



**HAL**  
open science

**Contribution à l'analyse statistique des mesures en  
chambre réverbérante à brassage de modes.  
Applications à la détermination de l'efficacité de  
brassage et de l'incertitude de mesure dans un contexte  
CEM et radiofréquences**

Christophe Lemoine

► **To cite this version:**

Christophe Lemoine. Contribution à l'analyse statistique des mesures en chambre réverbérante à brassage de modes. Applications à la détermination de l'efficacité de brassage et de l'incertitude de mesure dans un contexte CEM et radiofréquences. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. INSA de Rennes, 2008. Français. NNT : . tel-00336456

**HAL Id: tel-00336456**

**<https://theses.hal.science/tel-00336456>**

Submitted on 4 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D08-07

# THÈSE

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE RENNES

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes

Mention : Electronique

et soutenue publiquement par

**CHRISTOPHE LEMOINE**

École Doctorale Matisse

INSTITUT D'ELECTRONIQUE ET DE TÉLÉCOMMUNICATIONS DE RENNES

Université Européenne de Bretagne

Titre de la thèse :

**CONTRIBUTION À L'ANALYSE STATISTIQUE DES MESURES  
EN CHAMBRE RÉVERBÉRANTE À BRASSAGE DE MODES  
APPLICATIONS À LA DÉTERMINATION  
DE L'EFFICACITÉ DE BRASSAGE ET DE L'INCERTITUDE  
DE MESURE DANS UN CONTEXTE CEM ET RADIOFRÉQUENCES**

Soutenue le 16 juillet 2008, devant le jury :

Président :	Françoise PALADIAN	Professeur, Univ. de Clermont-Ferrand
Rapporteurs :	Paolo CORONA	Professeur, Univ. de Naples
	Bernard DÉMOULIN	Professeur, Univ. de Lille
Directeur de thèse :	M'hamed DRISSI	Professeur, INSA de Rennes
Co-encadrant :	Philippe BESNIER	Chargé de Recherche CNRS, HdR
Examineurs :	Bastiaan MICHIELSEN	Ingénieur de Recherche (ONERA)
	Fabien MANGEANT	Ingénieur de Recherche (EADS)
	Daniel THOUROUDE	Professeur, Univ. de Rennes 1
Membre invité :	Flavio CANAVERO	Professeur, Politecnico di Torino



**Titre de la thèse :**

Contribution à l'analyse statistique des mesures en chambre réverbérante à brassage de modes. Applications à la détermination de l'efficacité de brassage et de l'incertitude de mesure dans un contexte CEM et radiofréquences.

Thèse de doctorat soutenue à l'INSA de Rennes en 2008.

N° d'ordre : D08-07

*Mention* : Electronique.

---

**Résumé :**

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement statistique des relevés de mesures en chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM). Dans un premier temps, nous nous intéressons aux lois de distribution des mesures de champ et de puissance, relevées au sein du volume utile, dans la situation d'une cavité sur-dimensionnée. Sur une base expérimentale, nous mettons en évidence des écarts significatifs entre le modèle de cavité idéale et la distribution réelle des mesures, en fonction de la dimension du récepteur. Cette première phase s'appuie sur des outils statistiques particulièrement bien adaptés aux lois de distribution que l'on étudie.

Dans un second temps, nous développons un modèle d'estimation de l'efficacité de brassage, mécanique et électronique, simple à mettre en oeuvre, et permettant une meilleure exploitation du brassage des modes. La démarche normative actuelle s'avère très insuffisante pour déterminer le nombre d'échantillons indépendants dont on dispose réellement. Notre méthode s'appuie sur des concepts statistiques largement adoptés dans d'autres disciplines telles que la finance, la climatologie, etc. De nombreuses expérimentations viennent valider la démarche que nous proposons.

Dans un troisième temps, nous présentons quelques applications des résultats de cette thèse dans un contexte CEM (compatibilité électromagnétique) et radiofréquences. Les résultats issus de cette thèse permettent notamment d'adapter et optimiser les protocoles d'essais répondant aux exigences de l'utilisateur en terme d'incertitude de mesure pour de multiples applications. Nous montrons par exemple que le gabarit normatif de calibrage d'une CRBM peut évoluer vers un gabarit plus réaliste. Par ailleurs, que ce soit pour la caractérisation d'antennes (efficacité, gain de diversité, etc.) ou la simulation de canaux de propagation réels, une meilleure maîtrise des lois de distribution et de l'indépendance des mesures apporte une précision accrue de l'essai.

**Mots-clés :**

CEM, chambre réverbérante, efficacité de brassage, lois de distribution, mesure d'antennes.

---

**Jury :**

Président :	Françoise PALADIAN	Professeur, Univ. de Clermont-Ferrand
Rapporteurs :	Paolo CORONA	Professeur, Univ. de Naples
	Bernard DÉMOULIN	Professeur, Univ. de Lille
Directeur de thèse :	M'hamed DRISSI	Professeur, INSA de Rennes
Co-encadrant :	Philippe BESNIER	Chargé de Recherche CNRS, HdR
Examineurs :	Bastiaan MICHIELSEN	Ingénieur de Recherche (ONERA)
	Fabien MANGEANT	Ingénieur de Recherche (EADS)
	Daniel THOUROUDE	Professeur, Univ. de Rennes 1
Membre invité :	Flavio CANAVERO	Professeur, Politecnico di Torino

Thèse soutenue à l'INSA de Rennes, le 16 juillet 2008.

---

Thèse réalisée à l'IETR (Institut d'Électronique et de Télécommunications de Rennes), UMR CNRS 6164, et financée par la Région Bretagne.

**Thesis title:**

Contribution to the statistical analysis of measurements data in mode-stirred reverberation chamber. Applications for the evaluation of stirring efficiency and measurements uncertainty in the context of radiofrequencies and EMC.

**Abstract:**

This thesis deals with the statistical behaviour of the measurements collected in a mode-stirred reverberation chamber (RC). At first we carry out an extensive study of distribution functions of the power and the field measurements inside a working volume, in the case of an overmoded cavity. Based on experiments, significant differences are highlighted between the ideal cavity model and the actual measurements distribution as a function of the antenna size. These results are obtained using statistical methods that are particularly well-adapted to RC measurements.

Secondly, a model is developed in order to estimate both mechanical and electronic stirring efficiency. This model is easy to implement and provides more efficient use of RC, whereas the current normative method remains insufficient in evaluating the actual number of independent samples in a measurement series. Our approach is based on statistical concepts that are largely adopted in other research areas such as finance, climatology... and is also validated by a rigorous experimental work.

Finally, some applications of these results are described in the context of radiofrequencies and electromagnetic compatibility. This work is particularly useful in optimising the experimental protocol definition in order to be consistent with the user requirements in terms of measurements uncertainty. With these results, the normative part, which deals with the calibration of an RC, can be changed in order to require more realistic limitations. Moreover, for both antenna characterization (efficiency, diversity gain...) and propagation channels simulation, our work leads to a better control of distribution functions as well as the measurement independency, which significantly improves the measurement accuracy.

**Key words:**

antenna measurements, EMC, distribution functions, reverberation chamber, stirring efficiency.

---



# Remerciements

Au sein du laboratoire IETR, il y a de nombreuses personnes que je tiens à remercier. Tout d'abord, M. Daniel Thouroude, Directeur de l'IETR, pour son accueil au laboratoire, et la confiance qu'il m'a accordée dans la réalisation de cette thèse au sein du laboratoire. Ensuite, je remercie M. M'hamed Drissi de m'avoir accompagné pendant ses trois années en tant que Directeur de thèse. Je tiens évidemment à remercier M. Philippe Besnier de m'avoir confié ce projet de thèse, que j'ai eu plaisir à réaliser depuis le début de cette aventure. La réussite d'une thèse est liée à plusieurs facteurs, dont en particulier la qualité de l'encadrement. Humainement et scientifiquement, je mesure la chance de pouvoir travailler avec Philippe. J'ai bénéficié à la fois d'une autonomie suffisante afin de pouvoir concrétiser mon propre travail de thèse, et d'un suivi régulier permettant de riches discussions ainsi qu'une progression régulière sur ce projet de recherche. Cette thèse est une excellente expérience pour moi.

Au cours de ces trois années de thèse, j'ai échangé avec plaisir avec de nombreuses personnes du laboratoire, aussi bien à l'Université de Rennes 1 qu'à l'INSA, je ne pourrais toutes les citer. Je dirai simplement que l'IETR est pour moi un lieu de vie et de travail particulièrement agréable. Entre autres, merci à M. Gilles Picoult pour son aide dans la réalisation de petites antennes, merci à Mme Ghislaine Denis pour le soutien administratif ainsi que Mlle Yolande Sambin. Merci aussi à M. Guy Grunfelder pour sa disponibilité. Merci également à M. Amable Blain qui a contribué à ce travail au cours d'un été dans le cadre d'un stage. Merci enfin à celles et ceux, enseignants, chercheurs, personnels, doctorants, stagiaires, qui participent à l'ambiance conviviale qui règne au laboratoire IETR.

Je tiens à remercier les nombreux membres de la communauté CRBM que j'ai croisés à travers différents colloques et réunions de travail, et qui m'ont soutenu au cours de ces trois années. Je pense en particulier au groupe Picaros.

Merci aussi à chaque membre de mon jury, qui a accepté d'examiner mon travail et a fait le déplacement pour assister à ma soutenance de thèse.

Je termine mes remerciements par une pensée profonde à ma famille, mes amis, "mes" chevaux, qui m'accompagnent et me permettent de mener à bien ce projet de recherche.





# Table des matières

Page de garde	i
Résumé	iii
Remerciements	vii
Table des matières	xiii
<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
La compatibilité électromagnétique	3
La chambre réverbérante	7
Etat de l'art	19
Objectifs et plan de la thèse	25
<b>I ANALYSE AVANCÉE DES LOIS DE DISTRIBUTION EXPÉRIMENTALES</b>	<b>29</b>
<b>1 Les lois de probabilité admises</b>	<b>31</b>
<b>1.1 Les distributions pour une CRBM idéale</b>	<b>31</b>
1.1.1 Les lois de distribution sous leur forme classique . . . . .	32
1.1.2 Lois dans le cas de mesures rapportées à la moyenne . . . . .	36
1.1.3 Ecriture simplifiée . . . . .	36
<b>1.2 Le modèle idéal considéré comme une référence</b>	<b>38</b>
<b>1.3 Remise en question du modèle idéal par l'expérience</b>	<b>42</b>
1.3.1 Décorrélacion des mesures . . . . .	42
1.3.2 Analyse de mesures de champ . . . . .	43
1.3.3 Analyse de mesures de puissance . . . . .	46
1.3.4 Conclusion préliminaire . . . . .	46
<b>2 Rejet partiel du modèle idéal à l'aide de tests d'ajustement adaptés</b>	<b>49</b>
<b>2.1 Tests d'ajustement à une loi de probabilité</b>	<b>49</b>
2.1.1 Puissance d'un test d'ajustement . . . . .	49
2.1.2 Le test du $\chi^2$ . . . . .	50

2.1.3	Le test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	51
2.1.4	Le test de Anderson-Darling . . . . .	52
<b>2.2</b>	<b>Valeurs critiques et estimation des paramètres inconnus</b>	<b>53</b>
2.2.1	Le critère de Massey : à proscrire . . . . .	53
2.2.2	Valeurs critiques adaptées aux mesures en CRBM . . . . .	54
2.2.2.1	Test de la loi exponentielle . . . . .	54
2.2.2.2	Test de la loi de Rayleigh . . . . .	59
2.2.3	Estimation des paramètres inconnus de la distribution . . . . .	60
2.2.3.1	Principe de l'estimation . . . . .	61
2.2.3.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	62
2.2.3.3	Estimateur $\hat{\theta}$ de la loi exponentielle . . . . .	63
2.2.3.4	Estimateur $\hat{\theta}$ de la loi de Rayleigh . . . . .	63
<b>2.3</b>	<b>Application à nos mesures</b>	<b>63</b>
2.3.1	Résultat des tests sur les mesures de champ . . . . .	64
2.3.2	Résultat des tests sur les mesures de puissance . . . . .	70
2.3.3	Conclusion relative aux lois généralement admises . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Loi de Weibull pour des antennes de petite dimension</b>	<b>75</b>
<b>3.1</b>	<b>Loi de Weibull</b>	<b>75</b>
3.1.1	Définition . . . . .	75
3.1.2	Cas particuliers : lois de Rayleigh et exponentielle . . . . .	76
3.1.3	Propriétés statistiques . . . . .	77
3.1.3.1	Loi de distribution de la v.a. $X^2$ . . . . .	78
3.1.3.2	Loi de distribution de la v.a. $\sqrt{X}$ . . . . .	78
3.1.3.3	Loi de distribution de la v.a. $\frac{X}{\langle X \rangle}$ . . . . .	79
3.1.4	Relation remarquable . . . . .	79
<b>3.2</b>	<b>Tests d'ajustement</b>	<b>80</b>
3.2.1	Estimation des paramètres de la loi de Weibull . . . . .	80
3.2.2	Valeurs critiques des tests KS et AD d'ajustement à une loi de Weibull	81
<b>3.3</b>	<b>Validation expérimentale pour les mesures de champ</b>	<b>82</b>
3.3.1	Résultat des tests d'ajustement . . . . .	82
3.3.2	Evolution des paramètres de la loi en fonction de la fréquence . . . . .	84
3.3.3	Evolution du rapport écart type / moyenne en fonction de la fréquence	87
<b>3.4</b>	<b>Validation expérimentale pour les mesures de puissance</b>	<b>89</b>
3.4.1	Résultat des tests d'ajustement . . . . .	89
3.4.2	Evolution des paramètres de la loi en fonction de la fréquence . . . . .	93
3.4.3	Evolution du rapport écart type / moyenne en fonction de la fréquence	94
<b>4</b>	<b>Conclusions sur les lois de distribution</b>	<b>97</b>

## II INDÉPENDANCE DES MESURES ET ÉVALUATION DE L'EFFICACITÉ DE BRASSAGE 101

<b>5</b>	<b>Méthode actuelle d'évaluation de l'indépendance statistique des mesures en CRBM</b>	<b>103</b>
<b>5.1</b>	<b>Le théorème central limite</b>	104
5.1.1	Loi normale et quantile . . . . .	104
5.1.2	Enoncé du TCL . . . . .	105
5.1.3	Application aux mesures en CRBM . . . . .	105
<b>5.2</b>	<b>Critère actuel de décorrélation</b>	106
5.2.1	Méthode normative . . . . .	106
5.2.2	Non prise en compte de la distribution du coefficient de corrélation . . .	107
5.2.3	Limites de la corrélation linéaire . . . . .	109
<b>5.3</b>	<b>Contrôle de l'estimation de la corrélation</b>	110
5.3.1	Approximation gaussienne . . . . .	110
5.3.2	Contrôle de l'estimation par un intervalle de confiance . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Taille effective d'un échantillon estimée par un modèle autorégressif</b>	<b>115</b>
<b>6.1</b>	<b>Présentation des modèles autorégressifs</b>	116
6.1.1	Formulation générale . . . . .	116
6.1.2	Propriétés du modèle à l'ordre 1 . . . . .	116
6.1.3	Propriétés du modèle à l'ordre 2 . . . . .	117
<b>6.2</b>	<b>Calcul du nombre d'échantillons effectifs</b>	117
6.2.1	Concept de taille effective ou <i>effective sample size</i> (ESS) . . . . .	117
6.2.2	Estimation de l'ESS à l'ordre 1 . . . . .	119
6.2.3	Estimation de l'ESS à l'ordre 2 . . . . .	121
<b>6.3</b>	<b>Validation expérimentale</b>	123
6.3.1	Mesures de puissance en brassage mécanique . . . . .	123
6.3.2	Mesures de champ en brassage mécanique . . . . .	127
6.3.3	Mesures de puissance en brassage fréquentiel . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Vérification de la relation de passage de l'ESS à l'incertitude de mesure via l'application du théorème central limite</b>	<b>135</b>
<b>7.1</b>	<b>Protocole expérimental</b>	135
7.1.1	Effet de la corrélation sur l'incertitude des mesures . . . . .	135
7.1.2	Principe de l'essai à réaliser . . . . .	137
7.1.3	Choix du protocole de mesures . . . . .	138
7.1.3.1	Choix du nombre $N$ minimum d'échantillons indépendants . . . . .	138
7.1.3.2	Choix du nombre $S$ de séries pour le calcul expérimental de l'écart type . . . . .	140

<b>7.2</b>	<b>Brassage fréquentiel</b>	141
7.2.1	Protocole expérimental . . . . .	141
7.2.2	Ecart type de la moyenne de $N$ mesures . . . . .	142
7.2.3	Ecart type du maximum de $N$ mesures . . . . .	143
<b>7.3</b>	<b>Brassage mécanique</b>	147
7.3.1	Protocole expérimental . . . . .	147
7.3.2	Résultat sur un tour complet du brasseur . . . . .	147
7.3.3	Etude pour différentes subdivisions du brasseur . . . . .	150
<b>7.4</b>	<b>Conclusions</b>	152
<b>III APPLICATIONS</b>		<b>155</b>
<b>8</b>	<b>Analyse du gabarit normatif d'uniformité statistique du champ et proposition d'évolution</b>	<b>157</b>
8.1	Protocole de calibrage d'une chambre réverbérante	158
8.2	Distribution de $\sigma_{dB}$	159
8.2.1	Méthode d'évaluation de la distribution de $\sigma_{dB}$ . . . . .	159
8.2.2	Distribution de $\sigma_{dB}$ pour une cavité idéale . . . . .	160
8.2.3	Distribution de $\sigma_{dB}$ pour une cavité réelle . . . . .	161
8.3	Evolution progressive du gabarit	163
8.3.1	Prise en compte des lois de distribution des mesures pour une cavité idéale . . . . .	163
8.3.2	Prise en compte de la loi de Weibull . . . . .	165
8.3.3	Correction à basse fréquence compte tenu du faible nombre d'échantillons indépendants . . . . .	166
8.3.4	Tolérance du gabarit . . . . .	168
8.4	Préconisations	169
<b>9</b>	<b>Caractérisation d'antennes</b>	<b>171</b>
9.1	Efficacité d'antennes	171
9.1.1	Définition . . . . .	171
9.1.2	Méthode de mesure . . . . .	173
9.1.3	Résultats expérimentaux . . . . .	175
9.2	Gain de diversité	177
9.2.1	Définition . . . . .	177
9.2.2	Protocole expérimental . . . . .	179
9.2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	180
9.3	Conclusion	181
<b>10</b>	<b>Simulation expérimentale de canaux de propagation réels</b>	<b>183</b>

<b>10.1 Bande de cohérence</b>	<b>184</b>
10.1.1 Définition . . . . .	184
10.1.2 Utilisation de modèle AR pour évaluer la bande de cohérence . . . . .	185
10.1.3 Modification de la bande de cohérence par chargement de la cavité . . .	186
<b>10.2 Canal de Rice</b>	<b>189</b>
10.2.1 Définition . . . . .	189
10.2.2 Méthode statistique d'estimation du canal de Rice créé en CRBM . . .	190
10.2.3 Résultats expérimentaux . . . . .	191
<b>10.3 Conclusion</b>	<b>194</b>
<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>197</b>
<b>Conclusion</b>	<b>199</b>
<b>Perspectives</b>	<b>203</b>
<b>Liste des publications de l'auteur</b>	<b>207</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>209</b>
<b>A Lois de distribution dans le cas de mesures rapportées à la moyenne</b>	<b>211</b>
<b>B Démonstration de la relation (6.17)</b>	<b>217</b>
<b>C Détermination de <math>N'</math> pour différentes sections parcourues par le bras-</b>	
<b>seur</b>	<b>219</b>
<b>C.1 Division en 2 moitiés</b>	<b>219</b>
<b>C.2 Division en 4 quarts</b>	<b>220</b>
<b>C.3 Division en 8 huitièmes</b>	<b>223</b>
<b>D Détermination de <math>N''</math> pour différentes subdivisions de la bande de fré-</b>	
<b>quences [690 MHz ; 710 MHz]</b>	<b>227</b>
<b>D.1 Division en 2 moitiés</b>	<b>227</b>
<b>D.2 Division en 4 quarts</b>	<b>229</b>
<b>D.3 Division en 8 huitièmes</b>	<b>230</b>
<b>E Détermination de <math>N'</math> pour différentes sections parcourues par le bras-</b>	
<b>seur constitué d'une seule pale</b>	<b>235</b>
<b>E.1 Sur un tour complet</b>	<b>235</b>
<b>E.2 Division en 4 quarts</b>	<b>237</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>239</b>



# INTRODUCTION





# La compatibilité électromagnétique

Depuis plus de 30 ans, dans les pays développés, la présence de l'électronique s'est généralisée dans la vie courante. De nos jours, nos automobiles peuvent être difficilement examinées sans l'aide d'équipements informatiques adaptés, puisque l'électronique y est devenue omniprésente. Le garagiste d'aujourd'hui est voué à l'échec s'il ne dispose pas de compétences lui permettant d'interagir avec l'électronique embarquée dans les véhicules. Dans l'aéronautique, les commandes de vol électriques se sont désormais généralisées depuis leur première apparition avec le Concorde. Outre une réduction de la masse de l'aéronef, l'intégration de l'électronique apporte une plus grande aisance dans le pilotage et accroît la sécurité de l'appareil. Dans un autre domaine, l'arrivée des téléphones mobiles sur le marché apparaît comme une petite révolution sociale. En France, le nombre de téléphones portables dépasse aujourd'hui le nombre de téléphones fixes.

Un équipement électronique en fonctionnement, même très simple, engendre une pollution électromagnétique (EM) dans l'environnement qui l'entoure. Dans les activités pyrotechniques, *e.g.* la fabrication des moteurs de fusée, de sévères précautions sont prises afin d'éviter la présence d'équipements électroniques susceptibles d'amorcer la combustion. A l'hôpital, il est formellement demandé d'éteindre son téléphone portable car sa présence pourrait entraîner un dysfonctionnement des appareils de santé. Cette notion de compatibilité électromagnétique (CEM) est omniprésente et si l'on ne veille pas à la vérifier, on ne doit pas s'étonner que les appareils ne fonctionnent pas correctement. Imaginons un instant que le changement de station de radio FM engendre le déclenchement de l'airbag dans l'automobile... La compatibilité électromagnétique peut même s'étendre au-delà de l'électronique. Il arrive parfois qu'une exploitation agricole prenne feu suite à un incendie dans un silo à grain, et cela à cause d'une décharge électrostatique [1] ! L'étude de l'impact des ondes électromagnétiques sur la santé rentre aussi dans le cadre de la CEM.

Les dimensions des composants électroniques élémentaires ne cessent de se réduire à cause des contraintes d'intégration et grâce aux progrès technologiques. Puisque les niveaux des signaux utiles diminuent et les fréquences de fonctionnement augmentent, les critères de fiabilité des équipements deviennent de plus en plus sévères. Le tout électronique conduit à une densification des signaux et engendre de plus en plus de perturbations potentielles. Prenons l'exemple d'une automobile. Les voitures récentes disposent du démarrage électronique, d'un ordinateur de bord, d'un GPS (*Global Positioning System*), de nombreux airbags, de capteurs de pluie, de l'ABS (de l'allemand *Antiblockiersystem*), de l'ESP (*Electronic Stability Program*) pour améliorer l'équilibre dans les virages, etc.

En aéronautique, les tentatives sont nombreuses pour remplacer les kilomètres de câbles permettant d'alimenter les équipements électroniques dont le nombre ne fait que croître. Mais alors des problèmes de compatibilité électromagnétique apparaissent et rendent cette tâche plus complexe. Dans le cas de rayonnements intempestifs à l'intérieur d'un avion, le simple blindage EM en acier est efficace mais peu intéressant puisque l'aéronautique est sans cesse à la recherche de réduction de la masse en utilisant de nouveaux matériaux composites.

Les recherches pour étudier et améliorer la CEM des systèmes sont primordiales et les intérêts sont donc croissants. La compatibilité électromagnétique peut se définir comme l'étude des interactions entre les sources de perturbations électromagnétiques (naturelles, industrielles...) et les victimes (humains, systèmes électroniques...). L'objectif de la CEM est d'identifier les différentes pollutions électromagnétiques mises en jeu, pour ensuite proposer des solutions adaptées permettant à chaque système de fonctionner normalement. Les études en CEM s'intéressent à deux grands axes complémentaires. D'une part, on distingue l'émissivité d'un objet quelconque, c'est-à-dire les perturbations EM induites par le fonctionnement de cet objet. D'autre part, on s'intéresse à la susceptibilité (ou immunité) de cet objet, c'est-à-dire que l'on cherche à connaître les types de pollution EM qui le mettraient en défaut (dysfonctionnement, panne...). Les perturbations électromagnétiques peuvent être soit conduites à travers un câble, soit rayonnées dans un milieu quelconque, par exemple dans l'air.

Les équipements devenant de plus en plus complexes, la principale difficulté de la CEM est de pouvoir réaliser ou simuler un essai qui soit représentatif de la situation réelle. La caractérisation d'un équipement électronique isolé est plus simple, mais demeure néanmoins éloigné du cas concret où l'on intègre cet équipement dans son environnement d'utilisation. Les simulations numériques permettent de cartographier l'émission EM d'un objet, mais la complexité des systèmes rend de plus en plus délicate cette voie d'investigation. On préfère d'ailleurs représenter un équipement par un modèle équivalent simplifié mettant en évidence les principales caractéristiques de pollution EM. La simulation numérique est très utile dans la phase de conception d'un équipement électronique. Cependant, la phase de validation nécessite des essais réels pour certifier la conformité des appareils électroniques. Deux principaux types d'essais sont donc menés : en émissivité et en susceptibilité, et dans chaque cas, on distingue les deux types de perturbations : conduites et rayonnées.

Pour la réalisation des essais, la communauté CEM est sans cesse à la recherche de procédures plus économiques, plus fiables, et reproductibles. L'exigence des directives européennes, et plus généralement des normes internationales ou des cahiers des charges constructeur, en aéronautique ou automobile par exemple, rend indispensable la nécessité de rechercher des méthodes de mesure performantes. En outre, les industries sont toujours intéressées par une réduction des coûts des essais menés pour certifier la conformité de leurs équipements. Les industries automobiles et aéronautiques réalisent des tests d'immunités sous champ fort. Dans l'automobile par exemple, les normes exigent de soumettre le véhicule à un champ électrique de 30 V/m sur une bande de fréquence allant de 30 MHz

à 1 GHz, couvrant par exemple la bande de la radio FM et la bande basse du GSM. Toutefois, la plupart des constructeurs tentent de dépasser cette contrainte en souhaitant des essais sous un champ bien plus élevé (100 V/m), susceptible d'être rencontré à proximité de puissants émetteurs. L'enjeu économique est énorme car le risque d'une défaillance d'un équipement pour un problème de CEM peut nuire à la sécurité, et par conséquent à l'image de la société. La chambre anéchoïque (CA) est un moyen d'essais utilisé depuis de nombreuses décennies afin de pratiquer des mesures pour des études CEM. Quant à la chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM), elle est apparue comme une alternative à la CA, bien qu'elle soit encore peu exploitée actuellement. En particulier pour les essais en compatibilité électromagnétique, la chambre réverbérante présente des caractéristiques particulièrement séduisantes et est l'objet principal de cette thèse.

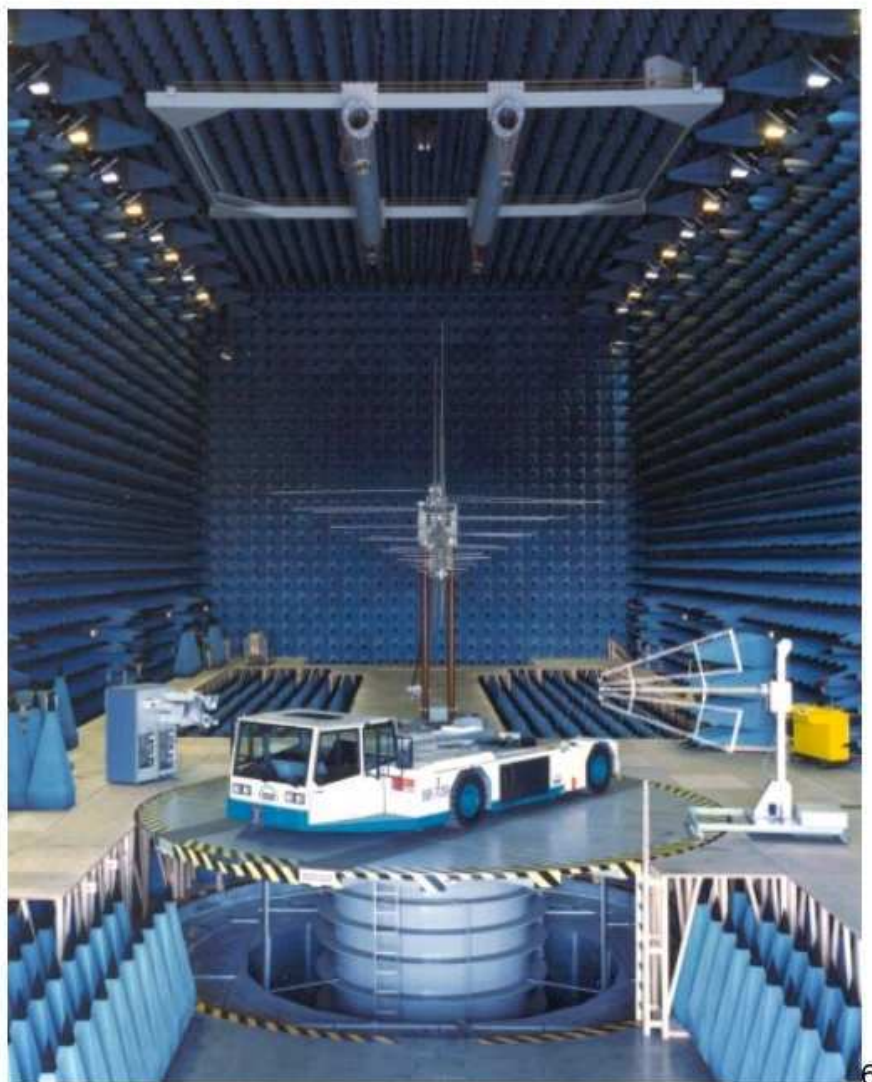


# La chambre réverbérante

## **Avant la CRBM, la chambre anéchoïque**

La chambre anéchoïque est une salle d'expérimentation souvent parallélépipédique dont les murs, le sol et le plafond sont totalement absorbants aux ondes électromagnétiques. Il en existe aussi dont le but est d'absorber les ondes sonores, c'est pourquoi on les qualifie souvent de chambre sourde. Si le plancher n'est pas couvert d'absorbants, il peut être alors réfléchissant et dans ce cas on parle plutôt de chambre semi-anéchoïque. Les CA sont utilisées principalement comme sites de mesure d'antennes (local le plus souvent en bois), ou bien comme moyens d'essais CEM (local faradisé donc entièrement métallique). En CEM, les CA sont utilisées aussi bien en qualification militaire que pour les matériels industriels et civils (Fig. 1), beaucoup plus souvent en Europe depuis 1996, date de mise en application obligatoire de la directive 89/336/CEE. Aux Etats-Unis, la CA est utilisée depuis plusieurs décennies, à l'origine non pas pour des besoins CEM mais pour des mesures en acoustique. Pour les mesures de perturbations conduites (généralement en-dessous de 30 MHz), la CA n'est pas forcément nécessaire ni même préconisée par les documents normatifs, mais elle permet cependant de réaliser des mesures plus reproductibles en évitant les réflexions des ondes rayonnées vers les parois, pouvant alors se recoupler par induction sur les câbles de mesures en conduction.

L'isolement de l'essai avec l'extérieur de la cavité est un avantage indéniable pour, d'une part, ne pas être pollué par l'environnement EM et, d'autre part, pour ne pas générer des ondes EM susceptibles de perturber l'environnement EM extérieur. Le principal atout d'une CA réside dans la maîtrise du signal électromagnétique. Par exemple, dans le cas d'un essai de susceptibilité rayonnée d'un appareil, la CA assure le contrôle en terme de polarisation (direction du champ électrique) et en terme de direction de l'onde émise. L'absence de réflexions assure l'excellente qualité du signal souhaité. Par contre, puisqu'une grande partie de l'énergie est perdue par absorption au niveau des parois de la cage, l'analyse sous champs forts nécessite des amplificateurs puissants, et coûteux. Par ailleurs, du fait de l'absence de réflexions, seulement une partie de l'objet sous test (OST) est affectée par le rayonnement. En chambre anéchoïque, la susceptibilité d'un OST va dépendre de la polarisation de l'onde ainsi que de la directivité de l'objet. Par conséquent, un essai complet consiste à faire tourner l'OST ce qui peut nécessiter un investissement lourd dans le cas de gros objets tels qu'une automobile ou un avion.



**FIG. 1:** Chambre anéchoïque utilisée pour des essais CEM sur véhicules (FSA, Unterschleissheim, Allemagne, <http://www.fsant.de>).

### Potentiel des chambres réverbérantes

La chambre réverbérante à brassage de modes (Fig. 2) se distingue radicalement de la chambre anéchoïque. La CRBM est constituée de parois métalliques réfléchissantes (acier, aluminium) et n'est autre qu'une cage de Faraday, qui isole donc elle aussi son environnement EM de l'environnement extérieur. Dans le cas de la CRBM de l'IETR, il s'agit d'une ancienne CA dont on a retiré tous les absorbants. Par conséquent, au lieu de souhaiter l'absence totale de réflexions sur les parois de la chambre, on s'intéresse à exploiter au maximum les réflexions des ondes EM. La mention « à brassage de modes » est liée à la possibilité de modifier les conditions aux limites du champ EM. Cela revient à disposer de plusieurs cages de Faraday de dimensions différentes. Ce brassage peut d'une part être réalisé en modifiant légèrement la fréquence du signal émis dans la cavité (brassage fréquentiel ou électronique) ; il peut aussi d'autre part s'effectuer à l'aide d'un objet supplémentaire de géométrie quelconque, installé dans la chambre, et que l'on déplace le plus souvent par rotation : le brasseur de modes. Nous parlerons dans ce cas de brassage



**FIG. 2:** Chambre réverbérante utilisée pour des essais CEM sur véhicules (Renault SA, Guyancourt, France).

mécanique. Plus simplement, le fait de déplacer l'objet sous test, par exemple une simple antenne en réception, en différents points de la chambre, est équivalent à un brassage mécanique.

Son principe étant fondamentalement différent, les avantages de la chambre réverbérante se distinguent nettement de ceux de la CA. Le coût d'une CRBM est moindre, puisque dans le cas d'une CA ce qui coûte le plus cher sont les absorbants. De plus, les pertes d'énergie sont très inférieures du fait de l'absence d'absorbants. Dès lors, il n'est pas particulièrement coûteux de générer un champ fort, *e.g.* 100 V/m, car le niveau d'amplification nécessaire devient raisonnable (de l'ordre de quelques dizaines de watts). Ajouté à cela, dans le cas d'essais en susceptibilité rayonnée et grâce aux réflexions multiples des ondes EM, l'objet sous test « baigne » entièrement dans l'environnement électromagnétique généré. Il n'est plus alors nécessaire de déplacer l'objet sous test comme dans le cas de la CA afin de le tester intégralement. Au contraire, la CRBM est beaucoup plus simple dans son utilisation puisqu'au lieu de tourner l'OST, il suffit de changer la fréquence de l'essai ou de faire tourner le brasseur mécanique. Dans un autre domaine, la chambre réverbérante séduit également les antennistes puisqu'elle s'avère être un formidable moyen de caractérisation d'antennes. Nous aurons l'occasion d'en reparler dans la suite de ce document avec des illustrations précises. Signalons aussi que la CRBM offre des possibilités particulièrement attractives dans le cadre de la simulation de canaux de propagation.

La possibilité de réaliser des essais de compatibilité électromagnétique en chambre réverbérante, comme alternative aux techniques de mesure classiques (CA), a été reconnue assez récemment dans la norme CEI 61000-4-21 [2], publiée en août 2003. L'élaboration de normes pour les mesures en CRBM vont conduire progressivement à une plus large



utilisation de ce moyen d'essai. D'ailleurs aujourd'hui, les recherches délaissent progressivement l'exploitation de la CA au profit de la chambre réverbérante. Cette dernière est apparue dans les années 60 mais n'a connu un réel essor que depuis les années 90 notamment aux USA. Même si sa réalisation est simple et son coût relativement peu onéreux, les principes physiques qui régissent son fonctionnement sont plus complexes que ceux de la CA. L'utilisateur d'une CRBM a besoin de connaître parfaitement ses caractéristiques non seulement dans le but d'interpréter correctement les résultats de mesures mais aussi de pouvoir optimiser les performances de l'essai, en terme d'incertitude par exemple. Cela nécessite par exemple une bonne compréhension du comportement du champ EM à l'intérieur du volume utile de la cavité. Actuellement, même si de nombreux progrès ont été réalisés depuis les années 90 (cf. Etat de l'art), les normes internationales ne fournissent que des indications relativement peu précises en terme d'exploitation de la CRBM. Par exemple, peu d'éléments sont donnés sur la géométrie optimale du brasseur à employer, ou bien sur la détermination d'échantillons de mesure indépendants, ou encore sur le contrôle des incertitudes de mesure.

### Notion de modes

Oublions la CRBM un court instant et intéressons-nous à une simple cavité parallélépipédique, sans pertes pour le moment, pour rappeler les fondamentaux de la CRBM, en particulier la notion de modes électromagnétiques. Soient  $a$ ,  $b$  et  $d$  les trois dimensions de la cavité. La géométrie de la cavité permet la résolution analytique des équations de Maxwell, et donne accès au comportement des composantes cartésiennes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique.

Un mode qualifie l'état d'une onde stationnaire et est une solution des équations de Maxwell. Plus précisément, les modes d'une telle cavité sont fonctions propres de l'opérateur de Laplace et les valeurs propres sont appelées fréquences de résonance. Multipliée avec une fonction harmonique dans le temps et correspondante à la fréquence de résonance, une fonction propre devient solution de l'équation de Helmholtz et donc onde électromagnétique stationnaire. A toute fréquence le champ total est une combinaison linéaire de toutes les fonctions propres. Le mode qui domine le développement est généralement celui qui a la valeur propre la plus proche du  $k^2$  de l'excitation ( $k = 2\pi f/c$ ). Si les parois ont des pertes, cette dominance est modérée. Ainsi, avec une source soutenue, nous créons dans la cavité un champ qui est une combinaison linéaire de toutes les fonctions propres.

La résolution des équations de Maxwell donne une infinité de solutions, dénombrables, dépendant d'entiers  $m$ ,  $n$ , et  $p$ . Nous noterons de manière usuelle  $f$  la fréquence de l'onde considérée et  $\omega = 2\pi f$  la pulsation de l'onde. L'expression des composantes cartésiennes du champ électrique à la pulsation  $\omega$  s'écrit de la manière suivante pour les modes dits  $TE_{mnp}$  [3]:

$$\begin{cases} E_x = \frac{j\omega\mu}{k_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_z = 0 \end{cases} , \quad (1)$$

avec  $\epsilon$  la permittivité diélectrique du milieu intérieur de la cavité ( $= \epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$  pour l'air) et  $\mu$  la perméabilité magnétique ( $= \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$  pour l'air). La constante  $k_{mn}$  est utilisée ici pour alléger l'écriture et est donnée par :

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (2)$$

D'autres solutions existent, les modes  $\text{TM}_{mnp}$ , et s'écrivent :

$$\begin{cases} E_x = -\frac{1}{k_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{d} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_y = -\frac{1}{k_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{d} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \end{cases} \quad (3)$$

A cet ensemble de modes, on associe les valeurs propres suivantes dites fréquences de résonance :

$$f_{mnp} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}, \quad (4)$$

où  $c$  désigne la célérité de la lumière dans le vide. Pour simplifier les notations, nous désignerons par  $f_{0i}$  la séquence de ces fréquences de résonance. L'asymétrie de ces deux groupes de modes provient de la convention adoptée dans la théorie des lignes de transmission, dans laquelle l'axe de propagation des ondes EM est Oz. Ceci se traduit par la seule existence des modes suivants :

- ① Modes  $\text{TE}_{mnp}$  ou  $\text{TM}_{mnp}$  pour lesquels le produit  $m.n.p$  est non nul ;
- ② Modes  $\text{TE}_{0np}$  ou  $\text{TM}_{m0p}$  pour lesquels le produit  $m.n$  est nul et  $p \neq 0$  ;
- ③ Modes  $\text{TE}_{mn0}$  pour lesquels le produit  $m.n$  est non nul et  $p = 0$ .

En fonction des dimensions de la cavité, le premier mode, *i.e.* la première fréquence de résonance correspond au mode  $\text{TM}_{110}$ ,  $\text{TE}_{011}$ , ou  $\text{TE}_{101}$ . Comme nous l'indiquons plus loin, le nombre total de modes existant au-delà de la première fréquence de résonance, à une fréquence  $f_{mnp}$ , peut se calculer en dénombrant l'ensemble du triplet  $(m, n, p)$  jusqu'à atteindre  $f = f_{mnp}$ , sans oublier qu'au moins deux sur trois indices doivent être non nuls. Il faut également noter qu'il peut y avoir plusieurs modes pour une même fréquence de résonance. Cela est vrai par exemple pour tous les modes  $\text{TE}_{mnp}$  et  $\text{TM}_{mnp}$  avec  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,  $p \geq 1$ . Dans ce cas, on parle de modes dégénérés.

L'approximation de Weyl, valable pour des fréquences  $f$  relativement élevées [3], permet d'évaluer simplement le nombre de modes mis en jeu à la fréquence  $f$  :

$$N(f) = \frac{8\pi V}{3\lambda^3}, \quad (5)$$

Dans la relation (5), les paramètres  $V$  et  $\lambda$  désignent respectivement le volume de la cavité et la longueur d'onde  $\lambda = c/f$ . Nous pouvons remarquer une proportionnalité avec le volume de la cavité, et une augmentation très rapide avec la fréquence (en  $f^3$ ). La

densité de modes  $n(f)$  par unité de fréquence est exprimée comme suit :

$$n(f) = \frac{dN}{df} = \frac{8\pi V f^2}{c^3}, \quad (6)$$

Cette relation conduit aisément à l'expression de la densité de modes  $n_{MHz}(f)$  par MHz ou encore au nombre de modes  $N(\Delta f)$  existant dans une bande de fréquence  $\Delta f$ .

$$n_{MHz}(f) = 9.3 \times 10^{-7} V f_{MHz}^2, \quad (7)$$

$$N(\Delta f) = 9.3 \times 10^{-7} V f_{MHz}^2 \times \Delta f_{MHz}. \quad (8)$$

### Pertes et facteur de qualité

Nous avons vu que pour une cavité sans pertes le spectre des modes est discret, *i.e.* une résonance apparaît à une fréquence bien précise  $f_{mnp}$ . Cependant, les cavités dont on dispose sont constituées d'un matériau non infiniment conducteur, ce qui entraîne des pertes par conduction. Soient  $\sigma$  et  $\mu$  respectivement la conductivité et la perméabilité du métal. La résistance de surface  $R_s$  du matériau s'exprime en fonction de l'épaisseur de peau  $\delta_s$  de la paroi métallique :

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_s} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}, \quad (9)$$

où l'épaisseur de peau diminue lorsque la fréquence d'excitation de la cavité augmente :

$$\delta_s = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma f}}. \quad (10)$$

La puissance  $P$  dissipée correspondant aux pertes par conduction est proportionnelle à la résistance de surface  $R_s$  et s'écrit de la manière suivante où  $\vec{H}$  désigne le vecteur champ magnétique :

$$P = \frac{R_s}{2} \iint_S |\vec{H}|^2 dS, \quad (11)$$

avec  $S$  la surface de la paroi métallique de la cavité.

Le fait que le matériau ne soit pas infiniment conducteur ( $\sigma < \infty$ ) engendre des pertes d'énergie EM, et permet l'existence d'un mode sur une certaine largeur de bande  $\Delta f_{Q_i}$  autour de sa fréquence de résonance. De manière simplifiée, nous pouvons considérer qu'un mode de fréquence de résonance  $f_{0i}$  ne peut être excité qu'à l'intérieur de la bande de fréquence  $f_{0i} \pm \Delta f_{Q_i}/2$ . Ainsi, le spectre du mode n'est plus discret. En dehors de la bande  $f_0 \pm \Delta f_{Q_i}/2$ , la contribution du mode au champ électromagnétique total est négligeable. Au-delà d'une fréquence  $f$  d'excitation suffisante, plusieurs modes peuvent être excités en même temps de manière prépondérante, puisque les bandes de fréquence respectives commencent à se chevaucher.

La largeur de bande  $\Delta f_{Q_i}$  peut s'écrire simplement en fonction du facteur de qualité  $Q_i$  du mode  $i$ , qui caractérise les pertes d'énergie par conduction, relatives à ce mode :

$$\Delta f_{Q_i} = \frac{f_{0i}}{Q_i}. \quad (12)$$

Le facteur de qualité d'un mode est défini simplement par la relation suivante :

$$Q_i = 2\pi f_{0i} \frac{W_i}{P_i} \quad (13)$$

où  $W_i$  et  $P_i$  désignent respectivement l'énergie du mode  $i$  contenue dans la cavité (énergie réactive) et  $P_i$  la puissance dissipée par ce mode. Donc plus les pertes sont faibles, et plus le facteur de qualité est élevé. L'hypothèse théorique sans pertes correspond à un facteur de qualité infini. Notons aussi que  $Q_i$  peut varier d'un mode à l'autre et qu'en particulier il croît avec la fréquence de résonance. Si  $Q_i$  est grand, les réponses des différents modes ne se recouvrent que lorsque les modes sont très proches, c'est le cas par exemple des modes dégénérés. En revanche, si  $Q_i$  est faible, les réponses de chacun des modes se superposent plus facilement. On obtient alors une certaine uniformité du spectre, loin des parois de la cavité (en pratique à une distance  $\lambda/2$  des parois [4]). Pour l'instant nous n'avons pas considéré l'effet d'un quelconque brassage mécanique ou fréquentiel.

On définit également un facteur de qualité  $Q$  global de la cavité résonante, qui résulte de la contribution de chacun des modes  $i$ , excités simultanément, par l'intermédiaire de leur facteur de qualité propre  $Q_i$  [3]. Le nombre de modes présents dans la bande  $\Delta f_Q$ , à la fréquence d'excitation  $f$  de la cavité s'écrit :

$$N(\Delta f_Q) = \frac{8\pi V f^3}{c^3 Q}. \quad (14)$$

Précisons que nous n'avons considéré que les pertes d'énergie dues à la conductivité finie des parois métalliques. Cependant, le facteur de qualité global  $Q$  de la CRBM est affecté aussi par l'absorption d'énergie due à la présence dans la cavité d'objets supplémentaires tels que l'antenne d'émission, l'objet sous test, le brasseur de modes, et de manière plus négligeable les câbles d'alimentation. Une infime partie de l'énergie est aussi perdue par fuite au niveau des jonctions des panneaux des parois métalliques. En outre, s'il existe un revêtement quelconque sur les parois de la cavité, cela engendre aussi une perte d'énergie. Il n'est donc pas suffisant de représenter la distribution du champ EM simplement par une résolution analytique basée sur la détermination des modes d'une cavité résonante. Les simulations numériques doivent aussi prendre en compte l'intégration des pertes supplémentaires que l'on vient de citer, ce qui rend particulièrement complexe la résolution d'un tel problème.

Une condition de bon fonctionnement de la CRBM porte sur la densité de modes et sur les pertes, qui permettent aux modes de se mélanger. On parle alors de recouvrement modal. Nous n'avons toujours pas considéré l'effet du brassage, qu'il soit mécanique ou

fréquentiel. A partir de la relation (14), nous constatons qu'il est possible d'augmenter le nombre de modes excités par plusieurs procédés : en augmentant la fréquence de la source d'émission, en diminuant le facteur de qualité par ajout d'éléments dissipatifs, ou encore en augmentant le volume de la cavité. Précisons à ce stade que le processus de superposition des modes explicité ici n'est pas suffisant pour atteindre les critères d'uniformisation et d'isotropie requis. Pour combler cette insuffisance, l'idée consiste à faire varier les conditions aux limites de la cavité, en y insérant une partie métallique mobile. Nous parlons alors de brassage des modes. A chaque position de ce brasseur de modes, le champ EM à l'intérieur de la chambre est le résultat de la superposition d'ondes stationnaires. Le brasseur de modes est conçu de manière à changer la distribution du champ EM, en modifiant les fréquences de résonance des modes au cours de la rotation du brasseur. C'est la diversité des champs créés par les différentes positions du brasseur qui engendre un champ statistiquement isotrope et homogène sur une rotation complète du brasseur.

### **Approche déterministe vs. stochastique**

En fonction du facteur de qualité de la cavité, plus ou moins de modes sont excités simultanément et de manière non négligeable à la fréquence d'excitation de la chambre. Par conséquent, nous passons d'un régime mono-mode pour une cavité sans pertes, à un régime multi-modes pour la cavité réelle. La distribution du champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité peut donc s'obtenir en réalisant la superposition de chaque mode. Pour analyser une chambre réverbérante, une première approche dite déterministe consiste à calculer les modes de l'ensemble {cavité, brasseur} et à analyser la perturbation engendrée par la rotation du brasseur. Cette approche modale est utile pour visualiser les variations spatiales du champ EM. Cela permet d'illustrer en particulier le rôle fondamental que jouent non seulement le recouvrement modal, mais aussi la perturbation des modes. Cependant, il est très difficile de représenter correctement une CRBM réelle du fait de la complexité d'intégration des conditions aux limites. La théorie modale a ses limites, en particulier cette démarche ne permet pas d'inclure avec précision les effets du facteur de qualité.

Une autre approche dite stochastique est basée sur la décomposition du champ électromagnétique en ondes planes. Il s'agit d'un modèle statistique que l'on retrouve souvent sous l'expression « théorie de Hill » [5]. L'idée majeure est que le champ est constitué d'une multitude de rayons se réfléchissant sur les parois de la cavité. La notion de rayons (ondes planes) n'est pertinente que si les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde. On parle alors de régime de sur-modes ou encore de cavité surdimensionnée. Il faut aussi garder à l'esprit que le champ est essentiellement stationnaire dans la CRBM. Dès lors, pour une cavité sans pertes, le spectre en fréquence est discret et le champ est la somme d'un faible nombre d'ondes planes. Grâce aux pertes, le spectre en fréquence devient continu et le recouvrement modal est alors possible. Les modes se superposant, il est donc possible de décomposer le champ en modes, eux-mêmes associés à des ondes

planes. Le spectre en ondes planes devient ainsi plus riche. Lorsque la fréquence d'excitation de la cavité est suffisamment élevée, on peut alors considérer que le spectre en ondes planes est continu.

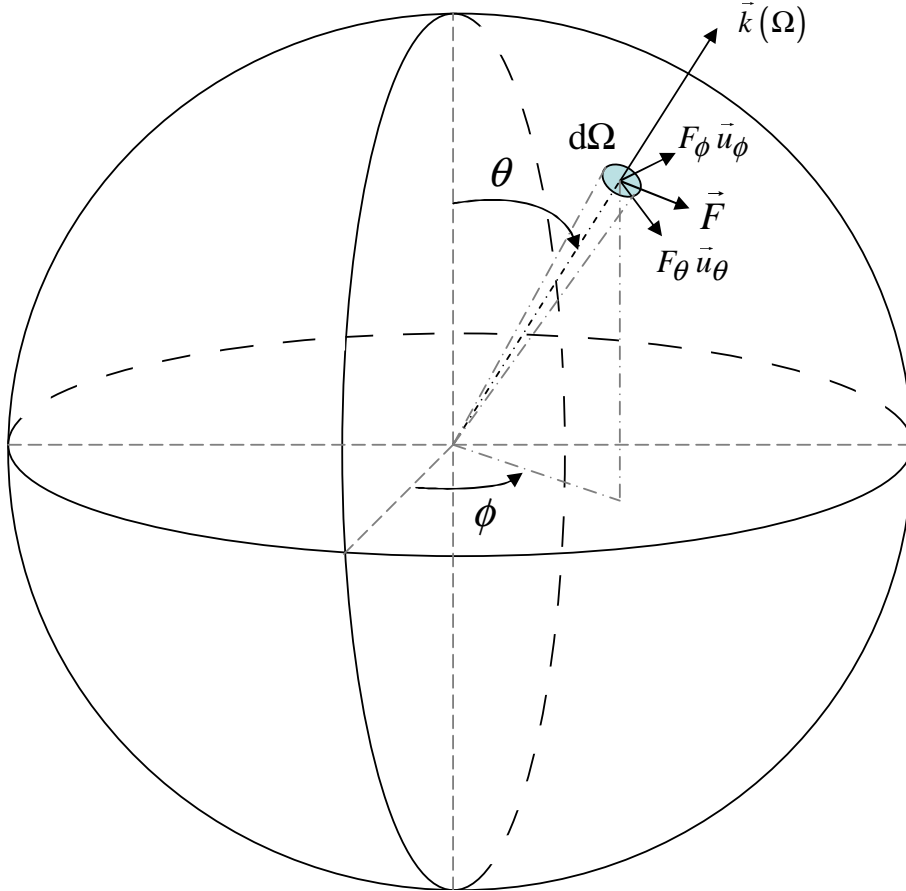
Le modèle de Hill consiste à représenter le champ par une somme infinie d'ondes planes aléatoires :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_{4\pi} \vec{F}(\Omega) e^{j\vec{k}(\Omega) \cdot \vec{r}} d\Omega, \quad (15)$$

où  $j$  désigne l'unité imaginaire ( $j^2 = -1$ ),  $\vec{r}$  repère le point d'observation du champ électromagnétique,  $\vec{F}$  est une fonction qui décrit le comportement aléatoire de la polarisation de l'onde plane,  $\Omega$  représente la direction du vecteur de propagation de l'onde plane, et  $\vec{k}$  est le vecteur de propagation de l'onde plane (vecteur d'onde), porté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  colinéaire à la propagation de l'onde (Fig. 3). Pour chaque direction  $\Omega$ , la réalisation de la polarisation associée est aussi fixée. C'est pourquoi la fonction  $\vec{F}$  dépend de  $\Omega$ . Afin de s'assurer que la polarisation est transverse au vecteur de propagation on pose :

$$\vec{F}(\Omega) = F_\theta(\Omega)\vec{u}_\theta + F_\phi(\Omega)\vec{u}_\phi, \quad (16)$$

où  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\phi$  sont des vecteurs orthogonaux dans le plan perpendiculaire à la direction du vecteur de propagation  $\vec{k}$ .



**FIG. 3:** Représentation polaire d'une onde plane.

Les ondes planes forment donc la base de fonctions supports de la description du champ. L'expression des propriétés statistiques du champ sur un tour de brasseur permet d'aboutir aux lois de probabilité du champ (cf. chapitre 1). Le passage à cette étude de nature probabiliste est un avantage puisque les modifications de la géométrie de la CRBM sont difficiles à maîtriser. Cependant, cette décomposition n'est pas correcte pour une position donnée du brasseur. Le point essentiel est que la décomposition en ondes planes permet en revanche de modéliser correctement le champ sur un tour de brasseur. Les principaux avantages de cette approche résident dans la possibilité d'avoir accès aux lois de distribution des grandeurs mesurées (champ, puissance). Ce modèle permet également de déterminer directement la fonction de corrélation spatiale du champ [4]. Cette démarche permet de prédire la réponse des antennes et autres objets sous test, avec une bonne maîtrise de l'incertitude de mesure.

### Homogénéité et isotropie du champ

Lorsque l'on évoque le fonctionnement d'une CRBM, on en vient rapidement à dire que le champ à l'intérieur du volume utile de la cavité - volume dans lequel on place l'objet sous test - est homogène et isotrope. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que c'est en fait la diversité des champs résultant des différentes positions du brasseur qui crée un champ statistiquement homogène et isotrope. La rotation du brasseur rendant aléatoires les directions d'arrivée des ondes EM, on est logiquement conduit à modéliser le champ en un point, sur un tour de brasseur, comme une somme d'ondes planes aléatoires. Rappelons que la paramètre  $\Omega$  de la fonction  $\vec{F}(\Omega)$  dans (15) est une variable aléatoire. Les poids complexes  $F_\theta(\Omega)$  et  $F_\phi(\Omega)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} F_\theta(\Omega) = f_{\theta_R}(\Omega) + jf_{\theta_I}(\Omega) \\ F_\phi(\Omega) = f_{\phi_R}(\Omega) + jf_{\phi_I}(\Omega) \end{cases} . \quad (17)$$

On impose la loi de probabilité des composantes des polarisations  $F_\theta$  et  $F_\phi$  pour correspondre au comportement idéal que l'on attend dans la CRBM. Il suffit pour cela de considérer que les parties réelles et imaginaires  $f_{\theta_R}$   $f_{\theta_I}$   $f_{\phi_R}$   $f_{\phi_I}$  suivent une loi normale notée  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , de moyenne  $\mu = 0$  et de même écart type  $\sigma$ . Puisque chaque onde plane apparaît avec le même poids, donné par une variance identique, la distribution de probabilité des angles solides sur la sphère est uniforme. Ceci caractérise donc un champ isotrope et la densité de probabilité  $p_\Omega$  des angles solides sur la sphère unité s'écrit  $p_\Omega(\Omega) = 1/4\pi$ .

Afin de vérifier l'homogénéité statistique du modèle, il faut analyser en tout point du volume utile la moyenne et la variance du champ simulé. D'une part, la valeur moyenne du vecteur champ électrique  $\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle$  en un point du volume utile s'annule compte tenu de (15) et des propriétés statistiques de  $\vec{F}(\Omega)$  [5] :

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = \vec{0}. \quad (18)$$

Ce résultat est attendu pour un champ idéalement brassé. Quant à la variance du champ électromagnétique, on peut montrer qu'elle est indépendante du point d'observation  $\vec{r}$  :

$$\begin{cases} \langle |\vec{E}(\vec{r})|^2 \rangle = 16\pi\sigma^2 \\ \langle |\vec{H}(\vec{r})|^2 \rangle = \frac{16\pi\sigma^2}{\eta^2} \end{cases}, \quad (19)$$

où  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  désigne l'impédance caractéristique du milieu ( $\eta = 120\pi$  pour l'air). L'homogénéité statistique du champ est donc bien assurée. Ainsi, le modèle de Hill caractérise bien un champ aléatoire ayant les propriétés d'homogénéité et d'isotropie requises pour une cavité surdimensionnée idéale.

### Estimation de la *LUF* (*lowest usable frequency*)

La *LUF*, ou fréquence minimum d'utilisation de la chambre réverbérante, est communément considérée comme la fréquence à partir de laquelle la CRBM atteint les propriétés requises à son exploitation. Autrement dit, la *LUF* est la plus basse fréquence permettant un régime de fonctionnement de cavité surdimensionnée. On parle aussi de *LOF* pour *lowest overmoded frequency*. En fait, on trouve en général plusieurs définitions de la *LUF* :

- ① la *LUF* est égale à 3 fois la fréquence de résonance du mode fondamental de la cavité (premier mode) ayant les mêmes dimensions que la CRBM mais sans brasseur. On trouve aussi 4,5 ou 6 fois la première fréquence de résonance pour définir la *LUF* ;
- ② la *LUF* est définie comme la fréquence à partir de laquelle les 60 à 100 premiers modes de la cavité (sans brasseur) sont excités, avec une densité de modes d'au moins 1,5 modes par MHz au voisinage de la *LUF* ;
- ③ la *LUF* est considérée comme la plus basse fréquence à partir de laquelle l'uniformité du champ est réalisée au sein d'un volume défini par un calibrage à l'aide de plusieurs positions de sondes [2, 6].

Il est important de noter que les deux premières définitions sont très qualitatives. En particulier, pour la première, selon le coefficient que l'on retient, la *LUF* peut varier du simple au double ! La troisième définition est plus précise bien que moins rapide à exploiter, puisqu'elle est directement reliée aux caractéristiques réelles des mesures en CRBM. En particulier, l'incertitude de mesure liée au nombre de positions de brasseur est prise en considération. Cependant, le critère d'uniformité demeure arbitraire donc une certaine liberté réside dans la détermination de la *LUF*.

Nous le voyons bien, la définition de la *LUF* n'est pas unique. En fait, si on devait répertorier les principales problématiques liées aux CRBM, on pourrait citer la détermination de cette fréquence minimum d'utilisation. Afin de saisir l'origine de l'existence d'une *LUF*, il faut se rappeler que la modélisation de la CRBM par des ondes planes correspond à une hypothèse de sur-dimensionnement de la cavité. La chambre est alors censée fonctionner « normalement » au-delà de cette fréquence. En revanche, cette condition n'étant plus respectée en basse fréquence, il doit exister une fréquence de transition entre la CRBM de Hill et une cavité dont le champ ne serait plus ni homogène ni isotrope.



Cette fréquence de transition est bien la  $LUF$  que l'on tente de définir plus ou moins précisément. Dans cette thèse, nous proposerons une définition différente mais sans doute plus juste de la  $LUF$ , de manière à pouvoir mieux la confondre avec cette fréquence de transition recherchée.

# Etat de l'art

Le but de cette section est de parcourir les principaux résultats et axes de recherche ayant un lien avec le sujet de cette thèse, en s'appuyant de manière non exhaustive sur les éléments bibliographiques majeurs.

Les activités de recherche en chambre réverbérante électromagnétique ne cessent de s'enrichir à travers le monde depuis maintenant une quinzaine d'années environ. Les recherches menées initialement dans les années 70 aux Etats-Unis [7] et à l'Université Navale de Naples [8] ont constitué le point de départ de l'utilisation de la réverbération dans le domaine électromagnétique, principe bien connu dans le domaine acoustique. Les années 80 ont vu d'intensives campagnes de caractérisation aux Etats-Unis particulièrement au sein du NIST (*National Institute of Standards and Technologies*), ex NBS (*National Bureau of Standards*) [9], ou encore à la NSWCDD (*Naval Surface Warfare Center Dahlgren Division*) [10].

Bean et Hall (NSWCDD) figurent en particulier parmi les premiers auteurs à décrire un protocole d'essai en chambre réverbérante, à travers leur article écrit en 1978 [11]. Ce papier est suivi en 1980 par une publication de Corona (*et al.*) de l'Université de Naples, concernant les performances d'une CRBM de géométrie variable [12]. Bien plus tard, en 2002, il est aussi co-auteur avec Ladbury d'un article particulièrement intéressant puisqu'il décrit un état de l'art sur les recherches en CRBM [13], 30 années après le premier article de Crawford [7]. Cet article évoque en outre les problèmes non encore résolus ainsi que les différentes approches ou visions de la CRBM, et propose plusieurs idées pour les recherches futures.

C'est au début des années 90 que Bernard Démoulin a introduit cette thématique de recherche en France. Depuis, de nombreuses équipes de recherche à travers le monde se sont dotées d'un tel instrument, et l'ont étudié sous des angles très différents, tant sur le plan expérimental que sur le plan de l'analyse théorique ou de la modélisation numérique.

## **Normes liées à l'utilisation des chambres réverbérantes**

Proposer un état de l'art sur les chambres réverbérantes sans évoquer l'aspect normatif lié à leur utilisation serait incomplet. En particulier les normes internationales s'appuient sur plusieurs travaux de recherche dirigés par les plus grands spécialistes.

La CEI (Commission Electrotechnique Internationale) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). Elle a pour objet de favoriser la coopération internationale pour

toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI, entre autres activités, publie des normes internationales. Nous pouvons d'abord citer la norme CEI 61726 disponible dès 1999, qui décrit les mesures d'efficacité de blindage en CRBM pour des dispositifs tels que des liaisons câblées connectées ou bien simplement des connecteurs. Cette norme décrit en particulier précisément la manière dont le brasseur mécanique doit être constitué. Cependant, chose curieuse, la norme CEI 61726 est rarement citée dans les publications sur les CRBM.

La principale norme du CEI ou *IEC (International Electrotechnical Commission)* liée à l'utilisation de la chambre réverbérante est le document CEI 61000-4-21 [2], très souvent cité dans les publications. Cette norme indique les procédures à suivre afin de réaliser des tests d'immunité et d'émissivité rayonnés en CRBM pour les équipements civils électriques et/ou électroniques. L'aspect mesures d'efficacité de blindage en chambre réverbérante y est aussi décrit. Dans le domaine aéronautique, il existe la norme spécifique RTCA DO 160 D/E [6] qui présente des distinctions notables avec la norme précédente. En particulier, le nombre de positions de brasseur à considérer sur une révolution complète et les plages de fréquence diffèrent. De plus, et surtout, lorsqu'il s'agit de fixer un niveau de champ électrique pour les essais en immunité, l'application de chaque norme conduit à deux valeurs différentes de la puissance à injecter dans la CRBM. Citons également la norme MIL STD 461 E qui concerne les tests CEM en chambre réverbérante pour les équipements militaires.

C'est l'occasion de préciser que le laboratoire IETR fait actuellement partie d'un groupe de réflexion sur ce sujet, regroupant des industriels et d'autres laboratoires de recherche. Il s'agit du Projet d'Intercomparaison entre ChAmbres Réverbérantes à brassage de mOdeS (PICAROS). Nous menons des essais en commun afin de confronter les résultats de mesures issues de différentes CRBM. Un objectif est en particulier de mettre en évidence les distinctions apportées par les normes internationales, afin de progresser dans le développement de protocoles de mesure normatifs.

De nombreux éléments figurant dans les documents normatifs cités plus haut sont issus de rapports techniques et articles fondamentaux écrits par des spécialistes tels que Crawford, Koepke [9, 10], Hill [14, 15, 16, 5, 17], Corona [8, 12, 18, 19, 20, 13, 21, 22], Hatfield [23, 24, 25], Freyer [26, 27], Ladbury [28], Lundén, Bäckström [29, 30] et Arnaut [31, 32, 33, 34].

Il est important de noter que les documents normatifs sont en permanente évolution. Il suffit d'observer lors de colloques internationaux l'intérêt porté par des membres de ces organisations normatives, sur les nouvelles études exposées. En particulier, même si les normes pour la CRBM constituent à l'état actuel une bonne base de certification, de nombreuses imperfections sont visibles. Par exemple, il peut paraître curieux de constater que ces normes autorisent l'emploi d'un nombre moins élevé d'échantillons en régime de haute fréquence, sachant que plus la fréquence diminue, moins d'échantillons indépendants sont disponibles. Par ailleurs, un seuil de corrélation égal à 0,37 est retenu, en-dessous duquel les  $N$  échantillons collectés sont considérés comme indépendants, et ce quel que soit le

nombre  $N$ . Ceci est en évidente contradiction avec le fait que la fonction d'autocorrélation est elle-même une variable aléatoire, dont la distribution dépend du nombre  $N$  de mesures collectées. Enfin, une évolution récente de la normalisation (DO-160E [6]) tend, probablement à tort, de relâcher les contraintes, pour élargir fictivement la bande passante des chambres existantes. Il ne faut certainement pas discréditer les efforts entrepris pour l'utilisation des chambres réverbérantes en régime basse fréquence, mais nous pensons que la mise en oeuvre de tels essais doit prendre en compte la modification du comportement statistique des mesures.

### Caractérisation statistique de la CRBM

Dans le passé, de nombreux modèles statistiques, décrivant les effets EM à l'intérieur de la chambre réverbérante, ont été développés afin de passer outre les nombreuses difficultés rencontrées par la simulation numérique, que ce soit dans le domaine fréquentiel (méthode des moments, méthode des éléments finis) ou temporel (TLM, FDTD). La plupart de ces modèles est basé sur l'hypothèse d'ondes planes et tente de faciliter la compréhension d'effets EM tels que le couplage entre antennes ou de simples objets sous test (lignes de transmission).

Un des principaux articles sur les lois statistiques du champ et de la puissance en CRBM, et que l'on trouve souvent cité en référence, est le papier de Hill publié en 1998 [5]. On y trouve une synthèse du modèle statistique du champ basé sur les ondes planes, dans un volume sphérique de la cavité. Cette même année, Lehman [35] propose un modèle numérique de la CRBM, basé sur la méthode des moments, afin d'étudier les distributions du champ dans une telle cavité. Dans cet article, comme d'autres que nous pouvons également citer [36, 37, 38, 18], une bonne adéquation est indiquée entre la théorie et les expériences ou simulations. Cependant, d'autres auteurs ont mis en évidence des écarts possibles avec la théorie idéale de Hill. Par exemple, Kostas [39] compare la distribution expérimentale d'une composante cartésienne de champ au carré avec la distribution théorique, une loi exponentielle. Cette analyse note que la distribution expérimentale s'écarte parfois de la distribution théorique, sans préciser davantage. Ce biais est supposé être lié au fait qu'une mesure ponctuelle puisse mettre en évidence des imperfections liées à une cavité réelle, par rapport la cavité idéale de Hill. Par ailleurs, Lammers [40] a montré qu'un chargement de la cavité peut détériorer les performances de la CRBM, à l'aide d'une étude numérique précisant l'effet du chargement sur l'homogénéité du champ. Il apparaît donc nécessaire de prendre en compte l'impact de l'OST sur la réponse de la CRBM. L'effet de la taille de l'antenne ou de la sonde de champ sur plusieurs paramètres statistiques de la distribution théorique de Hill (exponentielle, Rayleigh) est analysé par Arnaut dans [34]. Malgré l'ensemble de ces études, et bien d'autres encore, aucune étude approfondie n'a clairement mis en évidence la possibilité d'écarts avec la théorie de Hill, en régime de cavité sur-dimensionnée, à l'aide d'indicateurs statistiques pertinents.

On trouve dans la littérature d'autres études sur le comportement statistique du champ en CRBM, spécifiques au régime de cavité sous-dimensionnée, c'est-à-dire en-dessous de la

*LUF*. C'est le cas par exemple de Arnaut [41] qui propose en 2003 des lois de distributions complexes dans le cas d'une réverbération imparfaite, dans le domaine basse fréquence. Ce modèle est repris par Corona un an plus tard [22] à l'aide d'un formalisme de lois de distribution plus générales permettant de prendre en compte plusieurs cas : théorie de Hill, régime de cavité sous-dimensionnée, prise en compte d'une composante non brassée. D'ailleurs, en 2000, Corona a proposé la distribution de Rice [20] pour modéliser la distribution des mesures dans le cas d'une proportion de l'énergie non brassée. Cependant, la détermination des paramètres de la loi se fait par comparaison visuelle des distributions expérimentale et théorique, ce qui limite la précision de l'estimation. Bunting [42] et Orjubin [43] se sont aussi intéressés au régime basse-fréquence, en proposant la loi de Weibull au lieu des distributions de Hill. Dans les deux cas, il s'agit de résultats basés sur la simulation numérique (modèle éléments finis). Cependant, nous aurons l'occasion d'établir un autre constat sur une base expérimentale.

L'indépendance spatiale des mesures étant un aspect incontournable dans l'exploitation de la CRBM, il est utile de rappeler quelques études sur ce sujet. Hill et Huikan se sont notamment intéressés dans leur article respectif [4, 44] à la corrélation spatiale du champ EM dans la chambre réverbérante. Contrairement au second, basé sur les fonctions de Bessel, le premier est souvent cité en référence. Hill se base sur le modèle des ondes planes et donne une indication précise sur l'éloignement nécessaire du volume utile de la cavité par rapport aux parois, ainsi que sur la distance à respecter entre deux positions indépendantes de l'OST.

Sur le plan statistique des mesures, nous pouvons citer aussi Holland [45] qui a proposé en 1998 un algorithme pour montrer que le courant au carré mesuré sur un câble en CRBM est distribué selon une loi log-normale au lieu d'une loi exponentielle. Ce papier souligne notamment la difficulté d'intégrer numériquement une corrélation spatiale sur le champ en différents points du câble. Enfin, récemment Serra [46] a proposé un modèle 1D permettant d'interpréter statistiquement les mesures en CRBM. Ce modèle a l'avantage d'être proche des caractéristiques d'une CRBM 3D. En particulier, la simplicité du modèle n'empêche pas une bonne compréhension de la CRBM réelle. Alors que Orjubin [47] propose une analyse purement modale des effets introduits par la rotation du brasseur, le lien entre la théorie modale et la théorie statistique demeure un axe de recherche à poursuivre.

## ***LUF***

La fréquence minimum d'utilisation d'une chambre réverbérante demeure un domaine d'investigation privilégié. En particulier, son évaluation est délicate et peut être fonction de la manière dont on la définit. Sur le plan normatif, on trouve une étude intéressante de Musso [48] qui montre en particulier que selon la norme que l'on considère, de grandes disparités résident dans l'estimation de la *LUF*.

D'autres auteurs se sont intéressés à la possibilité de déplacer cette frontière fréquentielle de manière à exploiter la CRBM à plus basse fréquence. Un brasseur plus efficace en terme de nombre d'échantillons indépendants permet de réduire de manière significative

la  $LUF$  [49, 50]. En outre, diminuer le facteur de qualité  $Q$  en augmentant la charge de la cavité favorise le recouvrement entre modes et entraîne aussi une réduction de la  $LUF$  [51]. Cela engendre cependant plus de pertes d'énergie dans la cavité et favorise l'élargissement de la bande de cohérence.

Par ailleurs, Weinzierl [52] propose une méthode alternative de brassage à l'aide d'excitation de câbles disposés dans la cavité, afin de parvenir également à diminuer la  $LUF$ . Cette étude se base sur une simulation numérique de la cavité par la méthode TLM.

### Maximum de champ et Directivité

L'utilité première de la CRBM étant l'analyse de la compatibilité électromagnétique de systèmes électroniques, beaucoup d'études s'intéressent spécifiquement au maximum de champ généré dans la cavité. De nombreux papiers [26, 53, 27, 54, 37, 55] présentent des comparaisons entre les lois de distributions expérimentale et théorique du maximum de champ ou de puissance. La plupart du temps, il s'agit de comparaisons visuelles et il est peu fait état de tests statistiques appropriés. D'une manière générale, les lois semblent bien respectées. Plus spécifiquement, Orjubin [56] a récemment publié une étude sur l'estimation du maximum de champ à partir de la théorie des distributions de valeurs extrêmes. Il a proposé une loi du type Gumbel en régime de cavité sous-dimensionnée et une loi du type Fréchet pour des fréquences supérieures à la  $LUF$ .

Associée à l'étude du maximum de champ émis par l'objet sous test, la directivité est un paramètre incontournable dont l'estimation en CRBM demeure délicate. En 1996, Hill [57] s'est intéressé à la mesure d'émissivité rayonnée et a proposé une relation entre le champ maximum et la puissance totale rayonnée dans le cas de lignes de transmission avec une expression analytique du maximum de directivité. Cependant, d'autres études [58, 59, 60, 61, 62] montrent que la directivité, reliant les mesures en CRBM et le champ maximum rayonné en chambre anéchoïque, est difficile à estimer dans un cadre plus général. Cependant, si l'on dispose d'une bonne connaissance de la directivité d'un objet, alors on constate une bonne corrélation entre les essais CRBM/CA. Notons l'étude de Wilson [63] parue en 2002 qui montre une bonne adéquation entre la théorie, les mesures et les simulations pour l'estimation de l'émission maximum d'un objet sous test.

### Méthodes alternatives de brassage

Nous avons déjà évoqué l'idée originale proposée Weinzierl [52] qui consiste à réaliser un brassage par excitation de câbles, ceci favorisant la réduction de la  $LUF$ . D'une manière plus générale, une méthode alternative de brassage est intéressante lorsque l'on recherche à augmenter l'efficacité de brassage, c'est-à-dire à accroître le nombre de mesures indépendantes. Par exemple, dans un but de réduction de l'incertitude des mesures, on va pouvoir bénéficier du brassage fréquentiel en plus du brassage mécanique. Ce type de brassage est étudié à nouveau par Hill [64] et exploité dans de nombreuses références [65, 66]. D'un point de vue statistique, beaucoup de similitudes existent dans l'analyse de mesures issues d'un brassage mécanique ou d'un brassage électronique. Cependant,

il faut tout de même noter que le brassage mécanique revient à faire varier de manière non monotone la longueur électrique de la cavité ; alors que le brassage fréquentiel assure une variation monotone de la longueur d'onde d'excitation de la chambre. Ce qui peut favoriser l'interprétation des résultats de mesures. Citons aussi le brassage le plus simple que l'on aurait tort de négliger bien qu'il s'avère souvent limité : le brassage spatial (*platform stirring*) exploité notamment par Depienne [60] pour des mesures de puissance totale rayonnée par des téléphones mobiles. Dans ce cas, il s'agit tout simplement de faire varier la position de l'OST en recherchant des positions suffisamment éloignées les unes des autres ( $\lambda/2$ ) [4], de manière à bénéficier de l'indépendance des mesures. Citons enfin la possibilité de réaliser un brassage à l'aide d'un mur vibrant envisagée par Kouveliotis [67], en tant que brassage mécanique se substituant au brasseur de modes 3D classique, comme par exemple celui de l'IETR.

### Efficacité de brassage

Puisque la chambre n'a d'intérêt que par la possibilité de brasser les modes de la cavité, un axe de recherche particulièrement important concerne l'optimisation de la géométrie du brasseur mécanique. Pour cela, il faut d'abord disposer d'une mesure précise de l'efficacité de brassage. Lundén [30] a proposé en 2000 une vision probabiliste de l'estimateur de la corrélation entre les mesures. Krauthäuser [68] revient sur ce sujet en donnant également une interprétation statistique du coefficient d'autocorrélation et tente de donner une cohérence avec le critère de la norme. Cependant, le critère d'indépendance indiqué par la norme nous paraît discutable, comme le souligne Lundén, mais demeure néanmoins communément appliqué.

Concernant l'optimisation du brassage mécanique, Corona [18] confirme que l'ajout de 2 brasseurs augmente le nombre de mesures indépendantes disponibles par brassage mécanique. Cependant, il apparaît clairement que disposer simultanément de deux brasseurs n'est pas toujours plus efficace que d'en disposer d'un seul qui a de meilleures propriétés que les deux autres pris isolément. Par ailleurs, plusieurs études [69, 70, 49, 71, 72, 73, 50] indiquent l'importance du diamètre du brasseur dans l'efficacité de brassage des mesures. En particulier, Wellander [50] montre que l'effet du diamètre sur la fréquence minimum pour laquelle on dispose d'un nombre d'échantillons indépendants donné, est cubique par rapport à la hauteur du brasseur.

On peut noter également plusieurs études destinées à déterminer de manière simple le nombre d'échantillons indépendants disponibles avec une CRBM donnée, en tenant compte de la géométrie du brasseur. C'est le cas particulièrement de Madsén [66] associé à Hallbjörner [74, 75] qui proposent plusieurs modèles d'estimation du nombre d'échantillons indépendants. Cependant, nous pouvons noter des incertitudes non négligeables sur cette estimation, dues en particulier à l'évaluation du facteur de qualité et d'une constante d'efficacité de brassage. De plus, et surtout, ces modèles sont basés sur le même critère d'efficacité que celui indiqué par les normes (corrélation expérimentale  $< 0,37$ ), et qui a déjà été remis en question [30].

# Objectifs et plan de la thèse

Bien que l'origine des chambres réverbérantes remonte à plus d'un demi-siècle, la nécessité de nombreuses investigations demeure plus que jamais d'actualité. Historiquement, on attribue l'origine des chambres réverbérantes à l'année 1947 avec le dépôt du premier brevet par W.M. Hall [76] intitulé « Heating Apparatus ». Dans ce document nous trouvons une problématique similaire à la CRBM, mais à propos de l'exploitation de la chaleur par des micro-ondes dans une cavité métallique, à des fins culinaires ! Ce brevet décrivait déjà quelques problèmes que l'on retrouve dans l'utilisation des chambres réverbérantes, à savoir :

- ① comment cuire des aliments de grands volumes, avec un minimum de place ;
- ② comment obtenir un champ relativement élevé avec un minimum de puissance à injecter ;
- ③ comment modifier efficacement la distribution des ondes radio-fréquences afin d'obtenir une certaine uniformité du champ.

Ensuite, pendant les vingt années qui suivirent, seuls des papiers orientés sur la cuisine par les micro-ondes furent produits. Il faut attendre 1968 pour voir apparaître des articles sur les mesures en CEM dans des cavités sur-dimensionnées.

Depuis, de nombreuses investigations ont donné lieu à une importante production scientifique sur les chambres réverbérantes, comme nous l'avons présenté plus haut. Cependant, de nombreuses questions restent ouvertes concernant les propriétés réelles du champ électromagnétique régnant dans la cavité, ainsi que sur leur utilisation potentielle. Les chambres réverbérantes à brassage de modes n'ont pas fini de nous surprendre. D'une part, ce moyen d'essai est en train de connaître un réel essor puisque les installations de CRBM se multiplient aujourd'hui. D'autre part, on se rend compte actuellement que ce type de cavité peut être un outil très intéressant pour des domaines d'applications autres que la CEM (caractérisation d'antennes, simulation de canaux de propagation, mesures bioélectromagnétiques, etc.).

Les modèles actuels permettant de décrire le comportement des ondes électromagnétiques à l'intérieur de la cavité présentent leurs limites. En particulier, le modèle de Hill peut s'avérer insuffisant puisqu'il traite le cas d'une cavité idéale, par opposition aux cavités réelles dont nous disposons. Il ne s'agit pas de remettre en cause ce modèle, qui est désormais bien établi, mais il apparaît nécessaire d'apporter des éléments qui précisent la distribution du champ en situation réelle, c'est-à-dire en fonction de la CRBM réelle



ainsi que des dimensions de l'objet sous test. Nous présenterons d'ailleurs ce modèle de Hill comme le modèle de référence, ce qui est aussi le cas pour la communauté CRBM. Néanmoins, nombreux sont ceux aussi qui ont remarqué des écarts par rapport à cette théorie idéale.

Par ailleurs, de grandes insuffisances résident dans la caractérisation de l'indépendance des mesures, en particulier dans ce que préconisent les normes [2, 6]. Il faut noter également que la méthode d'obtention d'échantillons indépendants reprise par ces normes est très souvent exploitée dans les articles des meilleures revues, même les plus récents. Or sans réelle indépendance des mesures, l'interprétation des résultats est faussée et donc aucune conclusion ne peut être formellement établie. Il s'agit d'un élément clef de l'utilisation de la CRBM sur lequel nous avons également souhaité apporter des éléments de réponse précis.

Nous avons fait le choix, dès le départ, d'orienter cette thèse sur une base expérimentale. Le principal intérêt est de se rapprocher au plus près des caractéristiques réelles d'une telle cavité. La simulation est également un outil intéressant, mais il y aura toujours des hypothèses réductrices, des simplifications indispensables pour mener les calculs, et qui éloigneront l'étude du cas réel. Outre le fait d'avoir directement accès aux propriétés réelles d'une CRBM, l'avantage de travailler sur une base expérimentale est aussi de pouvoir valider des méthodes de caractérisation et de mesures en CRBM. Bien souvent, l'origine d'un résultat nouveau exposé dans cette thèse est lié à une expérience ayant fait ressortir un élément particulier, non prévu par la théorie classique, et qu'il a fallu expliquer et prendre en compte dans le développement de nouvelles approches de la CRBM.

Afin de présenter clairement le travail mené tout au long de cette thèse, nous proposons de répartir ce document de la manière suivante. Dans un premier temps, nous exposons une analyse avancée des lois de distribution expérimentales. Nous commençons par montrer expérimentalement que les lois de probabilité des mesures, couramment admises, peuvent s'avérer mal adaptées à l'expérience. Nous nous basons pour cela sur l'étude de différents paramètres de ces lois, et nous nous appuyons sur des résultats de tests d'ajustement particulièrement performants. Ensuite, nous proposons une loi de distribution plus souple, et mieux adaptée aux mesures, afin de combler les lacunes que présentent les lois du modèle idéal. Cette première phase d'étude a fait l'objet de plusieurs publications référencées à la fin de ce document, en particulier à une publication de 11 pages dans la revue *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* du mois de novembre 2007.

Dans un deuxième temps, nous avons orienté le travail sur l'aspect efficacité de brassage, mécanique ou électronique. Il s'agit alors d'accéder à une mesure de l'indépendance des échantillons, collectés soit par rotation du brasseur, soit pour différentes fréquences d'excitation de la cavité. Nous revenons d'abord sur la méthode actuelle décrite dans les normes afin d'en montrer les failles, pour ensuite proposer une nouvelle démarche permettant de mieux encadrer la corrélation. Nous introduisons par la suite le concept de taille effective d'une série d'échantillons de mesures. L'objectif est alors de présenter une nouvelle méthode d'estimation du nombre d'échantillons indépendants (ou taille effective)

à partir de modèles autorégressifs. De nombreux résultats expérimentaux viennent valider cette nouvelle approche. Cette seconde phase a fait l'objet de plusieurs communications dont deux publications écrites dans les revues *Electronics Letters* (août 2007) et *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* (10 pages, mai 2008).

Dans un troisième temps, nous illustrons l'intérêt des nouveaux outils développés dans les parties précédentes, à travers diverses applications. Une meilleure caractérisation des lois de distribution du champ et de la puissance mesurée en CRBM aboutit nécessairement à une meilleure utilisation de celle-ci. En outre, maîtriser les performances du brasseur en terme d'indépendance conduit à une optimisation du temps de mesure, en s'abstenant de mesures corrélées qui n'apportent pas d'information nouvelle. Ainsi, concernant le calibrage d'une CRBM en vue d'essais en émissivité et en immunité, nous sommes en mesure de proposer un gabarit mieux adapté aux spécificités d'une telle cavité. Jusqu'à maintenant, les normes imposent un critère de 3 dB sur l'écart type des mesures en phase de calibrage. Cependant, ce critère ne prend pas en compte les propriétés statistiques de la CRBM. Nous proposons une nouvelle démarche plus adaptée aux caractéristiques de la chambre réverbérante. Par ailleurs, la CRBM présente des propriétés particulièrement intéressantes en terme de caractérisation d'antennes. Ainsi, nous présentons le résultat de mesures d'efficacité d'antenne dont l'incertitude de mesure est contrôlée à l'aide des propriétés statistiques de la cavité. Nous abordons également l'aspect mesure du gain de diversité d'antennes, à l'aide de résultats expérimentaux et de comparaisons entre plusieurs CRBM. Enfin, la chambre réverbérante offre la possibilité de modéliser des canaux de propagation dont on peut faire varier la bande de cohérence, ainsi que le canal de type Rice. Ces aspects sont aussi abordés à l'aide de résultats expérimentaux. En particulier, une nouvelle méthode d'estimation de la loi de distribution de Rice est présentée. Le travail synthétisé dans cette troisième partie a donné lieu à plusieurs publications que le lecteur pourra retrouver dans la liste des publications de l'auteur (page 205).



# Première partie

## ANALYSE AVANCÉE DES LOIS DE DISTRIBUTION EXPÉRIMENTALES



# Chapitre 1

## Les lois de probabilité admises

Une mesure de champ ou de puissance en CRBM n'est pas par essence aléatoire, mais est bien au contraire à caractère déterministe puisque la cartographie du champ électromagnétique dans une cavité est modélisable par les équations de Maxwell. C'est en particulier la diversité des champs créés par les différentes positions du brasseur qui engendre un champ statistiquement isotrope et homogène sur une rotation complète du brasseur. Dès lors, l'emploi d'un concept statistique se justifie aisément, étant donné la complexité de la distribution du champ dans une telle cavité. Le recours à un modèle probabiliste donne l'apparence du caractère aléatoire du champ dans la CRBM. Il s'agit avant tout d'une solution particulièrement séduisante pour parvenir à interpréter correctement une succession de  $N$  mesures et contrôler l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre physique.

### 1.1 Les distributions pour une CRBM idéale

Lorsque l'on réalise  $N$  mesures de champ ou de puissance en réception d'une antenne placée dans une CRBM, pour  $N$  conditions aux limites différentes, on aboutit à une distribution des valeurs mesurées. Ces  $N$  mesures différentes peuvent être collectées pour  $N$  positions de brasseur, ou  $N$  fréquences d'excitation, ou  $N$  positions de l'antenne de réception, ou encore par combinaison de ces 3 types de brassage.

Il semble communément admis que le champ et la puissance mesurés dans le volume utile d'une chambre réverbérante à brassage de modes, en régime de cavité surdimensionnée, suivent les lois de distribution que nous allons présenter dans cette section. Ces lois apparaissent dans de nombreuses publications, le plus souvent comme point de départ au développement d'une idée, ou comme appui afin de certifier le bon fonctionnement de la CRBM. Ces lois correspondent au modèle idéal d'une chambre réverbérante décrit par Hill [5], basé sur une représentation intégrale d'ondes planes, solution des équations de Maxwell.

### 1.1.1 Les lois de distribution sous leur forme classique

Précédemment (cf. Introduction, relation (15)), nous avons introduit l'approche stochastique de Hill, basée sur la décomposition du champ électromagnétique en ondes planes. Nous indiquons ici les formulations principales des lois de distribution relatives au modèle de Hill [5], sous leur forme standard.

