement supprimé au voisinage des bords. Les grandes fluctuations de la charge topologique totale qui en résultent sont très sensibles au désordre.*

**Abstract :** We study the fluctuations of the total topological charge of a scalar wave propagating in a hollow conducting wave guide filled with scatterers inside. We investigate the dependence of the screening on the scattering mean free path and on the presence of boundaries. Near the cut-off frequencies of the wave guide, screening is strongly suppressed near the boundaries. The resulting huge fluctuations of the total topological charge are very sensitive to the disorder.

**Keywords :** Phase singularities, Gaussian speckle, Wave guide, Fluctuations of charge.

## 8.1 Introduction

The statistical properties of optical vortices (i.e. phase singularities) in a random speckle pattern are an important general problem of considerable current interest. The network structure built up by these phase vortices has been studied both theoretically [Berry et Dennis, 2000, Freund, 1995], numerically [Freund, 1998] and experimentally with laser fields [Shvartsman et Freund, 1994] and microwaves [Zhang *et al.*, 2007b]. The topological charges associated to the vortices reveal a similar behaviour as electrostatic charges in ionic fluids or plasmas : the clockwise rotating phase vortices are screened by anticlockwise vortices and vice versa. This screening phenomenon appears to be of special interest in random optical fields. An important consequence of screening is that it strongly suppresses topological charge fluctuations on different scales. In this paper we concentrate on the influence of disorder on the screening of topological charge and we focus on a disordered media confined inside a wave guide. Our work reveals huge fluctuations of topological charge (i.e. no screening) close to the cut-off frequencies of the wave guide. Their magnitude is very sensitive to the disorder and might be useful to probe the degree of disorder as quantified by the mean free time of the waves.

The first section describes the state-of-art on screening in unbounded regions and the motivation of our work. In the second section we explain our calculation of the topological charge fluctuation that is governed by the screening, and we present our results. Finally in the third section we present a simulation which provides a physical picture.

The wave guide geometry studied here shows up in many different fields such as acoustics, optics and electronics. Although we have in mind an optical speckle pattern, we believe that our conclusions are of interest in many different studies.

## 8.2 Topological charge and screening

A complex scalar random wave field is given by :  $\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \exp(i\Phi(\vec{r}, t)) = \chi(\vec{r}, t) + i\eta(\vec{r}, t)$ . When both its real part  $\chi$  and its imaginary part  $\eta$  cancel, the amplitude  $A$  also cancels but the phase  $\phi$  is left undefined : it is a phase singularity or vortex. In space, these singularities constitute nodal lines located at the intersection of the two surfaces defined by  $\chi(\vec{r}, t) = 0$  and  $\eta(\vec{r}, t) = 0$ . On a flat surface, the phase singularities are points. The phase singularities show up at the intersection of equiphases. While turning around a singularity the phase changes by  $2\pi p$  with  $p \in \mathbb{Z}$ ;  $q = \pm p$  is called the topological charge associated with the phase singularity and

its sign is determined by the sign of the phase vortex. It is known that for Gaussian statistics of the field, large topological charges have a small probability so that we can restrict to  $q = \pm 1$  [Berry, 1978, Freund, 1995].

The total topological charge present on a surface  $\mathcal{S}$  is defined as the sum of the charges of the singularities located on  $\mathcal{S}$  :  $Q \equiv \sum_{n \in \mathcal{S}} q_n$ . According to Stokes' theorem, the total topological charge  $Q$  is also equal to the accumulated phase along the contour  $\mathcal{C}$  of surface  $\mathcal{S}$  :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} ds \cdot \nabla \Phi. \quad (8.1)$$

In this paper we study the statistics of  $Q$  and their dependence on the degree of disorder in a wave guide.

In a random Gaussian speckle pattern generated by a 3D infinite medium, the density of singularities on a flat surface is  $d = 2\pi/3\lambda^2$  [Berry et Dennis, 2000]. Since near field speckle spots are typically  $\lambda^2$  in size, each speckle spot contains approximately two singularities. As we average over the disorder,  $\langle Q(\mathcal{S}) \rangle = 0$  but the fluctuations of the total charge, quantified by the variance  $\langle Q^2(\mathcal{S}) \rangle$ , may be sensitive to both the surface  $\mathcal{S}$  and the mean free path  $\ell$  of the waves.

Let's consider the fluctuations  $\langle Q^2(R) \rangle$  of the total topological charge contained in a circular surface  $\mathcal{S} = \pi R^2$  of radius  $R$ . One basic feature of  $\langle Q^2(R) \rangle$  is already known. If we would assume all nodal points  $n$  to have random charges  $q_n = \pm 1$ , with equal probability and independent to each other, we would find that  $\langle Q^2(R) \rangle = \langle (\sum_{n=1}^N q_n)^2 \rangle = N = \pi R^2 d$ , i.e. the fluctuations are proportional to the surface. However, this scenario turns out to be invalid, at least for infinite media. Indeed it has been shown that zeros with positive charge tend to be surrounded by zeros with negative charge and vice versa [Shvartzman et Freund, 1994, Freund et Shvartzman, 1994, Wilkinson, 2004]. Topological charges are not independent but tend to be screened, making the fluctuations grow slower than a  $R^2$  quadratic law. This screening is similar to the one of electrical charge in ionic fluids and plasmas.

For a random Gaussian superposition of plane waves in space, Wilkinson and Freund [Freund et Wilkinson, 1998] report a linear, "diffuse" asymptotic form :  $\langle Q^2(R) \rangle \rightarrow R$  for large  $R$ . Berry and Dennis [Berry et Dennis, 2000] use Gaussian-smoothed boundaries and show that such smoothed fluctuations are independent of the number of dislocations  $N$  and hence independent of  $R$  :  $\langle Q^2 \rangle_{smoothed} \rightarrow a + O(N^{-1})$ . These two methods treat the medium beyond the distance  $R$  differently.

In previous work, we have shown that 2D and 3D infinite media [van Tiggelen *et al.*, 2006] reveal a diffuse behaviour as found by Wilkinson and Freund [Freund et Wilkinson, 1998]. The role of the mean free path  $\ell$  was also studied. In 3D,  $\langle Q^2(R) \rangle$  at large  $R$  depends very weakly on the mean free path  $\ell$ , with a finite value  $\langle Q^2(R) \rangle / R$  for  $\ell = \infty$ . For 2D random media  $\langle Q^2(R) \rangle$  was seen to depend logarithmically on  $k\ell$ . In this paper we now consider a cylindrical wave guide which is a configuration used in several microwaves experiments by Sebbah *et al.*

[Zhang *et al.*, 2007b, Genack *et al.*, 1999, Sebbah *et al.*, 1997]. One additional reason for us to consider a wave guide is to have a genuine boundary. As a result the field is confined inside the wave guide so that we are sure not to forget any contribution to the screening process. Finally, we will be able to study the influence of boundaries on the screening of topological charge. We study the dependence of  $\langle Q^2 \rangle$  with radius  $R$  and with mean free path  $\ell$ .

### 8.3 Direct calculations

We consider a complex random scalar wave field described by circular Gaussian statistics, known to be a good approximation for multiply scattered waves [Goodman, 1985, Genack *et al.*, 2005]. The medium is a hollow conductive cylindrical wave guide of radius  $R$  and with infinite length, containing disorder. The problem is formulated in cylindrical coordinates  $(\rho, \theta, z)$ . We impose that the field derivative cancels at the boundaries. In the following, we first present our calculation method of the topological charge variance  $\langle Q^2 \rangle$ .

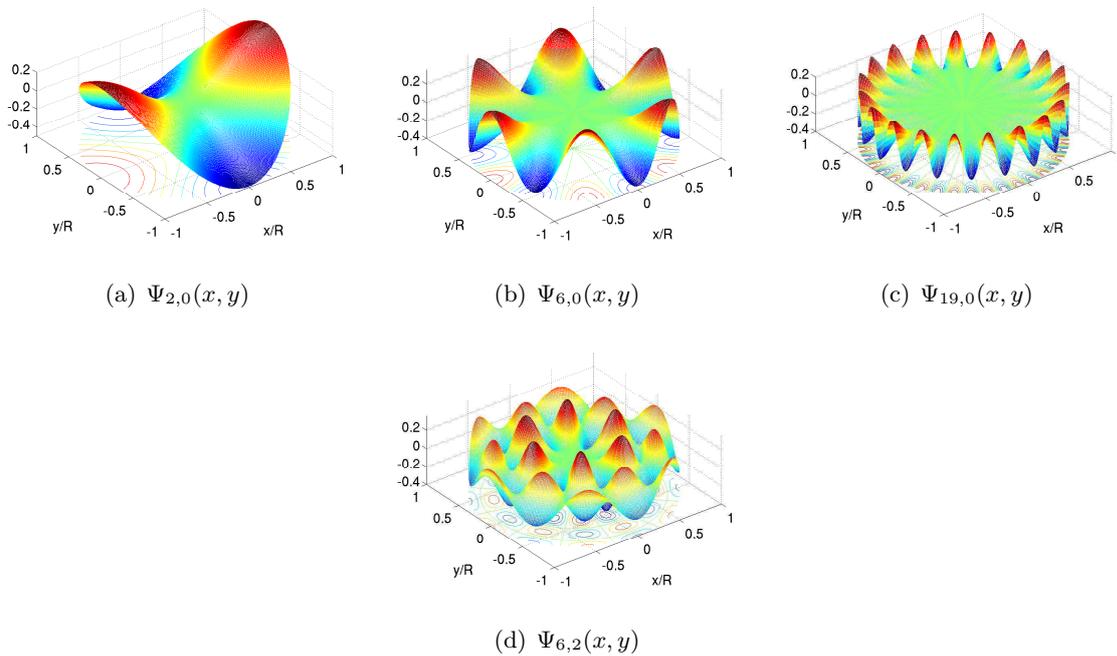


Fig. 8.1: *Examples of eigenmodes  $\Psi_{mn}$  in a cylindrical wave guide. The quantum number  $m$  characterises the dependence on the angular coordinate, and the quantum number  $n$  characterises the dependence on the radial coordinate :  $\Psi_{mn}$  has  $m$  radial node lines and  $n$  circular node lines.*

