



**HAL**  
open science

# Sur les plongements des hypersurfaces de Danielewski

Pierre-Marie Poloni

► **To cite this version:**

Pierre-Marie Poloni. Sur les plongements des hypersurfaces de Danielewski. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2008. Français. NNT: . tel-00335868

**HAL Id: tel-00335868**

**<https://theses.hal.science/tel-00335868v1>**

Submitted on 30 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

**PIERRE-MARIE POLONI**

## Sur les plongements des hypersurfaces de Danielewski

soutenue publiquement le 25 juin 2008 devant le jury composé de :

Jacques ALEV	Université de Reims	Examineur
Pierrette CASSOU-NOGUÈS	Université de Bordeaux I	Examinatrice
Daniel DAIGLE	Université d'Ottawa, Canada	Rapporteur
Adrien DUBOULOZ	Université de Bourgogne	Examineur
Stéphane LAMY	Université de Lyon I	Examineur
Lucy MOSER-JAUSLIN	Université de Bourgogne	Directrice de thèse

au vu des rapports de :

DANIEL DAIGLE	Université d'Ottawa, Canada
LEONID MAKAR-LIMANOV	Wayne State University, Detroit, USA



## Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail et ont rendu mes années de « thésard » si enrichissantes, tant sur le plan mathématique que sur le plan humain.

En tout premier lieu, je veux remercier Lucy Moser-Jauslin pour m'avoir fait découvrir, pendant mon D.E.A., ce domaine de recherche passionnant qu'est la géométrie algébrique affine, et pour m'avoir proposé un sujet motivant. Tout au long de cette thèse, sa disponibilité, son aide et ses conseils m'ont été très précieux. Je reste admiratif devant son intuition mathématique et suis fier des résultats obtenus dans notre article.

Un grand merci également à Adrien Dubouloz pour avoir toujours répondu patiemment à mes questions, souvent naïves, sur les surfaces de Danielewski. Je suis heureux de pouvoir travailler avec lui : sa grande culture géométrique est un complément indispensable aux méthodes algébriques (qu'il qualifie parfois de « bestiales ») que j'emploie. Plusieurs résultats de cette thèse proviennent d'ailleurs d'un article que nous avons rédigé ensemble.

Je remercie Daniel Daigle pour le grand soin avec lequel il a lu ma thèse et pour toutes les remarques pertinentes qu'il a eu la gentillesse de me communiquer. Il a de plus accepté de prendre part au jury ; je l'en remercie donc doublement.

Je remercie chaleureusement Jacques Alev, Pierrette Cassou-Noguès et Stéphane Lamy du plaisir et de l'honneur qu'ils me font en participant au jury de ma thèse.

Leonid Makar-Limanov m'a fait l'honneur de rapporter sur ma thèse, bien que celle-ci soit rédigée en français. Je lui en suis très reconnaissant et le remercie pour ses encouragements.

L'école doctorale Carnot a financé ma participation à plusieurs conférences, en France comme à l'étranger, me permettant ainsi de m'intégrer, petit à petit, à la communauté des chercheurs en géométrie algébrique affine. J'ai rencontré des gens admirables, passionnés par leur discipline et toujours accueillants à mon égard. J'ai beaucoup appris à leur contact et veux donc saluer ici le rôle important joué par l'école doctorale dans ma formation.

Je remercie sincèrement tous ceux qui travaillent à l'I.M.B. : les enseignants dont j'ai suivi les cours lors de mon cursus universitaire ; ceux qui m'ont aidé lorsque j'ai, moi aussi, commencé à enseigner ; et bien sûr tout le personnel administratif et technique sans qui je serais souvent perdu dans les méandres de l'administration.

Je tiens également à saluer, sans pouvoir tous les nommer, les thésards de Dijon et à souligner la bonne humeur qui règne dans nos bureaux, particu-

lièrement pendant la traditionnelle pause café, instant de discussions mémorables où les sujets les plus variés sont débattus : du football à la grammaire, en passant par la gastronomie ou encore la physique quantique.

Je remercie ma famille d'être présente à mes côtés, aujourd'hui comme hier, et suis fier de leur présenter mon travail.

Enfin, je pense à Perrine qui m'a toujours soutenu et encouragé, et lui redis mille fois merci.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>Partie I : Les hypersurfaces de Danielewski et leurs automorphismes</b>	<b>9</b>
<b>1 Surfaces et Hypersurfaces de Danielewski</b>	<b>11</b>
1.1 Surfaces de Danielewski . . . . .	12
1.1.1 Définition et exemples . . . . .	12
1.1.2 Géométrie des surfaces de Danielewski . . . . .	14
1.1.3 Classification à isomorphisme près . . . . .	16
1.2 Étude « à la main » de quelques exemples . . . . .	19
1.2.1 Premiers exemples . . . . .	19
1.2.2 Surfaces $X_{Q,n}$ et $X_{\sigma,n}$ . . . . .	22
1.3 Hypersurfaces de Danielewski . . . . .	27
1.3.1 Définition et problématiques . . . . .	27
1.3.2 Formes standards . . . . .	30
<b>2 Dérivations localement nilpotentes</b>	<b>37</b>
2.1 Rappels sur les dérivations localement nilpotentes. . . . .	37
2.2 Invariant de Makar-Limanov . . . . .	43
2.2.1 Naissance d'un invariant . . . . .	43
2.2.2 Filtrations, graduations et dérivations induites . . . . .	44
2.3 Calculs pour les hypersurfaces de Danielewski . . . . .	47
<b>3 Classes d'isomorphie et groupes des automorphismes</b>	<b>53</b>
3.1 Application des dérivations localement nilpotentes . . . . .	53
3.2 Classes d'isomorphie . . . . .	55
3.3 Automorphismes des hypersurfaces de Danielewski . . . . .	60

3.3.1	Automorphismes des hypersurfaces $X_{Q,n}$ avec $Q(0, z)$ à racines simples . . . . .	62
-------	--	----

## Partie II : Plongements des hypersurfaces de Danielewski 67

### 4 Familles d'hypersurfaces de Danielewski 69

4.1	Définitions et méthodes . . . . .	69
4.1.1	Plongements des variétés affines . . . . .	70
4.1.2	Le cas particulier des hypersurfaces . . . . .	72
4.1.3	Équivalence polynomiale et isomorphisme de familles . . . . .	74
4.2	Classification des hypersurfaces de Danielewski à équivalence près . . . . .	79
4.2.1	Extension des isomorphismes entre hypersurfaces de Danielewski et de leurs automorphismes : points de vue algébrique et analytique . . . . .	80
4.2.2	Hypersurfaces de Danielewski à un paramètre . . . . .	89
4.2.3	Le cas particulier des polynômes $x^2y - z^2 - xq(z)$ . . . . .	94
4.2.4	Formes normales . . . . .	96

### 5 Plongements des cylindres des hypersurfaces de Danielewski 101

5.1	Conjectures de simplification et des coordonnées stable . . . . .	101
5.1.1	Conjecture de simplification de Zariski . . . . .	101
5.1.2	Coordonnées stables . . . . .	104
5.2	Problèmes de simplification et de l'équivalence stable . . . . .	105
5.2.1	Problème de simplification de Zariski . . . . .	105
5.2.2	Problème de l'équivalence stable . . . . .	107
5.3	Étude des polynômes $P_{Q,n}$ avec $\deg(Q(0, z)) = 2$ . . . . .	113
5.3.1	Recherche de formes normales pour l'équivalence stable . . . . .	114
5.3.2	Recherche de formes normales pour l'équivalence ana- lytique . . . . .	118
5.3.3	Bilan dans le cas des polynômes $x^2y - z^2 - xq(z)$ . . . . .	120

## Bibliographie 121

# Introduction

Les actions du groupe additif  $\mathbf{G}_a$  – et leur pendant algébrique que sont les dérivations localement nilpotentes – ont pris une place prépondérante en géométrie algébrique affine.

Avec les travaux de L. Makar-Limanov, ces actions se sont notamment révélées être un puissant outil pour l'étude de certaines variétés affines. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des variétés qui font l'objet de cette thèse : les *hypersurfaces de Danielewski*.

## Hypersurfaces de Danielewski

Les hypersurfaces de Danielewski sont les hypersurfaces  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  définies par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$ , où  $n \geq 1$  et où  $Q(x, z)$  est un polynôme de  $\mathbf{C}[x, z]$  tel que  $\deg(Q(0, z)) \geq 2$ . Elles sont progressivement apparues dans différents contextes et ont permis d'illustrer certains phénomènes inattendus. En voici trois exemples.

La première utilisation des hypersurfaces de Danielewski est due à W. Danielewski [13] et K.-H. Fieseler [21]. Ils ont en effet montré que les hypersurfaces  $W_n$  définies par les équations  $x^n y = z^2 - 1$  sont des contre-exemples au *problème de simplification*. C'est-à-dire que deux telles surfaces  $W_n$  et  $W_{n'}$  ne sont pas isomorphes si  $n \neq n'$  mais que leurs cylindres  $W_n \times \mathbf{C}$  et  $W_{n'} \times \mathbf{C}$  sont isomorphes. (voir aussi les travaux de J. Wilkens sur les hypersurfaces d'équation  $x^n y = z^2 - h(x)z$ , [53])

Plus récemment, G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin ont tiré, de leur étude des hypersurfaces de Danielewski définies par une équation de la forme  $x^n y = r(x)p(z) + c$ , [23], des exemples de surfaces non (algébriquement) isomorphes mais analytiquement isomorphes ; ainsi que des exemples de surfaces isomorphes dont les plongements ne sont pas équivalents.

Enfin, nous avons démontré avec L. Moser-Jauslin [42] que certaines hypersurfaces de Danielewski sont des contre-exemples au *problème de l'équivalence stable*. Nous avons en effet construit une famille d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  de la forme  $\{x^2 y = z^2 + xq(z) - c\}$  dont les plongements ne sont pas



équivalents bien qu'ils soient stablement équivalents. (Ils sont équivalents via un automorphisme de  $\mathbf{C}^4$ .)

## Actions du groupe additif et invariant de Makar-Limanov

Toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  admet une action algébrique du groupe  $(\mathbf{C}, +)$  correspondant à la dérivation localement nilpotente de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  définie par  $\Delta_{Q,n} = x^n \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial Q(x,z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}$ .

Il faut alors distinguer deux types d'hypersurfaces de Danielewski : celles dont l'invariant de Makar-Limanov n'est pas trivial (ce sont les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$ ) et celles dont l'invariant de Makar-Limanov est trivial (ce sont les hypersurfaces  $X_{Q,1}$ ); les deuxièmes ayant, du fait de la « symétrie des rôles » de  $x$  et  $y$ , plus d'actions de  $(\mathbf{C}, +)$  que les premières.

Les hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,1}$  – c'est-à-dire les hypersurfaces d'équation  $xy = p(z)$  – ont été étudiées principalement par L. Makar-Limanov, qui a calculé leurs groupes d'automorphismes [34], et par D. Daigle qui en a donné la classification et a décrit très précisément leurs dérivations localement nilpotentes [9] et [10].<sup>1</sup>

Dans cette thèse, nous nous intéressons surtout à l'autre type d'hypersurface de Danielewski. Notre objectif est double : d'une part généraliser les travaux de L. Makar-Limanov sur les hypersurfaces d'équation  $x^n y = p(z)$  afin d'obtenir la classification de toutes les hypersurfaces de Danielewski et de décrire leurs groupes d'automorphismes, et, d'autre part, les classifier à équivalence à un automorphisme polynomial (ou analytique) de  $\mathbf{C}^3$  près. Nous étudierons également les questions relatives au problème de l'équivalence stable.

Le fait que, pour  $n \geq 2$ , l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces  $X_{Q,n}$  soit non trivial est la « clef de voûte » de notre étude. La principale conséquence étant que les isomorphismes entre deux telles hypersurfaces doivent avoir une forme particulière : ils doivent notamment préserver la fibration donnée par la projection  $\text{pr}_x$ . (voir par exemple les propositions 3.1.2 et 4.2.1)

---

<sup>1</sup>Les hypersurfaces  $\{xy = p(z)\}$  semblent par ailleurs occuper une place importante parmi les surfaces affines. T. Bandman et L. Makar-Limanov montrent en effet dans [4] que toute surface affine lisse d'invariant de Makar-Limanov trivial admettant une action libre de  $(\mathbf{C}, +)$  est isomorphe à l'une de ces hypersurfaces. De plus, D. Daigle [11] a récemment prouvé que si un polynôme irréductible est dans le noyau de deux dérivations localement nilpotentes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  non équivalentes, alors la fibre générique de ce polynôme est isomorphe à une hypersurface  $\{xy = p(z)\}$ .

## Plan de la thèse et principaux résultats

Cette thèse est divisée en cinq chapitres. Les trois premiers sont dédiés à l'étude des hypersurfaces de Danielewski et de leurs automorphismes, alors que les deux derniers sont consacrés à l'étude de leurs plongements.

Le **premier chapitre** débute par des rappels sur les *surfaces de Danielewski*.

Une surface de Danielewski est une surface affine complexe  $X$  munie d'une  $\mathbb{A}^1$ -fibration  $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}$  qui se factorise en une fibration localement triviale sur une droite affine à  $d \geq 2$  origines (Dubouloz [17]). C'est une notion différente de celle d'hypersurface de Danielewski. Nous vérifierons d'ailleurs qu'une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  est une surface de Danielewski si et seulement si le polynôme  $Q(0, z)$  est à racines simples, et expliquerons comment calculer, dans ce cas, ses fonctions de transition. Nous obtiendrons alors le résultat suivant.

**Proposition (Dubouloz et Poloni [20]).** *Toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  avec  $Q(0, z)$  à  $d$  racines simples est isomorphe à une hypersurface  $X_{\sigma,n}$  définie par une équation de la forme  $x^n y = \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x))$  pour une certaine collection de polynômes  $\sigma_1, \dots, \sigma_d(x) \in \mathbf{C}[x]$ .*

Les hypersurfaces  $X_{\sigma,n}$  ci-dessus sont des exemples d'hypersurfaces de Danielewski *sous forme standard* ; ce qui signifie qu'elles sont définies par une équation de la forme  $x^n y = p(z) + xq(x, z)$  avec  $\deg_z(q(x, z)) < \deg(p)$ . Dans ce contexte, nous montrerons que la proposition précédente se généralise.

**Théorème.** *Toute hypersurface de Danielewski est isomorphe à une hypersurface de Danielewski sous forme standard que l'on peut déterminer par un procédé algorithmique.*

L'intérêt de travailler avec des hypersurfaces de Danielewski sous forme standard est que, comme nous le verrons dans le chapitre 3, deux telles hypersurfaces isomorphes sont toujours équivalentes (via un automorphisme triangulaire de  $\mathbf{C}^3$ ). Cette propriété se révèle essentielle quand on veut généraliser les résultats obtenus par L. Makar-Limanov dans son article [36] sur les hypersurfaces  $\{x^n y = p(z)\}$ .

Dans le **chapitre 2**, nous rappelons quelques résultats généraux sur les dérivations localement nilpotentes afin de démontrer, suivant les idées de [36], le théorème suivant.

**Théorème.** Soit  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  une hypersurface de Danielewski avec  $n \geq 2$ . Alors, les dérivations localement nilpotentes sur  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[X_{Q,n}]$  sont

$$LND(S_{Q,n}) = \left\{ h(x) \left( x^n \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial Q(x,z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right), \text{ avec } h(x) \in \mathbf{C}[x] \right\}.$$

Le **chapitre 3** est consacré à l'étude des hypersurfaces de Danielewski sous forme standard. Nous y montrons notamment le théorème de classification suivant.

**Théorème.** Deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1,n_1}$  et  $X_{Q_2,n_2}$  sous forme standard sont isomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $n_1 = n_2 = n$  ;
2. Il existe des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et un polynôme  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

Nous vérifions également que tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard provient bien de la restriction d'un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  (corollaire 3.3.3) et reprenons la description, que nous avons donnée avec A. Dubouloz [20], des groupes d'automorphismes des hypersurfaces  $X_{\sigma,n}$  (théorème 3.3.7).

L'étude des plongements des hypersurfaces de Danielewski est menée dans le **chapitre 4**. Nous répondons aux questions suivantes.

1. Comment déterminer si deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes sont ou ne sont pas équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  ?
2. Toute hypersurface de Danielewski admet-elle des plongements non équivalents ?
3. Tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski provient-il de la restriction d'un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  ?
4. Tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski provient-il de la restriction d'un automorphisme *analytique* de  $\mathbf{C}^3$  ?

Nous construisons en effet des formes normales pour juger de l'équivalence de deux hypersurfaces de Danielewski quelconques (théorème 4.2.30) ; montrons que toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$  admet des plongements non équivalents (corollaire 4.2.7) ; donnons des exemples d'automorphismes d'une hypersurface  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  qui ne s'étendent pas en des automorphismes de l'espace ambiant (corollaire 4.2.13) ; et montrons que la réponse à la dernière question est positive (corollaire 4.2.16).

Ce chapitre contient également une discussion sur les méthodes existantes pour montrer que deux polynômes donnés sont équivalents. Nous montrons notamment que deux polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  sont équivalents si et seulement si les familles d'hypersurfaces  $\{V(P - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(Q - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes – c'est-à-dire s'il existe un morphisme algébrique  $\phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  tel que chaque morphisme  $\phi_c(x_1, \dots, x_n) := \phi(c; x_1, \dots, x_n)$  induise un isomorphisme entre les variétés  $V(P - c)$  et  $V(Q - c)$ .

Ainsi, l'exemple suivant nous semble particulièrement intéressant.

**Exemple (Moser-Jauslin et Poloni [42]).** Les polynômes  $P_k$  de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  définis, pour tout  $k \in \mathbf{N}_{>0}$ , par  $P_k = x^2y - z^2 - x(1 - z^2)^k$  vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $c \in \mathbf{C}$  et tout  $k \in \mathbf{N}_{>0}$ , l'hypersurface  $V(P_k - c) \subset \mathbf{C}^3$  est une variété irréductible lisse ;
2. Pour tout  $c \in \mathbf{C}$  et tout  $k, k' \in \mathbf{N}_{>0}$ , les hypersurfaces  $V(P_k - c)$  et  $V(P_{k'} - c)$  sont isomorphes ;
3. Si  $k \neq k'$ , alors les polynômes  $P_k$  et  $P_{k'}$  ne sont pas équivalents.

Le **chapitre 5** traite principalement du *problème de l'équivalence stable*. A cet égard, le théorème suivant en est le résultat le plus significatif. Il fournit notamment des exemples de polynômes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  stablement équivalents mais non équivalents.

**Théorème (Moser-Jauslin et Poloni [42]).** Soient  $r(t)$  et  $s(t)$  deux polynômes de  $\mathbf{C}[t]$ . Les assertions suivantes sont vraies :

1. Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont (algébriquement) équivalents si et seulement si il existe une constante  $a \in \mathbf{C}^*$  telle que  $ar(z^2) = s(z^2)$  ;
2. Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont stablement équivalents si et seulement si  $r(0) = s(0) = 0$  ou  $r(0)s(0) \neq 0$  ;
3. Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont analytiquement équivalents si et seulement si  $r(0) = s(0) = 0$  ou  $r(0)s(0) \neq 0$ .



# Notations

## corps de base

Dans toute cette thèse, nous travaillerons sur le corps de base  $k = \mathbf{C}$ , où  $\mathbf{C}$  désigne le corps des nombres complexes. En particulier, l'espace affine de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{A}^n$ , sera identifié avec  $\mathbf{C}^n$  et le groupe additif  $\mathbf{G}_a$  sera identifié avec le groupe  $(\mathbf{C}, +)$ .

Par ailleurs, l'anneau des fonctions régulières sur une variété algébrique affine  $X$  sera noté  $\mathbf{C}[X]$ .

## polynômes et hypersurfaces

Pour tout entier  $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ , la notation  $\mathbf{C}^{[n]} = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  désigne l'algèbre des polynômes à  $n$  variables et à coefficients dans  $\mathbf{C}$ .

L'hypersurface de  $\mathbf{C}^n$  définie par un polynôme  $P \in \mathbf{C}^{[n]}$  sera notée  $V(P) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ .

## morphismes adjoints

Le morphisme adjoint d'un morphisme régulier  $\phi : X \rightarrow Y$  entre deux variétés algébriques affines est noté  $\phi^* : \mathbf{C}[Y] \rightarrow \mathbf{C}[X]$  et est défini par  $\phi^*(f) = f \circ \phi$  pour toute fonction  $f \in \mathbf{C}[Y]$  régulière sur  $Y$ .

En particulier, si  $Y$  est une variété algébrique de dimension  $n$ , alors tout morphisme régulier  $\phi : X \rightarrow Y$  est uniquement déterminé par la donnée des polynômes  $\phi^*(y_1), \dots, \phi^*(y_n)$ , où  $y_1, \dots, y_n$  désignent des fonctions coordonnées sur  $\mathbf{C}[Y]$ .

Rappelons d'ailleurs qu'un tel morphisme  $\phi^* : \mathbf{C}[Y] \rightarrow \mathbf{C}[X]$  est surjectif si et seulement si l'égalité  $\mathbf{C}[\phi^*(y_1), \dots, \phi^*(y_n)] = \mathbf{C}[X]$  est satisfaite.

## permutations d'un ensemble fini

Le groupe des permutations d'un ensemble fini à  $d$  éléments est noté  $\mathbf{S}_d$ .



## Première partie

# Les hypersurfaces de Danielewski et leurs automorphismes





# Chapitre 1

## Surfaces et Hypersurfaces de Danielewski

Depuis quelques années, de nombreux mathématiciens font référence à des surfaces dites de Danielewski. Néanmoins, la notion de surface de Danielewski varie encore selon les auteurs. Nous commencerons donc par fixer la terminologie utilisée dans cette thèse. Elle sera double : nous distinguerons les notions de *surface de Danielewski* et d'*hypersurface de Danielewski*.

Les premiers exemples de surfaces de Danielewski sont les hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$ , que nous notons  $W_1$  et  $W_2$ , définies respectivement par les équations  $xy = z^2 - 1$  et  $x^2y = z^2 - 1$ . Elles ont été introduites en 1989 par W. Danielewski quand il a montré qu'elles constituent des contre-exemples au problème de simplification de Zariski. Cela signifie que les surfaces  $W_1$  et  $W_2$  ne sont pas isomorphes bien que leurs cylindres,  $W_1 \times \mathbf{C}$  et  $W_2 \times \mathbf{C}$ , le soient.

La preuve que donne Danielewski pour montrer que ces cylindres  $W_1 \times \mathbf{C}$  et  $W_2 \times \mathbf{C}$  sont isomorphes est très élégante. Il remarque que les surfaces  $W_1$  et  $W_2$  admettent une action du groupe additif leur conférant une structure de fibré principal homogène sur un même schéma : la droite affine complexe à deux origines  $\mathcal{A}(2)$ . Ainsi, en considérant leur produit fibré  $W_1 \times_{\mathcal{A}(2)} W_2$ , il obtient – tout fibré principal sur une base affine étant trivial – les isomorphismes  $W_1 \times \mathbf{C} \simeq W_1 \times_{\mathcal{A}(2)} W_2 \simeq W_2 \times \mathbf{C}$ .

La notion de surface de Danielewski que l'on adopte dans cette thèse généralise cette structure géométrique et désigne une surface affine ayant une  $\mathbb{A}^1$ -fibration qui se factorise en une fibration localement triviale sur une droite affine à  $d \geq 2$  origines. Cette définition est due à A. Dubouloz et semble s'imposer maintenant comme la bonne notion de surface de Danielewski.

Une autre généralisation naturelle des exemples de Danielewski consiste à considérer les surfaces dans  $\mathbf{C}^3$  d'équation  $x^ny = Q(x, z)$  où  $n$  désigne

un entier naturel non nul et  $Q$  un polynôme tel que  $Q(0, z)$  soit de degré au moins deux. Nous les appellerons des hypersurfaces de Danielewski et en ferons le principal sujet d'étude pour cette thèse.

## 1.1 Surfaces de Danielewski

Le but de cette première partie est de rappeler les définitions relatives aux surfaces de Danielewski ainsi que les principaux résultats les concernant. Ces résultats ne seront pas démontrés ici. (Nous renvoyons aux travaux de K.-H. Fieseler [21] et de A. Dubouloz [17, 18] pour les preuves.) En revanche, nous essaierons de les illustrer sur des exemples explicites.

### 1.1.1 Définition et exemples

La définition que nous adoptons ici est celle donnée par Adrien Dubouloz dans [17].

**Définition 1.1.1.** Une *surface de Danielewski* est la donnée d'une surface affine complexe  $X$  et d'un morphisme surjectif  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{C}}^1 = \mathbf{C}$  à fibres réduites pour lequel il existe un point  $x_0 \in \mathbb{A}_{\mathbf{C}}^1 = \mathbf{C}$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

- $\pi^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{x_0\})$  est isomorphe à  $(\mathbf{C} \setminus \{x_0\}) \times \mathbf{C}$  ;
- $\pi^{-1}(x_0)$  est l'union disjointe de  $d \geq 1$  copies de  $\mathbf{C}$ .

**Remarque 1.1.2.** Nous dirons parfois, par abus de langage, qu'une surface  $X$  est une surface de Danielewski – ou encore qu'elle admet une structure de surface de Danielewski – s'il existe un morphisme  $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}$  tel que le couple  $(X, \pi)$  soit une surface de Danielewski.

Dans toute la suite, nous supposons que  $x_0 = 0$  et utiliserons les notations suivantes.

**Notation 1.1.3.** Étant donnée une surface de Danielewski  $(X, \pi)$ , on note  $l_1, \dots, l_d$  les  $d$  copies de  $\mathbf{C}$  constituant la fibre, dite *fibre spéciale*,  $\pi^{-1}(0)$  :

$$\pi^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^d l_i \quad \text{avec } l_i \simeq \mathbf{C}, i = 1..d.$$

On note également  $U_1, \dots, U_d$  les ouverts de  $X$  définis par

$$U_i := X \setminus \left( \bigcup_{j \neq i} l_j \right) = \pi^{-1}(\mathbf{C}^*) \cup l_i.$$

Donnons maintenant quelques exemples classiques d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  qui admettent une structure de surface de Danielewski.

**Exemple 1.1.4.**

1. Pour tout entier  $n > 0$ , la donnée de l'hypersurface  $W_n \subset \mathbf{C}^3$  définie par l'équation  $x^n y = z^2 - 1$  et de la projection  $\text{pr}_x : W_n \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x$  constitue une surface de Danielewski.
2. Plus généralement, les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  de  $\mathbf{C}^3$  définies par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$ , où  $Q(0, z)$  est un polynôme à racines simples, ont une structure de surface de Danielewski.
3. Le plan affine complexe  $\mathbf{C}^2$  admet naturellement une structure de surface de Danielewski.

Néanmoins, toutes les surfaces de Danielewski ne peuvent pas être réalisées comme des hypersurfaces. L'exemple suivant est tiré d'un article de T. Bandman et L. Makar-Limanov [4]. (Pour prouver que cette surface n'est effectivement pas isomorphe à une hypersurface de  $\mathbf{C}^3$ , les auteurs de [4] montrent que, contrairement à toute hypersurface lisse, son diviseur canonique n'est pas trivial.)

**Exemple 1.1.5.** Le couple  $(X, \pi)$  formé de la surface  $X \subset \mathbf{C}^4$  définie par les équations

$$\begin{cases} xy = (z^2 - 1)z \\ zw = (y^2 - 1)y \\ xw = (z^2 - 1)(y^2 - 1) \end{cases}$$

et de la projection  $\pi = \text{pr}_x : X \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $(x, y, z, w) \mapsto x$  constitue une surface de Danielewski.

*Preuve.* On vérifie facilement que, pour un point  $x_0 \neq 0$ , la fibre  $\pi^{-1}(x_0)$  est

$$\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, x_0^{-1}(z^2 - 1)z, z, x_0^{-1}(z^2 - 1)(x_0^{-2}z^2(z^2 - 1)^2 - 1)) \mid z \in \mathbf{C}\} \simeq \mathbf{C}$$

et ainsi que l'on a bien  $\pi^{-1}(\mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ . Par ailleurs, la fibre spéciale  $\pi^{-1}(0)$  est l'union disjointe des  $d = 4$  droites suivantes :

$$\begin{aligned} l_1 &= \{(0, 1, 0, w) \mid w \in \mathbf{C}\}, \\ l_2 &= \{(0, -1, 0, w) \mid w \in \mathbf{C}\}, \\ l_3 &= \{(0, y, 1, y(y^2 - 1)) \mid y \in \mathbf{C}\}, \\ l_4 &= \{(0, y, -1, -y(y^2 - 1)) \mid y \in \mathbf{C}\}. \end{aligned}$$

□

## 1.1.2 Géométrie des surfaces de Danielewski

Dans cette partie, nous allons brièvement rappeler les résultats portant sur la géométrie des surfaces de Danielewski. Ils proviennent d'un article de K.-H. Fieseler [21] dans lequel il étudie, et classe, les surfaces normales affines complexes avec action de  $(\mathbf{C}, +)$ . Il y montre notamment que la bonne manière d'étudier ces surfaces est de les considérer comme des  $\mathbb{A}^1$ -fibrations, localement triviales, sur un schéma non séparé.

Dans un premier temps, rappelons pourquoi on peut construire une action du groupe additif sur chaque surface de Danielewski.

### $\mathbb{A}^1$ -fibrations et actions de $(\mathbf{C}, +)$

Le morphisme  $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}$  d'une surface de Danielewski  $(X, \pi)$  est, par définition, une  $\mathbb{A}_{\mathbf{C}}^1$ -fibration de base  $\pi(X) = \mathbf{C}$ . (Cela veut dire que la fibre générale de  $\pi$  est isomorphe à  $\mathbf{C}$ .) Or, comme l'a montré M. Miyanishi (voir par exemple [39]<sup>1</sup>), une variété affine admet une  $\mathbb{A}_{\mathbf{C}}^1$ -fibration si et seulement si elle admet une action du groupe additif  $\mathbf{G}_a = (\mathbf{C}, +)$  laissant invariantes les fibres de cette  $\mathbb{A}_{\mathbf{C}}^1$ -fibration.

On peut ainsi associer, à chaque surface de Danielewski  $(X, \pi)$ , une action  $\delta : \mathbf{C} \times X \rightarrow X$  de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $X$  telle que  $\delta(t, \pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(x)$  pour toute constante  $t \in \mathbf{C}$  et tout point  $x \in \mathbf{C}$ .

### Exemple 1.1.6.

1. Le morphisme  $\delta_{Q,n}$  ci-dessous définit une action de  $(\mathbf{C}, +)$  associée à la surface de Danielewski  $(X_{Q,n} = V(x^n y - Q(x, z)), \text{pr}_x)$ .

$$\delta_{Q,n} : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times X_{Q,n} & \rightarrow & X_{Q,n} \\ (t, (x, y, z)) & \mapsto & (x, y + x^{-n}[Q(x, z + tx^n) - Q(x, z)], z + tx^n). \end{array}$$

2. On définit une action  $\delta$  de  $(\mathbf{C}, +)$  sur la surface de Danielewski de l'exemple 1.1.5 en posant

$$\begin{cases} \delta^*(x) = x \\ \delta^*(z) = z + tx^2 \\ \delta^*(y) = y + x^{-1}[(z + tx^2)^3 - (z + tx^2) - (z^3 - z)] \\ \delta^*(w) = w + x^{-1}[(\delta^*(y))^2 - 1](\delta^*(z))^2 - 1 - (y^2 - 1)(z^2 - 1)]. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>voir aussi le corollaire 1.5 dans [3]

## Facteurs de Fieseler et fibrés en droites

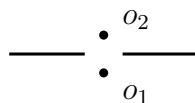
Une des principales difficultés dans l'étude des surfaces de Danielewski est que la fibre spéciale  $\pi^{-1}(0)$  d'une surface de Danielewski  $(X, \pi)$  n'est pas connexe et que la fibration  $\pi$  n'est pas localement triviale. L'idée de K.-H. Fieseler est donc de construire un schéma intermédiaire, en général non séparé, au-dessus duquel la surface  $X$  est un  $\mathbb{A}^1$ -fibré localement trivial. T. Bandman et L. Makar-Limanov [2] donnent le nom de *facteur de Fieseler* à un tel schéma.

Pour les surfaces de Danielewski, ces schémas sont des droites affines à multiples origines.

**Définition 1.1.7.** La *droite affine complexe à  $d$  origines*  $\mathcal{A}(d)$  est le schéma non séparé formé à partir de la droite affine complexe  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C}$  en remplaçant l'origine 0 par  $d \geq 1$  points distincts  $o_1, \dots, o_d$ .

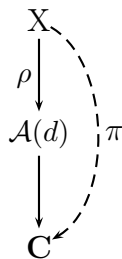
Autrement dit,  $\mathcal{A}(d)$  est le schéma construit en recollant  $d$  droites complexes  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_d$  en identifiant les ouverts  $\mathcal{U}_i \setminus \{o_i\} \simeq \mathbb{C}^*$ .

**Remarque 1.1.8.** On utilise souvent le dessin ci-dessous pour représenter la droite affine à deux origines.



Le morphisme  $\pi$  d'une surface de Danielewski  $(X, \pi)$  se factorise naturellement via un morphisme  $\rho : X \rightarrow \mathcal{A}(d)$  au-dessus de la droite  $\mathcal{A}(d)$ .

**Définition 1.1.9.** Soit  $(X, \pi)$  une surface de Danielewski. Notons  $l_1, \dots, l_d$  les composantes de sa fibre spéciale  $\pi^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^d l_i$ . On définit alors le morphisme  $\rho : X \rightarrow \mathcal{A}(d)$  en posant  $\rho|_{\pi^{-1}(\mathbb{C}^*)} = \pi|_{\pi^{-1}(\mathbb{C}^*)}$  et  $\rho(x) = o_i$  si  $x \in l_i$ .



K.-H. Fieseler a ainsi pu prouver, en montrant que les ouverts  $U_i = \pi^{-1}(\mathbf{C}^*) \cup l_i = \rho^{-1}(\mathcal{U}_i)$  sont isomorphes à  $\mathbf{C}^2$ , qu'une surface de Danielewski est un  $\mathbb{A}^1$ -fibré localement trivial au-dessus de  $\mathcal{A}(d)$ . Plus précisément, il a établi le résultat suivant.

**Proposition 1.1.10 (Fieseler [21]).** *Soit  $(X, \pi)$  une surface de Danielewski. Notons respectivement  $\delta : \mathbf{C} \times X \rightarrow X$  et  $\rho : X \rightarrow \mathcal{A}(d)$ , l'action de  $(\mathbf{C}, +)$  et le morphisme qui lui sont canoniquement associés.*

*Alors, il existe, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , un entier  $m_i \in \mathbf{N}$  et un isomorphisme équivariant  $\varphi_i : \rho^{-1}(\mathcal{U}_i) \rightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbf{C}$  où l'action de  $\delta$  sur  $\mathcal{U}_i \times \mathbf{C}$  est donnée par  $(t, (x, u_i)) \mapsto (x, u_i + tx^{m_i})$ .*

**Corollaire 1.1.11.** *Toute surface de Danielewski est un  $\mathbb{A}^1$ -fibré localement trivial au-dessus d'une droite affine à plusieurs origines.*

J. Wilkens (pour une famille de surfaces de Danielewski [53]) et A. Dubouloz (pour le cas général [17]) ont décrit précisément les fonctions de transition de ces fibrés.

**Théorème 1.1.12.** *Toute surface de Danielewski  $(X, \pi)$  non isomorphe à  $\mathbf{C}^2$  s'identifie au schéma obtenu en recollant  $d \geq 2$  copies  $U_1 \simeq \mathcal{U}_1 \times \mathbf{C}, \dots, U_d \simeq \mathcal{U}_d \times \mathbf{C}$  de  $\mathbf{C}^2$  via les fonctions de transition :*

$$f_{i,j} : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \quad (x, u) \mapsto (x, x^{m_j - m_i} u + x^{-m_i} (\sigma_j(x) - \sigma_i(x))),$$

*pour certains entiers  $m_1, \dots, m_d \geq 1$  et certains polynômes  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  deux à deux distincts tels que  $\deg(\sigma_i) < m_i$ .*

Ce théorème justifie l'utilisation de la terminologie suivante.

**Notation 1.1.13.** Dans la situation du théorème ci-dessus, nous dirons que la surface de Danielewski  $(X, \pi)$  est construite à partir de la donnée des  $d$  couples  $(m_1, \sigma_1(x)), \dots, (m_d, \sigma_d(x)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}[x]$ ; les polynômes  $\sigma_i$  étant distincts et vérifiant  $\deg(\sigma_i) < m_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

### 1.1.3 Classification à isomorphisme près

Avant de pouvoir donner une classification « à isomorphisme près » des surfaces de Danielewski, nous devons préciser ce que l'on entend par là.

## Notions d'isomorphie pour deux surfaces de Danielewski

Par définition, une surface de Danielewski n'est pas seulement une surface affine  $X$ , mais est aussi une fibration  $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}$ . Il est donc naturel de définir la notion d'isomorphisme entre deux surfaces de Danielewski comme étant celle d'un isomorphisme entre deux fibrations.

**Définition 1.1.14.** Deux surfaces de Danielewski  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\phi} & X_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

Dans la pratique, on est plus souvent amené à étudier la question de l'isomorphie de deux surfaces admettant des structures de surfaces de Danielewski, que celle de l'isomorphie de surfaces de Danielewski *en tant que surfaces de Danielewski*. Une même surface pouvant avoir, a priori, plusieurs structures de surfaces de Danielewski non isomorphes, on est alors confronté à une difficulté supplémentaire.

Néanmoins, dans le cas de surfaces n'ayant qu'une seule fibration en droites au-dessus de  $\mathbf{C}$ , ces deux questions sont proches. C'est pourquoi nous introduisons une deuxième notion (plus faible) d'isomorphisme entre deux surfaces de Danielewski. Celle-ci autorise, par rapport à la première, un automorphisme de la base de plus.

**Définition 1.1.15.** Deux surfaces de Danielewski  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  sont dites *isomorphes au sens II* s'il existe un isomorphisme  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  et un automorphisme  $\psi$  de  $\mathbf{C}$  tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\phi} & X_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C} \end{array}$$

Cette nouvelle définition trouve une justification dans le lemme évident suivant. (voir, par exemple, la classification des hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  d'équation  $x^n y - z^2 - h(x)z = 0$  avec  $h(0) \neq 0$  par J. Wilkens [53].)



**Lemme 1.1.16.** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux surfaces affines complexes ayant (à automorphisme de la base près) une et une seule fibration en droites  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  au-dessus d'une droite affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ .<sup>2</sup> Supposons que  $X_1$  et  $X_2$  admettent des structures  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  de surface de Danielewski.*

*Alors, les surfaces  $X_1$  et  $X_2$  sont isomorphes (en tant que surfaces) si et seulement si les surfaces de Danielewski  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  sont isomorphes au sens II.*

**Remarque 1.1.17.** Ce genre de résultat est impossible pour les surfaces ayant plusieurs fibrations en droites. Nous donnerons d'ailleurs plus tard l'exemple d'une surface (dans  $\mathbb{C}^4$ ) admettant deux structures de surfaces de Danielewski non isomorphes au sens II.

### Groupes d'homologie d'une surface de Danielewski

Comme l'a montré K.-H. Fieseler, une surface affine  $X$  admettant une structure de surface de Danielewski peut être vue comme la réunion de  $d$  copies  $U_1, \dots, U_d$  de  $\mathbb{C}^2$  que l'on a recollées sur  $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ . On peut donc calculer facilement, en utilisant le théorème de Mayer-Vietoris, les groupes d'homologie relative de cette surface.

**Proposition 1.1.18.** *Soit  $(X, \pi)$  une surface de Danielewski dont la fibre spéciale  $\pi^{-1}(0)$  est formée de  $d \geq 1$  copies de  $\mathbb{C}$ . Les groupes d'homologie de la surface  $X$  sont alors les suivants.*

- $H_0(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$  ;
- $H_1(X; \mathbf{Z}) = 0$  ;
- $H_2(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{d-1}$  ;
- $H_i(X; \mathbf{Z}) = 0$  pour tout  $i \geq 3$ .

On obtient ainsi une condition topologique – et donc valable pour les deux notions d'isomorphie – pour que deux surfaces de Danielewski soient isomorphes.