#### Parties complexes d'une composante cartésienne de champ électrique

Les propriétés statistiques du champ électrique sont issues des propriétés des parties réelle et imaginaire de chaque composante cartésienne  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  que l'on écrit

$$\begin{cases} E_x = E_{xr} + jE_{xi} \\ E_y = E_{yr} + jE_{yi} \\ E_z = E_{zr} + jE_{zi} \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans l'hypothèse d'une représentation du champ en ondes planes, Hill a alors montré que dans le cas d'une CRBM idéale, pour un volume utile sphérique, les parties réelle et imaginaire sont toutes distribuées selon la loi normale (ou gaussienne), de moyenne nulle

$$\mu = \langle E_{xr} \rangle = \langle E_{yr} \rangle = \langle E_{zr} \rangle = \langle E_{xi} \rangle = \langle E_{yi} \rangle = \langle E_{zi} \rangle = 0, \quad (1.2)$$

et d'écart type  $\sigma$  tel que

$$\sigma^2 = \langle E_{xr}^2 \rangle = \langle E_{yr}^2 \rangle = \langle E_{zr}^2 \rangle = \langle E_{xi}^2 \rangle = \langle E_{yi}^2 \rangle = \langle E_{zi}^2 \rangle = \frac{E_0^2}{6}, \quad (1.3)$$

où  $E_0^2 \equiv \langle |\vec{E}(\vec{r})|^2 \rangle$ . Les relations (1.2) et (1.3) sont conformes aux propriétés d'homogénéité et d'isotropie du champ, au sein du volume utile de la cavité. Compte tenu de (1.2) et (1.3), et dans le cas de la composante rectangulaire  $E_x$  par exemple, la densité de probabilité de la loi normale s'écrit pour les parties réelle et imaginaire de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(E_{xr}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E_{xr}^2}{2\sigma^2}} \\ f(E_{xi}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E_{xi}^2}{2\sigma^2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

Ces lois de probabilité relatives aux parties réelle et imaginaire de chaque composante rectangulaire de champ, sont le point de départ pour déterminer les lois de distribution du **module** d'une composante cartésienne de champ noté dès à présent  $E_R$ , du **module** du champ total  $E_T$  et de la puissance  $P$  mesurés en CRBM par brassage des modes de la cavité.

#### Distribution du module d'une composante cartésienne de champ au carré

Connaissant les lois de distribution des parties réelle et imaginaire d'une composante cartésienne de champ, nous pouvons en déduire la distribution des mesures au carré d'une

composante rectangulaire de champ. Si  $x_1, x_2, \dots, x_\nu$  représentent  $\nu$  variables normales indépendantes de même moyenne  $\mu = 0$  et de même écart type  $\sigma$ , alors on peut montrer que la variable aléatoire  $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2$  suit la loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté. Par conséquent, la quantité  $E_R^2$  étant elle-même une variable aléatoire qui s'écrit

$$E_R^2 = E_{Rr}^2 + E_{Ri}^2, \quad (1.5)$$

la distribution de  $E_R^2$  suit la loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté, ou *loi exponentielle*, dont la densité de probabilité s'exprime sous la forme :

$$f(E_R^2) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{E_R^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.6)$$

Il est courant et souvent utile de caractériser cette loi par l'expression de la moyenne et de l'écart type (racine carrée de la variance désignée par « Var ») de la variable aléatoire  $E_R^2$  :

$$\begin{cases} \langle E_R^2 \rangle = 2\sigma^2 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_R^2}} = 2\sigma^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Le rapport de l'écart type sur la moyenne est remarquable et vaut 1. Nous indiquons également la fonction de répartition de la composante cartésienne de champ au carré :

$$F(E_R^2) = 1 - e^{-\frac{E_R^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.8)$$

### Distribution du module d'une composante cartésienne de champ

A partir de la loi de distribution d'une composante cartésienne de champ au carré, il est facile de déterminer la loi des mesures d'une composante rectangulaire de champ  $E_R$ . On peut montrer (section 1.1.3) que si une variable aléatoire  $X$  suit une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté (1.6), alors la variable aléatoire  $\sqrt{X}$  suit une loi du type  $\chi$  à 2 degrés de liberté, ou *loi de Rayleigh*. Dès lors il est possible d'exprimer la densité de probabilité d'une composante cartésienne de champ sous la forme :

$$f(E_R) = \frac{E_R}{\sigma^2} e^{-\frac{E_R^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.9)$$

De même que précédemment, nous pouvons caractériser cette loi de distribution par l'expression de la moyenne et de l'écart type de la variable aléatoire  $E_R$  :

$$\begin{cases} \langle E_R \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \sqrt{\text{Var}_{E_R}} = \sigma \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (1.10)$$

Le rapport de l'écart type sur la moyenne est de nouveau remarquable puisqu'il est constant, et vaut approximativement 0,523. Nous reviendrons plus tard sur cette valeur caractéristique lorsque nous comparerons cette loi de distribution théorique, à la loi de distribution expérimentale des mesures d'une composante cartésienne de champ élec-



trique. Enfin, à partir de l'expression (1.9) on peut démontrer l'expression de la fonction de répartition (ou fonction de densité cumulée) de  $E_R$  :

$$F(E_R) = 1 - e^{-\frac{E_R^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.11)$$

### Distribution du module du champ total

A partir de la connaissance de la loi de distribution des composantes cartésiennes de champ, nous pouvons en déduire la loi de distribution du champ total. Le champ total au carré s'exprime en fonction des 3 composantes cartésiennes de champ de la manière suivante :

$$E_T^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2. \quad (1.12)$$

Dès lors, le champ total au carré  $E_T^2$  est distribué selon une loi du  $\chi^2$  à 6 degrés de liberté. Il en résulte que le champ total  $E_T$  suit une loi du  $\chi$  à 6 degrés de liberté. La densité de probabilité du champ s'écrit alors :

$$f(E_T) = \frac{E_T^5}{8\sigma^6} e^{-\frac{E_T^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.13)$$

La moyenne et l'écart type de la distribution du champ total ont aussi des expressions analytiques, que l'on peut écrire comme suit :

$$\begin{cases} \langle E_T \rangle = \frac{15}{16}\sigma\sqrt{2\pi} \\ \sqrt{\text{Var}_{E_T}} = \sigma\sqrt{6 - \frac{225\pi}{128}} \end{cases}. \quad (1.14)$$

Le rapport de l'écart type sur la moyenne est constant et vaut environ 0,294. De plus, la fonction de répartition du champ total s'exprime de la manière suivante :

$$F(E_T) = 1 - e^{-\frac{E_T^2}{2\sigma^2}} \left[ 1 + \frac{E_T^2}{2\sigma^2} \left( 1 + \frac{E_T^2}{4\sigma^2} \right) \right]. \quad (1.15)$$

### Distribution du module du champ total au carré

En complément, nous rappelons l'expression de la densité de probabilité du champ total au carré, qui suit une loi du  $\chi^2$  à 6 degrés de liberté.

$$f(E_T^2) = \frac{(E_T^2)^2}{16\sigma^6} e^{-\frac{E_T^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.16)$$

Indiquons aussi l'expression de la valeur moyenne ainsi que de l'écart type :

$$\begin{cases} \langle E_T^2 \rangle = 6\sigma^2 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_T^2}} = \sigma^2\sqrt{12} \end{cases}. \quad (1.17)$$

Le rapport de l'écart type sur la valeur moyenne vaut approximativement 0,577. Afin d'être complet, indiquons l'expression de la fonction de densité cumulée de la variable

aléatoire  $E_T^2$  :

$$F(E_T^2) = 1 - e^{-\frac{E_T^2}{2\sigma^2}} \left[ 1 + \frac{E_T^2}{2\sigma^2} \left( 1 + \frac{E_T^2}{4\sigma^2} \right) \right]. \quad (1.18)$$

### Distribution de la puissance $P$ mesurée en réception d'une antenne

En partant du même principe que pour le champ électrique, Hill a proposé la loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté comme loi de distribution de la puissance. On peut montrer [5] que la valeur moyenne de la puissance (efficace) reçue en CRBM à l'aide d'un brassage de modes s'écrit de la manière suivante :

$$\langle P^2 \rangle = \langle |I|^2 \rangle R_r = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \frac{\lambda^2}{4\pi}, \quad (1.19)$$

où  $I = I_r + jI_i$  désigne le courant sur le port d'une antenne,  $R_r$  correspond à la résistance de rayonnement de l'antenne,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  est l'impédance intrinsèque du milieu (en espace libre), et  $\lambda^2/4\pi$  représente la surface effective d'une antenne isotropique. L'interprétation physique de (1.19) est que la puissance moyenne reçue est le produit de la densité de puissance scalaire moyenne  $E_0^2/\eta$  par la surface effective  $\lambda^2/4\pi$  d'une antenne isotropique et par un facteur de désadaptation de polarisation de  $1/2$  [77]. Ce résultat est indépendant de la directivité de l'antenne et de la polarisation, ce qui est conforme aux propriétés statistiques du champ électromagnétique généré dans une chambre réverbérante [12].

Hill montre que les parties réelle  $I_r$  et imaginaire  $I_i$  du courant  $I = I_r + jI_i$  circulant sur une antenne sont distribuées pour différentes conditions aux limites dans la CRBM selon une loi normale de valeur moyenne **nulle** et d'écart type  $\sigma_I$  tel que :

$$\langle I_r^2 \rangle = \langle I_i^2 \rangle = \frac{1}{4R_r} \frac{E_0^2}{\eta} \frac{\lambda^2}{4\pi} \equiv \sigma_I^2, \quad (1.20)$$

Dès lors, puisque la puissance s'écrit  $P = |I|^2 R_r$ , alors sa distribution est bien une loi exponentielle dont la densité de probabilité s'écrit :

$$f(P) = \frac{1}{2\sigma_I^2 R_r} e^{-\frac{P}{2\sigma_I^2 R_r}}. \quad (1.21)$$

Rappelons l'expression de la moyenne et de l'écart type de la variable aléatoire  $P$  :

$$\begin{cases} \langle P \rangle = 2\sigma_I^2 R_r \\ \sqrt{\text{Var}_P} = 2\sigma_I^2 R_r \end{cases}. \quad (1.22)$$

De nouveau, nous notons que le rapport écart type sur la moyenne est remarquable et vaut 1. Indiquons aussi la fonction de répartition de la puissance :

$$F(P) = 1 - e^{-\frac{P}{2\sigma_I^2 R_r}}. \quad (1.23)$$

Notons en particulier la relation entre les écarts types utilisés dans cette section, l'un relatif au champ, l'autre lié à la puissance :

$$\sigma_I^2 R_r = \frac{3 \lambda^2}{8 \pi \eta} \sigma^2. \quad (1.24)$$

### Distribution de la racine carrée de la puissance

Puisque la puissance  $P$  suit une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté, la variable aléatoire  $\sqrt{P}$  est distribuée selon une loi du  $\chi$  à 2 degrés de libertés. La densité de probabilité de cette variable aléatoire s'écrit donc :

$$f(\sqrt{P}) = \frac{\sqrt{P}}{\sigma_I^2 R_r} e^{-\frac{P}{2\sigma_I^2 R_r}}. \quad (1.25)$$

De même que précédemment, caractérisons cette loi par l'expression de la moyenne et l'écart type de la variable aléatoire  $\sqrt{P}$  :

$$\begin{cases} \langle \sqrt{P} \rangle = \sigma_I \sqrt{\frac{\pi R_r}{2}} \\ \sqrt{\text{Var}_P} = \sigma_I \sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) R_r} \end{cases}. \quad (1.26)$$

Le rapport de l'écart type sur la moyenne vaut environ 0,253 et on peut montrer que la fonction de répartition de la racine carrée de la puissance mesurée en réception d'une antenne s'exprime de la manière suivante :

$$F(\sqrt{P}) = 1 - e^{-\frac{P}{2\sigma_I^2 R_r}}. \quad (1.27)$$

### 1.1.2 Lois dans le cas de mesures rapportées à la moyenne

Pour la présentation des lois de distribution rapportées à la valeur moyenne, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A, afin d'alléger la lecture de cette section 1.1. L'avantage de normaliser les mesures à la valeur moyenne est que l'on peut comparer différentes CRBM entre elles, puisque l'on ne tient pas compte de la puissance injectée dans la cavité.

### 1.1.3 Ecriture simplifiée

Dans la suite de l'étude que nous présentons, nous n'avons pas besoin de connaître particulièrement les grandeurs  $\sigma$ ,  $\sigma_I$  et  $\sqrt{R_r}$  qui apparaissent dans les lois que nous venons de présenter. Après avoir détaillé les différentes distributions telles qu'elles sont couramment utilisées en CRBM, nous proposons d'utiliser une expression simplifiée et suffisante, que l'on retrouve dans les publications des statisticiens. De plus, nous allons nous focaliser uniquement sur les lois de Rayleigh ( $\chi$  à 2 degrés de liberté), et exponentielle ( $\chi^2$  à 2 degrés de liberté), afin de caractériser les mesures collectées par brassage des modes dans la chambre réverbérante.

Par la suite, nous utiliserons uniquement les expressions mathématiques de cette section 1.1.3 pour faire référence aux lois du modèle idéal de Hill.

### Loi de Rayleigh

La loi de Rayleigh, ou loi du  $\chi$  à 2 degrés de liberté, fait l'objet d'études dans les revues de statistiques comme *Biometrika* ou encore le *Journal of the American Statistical Association*. Cette loi est présentée sous la forme simplifiée que nous allons développer ci-dessous. Nous caractériserons la loi de Rayleigh par le paramètre réel  $\theta > 0$ .

- La fonction de densité de probabilité s'écrit de la manière suivante, pour un réel  $x > 0$  :

$$f(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}. \quad (1.28)$$

- La moyenne s'exprime comme suit :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\theta \pi}, \quad (1.29)$$

- et la variance devient :

$$\text{Var} = \theta \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.30)$$

- Enfin, la fonction de répartition de la loi de Rayleigh de paramètre  $\theta$  s'écrit :

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}. \quad (1.31)$$

A la loi de Rayleigh présentée sous cette forme, nous associerons des tests statistiques afin de déterminer si nos mesures sont en accord avec la théorie d'une CRBM idéale.

### Loi exponentielle

La loi exponentielle, ou loi du type  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté, que l'on retrouve dans les publications de statistiques, est transcrite sous la forme présentée ci-après. Rappelons que si une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Rayleigh, alors la v.a.  $X^2$  suit la loi exponentielle. Nous allons le démontrer par la suite. Considérons pour le moment un paramètre  $\theta > 0$  :

- La fonction de densité de probabilité s'écrit, pour un réel  $x > 0$  :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}. \quad (1.32)$$

- La moyenne est égale au paramètre  $\theta$  de la loi :

$$\langle x \rangle = \theta. \quad (1.33)$$

- Nous retrouvons aussi que l'écart type de la loi exponentielle s'identifie au paramètre  $\theta$  :

$$\text{Var} = \theta^2. \quad (1.34)$$

– La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\theta$  devient :

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}. \quad (1.35)$$

C'est l'occasion de démontrer maintenant que si  $X \geq 0$  suit une loi de Rayleigh, alors la v.a.  $X^2$  suit une loi exponentielle, et réciproquement.

① Démontrons d'abord l'implication. Soit  $V = X^2$ , alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons au niveau des probabilités :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}[X^2 \leq v] = \mathcal{P}[X \leq \sqrt{v}] = \Phi(\sqrt{v}), \quad (1.36)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi de Rayleigh. Alors la densité de probabilité de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv}\Phi(\sqrt{v}) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Ce qui donne, pour tout réel  $v \geq 0$ ,  $f(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\Phi'(\sqrt{v})$ . Nous retrouvons donc la loi exponentielle (1.32) avec le même paramètre  $\theta$  :

$$f(v) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{v}{\theta}}. \quad (1.38)$$

② Montrons maintenant la réciproque. Soit une v.a.  $X \geq 0$  distribuée selon une loi exponentielle. Soit la nouvelle variable aléatoire  $V = \sqrt{X}$ . Alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons les relations suivantes :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}[\sqrt{X} \leq v] = \mathcal{P}[X \leq v^2] = \Phi(v^2), \quad (1.39)$$

avec ici  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi exponentielle. D'où, la densité de probabilité de  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv}\Phi(v^2) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Ce qui donne, pour tout réel  $v \geq 0$ ,  $f(v) = 2v\Phi'(v^2)$ . Nous retrouvons ainsi la loi de Rayleigh (1.28) avec le même paramètre  $\theta$  que la loi exponentielle :

$$f(v) = \frac{2v}{\theta}e^{-\frac{v^2}{\theta}}. \quad (1.41)$$

## 1.2 Le modèle idéal considéré comme une référence

Dans cette section, nous montrons à travers quelques exemples, que le modèle de Hill est souvent adopté. Cela signifie que, au sein de la communauté CRBM, ces lois sont ad-

mises, bien qu'elles soient valables dans le cas d'une chambre réverbérante idéale (densité de modes infinie). Cependant, les nombreuses publications sur le sujet semblent montrer que les lois de distribution de Rayleigh et exponentielle sont vérifiées empiriquement.

S'appuyer sur la théorie de Hill permet de développer de nombreuses applications en chambre réverbérante. Pour cela, il est au préalable nécessaire de vérifier que les mesures de champ ou de puissance suivent les lois exposées plus haut. La manière la plus juste consiste à réaliser des tests d'ajustement (section 2.1). Il faut reconnaître que les tests statistiques d'ajustement à une loi de probabilité (*goodness-of-fit tests*) ne permettent pas de certifier à coup sûr le bon ajustement de la distribution sous-jacente des mesures à une loi analytique. Néanmoins, multiplier les tests d'ajustement permet d'aboutir à un excellent indicateur de l'ajustement, compte tenu du niveau de confiance que l'on se donne.

Nous pouvons en particulier noter que les comparaisons entre lois de probabilité expérimentale et théorique se font très souvent par la simple visualisation des courbes théorique et expérimentale. Or, il n'est pas équivalent de comparer avec la distribution théorique une courbe provenant d'une série de mesures de 50 échantillons, et une autre provenant de 150 mesures. La différence de comparaison doit intégrer le fait que la série des mesures ne fait pas la même taille dans l'un et l'autre cas. Autrement dit, nous ne devons pas tolérer le même écart avec la distribution théorique, entre le cas où l'on prélève 50 échantillons et le cas où l'on collecte 150 mesures. Or un test d'ajustement prend en compte ce nombre d'échantillons, qui est extrêmement variable d'une comparaison à une autre.

D'autre part, et cela est aussi problématique, lorsque les tests statistiques sont effectués, nous pouvons constater que ces tests sont bien souvent mal adaptés aux lois de distribution théoriques testées. Selon que l'on considère un test adapté ou non, les conclusions peuvent être très différentes. En effet, le résultat du test est binaire, soit on accepte l'hypothèse, soit on la rejette.

Pour illustrer ces propos, nous citons les quelques exemples suivants, provenant de l'abondante littérature traitant des chambres réverbérantes.

- Dans la thèse de Petit [78], on trouve une abondance de résultats de tests dont le but est de vérifier que les parties réelle et imaginaire de chaque composante rectangulaire de champ obtenue par simulation numérique suit bien une distribution gaussienne. Cependant, ces tests statistiques, dits de Kolmogorov-Smirnov (KS), utilisent la table de valeurs critiques de Massey [79]. Nous montrerons en section 2.2.1 que cette table de valeurs critiques fausse le résultat du test pour une loi normale. Les mêmes tests sont utilisés afin de vérifier l'ajustement à la loi du  $\chi^2$ . Or, la table de Massey n'est pas non plus adaptée au test de la loi exponentielle. Cependant, nous pouvons noter que Petit souligne la non correspondance entre les résultats des tests pour une loi normale et une loi exponentielle, alors que les données de départ sont les mêmes [cf. relation (1.5)].

Il faut également signaler la rareté des tests d'ajustement directement sur les mesures de champ. Nous trouvons effectivement peu d'analyses statistiques sur la distribution

expérimentale d'une composante cartésienne de champ  $E_R$ . La raison peut être que la plupart du temps, ce sont des mesures de puissance que l'on réalise, mesures qui sont proportionnelles au module du champ au carré. Cependant, nous verrons par la suite que le champ mesuré par une petite sonde, *i.e.* localement, n'a pas forcément la même distribution que les mesures de puissance prélevées dans un plus grand volume de captation.

- Un article de Harima [37] présente l'analyse de mesures de champ comparativement aux lois de distribution théoriques. La comparaison semble basée uniquement sur la visualisation des courbes. Cela limite en particulier l'interprétation en terme de distance acceptable entre les courbes théorique et empirique.
- Yu [65] s'intéresse à la comparaison de grandeurs obtenues par simulation avec les lois de distribution du modèle idéal de Hill. En particulier, la distribution des mesures d'une composante rectangulaire de champ  $E_R$  est comparée à la loi de Rayleigh, et la distribution de  $E_R^2$  à la loi exponentielle. Bien que les auteurs indiquent une bonne adéquation entre les lois expérimentale et théorique, la comparaison est uniquement visuelle et non basée sur des tests d'ajustement.
- Un article de Freyer [27] traite de l'ajustement de mesures en CRBM aux lois de probabilité de Hill. Il est indiqué en particulier qu'il est équivalent d'étudier les mesures d'une composante cartésienne de champ au carré et les mesures de puissance, puisque la loi de distribution théorique est supposée être la même. Or l'analyse statistique fine de mesures en CRBM conduit à des conclusions différentes. L'article compare des mesures issues de trois chambres réverbérantes différentes, ce qui est particulièrement intéressant. Néanmoins, les conclusions demeurent limitées quant à l'ajustement aux lois théoriques puisque l'analyse est basée seulement sur la visualisation des courbes et ne fait pas appel aux tests d'ajustement.
- Dans sa thèse [47], Orjubin compare des séries d'échantillons obtenus par simulation numérique dans une CRBM, avec les lois de distribution théoriques. En particulier, des résultats de tests d'ajustement (KS) sont fournis. Cependant, le critère utilisé n'est pas indiqué pour comparer la distribution des échantillons aux lois proposées, en particulier pour un régime de cavité sous-dimensionnée. Or, comme nous le verrons par la suite, il est très important d'utiliser le critère adéquat, et donc de le spécifier pour assurer une certaine cohérence dans l'analyse.
- Dans une note technique du NIST [80], les propriétés de la chambre réverbérante de la NASA localisée au Centre de Recherche de Langley sont analysées, avec des comparaisons entre CDF théoriques et expérimentales permettant d'appuyer l'argumentation. Cependant, aucun résultat de test d'ajustement n'est mentionné et la comparaison entre les fonctions de répartition est uniquement visuelle. Par ailleurs, seulement des mesures de puissance sont traitées. Il est mentionné que les propriétés sur le champ se déduisent des propriétés sur la puissance, ce qui est en accord avec la théorie de Hill. Néanmoins, nous verrons par la suite que les lois gouvernant la

distribution des mesures de champ ne sont pas systématiquement les mêmes que pour les mesures de puissance.

- Un rapport de Arnaut [31] sur les propriétés de la CRBM du *National Physical Laboratory* traite de résultats de mesures de puissance et fournit une description statistique de la CRBM. Là encore, les tests statistiques employés (KS) utilisent des critères mal adaptés aux lois de distribution testées.
- Une formation sur les chambres réverbérantes réalisée à Lille en 2002 [81] par des membres du NSWCCD présente en particulier le test d’ajustement de Kolmogorov-Smirnov. Cependant, les valeurs critiques associées proviennent de la table de Massey qui n’est pas adaptée ni à la loi de Rayleigh, ni à la loi exponentielle.
- Citons enfin une communication de Girard [82] traitant de l’équivalence champ-puissance dans une CRBM, dans laquelle le test KS est employé, mais là encore avec les valeurs critiques de Massey.

A travers ces quelques exemples, il apparaît nécessaire de préciser et de corriger certains aspects de l’analyse statistique des mesures, qu’elles soient expérimentales ou issues de la simulation. En particulier :

- comparer visuellement des courbes théoriques et expérimentales n’est pas suffisant pour analyser l’ajustement à une loi d’un point de vue statistique. Il est en effet nécessaire de tenir compte du nombre d’échantillons indépendants constituant la série de mesures analysée ;
- lorsqu’une étude statistique est entreprise, très souvent le test n’est pas adapté aux lois de distribution considérées, ce qui peut fausser les conclusions du test ;
- de nombreuses études se basent sur des mesures de puissance, en précisant que les conclusions sont les mêmes sur la distribution du champ. Nous montrerons que cela n’est pas tout à fait juste.
- un test d’ajustement à une loi nécessite au préalable que les échantillons soient indépendants. Or, la détermination de cette indépendance est généralement approximative. Nous l’indiquons à ce stade de l’étude, et nous reviendrons sur ce point en section 5.2 de ce document.

Les objectifs de cette première partie intitulée « Analyse avancée des lois de distribution expérimentales » sont triples.

- ① Proposer un ensemble de valeurs critiques adaptées aux tests d’ajustement des lois de distribution sous-jacentes aux mesures en chambre réverbérante. Nous présenterons aussi un test d’ajustement très rarement utilisé en CRBM, et légèrement plus puissant que le test de Kolmogorov-Smirnov, ceci afin de pouvoir conforter l’analyse statistique des mesures.
- ② Fournir une analyse approfondie de la distribution des mesures de champ et de puissance. L’objectif n’est pas de remettre en cause le modèle idéal, qui est largement approuvé, mais de montrer les écarts auxquels on peut s’attendre entre ce modèle théorique et la réalité des mesures effectuées en chambre réverbérante. En



particulier, nous montrerons des différences de comportement entre les mesures de champ et de puissance.

- ③ Proposer et valider une autre loi de distribution dans le cas où les lois idéales sont insuffisantes en régime de cavité sur-dimensionnée.

## 1.3 Remise en question du modèle idéal par l'expérience

Une première vérification simple des lois idéales, gouvernant la distribution des mesures collectées par brassage des modes, consiste à comparer le rapport expérimental de l'écart type sur la moyenne, avec le rapport théorique. Les valeurs de ce rapport dans le cas d'une loi de Rayleigh et dans le cas d'une loi en  $\chi$  à 6 degrés de liberté sont déduits respectivement des relations (1.10) et (1.14). Nous avons donc environ 0,523 pour une loi de Rayleigh et 0,294 pour une loi en  $\chi$  à 6 degrés de liberté.

Par simulation numérique, en réalisant des tirages selon la méthode Monte-Carlo, il est possible de connaître la distribution de ce rapport autour de la valeur vraie, ou espérance, en fonction du nombre  $N$  d'échantillons que contient une série analysée. Ainsi, nous pouvons déterminer, pour un niveau de confiance donné, si le ratio écart type / moyenne de la distribution expérimentale est cohérent avec celui de la loi théorique.

### 1.3.1 Décorrélacion des mesures

Nous développerons plus loin (section 6.2) la détermination de l'indépendance des échantillons à partir de la détermination de la fonction d'autocorrélation. Pour l'instant, nous nous attachons à respecter ce qu'indiquent les normes [2, 6] et nous rappelons la démarche préconisée dans cette section. En effet, avant de comparer l'écart type de la distribution expérimentale à celui de la distribution théorique, il est indispensable de vérifier au préalable si les échantillons collectés sont indépendants.

Rappelons dans un premier temps l'expression de la fonction d'autocorrélation pour un échantillon de taille  $N$  d'une variable aléatoire notée  $E$ . Nous nous intéressons plus précisément à la fonction d'autocorrélation d'ordre 1 puisqu'il s'agit de la corrélation entre 2 mesures successives de la série. Cette fonction d'autocorrélation d'ordre 1 sera notée simplement  $r$ . Appelons  $E_i$  la  $i^{\text{ème}}$  réalisation de la v.a.  $E$ . Soit  $x$  la série de ces  $N$  réalisations :

$$x = E_1, E_2, \dots, E_{N-1}, E_N. \quad (1.42)$$

Imaginons par exemple que ces  $N$  tirages proviennent de mesures de champ pour  $N$  positions de brasseur différentes, définies par un écart angulaire constant sur une rotation complète. Nous appelons alors  $y$  la série dans laquelle les éléments de  $x$  sont décalés d'un rang :

$$y = E_2, E_3, \dots, E_N, E_1. \quad (1.43)$$

Les notations  $x(k)$  et  $y(k)$  désignent respectivement le  $k^{\text{ème}}$  élément des séries  $x$  et  $y$ . La fonction d'autocorrélation d'ordre 1 de la série  $x$  est alors calculée à l'aide de l'expression suivante :

$$r = \frac{\sum_{k=1}^N (x(k) - \langle x \rangle)(y(k) - \langle y \rangle)}{\sum_{k=1}^N (x(k) - \langle x \rangle)^2}. \quad (1.44)$$

La fonction d'autocorrélation est comprise entre -1 et 1. Lorsque la corrélation est nulle, ce paramètre vaut 0. Lorsque la corrélation est maximale, sa valeur absolue est 1.

D'un point de vue normatif, on considère une valeur critique pour la fonction d'autocorrélation en-deçà de laquelle l'absence de corrélation est admise. Cette valeur limite, nous la notons  $r_L$  et sa valeur est la suivante :

$$r_L = e^{-1} \approx 0,37 \quad (1.45)$$

Comme nous le verrons plus loin dans ce document (section 5.2), ce critère est plus un indicateur communément admis plutôt qu'une mesure juste de l'absence de corrélation. Disons simplement pour l'instant que cette valeur critique devrait être fonction de la taille  $N$  de l'échantillon, compte tenu du fait que l'estimateur de la fonction d'autocorrélation (1.44) suit lui-même une loi de distribution.

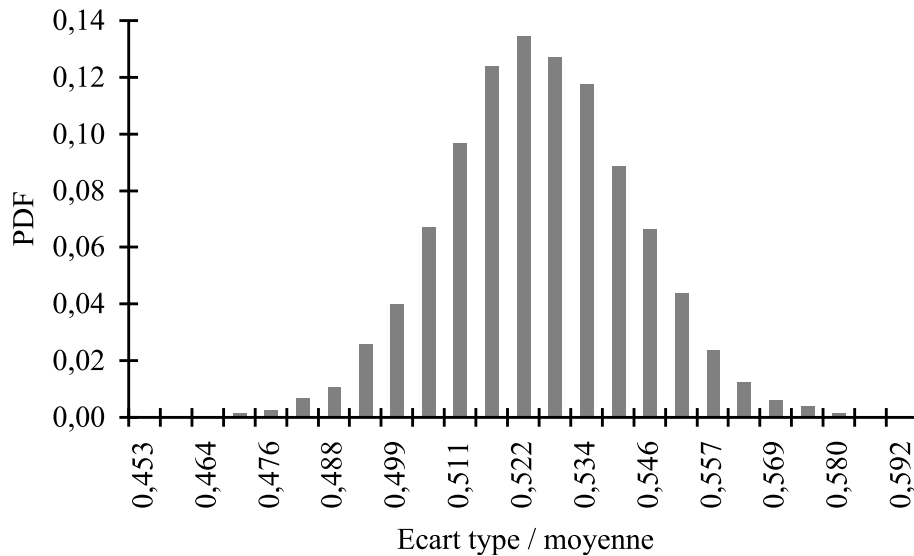
### 1.3.2 Analyse de mesures de champ

Il s'agit ici d'analyser rapidement quelques expériences préliminaires, qui constituent le point de départ des investigations que nous développerons plus loin. Les mesures de champ sont réalisées à l'aide d'une sonde triaxiale (Hi6005) qui fournit la mesure de chaque composante cartésienne de champ. Donc pour 1 position de brasseur et une position de sonde, nous disposons en fait de trois mesures indépendantes d'une composante rectangulaire de champ ( $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$ ). Les expériences sont réalisées dans la chambre réverbérante de l'IETR de volume  $93 \text{ m}^3$  (hauteur 2,9 m ; largeur 3,7 m ; longueur 8,7 m). Les séries de mesures de champ analysées sont bien constituées de mesures non corrélées, puisque la fonction d'autocorrélation est en valeur absolue inférieure à 0,05. Nous avons réalisé quatre expériences similaires. Nous avons collecté à chaque expérience  $N = 450$  mesures d'une composante rectangulaire de champ, à 900 MHz, soit bien au-delà de la  $LUF$  estimée autour de 250 MHz si l'on considère 6 fois la première fréquence de résonance de la cavité. La valeur expérimentale du ratio écart type / moyenne obtenue à chaque expérience est indiquée dans le tableau 1.1. Nous constatons que dans chacun des

Expérience	1	2	3	4
Ecart type / moyenne	0,58	0,60	0,58	0,62

**TAB. 1.1:** Valeur expérimentale du rapport écart type / moyenne pour  $N = 450$  mesures d'une composante rectangulaire de champ, collectées pour 30 positions de brasseur et 5 positions de sonde.

quatre cas, le ratio écart type / moyenne est très supérieur à la valeur théorique (0,523) pour une loi de Rayleigh. Si l'on compare ces valeurs expérimentales avec la distribution théorique de ce rapport (Fig. 1.1), l'expérience se situe systématiquement dans la queue de distribution. L'histogramme de la figure 1.1 a été obtenu par simulation Monte-Carlo de 10 000 réalisations du tirage de 450 valeurs distribuées selon la loi de Rayleigh. Le lecteur peut noter en particulier que le rapport théorique (0,523) de l'écart type sur la moyenne des échantillons est bien au centre de la distribution simulée numériquement.



**FIG. 1.1:** Densité de probabilité du rapport écart type / moyenne de  $N=450$  tirages aléatoires distribués selon une loi de Rayleigh.

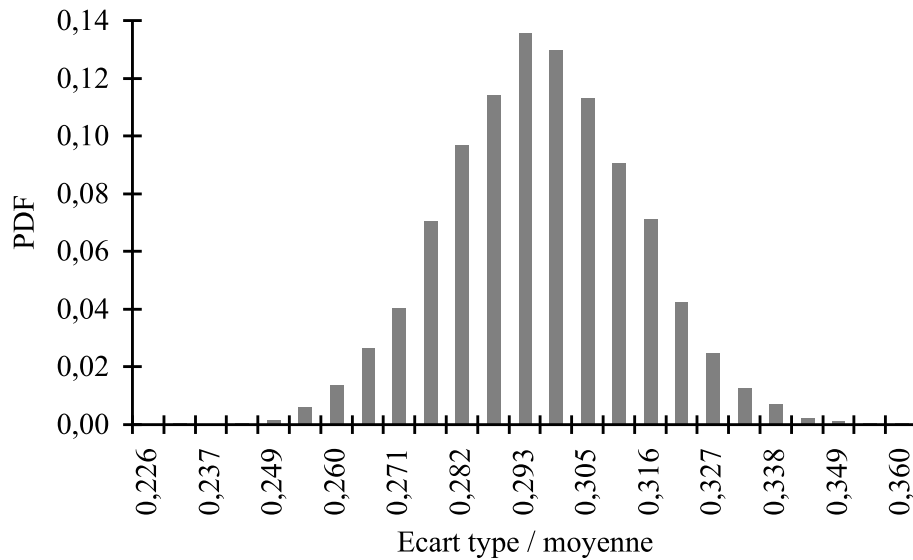
Nous proposons la même étude, cette fois-ci pour le champ total, à travers aussi 4 expériences au cours desquelles on collecte 150 mesures décorréliées de champ. Quand on étudie de manière similaire les valeurs du ratio écart type / moyenne obtenues pour le champ total, il apparaît logiquement que nos 4 expériences se situent aussi comme des événements très rares. Rappelons que dans le cas d'une loi en  $\chi$  à 6 degrés de liberté, le

Expérience	1	2	3	4
Ecart type / moyenne	0,36	0,35	0,36	0,40

**TAB. 1.2:** Valeur expérimentale du rapport écart type / moyenne pour  $N = 150$  mesures du champ total, collectées pour 30 positions de brasseur et 5 positions de sonde.

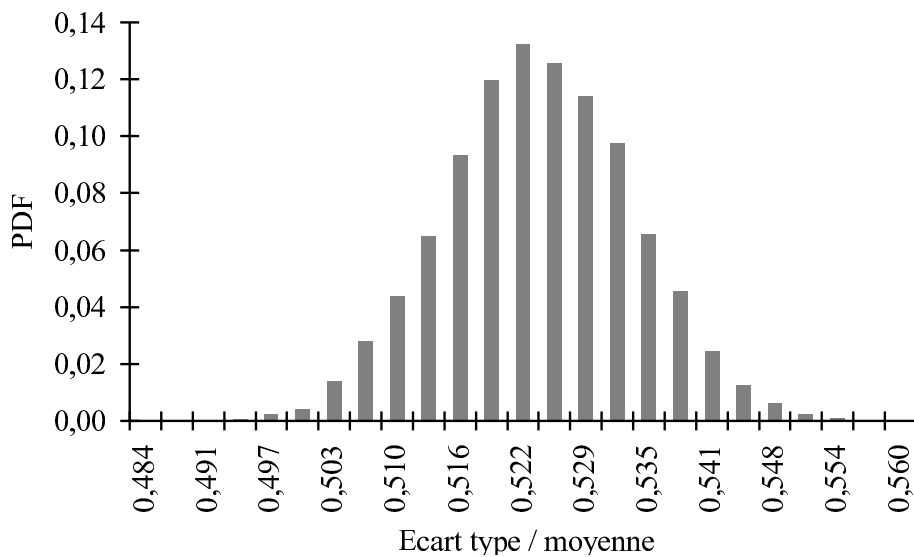
rapport théorique est 0,294. Or, d'après le tableau 1.2 les ratios expérimentaux se situent loin de la valeur théorique, et d'après la figure 1.2 dans l'extrémité de la distribution. Il apparaît donc que nos 4 expériences successives s'éloignent significativement de la théorie de Hill.

Pour s'en convaincre, nous renouvelons de nouveau plusieurs expériences, en augmentant la taille  $N$  de l'échantillon, de manière à réduire l'écart type de la distribution du rapport écart type / moyenne. Pour cette nouvelle série d'expériences, nous nous focalisons uniquement sur la mesure d'une composante rectangulaire de champ. Par simulation



**FIG. 1.2:** Densité de probabilité du rapport écart type / moyenne de  $N=150$  tirages aléatoires distribués selon une loi du  $\chi$  à 6 degrés de liberté.

numérique, nous obtenons la distribution du ratio écart type / moyenne en figure 1.3, pour  $N = 1500$  tirages de la loi de Rayleigh. Afin d'être plus significatif, ajoutons la valeur des



**FIG. 1.3:** Densité de probabilité du rapport écart type / moyenne de  $N=1500$  tirages aléatoires distribués selon une loi du  $\chi$  à 2 degrés de liberté.

quantiles à 1% et à 99% :

$$\begin{cases} q_{1\%} = 0,50 \\ q_{99\%} = 0,54 \end{cases} \quad (1.46)$$

Quant à la mesure, nous obtenons les valeurs indiquées dans le tableau 1.3 pour le ratio écart type / moyenne d'une série de 1500 mesures non corrélées d'une composante cartésienne de champ. Il apparaît clairement que nos ratios expérimentaux sont au-delà du quantile à 99% (1.46). Par conséquent, il est très peu probable que la loi de distribution des mesures d'une composante rectangulaire de champ soit la loi de Rayleigh. Par consé-

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ecart type / moyenne	0,57	0,59	0,61	0,59	0,58	0,59	0,58	0,56	0,59

**TAB. 1.3:** Valeur expérimentale du rapport écart type / moyenne pour  $N = 1500$  mesures d'une composante cartésienne de champ, collectées pour 50 positions de brasseur et 10 positions de sonde.

quent, concernant les mesures de champ en régime de cavité sur-dimensionnée à l'intérieur du volume utile de la CRBM, il semble raisonnable de penser que le modèle idéal est mis en défaut, par la simple analyse d'un rapport caractéristique de la loi de distribution.

### 1.3.3 Analyse de mesures de puissance

Il est couramment admis que les mesures de puissance sont distribuées selon la même loi de probabilité que les mesures d'une composante cartésienne de champ au carré. Autrement dit, pour une fréquence donnée, à partir de la distribution des relevés de puissance nous en déduisons la distribution des mesures de champ. Nous souhaitons néanmoins vérifier que l'on observe le même comportement que pour le champ, *i.e.* un écart notable avec le modèle idéal de Hill.

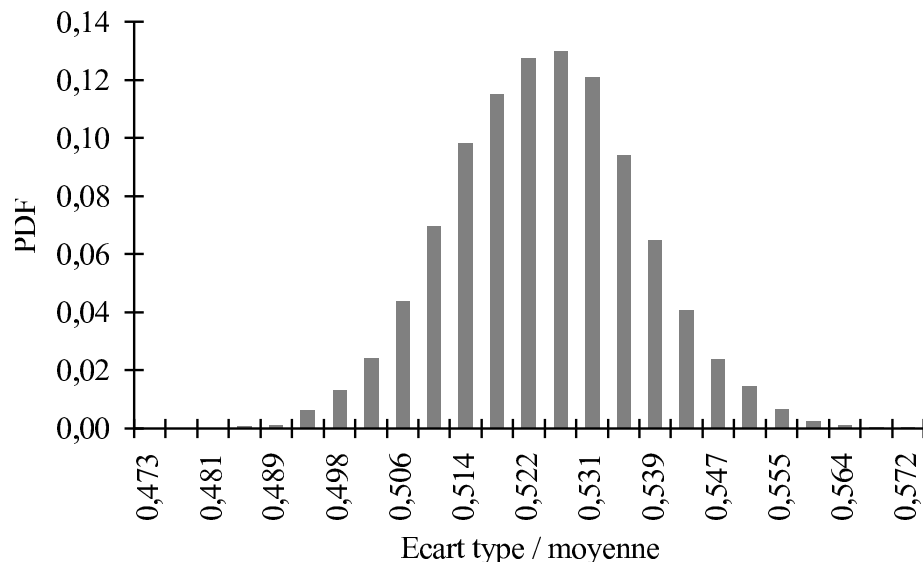
Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ecart type / moyenne	0,58	0,49	0,50	0,54	0,51	0,52	0,48	0,50	0,54

**TAB. 1.4:** Valeur expérimentale du rapport écart type / moyenne pour  $N = 900$  mesures de la racine carrée de la puissance à 900 MHz, collectées pour 30 positions de brasseur et 30 positions indépendantes d'antenne.

En figure 1.4, nous indiquons la distribution du rapport écart type / moyenne obtenue par simulation Monte-Carlo dans le cas  $N = 900$  pour une loi de Rayleigh. Il faut donc noter que l'on étudie la racine de la puissance mesurée et non la puissance directement. Le tableau 1.4 présente les rapports obtenus expérimentalement pour 7 séries de  $N = 900$  mesures non corrélées de puissance à 900 MHz, collectées à l'aide d'une antenne log-périodique (ETS-Lindgren modèle 3148) bien plus grande que la sonde de champ. Nous constatons, contrairement aux mesures de champ, que les ratios expérimentaux sont distribués autour de la valeur théorique (0,523). D'ailleurs, la moyenne de ces 9 ratios expérimentaux est 0,52. Il apparaît donc que les mesures de puissance respectent le modèle théorique de Hill alors que ce n'est pas le cas des mesures de champ.

### 1.3.4 Conclusion préliminaire

Nous avons présenté des résultats préliminaires basés sur une simple analyse d'un paramètre caractéristique des lois de distribution : le rapport écart type / moyenne qui est une constante dans le cas du modèle idéal d'une CRBM. Contrairement à la puissance, il semble au vu de ces premiers résultats que les mesures de champ ne vérifient pas ce



**FIG. 1.4:** Densité de probabilité du rapport écart type / moyenne de  $N=900$  tirages aléatoires distribués selon une loi du  $\chi$  à 2 degrés de liberté.

modèle. Il apparaît donc nécessaire d'approfondir cette analyse à l'aide d'outils statistiques plus évolués, tels que des tests d'ajustement à une loi de distribution analytique.



# Chapitre 2

## Rejet partiel du modèle idéal à l'aide de tests d'ajustement adaptés

### 2.1 Tests d'ajustement à une loi de probabilité

Le plus souvent, nous disposons de plusieurs tests d'ajustement permettant de valider ou rejeter une hypothèse. Nous verrons que l'un des critères de choix est la puissance du test. Cependant, il convient aussi de tenir compte des caractéristiques de la population que l'on étudie. Par exemple, le choix diffère selon qu'il s'agisse de données qualitatives ou quantitatives, de variables discrètes ou continues, etc.

Dans notre situation, nous souhaitons tester l'ajustement de la distribution de mesures, collectées par brassage des modes, à une loi de probabilité. On peut considérer nos mesures d'un point de vue statistique, *i.e.* comme une série de données du même type que le cours d'un titre financier ou les relevés météorologiques d'une zone géographique particulière. De nombreux ouvrages de référence, dans des domaines très variés, traitent de l'ajustement d'une série de valeurs aléatoires à une loi de distribution analytique [83, 84, 85, 86, 87, 88]. Les applications concernent de vastes domaines comme la biologie, l'écologie, l'économie..., en fait toutes les disciplines qui nécessitent des outils statistiques pour l'analyse de données aléatoires. C'est pourquoi il peut être intéressant de se référer à des études dans des domaines plus larges que l'activité chambre réverbérante.

#### 2.1.1 Puissance d'un test d'ajustement

Le principe d'un test d'ajustement est de déterminer la valeur d'un paramètre  $s$  appelé **statistique**, afin de le comparer avec une valeur critique tabulée  $s_\alpha(N)$ , fonction de la taille  $N$  de l'échantillon et d'un niveau de confiance  $1 - \alpha$  (ou seuil de risque  $\alpha$ ). L'hypothèse du test est souvent notée  $H_0$ . Il s'agit de l'hypothèse d'ajustement de la loi théorique à la distribution expérimentale. Pour le paramètre  $\alpha$  on parle aussi de niveau de significativité. Prenons l'exemple d'un seuil de risque  $\alpha = 5\%$ . Deux cas se présentent alors :

- si  $s \leq s_\alpha(N)$ , alors l'hypothèse  $H_0$  est acceptée au seuil de risque de 5%.



- si  $s > s_\alpha(N)$ , alors l'hypothèse  $H_0$  est rejetée au seuil de risque de 5%. Cela signifie qu'il y a 95% de chance pour que la loi de distribution empirique ne soit pas la loi théorique testée.

Nous allons maintenant introduire la notion de puissance de test. Le paramètre  $\alpha$  correspond au niveau de risque de rejeter l'hypothèse d'ajustement  $H_0$ , alors que cette hypothèse est juste. On parle alors d'erreur de première espèce. Il existe aussi une erreur de deuxième espèce. Il s'agit du risque  $\beta$  d'accepter l'hypothèse  $H_0$  alors que cette hypothèse est fautive. La puissance  $P$  d'un test est définie en lien avec le risque de seconde espèce par la relation suivante :

$$P = 1 - \beta \tag{2.1}$$

Nous pouvons limiter l'erreur de première espèce en choisissant convenablement le seuil de risque  $\alpha$ . Quant à l'erreur de seconde espèce, la minimiser revient à s'intéresser à la performance du test en maximisant la puissance du test d'ajustement. Très souvent, dans les publications statistiques traitant des tests d'ajustement, des éléments sur la puissance du test sont indiqués afin de comparer différents types de tests entre eux. Par exemple, dans son article de 1969, Lilliefors [89] propose une table de valeurs critiques pour le test de Kolmogorov-Smirnov (section 2.1.3) d'une loi exponentielle, avec les indications sur la puissance du test données en tableau 2.1. Il apparaît nettement que le test KS pour

Distribution sous-jacente	Seuil de risque $\alpha$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 30$
Log-normale	0,01	0,023	0,046	0,085
	0,05	0,082	0,113	0,215
	0,10	0,153	0,204	0,431
$\chi^2$ à 1 degré de liberté	0,01	0,105	0,265	0,623
	0,05	0,230	0,441	0,816
	0,10	0,383	0,569	0,929

**TAB. 2.1:** Probabilité de rejeter l'hypothèse de loi exponentielle par le test KS.

une loi exponentielle rejette plus souvent une loi du  $\chi^2$  à 1 degré de liberté que la loi log-normale.

### 2.1.2 Le test du $\chi^2$

Le test du  $\chi^2$  est très bien décrit dans de nombreux ouvrages tels que [90, 85]. L'objectif ici n'est pas de montrer à nouveau comment l'on procède mais de revenir sur l'utilisation de ce test. Précisément, ce type de test n'est pas à privilégier dans le cas de distributions continues, ce qui est le cas des distributions que l'on considère pour les mesures en CRBM. Il est indiqué par exemple dans [79] que le test KS est meilleur que le test du  $\chi^2$ . En général, la puissance du test du  $\chi^2$  n'est pas connue ce qui n'est pas le cas du test KS. De plus, le test KS considère les observations séparément les unes des autres, alors que le test du

$\chi^2$  nécessite une division en sous-groupes ce qui engendre une perte d'information. Par ailleurs, il est indiqué dans [89] que le test KS présente au moins deux avantages par rapport au test du  $\chi^2$ . D'une part, le test KS peut être utilisé avec un faible nombre d'échantillons, pour lequel la validité du test du  $\chi^2$  peut être remise en question. D'autre part, le test KS apparaît souvent comme un test plus puissant que le test du  $\chi^2$ , quelque soit la taille de l'échantillon. Quant à Stephens [91], il souligne que le test du  $\chi^2$  est plus approprié lorsque la distribution sous-jacente est discrète. En outre, il insiste aussi sur le fait que les tests du type KS ou Anderson-Darling (section 2.1.4) sont plus puissants que le test du  $\chi^2$ . Ajoutons également que ces tests sont plus simples à mettre en oeuvre que le test du  $\chi^2$  qui nécessite de réaliser des regroupements. Toutes ces raisons nous amènent à ne pas utiliser le test du  $\chi^2$  comme test d'ajustement de la distribution de nos mesures à une loi théorique.

### 2.1.3 Le test de Kolmogorov-Smirnov

Afin de présenter le test de Kolmogorov-Smirnov, nous remontons à l'article de Massey de 1951 [79] publié dans *The Journal of American Statistical Association*. Il y expose le test KS en fournissant une table de valeurs critiques, sur laquelle nous reviendrons plus loin (section 2.2.1). Il s'agit d'un test non-paramétrique, dont l'inconvénient principal réside dans la difficulté à trouver les tables adéquates de valeurs critiques. Cela explique peut-être le mauvais emploi de ces tests dont nous avons parlé en section 1.2. En effet, la plupart des tests d'ajustement réalisés pour des mesures en CRBM sont basés sur les valeurs critiques de Massey, dont nous verrons qu'elles sont inadaptées aux lois de distribution des mesures en chambre réverbérante. Cependant, si nous disposons des valeurs critiques adaptées au type de loi de distribution testée, le test KS peut être considéré comme un test d'ajustement particulièrement puissant.

Le test KS consiste à comparer la distribution cumulée expérimentale avec une fonction de répartition théorique (Fig. 2.1). On parle aussi de test d'adéquation, en anglais *goodness-of-fit test*. Le caractère non-paramétrique vient du fait que ce test est indépendant de la valeur de un ou plusieurs paramètres de la loi de distribution. L'utilisateur doit cependant choisir correctement la valeur critique par rapport au type de loi de distribution (normale, exponentielle, Rayleigh, etc.).

Soit la fonction de répartition expérimentale  $S_N(x) = k/N$  où  $k$  est le nombre d'observations inférieures ou égales à  $x$ , et  $N$  est la taille de l'échantillon. Soit  $F_0(x)$  la fonction de répartition théorique que l'on souhaite comparer. Le test consiste à vérifier l'hypothèse  $H_0$  qui consiste à supposer : « la loi de distribution de l'échantillon est la loi de probabilité  $F_0(x)$  ». La statistique dite de Kolmogorov-Smirnov est le paramètre noté  $d$  qui correspond à l'écart maximum entre la distribution expérimentale et la loi théorique :

$$d = \max|F_0(x) - S_N(x)|. \quad (2.2)$$

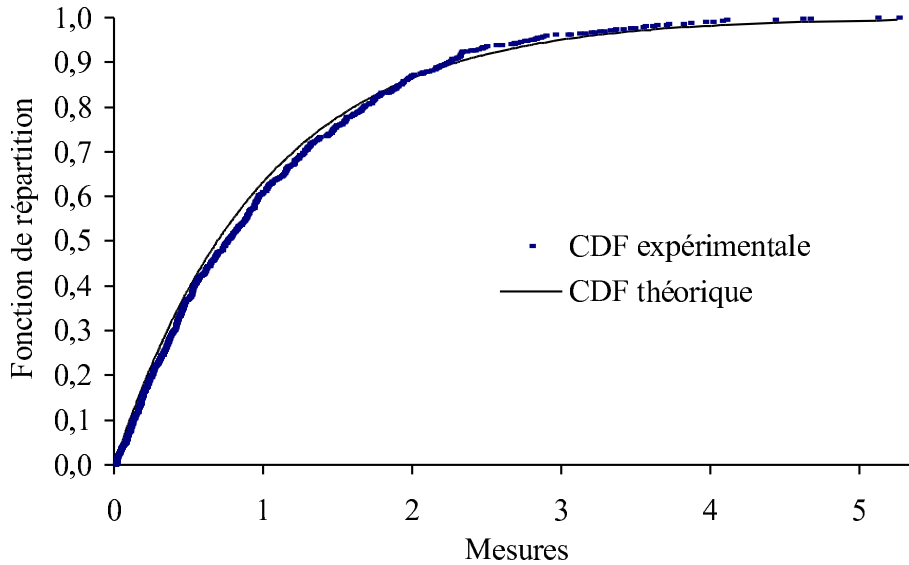


FIG. 2.1: Exemple de fonctions de répartition théorique et expérimentale.

La conclusion du test est le résultat de la comparaison de  $d$  avec la valeur critique  $d_\alpha(N)$ , tabulée en fonction de la taille  $N$  de l'échantillon et du niveau de confiance  $1 - \alpha$  que l'on souhaite donner à ce test. Par exemple, la table de Massey [79] fournit pour  $N = 30$  et un seuil de risque  $\alpha = 5\%$  (donc un niveau de confiance de 95%), la valeur critique suivante :

$$d_{5\%}(30) = 0,24. \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Le test de Anderson-Darling

Nous présentons maintenant un autre test non paramétrique qui n'apparaît pas dans les publications liées à la CRBM, bien qu'il soit légèrement plus puissant que le test KS. En outre, la pratique de ce test en complément du test KS peut permettre de confirmer l'ajustement de la distribution des mesures à une loi théorique. Le test de Anderson-Darling (AD) est traité entre autres par Stephens [91], ou encore dans des domaines faisant appel abondamment aux statistiques tels que la biologie ou l'écologie numérique [92]. Une particularité de ce test est qu'il est plus sensible que le test KS au niveau de la queue de distribution *i.e.* pour les valeurs extrêmes.

L'utilisation de ce test est aussi simple que le test KS. Elle repose sur le calcul d'une statistique que nous désignerons par  $A^2$ , et qui est comparée à une valeur critique, elle aussi tabulée en fonction de la taille  $N$  de l'échantillon et du niveau de risque  $\alpha$  que l'on tolère. De même que pour le test KS, il existe des tables de valeurs critiques adaptées à différentes lois de distribution (section 2.2.2). L'expression de la statistique de Anderson-Darling est la suivante :

$$A^2 = - \frac{\sum_{i=1}^N (2i - 1) [\ln F_0(x_i) + \ln(1 - F_0(x_{N+1-i}))]}{N} - N, \quad (2.4)$$

où  $F_0(x_i)$  est la fonction de distribution cumulée théorique, et  $x_i$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  valeur expérimentale ordonnée dans l'ordre croissant.

## 2.2 Valeurs critiques et estimation des paramètres inconnus

Dans la littérature statistique, depuis les années 60 avec Lilliefors [93, 89] et jusqu'à aujourd'hui, nous trouvons des tables de valeurs critiques adaptées à des lois diverses, pour les tests KS et AD. Après une étude bibliographique menée principalement dans la revue américaine *Journal of the American Statistical Association*, nous sommes en mesure de proposer à la communauté CRBM des tables de valeurs critiques appropriées.

Ces tables peuvent être générées de deux manières. La plus courante est la simulation numérique des lois de probabilité testées [91, 93, 89], dont le résultat est l'ensemble des quantiles des statistiques  $d$  ou  $A^2$ . Ces quantiles correspondent aux valeurs critiques que nous trouvons dans les tables. Au milieu des années 70, des statisticiens tels que Durbin [94] et Margolin [95] ont commencé à chercher des valeurs critiques de manière analytique. Leurs conclusions rejoignent ce que d'autres ont obtenu par simulation.

La principale limitation des tables est la taille de l'échantillon. Avec l'évolution des méthodes et des moyens de calculs, les chercheurs sont parvenus à fournir des valeurs critiques pour des échantillons plus nombreux. Pour illustrer ceci, en 1969, Lilliefors [89] a proposé des valeurs critiques pour  $N$  allant jusqu'à 50. Tandis que plus tard, en 1974, Stephens [91] allait plus loin en proposant des tables pour  $N$  allant jusqu'à 100 éléments.

### 2.2.1 Le critère de Massey : à proscrire

Dans cette section, nous touchons au coeur du problème soulevé auparavant (section 1.2) au sujet de l'analyse statistique des mesures en chambre réverbérante. En effet, bien que la table de Massey [79] soit généralement utilisée, elle n'est pas adaptée aux lois de distribution des mesures en CRBM.

Les premières tables des tests KS, comme la table de Massey, se basaient sur le fait que l'on connaissait les vrais paramètres de la distribution théorique. Par exemple, dans le cas de la loi normale, il s'agit de la moyenne et de la variance. En pratique, ce n'est presque jamais le cas puisque très souvent on **estime** ces paramètres à partir de l'échantillon prélevé. Dans ce cas, les tables originales sont trop conservatrices, *i.e.* on accepte alors trop souvent l'hypothèse  $H_0$  d'ajustement à la loi théorique.

Citons sur ce sujet en particulier l'article de Stephens [91]. Cette publication offre un guide pratique des tests d'ajustement à une loi de probabilité. Il est rappelé en particulier plusieurs situations possibles pour vérifier l'ajustement à une loi normale. Chaque cas correspond à une table différente de valeurs critiques :

- ①  $F_0(x)$  est continue et complètement spécifiée, *i.e.* il n'y a aucun paramètre à estimer. C'est le cas classique, pour lequel la table de valeurs critiques préconisée est celle de Massey;
- ②  $F_0(x)$  est la loi normale, dont la variance  $\sigma^2$  est connue et la moyenne  $\mu$  est estimée par l'estimateur  $\langle x \rangle$ ;
- ③  $F_0(x)$  est la loi normale, dont la moyenne  $\mu$  est connue et la variance  $\sigma^2$  est estimée par l'expression  $\sum_i (x_i - \mu)^2 / (N - 1)$ ;
- ④  $F_0(x)$  est la loi normale, mais les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont évalués par leur estimateur respectif.

Cet exemple montre bien la nécessité d'adapter son test et en particulier de choisir correctement le critère associé à la distribution théorique. Etant donné que Massey n'est généralement pas cité dans les tests, mais que par contre les valeurs critiques généralement utilisées sont issues de son article [79], nous figurons cette table dans ce document (Tab. 2.2). Insistons que l'on retrouve à tort ces valeurs critiques dans les tests statistiques appliqués à l'analyse des mesures en CRBM. En effet, les lois de Rayleigh et exponentielle (section 1.1.3) comportent un paramètre  $\theta$  que nous ne connaissons pas, et qu'il faut estimer par la méthode du maximum de vraisemblance (section 2.2.3).

## 2.2.2 Valeurs critiques adaptées aux mesures en CRBM

### 2.2.2.1 Test de la loi exponentielle

#### Test de Kolmogorov-Smirnov

Nous présentons ici les résultats de Lilliefors [89], Stephens [91] et Durbin [94] en fournissant les valeurs critiques du test KS de la loi exponentielle. Historiquement, Lilliefors a été le premier à proposer une telle table en 1969. Bien qu'elles soient présentées de manière différente, nous verrons que la différence entre ces valeurs critiques est négligeable, et confirme ainsi la validité du calcul de ces valeurs critiques.

Lilliefors a proposé le tableau 2.3 donnant les valeurs critiques pour le test KS. Si la statistique  $d$  calculée à partir des mesures, est supérieure à la valeur critique tabulée, alors l'hypothèse  $H_0$  d'ajustement à la loi exponentielle est rejetée. Il faut noter que l'extrapolation pour  $N > 30$  est issue d'une simulation numérique réalisée pour une taille d'échantillons allant jusqu'à 50. Par conséquent, au-delà de 50 données, l'incertitude sur la valeur critique peut être plus élevée.

Le tableau 2.4 donne la relation permettant de calculer les valeurs critiques selon Stephens. Son principal avantage est qu'il a réussi à étendre la simulation pour  $N$  allant jusqu'à 100 échantillons. Ses valeurs limites ne s'éloignent cependant que très peu des résultats de Lilliefors. Dans le cas de Stephens, il faut remarquer qu'il s'agit de valeurs seuils pour une expression dans laquelle intervient la statistique  $d$ . Il en résulte que, nous rejetons l'hypothèse  $H_0$  si la statistique **modifiée** indiquée en (2.5) est au-delà de la valeur

Taille $N$ de l'échantillon	Seuil de risque $\alpha$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
>35	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

**TAB. 2.2:** Table des valeurs critiques de Massey pour le test de Kolmogorov-Smirnov.

critique :

$$\left(d - \frac{0,2}{N}\right) \left(\sqrt{N} + 0,26 + \frac{0,5}{\sqrt{N}}\right) > \text{valeur critique.} \quad (2.5)$$

Le critère est fonction du seuil de risque et bien sûr de la taille  $N$  de l'échantillon.

Précisons qu'il est établi en statistique que la puissance d'un test croît avec la taille de l'échantillon, comme nous pouvons d'ailleurs l'observer en tableau 2.1. Par conséquent, il est intéressant de pouvoir bénéficier de tables prenant en compte des tailles d'échantillon élevées.

En 1975, Durbin a confirmé les critères proposés par ces 2 précédents auteurs, en proposant à nouveau une table de valeurs seuils (Tab. 2.5). Son résultat repose sur une étude analytique du test KS de la loi exponentielle, et les valeurs critiques sont exactes.

Taille $N$ de l'échantillon	Seuil de risque $\alpha$ pour $d = \max F_0(x) - S_N(x) $				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
3	0,451	0,479	0,511	0,551	0,600
4	0,396	0,422	0,449	0,487	0,548
5	0,359	0,382	0,406	0,442	0,504
6	0,331	0,351	0,375	0,408	0,470
7	0,309	0,327	0,350	0,382	0,442
8	0,291	0,308	0,329	0,360	0,419
9	0,277	0,291	0,311	0,341	0,399
10	0,263	0,277	0,295	0,325	0,380
11	0,251	0,264	0,283	0,311	0,365
12	0,241	0,254	0,271	0,298	0,351
13	0,232	0,245	0,261	0,287	0,338
14	0,224	0,237	0,252	0,277	0,326
15	0,217	0,229	0,244	0,269	0,315
16	0,211	0,222	0,236	0,261	0,306
17	0,204	0,215	0,229	0,253	0,297
18	0,199	0,210	0,223	0,246	0,289
19	0,193	0,204	0,218	0,239	0,283
20	0,188	0,199	0,212	0,234	0,278
25	0,170	0,180	0,191	0,210	0,247
30	0,155	0,164	0,174	0,192	0,226
>30	$\frac{0,86}{\sqrt{N}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{N}}$	$\frac{0,96}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,06}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,25}{\sqrt{N}}$

**TAB. 2.3:** Table des valeurs critiques de Lilliefors pour le test de Kolmogorov-Smirnov d'une loi exponentielle.

Stephens (1974)	Seuil critique pour $\left(d - \frac{0,2}{N}\right) \left(\sqrt{N} + 0,26 + \frac{0,5}{\sqrt{N}}\right)$				
Seuil de risque $\alpha$	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01
Valeur critique	0,926	0,990	1,094	1,190	1,308

**TAB. 2.4:** Table des valeurs critiques de Stephens pour le test de Kolmogorov-Smirnov d'une loi exponentielle.

Si l'on trace quelques graphes (Figs. 2.2, 2.3 et 2.4), on s'aperçoit rapidement du décalage entre les valeurs critiques de Massey, et les valeurs critiques adaptées à la loi exponentielle. Nous retrouvons ainsi l'analyse formulée par Legendre [92], *i.e.* la table de Massey est trop conservatrice. Nous pourrions penser que la différence, relativement faible, n'a pas d'incidence sur les tests d'ajustement. Or, nous constaterons par la suite que, bien que les lois du modèle idéal ne soient pas très éloignées de la distribution des mesures, elles ne sont pas toujours vérifiées. Nous pouvons espérer une meilleure corrélation entre la distribution théorique et une loi analytique, comme par exemple une meilleure

Taille $N$ de l'échantillon	Seuil de risque $\alpha$ pour $d\sqrt{N}$				
	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
2	0,7788	0,8392	0,8673	0,8887	0,8934
3	0,7808	0,8852	0,9540	1,0398	1,0905
4	0,8014	0,8884	0,9687	1,1148	1,2429
5	0,8056	0,9044	0,9884	1,1464	1,3001
6	0,8133	0,9141	1,0007	1,1631	1,3466
7	0,8196	0,9211	1,0084	1,1797	1,3708
8	0,8241	0,9260	1,0153	1,1902	1,3897
9	0,8275	0,9303	1,0212	1,1986	1,4037
10	0,8303	0,9343	1,0258	1,2057	1,4146
12	0,8351	0,9402	1,0327	1,2164	1,4315
14	0,8390	0,9446	1,0381	1,2243	1,4435
16	0,8420	0,9482	1,0424	1,2304	1,4526
18	0,8444	0,9511	1,0458	1,2352	1,4597
20	0,8465	0,9536	1,0486	1,2392	1,4656
22	0,8484	0,9557	1,0511	1,2425	1,4704
24	0,8499	0,9575	1,0531	1,2454	1,4745
26	0,8513	0,9591	1,0549	1,2478	1,4780
28	0,8525	0,9605	1,0565	1,2500	1,4810
30	0,8537	0,9617	1,0580	1,2519	1,4837
35	0,860	0,9644	1,0609	1,2558	1,4891
40	0,8579	0,9665	1,0633	1,2588	1,4933
45	0,8594	0,9682	1,0652	1,2613	1,4966
50	0,8608	0,9696	1,0668	1,2634	1,4996
60	0,8629	0,9720	1,0694	1,2665	1,5053
70	0,8645	0,9737	1,0714	1,2692	-
80	0,8658	0,9752	1,0729	1,2711	-
90	0,8669	0,9764	1,0742	1,2722	-
100	0,8678	0,9773	1,0753	1,2743	-

**TAB. 2.5:** Table des valeurs critiques de Durbin pour le test de Kolmogorov-Smirnov d'une loi exponentielle.

correspondance entre les ratios écart type / moyenne expérimental et théorique (section 1.3.2). De plus, les conséquences d'un écart entre la distribution théorique et l'expérience sur certaines applications peuvent ne pas être négligeable, *e.g.* pour définir précisément la *LUF* ou encore caractériser des antennes, discipline dans laquelle la précision est recherchée. Par ailleurs, réaliser un test d'ajustement à l'aide d'une table de valeurs critiques mal adaptée fausse tout simplement le résultat du test.

D'autre part, les figures 2.2, 2.3 et 2.4 montrent bien que la différence entre les critères proposés par Lilliefors, Stephens et Durbin est négligeable, en particulier si l'on considère



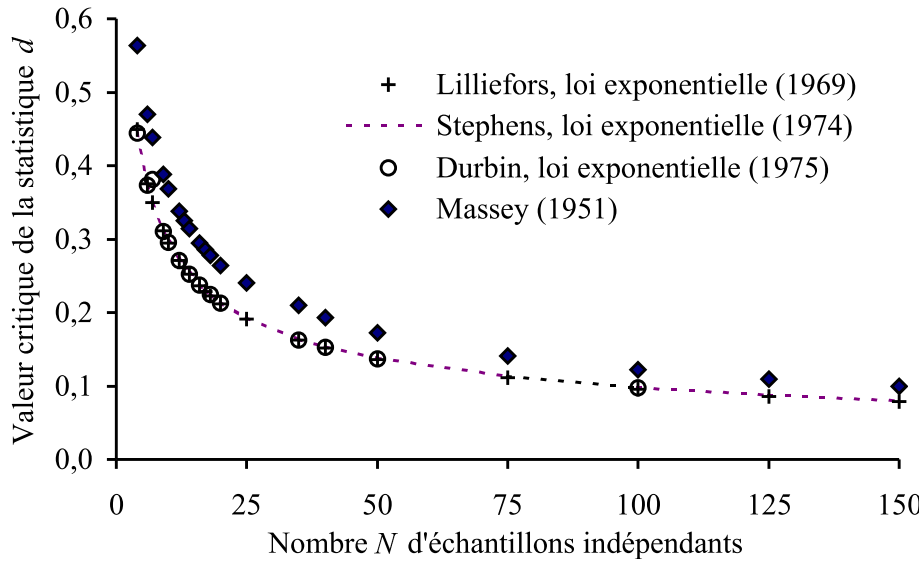


FIG. 2.2: Valeurs critiques au seuil de risque de 10% pour le test KS.

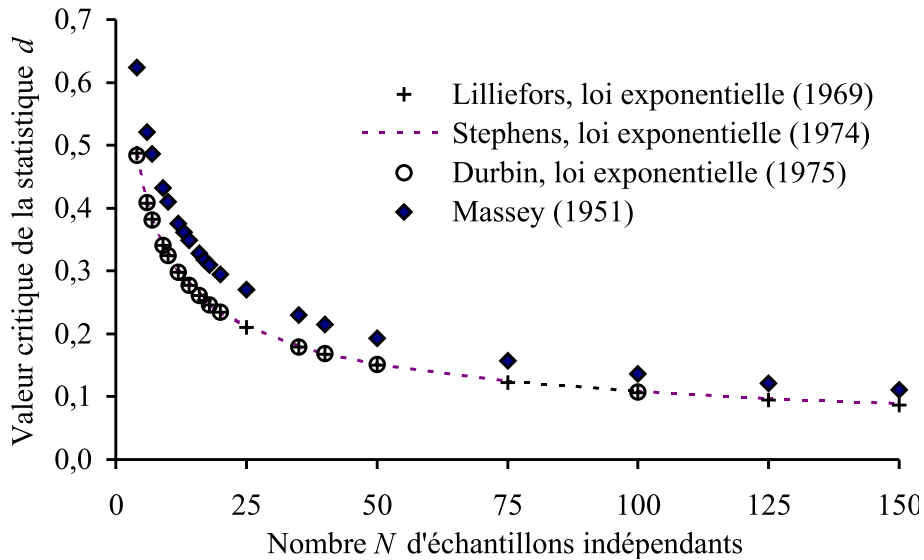


FIG. 2.3: Valeurs critiques au seuil de risque de 5% pour le test KS.

un seuil de risque de 5% comme c'est généralement le cas. Cela indique aussi que la précision de la simulation est tout à fait comparable à un calcul analytique des valeurs critiques.

Dans un souci de comparaison aisée, nous avons figuré sur les graphiques 2.2, 2.3 et 2.4 les valeurs critiques données par chacun des auteurs cités, pour la statistique  $d$ , et non directement la statistique modifiée comme c'est le cas de Stephens et Durbin.

Dans le cas où l'on extrapole très au-delà de  $N = 100$ , l'écart entre les valeurs critiques de Massey et les valeurs critiques adaptées se réduit. Etant donné que les valeurs critiques adaptées sont exactes jusqu'à  $N = 100$ , il vaut mieux éviter de considérer des échantillons trop nombreux, puisque l'incertitude sur la valeur critique augmente. En ce qui nous concerne, nous avons fait le choix de limiter notre étude à  $N = 150$ , et nous allons

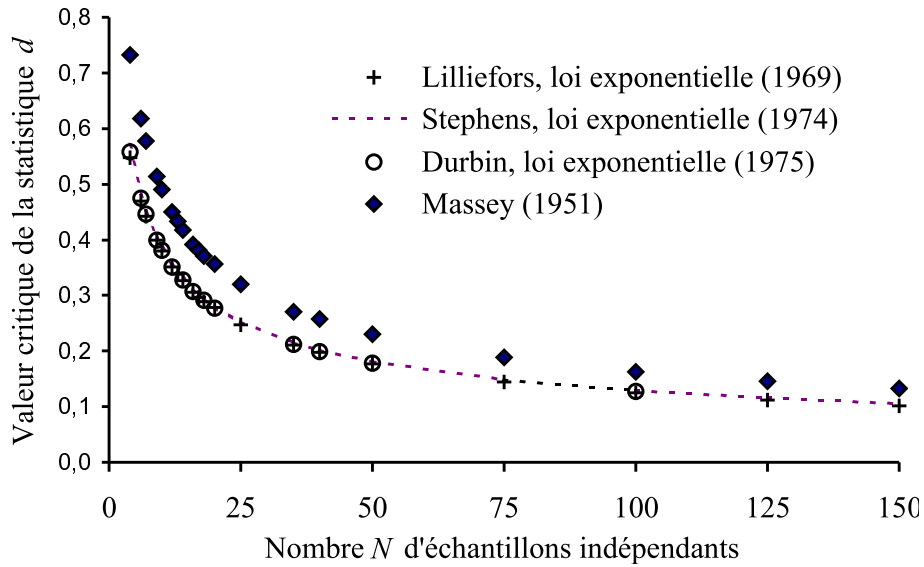


FIG. 2.4: Valeurs critiques au seuil de risque de 1% pour le test KS.

systématiquement prendre en compte, non pas les valeurs critiques de Massey, mais celles que l'on associe à Stephens puisqu'elles sont mieux adaptées.

### Test de Anderson-Darling

Dans cette section, nous indiquons les valeurs critiques requises dans la pratique du test de Anderson-Darling pour l'ajustement à une loi exponentielle. Dans son article de 1974, Stephens [91] propose les valeurs limites pour une statistique modifiée. Nous rejeterons l'hypothèse  $H_0$  d'ajustement à une loi exponentielle par le test AD si l'on observe la relation suivante :

$$A^2 \left( 1 + \frac{0,6}{N} \right) > \text{Valeur critique} \tag{2.6}$$

Nous résumons dans le tableau 2.6 le calcul de la valeur critique en fonction du niveau de confiance  $1 - \alpha$  et de la taille  $N$  de l'échantillon.

Stephens (1974)	Seuil critique pour $A^2 \left( 1 + \frac{0,6}{N} \right)$				
Seuil de risque $\alpha$	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01
Valeur critique	0,922	1,078	1,341	1,606	1,957

TAB. 2.6: Valeurs critiques pour le test de Anderson-Darling d'une loi exponentielle d'après Stephens [91].

#### 2.2.2.2 Test de la loi de Rayleigh

Plusieurs auteurs ont affirmé la nécessité de développer des tables de valeurs critiques pour des lois autres que la loi normale, pour laquelle une abondante littérature existe. Dans le cas de la loi de Rayleigh, l'article fondateur semble être celui de Margolin [95] publié en 1976. D'une part, il confirme de manière analytique les valeurs critiques présentées plus

haut pour le test KS d'ajustement à une loi exponentielle. D'autre part, il démontre que les tables produites par Durbin [94] pour le test KS d'ajustement à une loi exponentielle, sont applicables à d'autres lois de probabilités, en particulier la loi de Rayleigh.

Margolin s'appuie sur le lemme suivant. Si  $X_1, \dots, X_N$  sont des échantillons d'une population dont la distribution  $F_X(X, \theta)$  a un estimateur  $\hat{\theta}$  par le maximum de vraisemblance (section 2.2.3), et si  $Y_i = g(X_i)$  où  $i = 1, \dots, N$ , avec  $g$  une transformation monotone n'impliquant pas de paramètre, qui a pour inverse  $g^{-1}$ , alors la valeur de la statistique  $d(\hat{\theta}(Y))$  basée sur  $Y_1, \dots, Y_N$ , est égale à la valeur de  $d(\hat{\theta}(X))$  basée sur l'échantillon  $X_1, \dots, X_N$ . Ainsi, les deux statistiques ont la même distribution.

En particulier, il faut remarquer que si  $g$  est monotone croissante, alors pour tout  $i$ ,  $F_Y(Y_i, \theta)$  est égale à  $F_X(X_i, \theta)$ . Dans le cas où  $g$  est monotone décroissante, alors pour tout  $i$ ,  $F_Y(Y_i, \theta)$  est égale à  $1 - F_X(X_{N-i+1}, \theta)$ . Dans le cas où  $X$  suit une loi de distribution exponentielle, la v.a  $Y$  suit une loi de Rayleigh, avec  $g$  une transformation monotone croissante :

$$X = g^{-1}(Y) = Y^2. \quad (2.7)$$

Ajoutons que, entre une loi de Rayleigh et une loi exponentielle, on a bien égalité des deux estimateurs :

$$\hat{\theta}(Y) = \hat{\theta}(X). \quad (2.8)$$

Margolin ajoute que l'invariance du lemme s'étend à plusieurs statistiques basées sur  $F_X(X_i, \theta)$ , telles que les nombreuses statistiques de test d'ajustement considérées par Stephens dans [91]. D'ailleurs, et d'après ce qui précède, nous pouvons considérer que les valeurs critiques du test de Anderson-Darling de la loi exponentielle s'appliquent pour la loi de Rayleigh. Lors de l'utilisation des tests d'ajustement sur des séries de mesures en CRBM, nous vérifierons l'équivalence de ces valeurs critiques, que ce soit pour le test KS ou le test AD.

Jusqu'à maintenant, nous avons présenté des tests d'ajustement adaptés aux lois de distribution du modèle idéal d'une CRBM. Nous avons aussi mis en évidence que le critère de Massey est mal adapté, bien que couramment utilisé. Afin d'être complet sur le traitement des tests d'ajustement à une loi de distribution théorique, il nous reste à développer la méthode du maximum de vraisemblance, qui est nécessaire afin d'estimer le paramètre  $\theta$  des lois exponentielle et de Rayleigh.

### 2.2.3 Estimation des paramètres inconnus de la distribution

Les expériences statistiques sont souvent réalisées en vue d'estimer les valeurs inconnues de paramètres d'une loi de probabilité. Aussi, avant de vérifier si la distribution supposée est acceptable (hypothèse  $H_0$ ), il convient avant de réaliser le test, de s'assurer de la bonne estimation du ou des paramètres de la loi. Par exemple, avant de tester la loi exponentielle (1.32), il est nécessaire de donner une valeur au paramètre  $\theta$ . Pour que le test ne soit pas biaisé, il est indispensable d'estimer ce paramètre par la méthode du

maximum de vraisemblance, puisque c'est à l'aide de cette méthode que les tables de valeurs critiques (section 2.2) ont été produites.

### 2.2.3.1 Principe de l'estimation

Notre estimation du paramètre inconnu est une valeur unique qui, en général, ne coïncidera pas avec la vraie valeur (ou espérance) du paramètre. Mais nous voulons qu'elle soit en général « proche » de l'espérance. Nous utiliserons pour notre estimation une statistique ou un estimateur qui sera une v.a. en tant que fonction *a priori* des v.a.  $X_1, \dots, X_N$  de l'échantillon. Cet estimateur, lorsque l'on effectuera l'expérience, prendra une certaine valeur numérique qui sera notre estimation du paramètre inconnu.

Ainsi, pour estimer une moyenne  $\mu$  sur la base d'un échantillon de  $N$  données, nous pourrions nous servir de la moyenne de l'échantillon, de sa médiane, de la plus petite valeur, de la seconde plus petite, de la troisième observation, etc. Comment choisir parmi tous ces estimateurs ? Il faut trouver celui qui est le plus proche de l'espérance.

Formalisons le problème. Soit  $X$  une v.a. ayant une densité de probabilité  $f(X, \theta)$  dépendant d'un paramètre  $\theta$  à estimer. Une fonction  $\hat{\theta}$  de  $N$  observations de l'échantillon est une v.a. et possède de ce fait une densité de probabilité désignée par  $g(\hat{\theta})$ . La figure 2.5 présentant les densités de probabilités de trois fonctions  $\hat{\theta}$  permet d'illustrer les caractéristiques d'un bon estimateur.  $\theta$  étant la vraie valeur du paramètre à estimer,  $\hat{\theta}_1$  est

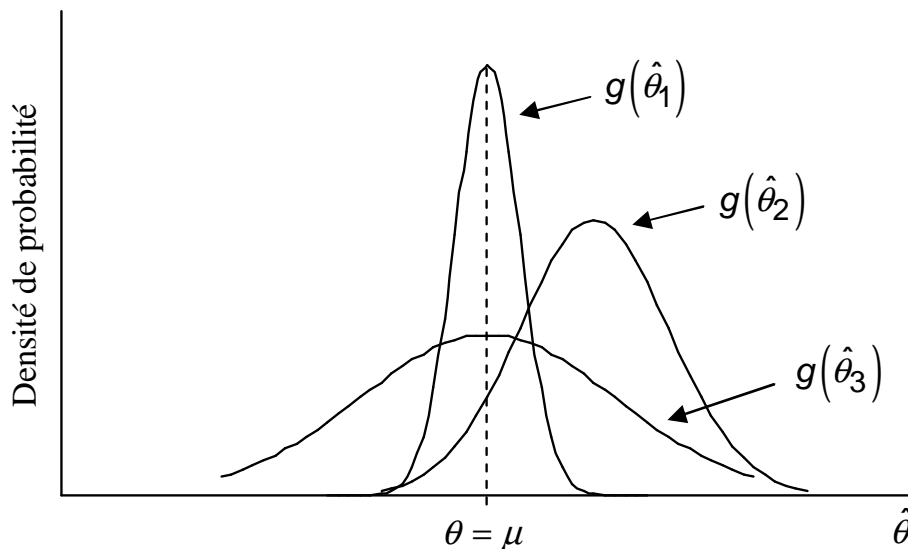


FIG. 2.5: Densité de probabilité de différents estimateurs.

le meilleur estimateur des trois. Cela ne veut pas dire que pour un échantillon donné,  $\hat{\theta}_2$  ou  $\hat{\theta}_3$  ne sera pas plus proche de  $\theta$  que  $\hat{\theta}_1$ . Cependant, sur une série d'échantillons, si elle est assez longue,  $\hat{\theta}_1$  sera en général plus proche de  $\theta$  que  $\hat{\theta}_2$  ou  $\hat{\theta}_3$ . On peut préciser cette notion de proximité en disant que c'est pour  $\hat{\theta}_1$  que le carré moyen de l'erreur est le plus faible :

$$E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 \text{ minimum de } E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2, E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2, E(\hat{\theta}_3 - \theta)^2$$

$$\text{avec : } E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})^2 g_i(\hat{\theta}_i) d\hat{\theta}_i. \quad (2.9)$$

### 2.2.3.2 Maximum de vraisemblance

Il existe plusieurs méthodes pour estimer un paramètre. Deux des plus couramment utilisées sont la méthode des moments et la théorie du maximum de vraisemblance. Dans la première, les estimations des différents paramètres sont obtenues comme solutions d'un système d'équations, en nombre suffisant, exprimant l'égalité des premiers moments d'échantillonnage et des moments de même ordre de la distribution de probabilité théorique.

Dans la méthode du maximum de vraisemblance, l'estimation  $\hat{\theta}$  du paramètre  $\theta$  inconnu est la valeur de  $\theta$  qui donne à l'échantillon que nous avons prélevé la plus grande probabilité - on dit aussi vraisemblance - d'être obtenue. Si  $L(X_1, \dots, X_N, \theta)$  est la probabilité d'obtenir un échantillon  $X_1, \dots, X_N$  lorsque la valeur du paramètre est  $\theta$ , l'estimation  $\hat{\theta}$  du maximum de vraisemblance est, parmi toutes les valeurs de  $\theta$  possibles, celle qui rend  $L(X_1^0, \dots, X_N^0, \theta)$  maximale pour l'échantillon  $X_1^0, \dots, X_N^0$  qu'on a effectivement obtenu. L'estimateur  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_N)$  est la fonction des observations, qui rend maximum la probabilité  $L(X_1, \dots, X_N, \theta)$  par rapport à tous les  $\theta$  possibles. Cet estimateur s'écrit généralement  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_N)$ , sous la forme implicite suivante :

$$\frac{\partial L(X_1, \dots, X_N, \hat{\theta})}{\partial \theta} = 0. \quad (2.10)$$

Dans la pratique, il est plus facile de manipuler le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance. C'est pourquoi on s'attache très souvent à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_N, \hat{\theta})}{\partial \theta} = 0. \quad (2.11)$$

Dans le cas où  $X$  est une variable continue, la fonction de vraisemblance est le produit des fonctions  $f(X_i)$  de densité de probabilité de chaque observation  $X_i$  :

$$L(X_1, \dots, X_N, \theta) = \prod_{i=1}^N f(X_i) \quad (2.12)$$

La relation (2.12) n'est valable que si les observations  $X_i$  sont **indépendantes**. Cette remarque nécessite donc de vérifier au préalable que les échantillons collectés sont bien indépendants. Dans la suite, nous présentons le calcul des estimateurs pour les lois du modèle idéal d'une CRBM.

### 2.2.3.3 Estimateur $\hat{\theta}$ de la loi exponentielle

La fonction de densité de probabilité de la loi exponentielle est indiquée par la relation (1.32). Par conséquent, la fonction de vraisemblance définie en (2.12) devient :

$$L(x_1, \dots, x_N, \theta) = \frac{1}{\theta^N} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N x_i}. \quad (2.13)$$

En prenant le logarithme népérien de cette expression, cela donne :

$$\ln L(x_1, \dots, x_N, \theta) = -N \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.14)$$

L'équation de vraisemblance consiste à maximiser l'expression (2.14). Par conséquent, la résolution de (2.11) permet d'avoir accès à l'estimateur du paramètre  $\theta$  de la loi exponentielle, qui s'écrit comme suit :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.15)$$

Ainsi, l'estimateur du paramètre de la loi exponentielle correspond à la moyenne des échantillons.

### 2.2.3.4 Estimateur $\hat{\theta}$ de la loi de Rayleigh

La fonction de densité de probabilité de la loi de Rayleigh est indiqué par la relation (1.28). De la même manière que ci-dessus, on accède à l'expression de l'estimateur  $\hat{\theta}$  du paramètre de la loi de Rayleigh, qui s'écrit :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2. \quad (2.16)$$

Il s'agit donc de la moyenne quadratique des valeurs mesurées. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait de ne pas utiliser l'expression (1.29) pour déterminer l'estimateur du paramètre  $\theta$  :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\theta \pi} \neq \frac{1}{2} \sqrt{\hat{\theta} \pi}. \quad (2.17)$$

Afin que le test statistique soit valable, nous insistons donc sur l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance dans le but d'estimer le paramètre de la loi.

## 2.3 Application à nos mesures

Dans cette section, nous appliquons les tests d'ajustement aux lois exponentielle et de Rayleigh à nos mesures en chambre réverbérante. Nous précisons pour chaque étude statistique la valeur du coefficient de corrélation (1.44), pour justifier la non corrélation des échantillons. Par ailleurs, tous les résultats des tests d'ajustement sont donnés pour

un niveau de confiance de 95%, *i.e.* un seuil de risque de 5% (cf. section 2.1.1). Il s'agit du seuil généralement utilisé pour des tests statistiques, quelles que soient les disciplines, car il correspond à un bon compromis afin d'obtenir un test d'ajustement significatif. De plus, plutôt que de ne tenir compte que d'un seul test pour une condition expérimentale spécifique (taille d'échantillons, fréquence d'émission), nous étudierons un taux de rejet résultant d'un grand nombre de tests d'ajustement. Cela permet d'être plus significatif qu'un unique test d'ajustement. Le taux de rejet est ici défini comme le rapport du nombre de tests ayant donné lieu à un rejet de l'hypothèse d'ajustement  $H_0$ , sur le nombre total de tests réalisés.

L'ensemble des expériences est effectué dans la chambre réverbérante à brassage de modes de l'IETR (Fig. 2.6). Ses dimensions sont 2,9 m  $\times$  3,7 m  $\times$  8,7 m et correspondent respectivement aux axes y, z et x de la sonde de champ (cf. section 2.3.1). La  $LUF$  est d'environ 250 MHz et les mesures sont réalisées dans la bande de fréquence [200 MHz ; 1100 MHz], par pas de 100 MHz. Nous respectons en particulier une distance minimale de

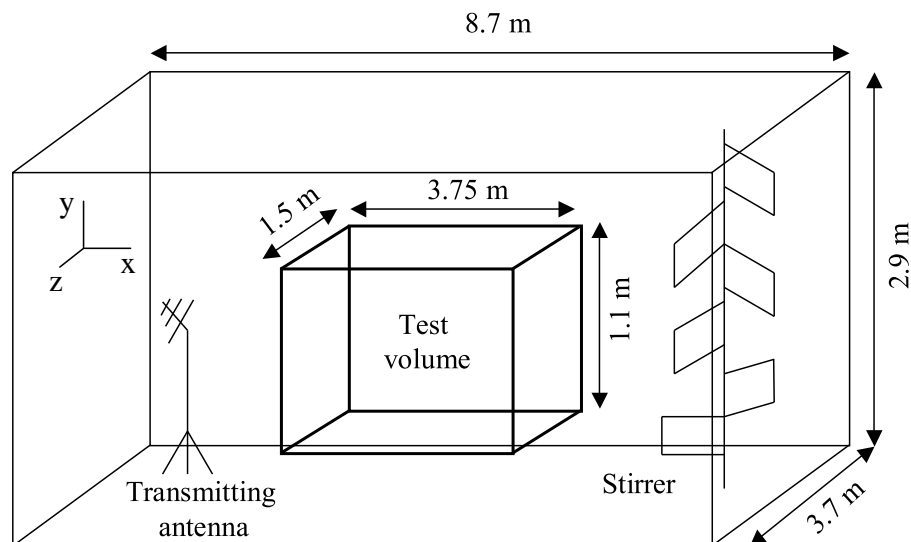
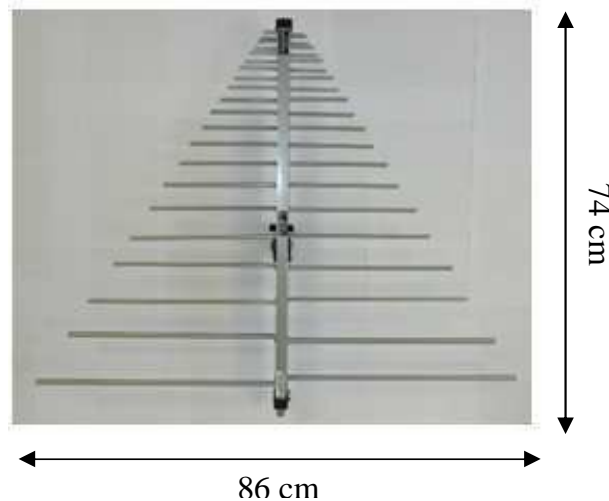


FIG. 2.6: Chambre réverbérante à brassage de modes de l'IETR.