The modes  $\Psi_{mnk}$  (Fig. 8.1) of a homogeneous empty conducting cylindrical wave guide of radius  $R$  and infinite length are given by :

$$\Psi_{mnk}(\rho, \theta, z) \propto J_m\left(\frac{\alpha_{mn}\rho}{R}\right) \exp(im\theta) \exp(ikz) \quad \text{with} \quad J'_m(\alpha_{mn}) = 0 \quad (8.2)$$

where  $k \in \mathbb{R}$  is the wave vector,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $\alpha_{mn}$  is the  $n^{\text{th}}$  root of the first derivative of the  $m^{\text{th}}$  Bessel function. The dispersion relation for the mode  $\Psi_{mnk}$  reads  $\omega^2 = k^2 c^2 + \alpha_{mn}^2 c^2 / R^2$  and has a cut-off frequency  $\omega_{mn} = \alpha_{mn} c / R$ . In the presence of disorder the field in the wave guide can always be written as a superposition  $\Psi$  of the modes  $\Psi_{mnk}$  of the empty wave guide, according to  $\Psi = \sum_{mnk} a_{mn} \Psi_{mnk}$ .

Due to scattering the modes  $\Psi_{mnk}$  will achieve a finite mean free time  $\tau_{mn}(k)$  and the averaged Green function for the wave guide can be written as [Economou, 1990] :

$$G^\pm(\rho, \theta, z; \rho', \theta', z'; \omega) = \sum_{m,n} \int dk \frac{\Psi_{mnk}(\rho, \theta, z) \Psi_{mnk}^*(\rho', \theta', z')}{\omega_{mn}(k)^2 - \omega^2 \pm i\epsilon + i\omega/\tau_{mn}} \quad (8.3)$$

where  $\omega_{mn}(k)$  is the dispersion relation of  $\Psi_{mnk}$  and  $\tau_{mnk} = \ell_{mnk}/c$  is the life time of the mode  $\Psi_{mnk}$ . For simplicity we shall assume that all modes have the same life time  $\tau = \ell/c$  although one can easily consider a more realistic model such that  $\tau$  is different for all modes.

After sufficiently many scattering events ( $t \gg \tau_{mn}$ ), the wave field enters the equipartition regime and the modal amplitudes  $a_{mn}$  are uncorrelated random gaussian variables. In this regime, the averaged field correlation function  $C_\Psi$  is known to be proportional to the imaginary part of the Green function [Lobkis et Weaver, 2001, Weaver et Lobkis, 2004, Larose *et al.*, 2005]. Hence, we can calculate the correlation function between two points separated in angle by  $\Delta\theta = \theta' - \theta$  and located at same  $\rho$  and  $z$  from :

$$\begin{aligned} C_\Psi(\rho, \Delta\theta, \omega) &\equiv \langle \Psi(\rho, \theta, z) \Psi(\rho, \theta', z) \rangle \propto -\text{Im} G(\rho, \theta, z; \rho, \theta', z; \omega) \\ &\propto \sum_{m,n} \frac{1}{R} \cos(m\Delta\theta) \frac{2\alpha_{mn}^2}{\alpha_{mn}^2 - m^2} \left| \frac{J_m(\frac{\alpha_{mn}\rho}{R})}{J_m(\alpha_{mn})} \right|^2 A_{mn}(\omega) \end{aligned} \quad (8.4)$$

where the coefficients  $A_{mn}(\omega)$  are given by :

$$A_{mn}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\omega R/c)^2 - \alpha_{mn}^2 + \sqrt{((\omega R/c)^2 - \alpha_{mn}^2)^2 + (\omega R^2/\tau_{mn})^2}}{(\omega R/c)^2 - \alpha_{mn}^2 + (\omega R^2/\tau_{mn})^2}} & \text{if } \frac{\omega R}{c} > \alpha_{mn} \\ \frac{\omega R^2/\tau_{mn}}{\sqrt{(\alpha_{mn}^2 - (\omega R/c)^2)^2 + (\omega R^2/\tau_{mn})^2} \sqrt{\alpha_{mn}^2 - (\omega R/c)^2 + \sqrt{(\alpha_{mn}^2 - (\omega R/c)^2)^2 + (\omega R^2/\tau_{mn})^2}}} & \text{if } \frac{\omega R}{c} < \alpha_{mn} \end{cases} \quad (8.5)$$

The coefficient  $A_{mn}(\omega)$  is proportional to the density of states of the mode  $\Psi_{mn}$ . Note that for a finite mean free path  $\ell$ , the frequencies below the cut-off  $\omega_{mn}$  contribute as well. For sufficiently large mean free path (in Fig.8.3 we will discuss how large  $\ell$  must be), Eq. 8.5 simplifies to :

$$A_{mn}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega R}{c})^2 - \alpha_{mn}^2}} & \text{if } \frac{\omega R}{c} > \alpha_{mn} \\ 0 & \text{if } \frac{\omega R}{c} < \alpha_{mn} \end{cases} \quad (8.6)$$

For circular Gaussian statistics, the phase derivative correlation function  $C_{\Phi'}(\Delta\theta)$  can be calculated from the field correlation function using the relation [van Tiggelen *et al.*, 2006] :

$$C_{\Phi'}(\rho, \Delta\theta) = \left\langle \frac{d\Phi}{d\theta}(\rho, \theta) \frac{d\Phi}{d\theta'}(\rho, \theta') \right\rangle = \frac{1}{2} (\log C_{\Psi}(\rho, \Delta\theta))'' \log(1 - C_{\Psi}^2(\rho, \Delta\theta)) \quad (8.7)$$

The variance  $\langle Q^2(\rho) \rangle$  of the total topological charge enclosed by a surface  $s(\rho) = \pi\rho^2$  ( $\rho \in [0 : R]$ ) with a circular contour  $\mathcal{C}(\rho)$  centered inside the wave guide is calculated from Stokes' theorem (Eq. 8.1) :

$$\begin{aligned} \langle Q^2(\rho) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}(\rho)} \oint_{\mathcal{C}(\rho)} ds \cdot \langle \nabla\Phi(\mathbf{s}) \nabla\Phi(\mathbf{s}') \rangle \cdot ds' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}(\rho)} \oint_{\mathcal{C}(\rho)} \rho^2 d\theta d\theta' \left\langle \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\Phi(\rho, \theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\Phi(\rho, \theta')}{\partial\theta'} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Delta\theta C_{\Phi'}(\rho, \Delta\theta). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Eqs. 8.8, 8.7 and 8.4 - 8.5 - 8.6 are evaluated numerically.

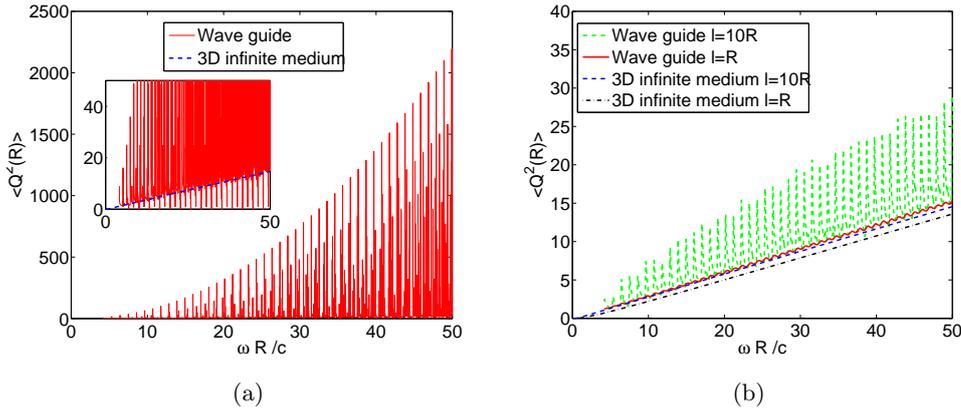


Fig. 8.2: (color online) Evolution of the topological charge variance  $\langle Q^2(R) \rangle$  enclosed by a surface  $\mathcal{S} = \pi R^2$  against the product  $\omega R/c$ , in red for a entire cross-section of the cylindrical conducting wave guide, in green dashed line for a 3D infinite medium. At the cut-off frequencies of the wave guide, sharp resonances arise. Subfigure (a) : in the limit of large  $\ell$ , calculated from Eqs. 8.4, 8.6 8.7 and 8.8. Subfigure (b) shows the damping of the peaks with smaller  $\ell$  calculated from Eqs. 8.4, 8.5 8.7 and 8.8. Both subfigure (b) and the zoomed inset in subfigure (a) show that the global behaviour is close to the one predicted for a 3D infinite medium.

The results presented in Fig. 8.2 show that  $\langle Q^2(\rho = R) \rangle$  for the entire cross-section of the wave guide (red curve) tends to rise linearly with  $\omega R/c$ . This global behaviour is consistent with the calculation for a 3D infinite medium (green curve), with a diffuse behaviour revealing charge screening. On the other hand, near the cut-off frequencies,  $\langle Q^2(R) \rangle$  exhibits sharp peaks reaching a maximal value of  $m^2$  for  $\ell$  sufficiently large (i.e. when the limit of Eq. 8.6 is valid, figure 2a). For large  $m$  this makes  $\langle Q^2(R) \rangle$  much bigger than the prediction for a 3D infinite medium. We can explain the asymptotic peak value  $m^2$  of  $\langle Q^2(R) \rangle$  with a simple argument.