**Corollaire 1.1.19.** *Les fibres spéciales de deux surfaces de Danielewski isomorphes ont le même nombre de composantes.*

### Classifications des surfaces de Danielewski

Énonçons finalement le théorème, établi par A. Dubouloz, de classification des surfaces de Danielewski à isomorphisme près.

---

<sup>2</sup>c.-à-d. dont les invariants de Makar-Limanov sont non triviaux.

**Théorème 1.1.20.** *Soient  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  deux surfaces de Danielewski construites respectivement à partir des données  $\{(m_{1,i}, \sigma_{1,i}) \mid 1 \leq i \leq d_1\}$  et  $\{(m_{2,i}, \sigma_{2,i}) \mid 1 \leq i \leq d_2\}$ . Alors, les deux assertions suivantes sont vraies.*

1.  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  sont isomorphes si et seulement si
  - (a)  $d_1 = d_2 = d$  ;
  - (b)  $\exists(\omega, \alpha, \beta(x)) \in \mathbf{S}_d \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}[x]$  tel que  $m_{1,i} = m_{2,\omega(i)}$   
et  $\alpha\sigma_{1,i}(x) \equiv \sigma_{2,\omega(i)}(x) - \beta(x) \pmod{(x^{m_i})}$ .
2.  $(X_1, \pi_1)$  et  $(X_2, \pi_2)$  sont isomorphes au sens II si et seulement si
  - (a)  $d_1 = d_2 = d$  ;
  - (b)  $\exists(\omega, \alpha, a, \beta(x)) \in \mathbf{S}_d \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}[x]$  tel que  $m_{1,i} = m_{2,\omega(i)}$   
et  $\alpha\sigma_{1,i}(x) \equiv \sigma_{2,\omega(i)}(ax) - \beta(ax) \pmod{(x^{m_i})}$ .

## 1.2 Étude « à la main » de quelques exemples

Dans cette section, nous nous proposons d'illustrer comment calculer, en pratique, les fonctions de transition d'une surface de Danielewski plongée dans un espace affine  $\mathbf{C}^n$ . En particulier, nous étudierons complètement le cas des surfaces d'équation  $x^n y = Q(x, z)$  où le polynôme  $Q(0, z)$  est à racines simples.

Commençons par les exemples donnés page 13.

### 1.2.1 Premiers exemples

**Les surfaces  $W_n$**

Les surfaces  $(W_n = V(x^n y - z^2 + 1), \pi = \text{pr}_x)$  sont, historiquement, les premiers exemples de surfaces de Danielewski. Elles ont été étudiées par W. Danielewski [13] et K.-H. Fieseler [21] qui ont montré qu'elles constituent des contre-exemples au problème de simplification de Zariski.

**Théorème 1.2.1 (Danielewski [13] et Fieseler [21]).** *Les hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  définies par  $W_n = V(x^n y - z^2 + 1)$  ont les deux propriétés suivantes :*

- i)  $W_n \times \mathbf{C} \simeq W_{n'} \times \mathbf{C}$  pour tout  $n, n' \geq 1$  ;
- ii)  $W_n \not\simeq W_{n'}$  si  $n \neq n'$ .

*Elles constituent donc des contre-exemples au problème de simplification de Zariski.*

*Preuve.* La preuve du point i) est très élégante. Danielewski commence par remarquer que, comme les actions de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $W_n$  définies dans l'exemple

1.1.6 sont libres, les surfaces  $W_n$  ont une structure de fibré *principal* de groupe structural  $(\mathbf{C}, +)$  au-dessus de la droite affine à deux origines  $\mathcal{A}(2)$ .

Il considère alors le produit fibré  $W_n \times_{\mathcal{A}(2)} W_{n'}$  de  $W_n$  et  $W_{n'}$  et utilise le fait que tout fibré principal au-dessus d'une variété affine est trivial [45] pour obtenir que  $W_n \times \mathbf{C} \simeq W_n \times_{\mathcal{A}(2)} W_{n'} \simeq W_{n'} \times \mathbf{C}$ .

Danielewski et Fieseler prouvent ensuite le point *ii*) en calculant le «  $\pi_1$  à l'infini » de ces hypersurfaces. Ils montrent en effet que  $\pi_1^\infty(W_n) = \mathbf{Z}/(2n\mathbf{Z})$  pour tout  $n \geq 1$ .

Signalons également que Makar-Limanov donne une autre démonstration de *ii*) dans [36]. (cf. la proposition 3.2.1 de cette thèse)

□

Les fonctions de transition des surfaces de Danielewski  $(W_n, \text{pr}_x)$  se calculent aisément.

**Proposition 1.2.2.** *La surface  $W_n = V(x^n y - z^2 + 1)$  peut être obtenue en recollant deux copies de  $\mathbf{C}^2$  via la fonction de transition*

$$f_{1,2} : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \quad (x, u) \mapsto (x, u - 2x^{-n}).$$

*Preuve.* Reprenons la notation 1.1.3 et définissons les droites  $l_1, l_2 \subset W_n$  et les ouverts  $U_1, U_2 \subset W_n$  en posant  $l_1 = \{(x, y, z) \in W_n \mid x = 0 \text{ et } z = 1\}$ ,  $l_2 = \{(x, y, z) \in W_n \mid x = 0 \text{ et } z = -1\}$ , et  $U_1 = W_n \setminus l_2$  et  $U_2 = W_n \setminus l_1$ . L'égalité suivante est vraie sur chaque ouvert  $U_i$ .

$$\frac{z + (-1)^i}{x^n} = \frac{y}{z - (-1)^i}$$

On vérifie alors que le morphisme rationnel  $\phi_i : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^2$  défini par  $\phi_i(x, y, z) = (x, (z + (-1)^i)/x^n) = (x, u)$  induit un isomorphisme  $\varphi_i$  entre  $U_i$  et  $\mathbf{C}^2$  dont l'inverse est induit par le morphisme  $\psi_i : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$  défini par :

$$\psi_i(x, u) = (x, u(x^n - 2(-1)^i), ux^n - (-1)^i).$$

$W_n$  est donc bien construite en recollant les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  suivant la fonction de transition  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ ,  $(x, u) \mapsto (x, u - 2/x^n)$ . □

## Deux exemples dans $\mathbf{C}^4$

Dans la preuve de la proposition suivante, nous menons explicitement le calcul des fonctions de transition de la surface de Bandman et Makar-Limanov. La méthode employée est typique et consiste à travailler par étapes pour trouver les entiers  $m_i$ . (Les notations sont celles introduites page 16.)

**Proposition 1.2.3.** *La surface de Danielewski  $X \subset \mathbf{C}^4$  définie par les équations*

$$xy = (z^2 - 1)z, \quad zw = (y^2 - 1)y, \quad \text{et} \quad xw = (z^2 - 1)(y^2 - 1)$$

*est construite à partir des quatre couples de  $\mathbf{N} \times \mathbf{C}[x]$  suivants :  $(2, -x)$ ,  $(2, x)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .*

*Preuve.* Reprenons les notations de l'exemple 1.1.5 et notons, pour  $i = 1..4$ ,  $U_i$  l'ouvert de  $X$  défini par  $U_i = X \setminus \left\{ \bigcup_{j \neq i} l_j \right\}$ . Nous voulons maintenant construire un isomorphisme  $\varphi_i$  entre  $U_i$  et  $\mathbf{C}^2$ .

1) Commençons par  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$ .

$U_3$  étant défini par  $U_3 = X \setminus \{l_1, l_2, l_4\} = X \setminus \{x = 0 \text{ et } (z = 0 \text{ ou } z = -1)\}$ , il est facile de vérifier que le morphisme rationnel

$$\phi_3 : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^2, \quad (x, y, z, w) \mapsto (x, u_3) \quad \text{où} \quad u_3 = \frac{z-1}{x} = \frac{y}{z(z+1)}$$

induit un isomorphisme  $\varphi_3$  entre  $U_3$  et  $\mathbf{C}^2$ ; son inverse étant induit par le morphisme

$$\Psi_3 : (x, u_3) \mapsto (x, u_3(u_3x+1)(u_3x+2), u_3x+1, u_3(u_3x+2)(u_3^2(u_3x+1)^2(u_3x+2)^2-1)).$$

On montre de même que le morphisme

$$\phi_4 : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^2, \quad (x, y, z, w) \mapsto (x, u_4) \quad \text{avec} \quad u_4 = \frac{z+1}{x} = \frac{y}{z(z-1)}$$

induit un isomorphisme  $\varphi_4$  entre  $U_4$  et  $\mathbf{C}^2$ .

2) La construction de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  n'est pas aussi directe. L'ouvert  $U_1$  étant défini par  $U_1 = X \setminus \{x = 0 \text{ et } (z = \pm 1 \text{ ou } y = -1)\}$ , considérons, dans un premier temps, le morphisme rationnel

$$f_1 : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^3, \quad (x, y, z, w) \mapsto (x, \alpha_1, w) \quad \text{où} \quad \alpha_1 = \frac{z}{x} = \frac{y}{z^2 - 1}.$$

La fonction  $\alpha_1$  étant régulière sur  $U_1$ , ce morphisme induit un isomorphisme entre  $U_1$  et son image

$$f_1(U_1) = V(xw - (\alpha_1^2 x^2 - 1)(\alpha_1^2 (\alpha_1^2 x^2 - 1)^2 - 1)) \setminus \{(0, 1, w) \mid w \in \mathbf{C}\}.$$

Réécrivons alors l'équation de  $f_1(U_1)$  sous la forme suivante :

$$f_1(U_1) = V(x(w - p(x, \alpha_1)) - (1 - \alpha_1^2)) \setminus \{(0, 1, w) \mid w \in \mathbf{C}\},$$

pour un certain polynôme  $p \in \mathbf{C}^{[2]}$  et considérons le morphisme rationnel  $g_1 : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^2$  défini par

$$(x, \alpha_1, w) \mapsto (x, \alpha_2) \quad \text{avec} \quad \alpha_2 = \frac{1 + \alpha_1}{x} = \frac{w - p(x, \alpha_1)}{1 - \alpha_1}.$$

On vérifie facilement que  $g_1$  induit un isomorphisme entre  $f_1(U_1)$  et  $\mathbf{C}^2$ . Finalement, le morphisme  $\phi_1 = g_1 \circ f_1$  induit un isomorphisme entre  $U_1$  et  $\mathbf{C}^2$ . Ce morphisme étant d'ailleurs explicitement défini par

$$\phi_1 : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^3, \quad (x, y, z, w) \mapsto (x, u_1) \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{1 + \alpha_1}{x} = \frac{z + x}{x^2}.$$

3) On montrerait de même que le morphisme rationnel

$$\phi_2 : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^2, \quad (x, y, z, w) \mapsto \left(x, \frac{z - x}{x^2}\right)$$

induit un isomorphisme  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ . □

L'exemple suivant est issu de la thèse de doctorat d'A. Dubouloz et illustre la remarque 1.1.17. Les calculs se mènent exactement comme dans la preuve ci-dessus.

**Proposition 1.2.4.** *La surface  $X \subset \mathbf{C}^4$  définie par les équations*

$$\begin{cases} xz = y(y - 1) \\ yw = z(z^2 - 1) \\ xw = (y - 1)(z^2 - 1) \end{cases}$$

*admet deux structures de surface de Danielewski non isomorphes.*

*L'une est donnée par la projection  $\text{pr}_x$  et correspond aux couples  $(2, x)$ ,  $(2, -x)$  et  $(1, 1)$ . La deuxième, donnée par la projection  $\text{pr}_w$ , correspond aux couples  $(2, x)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .*

## 1.2.2 Surfaces $X_{Q,n}$ et $X_{\sigma,n}$

Nous allons, dans cette sous-section, calculer les fonctions de transition des surfaces de Danielewski  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$ ,  $X_{Q,n}$  désignant la surface dans  $\mathbf{C}^3$  définie par l'équation  $x^n y = Q(x, z)$  avec  $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$  et où  $Q$  est un polynôme de  $\mathbf{C}^{[2]}$  tel que  $Q(0, z)$  soit à racines simples.

Nous montrerons en particulier qu'une telle surface de Danielewski est isomorphe à une surface  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$ , où  $X_{\sigma,n}$  est la surface définie par l'équation  $x^n y = \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x))$  pour une certaine collection de polynômes  $\sigma = \{\sigma_i(x)\}$ .

Signalons que ces résultats ont déjà été donnés dans l'article [20] que nous avons écrit avec A. Dubouloz.

### Fonctions de transition des surfaces $X_{Q,n}$

Considérons, étant donné un entier naturel  $n \geq 1$  et un polynôme  $Q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  tel que  $Q(0, z)$  soit à  $d \geq 2$  racines simples, la surface de Danielewski  $(X_{Q,n}, \pi)$  où  $X_{Q,n}$  est l'hypersurface d'équation  $x^n y = Q(x, z)$  et où  $\pi = \text{pr}_x$  est la projection selon la première coordonnée.

Sa fibre spéciale  $\pi^{-1}(0)$  est constituée des  $d$  droites  $\{(0, y, r_i) \mid y \in \mathbf{C}\}$ , les  $r_i$  désignant les racines du polynôme  $Q(0, z)$ . Nous allons calculer ses fonctions de transition et montrer que  $m_1 = \dots = m_d = n$  (cf. notation 1.1.13).

Pour cela, nous devons appliquer systématiquement la méthode utilisée précédemment pour les exemples de surfaces de Danielewski dans  $\mathbf{C}^4$ . On le fait par le biais du lemme suivant.

**Lemme 1.2.5.** *Soit  $Q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  tel que  $Q(0, z)$  soit à  $d \geq 2$  racines simples. Il existe alors, pour tout entier  $n \geq 1$ , une unique collection de polynômes  $\sigma = \{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq d}$  vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- i)  $\deg(\sigma_i(x)) < n$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ ;
- ii)  $Q(x, \sigma_i(x)) \equiv 0 \pmod{(x^n)}$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

De plus, il existe des polynômes  $R_1, R_2 \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $R_1(0, z) \in \mathbf{C}^*$  et

$$Q(x, z) = R_1(x, z) \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x)) + x^n R_2(x, z).$$

*Preuve.* Posons  $Q(x, z) = \lambda \prod_{i=1}^d (z - \alpha_i) + x \tilde{Q}(x, z)$  pour certains  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ,  $\tilde{Q} \in \mathbf{C}^{[2]}$  et  $\alpha_i \in \mathbf{C}$ .

Notons également, pour chaque indice  $1 \leq i \leq d$ ,  $\sigma_i(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{i,j} x^j$ . Nous allons construire les  $\sigma_{i,j}$  par récurrence sur  $j$ . La condition ii) implique que

$$Q(x, \sum_{j=0}^k \sigma_{i,j} x^j) \equiv 0 \pmod{(x^{k+1})} \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n-1. \quad (*)$$

Quitte à réindicer, on peut supposer que  $\sigma_i(0) = \sigma_{i,0} = \alpha_i$  pour tout  $i \in [1, d]$ . Supposons maintenant que les coefficients  $\sigma_{i,j}$  soient construits pour tout couple  $(i, j) \in [1, d] \times [0, k]$ , pour un certain entier  $0 \leq k \leq n-2$ . Construisons alors les coefficients  $\sigma_{i,k+1}$ . Pour un indice  $i_0$  fixé, on veut :

$$\begin{aligned}
Q(x, \sum_{j=0}^{k+1} \sigma_{i_0,j} x^j) &= \lambda \prod_{i=1}^d \left( \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_{i_0,j} x^j - \alpha_i \right) + x \tilde{Q}(x, \sum_{j=0}^{k+1} \sigma_{i_0,j} x^j) \\
&\equiv \lambda \sigma_{i_0,k+1} \prod_{i \neq i_0} (\alpha_{i_0} - \alpha_i) x^{k+1} + Q(x, \sum_{j=0}^k \sigma_{i_0,j} x^j) \pmod{x^{k+2}} \\
&\equiv \lambda \sigma_{i_0,k+1} \prod_{i \neq i_0} (\alpha_{i_0} - \alpha_i) x^{k+1} + \mu_{i_0} x^{k+1} \pmod{x^{k+2}}
\end{aligned}$$

où  $Q(x, \sum_{j=0}^k \sigma_{i_0,j} x^j) \equiv \mu_{i_0} x^{k+1} \pmod{x^{k+2}}$  vu (\*).

Comme les  $\alpha_i$  sont distincts par hypothèse, il vient, en utilisant une nouvelle fois l'égalité (\*) :

$$\sigma_{i_0,k+1} = \frac{-\mu_{i_0}}{\lambda \prod_{i \neq i_0} (\alpha_{i_0} - \alpha_i)}.$$

En procédant ainsi, on construit donc (de manière unique) la collection  $\sigma$  qui vérifie les points  $i$  et  $ii$ ).

Posons maintenant  $S_0(x, z) = Q(x, z)$  et, par induction sur  $1 \leq i \leq d-1$ ,

$$S_{i+1}(x, z) = \frac{S_i(x, z) - S_i(x, \sigma_{i+1}(x))}{z - \sigma_{i+1}(x)} \in \mathbf{C}[x, z].$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
Q(x, z) &= (z - \sigma_1(x)) S_1(x, z) + Q(x, \sigma_1(x)) \\
&\equiv (z - \sigma_1(x)) S_1(x, z) \pmod{x^n}.
\end{aligned}$$

En exprimant  $S_1(x, z)$  en fonction de  $S_d(x, z)$ , on obtient finalement :

$$Q(x, z) \equiv S_d(x, z) \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x)) \pmod{x^n}.$$

Comme  $Q(0, z)$  est de degré  $d$ , on a de plus  $S_d(0, z) \in \mathbf{C}^*$ . Il suffit alors de poser  $R_1(x, z) = S_d(x, z)$  pour terminer la preuve de ce lemme.  $\square$

Ce lemme nous permet de connaître facilement les fonctions de transition des surfaces  $X_{Q,n}$  et montre qu'elles sont construites à partir des couples  $(n, \sigma_i)$ .

**Proposition 1.2.6.** *Soit  $X_{Q,n}$  une hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  définie par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$  avec un polynôme  $Q$  tel que  $Q(0, z)$  soit à  $d \geq 2$  racines simples.*

*Les fonctions de transition de la surface de Danielewski  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$  sont les fonctions définies par*

$$f_{i,j} : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \quad (x, u) \mapsto (x, u + x^{-n}(\sigma_j(x) - \sigma_i(x)))$$

*où les polynômes  $\sigma_i$  sont ceux donnés par le lemme 1.2.5.*

*Preuve.* Soit  $Q$  un tel polynôme. Notons  $r_1, \dots, r_d$  ses racines et posons, en accord avec la notation 1.1.3,  $U_i = X_{Q,n} \setminus (\bigcup_{j \neq i} l_j)$  où  $l_i$  est la droite  $l_i = \{(0, y, r_i) \mid y \in \mathbf{C}\} \subset X_{Q,n}$ .

D'après le lemme précédent, il existe des polynômes  $\sigma_i(x) \in \mathbf{C}[x]$  et  $R_1, R_2 \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $\sigma_i(0) = r_i$ ,  $R_1(0, z) \in \mathbf{C}^*$  et

$$Q(x, z) = R_1(x, z) \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x)) + x^n R_2(x, z).$$

Il suffit alors de vérifier que, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , le morphisme rationnel  $\phi_i : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^2$  défini par

$$\phi_i(x, y, z) = (x, u_i) \quad \text{où } u_i = \frac{z - \sigma_i(x)}{x^n} = \frac{y - R_2(x, z)}{R_1(x, z) \prod_{j \neq i} (z - \sigma_j(x))}$$

induit bien un isomorphisme  $\varphi_i$  entre  $U_i$  et  $\mathbf{C}^2$  □

## Plongements de certaines surfaces de Danielewski

Nous avons rappelé (cf. notation 1.1.13) que toute surface de Danielewski est déterminée par la donnée de  $d \geq 1$  couples  $(m_1, \sigma_1(x)), \dots, (m_d, \sigma_d(x))$  de  $\mathbf{N}_{\geq 1} \times \mathbf{C}[x]$  où les polynômes  $\sigma_i$  sont distincts, de degrés inférieurs à  $m_i$ .

S'appuyant sur ce résultat, A. Dubouloz développe, dans sa thèse de doctorat, une approche combinatoire pour l'étude des surfaces de Danielewski. Pour cela, il fait correspondre, à toute surface de Danielewski, un arbre à  $d$  feuilles (de hauteurs respectives  $m_1, \dots, m_d$ ) dont les arêtes des branches sont étiquetées par les coefficients des polynômes  $\sigma_i$ . (voir aussi [17] pour une construction précise de ces arbres)

Ce point de vue lui permet notamment de prouver que, réciproquement, toute donnée de  $d \geq 1$  couples  $(m_i, \sigma_i(x))$  avec les propriétés ci-dessus définit bien une surface de Danielewski. Il propose même un algorithme qui donne, pour chaque ensemble de données  $\{(m_i, \sigma_i)\}$  (ou plutôt pour chaque arbre



pondéré), une surface de Danielewski  $(X, \pi)$  construite à partir de ces données ; la surface  $X$  étant une surface définie explicitement comme une surface dans un espace  $\mathbf{C}^N$  pour un certain  $N \in \mathbf{N}$ .

Malheureusement, cet entier  $N$  n'est pas minimal. On ne sait d'ailleurs pas déterminer, étant donné un arbre pondéré définissant une surface de Danielewski  $(X, \pi)$ , le plus petit  $N$  tel que  $X$  se plonge dans  $\mathbf{C}^N$ .

La proposition 1.2.6 permet de répondre à cette question pour une classe de surfaces de Danielewski. Elle montre en effet que certains arbres pondérés, appelés *râteaux* dans [16], correspondent en fait aux surfaces de Danielewski  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  – et même simplement aux surfaces  $X_{\sigma,n}$  définies ci-dessous.

**Notation 1.2.7.** Étant donnés des entiers  $n \geq 1$  et  $d \geq 2$  et une collection  $\sigma = (\sigma_i(x))_{i=1,\dots,d}$  de  $d$  polynômes de  $\mathbf{C}[x]$  de degrés strictement inférieurs à  $n$  et vérifiant  $\sigma_i(0) \neq \sigma_j(0)$  si  $i \neq j$ , nous noterons  $X_{\sigma,n}$  l'hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  définie par l'équation  $x^n y = \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x))$ .

**Proposition 1.2.8.** Soient  $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$  un entier naturel et  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_d(x)$   $d \geq 1$  polynômes de degrés inférieurs à  $n$  tels que  $\sigma_i(0) \neq \sigma_j(0)$  si  $i \neq j$ . Alors, la donnée des couples  $\{(n, \sigma_i)\}_{i=1..d}$  permet de construire une surface de Danielewski isomorphe à la surface  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$ .

*Preuve.* La proposition 1.2.6 montre bien que les fonctions de transition d'une surface de Danielewski  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$  sont les fonctions

$$f_{i,j} : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \quad (x, u) \mapsto (x, u + x^{-n}(\sigma_j(x) - \sigma_i(x))), \quad 1 \leq i \neq j \leq d.$$

Ceci revient à dire que la surface  $X_{\sigma,n}$  est construite à partir des données  $\{(n, \sigma_i)\}_{i=1..d}$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.9.** Toute surface de Danielewski  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$  est isomorphe à une surface  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$ .

Dans [20], nous introduisons la terminologie suivante : une surface de Danielewski  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$  isomorphe à une surface de Danielewski  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$  est appelée *forme standard* de cette dernière.

Le lemme 1.2.5 nous permet de calculer facilement une forme standard d'une surface de Danielewski  $X_{Q,n}$  donnée.

**Exemple 1.2.10.** Considérons la surface de Danielewski  $(X, \text{pr}_x)$  où  $X \subset \mathbf{C}^3$  est l'hypersurface définie par l'équation  $x^2y - z^2 - xq(z) + c^2$  avec  $q(z) \in \mathbf{C}[z]$  et  $c \in \mathbf{C}^*$ .

En appliquant le lemme 1.2.5, on vérifie facilement que la surface de Danielewski  $(X_{\sigma,2}, \text{pr}_x)$  définie par la collection  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  où

$$\sigma_1(x) = -c + x \frac{q(c)}{2c} \quad \text{et} \quad \sigma_2(x) = c - x \frac{q(-c)}{2c},$$

est une forme standard de la surface  $(X, \text{pr}_x)$ .

## 1.3 Hypersurfaces de Danielewski

Les hypersurfaces de Danielewski constituent, tout comme les surfaces de Danielewski, une généralisation naturelle des surfaces  $W_n$  étudiées par W. Danielewski dans [13].

Comme leur nom l'indique, ce sont des hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  et sont donc définies par une équation explicite.

### 1.3.1 Définition et problématiques

**Notation 1.3.1.** Dans toute cette thèse,  $X_{Q,n}$  désigne l'hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  définie par l'équation

$$x^n y = Q(x, z), \quad \text{où } n \in \mathbf{N}_{\geq 1} \text{ et } Q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z],$$

et  $S_{Q,n}$  l'anneau des fonctions régulières sur  $X_{Q,n}$  :

$$S_{Q,n} = \mathbf{C}[X_{Q,n}] = \mathbf{C}[x, y, z] / (x^n y - Q(x, z)).$$

**Définition 1.3.2.** Une *hypersurface de Danielewski* est une hypersurface  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  définie par un polynôme  $Q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  tel que  $\deg Q(0, z) \geq 2$ .

**Remarque 1.3.3.** On a choisi de ne pas appeler hypersurfaces de Danielewski les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  qui sont isomorphes à  $\mathbf{C}^2$ .

L'étude des hypersurfaces  $X_{Q,1}$  (classification, description de leurs automorphismes, etc. . .) ayant déjà été totalement menée, par L. Makar-Limanov [34] et D. Daigle [10], nous nous intéresserons surtout aux hypersurfaces  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$ .

Pour ce faire, nous nous appuierons principalement sur les travaux de L. Makar-Limanov [36] (description du groupe des automorphismes des hypersurfaces d'équation  $x^n y = p(z)$ ) et de G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin [23] (exemples de plongements non équivalents pour les hypersurfaces  $x^n y = r(x)p(z)$ ) et nous essayerons de généraliser leurs méthodes et leurs résultats à toutes les hypersurfaces  $X_{Q,n}$ . (La principale différence avec le cas  $n = 1$  est que l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$  n'est pas trivial. Elles ont donc moins d'automorphismes que les hypersurfaces  $X_{Q,1}$ .)

Comme nous venons de rappeler, dans les sections précédentes, les principales propriétés des surfaces de Danielewski, il nous semble utile de commenter notre exposé en présentant dès maintenant quelques résultats concernant les hypersurfaces de Danielewski ayant une structure de surface de Danielewski ; même si leurs preuves font appel à des résultats qui seront démontrés par la suite.

### Hypersurfaces de Danielewski / surfaces de Danielewski

La projection  $\text{pr}_x : X_{Q,n} \rightarrow \mathbf{C}$  définit une fibration en droites. Nous pouvons donc construire une action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur toute hypersurface  $X_{Q,n}$ .

**Notation 1.3.4.** On note  $\delta_{Q,n}$  l'action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $X_{Q,n}$  définie par :

$$\begin{aligned} \delta_{Q,n} : \mathbf{C} \times X_{Q,n} &\rightarrow X_{Q,n} \\ (t, (x, y, z)) &\mapsto (x, y + x^{-n}[Q(x, z + tx^n) - Q(x, z)], z + tx^n) \end{aligned}$$

Pour que le couple  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$  définisse une surface de Danielewski, il faut que la fibre  $\text{pr}_x^{-1}(0)$  soit réduite. On obtient donc le lemme évident suivant.

**Lemme 1.3.5.** *Soit  $X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski. Le couple  $(X_{Q,n}, \text{pr}_x)$  est une surface de Danielewski si et seulement si le polynôme  $Q(0, z)$  est à  $d \geq 2$  racines simples.*

Avec les résultats des chapitres suivants, nous pourrons même montrer l'énoncé plus fort suivant.

**Théorème 1.3.6.** *Une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  admet une structure de surface de Danielewski si et seulement si le polynôme  $Q(0, z)$  est à  $d \geq 2$  racines simples.*

*Preuve.* Pour le cas  $n = 1$ , il suffit de remarquer que si le polynôme  $Q(0, z)$  a une racine double, alors l'hypersurface  $X_{Q,1}$  est singulière et ne peut donc pas avoir de structure de surface de Danielewski.

Par ailleurs, on montrera (théorème 2.3.5), suivant les idées de L. Makar-Limanov, que, si  $n \geq 2$ , l'invariant de Makar-Limanov de la surface  $X_{Q,n}$  est l'anneau  $\mathbf{C}[x]$ . Ceci montre qu'il existe une unique fibration en droites sur  $X_{Q,n}$  et qu'elle est donnée par la projection  $\text{pr}_x$ .  $\square$

**Remarque 1.3.7.** La fibre spéciale  $\text{pr}_x^{-1}(0) \subset X_{Q,n}$  n'est pas réduite quand le polynôme  $Q(0, z)$  a des racines multiples. L'hypersurface  $X_{Q,n}$  peut alors être singulière. Ainsi, par exemple, l'hypersurface d'équation  $x^2y = z^2$  contient une droite de singularités tandis que l'hypersurface d'équation  $x^2y = z^2 + x$  est lisse.

Nous établirons, dans le chapitre 3, la classification des hypersurfaces de Danielewski à isomorphisme près. Nous montrerons notamment (cf. proposition 3.2.7) que, si deux hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont isomorphes et admettent une structure de surface de Danielewski, alors les surfaces de Danielewski  $(X_{Q_1, n_1}, \text{pr}_x)$  et  $(X_{Q_2, n_2}, \text{pr}_x)$  sont isomorphes au sens II.

## Plongements

Par définition, les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  sont des surfaces plongées dans  $\mathbf{C}^3$ . Il est donc naturel de se poser la question de l'équivalence des plongements de deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes.

Pour cela, nous dirons que deux hypersurfaces  $H_1, H_2 \subset \mathbf{C}^3$  sont *équivalentes* s'il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^3$  tel que  $\Phi(H_1) = H_2$ . (Si  $H_2$  est isomorphe à  $H_1$  mais ne lui est pas équivalente, alors  $H_2$  est l'image d'un plongement  $\varphi : H_1 \rightarrow \mathbf{C}^3$  non équivalent au plongement donné par l'inclusion  $H_1 \subset \mathbf{C}^3$ .)

Le quatrième chapitre de cette thèse sera précisément consacré à la classification des hypersurfaces de Danielewski à équivalence près.

Le lemme évident suivant montre que l'on pourra supposer, pour cette étude, que les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  sont définies par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$  avec  $\deg_x Q(x, z) < n$ .

**Lemme 1.3.8.** *Soient  $X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski et  $R \in \mathbf{C}^{[2]}$  un polynôme.*

*Alors, l'automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par  $(x, y, z) \mapsto (x, y - R(x, z), z)$  induit un isomorphisme entre les hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,n}$  et  $V(x^n y - Q(x, z) - x^n R(x, z))$ .*

*Ces deux hypersurfaces sont donc équivalentes.*

### 1.3.2 Formes standards

L. Makar-Limanov a étudié ([36, 34]), par des méthodes purement algébriques (graduations, dérivations localement nilpotentes), les hypersurfaces définies par une équation de la forme  $x^n y = p(z)$ . Il a donné leur classification à isomorphisme près et déterminé leurs groupes d'automorphismes. Plus récemment, A. Crachiola [7] a mené à bien le même travail (sur un corps quelconque) pour celles d'équation  $x^2 y = z^2 + zh(x)$ .

Après lecture de leurs résultats, il faut noter deux choses. D'une part, tous les automorphismes de ces hypersurfaces proviennent de la restriction d'automorphismes de l'espace ambiant. D'autre part, si deux telles hypersurfaces sont isomorphes, alors elles sont équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .

Il se trouve que ces deux propriétés ne sont plus vraies pour les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  en général. En effet, G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin ont montré [23] que deux telles hypersurfaces peuvent être isomorphes sans être équivalentes. Ces « pathologies » nous compliquent la tâche quand on veut généraliser les méthodes de Makar-Limanov à toutes les hypersurfaces  $X_{Q,n}$ .

C'est pourquoi nous allons, dans un premier temps, montrer que l'étude des hypersurfaces  $X_{Q,n}$  peut se ramener à celle d'une classe particulière d'hypersurfaces de Danielewski. Nous appellerons ces hypersurfaces des hypersurfaces de Danielewski *sous forme standard*. Cette terminologie sera justifiée par le fait que les pathologies observées par G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin n'apparaissent pas dans ce cadre et que les résultats de L. Makar-Limanov se généralisent.

Plus précisément, nous montrerons, au fil de cette thèse, que ces hypersurfaces vérifient les propriétés suivantes.

#### **Propriétés des hypersurfaces de Danielewski sous forme standard :**

1. On dispose d'un algorithme qui associe, à toute hypersurface de Danielewski  $X$ , une hypersurface de Danielewski sous forme standard  $X_s$  isomorphe à  $X$ .
2. On connaît des conditions nécessaires et suffisantes explicites pour que deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard soient isomorphes.
3. Deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard isomorphes sont équivalentes. (via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  triangulaire)
4. Tous les automorphismes d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard proviennent de la restriction d'automorphismes de  $\mathbf{C}^3$ .

Nous avons vu comment, grâce au lemme 1.2.5, calculer les fonctions de transition d'une surface de Danielewski et donc comment déterminer « géométriquement » quand deux surfaces de Danielewski sont isomorphes.

Nous allons maintenant construire explicitement des isomorphismes. La méthode que l'on va utiliser (c'est en fait la généralisation d'un résultat de G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin [23]) est purement algébrique et s'appliquera donc non seulement pour les surfaces de Danielewski mais aussi pour les hypersurfaces de Danielewski. Cette méthode repose sur le lemme suivant.

**Lemme 1.3.9.** *Soient  $n \geq 1$  un entier et  $Q_1(x, z)$  et  $Q_2(x, z)$  deux polynômes de  $\mathbf{C}[x, z]$  tels que  $Q_1(0, z) = Q_2(0, z)$ .*

*Supposons qu'il existe des polynômes  $\pi(x, z)$  et  $R(x, z)$  de  $\mathbf{C}[x, z]$  tels que*

$$Q_2(x, z) = (1 + x\pi(x, z))Q_1(x, z) + x^n R(x, z).$$

*Alors l'endomorphisme,  $\Phi$ , de  $\mathbf{C}^3$  défini par*

$$\Phi(x, y, z) = (x, (1 + x\pi(x, z))y + R(x, z), z)$$

*induit un isomorphisme  $\varphi : X_{Q_1, n} \rightarrow X_{Q_2, n}$  entre les hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n}$  et  $X_{Q_2, n}$ .*

*Preuve.* Notons tout d'abord que  $\Phi$  vérifie l'égalité

$$\Phi^*(x^n y - Q_2(x, z)) = (1 + x\pi(x, z))(x^n y - Q_1(x, z))$$

et induit donc un morphisme  $\varphi : X_{Q_1, n} \rightarrow X_{Q_2, n}$ .

Choisissons maintenant deux polynômes  $f(x, z)$  et  $g(x, z)$  de  $\mathbf{C}[x, z]$  tels que  $(1 + x\pi(x, z))f(x, z) + x^n g(x, z) = 1$  et considérons l'endomorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{C}^3$  défini par

$$\begin{cases} \Psi^*(x) = x \\ \Psi^*(y) = f(x, z)y + g(x, z)Q_1(x, z) - f(x, z)R(x, z) \\ \Psi^*(z) = z \end{cases}$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\Psi^*(x^n y - Q_1(x, z)) = f(x, z)(x^n y - Q_2(x, z))$$

et

$$\begin{aligned} \Psi^* \circ \Phi^*(x) &= x ; \\ \Psi^* \circ \Phi^*(y) &= y - g(x, z)(x^n y - Q_2(x, z)) ; \\ \Psi^* \circ \Phi^*(z) &= z. \end{aligned}$$

La restriction de  $\Psi^* \circ \Phi^*$  à  $S_{Q_2, n} = \mathbf{C}[X_{Q_2, n}]$  est donc l'identité. Ceci prouve bien que  $\Psi$  induit le morphisme inverse de  $\varphi$  et que l'on a donc  $X_{Q_1, n} \simeq X_{Q_2, n}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.10.** L'endomorphisme  $\Phi$ , construit dans le théorème précédent, est bien un *endomorphisme* de  $\mathbf{C}^3$  : a priori, il n'est pas inversible. Autrement dit, les deux hypersurfaces  $X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$  sont isomorphes mais il n'y a pas de raison qu'elles soient équivalentes.

Signalons que, dans le cas particulier où  $n = 2$ , ce lemme implique le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.11.** *Soit  $X$  une hypersurface de Danielewski d'équation  $x^2y = Q(x, z) = p(z) + xq(x, z)$ . Alors,  $X$  est isomorphe à l'hypersurface de Danielewski d'équation  $x^2y = p(z) + xr(z)$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $q(0, z)$  par  $p(z)$ .*

*Preuve.* Par définition de  $r$ , il existe un polynôme  $\pi(z) \in \mathbf{C}[z]$  tel que  $q(0, z) = p(z)\pi(z) + r(z)$ . En notant  $R(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  le polynôme défini par  $R(x, z) = x^{-1}(q(x, z) - q(0, z)) - r(z)\pi(z)$ , on peut alors écrire que  $p(z) + xq(x, z) = (1 + x\pi(z))(p(z) + xr(z)) + x^2R(x, z)$ , et conclure par le lemme 1.3.9.  $\square$

Nous pouvons maintenant introduire la notion de forme standard d'une hypersurface de Danielewski.

**Définition 1.3.12.** Une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  est dite *sous forme standard* si

$$Q(x, z) = p(z) + xq(x, z) \text{ avec } \deg_z(q(x, z)) < \deg(p).$$

On dit également que  $X_{Q,n}$  est *une forme standard* d'une hypersurface de Danielewski  $X$  si  $X_{Q,n}$  est sous forme standard et  $X \simeq X_{Q,n}$ .

Le théorème suivant prouve que toute hypersurface de Danielewski admet une forme standard et que celle-ci est obtenue par des divisions euclidiennes successives.

**Théorème 1.3.13.** *Soit  $X$  une hypersurface de Danielewski définie par une équation  $x^n y = p(z) + xq(x, z)$ .*

*Alors, on peut déterminer « algorithmiquement » une forme standard  $X_s$  de  $X$ , c'est-à-dire un polynôme  $q_s(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  tel que  $\deg_z(q_s(x, z)) < \deg(p)$  et  $X \simeq X_s = V(x^n y - p(z) - xq_s(x, z))$ .*

*Preuve.* Commençons par montrer, en travaillant par récurrence sur  $m \geq 0$ , qu'il existe des polynômes  $q_{s,m}(x, z)$  et  $\pi_m(x, z)$  tels que

$$\deg_z(q_s(x, z)) < \deg(p)$$

et

$$p(z) + xq(x, z) \equiv (1 + x\pi_m(x, z))(p(z) + xq_{s,m}(x, z)) \pmod{x^{m+1}}.$$

Cette assertion est clairement vraie pour  $m = 0$  en prenant  $q_{s,0} = \pi_0 = 0$ . Supposons maintenant qu'elle soit vraie au rang  $m$  et montrons qu'elle l'est aussi au rang  $m + 1$ . Écrivons par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} p(z) + xq(x, z) &\equiv (1 + x\pi_m(x, z))(p(z) + xq_{s,m}(x, z)) \pmod{x^{m+1}} \\ &= (1 + x\pi_m(x, z))(p(z) + xq_{s,m}(x, z)) + x^{m+1}R_{m+1}(x, z). \end{aligned}$$

Notons  $R_{m+1}(0, z) = p(z)\tilde{\pi}_{m+1}(z) + r_{m+1}(z)$  la division euclidienne dans  $\mathbf{C}[z]$  de  $R_{m+1}(0, z)$  par  $p$ . En posant  $q_{s,m+1}(x, z) = q_{s,m}(x, z) + x^m r_{m+1}(z)$  et  $\pi_{m+1}(x, z) = \pi_m(x, z) + x^m \tilde{\pi}_{m+1}(z)$ , on obtient alors l'égalité voulue. (car  $\deg(r_{m+1}) < \deg(p)$  par construction.)

En posant  $q_s = q_{s,n-1}$ ,  $\pi = \pi_{n-1}$  et  $R = R_n$ , on a finalement :

$$p(z) + xq(x, z) = (1 + x\pi(x, z))(p(z) + xq_s(x, z)) + x^n R(x, z).$$

Il suffit alors de suivre le lemme 1.3.9 pour montrer que  $X$  est isomorphe à l'hypersurface  $X_s = V(x^n y - p(z) - xq_s(x, z))$ .