$\lambda/2$  entre chaque position du récepteur (antenne ou sonde champ), de manière à décorrélérer spatialement les positions de la réception [4]. Le volume de test (Fig. 2.6) est suffisamment loin des parois métalliques de la cavité et du brasseur de modes puisque nous respectons une distance d'au moins  $\lambda/2$  à la plus basse fréquence. L'antenne d'émission (Fig. 2.7) est une antenne log-périodique (ETS-Lindgren modèle 3148 : hauteur 6,4 cm, largeur 85,6 cm, profondeur 73,7 cm). Elle est placée dans un coin de la CRBM (Fig. 2.6), en dehors du volume de test, et orientée vers ce coin de la cavité afin de limiter au maximum le couplage entre l'émetteur et le récepteur.

### 2.3.1 Résultat des tests sur les mesures de champ

Les mesures d'une composante cartésienne de champ  $E_R$  sont obtenues à l'aide d'une sonde de champ triaxiale (Hi6005), qui fournit la valeur de chaque composante rectan-



**FIG. 2.7:** Antenne log-périodique utilisée en émission (ETS-Lindgren modèle 3148) désignée par "large LP".

gulaire du champ électrique (Fig. 2.8). Elle est constituée de trois antennes monopôles orthogonales, afin d'assurer une mesure isotropique du champ électrique. Chaque monopôle est inscrit dans un volume de  $3,2 \text{ cm}^3$ , dont les dimensions sont approximativement : hauteur 10 mm, largeur 10 mm, profondeur 32 mm. De manière à mesurer des champs



**FIG. 2.8:** Sonde de champ triaxiale (Hi6005) utilisée pour la mesure des trois composantes cartésiennes du champ électrique.

plus élevés que la sensibilité de la sonde, un amplificateur est utilisé en émission. De 200 MHz à 400 MHz, le champ est mesuré pour 30 positions de brasseur (mode pas à pas) et 30 positions de sonde. Cela permet d'avoir accès à 2700 échantillons indépendants de  $E_R$  à chaque fréquence. Plus précisément, cela conduit à 900 mesures de  $E_R$  par composante cartésienne puisque les mesures ont été analysées composante par composante. De 500 MHz à 1100 MHz, 1500 mesures de  $E_R$  par composante rectangulaire sont collectées à chaque fréquence, sachant que 50 positions de brasseur (et non 30) sont considérées. Par conséquent, cela conduit par exemple à 90 tests d'ajustement par fréquence (30 par composante rectangulaire de champ) pour des séries de taille  $N = 50$  échantillons indépendants. Hormis pour la position de la réception au sein du volume de test, les mesures sont pilotées automatiquement à l'aide d'un ordinateur.

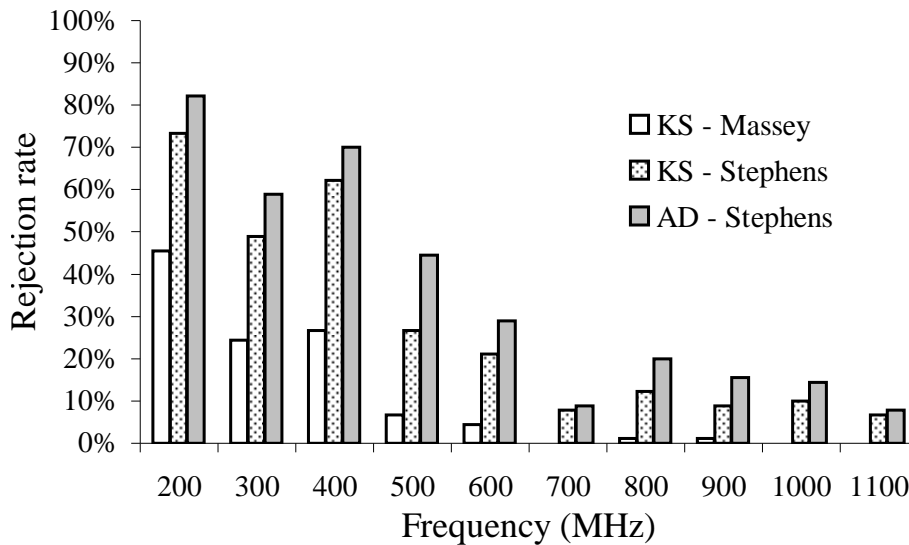


Les valeurs de la fonction d'autocorrélation au premier ordre  $r$  (Tab. 2.7) indiquent que les échantillons mesurés peuvent être considérés comme indépendants (cf. section 1.3.1). Par conséquent, nous pouvons appliquer la méthode du maximum de vraisemblance

f (MHz)	200	300	400	500	600
$r_{E_x}$	0.04	0.06	0.04	0.01	-0.03
$r_{E_y}$	0.03	0.04	0.02	0.04	-0.02
$r_{E_z}$	0.07	0.01	0.02	0.04	-0.03
f (MHz)	700	800	900	1000	1100
$r_{E_x}$	-0.01	0.01	-0.01	-0.03	-0.03
$r_{E_y}$	0.03	0.01	-0.05	-0.05	-0.03
$r_{E_z}$	-0.02	-0.06	-0.03	-0.02	-0.05

**TAB. 2.7:** Valeur de la fonction d'autocorrélation au premier ordre pour la mesure d'une composante rectangulaire de champ  $E_R$ .

décrite en section 2.2.3.2 afin d'estimer le paramètre  $\theta$  de la loi de Rayleigh. Il en résulte que le développement de tests d'ajustement à la loi de Rayleigh peut s'appliquer à nos mesures de  $E_R$ . Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 sont le résultat d'un grand nombre de tests



**FIG. 2.9:** Tests d'ajustement à la loi de Rayleigh pour des mesures de  $E_R$  ( $N = 50$ ).

d'ajustement à la loi de Rayleigh, pour des tailles d'échantillons variant de 50 à 150 mesures de  $E_R$ . Nous désignons par KS-Massey et KS-Stephens les tests de Kolmogorov-Smirnov (section 2.1.3) utilisant respectivement les valeurs critiques de Massey (cf. section 2.2.1) et de Stephens (cf. section 2.2.2). De même, nous désignons par AD-Stephens le test de Anderson-Darling (section 2.1.4) utilisant les valeurs critiques de Stephens (cf. section 2.2.2). Nous remarquons que la loi de Rayleigh est fortement rejetée, avec un taux de rejet très supérieur au seuil de risque de 5%. Par conséquent, comme nous l'avons mis en évidence par des expériences préliminaires (section 1.3.2), les mesures de  $E_R$  ne sont

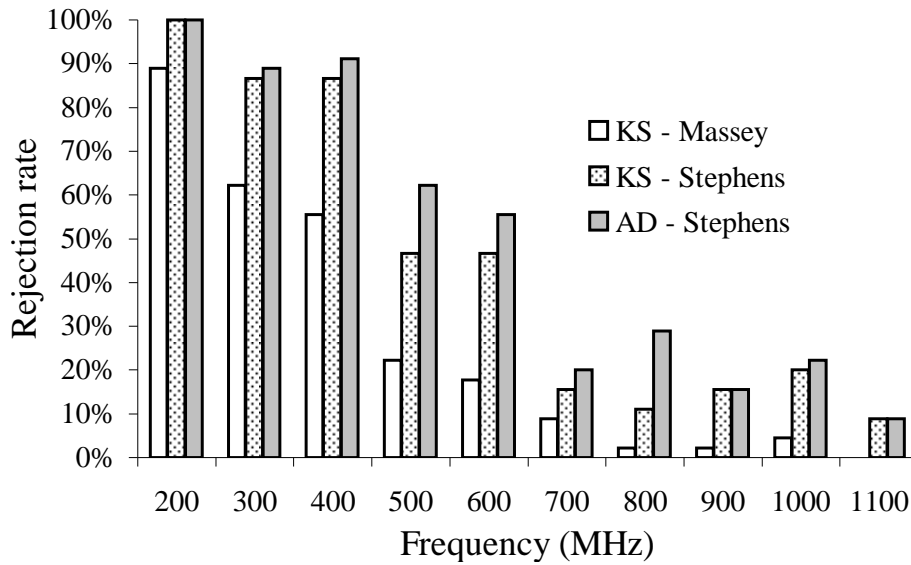


FIG. 2.10: Tests d'ajustement à la loi de Rayleigh pour des mesures de  $E_R$  ( $N = 100$ ).

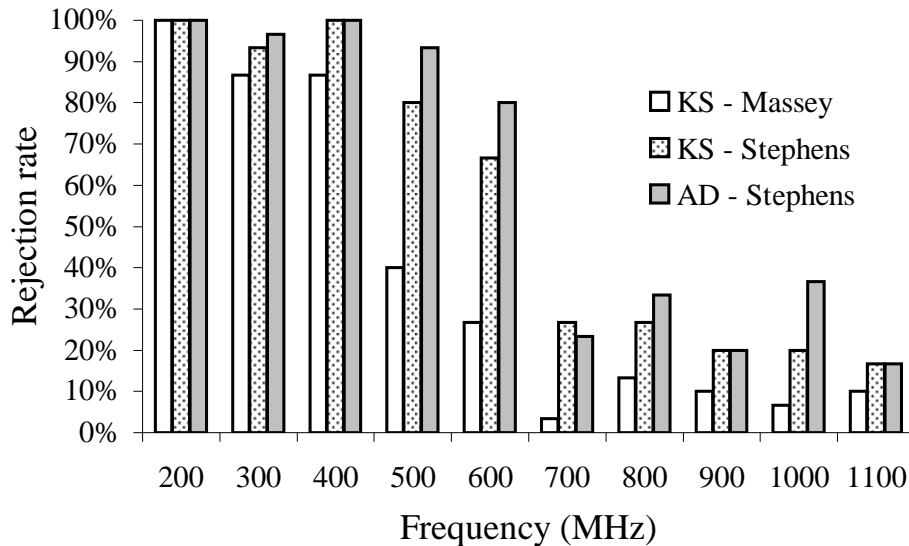


FIG. 2.11: Tests d'ajustement à la loi de Rayleigh pour des mesures de  $E_R$  ( $N = 150$ ).

pas distribuées selon une loi de Rayleigh. Dans la section 3, nous proposerons une autre candidate pour représenter analytiquement la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ.

De 200 MHz à 600 MHz, les taux de rejet sont très élevés, quelle que soit la valeur critique utilisée. D'une manière générale, en ce qui concerne le test KS, on note une nette distinction entre le test biaisé (cf. section 2.2.1) de Massey et le test adapté de Stephens. Les taux de rejet les plus faibles liés à l'utilisation de la valeur critique de Massey, indiquent que ce critère est effectivement trop conservateur, *i.e.* le test tend à accepter plus souvent l'hypothèse  $H_0$ . Quant au test KS utilisant la valeur critique de Stephens, plus approprié dans le cas de la loi de Rayleigh, il fournit des taux de rejet plus élevés.

Le test AD conduit à un taux de rejet encore plus grand que le test KS, ce qui est cohérent avec le fait que le test AD est plus puissant que le test KS, même avec les

valeurs critiques adéquates (cf. section 2.1.4). Par exemple, à 800 MHz pour  $N = 100$  échantillons, le test KS-Massey ne conduit qu'à un taux de rejet de 2%. Par conséquent, nous pourrions conclure que la loi de Rayleigh représente bien la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ. Tandis qu'avec des valeurs critiques adaptées, le test KS-Stephens conduit à un rejet dans 10% des cas, et le test AD-Stephens rejette une série sur trois. Donc avec des valeurs critiques adaptées, nous ne pouvons pas nous satisfaire de la loi de Rayleigh pour représenter correctement la distribution des mesures de  $E_R$ .

Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 montrent que plus le nombre d'échantillons est faible, et plus le taux de rejet diminue. En particulier, les valeurs critiques du test KS-Massey, adaptées uniquement pour une loi de probabilité entièrement définie, peuvent donner lieu à un taux de rejet très faible pour des séries d'échantillons de petite taille. Par conséquent, son utilisation peut conduire à tort à accepter la loi de Rayleigh. Par ailleurs, pour un grand nombre d'échantillons indépendants, les tests KS-Stephens et AD-Stephens fournissent approximativement les mêmes résultats. Nous pouvons tout de même noter, en particulier pour  $N$  faible, que le test AD-Stephens devrait être privilégié puisqu'il s'agit d'un test de puissance plus élevée que le test KS-Stephens (Fig. 2.9).

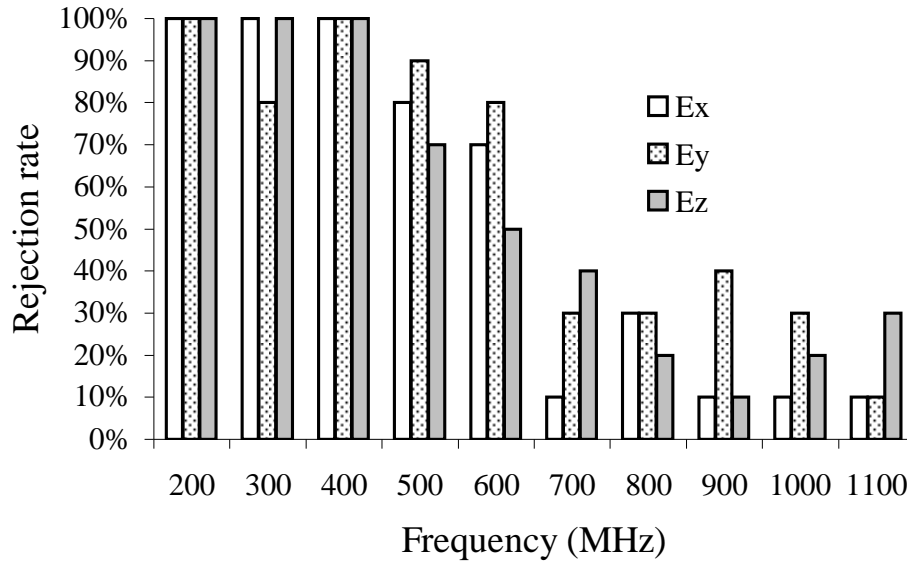
Frequency (MHz)	Mean value (V/m)			Ratio $\sigma/\mu$		
	$E_x$	$E_y$	$E_z$	$E_x$	$E_y$	$E_z$
200	14.5	20.2	16.9	0.79	0.85	0.83
300	38.8	59.8	40.2	0.71	0.71	0.67
400	25.2	38.5	28.0	0.68	0.72	0.69
500	37.1	50.9	37.3	0.63	0.67	0.63
600	35.5	45.5	38.0	0.64	0.65	0.63
700	32.3	44.3	32.2	0.56	0.57	0.58
800	39.1	49.1	39.3	0.60	0.58	0.58
900	44.5	52.6	44.5	0.58	0.59	0.56
1000	52.5	58.1	47.4	0.59	0.59	0.56
1100	15.3	18.3	15.2	0.53	0.55	0.55

**TAB. 2.8:** Valeur moyenne  $\mu$  et ratio écart type sur moyenne  $\sigma/\mu$  de chaque composante rectangulaire du champ électrique, en fonction de la fréquence.

Le tableau 2.8 présente deux caractéristiques des mesures de champ : la moyenne  $\mu$  et le ratio écart type sur moyenne  $\sigma/\mu$  de chaque composante cartésienne du champ électrique<sup>1</sup>. Même si la chambre se rapproche plus d'un parallélépipède que d'un cube, en particulier même si une des trois dimensions est relativement longue, les ratios  $\sigma/\mu$  des

1. Le ratio  $\sigma/\mu$  est d'environ 0,52 pour une distribution  $\sigma$  de Rayleigh (cf. équations (1.10)).

trois composantes cartésiennes sont homogènes à chaque fréquence. Par ailleurs, la figure



**FIG. 2.12:** Tests KS-Stephens d’ajustement à la loi de Rayleigh pour des mesures de  $E_R$  ( $N = 150$ ) en distinguant les trois composantes cartésiennes de champ.

2.12 indique le résultat du test KS-Stephens pour les mesures de  $E_R$ , en séparant l’analyse composante par composante. Nous pouvons observer le même comportement du taux de rejet, quelle que soit la composante cartésienne. Ainsi, bien que les trois composantes soient toujours testées séparément dans notre étude, nous n’introduisons pas de biais dans l’analyse statistique de la distribution des mesures, en regroupant les trois composantes comme indiqué sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11.

Nous ajoutons qu’une étude similaire, cette fois-ci sur les mesures normalisées par la moyenne, donne exactement les mêmes taux de rejet que ceux indiqués en figures 2.9, 2.10 et 2.11. Plus précisément, le rejet a lieu pour les mêmes séries testées. Par conséquent, il est bien **équivalent** du point de vue du test d’ajustement, de tester les mesures brutes, ou les mesures rapportées à leur valeur moyenne. Par ailleurs, nous obtenons également les mêmes résultats lorsque nous testons l’ajustement des mesures de  $E_R^2$  à une loi exponentielle. Cela confirme donc le lemme de Margolin (section 2.2.2.2). Il est ainsi **équivalent** de tester l’ajustement de  $E_R^2$  à une loi exponentielle, et l’ajustement de  $E_R$  à une distribution de Rayleigh.

Dans le but de disposer de résultats significatifs à l’aide des tests d’ajustement, un effort important a été fourni pour produire un grand nombre de résultats statistiques. En particulier, pour illustrer le désaccord entre la distribution de  $E_R$  et la loi de Rayleigh, il ne suffit pas de considérer une seule série de mesures, et de conclure à l’issue d’un seul test d’ajustement.

Cette analyse montre que la chambre réverbérante n’a pas un comportement suffisamment proche du modèle idéal pour accepter la loi de distribution de Rayleigh pour des mesures de  $E_R$ . En particulier, nous devons être prudents dans le choix des valeurs critiques à associer au test d’ajustement à une loi de distribution. De plus, puisque la

puissance d'un test croît avec la taille  $N$  de l'échantillon prélevé, il est plus significatif de choisir un grand nombre d'échantillons. La section suivante est consacrée à la même analyse, pour des mesures de puissance en réception d'une antenne de grande dimension, afin d'observer le comportement de la distribution des mesures par rapport au modèle idéal.

### 2.3.2 Résultat des tests sur les mesures de puissance

Dans le cas des mesures de puissance, le protocole expérimental est le suivant. Les mesures sont réalisées à l'aide d'une antenne log-périodique (même référence que l'antenne d'émission), de 200 MHz à 1100 MHz, par pas de 100 MHz. A chaque fréquence, 30 positions indépendantes de l'antenne de réception sont prises en compte. De 200 MHz à 300 MHz, nous utilisons 30 positions indépendantes du brasseur, toujours en mode pas à pas. Cela permet donc d'avoir accès à 900 relevés indépendants de puissance, mesurés à l'analyseur de spectre, à chaque fréquence. Au-delà de 400 MHz, étant donné qu'un plus grand nombre de positions du brasseur non corrélées sont disponibles sur un tour complet, nous en sélectionnons 50. Cela conduit donc à disposer de 1500 mesures de puissance à chaque fréquence.

f (MHz)	200	300	400	500	600
$r$	0.08	0.06	0.02	-0.01	0.02
f (MHz)	700	800	900	1000	1100
$r$	-0.04	-0.01	0.00	0.04	-0.06

**TAB. 2.9:** Valeur de la fonction d'autocorrélation au premier ordre pour des mesures de puissance.

Les valeurs de la fonction d'autocorrélation au premier ordre sont indiquées dans le tableau 2.9. Nous pouvons vérifier que les échantillons considérées sont non corrélés. Dès lors, nous pouvons appliquer la méthode du maximum de vraisemblance afin d'estimer le paramètre  $\theta$  de la loi exponentielle. Puis, nous pouvons appliquer les tests d'ajustement à la loi exponentielle, de la même manière que nous avons procédé pour les tests d'ajustement des mesures de  $E_R$  à une loi de Rayleigh.

Les figures 2.13, 2.14 et 2.15 montrent le résultat des tests d'ajustement des mesures de puissance à la loi exponentielle, respectivement pour  $N = 50$ ,  $N = 100$  et  $N = 150$  échantillons indépendants. Sur la figure 2.14, au-delà de 300 MHz, la loi exponentielle est largement acceptée par les test adaptés KS-Stephens et AD-Stephens. Par exemple, à 700 MHz, aucun test ne rejette l'hypothèse  $H_0$  d'ajustement à la loi exponentielle. Ainsi, le taux de rejet vaut 0% quelque soit la valeur critique utilisée. Par contre, à 200 MHz, la distribution exponentielle est massivement rejetée. De plus, nous pouvons noter que le test KS-Massey ne rejette pas cette loi de distribution (taux de rejet de 0%). Or, la valeur de critique de Massey n'est pas adaptée au test KS d'ajustement à la loi exponentielle.

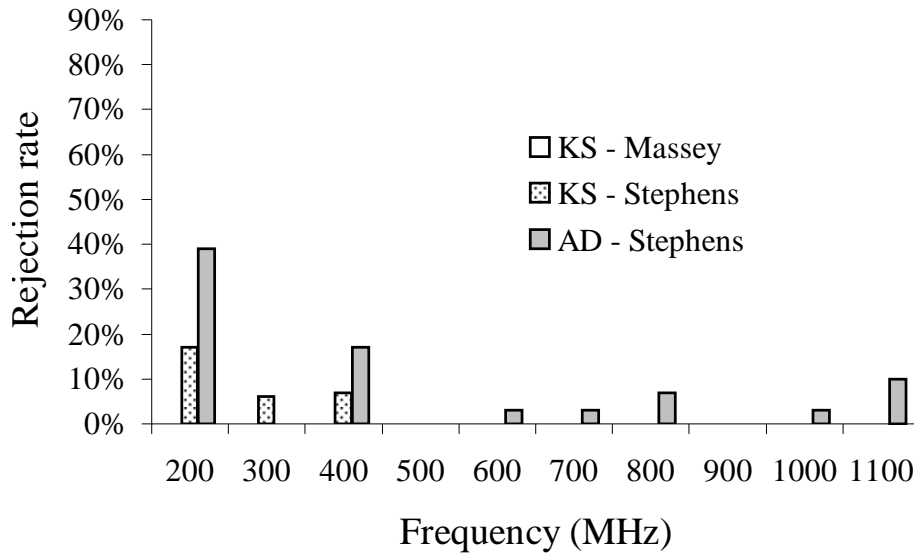


FIG. 2.13: Tests d'ajustement à la loi exponentielle pour des mesures de puissance ( $N = 50$ ).

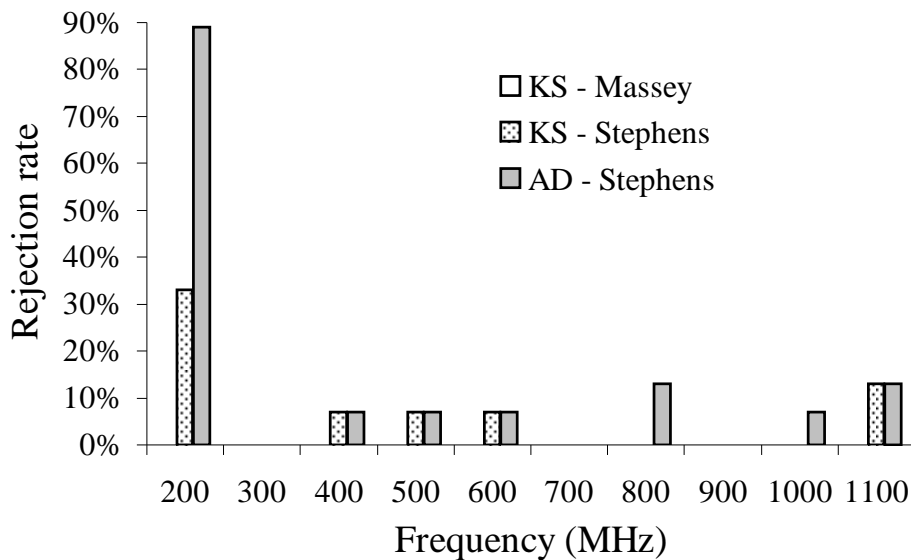


FIG. 2.14: Tests d'ajustement à la loi exponentielle pour des mesures de puissance ( $N = 100$ ).

Par conséquent, son utilisation indique des résultats erronés. En particulier, le test KS-Massey conduit à une mauvaise estimation de la fréquence minimum pour laquelle la loi exponentielle correspond à la distribution expérimentale des mesures de puissance.

Une comparaison des figures 2.13, 2.14 et 2.15 montre que les tests d'ajustement ne semblent pas rejeter plus massivement la loi lorsque la taille  $N$  d'un échantillon de mesures augmente. Cela est cohérent avec le bon ajustement de la loi exponentielle pour des mesures de puissance. En effet, si la loi exponentielle n'était pas conforme à la distribution expérimentale, alors le taux de rejet augmenterait avec la taille  $N$  des échantillons. C'est la caractéristique de la puissance d'un test d'ajustement (cf. section 2.1.1).

Lorsque l'on désire comparer différentes chambres réverbérantes, pour faciliter l'interprétation des résultats, il est souvent pratique de normaliser les mesures à la moyenne afin de s'affranchir du niveau de puissance injecté dans la chambre. De même que ce que nous

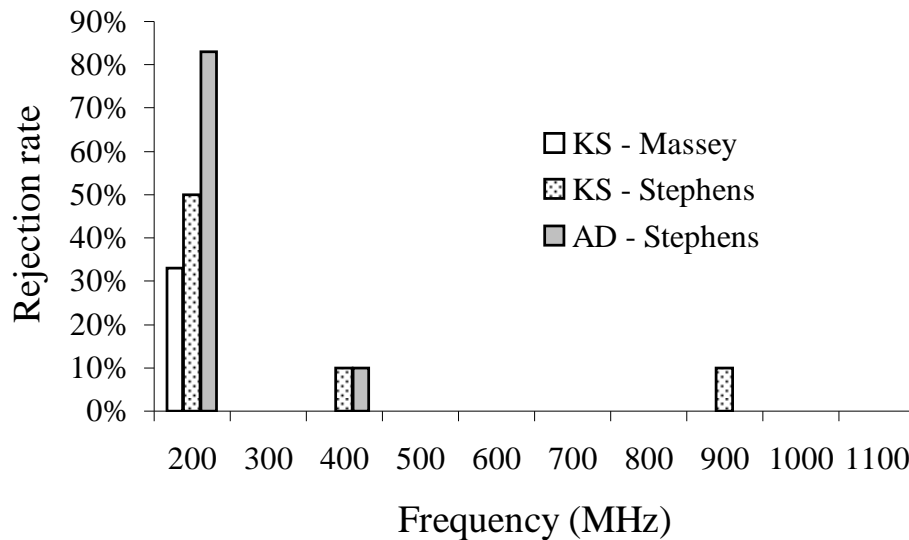


FIG. 2.15: Tests d'ajustement à la loi exponentielle pour des mesures de puissance ( $N = 150$ ).

avons observé en section (2.3.1) pour l'analyse de la distribution de  $E_R$ , nous obtenons les mêmes résultats concernant l'ajustement des mesures de puissance  $P$  à la loi exponentielle, lorsque l'on a au préalable normalisé les mesures par leur moyenne. De plus, nous obtenons exactement les mêmes résultats lorsque l'on teste la distribution de  $\sqrt{P}$ , au lieu de  $P$ , à la loi de Rayleigh. Par conséquent, il est **équivalent** de tester les mesures brutes, ou normalisées à leur moyenne. Et il est **équivalent** de tester la distribution de  $P$  à la loi exponentielle, et la distribution de  $\sqrt{P}$  à la loi de Rayleigh. Cela est cohérent de nouveau avec le lemme de Margolin (cf. section 2.2.2.2).

### 2.3.3 Conclusion relative aux lois généralement admises

Nous avons mis en évidence, à l'aide de nombreux tests statistiques, que les mesures de champ ne suivent pas les lois du modèle idéal, bien qu'elles soient couramment admises au sein de la communauté CRBM. Plusieurs éléments vont dans ce sens, en particulier les taux de rejet importants au test d'ajustement à la loi de Rayleigh pour  $E_R$ , qui traduisent le décalage du rapport écart type / moyenne mis en évidence dès le départ (section 1.3).

De plus, nous avons illustré à travers ces tests que le critère de Massey, généralement utilisé, peut donner lieu à des conclusions faussées. La raison est que le test KS-Massey est adapté uniquement pour une loi de distribution complètement définie, *i.e.* sans paramètre à estimer. Nous avons proposé plusieurs tables de valeurs critiques qui sont cohérentes entre elles. Par exemple, l'utilisation du test KS-Stephens est mieux adapté que le test KS-Massey, et met en évidence le rejet de la loi de Rayleigh pour modéliser la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ.

Par ailleurs, le test de Anderson-Darling présente des performances meilleures que le test KS. Pour l'un ou l'autre test, il peut être intéressant de considérer des tailles  $N$  d'échantillons différentes puisque les taux de rejet diffèrent. Nous avons d'ailleurs illustré que la puissance d'un test augmente avec  $N$ .

Enfin, contrairement aux mesures de champ, la distribution des mesures de puissance semble conforme au modèle idéal de Hill. Nous observons un comportement très différent du taux de rejet entre une analyse sur les mesures de champ, et sur les mesures de puissance. Dans la suite, nous proposons une alternative aux lois de Hill pour modéliser le comportement des mesures au sein d'une CRBM, lorsque les lois du modèle idéal sont insuffisantes.





# Chapitre 3

## Loi de Weibull pour des antennes de petite dimension

### 3.1 Loi de Weibull

#### 3.1.1 Définition

La distribution de Weibull à deux paramètres réels  $a > 0$  et  $b > 0$ , est définie par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}. \quad (3.1)$$

Le paramètre  $a$  est appelé paramètre d'échelle, et  $b$  est le paramètre de forme. Le premier est lié à la valeur moyenne de la distribution et est très sensible aux variations de puissance injectée dans la CRBM, tandis que le second est lié à l'écart type de la distribution. Nous indiquons successivement la fonction de répartition de la loi de Weibull à deux paramètres  $(a, b)$ ,

$$F(x) = 1 - e^{-ax^b}, \quad (3.2)$$

son moment d'ordre 1, *i.e.* son espérance,

$$\langle x \rangle = \mu = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{a^{1/b}}, \quad (3.3)$$

son moment d'ordre 2, *i.e.* l'espérance du carré,

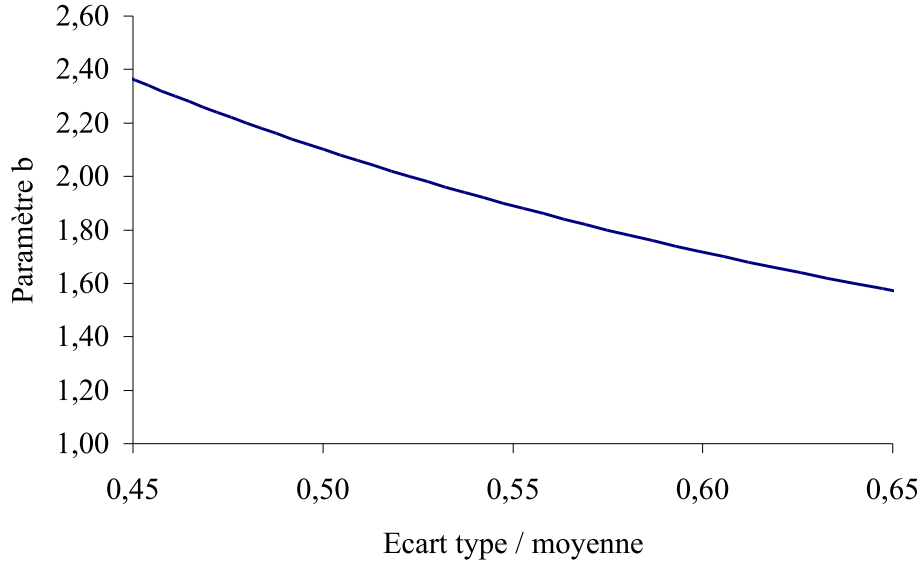
$$\langle x^2 \rangle = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right)}{a^{2/b}}. \quad (3.4)$$

Dans les relations (3.3) et (3.4),  $\Gamma$  désigne la fonction Gamma (A.11). A partir de ces relations, nous pouvons déduire une expression intéressante entre l'écart type  $\sigma$  et la

moyenne (3.3), qui est indépendante du paramètre  $a$  :

$$\frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{2b\Gamma(\frac{2}{b})}{(\Gamma(\frac{1}{b}))^2} - 1}. \quad (3.5)$$

Cette relation nous indique que la distribution de Weibull peut être une bonne candidate



**FIG. 3.1:** Evolution du paramètre  $b$  en fonction du rapport écart type / moyenne d'une loi de Weibull  $(a, b)$  d'après (3.5).

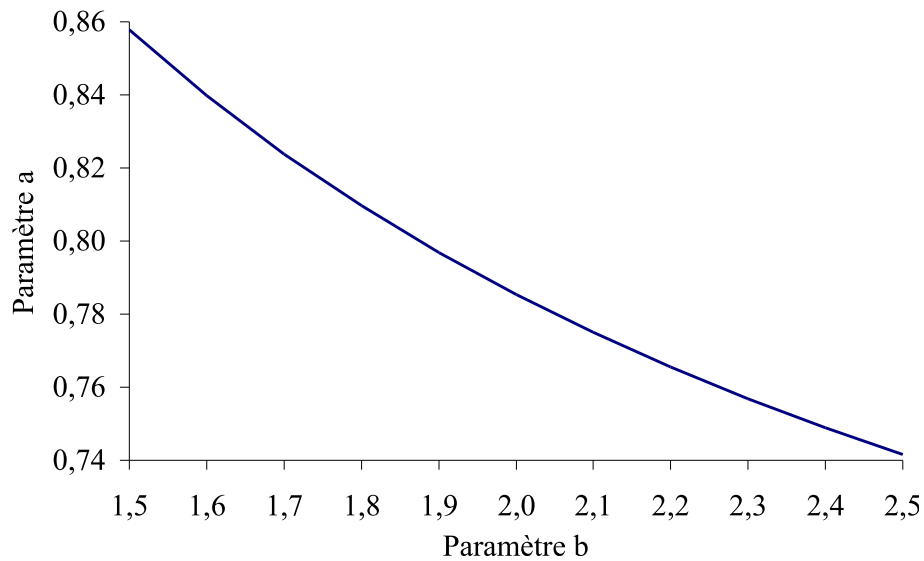
pour modéliser la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ  $E_R$ , puisqu'elle permettrait d'être cohérente avec la distribution des mesures au niveau du ratio écart type / moyenne (Fig. 3.1). Naturellement, la simple analyse du ratio  $\sigma/\mu$  ne permet pas de déterminer si la loi de Weibull correspond à la distribution sous-jacente des mesures. Nous analyserons plus loin les résultats de tests d'ajustement à cette loi (section 3.3). Par ailleurs, connaissant l'expression du moment d'ordre 1 (3.3), si au préalable nous normalisons les échantillons de mesures par leur valeur moyenne, alors nous pouvons vérifier l'expression suivante reliant les deux paramètres de la loi de distribution :

$$a = \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right]^b. \quad (3.6)$$

Compte-tenu de cette relation et de la figure 3.1, la figure 3.2 indique l'ordre de grandeur du couple  $(a, b)$  qui pourrait correspondre à la distribution de Weibull pour des mesures d'une composante cartésienne de champ.

### 3.1.2 Cas particuliers : lois de Rayleigh et exponentielle

La loi de Weibull présente un intérêt particulier pour notre étude, puisqu'il s'agit d'une loi plus générale que les lois du modèle idéal de Hill. Pour des valeurs particulières du



**FIG. 3.2:** Evolution du paramètre  $a$  en fonction du paramètre  $b$  de la loi de Weibull  $(a, b)$  d'après (3.6).

couple  $(a, b)$ , la fonction de Weibull s'identifie à la loi exponentielle et à la loi de Rayleigh, comme indiqué dans les tableaux 3.1 et 3.2.

Weibull $(a, b)$	Distribution de Rayleigh (section 1.1.3)	
	Mesures brutes	Mesures moyennées <sup>2</sup>
a	$1/\theta$	$\pi/4$
b	2	2

<sup>2</sup>Cas où l'on analyse les mesures normalisées par leur valeur moyenne.

**TAB. 3.1:** Couple  $(a, b)$  de la loi de Weibull pour une distribution de Rayleigh.

Weibull $(a, b)$	Distribution exponentielle (section 1.1.3)	
	Mesures brutes	Mesures moyennées <sup>3</sup>
a	$1/\theta$	1
b	1	1

<sup>3</sup>Cas où l'on analyse les mesures normalisées par leur valeur moyenne.

**TAB. 3.2:** Couple  $(a, b)$  de la loi de Weibull pour une distribution exponentielle.

### 3.1.3 Propriétés statistiques

Nous allons maintenant développer quelques propriétés statistiques de la loi de Weibull, de la même manière que ce que nous avons réalisé pour les lois exponentielle et de Rayleigh

(section 1.1). Nous appelons  $X$  la v.a. distribuée selon la loi de Weibull à deux paramètres  $(a, b)$ . Cette loi est notée dans la suite  $W(a, b)$ .

### 3.1.3.1 Loi de distribution de la v.a. $X^2$

Montrons que si  $X \geq 0$  suit une loi  $W(a, b)$ , alors  $X^2$  suit aussi une loi de Weibull dont nous allons déterminer les paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ . Soit  $V = X^2$ . Alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}[X^2 \leq v] = \mathcal{P}[X \leq \sqrt{v}] = \Phi(\sqrt{v}), \quad (3.7)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $W(a, b)$ . Alors, la densité de probabilité de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv}\Phi(\sqrt{v}) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ce qui donne, pour tout réel  $v \geq 0$ ,

$$f(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\Phi'(\sqrt{v}). \quad (3.9)$$

Puisque la fonction de répartition de la loi  $W(a, b)$  s'écrit  $\Phi(z) = 1 - e^{-az^b}$ , nous obtenons pour  $v \geq 0$  :

$$f(v) = a \frac{b}{2} v^{\frac{b}{2}-1} e^{-av^{b/2}}. \quad (3.10)$$

Nous reconnaissons d'après (3.1) une loi de Weibull de paramètres  $a$  et  $\frac{b}{2}$ .

### 3.1.3.2 Loi de distribution de la v.a. $\sqrt{X}$

Montrons maintenant que si  $X \geq 0$  suit une loi  $W(a, b)$ , alors  $\sqrt{X}$  suit aussi une loi de Weibull de paramètres  $a$  et  $2b$ . Soit  $V = \sqrt{X}$ . Alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}[\sqrt{X} \leq v] = \mathcal{P}[X \leq v^2] = \Phi(v^2), \quad (3.11)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $W(a, b)$ . Alors la densité de probabilité de la variable aléatoire  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv}\Phi(v^2) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ce qui donne, pour tout réel  $v \geq 0$ ,  $f(v) = 2v\Phi'(v^2)$ . Nous obtenons donc pour  $v \geq 0$  :

$$f(v) = a \cdot 2b \cdot v^{2b-1} e^{-av^{2b}}. \quad (3.13)$$

Nous reconnaissons d'après (3.1) une loi de Weibull de paramètres  $a$  et  $2b$ .

### 3.1.3.3 Loi de distribution de la v.a. $\frac{X}{\langle X \rangle}$

L'étude de la distribution des mesures normalisées par leur moyenne est très pratique puisque cela permet de s'affranchir du niveau de puissance injecté dans la cavité, facilitant ainsi la comparaison des lois de distribution entre différentes CRBM. Nous allons maintenant démontrer que si  $X \geq 0$  suit une loi de Weibull  $W(a, b)$ , alors la v.a.  $\frac{X}{\langle X \rangle}$  suit aussi une loi de Weibull  $W(a', b')$  de paramètres  $a'$  et  $b'$  que nous allons déterminer. Soit  $V = \frac{X}{\langle X \rangle}$ . Alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}\left[\frac{X}{\langle X \rangle} \leq v\right] = \mathcal{P}[X \leq v\langle X \rangle] = \Phi(v\langle X \rangle), \quad (3.14)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $W(a, b)$ . Alors la densité de probabilité de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv}\Phi(v\langle X \rangle) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce qui donne, pour tout réel  $v \geq 0$ ,  $f(v) = \Phi'(v\langle X \rangle)$ . Nous obtenons par conséquent pour  $v \geq 0$  :

$$f(v) = a\langle X \rangle^b \cdot b \cdot v^{b-1} e^{-a\langle X \rangle^b \cdot v^b}. \quad (3.16)$$

Nous reconnaissons d'après (3.1) une loi de Weibull de paramètres  $a'$  et  $b'$  tels que :

$$\begin{cases} a' = a\langle X \rangle^b \\ b' = b \end{cases}. \quad (3.17)$$

Il est possible aussi de démontrer de la même manière, que si la v.a.  $\frac{X}{\langle X \rangle}$  suit une loi de Weibull de paramètres  $a$  et  $b$ , alors la variable aléatoire  $X$  suit une loi de Weibull  $W\left(\frac{a}{\langle X \rangle^b}, b\right)$ .

### 3.1.4 Relation remarquable

Dans l'hypothèse où la loi de Weibull  $W(a_1, b_1)$  représente convenablement la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ  $E_R$ , alors nous sommes capables aussi d'assimiler la distribution des mesures de  $E_R^2$  à une loi de Weibull  $W(a_2, b_2)$ .

Ce qui nous intéresse en particulier est le passage suivant : d'après ce qui précède, si  $\frac{X}{\langle X \rangle} \sim W(a_1, b_1)$  alors  $\frac{X^2}{\langle X \rangle^2} \sim W(a_2, b_2)$ . Connaissant les paramètres  $a_1$  et  $b_1$ , que valent les paramètres  $a_2$  et  $b_2$  ?

Soit  $V = \frac{X^2}{\langle X \rangle^2}$ . Alors pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[V \leq v] &= \mathcal{P}\left[\frac{X^2}{\langle X \rangle^2} \leq v\right] = \mathcal{P}[X \leq \sqrt{v} \cdot \sqrt{\langle X \rangle}] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{X}{\langle X \rangle} \leq \frac{\sqrt{v \cdot \langle X \rangle}}{\langle X \rangle}\right] = \Phi\left(\frac{\sqrt{v \cdot \langle X \rangle}}{\langle X \rangle}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $W(a_1, b_1)$ . Alors la densité de probabilité de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv} \Phi \left( \frac{\sqrt{v \cdot \langle X^2 \rangle}}{\langle X \rangle} \right) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Cela donne pour tout réel  $v \geq 0$ ,

$$f(v) = \frac{A}{2\sqrt{v}} \Phi'(A\sqrt{v}) \quad \text{avec } A = \frac{\sqrt{\langle X^2 \rangle}}{\langle X \rangle}. \quad (3.20)$$

Par conséquent, l'expression de la densité de probabilité de  $V$  s'écrit pour tout réel  $v \geq 0$  :

$$f(v) = A^{b_1} a_1 \frac{b_1}{2} v^{\frac{b_1}{2}-1} e^{-a_1 A^{b_1} v^{\frac{b_1}{2}}}. \quad (3.21)$$

Nous reconnaissons d'après (3.1) une loi de Weibull  $W(a_2, b_2)$  dont les paramètres vérifient :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 A^{b_1} \\ b_2 = \frac{b_1}{2} \end{cases}. \quad (3.22)$$

Afin de préciser l'expression analytique du paramètre  $A$ , il est possible de démontrer la relation suivante :

$$A \equiv \frac{\sqrt{\langle X^2 \rangle}}{\langle X \rangle} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b_1}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b_1}\right)}. \quad (3.23)$$

Nous aurons l'occasion de vérifier par l'expérience ces expressions reliant les paramètres  $(a_2, b_2)$ , associés à la distribution de  $E_R^2$ , aux paramètres  $(a_1, b_1)$  associés à la distribution de  $E_R$ .

## 3.2 Tests d'ajustement

Cette section traite de l'ajustement d'une distribution empirique à la loi de Weibull à deux paramètres  $(a, b)$ . Nous présentons les valeurs critiques associées aux tests KS et AD, adaptés pour la loi de Weibull. Nous commençons d'abord par la méthode d'estimation des paramètres  $a$  et  $b$ , à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

### 3.2.1 Estimation des paramètres de la loi de Weibull

Afin d'être cohérent avec les tables de valeurs critiques établies pour le test d'ajustement à la loi de Weibull  $W(a, b)$  (section 3.2.2), nous devons estimer les paramètres  $a$  et  $b$  de la loi par la méthode du maximum de vraisemblance, exposée en section 2.2.3.2. Dans le cas de la loi de Weibull  $W(a, b)$  à deux paramètres, la fonction de vraisemblance s'écrit

d'après (2.12) et (3.1) :

$$L(x_1, \dots, x_N, a, b) = (ab)^N \left( \prod_{i=1}^N x_i^{b-1} \right) e^{-a \sum_{i=1}^N x_i^b}. \quad (3.24)$$

En prenant le logarithme népérien de cette expression, nous obtenons :

$$\ln L(x_1, \dots, x_N, a, b) = N \ln(ab) + (b-1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - a \sum_{i=1}^N x_i^b. \quad (3.25)$$

Les équations de vraisemblance s'obtiennent par annulation des dérivées partielles de l'expression (3.25). On peut démontrer alors que les équations de vraisemblance deviennent :

$$\begin{cases} N = a \sum_{i=1}^N x_i^b \\ N + b \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - ab \sum_{i=1}^N x_i^b \ln(x_i) = 0 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Dans notre étude, nous avons cherché le couple  $(a, b)$  solution de ce système d'équations à l'aide de l'outil "solveur" du tableur Excel.

### 3.2.2 Valeurs critiques des tests KS et AD d'ajustement à une loi de Weibull

Nous indiquons ici les valeurs critiques adaptées aux tests KS et AD d'ajustement à la loi de Weibull à deux paramètres. Ces résultats proviennent d'un travail mené par des chercheurs qui étudient les caractéristiques de la faune forestière, pour le compte du Ministère de l'Agriculture américain [96]. L'avantage de cette étude est que les valeurs critiques ont été validées pour une taille d'échantillons relativement grande ( $N = 400$ ). Les valeurs critiques des tests KS et AD d'ajustement à la loi de Weibull à deux paramètres sont synthétisées dans le tableau 3.3. Signalons de plus que dans [96], la capacité du test

Seuil de risque	Valeur critique pour $d\sqrt{N}$ (test KS)	Valeur critique pour $A^2 \times \left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{N}}\right)$ (test AD)
10%	$0.8265 - \frac{0.1991}{\sqrt{N}}$	0.637
5%	$0.8982 - \frac{0.2216}{\sqrt{N}}$	0.757
1%	$1.0455 - \frac{0.2826}{\sqrt{N}}$	1.038

**TAB. 3.3:** Valeurs critiques adaptées aux tests KS et AD d'ajustement à la loi de Weibull à deux paramètres.

à détecter de mauvais ajustements, *i.e.* la puissance du test, a été analysée. Les KS et AD s'avèrent particulièrement bien adaptés pour étudier l'ajustement à la loi de Weibull. Les auteurs soulignent que la statistique  $A^2$  du test de Anderson-Darling est à privilégier car la puissance de ce test est légèrement plus élevée que la puissance du test KS.



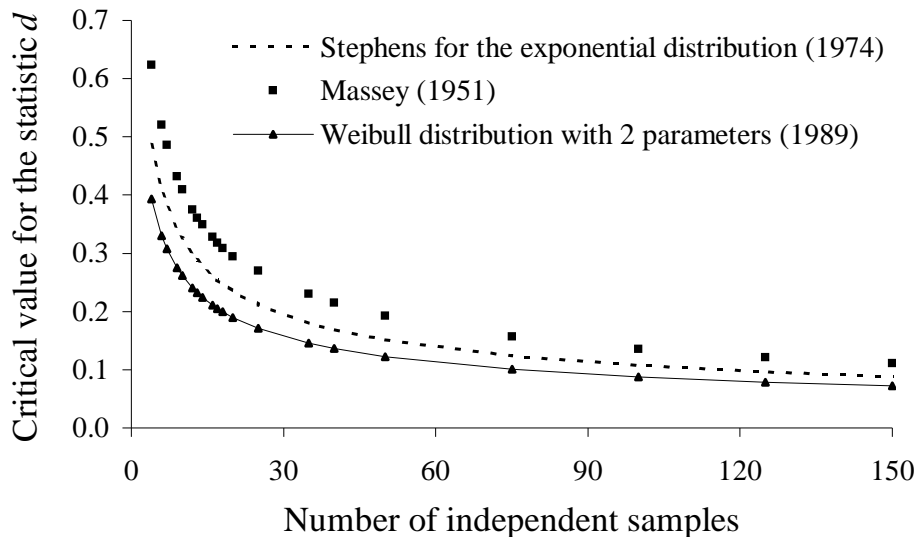


FIG. 3.3: Valeurs critiques plus faibles pour le test KS d'ajustement à la loi de Weibull à deux paramètres, pour un seuil de risque de 5%.

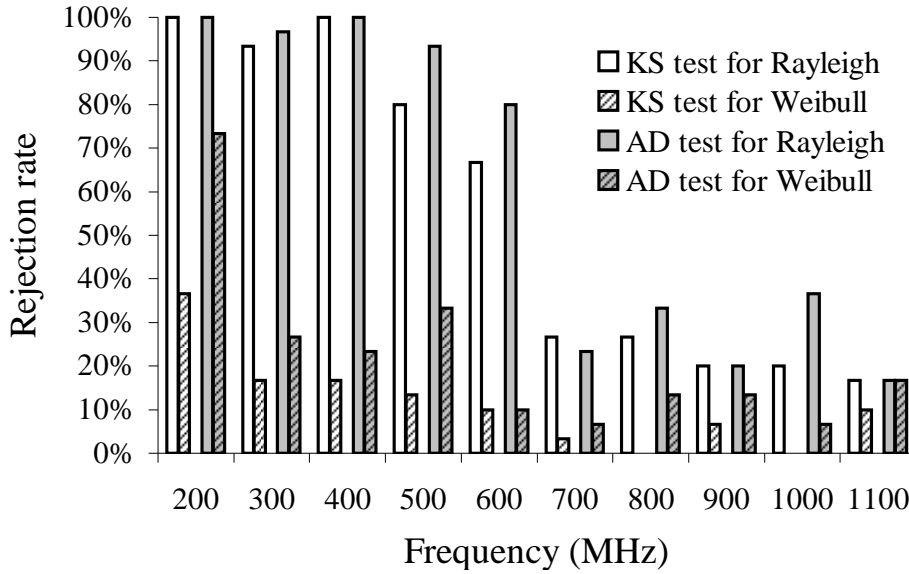
La figure 3.3 permet de comparer différentes valeurs critiques pour le test KS d'ajustement à une loi de probabilité. Nous constatons en particulier, pour un nombre  $N$  d'échantillons indépendants donné, que les valeurs critiques adaptées au test d'ajustement à une loi de Weibull sont les plus faibles. Par conséquent, il apparaît clairement que les valeurs critiques de Massey, et de Stephens pour une loi exponentielle, ne sont pas adaptées au test d'ajustement d'une loi de Weibull.

### 3.3 Validation expérimentale pour les mesures de champ

Nous disposons des tests de Kolmogorov-Smirnov (section 2.1.3) et de Anderson-Darling (section 2.1.4) pour tester l'ajustement à une loi de Weibull à deux paramètres. Associés à ces tests, nous disposons également des critères adaptés (section 3.2.2). Nous présentons dans cette section un ensemble de résultats basés sur les mesures de champ, de manière similaire à l'étude de l'ajustement de la loi de Rayleigh à la distribution des mesures de  $E_R$  (section 2.3.1). Puisque la loi de Rayleigh était massivement rejetée, analysons maintenant si la loi de Weibull est une meilleure candidate à l'ajustement de la distribution des mesures de  $E_R$ .

#### 3.3.1 Résultat des tests d'ajustement

Nous présentons ici les résultats des tests KS et AD d'ajustement à la loi de Weibull  $W(a, b)$  pour les mêmes distributions expérimentales que nous avons comparées à la loi de Rayleigh en section 2.3.1. La figure 3.4 indique que la distribution de Weibull s'ajuste nettement mieux que la distribution de Rayleigh à la distribution expérimentale de mesures de  $E_R$ . En particulier, à 200 MHz nous avons un rejet important des lois



**FIG. 3.4:** Taux de rejet au test KS et AD d’ajustement à la loi de Weibull à deux paramètres pour la distribution des mesures de  $E_R$  ( $N = 150$ ).

de Rayleigh et de Weibull, ce qui est cohérent avec le fort rejet de la loi exponentielle en-dessous de la  $LUF$  (Fig. 2.15). Ce résultat montre que la chambre réverbérante ne fonctionne pas encore en régime de cavité sur-dimensionnée.

Lorsque les valeurs critiques de Massey sont appliquées, au lieu des valeurs critiques adaptées du tableau 3.3, le test KS-Massey conduit à l’acceptation de la loi de Weibull à 200 MHz (non visible en figure 3.4). Précisément, le taux de rejet de la loi de Weibull par le test KS-Massey n’est que de 10%, alors que par le test AD (Fig. 3.4) le rejet est constaté dans 70% des cas. Par conséquent, il semble que la distribution de Weibull ne soit pas suffisante pour modéliser les mesures dans le cas d’un régime de cavité sous-dimensionnée. Ce résultat va à l’encontre de ce qu’a proposé Orjubin [47, 43] pour un régime de cavité sous-dimensionnée. En effet, il propose la loi de Weibull comme alternative aux lois du modèle idéal en-dessous de la  $LUF$ , *i.e.* à très basse fréquence. Or nous montrons ici, sur une base expérimentale, que cette loi n’est pas acceptable tant que le régime de cavité sur-dimensionnée n’est pas atteint.

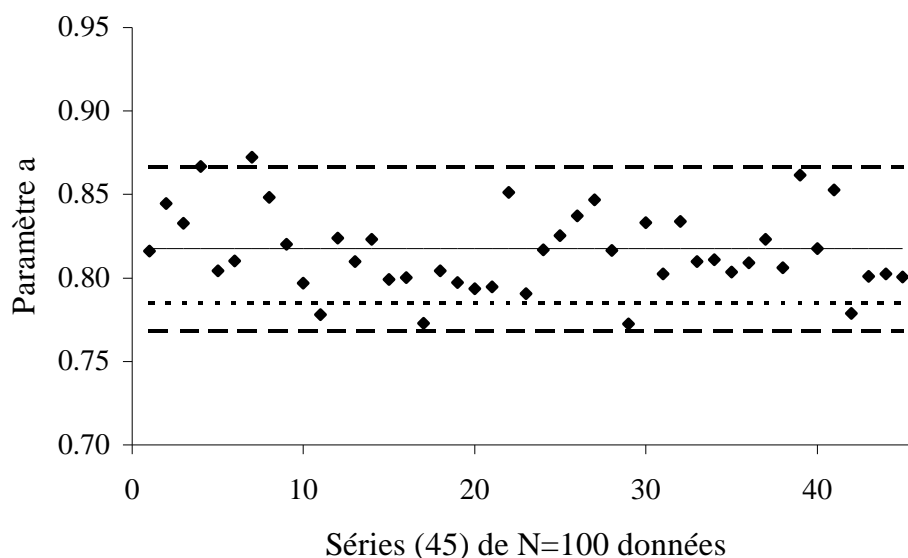
Par ailleurs, au-delà de 300 MHz, que ce soit pour les mesures de puissance (Fig. 2.15), ou de champ (Fig. 3.4), nous montrons que la CRBM est en mesure de générer un environnement électromagnétique statistiquement uniforme. Par exemple, à 600 MHz, le taux de rejet passe de 70% pour une loi de Rayleigh à 10% pour une loi de Weibull. De plus, quel que soit le test d’ajustement considéré, avec les valeurs critiques adaptées, il semble que les taux de rejet soient très proches, bien que les statistiques  $d$  et  $A^2$  soient très différentes. Afin de vérifier la stabilité des résultats des tests, nous avons renouvelé les expériences pour quelques fréquences. Les taux de rejet obtenus sont sensiblement les mêmes. Par ailleurs, de 700 MHz à 1000 MHz, nous avons reproduit les mesures de puissance avec le même amplificateur que celui utilisé pour les mesures de champ. Pour des séries de taille  $N = 150$ , nous obtenons les mêmes résultats que ceux indiqués en

figure 2.15. Cela montre que la présence de l'amplificateur ne perturbe pas la distribution des mesures de champ.

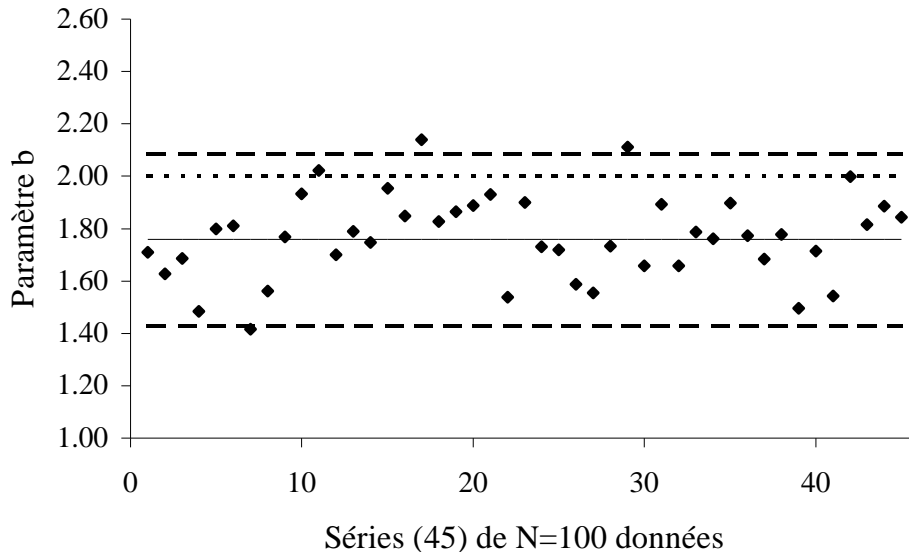
L'application des tests d'ajustement pour des séries de mesures de  $E_R$  de taille  $N = 50$  et  $N = 100$  engendre aussi une diminution significative du rejet de la loi de Weibull par rapport à la loi de Rayleigh. Le taux de rejet demeure approximativement constant lorsque la taille  $N$  des séries change, ce qui est cohérent avec le bon ajustement de la loi de Weibull à la distribution expérimentale des mesures de  $E_R$ . Ajoutons également que, lorsque l'on teste l'ajustement d'une loi de Weibull à deux paramètres, à la distribution expérimentale de  $E_R^2$  (cf. section 3.1.3.1), nous obtenons **exactement** les mêmes taux de rejet que ceux indiqués en figure 2.15. Nous pouvons également indiquer que les tests sur les mesures normalisées à la moyenne donnent des résultats **identiques** à la situation où l'on ne normalise pas à la valeur moyenne des séries de mesures (cf. section 3.1.3.3).

### 3.3.2 Evolution des paramètres de la loi en fonction de la fréquence

Nous proposons maintenant de quantifier l'écart entre la distribution expérimentale et la distribution de Rayleigh, en analysant les paramètres  $a$  et  $b$  de la distribution de Weibull. De manière à s'affranchir de la variation du niveau de puissance émis dans la cavité en fonction de la fréquence, nous avons normalisé au préalable les séries de mesures de puissance par leur valeur moyenne. Cela permet aussi de comparer très simplement la valeur du couple  $(a, b)$  de la loi de Weibull au couple  $(\pi/4, 2)$  caractéristique de la loi de Rayleigh (cf. Tab. 3.1). Par exemple, les figures 3.5 et 3.6 présentent la distribution des couples  $(a, b)$  que nous obtenons par estimation du maximum de vraisemblance, pour des mesures de  $E_R$  à 700 MHz. Puisque nous disposons de 4500 mesures de  $E_R$  à 700



**FIG. 3.5:** Distribution du paramètre  $a$  de la loi de Weibull, estimé par la méthode du maximum de vraisemblance, pour des séries de  $N = 100$  mesures de  $E_R$  à 700 MHz (un point pour une série). Dans le cas d'une distribution de Rayleigh,  $a = \pi/4 \approx 0,78$ .



**FIG. 3.6:** Distribution du paramètre  $b$  de la loi de Weibull, estimé par la méthode du maximum de vraisemblance, pour des séries de  $N = 100$  mesures de  $E_R$  à 700 MHz (un point pour une série). Dans le cas d'une distribution de Rayleigh,  $b = 2$ .

MHz et nous analysons des séries de taille  $N = 100$  échantillons, sur chaque figure nous représentons la distribution de 45 estimateurs du paramètre  $a$  (Fig. 3.5) et  $b$  (Fig. 3.6). De plus, nous avons indiqué par des tirets pointillés un intervalle de confiance  $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ , avec  $\mu$  et  $\sigma$  respectivement la moyenne (représenté par un trait) et l'écart type de la distribution des 45 estimateurs de  $a$  et  $b$ . Afin de faciliter la comparaison avec le couple  $(a, b)$  correspondant à une loi de Rayleigh (cf. tableau 3.1), nous avons ajouté ce couple par une ligne pointillée.

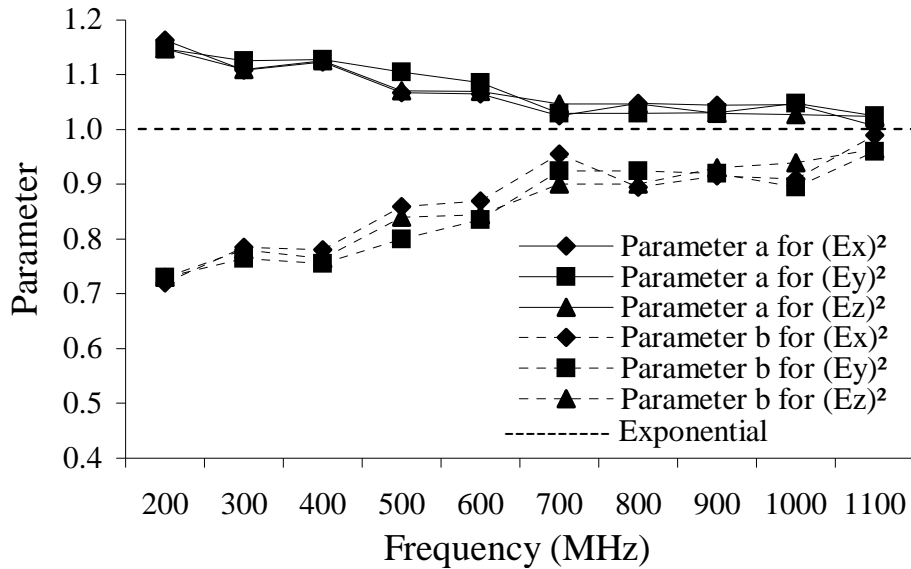
Un décalage apparaît nettement entre l'espérance du paramètre expérimental, et la valeur correspondant à la distribution de Rayleigh. La raison physique de ce décalage est peut-être liée aux imperfections de la chambre réverbérante et à la dimension de la sonde de champ. Le fonctionnement correct d'une chambre réverbérante à brassage de modes en régime de cavité sur-dimensionnée est limité par les pertes d'énergie dans la cavité, et par le fait que la densité de modes n'est pas infinie. L'hypothèse est que les imperfections de cet environnement réverbérant, par rapport au modèle idéal exposé par Hill [5], apparaissent lorsque l'antenne de réception est de petite taille (section 2.3.1), alors que ces imperfections sont masquées pour une antenne de grande dimension (section 2.3.2).

L'effet de la dimension de l'antenne ou d'une sonde de champ sur plusieurs paramètres caractéristiques des lois de Rayleigh et exponentielle a déjà été étudié [34]. Lorsqu'il s'agit de mesurer un champ, on utilise une petite sonde comme antenne de réception. Ainsi, dans le petit volume de mesure, le champ électrique peut être considéré comme constant. On souhaite donc que l'antenne de réception puisse permettre une mesure locale du champ électrique. Par ailleurs, l'antenne log-périodique utilisée pour la mesure de puissance a des dimensions bien plus grandes que la sonde de champ. Par conséquent, la distribution de courant sur l'antenne ne peut plus être considérée comme uniforme. L'antenne log-

périodique peut être considérée comme un capteur distribué (et non local), intégrant les variations du champ électrique sur la surface de captation de l’antenne. Par intégration de ces variations du champ, il est possible que les imperfections détectées par la sonde se compensent et n’affectent pas les mesures collectées par une antenne de grande dimension.

Un environnement réverbérant de qualité mais néanmoins imparfait au sein d’une CRBM a aussi été observé pour des mesures de champ électrique avec un capteur local, par Kostas [39]. Dans cet article, l’auteur compare en particulier la distribution des mesures de  $E_R^2$  avec la loi exponentielle. Un bon accord est indiqué, sauf pour les valeurs extrêmes, queue de la distribution statistique. En outre, il est indiqué que la raison de ces écarts au niveau des valeurs extrêmes n’est pas clair, mais peut être la conséquence de mesures ponctuelles, *i.e.* localisées spatialement. Par ailleurs, Kostas souligne qu’une antenne de grande dimension a tendance à moyenniser le champ électrique sur sa surface de captation, et peut alors rendre non visible l’effet des valeurs extrêmes de champ électrique sur la distribution des mesures de puissance.

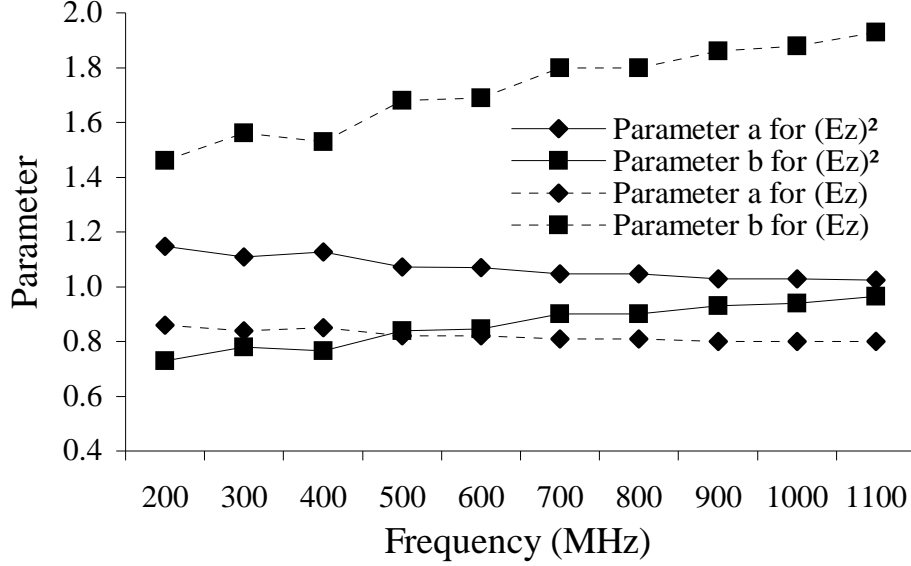
Les paramètres  $a$  et  $b$  sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance en résolvant les équations de vraisemblance (3.26). Cette étape est incontournable avant de pratiquer les tests d’ajustement KS et AD. Après un traitement qui consiste à éliminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles la loi de Weibull est rejetée par les tests d’ajustement, nous présentons l’évolution de ce couple  $(a, b)$  en fonction de la fréquence d’excitation de la cavité, pour chaque composante cartésienne de champ (Fig. 3.7). A chaque fréquence,



**FIG. 3.7:** Paramètres  $a$  et  $b$  de la loi de Weibull pour les mesures de  $E_x^2$ ,  $E_y^2$  et  $E_z^2$  séparément, estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et sélectionnés par le test KS (pour chaque fréquence, 10 séries de taille  $N = 150$  mesures sont testées).

les valeurs moyennes obtenues pour  $a$  et  $b$  sont les mêmes quel que soit le test employé, *i.e.* KS ou AD. Nous remarquons en particulier le caractère isotrope du champ électrique, puisque les valeurs du couple  $(a, b)$  sont sensiblement les mêmes sur les trois composantes cartésiennes. De plus, l’évolution de ces deux paramètres indique que lorsque la fréquence

augmente, le couple  $(a, b)$  se rapproche petit à petit du couple caractéristique de la distribution exponentielle (indiqué en tirets pointillés, cf. tableau 3.2). Notons aussi que les couples  $(a, b)$  de la figure 3.7 sont cohérents avec la relation (3.6) établie en section 3.1.1, donnant la relation entre  $a$  et  $b$  pour des échantillons normalisés par leur moyenne.



**FIG. 3.8:** Paramètres  $a$  et  $b$  de la loi de Weibull pour les mesures de  $E_z^2$  et  $E_z$ , estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et sélectionnés par le test KS (pour chaque fréquence, 10 séries de taille  $N = 150$  mesures sont testées).

Par ailleurs, nous vérifions en figure 3.8 la relation remarquable (3.22) établie en section 3.1.4 entre le couple  $(a_1, b_1)$  de la distribution de  $E_z$  et le couple  $(a_2, b_2)$  de la distribution de  $E_z^2$ . Les valeurs expérimentales de ces couples pour la composante  $z$  sont en accord avec cette relation remarquable. Par exemple, à 500 MHz, les couples  $(a_1 = 0,83; b_1 = 1,67)$  et  $(a_2 = 1,08; b_2 = 0,83)$  vérifient le système d'équations (3.22). Cela est cohérent avec le bon ajustement de la loi de Weibull à la distribution expérimentale des mesures d'une composante cartésienne de champ.

### 3.3.3 Evolution du rapport écart type / moyenne en fonction de la fréquence

Nous avons donné en section 3.1.1 l'expression théorique du ratio écart type sur moyenne  $(\sigma/\mu)$  d'une distribution de Weibull, qui ne dépend que du second paramètre  $b$  (3.5). Rappelons que dans le cas de la loi de Rayleigh,  $\sigma/\mu \approx 0,523$ , et pour une loi exponentielle,  $\sigma/\mu = 1$ . Lors d'une analyse préliminaire de ce simple ratio, nous avons mis en évidence qu'il existait une incohérence entre la distribution des mesures  $E_R$  et la distribution de Rayleigh (cf. section 1.3.2).

La figure 3.9 présente une comparaison entre le ratio  $\sigma/\mu$  expérimental pour des mesures de  $E_R$ , le ratio  $\sigma/\mu$  de Rayleigh et celui de la distribution de Weibull. Le rapport  $\sigma/\mu$  de la loi de Weibull est déterminé à l'aide de la relation (3.5) après estimation du

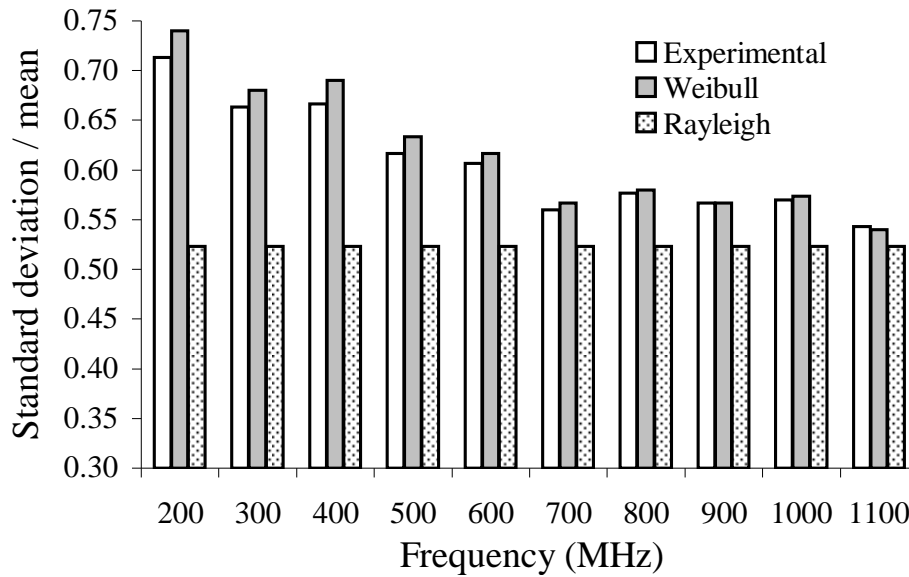


FIG. 3.9: Ratio  $\sigma/\mu$  pour la distribution de  $E_R$ .

couple  $(a, b)$  par la méthode du maximum de vraisemblance et sélection par le test d'ajustement. Pour les distributions expérimentales et de Weibull, le ratio  $\sigma/\mu$  de la figure 3.9 correspond à la moyenne des ratios des séries de taille  $N = 150$  qui donnent lieu à une acceptation de la loi de Weibull par le test AD, parmi les 30 séries testées à chaque fréquence.

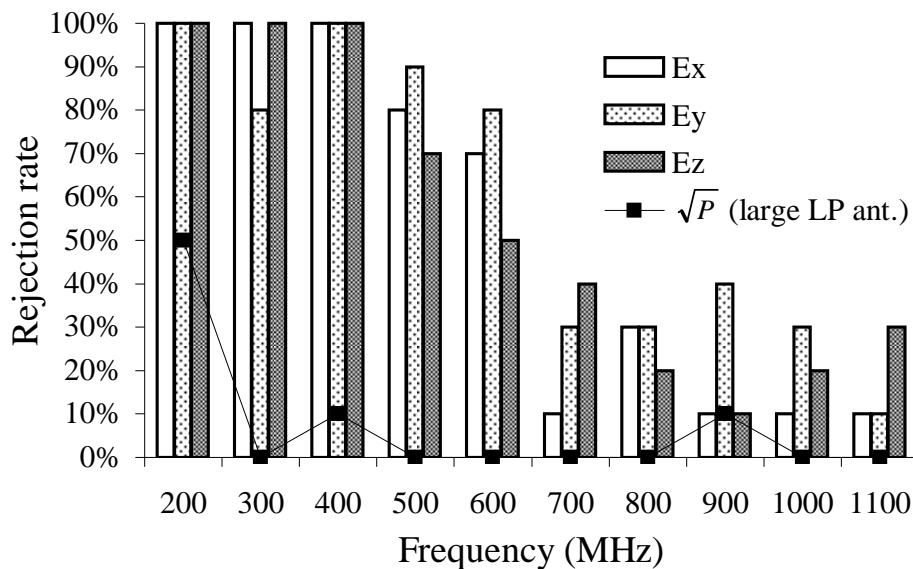
Les résultats de cette figure sont conformes aux résultats observés sur le taux de rejet de la loi de Weibull, et sur l'analyse du couple  $(a, b)$ , *i.e.* la loi de Weibull à deux paramètres modélise correctement le ratio empirique  $\sigma/\mu$ . De plus, nous notons des écarts importants entre le ratio empirique et le ratio de la distribution de Rayleigh, ce qui va dans le sens de l'analyse préliminaire de la section 1.3.2. Par conséquent, ce nouveau résultat basé sur l'étude du ratio  $\sigma/\mu$  confirme le bon ajustement de la loi de Weibull  $W(a, b)$  pour modéliser la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ en régime de cavité sur-dimensionnée. Nous pouvons souligner aussi que la distribution de Weibull est fortement rejetée à 200 MHz (Fig. 3.4), bien que le ratio  $\sigma/\mu$  semble être cohérent avec le ratio de la distribution expérimentale (Fig. 3.9). On peut donc se demander s'il existe une loi support plus adaptée à 200 MHz, ce qui pourrait faire l'objet d'investigations futures afin de pouvoir exploiter la CRBM à plus basse fréquence.

La raison pour laquelle la loi de Weibull à deux paramètres s'ajuste mieux à la distribution expérimentale n'est pas la conséquence d'un nouveau modèle théorique de la chambre réverbérante à brassage de modes. La loi de Weibull est suggérée et employée ici sur une base purement phénoménologique, de manière à prendre en compte les imperfections du processus de réverbération. En effet, la loi de Weibull est caractérisée par deux paramètres  $(a, b)$ , alors que les lois de Rayleigh et exponentielle n'ont qu'un seul paramètre  $(\theta)$ . De plus, les lois de Rayleigh et exponentielle sont deux cas particuliers de la distribution de Weibull (cf. tableaux 3.1 et 3.2). Par conséquent, la loi de Weibull a plus de chance de s'ajuster à la distribution expérimentale des mesures que la loi de Rayleigh.

Donc en particulier, le ratio  $\sigma/\mu$  de la loi de Weibull s'adapte plus facilement au ratio expérimental. D'une manière générale, une distribution à un paramètre est moins efficace qu'une distribution à deux paramètres, en particulier si l'un des paramètres est relié à la moyenne de la distribution et l'autre à son écart type.

### 3.4 Validation expérimentale pour les mesures de puissance

Il est aussi intéressant d'observer ce que nous obtenons lorsque l'on teste l'ajustement de la loi de Weibull à la distribution des mesures de puissance. Puisque la loi exponentielle est conforme à la distribution expérimentale des mesures de puissance (cf. section 2.3.2), nous devons nous attendre logiquement à retrouver le couple  $(a, b)$  caractéristique de la distribution exponentielle. Cependant, qu'en est-il de la distribution de la puissance lorsque l'antenne de réception devient petite ? C'est ce que nous allons étudier dans cette section. Nous rappelons en figure 3.10 que les taux de rejet pour les tests d'ajustement de la loi de Rayleigh à la distribution des mesures de  $E_R$  (petite sonde) et de  $\sqrt{P}$  (antenne relativement grande) diffèrent nettement. Dès lors, pour des antennes de dimensions intermédiaires, entre la sonde de champ (Fig. 2.8) et la grande antenne log-périodique (Fig. 2.7), désignée par "large LP", il est intéressant d'approfondir l'analyse de la distribution des mesures de puissance.



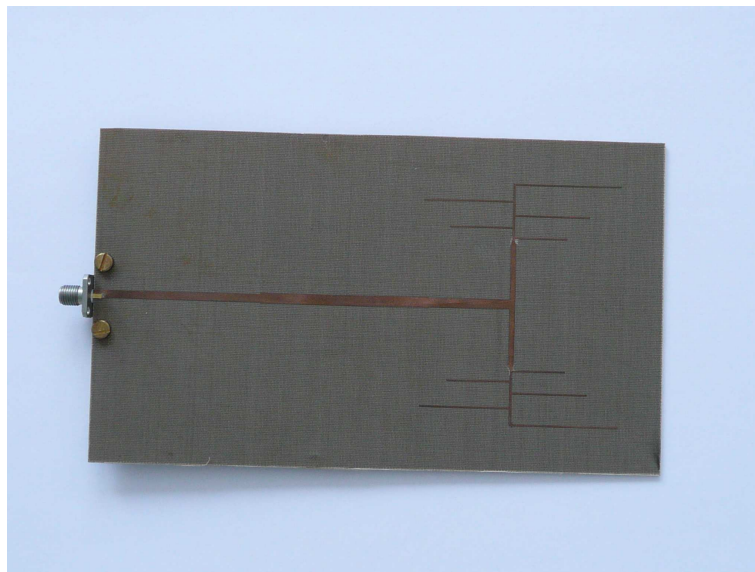
**FIG. 3.10:** Comparaison des taux de rejet pour le test d'ajustement de la loi de Rayleigh à la distribution expérimentale de  $E_R$  et de  $\sqrt{P}$  ( $N = 150$ ).

#### 3.4.1 Résultat des tests d'ajustement

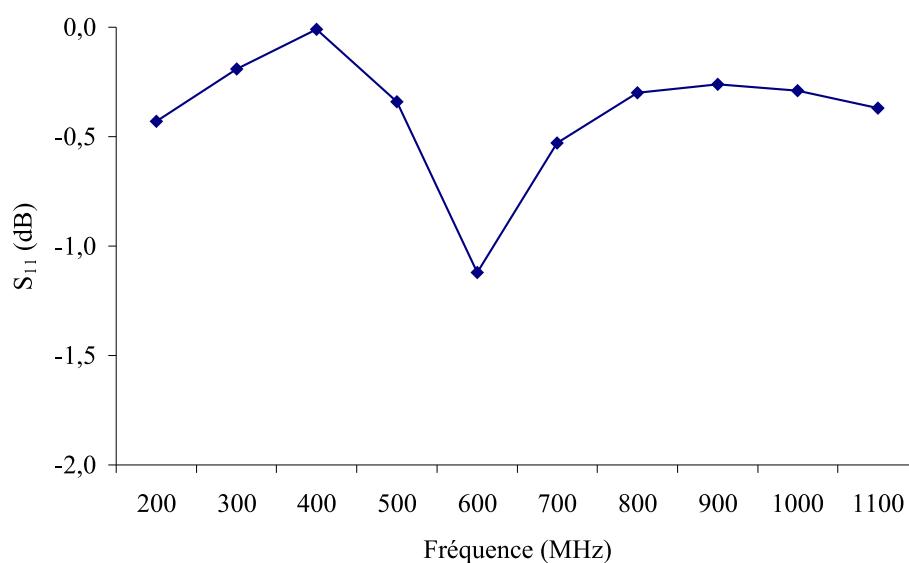
Dans cette section, nous allons analyser l'ajustement de la loi  $W(a, b)$  à la distribution expérimentale de mesures de puissance collectées à l'aide d'antennes de différentes



dimensions. D'une part, nous utilisons une petite antenne log-périodique imprimée que l'on désigne par "small LP". Ses dimensions sont approximativement  $7\text{ cm} \times 16\text{ cm}$  (Fig. 3.11) et l'analyse de l'adaptation de l'antenne est indiquée en figure 3.12. D'autre part, nous étudierons aussi la distribution des mesures de puissance en réception d'une petite antenne particulièrement simple puisqu'il s'agit d'un monopôle (Figs. 3.13 et 3.14), dont la longueur est du même ordre que les dimensions de l'antenne "small LP". Nous remarquons que ces deux antennes sont très mal adaptées, ce qui doit être aussi le cas de la sonde de champ (Fig. 2.8) utilisée en section 3.3, qui est constituée de petits monopôles ( $< 3\text{ cm}$ ), et dont la bande de fréquences d'utilisation est très large [100 kHz ; 5 GHz].



**FIG. 3.11:** Petite antenne log-périodique imprimée utilisée en réception ("small LP"). Les dimensions de la plaque sont  $10\text{ cm} \times 17\text{ cm}$ .



**FIG. 3.12:** Mesure du module du paramètre S en réflexion ( $|S_{11}|$ ) en espace libre, pour l'antenne log-périodique imprimée (Fig. 3.11).

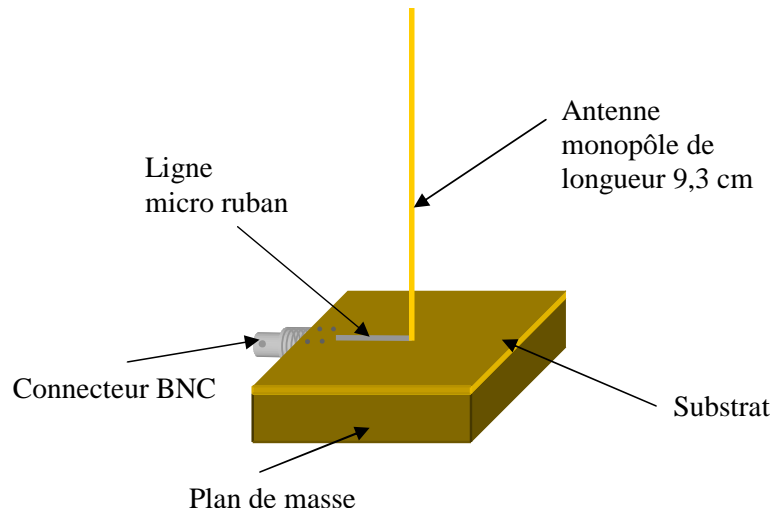


FIG. 3.13: Petite antenne monopôle de longueur 9,3 cm utilisée en réception.

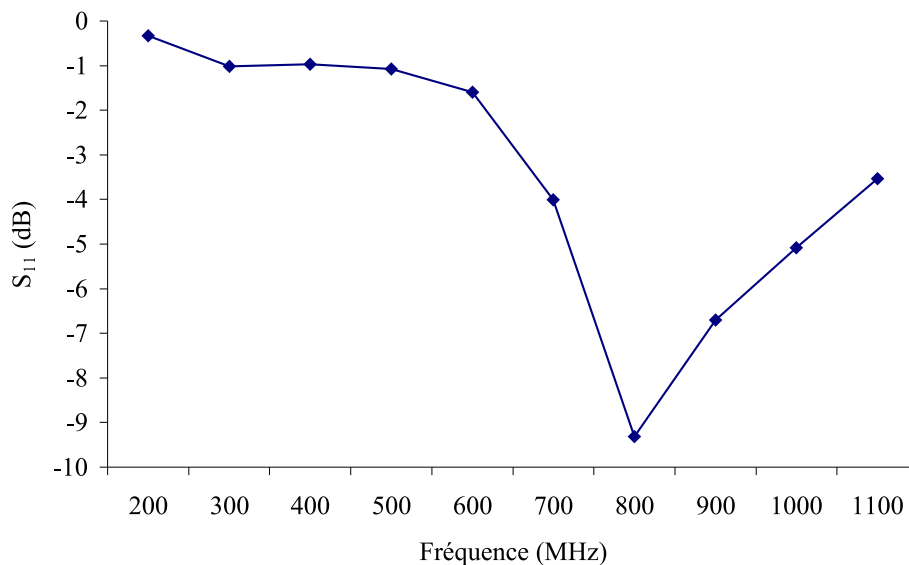


FIG. 3.14: Mesure du module du paramètre S en réflexion ( $|S_{11}|$ ) en espace libre, pour l'antenne monopôle (Fig. 3.13).

Nous conservons le même protocole adopté pour l'analyse de l'ajustement de la loi exponentielle à la distribution des mesures de puissance relevées à l'aide de la grande antenne log-périodique (cf. section 2.3.2). D'ailleurs, de la même manière que pour le champ, nous reprenons les mêmes séries de mesures exploitées en section 2.3.2, pour étudier l'ajustement de la distribution des mesures de puissance en réception de l'antenne "large LP" à la loi de Weibull.

La figure 3.15 présente le résultat des tests KS d'ajustement des lois exponentielle, par KS-Stephens, et de Weibull, à la distribution expérimentale des mesures de puissance reçue par l'antenne "large LP". Le fort taux de rejet à 200 MHz est cohérent avec le fait que la cavité soit sous-dimensionnée à cette fréquence. A partir de 300 MHz, les lois exponentielle et de Weibull sont significativement approuvées par les tests d'ajustement.

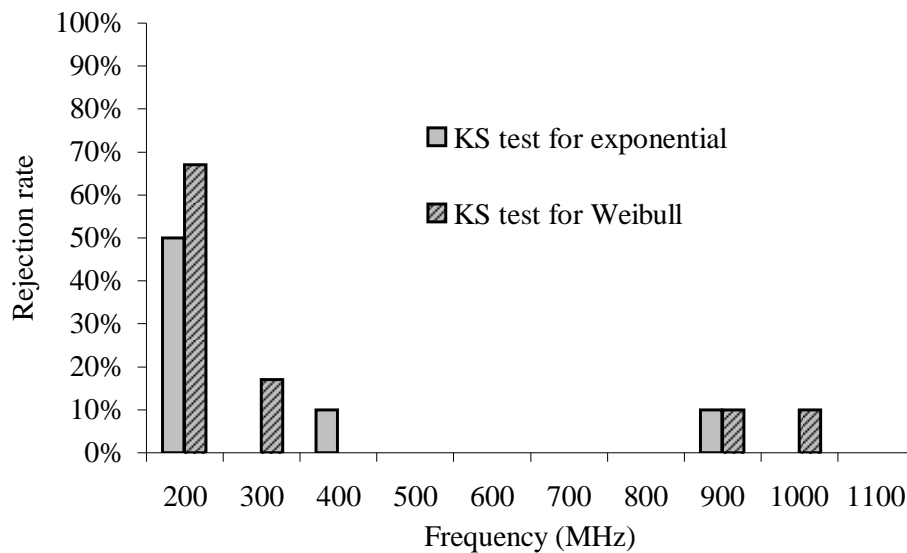


FIG. 3.15: Comparaison des taux de rejet pour le test d'ajustement de la loi exponentielle et de la loi de Weibull à la distribution expérimentale de la puissance mesurée à l'aide de l'antenne "large LP" ( $N = 150$ ).