As we can see in Eq. 8.6, when  $\omega R/c \gtrsim \alpha_{mn}$  the averaged Green function is dominated by the two eigenmodes  $\Psi_{\pm mn}$  so that the field correlation function becomes  $C(\theta, \rho) \simeq \cos(m\theta)$  which exhibits long range order. Then a short analytical calculation using equations 8.7 and 8.8 shows that  $\langle Q^2(R) \rangle \simeq m^2$ . Note that we study the limit  $\ell \rightarrow \infty$  only with a pedagogical purpose; a truly homogeneous wave guide would not exhibit Gaussian statistics.

For a finite mean free path  $\ell$  (Fig. 8.2b) the resonant peaks of  $\langle Q^2(R) \rangle$  are strongly attenuated though still visible until  $\ell \gtrsim R$ . The disorder introduces a coupling between the modes and the relative importance of the eigenmodes diminishes so that the other modes start to contribute to the field correlation function  $C_{\Psi}$ . Fig. 8.3 shows the slow dependence of the peak value  $\langle Q_{mn}^2(R) \rangle$  of the topological resonance on the mean free path  $\ell$ . Upon varying 10 orders of magnitude over the mean free path the fluctuations vary only by 2 orders of magnitude. The maximum value  $\langle Q_{mn}^2(R) \rangle = m^2$  is reached only for very large mean free path. For  $\ell \simeq 100R$  the peak value is already suppressed by a factor of 10.

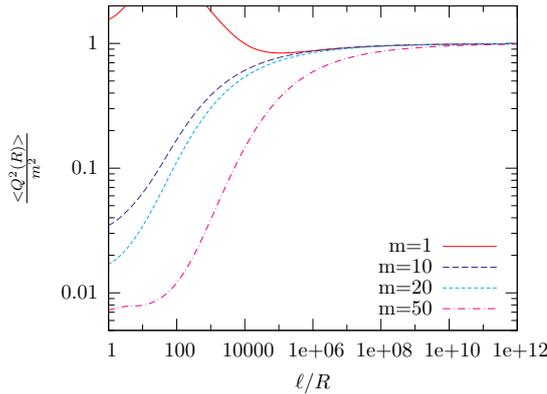


Fig. 8.3: (color online) Logarithmic plot of  $\langle Q_{mn}^2(R) \rangle / m^2$  at different dominant cut-off frequencies (for  $n = 0$  and for different  $m$ ) as a function of the mean free path normalised by the wave guide radius. For  $\ell \lesssim R$ ,  $\langle Q_{mn}^2 \rangle$  approaches the value predicted for a 3D infinite medium. Only for  $\ell/R$  as large as  $10^9$ , the maximum value  $\langle Q_{mn}^2 \rangle \sim m^2$  is reached.

The peaks of topological fluctuations are very sharp. Fig. 8.4 shows the quality factor  $\omega_{mn}/\Delta\omega$  as a function of the mean free path  $\ell$ .

In Fig. 8.5, we study how  $\langle Q_{mn}^2(\rho) \rangle$  at the cut-off frequency  $\omega_{mn}$  varies with the surface  $s = \pi\rho^2$  (with  $\rho \in [0 : R]$ ) centered inside the wave guide. This calculation reveals that the large peak value for  $\langle Q^2(R) \rangle$  is essentially an effect localized near the edge. The charges are screened in the center of the wave guide but not near the edges. Note that as  $m$  increases and  $n$  decreases, the unscreened charges tend to localise closer to the edges.

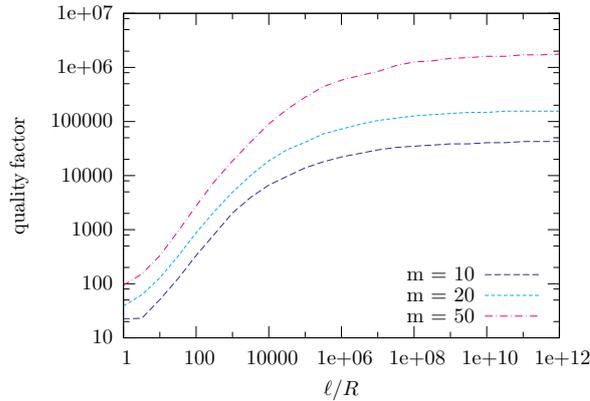


Fig. 8.4: (color online) Logarithmic plot of the quality factor of different dominant resonances of topological fluctuations (for  $n = 0$  and for different  $m$ ) as a function of the mean free path normalised by the wave guide radius.

## 8.4 Simulation

The direct calculation of topological charge fluctuations reveals a linear dependence of the charge variance on the surface radius caused by charge screening, and special frequencies for which screening seems absent. For the dominant peaks ( $n = 0$ ),  $\alpha_{m0} \sim m$  and hence  $\langle Q^2(R) \rangle = m^2 \sim \alpha_{mn}^2 \sim (\omega_m R/c)^2 \propto R^2$  scales with the surface as if all the charges were independent. It is also seen in Fig. 8.5 that these fluctuations mainly come from the edges of the wave guide and that the peak value of the resonances depends on the number of radial node lines  $m$  and not on the number of angular node lines  $n$ . We get deeper insight into this phenomenon using a computer simulation that generates a random circular Gaussian complex wave field in a transverse cross-section of the wave guide. To this end we write :  $\Psi(\rho, \theta) = \sum_{mn} a_{mn} \Psi_{mn}(\rho, \theta)$ . Here  $\Psi_{mn}(\rho, \theta)$  are the normalised eigenmodes and  $a_{mn}$  are randomly generated coefficients obeying a Gaussian circular statistics with a variance fixed by  $\langle a_{mn}^2 \rangle = A_{mn}(\omega)$  to be consistent with Eq. 8.4.

Fig. 8.6a shows the expected screening away from the cut-off frequencies. Fig. 8.6b shows that, close to a cut-off frequency, charges tend to be screened in the center but tend to exhibit the same sign near the edges, consistently with the result obtained in Fig.8.5.

The twin principle [Freund et Shvartzsman, 1994] imposes that if the field is continuous each topological charge is necessarily connected by equiphase lines to singularities of opposite sign. This generates the usual charge screening observed in the center, similar to infinite media. However in the presence of boundaries the twin principle no longer holds and isolated singularities may be created or destroyed at a boundary. This perturbs the balance between positive and negative charges. Consequently, a huge topological charge can appear in a bounded area without an important change in the number of singularities. Away from the cut-off frequencies, these isolated singularities are independent of each other and their number is proportional to

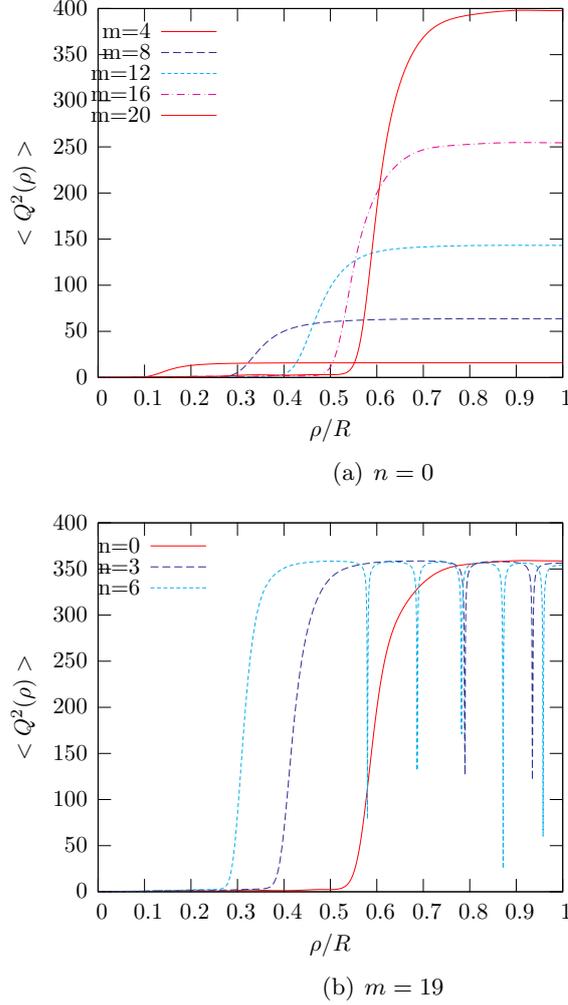


Fig. 8.5: (color online) Evolution of the variance of the topological charge  $\langle Q_{mn}^2(\rho) \rangle$  enclosed by a disk of radius  $\rho$  centered inside the wave guide at different cut-off frequencies  $\omega_{mn}$  and for  $\ell$  sufficiently large, (a) at fixed  $n = 0$  and for different  $m$ , (b) at fixed  $m = 19$  and for different  $n$ . We can see that there is a critical radius  $\rho_c$ . For  $\rho < \rho_c$ , charges are screened and for  $\rho > \rho_c$  charges of the same sign accumulate to give huge  $\langle Q_{mn}^2(\rho) \rangle$ . The critical radius  $\rho_c$  tends to increase with  $m$  and decrease with  $n$ .

the perimeter so that we find  $\langle Q^2(R) \rangle = N_{Boundary} \propto R$ . However at the cut-off frequencies  $\omega = \alpha_{mn}c/R$  the speckle pattern is no longer a random superposition of all the modes but is rather dominated by the two corresponding eigenmodes  $\Psi_{\pm m, n}$ . This is explained by the fact that, in the equipartitioned regime, the mode  $\Psi_{mn}$  achieves a weight factor that is proportional to its density of states  $A_{mn}(\omega)$ , which becomes singular near its cut-off frequency due to the strong dispersion. Recalling that the eigenmodes  $\Psi_{\pm m, n}$  exhibit  $m$  radial nodal lines we understand that these modes exhibit  $m$  isolated singularities of the same sign and that the field itself tends to exhibit  $m$  isolated singularities. The larger  $m$ , the more equiphase lines end up