Pour cela, choisissons des polynômes  $f$  et  $g$  tels que

$$(1 + x\pi(x, z))f(x, z) + x^n g(x, z) = 1$$

et considérons les endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$ ,  $\Phi_s$  et  $\Phi^s$ , définis respectivement par :

$$\Phi_s(x, y, z) = (x, (1 + x\pi(x, z))y + R(x, z), z)$$

et

$$\Phi^s(x, y, z) = (x, f(x, z)y + g(x, z)(p(z) + xq_s(x, z)) - f(x, z)R(x, z), z).$$

D'après le lemme,  $\Phi_s$  et  $\Phi^s$  induisent bien des morphismes  $\phi_s : X_s \rightarrow X$  et  $\phi^s : X \rightarrow X_s$  tels que  $\phi_s \circ \phi^s = \text{id}_X$  et  $\phi^s \circ \phi_s = \text{id}_{X_s}$ .

Cette preuve étant constructive, elle fournit un algorithme calculant, pour toute hypersurface  $X_{Q,n}$ , une hypersurface de Danielewski sous forme standard qui lui est isomorphe.  $\square$



**Notation 1.3.14.** Étant données une hypersurface de Danielewski  $X$  et une de ses formes standards  $X_s$ , nous noterons  $\phi_s : X_s \rightarrow X$  et  $\phi^s : X \rightarrow X_s$  les isomorphismes entre  $X$  et  $X_s$  construits dans la preuve du théorème 1.3.13. Nous noterons également  $\Phi_s$  et  $\Phi^s$  les endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$  induisant  $\phi_s$  et  $\phi^s$ .

Remarquons que ces endomorphismes  $\Phi_s$  et  $\Phi^s$  fixent les variables  $x$  et  $z$  et notons une fois encore que les isomorphismes  $\phi^s$  et  $\phi_s$  ne s'étendent pas, a priori, en des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$ .

**Exemple 1.3.15.**

1. Les hypersurfaces de Danielewski  $X_{\sigma,n}$  (cf. notation 1.2.7) sont sous forme standard.
2. D'après le corollaire 1.3.11, une forme standard d'une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,2}$  d'équation  $x^2y = Q(x, z) = p(z) + xq(z)$  est l'hypersurface d'équation  $x^2y = p(z) + xq_s(z)$  où  $q_s$  est le reste de la division euclidienne de  $q$  par  $p$ .
3. Soient  $c \in \mathbf{C}^*$  et  $q(z) \in \mathbf{C}[z]$ . On vérifie aisément que le polynôme  $q(z) - \frac{q(c)+q(-c)}{2} + z\frac{q(-c)-q(c)}{2c}$  est divisible par  $z^2 - c^2$  et que l'hypersurface

$$V\left(x^2y - z^2 + c^2 - x\left(\frac{q(c) + q(-c)}{2} - z\frac{q(-c) - q(c)}{2c}\right)\right)$$

est donc une forme standard de l'hypersurface de Danielewski d'équation  $x^2y = z^2 + xq(z) - c^2$ .

**Remarque 1.3.16.** On avait calculé dans l'exemple 1.2.10 que les hypersurfaces d'équation

$$x^2y = \left(z + c - x\frac{q(c)}{2c}\right)\left(z - c + x\frac{q(-c)}{2c}\right)$$

sont des formes standards des hypersurfaces d'équation  $x^2y - z^2 - xq(z) + c^2$  où  $c \in \mathbf{C}^*$ .

On vérifie facilement, en développant ces équations et en composant par une translation en  $y$ , que l'on retrouve bien celles calculées dans l'exemple 1.3.15 ci-dessus.

Comme le montre la proposition suivante, il n'est en fait pas nécessaire de recourir à une expression rationnelle en  $c$  pour décrire les formes standards des hypersurfaces  $x^2y = z^2 + xq(z) - c$ .

Ce résultat sera le point de départ pour obtenir la classification de toutes les hypersurfaces de Danielewski à équivalence près.

**Proposition 1.3.17.** Soient  $p$  et  $q$  deux polynômes de  $\mathbf{C}[z]$ . Écrivons  $q$  sous la forme

$$q(z) = \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(p(z))z^i \quad \text{avec } q_i \in \mathbf{C}^{[1]} \text{ pour } i = 0.. \deg(p) - 1.$$

Pour chaque  $c \in \mathbf{C}$ , une forme standard de l'hypersurface de Danielewski  $X \subset \mathbf{C}^3$  d'équation

$$x^2y = p(z) + xq(z) - c = p(z) - c + x \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(p(z))z^i$$

est alors l'hypersurface

$$X \simeq X_s = V\left(x^2y - p(z) + c - x \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(c)z^i\right).$$

*Preuve.* On est dans le cadre du point 2. de l'exemple 1.3.15. Pour calculer une forme standard de l'hypersurface d'équation  $x^2y = p(z) + xq(z) - c$ , il suffit donc de trouver le reste  $r_c$  de la division euclidienne de  $q$  par  $p - c$ . En écrivant

$$q(z) = \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(p(z))z^i = \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(p(z) - c + c)z^i,$$

il est évident que ce reste est  $r_c(z) = \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} q_i(c)z^i$ .  $\square$

On a implicitement utilisé, dans l'énoncé de la proposition ci-dessus, le lemme évident suivant.

**Lemme 1.3.18.** Étant donnés deux polynômes  $p, q \in \mathbf{C}[z]$ , il existe d'uniques polynômes  $q_0, \dots, q_{\deg(p)-1}$  et  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{\deg(p)}$  tels que

$$q(z) = \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} z^i q_i(p(z)) = \sum_{i=1}^{\deg(p)} p^{(i)}(z) \tilde{q}_i(p(z)).$$

### Notion de forme standard réduite

Nous souhaitons finir ce chapitre, en introduisant une notion plus précise de forme standard : celle d'hypersurfaces de Danielewski *sous forme standard réduite*. Ce sont des hypersurfaces de Danielewski sous forme standard satisfaisant certaines conditions de degrés. Nous verrons par la suite que si deux telles hypersurfaces sont isomorphes, alors elles sont équivalentes via un automorphisme affine de  $\mathbf{C}^3$ .

**Définition 1.3.19.** Une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  est dite *sous forme standard réduite* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\deg_x(Q(x, z)) < n$  ;
2. On peut écrire  $Q(x, z) = p(z) + xq(x, z)$  avec  $\deg_z(q(x, z)) \leq \deg(p) - 2$ .

**Proposition 1.3.20.** *Toute hypersurface de Danielewski est isomorphe à une hypersurface sous forme standard réduite.*

*Preuve.* Soit  $X$  une hypersurface de Danielewski. D'après le théorème 1.3.13,  $X$  est isomorphe à une hypersurface  $X_s = X_{Q,n}$  sous forme standard. Posons alors  $Q(0, z) = p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0$  et notons

$$Q(x, z) = p(z) + x \sum_{i=0}^{d-1} z^i \alpha_i(x) \quad \text{pour certains polynômes } \alpha_i(x) \in \mathbf{C}[x].$$

Considérons alors l'automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par :

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto (x, y, z - x(da_d)^{-1} \alpha_{d-1}(x)).$$

On vérifie aisément que le polynôme  $\Phi^*(x^n y - Q(x, z)) = x^n y - Q(x, \Phi^*(z))$  satisfait la condition numéro 2 de la définition d'une hypersurface sous forme standard réduite. On peut donc conclure en utilisant le lemme 1.3.8.  $\square$

# Chapitre 2

## Dérivations localement nilpotentes

Avec les travaux de L. Makar-Limanov [35, 36] sur la cubique de Russell et sur les hypersurfaces  $V(x^n y - p(z)) \subset \mathbf{C}^3$ , les dérivations localement nilpotentes sont devenues un des principaux outils dans l'étude des variétés algébriques affines.

Dans ce chapitre, nous suivrons les idées qu'il a développées dans [36] et déterminerons toutes les dérivations localement nilpotentes sur les algèbres  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[X_{Q,n}]$ . Cela nous permettra notamment d'obtenir, dans le chapitre suivant, la classification de toutes les hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,n}$  à isomorphisme près.

### 2.1 Rappels sur les dérivations localement nilpotentes.

Dans cette partie, nous voulons rappeler brièvement quelques propriétés bien connues des dérivations et des dérivations localement nilpotentes, en nous limitant à celles qui nous seront utiles dans la suite pour calculer les ensembles  $\text{LND}(S_{Q,n})$  des dérivations localement nilpotentes sur les algèbres  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[X_{Q,n}]$ .

Précisons par ailleurs que les résultats et les preuves qui seront donnés sans référence sont issus des notes de L. Makar-Limanov [33].

#### Dérivations

Commençons par définir ce que sera, dans cette thèse, une dérivation.

**Définition 2.1.1.** Soit  $A$  une algèbre sur  $\mathbf{C}$ . Un homomorphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire  $D$  de  $A$  est une *dérivation* sur  $A$  s'il vérifie la relation de Leibnitz :

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \quad \forall a, b \in A.$$

On notera  $D \in \text{DER}(A)$ . Le noyau de  $D$  est noté  $A^D$  et appelé *anneau des constantes* de  $D$ .

Remarquons que toute dérivation  $D$  vérifie  $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$  et  $D(\alpha) = D(\alpha \cdot 1) = \alpha D(1)$  pour tout  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Ainsi,  $\mathbf{C} \subset A^D$  pour toute dérivation  $D \in \text{DER}(A)$ .

**Exemple 2.1.2.**

1. Les dérivations partielles  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$  sont des dérivations sur  $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ .
2. D'autres dérivations que l'on rencontre souvent sont les dérivations triangulaires, c.-à-d. les dérivations sur  $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$  de la forme :

$$D = a_1(X_2, \dots, X_n)\partial_1 + \dots + a_{n-1}(X_{n-1})\partial_{n-1} + a_n\partial_n$$

où  $a_i \in \mathbf{C}[X_{i+1}, \dots, X_n]$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et  $a_n \in \mathbf{C}$ .

**Remarque 2.1.3.** Dans le cas d'une dérivation  $D$  sur une algèbre de polynômes  $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ , la donnée des images des variables  $X_i$  par  $D$  suffit à définir  $D$ . On vérifie en effet facilement la relation suivante :

$$D(P(X_1, \dots, X_n)) = D(X_1)\frac{\partial P}{\partial X_1}(X_1, \dots, X_n) + \dots + D(X_n)\frac{\partial P}{\partial X_n}(X_1, \dots, X_n),$$

pour tout  $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ .

**Lemme 2.1.4.** Si  $D$  est une dérivation sur une  $\mathbf{C}$ -algèbre intègre  $A$ , alors son noyau  $A^D$  est algébriquement clos sur  $A$ .

*Preuve.* Soit  $a$  un élément non nul de  $A$  algébrique sur  $A^D$ . Écrivons

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \dots + c_1a + c_0 = 0,$$

avec  $a_i \in A^D$  pour tout  $i$ . Choisissons un  $n$  minimal avec cette propriété. Alors, en appliquant  $D$ , il vient

$$(na^{n-1} + (n-1)c_{n-1}a^{n-2} + \dots + c_1)D(a) = 0.$$

Dès lors, la minimalité de  $n$  et le fait que  $A$  soit intègre impliquent  $D(a) = 0$ .

□

## Dérivations localement nilpotentes

**Définition 2.1.5.** Une dérivation  $D$  sur  $A$  est dite *localement nilpotente* si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall a \in A, \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } D^n(a) = 0.$$

On note  $D \in \text{LND}(A)$ .

A toute dérivation localement nilpotente  $D$ , on associe la fonction  $\deg_D$  sur  $A$  définie par  $\deg_D(0) = -\infty$  et  $\deg_D(a) = \max\{n \mid D^n(a) \neq 0\}$  si  $a \in A \setminus \{0\}$ .

En pratique, pour savoir si une dérivation est localement nilpotente, on n'a bien entendu pas besoin de tester chaque élément un à un. On a recours au lemme évident suivant :

**Lemme 2.1.6.** *Si  $G$  est un ensemble qui engendre une  $\mathbf{C}$ -algèbre  $A$ , alors une dérivation  $D$  sur  $A$  est localement nilpotente si et seulement si il existe, pour chaque  $g \in G$ , un entier  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $D^n(g) = 0$ .*

### Exemple 2.1.7.

1. Les dérivations  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$  sont localement nilpotentes.
2.  $X \frac{\partial}{\partial X}$  est une dérivation sur  $\mathbf{C}[X]$  qui n'est pas localement nilpotente.
3. D'après le lemme précédent, les dérivations triangulaires sont localement nilpotentes.

Les dérivations localement nilpotentes sont en fait la traduction algébrique d'objets géométriques : les actions algébriques du groupe  $(\mathbf{C}, +)$  ; le noyau d'une dérivation correspondant aux invariants d'une action.

Plus précisément, il existe une correspondance bijective entre les dérivations localement nilpotentes sur une  $\mathbf{C}$ -algèbre  $A$  et les actions de groupe  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $\text{Spec}(A)$  ; ces dernières arrivant comme les exponentielles des dérivations localement nilpotentes. (Nous renvoyons aux notes de D. Daigle [12] pour un exposé rigoureux de ce fait.) En pratique, on utilise les formules suivantes :

**Lemme 2.1.8.** *Soit  $X$  une variété algébrique affine et  $A = \mathbf{C}[X]$  la  $\mathbf{C}$ -algèbre des fonctions régulières sur  $X$ . Alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. Pour chaque dérivation  $D \in \text{LND}(A)$ , définissons l'application  $\exp(tD) : A \rightarrow A \otimes \mathbf{C}[t]$  par

$$\exp(tD) : A \rightarrow A \otimes \mathbf{C}[t] \simeq A[t], \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{\deg_D(a)} t^i \frac{D^i(a)}{i!}.$$

Alors, l'application  $(\exp(tD))_*$  est une action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $X$ .

2. Si  $\delta$  est une action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $X$ , alors l'application  $D$  définie sur  $A$  par

$$D(a) = \left. \frac{\delta^*(a) - a}{t} \right|_{t=0}$$

est une dérivation localement nilpotente sur  $A$ .

Ainsi, d'après le lemme ci-dessus, étudier les actions de  $(\mathbf{C}, +)$  (et donc les fibrations en droites) sur une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  revient à étudier les dérivations localement nilpotentes sur les algèbres  $S_{Q,n}$ .

Nous avons défini (notation 1.3.4) des actions  $\delta_{Q,n}$  sur les hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,n}$ . On peut donc en déduire les dérivations localement nilpotentes correspondantes sur les anneaux  $S_{Q,n}$ .

**Notation 2.1.9.** On note  $\Delta_{Q,n}$  la dérivation localement nilpotente sur  $S_{Q,n}$  définie par :

$$\Delta_{Q,n} = x^n \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}$$

### Noyaux des dérivations localement nilpotentes

Les noyaux des dérivations localement nilpotentes sur une algèbre  $A$  se révèlent être de bons outils pour l'étude de l'algèbre  $A$  elle-même. Certains éléments, appelés *slices* et *préslices*, jouent alors un rôle particulier. Ils permettent en effet, étant donnée une dérivation  $D \in \text{LND}(A)$  localement nilpotente, de voir la  $\mathbf{C}$ -algèbre  $A$  comme une algèbre de polynômes à coefficients dans  $A^D$ , le noyau de  $D$ .

**Définition 2.1.10.** Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur  $A$ .

Un élément  $s$  de  $A$  est appelé un *slice de  $D$*  s'il vérifie  $D(s) = 1$ .

Un élément  $p$  de  $A$  est appelé un *préslice de  $D$*  si  $D(p) \in A^D$  mais  $p \notin A^D$ .

Toutes les dérivations localement nilpotentes ont des préslices mais elles n'ont pas forcément de slice. Il est en général commode de travailler avec des

dérivations admettant des slices ; l'existence même d'un slice garantit en effet que la dérivation a de « bonnes » propriétés.

La proposition suivante, due à D. Wright [54], en donne un exemple.

**Proposition 2.1.11 (Wright).** *Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur une  $\mathbf{C}$ -algèbre intègre  $A$ . Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Si  $s$  est un slice de  $D$ , alors  $A$  est un anneau de polynômes sur  $A^D$  et  $A = A^D[s]$ .*
2. *Si  $p$  est un préslice de  $D$ , alors  $A \subset \text{Frac}(A^D)[p]$  et  $\forall b \in A \quad \exists a, a_0, a_1, \dots, a_{\deg_D(b)} \in A^D$  tels que  $a, a_{\deg_D(b)} \neq 0$  et*

$$ab = \sum_{i=0}^{\deg_D(b)} a_i p^i.$$

*Preuve.* On va montrer les deux assertions en même temps. Soit  $p$  un préslice de  $D$ . Montrons, en travaillant par récurrence sur  $\deg_D(b)$ , que tout élément  $b$  non nul de  $A$  satisfait une équation de la forme

$$ab = \sum_{i=0}^{\deg_D(b)} a_i p^i,$$

avec  $a, a_0, a_1, \dots, a_{\deg_D(b)} \in A^D$  tels que  $a, a_{\deg_D(b)} \neq 0$ . On verra de plus que, dans le cas particulier où  $p$  est un slice, on peut choisir  $a = 1$ .

Si  $\deg_D(b) = 0$ , alors  $b \in A^D$  et le résultat est évident.

Supposons à présent que le résultat soit vrai au rang  $n - 1$  et montrons le au rang  $n$ . Considérons un élément  $b \in A$  tel que  $\deg_D(b) = n$ .

Comme  $\deg_D(D(b)) = n - 1$ , il existe, par hypothèse de récurrence, des éléments  $a, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in A^D$  tels que :

$$aa_{n-1} \neq 0, \quad a = 1 \text{ si } p \text{ est un slice} \quad \text{et} \quad aD(b) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i.$$

En posant  $\tilde{a}_i = a_i/(i + 1)$ , il vient alors  $D(\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i p^{i+1}) = D(p)aD(b)$ .

Or,  $D(p) \in A^D$  par définition. D'où,  $D(D(p)ab - \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i p^{i+1}) = 0$  et donc  $D(p)ab = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i p^{i+1} + a_n$  pour un certain  $a_n \in A^D$ .

Ceci termine la preuve car  $D(p) = 1$  quand  $p$  est un slice.  $\square$

Cette proposition était en fait l'outil dont nous avons besoin pour démontrer le théorème suivant.



**Théorème 2.1.12.** *Soient  $A$  une  $\mathbf{C}$ -algèbre intègre et  $D \in \text{LND}(A)$ . Si  $D \neq 0$ , alors les assertions suivantes sont vraies :*

1.  $A$  est de degré de transcendance 1 sur  $A^D$ .
2.  $\text{deg}_D$  est une fonction degré, c-à-d :  
 $\text{deg}_D(a + b) \leq \max(\text{deg}_D(a), \text{deg}_D(b))$  pour tout  $a, b \in A$   
et  $\text{deg}_D(ab) = \text{deg}_D(a) + \text{deg}_D(b)$  pour tout  $a, b \in A$ .
3.  $A^D$  est factoriellement clos, ce qui signifie que si deux éléments non nuls  $a, b \in A \setminus \{0\}$  sont tels que  $ab \in A^D$ , alors  $a \in A^D$  et  $b \in A^D$ .

*Preuve.*  $D$  étant non nulle, il existe un préslice  $p$  de  $D$ . Il suffit en effet de considérer un élément  $a \in A \setminus A^D$  et de poser  $p = D^{\text{deg}_D(a)-1}(a)$ .

Le fait que  $A$  soit de degré de transcendance 1 sur  $A^D$  est alors une conséquence immédiate du point 2 de la proposition 2.1.11.

Considérons maintenant deux éléments  $a, b \in A$  et notons  $\alpha = \text{deg}_D(a)$  et  $\beta = \text{deg}_D(b)$  leurs degrés respectifs. Il vient alors, par définition de  $\text{deg}_D$  :

$$D^{\max(\alpha, \beta)+1}(a + b) = D^{\max(\alpha, \beta)+1}(a) + D^{\max(\alpha, \beta)+1}(b) = 0 ,$$

$$D^{\alpha+\beta}(ab) = \sum_{i=0}^{\alpha+\beta} C_{\alpha+\beta}^i D^i(a) D^{\alpha+\beta-i}(b) = C_{\alpha+\beta}^\alpha D^\alpha(a) D^\beta(b) \neq 0$$

et

$$D^{\alpha+\beta+1}(ab) = D(D^{\alpha+\beta}(ab)) = C_{\alpha+\beta}^\alpha D^{\alpha+1}(a) D^\beta(b) + C_{\alpha+\beta}^\alpha D^\alpha(a) D^{\beta+1}(b) = 0;$$

ce qui démontre le point 2. du théorème. Le point 3. s'en déduit alors directement.  $\square$

Donnons maintenant deux corollaires immédiats mais bien utiles en pratique.

**Corollaire 2.1.13.** *Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur une algèbre intègre  $A$  de degré de transcendance  $n$ . Alors, il existe  $n - 1$  éléments algébriquement indépendants  $a_1, \dots, a_{n-1} \in A^D$ . De plus, si  $D$  annule  $n$  éléments algébriquement indépendants, alors  $D = 0$ .*

**Corollaire 2.1.14.** *Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur une  $\mathbf{C}$ -algèbre intègre  $A$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. Si un élément  $a \in A$  est tel que  $a$  divise  $D(a)$ , alors  $D(a) = 0$ .
2. Si  $a, b \in A$  sont tels que  $a \mid D(b)$  et  $b \mid D(a)$ , alors  $D(a)D(b) = 0$ .

*Preuve.* Supposons que  $a \mid D(a)$  pour un certain  $a \in A$ . Alors  $\exists b \in A$  tel que  $D(a) = ab$ . On a donc  $\deg_D(D(a)) = \deg_D(a) + \deg_D(b)$ . Or,  $\deg_D(a) > \deg_D(D(a))$  par définition. D'où  $\deg_D(b) < 0$  et donc  $\deg_D(b) = \deg_D(D(a)) = -\infty$ ; soit  $D(a) = b = 0$ .

De même, si  $a, b \in A$  vérifient les hypothèses de la deuxième assertion, on obtient en posant  $D(a) = bc$  et  $D(b) = ad$  :

$$\begin{aligned} \deg_D(D(a)) = \deg_D(b) + \deg_D(c) &\geq \deg_D(D(b)) + \deg_D(c) \\ &\geq \deg_D(a) + \deg_D(d) + \deg_D(c). \end{aligned}$$

Ceci implique comme avant que  $\deg_D(d) + \deg_D(c) < 0$  et donc que  $d = 0$  ou  $c = 0$ .  $\square$

## 2.2 Invariant de Makar-Limanov

### 2.2.1 Naissance d'un invariant

L'invariant, dit de Makar-Limanov, est apparu pour la première fois dans le contexte de la conjecture de linéarisation des actions de  $\mathbf{C}^*$  sur  $\mathbf{C}^3$ . Dans leurs travaux sur cette conjecture, M. Koras et P. Russell avaient en effet établi une liste de contre-exemples possibles. Ils avaient en fait construit des actions de  $\mathbf{C}^*$  sur des variétés de dimension trois ayant beaucoup de propriétés semblables à celles de  $\mathbf{C}^3$ , et avaient montré que si l'une des variétés de la liste était isomorphe à  $\mathbf{C}^3$ , elle fournirait alors un contre-exemple à la conjecture de linéarisation.

L. Makar-Limanov débloqua la situation en prouvant qu'une variété de la liste (une hypersurface de  $\mathbf{C}^4$  dite *cubique de Russell*), n'est pas isomorphe à  $\mathbf{C}^3$  et ne constitue donc pas un contre-exemple à la conjecture de linéarisation. Pour ce faire, il a eu recours à un nouvel invariant ; invariant qui porte aujourd'hui le nom d'*invariant de Makar-Limanov*. Finalement, la conjecture a pu être résolue affirmativement dans [31].

#### **Théorème 2.2.1. (Kaliman, Koras, Makar-Limanov, Russell)**

*Toute action algébrique de  $\mathbf{C}^*$  sur  $\mathbf{C}^3$  est linéarisable.*

Voici la définition de l'invariant de Makar-Limanov.

**Définition 2.2.2.** L'*invariant de Makar-Limanov* d'une  $\mathbf{C}$ -algèbre  $A$  est défini comme l'intersection des noyaux de toutes les dérivations localement nilpotentes sur  $A$ , soit :

$$ML(A) = \bigcap_{D \in \text{LND}(A)} A^D.$$

Si  $X$  est une variété algébrique affine, alors on définit l'invariant de Makar-Limanov de  $X$  comme l'invariant des fonctions régulières sur  $X$ ; c-à-d  $ML(X) := ML(\mathbf{C}[X])$ .

**Remarque 2.2.3.** Le lemme 3.1.1 du chapitre 3, montre que l'invariant de Makar-Limanov est bien un invariant. C'est-à-dire que les invariants de Makar-Limanov de deux variétés isomorphes sont isomorphes.

**Exemple 2.2.4.** Pour tout  $n \geq 1$ ,  $ML(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}$ .

A titre d'exemple, donnons également les résultats, annoncés ci-dessus, relatifs à la cubique de Russell.

**Proposition 2.2.5.** *La cubique de Russell est définie comme l'hypersurface  $X$  de  $\mathbf{C}^4$  d'équation  $x + x^2y + z^3 + t^2 = 0$ . Elle vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $X$  est lisse et difféomorphe à  $\mathbf{C}^3$  ;
2.  $X$  est factorielle et il existe un morphisme dominant  $\mathbf{C}^3 \rightarrow X$  ;
3.  $ML(X) = \mathbf{C}[x]$  et  $X$  n'est donc pas isomorphe à  $\mathbf{C}^3$ .

**Remarque 2.2.6.** L'histoire de la cubique de Russell n'est pas encore finie. En effet, on ne sait pas si  $X \times \mathbf{C}$  est isomorphe ou non à  $\mathbf{C}^4$  ! (On ne sait d'ailleurs pas si  $ML(X \times \mathbf{C}) = \mathbf{C}$ .)

## 2.2.2 Filtrations, graduations et dérivations induites

La principale technique pour calculer l'invariant de Makar-Limanov d'une algèbre est l'utilisation de graduations. Lorsque l'on travaille avec des algèbres de polynômes, on en construit facilement en mettant des poids sur les variables. Plus généralement, si  $X \subset \mathbf{C}^n$  est une variété affine, une telle graduation permet de construire, dans un premier temps, une filtration sur l'anneau  $\mathbf{C}[X]$ , puis, dans un second temps, une algèbre graduée correspondante.

Pour des raisons techniques, avoir des poids réels, et non pas simplement entiers, facilitera le calcul de l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces de Danielewski. On définit donc une filtration de la façon suivante.

**Définition 2.2.7.** On dit qu'une famille  $\{A_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  est une filtration sur une algèbre  $A$  si elle vérifie les cinq conditions suivantes :

- $A_t$  est un sous-espace vectoriel de  $A$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ;
- $A_{t_1} \subset A_{t_2}$  pour tout  $t_1 < t_2 \in \mathbf{R}$ ;
- $\bigcup_{t \in \mathbf{R}} A_t = A$
- $\bigcap_{t \in \mathbf{R}} A_t = 0$ ;
- $A_{t_1} \times A_{t_2} \subset A_{t_1+t_2}$  pour tout  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ .

Si  $A$  est une algèbre munie d'une filtration  $\{A_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ , on construit une algèbre graduée  $Gr(A)$  en posant :

$$A_{t-} = \bigcup_{s < t} A_s, \quad Gr(A) = \bigoplus_{t \in \mathbf{R}} A_t / A_{t-},$$

et en définissant une multiplication par :

$$\begin{aligned} (a_1 + A_{t_1-})(a_2 + A_{t_2-}) &= a_1 a_2 + A_{(t_1+t_2)-} && \text{si } a_1 a_2 \in A_{t_1+t_2} \setminus A_{(t_1+t_2)-} \\ &= 0 && \text{si } a_1 a_2 \in A_{(t_1+t_2)-}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.2.8.**

1. Soit  $A = \mathbf{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$  l'algèbre des polynômes de Laurent à  $n$  variables. Mettons des poids  $\alpha_i \in \mathbf{R}$  sur chaque variable  $x_i$  et définissons la fonction degré  $\deg_{\alpha} : A \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$  par  $\deg_{\alpha}(0) = -\infty$  et  $\deg_{\alpha}(x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}) = (\alpha_1 j_1 + \cdots + \alpha_n j_n)$ .

On peut alors construire une filtration sur  $A$  en posant, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$A_t = \{P \in A \text{ tels que } \deg_{\alpha}(P) \leq t\},$$

ainsi qu'une application  $gr : A \rightarrow Gr(A)$  en posant  $gr(0) = 0$  et

$$gr(a) = a + A_{(\deg_{\alpha}(a)-)} \in A_{\deg_{\alpha}(a)} / A_{(\deg_{\alpha}(a)-)} \quad \text{pour tout } a \in A \setminus \{0\}.$$

On identifiera donc, de façon naturelle, l'élément  $gr(a)$  avec la partie homogène de plus haut degré de  $a$ , ainsi que l'algèbre  $Gr(A)$  avec l'algèbre  $A$  elle-même.

2. Soit  $B \subset A$  une sous-algèbre de l'algèbre  $A = \mathbf{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$  munie de la filtration  $\{A_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  correspondant à une fonction degré  $\deg_{\alpha}$ . Alors, on construit une filtration  $\{B_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  sur  $B$  en posant  $B_t = A_t \cap B$ . On définit donc naturellement l'algèbre  $Gr(B)$  et l'application  $gr : B \rightarrow Gr(B)$  correspondantes. On vérifie facilement que  $Gr(B)$  est une sous-algèbre de  $Gr(A)$ .

Dans toute la suite, le contexte est le suivant : on travaille avec une sous-algèbre finiment engendrée  $B = \mathbf{C}[g_1, \dots, g_m] \subset A = \mathbf{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$  munie d'une fonction degré  $\deg_\alpha$  obtenue en mettant des poids réels  $\alpha_i$  sur les variables  $x_i$ .

Supposons que  $D$  soit une dérivation non nulle sur  $B$ . Nous allons construire, à partir de  $D$ , une dérivation sur  $Gr(B)$ .

Comme  $D$  est non nulle, l'ensemble  $E = \{g_i \mid D(g_i) \neq 0\}$  est non vide et on peut donc définir le réel

$$\tau = \max\{\deg_\alpha(D(g_i)) - \deg_\alpha(g_i) \mid g_i \in E\}.$$

On vérifie alors que

$$D(B_t) \subset B_{t+\tau} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R},$$

et que l'on construit bien une dérivation, dite *dérivation induite*,  $D_\tau$  sur  $Gr(B)$  en posant :

$$D_\tau(f) = D(b) + B_{(t+\tau)^-} \text{ si } f = b + B_t \in B_t/B_{t^-}.$$

**Lemme 2.2.9.** *Si  $D$  est une dérivation localement nilpotente non nulle sur  $B$ , alors la dérivation  $D_\tau$  construite ci-dessus est une dérivation localement nilpotente non nulle sur  $Gr(B)$ .*

*De plus,  $\deg_{D_\tau}(gr(b)) \leq \deg_D(b)$  pour tout  $b \in B$ .*

*Preuve.* Rappelons que l'application  $gr : B \rightarrow Gr(B)$  est définie par :

$$gr(0) = 0 \quad \text{et} \quad gr(b) = b + B_{(\deg_\alpha(b))^-} \text{ si } b \in B \setminus \{0\}.$$

Étant donné un élément  $b \in B_t \setminus B_{t^-}$ , il y a alors deux cas :

- Si  $D(b) \in B_{(t+\tau)^-}$ , alors  $D_\tau(gr(b)) = 0$ .
- Si  $D(b) \in B_{t+\tau} \setminus B_{(t+\tau)^-}$ , alors  $D_\tau(gr(b)) = gr(D(b))$ .

Par récurrence, il vient, pour tout entier  $k \in \mathbf{N}$ , que  $D_\tau^k(gr(b)) = 0$  ou  $D_\tau^k(gr(b)) = gr(D^k(b))$ . Ceci implique que  $D_\tau$  est localement nilpotente pour tous les éléments de  $gr(B)$  et l'est donc sur  $Gr(B)$ .

Pour finir la preuve de ce lemme, il suffit donc de vérifier que  $D_\tau$  n'est pas la dérivation nulle. Or, par définition de  $\tau$ , il existe un indice  $i$  tel que  $\deg_\alpha(D(g_i)) = \deg_\alpha(g_i) + \tau$ . Ainsi,  $g_i \in B_{\deg_\alpha(g_i)} \setminus B_{(\deg_\alpha(g_i))^-}$  et  $D(g_i) \in B_{(\deg_\alpha(g_i)+\tau)} \setminus B_{(\deg_\alpha(g_i)+\tau)^-}$  ; ce qui implique bien que  $D_\tau(gr(g_i)) = gr(D(g_i)) \neq 0$ .  $\square$

On dispose maintenant de tous les outils pour calculer l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces de Danielewski. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante.

## 2.3 Calculs pour les hypersurfaces de Danielewski

Le but de cette section est d'appliquer les résultats sur les dérivations localement nilpotentes, que nous venons de rappeler, pour calculer l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces de Danielewski et décrire leurs dérivations localement nilpotentes.

Afin d'alléger les notations, nous noterons dans toute cette section  $x, y, z$  les images respectives de  $x, y$  et  $z$  dans  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - Q(x, z))$ .

Commençons par donner les résultats relatifs aux surfaces  $X_{Q,1}$ .

### Le cas $n = 1$

Soit  $X_{Q,1}$  une hypersurface de Danielewski. On peut supposer que  $Q$  ne dépend que de la variable  $z$  et que  $X_{Q,1}$  est une hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  définie par une équation  $xy = Q(z)$  avec  $Q(z) \in \mathbf{C}[z]$ . Le calcul de l'invariant de Makar-Limanov de  $X$  est alors facile. En effet, du fait de la « symétrie » en les variables  $x$  et  $y$  de l'équation définissant  $X$ , on connaît deux dérivations localement nilpotentes sur l'algèbre  $S_{Q,1} = \mathbf{C}[X_{Q,1}]$ . On a donc le résultat suivant.

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $X = X_{Q,1}$  une hypersurface de Danielewski définie par l'équation  $xy = Q(z)$ . Alors, les dérivations  $\Delta_1 = x \frac{\partial}{\partial z} + Q'(z) \frac{\partial}{\partial y}$  et  $\Delta_2 = y \frac{\partial}{\partial z} + Q'(z) \frac{\partial}{\partial x}$  sont deux dérivations localement nilpotentes sur l'algèbre  $S = \mathbf{C}[X]$  et donc  $\text{ML}(X) = \mathbf{C}$ .*

Si calculer l'invariant de Makar-Limanov d'une hypersurface  $X_{Q,1}$  est facile, décrire les dérivations localement nilpotentes sur l'algèbre  $S_{Q,1}$  est un problème beaucoup plus difficile.

A la lecture de la proposition précédente, on pourrait par exemple penser (à tort) que  $z$  est un préslice de toute dérivation localement nilpotente non nulle sur une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,1}$ . L'exemple ci-dessous montre que cette intuition est bien fautive.

**Exemple 2.3.2.** Soit  $X$  l'hypersurface de Danielewski définie par l'équation  $xy = Q(z)$  pour un certain polynôme  $Q(z) \in \mathbf{C}[z]$ .

Notons  $\Delta_1 = x \frac{\partial}{\partial z} + Q'(z) \frac{\partial}{\partial y}$  et définissons un automorphisme  $\Phi_r$  de  $\mathbf{C}^3$  par  $\Phi_r(x, y, z) = (x + y^{-1}(Q(z + yr(y)) - Q(z)), y, z + yr(y))$ , où  $r(y) \in \mathbf{C}[y]$  est un polynôme non nul.

Alors,  $D = \Phi^* \circ \Delta_1 \circ (\Phi^*)^{-1}$  est une dérivation localement nilpotente sur  $S = \mathbf{C}[X]$  et  $z$  n'est pas un préslice de  $D$ .

Finalement, D. Daigle a montré [10] que toutes les dérivations localement nilpotentes sur une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,1}$  sont conjuguées.

**Théorème 2.3.3 (Daigle).** *Soient  $X = X_{Q,1}$  une hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  et  $D$  une dérivation localement nilpotente non nulle sur  $S = \mathbf{C}[X]$ .*

*Alors, il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $S$  et un polynôme  $f(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que  $\Phi D \Phi^{-1} = f(x) \Delta_1$ .*

**Remarque 2.3.4.** Notons que ce dernier résultat généralise le théorème de R. Rentschler [44] qui montre que toute dérivation localement nilpotente du plan  $\mathbf{C}[x, y]$  (c'est-à-dire d'un anneau  $S_{Q,1}$  avec  $Q$  de degré 1) est conjuguée à une dérivation de la forme  $f(y) \frac{\partial}{\partial x}$ .

### Le cas $n \geq 2$

Contrairement au cas précédent, l'invariant de Makar-Limanov des hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,n}$  n'est pas trivial quand  $n \geq 2$ . Plus précisément, on montre, comme dans [36], que leur invariant de Makar-Limanov est un anneau de polynôme à une variable.

**Théorème 2.3.5.** *Soient  $X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski avec  $n \geq 2$  et  $D \in \text{LND}(S_{Q,n})$  une dérivation localement nilpotente non nulle sur  $S_{Q,n}$ . Alors,  $S^D = \mathbf{C}[x]$  et  $\text{Ker}(D^2) = \mathbf{C}[x]z + \mathbf{C}[x]$ .*

*Ainsi,  $ML(X_{Q,n}) = \mathbf{C}[x]$  si  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  est une hypersurface de Danielewski avec  $n \geq 2$ .*

*Preuve.* Cette preuve s'inspire, en grande partie, d'un résultat similaire lu dans [19].

On peut supposer, quitte à faire un changement de variable linéaire en  $z$ , que l'hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  est définie par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$  où  $n \geq 2$  et où le terme de plus haut degré de  $Q(0, z)$  est  $z^d$  pour un certain  $d \geq 2$ .

Posons  $S = S_{Q,n}$  et considérons que  $y = x^{-n} Q(x, z)$ ; c'est-à-dire considérons que  $S = \mathbf{C}[x, y, z]$  est une sous-algèbre de  $\mathbf{C}[x^\pm, z^\pm]$ .

Nous allons maintenant travailler comme dans la section 2.2.2 et mettre des poids réels  $d_x$  sur  $x$  et  $d_z$  sur  $z$ . Nous considérerons alors la filtration  $\{S_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  et l'algèbre  $Gr(S)$  associées, et noterons  $gr : S \rightarrow Gr(S)$  l'application naturelle de  $S$  dans  $Gr(S)$ . (Rappelons que l'image  $gr(f)$  d'un élément non nul  $f \in S \subset \mathbf{C}[x^\pm, z^\pm]$  est identifiée avec la partie homogène de plus haut degré apparaissant dans l'écriture de  $f$  sous la forme d'un polynôme

de Laurent  $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i z^j$  avec  $a_{i,j} \in \mathbf{C}^*$ .) La preuve se déroule en trois étapes.

première étape : Choisissons les poids  $d_x$  et  $d_z$  tels que :

1.  $d_x < 0$  et  $d_z \gg 0$  suffisamment grand pour que la composante homogène de plus haut degré de  $Q(x, z)$  soit  $z^d$ .
2.  $d_x$  et  $d_z$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Z}$ .

On vérifie que la condition 1. (sur les poids) implique que  $Gr(S)$  est isomorphe à la sous-algèbre  $\mathbf{C}[x, x^{-n}z^d, z]$  de  $\mathbf{C}[x^\pm, z^\pm]$ . On identifiera donc  $Gr(S) = \mathbf{C}[x, x^{-n}z^d, z]$ .

Tout élément de  $Gr(S) = \mathbf{C}[x, x^{-n}z^d, z]$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes de la forme  $x^i(x^{-n}z^d)^j z^k$  avec  $(i, j, k) \in \mathbf{N}^3$  et  $i < n$  si  $j > 0$ . Ces monômes sont d'ailleurs linéairement indépendants. Remarquons que la condition 2. sur  $d_x$  et  $d_z$  implique que ces monômes sont de degrés distincts ; c.-à-d. que les seuls éléments homogènes de  $Gr(S) \setminus \{0\}$  sont les monômes  $\lambda x^i(x^{-n}z^d)^j z^k$  avec  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ,  $(i, j, k) \in \mathbf{N}^3$  et  $i < n$  si  $j > 0$ .

deuxième étape : Considérons maintenant un élément  $a \in S^D$  non constant (un tel  $a$  existe d'après le théorème 2.1.12). D'après ce qui précède, la partie homogène de plus haut degré de  $a$  est un monôme  $\lambda x^i(x^{-n}z^d)^j z^k$  avec  $i < n$  si  $j > 0$ . On peut donc écrire  $gr(a) = \lambda x^i(x^{-n}z^d)^j z^k = \lambda x^i(gr(y))^j z^k$ .