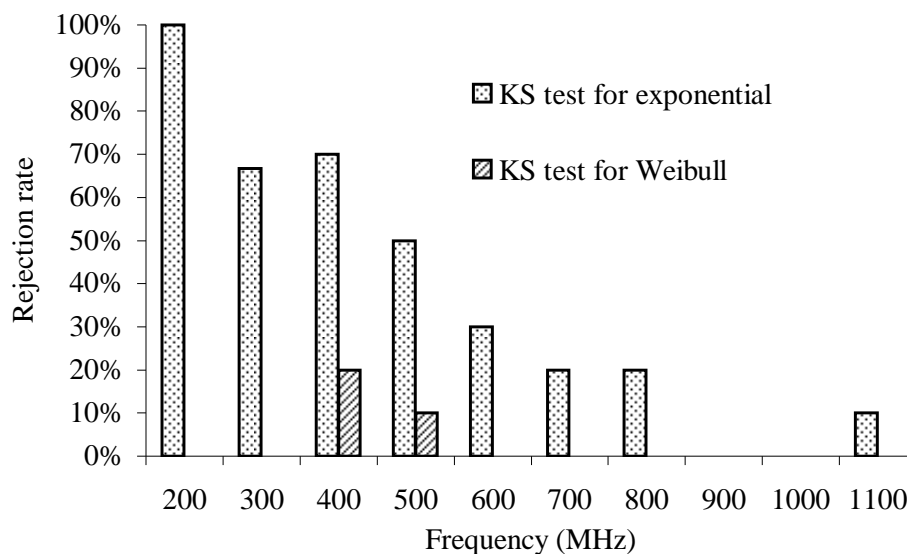
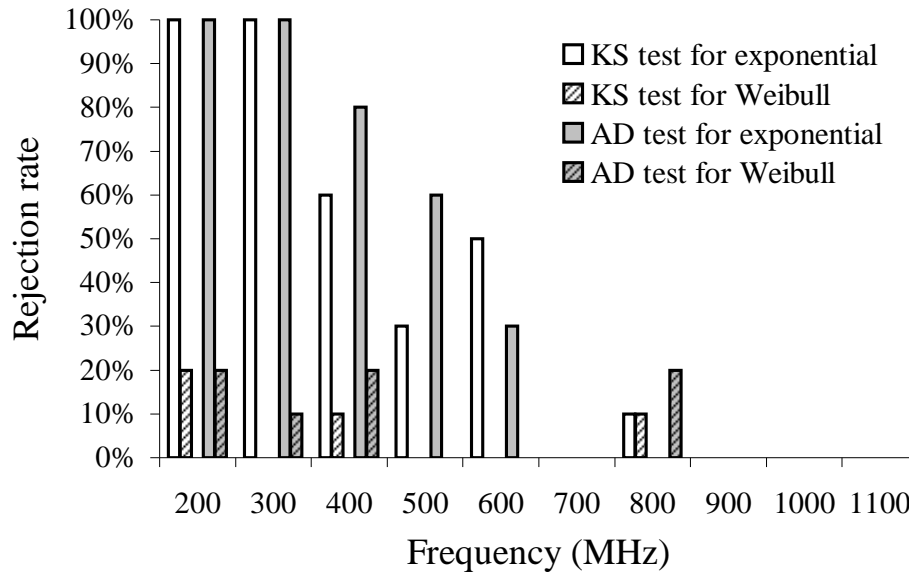


FIG. 3.16: Comparaison des taux de rejet pour le test d'ajustement de la loi exponentielle et de la loi de Weibull à la distribution expérimentale de la puissance mesurée à l'aide de l'antenne "small LP" ( $N = 150$ ).

La même analyse pour des mesures de puissance en réception de l'antenne "small LP" en figure 3.16 indique des résultats nettement différents. Nous remarquons en particulier que la loi exponentielle est acceptable seulement à partir de 700 MHz. Les taux de rejet de la loi exponentielle en-dessous de 700 MHz sont bien plus grands que pour les mesures issues de la grande antenne log-périodique (Fig. 3.15). Il semble donc que la dimension du récepteur ait une influence sur la distribution des mesures de puissance. Cela va dans le même sens que l'hypothèse formulée en section 3.3.2 à propos de l'influence des dimensions de la sonde de champ. Ainsi, la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM à partir de laquelle la distribution des mesures de puissance est assimilable à une loi exponentielle

doit dépendre de la dimension de l'antenne de réception. Alors que la loi exponentielle ne



**FIG. 3.17:** Comparaison des taux de rejet pour le test d'ajustement de la loi exponentielle et de la loi de Weibull à la distribution expérimentale de la puissance mesurée à l'aide de l'antenne monopôle de 9,3 cm de long ( $N = 150$ ).

correspond pas à la distribution des mesures en-dessous de 700 MHz, la loi de Weibull à deux paramètres s'ajuste correctement, même à 200 MHz, ce qui n'était pas le cas pour l'antenne "large LP". Donc aucune conclusion ne peut être dressée en-dessous de la  $LUF$ , que l'on estime à 264 MHz si l'on considère 6 fois la première fréquence de résonance de la cavité. Une troisième analyse basée sur les mesures en réception de l'antenne monopôle de 9,3 cm de long (Fig. 3.17) va dans le même sens que l'analyse concernant la petite antenne log-périodique. La plus grande dimension de ces deux antennes est du même ordre (cf. Figs. 3.11 et 3.13). Pour l'antenne monopôle, nous notons aussi un rejet massif de la loi exponentielle en-dessous de 700 MHz, alors que la distribution de Weibull s'ajuste correctement. Par exemple, à 400 MHz, le test AD rejette la loi de Weibull seulement dans 20% des cas, alors que la loi exponentielle est rejetée à hauteur de 80%. Notons en particulier que **lorsque la dimension de l'antenne monopôle est supérieure à  $\lambda/4$** , la distribution expérimentale des mesures de puissance est conforme à la loi exponentielle du modèle idéal d'une CRBM.

### 3.4.2 Evolution des paramètres de la loi en fonction de la fréquence

De la même manière que pour le champ, analysons l'évolution des paramètres  $(a, b)$  de la loi de Weibull qui s'ajuste correctement aux mesures de puissance réceptionnée par les trois antennes que l'on utilise dans cette étude. Rappelons que les couples  $(a, b)$  sont issues des séries de mesures de puissance, normalisées par leur valeur moyenne. Cela permet de s'affranchir de la variation du niveau de puissance émis dans la cavité en

fonction de la fréquence. Dans le cas d'une distribution exponentielle, le couple  $(a, b)$  devient simplement  $(1, 1)$  (cf. Tab 3.2). Concernant l'antenne "large LP", l'acceptation de la distribution exponentielle à partir de 300 MHz (Fig. 3.15) est conforme aux valeurs prises par les paramètres  $(a, b)$  de la loi de Weibull (Fig. 3.18) - acceptée par les tests d'ajustement - puisque le couple  $(a, b)$  est très proche du couple  $(1, 1)$ .

Par contre, la même analyse pour la distribution des mesures de puissance reçue par les antennes "small LP" (Fig. 3.19) et monopôle (Fig. 3.20), de plus petites dimensions, montre que les paramètres  $(a, b)$  de la loi de Weibull s'éloignent de manière significative des valeurs caractéristiques de la loi exponentielle en-dessous de 700 MHz. Remarquons que bien qu'il s'agisse d'antennes de géométries très distinctes, l'évolution du couple  $(a, b)$  en fonction de la fréquence est très similaire. Cela rejoint l'hypothèse que la plus grande dimension de l'antenne a une incidence sur la distribution des mesures. Ces résultats sur l'évolution du couple  $(a, b)$  en fonction de la fréquence sont en accord avec ceux observés sur le taux de rejet au test d'ajustement de la loi exponentielle.

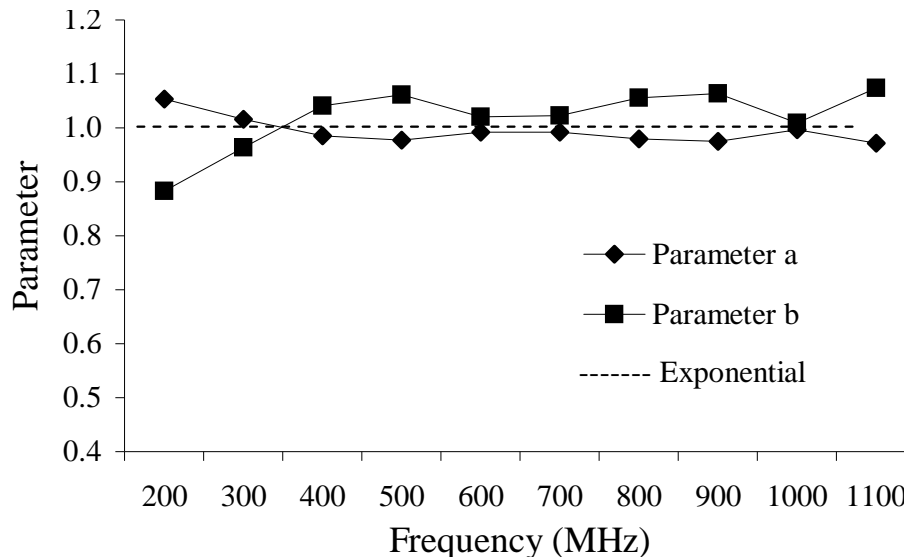
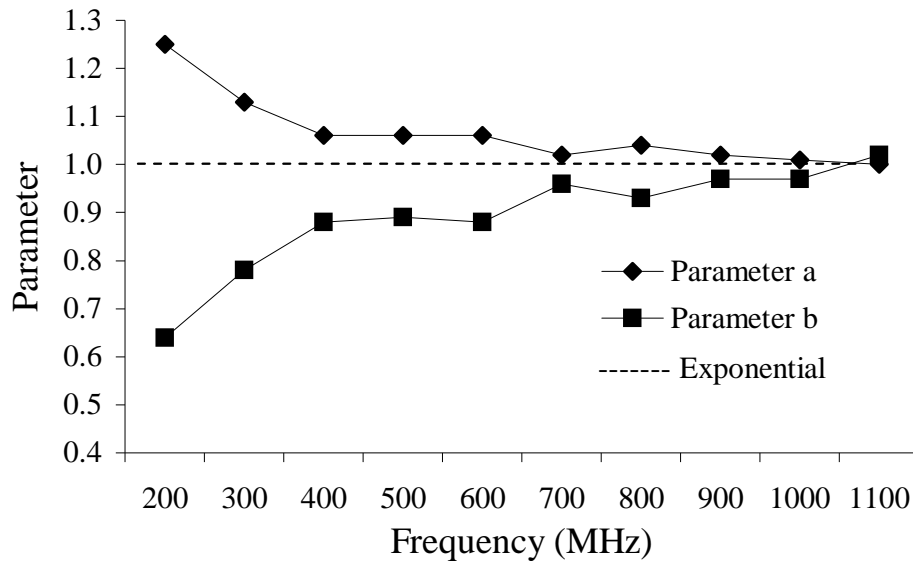


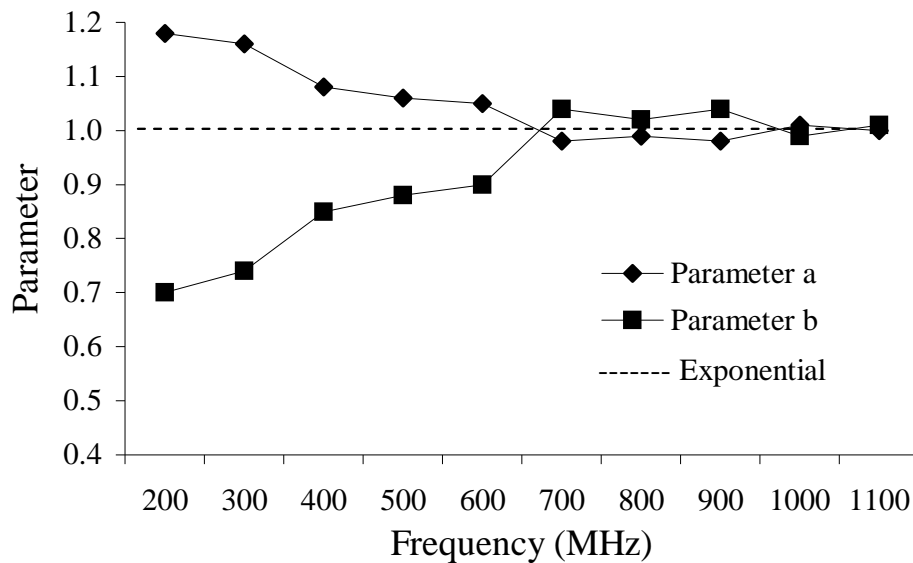
FIG. 3.18: Paramètres  $a$  et  $b$  de la loi de Weibull pour les mesures de puissance relevées à l'aide de l'antenne "large LP", estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et sélectionnés par le test KS (pour chaque fréquence, 10 séries de taille  $N = 150$  mesures sont testées).

### 3.4.3 Evolution du rapport écart type / moyenne en fonction de la fréquence

Les conclusions issues de l'analyse des tests d'ajustement ainsi que de l'étude de l'évolution du couple  $(a, b)$ , se retrouvent également à travers le comportement du ratio écart type / moyenne  $(\sigma/\mu)$  des mesures de puissance en réception de ces trois antennes. La Fig. 3.21 illustre la comparaison des ratios  $\sigma/\mu$  pour les mesures provenant des deux antennes log-périodiques. Il apparaît que le ratio expérimental s'ajuste correctement à celui de la distribution de Weibull, quelle que soit la fréquence. Par ailleurs, en-dessous de 700 MHz, pour l'antenne "small LP", un écart significatif existe entre le ratio expérimental



**FIG. 3.19:** Paramètres  $a$  et  $b$  de la loi de Weibull pour les mesures de puissance relevées à l'aide de l'antenne "small LP", estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et sélectionnés par le test KS (pour chaque fréquence, 10 séries de taille  $N = 150$  mesures sont testées).



**FIG. 3.20:** Paramètres  $a$  et  $b$  de la loi de Weibull pour les mesures de puissance relevées à l'aide de l'antenne monopôle de 9,3 cm de long, estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et sélectionnés par le test KS (pour chaque fréquence, 10 séries de taille  $N = 150$  mesures sont testées).

et celui de la loi exponentielle, ce qui est cohérent avec les tests d'ajustement (Fig. 3.16) et l'évolution du couple  $(a, b)$  (Fig. 3.19) en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité.

La figure 3.22 permet de mettre en évidence les 3 situations que nous avons relevées dans l'analyse de la distribution des mesures. Nous avons rassemblé le ratio  $\sigma/\mu$  des mesures de  $E_R^2$  collectées par la sonde de champ, et des mesures de puissance réceptionnée par les antennes monopôle et "large LP". Premièrement, nous avons le cas où l'antenne

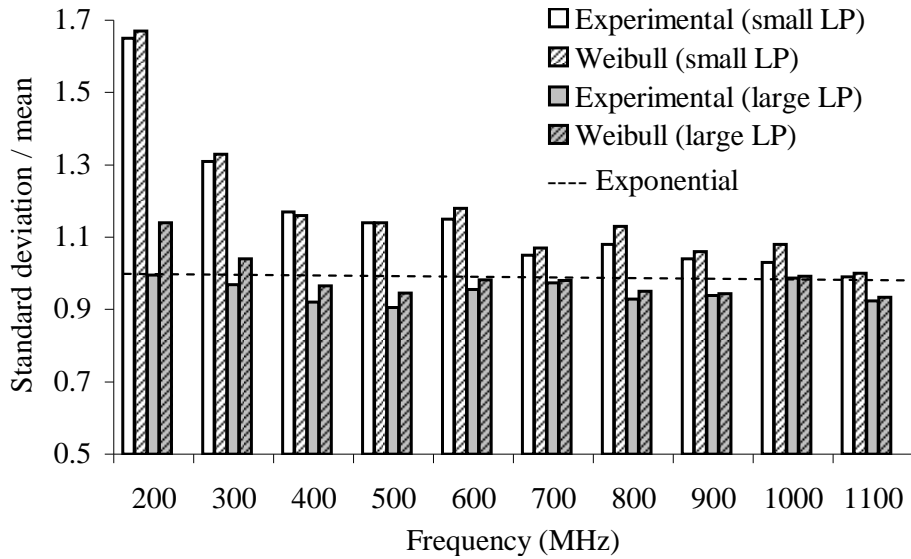


FIG. 3.21: Comparaison des ratios  $\sigma/\mu$  pour la distribution des mesures de puissance relevées à l'aide de l'antenne "small LP" et de l'antenne "large LP".

de réception est très petite, et la distribution du modèle idéal n'est pas atteinte sur la bande de fréquence considérée. Il s'agit des mesures de champ collectées à l'aide de la sonde de champ, pour lesquelles le ratio  $\sigma/\mu$  demeure loin de la valeur correspondant à la loi exponentielle ( $\sigma/\mu = 1$ ). Deuxièmement, nous avons la situation où la plus grande

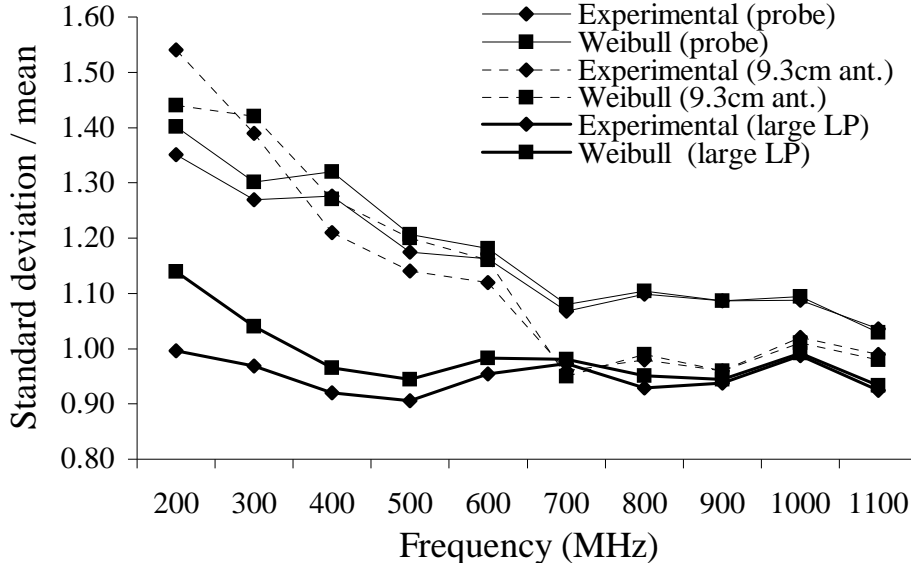


FIG. 3.22: Comparaison des ratios  $\sigma/\mu$  pour la distribution des mesures de  $E_R^2$  par la sonde de champ, et la distribution des mesures de puissance relevées à l'aide de l'antenne monopôle de 9,3 cm de long et de l'antenne "large LP".

dimension de l'antenne permet d'atteindre le ratio caractéristique de la loi exponentielle, dès lors que cette dimension devient plus grande que  $\lambda/4$ . Troisièmement, les résultats de l'antenne "large LP" illustrent le cas où l'antenne est suffisamment grande devant la longueur d'onde pour pouvoir identifier le ratio  $\sigma/\mu$  expérimental à celui de la loi exponentielle, au-dessus de la  $LUF$ .

# Chapitre 4

## Conclusions sur les lois de distribution

Dans la littérature sur la chambre réverbérante à brassage de modes, les tests statistiques de Kolmogorov-Smirnov utilisés dans le but de vérifier l'ajustement de la distribution des mesures à une loi théorique sont basés sur le critère de Massey. Nous avons montré que les valeurs critiques de Massey ne sont pas adaptées pour l'analyse des distributions de mesures réalisées en chambre réverbérante. Cela provient du fait que les lois exponentielle et de Rayleigh ne sont pas complètement définies, puisqu'il est nécessaire d'estimer un paramètre ( $\theta$ ). Nous proposons alors l'utilisation des tests KS-Stephens et AD-Stephens, qui sont parfaitement adaptés au test d'ajustement des lois du modèle idéal de Hill [5]. L'utilisation de ces tests d'ajustement appropriés montre que l'utilisation de valeurs critiques mal adaptées (Massey) peut conduire à une mauvaise estimation de la loi de distribution sous-jacente des mesures. Il en résulte que la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM, à partir de laquelle on peut considérer que les mesures de puissance sont distribuées selon la loi exponentielle, est sous-estimée. Nous montrons ainsi que définir la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM (ou  $LUF$ ) en fonction du bon ajustement des lois de distribution, plutôt que sur des critères purement théoriques - *i.e.* les dimensions de la cavité - se prête mieux à la notion d'uniformité du champ électromagnétique.

En ce qui concerne les mesures d'une composante cartésienne de champ, nous illustrons que les lois du modèle idéal, usuellement considérées, sont massivement rejetées au-delà de la  $LUF$ . Nous espérons d'autres analyses du même type, basées sur les tests d'ajustement que nous recommandons, et reposant sur des mesures réalisées dans d'autres chambres réverbérantes, afin de pouvoir généraliser ces résultats. Nous avons l'habitude de déduire la distribution du champ à partir de la distribution des mesures de puissance, ou l'inverse, mais il faut bien noter que nous utilisons des récepteurs différents. La sonde de champ peut être vue comme un capteur local, ce qui n'est pas le cas des antennes habituellement utilisées pour mesurer la puissance reçue.

Ces résultats ne remettent pas en question le modèle de cavité idéale. Cependant, nous mettons en évidence que l'antenne de réception a une influence sur la distribution des mesures en chambre réverbérante. La non conformité de la distribution des mesures de  $E_R$  par rapport à la loi de Rayleigh, peut être attribuée aux imperfections d'une CRBM réelle, qui n'a évidemment pas les propriétés d'une cavité idéale. Nous émettons l'hypothèse que



les imperfections de la chambre (pertes, densité de modes finie) par rapport au modèle idéal, affectent plus particulièrement la distribution des mesures réalisées à l'aide d'une antenne de petite taille par rapport à la longueur d'onde. Arnaut indique par exemple dans [34] qu'une antenne relativement grande peut masquer une qualité de réverbération plutôt médiocre. La sonde de champ utilisée pour mesurer  $E_R$  est un capteur local. Le champ électrique peut être considéré comme constant dans le petit volume de mesure. Au contraire, l'antenne log-périodique "large LP" utilisée dans un premier temps pour réceptionner la puissance a des dimensions bien plus grandes que la sonde. Pour ce capteur non localisé, la distribution de courant ne peut pas être considérée comme uniforme. Par conséquent, les imperfections de l'environnement réverbérant peuvent être compensées "par effet de moyennage", dû à l'intégration du courant sur la surface de captation de l'antenne. D'autres analyses reposant sur des mesures de puissance à l'aide d'antennes de dimension intermédiaire montrent que la loi exponentielle n'est pas acceptable tant que la longueur d'onde n'est pas suffisamment petite par rapport à la taille de l'antenne.

Par ailleurs, à l'aide de tests statistiques adaptés, nous montrons que la loi de Weibull à deux paramètres s'ajuste correctement à la distribution des mesures, sauf en-dessous de la  $LUF$  que nous considérons égale à 6 fois la première fréquence de résonance de la cavité. L'analyse du couple  $(a, b)$  de la loi de Weibull est tout à fait cohérente avec les conclusions issues des résultats des tests d'ajustement. Il serait intéressant de comparer les couples  $(a, b)$  de la distribution des mesures de champ issues de différentes CRBM, en ayant préalablement normalisé les mesures par leur valeur moyenne afin de s'affranchir du niveau de puissance émis dans la cavité. La principale différence entre les lois de Rayleigh et de Weibull est le paramètre supplémentaire  $(b)$  de la seconde distribution. Même si la loi exponentielle s'ajuste bien aux mesures de la puissance reçue sur une antenne de grande dimension, il apparaît nécessaire de modifier cette loi pour observer un bon accord avec la distribution des mesures d'une composante cartésienne de champ.

Considérer la loi de Rayleigh (ou exponentielle) ou la loi de Weibull pour modéliser la distribution expérimentale des mesures en CRBM, implique nécessairement une estimation différente de l'incertitude sur les mesures. De plus, cela a aussi une influence sur l'évaluation de l'uniformité du champ (cf. section 8). En particulier, par l'analyse du ratio  $\sigma/\mu$ , nous montrons que lorsque la loi du modèle idéal ne s'ajuste pas à la distribution des mesures au-dessus de la  $LUF$ , le ratio  $\sigma/\mu$  de la distribution expérimentale est parfaitement cohérent avec celui de la loi de Weibull. Par conséquent, considérer une loi de Weibull plutôt qu'une distribution de Rayleigh (ou exponentielle) permet de mieux refléter l'écart type de la distribution des mesures. Cela a une conséquence non négligeable dans l'utilisation du théorème central limite (TCL), que l'on applique pour déterminer le nombre de mesures indépendantes nécessaire pour atteindre le niveau d'incertitude souhaité sur l'estimation de la moyenne des mesures. Par exemple, considérer  $\sigma/\mu = 0,52$  (Rayleigh) au lieu de  $\sigma/\mu = 0,70$  (Weibull) conduit à estimer la moitié du nombre d'échantillons indépendants effectivement requis par le TCL. En effet, si on désigne par  $N_1$  et  $N_2$  les

nombre d'échantillons indépendants associés respectivement à la loi de Rayleigh et à la loi de Weibull, l'application du TCL donne  $N_2/N_1 \approx 2$ .

Cette première partie a donné lieu à une publication de 11 pages dans la revue *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* du mois de novembre 2007. Le lecteur pourra à ce propos retrouver la liste de l'ensemble des publications de l'auteur de cette thèse après la conclusion de ce rapport de thèse (page 205).

Nous allons maintenant aborder la deuxième partie de ce rapport de thèse, consacrée à l'estimation de la taille effective d'une série d'échantillons de taille  $N$ . Cette taille effective correspond au nombre  $N'$  d'échantillons indépendants parmi  $N$  mesures. Les normes [2, 6] exposent une méthode d'estimation d'un nombre de mesures non corrélées, mais nous verrons que la démarche proposée est insuffisante. Rappelons que la propriété d'indépendance des mesures est incontournable pour quantifier correctement l'incertitude d'un essai réalisé en chambre réverbérante. Les normes actuelles soulignent d'ailleurs que ce nombre d'échantillons indépendants doit être connu au préalable afin d'appliquer des outils statistiques sur les données issues des mesures en CRBM. Par exemple, lorsque l'on estime un paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance à partir d'une série de valeurs distribuées aléatoirement, nous devons vérifier l'indépendance des données afin de pouvoir utiliser la relation (2.12).



## Deuxième partie

# INDÉPENDANCE DES MESURES ET ÉVALUATION DE L'EFFICACITÉ DE BRASSAGE



# Chapitre 5

## Méthode actuelle d'évaluation de l'indépendance statistique des mesures en CRBM

Caractériser l'efficacité du brassage mécanique consiste à déterminer le nombre maximum  $N'$  de positions de brasseur, sur une rotation complète, donnant lieu à des mesures en CRBM qui sont indépendantes. Nous parlons alors de positions de brasseur indépendantes. De manière analogue, caractériser l'efficacité du brassage électronique dans une bande de fréquences  $\Delta f$  revient à évaluer le nombre maximum  $N''$  de fréquences, dans la bande  $\Delta f$ , donnant lieu à des mesures en CRBM qui sont indépendantes. Nous parlons dans ce cas de fréquences indépendantes.

L'efficacité de brassage mécanique dépend de la fréquence d'émission du signal généré au sein de la cavité. A basse fréquence autour de la  $LUF$ , puisque la longueur d'onde n'est pas suffisamment faible par rapport aux dimensions de la cavité, peu de positions de brasseur donnent lieu à des conditions aux limites indépendantes pour le champ électromagnétique. Lorsque la fréquence augmente, de plus en plus de positions de brasseur indépendantes sont disponibles. Par ailleurs, la densité de modes croît avec la fréquence. Donc l'efficacité de brassage fréquentiel dépend de la fréquence centrale de la bande  $\Delta f$ . Plus cette fréquence centrale sera élevée, et plus dans une même largeur de bande, nous disposerons de fréquences indépendantes.

Dans le traitement des mesures en CRBM, il est incontournable de vérifier au préalable si la série d'échantillons collectés (puissance, champ, courant...) est bien constituée uniquement de mesures indépendantes. Par exemple, lorsque nous désirons vérifier l'ajustement des mesures à une loi de probabilité, nous faisons appel à la méthode du maximum de vraisemblance qui requiert l'indépendance des échantillons (section 2.2.3). Par ailleurs, la notion d'indépendance est très importante afin de quantifier correctement l'incertitude de mesures lors d'un essai CEM réalisé en chambre réverbérante. Les normes aéronautique [6] et automobile [2] soulignent que le nombre d'échantillons indépendants doit être connu dans le but d'appliquer des outils statistiques aux données issues de mesures en

CRBM. En outre, pour la caractérisation d'antennes, il est indispensable de bien maîtriser l'indépendance des mesures afin de pouvoir quantifier avec précision l'incertitude sur l'estimation de paramètres tels que l'efficacité de l'antenne.

Avant de proposer une nouvelle méthode de caractérisation de l'efficacité de brassage (chapitre 6), nous mettons en évidence dans ce chapitre les limites de la démarche préconisée par les normes et adoptée plus largement par les utilisateurs des chambres réverbérantes en ce qui concerne l'indépendance des mesures.

## 5.1 Le théorème central limite

Nous commençons ce chapitre par une présentation du théorème central limite (TCL) puisque, fréquemment utilisé par l'expérimentateur lorsqu'il s'agit de caractériser l'incertitude des mesures, ce théorème requiert l'indépendance des échantillons collectés.

### 5.1.1 Loi normale et quantile

Une variable aléatoire  $X$  est dite distribuée **normalement** si sa densité de probabilité  $f(x)$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (5.1)$$

où  $\mu$  est l'espérance de la distribution et  $\sigma$  l'écart type. La variance s'écrit  $\sigma^2$ . On note souvent cette distribution normale (ou **gaussienne**) sous la forme suivante :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma). \quad (5.2)$$

La loi **normale standard** est la distribution de la v.a.  $U = (X - \mu)/\sigma$ , qui ne dépend pas des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . Sa densité de probabilité  $g(u)$  est donnée par :

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}. \quad (5.3)$$

Il s'agit de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . A partir de la probabilité  $\mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(U \leq \frac{x-\mu}{\sigma})$ , nous introduisons la définition du quantile, à l'aide de la notation suivante :

$$\Phi(u) = \mathcal{P}(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx. \quad (5.4)$$

Nous désignons par  $q_\alpha$  le **quantile** à  $\alpha\%$  que l'on définit tel que

$$\Phi(q_\alpha) = \alpha. \quad (5.5)$$

Par exemple, le quantile à 5% correspond à la grandeur  $q_5$  telle que 5% des valeurs possibles de la distribution normale soit inférieures à  $q_5$ . Nous pouvons étendre la définition du

quantile à d'autres lois de distribution en remplaçant  $\Phi$  par la fonction de répartition de la v.a. que l'on considère.

### 5.1.2 Enoncé du TCL

A cause de son importance dans la pratique courante, la loi normale a fait l'objet d'une attention particulière dans les mathématiques statistiques. En théorie des probabilités, la distribution normale peut très souvent être utilisée comme approximation de d'autres distributions. Cela est particulièrement le cas dans la théorie dite des grands nombres. Les principaux développements théoriques sur la loi normale sont motivés par l'application fréquente du théorème central limite.

Le TCL établit les conditions sous lesquelles la distribution de la somme de variables aléatoires normalisées converge vers la loi normale standard, lorsque le nombre de v.a. de la somme augmente. Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de valeurs aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi de distribution  $\mathcal{L}$  et **indépendantes**. Supposons que l'espérance  $\mu$  et l'écart type  $\sigma$  de la loi  $\mathcal{L}$  existent et soient finis ( $\sigma \neq 0$ ). Considérons la somme  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Le TCL donne le résultat suivant : la loi de  $S_n$  tend vers la loi normale  $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$  quand  $n$  tend vers l'infini. L'espérance de  $S_n$  s'écrit  $n\mu$  et son écart type vaut  $\sigma\sqrt{n}$ .

Si l'on s'intéresse non pas à la somme  $S_n$  mais à la moyenne  $\langle X_n \rangle$  telle que

$$\langle X_n \rangle = \frac{S_n}{n} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n, \quad (5.6)$$

alors il s'agit aussi d'une v.a. dont la distribution tend vers la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$  quand  $n$  tend vers l'infini. Ce résultat est très important car il nous permet de contrôler l'incertitude sur l'estimation d'une grandeur moyenne, par la connaissance de la loi de distribution et de l'écart type associé à cette loi.

### 5.1.3 Application aux mesures en CRBM

Dans des domaines très variés faisant appel aux statistiques, le théorème central limite présenté en section 5.1.2 est très souvent appliqué de la manière suivante. Si l'on associe une loi de probabilité à une population, chaque élément extrait de la population est donc considéré comme une v.a. et, en réunissant un nombre  $n$  de ces variables supposées indépendantes, on obtient un échantillon de cette population. La somme de ces v.a. divisée par  $n$  donne une nouvelle v.a. que l'on nomme la moyenne empirique. Celle-ci tend alors vers une loi normale dont on sait estimer l'écart type.

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un échantillon indépendant de la v.a.  $X$  distribuée selon une loi de probabilité quelconque d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . Lorsque le nombre  $n$  est suffisamment grand, d'après le TCL, nous pouvons considérer que l'estimateur  $\hat{\mu}$  de la moyenne est distribué selon une loi normale dont l'écart type  $\sigma_{\hat{\mu}}$  est réduit d'un facteur  $1/\sqrt{n}$  par



rapport à la population d'origine :

$$\sigma_{\hat{\mu}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.7)$$

La conséquence directe du TCL est que l'on peut déterminer, d'après (5.7), l'incertitude sur l'estimation de la moyenne d'une série de  $n$  mesures à condition que ces  $n$  mesures soient indépendantes. En particulier, le calibrage d'une chambre réverbérante [2, 6] repose en partie sur l'estimation de la puissance moyenne mesurée à l'aide d'un certain nombre de positions de brasseur. Par ailleurs, la quantification de l'incertitude sur la mesure d'efficacité d'antennes repose sur l'application du TCL puisqu'il s'agit d'estimer des grandeurs moyennes (cf. section 9.1).

La condition incontournable de l'application du TCL ainsi exposé repose sur la détermination du nombre  $n$  d'échantillons indépendants. Quel que soit l'essai réalisé en CRBM, l'incertitude de mesures est donnée par le TCL lorsqu'il s'agit d'estimer une grandeur moyenne (puissance, champ, efficacité d'antennes,...). Par ailleurs, la quantification de l'incertitude sur l'estimation d'un champ maximum, nécessaire lors d'essais en immunité, se base également sur la connaissance du nombre  $n$  de mesures indépendantes. Par conséquent, que ce soit pour l'estimation d'une grandeur moyenne ou d'une grandeur maximum, il est indispensable de connaître le nombre de mesures indépendantes afin d'évaluer l'incertitude de mesures.

## 5.2 Critère actuel de décorrélation

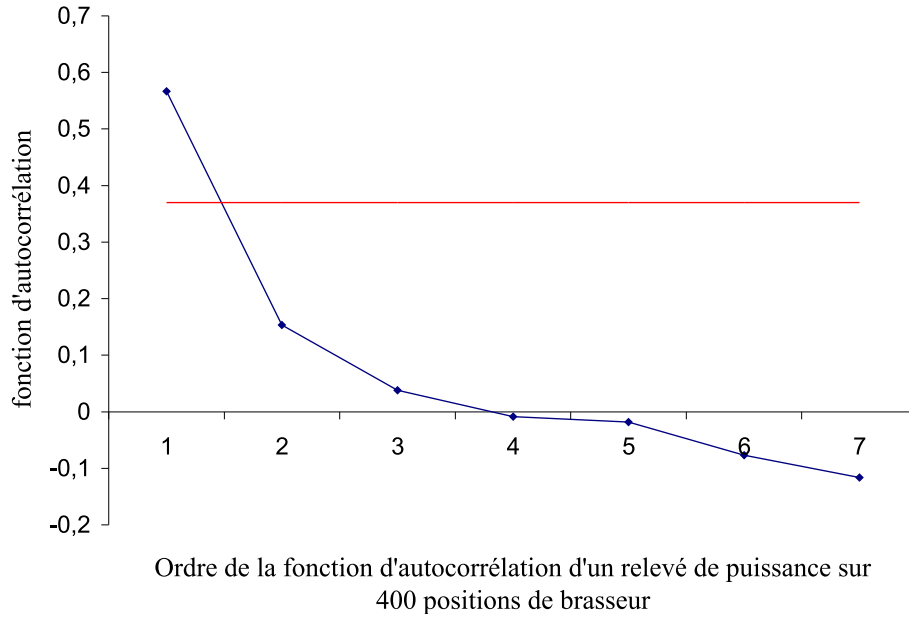
### 5.2.1 Méthode normative

Les normes [2, 6] préconisent la démarche que nous exposons ici pour déterminer si  $N$  mesures collectées pour  $N$  positions de brasseur sur un tour complet sont indépendantes. Afin de déterminer si les  $N$  mesures sont indépendantes, le calcul se base sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation (ACF) à l'ordre 1 que nous notons  $r$ . Ce paramètre est déterminé par le calcul suivant :

$$r = \frac{\text{covar}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}}, \quad (5.8)$$

où  $y$  est la même série de mesures que  $x$  sélectionnées sur une rotation complète de brasseur ( $360^\circ$ ), mais avec un décalage de 1 pas de brasseur. Ceci permet de comparer deux à deux les mesures successives. Les notations "covar" et "var" désignent respectivement la covariance et la variance. Il faut bien noter que  $r$  représente une estimation de la corrélation sous-jacente  $\rho$  recherchée. Si l'on disposait d'une infinité de données ( $N \rightarrow \infty$ ), alors on pourrait identifier  $r$  à  $\rho$ . Cependant, puisque l'on ne dispose que d'un nombre fini  $N$  d'échantillons, l'estimateur  $r$  de l'espérance  $\rho$  est distribué aléatoirement autour de  $\rho$ . Si  $\rho = 0$  alors la série ne contient que des échantillons décorrélés. Par contre, si  $\rho \neq 0$  alors il existe une corrélation entre les données de la série. D'une manière générale, la

fonction d'autocorrélation est comprise dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Plus  $|\rho|$  est élevé, et plus la corrélation est forte.



**FIG. 5.1:** Application de la méthode normative pour déterminer le nombre de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 400$  positions, pour des mesures de puissance réalisées à 700 MHz dans la CRBM de l'IETR. La droite en rouge représente le seuil critique de 0,37.

Les normes indiquent que l'on peut supposer l'indépendance statistique des mesures via la modification des conditions aux limites pour le champ électromagnétique obtenue entre deux positions successives du brasseur, lorsque l'ACF à l'ordre 1 est inférieure à la valeur critique  $\rho_0$  tel que :

$$\rho_0 = 1/e \approx 0,37. \quad (5.9)$$

Lorsque ce critère n'est pas respecté, la norme propose de retirer une mesure sur deux, *i.e.* une position de brasseur sur deux, et de renouveler le calcul de l'estimation de l'ACF à l'ordre 1, ainsi que la comparaison à la valeur critique  $\rho_0 = 0,37$ . Cela revient à calculer directement l'ACF à l'ordre deux sur la série initiale  $x$ , en appliquant (5.8) avec  $y$  la série identique à  $x$  avec un décalage de deux positions de brasseur. Et ainsi de suite pour le calcul de l'ACF à un ordre supérieur. La figure 5.1 montre par exemple que d'après la méthode normative, on peut considérer que sur les  $N = 400$  positions de brasseur, seulement une position sur deux donne lieu à des mesures indépendantes.

### 5.2.2 Non prise en compte de la distribution du coefficient de corrélation

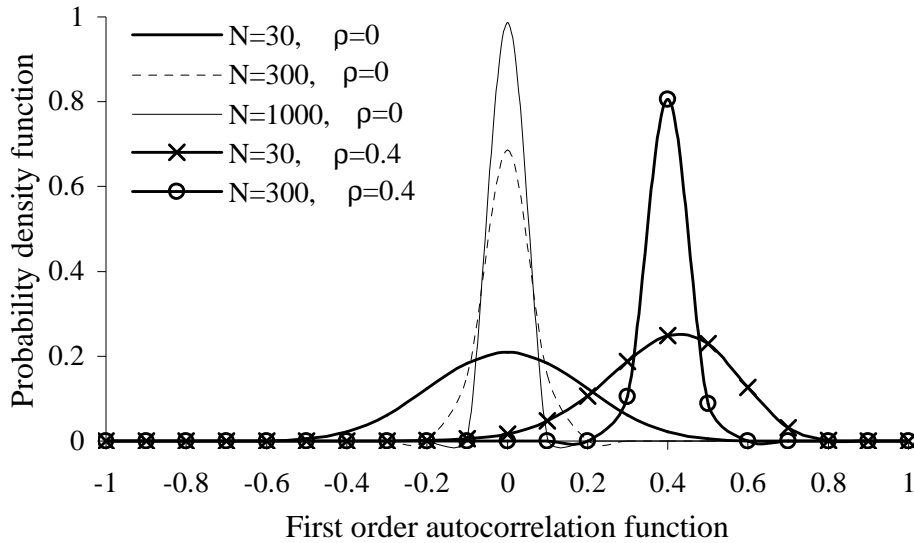
Le principal inconvénient de la démarche proposée par la norme pour déterminer si les mesures sont indépendantes a déjà été souligné par Lundén [30]. Il s'agit du fait que la valeur critique (5.9) est indépendante du nombre  $N$  de positions de brasseur. Or, comme indiqué en figure 5.2, la fonction d'autocorrélation est elle-même une v.a. dont la densité

de probabilité  $\Psi(r)$  dépend de  $N$  :

$$\Psi(r) = \frac{N-2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(N-1)}{\Gamma(N-\frac{1}{2})} \cdot \frac{(1-\rho^2)^{\frac{N-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{N-4}{2}}}{(1-\rho r)^{N-\frac{3}{2}}} \times A(r) \quad (5.10)$$

$$A(r) = 1 + \frac{1+\rho r}{4(2N-1)} + \dots \quad (5.11)$$

L'expression de la densité de probabilité  $\Psi(r)$ , indépendante de la distribution sous-jacente des échantillons [97] est donnée par (5.10) associée à (5.11) [68]. Compte tenu de la



**FIG. 5.2:** Densités de probabilité de la fonction d'autocorrélation calculées d'après (5.10) pour différentes tailles  $N$  d'échantillons et différentes espérances  $\rho$ .

densité de probabilité  $\Psi(r)$ , Lundén [30] montre que la valeur critique (5.9) est appropriée uniquement pour un nombre d'échantillons  $N = 30$ , associé à un niveau de risque de 5%. Précisément, cela signifie que lorsque l'on obtient une estimation  $r$  de la fonction d'autocorrélation au premier ordre supérieure à 0,37, alors la probabilité n'est que de 5% que la valeur vraie  $\rho$ , ou espérance, de la fonction d'autocorrélation soit nulle. Donc il n'y a que 5% de chance que les  $N = 30$  échantillons soient strictement décorrés. La valeur critique  $\rho_0 = 0,37$  est aussi adaptée pour  $N = 50$  échantillons, mais dans le cas où l'on tolère un seuil de risque de 1%.

Lundén montre aussi que si une série de  $N > 100$  mesures conduit à  $r = 0,37$ , alors la probabilité est très grande que les données soient corrélées, *i.e.* la probabilité est très élevée que  $|\rho| > 0$ . En particulier, la norme [2] propose comme seul exemple, pour illustrer la méthode de détermination du nombre de positions de brasseur indépendantes (section 5.2.1), le cas de  $N = 450$  positions de brasseur. Or, ce cas est absurde si l'on tient compte de la densité de probabilité  $\Psi(r)$  de la fonction d'autocorrélation (Fig. 5.2). En effet, si une série de  $N = 450$  échantillons conduit à  $r = 0,37$ , alors la probabilité n'est que de  $10^{-16}$  que l'espérance  $\rho$  de la fonction d'autocorrélation soit nulle [68].

En ce qui concerne l'estimation de l'ACF  $r$ , on trouve dans la littérature des chambres réverbérantes deux types de tests statistiques (Tab. 5.1). Leur principal avantage est que

**TAB. 5.1:** Comparaison des tests d'hypothèse de LB [30] and KWN [68]

	LB	KWN
Espérance $\rho$	$\rho = 0$	$\rho > 0$
$H_0$	$E(r) = 0$	$E(r) > \rho$
$\overline{H_0}$	$E( r ) > 0$	$E(r) \leq \rho$
Limite $\rho_0$	$\frac{\alpha}{2} = \int_{\rho_0}^1 \Psi(r) dr$	$\alpha = \int_{-1}^{\rho_0} \Psi(r) dr$

ces tests tiennent compte de la densité de probabilité  $\Psi(r)$  de la fonction d'autocorrélation. Le premier, désigné par LB et considéré par Lundén [30], teste l'hypothèse notée  $H_0$  que l'espérance  $E(r)$  de l'ACF  $r$  soit strictement nulle. Lorsque l'estimation  $r$  de l'ACF est supérieure à la valeur critique  $\rho_0$ , qui dépend alors de la taille  $N$  de l'échantillon et d'un niveau de risque  $\alpha$ , alors l'hypothèse  $H_0$  est rejetée. Par conséquent, l'hypothèse d'indépendance n'est pas acceptée. La seconde approche, désignée par KWN [68], a pour but d'estimer la valeur maximum de l'espérance de l'ACF  $\rho$ . Au lieu de déterminer si l'espérance de l'ACF a de grandes chances d'être strictement nulle, le test KWN permet de déterminer la borne supérieure de l'espérance  $\rho$ , pour un niveau de confiance  $1 - \alpha$  donné (section 2.1.1). Par le test KWN, on en conclut que pour le couple ( $N = 450; \rho_0 = 0,37$ ) repris par la norme [2], il y a 5% de probabilité que la valeur vraie sous-jacente de l'ACF soit plus élevée que 0,43 [68]. Cependant, par le test KWN, aucune conclusion ne peut être établie en ce qui concerne l'évaluation de l'indépendance de la série de  $N$  échantillons. Contrairement à ce que [68] peut laisser sous-entendre, nous ne pensons pas que les tests LB et KWN soient en contradiction. Au contraire, ils apportent des informations complémentaires sur l'estimation de l'espérance  $\rho$  de la fonction d'autocorrélation. Le premier test (LB) cherche à estimer si la valeur vraie sous-jacente  $\rho$  de l'ACF a de grandes chances d'être strictement nulle, tandis que le second (KWN) détermine une limite supérieure de  $\rho$  avec un niveau de confiance élevé (*e.g.* 95%).

### 5.2.3 Limites de la corrélation linéaire

Il nous semble nécessaire de rappeler ici les limites de la fonction d'autocorrélation dans la caractérisation de l'indépendance de données. Rappelons que la propriété d'indépendance des mesures est une condition nécessaire dans l'application du TCL (section 5.1.2).

Plus couramment, on parle souvent du coefficient de corrélation, sous-entendu linéaire, pour évoquer ce que l'on nomme plus correctement en statistique la fonction d'autocorrélation.

La dépendance et la corrélation sont des notions différentes. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Alors ces deux v.a. ne sont pas corrélées, *i.e.* l'espérance  $\rho$  du coefficient de corrélation entre des échantillons de la population  $X$  et des échantillons de la population  $Y$ , est nulle. Mais la réciproque est fautive, *i.e.* qu'une absence de cor-

relation, linéaire, n'implique pas l'indépendance. Une exception existe, dans le cas où les v.a. sont gaussiennes. La dépendance est alors entièrement caractérisée par le coefficient de corrélation.

Citons un exemple, couramment repris pour démontrer qu'indépendance et corrélation ne sont pas des notions équivalentes. Soit  $X$  une v.a distribuée selon une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et soit  $Y = X^2$ . Alors on peut montrer que  $\rho \neq 0$ , bien qu'il existe une relation de dépendance entre  $X$  et  $Y$ .

Bien qu'il soit facile à estimer (5.8) et fréquemment présent dans les travaux qui font appels aux statistiques, dans des domaines très divers (finance, assurance, biologie, climatologie, etc.), le coefficient de corrélation doit être utilisé avec précaution. En effet, il n'est pertinent qu'en présence de distributions elliptiques (distribution multivariée normale ou distribution de Student), ou de dépendance linéaire. Les erreurs d'interprétation et limites liées à son utilisation sont discutées dans [98].

Puisque le coefficient de corrélation (5.8) est le paramètre utilisé en chambre réverbérante, comme dans bien d'autres domaines, nous conservons cette mesure de la corrélation entre  $N$  valeurs distribuées aléatoirement. Cependant, nous mettons en évidence que l'absence de corrélation relevée par l'ACF ne signifie pas nécessairement indépendance. Nous reviendrons sur ce point en chapitre 7, lorsqu'il s'agira de vérifier expérimentalement le théorème central limite, par le brassage mécanique et le brassage électronique en chambre réverbérante.

## 5.3 Contrôle de l'estimation de la corrélation

Comparer l'espérance  $\rho$  de la fonction d'autocorrélation à la valeur nulle (test LB, tableau 5.1) nous semble trop sévère car une espérance de 0,1 ne modifie pas de manière significative les conclusions d'un essai en CRBM. En particulier, les appareils de mesure ne sont pas parfaits et fournissent une estimation de l'observable à une incertitude près. Par ailleurs, le fait de caractériser l'espérance de l'ACF uniquement par sa borne supérieure (test KWN, tableau 5.1) peut paraître insuffisant puisque la fonction d'autocorrélation est comprise dans le cas général dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Par conséquent, nous envisageons ici une autre démarche qui consiste à estimer l'espérance  $\rho$  de l'ACF par un intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$ . La détermination des bornes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  est simplifiée grâce à l'approximation gaussienne de la densité de probabilité  $\Psi(r)$  que nous allons maintenant présenter.

### 5.3.1 Approximation gaussienne

De nombreux auteurs [99, 100, 101, 102, 103] ont montré que l'approximation gaussienne de la densité de probabilité (5.10) de l'estimateur de l'ACF  $r$  est particulièrement bien adaptée pour un nombre  $N$  d'échantillons même relativement faible et pour une espérance  $\rho$  pas trop grande. La densité de probabilité  $\Psi(r)$  tend rapidement vers la loi

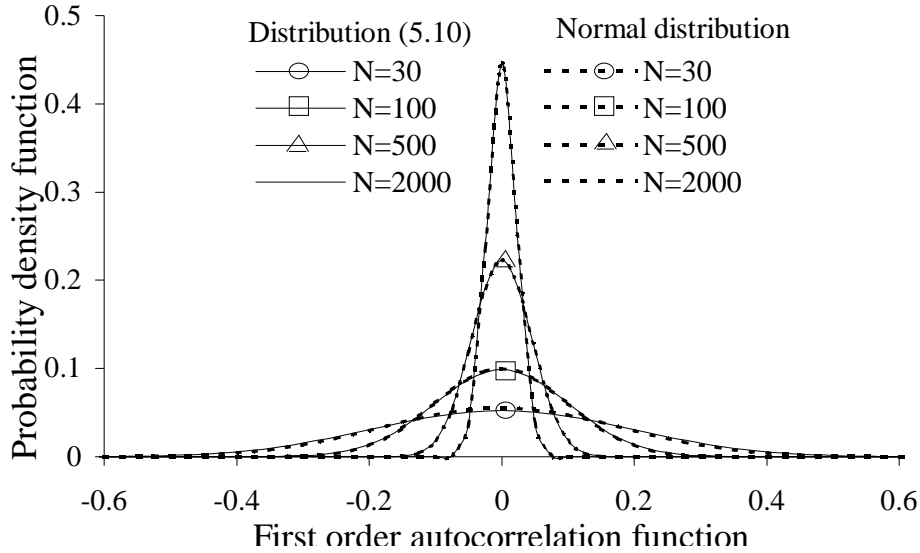


FIG. 5.3: Approximation de la densité de probabilité de la fonction d'autocorrélation au premier ordre par une distribution normale d'espérance  $\rho = 0$ .

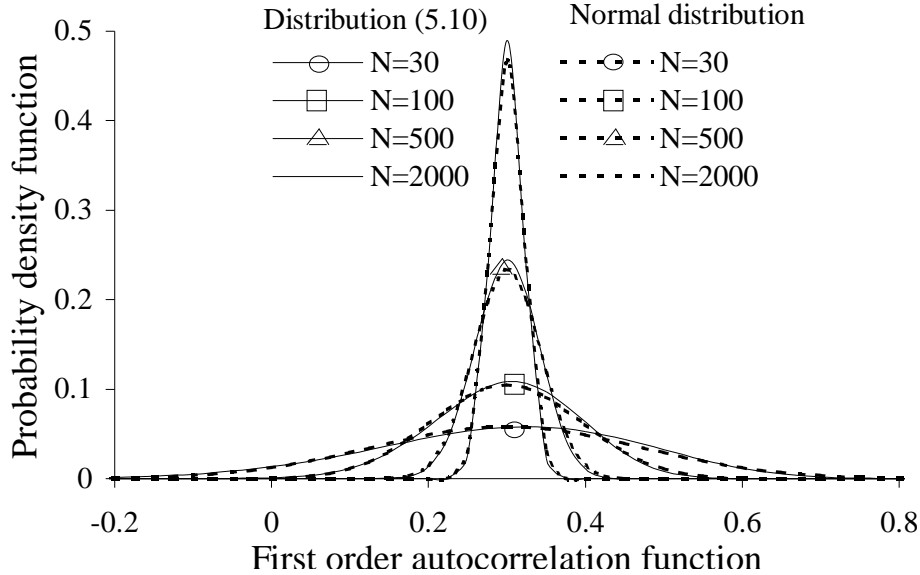
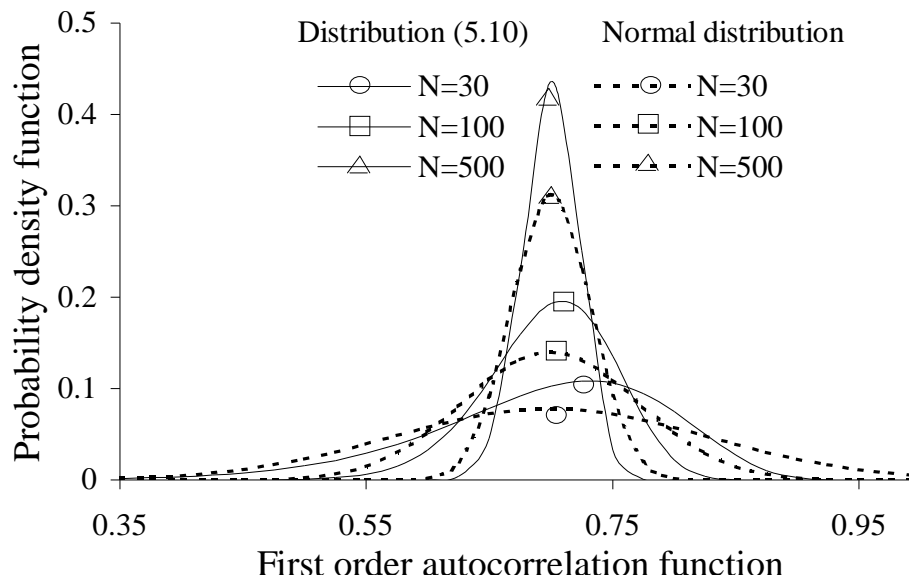


FIG. 5.4: Approximation de la densité de probabilité de la fonction d'autocorrélation au premier ordre par une distribution normale d'espérance  $\rho = 0,3$ .

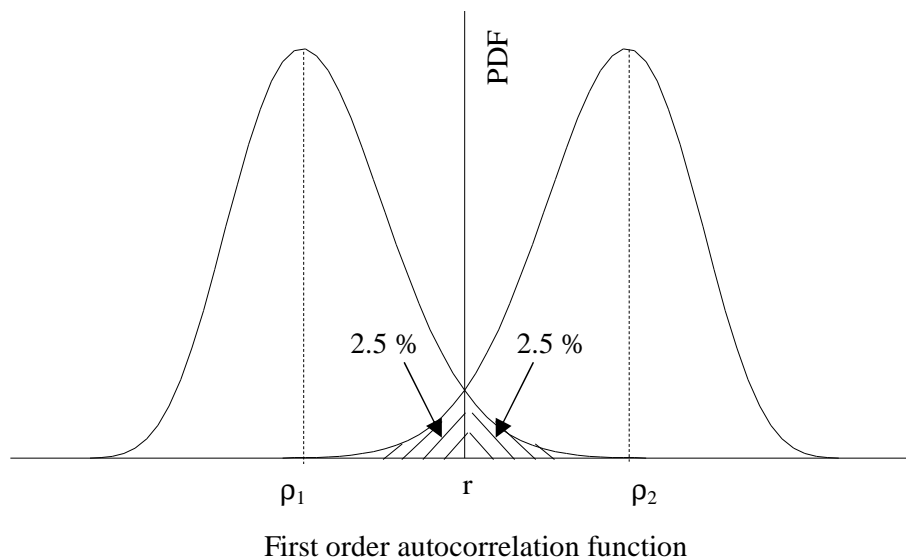
normale  $\mathcal{N}(\rho, \sigma_r)$  (cf. section 5.1.1) quand  $N$  augmente, et la variance s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma_r^2 = \frac{N-1}{N^2}(1-\rho^2) \approx \frac{1}{N}(1-\rho^2). \quad (5.12)$$

En pratique, le calcul de l'écart type  $\sigma_r$  est réalisé en remplaçant l'espérance  $\rho$  par son estimateur  $r$ . La comparaison de la distribution normale  $\mathcal{N}(\rho, \sigma_r)$  avec la formulation théorique (5.10) montre un excellent accord pour  $\rho = 0$  (Fig. 5.3) et  $\rho = 0,3$  (Fig. 5.4). Pour un niveau de corrélation plus élevé, *e.g.* 0,7, la distribution normale s'éloigne sensiblement de la distribution théorique (Fig. 5.5). Mais puisque nous recherchons des niveaux faibles de corrélation, l'approximation normale est tout à fait adaptée à notre étude.



**FIG. 5.5:** Approximation de la densité de probabilité de la fonction d'autocorrélation au premier ordre par une distribution normale d'espérance  $\rho = 0,7$ .

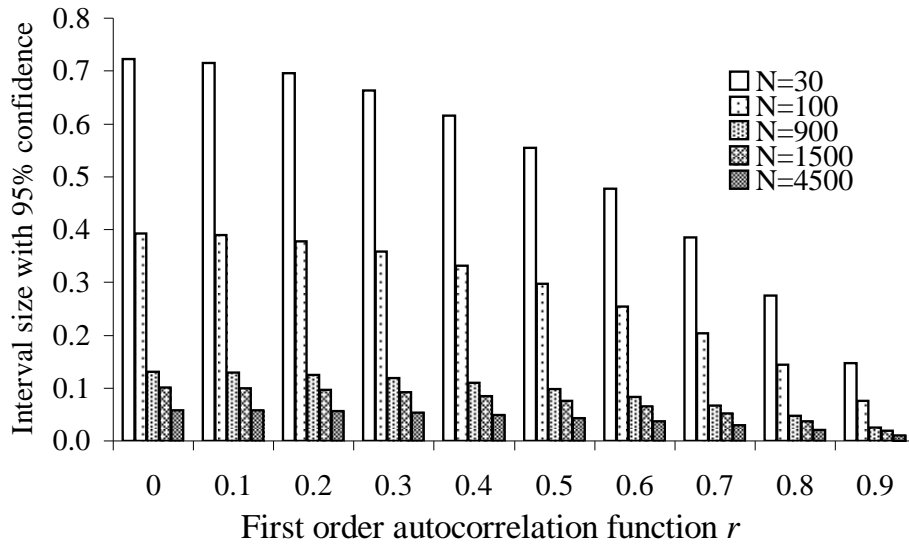


**FIG. 5.6:** Principe de l'estimation de la fonction d'autocorrélation au premier ordre à l'aide d'un intervalle de confiance à 95%.

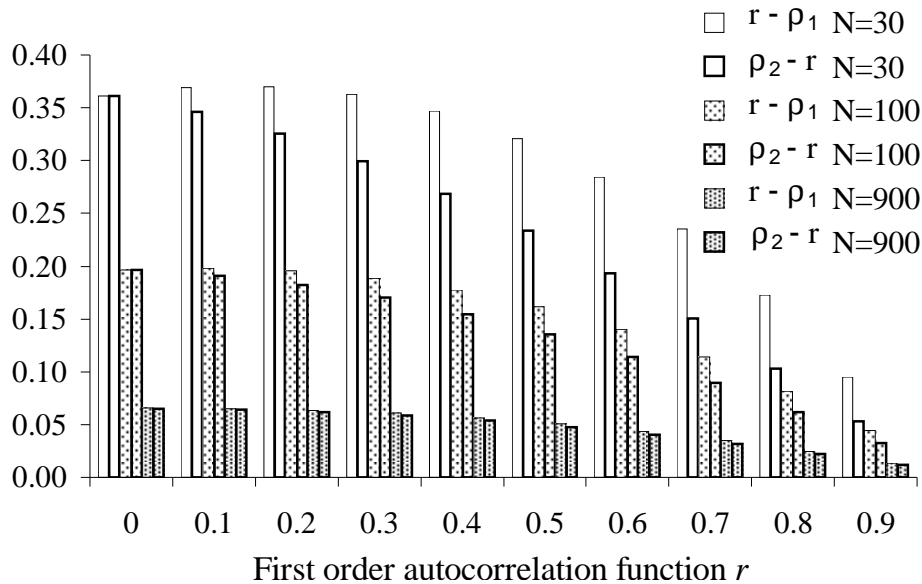
### 5.3.2 Contrôle de l'estimation par un intervalle de confiance

Au lieu de comparer strictement l'espérance  $\rho$  de l'ACF à la valeur nulle, et au lieu de n'estimer que le maximum de cette grandeur, nous avons une bien meilleure information sur cette espérance par l'estimation de l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  de la figure 5.6. A partir de la densité de probabilité  $\Psi(r)$  de l'estimateur de l'ACF  $r$ , la probabilité est de 97,5% que la valeur vraie sous-jacente  $\rho$  soit inférieure à  $\rho_2$ . De manière similaire, il y a 97,5% de probabilité que l'espérance  $\rho$  soit supérieure à  $\rho_1$ . Ainsi, l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  est estimé à un niveau de risque de 5% (ou pour un niveau de confiance de 95%).

De façon équivalente,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont respectivement les quantiles à 2,5% et à 97,5% (section 5.1.1) de la fonction de densité de probabilité de l'ACF dont l'espérance est



**FIG. 5.7:** Intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  de l'espérance  $\rho$ , estimé à partir de la densité de probabilité  $\Psi(r)$  (5.10) de la fonction d'autocorrélation au premier ordre  $r$  de  $N$  mesures, pour un niveau de confiance à 95% (cf. Fig. 5.6).



**FIG. 5.8:** Analyse de la symétrie de l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  par rapport à l'estimateur  $r$  de la fonction d'autocorrélation au premier ordre, pour une série de  $N$  mesures et un seuil de risque de 5%.

$r$ . L'expression (5.10) permet alors de déterminer la largeur  $\rho_2 - \rho_1$  de l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$ , pour différentes tailles  $N$  d'échantillons en fonction de l'estimation  $r$  de la fonction d'autocorrélation (Fig. 5.7). Plus l'estimateur  $r$  est grand, et plus l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  est étroit. De plus, estimer  $r$  à l'aide d'un grand nombre  $N$  d'échantillons augmente la précision de l'estimation de  $\rho$  puisque la largeur de l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  diminue. Aussi, comme indiqué en figure 5.8, l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$  peut être considéré comme un intervalle centré autour de l'estimateur  $r$  de l'ACF, dès lors que  $r$  n'est pas trop élevée et  $N$  pas trop faible. D'où encore une fois l'intérêt de disposer d'un grand nombre d'échantillons.



Puisque nous avons montré en section 5.3.1 que la densité de probabilité  $\Psi(r)$  tend rapidement vers la loi normale  $\mathcal{N}(\rho, \sigma_r)$  quand  $N$  augmente et  $\rho$  est relativement faible, il est très facile d'estimer l'intervalle de confiance  $[\rho_1; \rho_2]$ . En effet, les quantiles de la loi normale sont bien maîtrisés. Ainsi, l'intervalle de confiance à 95% de l'espérance  $\rho$  de l'ACF  $r$ , est évalué par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1 = r - 1.96\sigma_r \\ \rho_2 = r + 1.96\sigma_r. \end{cases} \quad (5.13)$$

En cas de forte corrélation, l'approximation de loi normale ne nuit pas à l'estimation de l'intervalle  $[\rho_1; \rho_2]$  qui a ainsi tendance à être maximisé (Fig. 5.5).

En ce qui concerne les résultats expérimentaux que nous fournissons, pour la plupart nous nous basons sur des séries de taille  $N = 1500$  échantillons. On estime alors que l'espérance  $\rho$  de l'ACF est incluse dans l'intervalle  $[r - 0,05; r + 0,05]$  pour un niveau de confiance d'au moins 95%. Compte tenu de ce résultat, nous considérons qu'il est raisonnable d'accepter la non corrélation des 1500 mesures lorsque  $|r| < 0,10$ .

# Chapitre 6

## Taille effective d'un échantillon estimée par un modèle autorégressif

Dans une chambre réverbérante à brassage de modes, le protocole de mesures (champ, puissance,...) peut être interprété comme un processus stochastique dont la suite des relevés est assimilable à une série temporelle. Les séries temporelles font l'objet de nombreuses études en statistique appliquée, dans des domaines aussi variés que la biologie, l'économie, la finance, la climatologie. Si une série temporelle de longueur  $N$  est constituée d'éléments corrélés, alors le nombre d'observations indépendantes est inférieur à  $N$ . Précisément, la série n'est pas strictement aléatoire dans le temps, et l'information apportée par chaque observation n'est pas totalement séparable de l'information donnée par les autres mesures de l'observable considérée.

La quantité d'information apportée par une série de mesures varie inversement avec l'espérance  $\rho$  de la fonction d'autocorrélation au premier ordre. Si  $\rho = 0$ , alors chaque événement successif fournit une nouvelle information. Si  $\rho = 1$ , alors chaque événement contient toute l'information à lui seul. Appliqué aux mesures en chambre réverbérante, ce constat implique que seules des mesures indépendantes sont utiles, puisque la mesure d'échantillons corrélés induit surtout une perte de temps qui peut être importante si la corrélation est élevée.

Considérons une série chronologique de longueur  $N$  constituée d'éléments corrélés. L'information apportée par les  $N$  données est équivalente à l'information qu'apporterait une série aléatoire, *i.e.* constituée uniquement d'événements indépendants, de longueur  $N'$ , telle que  $N' < N$ . Le nombre  $N'$  est ce que nous appelons ici la **taille effective** de la série de longueur  $N$ . Etant donné une série de longueur  $N$ , plus la corrélation est forte, *i.e.* plus  $|\rho|$  est élevé, et plus le nombre  $N'$  diminue. Le concept de taille effective (ou *ESS* pour *Effective Sample Size*) est étudié depuis fort longtemps et a fait l'objet de développements théoriques dans des domaines divers tels que la statistique théorique, la climatologie, la météorologie, l'hydrologie [104, 105, 106].

Dans ce chapitre, nous adaptons ce concept de taille effective au cas de la CRBM, en proposant une formulation simple de son estimation qui repose sur l'utilisation de mo-

dèles autorégressifs. Nous appliquons ce modèle pour déterminer l'efficacité de brassage mécanique et électronique, *i.e.* pour évaluer le nombre maximum de mesures indépendantes disponibles respectivement sur un tour complet du brasseur, ou dans une bande de fréquence particulière.

## 6.1 Présentation des modèles autorégressifs

### 6.1.1 Formulation générale

Une démarche alternative au simple critère de comparaison de  $r$  à  $\rho_0 = 0,37$  (cf. section 5.2), dans la caractérisation du phénomène d'autocorrélation, consiste à considérer les mesures successives comme des données issues d'un processus de série temporelle. Un processus autorégressif (AR) est un modèle simple de séries temporelles, qui est couramment utilisé en économétrie pour prédire le comportement futur de variables économiques [107, 108].

Dans ce document, nous désignons par  $k$  l'ordre du modèle autorégressif  $AR(k)$ . A notre connaissance, cette approche n'a pas encore été envisagée dans le contexte des chambres réverbérantes. La formulation générale d'un processus  $AR(k)$  consiste à exprimer l'observation à la date  $t$  d'une variable dépendante  $y_t$ , en fonction des observations précédentes  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k}$  et d'un résidu  $\epsilon_t$  :

$$y_t = \Phi_{k1}y_{t-1} + \Phi_{k2}y_{t-2} + \dots + \Phi_{kk}y_{t-k} + \epsilon_t. \quad (6.1)$$

Le résidu  $\epsilon_t$  est aussi appelé innovation en économétrie. Pour qu'un modèle AR existe, les résidus doivent être indépendants des innovations antérieures et futures et identiquement distribués. Les coefficients  $\Phi_{k1}, \Phi_{k2}, \dots, \Phi_{kk}$  sont estimés numériquement à l'aide d'un outil de régression. Bien que des langages de programmation avancés tels que Matlab, Scilab fournissent l'estimation de ces paramètres, nous pouvons nous contenter du simple tableur Excel. Ce dernier est doté d'un outil de régression linéaire disponible après chargement de la macro complémentaire "Utilitaire d'analyse". Tous les résultats liés aux modèles AR que nous présentons ici sont issus de cet outil de calcul.

Une fois déterminés les coefficients  $\Phi_{k1}, \Phi_{k2}, \dots, \Phi_{kk}$ , la relation (6.1) nous donne la série des résidus  $\epsilon_t$ . Le coefficient  $\Phi_{kl}$  est appelé la corrélation partielle, tandis que pour  $k = l$  le paramètre  $\Phi_{kk}$  se nomme fonction d'autocorrélation partielle (ou PACF pour *partial autocorrelation function*).

### 6.1.2 Propriétés du modèle à l'ordre 1

D'une manière générale, la PACF n'est pas la même que l'ACF, excepté pour  $k = 1$ , où nous avons la relation remarquable  $\Phi_{11} = r$ . Ainsi, un modèle  $AR(1)$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$y_t = r \times y_{t-1} + \epsilon_t. \quad (6.2)$$

Ce processus stochastique indique que la variable dépendante  $y_t$  à la date  $t$ , peut s'écrire comme une fraction  $r$  de cette variable à la date  $t - 1$ , plus une innovation  $\epsilon_t$ . La condition

$$|r| < 1 \quad (6.3)$$

est appelée condition de stationnarité, et garantie que la variance  $\sigma_y^2$  de  $y_t$  converge lorsque  $t$  augmente [109].

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - r^2} \quad (6.4)$$

Dans (6.4),  $\sigma_\epsilon$  est l'écart type des résidus  $\epsilon_t$ . Le plus simple modèle AR, à l'ordre 1, est approprié dans la description de l'évolution de nombreuses grandeurs physiques, mais parfois, un modèle d'ordre  $k > 1$  est nécessaire.

### 6.1.3 Propriétés du modèle à l'ordre 2

D'une manière générale, l'ordre d'un modèle AR est déduit de l'évolution de la PACF. Lorsque  $\text{PACF}(k)=0$  pour  $k > p$ , alors  $y_t$  est supposée suivre le comportement décrit par un modèle  $\text{AR}(p)$ . En pratique, augmenter l'ordre  $k$  d'un processus AR est approprié quand il reste de l'information significative, donc nouvelle, qui n'est pas exploitée dans la modélisation du comportement de la variable dépendante  $y_t$ . En ce qui concerne les mesures en CRBM, nous verrons dans la suite que le modèle à l'ordre 2 est nécessaire, et suffisant, lorsque l'ACF  $r$  au premier ordre d'une série de mesures  $y_t$  corrélées entre elles, est supérieure à environ 0,55 (section 6.3).

Pour un modèle à l'ordre 2, sous l'hypothèse de stationnarité, la variance de  $y_t$  s'exprime de la manière suivante [107]:

$$\sigma_y^2 = \frac{(1 - \Phi_{22})\sigma_\epsilon^2}{(1 + \Phi_{22})[(1 - \Phi_{22})^2 - \Phi_{21}^2]} \quad (6.5)$$

La condition de stationnarité du modèle, pour que le second membre de (6.5) ne diverge pas, implique de respecter le système suivant [110]:

$$\begin{cases} \Phi_{21} + \Phi_{22} < 1 \\ \Phi_{22} - \Phi_{21} < 1 \\ -1 < \Phi_{22} < 1. \end{cases} \quad (6.6)$$

## 6.2 Calcul du nombre d'échantillons effectifs

### 6.2.1 Concept de taille effective ou *effective sample size* (ESS)

Dans le cas d'échantillons indépendants, le théorème central limite est facilement applicable (cf. section 5.1.2). Soit  $x_1, \dots, x_{N'}$  une série d'échantillons indépendants de la variable aléatoire  $X$  dont la moyenne est  $\mu_x$  et la variance  $\sigma_x^2$ . Lorsque le nombre  $N'$

est suffisamment grand, on peut considérer que l'estimateur  $\hat{\mu}_x$  de la valeur moyenne est distribué selon une loi normale d'écart type

$$\sigma_{\mu_x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N'}}. \quad (6.7)$$

Dans le cas d'échantillons dépendants, l'utilisation d'un théorème central limite est moins aisée [111]. Nous proposons cependant une démarche basée sur les modèles AR, permettant d'estimer l'écart type de l'estimateur de la moyenne des valeurs corrélées, pour aboutir à l'estimation de la taille effective de la série.

Considérons une population de  $N$  échantillons  $y_1, \dots, y_N$  dont le comportement suit un modèle AR( $k$ ). Le processus stochastique  $Y$  est supposé provenir du même processus que  $X$ , mais avec la présence d'une corrélation non nulle entre les valeurs successives. Appliqué aux mesures en CRBM, la situation où chaque position de brasseur permet de créer des environnements électromagnétiques indépendants est le cas de la population issue de la v.a.  $X$ . Le cas du processus  $Y$  est la situation où un processus de brassage mécanique engendre des mesures de champ non indépendantes les unes des autres, et ceci à cause de modifications insuffisantes des conditions aux limites. Par la connaissance du ratio  $\sigma_{\mu_y}/\mu_y$  d'un processus AR( $k$ ), nous définissons la taille effective d'un échantillon de taille  $N$ . Il s'agit du nombre  $N'$  d'échantillons fictifs indépendants  $x_1, \dots, x_{N'}$ , dont l'estimateur de la moyenne aurait le même ratio écart type sur moyenne que la série originale d'échantillons corrélés  $y_1, \dots, y_N$ . Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\frac{\sigma_{\mu_x}}{\mu_x} = \frac{\sigma_{\mu_y}}{\mu_y}. \quad (6.8)$$

A l'aide de la relation (6.7) utilisée dans le premier membre de (6.8), le nombre  $N'$  recherché est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\sigma_x}{\mu_x \sqrt{N'}} = \frac{\sigma_{\mu_y}}{\mu_y}. \quad (6.9)$$

Dans le premier membre de (6.9), le rapport  $\sigma_x/\mu_x$  est évalué d'après la théorie des distributions des mesures en CRBM (cf. partie I). Quant au second membre, il est évalué à partir d'une série de mesures corrélées issues d'un brassage mécanique ou fréquentiel, à l'aide d'un modèle AR (cf. sections 6.2.2 et 6.2.3). Dès lors, par exemple, nous pourrions déterminer le nombre maximum de positions de brasseur indépendantes disponibles sur un tour complet, à une fréquence d'excitation de la cavité donnée. De manière similaire, dans une bande de fréquence de largeur  $\Delta f$  autour d'une fréquence centrale  $f_0$ , nous pourrions évaluer le nombre maximum de fréquences indépendantes.

Rappelons les principaux résultats de la partie I, concernant l'évaluation du rapport  $\sigma_x/\mu_x$  dans la relation (6.9). Selon le modèle idéal repris par Hill dans [5], des mesures indépendantes de la puissance mesurée en réception d'une antenne sont distribuées selon une loi exponentielle. Le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  de cette distribution est donc égal à 1 (section 1.1).

Dans le cas d'une CRBM idéale, les mesures indépendantes d'une composante cartésienne de champ  $E_R$  sont distribuées selon une loi de Rayleigh, dont le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  vaut environ 0,52 (section 1.1). Cependant, comme nous l'indiquons en chapitre 3, la distribution des mesures de  $E_R$  dans une cavité réelle s'ajuste mieux à une loi de Weibull à deux paramètres. Cela est aussi le cas de la distribution expérimentale de la puissance mesurée en réception d'une antenne de faible dimension (cf. section 3.4).

### 6.2.2 Estimation de l'ESS à l'ordre 1

De manière à déterminer la taille effective  $N'$  d'une série de longueur  $N$ , nous disposons de la relation (6.9), dans laquelle l'estimation du paramètre  $\sigma_{\mu_y}$  n'est pas triviale. En passant par un modèle autorégressif, nous montrons que nous pouvons simplement estimer ce paramètre, pour ainsi évaluer selon (6.9) la taille effective  $N'$  recherchée. Dans cette section, nous nous limitons à l'ordre 1 du modèle AR, sachant que pour l'ordre 2, la démonstration est différente et exposée à la section suivante.

En nous limitant dans un premier temps à l'ordre 1 du modèle AR, nous minimisons la complexité de la modélisation de la dépendance des mesures, tout en étant capable de démontrer un théorème central limite dans le cas de mesures corrélées en CRBM. En pratique, nous verrons plus loin que ce modèle est acceptable tant que la corrélation des mesures ne dépasse pas 0,55 (section 6.3).

Les estimateurs de la moyenne et de la variance de la série  $y_t$  sont rappelés en (6.10) et (6.11).

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t \quad (6.10)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{\mu}_y)^2. \quad (6.11)$$

Nous supposons l'existence d'une valeur initiale  $y_0$  du processus stochastique  $y_t$  de tirages corrélés. Puisque  $y_0$  n'apparaît pas dans (6.10) et (6.11), il existe un biais dans l'estimation des deux paramètres  $\mu_y$  et  $\sigma_y$ . Cependant, l'incidence de ce biais devient négligeable lorsque le nombre  $N$  d'échantillons de la série  $y_t$  est suffisamment grand. En particulier, nous nous intéressons ici à un résultat asymptotique, puisque la relation (6.9) utilise le TCL (6.7), valable uniquement pour des grands nombres d'échantillons.

Soit  $f(\hat{\mu}_y)$  une fonction de l'estimateur de la moyenne du processus  $y_t$  définie par l'expression suivante :

$$f(\hat{\mu}_y) = \hat{\mu}_y \sqrt{N} + \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \left( \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right). \quad (6.12)$$

L'idée est de déterminer le comportement asymptotique de la distribution de  $\hat{\mu}_y$ , à partir de l'analyse de la relation (6.12). A l'aide de (6.10), l'estimateur de la moyenne de  $y_t$  peut s'exprimer en fonction d'une série temporelle, et la fonction  $f(\hat{\mu}_y)$  peut s'écrire simplement

comme une somme des innovations successives  $\epsilon_t$  :

$$\begin{aligned}
 f(\hat{\mu}_y) &= \frac{\sqrt{N}}{1 - \Phi_{11}} \left[ \hat{\mu}_y(1 - \Phi_{11}) + \Phi_{11} \left( \frac{y_N - y_0}{N} \right) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{N}}{1 - \Phi_{11}} \left[ \hat{\mu}_y - \Phi_{11} \left( \hat{\mu}_y - \frac{y_N - y_0}{N} \right) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{N}}{1 - \Phi_{11}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t - \Phi_{11} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t - \frac{y_N - y_0}{N} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}(1 - \Phi_{11})} \left[ \sum_{t=1}^N y_t - \Phi_{11} \left( \sum_{t=1}^N y_t - (y_N - y_0) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}(1 - \Phi_{11})} \left[ \sum_{t=1}^N y_t - \Phi_{11} \sum_{t=1}^N y_{t-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}(1 - \Phi_{11})} \sum_{t=1}^N (y_t - \Phi_{11} y_{t-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}(1 - \Phi_{11})} \sum_{t=1}^N \epsilon_t.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Nous utilisons maintenant le fait que les résidus  $\epsilon_t$  sont indépendants des innovations passées ou futures, dans le but d'appliquer le théorème central limite dans le cas d'échantillons indépendants, pour déduire lorsque  $N$  est grand, que :

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon_t \sim \mathcal{N} \left( \mu_\epsilon, \frac{\sigma_\epsilon}{\sqrt{N}} \right), \tag{6.14}$$

où  $\mathcal{N}(a, b)$  désigne la loi normale de moyenne  $a$  et d'écart type  $b$ , et  $\mu_\epsilon$  et  $\sigma_\epsilon$  correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart type de la série des résidus  $\epsilon_t$ . Par conséquent, nous avons le résultat suivant pour un processus AR(1) :

$$\hat{\mu}_y \sqrt{N} + \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \left( \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right) \sim \mathcal{N} \left( \frac{\mu_\epsilon \sqrt{N}}{1 - \Phi_{11}}, \frac{\sigma_\epsilon}{1 - \Phi_{11}} \right). \tag{6.15}$$

Pour un réel  $\delta > 0$ , et  $h_N(X)$  une fonction de  $N$  et d'une v.a.  $X$ , la limite en probabilité est définie comme suit :

$$\text{plim}[h_N(X)] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}(|h_N(X)| > \delta). \tag{6.16}$$

Nous indiquons en annexe **B** le résultat suivant concernant la limite en probabilité du second terme du premier membre de (6.15) :

$$\text{plim} \left[ \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \cdot \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right] = 0. \tag{6.17}$$

Ainsi, la variance de l'estimateur de la moyenne des échantillons peut s'écrire en fonction de  $\sigma_\epsilon^2$  :

$$\sigma_{\hat{\mu}_y}^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{N(1 - \Phi_{11})^2}. \quad (6.18)$$

Par ailleurs, la stationnarité de  $y_t$  permet de remplacer  $\sigma_\epsilon^2$  par  $\sigma_y^2(1 - \Phi_{11}^2)$  comme indiqué par (6.4). Par conséquent, nous aboutissons au résultat asymptotique suivant pour l'écart type de l'estimateur de la moyenne d'un processus AR(1) :

$$\sigma_{\hat{\mu}_y} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1 + \Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}}}. \quad (6.19)$$

En remplaçant  $\sigma_{\hat{\mu}_y}$  par l'expression donnée par (6.19) dans la relation (6.9), nous obtenons la formulation de la taille effective pour un modèle AR(1) :

$$N'_{AR(1)} = N \times \frac{1 - \Phi_{11}}{1 + \Phi_{11}} \times \left( \frac{\sigma_x}{\mu_x} \right)^2 \times \left( \frac{\mu_y}{\sigma_y} \right)^2. \quad (6.20)$$

Si la série dépendante  $y_t$  suit un modèle AR(1), il en résulte que la taille effective d'une série de longueur  $N$ , se calcule facilement à l'aide de la fonction d'autocorrélation au premier ordre ( $\Phi_{11} = r$ ), du ratio théorique  $\sigma_x/\mu_x$  dans le cas de tirages indépendants, et du ratio expérimental  $\sigma_y/\mu_y$ .

### 6.2.3 Estimation de l'ESS à l'ordre 2

En ce qui concerne un processus AR(2), il est difficile d'obtenir l'expression de l'ESS par la même démonstration que pour le modèle AR(1). Nous proposons d'aboutir à une expression de  $N'_{AR(2)}$ , comparable à (6.20) en adoptant une autre démarche. En pratique, comme nous le montrerons en section 6.3, lorsque l'ACF  $r$  au premier ordre est inférieure à environ 0,55, les deux modèles AR(1) et AR(2) sont valides puisque dans les deux cas, les résidus sont indépendants. Par conséquent, pour  $r < 0,55$ , la variance  $\sigma_{\hat{\mu}_y}^2$  déterminée à l'aide du modèle AR(1), doit être la même que celle déduite du modèle AR(2). C'est pourquoi nous recherchons une fonction  $g(\Phi_{21}, \Phi_{22})$  définie pour un modèle AR(2), solution de l'équation (6.21) par analogie avec (6.18) :

$$\sigma_{\hat{\mu}_y AR(2)}^2 = \frac{\sigma_{\epsilon AR(2)}^2}{N} \times g(\Phi_{21}, \Phi_{22}), \quad (6.21)$$

telle que les variances  $\sigma_{\hat{\mu}_y}^2$  soient égales lorsque les modèles AR(1) et AR(2) sont valables :

$$\sigma_{\hat{\mu}_y AR(2)}^2 = \sigma_{\hat{\mu}_y AR(1)}^2. \quad (6.22)$$



A partir de (6.21), la contrainte (6.22) conduit à la relation suivante, après avoir remplacé  $\sigma_{\hat{\mu}_{y_{AR(1)}}}^2$  par  $\sigma_{\epsilon}^2/[N(1 - \Phi_{11})^2]$  (6.18) :

$$\frac{\sigma_{\epsilon_{AR(1)}}^2}{\sigma_{\epsilon_{AR(2)}}^2} = (1 - \Phi_{11})^2 \times g(\Phi_{21}, \Phi_{22}). \quad (6.23)$$

Par ailleurs, lorsque  $r < 0,55$ , les variances  $\sigma_y^2$  des processus AR(1) et AR(2) sont égales puisque les deux modèles sont valides. Par conséquent, les relations (6.4) et (6.5) conduisent à

$$\frac{\sigma_{\epsilon_{AR(1)}}^2}{\sigma_{\epsilon_{AR(2)}}^2} = \frac{(1 - \Phi_{22})(1 - \Phi_{11})^2}{(1 + \Phi_{22})[(1 - \Phi_{22})^2 - \Phi_{21}^2]}. \quad (6.24)$$

En outre, l'équation de Yule Walker (6.25) fournit la relation entre les corrélations partielles des processus AR(1) et AR(2) [107].

$$\Phi_{11} = \frac{\Phi_{21}}{1 - \Phi_{22}}. \quad (6.25)$$

Il en résulte que la fonction  $g(\Phi_{21}, \Phi_{22})$  s'exprime de la manière suivante :

$$g(\Phi_{21}, \Phi_{22}) = \frac{1}{(1 - \Phi_{21} - \Phi_{22})^2} \cdot \frac{1 - \Phi_{22}}{1 + \Phi_{22}}. \quad (6.26)$$

Par conséquent, à l'aide de (6.5) et (6.21), nous en déduisons la variance de l'estimateur de la moyenne pour un processus AR(2) :

$$\sigma_{\hat{\mu}_{y_{AR(2)}}}^2 = \frac{1 + \Phi_{21} - \Phi_{22}}{1 - \Phi_{21} - \Phi_{22}} \times \frac{\sigma_y^2}{N}. \quad (6.27)$$

Ainsi, nous aboutissons à la taille effective définie en (6.9), pour une série de longueur  $N$  dont les échantillons suivent un modèle AR(2) :

$$N'_{AR(2)} = N \times \frac{1 - \Phi_{21} - \Phi_{22}}{1 + \Phi_{21} - \Phi_{22}} \times \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2 \times \left(\frac{\mu_y}{\sigma_y}\right)^2. \quad (6.28)$$

Etant donné un modèle AR(1) ou un modèle AR(2), nous disposons ainsi d'une formulation simple de la taille effective, à l'aide de paramètres statistiques dont l'estimation est triviale. Lorsque l'on cherche à connaître l'ESS, il faut tout d'abord s'assurer de la validité du modèle AR en vérifiant l'indépendance des résidus  $\epsilon_t$  (cf. section 6.1.1). Puis la taille effective de la série corrélée est déduite à partir de l'estimation des paramètres expérimentaux  $\mu_y$  et  $\sigma_y$ , par la relation (6.20) pour un processus AR(1), ou (6.28) pour un processus AR(2).

## 6.3 Validation expérimentale

Dans cette section, nous vérifions expérimentalement la qualité de la démarche proposée pour estimer la taille effective d'une série de  $N$  mesures. Puisque nous distinguons deux types de brassage, nous désignerons par  $N'$  la taille effective d'une série de mesures obtenues par brassage mécanique, et par  $N''$  la taille effective d'une série de mesures collectées par brassage électronique. L'application finale de cette technique est d'estimer l'efficacité de brassage. Dans le cas du brassage mécanique, il s'agit d'évaluer le nombre maximum de positions de brasseur indépendantes disponibles à une fréquence d'excitation de la cavité donnée. Dans le cas du brassage fréquentiel, il s'agit de déterminer le nombre maximum de fréquences indépendantes disponibles dans une bande  $\Delta f$  autour d'une fréquence centrale  $f_0$ .

Tous les résultats expérimentaux sont issus de mesures réalisées dans la chambre réverbérante de l'IETR (Fig. 2.6). Nous rappelons que la fréquence minimale à partir de laquelle nous maîtrisons les lois de distribution des mesures est d'environ 250 MHz (cf. partie I).

### 6.3.1 Mesures de puissance en brassage mécanique

Les mesures de puissance en brassage mécanique sont réalisées dans la bande [300 MHz ; 1300 MHz] par pas de 100 MHz. A chaque fréquence, nous utilisons 5 positions indépendantes de l'antenne de réception. Les antennes d'émission et de réception (Fig. 2.7) sont des antennes log-périodiques (ETS-Lindgren Modèle 3148 de hauteur 6,4 cm, de largeur 85,6 cm, et de profondeur (longueur) 73,7 cm). L'antenne d'émission est placée dans un coin de la CRBM (Fig. 2.6), en dehors du volume de test, et dirigée vers le coin de la chambre afin d'éviter la présence de trajet direct entre l'émission et la réception. Une distance minimale de  $\lambda/2$  est respectée entre chaque position de l'antenne, de manière à s'assurer de l'absence de corrélation entre ces positions [4]. Pour chaque position de l'antenne de réception, nous utilisons 300 positions de brasseur, équitablement réparties sur un tour complet. Cela signifie qu'un pas angulaire de  $\Delta\theta = 1,2^\circ$  sépare deux positions successives du brasseur de modes (Fig. 6.1). Par ailleurs, le volume de test est suffisamment loin des parois de la cavité et du brasseur, puisque la distance de ce volume à ces obstacles est d'au moins  $\lambda/2$ .