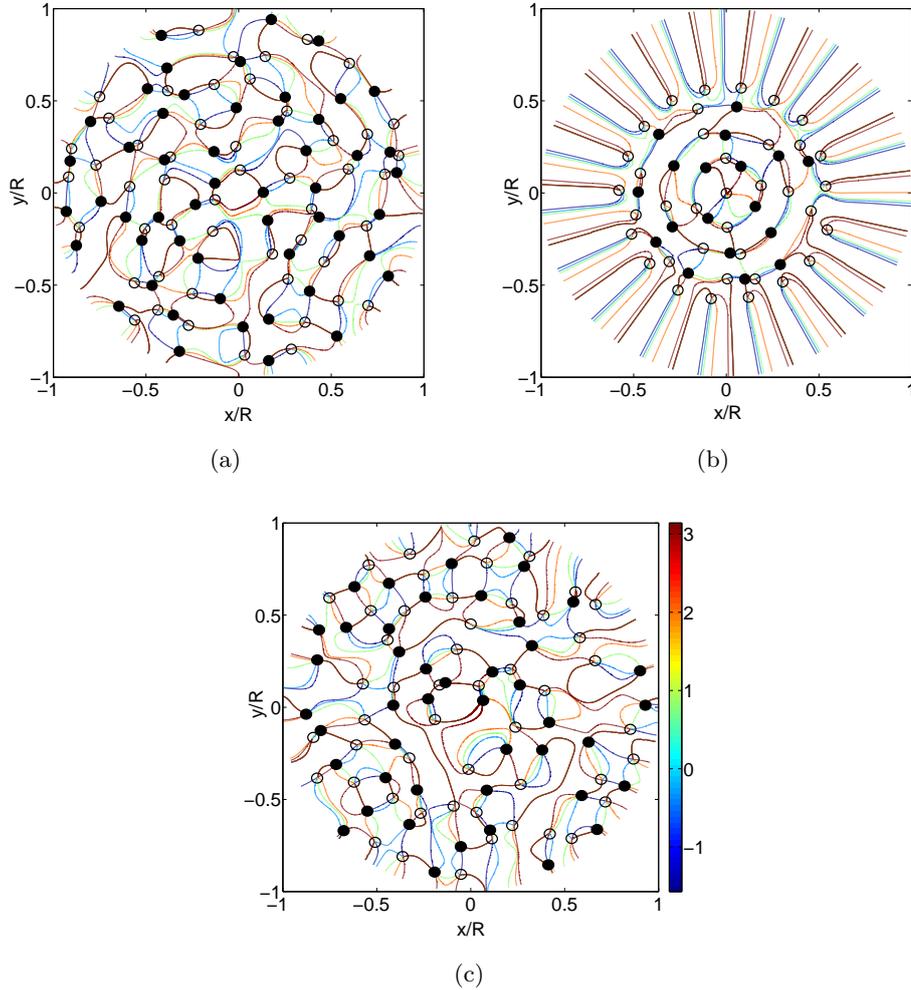


Fig. 8.6: (color online) Representation of one realisation of the random field in the wave guide, for different  $\ell$  and for different  $\omega R/c$ . ( $\bullet$ ) denotes a phase singularity with negative charge, ( $\circ$ ) denotes a phase singularity with positive charge. The colored lines denote equiphases. (a) Non cut-off frequency  $\omega R/c = 20.72$  :  $Q = -2$  ; (b) Cut-off frequency  $\omega R/c \gtrsim \alpha_{19,0} = 21.18227$  with  $\ell \rightarrow \infty$  :  $Q = 19$  ; and (c) Same frequency  $\omega R/c \gtrsim \alpha_{19,0} = 21.18227$  but now with a mean free path  $\ell = 10R$  :  $Q = 5$

at the boundaries and the more singularities become isolated. This increases the probability to have many singularities of the same sign, which thus increases the variance  $\langle Q^2(R) \rangle$ . As we can see in Fig. 8.6b these boundary singularities are not independent (which would give  $\langle Q^2(R) \rangle \rightarrow m$ ) but tend to be of the same sign so that  $\langle Q^2(R) \rangle \rightarrow m^2$  for a large mean free path. The huge fluctuations at special frequencies are thus not due to independent charges in the total surface  $\mathcal{S}$  but to collective effects near the edges.

## 8.5 Conclusion

A superposition of waves scattered by a disordered medium gives rise to a speckle pattern which presents a complicated network of phase vortices. We have studied the role of mean free path and boundaries on the screening between the topological charges of the phase vortices. The same linear diffuse law that relates fluctuations of topological charge and enclosed surface, as already found for  $3D$  infinite media, is predicted. However, at the cut-off frequencies of the wave guide, giant fluctuations of the topological charge occur. These fluctuations are very sensitive to the disorder and probe the mean free path even when it is much larger than the wave guide size.



# Conclusion

Ce travail de thèse s'inscrit pleinement dans l'évolution des connaissances de la physique mésoscopique des ondes. Dans le domaine mésoscopique, la phase des ondes joue un rôle très important puisqu'elle est à l'origine des effets d'interférences entre les chemins de diffusion. De plus dans le cas des ondes acoustiques et sismiques, on peut accéder directement à la mesure de la phase parce que les longueurs d'onde – du millimètre à la centaine de kilomètres – sont suffisamment grandes ce qui n'est pas le cas en optique ou en mécanique quantique. Ainsi nous avons étudié la phase des ondes qui se propagent dans les milieux désordonnés en accordant un intérêt particulier aux ondes acoustiques et sismiques.

Nous avons étendu la théorie sur la phase aux distributions et aux corrélations de ses variations spatiales et temporelles en nous appuyant sur l'hypothèse de champ gaussien. Cette hypothèse est très couramment utilisée en physique mais nous avons accordé une importance particulière à sa justification à la fois théorique et expérimentale. Ensuite, en se basant sur ces calculs théoriques préliminaires nous avons mené plusieurs études expérimentales en ultrasons et en sismologie dans le but de répondre à la problématique suivante : Quelles informations peut-on tirer de la phase ? En particulier nous nous sommes concentrés sur les deux questions suivantes : Peut-on sonder le mouvement des diffuseurs ? Peut-on mesurer le degré d'hétérogénéité du milieu de propagation ?

En collaboration avec l'équipe du professeur J. Page (Canada), nous avons mené une première étude expérimentale avec des ultrasons à 2,25 MHz d'une suspension de billes millimétriques avec une fraction volumique de 40% dans un mélange d'eau et de glycérol. Nous avons mesuré les distributions et les corrélations des variations temporelles de la phase. La confrontation de ces mesures avec la théorie démontre un excellent accord avec l'hypothèse de champ gaussien et démontre que les statistiques de la phase permettent de sonder la dynamique des diffuseurs aux échelles de temps allant de la milliseconde à la seconde. La précision obtenue est 10% meilleure que celle de la technique plus classique de la DAWS basée sur les corrélations du champ.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes intéressés à l'application possible aux ondes sismiques à haute fréquence ( $f \sim 10 Hz$ ). Les phases des rais sismiques simples sont déjà très étudiées et ont permis de sonder l'intérieur de la Terre avec une résolution de l'ordre d'une centaine de kilomètres. Des travaux prennent également en compte les effets de diffusion simple pour améliorer cette résolution. En revanche, la phase des codas sismiques, c'est à dire

des ondes sismiques dans le régime de diffusion multiple, est peu exploitée car on se sait pas comment elle pourrait être utile. C'est la raison pour laquelle nous l'avons étudiée dans trois travaux successifs. Dans un premier temps nous avons étendu les calculs théoriques précédents aux variations spatiales de la phase. Ensuite, afin de voir comment exploiter la phase et valider notre travail théorique préliminaire, nous avons mis au point une expérience de laboratoire en échelle réduite analogue à la croûte terrestre : nous avons étudié la propagation d'ondes bidimensionnelles de flexion à  $3\text{ kHz}$  dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> rendue diffusante par des cavités perforées aléatoirement. L'avantage d'une telle expérience est de pouvoir contrôler à la fois les sources, le désordre et la disposition des récepteurs. Les résultats encourageants obtenus et l'expérience acquise nous ont permis dans un troisième temps d'envisager une étude de séismes régionaux en Californie. L'ensemble de ces travaux théoriques et expérimentaux démontre que les distributions des trois premières dérivées spatiales de la phase sont reliées aux décorrélations et à la propagation du champ à courte distance – inférieure ou de l'ordre de la longueur d'onde. De plus, nous avons mis en évidence que la fonction de corrélation de la dérivée spatiale de la phase de la coda permet de répondre à une problématique importante de la sismologie : comment mesurer l'hétérogénéité de la Terre et notamment de la croûte ? Ainsi, nous proposons une technique de mesure du libre parcours moyen des ondes sismiques dans la croûte qui devrait intéresser les simologues. Dans les deux cas – pour les ondes de flexion dans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup> et pour les ondes de Rayleigh en Californie – la précision de notre mesure est suffisante pour prouver la faisabilité de cette technique mais pas pour obtenir une mesure quantitative.

Pour chacune des trois études expérimentales menées, nous avons confirmé la nature gaussienne du champ dans le régime de diffusion multiple, et notamment dans la coda sismique, jusqu'à l'ordre 4 en statistique. Pour cela non seulement nous avons vérifié le caractère gaussien du champ et la distribution exponentielle décroissante de l'intensité sur un minimum de 4 ordres de grandeur ; mais également nous avons vérifié la décroissance asymptotique en loi de puissance des distributions des trois premières dérivées de la phase et leur excellent accord avec la théorie de champ gaussien. Nous proposons cette dernière technique comme un nouveau test fiable et approfondi du caractère gaussien.