Le lemme 2.2.9, garantit l'existence d'un réel  $\tau \in \mathbf{R}$  tel que  $D$  induise une dérivation non nulle  $D_\tau \in \text{LND}(Gr(S))$ . De plus, toujours d'après ce lemme, il vient  $\deg_{D_\tau}(gr(a)) \leq \deg_D(a) = 0$ . D'où  $gr(a) \in Gr(S)^{D_\tau}$ .

$Gr(S)^{D_\tau}$  étant factoriellement clos d'après le théorème 2.1.12, il s'ensuit que  $D_\tau$  annule  $x$ ,  $gr(y)$  ou  $z$ . Montrons que  $D_\tau(x) = 0$ .

- Supposons que  $D_\tau$  annule  $z$ . Alors,  $D_\tau(x^n gr(y)) = D_\tau(z^d) = 0$  et  $D_\tau$  annulerait aussi  $x$  et  $gr(y)$ .  $D_\tau$  serait donc la dérivation nulle ; ce qui est faux.

- De même, supposons  $D_\tau(gr(y)) = 0$ . Alors,  $D_\tau(x) \neq 0$  et  $D_\tau(z) \neq 0$  car  $\text{Ker}(D_\tau)$  est de degré de transcendance 1 (théorème 2.1.12). Ainsi, on peut écrire  $D_\tau(x) = gr(D(x))$  et  $D_\tau(z) = gr(D(z))$ .  $D_\tau(x)$  et  $D_\tau(z)$  seraient donc des monômes de la forme  $\lambda x^i(x^{-n}z^d)^j z^k$  avec  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ,  $(i, j, k) \in \mathbf{N}^3$  et  $i < n$  si  $j > 0$ .

D'après le premier point du corollaire 2.1.14, on obtiendrait alors que  $D_\tau(x) = \lambda_1(x^{-n}z^d)^{j_1} z^{k_1}$  et  $D_\tau(z) = \lambda_2 x^{i_2}(x^{-n}z^d)^{j_2}$  pour certains  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}^*$ ,  $(j_1, k_1, i_2, j_2) \in \mathbf{N}^4$  et  $i_2 < n$  si  $j_2 > 0$ . Or,

$$dz^{d-1} D_\tau(z) = D_\tau(z^d) = D_\tau(x^n gr(y)) = n gr(y) x^{n-1} D_\tau(x).$$

D'où  $d\lambda_2 x^{i_2}(x^{-n}z^d)^{j_2} z^{d-1} = n\lambda_1 x^{n-1}(x^{-n}z^d)^{j_1+1} z^{k_1}$ . Ceci impliquerait que  $i_2 = n - 1$ ,  $j_2 = j_1 + 1$  et  $k_1 = d - 1$ . En particulier, comme  $d, n > 1$ , cela impliquerait que  $z$  divise  $D_\tau(x)$  et que  $x$  divise  $D_\tau(z)$ . Il viendrait alors, en appliquant le corollaire 2.1.14 que  $D_\tau(x) = 0$  ou  $D_\tau(z) = 0$  ; contradiction.



• On a donc bien  $D_\tau(x) = 0$  et  $Gr(S)^{D_\tau} = \mathbf{C}[x]$ . Dès lors,  $\deg_{D_\tau}(z) \geq 1$  et, comme  $x^n gr(y) = z^d$ ,  $\deg_{D_\tau}(gr(y)) = d \cdot \deg_{D_\tau}(z) \geq d \geq 2$ .

*troisième étape* : Nous pouvons maintenant montrer que  $S^D = \mathbf{C}[x]$ . En effet, soit  $p(x, y, z) \in S \setminus \mathbf{C}[x]$ . Alors, on peut supposer, quitte à mettre un poids  $d_z$  sur  $z$  assez grand, que  $gr(p) \notin \mathbf{C}[x] = Gr(S)^{D_\tau}$ . Ainsi, on a  $1 \leq \deg_{D_\tau}(gr(p)) \leq \deg_D(p)$ . Il vient  $p \notin S^D$  et donc  $S^D \subset \mathbf{C}[x]$ . Or,  $S^D \neq \mathbf{C}$  d'après le théorème 2.1.12.  $x$  est donc algébrique sur  $S^D$ . Finalement,  $S^D$  étant algébriquement clos (lemme 2.1.4), il vient que  $x \in S^D$  et donc  $S^D = \mathbf{C}[x]$ .

Pour terminer la preuve du théorème, considérons un préslice de  $D$  :  $p(x, y, z) \in Ker(D^2) \setminus \mathbf{C}[x]$ . L'argument du paragraphe précédent montre que l'on peut considérer que  $gr(p) \notin \mathbf{C}[x]$ ; ce qui implique  $\deg_{D_\tau}(gr(p)) = 1$ . Or,  $gr(p)$  est un monôme  $\lambda x^i (x^{-n} z^d)^j z^k$  avec  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ,  $(i, j, k) \in \mathbf{N}^3$  et  $i < n$  si  $j > 0$ . Puisque  $\deg_{D_\tau}(x^{-n} z^d) \geq 2$  et  $\deg_{D_\tau}(z) \geq 1$ , il vient  $j = 0$  et  $k = 1$ . Or, si  $d_z$  est assez grand,  $gr(p)$  est le monôme de  $p \in \mathbf{C}[x, x^{-1}, z]$  de plus grand degré en  $z$ . D'où  $p \in \mathbf{C}[x]z + \mathbf{C}[x]$  et  $Ker(D^2) \subset \mathbf{C}[x]z + \mathbf{C}[x]$ . Comme  $S^D = \mathbf{C}[x]$ , il s'ensuit  $\deg_D(z) = 1$ . Ceci implique que  $\mathbf{C}[x]z + \mathbf{C}[x] \subset Ker(D^2)$ . La preuve est donc terminée.  $\square$

Nous pouvons finalement déterminer toutes les dérivations localement nilpotentes sur les algèbres  $S_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$ .

**Théorème 2.3.6.** *Soit  $X_{Q,n} \subset \mathbf{C}^3$  une hypersurface de Danielewski avec  $n \geq 2$ . Alors, les dérivations localement nilpotentes sur  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[X_{Q,n}]$  sont exactement les multiples de la dérivation  $\Delta_{Q,n}$  par les polynômes en  $x$ . Soit :*

$$\text{LND}(S_{Q,n}) = \mathbf{C}[x]\Delta_{Q,n} = \left\{ h(x) \left( x^n \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right), \text{ avec } h(x) \in \mathbf{C}[x] \right\}.$$

**Remarque 2.3.7.** Notons que, en particulier, toute dérivation localement nilpotente sur un anneau  $S_{Q,n}$  s'étend naturellement en une dérivation localement nilpotente sur  $\mathbf{C}[x, y, z]$ . Ainsi, toute action du groupe additif sur une hypersurface de Danielewski s'étend naturellement en une action sur  $\mathbf{C}^3$ .

*Preuve.* Notons  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  les images respectives de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'anneau  $S_{Q,n} = \mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - Q(x, z))$ .

Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente non nulle sur  $S_{Q,n}$ . D'après le théorème 2.3.5, on a  $D(\bar{x}) = 0$  et  $D(\bar{z}) \in Ker(D^2) \setminus S^D$ , c'est-à-dire  $D(\bar{z}) = h(\bar{x}) \in \mathbf{C}[\bar{x}] \setminus \{0\}$ .

On a :

$$0 = D(\bar{x}^n \bar{y} - Q(\bar{x}, \bar{z})) = \bar{x}^n D(\bar{y}) - h(\bar{x}) \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z}(\bar{x}, \bar{z}).$$

Notons  $D(\bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbf{C}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ . Il existe alors un polynôme  $R(x, y, z) \in \mathbf{C}[x, y, z]$  tel que :

$$x^n a(x, y, z) - h(x) \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z}(x, z) = R(x, y, z)(x^n y - Q(x, z)).$$

Cette égalité implique que  $h(0)(Q(0, \cdot))'(z) = R(0, y, z)Q(0, z)$ . Or,  $\deg(Q(0, z)) \geq 2$  par définition d'une hypersurface de Danielewski. Il s'ensuit, pour des raisons de degré, que  $h(0) = R(0, y, z) = 0$ .

On peut donc écrire  $h(x) = x\tilde{h}(x)$ ,  $R(x, y, z) = x\tilde{R}(x, y, z)$  et

$$x^{n-1} a(x, y, z) - \tilde{h}(x) \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z}(x, z) = \tilde{R}(x, y, z)(x^n y - Q(x, z)).$$

Le raisonnement précédent montre que  $\tilde{h}(0) = \tilde{R}(0, y, z) = 0$ . On obtient alors, en travaillant par induction, que  $x^n$  divise les polynômes  $h(x)$  et  $R(x, y, z)$ .

En posant  $h(x) = x^n \hat{h}(x)$ , on a finalement :

$$D(\bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \hat{h}(\bar{x}) \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z}(\bar{x}, \bar{z}).$$

□



# Chapitre 3

## Classes d'isomorphie et groupes des automorphismes

Le but de ce chapitre est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux hypersurfaces de Danielewski soient isomorphes et de décrire les groupes d'automorphismes de ces hypersurfaces. Comme on l'a annoncé précédemment, les techniques utilisées reposent sur la connaissance des ensembles des dérivations localement nilpotentes  $\text{LND}(S_{Q,n})$  et sont principalement dues à L. Makar-Limanov. Les résultats de ce chapitre sont d'ailleurs des généralisations, *aux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard*, de ceux qu'il a obtenu dans [36]. Nous vérifierons en particulier que deux telles hypersurfaces isomorphes sont équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  et que tous leurs automorphismes s'étendent à l'espace ambiant.

### 3.1 Application des dérivations localement nilpotentes

Le lemme suivant nous montre pourquoi, quand on veut avoir des renseignements sur les isomorphismes entre deux  $\mathbf{C}$ -algèbres, ou sur les automorphismes d'une  $\mathbf{C}$ -algèbre, la connaissance de leurs dérivations localement nilpotentes est utile, si celles-ci ont, comme par exemple dans le cas des hypersurfaces de Danielewski, une forme particulière. Il montre en effet que les (iso)-automorphismes doivent « préserver » ces dérivations et donc vérifier certaines conditions.

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un isomorphisme entre deux  $\mathbf{C}$ -algèbres  $A$  et  $B$ . Alors,  $\varphi \text{LND}(A) \varphi^{-1} = \text{LND}(B)$  et donc  $\varphi(\text{ML}(A)) = \text{ML}(B)$ .*

*Preuve.* Si  $D \in \text{LND}(A)$  est une dérivation localement nilpotente sur  $A$ , alors  $\varphi \circ D \circ \varphi^{-1} \in \text{LND}(B)$  pour tout isomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$ . On a donc  $\varphi \text{LND}(A) \varphi^{-1} \subset \text{LND}(B)$  et  $\varphi(\varphi^{-1} \text{LND}(B) \varphi) \varphi^{-1} \subset \varphi \text{LND}(A) \varphi^{-1}$ . Ceci prouve bien que  $\varphi \text{LND}(A) \varphi^{-1} = \text{LND}(B)$ . Finalement, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(ML(A)) &= \varphi\left(\bigcap_{D \in \text{LND}(A)} A^D\right) \\ &= \bigcap_{D \in \text{LND}(A)} \varphi(A^D) \\ &= \bigcap_{D \in \text{LND}(A)} B^{\varphi \circ D \circ \varphi^{-1}} \\ &= \bigcap_{D \in \text{LND}(B)} B^D. \end{aligned}$$

□

Comme on connaît toutes les dérivations localement nilpotentes sur les anneaux  $S_{Q,n}$  (c'est le théorème 2.3.6), le lemme 3.1.1 permet de prouver le résultat suivant.

**Proposition 3.1.2.** *Considérons deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  d'invariant de Makar-Limanov non trivial et notons pour  $i = 1, 2$ ,*

$$S_i = \mathbf{C}[X_{Q_i, n_i}] = \mathbf{C}[x, y, z]/(x^{n_i}y - Q_i(x, z)) = \mathbf{C}[x_i, y_i, z_i],$$

où  $n_1, n_2 \geq 2$  et où  $x_i, y_i, z_i$  sont les images respectives de  $x, y, z$  dans  $S_i$ . Si  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  est un isomorphisme, alors :

1. Il existe  $a \in \mathbf{C}^*$  tel que  $\varphi(x_1) = ax_2$ .
2. Il existe  $\alpha \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta(x_2) \in \mathbf{C}[x_2]$  tels que  $\varphi(z_1) = \alpha z_2 + \beta(x_2)$ .

**Remarque 3.1.3.** Il faut être un peu plus précis ici. En effet, lorsque l'on écrit  $\exists \beta(x_2) \in \mathbf{C}[x_2]$ , il faut bien sûr comprendre que  $\beta(x_2) \in S_2$  est un polynôme à coefficients constants, ce qui veut dire en réalité que  $\beta$  est à coefficients dans  $S_2^\times$ . Autrement dit, si on considère  $\beta$  comme un polynôme de  $\mathbf{C}[x, y, z]$ , on peut écrire que

$$\beta(x) \in \mathbf{C}[x] \quad \text{mod} \quad (x^{n_2}y - Q_2(x, z)).$$

On verra l'utilité de cette remarque dans la deuxième partie de cette thèse, notamment pour démontrer la proposition 4.2.1.

*Preuve.* D'après le théorème 2.3.6, toute dérivation localement nilpotente  $\partial$  sur  $S_1$  est un multiple de  $\Delta_{Q_1, n_1}$  et vérifie donc  $\partial^2(z_1) = 0$ . Or, par le lemme 3.1.1,  $\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi \in \text{LND}(S_1)$  pour toute dérivation  $\partial \in \text{LND}(S_2)$ . Ceci implique que

$$\partial^2(\varphi(z_1)) = 0 \quad \forall \partial \in \text{LND}(S_2).$$

$\varphi(z_1)$  est donc un préslice de  $\partial$ . D'après le théorème 2.3.5, on doit alors avoir  $\varphi(z_1) = \alpha(x_2)z_2 + \beta(x_2)$  pour certains polynômes  $\alpha$  et  $\beta$ .  $\varphi$  étant inversible, on a en fait  $\alpha \in \mathbf{C}^*$ , ce qui prouve le point 2.

Nous allons maintenant utiliser l'autre égalité du lemme 3.1.1.  $\varphi$  induit un isomorphisme entre les invariants de Makar-Limanov de  $S_1$  et  $S_2$ . D'où  $\varphi(x_1) \in \mathbf{C}[x_2]$  et, comme  $\varphi$  est inversible,  $\varphi(x_1) = ax_2 + b$ , pour certains  $a \in \mathbf{C}^*$  et  $b \in \mathbf{C}$ .

Pour prouver le point 1, il nous reste à voir que  $b = 0$ . On le fait en considérant la dérivation  $\partial_0 = \varphi^{-1} \circ \Delta_{Q_2, n_2} \circ \varphi$ . C'est une dérivation localement nilpotente sur  $S_1$ . D'après le théorème 2.3.6,  $\partial_0(z_1)$  doit donc être divisible par  $x_1^{n_1}$ . Or, on a  $\partial_0(z_1) = \alpha a^{-n_2} (x_1 - b)^{n_2}$ . On en déduit que  $b = 0$ ; ce qui termine la preuve du point 1.  $\square$

## 3.2 Classes d'isomorphie

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  soient isomorphes. La première condition est que  $n_1 = n_2$ .

**Proposition 3.2.1.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont isomorphes, alors  $n_1 = n_2$ .*

*Preuve.* Supposons que les hypersurfaces de Danielewski  $X_1 = X_{Q_1, n_1}$  et  $X_2 = X_{Q_2, n_2}$  soient isomorphes. Alors, d'après le lemme 3.1.1, leurs invariants de Makar-Limanov sont isomorphes. Il y a donc deux cas : soit  $\text{ML}(X_1) = \text{ML}(X_2) = \mathbf{C}$  et donc  $n_1 = n_2 = 1$ , soit  $\text{ML}(X_1) = \text{ML}(X_2) = \mathbf{C}[x]$  et donc  $n_1, n_2 \geq 2$ .

Il suffit donc de considérer le deuxième cas. Supposons que  $n_1, n_2 \geq 2$ . Nous sommes alors sous les hypothèses de la proposition 3.1.2.

Reprenons-en les notations et supposons que  $\varphi$  soit un isomorphisme entre  $S_1 = \mathbf{C}[X_1]$  et  $S_2 = \mathbf{C}[X_2]$ . On a  $\varphi(x_1) = ax_2$  et  $\varphi(z_1) = \alpha z_2 + \beta(x_2)$  pour certains  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta(x_2) \in \mathbf{C}[x_2]$ . De plus, nous avons montré à la fin de la preuve de cette proposition que  $\partial_0(z_1) = \alpha a^{-n_2} (x_1)^{n_2}$  doit être divisible par  $x_1^{n_1}$ . On doit donc avoir  $n_2 \geq n_1$ .

$S_1$  et  $S_2$  jouant par ailleurs le même rôle, on a également  $n_1 \geq n_2$ ; d'où  $n_1 = n_2 = n$ .  $\square$

### Le cas $n=1$

Le cas des hypersurfaces  $X_{Q,1}$  – c'est à dire des hypersurfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial – a été traité par D. Daigle dans [10]. Il a obtenu, comme conséquence du théorème de transitivité (théorème 2.3.3), le théorème de classification suivant :

**Théorème 3.2.2.** *Deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1,1}$  et  $X_{Q_2,1}$  sont isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme (affine)  $\Phi$  de  $\mathbf{C}[z]$  et une constante non nulle  $\mu \in \mathbf{C}^*$  tels que  $\Phi(Q_1(0, z)) = \mu Q_2(0, z)$ .*

Le résultat suivant s'en déduit directement.

**Corollaire 3.2.3.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial  $X_{Q_1,1}$  et  $X_{Q_2,1}$  sont isomorphes, alors elles sont équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* Supposons que les hypersurfaces  $X_{Q_1,1}$  et  $X_{Q_2,1}$  soient isomorphes. D'après le théorème ci-dessus,  $\Phi(Q_1(0, z)) = \mu Q_2(0, z)$  pour un certain automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}[z]$  et une constante  $\mu \in \mathbf{C}^*$ . Cela implique que les hypersurfaces  $X_{Q_1(0,z),1}$  et  $X_{Q_2(0,z),1}$  sont équivalentes. En effet, l'automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par  $\Psi : (x, y, z) \mapsto (x, \mu y, \Phi(z))$  vérifie

$$\Psi^*(xy - Q_1(0, z)) = \mu(xy - Q_2(0, z)).$$

On peut alors conclure car les hypersurfaces  $X_{Q_1,1}$  et  $X_{Q_1(0,z),1}$  (resp.  $X_{Q_2,1}$  et  $X_{Q_2(0,z),1}$ ) sont équivalentes d'après le lemme 1.3.8.  $\square$

### Le cas général

On peut maintenant établir la classification, à isomorphisme près, de toutes les hypersurfaces de Danielewski.

D'après le théorème 1.3.13, il suffit de considérer les hypersurfaces de Danielewski sous forme standard, c'est-à-dire les hypersurfaces d'équation  $x^n y = p(z) + xq(x, z)$  avec  $\deg_z(q(x, z)) < \deg(p)$ . Rappelons également que l'on sait déterminer *algorithmiquement* une forme standard pour une hypersurface de Danielewski donnée.

L. Makar-Limanov a obtenu la classification des hypersurfaces  $x^n y = p(z)$  dans [36]. Grâce à la proposition 3.1.2, on peut montrer le théorème plus général suivant.

**Théorème 3.2.4.** *Deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sous forme standard sont isomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $n_1 = n_2 = n$  ;
2. *Il existe des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et un polynôme  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .*

**Corollaire 3.2.5.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n}$  et  $X_{Q_2, n}$  sont isomorphes, alors il existe des constantes  $\alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta \in \mathbf{C}$  telles que  $Q_1(0, \alpha z + \beta) = \mu Q_2(0, z)$ .*

*En particulier, si les hypersurfaces  $X_{Q_1, n}$  et  $X_{Q_2, n}$  sont isomorphes, alors  $\deg(Q_1(0, z)) = \deg(Q_2(0, z))$ .*

*Preuve.* Ce corollaire est une conséquence directe des théorèmes 1.3.13 et 3.2.4. □

*Preuve.* (du théorème)

Supposons que  $X_1 = X_{Q_1, n_1}$  et  $X_2 = X_{Q_2, n_2}$  soient deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes.

On a  $n_1 = n_2 = n$  d'après la proposition 3.2.1. De plus, comme D. Daigle a déjà traité le cas  $n = 1$ , on peut supposer que  $n \geq 2$ .

Nous sommes alors sous les hypothèses de la proposition 3.1.2. Reprenons-en les notations et supposons que  $\varphi$  soit un isomorphisme entre  $S_1 = \mathbf{C}[X_1]$  et  $S_2 = \mathbf{C}[X_2]$ . On a  $\varphi(x_1) = ax_2$  et  $\varphi(z_1) = \alpha z_2 + \beta(x_2)$  pour certains  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta(x_2) \in \mathbf{C}[x_2]$ .

Notons maintenant  $\tilde{\varphi}$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  défini en posant  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$  et  $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z)$ . Par définition, on a

$$\tilde{\varphi}(x^n y - Q_1(x, z)) \in \left( x^n y - Q_2(x, z) \right),$$

où  $\left( x^n y - Q_2(x, z) \right)$  désigne l'idéal de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  engendré par  $x^n y - Q_2(x, z)$ .

En posant  $x = 0$ , il vient alors que  $Q_1(0, \alpha z + \beta(0)) \in \left( Q_2(0, z) \right)$  et donc que  $\deg(Q_2(0, z)) \leq \deg(Q_1(0, z))$ . Il s'ensuit alors, par symétrie des rôles de  $S_1$  et  $S_2$ , que  $\deg(Q_2(0, z)) = \deg(Q_1(0, z)) = d$  et qu'il existe donc une constante non nulle  $\mu \in \mathbf{C}^*$  telle que  $Q_1(0, \alpha z + \beta(0)) = \mu Q_2(0, z)$ .

On peut considérer que  $S_i \subset \mathbf{C}[x_i, x_i^{-1}, z_i]$  en posant  $y_i = x_i^{-n} Q(x_i, z_i)$ . Remarquons que si un élément de  $S_i$  a un degré négatif en  $x_i$ , il doit alors être de degré au moins  $d$  en  $z_i$ .



On a alors

$$\varphi(y_1) = \frac{Q_1(ax_2, \alpha z_2 + \beta(x_2))}{a^n x_2^n} = a^{-n} \mu y_2 + \frac{\Delta(x_2, z_2)}{a^n x_2^n},$$

où  $\Delta(x_2, z_2) = Q_1(ax_2, \alpha z_2 + \beta(x_2)) - \mu Q_2(x_2, z_2)$ .

Utilisons maintenant le fait que  $X_{Q_1, n}$  et  $X_{Q_2, n}$  soient sous forme standard ; c-à-d que  $Q_i(x, z) = p_i(z) + xq_i(x, z)$  avec  $\deg_z(q_i(x, z)) < d = \deg(p_i)$ .

On a alors

$$\Delta(x_2, z_2) = p_1(\alpha z + \beta(x_2)) - p_1(\alpha z + \beta(0)) + q_1(ax_2, \alpha z_2 + \beta(x_2)) - \mu q_2(x_2, z_2);$$

ce qui implique que  $\deg_{z_2}(\Delta(x_2, z_2)) < d$ . Dès lors, comme tout élément de  $S_2$  avec un degré négatif en  $x_2$  est de degré au moins  $d$  en  $z_2$ , on a que  $x_2^n$  divise  $\Delta(x_2, z_2)$  ; c'est-à-dire que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

Réciproquement, si les conditions 1 et 2 sont vérifiées, l'automorphisme triangulaire  $\Phi$  de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  défini par

$$\begin{cases} \Phi(x) = ax \\ \Phi(y) = a^{-n} \mu y + (ax)^{-n} \Delta(x, z) \\ \Phi(z) = \alpha z + \beta(x) \end{cases}$$

induit un isomorphisme entre  $S_1$  et  $S_2$ . □

À présent, nous pouvons vérifier que la propriété numéro 3 des hypersurfaces de Danielewski sous forme standard, annoncée page 30, est bien vraie.

**Corollaire 3.2.6.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sous forme standard sont isomorphes, alors elles sont équivalentes via un automorphisme triangulaire de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* Soient  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  deux hypersurfaces sous forme standard isomorphes. D'après le théorème 3.2.4,  $n_1 = n_2 = n$ .

De plus, il existe des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et un polynôme  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que  $x^{-n}(Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) - \mu Q_2(x, z)) \in \mathbf{C}[x, z]$ . Il suffit alors de considérer l'automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par

$$(x, y, z) \mapsto (ax, \mu a^{-n} y + (ax)^{-n} [Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) - \mu Q_2(x, z)], \alpha z + \beta(x)).$$

□

Vérifions également que l'on retrouve, dans le cas particulier des hypersurfaces  $X_{\sigma, n}$ , les conditions du théorème 1.1.20.

**Proposition 3.2.7.** *Soient  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  deux collections de  $d \geq 2$  polynômes définissant des surfaces de Danielewski  $X_{\sigma,n}$  et  $X_{\tilde{\sigma},n}$ .*

*Alors, les hypersurfaces  $X_{\sigma,n}$  et  $X_{\tilde{\sigma},n}$  sont isomorphes si et seulement si les surfaces de Danielewski  $(X_{\sigma,n}, \text{pr}_x)$  et  $(X_{\tilde{\sigma},n}, \text{pr}_x)$  sont isomorphes au sens II. C'est-à-dire si et seulement si il existe des constantes non nulles  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ , un polynôme  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  et une permutation  $w \in \mathbf{S}_d$  tels que*

$$\alpha\sigma_i(x) = \tilde{\sigma}_{w(i)}(ax) - \beta(x) \quad \forall 1 \leq i \leq d.$$

*Preuve.* D'après le théorème 3.2.4, il existe  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que

$$\prod_{i=1}^d (\alpha z + \beta(x) - \tilde{\sigma}_i(ax)) \equiv \mu \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x)) \pmod{(x^n)}.$$

On peut clairement supposer que  $\deg(\beta) < n$ . Dès lors, en appliquant le lemme 1.2.5, il vient que la collection  $\sigma = \{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq d}$  est égale à la collection  $\{\alpha^{-1}(\tilde{\sigma}_i(ax) - \beta(x))\}_{1 \leq i \leq d}$ .  $\square$

Intéressons-nous enfin aux hypersurfaces sous forme standard réduite (voir la définition 1.3.19). Dans ce cas, les conditions du théorème 3.2.4 s'expriment très simplement et impliquent que si deux telles hypersurfaces sont isomorphes, elles sont équivalentes via un automorphisme affine de  $\mathbf{C}^3$ .

**Proposition 3.2.8.** *Soient  $X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$  deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard réduite.*

*$X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$  sont isomorphes si et seulement si il existe des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta \in \mathbf{C}$  telles que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta) = \mu Q_2(x, z)$ .*

*L'automorphisme affine de  $\mathbf{C}^3$  défini par  $(x, y, z) \mapsto (ax, a^{-n}\mu y, \alpha z + \beta)$  induit alors un isomorphisme entre  $X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$ .*

*Preuve.* Supposons que  $X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$  soient deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard réduite isomorphes.

D'après le théorème 3.2.4, il existe  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que

$$Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}.$$

En particulier, si on note  $p_i(z) = Q_i(0, z)$ , on a  $\deg(p_1) = \deg(p_2)$ .

Notons  $r = \deg(\beta)$ ,  $\beta(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_r x^r$  avec  $b_r \in \mathbf{C}^*$  et montrons que  $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ . En effet, si on suppose le contraire, il vient, en posant  $k = \inf\{1 \leq j \leq n-1 \mid b_j \neq 0\}$ , que

$$\begin{aligned} Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) &\equiv Q_1(ax, \alpha z + b_0 + b_k x^k) \pmod{(x^{k+1})} \\ &\equiv Q_1(ax, \alpha z + b_0) + b_k x^k p_1'(\alpha z + b_0) \pmod{(x^{k+1})} \\ &\neq \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^{k+1})}, \end{aligned}$$

car, par définition d'une forme standard réduite, on a, pour  $i = 1$  et  $i = 2$ ,  $\deg_z(Q_i(x, z) - p_i(z)) < \deg(p_i) - 1$ .

Dès lors,  $Q_1(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv Q_1(ax, \alpha z + b_0) \pmod{(x^n)}$ . Ceci implique, comme par définition  $\deg_x Q_i(x, z) < n$ , que l'on a bien

$$Q_1(ax, \alpha z + b_0) = \mu Q_2(x, z).$$

Réciproquement, il est évident que, si les conditions de l'énoncé sont satisfaites, les hypersurfaces  $X_{Q_1, n}$  et  $X_{Q_2, n}$  sont isomorphes via l'automorphisme affine défini par  $(x, y, z) \mapsto (ax, \mu y, \alpha z + \beta)$ .  $\square$

### 3.3 Automorphismes des hypersurfaces de Danielewski

#### Le cas $n=1$

En 1990, L. Makar-Limanov [34] a calculé les groupes des automorphismes des hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q,1}$ . Plus précisément, il a donné des générateurs de ces groupes.

**Théorème 3.3.1 (Makar-Limanov).** *Soit  $P(z) \in \mathbf{C}[z]$  un polynôme. Le groupe des automorphismes de l'hypersurface de Danielewski  $X_{P,1}$  est alors engendré par les restrictions des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$  suivants.*

- (a)  $H_\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha^{-1}y, z)$  avec  $\alpha \in \mathbf{C}^*$ .
- (b) L'involution  $I(x, y, z) = (y, x, z)$ .
- (c)  $\Delta_b(x, y, z) = (x, y + x^{-1}(P(x, z + xb(x)) - P(x, z)), z + xb(x))$  avec  $b(x) \in \mathbf{C}[x]$ .
- (d) Si  $P$  est de la forme  $P(z) = \lambda(z + \mu)^d$ , alors les automorphismes  $R_\alpha(x, y, z) = (x, \alpha^d y, \alpha z + (\alpha - 1)\mu)$  avec  $\alpha \in \mathbf{C}^*$  doivent être ajoutés.
- (e) Si  $P$  est de la forme  $P(z) = (z + \mu)^i Q((z + \mu)^s)$  alors les automorphismes cycliques  $S_\alpha(x, y, z) = (x, \alpha^i y, \alpha z + (\alpha - 1)\mu)$  avec  $\alpha^s = 1$  doivent être ajoutés.

#### Le cas général

En travaillant exactement comme dans la preuve du théorème 3.2.4, on peut décrire la forme des automorphismes d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard.

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $X_s = X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski sous forme standard avec  $n \geq 2$ . Posons  $d = \deg(Q(0, z))$ . Alors, tout automorphisme  $\varphi$  de  $X_s$  est déterminé par un triplet  $(a, \alpha, \beta(x)) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}[x]$  et s'étend en un automorphisme triangulaire  $\phi$  de  $\mathbf{C}^3$  de la forme :*

$$\phi(x, y, z) = (ax, a^{-n}\alpha^d y + s(x, z), \alpha z + \beta(x)) ,$$

où  $Q(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \alpha^d Q(x, z) \pmod{x^n}$  ,  
et  $s(x, z) = (ax)^{-n}(Q(ax, \alpha z + \beta(x)) - \alpha^d Q(x, z))$ .

En particulier, on vérifie ainsi que tous les automorphismes d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard s'étendent bien en des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$ . C'était la propriété numéro 4 annoncée page 30. En fait, grâce au corollaire 3.2.6, on obtient même le résultat plus général suivant.

**Corollaire 3.3.3.**

1. *Tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard est la restriction d'un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*
2. *Tout isomorphisme entre deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* La première partie du corollaire est une conséquence immédiate du théorème 3.3.1 et de la proposition 3.3.2. Considérons donc un isomorphisme  $\varphi : X_{Q_1, n_1} \rightarrow X_{Q_2, n_2}$  entre deux hypersurfaces de Danielewski sous forme standard. D'après le corollaire 3.2.6, il existe un automorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{C}^3$  tel que  $\Psi(X_{Q_1, n_1}) = X_{Q_2, n_2}$ . Il suffit alors d'appliquer le premier point pour montrer que  $\Psi^{-1} \circ \varphi$ , qui est un automorphisme de  $X_{Q_1, n_1}$ , s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .  $\square$

Finalement, on obtient, en reprenant la notation 1.3.14, le résultat suivant.

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $X = X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski et  $X_s$  une de ses formes standards. Notons  $\Phi^s$  et  $\Phi_s$  les endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$  induisant les isomorphismes entre  $X_{Q,n}$  et  $X_s$*

*Alors, les automorphismes de  $X$  sont les restrictions des endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$  de la forme  $\Phi^s \circ \psi \circ \Phi_s$  où  $\psi$  est un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  préservant  $X_s$ .*

Il faut noter ici que les automorphismes d'une hypersurface  $X_{Q,n}$  quelconque ne s'étendent pas forcément en des automorphismes de l'espace ambiant. Nous en donnerons d'ailleurs des exemples dans le chapitre suivant.

### 3.3.1 Automorphismes des hypersurfaces $X_{Q,n}$ avec $Q(0, z)$ à racines simples

Les résultats de cette partie sont le fruit d'un travail réalisé en collaboration avec Adrien Dubouloz et ont fait l'objet d'un article [20]. Dans celui-ci, nous avons travaillé sur un corps  $k$  quelconque. Cependant, ayant pris le parti de travailler uniquement sur  $\mathbf{C}$  pour cette thèse, j'en reproduis ici les résultats seulement dans le cas où le corps de base est  $k = \mathbf{C}$ .

On aimerait avoir une description plus précise des groupes d'automorphismes des hypersurfaces  $X_{Q,n}$  et pouvoir en donner, comme L. Makar-Limanov pour le cas  $n = 1$ , des générateurs. Pour cela, il faudrait pouvoir décrire, étant donné un polynôme  $Q(x, z)$ , tous les triplets  $(a, \alpha, \beta(x))$  possibles pour la proposition 3.3.2 ; ce qui est difficile en général.

Néanmoins, ça l'est moins pour les hypersurfaces de Danielewski qui admettent une structure de surface de Danielewski. Leurs formes standards ont en effet une équation particulière : ce sont des hypersurfaces  $X_{\sigma,n}$ . Ainsi, comme le montre la proposition 3.2.7, chaque automorphisme réalise une permutation de la collection des ouverts  $U_i = X_{\sigma,n} \setminus \bigcup_{j \neq i} \{x = 0 \text{ et } z = \sigma_j(0)\}$ .

Dans ce cas, on peut donc préciser la proposition 3.3.2.

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $X = X_{\sigma,n}$  une hypersurface de Danielewski définie par une collection  $\sigma = \{\sigma_i(x)\}_{i=1..d}$  avec  $d \geq 2$  et  $n \geq 2$ . Alors, tout automorphisme  $\varphi$  de  $X$  est uniquement déterminé par un quadruplet  $A_\varphi = (a, \alpha, b(x), \omega) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}[x] \times \mathbf{S}_d$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Le polynôme  $c(x) = \sigma_{\omega(i)}(ax) - \alpha\sigma_i(x)$  ne dépend pas de l'indice  $i$  ;*
2. *La permutation  $\omega$  est triviale si et seulement si  $\alpha = 1$  ;*
3. *Si la permutation  $\omega$  est non triviale, alors elle a au plus un seul point fixe et tous les cycles non triviaux d'une de ses décompositions en cycles disjoints sont de même longueur  $s \geq 2$ . De plus,  $\alpha^s = 1$  et  $\alpha^{s'} \neq 1$  pour tout  $1 \leq s' < s$ .*

*Preuve.* Posons  $Q(x, z) = \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x))$ . Remarquons tout d'abord qu'il correspond bien, à tout quadruplet  $A_\varphi$ , un automorphisme  $\varphi$  de  $X$ . Il suffit en effet de considérer l'automorphisme triangulaire suivant

$$(x, y, z) \mapsto (ax, a^{-n}\alpha^d(y+x^{-n}[Q(x, z+\alpha^{-1}x^n b(x))-Q(x, z)]), \alpha z+c(x)+x^n b(x))$$

Réciproquement, soit  $\varphi$  un automorphisme de  $X$ . En travaillant exactement comme dans la preuve du théorème 3.2.4, on peut prouver qu'il existe des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$  et un polynôme  $\beta(x) \in \mathbf{C}[x]$  tels que  $\varphi^*(x) = ax$ ,  $\varphi^*(z) = \alpha z + \beta(x)$  et  $Q(ax, \alpha z + \beta(x)) \equiv \alpha^d Q(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

Le lemme 1.2.5 implique alors (rappelons que, par définition de  $X_{\sigma,n}$ ,  $\sigma_i(0) \neq \sigma_j(0)$  si  $i \neq j$ ) que les collections  $\{\alpha\sigma_i(x)\}$  et  $\{\beta(x) - \sigma_i(ax)\}$  sont les mêmes modulo  $x^n$ . Cela veut dire, en d'autres termes, qu'il existe une permutation  $\omega \in \mathbf{S}_d$  telle que

$$\beta(x) - \sigma_{\omega(i)}(ax) \equiv -\alpha\sigma_i(x) \pmod{x^n} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq d.$$

Comme les degrés des  $\sigma_i$  sont inférieurs strictement à  $n$ , on en déduit qu'il existe un polynôme  $b(x) \in \mathbf{C}[x]$  tel que le polynôme  $\beta(x)$  s'écrive, indépendamment de l'indice  $i$ , sous la forme  $\beta(x) = \sigma_{\omega(i)}(ax) - \alpha\sigma_i(x) + x^n b(x)$ . Nous avons ainsi prouvé le point 1.

Afin de prouver les points suivants, il est utile de remarquer que, pour tout  $m \in \mathbf{N}^*$  et pour tout indice  $i$ , on a

$$\sigma_{\omega^m(i)}(0) = \alpha^m \sigma_i(0) + c(0) \sum_{p=0}^{m-1} \alpha^p \quad (*)$$

Si la permutation  $\omega$  est triviale, on a alors  $(1 - \alpha)\sigma_i(0) = c(0)$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Les  $\sigma_i(0)$  étant distincts par hypothèse, il vient alors  $\alpha = 1$ . Réciproquement, supposons que  $\alpha = 1$  et que la décomposition de  $\omega$  en cycles disjoints contienne un cycle de longueur  $s \geq 2$ . La relation (\*) implique alors, pour un indice  $i_0$  du support de ce cycle, que  $\sigma_{i_0}(0) = \sigma_{\omega^s(i_0)}(0) = s \cdot c(0) + \sigma_{i_0}(0)$  et donc  $c(0) = 0$ . Il s'ensuit que  $\sigma_{\omega(i)}(0) = \sigma_i(0)$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Ceci prouve bien que  $\omega$  est triviale quand  $\alpha = 1$ .

Supposons maintenant que la permutation  $\omega$  ne soit pas triviale (ce qui implique donc que  $\alpha \neq 1$ ) et notons  $s$  la longueur du plus petit cycle non trivial d'une décomposition de  $\omega$  en cycles disjoints.

$\omega$  a au plus un point fixe. En effet, en supposant que  $i_1$  et  $i_2$  soient deux points fixes de  $\omega$ , il vient  $c(0) = (1 - \alpha)\sigma_{i_1}(0) = (1 - \alpha)\sigma_{i_2}(0)$ ; ce qui est faux.

La relation (\*) implique, pour deux indices différents  $i_1$  et  $i_2$  appartenant au même cycle de longueur  $s$ , que

$$c(0)(1 - \alpha^s)(1 - \alpha)^{-1} = (1 - \alpha^s)\sigma_{i_1}(0) = (1 - \alpha^s)\sigma_{i_2}(0).$$

On a donc  $\alpha^s = 1$  et, en écrivant (\*) avec  $m = s$ ,  $\sigma_{\omega^s(i)}(0) = \sigma_i(0)$  pour tout indice  $i$ . Tous les cycles non triviaux d'une décomposition de  $\omega$  sont donc bien de même longueur  $s$ . Finalement, on a bien  $\alpha^{s'} \neq 1$  pour tout  $1 \leq s' < s$  car sinon on trouverait, en utilisant (\*), un cycle de longueur  $s' < s$ .  $\square$

Grâce à ce dernier lemme, on obtient finalement la description voulue.