Ainsi, à chaque fréquence, 1500 échantillons sont collectés. Le fait d'utiliser directement 1500 pas de brasseur sur un tour complet, aurait conduit à des mesures extrêmement corrélées ( $|r| \approx 1$ ). Le risque aurait été que la fonction d'autocorrélation au premier ordre sature à basse fréquence, alors même le modèle AR à l'ordre 2 n'aurait pas suffi. C'est la raison pour laquelle nous préférons sélectionner 300 pas de brasseur, et ajouter 5 positions indépendantes de l'antenne de réception, afin de disposer de 1500 échantillons à chaque fréquence d'excitation de la cavité. La bande de fréquence [300 MHz ; 1300 MHz] nous permet de prendre en compte l'ensemble des niveaux de corrélation possibles, *i.e.* avec  $0 < |r| < 1$  (cf. la ligne pointillée en figure 6.2).

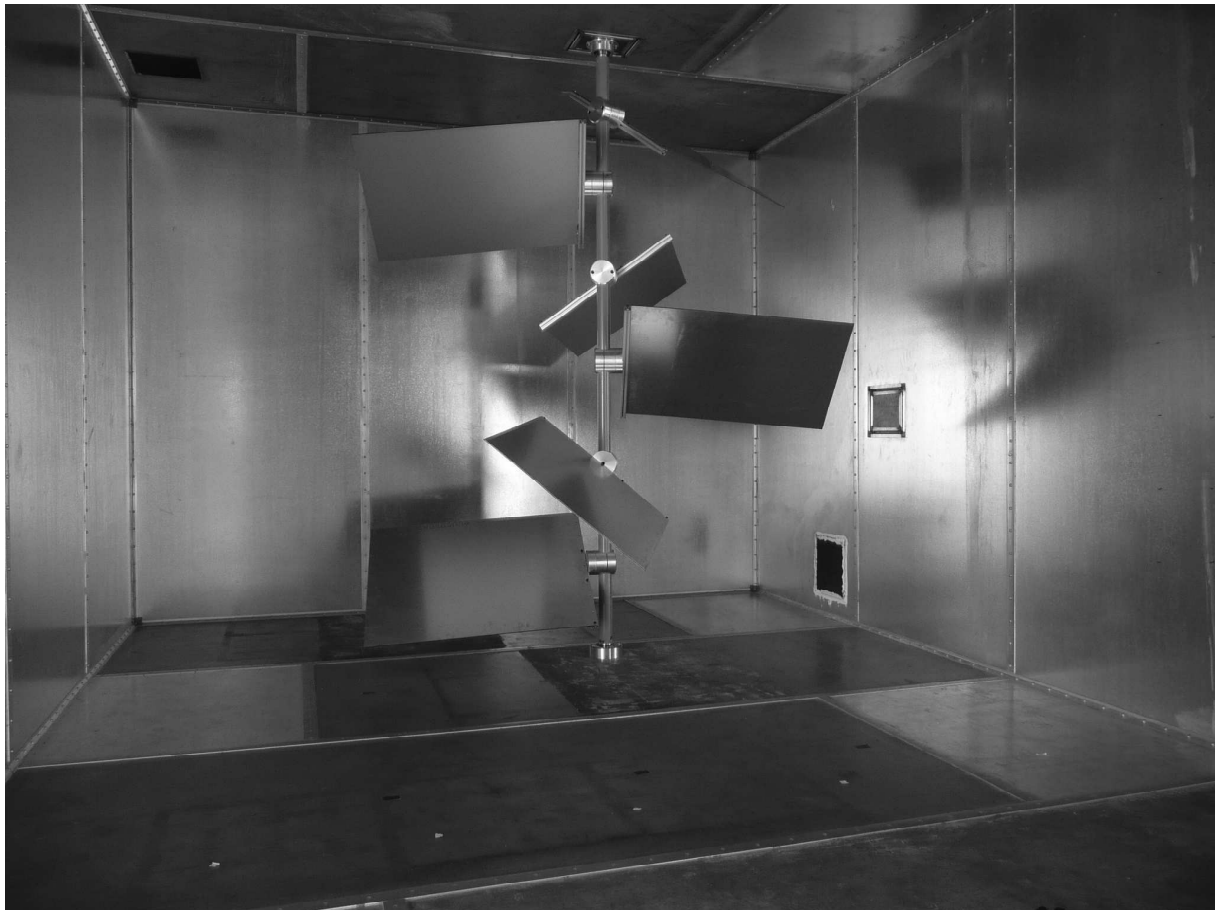


FIG. 6.1: Le brasseur de modes de la chambre réverbérante de l'IETR.

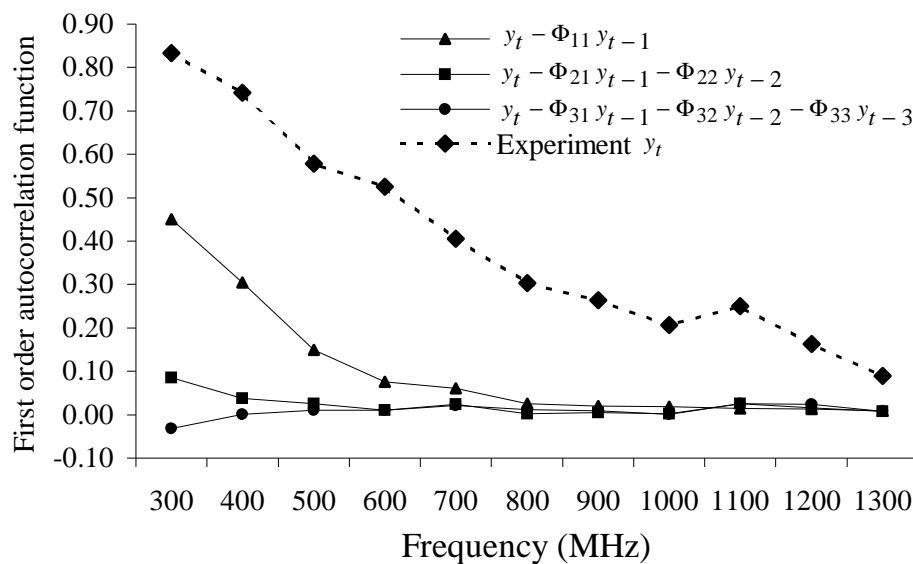


FIG. 6.2: Analyse de la corrélation des mesures de **puissance**  $y_t$ , et de la corrélation des résidus  $\epsilon_t$  pour différents modèles  $AR(k)$  à l'aide de la fonction d'autocorrélation au premier ordre. La ligne pointillée correspond à l'ACF  $r$  au premier ordre des mesures  $y_t$ . Les trois autres courbes concernent l'ACF  $r_\epsilon$  au premier ordre des résidus  $\epsilon_t$  des modèles  $AR(k)$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

Puisque le pas angulaire de brassage est constant quelle que soit la fréquence, plus la fréquence d'excitation augmente et plus l'ACF des mesures décroît (cf. la ligne pointillée

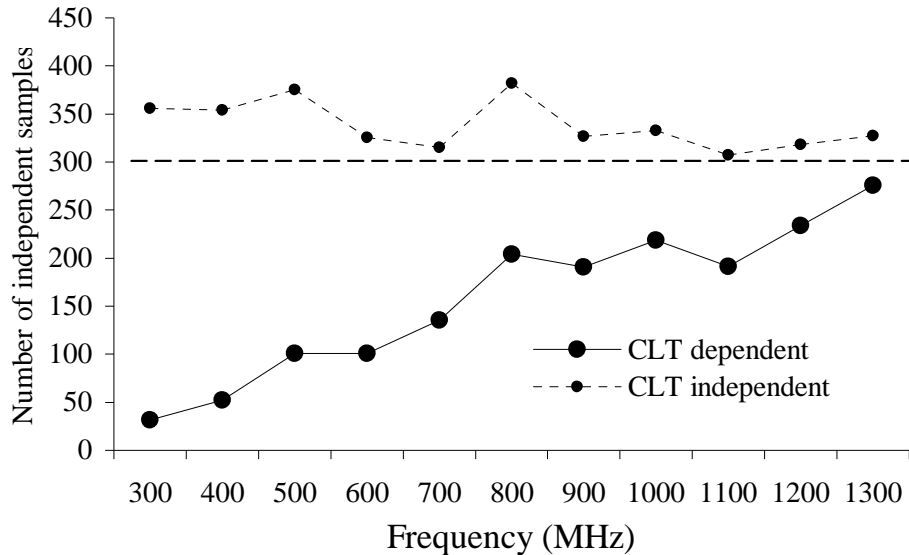
en figure 6.2). Avec  $N = 1500$  échantillons par fréquence, nous estimons qu'il y a au moins 95% de chance que l'espérance de l'ACF  $r$  soit dans l'intervalle  $[r - 0.05, r + 0.05]$  (cf. section 5.3.2).

Avant d'évaluer la taille effective d'une série de  $N = 1500$  échantillons, nous devons dans un premier temps vérifier l'indépendance des  $N - k$  résidus  $\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \dots, \epsilon_N$  calculés à l'aide de (6.1) pour un modèle de régression AR( $k$ ). Lorsque l'ACF  $r_\epsilon$  au premier ordre des résidus  $\epsilon_t$  est plus faible en valeur absolue que 0,10, alors nous considérons que ces  $N - k$  résidus sont non corrélés (cf. section 5.3.2). Ce critère d'absence de corrélation nous permet de choisir l'ordre  $k$  du modèle autorégressif approprié. En pratique, comme le montre la figure 6.2, nous pouvons nous limiter à un modèle AR à l'ordre 1 lorsque l'ACF  $r$  des mesures  $y_t$  est plus faible que 0,55 *i.e.* au-dessus de 600 MHz. Par contre, en-dessous de 600 MHz, le processus AR(2) est nécessaire pour que les résidus  $\epsilon_t$  puissent être considérés comme non corrélés. Précisons que systématiquement, les propriétés (6.3) et (6.6) sont bien vérifiées expérimentalement respectivement pour un modèle AR(1) et un modèle AR(2). Par conséquent, puisque les innovations  $\epsilon_t$  sont indépendantes des innovations passées et futures, la méthode exposée en section 6.2 pour déterminer la taille effective peut s'appliquer à nos mesures.

Les relations (6.4) et (6.5) sont également bien vérifiées expérimentalement, respectivement pour un modèle AR(1) et AR(2). Sauf à 300 MHz où nous sommes encore à basse fréquence, l'écart relatif de l'écart type  $\sigma_y$  entre l'expérience et le modèle AR(1) est inférieur à 3%. A 300 MHz, l'écart relatif pour un modèle AR(1) est de 10% tandis qu'il descend à 3% à l'aide d'un modèle AR(2). Cela est conforme au fait qu'un modèle AR(2) est mieux adapté aux basses fréquences (Fig. 6.2). Précisons en outre que l'hypothèse de distribution normale pour  $\sum_{t=1}^N \epsilon_t$  (6.14) est systématiquement acceptée par les tests d'ajustement appropriés [91].

Pour chaque fréquence d'excitation de la cavité, parmi les  $N = 1500$  échantillons corrélés collectés à l'aide de 300 positions de brasseur et 5 positions d'antenne de réception, la taille effective  $N'$  est calculée par (6.20) au-dessus de 600 MHz, et par (6.28) en-dessous de cette fréquence. Ainsi, nous avons accès au nombre  $N'_{360^\circ}$  de mesures indépendantes disponibles sur un tour complet du brasseur, en écrivant  $N'_{360^\circ} = N'/5$  (Fig. 6.3). Nous faisons l'hypothèse que les  $N'_{360^\circ}$  échantillons indépendants sont distribués de manière uniforme sur  $360^\circ$ . Par conséquent, le pas angulaire minimal  $\Delta\theta'$  qui permet d'obtenir des positions de brasseur indépendantes se calcule aisément (Tab. 6.1).

Par ailleurs, comme nous pouvons le supposer, l'utilisation du TCL classique dans le cas d'échantillons indépendants, *i.e.*  $\sigma_{\hat{\mu}_y} = \sigma_y/\sqrt{N}$  au lieu de (6.19) ou (6.27) conduit à des résultats erronés sur l'estimation de  $N'$  puisque nous ne pouvons pas aboutir à plus de 300 positions de brasseur indépendantes sur  $360^\circ$  (cf. la ligne pointillée en figure 6.3). En effet, en figure 6.2 (cf. ligne pointillée), nous montrons que l'ACF  $r$  des mesures collectées sur 300 positions de brasseur sur  $360^\circ$  est plus élevée que 0,10 à chaque fréquence. Cela indique donc qu'il existe une corrélation entre les 300 positions de brasseur. Puisque  $N > N'$ , l'utilisation du TCL classique (valable uniquement pour des données indépen-



**FIG. 6.3:** Nombre  $N'_{360^\circ}$  de mesures indépendantes de puissance disponibles sur une rotation complète du brasseur. L'expression "CLT dependent" se réfère à l'utilisation de la relation (6.19) pour un modèle AR(1) et (6.27) pour un modèle AR(2), afin d'estimer  $N'$  puis  $N'_{360^\circ} = N'/5$ , respectivement par (6.20) et (6.28); tandis que "CLT independent" se réfère à l'utilisation de  $\sigma_{\hat{\mu}_y} = \sigma_y/\sqrt{N}$  dans (6.9) afin d'estimer  $N'$  puis  $N'_{360^\circ}$ .

f (MHz)	Modèle AR	$\Delta\theta'$ ( $^\circ$ ) for $P$
300	AR(2)	11,81
400	AR(2)	6,94
500	AR(2)	3,45
600	AR(2)	3,44
700	AR(1)	2,70
800	AR(1)	1,76
900	AR(1)	1,89
1000	AR(1)	1,64
1100	AR(1)	1,95
1200	AR(1)	1,57
1300	AR(1)	1,32

**TAB. 6.1:** Pas angulaire minimal  $\Delta\theta'$  entre 2 positions de brasseur indépendantes, pour des mesures de puissance.

dantes) conduit à sous-estimer  $\sigma_{\hat{\mu}_y}$  et donc à sur-estimer  $N'$  dans (6.9). Par conséquent, nous devons être prudents lorsque nous cherchons à évaluer l'écart type de la moyenne, et appliquer le TCL classique si et seulement si les mesures peuvent être effectivement considérées comme décorrélées.

De manière à valider cette méthode d'estimation de l'ESS, nous avons mené une nouvelle série d'expériences à l'aide cette fois des  $N'_{360^\circ}$  positions de brasseur estimées préalablement, *i.e.* en imposant le pas de brassage  $\Delta\theta'$  du tableau 6.1, pour différentes fré-

f (MHz)	$r$ pour $\Delta\theta = 1, 2^\circ$	$r$ pour $\Delta\theta'$ du tableau 6.1
300	0,83	0,02
400	0,74	0,06
500	0,58	0,08
700	0,41	0,11
1000	0,21	0,11

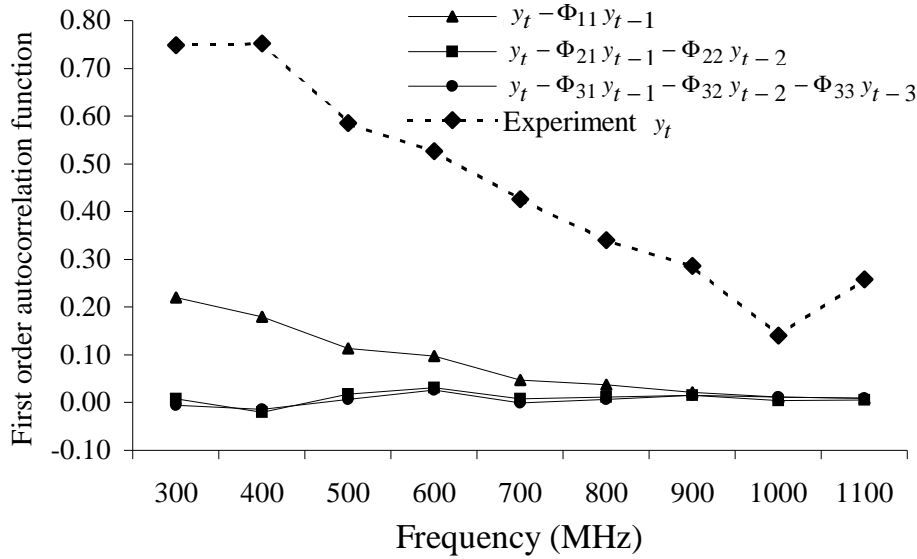
**TAB. 6.2:** Validation expérimentale de la méthode d'estimation de l'ESS pour un brassage mécanique et pour des mesures de puissance.

quences. Ensuite, nous estimons la nouvelle fonction d'autocorrélation au premier ordre  $r$ . Afin de comparer correctement les niveaux de corrélation par rapport aux mesures collectées à l'aide de 300 pas de brasseur, et préserver le même niveau d'incertitude sur l'estimation de l'ACF, nous ajoutons des positions d'antenne de réception de manière à disposer de 1500 échantillons par fréquence. Quelle que soit la fréquence, les résultats expérimentaux indiqués en tableau 6.2 montrent une nette diminution de la corrélation ; et les  $N'_{360^\circ}$  échantillons collectés pour un pas  $\Delta\theta'$  peuvent être raisonnablement considérés comme des données non corrélées. Par ailleurs, l'espérance  $\rho$  de l'ACF est incluse dans l'intervalle  $[r - 0.05, r + 0.05]$  avec un niveau de confiance de 95%. Or, le plus souvent, la nouvelle ACF relative à un pas de brassage  $\Delta\theta'$  est supérieure à 0,05. Par conséquent, l'espérance  $|\rho|$  a très peu de chance d'être strictement nulle, mais doit rester légèrement plus grande que zéro. Ainsi, nous ne sous-estimons pas le nombre maximum de positions de brasseur indépendantes disponibles sur une rotation complète.

### 6.3.2 Mesures de champ en brassage mécanique

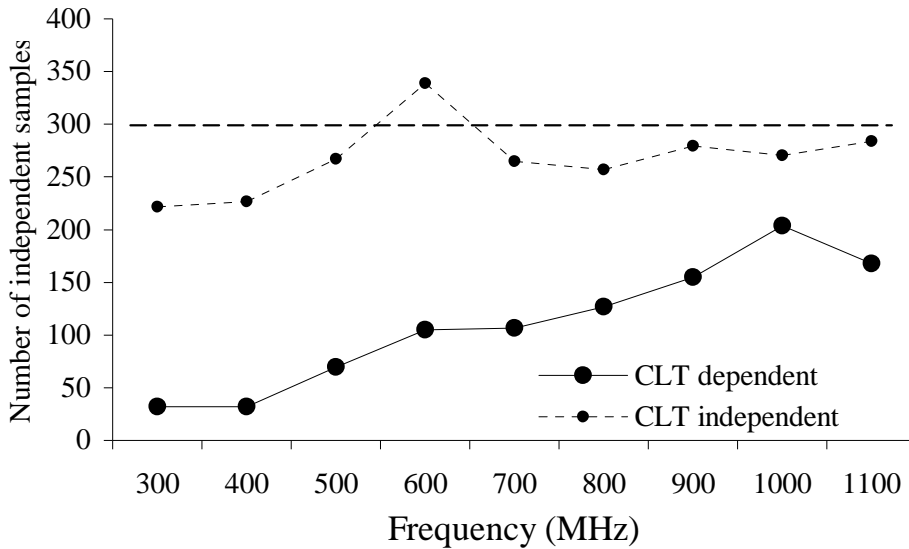
Dans le but de valider également cette méthode dans le cas de mesures de champ, dont la distribution diffère de celle des mesures de puissance (cf. partie I), nous présentons une étude similaire à partir de la mesure de  $E_R$  par la sonde isotropique Hi6005 (Fig. 2.8). Afin de mesurer des valeurs de champ qui sont compatibles avec la sensibilité de la sonde, un amplificateur est placé en entrée de l'antenne d'émission (ETS Lindgren 3148, Fig. 2.7), et permet de couvrir la bande [300 MHz, 1100 MHz]. Nous excitons la cavité par pas de 100 MHz. Comme en section 6.3.1, nous sélectionnons  $N = 1500$  échantillons à l'aide de 300 positions de brasseur ( $\Delta\theta = 1, 2^\circ$ ), et de 2 positions de sonde, seulement. Nous pouvons effectivement collecter trois fois plus d'échantillons avec la sonde triaxiale, qu'avec l'antenne log-périodique utilisée en section 6.3.1.

Comme indiqué en figure 6.4, un modèle AR à l'ordre 1 permet d'obtenir des innovations non corrélées au-dessus de 600 MHz, tandis qu'en-dessous de cette fréquence, un processus AR(2) convient mieux. Par conséquent, que ce soit pour des mesures de puissance ou pour des mesures de champ, nous pouvons limiter la complexité du modèle autorégressif au second ordre, même dans le cas de corrélation forte, *i.e.* avec  $|\rho|$  proche



**FIG. 6.4:** Analyse de la corrélation des mesures  $y_t$  de  $E_R$ , et de la corrélation des résidus  $\epsilon_t$  pour différents modèles  $AR(k)$  à l'aide de la fonction d'autocorrélation au premier ordre. La ligne pointillée correspond à l'ACF  $r$  au premier ordre des mesures  $y_t$ . Les trois autres courbes concernent l'ACF  $r_\epsilon$  au premier ordre des résidus  $\epsilon_t$  des modèles  $AR(k)$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

de 0,90. En ce qui concerne les mesures de champ, le nombre théorique  $N'_{360^\circ}$  de positions de brasseur conduisant à des mesures indépendantes de  $E_R$  est déterminé de la même manière que pour les mesures de puissance (Fig. 6.5).



**FIG. 6.5:** Nombre  $N'_{360^\circ}$  de mesures indépendantes de  $E_R$  disponibles sur une rotation complète du brasseur. L'expression "CLT dependent" se réfère à l'utilisation de la relation (6.19) pour un modèle  $AR(1)$  et (6.27) pour un modèle  $AR(2)$ , afin d'estimer  $N'$  puis  $N'_{360^\circ} = N'/5$ , respectivement par (6.20) et (6.28) ; tandis que "CLT independent" se réfère à l'utilisation de  $\sigma_{\hat{\mu}_y} = \sigma_y/\sqrt{N}$  dans (6.9) afin d'estimer  $N'$  puis  $N'_{360^\circ}$ .

De même qu'en section 6.3.1, nous avons mené ensuite une nouvelle série d'expériences de manière à valider l'estimation de l'ESS dans le cas de mesures de champ. Au lieu de 300 positions de brasseur, nous imposons le pas angulaire  $\Delta\theta'$  du tableau 6.3 issu de

l'estimation de  $N'_{360^\circ}$  en supposant l'uniformité des positions de brasseur indépendantes sur un tour complet. Ensuite, nous estimons la nouvelle fonction d'autocorrélation des

f (MHz)	modèle AR	$\Delta\theta'$ (°) pour $E_R$
300	AR(2)	10,16
400	AR(2)	10,14
500	AR(2)	4,97
600	AR(2)	3,16
700	AR(1)	3,38
800	AR(1)	2,84
900	AR(1)	2,32
1000	AR(1)	1,77
1100	AR(1)	2,15

**TAB. 6.3:** Pas angulaire minimal  $\Delta\theta'$  entre 2 positions de brasseur indépendantes, pour des mesures de  $E_R$ .

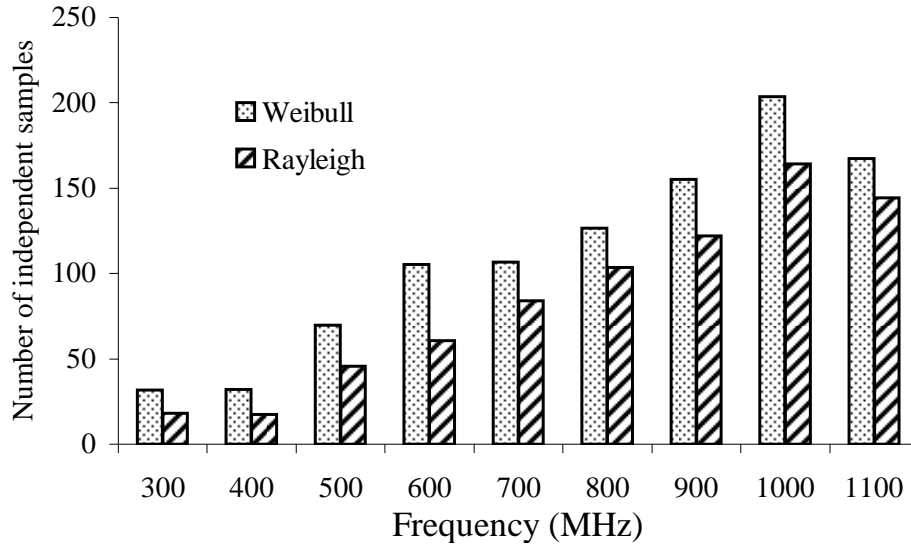
$N = 1500$  mesures de  $E_R$  collectées avec un pas de brassage  $\Delta\theta'$  (Tab. 6.3) et des positions additionnelles indépendantes de la sonde. Nous conservons la collecte de 1500 échantillons, dans le but de conserver le même niveau d'incertitude sur l'estimation de la corrélation, et de pouvoir comparer cette nouvelle ACF avec celle issue d'un pas angulaire de brassage de  $\Delta\theta = 1,2^\circ$  (cf. la ligne pointillée, Fig. 6.4). Les valeurs de l'ACF liées au pas de brassage  $\Delta\theta'$  indiquées en tableau 6.4 montrent que nous pouvons, comme dans le cas de la puissance (section 6.3.1), considérer que les  $N'_{360^\circ}$  positions de brasseur retenues sont décorrélées.

f (MHz)	$r$ pour $\Delta\theta = 1.2^\circ$	$r$ pour $\Delta\theta'$ du tableau 6.3
300	0,75	0,09
400	0,75	0,04
500	0,59	0,11
700	0,43	0,12
1000	0,14	0,09

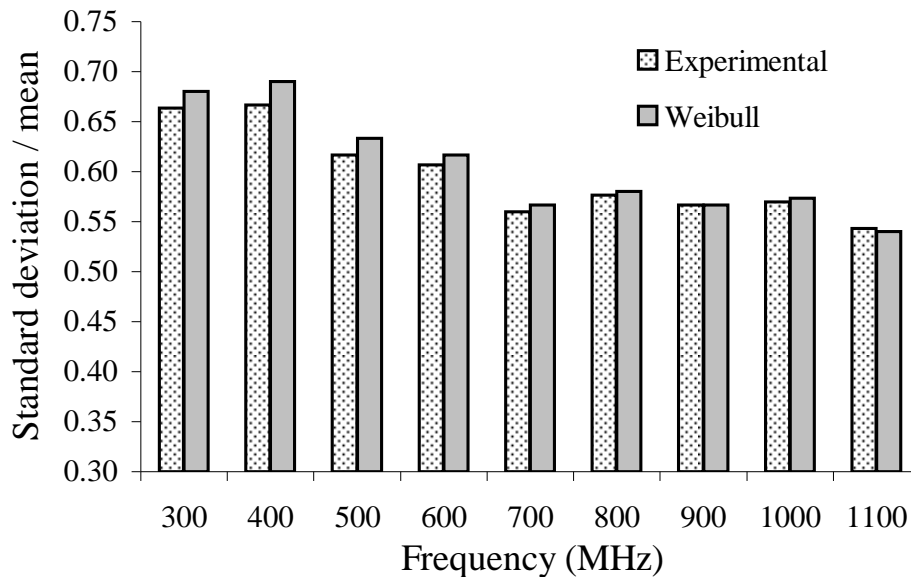
**TAB. 6.4:** Validation expérimentale de la méthode d'estimation de l'ESS pour un brassage mécanique et pour des mesures de  $E_R$ .

Comme nous l'avons exposé en chapitre 3, le ratio écart type sur moyenne  $\sigma_x/\mu_x$  d'une distribution de Weibull à 2 paramètres est à privilégier dans cette méthode, dans les relations (6.20) et (6.28). Considérer que les mesures de  $E_R$  sont distribuées selon une loi de Rayleigh au lieu d'une loi de Weibull, conduit à un biais dans l'estimation de l'ESS. La figure 6.6 permet de comparer le nombre  $N'_{360^\circ}$  d'échantillons indépendants disponibles sur un tour complet du brasseur, obtenu dans l'hypothèse d'une distribution





**FIG. 6.6:** Comparaison du nombre  $N'_{360^\circ}$  d'échantillons indépendants disponibles sur un tour complet du brasseur pour des mesures de  $E_R$ , estimé à partir d'une distribution de Weibull ou d'une distribution de Rayleigh pour évaluer le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  dans (6.20) au-dessus de 600 MHz, et dans (6.28) en-dessous de cette fréquence.



**FIG. 6.7:** Comparaison des ratios expérimentaux  $\sigma_x/\mu_x$  pour des mesures indépendantes de  $E_R$ , avec celui d'une distribution de Weibull à 2 paramètres déterminée à partir des tests d'ajustement adaptés (cf. chapitre 3), pour  $N = 1500$  échantillons indépendants à chaque fréquence.

de Rayleigh ( $\sigma_x/\mu_x \approx 0,52$ ) ou d'une distribution de Weibull (cf. Fig. 6.7). Il en résulte que considérer une distribution de Rayleigh au lieu d'une distribution de Weibull à 2 paramètres pour évaluer le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  et donc  $N'_{360^\circ}$ , conduit à sous-estimer le nombre maximum de positions de brasseur indépendantes disponibles sur un tour complet.

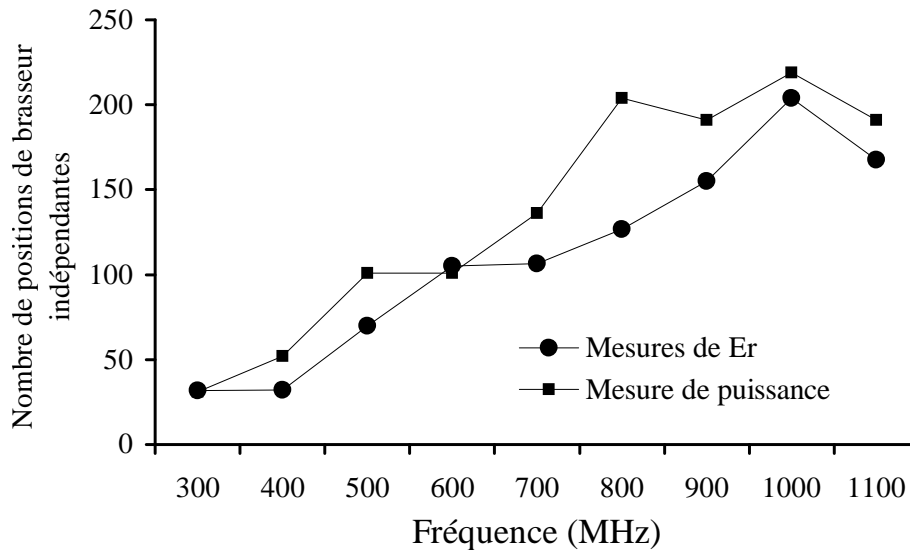
Nous rappelons que dans le cas d'une distribution de Weibull  $(a, b)$ , le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  est calculé selon l'expression (3.5). Le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  retenu pour déterminer  $N'_{360^\circ}$  (Fig. 6.5) est calculé après estimation du paramètre  $b$  par la méthode du maximum de vraisemblance

et acceptation par les tests d'ajustement adaptés (cf. chapitre 3). Pour chaque fréquence, le couple  $(a, b)$  retenu est indiqué en tableau 6.5.

f (MHz)	a	b
300	0,84	1,55
400	0,85	1,53
500	0,83	1,67
600	0,82	1,70
700	0,80	1,85
800	0,81	1,81
900	0,80	1,84
1000	0,81	1,83
1100	0,80	1,94

**TAB. 6.5:** Paramètres expérimentaux de la loi de Weibull pour des mesures de  $E_R$  en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité. Le paramètre  $b$  est utilisé dans l'estimation du ratio  $\sigma_x/\mu_x$  de la figure 6.5. Ce ratio est intégré dans l'expression de (6.20) au-dessus de 600 MHz, et dans (6.28) en-dessous de cette fréquence, pour déterminer le nombre  $N'_{360^\circ}$  d'échantillons indépendants disponibles sur un tour complet du brasseur.

En figure 6.8, nous indiquons à titre de comparaison le nombre de positions de brasseur indépendantes que nous avons estimé à partir des mesures de puissance d'une part, et à partir des mesures d'une composante cartésienne de champ d'autre part. Bien que



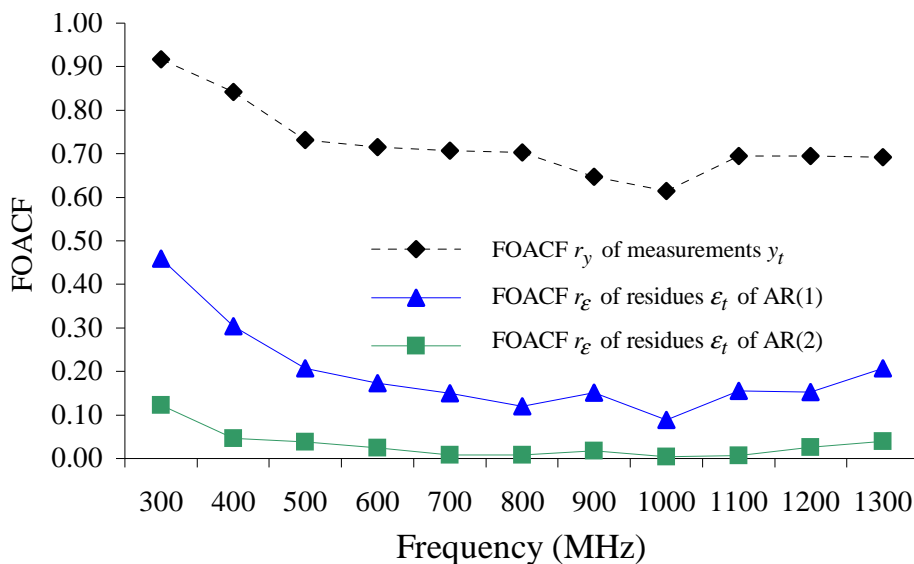
**FIG. 6.8:** Comparaison du nombre de positions de brasseur indépendantes estimé à partir des mesures de puissance (Fig. 6.3) ou à l'aide des mesures d'une composante cartésienne de champ (Fig. 6.5).

des incertitudes de mesure viennent perturber l'estimation du nombre d'échantillons indépendants, nous remarquons néanmoins que ce nombre est à peu près stable, que l'on raisonne sur des mesures de puissance ou sur des mesures de champ. De la même manière

que la dimension du récepteur influe sur la distribution des mesures, il n'est pas évident que le nombre de positions indépendantes attendu soit exactement le même quel que soit le récepteur. Notons par ailleurs qu'il semble que l'on dispose d'un plus grand nombre d'échantillons indépendants lorsque le récepteur est de plus grande dimension.

### 6.3.3 Mesures de puissance en brassage fréquentiel

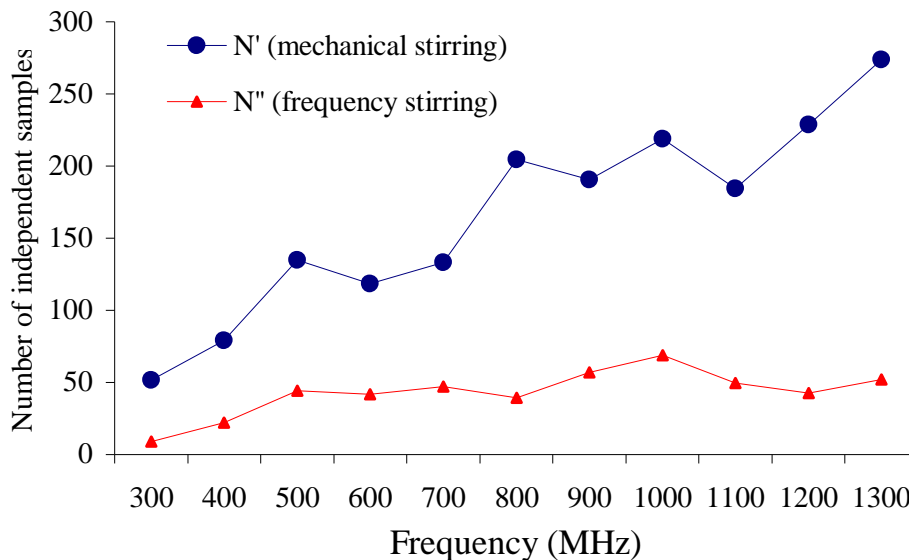
Dans cette section, nous vérifions la méthode d'estimation de l'ESS dans le cas d'un brassage électronique, par exemple pour des mesures de puissance. Il s'agit donc de transposer le protocole expérimental de la section 6.3.1. Le paramètre  $N'$  étant dédié au nombre de positions de brasseur indépendantes, nous désignons par  $N''$  le nombre de fréquences indépendantes disponibles dans une bande  $\Delta f$  autour d'une fréquence centrale  $f_0$ . Nous considérons une largeur de bande  $\Delta f = 10$  MHz. Les mesures de puissance sont réalisées de 300 MHz à 1300 MHz, par pas de 100 MHz définissant ainsi les fréquences centrales du brassage électronique ( $f_0 = 300$  MHz, 400 MHz,  $\dots$ , 1300 MHz). Nous utilisons en émission et en réception une antenne log-périodique ETS-Lindgren (Fig. 2.7), *i.e.* les mêmes antennes que dans le cas de l'étude similaire en brassage mécanique (section 6.3.1). Dans la bande  $\Delta f = 10$  MHz, nous sélectionnons 250 fréquences d'excitation de la cavité uniformément réparties, et utilisons en plus 6 positions de brasseur indépendantes ( $\Delta\theta = 60^\circ$ ). Par conséquent, pour chaque fréquence centrale, nous disposons à nouveau de 1500 échantillons. Il en résulte que le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles dans une bande de fréquence de largeur 10 MHz, peut se déduire des relations (6.20) et (6.28) en divisant le résultat par les 6 positions de brasseur indépendantes, si les modèles AR retenus sont acceptables.



**FIG. 6.9:** Analyse de la corrélation des mesures  $y_t$  de puissance, et de la corrélation des résidus  $\epsilon_t$  pour différents modèles  $AR(k)$  à l'aide de la fonction d'autocorrélation au premier ordre (FOACF pour *first order autocorrelation function*). La ligne pointillée correspond à l'ACF  $r$  au premier ordre des mesures  $y_t$ . Les deux courbes en couleur concernent l'ACF  $r_\epsilon$  au premier ordre des résidus  $\epsilon_t$  des modèles  $AR(k)$  pour  $k = 1, 2$ .

De manière similaire aux études menées en sections 6.3.1 et 6.3.2, nous commençons par sélectionner le modèle AR adéquat, en analysant la corrélation des résidus  $\epsilon_t$  en fonction de l'ordre  $k$  du processus autorégressif (Fig. 6.9). Étant donné que nous sélectionnons un grand nombre de fréquences dans une bande relativement étroite (10 MHz), les mesures de puissance collectées par brassage fréquentiel sont caractérisées par une corrélation élevée. C'est pourquoi le modèle AR à l'ordre 1 ne suffit pas pour modéliser correctement le comportement de ces mesures. En effet, la corrélation des résidus du modèle AR(1) demeure élevée, en particulier supérieure au critère 0,10 que nous nous sommes fixés (section 5.3.2) pour considérer que 1500 échantillons soient indépendants. Par contre, si l'on choisit un modèle AR à l'ordre 2, alors les résidus peuvent être considérés comme non corrélés, ce qui nous permet de retenir ce modèle pour l'estimation de l'ESS.

Ainsi, de 300 MHz à 1300 MHz, la taille effective de la série de 250 fréquences d'excitation au sein d'une bande de 10 MHz, est déterminée à l'aide de la relation (6.28), valable pour un modèle AR(2). Nous supposons alors que les  $N''$  échantillons indépendants sont distribués de manière uniforme dans la bande de fréquence  $\Delta f = 10$  MHz, dans le but de vérifier la validité de cette démarche. Nous indiquons en figure 6.10 le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes estimé par (6.28) au sein d'une bande  $\Delta f = 10$  MHz, pour chaque fréquence centrale d'excitation, et ajoutons en comparaison le nombre  $N'_{360^\circ}$  de positions de brasseur indépendantes obtenues en section 6.3.1.



**FIG. 6.10:** Évaluation du nombre  $N''$  de mesures indépendantes de puissance disponibles dans une bande de fréquence  $\Delta f = 10$  MHz. Nous indiquons à titre de comparaison l'efficacité de brassage, *i.e.* le nombre  $N'_{360^\circ}$  de positions de brasseur indépendantes disponibles sur un tour complet, obtenu en section 6.3.1.

Nous avons réalisé une nouvelle série d'expériences dans le but de vérifier si les  $N''$  fréquences estimées par notre méthode correspondent effectivement à des fréquences d'excitation de la cavité indépendantes. De même qu'en sections 6.3.1 et 6.3.2, nous ajoutons des positions de brasseur supplémentaires, ainsi que plusieurs positions d'antennes lorsque cela est nécessaire, de manière à toujours disposer de  $N = 1500$  échantillons par fréquence

centrale  $f_0$ . Afin de s'affranchir de la dépendance potentielle des positions de brasseur, nous limitons à 30 le nombre de positions de brasseur sélectionnées sur un tour complet. Dès lors que ces 30 positions de brasseur ne suffisent pas à disposer de 1500 échantillons pour une fréquence centrale  $f_0$  donnée, nous complétons la série des  $N = 1500$  échantillons à l'aide de positions indépendantes de l'antenne de réception. A la lecture du

$f_0$ (MHz)	$r$ pour $N = 250$	$r$ pour $N''$ de la figure 6.10
300	0,92	0,04
600	0,72	0,08
800	0,70	0,06
1000	0,62	0,13
1200	0,69	0,07
1300	0,69	0,06

<sup>1</sup>La bande de fréquence est de largeur 10 MHz autour de la fréquence centrale  $f_0$ .

**TAB. 6.6:** Validation expérimentale de la méthode d'estimation de l'ESS pour un brassage électronique et pour des mesures de puissance<sup>1</sup>.

tableau 6.6, nous constatons de manière similaire au brassage mécanique, que la méthode d'estimation de l'ESS permet de réduire de manière significative la corrélation des  $N''$  mesures de puissance. Par exemple, dans la bande [795 MHz - 805 MHz], l'ACF  $r$  au premier ordre pour  $N'' = 39$  fréquences d'excitation (cf. Fig. 6.10) est estimée à 0,06 ce qui est suffisamment faible pour considérer que, dans cette bande, nous disposons de 39 fréquences d'excitation indépendantes. Par ailleurs, l'espérance  $\rho$  de l'ACF est incluse dans l'intervalle  $[r - 0.05, r + 0.05]$  avec un niveau de confiance de 95%. Le plus souvent, la nouvelle ACF relative à un nombre  $N''$  de fréquences d'excitation de la cavité dans la bande  $\Delta f = 10$  MHz est supérieure à 0,05. Par conséquent, l'espérance  $|\rho|$  a très peu de chances d'être strictement nulle, mais doit rester légèrement plus grande que zéro. Ainsi, comme pour le brassage mécanique (sections 6.3.1 et 6.3.2) nous ne sous-estimons pas le nombre maximum de fréquences d'excitation indépendantes disponibles dans la largeur de bande  $\Delta f$ .

Le modèle d'estimation de la taille effective d'une série de mesures en chambre réverbérante a fait l'objet d'une publication très récente de 10 pages dans la revue *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* du mois de Mai 2008.

# Chapitre 7

## Vérification de la relation de passage de l'ESS à l'incertitude de mesure via l'application du théorème central limite

Dans ce chapitre, nous souhaitons vérifier expérimentalement le résultat du théorème central limite (section 5.1.2) à partir de mesures en chambre réverbérante. Nous distinguons les deux types de brassage usuellement employés : le brassage fréquentiel et le brassage mécanique. L'intérêt de cette démarche est d'étudier la faisabilité de la CRBM comme moyen de mesure dont on sait contrôler avec précision l'incertitude sur l'estimation d'une observation. Le théorème central limite nous donne l'écart type de l'estimateur de l'espérance d'une grandeur observable. Sachant que la moyenne d'un échantillon a un comportement asymptotique de loi normale, nous pouvons facilement encadrer l'espérance recherchée à l'aide d'un intervalle de confiance. En effet, les quantiles de la loi normale sont bien définis dans la littérature statistique [97]. A notre connaissance, la vérification expérimentale du TCL pour des mesures en chambre réverbérante n'a jamais fait l'objet d'une telle étude. Par extension, nous allons également analyser expérimentalement l'écart type théorique de l'estimateur du maximum de la puissance mesurée en chambre réverbérante [80].

### 7.1 Protocole expérimental

#### 7.1.1 Effet de la corrélation sur l'incertitude des mesures

Dans le cas d'échantillons **indépendants**, le théorème central limite donne le résultat suivant. Soit  $x_1, \dots, x_N$  une série de  $N$  échantillons indépendants de la variable aléatoire  $X$  dont l'espérance est  $\mu_x$  et la variance est  $\sigma_x^2$ . Lorsque le nombre  $N$  est suffisamment grand (cf. section 7.1.3), on peut montrer que l'estimateur  $\hat{\mu}_x$  de l'espérance est distribué

selon une loi normale  $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_{\mu_x})$  dont l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  est réduit d'un facteur  $1/\sqrt{N}$  :

$$\sigma_{\mu_x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (7.1)$$

Dans le cas où les  $N$  échantillons ne sont pas indépendants, alors l'expression (7.1) n'est plus valable, sauf si on remplace  $N$  par le nombre effectif  $N'$  d'échantillons indépendants que contient la série de taille  $N$ . Dans ce cas, moins on dispose d'échantillons indépendants et plus l'écart type sera élevé, donc plus l'incertitude sur l'estimation de l'espérance sera grande.

Nous avons montré dans le chapitre précédent à travers la relation (6.19), que dans le cas d'une corrélation significative, mais pas trop grande *i.e.* tant que le modèle AR(1) est respecté ( $|\rho| < 0,55$ ), alors l'estimateur  $\hat{\mu}_x$  de l'espérance est distribué selon une loi normale (cf. (6.15))  $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_{\mu_x})$  dont l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  s'écrit en fonction de l'ACF  $r$  au premier ordre et du nombre  $N$  d'échantillons, de la manière suivante :

$$\sigma_{\mu_x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N'}} \quad (7.2)$$

Pour  $x \in [0; 1[$ , la fonction  $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  est croissante à valeurs dans  $[1; +\infty[$ . Cela signifie donc que plus la corrélation augmente, et plus l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  de l'estimateur de l'espérance de l'observable est élevé. En outre, le minimum de cet écart type est obtenu pour une corrélation nulle. En effet, pour  $r = 0$ , nous retrouvons la relation (7.1). Nous pourrions montrer aussi que dans le cas d'un modèle AR(2), l'écart type de la moyenne des échantillons croît avec le niveau de corrélation, compte tenu des conditions de stationnarité du modèle (6.6).

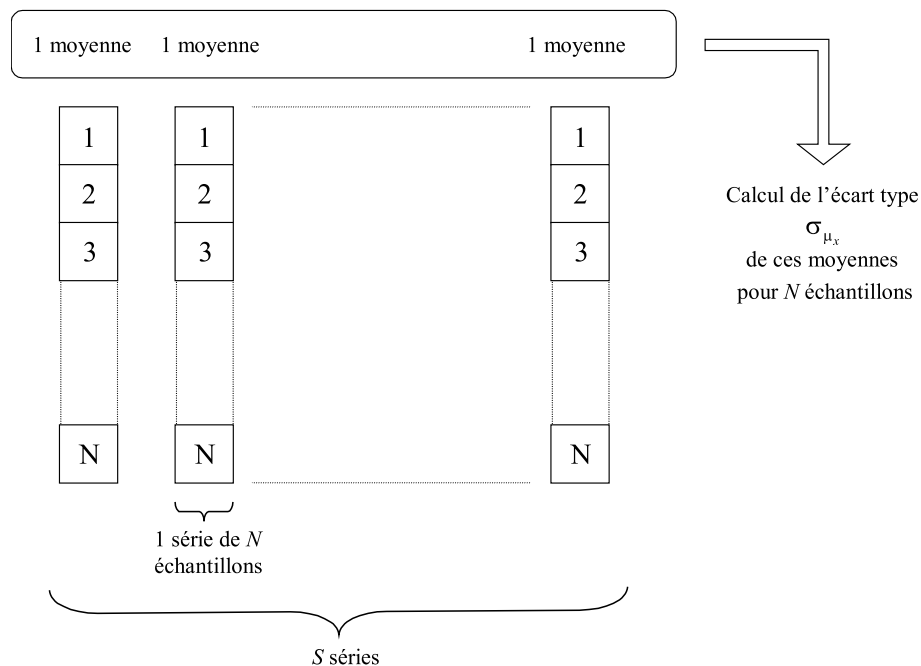
Par conséquent, dès lors qu'il existe une corrélation au sein d'un échantillon de taille  $N$ , l'incertitude sur l'estimateur de l'observable est supérieure à l'incertitude que l'on obtiendrait si les  $N$  échantillons n'étaient pas corrélés. En outre, plus la corrélation est forte, et plus l'incertitude est grande. En ce qui concerne les mesures en chambre réverbérante, il en résulte que la collecte de mesures corrélées dégrade l'incertitude sur l'estimation d'une observation. Si l'on souhaite atteindre un niveau d'incertitude particulier, alors on aura besoin d'un plus grand nombre d'échantillons s'ils sont corrélés, d'où un protocole expérimental plus long.

Une expérience de mesures en chambre réverbérante n'est optimale que si les conditions aux limites imposées au champ électromagnétique par un brassage mécanique, ou électronique, sont indépendantes. L'objet du chapitre précédent était de proposer une nouvelle démarche de caractérisation de l'efficacité de brassage, en terme d'indépendance des conditions aux limites. Dans ce chapitre, connaissant l'efficacité de brassage de la CRBM de l'IETR (section 6.3), nous proposons de vérifier expérimentalement que la qualité des mesures en CRBM permet de retrouver la relation (7.2), pour les deux types de brassage.

### 7.1.2 Principe de l'essai à réaliser

Après avoir analysé théoriquement l'effet de la corrélation sur l'incertitude des mesures, nous définissons maintenant le principe de l'essai que nous voulons réaliser. Nous désirons montrer, en ce qui concerne la mesure en chambre réverbérante, que l'on ne peut indéfiniment faire baisser l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre. En particulier, dès lors qu'une corrélation apparaît, la relation (7.2) montre que l'écart type de l'estimateur de l'espérance de l'observable sera plus élevé que dans le cas d'absence de corrélation pour un même nombre  $N$  d'échantillons. De plus, nous souhaitons vérifier que l'écart type sur l'estimation de l'espérance est bien limité par le nombre d'échantillons indépendants. Au sein d'une série de  $N$  mesures, si l'on dispose uniquement de  $N' < N$  mesures indépendantes, l'écart type de l'estimateur de l'espérance est alors donné théoriquement par (7.2).

L'objectif de l'essai que nous voulons mettre en oeuvre est d'évaluer si la fonction d'autocorrélation au premier ordre  $r$  suffit pour affirmer que les mesures sont indépendantes, et ainsi pouvoir estimer correctement l'incertitude de mesures en appliquant la relation (7.2) (cf. section 5.2.3). Pour cela, nous souhaitons mener une expérience permettant d'aboutir à une évolution de l'écart type de l'estimateur de l'espérance de l'observable - *e.g.* des mesures de puissance - en fonction du nombre  $N$  d'échantillons d'une série de mesures (Fig. 7.1). Dès lors que la série de  $N$  mesures ne sera plus uniquement constituée d'échantillons non corrélés, alors cet écart type sera limité par le nombre  $N'$  d'échantillons non corrélés, tel qu'indiqué par (7.2).

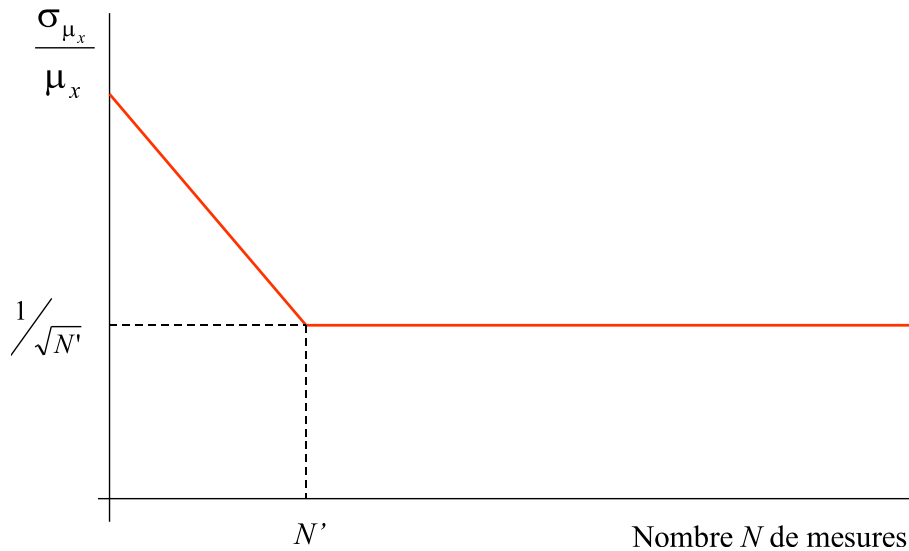


**FIG. 7.1:** Principe du calcul de l'estimation de l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  sur l'estimation de l'espérance d'une série de  $N$  mesures de puissance.

Par conséquent, par une analyse du ratio expérimental  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$ , en fonction du nombre  $N$  de mesures de puissance, nous devrions nous attendre à une évolution comparable à



celle de la figure 7.2. Or, dans le cas de mesures de puissance en réception d'une grande antenne (cf. section 3.4.3), le ratio  $\sigma_x/\mu_x$  est remarquable et vaut 1. Ceci est une propriété de la loi exponentielle. Par conséquent, la convergence du ratio  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  doit être réalisée au-delà du nombre d'échantillons non corrélés  $N'$ , pour atteindre  $1/\sqrt{N'}$  (cf. (7.2)).



**FIG. 7.2:** Evolution théorique du ratio  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  en fonction du nombre  $N$  d'échantillons d'une série de mesures de puissance, à partir de laquelle on estime l'espérance  $\mu_x$  de la série.

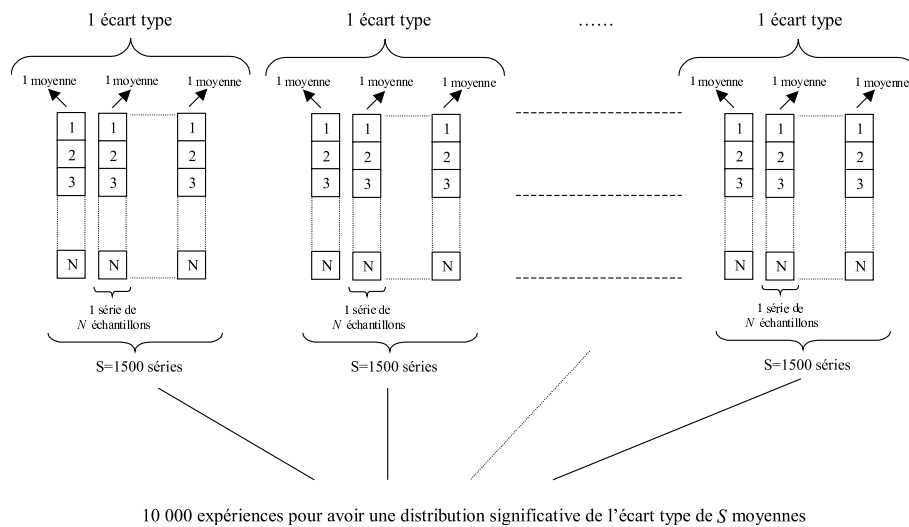
Il est bien évident que l'estimation du paramètre  $\sigma_{\mu_x}$ , pour une série de  $N$  échantillons, nécessite un très grand nombre de mesures. En effet, les estimations de ce paramètre sont aussi distribuées, donc il existe une incertitude sur son évaluation. Par conséquent, il est nécessaire de bien définir le protocole que l'on met en place pour aboutir à une évolution significative du ratio  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  en fonction de  $N$ , *i.e.* comparable à celle de la figure 7.2. Si au préalable, on ne tient pas compte de l'incertitude sur l'estimation de ce ratio, une estimation trop peu précise conduirait à ne pas mettre en évidence l'évolution attendue de  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  en fonction de  $N$ . Dans la section suivante, nous allons déterminer le nombre minimal  $N$  permettant d'appliquer le TCL (7.1), ainsi que le nombre  $S$  de séries de  $N$  mesures (Fig. 7.1), nécessaire pour estimer l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  avec une faible incertitude.

### 7.1.3 Choix du protocole de mesures

#### 7.1.3.1 Choix du nombre $N$ minimum d'échantillons indépendants

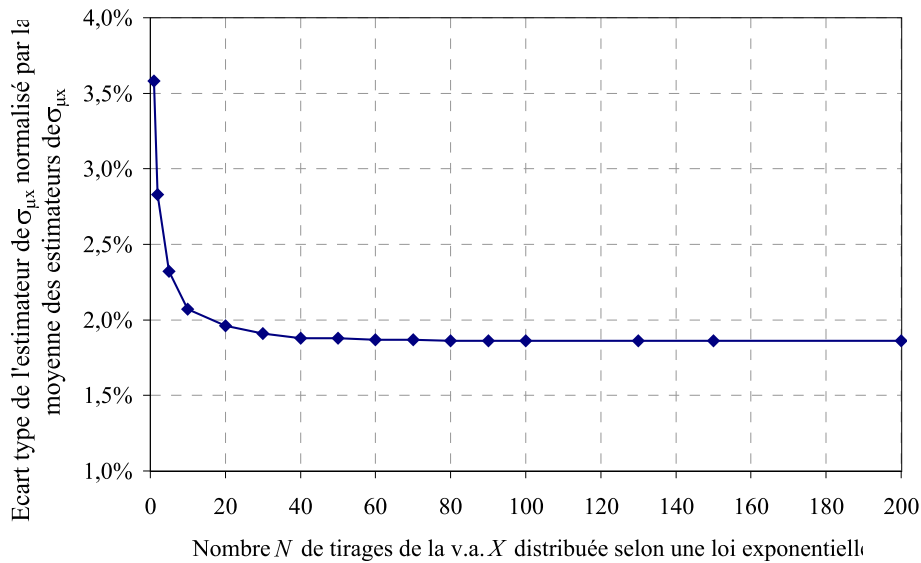
Nous cherchons à déterminer le nombre minimal  $N$  de mesures, permettant d'appliquer le résultat donné par le théorème central limite avec une incertitude faible, de l'ordre de 5%. Précisément, à partir de combien d'échantillons la relation (7.1) est-elle valable ? Dans le but de déterminer l'écart type sur l'estimation du paramètre  $\sigma_{\mu_x}$ , nous appliquons la méthode Monte-Carlo. Nous réalisons  $N$  tirages de la v.a.  $X$  distribuée selon une loi exponentielle, qui est la loi de distribution des mesures de puissance (cf. section 2.3.2) en réception de l'antenne log-périodique que nous utiliserons (Fig. 2.7). Nous pouvons ainsi calculer une moyenne, *i.e.* estimer l'espérance de ces  $N$  tirages. De manière à estimer

expérimentalement avec précision (cf. section 7.1.3.2) l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  de  $S$  moyennes, nous nous imposons  $S = 1500$ . Dès lors, nous renouvelons 1500 fois le tirage de  $N$  valeurs afin d'estimer un écart type  $\sigma_{\mu_x}$  de  $S = 1500$  moyennes. C'est la procédure que nous respecterons expérimentalement (sections 7.2 et 7.3). Puisque nous cherchons à connaître le niveau d'incertitude sur l'estimation de  $\sigma_{\mu_x}$ , nous renouvelons l'expérience un grand nombre de fois (10 000 scénarios), de manière à déterminer numériquement l'écart type de la distribution de l'estimateur de l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  de  $S$  moyennes de  $N$  tirages (Fig. 7.3).



**FIG. 7.3:** Méthode Monte-Carlo pour connaître le nombre minimal  $N$  d'échantillons d'une série, nécessaire afin d'obtenir le comportement asymptotique donné par le théorème central limite (7.1). Les 10 000 scénarios permettent d'aboutir à une distribution significative du paramètre  $\sigma_{\mu_x}$  estimé expérimentalement pour  $S = 1500$  séries de  $N$  échantillons.

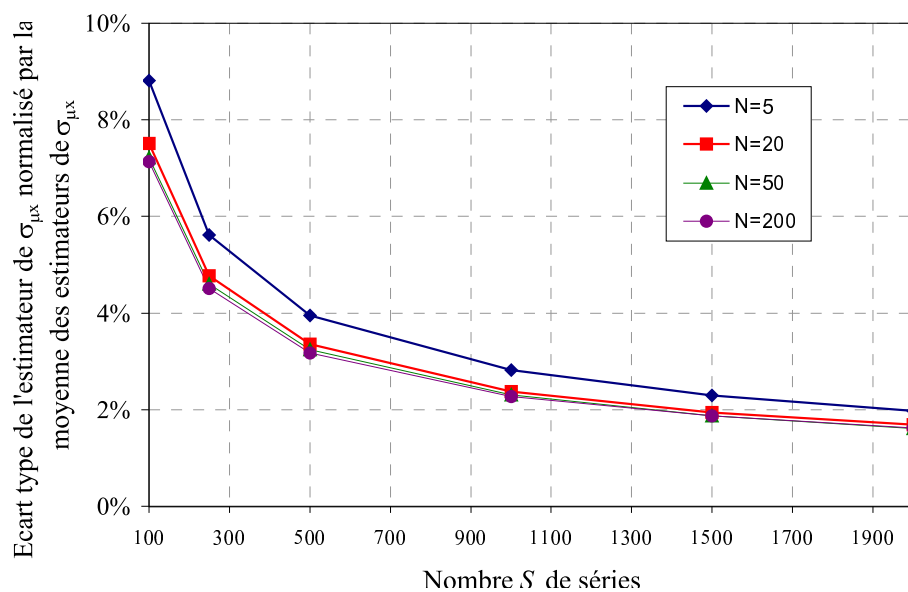
Nous réalisons ces 10 000 expériences pour différentes valeurs de  $N$  variant de 1 à 200 échantillons. Pour chaque valeur de  $N$ , afin d'avoir une idée précise de l'écart type de la distribution de  $\sigma_{\mu_x}$ , nous normalisons le résultat par la moyenne des 10 000 estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$  obtenus par simulation Monte-Carlo. Cela permet ainsi de connaître l'écart type de la distribution de  $\sigma_{\mu_x}$ , en pourcentage de l'espérance de cette distribution (Fig. 7.4). Nous observons qu'à partir de  $N = 20$  échantillons, l'écart type de la distribution des estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$  converge à un niveau inférieur à 2% de l'espérance de  $\sigma_{\mu_x}$ . En supposant une distribution normale cela signifie que l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  estimé à partir de 1500 moyennes de  $N > 20$  échantillons, est déterminé à environ  $\pm 5\%$  avec un niveau de confiance de 95%. D'un point de vue expérimental, cela signifie que nous pourrions déterminer correctement un estimateur de l'écart type  $\sigma_{\mu_x}$  à partir de  $N = 20$  mesures, sans craindre d'augmenter les fluctuations sur son estimation, causées par un trop faible nombre d'échantillons que contient une série. Si l'on se réfère à la figure 7.2, l'origine de l'axe des abscisses pourra donc être choisi à  $N = 20$ .



**FIG. 7.4:** Ecart type de la distribution des 10 000 estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$  en fonction de  $N$ , normalisé par l'espérance des 10 000 estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$ . La méthode Monte-Carlo utilisée pour obtenir cette courbe est indiquée en figure 7.3.

### 7.1.3.2 Choix du nombre $S$ de séries pour le calcul expérimental de l'écart type

Afin d'évaluer l'influence du nombre  $S$  de séries de mesures nécessaires pour calculer un estimateur de  $\sigma_{\mu_x}$ , nous réalisons également des simulations par la méthode Monte-Carlo, dont le principe est le même que les tirages réalisés précédemment (Fig. 7.5). Cependant, dans cette situation, nous faisons varier le paramètre  $S$  de 100 à 2000, et pour chaque valeur de  $S$  nous considérons différentes tailles d'échantillons de mesures ( $N = 5; 20; 50; 200$ ). Concrètement, nous désirons savoir si le fait de considérer un nombre



**FIG. 7.5:** Ecart type de la distribution des 10 000 estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$  en fonction de  $S$ , normalisé par l'espérance des 10 000 estimateurs de  $\sigma_{\mu_x}$ .

$S = 1500$  séries de  $N > 20$  mesures est suffisant pour estimer avec peu d'incertitude l'écart type expérimental, et pouvoir le comparer avec une bonne précision à l'écart type théorique donné par le TCL (7.1). Sur la figure 7.5, nous mettons en évidence que le choix du nombre  $S$  de séries a beaucoup plus d'influence que le nombre  $N$  d'échantillons d'une série, sur la précision de l'estimation de  $\sigma_{\mu_x}$ . En outre, la collecte de 1500 séries permet d'estimer  $\sigma_{\mu_x}$  à environ  $\pm 5\%$  de l'espérance recherchée (Fig. 7.5).

Par conséquent, nous avons déterminé le nombre  $S$  de séries et le nombre  $N$  minimum d'échantillons d'une série qui doivent permettre de mettre en évidence l'évolution de l'estimation de  $\sigma_{\mu_x}$  que l'on recherche (Fig. 7.2). Que ce soit pour le brassage fréquentiel (section 7.2), ou pour le brassage mécanique (section 7.3), nous spécifierons d'abord les paramètres de brassage, permettant d'avoir accès à 1500 séries de  $N$  mesures.

## 7.2 Brassage fréquentiel

### 7.2.1 Protocole expérimental

Dans le cas du brassage fréquentiel, nous travaillons à la fréquence centrale d'excitation de la cavité  $f_0 = 700$  MHz. Cette fréquence centrale est un bon compromis pour avoir une corrélation relativement élevée ( $\rho \approx 0,65$ ) pour  $N = 400$  fréquences d'excitation dans une bande relativement étroite  $\Delta f = 20$  MHz. Cela nous permet de respecter un critère de bande étroite tel que  $\Delta f/f_0 < 10\%$ , tout en disposant d'un peu plus de 100 positions de brasseur indépendantes (cf. Fig. 6.3). Cela nous donne donc accès à 100 séries de  $N = 400$  mesures de puissance. Pour atteindre  $S = 1500$  séries, nous réalisons cette expérience pour 15 positions indépendantes de l'antenne de réception. Nous obtenons ainsi  $S = 100$  positions de brasseur  $\times$  15 positions d'antenne de réception = 1500 séries. Compte tenu de la figure 6.10, nous disposons dans la bande  $\Delta f = 20$  MHz d'environ 100 fréquences indépendantes. Par conséquent, le seuil de la figure 7.2 pour atteindre la convergence de l'estimateur de  $\sigma_{\mu_x}$  devrait être  $N' \approx 100$ . Tout compte fait, cette expérience sera entièrement réalisée à l'issue de  $400 \times 100 \times 15 = 600\,000$  mesures de puissance, soit environ 200 heures de mesures dans la CRBM de l'IETR. La collecte des mesures étant automatisée, l'opérateur n'a besoin d'intervenir que pour le changement de la position de l'antenne de réception.

Le brassage fréquentiel est réalisé à l'aide de 400 fréquences d'excitation dans la bande  $\Delta f = 20$  MHz autour de la fréquence centrale  $f_0 = 700$  MHz. Bien entendu, pour connaître l'évolution de l'estimateur de  $\sigma_{\mu_x}$  en fonction de  $N$ , il suffit de retirer de manière régulière des fréquences d'excitation pour faire décroître la taille  $N$  de l'échantillon considéré. Par exemple, pour déterminer l'estimateur de  $\sigma_{\mu_x}$  pour  $N = 200$ , nous enlevons une mesure sur deux parmi la série des 400 mesures ; pour  $N = 100$  nous retirons une mesure sur quatre ; etc. jusqu'à prendre en compte des séries de taille  $N = 20$  mesures. Dès lors, plus  $N$  est faible et plus la corrélation entre les mesures considérées va décroître. En particulier, la corrélation doit logiquement être nulle pour  $N < 100$  échantillons (cf. Fig. 6.10). Nous

indiquons en tableau 7.1 l'estimation de l'espérance  $\rho$  de la fonction d'autocorrélation au premier ordre caractérisant le niveau de corrélation entre deux fréquences successives, en fonction du nombre  $N$  de fréquences considérées dans la bande  $\Delta f = 20$  MHz. Etant donné le nombre très important de mesures, nous pouvons considérer que l'estimation de cette espérance est très fiable, *i.e.* à moins de 5% d'erreur. Ces résultats sont cohérents avec l'estimation de l'ESS de la figure 6.10 à 700 MHz dans une bande de fréquence de 10 MHz. En effet, nous pouvons considérer à la lecture du tableau 7.1, que pour  $N < 100$ , les échantillons sont non corrélés, et qu'au-delà, une corrélation significative existe entre les fréquences d'excitation de la cavité.

$N$	20	25	33	50	57	66	80	100	133	200	400
$r$	-0,04	-0,03	-0,025	0,00	0,02	0,03	0,05	0,09	0,15	0,28	0,60

**TAB. 7.1:** Estimation de l'espérance de la fonction d'autocorrélation au premier ordre déterminée à partir des 1500 séries de  $N$  mesures de puissance collectées par brassage électronique. Chaque série correspond à une position d'antenne de réception et une position de brasseur données.

Nous mettrons à profit cette longue série d'expériences pour étudier également le comportement de l'écart type de l'estimateur du maximum retenu parmi une série de  $N$  échantillons. Cette analyse va nous permettre de comparer le résultat expérimental avec l'écart type de la distribution théorique du maximum (section 7.2.3).

## 7.2.2 Ecart type de la moyenne de $N$ mesures

En figure 7.6, nous présentons le résultat expérimental de l'évolution de l'incertitude sur l'estimation de la moyenne des puissances relevées par brassage électronique, par la mesure de l'écart type des 1500 moyennes de  $N$  relevés de puissance. En comparaison, nous indiquons aussi le résultat du TCL donnant l'écart type théorique en fonction de la taille effective  $N'$  de la série de  $N = 400$  échantillons. Lorsque  $N < N'$ , le TCL (7.1) est appliqué pour  $N$  échantillons indépendants, c'est-à-dire, sachant que  $\sigma_x/\mu_x = 1$  pour une loi exponentielle (cf. section 1.1.1) :

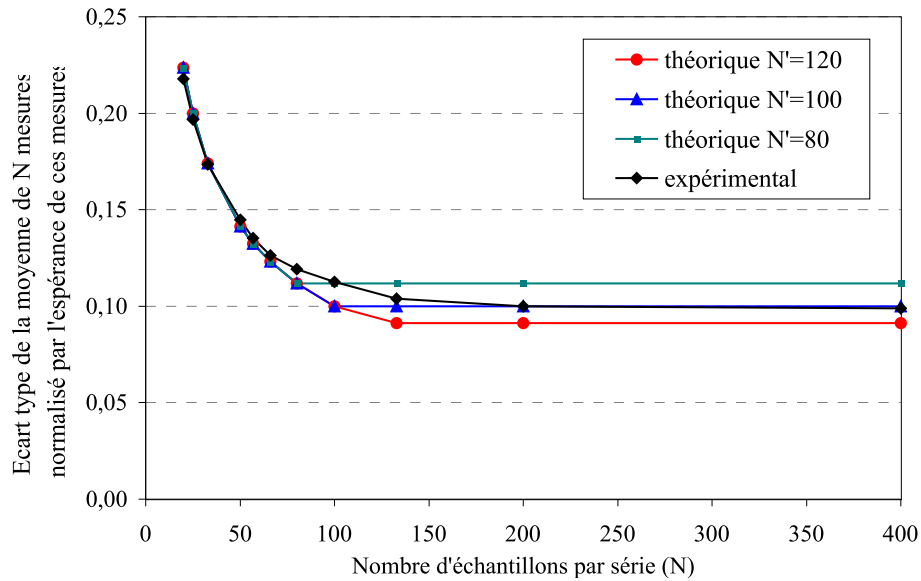
$$\frac{\sigma_{\mu_x}}{\mu_x} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (7.3)$$

et lorsque  $N > N'$  le TCL est appliqué pour  $N'$  échantillons indépendants, soit

$$\frac{\sigma_{\mu_x}}{\mu_x} = \frac{1}{\sqrt{N'}}. \quad (7.4)$$

Puisque nous rapportons cet écart type par l'espérance des mesures, on rappelle que la convergence du ratio  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  doit être réalisée au-delà du nombre d'échantillons non corrélés  $N'$ , pour atteindre  $1/\sqrt{N'}$  (cf. (7.2)).

Il résulte de ce graphique que le résultat du TCL pour  $N' = 100$  est bien conforme à l'expérience de mesures en CRBM. Nous observons effectivement qu'au-delà de 100



**FIG. 7.6:** Evolution de l'écart type expérimental de 1500 moyennes de  $N$  mesures de puissance relevées par brassage électronique, par comparaison au résultat donné par le théorème central limite. La corrélation des séries de  $N$  échantillons est indiquée en tableau 7.1.

fréquences d'excitation dans la bande  $\Delta f = 20$  MHz, les fréquences deviennent corrélées et l'écart type converge vers une valeur limite de  $1/\sqrt{100} = 10\%$ . Par conséquent, prélever plus de 100 échantillons dans une bande de largeur  $\Delta f = 20$  MHz autour de la fréquence centrale  $f_0 = 700$  MHz ne permet pas de diminuer l'écart type, donc n'apporte pas de réduction de l'incertitude de mesures. Par ailleurs, ce résultat est conforme à l'estimation de l'ESS pour une bande de 10 MHz (cf. section 6.3.3).

Au voisinage de la taille effective  $N' = 100$ , nous observons un écart plus important entre la théorie et l'expérience. Cela est peut-être dû au fait qu'il est plus difficile de sélectionner dans chacune des 1500 séries exactement les 100 fréquences indépendantes au sein de la série initiale de taille  $N = 400$ . Selon cette hypothèse, l'incertitude sur l'estimation de l'écart type de 1500 moyennes est plus importante autour de  $N'$ . Au fur et à mesure que l'on accroît le nombre  $N$  au delà de  $N'$ , l'incertitude se réduit, et la convergence est nettement établie. Ceci valide clairement le calcul de l'ESS et son intégration dans l'application du théorème central limite.

### 7.2.3 Ecart type du maximum de $N$ mesures

La loi de distribution de la valeur maximum de  $N$  tirages de la v.a.  $X$  distribuée selon une loi exponentielle peut se formuler de manière analytique [80]. En appelant  $F(x)$  la densité de probabilité cumulée (ou fonction de répartition) de la loi exponentielle, la fonction de répartition de la loi du maximum est donnée par :

$$G(x) = F(x)^N, \quad (7.5)$$

d'où d'après (1.35) :

$$G(x) = (1 - e^{-x/\theta})^N. \quad (7.6)$$

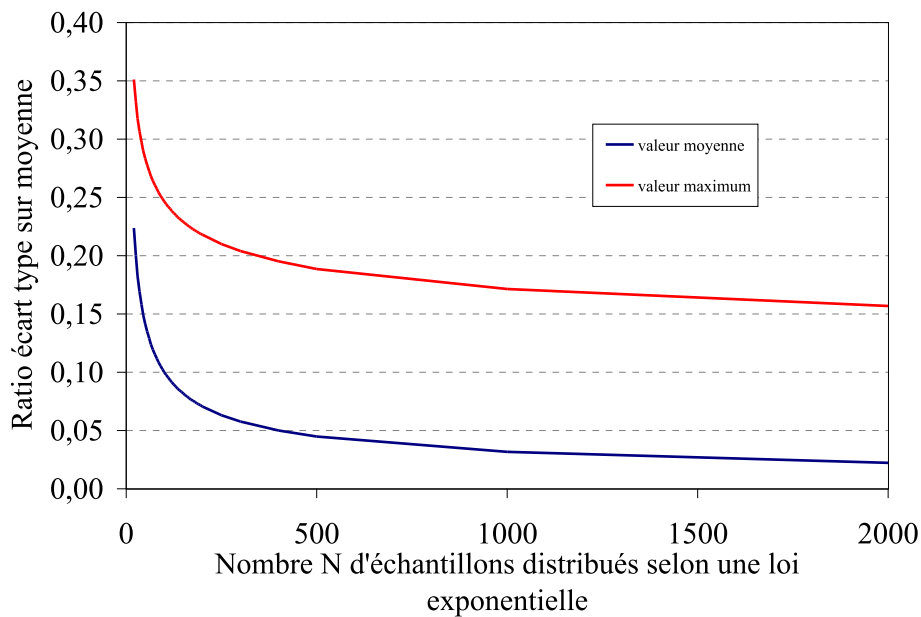
Cette loi de distribution est caractérisée par le ratio écart type sur moyenne suivant :

$$\frac{\sigma_{max}}{\mu_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N}}}{0,577 + \ln N + \frac{1}{2N}}. \quad (7.7)$$

Le ratio écart type sur moyenne de l'espérance de la distribution exponentielle est donné par le TCL, pour  $N$  tirages indépendants de la v.a.  $X$ . D'après (7.1), sachant que l'espérance et l'écart type de la distribution exponentielle sont égales [d'après (1.33) et (1.34)], nous avons :

$$\frac{\sigma_{\mu_x}}{\mu_x} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (7.8)$$

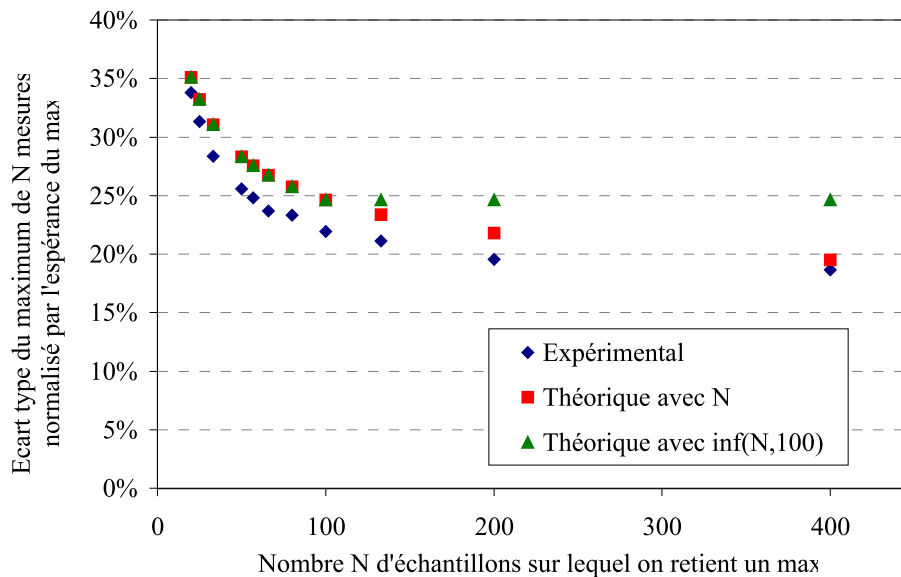
En analysant les expressions (7.7) et (7.8), il apparaît clairement (Fig. 7.7) que pour



**FIG. 7.7:** Comparaison des incertitudes sur l'estimation de la valeur maximum et de la valeur moyenne pour  $N$  tirages de la v.a.  $X$  distribuée selon la loi exponentielle, à travers l'évolution du ratio écart type sur moyenne.

un nombre  $N$  de tirages fixé, nous aurons toujours plus d'incertitude sur l'estimation du maximum par rapport à l'estimation de la valeur moyenne. Par exemple, pour  $N = 300$  échantillons de la v.a.  $X$ , l'écart type sur l'estimation du maximum est d'environ 20% de l'espérance du maximum, alors que l'écart type sur l'estimation de la moyenne est d'environ 5% de l'espérance de la moyenne. Cela conduit donc à quatre fois plus d'incertitude sur l'estimation du maximum par rapport à l'estimation de la moyenne. Etant donné que le calibrage d'une chambre réverbérante repose principalement sur l'estimation de maximums de champ relevés pour différentes positions de sonde [2, 6], un calibrage basé sur des valeurs moyennes serait à privilégier en terme de réduction d'incertitude.

Par ailleurs, on ne doit pas perdre de vue que la distribution théorique exponentielle est une distribution à valeurs dans  $[0; +\infty[$ . Cela suppose donc que des valeurs extrêmement élevées puissent être mesurées. Or, en pratique, compte tenu de la limitation des appareils, et des fuites dans la cavité réverbérante, il est exclu de pouvoir mesurer de tels valeurs excessivement élevées. Cela pourrait être une raison supplémentaire pour laquelle des expérimentations basées sur l'évaluation de la moyenne des mesures devraient être privilégiées plutôt que l'estimation d'une grandeur maximum (cf. section ).

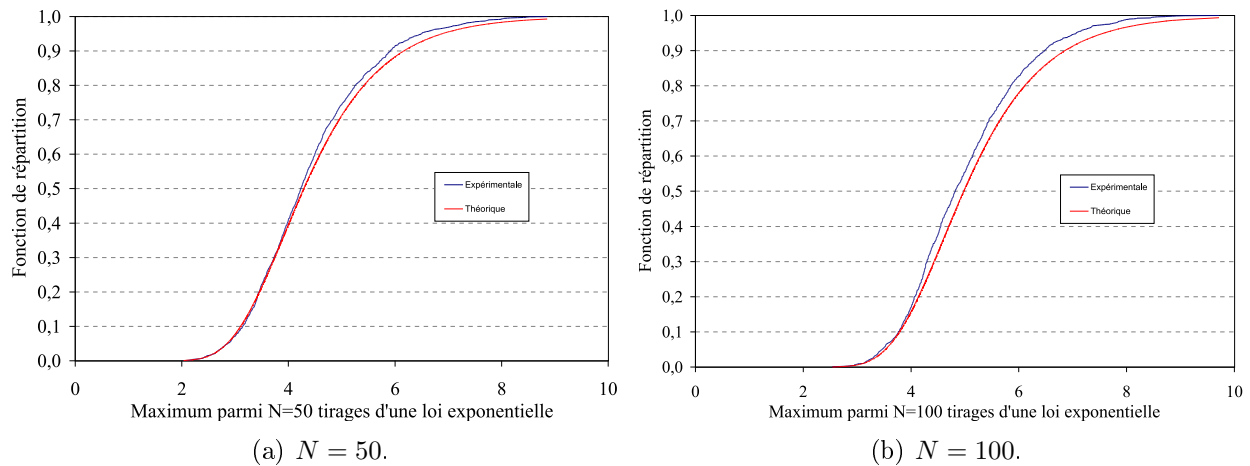


**FIG. 7.8:** Evolution de l'écart type expérimental de 1500 maximums de  $N$  mesures de puissance relevées par brassage électronique, par comparaison au résultat donné par l'expression théorique (7.7). Dans l'expression théorique, nous considérons 2 cas : l'un pour  $N$  variant de 20 à 400, l'autre pour lequel nous retenons comme nombre d'échantillons dans (7.7) le minimum entre  $N$  et  $N' = 100$ . La corrélation des séries de  $N$  échantillons est indiquée en tableau 7.1.

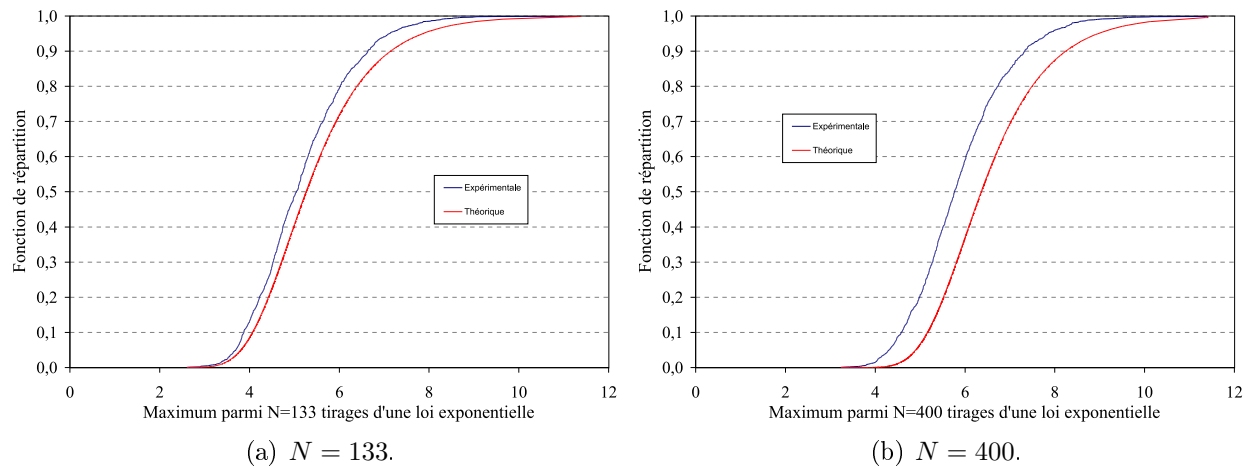
De même que pour l'écart type expérimental de la moyenne des mesures, nous proposons de comparer la théorie (7.7), à notre expérience de 600 000 mesures. Nous venons d'indiquer quelques limitations quant à l'étude du maximum d'un point de vue expérimental. En voici une autre. Dès lors que les  $N$  échantillons ne sont plus indépendants, la relation (7.7) est biaisée puisqu'il existe une corrélation entre l'ensemble des mesures donc certaines valeurs se trouvent favorisées plutôt que d'autres. Le tirage n'est plus strictement aléatoire. Contrairement à la valeur moyenne, en cas de corrélation nous ne disposons pas de l'expression théorique du ratio  $\sigma_{max}/\mu_{max}$ . Néanmoins, nous présentons en figure 7.8 l'évolution de ce ratio obtenu expérimentalement avec deux évolutions théoriques, l'une limitée par le nombre d'échantillons indépendants parmi  $N$  ( $N' = 100$ ), l'autre ne tenant pas compte de la corrélation *i.e.* intégrant  $N$  dans (7.7) jusque pour  $N = 400$ .

Contrairement à la figure 7.6, où l'écart type expérimental de la moyenne est conforme à la théorie (TCL), dans le cas du maximum l'écart type s'ajuste moins bien à la théorie. Les raisons évoquées plus haut peuvent expliquer, au moins en partie, les écarts que l'on observe sur la figure 7.8. Si l'on considère les fonctions de répartition expérimentale et théorique (7.6), on remarque que plus le nombre  $N$  augmente, et plus la fonction de





**FIG. 7.9:** Comparaison des fonctions de répartition expérimentale (en bleu) et théorique [en rouge (7.6)] pour le maximum de  $N$  tirages d'une v.a. distribuée selon la loi exponentielle.



**FIG. 7.10:** Comparaison des fonctions de répartition expérimentale (en bleu) et théorique [en rouge, (7.6)] pour le maximum de  $N$  tirages d'une v.a. distribuée selon la loi exponentielle.

répartition théorique (7.6) s'éloigne de la fonction de répartition expérimentale (Figs. 7.9(a), 7.9(b), 7.10(a) et 7.10(b)). On rappelle que dès que  $N > 100$ , chaque série de  $N$  échantillons est constituée d'éléments corrélés (cf. Tab 7.1).

Par conséquent, à travers cette expérience de 600 000 mesures, nous montrons qu'il est plus aisé de représenter théoriquement le comportement de la moyenne empirique que celui du maximum sélectionné parmi une série de  $N$  mesures. Etant donné que nous avons moins d'incertitude de mesures sur l'estimation de la moyenne, nous améliorons la précision d'une expérimentation en raisonnant sur une estimation de la moyenne plutôt que sur une grandeur maximum.

## 7.3 Brassage mécanique

### 7.3.1 Protocole expérimental

De manière analogue à l'étude de l'évolution de l'écart type expérimental de la moyenne de  $N$  mesures collectées par brassage électronique, nous transposons le protocole expérimental au cas du brassage mécanique. Nous souhaitons montrer expérimentalement que la limitation du nombre de positions de brasseur indépendantes engendre une convergence de l'incertitude de mesures collectées par la rotation du brasseur. Si l'on se réfère à la figure 7.2, le nombre  $N$  de mesures correspond cette fois aux  $N$  positions de brasseur sur un tour complet, et  $N'$  correspond à la taille effective (cf. chapitre 6) de la série de  $N$  mesures.