La troisième partie de la thèse est une étude théorique des vortex qui entourent les nœuds du champ analytique dans les figures de tavelures. Nous avons étudié les effets d'écrantage entre les vortex de phase quantifiés par les fluctuations de la charge topologique pour des milieux  $2\mathcal{D}$ ,  $3\mathcal{D}$  et un guide d'onde cylindrique. Plus particulièrement, nous avons établi une relation fondamentale entre les fluctuations de charge topologique et le libre parcours moyen. Ainsi, nous proposons une seconde technique pour mesurer l'hétérogénéité du milieu de propagation. Par ailleurs, en nous basant sur l'exemple du guide d'onde, nous avons mis en évidence des effets de bords très importants sur l'écrantage entre les vortex de phase.



De façon plus générale, les travaux menés au cours de cette thèse ont permis de démontrer l'intérêt de la phase. Dès le chapitre 3, nous avons motivé notre travail par de nombreux arguments en faveur d'une étude basée sur la phase dans les domaines allant de l'acoustique des ultrasons à la sismologie. Au terme de cette étude, il est intéressant de faire le bilan des arguments à la fois positifs et négatifs exposés ci-après.

Nous avons introduit la phase comme un objet particulièrement pertinent à étudier en physique mésoscopique puisqu'il dirige à la fois le caractère ondulatoire et propagatif des ondes et qu'il est responsable des effets d'interférences. Les études expérimentales et théoriques menées confirment que c'est effectivement un objet intéressant à exploiter dans des domaines variés de la diffusion multiple allant des ultrasons en physique des colloïdes aux ondes sismiques en passant par la propagation guidée. En particulier, nous mettons en évidence que la phase contient de l'information sur la dynamique et l'efficacité des diffuseurs.

Comme argument justifiant *a priori* l'utilisation de la phase, nous avons évoqué que les techniques qui utilisent à présent la phase, et notamment les techniques d'interférométrie, sont connues pour leur précision. En première partie, nous avons démontré que la phase permet effectivement d'améliorer la précision des mesures de la DAWS.

De plus, la phase permet d'accéder potentiellement à des informations nouvelles. L'utilisation de l'argument du champ plutôt que du champ "en entier" consiste en quelque sorte à réaliser un tri entre l'information utile et l'information inutile voire "gênante". C'est ce que nous avons mis en évidence dans le cas particulier de la mesure du libre parcours moyen des ondes sismiques : nous arrivons à isoler les effets de diffusion des effets d'absorption en utilisant la fonction de corrélation des variations de phase. Nous rappelons que ceci est un enjeu majeur en sismologie.

Enfin, nous avons confirmé la plus grande facilité du traitement de signal, essentiellement en sismologie. Grâce à la phase, on s'affranchit des problèmes de calibration par rapport à la magnitude du séisme, à la sensibilité des capteurs, aux problèmes de compensation de la décroissance énergétique dans la coda et de fenêtrage. L'opération de calcul de la phase qui s'ajoute en échange est une opération de routine fournie dans toutes les principales bibliothèques de traitement du signal et qui est donc relativement simple à mettre en œuvre. En revanche, la correction de phase nécessaire pour de nombreux sismomètres reste à effectuer. De plus, nous avons mis en évidence quelques difficultés liées à l'effet conjugué de la nature géométrique de la phase et de l'échantillonnage spatial. Toutefois, notre travail sur les enregistrements sismiques à l'observatoire de Pinyon Flat révèle que ce n'est pas un facteur limitant à la technique dans les conditions suivantes : d'une part si on dispose d'un fort recouvrement en récepteurs, et d'autre part si on est attentif au caractère parfois contre-intuitif d'un objet défini sur un intervalle et non pas sur l'ensemble des réels.



Nous nous sommes concentrés sur les applications aux ondes acoustiques et élastiques, mais il faut rappeler que les développements théoriques présentés dans cette thèse sont généraux à la physique des ondes. Ils sont donc applicables à toutes les situations physiques similaires présentant de la diffusion multiple et des diffuseurs fixes ou en mouvement, des ondes de surface ou guidées.

Toutefois il faut rappeler que nous avons fait l'hypothèse d'ondes scalaires. Par conséquent, une généralisation aux champs vectoriels est nécessaire, notamment pour les ondes élastiques sismiques. Il y a deux possibilités. La première est de traiter chaque composante indépendamment comme un champ scalaire. C'est ce que nous avons fait dans la deuxième partie de cette thèse. C'est également de cette façon que nous proposons de relier la charge topologique mesurée dans un État tel que la Californie – équipée d'un réseau dense de stations sismiques – au libre parcours moyen dans la croûte terrestre de cet état. La seconde possibilité est de définir la phase comme l'angle solide donné par la direction de polarisation. Dans ce cas, une singularité de phase est un point où les 3 composantes du champ s'annulent simultanément. On peut alors définir le degré topologique – par équivalence à la charge topologique – comme l'intégrale de la phase sur une petite sphère au voisinage de la singularité. Concernant l'application à la Terre, la seule surface fermée sur laquelle il semble possible de mesurer un degré topologique total est la surface de la Terre elle-même. Dans ce cas différents problèmes se posent : nous avons une seule réalisation du désordre, certaines parties du globe ne sont pas équipées d'un réseau dense de stations sismiques – notamment les océans – et enfin, dans un milieu fermé tel que la Terre il est probable qu'il y ait des effets de bords importants.

Une autre question ouverte concerne les hypothèses faites sur la statistique et les corrélations du champ. En effet, dans le dispositif expérimental du chapitre 3, une légère dérive temporelle de la phase déroulée a été observée par Kurt Hildebrand. C'est à dire que la valeur de la dérivée temporelle de la phase est non nulle en moyenne ce qui n'est pas compatible avec la symétrie paire de la distribution  $P(d\Phi/d\tau)$  prédite par notre théorie. Il est probable que cet effet puisse être pris en compte par une fonction de corrélation du champ complexe. Il faudrait étudier comment est modifiée la théorie dans ce cas.

# Bibliographie

- [Abrahams *et al.*, 1979] ABRAHAMS, E., ANDERSON, P. W., LICCIARDELLO, D. C. et RAMAKRISHNAN, T. V. (1979). Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 42:673. 63
- [Aki, 1957] AKI, K. (1957). Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 35:415–456. 65, 113
- [Aki, 1969] AKI, K. (1969). Analysis of seismic coda of local earthquake as scattered waves. *Journal of Geophysical Research*, 74(2):615–631. 60, 108
- [Aki, 1973] AKI, K. (1973). Scattering of P Waves under the Montana Lasa. *J. Geophys. Res.*, 78(8):1334–1346. 59, 109
- [Aki et Chouet, 1975] AKI, K. et CHOUET, B. (1975). Origin of coda waves : sources attenuation and scattering effects. *Journal of Geophysical Research*, 80:3322–3342. 61, 108
- [Aki et Richards, 2002] AKI, K. et RICHARDS, P. G. (2002). *Quantitative Seismology*. 2nde édition. 60, 108
- [Akkermans et Montambaux, 2004] AKKERMANS, E. et MONTAMBAUX, G. (2004). *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. EDP Sciences - CNRS éditions. 21
- [Anache, 2005] ANACHE, D. (2005). Mésoscopie des ondes sismiques : influence de la température sur la coda. Mémoire de Master, École Normale Supérieure de Lyon. 20, 21, 23
- [Anache-Ménier *et al.*, 2008] ANACHE-MÉNIER, D., MARGERIN, L. et van TIGGELEN, B. A. (2008). Phase statistics of seismic coda waves. *Article soumis prochainement à Geophysical Review Letters*. 104
- [Anache-Ménier et van Tiggelen, 2008] ANACHE-MÉNIER, D. et van TIGGELEN, B. A. (2008). Giant fluctuations of topological charge in a disordered wave guide. *Waves in Random and Complex Media*, 18(2):293–301. 129
- [Anderson, 1958] ANDERSON, P. W. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492. 5
- [Appel, 2002] APPEL, W. (2002). *Mathématiques pour la physique*. H&K éditions. 30
- [Arecchi *et al.*, 1991] ARECCHI, F. T., GIACOMELLI, G., RAMAZZA, P. L. et RESIDORI, S. (1991). Vortices and defects statistics in two dimensional optical chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3749. 121
- [Berkovits et Feng, 1994] BERKOVITS, R. et FENG, S. (1994). Correlations in coherent multiple scattering. *Phys. Rep.*, 238:135. For a review. 45