**Théorème 3.3.6.** *Soit  $X = X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski avec  $Q(0, z)$  à racines simples et  $X_{\sigma,n}$  une de ses formes standards. Notons  $\Phi^s$  et  $\Phi_s$  les endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$  induisant les isomorphismes entre  $X_{Q,n}$  et  $X_{\sigma,n}$ .*

*Alors, les automorphismes de  $X$  sont les restrictions des endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$  de la forme  $\Phi^s \circ \psi \circ \Phi_s$  avec  $\psi \in G_{\sigma,n}$ , où  $G_{\sigma,n} = \text{Aut}(X_{\sigma,n})$  est le groupe décrit dans le théorème ci-dessous.*

**Théorème 3.3.7.** *Soit  $X = X_{\sigma,n}$  une hypersurface de Danielewski définie par un équation de la forme*

$$x^n y = \prod_{i=1}^d (z - \sigma_i(x)) = Q(x, z).$$

*Alors, les automorphismes de  $X$  sont les restrictions des éléments de  $G_{\sigma,n}$ .  $G_{\sigma,n}$  désignant le groupe engendré par les automorphismes de  $\mathbf{C}^3$  suivants :*

(a)  $\Delta_b(x, y, z) = (x, y + x^{-n}(Q(x, z + x^n b(x)) - Q(x, z)), z + x^n b(x))$  avec  $b(x) \in \mathbf{C}[x]$ .

(b) *S'il existe un polynôme  $\tau(x)$  tel que  $Q(x, z + \tau(x)) \in \mathbf{C}[z]$ , alors les automorphismes  $H_a(x, y, z) = (ax, a^{-n}y, z + \tau(ax) - \tau(x))$  avec  $a \in \mathbf{C}^*$  doivent être ajoutés.*

(c) *S'il existe un polynôme  $\tau(x)$  tel que  $Q(x, z + \tau(x)) \in \mathbf{C}[x^q, z]$ , alors les automorphismes cycliques  $\tilde{H}_a(x, y, z) = (ax, a^{-n}y, z + \tau(ax) - \tau(x))$  avec  $a \in \mathbf{C}^*$  et  $a^q = 1$  doivent être ajoutés.*

(d) *S'il existe un polynôme  $\tau(x)$  tel que  $Q(x, z + \tau(x)) = z^i \tilde{Q}(x, z^s)$  avec  $i = 0$  ou  $1$  et  $s \geq 2$ , alors les automorphismes cycliques de la forme  $S_\alpha(x, y, z) = (ax, \alpha^i y, \alpha z + (1 - \alpha)\tau(x))$  avec  $\alpha \in \mathbf{C}^*$  et  $\alpha^s = 1$  doivent être ajoutés.*

(e) *Si  $n = 1$ , alors l'involution  $I(x, y, z) = (y, x, z)$  doit être ajoutée.*

*Preuve.* On vérifie aisément que les automorphismes du type (a),..., (e) définis ci-dessus laissent l'hypersurface  $X$  invariante.

L. Makar-Limanov a montré dans [34] que, quand  $n = 1$ , la réciproque est vraie. On peut donc supposer que  $n \geq 2$ . On est ainsi sous les hypothèses du lemme 3.3.5. Un automorphisme  $\varphi$  de  $X$  est donc uniquement déterminé par un quadruplet  $A_\varphi = (a, \alpha, b(x), \omega) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}[x] \times \mathbf{S}_d$ . Remarquons que si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux automorphismes de  $X$ , alors on a  $A_{\varphi_2 \circ \varphi_1} = (a_2 a_1, \alpha_2 \alpha_1, a_2^{-n} \alpha_2 b_1(x) + b_2(a_1 x), \omega_2 \circ \omega_1)$ . Dès lors, comme les automorphismes de type (a) correspondent aux quadruplets  $(1, 1, b(x), \text{Id})$ , il suffit de considérer les automorphismes correspondants aux quadruplets de la forme  $(a, \alpha, 0, \omega)$ .

Notons  $\sigma_i(x) = \sigma_i(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{i,j} x^j$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

1) Supposons que  $\varphi$  soit un automorphisme de  $X$  correspondant à une donnée  $A_\varphi = (a, \alpha, 0, \omega)$  où la permutation  $\omega$  est triviale. D'après le lemme 3.3.5, on a alors  $A_\varphi = (a, 1, 0, \omega)$ . De plus, le polynôme  $c(x) = \sigma_{\omega(i)}(ax) - \sigma_i(x)$  ne dépend pas de l'indice  $1 \leq i \leq d$ .

Si  $a^j \neq 1$  pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ , alors on a, pour tout  $1 \leq i \leq d$ ,  $c(x) = \sum_{j=1}^{n-1} (1 - a^j) \sigma_{i,j} x^j$ . D'où,  $\sigma_{i_1,j} = \sigma_{i_2,j}$  pour tout  $1 \leq i_1, i_2 \leq d$  et tout  $1 \leq j \leq n-1$ . On peut donc écrire, pour tout indice  $i$ ,  $\sigma_i(x)$  sous la forme  $\sigma_i(x) = \sigma_i(0) + \tau(x)$  pour un certain polynôme  $\tau(x) \in \mathbf{C}[x]$ .  $\varphi$  est donc du type (b).

En procédant de la même manière, on peut montrer que, s'il existe un entier  $q \geq 2$  tel que  $a^q = 1$  et  $a^j \neq 1$  pour tout  $1 \leq j \leq q-1$ , alors il existe un polynôme  $\tau(x) \in \mathbf{C}[x]$  tel que  $Q(x, z + \tau(x)) \in \mathbf{C}[x^q, z]$ .  $\varphi$  est alors du type (c).

2) Supposons que  $\varphi$  soit un automorphisme de  $X$  correspondant à une donnée  $A_\varphi = (a, \alpha, 0, \omega)$  avec  $\omega \neq \text{Id}$ . De plus, quitte à composer  $\varphi$  par un automorphisme correspondant au quadruplet  $(a^{-1}, 1, 0, \text{Id})$ , on peut supposer que  $\varphi$  correspond au quadruplet  $(1, \alpha, 0, \omega)$ .

D'après le lemme 3.3.5, il existe un entier  $s \geq 2$  tel que  $\alpha^s = 1$  et  $\alpha^{s'} \neq 1$  pour tout  $1 \leq s' < s$ . Or, on a  $c(x) = \sigma_{\omega(i)}(x) - \alpha\sigma(x)$ . En posant  $\tau(x) = (1 - \alpha)^{-1}c(x)$ , il vient alors, pour tout  $1 \leq i \leq d$ ,

$$\sigma_{\omega(i)}(x) - \tau(x) = (c(x) + \alpha\sigma_i(x)) - (c(x) + \alpha\tau(x)) = \alpha(\sigma_i(x) - \tau(x)).$$

Dès lors, si  $(i_1, \dots, i_s)$  est un cycle de  $\omega$ , alors on a, pour tout  $1 \leq j \leq s$ ,

$$\sigma_{i_j}(x) - \tau(x) = \alpha^{j-1}(\sigma_{i_1}(x) - \tau(x))$$

et donc

$$\prod_{j=1}^s (z - \sigma_{i_j}(x) + \tau(x)) = z^s - (\sigma_{i_1}(x) - \tau(x))^s.$$

De plus, si  $i_0$  est un point fixe de  $\omega$ , alors  $\sigma_{i_0}(x) - \tau(x) = \alpha(\sigma_{i_0}(x) - \tau(x))$  et, comme  $\alpha \neq 1$ ,  $\sigma_{i_0}(x) = \tau(x)$ .

Finalement, on a bien montré que  $Q(x, z + \tau(x)) = z^i \tilde{Q}(x, z^s)$  avec  $i = 0$  ou  $1$  selon si  $\omega$  a un point fixe ou non.  $\varphi$  est alors du type (d).  $\square$





## Deuxième partie

# Plongements des hypersurfaces de Danielewski



# Chapitre 4

## Familles d'hypersurfaces de Danielewski

Nous avons étudié, dans les chapitres précédents, les hypersurfaces de Danielewski en tant que variétés *plongées* dans l'espace affine  $\mathbf{C}^3$ . Nous avons notamment établi leur classification complète (à isomorphisme près) et décrit leurs groupes d'automorphismes. Ces résultats conduisent naturellement aux questions suivantes.

(1) Comment déterminer si deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes sont ou ne sont pas équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  ?

(1 bis) Toute hypersurface de Danielewski admet-elle des plongements non équivalents ?

(2) Tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski provient-il de la restriction d'un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  ?

(3) Sinon, tout automorphisme d'une hypersurface de Danielewski provient-il de la restriction d'un automorphisme *analytique* de  $\mathbf{C}^3$  ?

Le but de ce chapitre est donc de compléter l'étude des hypersurfaces de Danielewski en s'intéressant maintenant à leurs plongements. Nous répondrons à toutes ces questions.

Dans tout ce chapitre, nous reprenons, et généralisons, des techniques et des résultats parus dans un article [42] co-écrit avec L. Moser-Jauslin.

### 4.1 Définitions et méthodes

Dans un premier temps, nous devons préciser le sens des termes « plongement » et « équivalent » utilisés ci-dessus. Nous en profiterons pour rappeler quelques résultats généraux sur les plongements des variétés affines.

### 4.1.1 Plongements des variétés affines

**Définition 4.1.1.** Un morphisme  $\varphi : V \rightarrow W$ , entre deux variétés algébriques  $V \subset \mathbf{C}^n$  et  $W \subset \mathbf{C}^m$ , est un *plongement* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\varphi(V)$  est fermé dans  $W$  (pour la topologie de Zariski induite sur  $W$ ) ;
2.  $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$  est un isomorphisme.

**Définition 4.1.2.** Deux plongements  $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow W$  sont dits *équivalents* s'il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $W$  tel que  $\varphi_2 = \Phi \circ \varphi_1$ . On dira alors parfois, par abus de langage, que  $\varphi_1(V)$  et  $\varphi_2(V)$  sont deux plongements équivalents de  $V$ .

**Exemple 4.1.3.**

1. Si  $V \subset \mathbf{C}^n$  est un ensemble algébrique fermé, alors l'inclusion  $i : V \rightarrow \mathbf{C}^n$  est un plongement.
2. De plus, si  $\Phi$  est un automorphisme (polynomial) de  $\mathbf{C}^n$ , alors  $\Phi \circ i$  est un plongement équivalent à l'inclusion  $i$ .

Étudier les plongements d'une variété algébrique  $V \subset \mathbf{C}^n$  signifie, au moins dans un premier temps, déterminer si tous ses plongements dans  $\mathbf{C}^n$  sont équivalents. Cette question est très difficile en général. Néanmoins, Le théorème suivant montre que le cas des variétés de « grande codimension » est plus simple.

**Théorème 4.1.4 (Srinivas [49]).** *Soit  $V$  est une variété affine lisse de dimension  $d$ . Alors, tous les plongements de  $V$  dans  $\mathbf{C}^n$  avec  $n \geq 2d + 2$  sont équivalents.*

**Corollaire 4.1.5 (Craighero, [8]).** *Si  $n \geq 2d + 2$ , alors tous les plongements de  $\mathbf{C}^d$  dans  $\mathbf{C}^n$  sont équivalents.*

Le résultat de P. Craighero, antérieur à celui de V. Srinivas, est une réponse partielle à la célèbre conjecture des plongements.

**Conjecture (des plongements).** *Soient  $n \leq m$  deux entiers naturels. Tous les plongements de  $\mathbf{C}^n$  dans  $\mathbf{C}^m$  sont équivalents.*

Cette conjecture, énoncée après que S. S. Abhyankar et T. T. Moh aient prouvé que tous les plongements de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^2$  sont équivalents, est encore ouverte pour tous les couples  $(n, m) \in \mathbf{N}_{\geq 1} \times \mathbf{N}_{\geq 1} \setminus \{(1, 2)\}$  avec  $m < 2n + 2$ .

**Remarque 4.1.6.** Dire que deux plongements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  d'une même variété  $V$  (dans une même variété  $W$ ) sont équivalents revient en fait à dire que l'isomorphisme  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V) \rightarrow \varphi_2(V)$  s'étend en un automorphisme de  $W$ .

On est donc ramené, par la remarque ci-dessus, à la question de savoir si un isomorphisme donné provient ou non de la restriction d'un automorphisme de l'espace ambiant.

**Définition 4.1.7.** Soit  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  un isomorphisme entre deux variétés algébriques  $V_1, V_2 \subset \mathbf{C}^n$ . On dit que  $\varphi$  s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^n$ , ou encore que  $\varphi$  provient de la restriction (à  $V_1$ ) d'un automorphisme de l'espace ambiant, s'il existe un automorphisme (polynomial)  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  tel que  $\Phi|_{V_1} = \varphi$ .

**Lemme 4.1.8.** *Soit  $V \subset \mathbf{C}^n$  une variété algébrique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tous les plongements de  $V$  dans  $\mathbf{C}^n$  sont équivalents (à l'inclusion) ;*
2. *Si  $W \subset \mathbf{C}^n$  est une variété isomorphe à  $V$ , alors tout isomorphisme  $\varphi : V \rightarrow W$  s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^n$  ;*
3. *Tous les automorphismes de  $V$  sont les restrictions d'automorphismes de  $\mathbf{C}^n$  et il existe, pour toute variété  $W \subset \mathbf{C}^n$  isomorphe à  $V$ , un isomorphisme  $\varphi : V \rightarrow W$  qui s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^n$ .*

*Preuve.* Il est facile de voir que les conditions 1. et 2. sont équivalentes. Pour démontrer ce lemme, il suffit donc de montrer que la condition 3. implique la condition 2.

Supposons que  $V \subset \mathbf{C}^n$  satisfasse la condition 3. et que  $W \subset \mathbf{C}^n$  soit isomorphe à  $V$ . Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un isomorphisme. Alors, par hypothèse, il existe un automorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{C}^n$  qui induit un isomorphisme  $\psi : V \rightarrow W$ .  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est un automorphisme de  $V$ . Il s'étend donc, par hypothèse, en un automorphisme  $F$  de  $\mathbf{C}^n$ . Ainsi,  $\varphi$  est la restriction à  $V$  de l'automorphisme  $\Psi \circ F$ .  $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons construire, pour chaque hypersurface de Danielewski  $X = X_{Q,n}$ , des plongements  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{C}^3$  non équivalents

à l'inclusion. Or, nous savons (corollaire 3.3.3) que tous les automorphismes d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard s'étendent en des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$ . Ainsi, d'après le lemme 4.1.8, nous construirons, si  $X$  est sous forme standard, un plongement  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{C}^3$  tel qu'aucun isomorphisme entre  $\varphi(X)$  et  $X$  ne soit la restriction d'un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ . Nous dirons que les variétés  $X$  et  $\varphi(X)$  sont isomorphes mais ne sont pas équivalentes.

**Définition 4.1.9.** Deux variétés algébriques isomorphes  $X, Y \subset \mathbf{C}^n$  sont dites (algébriquement) *équivalentes* s'il existe un automorphisme polynomial  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  tel que  $\Phi(X) = Y$ .

On précisera parfois que les variétés  $X$  et  $Y$  sont équivalentes via un automorphisme de  $\mathbf{C}^n$ .

## 4.1.2 Le cas particulier des hypersurfaces

Le principal objectif de ce chapitre est de classifier les hypersurfaces de Danielewski à équivalence près. Le lemme évident suivant montre que, dans le cas d'hypersurfaces, la notion d'équivalence peut être écrite simplement.

**Lemme 4.1.10.** *Deux hypersurfaces  $H_1 = V(P_1) \subset \mathbf{C}^n$  et  $H_2 = V(P_2) \subset \mathbf{C}^n$  sont équivalentes si et seulement si il existe un automorphisme (polynomial)  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  et une constante  $a \in \mathbf{C}^*$  tels que  $\Phi^*(P_1) = aP_2$ .*

Une conséquence de ce lemme est que, si les hypersurfaces  $V(P_1)$  et  $V(P_2)$  sont équivalentes, alors, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , les hypersurfaces  $V(P_1 - c)$  et  $V(P_2 - a^{-1}c)$  le sont aussi. On obtient ainsi une condition nécessaire pour que deux hypersurfaces soient équivalentes. C'est cette condition, portant sur les fibres des polynômes qui définissent les hypersurfaces, qui fait que le cas des hypersurfaces est souvent plus facile à étudier.

**Lemme 4.1.11.** *Soient  $V(P_1)$  et  $V(P_2)$  deux hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$  équivalentes.*

*Alors il existe une constante non nulle  $a \in \mathbf{C}^*$  telle que  $V(P_1+c) \simeq V(P_2+ac)$  pour toute constante  $c \in \mathbf{C}$ .*

En 2003, G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin [23] ont ainsi pu construire les premiers exemples d'hypersurfaces de Danielewski isomorphes mais non équivalentes. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant.

**Proposition 4.1.12.** *Soit  $X = X_{p,n}$  une hypersurface de Danielewski définie par une équation  $x^n y = p(z)$  avec  $n \geq 2$  et  $p(z) \in \mathbf{C}[z]$ . Supposons que les hypersurfaces  $V(x^n y - p(z) - c)$  et  $V(x^n y - (1-x)p(z) - c')$  soient isomorphes pour certaines constantes  $c, c' \in \mathbf{C}$ . Alors,  $c' = 0$ .*

*Ainsi, les hypersurfaces  $X$  et  $\tilde{X} = X_{(1-x)p(z),n}$  sont isomorphes mais ne sont pas équivalentes : aucun isomorphisme entre  $X$  et  $\tilde{X}$  ne s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* On va utiliser le théorème 3.2.4 de classification des hypersurfaces de Danielewski. Comme il porte sur les hypersurfaces sous forme standard, on commence par calculer une forme standard pour les hypersurfaces  $X_{(1-x)p(z)+c',n}$ . Or, pour toute constante  $c' \in \mathbf{C}$ , on peut écrire que

$$(1-x)p(z) + c' = (1-x)(p(z) + c'(1+x+\cdots+x^{n-1})) + c'x^n$$

Ainsi, d'après le lemme 1.3.9, les hypersurfaces  $V(x^n y - (1-x)p(z) - c')$  et  $V(x^n y - (p(z) + c'(1+x+\cdots+x^{n-1})))$  sont isomorphes. En particulier,  $X \simeq \tilde{X}$ .

Cependant, on vérifie aisément, grâce au théorème 3.2.4, que si les hypersurfaces  $V(x^n y - (p(z) + c'(1+x+\cdots+x^{n-1})))$  et  $V(x^n y - (p(z) + c))$  sont isomorphes, alors  $c' = 0$ . (On pouvait aussi utiliser la proposition 3.2.8.)

Le lemme 4.1.11 est ainsi pris en défaut et on peut donc conclure que  $X$  et  $\tilde{X}$  ne sont pas équivalentes.  $\square$

Dans la preuve de la proposition 4.1.12, on a dû utiliser le théorème 3.2.4 pour distinguer les hypersurfaces de Danielewski  $V(x^n y - Q(x, z) - c)$  et  $V(x^n y - (1-x)Q(x, z) - c')$ . Cependant, dans certains cas particuliers, la démonstration est plus facile et peut se passer de ce théorème de classification.

**Exemple 4.1.13.** Soient  $P_0$  et  $P_1$  les polynômes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  définis par  $P_0 = x^2 y - z^2 + 1$  et  $P_1 = x^2 y - (1-x)(z^2 - 1)$ . Alors, les hypersurfaces de Danielewski  $V(P_0)$  et  $V(P_1)$  sont isomorphes mais ne sont pas équivalentes.

*Preuve.*  $V(P_0)$  et  $V(P_1)$  sont bien isomorphes d'après le lemme 1.3.9. ( $V(P_0)$  est en fait une forme standard de  $V(P_1)$ .) De plus, d'après le critère jacobien, les hypersurfaces  $V(P_1 - c)$  sont toutes lisses. Or,  $V(P_0 - 1)$  est singulière et n'est donc isomorphe à aucune hypersurface  $V(P_1 - c)$ , avec  $c \in \mathbf{C}$ .  $\square$



Cet exemple s'inscrit dans un cadre plus général. On a en effet utilisé, sans le dire, un invariant pour prouver que les hypersurfaces  $V(P_0)$  et  $V(P_1)$  ne sont pas équivalentes : le nombre de zéros des gradients de  $P_0$  et  $P_1$ . Introduit pour la première fois par V. Shpilrain et J.-T. Yu dans [46], cet invariant est en fait, pour une hypersurface  $V(P) \subset \mathbf{C}^n$ , le nombre de points critiques de l'application  $P : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ . C'est un invariant naturel pour l'équivalence des hypersurfaces ; tout comme le nombre de singularités est un invariant naturel pour l'isomorphisme. On le note  $\sharp\text{grad}(P)$ .

**Lemme 4.1.14.** *Soient  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  deux polynômes tels que  $\sharp\text{grad}(P) \neq \sharp\text{grad}(Q)$ . Alors, les hypersurfaces  $V(P)$  et  $V(Q)$  ne sont pas équivalentes.*

*Preuve.* Remarquons que  $\sharp\text{grad}(P)$  est égal, par définition, à la somme des nombres de singularités des surfaces  $V(P + c)$  pour tout  $c \in \mathbf{C}$ . Le lemme est alors une conséquence directe du lemme 4.1.11.  $\square$

**Remarque 4.1.15.** En considérant l'automorphisme analytique défini par

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto \left( x, e^{-x}y - \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}(z^2 - 1), z \right)$$

il vient que  $\Phi^*(P_1) = e^{-x}P_0$  et donc que les hypersurfaces  $V(P_0)$  et  $V(P_1)$  sont analytiquement équivalentes (cf. définition ci-dessous). On voit ainsi que  $\sharp\text{grad}$  n'est pas un invariant pour l'équivalence analytique des hypersurfaces.

**Définition 4.1.16.** Deux hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$ ,  $H_1 = V(P_1)$  et  $H_2 = V(P_2)$ , sont dites *analytiquement équivalentes* s'il existe un automorphisme analytique  $\Psi$  de  $\mathbf{C}^n$  et une fonction analytique inversible  $\alpha$  tels que  $\Psi^*(P_1) = \alpha P_2$ .

### 4.1.3 Équivalence polynomiale et isomorphisme de familles

Dans la suite de ce chapitre, nous allons établir la classification des hypersurfaces de Danielewski à équivalence près. Pour cela, il suffit en fait d'établir la classification des polynômes qui les définissent.

**Notation 4.1.17.** Soit  $X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski. On note alors  $P_{Q,n}$  le polynôme de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  défini par  $P_{Q,n} = x^n y - Q(x, z)$  et on dit que le polynôme  $P_{Q,n}$  définit l'hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n} = V(P_{Q,n})$ .

**Remarque 4.1.18.** D'après le théorème 1.3.6, les fibres  $V(P_{Q,n} - c)$  des polynômes  $P_{Q,n}$  admettent une structure de surface de Danielewski pour presque tous les  $c \in \mathbf{C}$ .

D'après le lemme 4.1.10, deux hypersurfaces  $X_{Q_1,n_1}$  et  $X_{Q_2,n_2}$  sont équivalentes si et seulement si il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^3$  et une constante non nulle  $a \in \mathbf{C}^*$  tels que  $\Phi^*(P_{Q_1,n_1}) = aP_{Q_2,n_2}$ . En composant par l'automorphisme  $(x, y, z) \mapsto (x, a^{-1}y, z)$ , on obtient alors que  $X_{Q_1,n_1}$  et  $X_{Q_2,n_2}$  sont équivalentes si et seulement si il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^3$  et une constante non nulle  $a \in \mathbf{C}^*$  tels que  $\Phi^*(P_{Q_1,n_1}) = P_{aQ_2,n_2}$ . Si tel est le cas, on dit que les polynômes  $P_{Q_1,n_1}$  et  $P_{aQ_2,n_2}$  sont équivalents.

**Définition 4.1.19.** Deux polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  sont dits (*algébriquement*) *équivalents* s'il existe un automorphisme (algébrique)  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  tel que  $\Phi^*(P) = Q$ .

On notera alors  $P \sim Q$  et on précisera parfois que  $P$  et  $Q$  sont équivalents *via* l'automorphisme  $\Phi$ .

De même, les polynômes  $P$  et  $Q$  sont dits *analytiquement équivalents* s'il existe un automorphisme analytique  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  tel que  $\Phi^*(P) = Q$ .

### Comment prouver que deux polynômes ne sont pas équivalents ?

Comme pour l'équivalence des hypersurfaces,  $\sharp\text{grad}$  est un invariant pour l'équivalence des polynômes. Il faut noter que c'est même un invariant pour l'équivalence à automorphisme analytique près.

**Lemme 4.1.20.** Soient  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  deux polynômes tels que  $\sharp\text{grad}(P) \neq \sharp\text{grad}(Q)$ . Alors, les polynômes  $P$  et  $Q$  ne sont ni algébriquement équivalents ni analytiquement équivalents.

On prouve ainsi que les polynômes  $x^2y - z^2 + 1$  et  $x^2y - (1-x)(z^2 - 1)$  de l'exemple 4.1.13 ne sont pas analytiquement équivalents. Cependant, on a vu lors de la remarque 4.1.15 que les hypersurfaces qu'ils définissent sont analytiquement équivalentes.

D'une façon plus générale, on peut faire la remarque suivante.

**Remarque 4.1.21.** Si deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  sont équivalents, alors leurs fibres sont deux à deux isomorphes, c'est-à-dire que

$$V(P(x_1, \dots, x_n) - c) \simeq V(Q(x_1, \dots, x_n) - c) \quad \text{pour tout } c \in \mathbf{C}.$$

Cette remarque signifie que l'équivalence de polynômes est en fait une équivalence de fibrations : deux polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}^n$  sont équivalents si et seulement si il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^n$  tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{C}^n \\ & \searrow P_1 & \swarrow P_2 \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

Pour deux polynômes, le fait d'être équivalents est donc une condition plus forte que le fait de définir des hypersurfaces équivalentes.

**Exemple 4.1.22.** Les hypersurfaces  $V(x^2 + 1)$  et  $V(2(x^2 + 1))$  sont équivalentes alors que les polynômes  $x^2 + 1$  et  $2(x^2 + 1)$  ne sont pas équivalents comme polynômes de  $\mathbf{C}[x]$ .

La remarque 4.1.21 donne ainsi une condition nécessaire assez forte pour que deux polynômes puissent être équivalents. C'est d'ailleurs cette condition qui était toujours utilisée jusqu'à présent (souvent par le biais du lemme 4.1.20) lorsque l'on voulait prouver que deux polynômes donnés n'étaient pas équivalents. Nous verrons plus tard un exemple explicite (l'exemple 4.2.29) pour lequel cette condition est prise en défaut. Pour le montrer, on utilise fortement la proposition 3.1.2 qui donne la forme *a priori* des isomorphismes entre deux hypersurfaces de Danielewski ; c'est-à-dire entre les fibres de deux polynômes  $P_{Q_1, n_1}$  et  $P_{Q_2, n_2}$ .

En fait, on peut préciser la remarque 4.1.21, en disant que si deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont équivalents, alors les familles d'hypersurfaces  $\{V(P - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(Q - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes (au sens de la définition 4.1.26 ci-après). Nous allons voir que la notion de familles isomorphes est effectivement la bonne notion et qu'elle est équivalente à celle de polynômes équivalents.

### Comment prouver que deux polynômes sont équivalents ?

Il est, en règle générale, difficile de prouver que deux polynômes donnés sont équivalents. Cela tient au fait qu'il est difficile de construire des automorphismes des anneaux de polynômes  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

Cependant, on sait bien construire des isomorphismes entre deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes. Supposons alors que l'on veuille montrer que deux polynômes  $P_1 = P_{Q_1, n_1}$  et  $P_2 = P_{Q_2, n_2}$  sont équivalents. On commence par vérifier que leurs fibres sont isomorphes. Supposons donc que

l'on connaisse, pour chaque  $c \in \mathbf{C}$ , un isomorphisme  $\varphi_c$  entre  $V(P_1 - c)$  et  $V(P_2 - c)$ . On aimerait « recoller » ensemble ces isomorphismes pour construire un automorphisme de l'espace ambiant réalisant l'équivalence entre  $P_1$  et  $P_2$ .

Nous avons décrit, avec L. Moser-Jauslin dans [42], comment le faire quand les isomorphismes  $\varphi_c$  dépendent polynomialement de  $c$ ; c'est-à-dire quand les familles  $\{V(P_1 - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(P_2 - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes.

Notre « méthode » consiste en les deux lemmes suivants.

**Lemme 4.1.23.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbf{C}^{[n]}$ . Si  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbf{C}^{[n]}$  tel que  $\varphi(P - c) \in (Q - c)$  pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , alors  $\varphi(P) = Q$ .*

*Preuve.* Supposons que, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ ,  $\varphi(P - c)$  appartienne à l'idéal engendré par  $Q - c$ . Alors, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , il existe un polynôme  $R_c \in \mathbf{C}^{[n]}$  tel que  $\varphi(P - c) = R_c(Q - c)$ . On a donc, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ ,

$$R_c(Q - c) = \varphi(P - c) = \varphi(P) - c = R_0Q - c.$$

Il vient alors  $(R_c - 1)(Q - c) = (R_0 - 1)Q$  et  $Q(R_c - R_0) = c(R_c - 1)$ . En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par  $(Q - c)$ , on obtient que  $(Q - c)Q(R_c - R_0) = c(R_0 - 1)Q$  et donc  $(Q - c)(R_c - R_0) = c(R_0 - 1)$  pour tout  $c \in \mathbf{C}$ . Ceci implique bien que  $R_0 = 1$  et donc  $\varphi(P) = Q$ .  $\square$

**Lemme 4.1.24.** *Soient  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  deux polynômes et  $\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  un morphisme algébrique (resp. analytique). Considérons la famille  $(\phi_c)$  de morphismes de  $\mathbf{C}^n$  définis par  $\phi_c(x_1, \dots, x_n) = \Phi(c; x_1, \dots, x_n)$ .*

*Supposons également que, pour chaque  $c \in \mathbf{C}$ ,  $\phi_c$  induise un isomorphisme  $\varphi_c : V(P - c) \rightarrow V(Q - c)$  entre les fibres de  $P$  et celles de  $Q$ . Alors, les polynômes  $P$  et  $Q$  sont algébriquement (resp. analytiquement) équivalents.*

*Preuve.* Il suffit de considérer l'endomorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{C}^n$  défini par  $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(P(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n)$ . En effet, pour chaque  $c \in \mathbf{C}$ , la restriction de  $\Psi$  à l'hypersurface  $V(P - c)$  est  $\varphi_c$  qui est bijective sur son image  $V(Q - c)$ . Comme  $\mathbf{C}^n = \bigcup_{c \in \mathbf{C}} (V(P - c)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C}} (V(Q - c))$ , cela prouve que  $\Psi$  est inversible. Par ailleurs, le lemme précédent implique que  $\Psi^*(Q) = P$ .

Pour conclure, il faut encore s'assurer (même si ceci est bien connu) que  $\Psi^{-1}$  est polynomial si les automorphismes  $\phi_c$  le sont, et analytique si les automorphismes  $\phi_c$  sont analytiques.

Commençons par le cas analytique.  $\Psi : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  est une fonction holomorphe bijective. Son jacobien étant non nul au voisinage de chaque point,  $\Psi$  admet, au voisinage de chaque point, un inverse holomorphe. (voir par exemple les théorèmes 2 et 4 pages 52–53 dans [6]).  $\Psi^{-1}$  est donc bien une fonction analytique. Pour le cas algébrique, on commence par dire que, comme précédemment,  $\Psi^{-1}$  est holomorphe. Ensuite, on peut appliquer, par exemple, le théorème (2.1) de [5] qui montre notamment que toute application polynomiale de  $\mathbf{C}^n$  dans  $\mathbf{C}^n$  injective et de jacobien inversible est un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^n$ .  $\square$

Quand il existe, pour deux polynômes  $P$  et  $Q$ , un morphisme  $\Phi$  vérifiant les hypothèses du lemme 4.1.24, on dira que les familles  $\{V(P - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(Q - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes en tant que familles d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$ .

**Notation 4.1.25.**

1. Soit  $P \in (\mathbf{C}[t])^{[n]} = \mathbf{C}[t][x_1, \dots, x_n]$  un polynôme à  $n$  variables et à coefficients dans un anneau de polynômes  $\mathbf{C}[t]$ .

On note, pour tout  $t_0 \in \mathbf{C}$ ,  $P_{t_0}$  le polynôme de  $\mathbf{C}^{[n]}$  défini par  $P_{t_0}(x_1, \dots, x_n) = P(t_0, x_1, \dots, x_n)$ , où  $P$  est vu comme un polynôme de  $\mathbf{C}[t, x_1, \dots, x_n]$ .

2. Soit  $\Phi \in \text{End}_{\mathbf{C}[t]} \mathbf{C}[t][x_1, \dots, x_n]$  un endomorphisme polynomial.

On note, pour tout  $t_0 \in \mathbf{C}$ ,  $\Phi_{t_0}$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  défini par  $\Phi_{t_0}(P) = (\Phi(P))_{t_0}$  pour tout polynôme  $P \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Définition 4.1.26.** Soient  $P, Q \in (\mathbf{C}[t])^{[n]}$  deux polynômes à  $n$  variables et à coefficients dans un anneau de polynômes  $\mathbf{C}[t]$ .

On dit que les deux familles d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$ ,  $\{V(P_t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(Q_t) \mid t \in \mathbf{C}\}$ , sont *isomorphes* s'il existe un endomorphisme (polynomial)  $\Phi \in \text{End}_{\mathbf{C}[t]} (\mathbf{C}[t])^{[n]}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbf{C}$ , la restriction de  $(\Phi_t)_*$  à  $V(P_t)$  induise un isomorphisme entre  $V(P_t)$  et  $V(Q_t)$ .

On peut naturellement associer, à tout polynôme  $P \in \mathbf{C}^{[n]}$ , la famille  $\{V(P - t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  de ses fibres. Le lemme 4.1.24 implique alors le résultat suivant.

**Proposition 4.1.27.** *Deux polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  sont équivalents si et seulement si les familles  $\{V(P - t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(Q - t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes en tant que familles d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$ .*

## Un exemple symptomatique

En pratique, les deux méthodes que nous venons de décrire s'avèrent souvent insuffisantes quand on veut décider si deux polynômes donnés sont équivalents ou non. Une bonne illustration de cela est donnée par l'exemple du polynôme dit *polynôme de Vénéreau*. Dans [24], S. Vénéreau demande si le polynôme  $f$  de  $\mathbf{C}[u, x, y, z]$  défini par  $f = y + x[xz + y(yu + z^2)]$  est une coordonnée, c'est-à-dire s'il est équivalent au polynôme  $x$ . Dans cette optique, il montre le résultat suivant.

**Proposition 4.1.28 (Vénéreau [24]).** *Pour toute constante  $c \in \mathbf{C}$ , l'hypersurface de  $\mathbf{C}^4$  d'équation*

$$y + x[xz + y(yu + z^2)] = c$$

*est isomorphe à  $\mathbf{C}^3$ .*

Ainsi, si on pense que le polynôme  $f$  n'est pas une coordonnée, on ne peut pas le prouver par la méthode habituelle. Par ailleurs, comme on ne sait pas construire une famille d'isomorphismes  $\varphi_c : V(f - c) \rightarrow \mathbf{C}^3$  qui aient une dépendance algébrique en  $c$ , on ne sait toujours pas si le polynôme de Vénéreau est ou non une coordonnée.

**Remarque 4.1.29.** Le cas des polynômes  $P_{Q,n}$  avec  $\deg(Q(0, z)) = 1$  est plus simple. En effet, nous savons que toutes les fibres d'un tel polynôme sont isomorphes à  $\mathbf{C}^2$ . Dès lors, d'après un résultat de S. Kaliman [30], ces polynômes sont des coordonnées.

De plus, si  $P$  est un tel polynôme, alors on peut même construire facilement un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  qui réalise l'équivalence entre  $P$  et la variable  $z$ . Dans un premier temps, il suffit de reprendre la preuve du théorème 4.2.21 pour montrer que  $P$  est équivalent à un polynôme de la forme  $x^n y = p(z) + xq(x)$  avec  $\deg(p) = 1$ . Il suffit alors de considérer l'automorphisme  $(x, y, z) \mapsto (x, y, a^{-1}[z - b - xq(x) + x^n y])$ , où  $a$  et  $b$  sont les coefficients de  $p$ . (c'est-à-dire que  $p(z) = az + b$ )

## 4.2 Classification des hypersurfaces de Danielewski à équivalence près

Dans cette section, nous voulons établir la classification, à équivalence près, des hypersurfaces de Danielewski. Comme nous l'avons vu, on peut (re)-formuler cette question de deux façons.

1. Classifier les polynômes  $P_{Q,n}$  à équivalence près.
2. Classifier les familles d'hypersurfaces  $\{V(P_{Q,n} - t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  à isomorphisme de familles près.

Chacune de ces formulations ayant ses avantages et ses inconvénients, nous travaillerons en deux temps.

Tout d'abord, nous utiliserons la proposition 3.1.2 pour trouver des conditions nécessaires, et suffisantes, pour que deux polynômes  $P_{Q_1,n_1}$  et  $P_{Q_2,n_2}$  soient équivalents. Parallèlement, nous discuterons, sur des exemples concrets, de la possibilité, pour un automorphisme d'une hypersurface de Danielewski, de s'étendre en un automorphisme (éventuellement analytique) de  $\mathbf{C}^3$ .

Dans un deuxième temps, nous développerons le second point de vue en introduisant les notions de surface de Danielewski à coefficients dans un anneau de polynômes et de leurs formes standards. Cela nous permettra de construire des hypersurfaces de Danielewski équivalentes à une hypersurface de Danielewski donnée et ainsi de trouver des formes normales, déterminées algorithmiquement, pour les polynômes  $P_{Q,n}$ .

Enfin, dans la dernière partie de cette section, nous reprendrons l'étude, menée avec L. Moser-Jauslin dans [42], du cas particulier des hypersurfaces d'équation  $x^2y = z^2 + xq(z)$  et illustrerons par des exemples explicites les différents phénomènes qui peuvent arriver.

### 4.2.1 Extension des isomorphismes entre hypersurfaces de Danielewski et de leurs automorphismes : points de vue algébrique et analytique

Comme nous l'avons vu avec l'exemple du polynôme de Vénéreau, prouver que deux polynômes  $P$  et  $Q$  donnés ne sont pas équivalents est souvent une question très difficile. La seule « méthode » connue s'appuie sur la remarque 4.1.21 et consiste à exhiber deux fibres non isomorphes  $V(P - c) \not\cong V(Q - c)$  pour une même constante  $c \in \mathbf{C}$ .

Heureusement, la situation n'est pas aussi compliquée pour les polynômes  $P_{Q,n}$  qui définissent les hypersurfaces de Danielewski : contrairement aux fibres du polynôme de Vénéreau, qui sont toutes isomorphes à  $\mathbf{C}^3$  et ont donc beaucoup d'automorphismes, les hypersurfaces de Danielewski ont peu d'automorphismes. La connaissance précise de ces automorphismes va nous fournir une méthode pour distinguer, dans ce cadre, des polynômes non équivalents.

Supposons que deux polynômes  $P_1 = P_{Q_1,n}$  et  $P_2 = P_{Q_2,n}$  soient équivalents et donnons-nous un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^3$  qui réalise cette équiva-

lence. Alors,  $\Phi$  induit nécessairement un isomorphisme entre les hypersurfaces  $V(P_1 - c)$  et  $V(P_2 - c)$ . Or, comme nous l'avons vu, cet isomorphisme a une forme particulière. (quand  $n \geq 2$ , il préserve par exemple l'idéal engendré par  $x$ .) Ainsi, cela doit impliquer que l'automorphisme  $\Phi$  lui-même a une forme particulière. Il suffit alors de « tester » tous les automorphismes de cette forme pour voir s'ils réalisent l'équivalence entre  $P_1$  et  $P_2$ . C'est cette démarche que l'on va suivre dans la suite. On développera également la même méthode pour déterminer si un automorphisme d'une hypersurface de Danielewski peut s'étendre en un automorphisme de l'espace ambiant.