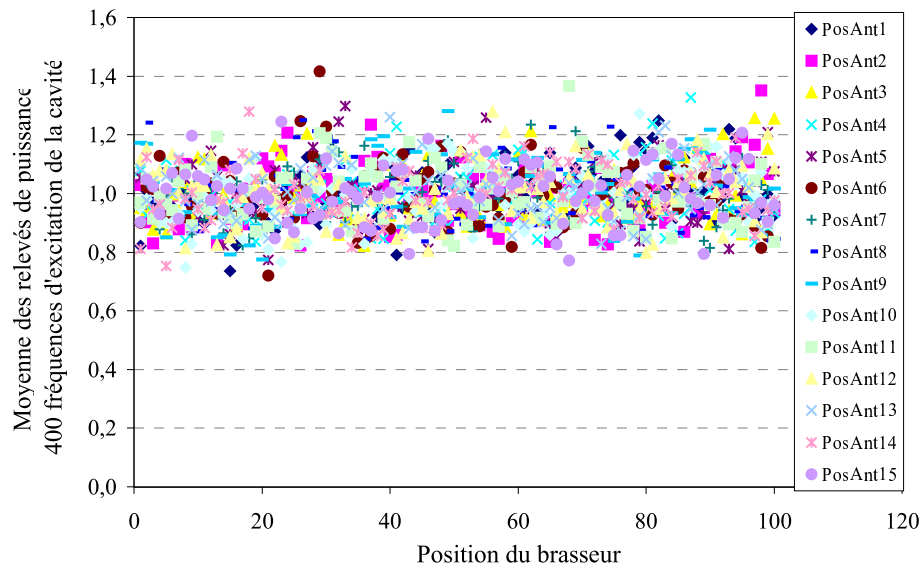
Dans le cas du brassage mécanique, nous nous limitons à 400 pas de brasseur sur un tour complet, ceci permettant de faire varier la taille  $N$  d'une série de 20 à 400. Les 1500 séries de  $N$  mesures sont collectées à l'aide de 15 positions d'antennes indépendantes au sein du volume utile de la cavité, et à l'aide d'un balayage en fréquence. Dans la bande [690 MHz – 710 MHz], nous sélectionnons 100 fréquences d'excitation réparties de manière homogène dans la bande. On rappelle que dans cette bande de fréquence, nous avons vérifié en section 7.2.2 que nous disposions justement de 100 fréquences d'excitation indépendantes. Nous obtenons ainsi  $S = 100$  fréquences d'excitation  $\times$  15 positions d'antenne de réception = 1500 séries. De même que dans le cas du brassage fréquentiel, lorsqu'il s'agit de considérer par exemple des séries de  $N = 20$  échantillons, nous ne retenons qu'une position de brasseur sur vingt.

D'après les résultats obtenus en figure 6.3, nous devrions disposer d'environ 130 positions de brasseur indépendantes sur une rotation complète ( $N'_{360^\circ}$ ). Nous avons d'ailleurs vérifié en tableau 6.2 que la fonction d'autocorrélation était suffisamment faible à 700 MHz pour 130 positions de brasseur, afin de juger que ces positions étaient bien indépendantes.

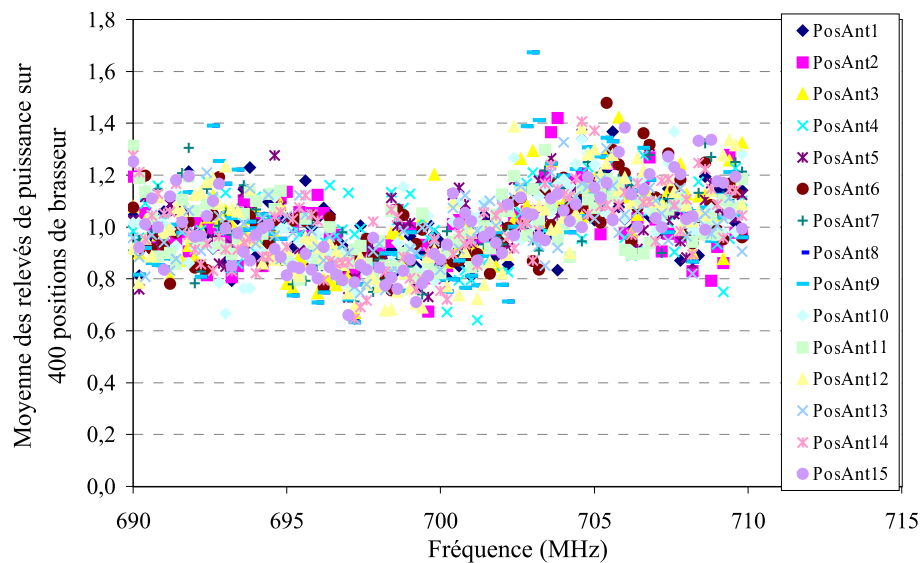
### 7.3.2 Résultat sur un tour complet du brasseur

Une simple transposition de l'étude en brassage électronique à l'analyse en brassage mécanique ne suffit pas. Précisément, le niveau moyen de puissance reçu par l'antenne log-périodique (Fig. 2.7) ne varie pas en brassage fréquentiel en fonction de la position du brasseur de modes (Fig. 7.11). Par contre, en brassage mécanique, le niveau moyen de puissance reçue varie en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité dans la bande [690 MHz – 710 MHz] (Fig. 7.12). La variation de la puissance reçue en fonction de la fréquence est la conséquence de variations du facteur de qualité de la chambre. On peut penser aussi que l'adaptation de l'antenne joue un rôle dans cette variation du niveau de puissance reçue, mais son influence doit être négligeable puisque la bande de fréquence est étroite et l'antenne log-périodique est une antenne large bande.

Dès lors, afin de s'affranchir des variations du niveau moyen de puissance en fonction de la fréquence, nous devons établir un raisonnement fréquence par fréquence. Or, si nous

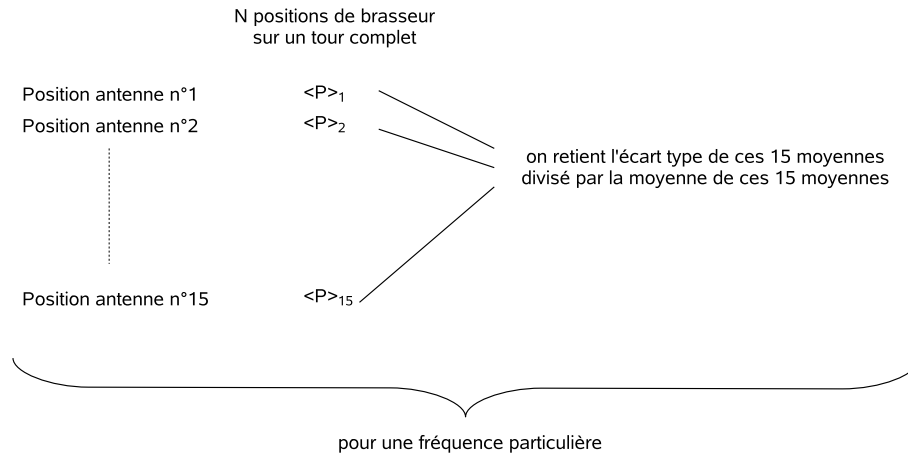


**FIG. 7.11:** Evolution du niveau moyen de puissance reçue pour 400 fréquences d'excitation de la cavité réparties uniformément dans la bande [690 MHz – 710 MHz], en fonction de la position du brasseur.



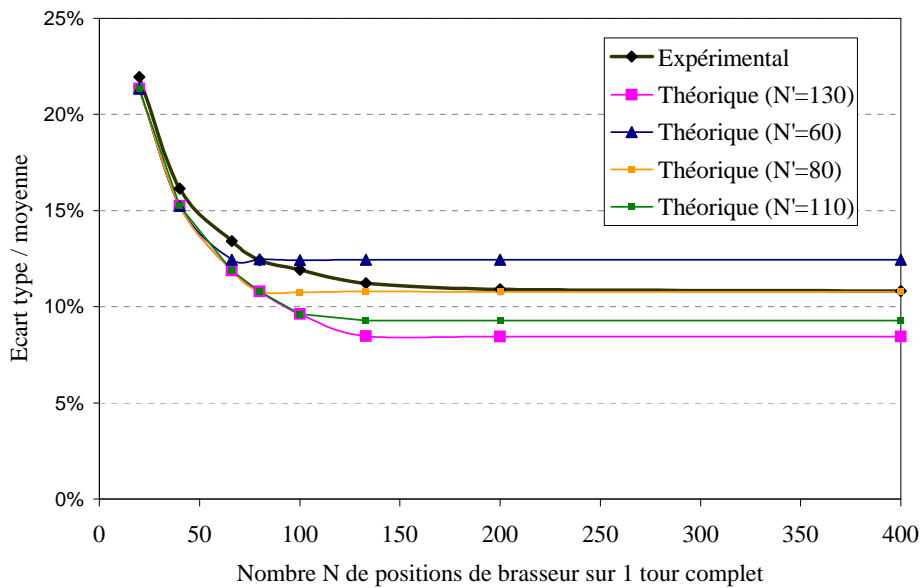
**FIG. 7.12:** Evolution du niveau moyen de puissance reçue pour 400 positions de brasseur réparties uniformément sur un tour complet, en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité.

procédons de la même manière que pour le brassage électronique (section 7.2), mais en normalisant les mesures par le niveau moyen de puissance reçu fréquence par fréquence, nous ne disposerons pas de 100 estimateurs de la moyenne par position d'antenne, mais d'un seul estimateur puisque cette moyenne devient identique quelle que soit la fréquence. La solution que nous avons adoptée consiste alors à déterminer, pour chaque fréquence, 15 moyennes sur  $N$  positions de brasseur, chaque moyenne correspondant à une position d'antenne. Nous calculons ensuite l'écart type sur ces 15 moyennes, que nous rapportons à la moyenne de ces 15 moyennes (Fig. 7.13) de manière à pouvoir comparer ensuite les 100 fréquences d'excitation entre elles. Ainsi, pour un nombre  $N$  de positions de brasseur, nous retenons la moyenne de ces 100 ratios écart type sur moyenne (puisque'on utilise



**FIG. 7.13:** Protocole de traitement des mesures de puissance  $P$  dans le cas du brassage mécanique, de manière à s'affranchir des variations du niveau moyen de puissance en fonction de la fréquence.

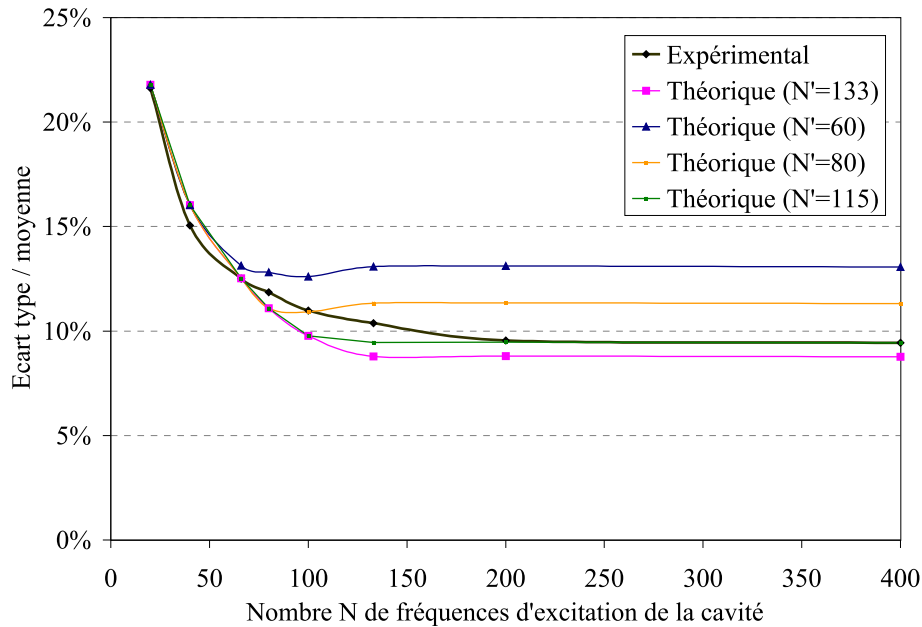
100 fréquences). En terme de précision par rapport à l'évolution théorique de ce ratio prédit par le TCL, cela reste très significatif (5% d'incertitude) puisque l'on exploite, comme dans le cas du brassage fréquentiel (section 7.2), et pour  $N$  positions de brasseur,  $S = 100$  fréquences  $\times$  15 positions d'antenne = 1500 séries.



**FIG. 7.14:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x} / \mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 400$  positions sur un tour complet.

Cette démarche conduit aux résultats de la figure 7.14. Nous observons un écart significatif entre la théorie pour  $N' = 130$  échantillons indépendants parmi  $N = 400$  positions de brasseur, et les résultats expérimentaux. Même si l'on considérait par exemple qu'il n'y a que 110 échantillons indépendants parmi  $N = 400$  positions de brasseur, l'évolution théorique demeure relativement éloignée du résultat expérimental. Ce dernier, pour être conforme au résultat du TCL, montre qu'il n'y aurait que 80 positions de brasseur

réellement indépendantes. On rappelle que le niveau de corrélation des 130 positions de brasseur est très faible (cf. Tab. 6.2), suffisamment *a priori* pour pouvoir considérer que ces positions soient non corrélées. Par extension, nous avons supposé que ces 130 positions décorréées sont indépendantes.

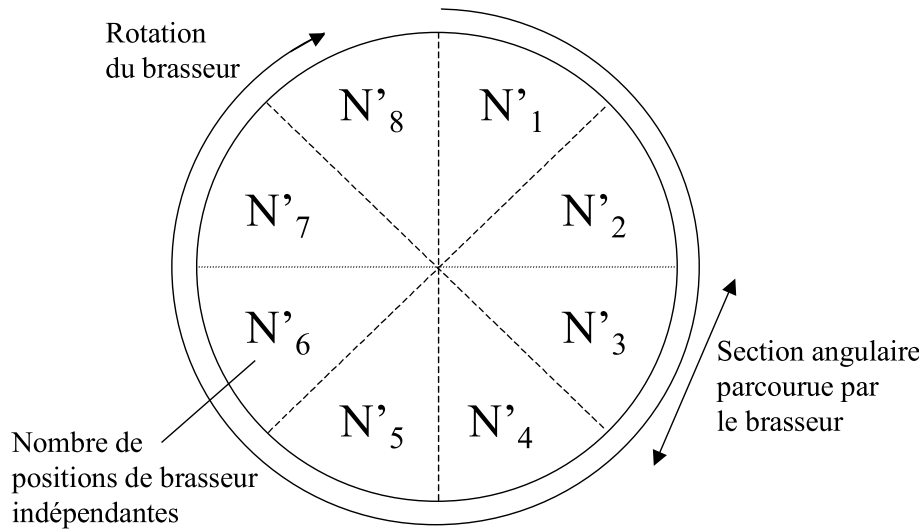


**FIG. 7.15:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage électronique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de fréquences d'excitation indépendantes parmi  $N = 400$  fréquences dans la bande [690 MHz – 710 MHz].

Afin de s'assurer que le traitement particulier des mesures dans le cas du brassage mécanique (cf. Fig. 7.13) n'a pas d'incidence sur le résultat, nous avons transposé le même mode de traitement aux mesures obtenues dans le cas du brassage fréquentiel, déjà étudié en section 7.2. Nous retrouvons en figure 7.15 un résultat cohérent avec celui de la section 7.2, à partir des mêmes mesures, mais exploitées d'une autre manière. Rigoureusement, on constate un écart relatif de 15% entre le nombre  $N'$  permettant l'ajustement de la théorie à l'expérience présenté en section 7.2 ( $N' = 100$ ) et le nombre  $N'$  de cette section ( $N' = 115$ ). Cela étant, l'écart relatif est beaucoup plus important dans le cas du brassage mécanique puisqu'au lieu d'estimer  $N' = 130$  positions indépendantes parmi  $N = 400$ , nous n'en estimons par le TCL que  $N' = 80$ , soit un écart relatif de 38%.

### 7.3.3 Etude pour différentes subdivisions du brasseur

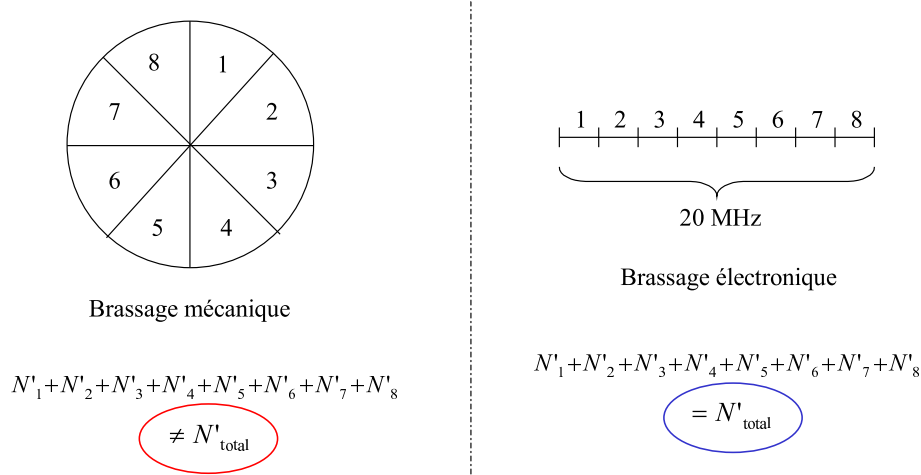
Afin d'approfondir l'étude et tenter d'expliquer pourquoi nous observons un tel écart pour le brassage mécanique contrairement au brassage électronique, nous avons renouvelé la même étude pour une section particulière parcourue par le brasseur. L'idée est de détecter s'il existe une section parcourue par le brasseur qui serait moins efficace en terme d'indépendance des conditions aux limites pour le champ électromagnétique. Dans le cas du brassage mécanique, nous avons divisé la rotation complète en plusieurs sections : deux moitiés, quatre quarts, huit huitièmes (Fig. 7.16). Puis, afin de retrouver le nombre



**FIG. 7.16:** Division de la rotation complète du brasseur en huit sections angulaire  $i$  égales dans lesquelles on estime le nombre  $N'_i$  d'échantillons indépendants en se référant au théorème central limite.

total d'échantillons indépendants disponibles sur une rotation complète, à l'aide du TCL, nous additionnons les  $N'_i$  pour  $i$  allant de 1 à 8. Nous figurons en annexe C les courbes caractéristiques de l'évolution des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux pour chaque section, en subdivisant la rotation complète en deux, en quatre, et en huit sections.

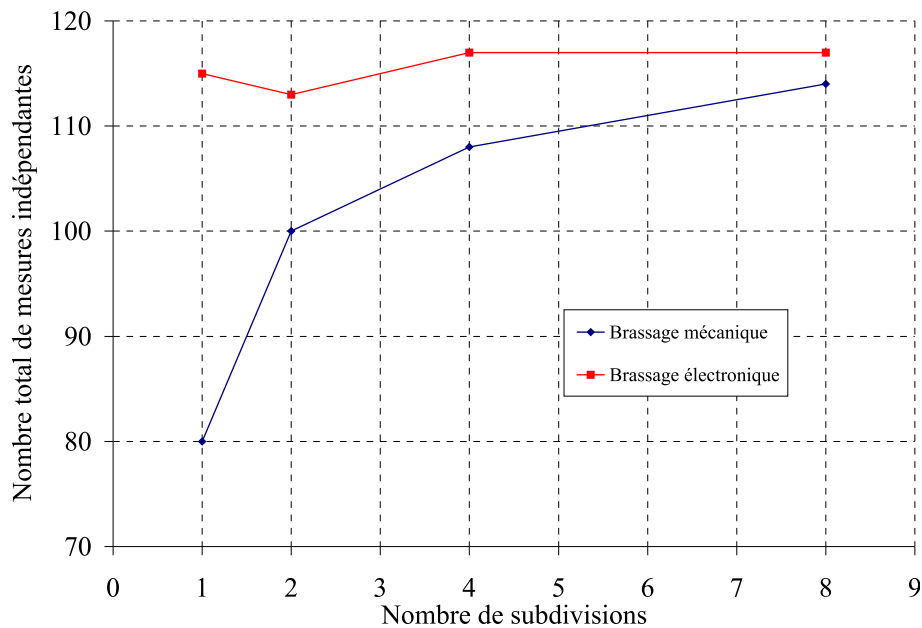
Nous avons procédé de même pour le brassage électronique à partir des mêmes mesures que celles que nous avons exploitées en section 7.2. De manière analogue au brassage mécanique, nous avons subdivisé la bande de fréquence totale [690 MHz – 710 MHz] en plusieurs sous-bandes, comme schématisé en figure 7.17 (cf. annexe D). La figure 7.18 pré-



**FIG. 7.17:** Principe des subdivisions du brassage, de manière à comparer la somme des échantillons indépendants par section avec le nombre total d'échantillons indépendants pour un brassage complet. Nous donnons ici l'exemple de huit subdivisions, sachant que l'on traite aussi en section 7.3.3 les cas de deux et quatre subdivisions.

sente la synthèse de cette analyse. Nous remarquons d'une part que quel que soit le nombre de subdivisions de la bande de fréquence, le nombre total d'échantillons indépendants que

l'on estime par le TCL est stable. D'autre part, dans le cas du brassage mécanique, le nombre total de positions de brasseur indépendantes diffère nettement selon le nombre de subdivisions de la section total ( $360^\circ$ ) parcourue par le brasseur. Par ailleurs, si l'on se réfère aux annexes C et D, on peut constater que le nombre d'échantillons indépendants est réparti de manière homogène entre chaque subdivision. Cela montre donc, en particulier pour le brassage mécanique, qu'il n'existe pas de section couverte par le brasseur qui serait défectueuse en terme de nombre de conditions aux limites indépendantes pour le champ électromagnétique.



**FIG. 7.18:** Estimation du nombre total de mesures indépendantes par le théorème central limite, soit pour le brassage mécanique (sur  $360^\circ$ ), soit pour le brassage électronique (dans la bande [690 MHz – 710 MHz]), pour différentes subdivisions du brassage considéré.

Dans le but de mettre en évidence une quelconque dépendance possible due à la géométrie du brasseur (Fig. 6.1), nous avons renouvelé l'expérience en simplifiant de manière significative notre brasseur de modes. En effet, nous avons retiré cinq pales sur les six, de manière à disposer du brasseur le plus simple qu'il soit. Nous avons conservé la pale la plus haute sur l'axe du brasseur (cf. photo en figure 6.1). Cependant, les résultats indiqués en annexe E montrent qu'il existe toujours un décalage significatif, de l'ordre de 30%, entre le nombre total d'échantillons indépendants déterminés par le TCL sur  $360^\circ$ , et la somme des nombres  $N'_i$  correspondant au nombre d'échantillons indépendants de chaque quartier parcouru par le brasseur de modes.

## 7.4 Conclusions

La vérification expérimentale du résultat donné par le théorème central limite est un moyen pratique de vérifier si l'on peut dans le cas des mesures en CRBM assimiler indépendance et absence de corrélation. Nous avons montré que pour le brassage électronique,

l'incertitude de mesures estimée à partir de la connaissance de la taille effective correspond précisément au niveau d'incertitude donné par le TCL. Par contre, dans le cas du brassage mécanique, nous avons mis en évidence un biais, que nous ne parvenons pas encore à expliquer autrement que par la présence d'une dépendance résiduelle entre différents secteurs parcourus par le brasseur mécanique. Nous espérons poursuivre ces investigations dans le futur.

Il se peut que cette analyse mette en évidence l'insuffisance de la fonction d'autocorrélation pour caractériser l'indépendance d'échantillons au sein d'une série de  $N$  mesures. Néanmoins, nous montrons que dans le cas du brassage fréquentiel, cette mesure de l'indépendance est tout à fait satisfaisante. Le fait que l'on détecte moins d'échantillons indépendants en considérant la section totale parcourue par le brasseur, par rapport au cas où l'on estime  $N'_i$  pour chaque subdivision, tend à montrer qu'il existe une dépendance résiduelle entre les subdivisions. Cependant cette hypothèse reste à démontrer. Nous ne sommes pas parvenus à mettre en évidence cette dépendance, autrement que par cette analyse du nombre de positions de brasseur indépendantes par rapport au résultat donné par le TCL.

Nous avons testé aussi d'autres indicateurs de la corrélation tels que le coefficient de Spearman ou le Tau de Kendall, bien connus en statistique. La corrélation de Spearman est utilisée lorsque deux variables statistiques semblent corrélées sans que la relation entre les deux variables soit de type affine. Quant au Tau de Kendall, il est équivalent au coefficient de Spearman, et les conclusions sont très souvent les mêmes que l'on utilise l'un ou l'autre des indicateurs. Nous avons expérimenté ces deux mesures de la corrélation sans mettre en évidence une quelconque corrélation entre les 130 positions de brasseur *a priori* décorréliées puisque l'ACF est négligeable.

Il existe une différence notable entre le brassage mécanique et le brassage fréquentiel. Pour ce dernier, le fait d'augmenter la fréquence dans une bande étroite revient à augmenter le volume de la cavité puisque la longueur d'onde diminue. L'évolution du "volume électrique" est monotone, et si la bande de fréquence est suffisamment étroite, il est improbable de retrouver les mêmes conditions aux limites que celles engendrées par l'excitation de la cavité à une fréquence inférieure. Dans le cas du brassage mécanique, il est impossible de prévoir l'évolution de ce volume électrique sur une rotation complète du brasseur. L'évolution du volume électrique en fonction de la position du brasseur est faite d'aller-retour et n'est donc pas monotone. Puisqu'il est probable que l'on retrouve des conditions aux limites déjà créées pour une position de brasseur antérieure, il paraît difficile de détecter une dépendance autrement que par la vérification expérimentale du théorème central limite qui nécessite l'indépendance des échantillons. En particulier, le fait que l'on ne puisse pas sommer les différents nombres  $N'_i$  d'échantillons indépendants relatifs à la section  $i$  parcourue par le brasseur, afin de retrouver le nombre total  $N'$  d'échantillons indépendants sur une rotation complète, tend à montrer qu'il n'y a pas parfaite indépendance entre ces différentes subdivisions. Dans le cas du brassage électronique, nous vérifions au contraire que la somme des échantillons indépendants estimés



pour chaque subdivision de la bande correspond bien au nombre total d'échantillons indépendants disponibles dans la bande totale [690 MHz – 710 MHz].

# Troisième partie

## APPLICATIONS



# Chapitre 8

## Analyse du gabarit normatif d'uniformité statistique du champ et proposition d'évolution

Dans ce chapitre, nous proposons une première application des développements théoriques présentés dans les parties **I** et **II**, et validés expérimentalement. Lorsque l'on réalise des essais CEM en chambre réverbérante, une première étape incontournable est de vérifier les propriétés statistiques des mesures à l'aide d'une phase de calibrage. Il s'agit de vérifier tout simplement le bon fonctionnement d'une telle cavité réverbérante, en terme d'homogénéité des mesures. La fréquence minimum à partir de laquelle un champ électromagnétique statistiquement uniforme et isotrope est établi dans le volume utile de la cavité, est généralement déterminée lors d'une procédure de calibrage basée sur des mesures de champ.

Les normes [2, 6] définissent un protocole de calibrage permettant de comparer les résultats expérimentaux à un gabarit théorique. Ce dernier correspond à une limite maximum que l'écart type des relevés de champ maximum ne doit pas dépasser, afin de s'assurer de l'uniformité du champ dans le volume utile de la cavité. Le gabarit des normes est relativement simplifié et apparaît beaucoup trop tolérant par rapport aux lois de distribution réellement observées. En particulier, le critère des 3 dB pourrait être suffisant pour des mesures CEM, mais n'est pas significatif de l'incertitude de mesures en CRBM. En outre, la remontée du gabarit à basse fréquence vers 4 dB [2], voire 6 dB [6] semble difficile à justifier.

Nous proposons ici une analyse plus fine de la forme du gabarit que l'on peut espérer obtenir en chambre réverbérante compte tenu des propriétés réelles d'une telle cavité. Nous rappelons d'abord les spécificités des procédures de calibrage employées usuellement en aéronautique et en automobile, afin d'en déduire le niveau d'incertitude auquel l'utilisateur doit s'attendre sur les relevés de maximum de champ. Puis, en tenant compte des propriétés réelles des mesures en CRBM, nous ferons évoluer progressivement le gabarit, de manière didactique, afin de le rendre de plus en plus réaliste.

## 8.1 Protocole de calibrage d'une chambre réverbérante

Il ne s'agit pas ici de détailler les protocoles de calibrage couramment utilisés pour déterminer la fréquence minimale d'utilisation d'une chambre réverbérante. Le lecteur trouvera dans les normes [2, 6] les détails nécessaires à l'application de ce type de protocole. Cependant, nous rappelons le principe, en nous basant sur le protocole décrit dans la norme CEI 61000-4-21 [2].

A partir de 80 MHz, et par pas fréquentiel géométrique de 5% jusqu'à 2 GHz, nous relevons les trois composantes cartésiennes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique à l'aide d'une petite sonde isotropique (Hi6005, cf. Fig. 2.8). Huit positions de sonde sont considérées et correspondent aux extrémités du volume utile parallélépipédique (cf. Fig. 2.6). De plus, pour chaque fréquence et pour chaque position de sonde, nous mesurons le champ électrique pour  $N$  positions de brasseur réparties de manière homogène sur un tour complet (Tab. 8.1). Par fréquence et position de sonde, nous retenons la valeur maximum  $E_{\max,x}$ ,

Bande de fréquence (MHz)	Nombre $N$ de pas de brasseur
80 - 600	50
600 - 1200	18
1200 - 2000	12

**TAB. 8.1:** Nombre  $N$  de pas de brasseur en fonction de la bande de fréquence considérée.

$E_{\max,y}$  et  $E_{\max,z}$  respectivement parmi les mesures  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sur les  $N$  positions du brasseur. Nous désignons par  $E_R$  la mesure d'une composante rectangulaire de champ, et par  $E_{\max,R}$  la valeur maximum mesurée pour une fréquence et une position de sonde particulière, parmi les  $N$  mesures de  $E_R$ . Nous nous intéressons par la suite à la valeur maximum  $E_{\max,R}$  normalisée à la racine carré de la puissance moyenne injectée  $P_{in}$  sur un tour complet de brasseur, que nous notons  $\tilde{E}_R$  :

$$\tilde{E}_R = \frac{E_{\max,R}}{\sqrt{P_{in}}}. \quad (8.1)$$

Pour chaque fréquence, la mesure de l'uniformité du champ est l'écart type défini comme suit, en dB, pour une composante cartésienne de champ, où  $\tilde{E}_R = \tilde{E}_x$  ou  $\tilde{E}_y$  ou  $\tilde{E}_z$  :

$$\sigma_{8,\text{dB}} = 20 \log \left( \frac{\sigma_{8,R} + \langle \tilde{E}_R \rangle_8}{\langle \tilde{E}_R \rangle_8} \right), \quad (8.2)$$

où la notation  $\langle \cdot \rangle_8$  désigne la moyenne sur les 8 positions de sonde, et le paramètre  $\sigma_{8,R}$  est l'écart type des 8 maximums retenus (8.1) pour une composante cartésienne de champ électrique. Nous considérons aussi une mesure de l'uniformité du champ pour l'ensemble des trois composantes cartésiennes, que l'on désigne par  $\sigma_{24,\text{dB}}$ , et définie dans [2] de la

même manière que  $\sigma_{8,dB}$  par l'expression suivante :

$$\sigma_{24,dB} = 20 \log \left( \frac{\sigma_{24,R} + \langle \tilde{E}_R \rangle_{24}}{\langle \tilde{E}_R \rangle_{24}} \right), \quad (8.3)$$

où  $\tilde{E}_R = \{\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z\}$  et  $\sigma_{24,R}$  désigne l'écart type des 24 maximums retenus (8 par composante cartésienne de champ).

## 8.2 Distribution de $\sigma_{dB}$

### 8.2.1 Méthode d'évaluation de la distribution de $\sigma_{dB}$

Nous pouvons définir un gabarit adapté au protocole de calibrage en tenant compte des lois de distribution des composantes cartésiennes de champ. Dans un premier temps, nous nous baserons sur la loi de distribution du champ ( $E_R$ ) dans le cas d'une cavité idéale (Rayleigh, cf. section 1.1.3), pour affiner ensuite le gabarit à l'aide de la loi de distribution réellement observée (Weibull, cf. chapitre 3).

De manière à déterminer un intervalle de confiance de l'estimation du paramètre  $\sigma_{dB}$  des relations (8.2) et (8.3), nous utilisons une approche stochastique du type Monte-Carlo en simulant numériquement un très grand nombre de scénarii de protocoles de calibrage. Nous reproduisons le protocole exposé en section 8.1. Dès lors, dans la simulation numérique, nous considérons une mesure de  $E_R$  comme une variable aléatoire distribuée selon une loi de Rayleigh (cas idéal) ou une loi de Weibull (cas réel). Pour une position de sonde, l'estimation d'un maximum est réalisée à l'aide d'un nombre fini  $N$  de positions de brasseur. Dans notre simulation, cela revient à estimer un maximum parmi  $N$  tirages de la v.a.  $E_R$ . Puisque l'estimation de la mesure  $\sigma_{dB}$  de l'uniformité du champ se fait à partir de 8 positions de sonde, nous reproduisons numériquement huit fois l'estimation d'un maximum parmi  $N$  tirages de la v.a.  $E_R$ . Nous obtenons ainsi une estimation de  $\sigma_{8,dB}$ . Pour l'évaluation de  $\sigma_{24,dB}$ , nous effectuons 24 estimations du maximum parmi  $N$  tirages de la v.a.  $E_R$ . Ceci constitue un scénario. Afin d'aboutir à la distribution des paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$  par une approche stochastique, nous simulons de la même manière 10 000 scénarios.

A partir de la distribution des paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ , nous avons accès aux quantiles à 2,5% et 97,5% (cf. section 5.1.1). Ces quantiles permettent de définir un intervalle de confiance à 95% de l'estimateur empirique de chacun de ces paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ . Puisque cet intervalle de confiance ne repose que sur les lois de distribution de la v.a.  $E_R$  et sur l'indépendance des mesures de  $E_R$ , cette approche stochastique permet d'avoir accès à un intervalle de confiance cohérent avec le protocole expérimental de calibrage en CRBM.

### 8.2.2 Distribution de $\sigma_{dB}$ pour une cavité idéale

Nous supposons dans cette section que nous disposons d'une cavité idéale, donc que les mesures d'une composante cartésienne de champ  $E_R$  sont distribuées selon une loi de Rayleigh (section 1.1.3). La simulation numérique exposée précédemment permet de déterminer, en fonction du nombre  $N$  de positions de brasseur, l'évolution de l'espérance de  $\sigma_{8,dB}$  ainsi que des quantiles à 2,5% et 97,5% (Fig. 8.1). Il apparaît d'une part que

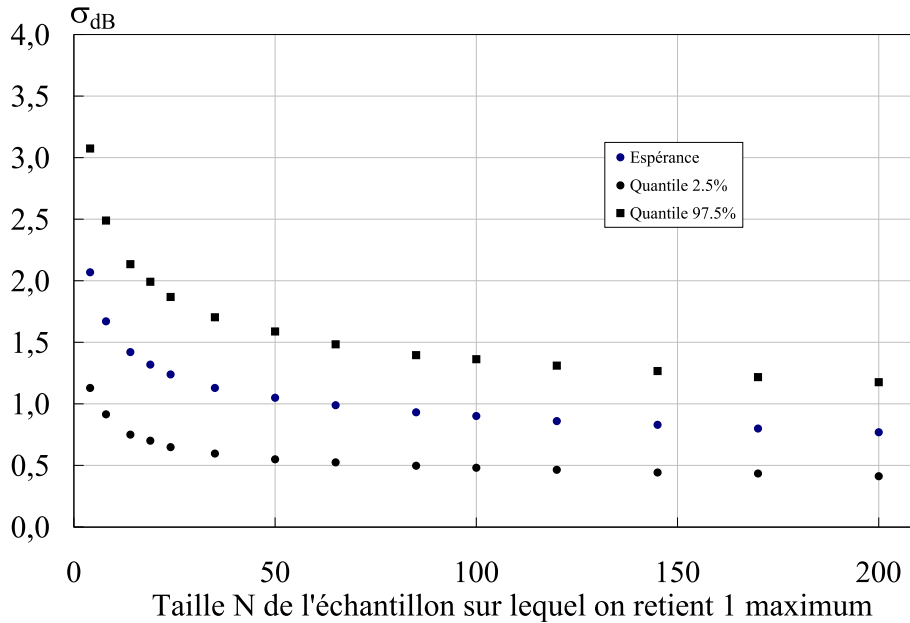


FIG. 8.1: Intervalle de confiance à 95% de  $\sigma_{8,dB}$  obtenu par simulation numérique. La distribution sous-jacente des  $N$  tirages de  $E_R$  est la loi de Rayleigh.

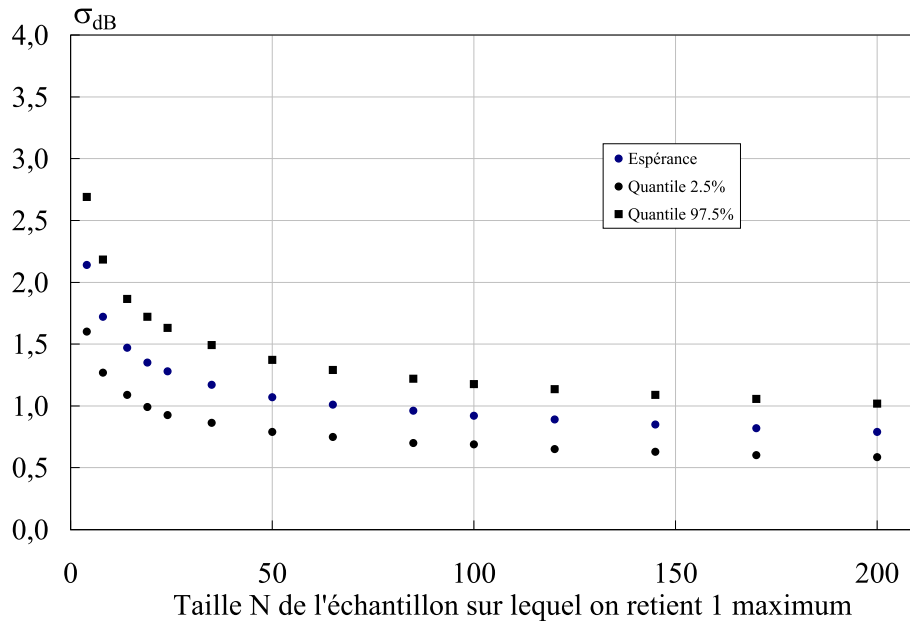


FIG. 8.2: Intervalle de confiance à 95% de  $\sigma_{24,dB}$  obtenu par simulation numérique. La distribution sous-jacente des  $N$  tirages de  $E_R$  est la loi de Rayleigh.

l'intervalle de confiance de  $\sigma_{8,dB}$  est bien fonction du nombre de positions de brasseur,

parmi lesquelles on retient une valeur maximale  $\tilde{E}_R$ . En particulier, plus  $N$  augmente et moins on a d'incertitude sur l'estimation de  $\sigma_{8,dB}$ . En outre, au-delà de 25 positions de brasseur, il est très peu probable (2,5% de risque), que  $\sigma_{8,dB}$  dépasse le niveau des 2 dB. Le quantile à 97,5 % se situe donc relativement loin des 3 dB du gabarit des normes [2, 6]. Remarquons aussi que dès 100 positions de brasseur l'espérance de  $\sigma_{8,dB}$  atteint 1 dB et le risque est très faible que l'on dépasse 1,5 dB.

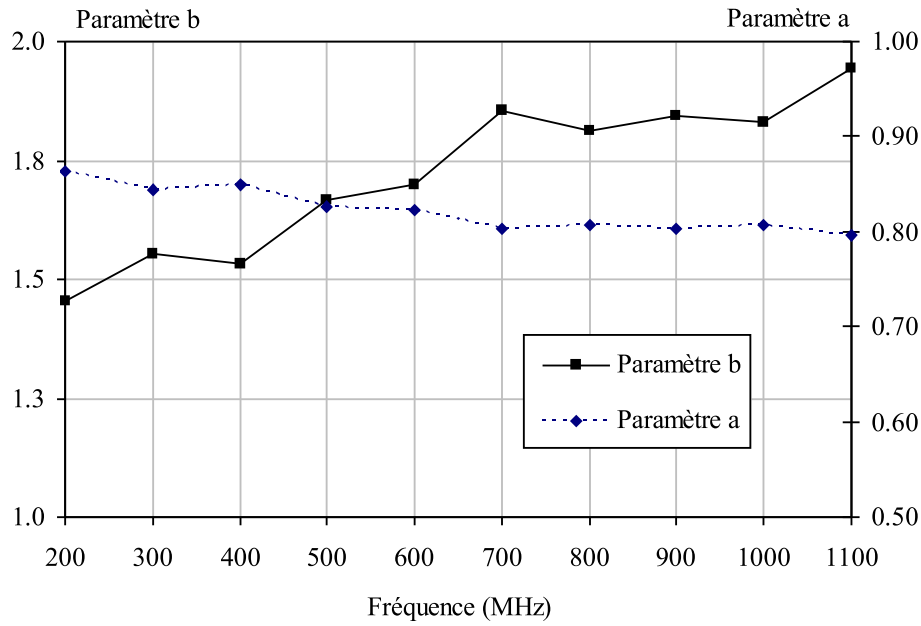
Par ailleurs, le nombre de maximums retenus pour l'estimation de  $\sigma_{dB}$  a une incidence sur l'intervalle de confiance, comme nous pouvons l'observer par comparaison des figures 8.1 et 8.2. Précisément, plus on dispose d'estimateurs du maximum et plus l'intervalle de confiance est restreint, et en particulier plus le quantile à 97,5% est faible. Par conséquent, pour être cohérent dans l'estimation de la fréquence minimale à partir de laquelle on estime l'uniformité du champ, on ne devrait pas utiliser le même gabarit pour  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ . Or les normes [2, 6] imposent le même gabarit que l'on raisonne sur  $\sigma_{8,dB}$  ou  $\sigma_{24,dB}$ .

### 8.2.3 Distribution de $\sigma_{dB}$ pour une cavité réelle

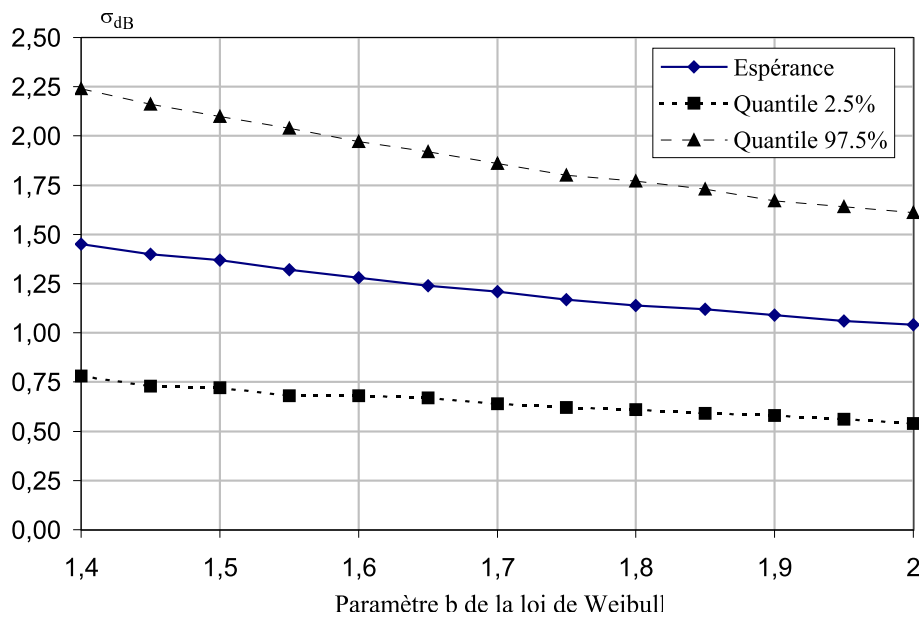
Comme nous l'avons longuement décrit en partie I, bien que les mesures de puissance en réception d'une grande antenne soient distribuées conformément au modèle de cavité idéale, ce n'est pas le cas des mesures de champ relevées à l'aide de la sonde isotropique. Nous renvoyons le lecteur à la figure 3.10 qui présente le taux de rejet au test de Kolmogorov-Smirnov d'ajustement de la distribution expérimentale des mesures à la loi de Rayleigh.

De la même manière que pour la distribution de Rayleigh, nous pouvons par une approche stochastique, et pour une cavité réelle, déterminer les quantiles à 2,5% et 97,5% des paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$  en fonction de  $N$ . La fonction de densité de probabilité de Rayleigh s'écrit en fonction d'un seul paramètre  $\theta$  (section 1.1.3) dont ne dépend pas la mesure  $\sigma_{dB}$  de l'uniformité du champ. Dans le cas de la distribution de Weibull, la densité de probabilité s'écrit en fonction de deux paramètres  $a$  et  $b$  (section 3.1.1). Le paramètre  $a$  est lié à la puissance moyenne injectée dans la cavité et joue le même rôle que le paramètre  $\theta$  de la distribution de Rayleigh. On peut montrer que  $\sigma_{dB}$  ne dépend que du paramètre  $b$  de la distribution de Weibull (cf. relation (3.5)). Par conséquent, pour déterminer les quantiles du gabarit en prenant en compte la distribution réelle des mesures de  $E_R$ , il faut déterminer au préalable l'évolution du paramètre  $b$ , en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité (Fig. 8.3, à relier avec la figure 3.8 du chapitre 3). Le couple  $(a, b)$  est obtenu par résolution des équations de vraisemblance (3.26). Sur la figure 8.3, nous remarquons que le paramètre  $b$  est beaucoup plus sensible à la fréquence d'excitation que le paramètre  $a$ . Plus la fréquence augmente, et plus le couple  $(a, b)$  se rapproche du couple  $(\pi/4, 2)$ . Ce dernier est caractéristique de la loi de Rayleigh, cas particulier de la loi de Weibull dans le cas de mesures normalisées au préalable par leur valeur moyenne, ce qui ne modifie nullement l'évaluation de  $\sigma_{dB}$ .





**FIG. 8.3:** Evolution du couple  $(a, b)$  de la loi de Weibull correspondant à la distribution des mesures de  $E_R$ , en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité.



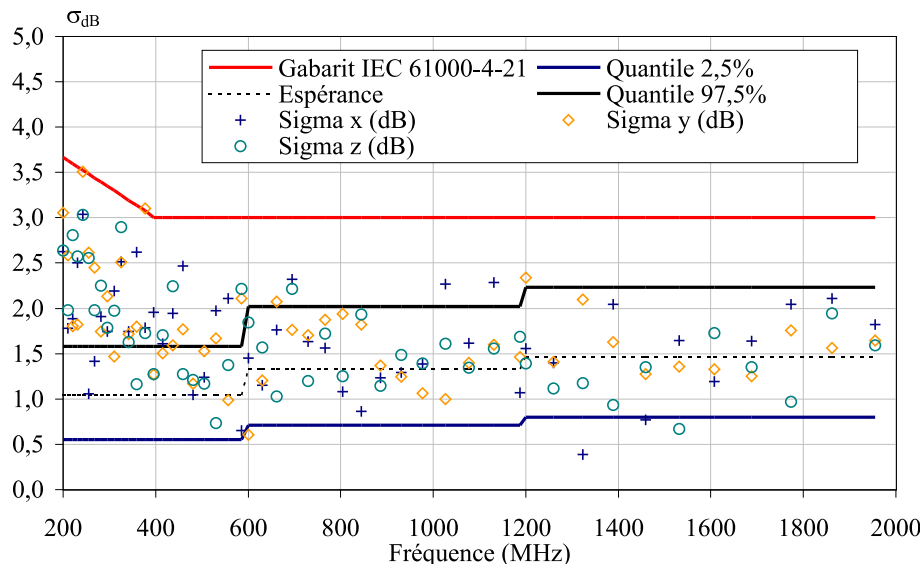
**FIG. 8.4:** Evolution de  $\sigma_{8,dB}$  en fonction du paramètre  $b$  de la loi de Weibull ( $a = \pi/4$ ). Chacune des 8 estimations du maximum est réalisée pour  $N = 50$  tirages de la v.a.  $E_R$ .

La figure 8.4 montre un exemple d'évolution de  $\sigma_{8,dB}$  en fonction du paramètre  $b$  de la loi de Weibull, donc en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité dans la bande [200 MHz; 1100 MHz] (cf. Fig. 8.3). L'espérance ainsi que les quantiles de  $\sigma_{8,dB}$  sont obtenus numériquement par une approche stochastique à l'aide de 10 000 scénarios. Chaque scénario conduisant à une valeur de  $\sigma_{8,dB}$  correspond à l'estimation de 8 maximums, chaque maximum étant évalué parmi  $N = 50$  tirages de la v.a.  $E_R$  distribuée selon la loi de Weibull ( $a = \pi/4, b$ ). Là encore, nous constatons que le quantile à 97,5% devient rapidement inférieur à 2 dB.

## 8.3 Evolution progressive du gabarit

### 8.3.1 Prise en compte des lois de distribution des mesures pour une cavité idéale

Dans cette partie, nous utilisons les résultats de la section 8.2.2 donnant accès à l'intervalle de confiance défini par les quantiles à 2,5% et 97,5%, des paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ , en supposant que les mesures de  $E_R$  sont distribuées selon une loi de Rayleigh. Au lieu du simple gabarit normatif, sans lien particulier avec les propriétés statistiques des mesures en CRBM, nous proposons un nouveau type de gabarit. Ce dernier est constitué par les quantiles à 2,5% et 97,5%. Tant que l'estimation empirique de  $\sigma_{8,dB}$  (ou  $\sigma_{24,dB}$ ) ne rentre pas dans cet intervalle de confiance, nous devons considérer que les lois de distribution de  $E_R$  ne sont pas établies dans le volume utile de la cavité. Les résultats sont présentés en figure 8.5 pour  $\sigma_{8,dB}$  et en figure 8.6 pour  $\sigma_{24,dB}$ .



**FIG. 8.5:** Comparaison de  $\sigma_{8,dB}$  à un gabarit tenant compte de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité idéale (Rayleigh). Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge et montre une très grande tolérance par rapport au résultat expérimental. Par contre, le gabarit indiqué par les quantiles apparaît déjà plus proche de l'expérience, bien que nous ne considérons pas les lois de distribution réelles de la mesure de  $E_R$  (Weibull). Etant plus restrictif, l'intervalle de confiance à 95% indique que la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM se situe beaucoup plus loin que celle préconisée par le gabarit normatif. Précisons que les sauts de l'intervalle de confiance aux fréquences 600 MHz et 1200 MHz sont liés au changement du nombre de pas de brasseur considéré sur un tour complet (cf. Tab. 8.1).

Nous remarquons en particulier qu'à basse fréquence les valeurs empiriques de  $\sigma_{8,dB}$  sont majoritairement supérieures au quantile à 97,5%. Par contre, si on réalise exactement la même étude pour des relevés de puissance à l'aide d'une grande antenne log-périodique (cf. Fig. 2.7), au lieu de mesures de champ à l'aide d'une petite sonde (cf. 2.8), le nouveau

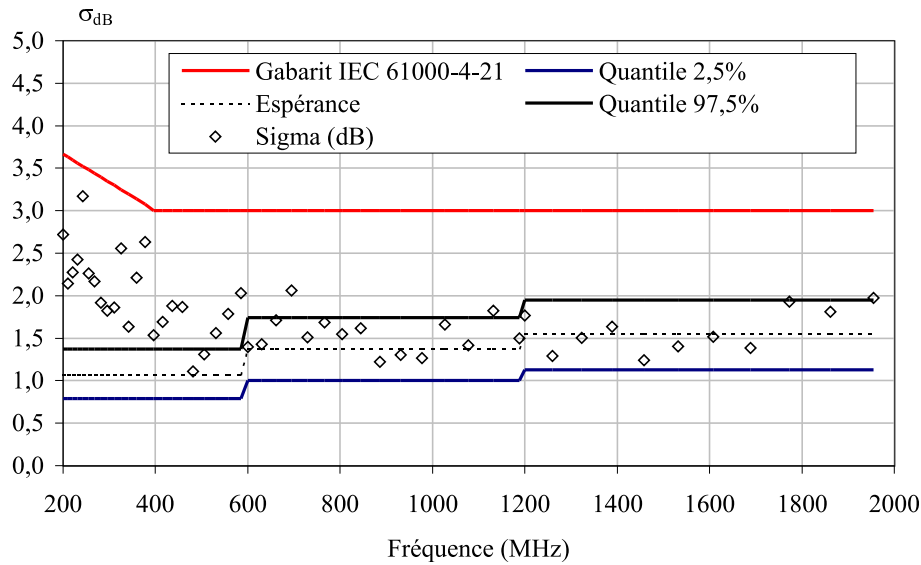


FIG. 8.6: Comparaison de  $\sigma_{24,dB}$  à un gabarit tenant compte de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité idéale (Rayleigh). Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

gabarit est respecté bien plus tôt en fréquence (Fig. 8.7). La différence de comportement à

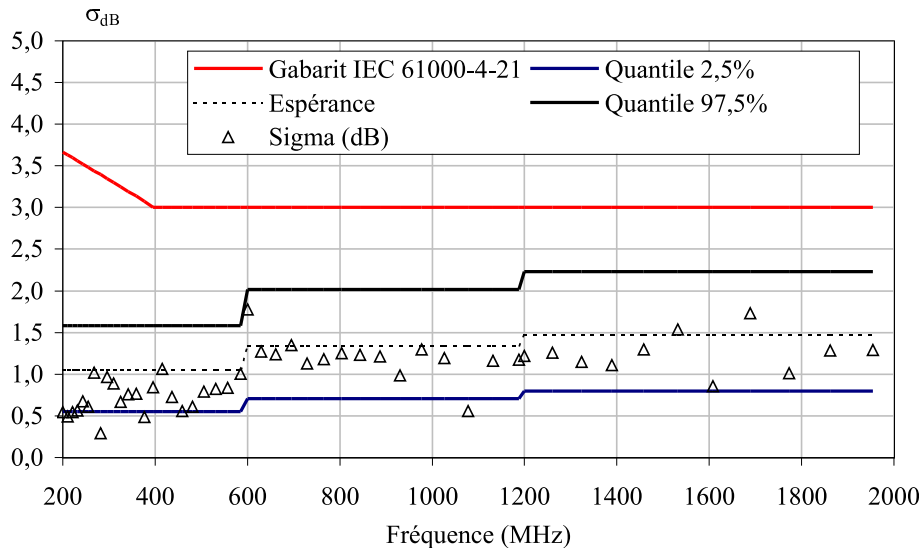


FIG. 8.7: Comparaison de  $\sigma_{8,dB}$  à un gabarit tenant compte de la loi de distribution de la puissance pour une cavité idéale (exponentielle). Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

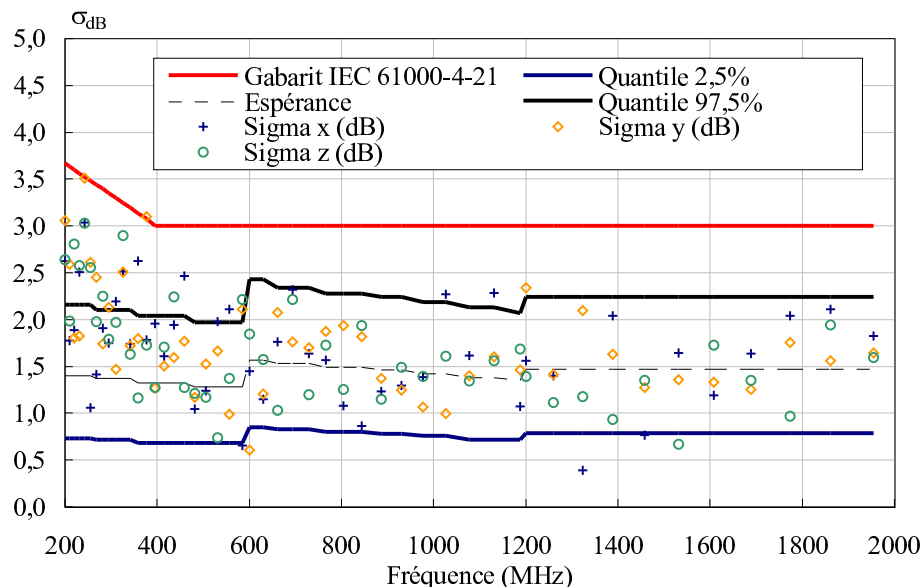
basse fréquence entre les mesures de champ et de puissance est conforme aux distinctions relevées dans la partie I. Dans le cas de mesures de  $E_R$ , la loi de Rayleigh est massivement rejetée à basse fréquence, tandis qu'elle est conforme à la distribution des mesures de la racine de la puissance au-delà de la  $LUF$ , estimée à environ 260 MHz si l'on considère 6 fois la première fréquence de résonance de la cavité (Fig. 3.10).

Le calibrage d'une CRBM se base sur le comportement des mesures de champ. Les figures 8.5 et 8.6 indiquent qu'à basse fréquence, la cavité n'a pas un fonctionnement de cavité sur-dimensionnée correspondant au modèle idéal de Hill, puisque le gabarit que

nous proposons est très souvent dépassé. Selon le gabarit retenu, la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM peut être très différente : environ 200 MHz selon les normes [2, 6], et au-delà de 600 MHz selon le nouveau gabarit ajusté en fonction du modèle idéal. Cependant, si l'on se base sur le calibrage en puissance en réception d'une antenne log-périodique de grande dimension, on peut considérer que les mesures sont cohérentes avec l'intervalle de confiance à partir d'environ 300 MHz. La loi de Rayleigh étant insuffisante pour modéliser la distribution des mesures de champ (cf. Fig. 3.10), nous proposons dans la section suivante un gabarit mieux adapté aux mesures de champ, puisqu'il tient compte de la distribution expérimentale réellement observée.

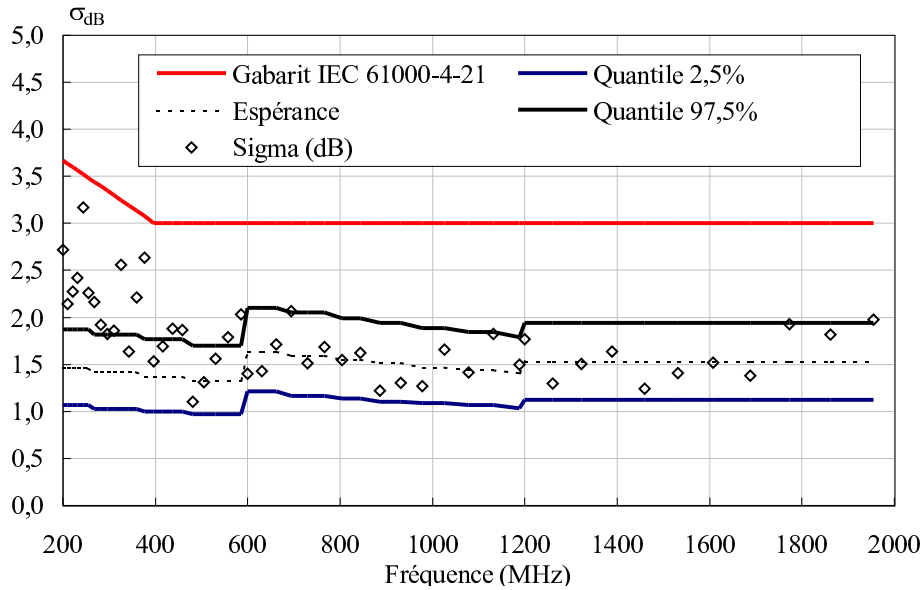
### 8.3.2 Prise en compte de la loi de Weibull

Nous avons montré en Fig. 3.10 (cf. chapitre 3) que la distribution de Weibull à 2 paramètres ( $a, b$ ) s'ajuste bien mieux que la loi de Rayleigh à la distribution empirique de  $E_R$ . Il apparaît donc plus juste de constituer un intervalle de confiance à 95% de  $\sigma_{dB}$  par une approche stochastique basée sur des tirages aléatoires de  $N$  valeurs distribuées selon la loi de Weibull de paramètres  $a$  et  $b$  (au lieu de Rayleigh) estimés expérimentalement. Pour cela, nous utilisons les résultats de la section 8.2.3, donnant accès à la distribution de  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ , et par conséquent aux quantiles à 2,5% et 97,5%, en considérant  $E_R$  comme une v.a. distribuée selon une loi de Weibull. On rappelle que les paramètres ( $a, b$ ) sont évalués empiriquement au préalable par la méthode du maximum de vraisemblance (cf. section 8.2.3).



**FIG. 8.8:** Comparaison de  $\sigma_{8,dB}$  à un gabarit tenant compte de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité réelle (Weibull). Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

Les figures 8.8 et 8.9 permettent de comparer la distribution expérimentale de  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$  respectivement, à l'intervalle de confiance à 95% déterminé par l'approche stochastique. A partir de 1200 MHz, les figures 3.10 et 8.3 montrent que l'on peut considérer que



**FIG. 8.9:** Comparaison de  $\sigma_{24,dB}$  à un gabarit tenant compte de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité réelle (Weibull). Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

la distribution des mesures de  $E_R$  suit une loi de Rayleigh, d'où la valeur constante des quantiles au-delà de 1200 MHz. La conséquence de la prise en compte de la distribution de Weibull intervient en-dessous de 1200 MHz, puisque le paramètre  $b$  n'est pas identifiable à celui de la loi de Rayleigh. Cette démarche permet de mieux prendre en compte la distribution réelle des mesures de  $E_R$ . Par ailleurs, cette situation est plus favorable que la prise en compte de la loi de Rayleigh pour  $E_R$ , pour faire baisser la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM. Ainsi, nous pouvons considérer qu'à partir de 400 MHz (au lieu de 600 MHz en figure 8.5), la CRBM a un comportement conforme au nouveau gabarit ainsi proposé.

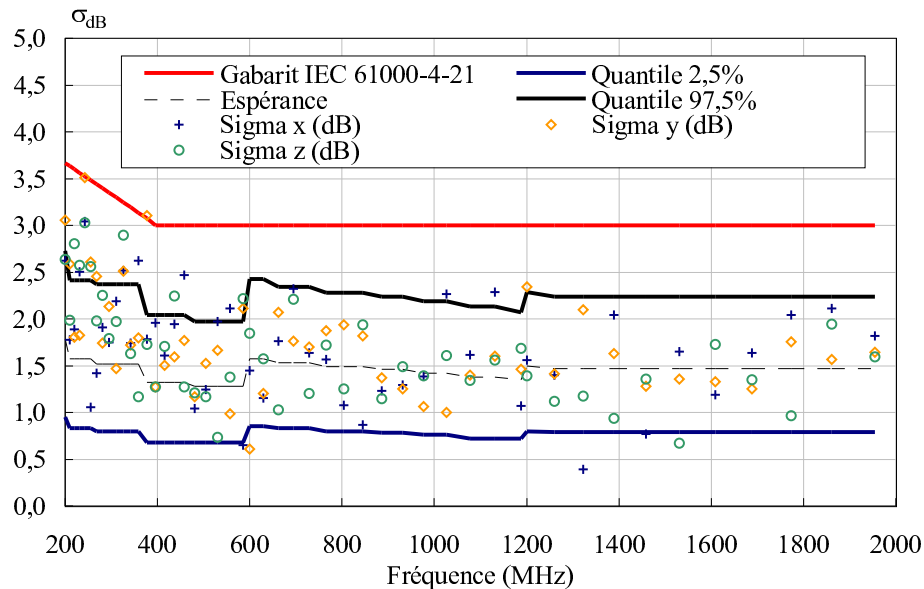
Dans la section suivante, nous affinons ce nouveau gabarit en considérant le nombre réel de positions de brasseur indépendantes parmi les  $N$  positions utilisées. Cet ajustement intervient à très basse fréquence.

### 8.3.3 Correction à basse fréquence compte tenu du faible nombre d'échantillons indépendants

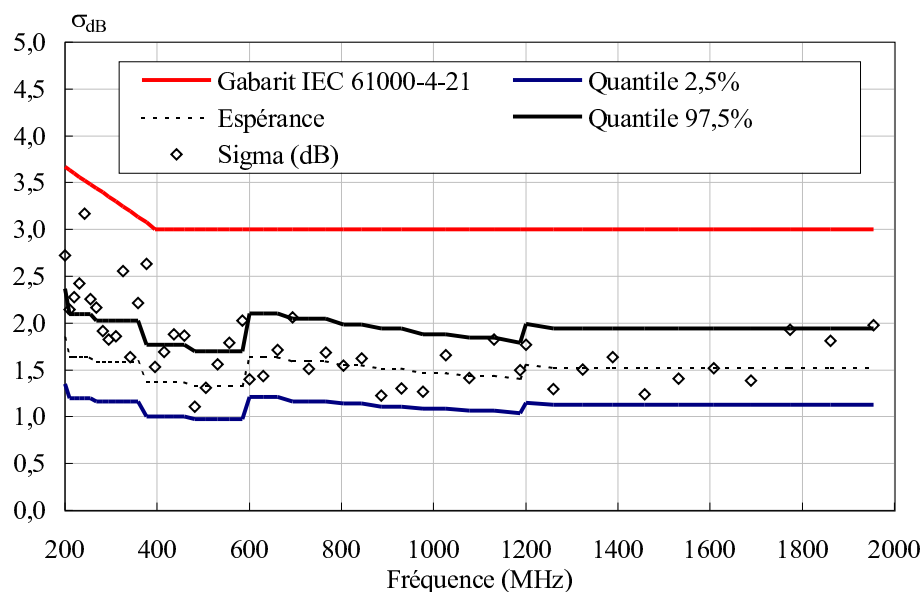
Bien que 50 positions de brasseur soient préconisées à basse fréquence (cf. Tab. 8.1), il n'est pas certain que l'on dispose d'un tel nombre de positions indépendantes en particulier autour de la  $LUF$ . Le nombre de positions de brasseur indépendantes disponibles sur un tour complet croît avec la fréquence. Dès lors, il peut paraître curieux de constater que les normes [2, 6] autorisent l'emploi d'un nombre moins élevé d'échantillons lorsque la fréquence augmente. Il est vrai néanmoins que l'objectif de la phase de calibrage est de déterminer la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM, de manière à s'assurer d'une certaine uniformité du champ. Donc on privilégie la collecte d'un plus grand nombre d'échantillons à basse fréquence. Mais c'est aussi pourquoi en particulier une attention

minutieuse doit être portée quant à la vérification de l'indépendance des mesures collectées à l'aide de la rotation du brasseur.

Nous montrons en figure 6.3, à l'aide des modèles autorégressifs (cf. chapitre 6), que nous disposons non pas de 50, mais de 30 positions de brasseur indépendantes dans la bande de fréquence [200 MHz; 350 MHz]. Par conséquent, pour la détermination des quan-



**FIG. 8.10:** Comparaison de  $\sigma_{8,dB}$  à un gabarit tenant compte d'une part de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité réelle (Weibull) et d'autre part du nombre de positions de brasseur réellement indépendantes à basse fréquence. Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.



**FIG. 8.11:** Comparaison de  $\sigma_{24,dB}$  à un gabarit tenant compte d'une part de la loi de distribution de  $E_R$  pour une cavité réelle (Weibull) et d'autre part du nombre de positions de brasseur réellement indépendantes à basse fréquence. Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

tiles à 2,5% et 97,5% du paramètre  $\sigma_{dB}$ , dans la bande [200 MHz; 350 MHz], il est plus juste

de considérer un nombre  $N' = 30$  positions de brasseur et non  $N = 50$ . Cela a pour conséquence d'élargir l'intervalle de confiance des paramètres  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ . Mais surtout, cette démarche correspond mieux aux propriétés de la cavité dans la bande [200 MHz; 350 MHz].

Si l'on tient compte du nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes au lieu de  $N = 50$  en-dessous de 350 MHz, nous obtenons un nouvel intervalle de confiance, présenté en figures 8.10 et 8.11, respectivement pour  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$ . La valeur du quantile à 97,5% augmente dans la bande [200 MHz; 350 MHz] par rapport à la situation des figures 8.8 et 8.9. Cependant, nous observons que ce nouveau gabarit, bien que mieux respecté à basse fréquence, n'a pas pour conséquence d'abaisser la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM. Cela étant, il s'agit de l'intervalle de confiance le plus proche possible des caractéristiques réelles d'une CRBM que nous pouvons proposer. En effet, nous intégrons dans ce nouveau type de gabarit, les éléments suivants qui n'étaient auparavant pas pris en considération dans le gabarit normatif :

- les lois de distribution des mesures d'une cavité réelle en fonction de la fréquence d'excitation de la cavité,
- le nombre  $N$  de positions de brasseur indépendantes,
- le nombre de maximums retenus pour évaluer empiriquement la mesure  $\sigma_{dB}$  de l'uniformité du champ dans le volume utile de la cavité.

### 8.3.4 Tolérance du gabarit

Le choix de la tolérance en terme de dépassement du nouveau gabarit ainsi proposé, reste à définir afin de déterminer la fréquence minimale d'utilisation de la CRBM. En particulier pour combien d'estimations de  $\sigma_{dB}$ , *i.e.* pour combien de fréquences, pouvons-nous accepter que l'estimateur de  $\sigma_{dB}$  sorte de l'intervalle de confiance prédéfini ? De plus, nous avons fait le choix de définir l'intervalle de confiance par les quantiles à 2,5% et 97,5% de manière à prendre un risque relativement faible de 5% qu'une estimation de  $\sigma_{dB}$  sorte de cet intervalle bien que les lois de distribution soient respectées. Néanmoins, cet intervalle de confiance peut être encore moins restrictif en prenant en compte par exemple les quantiles à 0,5% et 99,5% de manière à définir un intervalle de confiance à 99%, soit un niveau de risque de seulement 1%.

Par ailleurs, cette analyse à partir de l'estimation de grandeurs maximums mesurées sur un tour de brasseur, tend à montrer que la fréquence minimale d'utilisation est relativement élevée. En particulier, bien que la loi de Weibull soit conforme à la distribution des mesures de  $E_R$  dès 300 MHz (cf. Fig. 3.4), à l'aide d'un intervalle de confiance adapté nous ne parvenons pas à définir une fréquence minimale en-dessous de 400 MHz. Cela provient peut-être du fait qu'il est plus difficile en CRBM de raisonner sur des grandeurs maximums que sur des grandeurs moyennes, comme nous l'avons déjà mis en évidence en section 7.2.3. D'une part, l'estimation d'un maximum se fait avec une plus grande incertitude que la moyenne. La détermination des paramètres d'une loi de distribution est réalisée expérimentalement à l'aide d'une moyenne sur l'ensemble des expériences que

nous réalisons (par exemple à partir de 10 séries de 150 mesures, cf. Fig. 3.8). Nous disposons d'un plus grand nombre de séries de mesures pour estimer ces paramètres que pour évaluer un maximum à l'aide de seulement 8 positions de sonde. Cela laisse penser qu'il vaut mieux se fier aux tests d'ajustement (Fig. 3.4) qu'aux estimations de  $\sigma_{dB}$ . D'autre part, les lois de distributions théoriques sont à valeurs dans  $[0; +\infty[$ . Or des mesures extrêmement élevées sont improbables en pratique. Un biais existe donc dans l'approche stochastique que nous avons appliquée pour déterminer l'intervalle de confiance de  $\sigma_{dB}$ , puisque nous intégrons dans notre simulation Monte-Carlo la loi de distribution théorique (Rayleigh, Weibull) à valeurs dans  $[0; +\infty[$ .

## 8.4 Préconisations

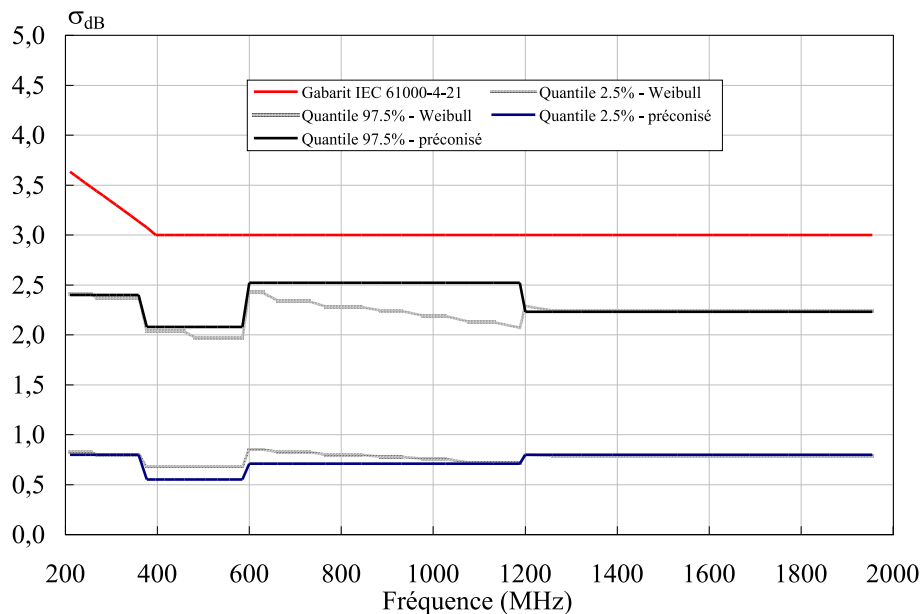
Compte tenu des résultats présentés dans ce chapitre, nous sommes en mesure de formuler une proposition d'évolution normative. D'une part, nous avons montré la nécessité de tenir compte de la loi de distribution des mesures dans la construction du gabarit, qui se présenterait sous la forme d'un intervalle de confiance. Dans une optique d'utilisation industrielle, il paraît plus simple et efficace de considérer les lois de distribution du modèle idéal plutôt que de raisonner sur la loi de Weibull, plus complexe à paramétrer car cela nécessite au préalable de réaliser des tests d'ajustement. Dès lors, à défaut de tenir compte de la distribution réelle des mesures, un moyen simple de minimiser le biais entre les lois théorique et expérimentale serait d'introduire une marge supplémentaire sur le gabarit qui élargirait suffisamment l'intervalle de confiance. En comparant les figures 8.1 et 8.8 relatives respectivement à la loi idéale et à la loi de Weibull des mesures de  $E_R$ , nous notons qu'à 600 MHz le quantile à 97,5% diffère d'environ 0,5 dB (de même à 200 MHz). Par contre, le quantile à 2,5% n'est que faiblement modifié, nous pourrions donc conserver la valeur de ce quantile correspondant à la loi idéale (Rayleigh). Par ailleurs, les gabarits pour  $\sigma_{8,dB}$  et  $\sigma_{24,dB}$  doivent être distincts puisque dans l'un et l'autre cas on ne tient pas compte du même nombre de maximums sélectionnés à chaque fréquence pour déterminer le paramètre  $\sigma_{dB}$ . D'autre part, il paraît indispensable de tenir compte du nombre  $N$  de positions de brasseur, comme cela était déjà le cas, mais en tenant compte du nombre de positions **indépendantes** et de la loi de distribution des mesures, que l'on assimile au modèle idéal.

Par conséquent, si l'on retient de prendre en compte :

- la distribution de Rayleigh,
- le nombre  $N$  de positions de brasseur indépendantes,
- le nombre de maximums sélectionnés afin de déterminer  $\sigma_{dB}$ ,
- ainsi que la marge de 0,5 dB sur la valeur du quantile à 97,5% tant que la loi de Rayleigh n'est pas satisfaisante *i.e.* jusqu'à 1200 MHz,

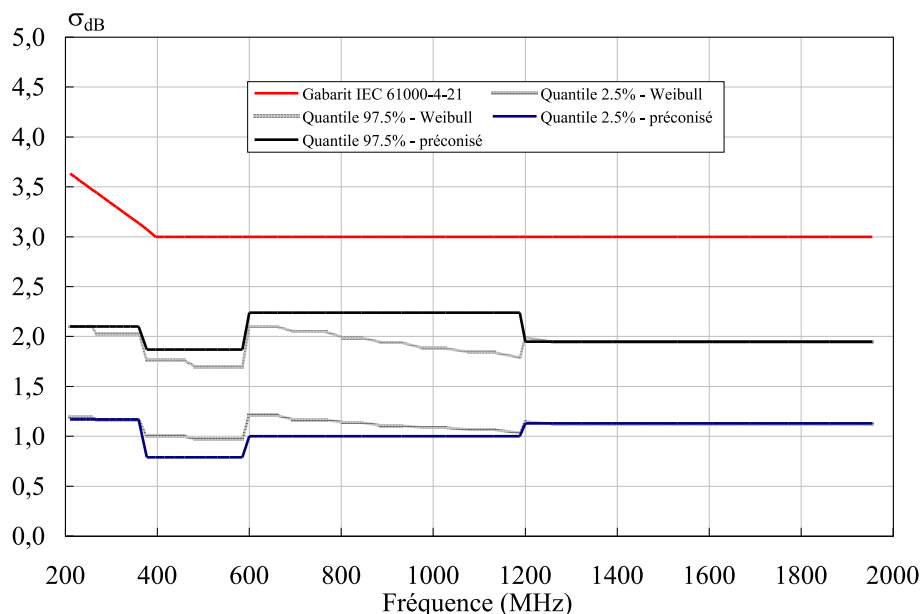
nous obtenons le gabarit de la figure 8.12, que nous pouvons comparer au gabarit tenant compte d'une distribution de Weibull à 2 paramètres. Le gabarit que l'on préconise est plus simple que le gabarit tenant compte de la distribution réelle des mesures, mais permet





**FIG. 8.12:** Comparaison du gabarit préconisé en section 8.4 au gabarit plus complexe tenant compte de la distribution réelle des mesures, pour le paramètre  $\sigma_{8,dB}$ . Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

néanmoins d'être relativement proche des propriétés réelles des mesures en CRBM. De la même manière que pour le paramètre  $\sigma_{8,dB}$ , nous préconisons en figure 8.13 le gabarit relatif à  $\sigma_{24,dB}$  compte tenu du fait que l'on sélectionne 24 maximums (pour  $E_x$  et  $E_y$  et  $E_z$ ) au lieu de 8 seulement (pour  $E_x$  ou  $E_y$  ou  $E_z$ ), pour chaque fréquence.



**FIG. 8.13:** Comparaison du gabarit préconisé en section 8.4 au gabarit plus complexe tenant compte de la distribution réelle des mesures, pour le paramètre  $\sigma_{24,dB}$ . Le gabarit de la norme CEI 61000-4-21 [2] est rappelé en rouge.

# Chapitre 9

## Caractérisation d'antennes

Dans ce chapitre, nous présentons d'autres applications dont l'optimisation bénéficie également des résultats des parties précédentes. Il s'agit d'applications orientées "antennes", qui nécessitent encore plus que la CEM une maîtrise indispensable de l'incertitude de mesure. D'une part, les chambres réverbérantes se prêtent particulièrement bien à la mesure d'efficacité d'antennes. En particulier, la CRBM apporte un contrôle de l'incertitude des mesures, à partir de la maîtrise des lois de distribution de la puissance mesurée, ainsi que par la connaissance du nombre d'échantillons indépendants dont on dispose. D'autre part, nous avons expérimenté des mesures de gain de diversité d'antennes que nous allons également introduire. Là encore, les propriétés statistiques des mesures jouent un rôle prépondérant dans la qualité de l'estimation du gain apporté par l'ajout d'une antenne supplémentaire et dont le but est d'améliorer les performances d'un système de télécommunications.

### 9.1 Efficacité d'antennes

#### 9.1.1 Définition

L'efficacité de rayonnement, que l'on désigne souvent par  $\eta$  est un paramètre incontournable dès lors que l'on souhaite caractériser les performances d'une antenne. On la définit comme le rapport de la puissance totale rayonnée par l'antenne à la puissance fournie à cette antenne. Plus précisément, on distingue l'efficacité de rayonnement de l'efficacité totale, cette dernière prenant en compte la désadaptation de l'antenne *i.e.* les pertes d'énergie par réflexion en entrée de l'antenne. La figure 9.1 synthétise la situation. Nous désignons par  $P_{\text{acc}}$  la puissance acceptée par l'antenne d'émission. L'efficacité de rayonnement  $\eta$  est le rapport de la puissance  $P_{\text{ray}}$  rayonnée par l'antenne sur la puissance  $P_{\text{acc}}$  qui lui est effectivement transmise :

$$\eta = \frac{P_{\text{ray}}}{P_{\text{acc}}}. \quad (9.1)$$

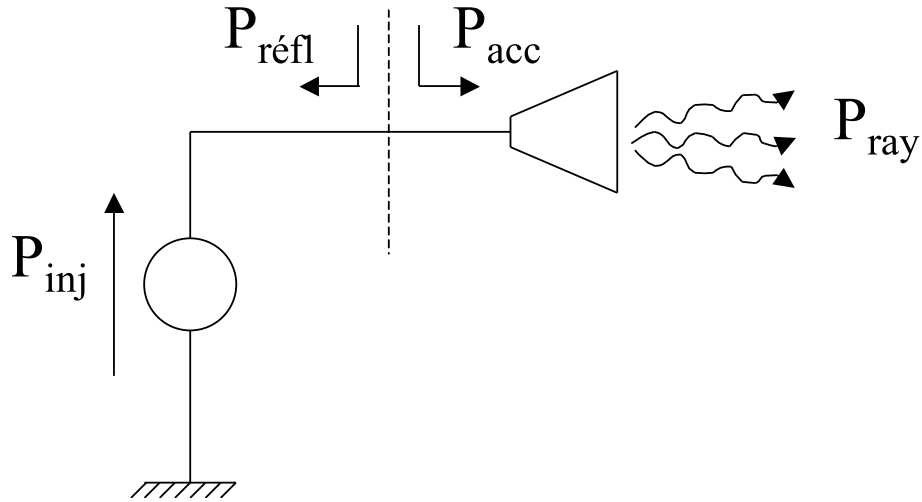


FIG. 9.1: Répartition des niveaux de puissance en entrée d'une antenne.

Ainsi, il s'agit d'une définition standard d'une efficacité, employée classiquement pour n'importe quel dispositif de conversion d'énergie. D'une manière générale, seule une partie  $P_{ray}$ , que l'on souhaite maximiser, de la puissance  $P_{acc}$  est rayonnée par l'antenne, l'autre partie étant la résultante des pertes d'énergie dans l'antenne (pertes par conduction, pertes diélectriques).

Dans le cas où l'antenne n'est pas parfaitement adaptée, une partie seulement de la puissance  $P_{inj}$  fournie par le générateur est acceptée par l'antenne d'émission. Dans ce cas, l'autre partie ( $P_{réfl}$ ) est renvoyée par l'antenne vers le générateur et seule la puissance  $P_{acc}$  contribue au rayonnement  $P_{ray}$  de l'antenne.

$$P_{inj} = P_{réfl} + P_{acc}. \quad (9.2)$$

L'efficacité totale  $\eta_{tot}$  prend en compte les pertes d'énergie dues à une désadaptation d'impédance et s'écrit :

$$\eta_{tot} = \frac{P_{ray}}{P_{inj}}. \quad (9.3)$$

Or, si nous désignons par  $S_{11}$  le paramètre S en réflexion, alors nous avons :

$$P_{réfl} = |S_{11}|^2 \times P_{inj}, \quad (9.4)$$

et d'après (9.2)

$$P_{acc} = (1 - |S_{11}|^2) \times P_{inj}, \quad (9.5)$$

où  $|S_{11}|$  désigne le module du paramètre  $S_{11}$ . Or, d'après (9.3), nous pouvons écrire :

$$\eta_{tot} = \frac{P_{ray}}{P_{acc}} \times \frac{P_{acc}}{P_{inj}}. \quad (9.6)$$

Par conséquent, compte tenu des relations (9.1) et (9.5), nous en déduisons l'expression de l'efficacité totale en fonction de l'efficacité de rayonnement et de la mesure du paramètre

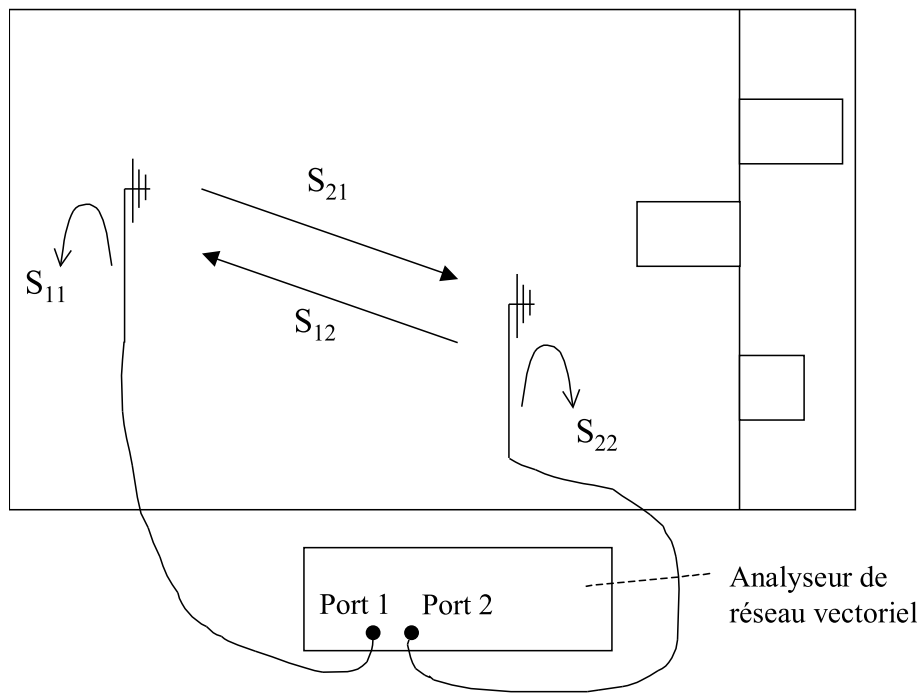
S en réflexion :

$$\eta_{\text{tot}} = (1 - |S_{11}|^2) \eta. \quad (9.7)$$

Ainsi, l'efficacité totale de l'antenne d'émission intègre d'une part les pertes d'énergie dues à la désadaptation d'impédance à travers le facteur  $1 - |S_{11}|^2$ , et d'autre part les pertes par dissipation d'énergie (diélectriques, conduction) prises en compte dans l'efficacité de rayonnement  $\eta$ .

### 9.1.2 Méthode de mesure

La démarche expérimentale que nous allons adopter afin d'évaluer l'efficacité d'une antenne en CRBM est présentée ici. Il s'agit en fait d'une mesure d'efficacité relative par rapport à une antenne de référence. Parmi les auteurs sur le sujet, relevons en particulier Kildal qui a publié depuis l'an 2000 un certain nombre d'articles sur le sujet [112, 113, 114]. Signalons également un article de Hallbjörner qui a proposé une technique de mesure d'efficacité basée uniquement sur la mesure du paramètre S en réflexion de l'antenne en CRBM [115]. Nous adoptons ici la démarche reprise par Kildal.



**FIG. 9.2:** Configuration expérimentale d'une mesure d'efficacité d'antenne en chambre réverbérante à brassage de modes.

La configuration de l'expérience est indiquée en figure 9.2. Une première série d'expériences consiste à connecter sur le port 2 de l'analyseur de réseau, l'antenne de référence dont l'efficacité de rayonnement  $\eta_{\text{réf}}$  est connue. La seconde série d'expériences est la réplique de la première sauf que l'on dispose à la place de l'antenne de référence, l'antenne dont l'efficacité de rayonnement  $\eta_{\text{inc}}$  est inconnue. L'antenne connectée sur le port 1 est la même antenne dans les deux expériences. Il peut s'agir par exemple de la même antenne de référence si l'on en dispose de deux. Cela étant, il suffit que cette antenne puisse

émettre un rayonnement, *i.e.* il faut qu'elle soit suffisamment bien adaptée dans la bande de fréquence requise.

Pour une antenne placée dans le volume utile de la CRBM, son coefficient de réflexion, ou paramètre complexe  $S_{11}$  mesuré à l'analyseur de réseau vectoriel, peut s'écrire comme une somme d'un terme  $S_{11_{el}}$  déterministe correspondant au coefficient de réflexion de cette antenne en espace libre, et d'un terme  $S_{11_{ch}}$  provenant des réflexions multiples dans la CRBM [113] :

$$S_{11} = S_{11_{el}} + S_{11_{ch}}. \quad (9.8)$$

Le coefficient de réflexion  $S_{11_{ch}}$  dû à la chambre dépend de la position du brasseur. Cependant, à l'instar des parties réelles et imaginaires de chaque composante cartésienne de champ électrique (cf. section 1.1.1), il est raisonnable de supposer que les parties réelles et imaginaires de  $S_{11_{ch}}$  relevées par brassage des modes dans la cavité, sont distribuées selon une loi normale de moyenne nulle. Dès lors, si on évalue la moyenne du coefficient de réflexion  $S_{11}$  mesuré pour un grand nombre  $N$  de positions de brasseur, nous retrouvons alors le coefficient de réflexion  $S_{11_{el}}$  de l'antenne en espace libre :

$$\bar{S}_{11} = S_{11_{el}}, \quad (9.9)$$

avec :

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{11}^{(i)}, \quad (9.10)$$

où  $S_{11}^{(i)}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  mesure de  $S_{11}$  pour la  $i^{\text{ème}}$  position de brasseur. Compte tenu de la relation (9.9), on peut montrer que l'efficacité de rayonnement  $\eta_{inc}$  à déterminer peut s'exprimer en fonction de l'efficacité de rayonnement de l'antenne de référence  $\eta_{réf}$  de la manière suivante [114] :

$$\eta_{inc} = \eta_{réf} \times \frac{|\overline{S_{21}^{(inc)}}|^2}{|\overline{S_{21}^{(réf)}}|^2} \times \frac{1 - |\overline{S_{11}^{(réf)}}|^2}{1 - |\overline{S_{11}^{(inc)}}|^2} \times \frac{1 - |\overline{S_{22}^{(réf)}}|^2}{1 - |\overline{S_{22}^{(inc)}}|^2}, \quad (9.11)$$

où l'exposant "(réf)" désigne la mesure en présence de l'antenne de référence reliée au port 2 de l'analyseur de réseau, et "(inc)" désigne la mesure en présence de l'antenne d'efficacité inconnue reliée au port 2. Par conséquent, par la mesure des paramètres S relevés par brassage des modes de la cavité, nous en déduisons très facilement le rapport  $\eta_{inc}/\eta_{réf}$  des efficacités de rayonnement. Plus nous disposerons d'échantillons indépendants des paramètres S et plus nous diminuerons l'incertitude sur l'estimation de ce ratio.