- [Bernard, 2003] BERNARD, P. (2003). *Qu'est-ce qui fait trembler la Terre ?* EDP Sciences - CNRS éditions. 55
- [Berry, 1978] BERRY, M. V. (1978). Disruption of wavefronts : statistics of dislocations in incoherent gaussian random waves. *J. Phys. A, Math Gen.*, 11(1):27. 125, 135
- [Berry et Dennis, 2000] BERRY, M. V. et DENNIS, M. R. (2000). Phase singularities in isotropic random waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456:2059–2079. 39, 45, 125, 126, 129, 134, 135
- [Berry et Robnik, 1986] BERRY, M. V. et ROBNIK, M. (1986). Quantum states without time-reversal symmetry : wavefront dislocations in a non-integrable Aharonov-Bohm billiard. *J. Phys. A*, 19:1365. 125
- [Bethuel et al., 1994] BETHUEL, F., BREZIS, H. et HELEIN, F. (1994). *Ginzburg-Landau Vortices*. Springer. 121
- [Bhalerao et al., 1997] BHALERAO, A., WESTIN, C. F. et KIKINIS, R. (1997). Unwrapping phase in 3D MR phase contrast angiograms. 1205. 101
- [Boccaro et Oraevsky, 2001] BOCCARA, A. C. et ORAEVSKY, A. A. (2001). *Hybrid and Novel Imaging and New Optical Instrumentation for Biomedical Applications*, volume 4434. Proc. SPIE. 1
- [Born et Wolf, 1964] BORN, M. et WOLF, E. (1964). *Principles of optics*. New York : Macmillan. 87
- [Brenguier et al., 2008] BRENGUIER, F., SHAPIRO, N. M., CAMPILLO, M., FERRAZZINI, V., DUPUTEL, Z., COUTANT, O. et NERCESSIAN, A. (2008). Towards forecasting volcanic eruptions using seismic noise. *Nature Geosciences*, ngeo104. 20, 63
- [Brillet, 2003] BRILLET, A. (2003). Virgo vera les ondes gravitationnelles. *La recherche*, 366. 32
- [Brillouin, 1960] BRILLOUIN, L. (1960). *Wave Propagation and Group Velocity*. New York, Academic Press. 2
- [Campillo, 2006] CAMPILLO, M. (2006). Phase and Correlation in ‘Random’ Seismic Fields and the Reconstruction of the Green Function. *Pure and Applied Geophysics*, 163:475–502. 108
- [Campillo et Lemarchand, 2002] CAMPILLO, M. et LEMARCHAND, F. (2002). Les clés de lecture du désordre terrestre. *La Recherche, Hors série n° 9*. 63
- [Campillo et Paul, 2003] CAMPILLO, M. et PAUL, A. (2003). Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299:547–549. 62
- [Chabanov et Genack, 2001] CHABANOV, A. A. et GENACK, A. Z. (2001). Photon localization in resonant media. *Phys. Rev. Lett.*, 87:233903. 45, 46
- [Chabanov et al., 2004] CHABANOV, A. A., TRÉGOURÈS, N. P., van TIGGELEN, B. A. et GENACK, A. Z. (2004). Mesoscopic correlation with polarization rotation of electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 92:173901. 45
- [Cowan et al., 2007] COWAN, M., ANACHE-MÉNIER, D., HILDEBRAND, W., PAGE, J. et van TIGGELEN, B. A. (2007). Mesoscopic phase statistics of diffuse ultrasound in dynamic matter. *Physical Review Letters*, 99:094301. 41, 68, 112, 114

- [Cowan *et al.*, 2002] COWAN, M. L., JONES, I. P., PAGE, J. H. et WEITZ, D. A. (2002). Diffusing acoustic wave spectroscopy. *Phys. Rev. E*, 65(6):066605. 15, 16, 17, 45, 46, 47, 51
- [Cowan *et al.*, 2000] COWAN, M. L., PAGE, J. H. et WEITZ, D. A. (2000). Velocity fluctuations in fluidized suspensions probed by ultrasonic correlation spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 85:453–456. 13, 17, 41, 45, 46, 47, 51
- [Cusack *et al.*, 1995] CUSACK, R., HUNTLEY, J. M. et GOLDREIN, H. T. (1995). Improved noise-immune phase-unwrapping algorithm. *Appl. Opt.*, 34:781. 101
- [Dennis, 2003] DENNIS, M. R. (2003). Correlations and screening of topological charges in gaussian random fields. *J. Phys. A*, 36:6611. 39
- [Dziewonski et Anderson, 1981] DZIEWONSKI, A. M. et ANDERSON, D. L. (1981). Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25:297–356. 56
- [Economou, 1990] ECONOMOU, E. N. (1990). *Green's Functions in Quantum Physics*. Springer-Verlag, Germany. 137
- [E.S.O., Web] E.S.O. (Page Web). Organisation européenne pour la recherche en astronomie dans l'hémisphère sud. <http://www.eso.org/projects/vlti/>. 32
- [Fehler et Sato, 2003] FEHLER, M. et SATO, H. (2003). Coda. *Pure and Applied Geophysics*, 160:541–554. 108
- [Feng *et al.*, 1988] FENG, S., KANE, C., LEE, P. A. et STONE, A. D. (1988). Correlations and fluctuations of coherent wave transmission through disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 61(7). 45
- [Flatté et Wu, 1991] FLATTÉ, S. M. et WU, R.-S. (1991). Nonlinear inversion of phase and amplitude coherence functions at NORSAR for a model of nonuniform heterogeneities. , 18:1269–1272. 109
- [Flatté et Wu, 1988] FLATTÉ, S. M. et WU, R. S. (1988). Small-scale structure in the lithosphere and asthenosphere deduced from arrival time and amplitude fluctuations at NORSAR. *J. Geophys. Res.*, 93:6601–6614. 59
- [Fletcher *et al.*, 1990] FLETCHER, J. B., FUMAL, T., LIU, H. et PORCELLA, R. (1990). Near-surface velocities and attenuation at two bore-holes near Anza, CA, from logging data. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 80:807–831. 105, 113
- [Freund, 1995] FREUND, I. (1995). Saddles, singularities, and extrema in random phase field. *Phys. Rev. E*, 52(3):2348. 127, 134, 135
- [Freund, 1998] FREUND, I. (1998). '1001' correlations in random wave fields. *Waves in Random Media*, 8:119–158. 134
- [Freund et Shvartsman, 1995] FREUND, I. et SHVARTSMAN, N. (1995). Structural correlations in gaussian random wave fields. *Phys. Rev. E*, 51:3770–3773. 127
- [Freund et Shvartzsman, 1994] FREUND, I. et SHVARTZSMAN, N. (1994). Wave-field phase singularities : the sign principle. *Phys. Rev. A*, 50(6):5164. 128, 135, 140
- [Freund et Wilkinson, 1998] FREUND, I. et WILKINSON, M. (1998). Critical point screening in random wave fields. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(11):2892. 39, 45, 126, 130, 135

- [Genack *et al.*, 2003] GENACK, A. Z., CHABANOV, A. A., SEBBAH, P. et van TIGGELEN, B. A. (2003). Mesoscopic dynamics. *Dans* van TIGGELEN, B. et SKIPETROV, S., éditeurs : *Wave Scattering in Complex Media*, Nato Science Series, pages 125–150. Kluwer, Dordrecht. 45, 46
- [Genack *et al.*, 2005] GENACK, A. Z., CHABANOV, A. A., SEBBAH, P. et van TIGGELEN, B. A. (2005). Waves in random media. *Dans* *Encyclopedia of Condensed Matter Physics*, pages 307–317. Elsevier. 136
- [Genack *et al.*, 1999] GENACK, A. Z., SEBBAH, P., STOYTCHEV, M. et van TIGGELEN, B. A. (1999). Statistics of wave dynamics in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 82(4):715. 35, 45, 136
- [Ghyssels, 2005] GHYSSELS, A. (2005). Propagation des ondes sismiques : analyse de la phase aléatoire. Mémoire de Master, Université de Gand. 39, 125, 126
- [Goodman, 1985] GOODMAN, J. W. (1985). *Statistical Optics*. Wiley series in pure and applied optics, New York. 33, 46, 112, 121, 136
- [Grêt *et al.*, 2005] GRÊT, A., SNIEDER, R., ASTER, R. C. et KYLE, P. R. (2005). Monitoring rapid temporal change in a volcano with coda wave interferometry. *Geophysical Research Letters*, 32. 19
- [Halperin, 1981] HALPERIN, B. I. (1981). Statistical mechanics of topological defects. *Dans* BALIAN R., K. M. et POIRIER, J. P., éditeurs : *Les Houches Lectures XXV - Physics of defects*, volume 35. 126
- [Hennino *et al.*, 2001] HENNINO, R., TRÉGOURÈS, N., SHAPIRO, N. M., MARGERIN, L., CAMPILLO, M., van TIGGELEN, B. A. et WEAVER, R. L. (2001). Observation of equipartition of seismic waves. *Physical Review Letters*, 86:3447–3450. 62
- [Ishimaru, 1979] ISHIMARU, A. (1979). *Wave propagation and scattering in random media*, volume 1. New York Academic Press. 87
- [Koetter *et al.*, 2001] KOETTER, R., FREY, B., PETROVIC, N. et MUNSON JR., D. C. (2001). Unwrapping phase images by propagating probabilities across graphs. *Dans* *ieee proceedings*, volume 3, pages 1845–1848. 101
- [Kriegsmann *et al.*, 1985] KRIEGSMANN, G. A., NORRIS, A. N. et REISS, E. L. (1985). An optical theorem for acoustic scattering by baffled flexible surfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 99:301–307. 87
- [Lagendijk et van Tiggelen, 1996] LAGENDIJK, A. et van TIGGELEN, B. A. (1996). Resonant multiple scattering of light. *Physics Reports*, 270:143–215. 21, 65
- [Larose *et al.*, 2006] LAROSE, E., DE ROSNY, J., MARGERIN, L., ANACHE, D., GOUÉARD, P., CAMPILLO, M. et van TIGGELEN, B. A. (2006). Observation of multiple scattering of khz vibrations in a concrete structure and application to monitoring weak changes. *Phys. Rev. E*, 73:016609. 22
- [Larose *et al.*, 2005] LAROSE, E., KHAN, A., NAKAMURA, Y. et CAMPILLO, M. (2005). Lunar subsurface investigated from correlation of seismic noise. *Geophys. Res. Lett.*, 32(16):L16201. For a recent application. 137