### Théorème de classification

Le premier résultat de cette section repose sur la proposition 3.1.2 et donne la forme des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$  qui réalisent l'équivalence entre deux hypersurfaces de Danielewski.

**Proposition 4.2.1.** *Soient  $X_{Q_1,n}$  et  $X_{Q_2,n}$  deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes avec  $n \geq 2$ . Supposons qu'elles soient équivalentes et que  $\Phi$  soit un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  tel que  $\Phi^*((P_{Q_1,n})) = (P_{Q_2,n})$ .*

*Alors, il existe des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $\Phi^*(x) = ax$  et  $\Phi^*(z) = \alpha z + \beta + xB(x, P_{Q_2,n})$ .*

*Preuve.* Comme  $P_{Q_2,n}$  est un polynôme irréductible, il existe une constante non nulle  $\mu \in \mathbf{C}^*$  telle que  $\Phi^*(P_{Q_1,n}) = \mu P_{Q_2,n}$ . Ainsi, pour toute constante  $c \in \mathbf{C}$ ,  $\Phi$  induit un isomorphisme  $\Phi_c$  entre les hypersurfaces de Danielewski  $V(P_{Q_2,n} - \mu^{-1}c)$  et  $V(P_{Q_1,n} - c)$ .

Or, comme  $n > 1$ , l'invariant de Makar-Limanov de ces hypersurfaces est l'anneau  $\mathbf{C}[x]$ . En particulier, l'image par  $\Phi^*$  de l'idéal  $(x, P_{Q_1,n} - c)$  est incluse dans l'idéal  $(x, P_{Q_2,n} - \mu^{-1}c) = (x, Q_2(0, z) - \mu^{-1}c)$ . Ainsi,

$$\Phi^*(x) \in \bigcap_{c \in \mathbf{C}} (x, Q_2(0, z) - \mu^{-1}c) = (x).$$

$\Phi$  étant inversible, il vient que  $\Phi^*(x) = ax$  pour une certaine constante non nulle  $a \in \mathbf{C}^*$ . Dès lors, les égalités suivantes sont vraies modulo  $x$  :

$$-\mu Q_2(0, z) \equiv \mu P_{Q_2,n} \equiv \Phi^*(P_{Q_1,n_1}) \equiv -Q_1(0, \Phi^*(z)) \pmod{x},$$

et impliquent que  $\Phi^*(z) \equiv \alpha z + \beta \pmod{x}$  pour certaines constantes  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $Q_1(0, \alpha z + \beta) = \mu Q_2(0, z)$ . ( $\deg Q_1(0, z) = \deg Q_2(0, z)$  d'après le corollaire 3.2.5)



On peut donc écrire  $\Phi^*(z) = \alpha z + \beta + xB(x, y, z)$ , où  $B$  est un polynôme de  $\mathbf{C}[x, y, z]$ .

Or, d'après la proposition 3.1.2, il existe, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , une constante  $\alpha_c \in \mathbf{C}^*$  et un polynôme  $\beta_c \in \mathbf{C}^{[1]}$  tels que  $\Phi_c^*(z) = \alpha_c z + \beta_c(x)$ .

Notons  $R_c$  le polynôme de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  vérifiant

$$\begin{aligned}\Phi^*(z) &= \alpha z + \beta + xB(x, y, z) = \Phi_c^*(z) + R_c(x, y, z)(P_{Q_2, n} - \mu^{-1}c) \\ &= \alpha_c z + \beta_c(x) + R_c(x, y, z)(P_{Q_2, n} - \mu^{-1}c).\end{aligned}$$

Il vient donc que  $\alpha_c = \alpha$ , que  $\beta_c(0) = \beta$  pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , et que les polynômes  $R_c(x, y, z)$  sont divisibles par  $x$ .

Le lemme 4.2.2 ci-dessous nous permet alors de montrer que  $B(x, y, z)$  est un élément de  $\mathbf{C}[x, P_{Q_2, n}]$ ; ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Supposons que  $p, q \in \mathbf{C}^{[n+1]}$  soient deux polynômes tels qu'il existe, pour toute constante  $c$ , des polynômes  $\beta_c \in \mathbf{C}^{[1]}$  et  $R_c \in \mathbf{C}^{[n+1]}$  vérifiant :*

$$p(x, y_1, \dots, y_n) = \beta_c(x) + R_c(x, y_1, \dots, y_n)(q(x, y_1, \dots, y_n) - c).$$

Alors,  $p \in \mathbf{C}[x, q(x, y_1, \dots, y_n)]$ .

*Preuve.* L'hypothèse pour  $c = 0$  implique l'existence d'un polynôme  $R_0$  tel que

$$p(x, y_1, \dots, y_n) = \beta_0(x) + R_0(x, y_1, \dots, y_n)(q(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Remarquons que les polynômes  $R_0$  et  $q$  vérifient eux aussi les hypothèses du lemme.

1) Si  $q \notin \mathbf{C}[x]$ , on considère la fonction de degré  $d$  sur  $\mathbf{C}[x, y_1, \dots, y_n]$  définie, pour tout polynôme  $f \in \mathbf{C}[x, y_1, \dots, y_n]$ , par  $d(f) = \deg(f(y_1, \dots, y_n))$ , avec  $f(y_1, \dots, y_n) = f(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{C}[x][y_1, \dots, y_n]$ .

On vérifie aisément que, comme  $d(q) > 1$ ,  $d(R_0) < d(p)$ . Dans ce cas, on peut conclure le lemme en travaillant par induction sur ce degré.

2) Si  $q \in \mathbf{C}[x]$ , on considère la fonction  $d : \mathbf{C}[x, y_1, \dots, y_n] \rightarrow \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$d(f) = \min \{ \deg(f - a) \mid a \in \mathbf{C}[x] \}.$$

Comme  $q \in \mathbf{C}[x]$ , on vérifie que  $d(p) = d(R_0 q) = \deg(q) + d(R_0)$ ; ce qui nous permet de finir la preuve du lemme par induction sur  $d(p)$ .

Remarquons pour finir que l'hypothèse « pour toute constante  $c \in \mathbf{C}$  » pouvait être remplacée par « pour une infinité de constantes  $c \in \mathbf{C}$  ».  $\square$

On peut maintenant déduire, de la proposition précédente, des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  soient équivalentes.

**Théorème 4.2.3.** *Deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont équivalentes si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $n_1 = n_2 = n$  ;
2. Il existe des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

**Remarque 4.2.4.** Ce théorème répond à la question (1) que l'on avait posée en introduction de ce chapitre. Néanmoins, la condition 2. du théorème semble, et c'est souvent le cas, difficile à vérifier en pratique. C'est pourquoi nous chercherons, dans la section suivante, des formes normales – déterminées algorithmiquement – pour les polynômes  $P_{Q, n}$ . Ces formes normales joueront en quelque sorte, pour l'équivalence des hypersurfaces, le rôle des formes standards réduites pour l'isomorphisme des surfaces : deux formes normales seront équivalentes si et seulement si elles le sont via un automorphisme affine.

*Preuve.* (du théorème 4.2.3) Supposons que les hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  soient équivalentes. En particulier, elles sont isomorphes et donc, d'après la proposition 3.2.1,  $n_1 = n_2 = n$ .

Si  $n = 1$ , on peut conclure par le théorème 3.2.2. Supposons donc que  $n \geq 2$ .

Comme les hypersurfaces de Danielewski sont des variétés irréductibles, il existe un automorphisme  $\Phi$  de  $\mathbf{C}^3$  et une constante  $\mu \in \mathbf{C}^*$  tels que  $\Phi^*(P_{Q_1, n_1}) = \mu P_{Q_2, n_2}$ . La proposition 4.2.1 garantit alors l'existence de constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et d'un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $\Phi^*(x) = ax$  et  $\Phi^*(z) = \alpha z + \beta + xB(x, P_{Q_2, n})$ . On peut alors vérifier facilement que la condition 2. est satisfaite.

Réciproquement, supposons les deux conditions satisfaites. On vérifie que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, -P_{Q_2, n}(x, z))) \equiv \mu Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

Posons  $R(x, y, z) = x^{-n}(Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, -P_{Q_2, n}(x, z))) - \mu Q_2(x, z))$  et considérons alors l'endomorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par

$$\Phi(x, y, z) = (ax, a^{-n}\mu y + R(x, y, z), \alpha z + \beta + xB(x, -P_{Q_2, n}(x, z))).$$

On a  $\Phi^*(P_{Q_1, n}) = \mu P_{Q_2, n}$ . Dès lors, la proposition sera démontrée si on prouve que  $\Phi$  est inversible.

Pour cela, il suffit de montrer que  $\Phi^*$  est surjectif, c'est-à-dire que

$$\mathbf{C}[x, y, z] \subset \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z]) = \mathbf{C}[\Phi^*(x), \Phi^*(y), \Phi^*(z)].$$

On voit déjà facilement que  $x$  et  $P_{Q_2, n}$  sont des éléments de l'image de  $\Phi^*$  et donc que  $\mathbf{C}[x, P_{Q_2, n}] \subset \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z])$ .

Puis, comme on peut écrire  $z = \alpha^{-1}[\Phi^*(z) - (\beta + xB(x, -P_{Q_2, n}(x, z)))]$ , on a  $z \in \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z])$ .

Finalement, remarquons que le polynôme  $R$  est un élément de l'anneau  $\mathbf{C}[x, z, P_{Q_2, n}]xy \oplus \mathbf{C}[x, z, P_{Q_2, n}]$ ; c'est-à-dire qu'il existe des polynômes  $f$  et  $g$  tels que  $R(x, y, z) = f(x, z, P_{Q_2, n})xy + g(x, z, P_{Q_2, n})$ .

On a ainsi  $y(a^{-n}\mu + xf(x, z, P_{Q_2, n})) \in \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z])$ . En choisissant des polynômes  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  tels que

$$(a^{-n}\mu + xf(x, z, P_{Q_2, n}))\tilde{f}(x, z, P_{Q_2, n}) = 1 + x^n\tilde{g}(x, z, P_{Q_2, n}),$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, z, P_{Q_2, n})(a^{-n}\mu + xf(x, z, P_{Q_2, n}))y &= (1 + x^n\tilde{g}(x, z, P_{Q_2, n}))y \\ &= y + (P_{Q_2, n} - Q_2(x, z))g(x, z, P_{Q_2, n}). \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que  $y \in \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z])$  car  $\mathbf{C}[x, z, P_{Q_2, n}] \subset \Phi^*(\mathbf{C}[x, y, z])$ .  $\square$

Cette preuve démontre également le résultat suivant.

**Théorème 4.2.5.** *Deux polynômes  $P_{Q_1, n_1}$  et  $P_{Q_2, n_2}$  définissant des hypersurfaces de Danielewski sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $n_1 = n_2 = n$  ;
2. Il existe des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \equiv Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}$ .

On retrouve ainsi, en utilisant directement le théorème de classification ci-avant, la proposition 4.1.12. En fait, on obtient même le résultat plus général suivant.

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $X = X_{Q, n}$  une hypersurface de Danielewski sous forme standard avec  $n \geq 2$ . Alors, l'hypersurface  $\tilde{X} = X_{(1-x)Q(x, z), n}$  est isomorphe, mais non équivalente, à  $X$ .*

*Cela signifie qu'aucun isomorphisme entre  $X$  et  $\tilde{X}$  ne s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* D'après le lemme 1.3.9, les hypersurfaces  $X$  et  $\tilde{X}$  sont bien isomorphes. Supposons qu'elles soient équivalentes.

D'après le théorème précédent, il existerait alors des constantes  $a, \alpha, \mu \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  satisfaisant l'égalité suivante :

$$(1 - ax)Q(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q(x, z))) \equiv \mu Q(x, z) \pmod{(x^n)}.$$

En notant  $Q(x, z) = p(z) + xq(x, z)$ , on obtient alors les égalités modulo  $(x^2)$  suivantes :

$$\begin{aligned} \mu Q(x, z) &\equiv \mu(p(z) + xq(0, z)) \\ &\equiv (1 - ax)Q(ax, \alpha z + \beta + xB(0, Q(0, z))) \\ &\equiv (1 - ax)[p(\alpha z + \beta + xB(0, p(z))) + xq(0, \alpha z + \beta)] \\ &\equiv p(\alpha z + \beta) + x(B(0, p(z))p'(\alpha z + \beta) + q(0, \alpha z + \beta) - ap(\alpha z + \beta)). \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$B(0, p(z))p'(\alpha z + \beta) + q(0, \alpha z + \beta) - ap(\alpha z + \beta) = \mu q(0, z);$$

ce qui est impossible car,  $X$  étant par hypothèse sous forme standard,  $\deg(q(0, z)) < \deg(p)$ .  $\square$

On peut maintenant répondre à la question (*1bis*) du début de chapitre. En effet, toute hypersurface de Danielewski étant isomorphe à une hypersurface sous forme standard (d'après le théorème 1.3.13), la proposition ci-avant montre que toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$  admet des plongements non équivalents.

**Corollaire 4.2.7.** *Toute hypersurface de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov non trivial admet des plongements non équivalents.*

**Remarque 4.2.8.** Le cas des hypersurfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial est, dans un sens, plus compliqué : même si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1,1}$  et  $X_{Q_2,1}$  isomorphes sont toujours équivalentes, cela ne signifie pas pour autant que tous les plongements, comme hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$ , d'une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,1}$  sont équivalents. D. Daigle [12] et G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin [23], construisent d'ailleurs, pour certains polynômes  $Q_d(x, z) = z^d - 1$  avec  $d \geq 2$ , des exemples d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  isomorphes, mais non équivalentes, à l'hypersurface de Danielewski  $X_{Q_d,1}$ . Par ailleurs, G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin posent l'intéressante question suivante.

**Question 4.2.9.** *Existe-il une hypersurface de  $\mathbf{C}^3$  isomorphe mais non équivalente à l'hypersurface  $V(xy - z^2)$  ?*

## Extension des automorphismes

Nous avons calculé, dans le chapitre 3 de cette thèse, les groupes d'automorphismes des hypersurfaces de Danielewski. Nous avons notamment montré que tous les automorphismes d'une hypersurface de Danielewski sous forme standard sont les restrictions d'automorphismes de l'espace ambiant  $\mathbf{C}^3$ . Nous allons maintenant montrer que cette propriété n'est pas vraie pour une hypersurface de Danielewski quelconque.

Comme illustration, nous reprendrons l'exemple particulièrement parlant donné dans [20]. Il s'agit d'une action du groupe multiplicatif  $\mathbf{C}^*$  sur une hypersurface  $X$  d'équation  $x^n y = (1-x)p(z)$ . L'idée est de partir de l'action naturelle de  $\mathbf{C}^*$  sur l'hypersurface  $X_s$  d'équation  $x^n y = p(z)$  définie par  $\psi(a, (x, y, z)) = (ax, a^{-n}y, z)$  et d'exploiter le fait que, comme le montre la proposition 4.1.12, les hypersurfaces  $X$  et  $X_s$  sont isomorphes mais pas équivalentes.

**Exemple 4.2.10.** Soient  $n \geq 2$  un entier et  $p(z) \in \mathbf{C}[z]$  un polynôme. Notons  $X = X_{(1-x)p(z), n}$  l'hypersurface de Danielewski d'équation  $x^n y = (1-x)p(z)$ . Alors, on définit une action du groupe  $\mathbf{C}^*$ ,  $\theta : \mathbf{C}^* \times X \rightarrow X$ , sur  $X$  en posant

$$\theta(a, (x, y, z)) = (ax, a^{-n}(1-ax)[(1+x+\cdots+x^{n-1})y+p(z)], z).$$

*Preuve.* L'hypersurface  $X_s \subset \mathbf{C}^3$  définie par l'équation  $x^n y = p(z)$  est une forme standard de  $X$  et admet naturellement une action de  $\mathbf{C}^*$  donnée par  $\psi(a, (x, y, z)) = (ax, a^{-n}y, z)$ . De plus, en reprenant la notation 1.3.14, on vérifie que les isomorphismes  $\phi^s : X \rightarrow X_s$  et  $\phi_s : X_s \rightarrow X$  sont donnés respectivement par  $\phi^s(x, y, z) = (x, (1+x+\cdots+x^{n-1})y+p(z), z)$  et par  $\phi_s(x, y, z) = (x, (1-x)y, z)$ .

Il suffit alors de vérifier que  $\theta(a, (x, y, z)) = (\phi_s \circ \psi(a, \cdot) \circ \phi^s)(x, y, z)$  pour toute constante  $a \in \mathbf{C}^*$  et tout point  $(x, y, z) \in X$ .  $\square$

Nous voulons maintenant déterminer la forme des automorphismes de  $\mathbf{C}^3$  qui peuvent induire un automorphisme de  $X$ . Dans un premier temps, la proposition 4.2.1 implique directement, pour toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$ , le résultat suivant.

**Proposition 4.2.11.** *Supposons que  $\Phi$  soit un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  laissant invariante une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  avec  $n \geq 2$ .*

*Alors, il existe des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}[z]$  tels que  $\Phi^*(x) = ax$  et  $\Phi^*(z) = \alpha z + \beta + xB(x, P_{Q,n})$ .*

Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous avons, avec A. Dubouloz, pu préciser ce résultat comme suit.

**Lemme 4.2.12.** *Soit  $X \subset \mathbf{C}^3$  une hypersurface de Danielewski d'équation  $x^n y = (1-x)p(z)$  avec  $n \geq 2$ . Si  $\Phi$  est un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  laissant  $X$  invariante, alors  $\Phi^*(x) = x$ .*

On observe donc, comme conséquence directe de ce lemme, que certains automorphismes de  $X$  ne proviennent pas de la restriction d'automorphismes de  $\mathbf{C}^3$ .

**Corollaire 4.2.13.** *Pour tout  $a \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ , l'automorphisme  $\theta_a : X \rightarrow X$  défini par  $(x, y, z) \mapsto \theta(a, (x, y, z))$  ne s'étend pas en un automorphisme de l'espace ambiant.*

*En particulier,  $(x, y, z) \mapsto (-x, (-1)^n(1+x)[(1+x+\dots+x^{n-1})y+p(z)], z)$  est une involution de  $X$  qui ne s'étend pas en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Preuve.* (du lemme 4.2.12) Notons  $P = x^n y - (1-x)p(z)$ . D'après la proposition précédente, il existe des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que  $\Phi^*(x) = ax$  et  $\Phi^*(z) = \alpha z + \beta + xB(x, P)$ . Dès lors, on a, pour une certaine constante non nulle  $\mu \in \mathbf{C}^*$ ,

$$\mu P = \Phi^*(P) = a^n x^n \Phi^*(y) - (1-ax)p(\alpha z + \beta + xB(x, P)).$$

En regardant les termes de cette égalité de degré 0 en  $x$ , il vient alors que  $\mu p(z) = p(\alpha z + \beta)$ . De même, en regardant les termes de degré 1 en  $x$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\mu p(z) = ap(\alpha z + \beta) - B(0, -p(z))p'(\alpha z + \beta).$$

On a donc  $(a-1)\mu p(z) = B(0, -p(z))p'(\alpha z + \beta)$ , ce qui implique clairement, pour des raisons de degré, que  $B(0, \cdot) = 0$  et  $a = 1$ .  $\square$

Du point de vue analytique, cette situation est bien plus simple et ce type d'exemples ne peut arriver pour les hypersurfaces de Danielewski.

**Théorème 4.2.14.** *Soit  $X$  une hypersurface de Danielewski. Notons  $X_s$  la forme standard de  $X$  donnée par le théorème 1.3.13 et  $\phi_s : X_s \rightarrow X$  l'isomorphisme entre  $X_s$  et  $X$  (cf. notation 1.3.14). Alors,  $\phi_s$  s'étend en un automorphisme analytique de  $\mathbf{C}^3$ .*

*Les hypersurfaces  $X$  et  $X_s$  sont donc analytiquement équivalentes.*

**Remarque 4.2.15.** Comme on l'avait remarqué page 75, les polynômes qui définissent les hypersurfaces  $X$  et  $X_s$  n'ont cependant pas de raison d'être analytiquement équivalents.

Avant de démontrer ce résultat, énonçons-en quelques conséquences immédiates.

**Corollaire 4.2.16.**

1. Si deux hypersurfaces de Danielewski sont isomorphes, alors elles sont analytiquement équivalentes.
2. Tous les automorphismes d'une hypersurface de Danielewski peuvent être vus comme des restrictions d'automorphismes analytiques de  $\mathbf{C}^3$ .
3. Tout isomorphisme entre deux hypersurfaces de Danielewski s'étend en un automorphisme analytique de  $\mathbf{C}^3$ .

*Preuve.* Le premier point découle directement du théorème précédent et du corollaire 3.2.6. Le deuxième point s'obtient facilement en utilisant le corollaire 3.3.3 et le théorème 4.2.14. Quant au troisième point, c'est une conséquence immédiate des deux autres.  $\square$

**Exemple 4.2.17 (suite de l'exemple 4.2.10 et du corollaire 4.2.13).**

Bien qu'aucun des automorphismes  $\theta_a$ ,  $a \neq 0, 1$ , ne s'étende en un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$ , l'action  $\theta$  de  $\mathbf{C}^*$  sur  $X$  s'étend en une action analytique de  $\mathbf{C}^*$  sur  $\mathbf{C}^3$ .

*Preuve.* (du théorème 4.2.14) Notons  $X = X_{Q,n}$  et  $X_s = X_{Q_s,n}$ . D'après la preuve du théorème 1.3.13, l'isomorphisme  $\phi_s : X_s \rightarrow X$  est la restriction de l'endomorphisme (polynomial) de  $\mathbf{C}^3$  défini par :

$$(x, y, z) \mapsto (x, (1 + x\pi(x, z))y + R(x, z), z),$$

où  $\pi$  et  $R$  sont des polynômes vérifiant

$$Q(x, z) = (1 + x\pi(x, z))Q_s(x, z) + x^n R(x, z).$$

On peut alors facilement construire des fonctions holomorphes  $\alpha, \beta : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  telles que  $e^{\alpha(x,z)} = (1 + x\pi(x, z)) + x^n \beta(x, z)$  et ainsi voir  $\phi_s$  comme la restriction à  $X_s$  de  $\Phi$ , l'automorphisme analytique de  $\mathbf{C}^3$  défini par :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (x, (1 + x\pi(x, z))y + R(x, z) + \beta(x, z)(x^n y - Q_s(x, z)), z) \\ &= (x, e^{\alpha(x,z)} y + R(x, z) - \beta(x, z)Q_s(x, z), z). \end{aligned}$$

$\square$

## Actions du groupe additif

Les phénomènes observés pour les actions de  $\mathbf{C}^*$  ne peuvent arriver avec les actions de  $(\mathbf{C}, +)$  sur les hypersurfaces de Danielewski.

En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, toutes les dérivations localement nilpotentes sur un anneau  $S_{Q,n}$  s'étendent naturellement en des dérivations sur  $\mathbf{C}[x, y, z]$ , et donc, toute action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur une hypersurface de Danielewski provient de la restriction d'une action sur  $\mathbf{C}^3$ .

Plus précisément, elles sont de la forme suivante.

**Proposition 4.2.18.** *Soit  $\Psi : \mathbf{C} \times X_{Q,n} \rightarrow X_{Q,n}$  une action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$ . Alors, il existe un polynôme  $h(x) \in \mathbf{C}[x]$  tel que*

$$\Psi(t, (x, y, z)) = (x, y + x^{-n}(Q(x, z + x^nth(x)) - Q(x, z)), z + x^nth(x)).$$

*Preuve.* On sait (lemme 2.1.8) que les actions de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $X_{Q,n}$  arrivent comme les exponentielles des dérivations localement nilpotentes sur l'anneau  $S_{Q,n}$ . Or, d'après le théorème 2.3.6, ces dérivations sont de la forme  $D_h = h(x)\Delta_{Q,n}$  avec  $h(x) \in \mathbf{C}[x]$ .

On a donc  $\Psi(t, (x, y, z)) = (\exp(tD_h)(x), \exp(tD_h)(y), \exp(tD_h)(z))$ . Il suffit alors de vérifier que  $\exp(tD_h)(x) = x$ ,  $\exp(tD_h)(z) = z + tx^nh(x)$  et

$$\begin{aligned} \exp(tD_h)(y) &= y + th(x)\tilde{Q}'(z) + \frac{(th(x))^2}{2}x^n\tilde{Q}''(z) + \dots + \frac{(th(x))^d}{d!}x^{n(d-1)}\tilde{Q}^{(d)}(z) \\ &= y + x^{-n}(Q(x, z + x^nth(x)) - Q(x, z)) \end{aligned}$$

où  $\tilde{Q}$  est le polynôme de  $\mathbf{C}[x][z]$  de degré  $d$  défini par  $\tilde{Q}(z) = Q(x, z)$ .  $\square$

**Remarque 4.2.19.** On trouvera dans [14] un joli exemple d'une action de  $(\mathbf{C}, +)$  sur une hypersurface de  $\mathbf{C}^5$  qui ne s'étend pas en une action, pas même analytique, de  $(\mathbf{C}, +)$  sur  $\mathbf{C}^5$ .

### 4.2.2 Hypersurfaces de Danielewski à un paramètre

Dans le premier chapitre, nous avons vu (théorème 1.3.13) comment, étant donnée une hypersurface de Danielewski  $X = V(P)$ , construire une hypersurface sous forme standard  $X_s = V(P_s)$  isomorphe à  $X$ .

On peut ainsi calculer, comme dans la proposition 1.3.17, une forme standard  $(X_s)_c$  pour chaque fibre  $V(P - c)$  du polynôme  $P$ . En fait, on a même mieux : les familles  $\{(X_s)_c \mid c \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(P - c) \mid c \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes ! (au sens de la définition 4.1.26)



On dira que la famille  $\{(X_s)_t \mid t \in \mathbf{C}\}$  est une forme standard de l'hypersurface de Danielewski à un paramètre  $X(t)$  d'équation  $P = t$ .

(On utilise la lettre  $t$  dans la notation  $X(t)$  pour insister sur le fait que  $t$  est vu comme un paramètre ; alors que l'utilisation de la lettre  $c$  signifie que l'on travaille avec une constante  $c$  fixée.)

**Définition 4.2.20.** Soient  $n > 0$  un entier et  $Q(t, x, z) \in \mathbf{C}[t, x, z]$  un polynôme tel que  $Q(t, 0, z)$  soit, vu comme polynôme de  $(\mathbf{C}[t])[z]$ , unitaire et de degré au moins deux.

La famille  $\{V(x^n y - Q(t, x, z)) \mid t \in \mathbf{C}\}$  est alors appelée *hypersurface de Danielewski à un paramètre* ou encore *hypersurface de Danielewski à coefficients dans  $\mathbf{C}[t]$* .

On la note  $X_{Q,n}(t)$  ou plus simplement  $X(t)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. Deux hypersurfaces de Danielewski à un paramètre  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont dites *isomorphes* si elles le sont en tant que familles d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$ .

On définit naturellement, comme pour les hypersurfaces de Danielewski, une notion de forme standard pour les hypersurfaces de Danielewski à un paramètre, en disant qu'une hypersurface de Danielewski  $X(t)$  est sous forme standard si la famille  $\{V(P_t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  qui la définit est une famille d'hypersurfaces de Danielewski sous forme standard. C'est-à-dire si, pour tout  $t \in \mathbf{C}$ , le polynôme  $P_t \in \mathbf{C}[t, x, y, z]$  est de la forme  $P_t = x^n y - p(t, z) - xq(t, x, z)$  avec  $\deg_z(q(t, x, z)) < \deg_z(p(t, z))$ .

Le théorème 1.3.13 reste vrai dans ce cadre et on montre, avec la même preuve, le résultat suivant :

**Théorème 4.2.21.** Soit  $X(t) = X_{Q,n}(t)$  une hypersurface de Danielewski à un paramètre. Notons  $Q(t, x, z) = p(t, z) + xq(t, x, z)$ .

On peut alors déterminer, par un procédé algorithmique, une forme standard  $X_s(t)$  de  $X$ , c'est-à-dire un polynôme  $q_s(t, x, z) \in \mathbf{C}[t, x, z]$  vérifiant  $\deg_z(q_s) < \deg_z(p)$  et tel que les familles d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$ ,  $X(t) = \{V(x^n y - Q(t, x, z)) \mid t \in \mathbf{C}\}$  et  $X_s(t) = \{V(x^n y - p(t, z) - xq_s(t, x, z)) \mid t \in \mathbf{C}\}$ , soient isomorphes.

*Preuve.* Il suffit de reprendre ici la preuve du théorème 1.3.13.

En effet, comme  $p(t, z)$  est, vu comme polynôme de  $(\mathbf{C}[t])[z]$ , unitaire, on peut effectuer la division euclidienne de n'importe quel polynôme  $f \in (\mathbf{C}[t])[z]$  par  $p$ . Dès lors, il existe bien des polynômes  $q_s(t, x, z)$ ,  $\pi_t = \pi(t, x, z)$  et  $R_t = R(t, x, z)$  tels que  $\deg_z(q_s(t, x, z)) < \deg_z(p(t, z))$  et

$$p(t, z) + xq(t, x, z) = (1 + x\pi(t, x, z))(p(t, z) + xq_s(t, x, z)) + x^n R(t, x, z).$$

Il suffit alors de choisir des polynômes  $f_t = f(t, x, z)$  et  $g_t = g(t, x, z)$  tels que

$$(1 + x\pi(t, x, z))f(t, x, z) + x^n g(t, x, z) = 1,$$

et de considérer les familles d'endomorphismes de  $\mathbf{C}^3$ ,  $(\Phi_s)_t$  et  $(\Phi^s)_t$ , définis respectivement par  $(\Phi_s)_t(x, y, z) = (x, (1 + x\pi_t)y + R_t, z)$  et

$$(\Phi^s)_t(x, y, z) = (x, f_t y + g_t(p(t, z) + xq_s(t, x, z)) - f_t R_t, z).$$

On vérifie finalement que

$$\begin{aligned} ((\Phi_s)_t)^*(x^n y - p(t, z) - xq(t, x, z)) &= (1 + x\pi_t)(x^n y - p(t, z) - xq_s(t, x, z)) \\ ((\Phi^s)_t)^*(x^n y - p(t, z) - xq_s(t, x, z)) &= f_t(x^n y - p(t, z) - xq(t, x, z)) \end{aligned}$$

et que  $(\Phi_s)_t \circ (\Phi^s)_t(x, y, z) = (x, y - (x^n y - p(t, z) - xq_s(t, x, z))g_t, z)$  et  $(\Phi^s)_t \circ (\Phi_s)_t(x, y, z) = (x, y - (x^n y - p(t, z) - xq(t, x, z))g_t, z)$ .  $\square$

D'après la proposition 4.1.27, établir la classification des polynômes  $P_{Q,n}$  à équivalence près revient à classifier les hypersurfaces de Danielewski à coefficients dans  $\mathbf{C}[t]$  correspondant aux fibres des polynômes  $P_{Q,n}$ ; et donc à classifier leurs formes standards. Le résultat suivant montre que cette classification permet en fait de connaître les classes d'isomorphie d'une famille, a priori plus grande, d'hypersurfaces de Danielewski à un paramètre.

**Théorème 4.2.22.** *Soit  $X(t) = X_{Q,n}(t)$  une hypersurface de Danielewski à coefficients dans un anneau de polynôme  $\mathbf{C}[t]$  définie par une équation de la forme  $x^n y = Q(t, x, z) = p(z) - t + xq(t, x, z)$  avec  $p(z) \in \mathbf{C}[z]$  et  $q(t, x, z) \in \mathbf{C}[t, x, z]$ .*

*Alors, on peut construire, par un procédé algorithmique, un polynôme  $\tilde{q}(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  tel que la famille  $\tilde{X}(t) = X_{p(z)-t+x\tilde{q}(x,z),n}(t)$  soit isomorphe à  $X(t)$ .*

*Preuve.* On va raisonner par induction en montrant que, pour tout entier  $1 \leq i \leq n$ , il existe des polynômes  $q_i(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  et  $\pi_i(t, x, z) \in \mathbf{C}[t, x, z]$  tels que

$$p(z) - t + xq(t, x, z) \equiv (1 + x\pi_i(t, x, z))(p(z) - t + xq_i(x, z)) \pmod{(x^i)}.$$

Leur existence est évidente pour  $i = 1$ . Supposons donc que les polynômes  $q_i$  et  $\pi_i$  soient construits pour un certain  $i$ . Notons  $r_i$  le polynôme vérifiant

$$Q(t, x, z) \equiv (1 + x\pi_i(t, x, z))(p(z) - t + xq_i(x, z)) + x^i r_i(t, z) \pmod{(x^{i+1})}.$$

On peut écrire  $r_i(t, z) = r_i(t - p(z) + p(z), z) = r_i(p(z), z) + (p(z) - t)\tilde{\pi}_i(t, z)$  pour un certain polynôme  $\tilde{\pi}_i(t, z)$ . L'égalité suivante est alors vraie modulo  $(x^{i+1})$  :

$$Q(t, x, z) \equiv (1 + x\pi_i(t, x, z) + x^i\tilde{\pi}(t, z))(p(z) - t + xq_i(x, z) + x^i r_i(p(z), z)).$$

On a ainsi obtenu l'égalité voulue ; ce qui nous permet de conclure, comme dans la preuve du théorème précédent, que  $X(t)$  est isomorphe à la famille  $X_{p(z)-t+xq_n(x,z),n}(t)$  d'équation  $x^n y = p(z) - t + xq_n(x, z)$ .  $\square$

Remarquons que, quand  $n = 2$ , l'application des algorithmes décrits dans les preuves des théorèmes 4.2.21 et 4.2.22 est immédiate. On arrive ainsi au résultat suivant.

**Proposition 4.2.23.** *Soit  $X(t)$  une hypersurface à coefficients dans  $\mathbf{C}[t]$  définie par une équation de la forme  $x^2 y = p(z) - t + xq(t, z)$ .*

*Si on pose  $d = \deg(p)$  et que l'on note  $q_i$  les polynômes vérifiant  $q(t, x, z) = \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(t, p(z))$ , alors les trois familles suivantes sont isomorphes :*

1.  $X(t) = \left\{ V(x^2 y - p(z) + t - x \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(t, p(z))) \mid t \in \mathbf{C} \right\}$  ;
2.  $X_s(t) = \left\{ V(x^2 y - p(z) + t - x \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(t, t)) \mid t \in \mathbf{C} \right\}$  ;
3.  $\tilde{X}(t) = \left\{ V(x^2 y - p(z) + t - x \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(p(z), p(z))) \mid t \in \mathbf{C} \right\}$ .

*Preuve.* Pour démontrer cette proposition, il suffit de calculer, comme dans la preuve du théorème 4.2.21, une forme standard pour les familles  $X(t)$  et  $\tilde{X}(t)$ . On vérifie que ces formes standards sont bien, dans les deux cas, la famille  $X_s(t)$  de l'énoncé.  $\square$

Le corollaire suivant illustre bien l'intérêt de travailler avec des familles d'hypersurfaces quand on veut prouver que deux polynômes sont équivalents. Il va nous conduire aux formes normales pour les polynômes  $P_{Q,n}$ . Celles-ci sont inspirées des formes standards réduites des hypersurfaces de Danielewski.

**Corollaire 4.2.24.** *Tout polynôme  $P_{Q,2} = x^2 y - Q(x, z)$  définissant une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,2}$  est équivalent à un polynôme de la forme*

$$x^2 y - p(z) - x \sum_{i=0}^{\deg(p)-2} z^i q_i(p(z)).$$

*Preuve.* Soit  $P_{Q,2}$  un tel polynôme. On peut supposer, d'après le lemme 1.3.8, que  $\deg_x Q(x, z) < 2$ . Notons alors  $p(z) = Q(0, z)$ ,  $d = \deg(p) \geq 2$  et

$$Q(x, z) = p(z) + x \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(p(z)) \quad \text{pour certains polynômes } q_i \in \mathbf{C}^{[1]}.$$

Alors, d'après la proposition précédente, les familles d'hypersurfaces  $\{V(P_{Q_2} + t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  et  $\{V(x^2y - p(z) + t - x \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_i(t)) \mid t \in \mathbf{C}\}$  sont isomorphes. Or, cette dernière est clairement isomorphe à une famille de la forme  $\{V(x^2y - p(z) + t - x \sum_{i=0}^{d-2} z^i \tilde{q}_i(t)) \mid t \in \mathbf{C}\}$ . Il suffit en effet de considérer, comme dans la preuve de la proposition 1.3.20, un automorphisme de la forme  $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - x\alpha q_{d-1}(t))$ , pour une certaine constante  $\alpha \in \mathbf{C}$ . On conclut finalement – après avoir utilisé une nouvelle fois la proposition 4.2.23 –, grâce à la proposition 4.1.27.  $\square$

En appliquant le théorème de classification 4.2.3 aux polynômes considérés ci-dessus, on constate que, si deux tels polynômes sont équivalents, ils le sont via un automorphisme affine.

**Proposition 4.2.25.** *Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  deux polynômes de  $\mathbf{C}[x, z]$  de la forme*

$$Q_i(x, z) = p_i(z) + x \sum_{j=0}^{\deg(p_i)-2} z^j q_{i,j}(p_i(z)) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

*Alors, les polynômes  $P_{Q_1,2}$  et  $P_{Q_2,2}$  sont équivalents si et seulement si ils le sont via un automorphisme affine de  $\mathbf{C}[x, y, z]$ .*

*Preuve.* Supposons que deux polynômes  $P_{Q_1,2}$  et  $P_{Q_2,2}$  définis comme ci-dessus soient équivalents. D'après le théorème 4.2.5, il existe alors des constantes  $a, \alpha \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}^{[2]}$  tels que

$$Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \equiv Q_2(x, z) \pmod{(x^2)}.$$

Il vient ainsi que  $p_1(\alpha z + \beta) = p_2(z)$ , que  $\deg(p_1) = \deg(p_2) = d \geq 2$  et que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{d-2} z^j q_{2,j}(p_2(z)) &= B(0, p_2(z)) \cdot p_1'(\alpha z + \beta) + a \sum_{j=0}^{d-2} (\alpha z + \beta)^j q_{1,j}(p_1(\alpha z + \beta)) \\ &= B(0, p_2(z)) \cdot (\alpha^{-1} p_2'(z)) + a \sum_{j=0}^{d-2} (\alpha z + \beta)^j q_{1,j}(p_2(z)). \end{aligned}$$

Le lemme 1.3.18 permet alors de conclure que  $B(0, \cdot) = 0$  et donc que

$$Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \equiv Q_1(ax, \alpha z + \beta) \pmod{(x^2)}.$$

Finalement, on a montré que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta) = Q_2(x, z)$ . Les polynômes  $P_{Q_1,2}$  et  $P_{Q_2,2}$  sont donc équivalents via l'automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  défini par  $(x, y, z) \mapsto (ax, a^{-2}y, \alpha z + \beta)$ . □

### 4.2.3 Le cas particulier des polynômes $x^2y - z^2 - xq(z)$

Dans cette partie, nous allons appliquer différents résultats obtenus précédemment et donner les classifications, à isomorphisme, et à équivalence près, des hypersurfaces de Danielewski d'équation  $x^2y - z^2 - xq(z) + c = 0$ . Cette description a fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec L. Moser-Jauslin [42] qui a paru aux Annales de l'institut Fourier.

#### Classes d'isomorphie

Commençons par la classification à isomorphisme près en donnant des représentants pour chaque classe d'isomorphie. D'après la proposition 1.3.20, on peut les choisir sous *forme standard réduite*, c'est-à-dire, dans le cas présent, choisir des hypersurfaces d'équation  $x^2y = z^2 + ax + b$ . Par ailleurs, la proposition 3.2.8 montre clairement qu'il n'y a, à isomorphisme près, que quatre possibilités. On obtient ainsi le résultat suivant.

**Proposition 4.2.26.** *Soit  $X \subset \mathbf{C}^3$  l'hypersurface de Danielewski définie par l'équation  $x^2y = z^2 + xq(z) - c$  avec  $q(z) \in \mathbf{C}[z]$  et  $c \in \mathbf{C}$ . Notons  $\sqrt{c}$  une solution de l'équation  $z^2 = c$ . Alors,  $X$  est isomorphe à l'une des quatre hypersurfaces (non isomorphes) suivantes :*

- $X \simeq V(x^2y - z^2 - x + 1)$  si  $c \neq 0$  et  $q(\sqrt{c}) + q(-\sqrt{c}) \neq 0$  ;
- $X \simeq V(x^2y - z^2 + 1)$  si  $c \neq 0$  et  $q(\sqrt{c}) + q(-\sqrt{c}) = 0$  ;
- $X \simeq V(x^2y - z^2 - x)$  si  $c = 0$  et  $q(0) \neq 0$  ;
- $X \simeq V(x^2y - z^2)$  si  $c = 0$  et  $q(0) = 0$ .