Quant à l'efficacité totale de l'antenne inconnue, compte-tenu de (9.9), elle est déterminée à partir de l'efficacité de rayonnement  $\eta_{inc}$  de la manière suivante (cf. (9.7)) :

$$\eta_{inc,tot} = (1 - |\bar{S}_{11}|^2) \eta_{inc}. \quad (9.12)$$

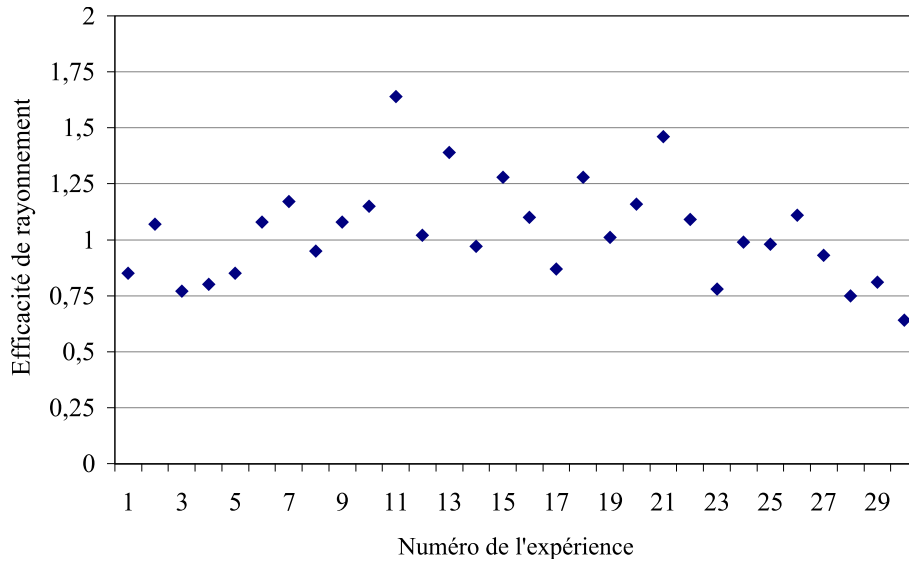
### 9.1.3 Résultats expérimentaux

Nous illustrons cette technique de mesure d'efficacité d'antenne en présentant des résultats issus d'une campagne d'essais que nous avons réalisés conjointement avec d'autres laboratoires du monde entier dans le cadre du réseau d'excellence ACE (*Antenna Centre of Excellence*) [116]. L'antenne que l'on souhaite caractériser en terme d'efficacité de rayonnement est un dipôle accordé à 900 MHz (Fig. 9.3). Une première phase de calibrage



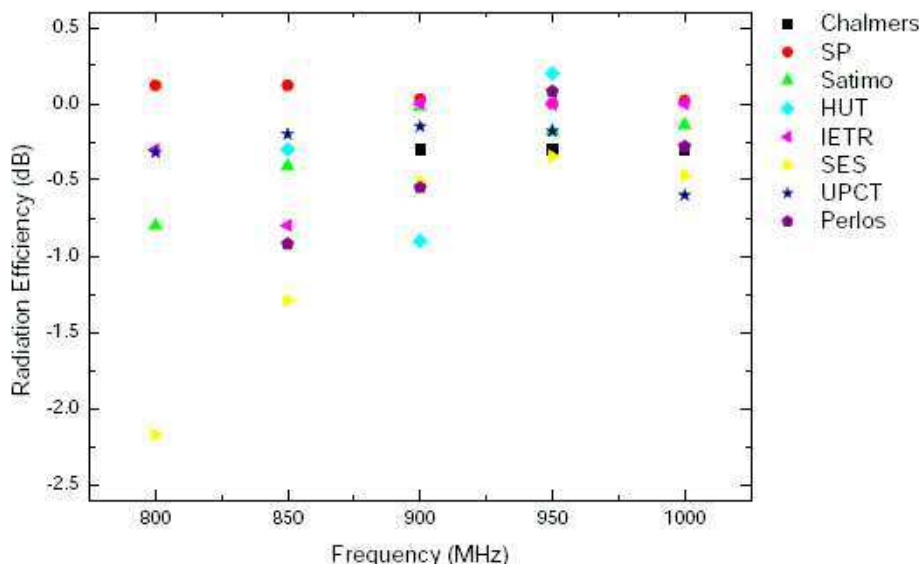
**FIG. 9.3:** Dipôle dont on souhaite caractériser l'efficacité de rayonnement par une mesure en chambre réverbérante à brassage de modes.

a consisté à déterminer l'écart type sur l'estimation d'une efficacité de rayonnement par la collecte de 101 points de fréquences à l'analyseur de réseau, dans une bande de largeur 8 MHz autour de 800 MHz. Cela signifie que l'on estime l'efficacité de rayonnement (9.11) par la mesure de 101 valeurs des paramètres S par brassage électronique. Il s'agit de la même antenne que l'on mesure dans les deux séries d'expérience du protocole détaillé en section 9.1.2. Puisque l'on utilise la même antenne pour la référence ( $\eta_{\text{réf}}$ ) et pour l'antenne inconnue ( $\eta_{\text{inc}}$ ), nous devons nous attendre à une mesure d'efficacité de rayonnement de 1. Nous réalisons 30 fois cette expérience, ce qui permet d'avoir une estimation de l'écart type (Fig. 9.4) que l'on évalue à 22% de l'efficacité moyenne. Par conséquent, si l'on ajoute 16 positions indépendantes du brasseur à ce protocole, nous pouvons réduire l'écart type de  $\sqrt{16}$  si l'on considère en première approche une évolution normale de la distribution de l'efficacité de rayonnement [117]. Ajouter 16 positions de brasseur en plus des 101 points de fréquences, permet donc d'estimer une efficacité de rayonnement avec un écart type d'environ 5%. Si l'on souhaite accroître la précision sur l'estimation de l'efficacité de rayonnement, il suffit d'ajouter des positions de brasseur indépendantes, d'où l'intérêt de connaître au préalable l'efficacité du brasseur mécanique.



**FIG. 9.4:** Variations de l'estimation de l'efficacité de rayonnement d'une antenne, sachant qu'il s'agit de la même antenne prise comme référence et comme antenne inconnue. Le protocole respecté pour cette phase de calibrage est indiqué en section 9.1.3.

Une fois la phase de calibrage achevée et le protocole défini (101 mesures par brassage électronique  $\times$  16 positions de brasseur), nous avons donc entrepris la mesure d'efficacité de rayonnement du dipôle, à partir d'une antenne de référence dont on connaît au préalable l'efficacité de rayonnement (une antenne discône d'efficacité de rayonnement  $\eta_{\text{réf}} = 0,95$ ). Le résultat de cette expérience, pour 5 fréquences allant de 800 MHz à 1000 MHz est présenté en figure 9.5. Bien qu'il existe des disparités entre les mesures pour une



**FIG. 9.5:** Mesures de l'efficacité de rayonnement pour l'antenne dipôle accordé à 900 MHz (photo en figure 9.3), selon différents laboratoires participant à la campagne d'essais du réseau d'excellence ACE [116].

même fréquence, il faut tout de même noter que les estimations se concentrent dans un intervalle de 1 dB, ce qui reste acceptable. Par ailleurs, l'intérêt de cette campagne de

mesures ACE est que chaque participant a utilisé son propre moyen d'essai, qui n'est pas systématiquement une chambre réverbérante mais par exemple une base de mesure en champ proche (Satimo, Perlos).

Il est relativement aisé d'évaluer précisément l'incertitude sur l'estimation d'une grandeur moyenne à l'aide du théorème central limite (cf. section 5.1.2), ou encore connaissant la loi de distribution sous-jacente de l'estimateur de l'observable que l'on souhaite évaluer. Cependant, dans le cas de la mesure d'efficacité, nous ne connaissons pas la distribution de l'observable  $\eta_{inc}$ . Ce que nous pouvons juste affirmer pour l'instant, et c'est une évidence, c'est que plus on disposera de mesures indépendantes des paramètres S en réflexion et transmission (cf. relation 9.11), et plus on réduira l'incertitude sur l'évaluation de  $\eta_{inc}$ . D'où l'intérêt de maîtriser les performances de la CRBM en terme d'efficacité de brassage (cf. partie II). Un axe de recherche futur pourrait donc être lié à l'évaluation de l'incertitude de mesures sur l'estimation d'une efficacité de rayonnement d'une antenne en chambre réverbérante. L'avantage de la CRBM est que l'on peut réduire l'incertitude de mesures, tant que l'on dispose d'échantillons indépendants, et tant que l'on n'entre pas dans les niveaux d'incertitude des appareils de mesure. Donc quantifier précisément l'incertitude sur l'estimation d'une efficacité d'antenne serait un atout supplémentaire dans l'utilisation des chambres réverbérantes à brassage de modes.

## 9.2 Gain de diversité

### 9.2.1 Définition

On parle de diversité spatiale lorsque l'on utilise en réception deux antennes localisées suffisamment loin l'une de l'autre. Si les deux antennes sont proches mais faiblement couplées entre elles, on parle alors de diversité de polarisation ou de diversité de diagramme de rayonnement. Ainsi, le signal reçu par chacune des deux antennes est suffisamment non corrélé, et une interruption spontanée et simultanée du signal en réception des deux antennes est moins probable que si l'on ne disposait que d'une seule antenne. Il en résulte que la diversité apportée par la présence de deux antennes au lieu d'une seule permet d'améliorer la qualité du signal en réception, tout au moins dans certains milieux de propagation. La diversité est utilisée par exemple pour les communications mobiles, en particulier pour l'UMTS (*Universal Mobile Telecommunications System*).

Nous mettons en évidence l'intérêt de cette technique par l'évaluation expérimentale d'un gain de diversité. Il s'agit d'évaluer le gain en terme de niveau de signal reçu, apporté par le système de 2 antennes identiques, par rapport à un cas de référence où l'on ne dispose que d'une seule de ces antennes. Ce gain s'évalue en chambre réverbérante à partir des mesures du paramètre  $S_{21}$  (cf. Fig. 9.2) pour 2 configurations expérimentales.

La première étape consiste à placer en réception, sur le port 2 de l'analyseur de réseau, un dipôle accordé à la fréquence de travail, qui joue le rôle d'antenne de référence. Par brassage mécanique et/ou électronique on collecte alors un grand nombre  $N$  d'échantillons



$|S_{21}^{(ref)}|$  indépendants. Cette première phase permet de déterminer la fonction de répartition des mesures de  $|S_{21}^{(ref)}|^2$ , distribuées selon une loi exponentielle si l'on considère le modèle idéal (cf. partie I). Le gain de diversité est en général indiqué pour un seuil de 1%. Cela signifie que l'on retient de cette première phase le quantile  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  à 1% de la distribution des mesures de  $|S_{21}^{(ref)}|^2$ .

La deuxième étape consiste à remplacer le dipôle seul en réception par le système qui apporte la diversité d'antennes constitué de deux dipôles, identiques au dipôle de référence. Dans ce cas, nous procédons à deux séries de mesures similaires. Le premier dipôle est relié au port 2 de l'analyseur de réseau tandis que le second est connecté à une charge adaptée ( $50\ \Omega$ ). Ensuite nous relevons par brassage mécanique et/ou électronique un grand nombre  $N$  d'échantillons  $|S_{21}^{(div1)}|$  indépendants. Puis, nous relient le premier dipôle à la charge adaptée et le second au port 2 de l'analyseur de réseau. Et nous recommençons la procédure, c'est-à-dire que nous relevons pour les mêmes conditions de brassage un grand nombre  $N$  d'échantillons  $|S_{21}^{(div2)}|$  indépendants. Au final, nous sélectionnons pour chaque configuration de brassage, *i.e.* pour chaque couple (fréquence d'excitation, position de brasseur), le maximum  $|S_{21}^{(div)}|^2$  de puissance relative parmi les deux mesures  $|S_{21}^{(div1)}|^2$  et  $|S_{21}^{(div2)}|^2$ . De cette seconde phase expérimentale, nous retenons le quantile  $P_{rel,1\%}^{(div)}$  à 1% de la distribution des mesures de  $|S_{21}^{(div)}|^2$ .

La conséquence de la diversité est que l'on augmente les chances de recevoir sur l'une ou l'autre des 2 antennes, une puissance plus élevée que si l'on avait seulement une antenne en réception. Cela revient à déplacer le seuil du quantile à 1% vers les niveaux de puissance relative plus élevés. Le gain de diversité  $G_{1\%}$  au seuil de 1% est défini comme le rapport entre le seuil de puissance relative  $P_{rel,1\%}^{(div)}$  en cas de diversité, et le seuil de puissance relative  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  de la mesure de référence :

$$G_{1\%} = \frac{P_{rel,1\%}^{(div)}}{P_{rel,1\%}^{(ref)}}. \quad (9.13)$$

Ce gain est souvent exprimé en dB en appliquant la relation :

$$G_{dB,1\%} = 10 \log(G_{1\%}). \quad (9.14)$$

En pratique, on distingue trois types de gain de diversité d'antennes en fonction de la situation de référence que l'on choisit [118] :

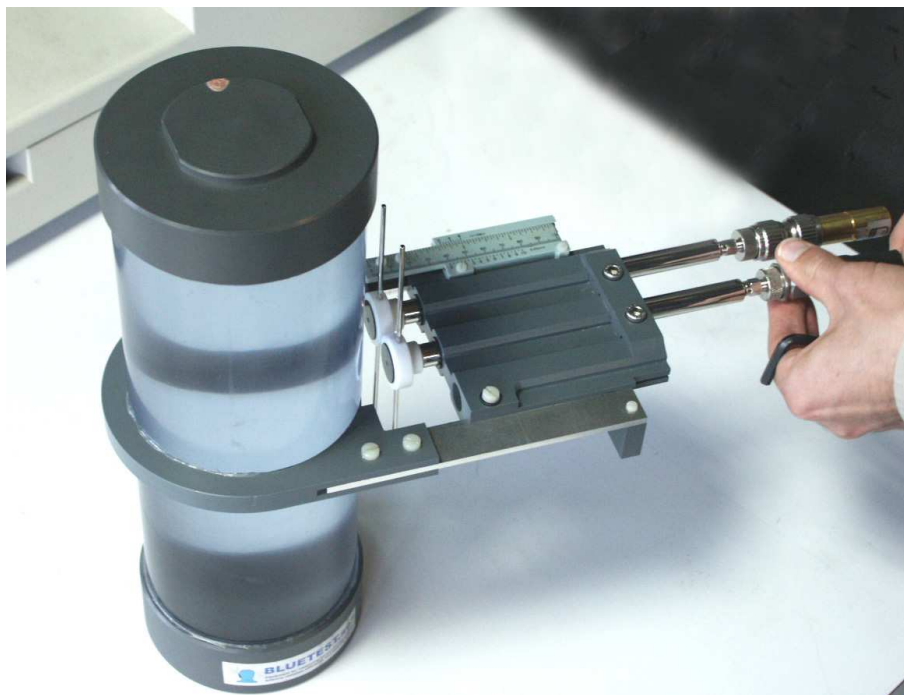
- ① le gain de diversité effectif correspond à une antenne de référence idéale d'efficacité de rayonnement de 0 dB c'est-à-dire 100%. Dans certains cas, on trouve aussi comme référence une antenne située en espace libre ;
- ② le gain de diversité réel correspond à une situation de référence identique à la situation de la diversité, sauf que l'on retire l'une des deux antennes. Il s'agit bien dans ce cas de mesurer l'apport de la diversité par rapport à la situation où l'on ne disposerait que d'une seule antenne ;

- ③ le gain de diversité apparent correspond à la situation de la diversité prise comme référence, sauf que l'on retient uniquement le seuil de puissance relative  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  le plus élevé par rapport à l'autre. On collecte séparément les mesures du paramètre  $S_{21}$ , pour chaque antenne, l'autre étant reliée à une charge adaptée  $50\ \Omega$ . Dans ce cas, nous prenons donc comme référence une des deux antennes du système antennaire à diversité.

Ces définitions se retrouvent dans les références [119, 120, 118]. Etant donné que la précision sur l'estimation du gain de diversité dépend du nombre  $N$  d'échantillons prélevés par brassage, nous avons tout intérêt à collecter un très grand nombre de mesures indépendantes. D'où l'intérêt de déterminer rigoureusement l'efficacité de brassage de la CRBM utilisée (cf. partie II).

### 9.2.2 Protocole expérimental

Nous présentons dans cette section le protocole expérimental que nous avons adopté pour illustrer une mesure du gain de diversité en chambre réverbérante. Il s'agit d'essais que nous avons réalisés dans le cadre d'une campagne de mesures du réseau d'excellence ACE [116]. Le système à diversité d'antennes représente un système de communication mobile utilisé près du corps humain, en particulier le cerveau. Le dispositif modélisant ce système est indiqué en figure 9.6. Le système de communication à diversité d'antennes est



**FIG. 9.6:** Cylindre rempli d'un liquide aux propriétés d'absorption équivalentes à une tête humaine, associé au système de communication à diversité d'antennes (deux dipôles).

constitué de deux dipôles identiques conçus pour une utilisation à 900 MHz (fréquence GSM, *Global System for Mobile communications*). Ce dispositif est placé à proximité d'un

cylindre modélisant la tête d'un individu quelconque. La distance séparant les dipôles est 30 mm, et les antennes sont placées à 20 mm de la paroi du cylindre.

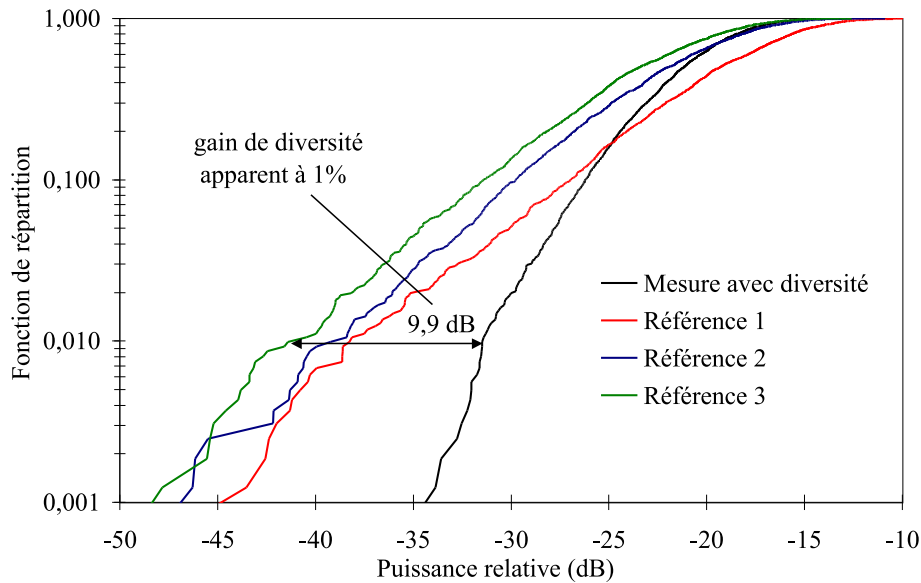
Que ce soit pour la mesure de référence, ou pour la mesure de la diversité, nous respectons le protocole suivant. Dans une bande de 20 MHz autour de la fréquence centrale 900 MHz, nous relevons pour une position de brasseur 101 mesures du module du paramètre de transmission  $S_{21}$ . A l'aide de la figure 6.10, nous vérifions que nous disposons bien d'une centaine d'échantillons indépendants dans une bande de 20 MHz autour de 900 MHz. Nous multiplions cette série d'expérience pour 16 positions de brasseur au total. Compte tenu de la figure 6.3, les 16 positions de brasseur réparties équitablement sur un tour complet sont bien décorréliées. Par conséquent, pour estimer le seuil à 1% de la puissance relative  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  ou  $P_{rel,1\%}^{(div)}$ , nous disposons de 1616 mesures indépendantes. Bien que nous ne connaissions pas la loi de distribution des estimateurs de  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  et  $P_{rel,1\%}^{(div)}$ , après avoir multiplié les essais, nous estimons l'incertitude de mesure de l'ordre de 5% sur l'évaluation de ces estimateurs à partir de 1616 mesures indépendantes. L'idéal serait bien entendu d'établir la loi de distribution théorique de ces valeurs extrêmes.

Nous considérons les trois cas de référence exposés plus haut. La mesure du gain de diversité effectif correspond à une situation pour laquelle l'antenne de référence est un dipôle placé en réception dans le volume utile de la CRBM, où le cylindre est également disposé, suffisamment loin du dipôle pour éviter un couplage direct. La présence du cylindre est indispensable pour conserver dans les deux situations (référence et diversité), le même niveau de chargement de la cavité. La mesure du gain réel correspond à la situation d'un dipôle placé au centre du support des antennes (position du milieu, cf. Fig. 9.6), à 20 mm du cylindre. Quant à la mesure du gain apparent, elle correspond à la situation décrite en ③ dans cette même section. Chaque dipôle étant placé à 20 mm du cylindre.

### 9.2.3 Résultats expérimentaux

Les résultats des séries d'expérience de mesure du gain de diversité sont regroupés sur la figure 9.7. Si l'on considère le gain de diversité réel, correspondant à une antenne de référence placée à 20 mm du cylindre, la diversité apportée par les deux dipôles est supérieure à 7 dB, même si les deux dipôles du système à diversité spatiale ne sont séparés que de 3 cm, *i.e.* environ  $\lambda/10$  à la fréquence de 900 MHz. Notons que ce résultat est particulièrement intéressant pour les systèmes de communication mobiles. En particulier, les dispositifs à diversité d'antenne permettent d'améliorer de manière significative le rapport signal à bruit des communications mobiles. Par ailleurs, le gain de diversité apparent est quasiment de 10 dB, et le gain de diversité effectif est proche de 7 dB. Cela signifie en particulier que, par rapport à une situation assez idéale pour laquelle il n'y aurait pas d'influence directe du cylindre sur la réception due à l'absence de proximité (référence ①), le gain apporté par le système à diversité est de près de 7 dB.

Dans le futur, il serait intéressant de déterminer l'influence du nombre  $N$  de mesures indépendantes du paramètre de transmission  $S_{21}$  sur l'incertitude liée à l'estimation du gain



**FIG. 9.7:** Fonctions de répartition de la mesure de  $|S_{21}|$  pour les trois situations de référence et le dispositif à diversité spatiale d'antenne. Nous mettons en évidence le gain de diversité apparent à 1%.

de diversité. L'idéal serait de pouvoir quantifier précisément l'incertitude sur l'évaluation du gain de diversité d'antennes, en fonction de ce nombre  $N$  de mesures. En particulier, les quantiles  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  et  $P_{rel,1\%}^{(div)}$  à 1% peuvent être considérés comme des valeurs extrêmes puisqu'il s'agit de valeurs localisées dans la queue de distribution de la loi exponentielle sous-jacente aux mesures de  $|S_{21}|^2$ . Dans ce cas, aborder cette question en étudiant les lois de distribution des valeurs extrêmes issues de la littérature statistique pourrait constituer une première approche. Cependant, ajuster la distribution des valeurs extrêmes  $P_{rel,1\%}^{(ref)}$  et  $P_{rel,1\%}^{(div)}$  à une loi théorique peut sembler délicat. Si cela se confirme, l'approche stochastique reste une démarche *a priori* intéressante, permettant d'évaluer numériquement, à l'aide d'un intervalle de confiance, l'incertitude sur l'estimation du gain de diversité en fonction du nombre  $N$  de mesures indépendantes. D'un point de vue expérimental, il faudrait reconduire un grand nombre de fois l'expérimentation de manière à obtenir une distribution de ce gain de diversité, et vérifier que l'écart type de cette distribution reste très faible par rapport à l'espérance de ce gain. Cependant, l'approche numérique demeure bien plus efficace en terme de précision, et reste de loin une solution plus rapide que l'expérimentation.

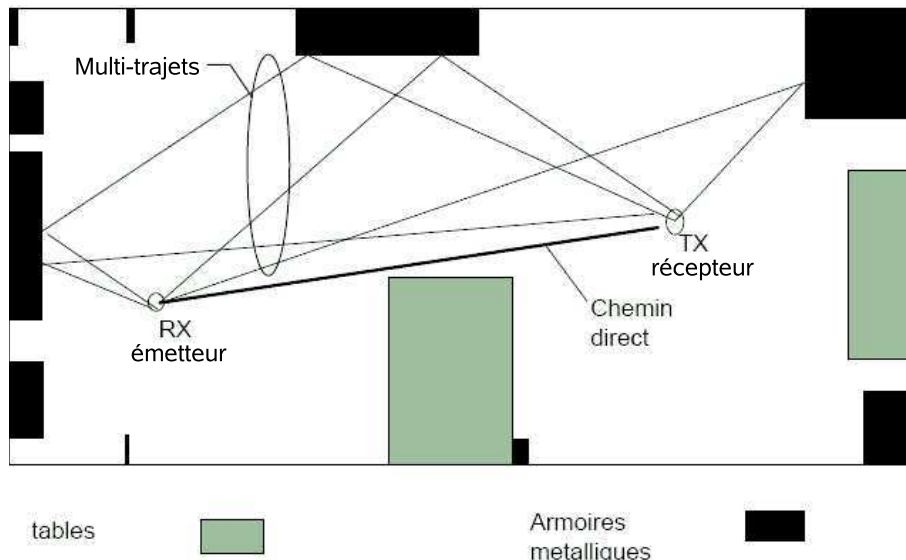
## 9.3 Conclusion

Que ce soit pour la mesure d'efficacité d'antennes, ou l'estimation du gain de diversité d'un système antennaire, la chambre réverbérante est un moyen d'essai qui se prête particulièrement bien à ce type de caractérisation. En particulier, la connaissance de l'efficacité de brassage permet d'exploiter un grand nombre d'échantillons indépendants, de manière à réduire l'incertitude sur l'évaluation de paramètres caractéristiques d'une antenne.



# Chapitre 10

## Simulation expérimentale de canaux de propagation réels



**FIG. 10.1:** Exemple de canal de propagation multi-trajets dans une pièce de bureau.

Dans ce chapitre, nous présentons de manière relativement succincte une autre application des chambres réverbérantes qui devrait dans les prochaines années se développer davantage, et faire l'objet d'applications industrielles massives. Hormis les applications orientées CEM et de caractérisation d'antennes, la CRBM est un outil intéressant pour générer des canaux de propagation que l'on rencontre dans la vie courante, ce qui permet de tester des systèmes de télécommunications. En général nous privilégions en CRBM l'absence de trajet direct entre l'émetteur et le récepteur, lors d'essais CEM et de mesures d'antennes. Cependant, un canal de propagation réel autorisant par exemple la propagation d'un signal reçu par des terminaux mobiles, est caractérisé d'une manière générale par une composante non brassée (non diffractée) de l'énergie électromagnétique, entre l'émetteur et le récepteur (Fig. 10.1). D'où l'intérêt particulier de l'industrie des télécommunications de pouvoir disposer d'un moyen d'essais du type chambre réverbérante, pour simuler dans un environnement faradisé, différents scénarios de propagation. Nous pou-

vons en effet, en CRBM, privilégier plus ou moins le trajet direct entre l'émetteur et le récepteur. Ce type de propagation a été traité entre autres dans [121, 80, 20, 22, 62, 122].

Nous focalisons notre exposé plus particulièrement sur deux aspects liés à l'utilisation des chambres réverbérantes pour les télécommunications mobiles. D'une part, compte tenu des développements théoriques de la partie II pour évaluer l'efficacité de brassage électronique, nous pouvons déterminer précisément la bande de cohérence du canal de propagation généré dans la CRBM. D'autre part, un type de canal de propagation multi-trajets de grand intérêt pour les télécommunications mobiles est le canal de Rice. Pour ce type de canal, une part de l'énergie émise est captée directement par le récepteur, sans réflexions depuis l'émetteur, tandis qu'une autre partie de l'énergie émise est soumise à des réflexions multiples avant d'être captée par l'antenne de réception [62, 123]. Nous proposons ici une nouvelle méthode de caractérisation de canaux de propagation du type Rice en CRBM, qui permet de déterminer précisément la quantité d'énergie non brassée (trajet direct) par rapport à l'énergie brassée (trajet ayant subi des réflexions multiples).

## 10.1 Bande de cohérence

### 10.1.1 Définition

Dans le domaine temporel, un canal de propagation est caractérisé par des variations de la fonction de corrélation en un point de l'espace en fonction du temps, lorsque le canal est excité par un émetteur impulsionnel, ce qui permet de définir un temps de cohérence  $\tau_c$ . On rappelle que la fonction d'autocorrélation du canal est la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance. Quant au temps de cohérence du canal, il est défini comme le temps durant lequel le canal peut être considéré comme constant. En pratique, on considère que le canal est constant tant que la fonction d'autocorrélation est supérieure à  $1/\sqrt{2}$ .

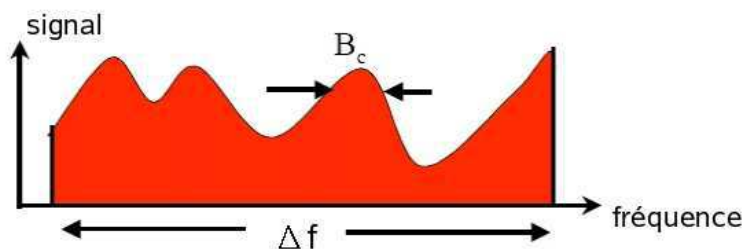


FIG. 10.2: Canal sélectif en fréquence.

Dans le domaine fréquentiel, un canal de propagation est caractérisé par les variations de la fonction de transfert du canal en fonction de la fréquence, ce qui permet de préciser la bande de cohérence  $B_c \approx 1/\tau_c$  du canal. Celle-ci est définie comme la bande de fréquence dans laquelle on peut considérer la fonction de transfert du canal comme constante. La bande de cohérence est la conséquence de l'allongement d'une impulsion réelle, due aux chemins multiples (Fig. 10.1). La bande  $B_c$  est d'autant plus importante que le délai entre

les signaux est faible. Autrement dit, la bande de cohérence est inversement proportionnelle à l'étalement temporel, prise comme mesure de la "longueur" du canal. Un étalement de délai important réduit donc la bande de cohérence.

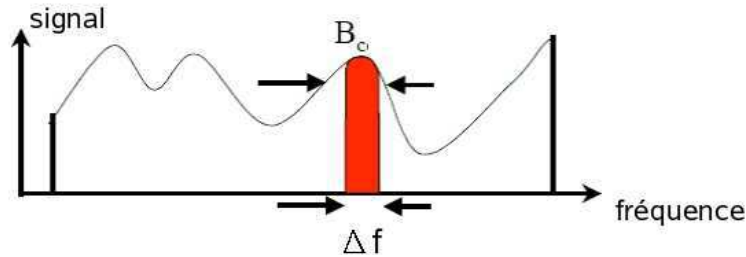


FIG. 10.3: Canal non sélectif en fréquence.

Si l'on compare la largeur  $\Delta f$  de la bande de fréquence des signaux, avec la bande de cohérence du canal, on peut définir la notion de sélectivité du canal. Lorsque  $\Delta f \gg B_c$ , alors le canal est dit sélectif en fréquence (Fig. 10.2). Par contre, lorsque  $\Delta f \ll B_c$ , alors le canal est non sélectif en fréquence, puisque la bande de cohérence est plus large que la largeur de bande d'utilisation du canal (Fig. 10.3).

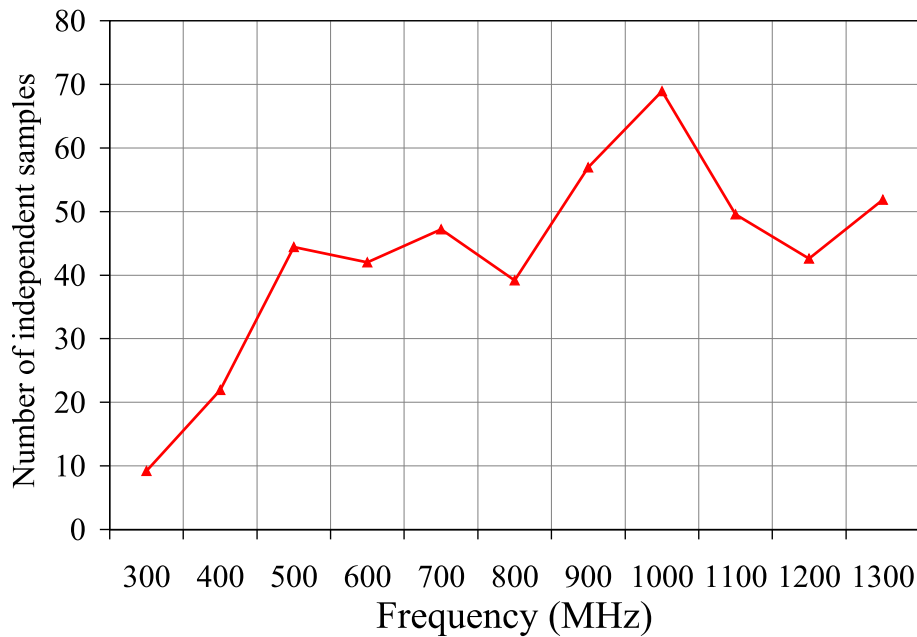
### 10.1.2 Utilisation de modèle AR pour évaluer la bande de cohérence

La largeur  $B_c$  de la bande de cohérence correspond à la bande de fréquence au-delà de laquelle deux signaux sont suffisamment décorrélés pour être considérés comme indépendants l'un de l'autre. Dès lors, la connaissance du nombre de fréquences indépendantes sur une largeur de bande  $\Delta f$ , donne directement accès à la bande de cohérence du canal généré en chambre réverbérante. Autrement dit, l'évaluation de la taille effective  $N'$  d'une série de  $N$  mesures corrélées et collectées par brassage fréquentiel dans une bande de fréquence de largeur  $\Delta f$ , permet de déterminer la bande de cohérence  $B_c$  en appliquant la relation suivante :

$$B_c = \frac{\Delta f}{N' - 1}. \quad (10.1)$$

La méthode d'estimation de la taille effective (ESS) d'une série de  $N$  mesures corrélées a été exposée en partie II. Cette méthode destinée à évaluer l'efficacité de brassage, mécanique ou fréquentiel, peut aussi s'appliquer pour déterminer la bande de cohérence d'un canal de propagation créé en chambre réverbérante. Par exemple, nous rappelons en figure 10.4 le nombre d'échantillons indépendants que nous avons estimé dans une bande de fréquence de largeur  $\Delta f = 10$  MHz, autour de plusieurs fréquences centrales (cf. section 6.3.3). L'application de la relation (10.1) à partir du nombre  $N'$  de la figure 10.4, nous donne l'estimation de la bande de cohérence pour des fréquences allant de 300 MHz à 1300 MHz par pas de 100 MHz (Tab. 10.1). On rappelle qu'en section 6.3.3, nous avons vérifié que les  $N'$  fréquences de la figure 10.4 estimées par un modèle autorégressif étaient bien *a posteriori* décorrélées (cf. Tab. 6.6).





**FIG. 10.4:** Evaluation du nombre  $N'$  de mesures indépendantes de puissance disponibles dans une bande de fréquence  $\Delta f = 10$  MHz. Cette courbe est issue de la figure 6.10.

fréquence centrale $f$ (MHz)	Nombre $N'$ (Fig. 10.4) de fréquences indépendantes dans une bande de largeur 10 MHz centrée autour de $f$	Bande de cohérence en MHz évaluée par (10.1)
300	9	1,22
400	22	0,48
500	44	0,23
600	42	0,24
700	47	0,22
800	39	0,26
900	57	0,18
1000	69	0,15
1100	50	0,21
1200	43	0,24
1300	52	0,20

**TAB. 10.1:** Largeur de la bande de cohérence évaluée à partir de (10.1) et de la taille effective  $N'$  de la figure 10.4.

### 10.1.3 Modification de la bande de cohérence par chargement de la cavité

Dans cette section, nous montrons l'effet d'un chargement de la cavité sur la largeur de la bande de cohérence. Le fait de charger la cavité a pour conséquence de diminuer le facteur de qualité de la chambre, tout en favorisant le brassage des modes puisque

la largeur de bande  $\Delta f_{Q_i}$  relative au  $i^{\text{ème}}$  mode excité a tendance à s'élargir (cf. partie introductive de ce rapport de thèse). Par conséquent, dans une même largeur de bande  $\Delta f$  la corrélation entre les fréquences d'excitation devient plus élevée, et la bande de cohérence s'élargit.

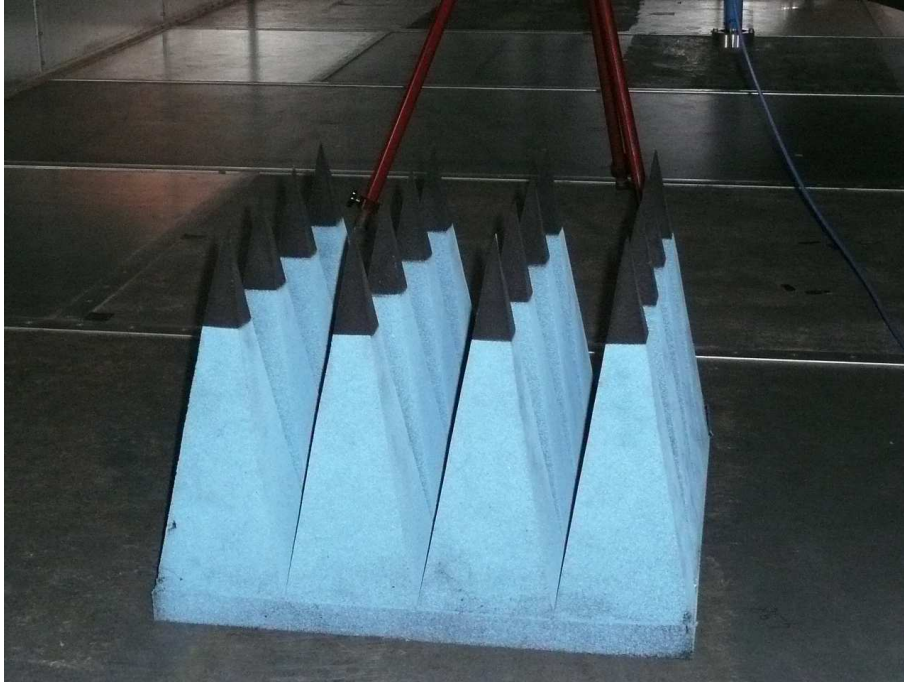


FIG. 10.5: Bloc d'absorbants n°1 (60 cm × 60 cm × 45 cm).

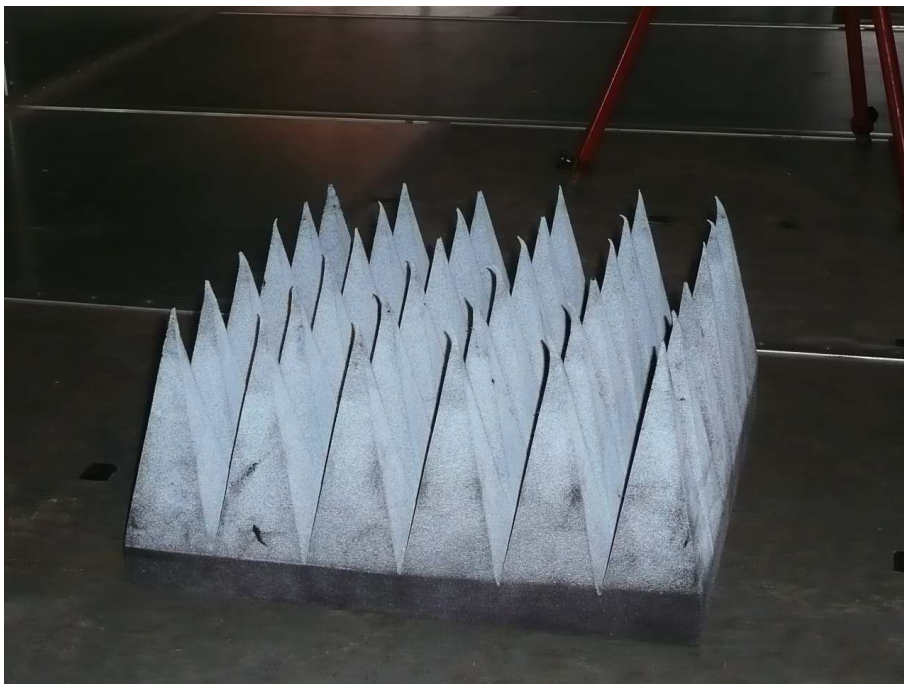


FIG. 10.6: Bloc d'absorbants n°2 (60 cm × 60 cm × 27 cm).

Par une expérience très simple, en renouvelant l'estimation du nombre de fréquences indépendantes dans une bande de largeur  $\Delta f = 10$  MHz autour de plusieurs fréquences

centrales, en suivant le même protocole qu'en section 6.3.3, nous montrons l'effet d'un chargement de la cavité sur la bande de cohérence. La cavité est progressivement chargée par un ou deux blocs d'absorbants (cf. photos en figures 10.5 et 10.6). Le tableau 10.2 synthétise les résultats obtenus, en indiquant la largeur de la bande de cohérence  $B_c$ , pour une cavité de référence non chargée, la cavité chargée par le bloc d'absorbants n°1, puis par le bloc d'absorbants n°2, et enfin la cavité chargée par les blocs d'absorbants 1 et 2 placés ensemble dans la chambre. L'ajout d'absorbants dans la cavité réverbérante

fréquence centrale $f$ (MHz)	$B_c$ (MHz) sans absorbant	$B_c$ (MHz) avec absorbants (n°1)	$B_c$ (MHz) avec absorbants (n°2)	$B_c$ (MHz) avec absorbants (n°1 et 2)
500	0,23	0,71	0,79	1,79
600	0,24	0,84	0,78	1,99
700	0,22	0,91	0,84	1,89
800	0,26	0,66	0,82	1,41
900	0,18	0,64	0,48	1,78
1000	0,15	0,64	0,53	1,29
1100	0,21	0,87	0,63	1,52
1200	0,24	0,76	0,71	1,66
1300	0,20	0,78	0,69	1,90

**TAB. 10.2:** Modification de la bande de cohérence par la présence d'absorbants à l'intérieur de la cavité.

a bien pour effet d'élargir la bande de cohérence, ce qui modifie de manière drastique le canal de propagation. En particulier, le bloc d'absorbants n°1 étant plus volumineux que le n°2, il a tendance à élargir un peu plus la bande de cohérence. Le passage d'une cavité vide d'absorbant à un seul bloc d'absorbants conduit approximativement à tripler la largeur de la bande de cohérence. Tandis que le passage d'une cavité chargée par un seul bloc, à une cavité chargée par les deux blocs ensemble, conduit à doubler la largeur de la bande de cohérence. Multiplier ce genre d'expériences permettrait d'établir le nombre (ou le volume) d'absorbants nécessaires afin d'ajuster la bande de cohérence à la valeur souhaitée par l'utilisateur.

La méthode d'estimation de la taille effective exposée en partie II, est une démarche relativement simple qui permet de contrôler la modification de la bande de cohérence du canal de propagation généré dans la CRBM en présence d'un chargement de la cavité.

## 10.2 Canal de Rice

### 10.2.1 Définition

Au-delà d'une fréquence minimale fonction des dimensions de la cavité, la *LUF*, le champ électromagnétique régnant dans le volume utile d'une chambre réverbérante devient statistiquement uniforme. C'est en fait la diversité des champs créés par les différentes positions du brasseur qui engendre un champ statistiquement isotrope et homogène sur une rotation complète. Le modèle idéal des lois de distribution des mesures en chambre réverbérante établit qu'en l'absence de trajet direct les mesures de puissance  $P$  sont distribuées selon la loi exponentielle (section 1.1).

En présence de trajet direct entre l'émetteur et le récepteur (cf. Fig. 10.1), dans une chambre réverbérante à brassage de modes, la distribution de la puissance mesurée n'est plus assimilable à une loi exponentielle. Pour une cavité idéale, ou encore pour une cavité réelle et une antenne de réception de grande dimension (cf. section 3.4), la racine carrée  $\sqrt{P}$  de la puissance mesurée et le module  $|S_{21}|$  du paramètre de transmission sont distribués selon une loi de Rice [20, 123, 67, 62]. La densité de probabilité  $f(x, v)$  de la loi de Rice est rappelée ci-dessous :

$$f(x, v) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+v^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xv}{\sigma^2}\right). \quad (10.2)$$

Le paramètre  $v$  de la loi de Rice représente l'amplitude de la composante mesurée issue d'un trajet direct entre l'émetteur et le récepteur (composante déterministe). Quant à  $\sigma$ , il représente l'écart type de la distribution des mesures de  $\sqrt{P}$  ou  $|S_{21}|$ , et est la conséquence des réflexions multiples au sein de la cavité (composante stochastique). La fonction  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée du 1<sup>er</sup> type, d'ordre 0.

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(-x \sin \tau) d\tau. \quad (10.3)$$

Lorsque  $v = 0$  dans (10.2), nous retrouvons la densité de probabilité de la loi de Rayleigh [cf. relation (1.28)]. Ce résultat est cohérent avec l'absence de trajet direct entre l'antenne d'émission et l'antenne de réception.

La proportion de trajet direct par rapport aux réflexions multiples peut se mesurer à l'aide du paramètre DSR (*Direct-to-Scattered Ratio*), exprimé sous la forme :

$$DSR_{dB} = 20 \log \left( \frac{v}{\sigma} \right). \quad (10.4)$$

Nous avons repris la formulation de Hallbjörner [123], cependant d'autres auteurs privilégient le paramètre  $K$  qui ne diffère du DSR que par un facteur  $\sqrt{2}$  au dénominateur [67, 62] :

$$K_{dB} = 20 \log \left( \frac{v}{\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (10.5)$$

Le paramètre DSR peut être utilisé afin de caractériser le canal de propagation créé dans le volume utile de la CRBM, puisqu'il caractérise la quantité d'énergie associée à l'onde directe, par rapport à l'énergie associée à de multiples réflexions avant d'être captée par l'antenne de réception. Afin d'évaluer le DSR (ou le facteur  $K$ ), nous trouvons dans la littérature deux manières de procéder. Holloway [62] propose plusieurs expressions analytiques du facteur  $K$  en fonction des caractéristiques de la chambre et des antennes utilisées. En particulier, l'auteur montre que l'on peut jouer sur différents paramètres tels que le facteur de qualité, la distance entre l'émetteur et le récepteur, la directivité des antennes, afin de modifier le facteur  $K$  et ainsi le canal de propagation. Cependant, il n'est pas toujours simple d'avoir accès précisément au facteur de qualité de la CRBM ainsi qu'à la directivité des antennes utilisées.

Une autre approche permettant de contourner ces difficultés est de déterminer expérimentalement, comme nous pouvons le faire pour une distribution de Rayleigh, les paramètres  $v$  et  $\sigma$  de la distribution de Rice (10.2), afin d'en déduire le DSR par la relation (10.4). Cette démarche est reprise par [123, 67], cependant la détermination de la loi de Rice se fait uniquement par comparaison visuelle entre les fonctions de répartition expérimentale et théorique. L'utilisation de tests d'ajustement est plus appropriée comme nous l'avons rappelé en section 1.2. En particulier, ces tests statistiques prennent en compte le nombre  $N$  d'échantillons dont nous disposons pour vérifier si la série de  $N$  mesures a des chances de s'ajuster à la distribution théorique.

C'est pourquoi ici, nous proposons une nouvelle méthode de détermination de la distribution de Rice, basée sur l'utilisation de tests d'ajustement appropriés. Or, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature statistique de tests spécifiques à l'ajustement de la distribution de Rice, contrairement aux lois de Weibull (section 3.2), Rayleigh (section 2.2.2.2) et exponentielle (section 2.1). Par contre, en revenant à l'origine mathématique de la distribution de Rice, il est possible de tester indirectement l'ajustement d'une distribution expérimentale à la loi de Rice. C'est l'objet de la section suivante.

### 10.2.2 Méthode statistique d'estimation du canal de Rice créé en CRBM

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires distribuées selon des lois normales indépendantes et définies comme suit, avec  $\alpha$  un nombre réel :

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(v \cos \alpha, \sigma) \\ Y \sim \mathcal{N}(v \sin \alpha, \sigma) \end{cases} \quad (10.6)$$

Alors, on peut montrer [97] que la variable aléatoire  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  suit une distribution de Rice de paramètres  $(v, \sigma)$  (10.2). Par conséquent, si l'on suppose une distribution normale des parties réelle  $S_{21r}$  et imaginaire  $S_{21i}$  de  $S_{21}$  de manière similaire au système d'équations (10.6), nous sommes en mesure de déterminer les paramètres  $v$  et  $\sigma$  de la

distribution de Rice de  $|S_{21}|$ . En effet, de manière équivalente à  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , nous avons la relation remarquable suivante :

$$|S_{21}| = \sqrt{S_{21r}^2 + S_{21i}^2}. \quad (10.7)$$

Nous disposons de l'ensemble des outils statistiques nécessaires au test d'ajustement d'une distribution expérimentale à une loi normale. Les tests de Kolmogorov-Smirnov (KS) et de Anderson-Darling (AD) sont rappelés respectivement en sections 2.1.3 et 2.1.4, et les valeurs critiques appropriées au test de la loi normale sont fournies par Stephens [91].

A l'aide d'un analyseur de réseau vectoriel, nous pouvons mesurer les parties réelle  $S_{21r}$  et imaginaire  $S_{21i}$  du paramètre de transmission  $S_{21}$ . Par brassage mécanique, nous avons accès à la distribution expérimentale de ces mesures. Ainsi, nous pouvons déterminer aisément les paramètres des lois normales (10.6) si l'on identifie  $S_{21r}$  à la v.a.  $X$ , et  $S_{21i}$  à la v.a.  $Y$ .

On rappelle que les paramètres  $(\mu_Z, \sigma_Z)$  de la loi normale (ou gaussienne)  $\mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z)$  sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, et correspondent respectivement à la moyenne (10.8) et à l'écart type (10.9) des  $N$  échantillons  $z_i$  de la v.a. que l'on note ici  $Z$ .

$$\hat{\mu}_Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (10.8)$$

$$\hat{\sigma}_Z = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu_Z)^2} \quad (10.9)$$

La notation  $\hat{\mu}$  désigne l'estimateur du paramètre  $\mu$ . Désignons par  $\hat{\mu}_r$  et  $\hat{\sigma}_r$  les estimateurs des paramètres de la loi de distribution des mesures de la partie réelle  $S_{21r}$  du paramètre complexe de transmission  $S_{21}$ . De même, nous notons par  $\hat{\mu}_i$  et  $\hat{\sigma}_i$  les estimateurs des paramètres de la loi de distribution des mesures de la partie réelle  $S_{21i}$ . Dans le cas où les tests d'ajustement ne rejettent pas l'hypothèse de distribution normale des mesures de  $S_{21r}$  et  $S_{21i}$ , alors le module du paramètre de transmission  $S_{21}$  suit une loi de Rice, dont les estimateurs  $\hat{v}$  et  $\hat{\sigma}$  des paramètres de la loi (10.2) sont déterminés par les expressions suivantes [cf. (10.6)]:

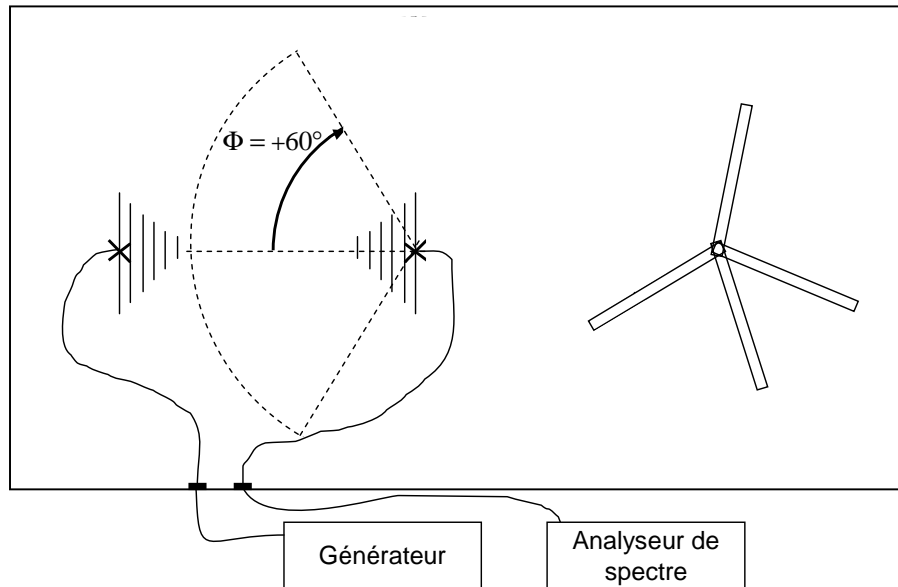
$$\begin{cases} \hat{v} = \sqrt{\hat{\mu}_r^2 + \hat{\mu}_i^2} \\ \hat{\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_i) \approx \hat{\sigma}_r \approx \hat{\sigma}_i \end{cases} \quad (10.10)$$

Par conséquent, connaissant les paramètres de la distribution expérimentale sous-jacente à une loi de Rice, nous pouvons calculer le DSR, et ainsi caractériser le canal de Rice.

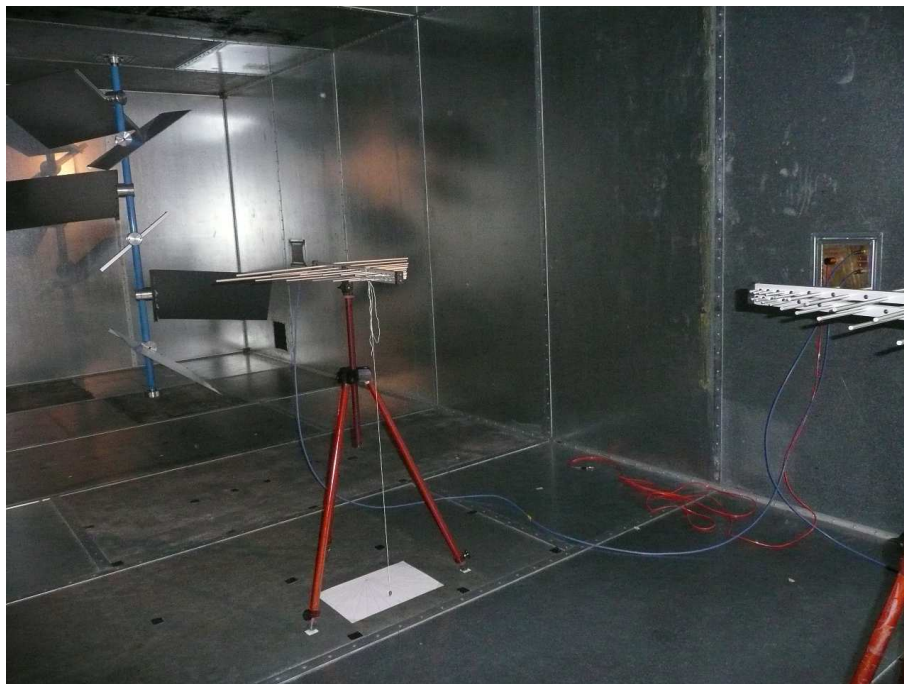
### 10.2.3 Résultats expérimentaux

Nous avons mis en place la configuration de la figure 10.7 dans la chambre réverbérante de l'IETR, afin de générer différents canaux de propagation du type Rice (cf. photo en figure 10.8). En faisant varier l'angle  $\Phi$  entre les axes des antennes d'émission et

de réception, nous favorisons plus ou moins le trajet direct de l'onde par rapport aux réflexions multiples. Pour chaque configuration, *i.e.* pour chaque angle  $\Phi$ , nous collectons 1500 mesures des parties réelle et imaginaire de  $S_{21}$  de manière à réduire l'incertitude à 5% sur l'estimation de l'indépendance des mesures (cf. section 5.3.2), et sur l'estimation des paramètres de la loi de Rice. Pour obtenir 1500 échantillons, nous utilisons à la fois



**FIG. 10.7:** Configuration expérimentale pour la simulation de canaux de propagation du type Rice dans la chambre réverbérante à brassage de modes de l'IETR (vue du dessus). La distance entre les deux antennes est de 1,50 m.

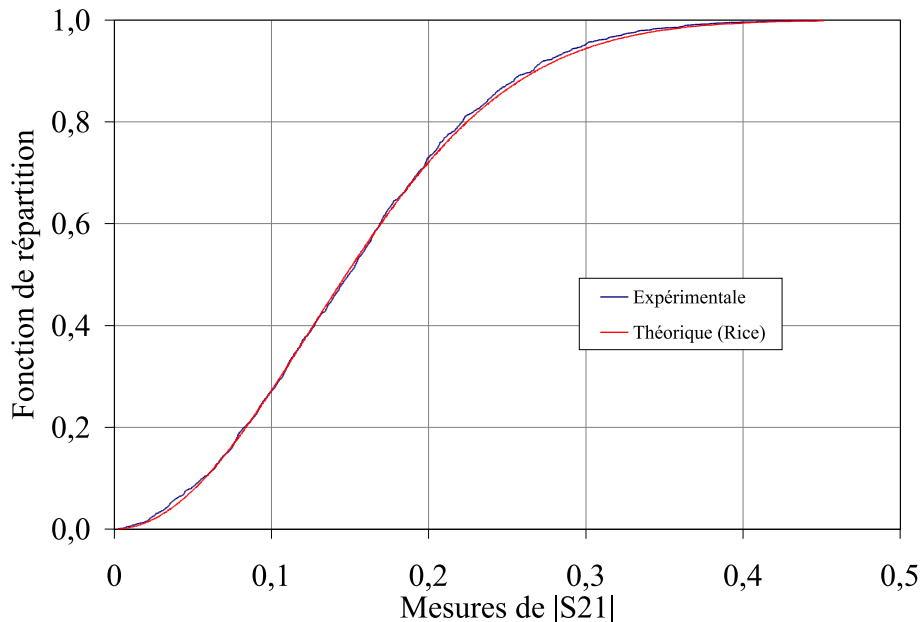


**FIG. 10.8:** Dispositif expérimental pour la mesure du DSR dans la chambre réverbérante de l'IETR.

le brassage mécanique (30 positions de brasseur indépendantes sur un tour complet), et le

brassage électronique (50 fréquences d'émission indépendantes) dans une bande de largeur 20 MHz, centrée autour de 700 MHz.

Pour chaque configuration d'antennes, c'est-à-dire chaque angle  $\Phi$ , nous vérifions par les tests d'ajustement appropriés [91] que les mesures de  $S_{21r}$  et de  $S_{21i}$  sont distribuées selon une loi normale. Pour un angle  $\Phi = 45^\circ$ , nous obtenons par exemple la fonction



**FIG. 10.9:** Comparaison de la fonction de répartition expérimentale du module  $|S_{21}|$  du paramètre de transmission mesuré à l'analyseur de réseau vectoriel, à la fonction de répartition théorique de la loi de Rice de paramètres  $\nu$  et  $\sigma$  estimés selon la méthode exposée en section 10.2.2.

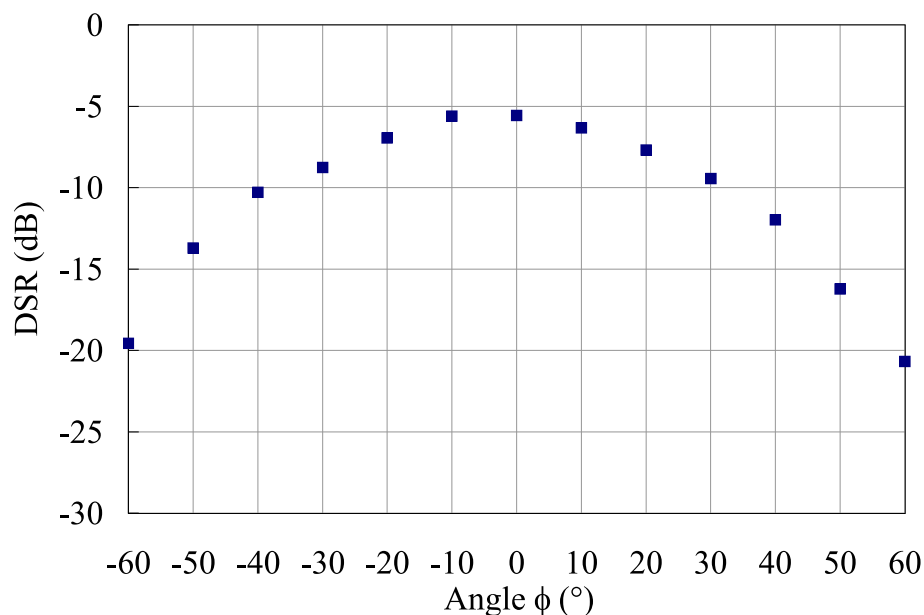
de répartition expérimentale des mesures du module de  $S_{21}$  indiquée en figure 10.9, que l'on peut comparer visuellement à la fonction de répartition théorique d'une loi de Rice, déterminée après estimation des paramètres  $\nu$  et  $\sigma$  selon la démarche exposée en section 10.2.2 :

$$\begin{cases} \hat{\nu} = 0,03 \\ \hat{\sigma} = 0,15 \end{cases} \quad (10.11)$$

Pour ce couple (10.11), nous obtenons un DSR de  $-14$  dB. Le bon accord que l'on observe visuellement entre les fonctions de répartition théorique et expérimentale, est cohérent avec les tests d'ajustement qui acceptent l'hypothèse de distribution gaussienne pour les mesures de  $S_{21r}$  et de  $S_{21i}$ . L'avantage de cette nouvelle méthode est que nous déterminons les paramètres  $\nu$  et  $\sigma$  de la distribution de Rice, en suivant une démarche statistique rigoureuse, et non en se basant sur une simple comparaison visuelle des fonctions de répartition théorique et expérimentale. Au lieu d'estimer ces paramètres en superposant au mieux les 2 courbes, nous appliquons la méthode du maximum de vraisemblance et vérifions par des tests d'ajustements appropriés que les mesures de  $S_{21r}$  et de  $S_{21i}$  sont bien distribuées selon une loi normale. La comparaison visuelle ne permet pas d'intégrer



le nombre d'échantillons utilisés dans l'évaluation de la loi de distribution sous-jacente, ce qui est au contraire le cas des tests d'ajustement.



**FIG. 10.10:** Variations du DSR, paramètre caractéristique d'un environnement électromagnétique multi-trajets du type canal de Rice.

Ainsi, pour chaque angle  $\Phi$ , nous déterminons un couple  $(v, \sigma)$  caractéristique de l'environnement électromagnétique créé au sein de la cavité. La figure 10.10 représente les variations du canal généré dans la chambre réverbérante de l'IETR, en fonction de l'orientation de l'antenne de réception par rapport à l'antenne d'émission. Pour un angle  $\Phi = 0^\circ$ , les deux antennes sont face à face et le trajet direct est le plus important. La dynamique sur le DSR est relativement importante (15 dB), ce qui permet de créer un grand nombre de canaux de propagation différents. Puisque l'on s'assure au préalable que l'ensemble des 1500 échantillons de  $S_{21}$  que l'on collecte sont indépendants, nous pouvons déterminer avec une grande précision (environ 5%) les paramètres  $v$  et  $\sigma$  à estimer dans le calcul du DSR. Il en résulte que par l'analyse des parties réelle et imaginaire du paramètre de transmission  $S_{21}$  mesurées à l'analyseur de réseau vectoriel, nous pouvons contrôler le canal en terme d'énergie non brassée par rapport aux réflexions multiples.

### 10.3 Conclusion

La chambre réverbérante est un outil particulièrement intéressant pour simuler expérimentalement des canaux de propagation réels. D'une part, nous avons montré à l'aide d'une expérience très simple et en appliquant la méthode d'estimation de la taille effective d'une série d'échantillons, que l'on peut contrôler la bande de cohérence du canal par l'ajout de matériaux absorbants. D'autre part, dans le cas d'un canal du type Rice, nous avons développé une nouvelle méthode d'estimation de la loi de Rice, en s'appuyant

sur des tests d'ajustements adaptés. Les résultats expérimentaux montrent un très bon accord entre la loi théorique et la distribution des mesures.



## CONCLUSION ET PERSPECTIVES



# Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons travaillé sur les fondements de la CRBM, en régime de cavité sur-dimensionnée, dans le but de pouvoir améliorer les applications existantes, et de faciliter le développement d'utilisations nouvelles de la chambre réverbérante. En particulier, de manière à s'approcher du mieux possible des caractéristiques du champ électromagnétique dans une telle cavité, nous nous sommes basés sur l'expérience. Il faut reconnaître en particulier que les modèles théoriques actuels de la CRBM se réfèrent à une cavité idéale, pour laquelle on considère une densité de modes infinie. Revenir sur les caractéristiques réelles des mesures en CRBM nous paraît indispensable pour mieux maîtriser ce moyen d'essais.

Dans un premier temps, nous avons étudié longuement les propriétés statistiques des mesures collectées par brassage dans la chambre réverbérante de l'IETR. Le point de départ de cette analyse est l'observation d'un biais entre la loi de distribution du champ issue du modèle théorique, et la loi de distribution expérimentale. Nous avons mis en évidence par ailleurs que l'analyse de l'ajustement de la distribution expérimentale des mesures, à la distribution du modèle idéal, est généralement imparfaite. En effet, bien souvent, une simple comparaison visuelle des fonctions de répartition expérimentale et théorique conduit l'expérimentateur à conclure sur le bon ajustement de la distribution. Cependant, cette comparaison reste qualitative puisqu'en particulier elle ne prend pas en compte le nombre d'échantillons utilisés pour construire la fonction de répartition expérimentale. Le niveau de tolérance que l'on accepte sur les écarts entre les lois théorique et expérimentale doit dépendre du nombre de mesures indépendantes prélevées. Seul un test statistique d'ajustement permet de prendre en compte ce paramètre.

En outre, lorsqu'un test d'ajustement est employé, très souvent la communauté des experts CEM fait appel au test de Kolmogorov-Smirnov associé à la table de valeurs critiques de Massey. Nous avons montré que ces valeurs critiques ne sont pas adaptées aux lois de distribution du modèle idéal, puisqu'elles ne sont pas complètement définies. Surtout, cette table est conservatrice, *i.e.* l'hypothèse d'ajustement est facilement acceptée pour les lois de distribution du modèle de cavité idéale. A l'aide d'outils statistiques adaptés aux lois de distribution du modèle de cavité idéal, nous avons mis en évidence qu'effectivement, dans certains cas, les lois de distribution expérimentales ne correspondent pas tout à fait aux lois de Rayleigh et exponentielle. Lorsqu'il s'agit de collecter des mesures de puissance à l'aide d'une antenne de grande dimension, typiquement supérieure à  $\lambda/4$ , alors la distribution expérimentale est conforme à la loi exponentielle. Par contre, lorsque

l'antenne devient petite, la loi exponentielle n'est plus valide. *A fortiori*, lorsqu'il s'agit de relever des mesures de champ à l'aide d'une petite sonde la distribution des mesures d'une composante cartésienne ne correspond pas à la loi de Rayleigh.

Nous avons été amenés à rechercher une autre forme de loi de distribution dans les situations où les lois du modèle idéal n'étaient pas satisfaisantes. La loi de Weibull à deux paramètres est une bonne candidate puisqu'il s'agit d'une loi plus générale que les lois exponentielle et de Rayleigh, qui sont deux cas particuliers de Weibull. La littérature statistique nous donne les tests d'ajustement adaptés, ce qui est indispensable afin de pouvoir comparer les résultats des tests d'ajustement pour les lois du modèle idéal, avec les tests d'ajustement de la distribution de Weibull. Nous avons constaté un bien meilleur ajustement de la distribution de Weibull par rapport à la loi de Rayleigh ou la loi exponentielle. L'évolution des paramètres de la loi de Weibull montre que lorsque la fréquence d'excitation de la cavité augmente, la distribution expérimentale tend vers la distribution du modèle de cavité idéale. Nous mettons ainsi en évidence l'influence de la dimension du récepteur sur la distribution des mesures.

À notre connaissance, de tels résultats sont présentés pour la première fois. Nous les avons obtenus à l'aide d'analyses statistiques particulièrement rigoureuses et nombreuses, à partir d'un grand nombre d'expériences. La communauté des chambres réverbérantes est évidemment encouragée à répliquer ces résultats dans d'autres cavités, ce qui permettrait de généraliser la mise en évidence de l'influence de la dimension de l'antenne sur la distribution des mesures. Nous n'apportons pas de nouveaux fondements théoriques sur l'explication de telles disparités dans la distribution observée. Nous pensons simplement que le modèle de cavité idéal ne reflète pas scrupuleusement la réalité, en particulier la densité de modes réelle n'est pas infinie. De plus, le modèle physique couramment admis ne tient pas compte de l'influence de la dimension du récepteur.

Dans un second temps, nous avons souhaité approfondir l'estimation de l'indépendance des mesures. En particulier, le critère simple de non corrélation couramment adopté n'est pas satisfaisant et a déjà été remis en cause par d'autres auteurs. Puisque la fonction d'autocorrélation est aussi une variable aléatoire, l'estimation de son espérance demeure délicate. C'est pourquoi nous proposons de raisonner à partir d'un intervalle de confiance. De même que l'évaluation de la loi de distribution sous-jacente aux mesures, déterminer le nombre d'échantillons indépendants dont on dispose est capital pour estimer correctement le niveau d'incertitude de mesures.

À l'aide de l'estimation de la fonction d'autocorrélation pour une série de  $N$  mesures collectées par brassage des modes dans la cavité, nous avons introduit la notion de taille effective. Il s'agit du nombre effectif  $N'$  d'échantillons indépendants que contient la série de  $N$  mesures corrélées. Une évaluation correcte de  $N'$  permet de déterminer précisément l'efficacité de brassage, mécanique ou électronique. Nous avons cherché à développer une méthode simple et rapide facilitant l'estimation de cette taille effective. L'intérêt de cette démarche est de permettre à l'utilisateur de connaître au préalable les performances d'une chambre réverbérante, afin d'optimiser l'essai pour un niveau d'incertitude souhaité.

La vérification expérimentale du résultat donné par le théorème central limite est un moyen pratique de vérifier si l'on peut dans le cas des mesures en CRBM assimiler indépendance et absence de corrélation. Nous avons montré que pour le brassage électronique, l'incertitude de mesures estimée à partir de la connaissance de la taille effective correspond précisément au niveau d'incertitude donné par le TCL. Par contre, dans le cas du brassage mécanique, nous avons mis en évidence un biais, que nous ne parvenons pas encore à expliquer autrement que par la présence d'une dépendance résiduelle entre différents secteurs parcourus par le brasseur mécanique. Nous espérons poursuivre ces investigations dans le futur.

D'une manière générale, puisque les résultats produits par cette thèse sont liés au fonctionnement général de la CRBM, et en particulier concernant des propriétés sur lesquelles la plupart des applications de la CRBM reposent, nous espérons que ces travaux permettront d'améliorer la conduite d'essais en chambre réverbérante. En fin de ce document, nous avons souhaité présenter quelques applications bénéficiant des résultats que nous avons obtenus pendant cette thèse.

Si l'on tient compte des lois de distribution réellement observées en CRBM, le gabarit correspondant au protocole normatif de calibrage d'une chambre se trouve profondément modifié. En particulier, il n'est pas équivalent d'utiliser le même gabarit quel que soit le nombre de positions de sonde que l'on utilise, ou encore quel que soit le nombre de maximums que l'on retient pour estimer un écart type. Nous montrons aussi qu'un protocole de calibrage basé sur des mesures de puissance peut conduire à des résultats très différents par rapport à un calibrage basé sur des mesures de champ. Nous rappelons également qu'il est plus difficile de raisonner sur l'estimation d'une grandeur maximum que sur l'estimation d'une grandeur moyenne. En particulier, la loi de distribution théorique est une fonction à valeurs dans  $[0; +\infty[$ , or, en pratique, nous ne pouvons observer des mesures de puissance ou de champ extrêmement élevées par rapport à l'espérance.

Nous avons souhaité ouvrir les applications de la CRBM au domaine des antennes, en particulier à leur caractérisation. D'une part, puisque l'on peut contrôler l'incertitude de mesure par la connaissance des lois de distribution et du nombre d'échantillons indépendants, nous pouvons mesurer plus ou moins précisément des paramètres tels que l'efficacité de rayonnement et le gain de diversité. Dans ces domaines, plus encore que pour la CEM, nous avons besoin d'un très grand nombre d'échantillons indépendants pour obtenir des mesures particulièrement précises. D'où l'intérêt de bien maîtriser l'efficacité de brassage de la chambre réverbérante.

Par ailleurs, on se rend compte progressivement que la chambre réverbérante est particulièrement intéressante pour générer différents scénarios de canaux de propagation. Dans cette situation également, afin de pouvoir contrôler le canal créé, nous avons besoin de maîtriser correctement des paramètres tels que la bande de cohérence et le DSR (ou facteur K), indiquant la proportion de trajet direct par rapport aux réflexions multiples. Nous avons proposé une nouvelle méthode de détermination de ce paramètre, basée sur l'évaluation de la distribution de Rice à partir des mesures des parties complexes du para-



mètre de transmission  $S_{21}$ . En ce qui concerne la bande de cohérence, nous montrons que son évaluation est relativement simple par la méthode d'estimation de la taille effective basée sur les modèles autorégressifs.

Puisque nous souhaitons ouvrir également d'autres perspectives à ces travaux, nous détaillons ci-après succinctement quelles pourraient être les suites à mener à ces recherches, en lien étroit avec les résultats que nous avons obtenus.

# Perspectives

## Comportement de la CRBM à très basse fréquence

Les propriétés de la chambre réverbérante en régime de cavité sur-dimensionnée ont fait l'objet de nombreuses études, comme nous l'avons rappelé dans l'état de l'art en introduction de ce document. Nous constatons néanmoins que les recherches liées à ce régime de fonctionnement apportent des informations nouvelles, comme la possibilité d'un mauvais ajustement des lois de distribution du modèle idéal pour des mesures relevées à l'aide de capteurs de petite dimension. Cependant, bien que quelques auteurs se soient intéressés au régime de cavité sous-dimensionnée [41, 22, 42, 43], il demeure délicat à très basse fréquence d'associer une loi de probabilité théorique à la distribution sous-jacente des mesures. En particulier, une question importante est jusqu'où peut-on descendre en fréquence de manière à pouvoir conserver une uniformité du champ suffisante, et adosser la distribution des mesures à une loi de probabilité? Bunting [42] et Orjubin [43] ont proposé la distribution de Weibull dans le cas d'un régime de cavité sous-dimensionnée. Cependant, nos résultats montrent que cette loi n'est pas systématiquement acceptable à proximité de la  $LUF$  (Fig. 3.15).

Mener des recherches approfondies sur le comportement des mesures en régime de cavité sous-dimensionnée serait particulièrement profitable, puisque cela permettrait d'exploiter une CRBM à plus basse fréquence qu'on ne le peut aujourd'hui. En particulier, définir précisément la limite de fonctionnement demeure approximatif et dépend du critère que l'on retient. Si l'on considère les lois de distribution du modèle idéal, ou la loi de distribution de Weibull, nous n'obtiendrons pas la même fréquence minimale d'utilisation pour des mesures de champ. En outre, le fait de se baser sur les tests d'ajustement, ne conduit pas nécessairement à la même fréquence minimale d'utilisation que si l'on considère un protocole de calibrage normatif (cf. chapitre 8) basé sur l'écart type d'un maximum. Ainsi, une définition communément admise de la fréquence minimale d'utilisation de la cavité serait profitable à l'ensemble de la communauté CRBM. En particulier, la définition de la  $LUF$  peut varier selon les auteurs, qui considèrent entre 3 et 6 fois la première fréquence de la cavité, tandis que d'autres l'identifient à la fréquence d'excitation du 60<sup>e</sup> mode de résonance de la cavité.

## Optimisation de la géométrie du brasseur

De nombreux auteurs ont affirmé la nécessité de mener des travaux concernant l'optimisation de la géométrie du brasseur de modes [18, 69, 70, 72, 49, 50]. Nous savons que le brasseur de modes, pour être efficace, doit occuper un volume suffisamment important, et que l'effet du diamètre est prépondérant sur la hauteur du brasseur [50]. Cela laisse libre cours à l'imagination, et nous constatons dans la réalité que les brasseurs utilisés sont de formes très diverses. Il n'existe donc pas encore une géométrie particulière qui fasse l'unanimité.

Cependant, on peut imaginer qu'une géométrie particulière, simple ou complexe, et non encore déterminée, apporte un gain significatif sur le nombre de positions de brasseur indépendantes. La méthode d'estimation de l'efficacité de brassage basée sur les modèles autorégressifs (cf. partie II) pourrait être aisément intégrée en simulation numérique afin de déterminer rapidement le type de brasseur optimal, qui peut produire un maximum d'échantillons indépendants.

## Etude du brassage mécanique continu

Un avantage du mode continu sur le mode pas à pas du brassage mécanique est la réduction importante du temps passé à réaliser les essais. Cependant, la plupart des études se basent sur un fonctionnement pas à pas du brasseur de modes, puisque cela permet de s'affranchir de la vitesse de rotation du brasseur qui peut influencer la distribution des mesures [13]. Il serait néanmoins intéressant de vérifier expérimentalement pour des vitesses de rotation peu élevées, si l'on observe bien les mêmes lois de distribution qu'en régime pas à pas. Par ailleurs, pour des vitesses de rotation plus élevées, la chambre réverbérante pourrait être utilisée afin d'introduire une modulation basse fréquence du signal, engendrée par la rotation du brasseur.

## Comparaison d'essais CA/CRBM et optimisation d'un essai en immunité en chambre réverbérante

Un axe d'investigation particulièrement intéressant pour les applications CEM concerne la comparaison entre les essais d'immunité en chambre anéchoïque et ces mêmes essais en chambre réverbérante [59]. Les industriels demeurent plus confiants dans les essais en immunité réalisés en chambre anéchoïque, puisque ce moyen d'essais est utilisé depuis fort longtemps, et les résultats sont plus simples à interpréter. Il faut reconnaître que parvenir à corréler les résultats de tests d'immunité en CA et en CRBM est une tâche particulièrement délicate, en particulier parce qu'il est encore difficile d'évaluer la directivité d'un objet sous test en CRBM. Alors que le test d'immunité en CA est à caractère déterministe, la chambre réverbérante apporte une information statistique sur le

défaut observé d'un appareil testé en immunité. L'incertitude sur l'estimation du seuil d'immunité est fonction à la fois de la loi de distribution du champ incident au niveau de l'appareil, et du nombre de conditions de brassage indépendantes générées au sein de la cavité.

Les normes proposent actuellement une estimation du seuil d'immunité à partir d'une phase de calibrage, permettant d'estimer l'espérance du maximum de champ généré dans le volume utile de la cavité, pour un certain nombre de positions indépendantes du brasseur. L'estimation de cette espérance est assez approximative puisqu'elle se base sur la collecte d'un nombre relativement faible de maximums de champ [2, 6]. Il serait intéressant, en particulier, de quantifier précisément le niveau d'incertitude sur l'estimation du seuil d'immunité compte tenu de cette phase de calibrage. En outre, en fonction du niveau d'incertitude souhaité sur l'estimation du seuil d'immunité, nous pourrions bénéficier de plus ou moins de positions de brasseur et de plus ou moins d'estimations du maximum. A notre avis, ce genre d'étude permettrait de clarifier la notion de seuil d'immunité déterminée à partir de mesures en chambre réverbérante, et de séduire un peu plus les utilisateurs potentiels de ce moyen d'essais.

Cela étant, compte tenu des propriétés statistiques de la CRBM, la démarche consistant à évaluer une probabilité de défaillance et initiée par Marvin [124], paraît plus séduisante que l'approche adoptée par les normes. Cette notion de probabilité de défaut est récurrente dans des disciplines liées à l'analyse quantitative de risques, tels les milieux bancaires et les assurances. A notre avis, cette démarche exploite pleinement les spécificités de la chambre réverbérante et c'est dans ce sens que les travaux de recherche sur les tests d'immunité en CRBM doivent s'orienter. Ce type de test permettrait de connaître la probabilité de défaut d'un système électronique, pour un niveau de champ particulier émis dans l'environnement de ce système. Cette information est bien plus riche que la seule connaissance d'un seuil d'immunité que l'on ne peut évaluer qu'approximativement.



# Liste des publications de l'auteur

## Revue internationale à comité de lecture

1] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Advanced method for estimating number of independent samples available with stirrer in reverberation chamber", *Electronics Letters*, vol. 43, no. 16, pp. 861-862, Aug. 2007.

2] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Investigations of reverberation chamber measurements through high-power goodness-of-fit tests", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 49, no. 4, pp. 745-755, Nov. 2007.

3] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Estimating the effective sample size to select independent measurements in a reverberation chamber", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 50, no. 2, pp. 227-236, May 2008.

## Revue nationale à comité de lecture

4] P. Besnier, C. Lemoine, M. Serhir, "La mesure pour l'évaluation de la compatibilité électromagnétique - Principes, méthodes et évolutions récentes", *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, Lavoisier, 30 pages, Mai 2008.

## Communications internationales avec actes et à comité de lecture

5] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Antenna size sensitivity on the statistic of received power measurements in a reverberation chamber", *EMC Europe Workshop 2007*, Paris, France, 5 pages, Jun. 2007.

6] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Effect of the size of the antenna on measurements distribution in reverberation chamber", *18th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Munich, Germany, pp. 461-464, Sep. 2007.

7] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, "Using Autoregressive models to estimate the number of independent samples available with stirrer rotation in reverberation chamber", *18th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Munich, Germany, pp. 469-472, Sep. 2007.

8] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, “Proposition de gabarits adaptés au calibrage des chambres réverbérantes à brassage de modes”, 14<sup>e</sup> *Colloque International CEM 08*, Paris, France, 6 pages, Mai 2008.

9] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, “Evaluation of frequency and mechanical stirring efficiency in a reverberation chamber”, *EMC Europe 2008*, Hamburg, Germany, 6 pages, Sep. 2008.

## Communication nationale avec actes et à comité de lecture

10] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, “Caractérisation statistique fine de différents environnements électromagnétiques en chambre réverbérante”, *Journée scientifique du CNFRS/URSI*, Paris, France, 6 pages, Mai 2008.

## Communication nationale sans actes

11] C. Lemoine, P. Besnier, M. Drissi, “Using AR models to estimate the number of independant samples available with stirrer rotation in reverberation chamber”, *GdR Ondes “Interférences d’Ondes”*, Pessac, France, Novembre 2007.

# ANNEXES





# Annexe A

## Lois de distribution dans le cas de mesures rapportées à la moyenne

Il est particulièrement intéressant lors d'une étude statistique des mesures en CRBM de considérer non pas les mesures directement relevées, mais les mesures rapportées à leur valeur moyenne. En effet, dans ce cas, nous ne tenons pas compte de la puissance injectée par l'antenne d'émission. Cela permet de généraliser le comportement statistique des mesures, et ainsi de comparer différentes chambres réverbérantes.

### Distribution de $E_R^2/\langle E_R^2 \rangle$

Connaissant la loi d'une composante cartésienne de champ au carré  $E_R^2$ , quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $E_R^2/\langle E_R^2 \rangle$  ? En particulier, nous nous intéresserons aussi aux expressions de la moyenne et de l'écart type.

Soit  $X$  une variable aléatoire (v.a.) distribuée selon la loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. Soit  $V$  la v.a. telle que  $V = X/\langle X \rangle$ . Alors, pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons les relations suivantes, dans lesquelles  $\mathcal{P}$  désigne la probabilité :

$$\mathcal{P}[V \leq v] = \mathcal{P}\left[\frac{X}{\langle X \rangle} \leq v\right] = \mathcal{P}[X \leq v \cdot \langle X \rangle] = \Phi(v \cdot \langle X \rangle), \quad (\text{A.1})$$

et  $\Phi$  est la fonction de répartition (CDF) de la loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. D'où la fonction de répartition de la loi de  $V$  :

$$F(v) = \begin{cases} \Phi(v \cdot \langle X \rangle) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Par conséquent, la densité de probabilité (PDF) de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d\Phi(v \cdot \langle X \rangle)}{dv} & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Avec la notation  $\Phi'(v) = \frac{d\Phi(v)}{dv}$ , nous pouvons écrire la PDF de la variable aléatoire  $V$  comme indiqué par la relation (A.4). Pour tout réel  $v \geq 0$ , nous avons :

$$f(v) = \langle X \rangle \cdot \Phi'(v \cdot \langle X \rangle) = e^{-v}. \quad (\text{A.4})$$

D'où l'expression de la loi de distribution de la v.a.  $X$  rapportée à sa valeur moyenne  $\langle X \rangle$ , et appliquée au cas où  $X = E_R^2$  :

$$f(y) = e^{-y} \quad \text{avec } y = \frac{E_R^2}{\langle E_R^2 \rangle}. \quad (\text{A.5})$$

Dans ce cas, la moyenne et l'écart type s'expriment très simplement :

$$\begin{cases} \langle E_R^2 / \langle E_R^2 \rangle \rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_R^2 / \langle E_R^2 \rangle}} = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.6})$$

Nous reconnaissons en (A.5) à l'aide de la relation (1.6) une loi de type  $\chi^2$  à 2 degrés de libertés, de paramètre  $\sigma = 1/\sqrt{2}$ . Connaissant la densité de probabilité, nous pouvons en déduire la fonction de répartition de la v.a.  $E_R^2 / \langle E_R^2 \rangle$  :

$$F(y) = 1 - e^{-y}. \quad (\text{A.7})$$

### Distribution de $E_R / \langle E_R \rangle$

De même que pour une composante rectangulaire au carré, il est utile de maîtriser la loi de distribution d'une composante rectangulaire de champ rapportée à sa valeur moyenne. Partons de la loi de distribution de  $E_R^2 / \langle E_R^2 \rangle$  afin de déterminer la loi de  $E_R / \langle E_R \rangle$ .

Soit la v.a.  $X$  qui suit une loi de distribution du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. Donc d'après (A.5), la v.a.  $X / \langle X \rangle$  suit aussi une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. Il s'agit ici de déterminer la loi de la v.a.  $\sqrt{X} / \langle \sqrt{X} \rangle$ . Nous savons déjà que la valeur moyenne de  $X$  s'écrit simplement  $\langle X \rangle = 2\sigma^2$ . Nous aurons besoin par la suite de connaître l'expression de  $\langle \sqrt{X} \rangle$ , c'est ce que nous allons d'abord calculer.