- [Larose *et al.*, 2004] LAROSE, E., MARGERIN, L., van TIGGELEN, B. A. et CAMPILLO, M. (2004). Weak localisation of seismic waves. *Physical Review Letters*, 93(4). 63, 116
- [Larose *et al.*, 2007] LAROSE, E., ROUX, P. et CAMPILLO, M. (2007). Reconstruction of Rayleigh-Lamb dispersion spectrum based on noise obtained from an air-jet forcing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(6):3437. 78, 83, 101
- [Lee et Stone, 1986] LEE, P. A. et STONE, A. D. (1986). Universal conductance fluctuations in metals. *Phys. Rev. Lett.*, 55(15). 45
- [Lerosey *et al.*, 2007] LEROSEY, G., de ROSNY, J., TOURIN, A. et FINK, M. (2007). Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315:1120–1122. 1
- [Lobkis et Weaver, 2001] LOBKIS, I. et WEAVER, R. L. (2001). On the emergence of the Green's function in the correlations of a diffuse field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110:3011–3017. 137
- [Lobkis et Weaver, 2003] LOBKIS, O. I. et WEAVER, R. L. (2003). Coda-wave interferometry in finite solids : Recovery of P-to-S conversion rates in an elastodynamic billiard. *Phys. Rev. Lett.*, 90(25):254302. 20, 24, 25
- [Madariaga, 1998] MADARIAGA, R. et Perrier, G. (1998). *Les tremblements de terre*. CNRS Editions. 55
- [Maret, 1997] MARET, G. (1997). Diffusing-wave spectroscopy. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 2:251–257. 14, 45
- [Maret et Wolf, 1987] MARET, G. et WOLF, P. E. (1987). Multiple light scattering from disordered media : the effect of brownian motion of scatterers. *Z. Phys. B.*, 65:409. 13, 45, 46
- [Margerin, 1998] MARGERIN, L. (1998). *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1. 61
- [Margerin, 2005] MARGERIN, L. (2005). *Introduction to radiative transfer of seismic waves, in Seismic Earth : Array Analysis of Broadband Seismograms*, volume 157, chapitre 14, pages 229–252. Geophysical Monograph Series, AGU, Washington. 61
- [Margerin *et al.*, 2008] MARGERIN, L., CAMPILLO, M., HENNINO, R. et van TIGGELEN B. A. (2008). Energy partition of seismic coda waves in layered media : theory and application to P.F.O. *Soumis à Geophysical Journal International*. 106, 109, 113
- [Margerin *et al.*, 1999] MARGERIN, L., CAMPILLO, M., SHAPIRO, N. M. et VAN TIGGELEN, B. (1999). Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in Mexico. *Geophysical Journal International*, 138(2):343–352. 4
- [Margerin *et al.*, 2005] MARGERIN, L., CAMPILLO, M. et van TIGGELEN, B. A. (2005). Diffusion multiple des ondes sismiques. *Images de la physique - CNRS*, pages 220–224. 62
- [Margerin et Nolet, 2003] MARGERIN, L. et NOLET, G. (2003). Multiple scattering of high-frequency seismic waves in the deep earth : Modeling and numerical examples. *J. Geophys. Res.*, 108(B5):2234. 60
- [Michelson et Moreley, 1887] MICHELSON, A. A. et MORELEY, E. W. (1887). On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, 203(34). 32

- [Montagner, 1997] MONTAGNER, J. P. (1997). *Sismologie : la musique de terre*. Hachette. 55
- [Montelli *et al.*, 2006] MONTELLI, R., NOLET, G., DAHLEN, F. A. et MASTERS, G. (2006). A catalogue of deep mantle plumes : New results from finite-frequency tomography. *Geochem. Geophys. Geosyst. (G3)*, 7(Q11007). 58, 59
- [Mow et Pao, 1971] MOW, C. C. et PAO, Y. H. (1971). *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Report for US air force project rand. 85
- [Nolet *et al.*, 2005] NOLET, G., DAHLEN, F. A. et MONTELLI, R. (2005). *Seismic Earth : Analysis of broadband seismograms*, volume 157, chapitre Traveltimes and amplitude of seismic waves : a re-assessment, pages 37–48. AGU Monograph Series. 58
- [Norris et Vemula, 1995] NORRIS, A. N. et VEMULA, C. (1995). Scattering of flexural waves on thin plates. *Journal of sound and vibration*, 181(1):115–125. 85
- [Oldham, 1906] OLDHAM, R. D. (1906). The constitution of the earth as revealed by earthquakes. *Quart. J. Geol. Soc.*, 62:456–75. 56
- [Owens *et al.*, 1991] OWENS, T. J., OWENS, P. N., ANDERSON, P. N. et MCNAMARA, D. E. (1991). The 1990 Pinyon Flat high frequency array experiment, an IRIS eurasian seismic studies program passive source experiment. Rapport technique, Incorporated Research Institution in Seismology. 109
- [Page *et al.*, 2000] PAGE, J. H., COWAN, M. L. et WEITZ, D. A. (2000). Diffusing acoustic wave spectroscopy of fluidized suspensions. *Physica B : Condensed Matter*, 279(1-3):130–133. 13, 41
- [Page *et al.*, 2003] PAGE, J. H., COWAN, M. L., WEITZ, D. A. et van TIGGELEN, B. A. (2003). Diffusing acoustic wave spectroscopy field fluctuation spectroscopy with multiply scattered ultrasonic waves. Dans van TIGGELEN, B. A. et SKIPETROV, S. E., éditeurs : *Wave Scattering in Complex Media*, Nato Science Series. Kluwer, Dordrecht. 46
- [Pandolfi *et al.*, 2006] PANDOLFI, D., BEAN, C. J. et SACCOROTTI, G. (2006). Coda wave interferometric detection of seismic velocity changes associated with the 1999 M = 3.6 event at Mt. Vesuvius. *Geophysical Research letters*, 33:L06306. 20
- [Paul *et al.*, 2005] PAUL, A., CAMPILLO, M., MARGERIN, L., LAROSE, E. et DERODE, A. (2005). Empirical synthesis of time-asymmetrical Green functions from the correlation of coda waves. *Journal of Geophysical research*, 110:B08302. 62
- [Pearce *et al.*, 2003] PEARCE, J., JIAN, Z. et MITTLEMAN, D. M. (2003). Statistics of multiply scattered broadband terahertz pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 91:043903. 45
- [Pine *et al.*, 1988] PINE, D. J., WEITZ, D. A., CHAIKIN, P. M. et HERBOLZHEIMER, E. (1988). Diffusing wave spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 60(12):1134–1137. 45
- [Poupinet *et al.*, 1984] POUPINET, G., ELLSWORTH, W. L. et FRECHET, J. (1984). Monitoring velocity variations in the crust using earthquake doublets : An application to the Calaveras fault, California. *J. Geophys. Res.*, 89:5719. 19, 20
- [Ratdomopurbo et Poupinet, 1995] RATDOMOPURBO, A. et POUPINET, G. (1995). Monitoring a temporal change of seismic velocity in a volcano : Application to the 1992 eruption of Mt. Merapi (Indonesia). *Geophysical Research Letters*, 22(7):775–778. 19

- [Royer et Dieulesaint, 1999] ROYER, D. et DIEULESAINT, E. (1999). *Ondes stastiques dans les solides*. Ed. Masson. 80
- [Rytov *et al.*, 1989] RYTOV, S. M., KRAVTSOV, Y. A. et TATARSKII, V. I. (1989). *Principles of Statistical Radiophysics. 4 : Wave propagation through random media*. Springer-Verlag, New York. 116
- [Sato et Fehler, 1998] SATO, H. et FEHLER, M. C. (1998). *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*. Modern Acoustics and Signal Processing. American Institute of Physics Press. 61, 108
- [Sato et Fehler, 2006] SATO, H. et FEHLER, M. C. (2006). Synthesis of seismogram envelopes in heterogeneous media. *advances in geophysics*, 48. 72
- [Scheffold et Maret, 1998] SCHEFFOLD, F. et MARET, G. (1998). Universal conductance fluctuations of light. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5800–5801. 45
- [Schomerus, 2001] SCHOMERUS, H. (2001). Transmission delay times of localized waves. *Phys. Rev. E*, 64(2):026606. 45, 46
- [Sebbah *et al.*, 1997] SEBBAH, P., LEGRAND, O., van TIGGELEN, B. et GENACK, A. Z. (1997). Statistics of the cumulative phase of microwave radiation in random media. *Phys. Rev E.*, 56(3):3619. 35, 50, 136
- [Sebe, 2004] SEBE, O. (2004). *Déconvolution aveugle et sismologie : estimation de la source sismique et des effets de site*. Thèse de doctorat. 72
- [Shapiro, 1986] SHAPIRO, B. (1986). Large intensity fluctuations for wave propagation in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2168. 65, 113
- [Shvartsman et Freund, 1994] SHVARTSMAN, N. et FREUND, I. (1994). Vortices in random wave fields : Nearest neighbor anticorrelations. *Phys. Rev. Lett.*, 72(7):1008. 134, 135
- [Skipetrov, 2007] SKIPETROV, S. (2007). *Dynamique des figures de tavelures en milieux désordonnés*. thèse d’habilitation à diriger les recherches. 125
- [Snieder, 2004] SNIEDER, R. (2004). Coda Wave Interferometry. *McGraw-Hill Yearbook of Science & Technology*. 18
- [Snieder, 2006] SNIEDER, R. (2006). The theory of Coda Wave Interferometry. *Pure and Applied Geophysics*, 163(2-3):455–473. 18
- [Snieder *et al.*, 2002] SNIEDER, R., GRÊT, A., DOUMA, H. et SCALES, J. (2002). Coda Wave Interferometry for estimating nonlinear behavior in seismic velocity. *Science*, 295:2253–2255. 45
- [Snieder et Vrijlandt, 2005] SNIEDER, R. et VRIJLANDT, M. (2005). Constraining the source separation with coda wave interferometry : Theory and application to eathquake doublets in the Hayward fault, California. *Journal of geophysical research*, 110:B04301. 20
- [Stein et Wysession, 2003] STEIN, S. et WYSESSION, M. (2003). *An introduction to seismology earthquake and earth structure*. Blackwell Publishing. 55, 56
- [Swartzlander et Law, 1992] SWARTZLANDER, G. A. et LAW, C. T. (1992). Optical vortex soliton observed in Kerr nonlinear media. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2503. 121