Avant de démontrer cette proposition, décrivons rapidement ces surfaces. Les deux premières ont une structure de surface de Danielewski mais pas les deux autres. La troisième est une surface lisse qui contient une droite double (la droite  $\{(0, y, 0)\}$ ) alors que la dernière a une droite de singularités.

*Preuve.* Soit  $X \subset \mathbf{C}^3$  une hypersurface d'équation  $x^2y = z^2 + xq(z) - c$  où  $q(z) \in \mathbf{C}[z]$  et  $c \in \mathbf{C}$ . Calculons-en une forme standard réduite. Pour cela, notons

$$q_0(z^2) = \frac{q(z) + q(-z)}{2} \quad \text{et} \quad q(z) = q_0(z^2) + zq_1(z^2).$$

D'après la proposition 1.3.17, l'hypersurface de Danielewski  $X_s$  définie par  $X_s = V(x^2y - z^2 - x(q_0(c) + zq_1(c)) + c)$  est une forme standard de  $X$ .

Puis, remarquons que l'automorphisme triangulaire

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, y + \frac{(q_1(c))^2}{4}, z - x \frac{q_1(c)}{2}\right)$$

induit un isomorphisme entre  $X_s$  et l'hypersurface  $V(x^2y - z^2 - xq_0(c) + c)$ .

Finalement, comme  $q_0(c) = 0$  si et seulement si  $q(\sqrt{c}) + q(-\sqrt{c}) = 0$ , on peut terminer cette preuve grâce à la proposition 3.2.8.  $\square$

## Classes d'équivalence

Nous voulons maintenant déterminer quand deux polynômes  $x^2y - z^2 - xq_1(z)$  et  $x^2y - z^2 - xq_2(z)$  sont équivalents. Dans un premier temps, on peut obtenir une condition nécessaire grâce à la proposition précédente et à la remarque 4.1.21 : si les polynômes  $x^2y - z^2 - xq_1(z)$  et  $x^2y - z^2 - xq_2(z)$  sont équivalents, alors

$$\forall c \in \mathbf{C}, \quad (q_1(c) + q_1(-c) = 0) \iff (q_2(c) + q_2(-c) = 0).$$

Cette condition est notamment vérifiée quand le polynôme  $(q_2 - q_1)$  n'a que des monômes de degré impair. En fait, comme le montre le théorème 4.2.5, elle est même suffisante dans ce cas.

### Proposition 4.2.27.

1. Soient  $q_1(z)$  et  $q_2(z)$  deux polynômes tels que  $(q_2 - q_1)(z) \in z\mathbf{C}[z^2]$ . Alors, les polynômes  $x^2y - z^2 - xq_1(z)$  et  $x^2y - z^2 - xq_2(z)$  sont équivalents.
2. Soit  $q(z)$  un polynôme de  $\mathbf{C}[z]$ . Notons  $r(z^2) = \frac{q(z) + q(-z)}{2} \in \mathbf{C}[z^2]$  le polynôme constitué des monômes de  $q$  de degré pair. Alors, les polynômes  $x^2y - z^2 - xq(z)$  et  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  sont équivalents.

*Preuve.* Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver le point 1. (le point 2. n'en étant qu'un cas particulier.)

Soient donc  $q_1$  et  $q_2$  deux polynômes satisfaisant la condition de l'énoncé. Posons  $z\tilde{q}(z^2) = q_2(z) - q_1(z)$ ,  $Q_1(x, z) = z^2 - xq_1(z)$  et  $Q_2(x, z) = z^2 + xq_2(z) = z^2 + x(q_1(z) + z\tilde{q}(z^2))$ .

On vérifie alors aisément que

$$Q_2\left(x, z - \frac{x}{2}\tilde{q}(Q_1(x, z))\right) \equiv Q_1(x, z) \pmod{x^2}.$$

Ceci implique, d'après le théorème 4.2.5, que les polynômes  $x^2y - z^2 - xq_1(z)$  et  $x^2y - z^2 - xq_2(z)$  sont équivalents.  $\square$

Finalement, il ne nous reste plus qu'à appliquer la proposition 4.2.25 pour obtenir le théorème de classification voulu.

**Théorème 4.2.28.** *Deux polynômes  $x^2y - z^2 - xq_1(z)$  et  $x^2y - z^2 - xq_2(z)$  sont équivalents<sup>1</sup> si et seulement si il existe une constante non nulle  $a \in \mathbf{C}^*$  telle que  $(q_1(z) + q_1(-z)) = a(q_2(z) + q_2(-z))$ .*

Pour conclure cette section, donnons l'exemple de polynômes non équivalents mais dont les fibres sont isomorphes. Leur non-équivalence ne peut donc s'expliquer par la méthode habituelle reposant sur la remarque 4.1.21.

**Exemple 4.2.29.** Les polynômes  $P_k$  de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  définis, pour tout  $k \in \mathbf{N}_{>0}$ , par  $P_k = x^2y - z^2 - x(1 - z^2)^k$  vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $c \in \mathbf{C}$  et tout  $k \in \mathbf{N}_{>0}$ , l'hypersurface  $V(P_k - c) \subset \mathbf{C}^3$  est une variété irréductible lisse ;
2. Pour tout  $c \in \mathbf{C}$  et tout  $k, k' \in \mathbf{N}_{>0}$ , les hypersurfaces  $V(P_k - c)$  et  $V(P_{k'} - c)$  sont isomorphes ;
3. Si  $k \neq k'$ , alors les polynômes  $P_k$  et  $P_{k'}$  ne sont pas équivalents.

#### 4.2.4 Formes normales

Concluons ce chapitre en donnant des formes normales pour l'équivalence des polynômes  $P_{Q,n}$ .

Nous en avons déjà trouvées, par le biais du corollaire 4.2.24 et de la proposition 4.2.25, pour les polynômes  $P_{Q,2}$ . Plus généralement, on montre le résultat suivant.

---

<sup>1</sup>sous-entendu comme polynômes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$

**Théorème 4.2.30.** *Tout polynôme définissant une hypersurface de Danielewski est équivalent à un unique, à automorphisme affine près, polynôme de la forme*

$$x^n y - p(z) - x \sum_{i=0}^{\deg(p)-2} z^i q_i(x, p(z)) \quad \text{avec } \deg_x q_i(x, p(z)) \leq n - 2.$$

*Preuve.* On va travailler en deux étapes.

Dans un premier temps, supposons que deux tels polynômes soient équivalents. Notons les, pour  $j = 1, 2$ ,

$$P_j = x^{n_j} y - Q_j(x, z) = x^{n_j} y - p_j(z) - x \sum_{i=0}^{\deg(p_j)-2} z^i q_{j,i}(x, p_j(z)).$$

Alors, d'après le théorème 4.2.5,  $n_1 = n_2 = n$  et il existe des constantes  $\alpha, a \in \mathbf{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  et un polynôme  $B \in \mathbf{C}[t]$  tels que

$$Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \equiv Q_2(x, z) \pmod{(x^n)}. \quad (*)$$

Cette égalité implique en particulier que  $p_1(\alpha z + \beta) = p_2(z)$  et donc que  $\deg(p_1) = \deg(p_2) = d \geq 2$ .

Nous allons montrer que  $P_1$  et  $P_2$  sont équivalents via un automorphisme affine en montrant que  $B(x, \cdot) \equiv 0 \pmod{(x^{n-1})}$ . En effet, l'équation (\*) impliquera alors que  $Q_1(ax, \alpha z + \beta) = Q_2(x, z)$  et donc que l'automorphisme  $(x, y, z) \mapsto (ax, a^{-n}y, \alpha z + \beta)$  réalise l'équivalence entre  $P_1$  et  $P_2$ .

Pour cela, supposons que  $B(x, t) \equiv b_k(t)x^k \pmod{(x^{k+1})}$  pour un entier  $k < n - 1$  et un polynôme  $b_k(t) \in \mathbf{C}[t] \setminus \{0\}$ .

L'égalité (\*) ci-dessus implique les égalités modulo  $(x^{k+2})$  suivantes :

$$\begin{aligned} Q_2(x, z) &= p_2(z) + x \sum_{i=0}^{d-2} z^i q_{2,i}(x, p_2(z)) \\ &\equiv Q_1(ax, \alpha z + \beta + xB(x, Q_2(x, z))) \\ &\equiv p_1(\alpha z + \beta + x^{k+1}b_k(p_2(z))) + ax \sum_{i=0}^{d-2} (\alpha z + \beta)^i q_{1,i}(ax, p_1(\alpha z + \beta)) \\ &\equiv p_1(\alpha z + \beta) + x^{k+1}b_k(p_2(z))(p_1)'(\alpha z + \beta) \\ &\quad + ax \sum_{i=0}^{d-2} (\alpha z + \beta)^i q_{1,i}(ax, p_2(z)) \\ &\equiv p_2(z) + x^{k+1}b_k(p_2(z))\alpha^{-1}(p_2)'(z) + ax \sum_{i=0}^{d-2} (\alpha z + \beta)^i q_{1,i}(ax, p_2(z)). \end{aligned}$$



On obtient ainsi la nouvelle égalité modulo  $(x^{k+2})$  suivante :

$$\alpha^{-1}(p_2)'(z)b_k(p_2(z)) \equiv \frac{\sum_{i=0}^{d-2} (z^i q_{2,i}(x, p_2(z)) - a(\alpha z + \beta)^i q_{1,i}(ax, p_2(z)))}{x^k}.$$

Ceci est en contradiction avec le lemme 1.3.18 et prouve donc que les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  sont équivalents via un automorphisme affine.

Nous pouvons maintenant passer à la deuxième étape de cette preuve. Considérons un polynôme  $P_{Q,n}$  définissant une hypersurface de Danielewski et montrons qu'il est équivalent à un polynôme de la forme de l'énoncé.

On peut clairement supposer que  $\deg_x Q(x, \cdot) < n$ . Notons alors  $p$  et  $q_{i,k}$  les polynômes vérifiant

$$Q(x, z) = p(z) + \sum_{k=1}^{n-1} x^k \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} z^i q_{i,k}(p(z)),$$

et fixons un entier  $k_0 \in [1, n-1]$ . Le théorème sera démontré si on prouve qu'il existe des polynômes  $\tilde{q}_{i,k}$  vérifiant les trois propriétés suivantes.

$$\tilde{q}_{\deg(p)-1, k_0} = 0, \quad \tilde{q}_{i,k} = q_{i,k} \text{ si } k < k_0$$

et

$$P_{Q,n} \sim x^n y - p(z) - \sum_{k=1}^{n-1} x^k \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)).$$

Notons  $p(z) = \lambda_d z^d + \dots + \lambda_0$  avec  $\lambda_d \in \mathbf{C}^*$ . Les égalités suivantes sont vraies modulo  $(x^{k_0+1})$  :

$$\begin{aligned} & Q(x, z - x^{k_0} (d\lambda_d)^{-1} q_{d-1, k_0}(p(z))) \equiv \\ & \equiv p(z - x^{k_0} (d\lambda_d)^{-1} q_{d-1, k_0}(p(z))) + \sum_{k=1}^{k_0} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_{i,k}(p(z)) \\ & \equiv p(z) - x^{k_0} p'(z) (d\lambda_d)^{-1} q_{d-1, k_0}(p(z)) + \sum_{k=1}^{k_0} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_{i,k}(p(z)) \\ & \equiv p(z) + \sum_{k=1}^{k_0-1} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i q_{i,k}(p(z)) + x^{k_0} \sum_{i=0}^{d-2} z^i \tilde{q}_{i, k_0}(p(z)) \\ & \equiv p(z) + \sum_{k=1}^{k_0} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)) \pmod{(x^{k_0+1})}, \end{aligned}$$

pour certains polynômes  $\tilde{q}_{i,k}$  vérifiant  $\tilde{q}_{d-1, k_0} = 0$  et  $\tilde{q}_{i,k} = q_{i,k}$  si  $k < k_0$ .

Ces dernières égalités impliquent que

$$\begin{aligned} & Q\left(x, z - x^{k_0}(d\lambda_d)^{-1}q_{d-1,k_0}(p(z) + \sum_{k=1}^{k_0} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)))\right) \\ & \equiv p(z) + \sum_{k=1}^{k_0} x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)) \pmod{(x^{k_0+1})}. \end{aligned}$$

On peut alors construire les autres polynômes  $\tilde{q}_{i,k}$  en travaillant par induction sur  $k > k_0$ . Si les polynômes  $\tilde{q}_{i,k}$  sont construits pour tout  $k \leq K$ , on définit les polynômes  $\tilde{q}_{i,K+1}$  comme étant ceux vérifiant

$$\begin{aligned} & Q\left(x, z - x^{k_0}(d\lambda_d)^{-1}q_{d-1,k_0}(p(z) + \sum_{k=1}^K x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)))\right) \\ & \equiv p(z) + \sum_{k=1}^K x^k \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z)) + x^{K+1} \sum_{i=0}^{d-1} z^i \tilde{q}_{i,K+1}(p(z)) \pmod{(x^{K+2})}. \end{aligned}$$

On en conclut donc, d'après le théorème 4.2.5, que  $P_{Q,n}$  est équivalent au polynôme  $x^n y - p(z) - \sum_{k=1}^{n-1} x^k \sum_{i=0}^{\deg(p)-1} z^i \tilde{q}_{i,k}(p(z))$ .

Ceci termine la preuve du théorème.  $\square$

Nous pouvons finalement donner les formes normales pour les polynômes  $P_{Q,n}$ .

### **Théorème 4.2.31.**

1. Tout polynôme  $P_{Q,n}$  est équivalent à un polynôme  $P_{(n,p,\{q_i\})}$  de la forme

$$P_{(n,p,\{q_i\})} = x^n y - p(z) - x \sum_{i=2}^{\deg(p)} p^{(i)}(z) q_i(x, p(z)), \text{ avec } \deg_x(q_i) < n-1.$$

2. Deux polynômes  $P_{(n_1,p_1,\{q_{1,i}\})}$  et  $P_{(n_2,p_2,\{q_{2,i}\})}$  sont équivalents si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a)  $n_1 = n_2$  et  $\deg(p_1) = \deg(p_2) = d$  ;
- (b) Il existe des constantes  $\alpha, a \in \mathbf{C}^*$  et  $\beta \in \mathbf{C}$  telles que  $p_1(\alpha z + \beta) = p_2(z)$  et  $a\alpha^{-i} q_{1,i}(ax, \cdot) = q_{2,i}(x, \cdot)$  pour tout  $i \in [2, d]$ .

*Preuve.* Le point 1. découle directement du théorème précédent. Par ailleurs, toujours d'après ce théorème, si deux polynômes  $P_{(n_1,p_1,\{q_{1,i}\})}$  et  $P_{(n_2,p_2,\{q_{2,i}\})}$  sont équivalents, ils le sont via un automorphisme affine de

la forme  $(x, y, z) \mapsto (ax, a^{-n}y, \alpha z + \beta)$ . On en déduit immédiatement que  $n_1 = n_2 = n$ , que  $p_1(\alpha z + \beta) = p_2(z)$ , que  $\deg(p_1) = \deg(p_2) = d$  et que

$$\begin{aligned} x \sum_{i=2}^d p_2^{(i)}(z) q_{2,i}(x, p_2(z)) &= ax \sum_{i=2}^d p_1^{(i)}(\alpha z + \beta) q_{1,i}(ax, p_1(\alpha z + \beta)) \\ &= ax \sum_{i=2}^d \alpha^{-i} (p_1(\alpha z + \beta))^{(i)} q_{1,i}(ax, p_2(z)) \\ &= ax \sum_{i=2}^d \alpha^{-i} (p_2(z))^{(i)} q_{1,i}(ax, p_2(z)). \end{aligned}$$

Le lemme 1.3.18 nous permet finalement de conclure, pour tout  $i \in [2, d]$ , que  $a\alpha^{-i} q_{1,i}(ax, \cdot) = q_{2,i}(x, \cdot)$ .  $\square$

# Chapitre 5

## Plongements des cylindres des hypersurfaces de Danielewski

L'étude des espaces affines  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n$  constitue une part importante des recherches en *géométrie algébrique affine* et regroupe différentes questions – qualifiées de « challenging problems » par H. Kraft [32] – comme par exemple l'étude de leurs groupes d'automorphismes (quels générateurs pour ces groupes ?), la caractérisation (algébrique) de ces espaces parmi les variétés affines, les problèmes de plongement (conjecture d'Abhyankar-Sathaye) ou encore la conjecture de simplification de Zariski.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux questions relatives aux cylindres des hypersurfaces de  $\mathbb{C}^n$  et montrons notamment pourquoi certaines hypersurfaces de Danielewski constituent des contre-exemples au *problème de l'équivalence stable*.

### 5.1 Conjectures de simplification et des coordonnées stable

#### 5.1.1 Conjecture de simplification de Zariski

La conjecture qui porte le nom de *conjecture de simplification de Zariski* concerne les variétés dont les cylindres sont des espaces affines  $\mathbb{C}^n$ . (Rappelons que si  $X$  est une variété algébrique complexe, on appelle *cylindre* de base  $X$ , la variété  $X \times \mathbb{C}$ , produit des variétés  $X$  et  $\mathbb{C}$ .)

**Conjecture (de simplification de Zariski).** *Soient  $n \geq 1$  un entier naturel et  $X$  une variété algébrique complexe. Si le cylindre  $X \times \mathbb{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^{n+1}$ , alors  $X$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ .*

Supposons que le cylindre d'une variété algébrique  $X$  soit isomorphe à  $\mathbf{C}^{n+1}$  pour un certain  $n$ . Il est alors facile de voir qu'une telle variété doit satisfaire plusieurs propriétés. Donnons-en quatre.

Tout d'abord,  $X$  doit être *affine* et *lisse*. Ensuite, l'isomorphisme  $\mathbf{C}^{n+1} \simeq X \times \mathbf{C}$  permet de construire, via la projection  $X \times \mathbf{C} \rightarrow X$ , un *morphisme dominant*  $\varphi : \mathbf{C}^{n+1} \rightarrow X$ .

La quatrième propriété que nous devons mentionner est que  $X$  doit être *factorielle*. (Pour le voir, on peut construire la dérivation localement nilpotente  $\frac{\partial}{\partial t}$  sur l'algèbre  $\mathbf{C}[X \times \mathbf{C}] = \mathbf{C}[X][t]$  des fonctions régulières sur  $X \times \mathbf{C}$ , et utiliser le fait que (voir par exemple [51]) le noyau d'une dérivation localement nilpotente sur une  $\mathbf{C}$ -algèbre factorielle est factoriel.)

Il se trouve que, si  $n = 1$  ou  $n = 2$ , ces quatre propriétés suffisent pour montrer que  $X$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^n$ . (Le cas  $n = 1$  est facile alors que le cas  $n = 2$  est la conséquence d'un théorème de caractérisation du plan affine dû à M. Miyanishi et T. Sugie [41].)

**Théorème 5.1.1 (Abhyankar, Eakin et Heinzer [1], Fujita [25]).**

*La conjecture de simplification de Zariski est vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .*

*Plus précisément, si  $X$  est une variété algébrique telle que  $X \times \mathbf{C}^k \simeq \mathbf{C}^{k+n}$  pour certains entiers  $k, n \in \mathbf{N}$ , alors,  $X \simeq \mathbf{C}$  si  $n = 1$  et  $X \simeq \mathbf{C}^2$  si  $n = 2$ .*

**Remarque 5.1.2.** Nous avons rappelé (cf. proposition 2.2.5) que la *cubique de Russell* est une variété  $X$  de dimension 3, *non isomorphe* à  $\mathbf{C}^3$ , affine, lisse et factorielle et qu'elle admet un morphisme dominant  $\mathbf{C}^3 \rightarrow X$ . Ainsi, les quatre propriétés que nous avons données ne suffisent pas à caractériser l'espace affine  $\mathbf{C}^3$ .

La conjecture de simplification de Zariski est d'ailleurs toujours ouverte pour  $n \geq 3$ .

### Une autre formulation de la conjecture de simplification

Une façon classique de présenter la conjecture de simplification est de l'énoncer comme une question portant sur les noyaux des dérivations localement nilpotentes de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  ayant des slices.

En effet, considérons une dérivation  $D$  localement nilpotente sur une algèbre de polynômes  $A = \mathbf{C}^{[n+1]}$ . Nous savons (cf. proposition 2.1.11) que si  $D$  a un slice  $s$ , alors  $A$  peut être vue comme un anneau de polynômes sur le noyau de  $D$  et que, plus précisément,  $A = A^D[s]$ . Géométriquement, cela signifie que le cylindre ayant pour base la variété  $X = \text{Spec}(A^D)$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^{n+1} = \text{Spec}(A)$ ; soit  $X \times \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}^{n+1}$ .

Ainsi, si la conjecture de simplification est vraie, alors le noyau d'une telle dérivation  $D$  doit être isomorphe à un anneau  $\mathbf{C}^{[n]}$  et le slice  $s$  doit être une *coordonnée* (voir la définition ci-dessous) de l'algèbre  $A = \mathbf{C}^{[n+1]}$ .

**Définition 5.1.3.** Un polynôme  $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  est une *coordonnée* s'il satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- i)*  $f$  est équivalent à la variable  $x_1$  ;
- ii)* Il existe un automorphisme polynomial  $\Phi$  de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  tel que  $\Phi(f) = x_1$  ;
- iii)* Il existe des polynômes  $y_1, \dots, y_{n-1}$  de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  tels que  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{C}[f, y_1, \dots, y_{n-1}]$ .

Finalement, il est bien connu que la conjecture de simplification peut être énoncée comme suit :

**Proposition 5.1.4.** *Les deux questions suivantes sont équivalentes à la conjecture de simplification de Zariski :*

- i)* *Les noyaux des dérivations localement nilpotentes sur une algèbre de polynômes  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  admettant un slice sont-ils tous isomorphes à  $\mathbf{C}^{[n]}$  ?*
- ii)* *Tout slice d'une dérivation localement nilpotente de l'algèbre de polynômes  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  est-il une coordonnée ?*

*Preuve.* Nous venons d'expliquer pourquoi, si la conjecture de simplification est vraie, la question *i)* a une réponse positive. Réciproquement, supposons que la réponse à la question *i)* soit positive et considérons une variété  $X$  telle que  $X \times \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}^{n+1}$  pour un certain  $n \geq 1$ .

Notons  $A$  l'anneau des fonctions régulières sur  $X$ .  $A$  satisfait clairement la propriété suivante :  $A[t] \simeq \mathbf{C}^{[n+1]}$  ;  $t$  désignant une variable, c'est-à-dire un élément transcendant sur  $A$ . La dérivation  $D := \frac{\partial}{\partial t}$  est alors une dérivation localement nilpotente sur  $A[t]$  dont  $t$  est un slice. Dès lors, par hypothèse,  $(A[t])^D \simeq \mathbf{C}^{[n]}$ . Ainsi, comme par construction  $(A[t])^D = A$ , on obtient que  $A \simeq \mathbf{C}^{[n]}$  ; c'est-à-dire  $X \simeq \mathbf{C}^n$ .

Montrons maintenant que les questions *i)* et *ii)* sont équivalentes. Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur une algèbre de polynômes  $A = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  ayant un slice  $s$ . Nous savons, d'après la proposition 2.1.11, que  $A = A^D[s]$ . Il est alors clair que si  $s$  est une coordonnée, on a bien  $A^D \simeq A^D[s]/(s) = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]/(s) \simeq \mathbf{C}^{[n]}$ .

Par ailleurs, si  $(\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}])^D \simeq \mathbf{C}^{[n]}$ , alors il existe des polynômes  $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  tels que  $A^D = \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]$ . Nous obtenons ainsi l'égalité  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] = A^D[s] = \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n, s]$  ; ce qui signifie précisément que  $s$  est une coordonnée.  $\square$

**Remarque 5.1.5.** Le théorème de R. Rentschler [44] sur les dérivations localement nilpotentes du plan affine (voir la remarque 2.3.4) implique facilement que ces deux questions ont des réponses positives pour  $n = 1$ . Il constitue donc une preuve de la véracité de la conjecture de simplification dans ce cas.

## 5.1.2 Coordonnées stables

On ne sait pas si tous les slices des dérivations localement nilpotentes sur l'algèbre  $\mathbf{C}^{[n]}$  avec  $n \geq 3$  sont des coordonnées. Néanmoins, L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain et J.-T. Yu ont montré dans [38] que ce sont des coordonnées si on les considère comme des polynômes à  $n + 1$  variables. On dit alors que ce sont des *coordonnées stables*.

**Définition 5.1.6.** Un polynôme  $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  est une *coordonnée stable* s'il existe un entier naturel  $m$  tel que  $f$  soit une coordonnée de l'algèbre  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ , où les  $y_i$  désignent de nouvelles variables.

**Proposition 5.1.7** ([38]). *Tout slice d'une dérivation localement nilpotente sur une algèbre  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  est une coordonnée stable.*

*Plus précisément, un tel slice est une coordonnée de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  pour toute nouvelle variable  $x_{n+1}$ .*

*Preuve.* La preuve que nous donnons ici est due à A. van den Essen. Soit  $D$  une dérivation localement nilpotente sur l'algèbre  $A = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  ayant un slice  $s$ . Alors, d'après la proposition 2.1.11,  $A^D[s] = A$ .

Notons  $t$  une nouvelle variable et considérons l'endomorphisme de l'algèbre  $A[t] = A^D[s, t]$  défini par  $t \mapsto s$  et  $s \mapsto t$ . Cet endomorphisme est bien défini et est inversible. (il est d'ordre deux.) On a ainsi montré que  $s$  est une coordonnée de  $A[t] = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, t]$ .  $\square$

Cette propriété les a naturellement conduits à poser la conjecture suivante :

**Conjecture (des coordonnées stables).** *Soit  $n \geq 1$  un entier naturel non nul. Toutes les coordonnées stables de l'algèbre  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  sont des coordonnées.*

Une réponse positive à cette conjecture pour un entier  $n$  impliquerait donc, par le biais de la proposition 5.1.7, que la conjecture de simplification de Zariski ait une réponse positive pour l'entier  $n - 1$ .

Par ailleurs, la conjecture des coordonnées stables est vraie pour  $n = 1, 2$  et  $3$ . Pour le montrer, il faut utiliser, en plus du fait que la conjecture de simplification soit vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , des résultats difficiles : le théorème d'Abhyankar-Moh (« Tous les plongements de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^2$  sont équivalents. ») et un théorème de Kaliman (« Si la fibre générale d'un polynôme est isomorphe à  $\mathbf{C}^2$ , alors ce polynôme est une coordonnée. »)

**Théorème 5.1.8.** *La conjecture des coordonnées stables est vraie pour  $n \leq 3$ .*

*Preuve.* Supposons que le polynôme  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  soit une coordonnée de l'algèbre  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_m]$  pour un certain  $m \geq n$ . Alors, le cylindre  $V(p) \times \mathbf{C}^{m-n} = \{(x_1, \dots, x_m) \mid p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  de l'hypersurface  $V(p) \subset \mathbf{C}^n$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^{m-1} = \mathbf{C}^{(m-n)+(n-1)}$ .

Si  $n = 1$ , il faut donc que  $p$  soit de degré 1 ( $V(p)$  est en effet une variété irréductible et lisse).  $p$  est donc une variable de  $\mathbf{C}[x_1]$ .

Si  $n = 2$ , on a alors  $V(p) \simeq \mathbf{C}$  et on peut conclure grâce au théorème d'Abhyankar-Moh.

Si  $n = 3$ , on remarque que, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , le polynôme  $p - c$  est aussi une coordonnée stable. On montre donc de même que  $V(p - c) \simeq \mathbf{C}^2$  pour tout  $c$  et on peut conclure par le théorème de Kaliman.  $\square$

**Remarque 5.1.9.** G. Freudenburg a montré dans [22] que le polynôme de Vénéreau (cf. proposition 4.1.28)

$$y + x[xz + y(yu + z^2)] \in \mathbf{C}[u, x, y, z]$$

est une coordonnée stable et constitue donc un contre-exemple potentiel à la conjecture des coordonnées stables pour  $n = 4$ .

## 5.2 Problèmes de simplification et de l'équivalence stable

### 5.2.1 Problème de simplification de Zariski

Le *problème de simplification de Zariski* est une généralisation naturelle de la conjecture de simplification. Son énoncé est le suivant :

**Problème (de simplification de Zariski).** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés dont les cylindres sont isomorphes ; c-à-d telles que  $X \times \mathbf{C} \simeq Y \times \mathbf{C}$ . Alors,  $X$  et  $Y$  sont-elles isomorphes ?*



Avant de voir précisément pourquoi certaines hypersurfaces de Danielewski apportent une réponse négative à ce problème, donnons deux cas dans lequel il est vrai.

Le premier de ces cas est celui des courbes.

**Proposition 5.2.1 (Abhyankar, Eakin et Heinzer [1]).** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés telles que  $X \times \mathbf{C}^k \simeq Y \times \mathbf{C}^k$  pour un certain entier  $k \geq 1$  et si  $\dim(Y) = 1$ , alors  $X$  et  $Y$  sont isomorphes.*

Le deuxième cas pour lequel le problème de simplification a une réponse positive est celui des variétés de dimension logarithmique de Kodaira finie. (Pour une surface lisse, être de dimension logarithmique de Kodaira finie est équivalent au fait de ne pas admettre de  $\mathbb{A}^1$ -fibration. (voir par exemple [40]))

**Théorème 5.2.2 (Iitaka et Fujita [27]).** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés telles que  $X \times \mathbf{C}^k \simeq Y \times \mathbf{C}^k$  pour un certain entier  $k \geq 1$  et si  $\bar{\kappa}(Y) \geq 0$ , alors  $X$  et  $Y$  sont isomorphes.*

*Plus précisément, tout isomorphisme  $\varphi : X \times \mathbf{C}^k \xrightarrow{\simeq} Y \times \mathbf{C}^k$  induit un isomorphisme entre  $X$  et  $Y$ .*

Nous avons déjà dit dans le premier chapitre que les hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  définies, pour tout  $n \geq 1$ , par les équations  $x^n y = z^2 - 1$  sont des contre-exemples au problème de simplification (théorème 1.2.1). On peut en fait reprendre la preuve de Danielewski et Fieseler, et énoncer le résultat plus général suivant. (voir aussi l'article de J. Wilkens [53])

**Proposition 5.2.3.** *Soient  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  deux hypersurfaces de Danielewski telles que les polynômes  $Q_1(0, z)$  et  $Q_2(0, z)$  soient de même degré et n'aient que des racines simples<sup>1</sup>.*

*Alors, les cylindres  $X_{Q_1, n_1} \times \mathbf{C}$  et  $X_{Q_2, n_2} \times \mathbf{C}$  sont isomorphes, bien que les hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  ne le soient pas en général.*

*Preuve.* On a déjà vu (théorème 3.2.4) que deux telles hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  ne sont pas isomorphes en général.

Pour montrer l'isomorphie des cylindres, il suffit de remarquer que les actions  $\delta_{Q_1, n_1}$  et  $\delta_{Q_2, n_2}$  sur  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  (cf. notation 1.3.4) sont libres et de reprendre la preuve du théorème 1.2.1.

Les hypersurfaces  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont alors des fibrés principaux sur une droite à  $d = \deg(Q_1(0, z)) = \deg(Q_2(0, z))$  origines et les cylindres  $X_{Q_1, n_1} \times \mathbf{C}$  et  $X_{Q_2, n_2} \times \mathbf{C}$  sont donc isomorphes au produit fibré  $X_{Q_1, n_1} \times_{\mathcal{A}(d)} X_{Q_2, n_2}$ .  $\square$

<sup>1</sup>Ces hypersurfaces ont donc une structure de surface de Danielewski. (lemme 1.3.5)

Nous souhaitons, en guise de conclusion à cette sous-section consacrée au problème de simplification, faire encore trois remarques.

**Remarque 5.2.4.**

1. Les hypersurfaces  $W_n$ ,  $n \geq 1$ , ne sont pas homéomorphes. (W. Danielewski et K.-H. Fieseler ont en effet montré que  $\pi_1^\infty(W_n) = \mathbf{Z}/(2n\mathbf{Z})$ .)
2. Les hypersurfaces  $X = V(x^2y - z^2 + 1)$  et  $Y = V(x^2y - (1+x)z^2 + 1)$  vérifient les propriétés suivantes :
  - (a)  $X$  et  $Y$  ne sont pas algébriquement isomorphes. (cf. proposition 4.1.12)
  - (b)  $X$  et  $Y$  sont analytiquement isomorphes. (G. Freudenburg et L. Moser-Jauslin [23])
  - (c) Les cylindres  $X \times \mathbf{C}$  et  $Y \times \mathbf{C}$  sont (algébriquement) isomorphes.
3. T. Tom Dieck a montré dans [50] que les hypersurfaces de Danielewski d'équation  $x^n y = z^2 + x$ ,  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ , sont aussi des contre-exemples au problème de simplification. Cependant, ces hypersurfaces ne sont pas des surfaces de Danielewski (théorème 1.3.6) et n'ont pas de structure de fibré principal. Pour prouver que leurs cylindres sont isomorphes, il utilise le fait que leurs revêtements universels sont des surfaces de Danielewski dont les cylindres sont isomorphes. (voir aussi [39])

## 5.2.2 Problème de l'équivalence stable

Nous aurons besoin, pour énoncer ce nouveau problème, des deux définitions suivantes.

**Définition 5.2.5.** Deux polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  sont dits *stablement équivalents* s'ils sont équivalents comme polynômes de  $\mathbf{C}^{[n+m]}$  pour un certain entier  $m \in \mathbf{N}$ .

**Définition 5.2.6.** Deux hypersurfaces  $X = V(P)$  et  $Y = V(Q)$  de  $\mathbf{C}^n$  sont dites *stablement équivalentes* s'il existe un entier  $m \in \mathbf{N}$  tel que les variétés  $X \times \mathbf{C}^m$  et  $Y \times \mathbf{C}^m$  soient équivalentes.

Autrement dit, les hypersurfaces  $V(P)$  et  $V(Q)$  sont stablement équivalentes s'il existe une constante  $\lambda \in \mathbf{C}^*$  telle que les polynômes  $P$  et  $\lambda Q$  soient stablement équivalents.

Le problème dit *de l'équivalence stable* est un des « problèmes ouverts » du recueil [24]. Il a été posé V. Shpilrain et J.-T. Yu puis repris par L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain et J.-T. Yu dans [38]. Ce problème regroupe en réalité, sous un même nom, deux questions distinctes.

**Problème (de l'équivalence stable pour les hypersurfaces).** *Deux hypersurfaces de  $\mathbf{C}^n$  stablement équivalentes sont-elles forcément équivalentes ?*

**Problème (de l'équivalence stable pour les polynômes).** *Deux polynômes de  $\mathbf{C}^{[n]}$  qui sont stablement équivalents sont-ils équivalents ?*

**Remarque 5.2.7.** Si une réponse positive au problème pour les polynômes implique bien une réponse positive pour les hypersurfaces, la réciproque n'est pas vraie. En effet, un polynôme  $P$  n'est pas forcément équivalent au polynôme  $\lambda P$  pour toute constante  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ . (cf. exemple 4.1.22)

Le problème de l'équivalence stable pour les polynômes est la généralisation de la conjecture des coordonnées stables. Le problème de l'équivalence stable pour les hypersurfaces est, en quelque sorte, un problème de simplification pour l'équivalence. Ainsi, il semble naturel de penser que ces problèmes ont une réponse négative pour  $n \geq 3$ . Curieusement, tous les résultats connus jusqu'alors apportaient des réponses positives.

### Quelques réponses positives

Les auteurs de [38] ont tout d'abord montré que les deux problèmes de l'équivalence stable ont des réponses positives pour  $n = 2$ .

**Théorème 5.2.8 (Makar-Limanov, van Rossum, Shpilrain et Yu, [38]).**

*Soient  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  deux polynômes stablement équivalents avec  $n = 1$  ou  $n = 2$ . Alors, les polynômes  $P$  et  $Q$  sont en fait équivalents.*

**Remarque 5.2.9.** Le théorème de Srinivas (théorème 4.1.4) n'implique pas que deux hypersurfaces lisses isomorphes sont stablement équivalentes. En effet, si  $V(P) \simeq V(Q)$  sont deux hypersurfaces lisses isomorphes de  $\mathbf{C}^n$ , alors la conclusion du théorème de Srinivas est que les variétés de dimension  $n - 1$ ,  $V(P(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n)$  et  $V(Q(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n)$  sont équivalentes dans  $\mathbf{C}^{2n}$ . (mais les cylindres  $V(P) \times \mathbf{C}^n$  et  $V(Q) \times \mathbf{C}^n$  n'ont pas de raison de l'être.)

*Preuve.* Pour le cas  $n = 2$ , nous renvoyons à [38]. Reste la preuve pour  $n = 1$ . Soient  $P(x_1)$  et  $Q(x_1)$  deux polynômes de  $\mathbf{C}[x_1]$ ,  $m \geq 2$  un entier et  $\varphi$  un automorphisme de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_m]$  tel que  $\varphi(P) = Q$ .

Si on note  $\varphi(x_1) = f_1 \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_m]$ , on a  $P(f_1(x_1, \dots, x_m)) = Q(x_1)$ . Ceci implique, si  $P$  n'est pas constant, que  $f_1(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{C}[x_1]$ . Le polynôme  $f_1$  est donc une coordonnée stable de  $\mathbf{C}[x_1]$ . C'est donc en fait (théorème 5.1.8) une coordonnée de  $\mathbf{C}[x_1]$  et  $P$  et  $Q$  sont bien équivalents. (via l'automorphisme  $x_1 \mapsto f_1$ .)  $\square$

Par ailleurs, V. Shpilrain et J.-T. Yu ont établi le résultat suivant concernant les « polynômes tests ».

**Proposition 5.2.10 (Shpilrain et Yu [47]).** *Soit  $P$  un polynôme test de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ ; c'est-à-dire un polynôme ayant la propriété que si un endomorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  satisfait  $\Psi(P) = P$ , alors  $\Psi$  est inversible.*

*Alors, tout polynôme stablement équivalent à  $P$  lui est en fait équivalent.*

Le résultat suivant est dû à R. Drylo. C'est en quelque sorte le pendant, pour l'équivalence, du théorème de simplification d'Iitaka et Fujita (théorème 5.2.2). Rappelons qu'une surface complexe  $X$  est dite *uniréglée* s'il existe un morphisme dominant  $\mathcal{C} \times \mathbf{C} \rightarrow X$  pour une certaine courbe  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 5.2.11 (Drylo [15]).** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces complexes stablement équivalentes. Si  $Y$  n'est pas uniréglée, alors  $X$  et  $Y$  sont équivalentes.*

Remarquons que, pour toute hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$ , le morphisme  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow X_{Q,n}$ ,  $(x, z) \mapsto (x, x^{-n}Q(x, z), z)$  est dominant. Les hypersurfaces de Danielewski sont donc uniréglées et ne vérifient pas les hypothèses du théorème de Drylo.

### Des contre-exemples pour $n = 3$

Nous avons vu que certaines hypersurfaces de Danielewski sont des contre-exemples au problème de simplification. Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer que certaines hypersurfaces de Danielewski sont aussi des contre-exemples au problème de l'équivalence stable.

Nous pourrions notamment prouver le résultat suivant.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Plus généralement, les hypersurfaces de  $\mathbf{C}^{n+2}$  définies respectivement par les équations  $x_1^2 \cdots x_n^2 y = z^2 - 1$  et  $x_1^2 \cdots x_n^2 y = z^2 - x_1 \cdots x_n z^2 - 1$  sont des contre-exemples au problème de l'équivalence stable. [43]

**Proposition 5.2.12 ([42]).** *Les hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  définies respectivement par les équations*

$$x^2y = z^2 + xz^2(z^2 - 1) - 1 \quad \text{et} \quad x^2y = z^2 + xz^2 - 1$$

*sont stablement équivalentes mais elles ne sont pas isomorphes, et donc pas équivalentes.*

*Preuve.* La proposition 4.2.26 montre que ces deux surfaces ne sont pas isomorphes. Le théorème 5.3.1 de la section suivante nous montrera qu'elles sont stablement équivalentes.  $\square$

Ainsi, non seulement la réponse au problème de l'équivalence stable est négative pour  $n = 3$ , mais le fait que deux polynômes soient stablement équivalents n'implique même pas qu'ils définissent des hypersurfaces isomorphes.