– Par définition nous avons :

$$\langle \sqrt{X} \rangle = \int_0^\infty \sqrt{x} f(x) dx \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.8})$$

D'où nous pouvons écrire :

$$\langle \sqrt{X} \rangle = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} dx. \quad (\text{A.9})$$

Après un changement de variable où nous posons  $w = x/\sigma^2$ , nous pouvons simplifier l'écriture de la manière suivante :

$$\langle \sqrt{X} \rangle = \frac{\sigma}{2} \int_0^\infty w^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{2}} dw. \quad (\text{A.10})$$

L'intégrale ci-dessus peut se calculer à l'aide de la fonction Gamma d'Euler qui s'écrit pour un réel  $n \geq 0$  :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx. \quad (\text{A.11})$$

Et en particulier pour  $n = \frac{3}{2}$ , nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx. \quad (\text{A.12})$$

De nouveau, après un changement de variables où nous posons  $w = 2x$ , nous obtenons l'intégrale que nous cherchons à calculer :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} w^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{2}} dw. \quad (\text{A.13})$$

D'où :

$$\langle \sqrt{X} \rangle = \frac{\sigma}{2} \times 2\sqrt{2} \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \quad (\text{A.14})$$

Sachant les relations  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  et  $\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1)$ , nous en déduisons  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Par conséquent nous obtenons l'expression recherchée :

$$\langle \sqrt{X} \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{A.15})$$

Ce qui donne le rapport suivant, utile pour la suite (A.21) :

$$\frac{\langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle} = \frac{\frac{\pi}{2} \sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{A.16})$$

– Revenons au calcul de la loi de la v.a.  $\sqrt{X}/\langle \sqrt{X} \rangle$  que nous notons plus simplement par  $V$ . Alors pour tout  $v \geq 0$  nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[V \leq v] &= \mathcal{P}\left[\frac{\sqrt{X}}{\langle \sqrt{X} \rangle} \leq v\right] = \mathcal{P}[X \leq v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{X}{\langle X \rangle} \leq \frac{v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle}\right] = \Phi\left(\frac{v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la v.a.  $X/\langle X \rangle$ , *i.e.*  $\Phi$  est la CDF de la loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté pour des valeurs rapportées à la moyenne, et est donnée par (A.7). Afin de connaître la loi de  $\sqrt{X}/\langle \sqrt{X} \rangle$ , il nous faut déterminer la densité de probabilité de la v.a.  $V$ , sachant que sa fonction de répartition s'écrit d'après (A.17) :

$$F(v) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle}\right) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

D'où la PDF de la v.a.  $V$  s'écrit :

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{d}{dv} \Phi\left(\frac{v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle}\right) & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{si } v < 0, \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

or d'après les calculs précédents (A.7) et (A.16), nous savons que :

$$\Phi\left(\frac{v^2 \cdot \langle \sqrt{X} \rangle^2}{\langle X \rangle}\right) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}v^2}. \quad (\text{A.20})$$

Il en résulte l'expression de la loi de distribution de la v.a.  $\sqrt{X}$  rapportée à sa valeur moyenne  $\langle \sqrt{X} \rangle$  :

$$f(z) = \frac{\pi}{2} z e^{-\frac{\pi}{4}z^2} \quad \text{avec } z = \frac{E_R}{\langle E_R \rangle}. \quad (\text{A.21})$$

Dans ce cas, la moyenne et l'écart type de la v.a.  $z$  s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \langle E_R / \langle E_R \rangle \rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_R / \langle E_R \rangle}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \end{cases}. \quad (\text{A.22})$$

En (A.21), nous reconnaissons à l'aide de (1.9) une loi de type  $\chi$  à 2 degrés de liberté, de paramètre  $\sigma = \sqrt{2/\pi}$ . Connaissant la densité de probabilité, nous en déduisons la fonction de répartition :

$$F(z) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}z^2}. \quad (\text{A.23})$$

### Distribution de $E_T / \langle E_T \rangle$

Soit maintenant  $\Phi$  la fonction de répartition de la v.a.  $X$  suivant une loi du  $\chi$  à 6 degrés de liberté. D'après (A.3) avec cette fois  $\Phi$  la CDF de la loi du  $\chi$  à 6 degrés de liberté et  $X$  suivant une telle loi, et l'expression de  $\langle X \rangle$  donnée par (1.14), nous avons accès à la densité de probabilité de la v.a.  $E_T / \langle E_T \rangle$ , dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$f(y) = \left(\frac{15}{16}\right)^6 \pi^3 y^5 e^{-\left(\frac{15}{16}\right)^2 \pi y^2} \quad \text{avec } y = \frac{E_T}{\langle E_T \rangle}. \quad (\text{A.24})$$

Nous reconnaissons à partir de (1.13) une loi du type  $\chi$  à 6 degrés de liberté, de paramètre  $\sigma = \frac{16}{15\sqrt{2\pi}}$ . La moyenne et l'écart type ont alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \langle E_T / \langle E_T \rangle \rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_T / \langle E_T \rangle}} = \frac{16}{15} \sqrt{\frac{3}{\pi} - \frac{225}{256}} \end{cases}. \quad (\text{A.25})$$

Nous pouvons vérifier que le rapport écart type sur moyenne vaut environ 0,294. A titre indicatif, nous ajoutons aussi la fonction de répartition de la v.a.  $E_T / \langle E_T \rangle$  :

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{225}{256} \pi y^2} \left( \frac{50625}{131072} \pi^2 y^4 + \frac{225}{256} \pi y^2 + 1 \right). \quad (\text{A.26})$$

### Distribution de $E_T^2/\langle E_T^2 \rangle$

Il nous reste pour le champ, à caractériser la distribution des mesures de champ total au carré, rapportées à la valeur moyenne. De la même manière que nous l'avons écrit dans la section précédente pour le champ total, il est possible de démontrer que la densité de probabilité de la v.a.  $E_T^2/\langle E_T^2 \rangle$  s'écrit :

$$f(z) = \frac{27}{2} z^2 e^{-3z} \quad \text{avec } z = \frac{E_T^2}{\langle E_T^2 \rangle}. \quad (\text{A.27})$$

Nous reconnaissons à l'aide de la relation (1.16) une loi du  $\chi^2$  à 6 degrés de liberté, de paramètre  $\sigma = 1/\sqrt{6}$ . Les expressions de la valeur moyenne et l'écart type sont alors :

$$\begin{cases} \langle E_T^2/\langle E_T^2 \rangle \rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{E_T^2/\langle E_T^2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}. \quad (\text{A.28})$$

D'où nous pouvons vérifier que le ratio écart type / moyenne est bien d'environ 0,577. Pour terminer sur les lois de distribution du champ dans le cas d'une CRBM idéale, il nous reste à indiquer l'expression de la CDF :

$$F(z) = 1 - e^{-3z} \left( \frac{9}{2} z^2 + 3z + 1 \right). \quad (\text{A.29})$$

Notons qu'il peut être plus intéressant de travailler sur le carré des mesures de champ total plutôt que sur les mesures de  $E_T$ , car les expressions théoriques sont plus simples à manipuler.

### Distribution de $P/\langle P \rangle$

En ce qui concerne la puissance moyennée, mesurée en réception d'une antenne, la distribution sous-jacente engendrée par l'effet du brassage des modes se déduit aisément de ce qui a été établi pour les mesures de champ rapportées à leur moyenne. De même que pour la v.a.  $E_R^2$  (A.5), nous pouvons exprimer aisément la loi de distribution de la v.a.  $P$  rapportée à sa valeur moyenne  $\langle P \rangle$  :

$$f(y) = e^{-y} \quad \text{avec } y = \frac{P}{\langle P \rangle}. \quad (\text{A.30})$$

La moyenne ainsi que l'écart type s'écrivent très simplement :

$$\begin{cases} \langle P/\langle P \rangle \rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{P/\langle P \rangle}} = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.31})$$

Il s'agit bien sûr (1.21) d'une loi de type  $\chi^2$  à 2 degrés de libertés, de paramètre  $\sigma_I \sqrt{R_r} = 1/\sqrt{2}$ . Connaissant la densité de probabilité, nous en déduisons la fonction de répartition de la v.a.  $P/\langle P \rangle$  :

$$F(y) = 1 - e^{-y}. \quad (\text{A.32})$$

### Distribution de $\sqrt{P}/\langle\sqrt{P}\rangle$

Nous avons démontré plus haut (A.21) que, puisque la puissance  $P$  suit une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté, alors la v.a.  $\sqrt{P}/\langle\sqrt{P}\rangle$  suit une loi du  $\chi$  à 2 degrés de liberté de densité de probabilité :

$$f(z) = \frac{\pi}{2} z e^{-\frac{\pi}{4}z^2} \quad \text{avec } z = \frac{\sqrt{P}}{\langle\sqrt{P}\rangle}. \quad (\text{A.33})$$

Dans ce cas, la moyenne et l'écart type s'écrivent :

$$\begin{cases} \langle\sqrt{P}/\langle\sqrt{P}\rangle\rangle = 1 \\ \sqrt{\text{Var}_{\sqrt{P}/\langle\sqrt{P}\rangle}} = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.34})$$

Nous reconnaissons bien une loi de type  $\chi$  à 2 degrés de liberté (1.25), de paramètre  $\sigma_I\sqrt{R_r} = \sqrt{2/\pi}$ . Connaissant la densité de probabilité, nous en déduisons la fonction de répartition :

$$F(z) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}z^2}. \quad (\text{A.35})$$

# Annexe B

## Démonstration de la relation (6.17)

Cette annexe démontre le résultat de la limite en probabilité donné en relation (6.17), que l'on utilise afin d'aboutir à une relation simple de la taille effective pour un modèle AR d'ordre 1. Soit  $V_N$  la variance de l'expression pour laquelle nous recherchons la limite en probabilité :

$$V_N = \text{var} \left[ \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \cdot \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Le développement suivant nous donne une borne supérieure pour  $V_N$ , à l'aide de la relation  $\text{corr}(y_N, y_0) \geq -1$  que l'on utilise en dernière étape,

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{1}{N} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \right)^2 \text{var}(y_N - y_0) \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \right)^2 [\text{var}(y_N) + \text{var}(y_0) - 2 \text{covar}(y_N, y_0)] \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \right)^2 [\sigma_y^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_y^2 \text{corr}(y_N, y_0)] \\ &\leq \frac{4\sigma_y^2}{N} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

La notation "corr" désigne le coefficient de corrélation. Ce développement suppose que  $|\Phi_{11}| < 1$ , qui est la condition de stationnarité de  $y_t$  (6.3), ce qui permet de s'assurer de la convergence de  $\sigma_y^2$  et d'écrire  $\text{var}(y_N) = \text{var}(y_0) = \sigma_y^2$ . Par ailleurs, l'inégalité de Tchebychev [125] s'écrit pour une variable aléatoire  $W$  et un réel  $\delta > 0$  quelconque :

$$\mathcal{P}(|W - E(W)| > \delta) \leq \frac{\text{var}(W)}{\delta^2}. \quad (\text{B.3})$$

Cette relation appliquée à  $\Phi_{11}(y_N - y_0)/[(1 - \Phi_{11})\sqrt{N}]$  nous donne

$$\mathcal{P} \left( \left| \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \cdot \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right| > \delta \right) \leq \frac{4\sigma_y^2}{N\delta^2} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$



et montre que pour un réel  $\delta > 0$  quelconque,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left( \left| \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \cdot \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right| > \delta \right) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Par conséquent,

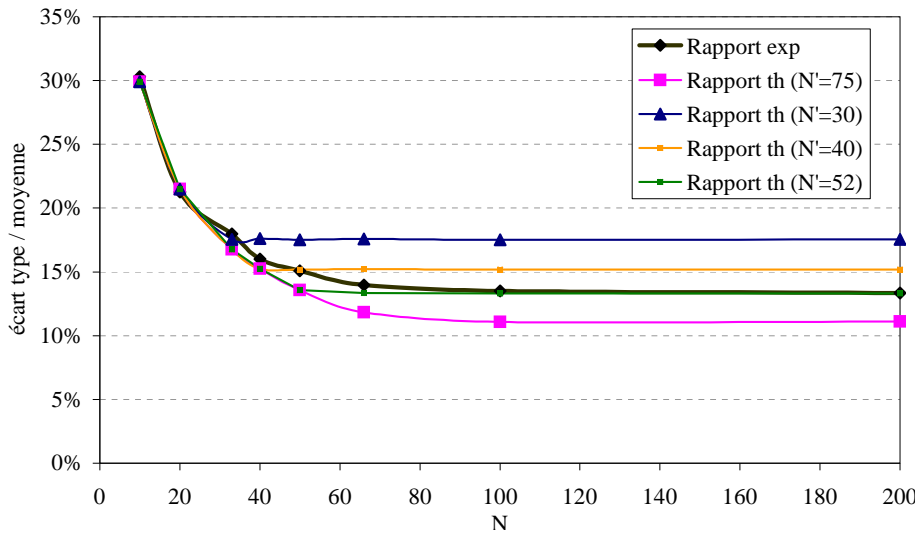
$$\text{plim} \left( \frac{\Phi_{11}}{1 - \Phi_{11}} \cdot \frac{y_N - y_0}{\sqrt{N}} \right) = 0. \quad (\text{B.6})$$

# Annexe C

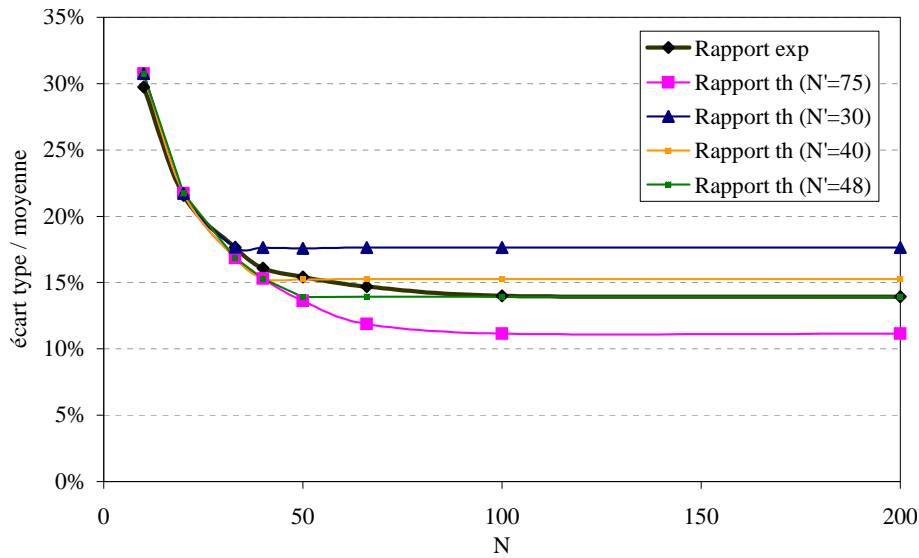
## Détermination de $N'$ pour différentes sections parcourues par le brasseur

### C.1 Division en 2 moitiés

Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N'$  sur un tour complet du brasseur au voisinage de 700 MHz, en subdivisant ce dernier en deux moitiés (Fig. 7.18).



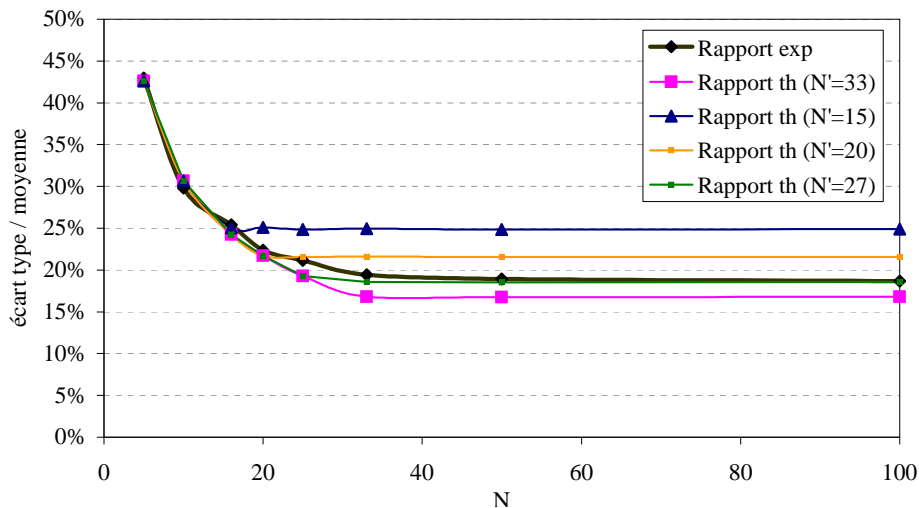
**FIG. C.1:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x} / \mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 200$  positions sur la 1<sup>ère</sup> moitié du tour complet.



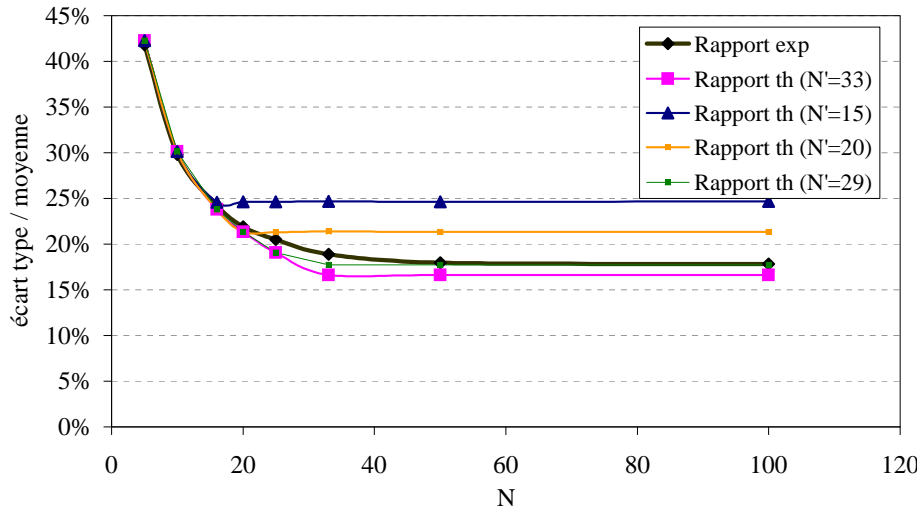
**FIG. C.2:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 200$  positions sur la 2<sup>ème</sup> moitié du tour complet.

## C.2 Division en 4 quarts

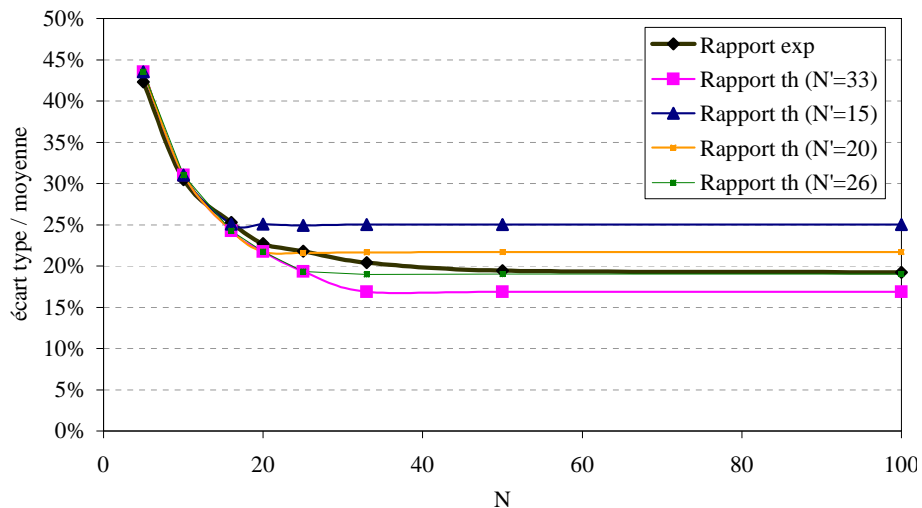
Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N'$  sur un tour complet du brasseur, en subdivisant ce dernier en quatre quarts (Fig. 7.18).



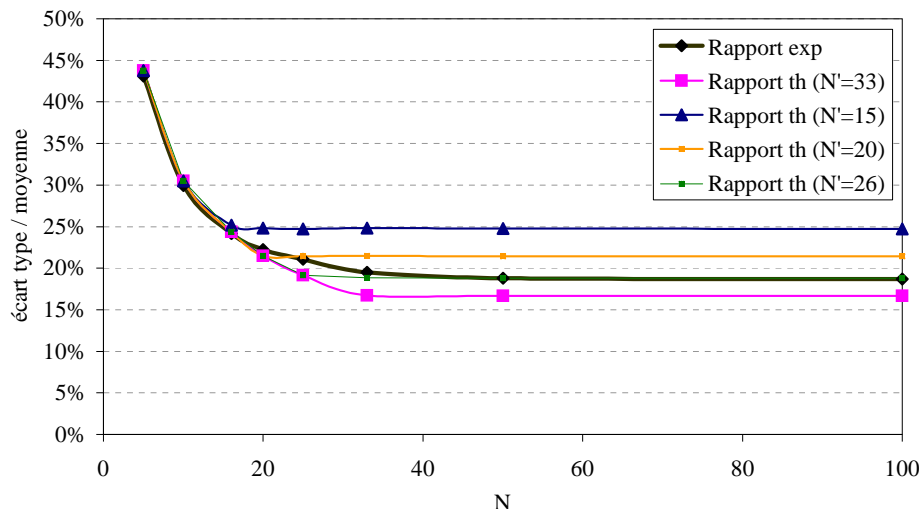
**FIG. C.3:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 100$  positions sur le 1<sup>er</sup> quart du tour complet.



**FIG. C.4:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 100$  positions sur le 2<sup>ème</sup> quart du tour complet.



**FIG. C.5:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 100$  positions sur le 3<sup>ème</sup> quart du tour complet.



**FIG. C.6:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 100$  positions sur le 4<sup>ème</sup> quart du tour complet.

### C.3 Division en 8 huitièmes

Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N'$  sur un tour complet du brasseur, en subdivisant ce dernier en huit huitièmes (Fig. 7.18).

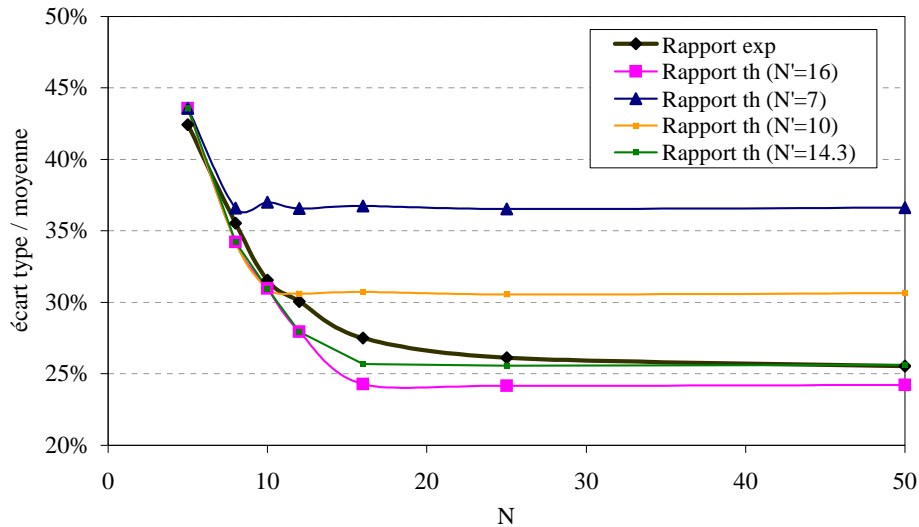


FIG. C.7: Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 1<sup>er</sup> huitième du tour complet.

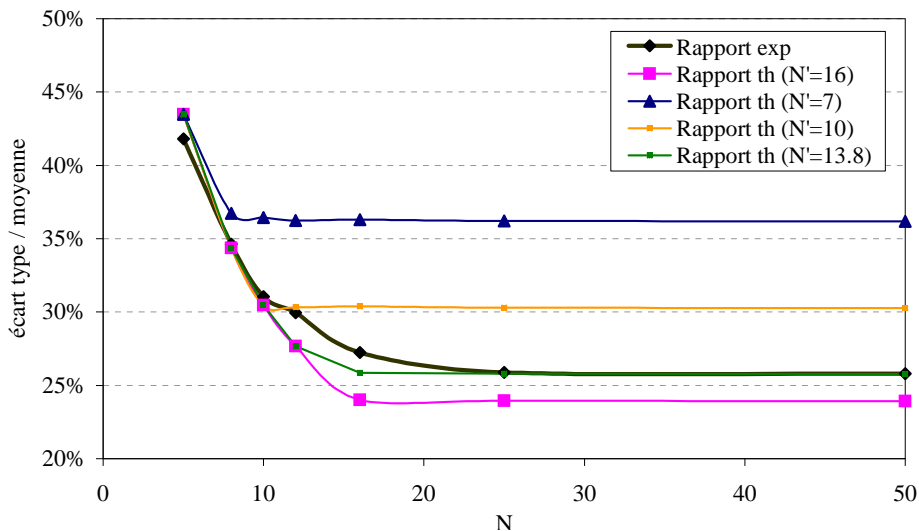
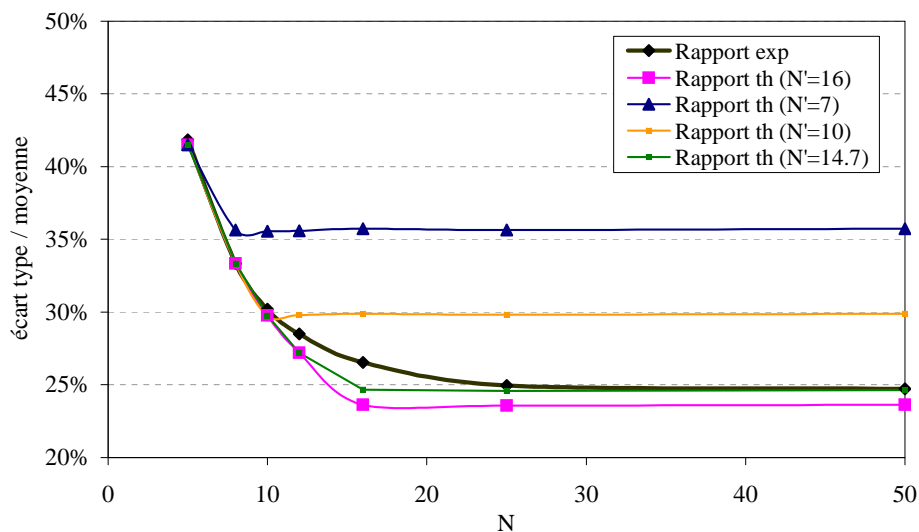
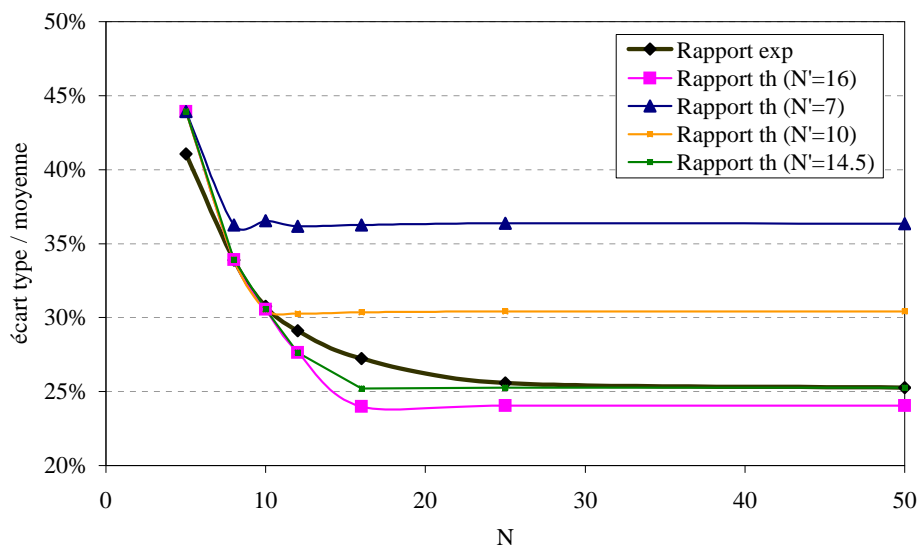


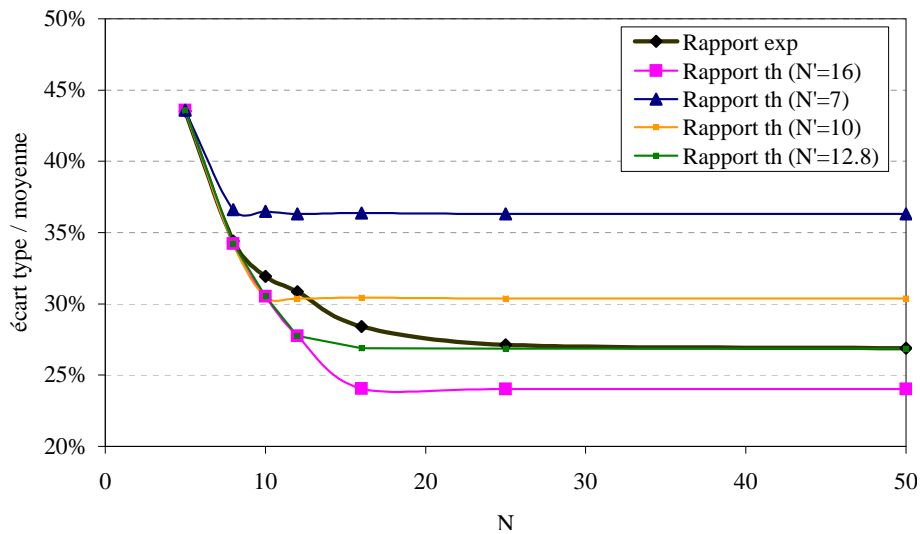
FIG. C.8: Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 2<sup>ème</sup> huitième du tour complet.



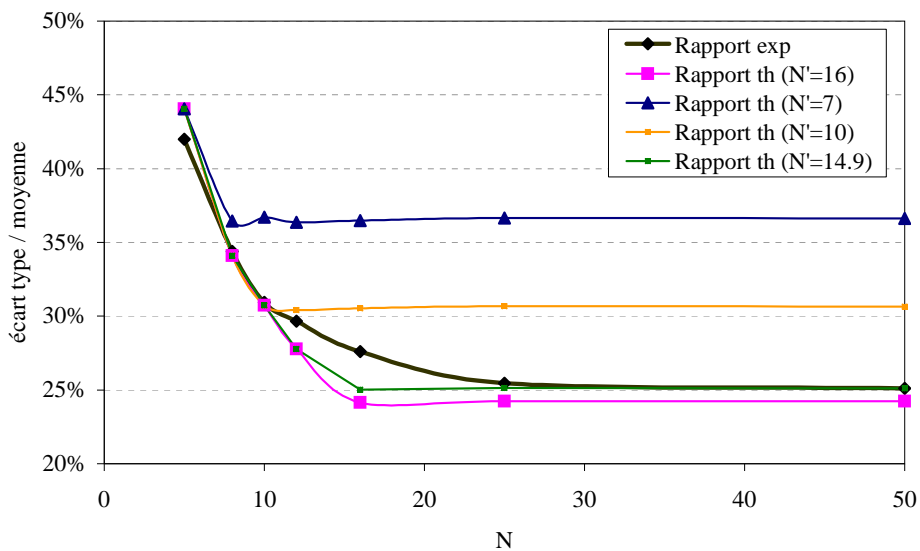
**FIG. C.9:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 3<sup>ème</sup> huitième du tour complet.



**FIG. C.10:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 4<sup>ème</sup> huitième du tour complet.

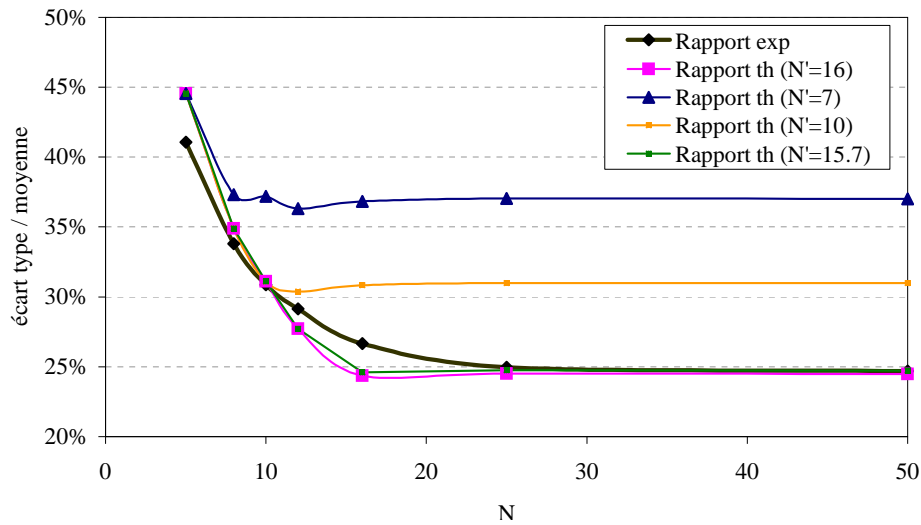


**FIG. C.11:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 5<sup>ème</sup> huitième du tour complet.

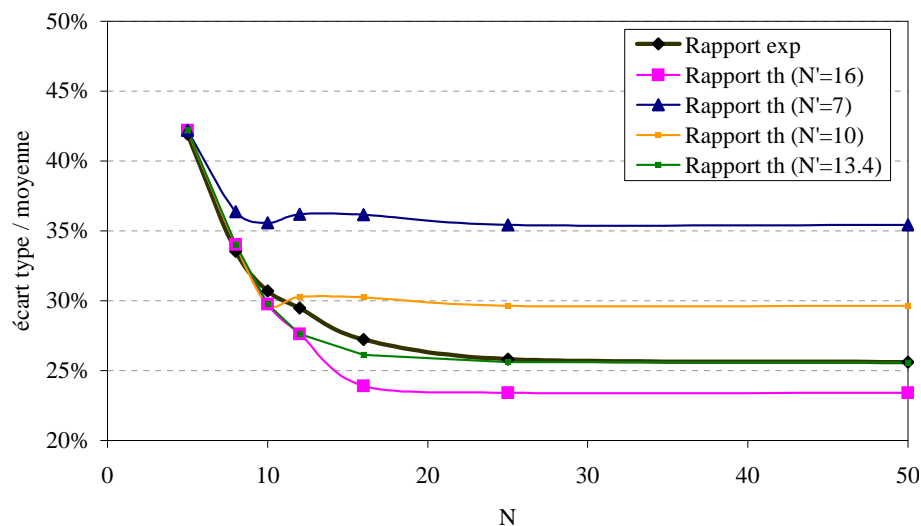


**FIG. C.12:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 6<sup>ème</sup> huitième du tour complet.





**FIG. C.13:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 7<sup>ème</sup> huitième du tour complet.



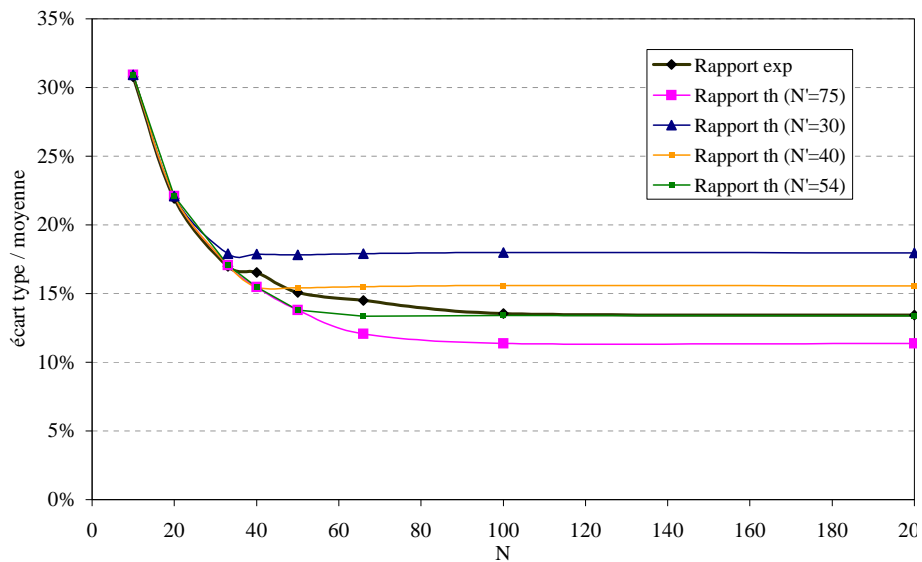
**FIG. C.14:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 8<sup>ème</sup> huitième du tour complet.

# Annexe D

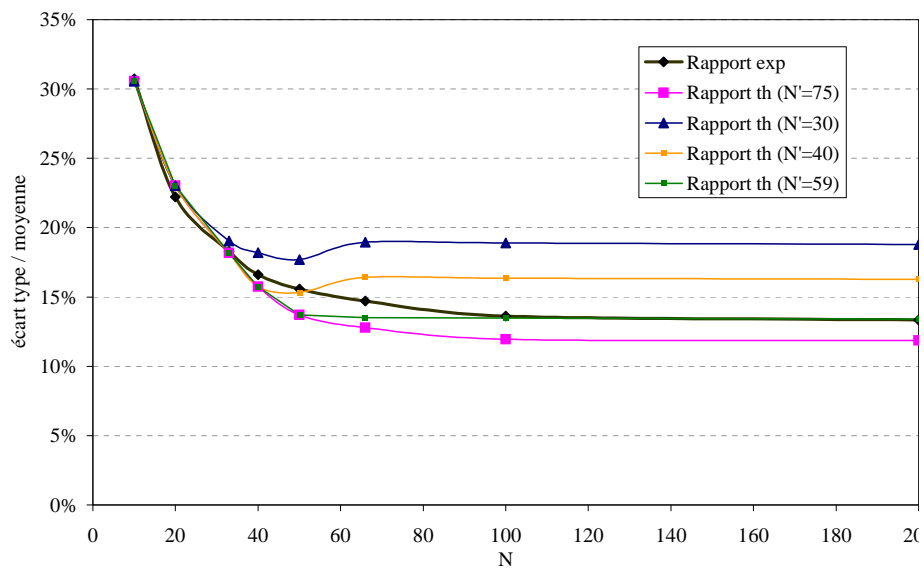
## Détermination de $N''$ pour différentes subdivisions de la bande de fréquences [690 MHz ; 710 MHz]

### D.1 Division en 2 moitiés

Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N''$  disponibles dans la bande [690 MHz – 710 MHz], en subdivisant cette dernière en deux moitiés (Fig. 7.18).



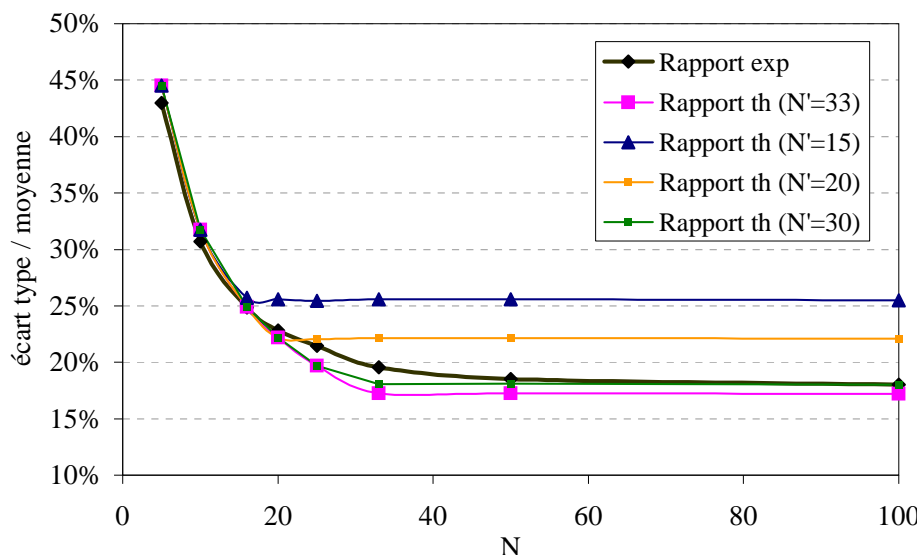
**FIG. D.1:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 200$  fréquences sur la 1<sup>ère</sup> moitié de la bande.



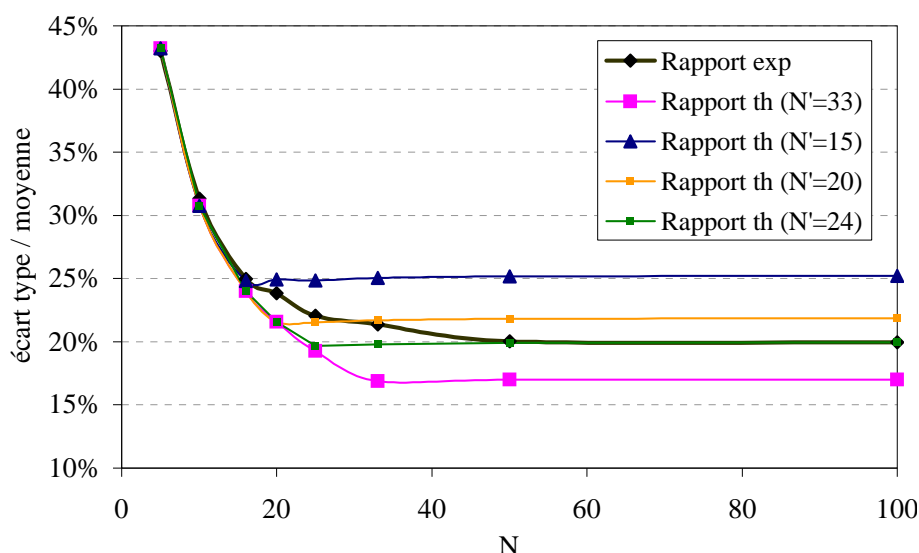
**FIG. D.2:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 200$  fréquences sur la 2<sup>ème</sup> moitié de la bande.

## D.2 Division en 4 quarts

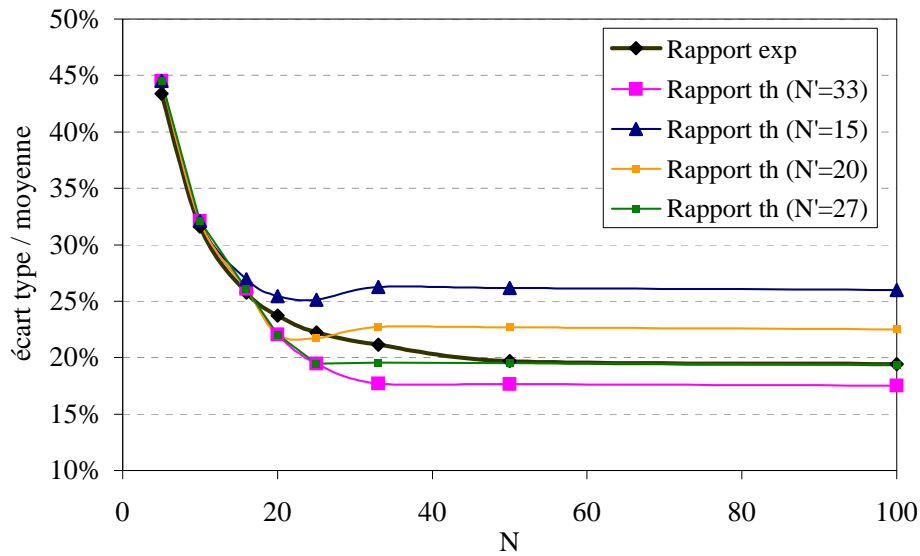
Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N''$  disponibles dans la bande [690 MHz – 710 MHz], en subdivisant cette dernière en quatre quarts (Fig. 7.18).



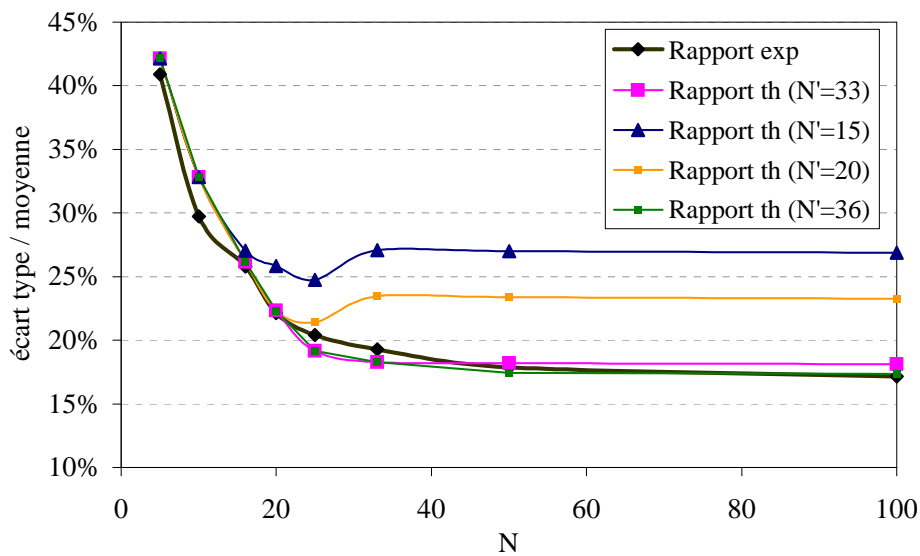
**FIG. D.3:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 100$  fréquences sur le 1<sup>er</sup> quart de la bande.



**FIG. D.4:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 100$  fréquences sur le 2<sup>ème</sup> quart de la bande.



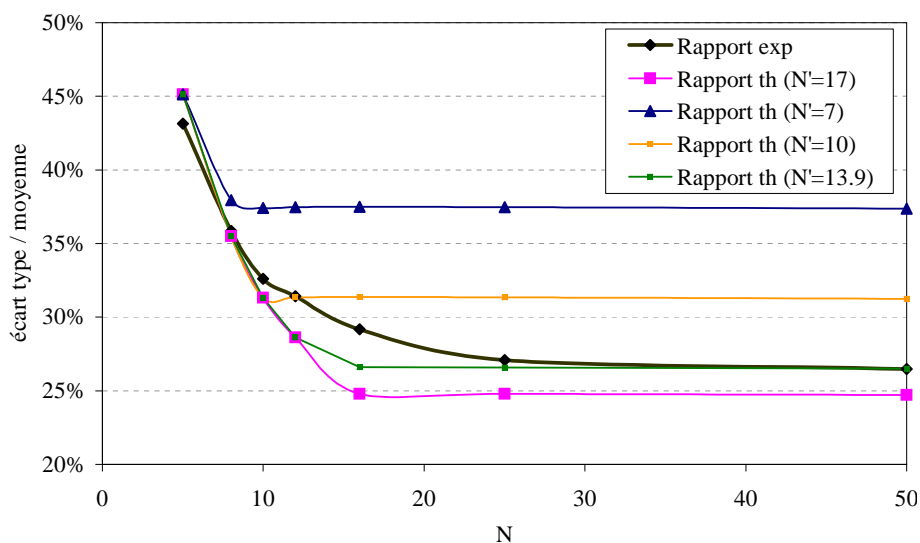
**FIG. D.5:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 100$  fréquences sur le 3<sup>ème</sup> quart de la bande.



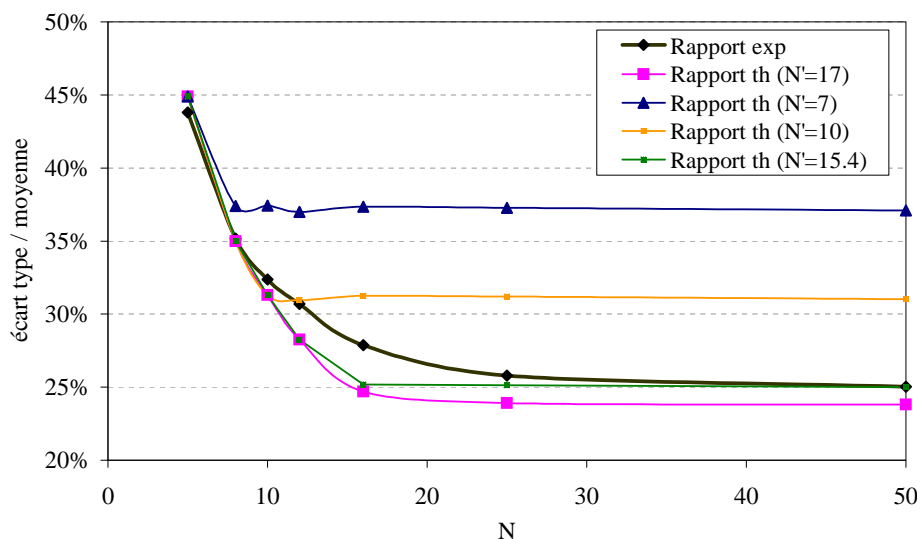
**FIG. D.6:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 100$  fréquences sur le 4<sup>ème</sup> quart de la bande.

### D.3 Division en 8 huitièmes

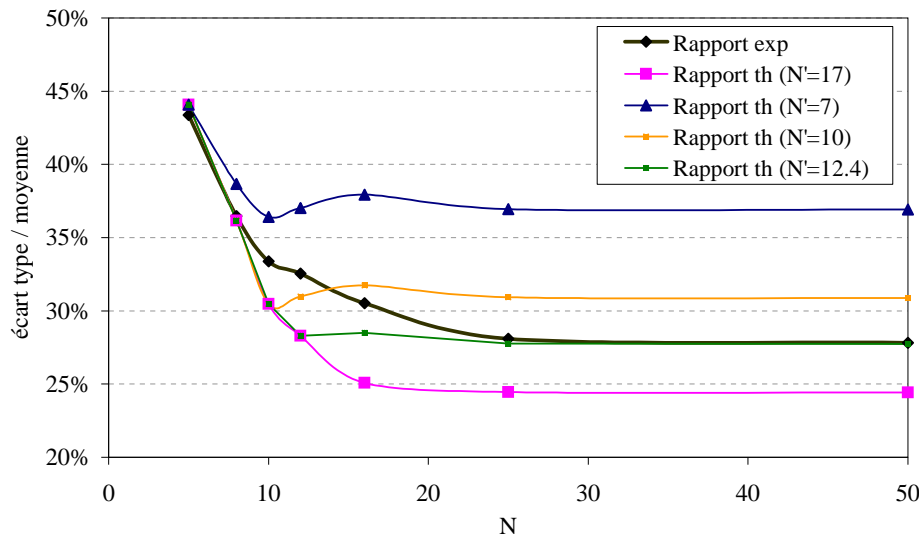
Cette section fait référence à la section 7.3.3, où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N''$  disponibles dans la bande [690 MHz – 710 MHz], en subdivisant cette dernière en huit huitièmes (Fig. 7.18).



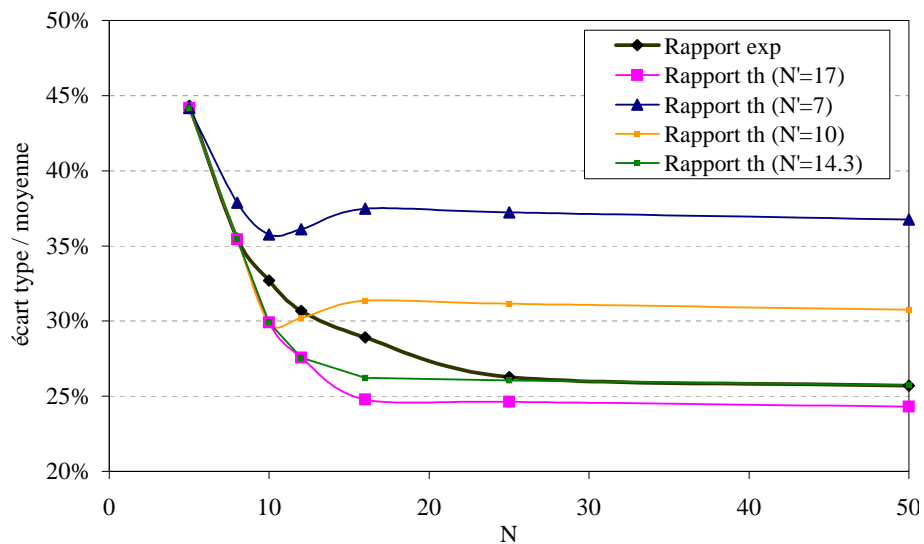
**FIG. D.7:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 1<sup>er</sup> huitième de la bande.



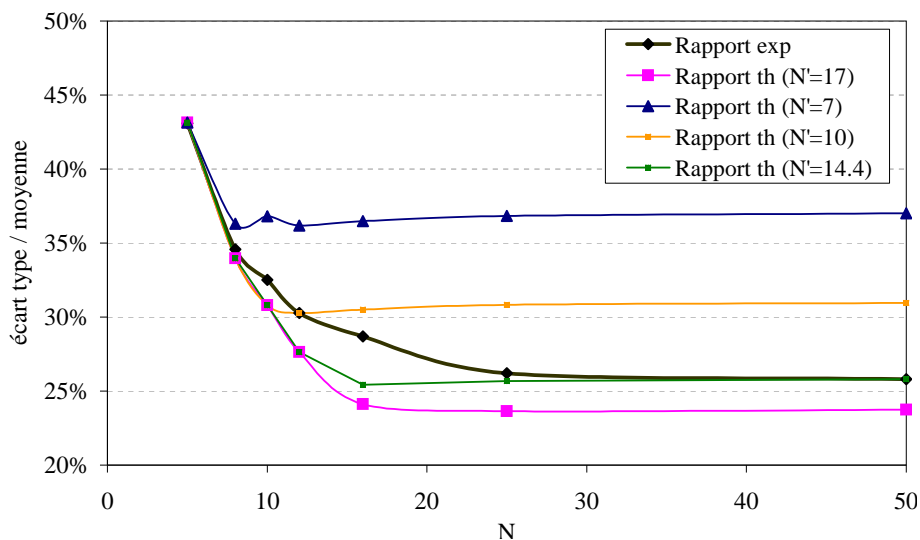
**FIG. D.8:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 2<sup>ème</sup> huitième de la bande.



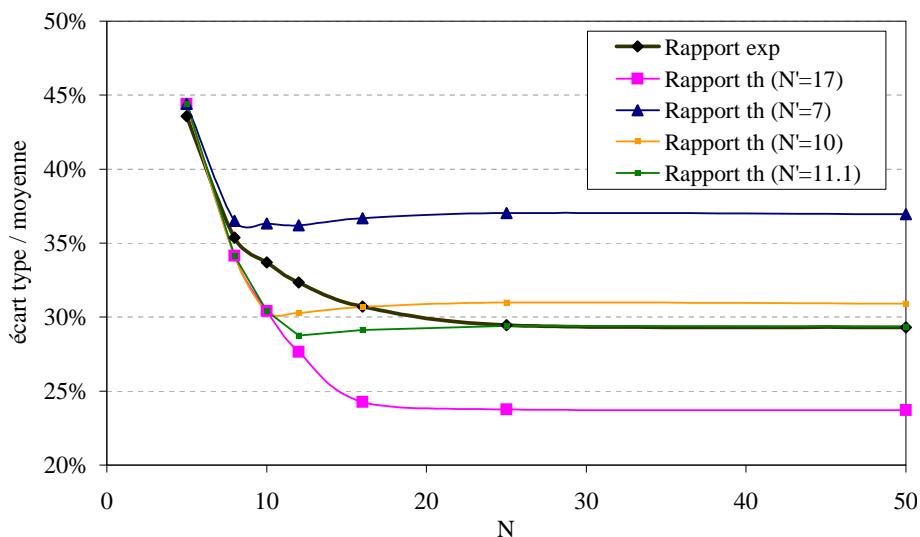
**FIG. D.9:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 3<sup>ème</sup> huitième de la bande.



**FIG. D.10:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 4<sup>ème</sup> huitième de la bande.

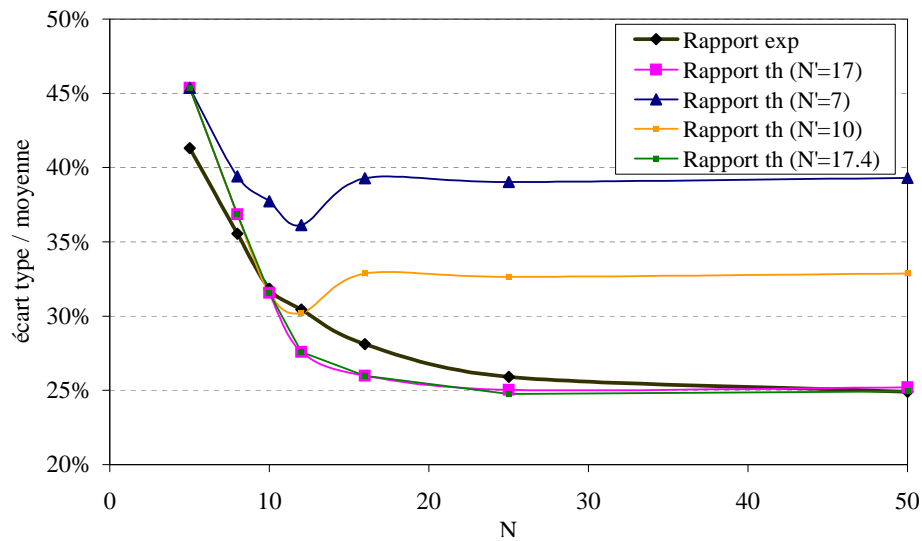


**FIG. D.11:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 5<sup>ème</sup> huitième de la bande.

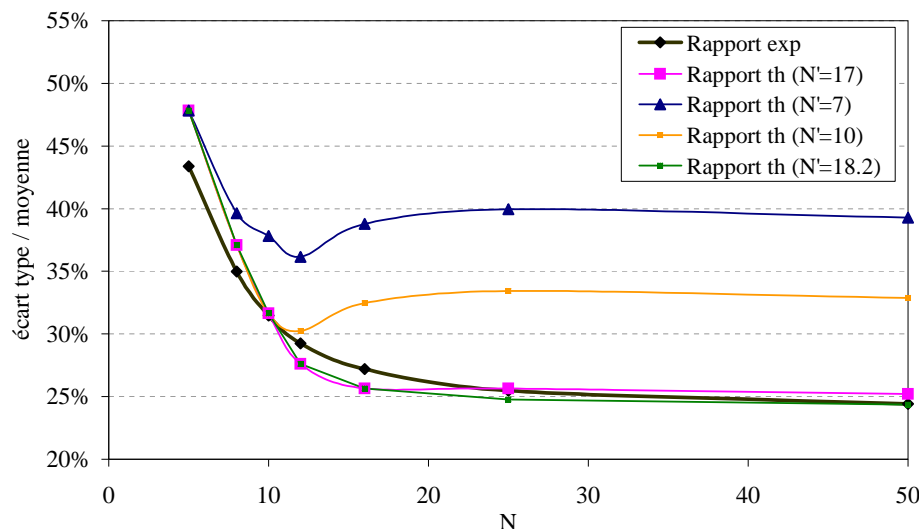


**FIG. D.12:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 6<sup>ème</sup> huitième de la bande.





**FIG. D.13:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 7<sup>ème</sup> huitième de la bande.



**FIG. D.14:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage fréquentiel, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N''$  de fréquences indépendantes disponibles parmi  $N = 50$  fréquences sur le 8<sup>ème</sup> huitième de la bande.

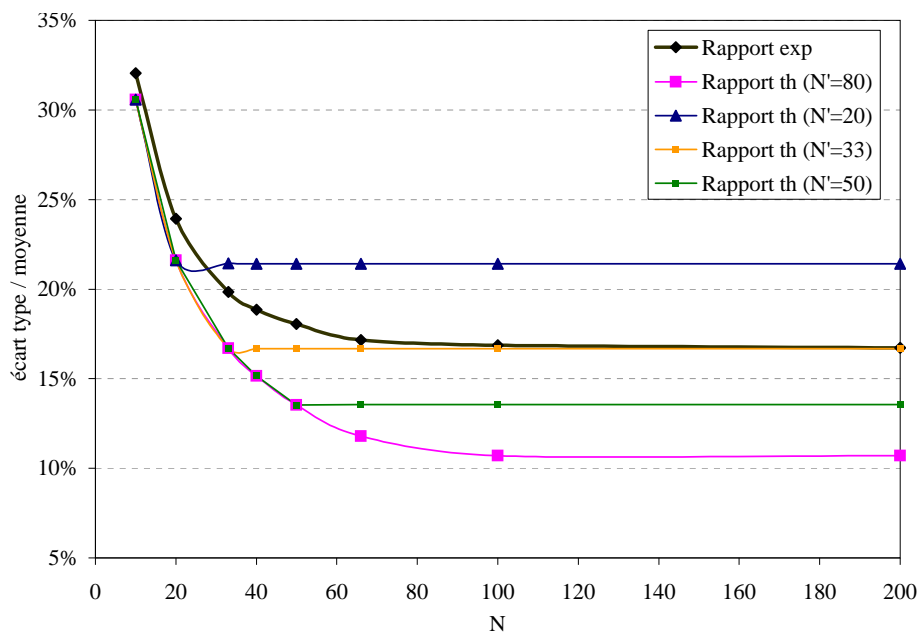
# Annexe E

## Détermination de $N'$ pour différentes sections parcourues par le brasseur constitué d'une seule pale

Cette section fait référence à la section [7.3.3](#), où l'on présente le résultat de l'estimation du nombre d'échantillons indépendants  $N'$  sur un tour complet du brasseur au voisinage de 700 MHz, mais dans le cas où l'on a simplifié au maximum la géométrie du brasseur qui n'est plus constitué que d'une pale (la plus haute, cf. photo en figure [6.1](#)).

### E.1 Sur un tour complet

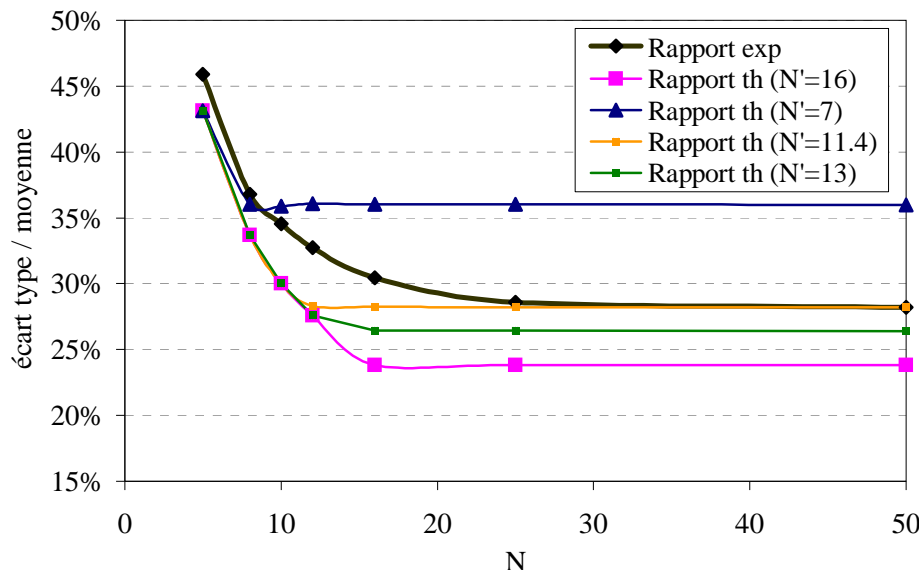
D'après la figure [E.1](#), le brasseur constitué d'une seule pale permet d'obtenir 33 échantillons indépendants sur un tour complet à 700 MHz, au lieu de 80 (cf. Fig. [7.14](#)) dans le cas du brasseur constitué de 6 pales.



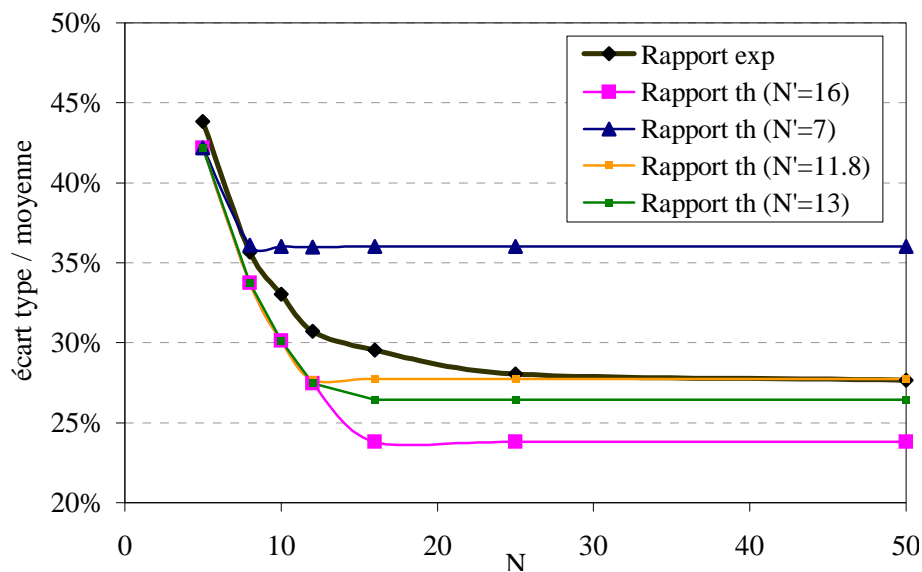
**FIG. E.1:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 200$  positions sur un tour complet.

## E.2 Division en 4 quarts

Si l'on étudie séparément chaque quart de la section totale parcourue par le brasseur, la somme des positions de brasseur indépendantes devient :  $11, 4+11, 8+11, 6+11, 9 \approx 47$ . Cela est bien supérieur à 33, et confirme le fait qu'il n'apparaît pas équivalent d'étudier la section totale parcourue par le brasseur ou plusieurs subdivisions de cette section totale (cf. Fig. 7.18). Cela pourrait indiquer que ces subdivisions ne soient pas strictement indépendantes.



**FIG. E.2:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 1<sup>er</sup> quart du tour complet.



**FIG. E.3:** Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 2<sup>ème</sup> quart du tour complet.

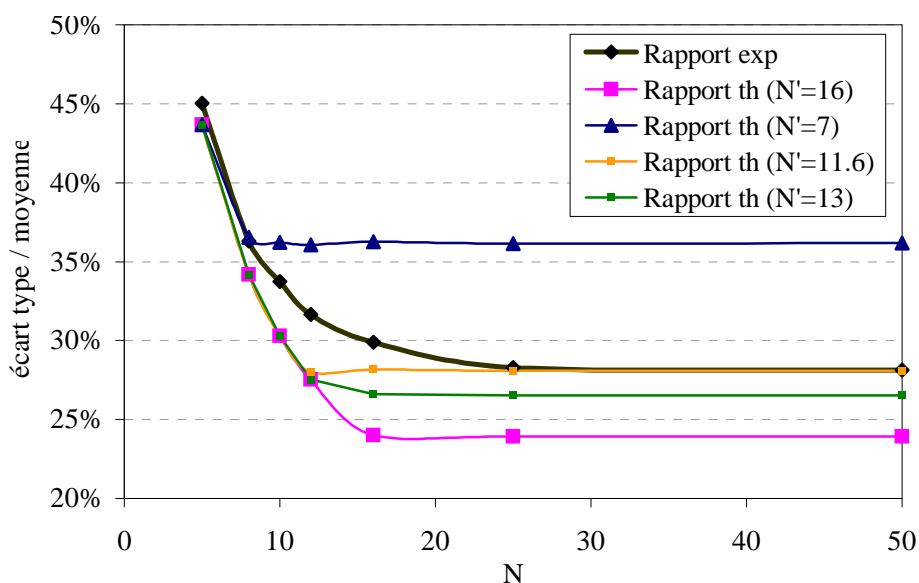


FIG. E.4: Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 3<sup>ème</sup> quart du tour complet.

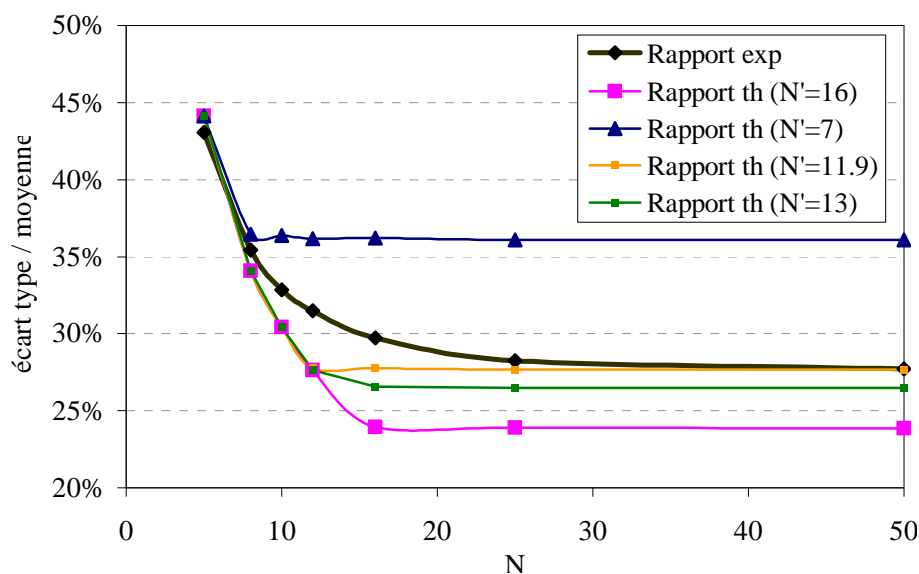


FIG. E.5: Comparaison des ratios  $\sigma_{\mu_x}/\mu_x$  théoriques et expérimentaux dans le cas d'un brassage mécanique, en fonction de plusieurs évolutions théoriques selon le nombre  $N'$  de positions de brasseur indépendantes parmi  $N = 50$  positions sur le 4<sup>ème</sup> quart du tour complet.

# BIBLIOGRAPHIE



# Bibliographie

- [1] F. Masson, “Explosion d’un silo de céréales à blaye (33),” INERIS - Ministère de l’Aménagement du Territoire et de l’Environnement,” Rapport de synthèse, 1998.
- [2] *IEC 61000-4-21: “Reverberation chamber test methods”*, International Electrotechnical Commission Std., 2003.
- [3] B.-H. Liu, D. C. Chang, and M. T. Ma, “Eigenmodes and the composite quality factor of a reverberating chamber,” National Bureau of Standards, USA,” Technical Note 1066, 1983.
- [4] D. A. Hill and J. M. Ladbury, “Spatial-correlation functions of fields and energy density in a reverberation chamber,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 1, pp. 95–101, Feb. 2002.
- [5] D. A. Hill, “Plane wave integral representation for fields in reverberation chambers,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 40, no. 3, pp. 209–217, Aug. 1998.
- [6] *DO-160D: “Environmental conditions and test procedures for airborne equipment”*, RTCA Std., 2000.
- [7] M. L. Crawford, “Electromagnetic field measurements in low Q enclosures,” National Bureau of Standards (NBS),” Tech. Rep., 1972.
- [8] P. Corona, G. Latmiral, E. Paolini, and L. Piccioli, “Use of a reverberating enclosure for measurements of radiated power in the microwave range,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 18, no. 2, pp. 54–59, May 1976.
- [9] M. L. Crawford and G. H. Koepke, “Design, evaluation, and use of a reverberation chamber for performing electromagnetic susceptibility/vulnerability measurements,” National Bureau of Standards (NBS),” Tech. Note 1092, 1986.
- [10] ———, “Electromagnetic radiation test facilities: evaluation of reverberation chambers loaded at NSWCCD,” National Bureau of Standards (NBS),” Tech. Rep., 1986.
- [11] J. L. Bean and R. A. Hall, “Electromagnetic susceptibility measurements using a mode-stirred chamber,” in *IEEE International Symposium on EMC*, Atlanta, GA, 1978.
- [12] P. Corona, G. Latmiral, and E. Paolini, “Performance and analysis of a reverberating enclosure with variable geometry,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 22, no. 1, pp. 2–5, Feb. 1980.



- [13] P. Corona, J. Ladbury, and G. Latmiral, "Reverberation-chamber research - then and now: a review of early work and comparison with current understanding," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 1, pp. 87–94, Feb. 2002.
- [14] D. A. Hill, M. T. Ma, A. R. Ondrejka, B. F. Riddle, M. L. Crawford, and R. T. Johnk, "Aperture excitation of electrically large, lossy cavities," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 36, no. 3, pp. 169–178, Aug. 1994.
- [15] D. A. Hill, "Spatial correlation function for fields in a reverberation chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 37, no. 1, p. 138, Feb. 1995.
- [16] —, "A reflection coefficient derivation for the Q of a reverberation chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 38, no. 4, pp. 591–592, Nov. 96.
- [17] —, "Electromagnetic theory of reverberation chambers," National Institute of Standards and Technology (NIST), Tech. Note 1506, 1998.
- [18] P. Corona, G. Ferrara, and M. Migliaccio, "Reverberating chambers as sources of stochastic electromagnetic fields," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 38, no. 3, pp. 348–356, Aug. 1996.
- [19] —, "A spectral approach for the determination of the reverberating chamber quality factor," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 40, no. 2, pp. 145–153, May 1998.
- [20] P. Corona, "Reverberating chamber electromagnetic field in presence of an unstirred component," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 42, no. 2, pp. 111–115, May 2000.
- [21] P. Corona, G. Ferrara, and M. Migliaccio, "Polarimetric field characterization in reverberating chambers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 46, no. 2, pp. 155–159, May 2004.
- [22] —, "Generalized stochastic field model for reverberating chambers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 46, no. 4, pp. 655–660, Nov. 2004.
- [23] M. O. Hatfield, G. J. Freyer, D. M. Johnson, and C. Farthing, "Demonstration test of the electromagnetic reverberation characteristics of a transport size aircraft," Naval Surface Warfare Center Dahlgren Division (NSWCDD), Tech. Rep., 1994.
- [24] M. O. Hatfield, J. L. Bean, G. J. Freyer, and D. M. Johnson, "Repeatability of mode-stirred chamber measurements," in *IEEE International Symposium on EMC*, Chicago, USA, 1994, pp. 485–490.
- [25] M. O. Hatfield, G. J. Freyer, and M. B. Scocum, "Reverberation characteristics of a large welded steel shielded enclosure," in *IEEE International Symposium on EMC*, Austin, Texas, 1997, pp. 38–43.
- [26] G. J. Freyer, M. O. Hatfield, D. Mark Johnson, and M. B. Slocum, "Comparison of measured and theoretical statistical parameters of complex cavities," in *IEEE International Symposium on EMC*, Santa Clara, California, Aug. 1996, pp. 250–253.

- [27] G. J. Freyer, T. H. Lehman, J. M. Ladbury, G. H. Koepke, and M. O. Hatfield, "Verification of fields applied to an EUT in a reverberation chamber using statistical theory," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Denver, USA, Aug. 1998, pp. 34–38.
- [28] J. M. Ladbury and K. R. Goldsmith, "Reverberation chamber verification procedures, or, how to check if your chamber ain't broke and suggestions on how to fix it if it is," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Washington, USA, Aug. 2000, pp. 17–22.
- [29] L. Jansson and M. Bäckström, "Directivity of equipment and its effect on testing in mode-stirred and anechoic chamber," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Seattle, Washington, Aug. 1999, pp. 17–22.
- [30] O. Lundén and M. Bäckström, "Stirrer efficiency in FOA reverberation chambers. Evaluation of correlation coefficients and chi-squared tests," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Washington DC, USA, Aug. 2000, pp. 11–16.
- [31] L. R. Arnaut and P. D. West, "Evaluation of the untuned stadium reverberation chamber using mechanical and electronic stirring techniques," Center for Electromagnetic Metrology, Nat. Phys. Laboratory, United Kingdom," NPL Report CEM 11, Aug. 1998.
- [32] ———, "Electric field probe measurements in the NPL untuned stadium reverberation chamber," Center for Electromagnetic Metrology, Nat. Phys. Laboratory, United Kingdom," Tech. Rep., 1999.
- [33] ———, "Effect of antenna aperture, EUT and stirrer step size on measurements in mode-stirred reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Washington, USA, Aug. 2000, pp. 29–34.
- [34] L. R. Arnaut, "Effect of local stir and spatial averaging on measurement and testing in mode-tuned and mode-stirred reverberation chambers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 43, no. 3, pp. 305–325, Aug. 2001.
- [35] T. H. Lehman, G. J. Freyer, M. O. Hatfield, J. M. Ladbury, and G. H. Koepke, "Verification of fields applied to an EUT in a reverberation chamber using numerical modeling," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Denver, USA, Aug. 1998, pp. 28–33.
- [36] U. Carlberg, P.-S. Kildal, A. Wolfgang, O. Sotoudeh, and C. Orlenius, "Characterization of lossy cylinder in reverberation chamber by computed and measured absorption cross sections," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 4, Columbus, OH, June 2003, pp. 719–722.
- [37] K. Harima, "Statistical characteristics of average, median, and maximum E-field distributions in reverberation chamber," in *EMC Europe*, Eindhoven, The Netherlands, Sept. 2004, pp. 750–755.

- [38] D. Appicciutoli, G. Buoncompagni, and V. Mariani Primiani, "Experimental activity in using a reverberation chamber for emission and shielding effectiveness measurements: comparison with traditional deterministic methods," in *EMC Europe*, Eindhoven, The Netherlands, Sept. 2004, pp. 717–722.
- [39] J. G. Kostas and B. Boverie, "Statistical model for a mode-stirred chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 33, no. 4, pp. 366–370, Nov. 1991.
- [40] T. M. Lammers, C. L. Holloway, and J. Ladbury, "The effects of loading configurations on the performance of reverberation chambers," in *EMC Europe*, Eindhoven, The Netherlands, Sept. 2004, pp. 727–732.
- [41] L. R. Arnaut, "Limit distributions for imperfect electromagnetic reverberation," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 2, pp. 357–377, May 2003.
- [42] C. F. Bunting, "Statistical characterization and the simulation of a reverberation chamber using finite-element techniques," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 1, pp. 214–221, Feb. 2002.
- [43] G. Orjubin, E. Richalot, S. Mengué, and O. Picon, "Statistical model of an undermoded reverberation chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 48, no. 1, pp. 248–250, Feb. 2006.
- [44] L. Huikan, "Spatial correlation functions of fields in a reverberation chamber based on expansion of spherical Bessel functions," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 48, no. 2, pp. 427–428, May 2006.
- [45] R. Holland and R. H. St. John, "Statistical response of EM-driven cables inside an overmoded enclosure," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 40, no. 4, pp. 311–324, Nov. 1998.
- [46] R. Serra and F. Canavero, "A one-dimensional interpretation of the statistical behavior of reverberation chambers," in *International Conference on Electromagnetics in advanced applications*, Torino, Italy, Sept. 2007, pp. 221–224.
- [47] G. Orjubin, "Modélisation modale d'une chambre réverbérante par la méthode des éléments finis : caractérisation de la perturbation induite par la rotation du bras-seur, application à l'analyse paramétrique des tests statistiques," Thèse de doctorat, Université de Marne La Vallée, France, 2005.
- [48] L. Musso, J. Bossé, V. Berat, and F. G. Canavero, "Critical study of calibration techniques for a reverberation chamber," in *Proc. of 14th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Zurich, Switzerland, Feb. 2001, pp. 659–662.
- [49] N. Wellander, O. Lundén, and M. Bäckström, "Parameter estimates for the stirrer efficiency in reverberation chambers," in *Proc. of 16th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Zurich, Switzerland, Feb. 2005, pp. 35–38.
- [50] —, "Experimental investigation and mathematical modeling of design parameters for efficient stirrers in mode-stirred reverberation chambers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 49, no. 1, pp. 94–103, Feb. 2007.

- [51] M. Pocai, I. Dotto, G. D'Abreu, and D. Festa, "Experimental definition of the lowest usable frequency (LUF) of an aluminum made reverberation chamber with reference to the IEC 61000-4-21 standard," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 3, Portland, Oregon, Aug. 2006, pp. 849–852.
- [52] D. Weinzierl, A. Raizer, and A. Kost, "Investigation of exciting fields in an alternative mode stirred chamber," in *EMC Europe*, Eindhoven, The Netherlands, Sept. 2004, pp. 723–726.
- [53] T. H. Lehman and G. J. Freyer, "Characterization of the maximum test level in a reverberation chamber," in *IEEE International Symposium on EMC*, Austin, Texas, Aug. 1997, pp. 44–47.
- [54] N. Wellander, O. Lundén, and M. Bäckström, "The maximum value distribution in a reverberation chamber," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 2, Montréal, Canada, Aug. 2001, pp. 751–756.
- [55] M. Höijer, "Maximum power available to stress onto the critical component in the equipment under test when performing a radiated susceptibility test in the reverberation chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 48, no. 2, pp. 372–384, May 2006.
- [56] G. Orjubin, "Maximum field inside a reverberation chamber modeled by the generalized extreme value distribution," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 49, no. 1, pp. 104–113, Feb. 2007.
- [57] D. A. Hill, D. G. Camell, K. H. Cavcey, and G. H. Koepke, "Radiated emissions and immunity of microstrip transmission lines: theory and reverberation chamber measurements," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 38, no. 2, pp. 165–172, May 1996.
- [58] G. Koepke, D. Hill, and J. Ladbury, "Directivity of the test device in EMC measurements," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 2, Washington, USA, Aug. 2000, pp. 535–539.
- [59] L. Musso, F. Canavero, B. Demoulin, and V. Berat, "Radiated immunity testing of a device with an external wire: repeatability of reverberation chamber results and correlation with anechoic chamber results," in *IEEE International Symposium on EMC*, Boston, USA, Aug. 2003, pp. 828–833.
- [60] S. Depienne, V. Monebhurrin, A. Azoulay, and J.-C. Bolomey, "The reverberating chamber: a useful tool to characterize the radiated power of small size RF devices," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Istanbul, Turkey, May 2003, pp. 461–464.
- [61] V. Fiumara, A. Fusco, V. Matta, and I. M. Pinto, "Free-space antenna field/pattern retrieval in reverberation environments," *IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett.*, vol. 4, pp. 329–332, 2005.

- [62] C. L. Holloway, D. A. Hill, J. M. Ladbury, P. F. Wilson, G. Koepke, and J. Coder, "On the use of reverberation chambers to simulate a rician radio environment for the testing of wireless devices," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 11, pp. 3167–3177, Nov. 2006.
- [63] P. F. Wilson, D. A. Hill, and C. L. Holloway, "On determining the maximum emissions from electrically large sources," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 1, pp. 79–86, Feb. 2002.
- [64] D. A. Hill, "Electronic mode stirring for reverberation chambers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 36, no. 4, pp. 294–299, Nov. 1994.
- [65] S.-P. Yu and C. Bunting, "Statistical investigation of frequency-stirred reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Boston, USA, Aug. 2003, pp. 155–159.
- [66] K. Madsén, P. Hallbjörner, and C. Orlenius, "Models for the number of independent samples in reverberation chamber measurements with mechanical, frequency, and combined stirring," *IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett.*, vol. 3, pp. 48–51, 2004.
- [67] N. K. Kouveliotis, P. T. Trakadas, and C. N. Capsalis, "Theoretical investigation of the field conditions in a vibrating reverberation chamber with an unstirred component," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 1, pp. 77–81, Feb. 2003.
- [68] H. G. Krauthäuser, T. Winzerling, J. Nitsch, N. Eulig, and A. Enders, "Statistical interpretation of autocorrelation coefficients for fields in mode-stirred chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 2, Chicago, USA, Aug. 2005, pp. 550–555.
- [69] D. Zhang and E. Li, "A fast technique to evaluate uniformity conformity to standards' requirement for a reverberation chamber at the low end of test frequency," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 12, no. 3, pp. 296–306, Mar. 2002.
- [70] O. Lundén and M. Bäckström, "A factorial designed experiment for evaluation of mode-stirrers in reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 1, Boston, USA, Aug. 2003, pp. 465–468.
- [71] M. Otterskog, "The influence of stirrer size and chamber load on the number of uncorrelated samples created in a reverberation chamber," in *Proc. of 16th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Zurich, Switzerland, Feb. 2005, pp. 43–46.
- [72] J. Clegg, A. C. Marvin, J. F. Dawson, and S. J. Porter, "Optimization of stirrer designs in a reverberation chamber," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 47, no. 4, pp. 824–832, Nov. 2005.
- [73] N. Wellander, O. Lundén, and M. Bäckström, "Design parameters for efficient stirring of reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 2, Portland, Oregon, Aug. 2006, pp. 263–268.

- [74] P. Hallbjörner, “A model for the number of independent samples in reverberation chambers,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 43, no. 1, pp. 25–28, Apr. 2002.
- [75] —, “Estimating the number of independent samples in reverberation chamber measurements from sample differences,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 48, no. 2, pp. 354–358, May 2006.
- [76] W. Hall, “Heating apparatus,” U.S. Patent 2 618 735, 1947.
- [77] C. Tai, “On the definition of effective aperture of antennas,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 9, pp. 224–225, Mar. 1961.
- [78] F. Petit, “Modélisation et simulation d’une chambre réverbérante à brassage de modes à l’aide de la méthode des différences finies dans le domaine temporel,” Thèse de doctorat, Université de Marne La Vallée, France, 2002.
- [79] F. J. Massey, “The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 46, pp. 68–78, 1951.
- [80] J. M. Ladbury, G. H. Koepke, and D. Camell, “Evaluation of the NASA Langley Research Center mode-stirred chamber facility,” United States Department of Commerce,” NIST Tech. Note 1508, Jan. 1999.
- [81] G. J. Freyer and M. O. Hatfield, “Reverberation chamber: theory and experiment,” US Naval Surface Warfare Center, Dahlgren Division, Dahlgren, VA, USA, Short course hosted by Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire TELICE et Polytech’Lille, Oct. 2002.
- [82] S. Girard, F. Diouf, and F. Paladian, “Correspondance champ-puissance en chambre réverbérante à brassage de modes (crbm),” in *CEM 06*, Saint-Malo, France, Apr. 2006.
- [83] J. H. Pollard, *Numerical and statistical techniques*. New York, USA: Cambridge University Press, 1977.
- [84] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [85] B. Grais, *Méthodes statistiques*. Paris, France: Dunod, 2003.
- [86] M. Fisz, *Probability theory and mathematical statistics*. New York, USA: John Wiley and Sons Inc., 1963.
- [87] M. R. Spiegel and L. J. Stephens, *Statistiques*. New York, USA: McGraw-Hill, 2000.
- [88] A. H. Bowker and G. J. Lieberman, *Méthodes statistiques de l’ingénieur*. Paris, France: Dunod, 1965.
- [89] H. W. Lilliefors, “On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 64, pp. 387–389, Mar. 1969.

- [90] G. Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistiques*. Paris, France: Technip, 2006.
- [91] M. A. Stephens, “EDF statistics for goodness of fit and some comparisons,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, no. 347, pp. 730–737, Sept. 1974.
- [92] P. Legendre and L. Legendre, *Numerical ecology*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science BV, 1998.
- [93] H. W. Lilliefors, “On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 62, pp. 399–402, June 1967.
- [94] J. Durbin, “Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests on spacings,” *Biometrika*, vol. 62, no. 1, pp. 5–22, 1975.
- [95] B. H. Margolin and W. Maurer, “Tests of the Kolmogorov-Smirnov type for exponential data with unknown scale, and related problems,” *Biometrika*, vol. 63, no. 1, pp. 149–160, 1976.
- [96] J. W. Evans, R. A. Johnson, and D. W. Green, “Two- and three- parameter Weibull goodness-of-fit tests,” Forest Products Laboratory, Forest Service, United States Department of Agriculture,” Research Paper FPL-RP-493, Nov. 1989.
- [97] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions*. New York, USA: John Wiley and Sons, 1995.
- [98] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann, “Correlation: pitfalls and alternatives,” *Risk magazine*, no. 12, pp. 69–71, 1999. [Online]. Available: <http://www.math.ethz.ch/~mcneil/ftp/risk.pdf>
- [99] M. S. Bartlett, “On the theoretical specification and sampling properties of auto-correlated time-series,” *Journal of the Royal Statistical Society Supplement*, vol. 8, pp. 27–41, Jan. 1946.
- [100] J. S. White, “Asymptotic expansions for the mean and variance of the serial correlation coefficient,” *Biometrika*, vol. 48, pp. 85–93, 1961.
- [101] O. D. Anderson, *Time Series Analysis and Forecasting: The Box-Jenkins Approach*. Boston, MA: Butterworths, 1976.
- [102] W. A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1996.
- [103] M. Mudelsee, “Note on the bias in the estimation of the serial correlation coefficient of AR(1) processes,” *Statistical Papers*, vol. 42, pp. 517–527, 2001.
- [104] V. T. Chow, *Handbook of Applied Hydrology*. New York, NY: McGraw-Hill, 1964.
- [105] H. J. Thiébaux and F. W. Zwiers, “The interpretation and estimation of effective sample size,” *Journal of Climate and Applied Meteorology*, vol. 23, pp. 800–811, May 1984.

- [106] M. S. Bartlett, "Some aspects of the time-correlation problem in regard to tests of significance," *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 98, pp. 536–543, 1935.
- [107] H. White, *Asymptotic Theory for Econometricians*. San Diego, CA: Academic Press, 1984.
- [108] R. Davidson and J. G. MacKinnon, *Econometric Theory and Methods*. New York, USA: Oxford University Press, 2003.
- [109] ———, *Estimation and Inference in Econometrics*. New York, USA: Oxford University Press, 1993.
- [110] L.-M. Liu, *Time series analysis and forecasting*. Villa Park, IL: Scientific Computing Associates Corp., 2006.
- [111] J. D. Hamilton, *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- [112] K. Rosengren, P.-S. Kildal, C. Carlsson, and J. Carlsson, "Characterization of antennas for mobile and wireless terminals in reverberation chambers: improved accuracy by platform stirring," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 30, pp. 391–397, Sept. 2001.
- [113] P.-S. Kildal, C. Carlsson, and J. Yang, "Measurement of free-space impedances of small antennas in reverberation chambers," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 32, pp. 112–115, Jan. 2002.
- [114] K. Rosengren and P.-S. Kildal, "Radiation efficiency, correlation, diversity gain and capacity of a six-monopole antenna array for a MIMO system: theory, simulation and measurement in reverberation chamber," *IEE Proc. Microwave Antennas Propagation*, vol. 152, pp. 7–16, Feb. 2005.
- [115] P. Hallbjörner, "Reflective antenna efficiency measurements in reverberation chambers," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 30, no. 5, pp. 332–335, Sept. 2001.
- [116] J. Carlsson, P. Kildal, M. Vázquez, A. Skrivervik, C. Icheln, A. Sharaiha, L. Duchesne, A. Johansson, R. Serrano, and S. Pan, "ACE deliverable a2.2d6," Antenna Centre of Excellence, Project FP6-IST 026957, Benchmarking Report, Dec. 2007.
- [117] P. Besnier, "Controlling measurement reproducibility and uncertainty in reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, vol. 2, Chicago, USA, Aug. 2005, pp. 562–565.
- [118] P.-S. Kildal, K. Rosengren, J. Byun, and J. Lee, "Definition of effective diversity gain and how to measure it in a reverberation chamber," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 34, pp. 56–59, July 2002.
- [119] B. M. Green and M. A. Jensen, "Diversity performance of dual-antenna handsets near operator tissue," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 48, no. 7, pp. 1017–1024, July 2000.



- [120] J. C. B. Dietrich, K. Dietze, J. R. Nealy, and W. L. Stutzman, "Spatial, polarization, and pattern diversity for wireless handheld terminals," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 49, no. 9, pp. 1271–1281, Sept. 2001.
- [121] J. Page, "Stirred mode reverberation chambers for EMC emission measurements and radio type approvals or organized chaos," in *IEE International Conference on Electromagnetic Compatibility*, vol. 1, United Kingdom, Sept. 1994, pp. 313–320.
- [122] O. Lundén and M. Bäckström, "How to avoid unstirred high frequency components in mode stirred reverberation chambers," in *IEEE International Symposium on EMC*, Honolulu, Hawaii, July 2007, pp. 1–4.
- [123] P. Hallbjörner, "Reverberation chamber with variable received signal amplitude distribution," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 5, pp. 376–377, Dec. 2002.
- [124] A. C. Marvin, T. Konefal, J. F. Dawson, and M. P. Robinson, "The use of reverberation chambers in the quantitative assessment of the risk associated with installation of electronic systems on vehicles," in *EMC Workshop Europe 2007*, Paris, France, June 2007.
- [125] W. H. Greene, *Econometric Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.