- [Tourin *et al.*, 2000] TOURIN, A., FINK, M. et DERODE, A. (2000). Multiple scattering of sound. *Waves in random media*, 10. 63
- [Trégourès *et al.*, 2002] TRÉGOURÈS, N. P., HENNINO, R., LACOMBE, C., SHAPIRO, N., MARGERIN, L., CAMPILLO, M. et van TIGGELEN, B. A. (2002). Multiple scattering of seismic waves. *Ultrasonics*, 40:269–274. 61
- [Trégourès et van Tiggelen, 2002] TRÉGOURÈS, N. P. et van TIGGELEN, B. A. (2002). Quasi-two dimensional transfer of elastic waves. *Phys. Rev. E*, 66(3):036601. 84
- [van Albada et Lagendijk, 1985] van ALBADA, M. P. et LAGENDIJK, A. (1985). Observation of weak localization of light in a random medium. *Phys. Rev. Lett.*, 55(24):2692–2695. 63
- [van Tiggelen *et al.*, 2006] van TIGGELEN, B. A., ANACHE, D. et GHYSSELS, A. (2006). Role of mean free path in spatial phase correlation and nodal screening. *Europhys. Lett.*, 74:999. 38, 51, 65, 114, 122, 135, 138
- [van Tiggelen *et al.*, 1999] van TIGGELEN, B. A., SEBBAH, P., STOYTCHEV, M. et GENACK, A. Z. (1999). Delay-time statistics for diffuse waves. *Phys. Rev. E*, 59:7166. 45, 46
- [van Tiggelen et Skipetrov, 2003] van TIGGELEN, B. A. et SKIPETROV, S. E., éditeurs (2003). *Wave Scattering in Complex Media*. Kluwer, Dordrecht. 17, 45
- [Vellekoop *et al.*, 2005] VELLEKOOP, I. M., LODAHL, P. et LAGENDIJK, A. (2005). Determination of the diffusion constant using phase-sensitive measurements. *Phys. Rev. E*, 71:056604. 45
- [Vernon *et al.*, 1998] VERNON, F. L., PAVLIS, G. L., OWENS, T. J., MCNAMARA, D. E. et ANDERSON, P. N. (1998). Near-surface scattering effects observed with a high-frequency phased array at Pinyon Flats, California. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88(6):1548–1560. 105
- [Vidale *et al.*, 2000] VIDALE, J. E., DODGE, D. A. et EARLE, P. S. (2000). Slow differential rotation of the earth inner core indicated by temporal changes in scattering. *Nature*, 405:445–448. 19
- [von der Lhe, 1996] von der LHE, O. (1996). An introduction to interferometry with the ESO Very Large Telescope. Dans PARESCE, F., éditeur : *Science with the VLTI*. ESO Workshop, Springer-Verlag. 32
- [Wallace, 1995] WALLACE, L. (1995). *Modern Global Seismology*. Academic Press San Diego. 55
- [Wang *et al.*, 2005] WANG, W., HANSON, S. G. et MIYAMOTO, Y. (2005). Experimental investigation of local properties and statistics of optical vortices in random wave fields. *Phys. Rev. Lett.*, 94:103902. 121
- [Weaver et Lobkis, 2004] WEAVER, R. L. et LOBKIS, O. (2004). Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green’s function (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5):2731–2734. 62, 137
- [Weaver et Lobkis, 2000] WEAVER, R. L. et LOBKIS, O. I. (2000). Temperature dependence of diffuse field phase. *Ultrasonics*, 38:491–494. 20

- [Wicks Jr. *et al.*, 1998] WICKS JR., C., THATCHER, W. et DZURISIN, D. (1998). Migration of fluids beneath Yellowstone Caldera inferred from satellite radar interferometry. *Science*, 282(5388):458–462. 32, 45
- [Wicks Jr. *et al.*, 2006] WICKS JR., C., THATCHER, W., DZURISIN, D. et SVARC, J. (2006). Uplift, thermal unrest and magma intrusion at Yellowstone caldera. *Science*, 440:72–75. 45
- [Wilkinson, 2004] WILKINSON, M. (2004). Screening of charged singularities of random fields. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:6763–6771. 39, 45, 135
- [Wolf et Maret, 1985] WOLF, P. E. et MARET, G. (1985). Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2696–2699. 63
- [Wu, 2002] WU, R. S. (2002). *Heterogeneity in the Crust and Upper Mantle : Nature, Scaling and Seismic Properties*, chapitre Spatial coherences of seismic data and the application to characterization of small-scale heterogeneities, pages 321–344. Kluwer Academic, New York. 109
- [Wu et Flatté, 1990] WU, R.-S. et FLATTÉ, S. M. (1990). Transmission fluctuations across an array and heterogeneities in the crust and upper mantle. *Pure and Applied Geophysics*, 132:175–196. 109
- [Wyatt, 1982] WYATT, F. (1982). Displacement of surface monuments : horizontal motion. *J. Geophys. Res.*, 87:979–989. 105
- [Wyatt, 1989] WYATT, F. (1989). Displacement of surface monuments : vertical motion. *J. Geophys. Res. (B)*, 94:1655–1664. 105
- [Zhang *et al.*, 2007a] ZHANG, S., HU, B., LOCKERMAN, Y., SEBBAH, P. et GENACK, A. Z. (2007a). Observation of singularities in multiply scattered microwave fields. *JOSA A*, 24(10): A33–A38. 121
- [Zhang *et al.*, 2007b] ZHANG, S., HU, B., SEBBAH, P. et GENACK, A. Z. (2007b). Singularity displacement in random speckle patterns of diffusive and localized waves : universality lost and regained. *cond-mat/0702218*. 134, 136
- [Zheng et Wu, 2005] ZHENG, Y. et WU, R.-S. (2005). Measurement of phase fluctuations for transmitted waves in random media. , 32:14314–+. 109
- [Zheng *et al.*, 2007] ZHENG, Y., WU, R. S. et LAY, T. (2007). Inverting the power spectrum for a heterogeneous medium. *Geophysical Journal International*, 168(6):1005–1010. 59



# Diffusion des travaux de thèse

Ces travaux de thèse ont fait l'objet de plusieurs publications scientifiques :

- ANACHE-MÉNIER, D., MARGERIN, L. et VAN TIGGELEN, B. A. (2008). Phase statistics of seismic coda waves. *Article soumis prochainement à Geophysical Review Letters*.
- ANACHE-MÉNIER, D. et VAN TIGGELEN, B. A. (2008). Giant fluctuations of topological charge in a disordered wave guide. *Waves in Random and Complex Media*, 18(2) : 293–301.
- COWAN, M., ANACHE-MÉNIER, D., HILDEBRAND, W., PAGE, J. et VAN TIGGELEN, B. A. (2007). Mesoscopic phase statistics of diffuse ultrasound in dynamic matter. *Physical Review Letters*, 99 : 095301.
- VAN TIGGELEN, B. A., ANACHE, D. et GHYSELS, A. (2006). Role of mean free path in spatial phase correlation and nodal screening. *Europhysics Letters*, 74 : 999.
- LAROSE, E., DE ROSNY, J., MARGERIN, L., ANACHE, D. GOUÉDARD, P., CAMPILLO, M. et VAN TIGGELEN, B. A. (2006). Observation of multiple scattering of khz vibrations in a concrete structure and application to monitoring weak changes. *Physical Review E* 73 : 016609.

Ils ont été présentés et récompensés par un prix jeune chercheur lors du congrès général de la Société Française de Physique qui s'est tenu à Grenoble du 9 au 13 juillet 2007.

*Thèse pour obtenir le grade de :*  
**Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I**

*préparée par :*  
**Domitille Anache-Ménier**

*Titre :*  
**Propagation des ondes en milieu désordonné :  
Étude de la phase des ultrasons et des ondes sismiques.**



### **Résumé**

Cette thèse est consacrée à l'étude théorique et expérimentale de la phase des ondes sismiques et des ultrasons se propageant dans les milieux désordonnés.

La théorie des distributions et des corrélations des dérivées spatiales et temporelles de la phase est développée dans l'hypothèse d'un champ scalaire analytique gaussien et circulaire. Ces fonctions statistiques permettent de caractériser les diffuseurs dans les deux dispositifs expérimentaux au coeur de cette thèse. D'une part, les fluctuations temporelles de la phase d'ultrasons sont utilisées pour sonder la dynamique d'une suspension de billes millimétriques sur des échelles de temps allant de la milliseconde à la seconde. D'autre part les fluctuations spatiales de la phase donnent une caractérisation de la diffusion multiple des ondes de flexion dans une plaque de Plexiglas<sup>®</sup> perforée aléatoirement. Le comportement asymptotique en loi de puissance des distributions des dérivées de la phase démontre les propriétés gaussiennes des codas dans ces deux dispositifs.

L'étude de la coda de séismes régionaux en Californie ont permis de proposer une application à la détermination du libre parcours moyen des ondes sismiques dans la croûte terrestre : il est montré que c'est la seule échelle caractéristique de la fonction de corrélation de la dérivée spatiale de la phase.

### **Abstract**

In this thesis we study, both theoretically and experimentally, the phase of seismic and ultrasonic waves propagating in disordered media.

The theory for the derivatives of phase with respect to either position or time is developed in the framework of a scalar gaussian and circular wave field. Different statistical functions allow us to characterize the scatterers in the two experimental set-ups discussed in this thesis. On the one hand, the temporal phase fluctuations of ultrasound in a suspension of glass spheres probe scatterer motions on time scales ranging from milliseconds to seconds. On the other hand, the spatial phase fluctuations characterize multiple scattering of flexural waves propagating in a Plexiglas<sup>®</sup> plate with random holes. In both set-ups the gaussian properties of the coda field are scrutinized using the asymptotic power law decay of the distribution functions of the phase derivatives.

The study of the seismic coda of regional events in California provides a possible application to the determination of the mean free path in the Earth's crust : it is shown to be the only characteristic length scale of the spatial phase derivative correlation function.