Remarquons que V. Shpilrain et J.-T. Yu avaient déjà donné l'exemple de surfaces complexes stablement équivalentes mais non isomorphes [47]. Ces surfaces n'étant pas des hypersurfaces (ce sont des surfaces dans  $\mathbf{C}^7$ ), ils ont pu utiliser le théorème de Srinivas pour établir le résultat suivant.

**Proposition 5.2.13.** *Les surfaces  $X_1$  et  $X_2$ , dans  $\mathbf{C}^7$ , définies respectivement par  $X_1 = V(xy - z^2 + 1, t_1, t_2, t_3, t_4)$  et  $X_2 = V(x^2y - z^2 + 1, t_1, t_2, t_3, t_4)$  ne sont pas isomorphes bien que leurs cylindres  $X_1 \times \mathbf{C}$  et  $X_2 \times \mathbf{C}$  soient équivalents.*

*Preuve.* Les cylindres  $X_1 \times \mathbf{C}$  et  $X_2 \times \mathbf{C}$  sont isomorphes d'après le résultat de Danielewski (théorème 1.2.1). De plus, le théorème 4.1.4 implique qu'ils sont équivalents. Cependant,  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas isomorphes car sinon les hypersurfaces de Danielewski  $W_1 = V(xy - z^2 + 1)$  et  $W_2 = V(x^2y - z^2 + 1)$  le seraient.  $\square$

## Cylindres des hypersurfaces de Danielewski

Nous allons maintenant étudier les plongements des cylindres ayant pour base une hypersurface de Danielewski. Nous aimerions notamment répondre aux questions suivantes :

(1) Peut-on déterminer si deux cylindres ayant pour base des hypersurfaces de Danielewski sont ou ne sont pas équivalents (via un automorphisme de  $\mathbf{C}^4$ ) ? Peut-on en donner des formes normales ?

(2) Tout cylindre  $X_{Q,n} \times \mathbf{C}$  admet-il des plongements non équivalents dans  $\mathbf{C}^4$  ?

On peut facilement répondre à la question (2) dans le cas des hypersurfaces de Danielewski ayant une structure de surface de Danielewski. Pour cela, il suffit de remarquer que  $\sharp\text{grad}$  est un invariant pour l'équivalence stable des polynômes et des hypersurfaces, puis d'utiliser la proposition 5.2.3.

**Lemme 5.2.14.** *Soient  $P, Q \in \mathbf{C}^{[n]}$  deux polynômes tels que  $\sharp\text{grad}(P) \neq \sharp\text{grad}(Q)$ . Alors, les hypersurfaces  $V(P)$  et  $V(Q)$  ne sont pas stablement équivalentes.*

*Preuve.* Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 4.1.14.  $\square$

**Proposition 5.2.15.** *Soient  $n \geq 2$  un entier naturel et  $Q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  un polynôme tel que  $Q(0, z)$  soit à  $d \geq 2$  racines simples.*

*Alors, les cylindres  $X_{Q,1} \times \mathbf{C}$  et  $X_{Q,n} \times \mathbf{C}$  sont isomorphes mais ils ne sont pas équivalents.*

*Preuve.* La proposition 5.2.3 montre que les cylindres  $X_{Q,1} \times \mathbf{C}$  et  $X_{Q,n} \times \mathbf{C}$  sont bien isomorphes. Par ailleurs, on peut vérifier facilement que les gradients des polynômes  $P_{Q,1}$  et  $P_{Q,n}$  sont différents :  $\sharp\text{grad}(xy - Q(x, z)) = \infty$  et  $\sharp\text{grad}(x^n y - Q(x, z)) < d$ .  $\square$

Le cas des cylindres ayant pour base une hypersurface  $X_{Q,n}$  n'admettant pas de structure de surface de Danielewski reste ouvert. Nous ne savons pas, par exemple, répondre à la question suivante :

**Question 5.2.16.** *Les plongements des cylindres  $V(x^n y - z^2) \times \mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^4$  sont-ils tous équivalents ?*

Remarquons également que, dans le résultat précédent, les hypersurfaces  $X_{Q,1}$  et  $X_{Q,n}$  n'étaient pas isomorphes. Comme nous avons montré que deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes sont *analytiquement* équivalentes (corollaire 4.2.16), il nous semble naturel de poser la question suivante – cas particulier de la question (1) que nous avons posée dans le préambule de cette sous-section.

**Question 5.2.17.** *Les cylindres de deux hypersurfaces de Danielewski isomorphes sont-ils stablement équivalents ?*

Essayons maintenant de trouver des conditions nécessaires pour que deux hypersurfaces de Danielewski soient stablement équivalentes. Le seul critère connu pour montrer que deux polynômes  $P$  et  $Q$  donnés ne sont pas stablement équivalents est la capacité d'exhiber deux fibres dont les cylindres  $V(P - c) \times \mathbf{C}^k$  et  $V(Q - c) \times \mathbf{C}^k$  ne sont isomorphes pour aucun entier  $k$ . On montre ainsi que le degré du polynôme  $Q(0, z)$  est un invariant pour l'équivalence stable de l'hypersurface  $X_{Q,n}$ .

**Lemme 5.2.18.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont stablement équivalentes, alors  $\deg(Q_1(0, z)) = \deg(Q_2(0, z))$ .*

*Preuve.* Comme le montre le lemme 1.3.5, les fibres générales d'une hypersurface de Danielewski  $X_{Q,n}$  ont une structure de surface de Danielewski. La proposition 1.1.18 nous dit alors que le deuxième groupe d'homologie de ces fibres – et donc de leurs cylindres – est  $\mathbf{Z}^{d-1}$ , où  $d = \deg(Q(0, z))$ . Le lemme devient alors évident.  $\square$

Les lemmes 5.2.14 et 5.2.18 donnent les seules conditions nécessaires dont nous disposons actuellement pour étudier la question de l'équivalence stable de deux hypersurfaces de Danielewski. La conjecture suivante en propose une troisième.

**Conjecture 5.2.19.** *Si deux hypersurfaces de Danielewski  $X_{Q_1, n_1}$  et  $X_{Q_2, n_2}$  sont stablement équivalentes, alors  $n_1 = n_2$ .*

La proposition suivante est une tentative pour répondre à la conjecture ci-dessus sur un exemple.

**Proposition 5.2.20.** *L'endomorphisme (non inversible) de  $\mathbf{C}[w, x, y, z]$  défini par*

$$\begin{cases} \phi(x) = x \\ \phi(y) = xy + x^2w^2 + 2zw \\ \phi(z) = z + x^2w \\ \phi(w) = 2w + yz + 3x^2yw + 3xzw^2 + x^3w^3 \end{cases}$$

*induit, pour toute constante non nulle  $c \in \mathbf{C}^*$ , un isomorphisme*

$$\varphi_c : \mathbf{C}[w, x, y, z]/(x^2y - z^2 + x + c) \rightarrow \mathbf{C}[w, x, y, z]/(x^3y - z^2 + x + c).$$

*Preuve.* La preuve que nous donnons ici est inspirée d'une preuve de P. Russell que nous avons lue dans [47].

Notons  $P$  et  $Q$  les polynômes  $P = x^2y - z^2 + x$  et  $Q = x^3y - z^2 + x$ . On vérifie facilement que  $\Phi(P + c) = Q + c$  pour tout  $c \in \mathbf{C}$ . Ainsi,  $\Phi$  induit bien un endomorphisme  $\varphi_c$  entre les anneaux  $\mathbf{C}[w, x, y, z]/(P + c)$  et  $\mathbf{C}[w, x, y, z]/(Q + c)$ .

Pour montrer que  $\varphi_c$  est inversible quand  $c \neq 0$ , nous commençons par montrer qu'il est surjectif, en montrant que son image contient les « variables  $x, y, z, w \pmod{(Q + c)}$  ». Pour cela, fixons  $c \in \mathbf{C}^*$  et notons  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  et  $\bar{w}$  les images respectives de  $x, y, z$  et  $w$  dans  $\mathbf{C}[w, x, y, z]/(Q + c)$ .

On sait déjà que  $\bar{x} \in \text{Im}(\varphi_c)$ . Ensuite, on vérifie que

$$\Phi(yz) - x\Phi(w) = 2w(-x^3y + z^2 - x) = 2w(c - (Q + c)),$$

et donc que  $\bar{w} \in \text{Im}(\varphi_c)$ . Dès lors, comme  $\Phi(z) = z + x^2w$ , on obtient que  $\bar{z} \in \text{Im}(\varphi_c)$ .

De même, en examinant  $\Phi(y)$  et  $\Phi(w)$ , on voit facilement que  $\bar{x}\bar{y} \in \text{Im}(\varphi_c)$  et  $\bar{y}\bar{z} \in \text{Im}(\varphi_c)$ . On en déduit finalement que  $c\bar{y} = \bar{y}(-\bar{x}^3\bar{y} + \bar{z}^2 - \bar{x}) \in \text{Im}(\varphi_c)$ .

Cela permet de conclure que  $\varphi_c$  est surjectif pour tout  $c \in \mathbf{C}^*$ . Dès lors, nous savons que  $\varphi_c$  induit un isomorphisme entre les anneaux  $\mathbf{C}[w, x, y, z]/\text{Ker}(\varphi_c)$  et  $\mathbf{C}[w, x, y, z]/(Q + c)$ ; ce qui implique en particulier que l'idéal  $\text{Ker}(\varphi_c)$  est principal. Or, l'idéal  $(P + c)$  est inclus dans  $\text{Ker}(\varphi_c)$ .  $P + c$  étant un polynôme irréductible, on a alors que  $(P + c) = \text{Ker}(\varphi_c)$ .  $\square$

**Remarque 5.2.21.** La proposition 5.2.20 n'est bien entendu pas suffisante pour prouver que les polynômes  $x^2y - z^2 + x$  et  $x^3y - z^2 + x$  ne sont pas équivalents via un automorphisme de  $\mathbf{C}[w, x, y, z]$ . Pour s'en convaincre, on peut par exemple remarquer que l'endomorphisme (non inversible) de  $\mathbf{C}^2$  défini par  $(x, y) \mapsto (x, xy)$  induit, pour tout  $c \in \mathbf{C}^*$ , un automorphisme de l'anneau  $\mathbf{C}[x, y]/(x - c)$ .

### 5.3 Étude des polynômes $P_{Q,n}$ avec $\deg(Q(0, z)) = 2$

Nous avons étudié dans [42], avec L. Moser-Jauslin, les polynômes de la forme  $x^2y - z^2 - xq(x, z)$  et en avons donné une classification à équivalence stable près, ainsi qu'une classification à équivalence analytique près. Dans cette section, nous souhaitons généraliser ces travaux à tous les polynômes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  de la forme  $x^n y - p(z) - xq(x, z)$  avec  $\deg(p) = 2$ .



### 5.3.1 Recherche de formes normales pour l'équivalence stable

Commençons par remarquer que tout polynôme  $x^n y - p(z) - xq(x, z)$  avec  $\deg(p) = 2$  est équivalent, via un automorphisme affine en la variable  $z$ , à un polynôme de la forme  $x^n y - z^2 + c - xq(x, z)$  avec  $c \in \mathbf{C}$ .

Rappelons également que nous avons déjà trouvé des formes normales de ces polynômes pour l'équivalence (théorème 4.2.30). Plus précisément, nous avons montré qu'un tel polynôme est équivalent à un polynôme de la forme  $x^n y - z^2 + c - xq(x, z^2)$  avec  $\deg_x(q) < n - 1$ .

La suite de cette section sera consacrée à la preuve du résultat suivant – résultat qui généralise le théorème de classification donné dans [42].

**Théorème 5.3.1.** *Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $q \in \mathbf{C}^{[2]}$  un polynôme à deux variables. Alors, le polynôme  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  est stablement équivalent (via un automorphisme de  $\mathbf{C}[x, y, z, w]$ ) au polynôme  $x^n y - z^2 - xq(x, 0)$ .*

*Rappelons par ailleurs que deux polynômes  $x^n y - z^2 - xq_1(x, z^2)$ , avec  $\deg_x(q_1) < n - 1$ , et  $x^n y - z^2 - xq_2(x, z^2)$ , avec  $\deg_x(q_2) < n - 1$ , sont équivalents si et seulement si ils le sont via un automorphisme affine.*

Nous obtenons ainsi les corollaires suivants :

**Corollaire 5.3.2.** *Le théorème ci-dessus donne de nombreux contre-exemples au problème de l'équivalence stable pour  $n = 3$ , c'est-à-dire des polynômes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  stablement équivalents mais non équivalents.*

**Corollaire 5.3.3.** *Tout polynôme  $P_{Q,n}$  avec  $\deg(Q(0, z)) = 2$  est stablement équivalent à un polynôme de la forme  $x^n y - z^2 - r(x)$  pour un certain polynôme  $r(x) \in \mathbf{C}[x]$ .*

**Corollaire 5.3.4.** *Soit  $X_{Q,n}$  une hypersurface de Danielewski définie par une équation de la forme  $x^n y = z^2 + xq(x, z)$ . Alors, il existe un polynôme  $r(x) \in \mathbf{C}[x]$  tel que les cylindres  $X_{Q,n} \times \mathbf{C}$  et  $X_{z^2 + xr(x), n} \times \mathbf{C}$  sont isomorphes.*

**Remarque 5.3.5.** Ce dernier corollaire permet donc de trouver de nombreux contre-exemples au problème de simplification ; ces nouveaux exemples sont tous des hypersurfaces de Danielewski qui n'admettent pas de structure de surface de Danielewski. (voir aussi [50] et [39])

L'étude des polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z)$  n'est pas totalement finie : il reste le cas des polynômes  $x^n y - z^2 - r(x)$ . Malheureusement, nous ne savons pas comment classifier ces derniers. C'est pourquoi nous posons les questions suivantes :

**Question 5.3.6.**

1. Les cylindres  $V(x^3 y - z^2 - x) \times \mathbf{C}$  et  $V(x^3 y - z^2 - x - x^2) \times \mathbf{C}$  sont-ils isomorphes ?
2. Les polynômes  $x^3 y - z^2 - x$  et  $x^3 y - z^2 - x - x^2$  sont-ils stablement équivalents ?

*Preuve.* (du théorème 5.3.1) Dans cette preuve, nous allons supposer que  $q(x, 0) = 0$  et montrer que les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  et  $x^n y - z^2$  sont équivalents via un automorphisme de  $\mathbf{C}[x, y, z, w]$  qui fixe la variable  $x$ . Le théorème sera ainsi bien démontré.

Pour cela, nous travaillerons en deux étapes. Dans un premier temps, nous construirons une famille  $\{\phi_c \mid c \in \mathbf{C}\}$  d'endomorphismes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  induisant des morphismes (non inversibles) entre les anneaux  $\mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c)$  et  $\mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - z^2 + c)$ .

Dans un deuxième temps, nous construirons, à partir des ces morphismes  $\phi_c$ , une famille  $\hat{\phi}_c$  d'endomorphismes de  $\mathbf{C}[x, y, z, w]$  telle que chaque  $\hat{\phi}_c$  induise un isomorphisme entre les anneaux  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c)$  et  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 + c)$ . Une fois cette dernière famille construite, nous pourrons alors, grâce au lemme 4.1.24, conclure que les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  et  $x^n y - z^2$  sont équivalents.

Remarquons par ailleurs que le cas  $n = 1$  est une conséquence directe du lemme 1.3.8. On suppose donc, à partir de maintenant, que  $n \geq 2$ .

première étape : On peut, toujours d'après le lemme 1.3.8, supposer que  $\deg_x(q(x, \cdot)) < n - 1$  et donc poser  $xq(x, z^2) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i z^2 r_i(z^2)$  pour certains polynômes  $r_i \in \mathbf{C}^{[1]}$ . (Comme nous l'avons indiqué, nous nous sommes placés dans le cas où  $q(x, 0) = 0$ .)

Commençons par montrer, en travaillant par récurrence sur  $2 \leq k \leq n$ , qu'il existe  $k - 1$  polynômes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbf{C}^{[1]}$  tels que

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i \alpha_i(t)\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i r_i \left(t \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i \alpha_i(t)\right)\right)\right) \equiv 1 \pmod{(x^k)} \quad (*)$$

Si  $k = 2$ , il suffit de choisir  $\alpha_1 = -r_1$ .

Supposons alors que l'égalité (\*) ci-dessus soit vérifiée pour un entier  $k \geq 2$  et notons  $p_k(t) \in \mathbf{C}[t]$  le polynôme vérifiant

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i \alpha_i(t)\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i r_i \left(t \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i \alpha_i(t)\right)\right)\right) \equiv 1 + x^k p_k(t) \pmod{(x^{k+1})}.$$

Il suffit alors de définir le polynôme  $\alpha_k$  en posant  $\alpha_k(t) = -(r_k(t) + p_k(t))$ .

Ainsi, il existe des polynômes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  satisfaisant l'égalité (\*) pour  $k = n$ .

Choisissons de plus des polynômes  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbf{C}^{[1]}$  tels que

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(t)\right)^2 \equiv 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \alpha_i(t) \pmod{(x^n)}.$$

Il vient alors

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(t)\right)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i r_i \left(t \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(t)\right)^2\right)\right) \equiv 1 \pmod{(x^n)}.$$

Ainsi, pour toute constante  $c \in \mathbf{C}$ , le polynôme

$$p_c(x, z) = z^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i r_i \left(z^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right)^2\right)\right) - c$$

est divisible, dans  $\mathbf{C}[x, z]/(x^n)$ , par le polynôme  $z^2 - c$ . Autrement dit, il existe des polynômes  $Q, R \in \mathbf{C}[x, z, c]$  tels que

$$p_c(x, z) = (z^2 - c)Q(x, z, c) + x^n R(x, z, c).$$

Remarquons en particulier que  $Q(0, \cdot, \cdot) = 1$ .

Pour finir la première étape de la preuve, il suffit de considérer la famille  $\{\phi_c \mid c \in \mathbf{C}\}$  d'endomorphismes de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  définis, pour chaque  $c \in \mathbf{C}$ , par

$$\begin{cases} \phi_c(x) = x \\ \phi_c(y) = Q(x, z, c)y + R(x, z, c) \\ \phi_c(z) = z \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right) \end{cases}$$

et de vérifier que  $\phi_c(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) = Q(x, z, c)(x^n y - z^2 + c)$ .

deuxième étape : Construisons maintenant une famille  $\{\hat{\phi}_c \mid c \in \mathbf{C}\}$  d'endomorphismes de  $\mathbf{C}[x, y, z, w]$  en posant :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_c(x) = x = \phi_c(x) \\ \hat{\phi}_c(y) = Q(x, z, c)y + R(x, z, c) + g(x, z, w, c) = \phi_c(y) + g(x, z, w, c) \\ \hat{\phi}_c(z) = z \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right) + x^n w = \phi_c(z) + x^n w \\ \hat{\phi}_c(w) = w \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \gamma_i(c)\right) + f(x, c)z \end{cases}$$

où les polynômes  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ ,  $f$  et  $g$  sont définis respectivement par

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \gamma_i(c)\right) = 1 + x^n f(x, c),$$

et

$$(\phi_c(z) + x^n w)^2 + xq(x, (\phi_c(z) + x^n w)^2) = p_c(x, z) + x^n g(x, z, c, w).$$

Ces endomorphismes  $\hat{\phi}_c$  ont été construits pour vérifier, pour tout  $c \in \mathbf{C}$ , l'égalité  $\hat{\phi}_c(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) = Q(x, z, c)(x^n y - z^2 + c)$ . De plus, leur dépendance en  $c$  est algébrique.

Nous voulons maintenant conclure que les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  et  $x^n y - z^2$  sont équivalents en utilisant le lemme 4.1.24. Pour cela, il suffit de montrer que chaque  $\hat{\phi}_c$  induit un isomorphisme entre les anneaux  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c)$  et  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 + c)$ .

Vu l'égalité ci-dessus, chaque  $\hat{\phi}_c$  induit bien un morphisme  $\hat{\varphi}_c$  entre ces anneaux. Commençons par montrer qu'un tel morphisme  $\hat{\varphi}_c$  est surjectif.

Fixons  $c \in \mathbf{C}$  et notons  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  et  $\bar{w}$  les images respectives de  $x, y, z$  et  $w$  dans  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 + c)$ .

Nous avons déjà  $\bar{x} \in \text{Im} \hat{\varphi}_c$ . Ensuite, on vérifie que, comme

$$\hat{\phi}_c\left(z\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \gamma_i(c)\right) - x^n w\right) = z \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_c\left(w\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)\right) - f(x, c)z\right) = w,$$

on a bien  $\bar{z}, \bar{w} \in \text{Im} \hat{\varphi}_c$ .

Il nous reste à montrer que  $\bar{y}$  est aussi dans l'image de  $\hat{\varphi}_c$ . Pour cela, remarquons que, comme  $Q(0, z, c) = 1$ , il existe un polynôme  $\tilde{Q}$  tel que  $Q(x, z, c)\tilde{Q}(x, z, c) \equiv 1 \pmod{(x^n)}$ . Définissons donc  $h \in \mathbf{C}[x, z, c]$  en posant  $Q(x, z, c)\tilde{Q}(x, z, c) = 1 + x^n h(x, z, c)$ . Il vient alors que

$$\hat{\phi}_c\left(y\tilde{Q}(x, (\hat{\phi}_c)^{-1}(z), c)\right) = (1 + x^n h(x, z, c))y + R(x, z, c)\tilde{Q}(x, z, c).$$

D'où,  $(1 + x^n h(x, z, c))y \in \text{Im}(\hat{\phi}_c)$  et donc  $y + h(x, z, c)(x^n y - z^2 + c) \in \text{Im}(\hat{\phi}_c)$ . Finalement, on a bien obtenu que  $\bar{y} \in \text{Im} \hat{\varphi}_c$ .

Ainsi,  $\hat{\varphi}_c : \mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) \rightarrow \mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 + c)$  est surjectif.

Les anneaux  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/(x^n y - z^2 + c)$  et  $\mathbf{C}[x, y, z, w]/\text{Ker}(\hat{\varphi}_c)$  sont donc isomorphes ; ce qui implique en particulier que  $\text{Ker}(\hat{\varphi}_c)$  est un idéal principal. On peut alors en déduire que  $\text{Ker}(\hat{\varphi}_c) = (x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c)$  puisque  $(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) \subset \text{Ker}(\hat{\varphi}_c)$  et que le polynôme  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c$  est irréductible.

Ainsi, nous avons prouvé que chaque  $\hat{\varphi}_c$  est inversible. Nous pouvons donc terminer la preuve du théorème en invoquant le lemme 4.1.24.  $\square$

### 5.3.2 Recherche de formes normales pour l'équivalence analytique

Dans [42], nous avons, avec L. Moser-Jauslin, donné des formes normales, pour l'équivalence analytique, des polynômes  $x^2y - z^2 - xq(x, z^2)$ . Le théorème suivant, qui est l'exact analogue pour l'équivalence analytique du théorème 5.3.1, généralise ce résultat.

**Théorème 5.3.7.** *Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $q \in \mathbf{C}^{[2]}$  un polynôme à deux variables. Alors, les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  et  $x^n y - z^2 - xq(x, 0)$  sont analytiquement équivalents.*

Remarquons que ce théorème n'est pas suffisant pour avoir des formes normales, pour l'équivalence analytique, des polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$ . En effet, on ne sait pas, par exemple, décider si les polynômes  $x^3 y - z^2 - x$  et  $x^3 y - z^2 - x - x^2$  sont analytiquement équivalents ; ni même si les hypersurfaces  $V(x^3 y - z^2 - x)$  et  $V(x^3 y - z^2 - x - x^2)$  sont analytiquement isomorphes.

En revanche, il nous permet de construire une famille d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$  non algébriquement isomorphes mais analytiquement isomorphes (et même analytiquement équivalentes).

**Corollaire 5.3.8.** *Les hypersurfaces  $X_a \subset \mathbf{C}^3$  définies, pour chaque  $a \in \mathbf{C}$ , par l'équation  $x^3 y = (1 + x + ax^2)z^2 + 1$  sont analytiquement équivalentes.*

*Néanmoins, les hypersurfaces  $X_a$  et  $X_{a'}$  ne sont pas isomorphes si  $a \neq a'$ .*

*Preuve.* Pour montrer que ces hypersurfaces ne sont pas algébriquement isomorphes, on doit commencer par calculer leurs formes standards. Pour cela, on s'appuie sur l'égalité suivante :

$$(1 + x + ax^2)z^2 - 1 = (1 + x + ax^2)(z^2 + x + (a-1)x^2 - 1) - x^3(2a - 1 + a(a-1)x).$$

Ainsi, d'après le lemme 1.3.9, l'hypersurface  $X_a$  est isomorphe à l'hypersurface  $V(x^3 y - z^2 - x - (a-1)x^2 + 1)$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.2.8 pour conclure.  $\square$

*Preuve.* (du théorème 5.3.7) Cette preuve est similaire à celle du théorème 5.3.1. On commence par supposer que  $q(x, 0) = 0$ , puis on travaille en deux étapes pour montrer que les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  et  $x^n y - z^2$  sont analytiquement équivalents.

La première étape est exactement la même que pour le théorème sur l'équivalence stable : on construit une famille  $\{\phi_c \mid c \in \mathbf{C}\}$  d'endomorphismes

de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  induisant des morphismes (non inversibles) entre les anneaux  $\mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c)$  et  $\mathbf{C}[x, y, z]/(x^n y - z^2 + c)$ .

Nous avons vu qu'il suffit de poser

$$\begin{cases} \phi_c(x) = x \\ \phi_c(y) = Q(x, z, c)y + R(x, z, c) \\ \phi_c(z) = z(1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)) \end{cases}$$

pour certains polynômes  $Q, R \in \mathbf{C}^{[3]}$  et  $\beta_i \in \mathbf{C}^{[1]}$  bien choisis. (Rappelons également que  $Q(0, z, c) = 1$ .)

Ces endomorphismes vérifient alors l'égalité suivante :

$$\phi_c(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) = Q(x, z, c)(x^n y - z^2 + c). \quad (*)$$

Nous allons maintenant les modifier pour obtenir des isomorphismes analytiques. Pour cela, choisissons des polynômes  $f$  et  $g$  tels que

$$e^f(x, z, c) \equiv (1 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \beta_i(c)) \pmod{(x^n)}$$

et

$$e^g(x, y, z) \equiv Q(x, z, c) \pmod{(x^n)}.$$

D'après l'égalité (\*), il existe une fonction analytique  $\rho$  telle que

$$z^2 e^{2f(x, z, c)} + xq(x, z^2 e^{2f(x, z, c)}) - c = Q(x, z, c)(z^2 - c) + x^n \rho(x, z, c).$$

Nous pouvons alors définir une famille d'automorphismes analytiques de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  en posant :

$$\begin{cases} \Psi_c(x) = x \\ \Psi_c(y) = ye^{g(x, y, c)} + \rho(x, z, c) - (z^2 - c)(x^{-n}[e^{g(x, y, c)} - Q(x, z, c)]) \\ \Psi_c(z) = ze^{f(x, z, c)} \end{cases}$$

Cette famille d'automorphismes analytiques a été construite pour vérifier l'égalité suivante :

$$\Psi_c(x^n y - z^2 - xq(x, z^2) + c) = e^{g(x, z, c)}(x^n y - z^2 + c).$$

On peut donc conclure, par le lemme 4.1.24, que les polynômes  $x^n y - z^2$  et  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2)$  sont analytiquement équivalents via un automorphisme analytique de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  qui laisse la variable  $x$  fixe.

Cet automorphisme réalise également, pour tout polynôme  $a(x) \in \mathbf{C}[x]$ , l'équivalence analytique entre les polynômes  $x^n y - z^2 - xq(x, z^2) - a(x)$  et  $x^n y - z^2 - a(x)$ .

Le théorème est donc bien démontré.  $\square$

### 5.3.3 Bilan dans le cas des polynômes $x^2y - z^2 - xq(z)$

Quand  $n = 2$ , les théorèmes des sections précédentes suffisent pour obtenir la classification complète des hypersurfaces définies par une équation de la forme  $x^2y - z^2 - xq(x, z)$ , que ce soit à isomorphisme près, à équivalence près, à équivalence stable près ou à équivalence analytique près.

Le théorème suivant regroupe toutes ces classifications, que nous avons établies avec L. Moser-Jauslin [42], dans un même énoncé. Il fait, en quelque sorte, office de conclusion à cette thèse.

**Théorème 5.3.9.** *Soient  $q(x, z) \in \mathbf{C}[x, z]$  et  $s(z^2) \in \mathbf{C}[z^2]$ . Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Le polynôme  $x^2y - z^2 - xq(x, z)$  est (algébriquement) équivalent au polynôme  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  avec  $r(z^2) = \frac{1}{2}(q(0, z) + q(0, -z))$ .*
2. *L'hypersurface  $V(x^2y - z^2 - xr(z^2) + c)$  est isomorphe à l'hypersurface*
  - $V(x^2y - z^2 + 1)$  *si  $c \neq 0$  et  $r(c) = 0$  ;*
  - $V(x^2y - z^2 - x + 1)$  *si  $c \neq 0$  et  $r(c) \neq 0$  ;*
  - $V(x^2y - z^2)$  *si  $c = 0$  et  $r(0) = 0$  ;*
  - $V(x^2y - z^2 - x + 1)$  *si  $c \neq 0$  et  $r(0) \neq 0$ .*
3. *Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont (algébriquement) équivalents si et seulement si il existe une constante  $a \in \mathbf{C}^*$  telle que  $ar(z^2) = s(z^2)$ .*
4. *Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont stablement équivalents si et seulement si  $r(0) = s(0) = 0$  ou  $r(0)s(0) \neq 0$ .*
5. *Les polynômes  $x^2y - z^2 - xr(z^2)$  et  $x^2y - z^2 - xs(z^2)$  sont analytiquement équivalents si et seulement si  $r(0) = s(0) = 0$  ou  $r(0)s(0) \neq 0$ .*

*Preuve.* Le point 1 a été montré dans la proposition 4.2.27, le point 2 dans la proposition 4.2.26 et le point 3 dans le théorème 4.2.28. Pour montrer les points 3 et 4, il suffit de remarquer que l'hypersurface  $V(x^2y - z^2 - \alpha x)$  est singulière si  $\alpha = 0$  et lisse sinon, puis d'utiliser les théorèmes 5.3.1 et 5.3.7.

□

# Bibliographie

- [1] S. S. ABHYANKAR, W. HEINZER, AND P. EAKIN, *On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring.*, J. Algebra, 23 (1972), pp. 310–342.
- [2] T. BANDMAN AND L. MAKAR-LIMANOV, *Affine surface with isomorphic cylinders*, preprint.
- [3] —, *Cylinders over affine surfaces*, Japan. J. Math. (N.S.), 26 (2000), pp. 207–217.
- [4] —, *Affine surfaces with  $\text{AK}(S) = \mathbb{C}$* , Michigan Math. J., 49 (2001), pp. 567–582.
- [5] H. BASS, E. H. CONNELL, AND D. WRIGHT, *The Jacobian conjecture : reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 7 (1982), pp. 287–330.
- [6] B. CHABAT, *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2*, Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics], “Mir”, Moscow, 1990. Fonctions de plusieurs variables. [Functions of several variables], Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [7] A. J. CRACHIOLA, *On automorphisms of Danielewski surfaces*, J. Algebraic Geom., 15 (2006), pp. 111–132.
- [8] P. C. CRAIGHERO, *A result on  $m$ -flats in  $\mathbf{A}_k^n$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 75 (1986), pp. 39–46.
- [9] D. DAIGLE, *On locally nilpotent derivations of  $k[X_1, X_2, Y]/(\phi(Y) - X_1X_2)$* , J. Pure Appl. Algebra, 181 (2003), pp. 181–208.
- [10] —, *Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces*, Osaka J. Math., 41 (2004), pp. 37–80.
- [11] —, *On polynomials in three variables annihilated by two locally nilpotent derivations*, J. Algebra, 310 (2007), pp. 303–324.
- [12] —, *Locally nilpotent derivations*, Lecture notes for the "september school" of Algebraic Geometry, Lukecin, Poland (September 2003).



- [13] W. DANIELEWSKI, *On a cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties*, Preprint Warsaw, (1989).
- [14] H. DERKSEN, F. KUTZSCHEBAUCH, AND J. WINKELMANN, *Subvarieties of  $\mathbf{C}^n$  with non-extendable automorphisms*, J. Reine Angew. Math., 508 (1999), pp. 213–235.
- [15] R. DRYŁO, *Non-uniruledness and the cancellation problem*, Ann. Polon. Math., 87 (2005), pp. 93–98.
- [16] A. DUBOULOZ, *Sur une classe de schémas avec actions d'un fibré en droites*, Thèse de doctorat, (2004).
- [17] —, *Danielewski-Fieseler surfaces*, Transform. Groups, 10 (2005), pp. 139–162.
- [18] —, *Embeddings of Danielewski surfaces in affine spaces*, Comment. Math. Helv., 81 (2006), pp. 49–73.
- [19] —, *Additive group actions on Danielewski varieties and the cancellation problem*, Math. Z., 255 (2007), pp. 77–93.
- [20] A. DUBOULOZ AND P.-M. POLONI, *On a class of Danielewski surfaces in affine 3-space*, prépublication de l'université de Bourgogne, (2006).
- [21] K.-H. FIESELER, *On complex affine surfaces with  $\mathbf{C}^+$ -action*, Comment. Math. Helv., 69 (1994), pp. 5–27.
- [22] G. FREUDENBURG, *The Vénéreau polynomials relative to  $\mathbf{C}^*$ -fibrations and stable coordinates*. Hibi, Takayuki (ed.), Affine algebraic geometry. Dedicated to Masayoshi Miyanishi on the occasion of his retirement from Osaka University. Osaka : Osaka University Press. 203-215 (2007)., 2007.
- [23] G. FREUDENBURG AND L. MOSER-JAUSLIN, *Embeddings of Danielewski surfaces*, Math. Z., 245 (2003), pp. 823–834.
- [24] G. FREUDENBURG AND P. RUSSELL, *Open problems in affine algebraic geometry*, in Affine algebraic geometry, vol. 369 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–30.
- [25] T. FUJITA, *On Zariski problem.*, Proc. Japan Acad., Ser. A, 55 (1979), pp. 106–110.
- [26] R. V. GURJAR AND M. MIYANISHI, *Automorphisms of affine surfaces with  $\mathbf{A}^1$ -fibrations*, Michigan Math. J., 53 (2005), pp. 33–55.
- [27] S. IITAKA AND T. FUJITA, *Cancellation theorem for algebraic varieties.*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A, 24 (1977), pp. 123–127.
- [28] Z. JELONEK, *Exotic embeddings of smooth affine varieties*, J. Algebra, 297 (2006), pp. 530–541.

- [29] S. KALIMAN, *Extensions of isomorphisms between affine algebraic subvarieties of  $k^n$  to automorphisms of  $k^n$* , Proc. Amer. Math. Soc., 113 (1991), pp. 325–334.
- [30] ———, *Polynomials with general  $\mathbf{C}^2$ -fibers are variables*, Pacific J. Math., 203 (2002), pp. 161–190.
- [31] S. KALIMAN, M. KORAS, L. MAKAR-LIMANOV, AND P. RUSSELL,  *$\mathbf{C}^*$ -actions on  $\mathbf{C}^3$  are linearizable*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 3 (1997), pp. 63–71 (electronic).
- [32] H. KRAFT, *Challenging problems on affine  $n$ -space*, Astérisque, (1996), pp. Exp. No. 802, 5, 295–317. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [33] L. MAKAR-LIMANOV, *Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications*, disponible sur internet.
- [34] ———, *On groups of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. Math., 69 (1990), pp. 250–256.
- [35] ———, *On the hypersurface  $x + x^2y + z^2 + t^3$  in  $\mathbf{C}^4$  or a  $\mathbf{C}^3$ -like threefold which is not  $\mathbf{C}^3$* , Israel J. Math., 96 (1996), pp. 419–429.
- [36] ———, *On the group of automorphisms of a surface  $x^ny = P(z)$* , Israel J. Math., 121 (2001), pp. 113–123.
- [37] ———, *Again  $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$* , in Affine algebraic geometry, vol. 369 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 177–182.
- [38] L. MAKAR-LIMANOV, P. VAN ROSSUM, V. SHPILRAIN, AND J.-T. YU, *The stable equivalence and cancellation problems*, Comment. Math. Helv., 79 (2004), pp. 341–349.
- [39] K. MASUDA AND M. MIYANISHI, *The additive group actions on  $\mathbb{Q}$ -homology planes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 53 (2003), pp. 429–464.
- [40] M. MIYANISHI, *Open algebraic surfaces*, vol. 12 of CRM Monograph Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [41] M. MIYANISHI AND T. SUGIE, *Affine surfaces containing cylinderlike open sets.*, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), pp. 11–42.
- [42] L. MOSER-JAUSLIN AND P.-M. POLONI, *Embeddings of a family of Danielewski hypersurfaces and certain  $\mathbf{C}^+$ -actions on  $\mathbf{C}^3$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 56 (2006), pp. 1567–1581.
- [43] P.-M. POLONI, *Counterexamples to the stable equivalence problem in any dimension  $n \geq 3$* , en préparation.
- [44] R. RENTSCHLER, *Opérations du groupe additif sur le plan affine*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 267 (1968), pp. A384–A387.

- [45] J.-P. SERRE, *Espaces fibrés algébriques, Séminaire C. Chevalley, Annaux de Chow, Exposé 1*, (1958).
- [46] V. SHPILRAIN AND J.-T. YU, *Embeddings of hypersurfaces in affine spaces*, J. Algebra, 239 (2001), pp. 161–173.
- [47] —, *Affine varieties with equivalent cylinders*, J. Algebra, 251 (2002), pp. 295–307.
- [48] —, *Non-extendable isomorphisms between affine varieties*, J. Pure Appl. Algebra, 172 (2002), pp. 285–291.
- [49] V. SRINIVAS, *On the embedding dimension of an affine variety*, Math. Ann., 289 (1991), pp. 125–132.
- [50] T. TOM DIECK, *Homology planes without cancellation property*, Arch. Math. (Basel), 59 (1992), pp. 105–114.
- [51] A. VAN DEN ESSEN, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, vol. 190 of Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [52] A. VAN DEN ESSEN AND P. VAN ROSSUM, *Triangular derivations related to problems on affine  $n$ -space*, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), pp. 1311–1322 (electronic).
- [53] J. WILKENS, *On the cancellation problem for surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326 (1998), pp. 1111–1116.
- [54] D. WRIGHT, *On the Jacobian conjecture*, Illinois J. Math., 25 (1981), pp. 423–440.



## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions une classe d'hypersurfaces de  $\mathbf{C}^3$ , dites *hypersurfaces de Danielewski*. Ce sont les hypersurfaces  $X_{Q,n}$  définies par une équation de la forme  $x^n y = Q(x, z)$  avec  $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$  et  $\deg_z(Q(x, z)) \geq 2$ . Nous établissons leurs classifications complètes à isomorphisme près, et à équivalence via un automorphisme de  $\mathbf{C}^3$  près. Pour cela, nous introduisons le concept de forme standard et montrons que toute hypersurface de Danielewski est isomorphe, par un procédé algorithmique, à une hypersurface sous forme standard. Cette terminologie est justifiée par le fait que tout isomorphisme entre deux formes standards s'étend en un automorphisme de l'espace ambiant (ce qui n'est pas vrai pour des hypersurfaces de Danielewski quelconques).

Nous étudions aussi les problèmes de l'équivalence stable et de l'équivalence analytique. Nous construisons notamment des exemples de polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}[x, y, z]$  pour lesquels il n'existe aucun automorphisme algébrique de  $\mathbf{C}[x, y, z]$  qui envoie  $P$  sur  $Q$ , bien que ces polynômes soient équivalents via un automorphisme de  $\mathbf{C}[x, y, z, w]$ .

La plupart de ces résultats reposent sur la description précise, grâce aux techniques développées par Makar-Limanov, des dérivations localement nilpotentes sur les algèbres des fonctions régulières des hypersurfaces  $X_{Q,n}$ .

Mots clés : surfaces de Danielewski, hypersurfaces de Danielewski, polynômes équivalents, problème de l'équivalence stable, équivalence analytique, dérivations localement nilpotentes, automorphismes polynomiaux.