



HAL
open science

Modèles de mousses de spin pour la gravité quantique en 3 dimensions

David Louapre

► **To cite this version:**

David Louapre. Modèles de mousses de spin pour la gravité quantique en 3 dimensions. Physique mathématique [math-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2004. Français. NNT : . tel-00337352

HAL Id: tel-00337352

<https://theses.hal.science/tel-00337352>

Submitted on 6 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
LABORATOIRE DE PHYSIQUE, ÉQUIPE THÉORIE

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité « Physique »

par

David LOUAPRE

MODÈLES DE MOUSSES DE SPIN POUR LA GRAVITÉ QUANTIQUE EN 3 DIMENSIONS

Thèse soutenue le 15 juin 2004 devant le jury composé de :

M	JEAN-MICHEL MAILLET	(Président)
M.	LAURENT FREIDEL	(Directeur)
M.	JOHN W. BARRETT	(Rapporteur)
M.	PHILIPPE ROCHE	(Rapporteur)
M.	CARLO ROVELLI	(Examineur)

A Céline

TABLE DES MATIÈRES

1	Vers une théorie de la gravité quantique	13
1.1	La physique fondamentale au XXIème siècle	14
1.1.1	La théorie de la relativité générale	14
1.1.2	La théorie quantique	15
1.2	La problématique de la gravité quantique	17
1.2.1	Pourquoi la gravité quantique?	17
1.2.2	Que peut prédire une théorie de gravité quantique?	18
1.2.3	Les difficultés à quantifier la gravité	19
1.2.4	Les contraintes sur la construction de la gravité quantique	19
1.3	Les différentes approches de la gravité quantique	21
1.3.1	Approches covariantes	21
1.3.2	Approches canoniques	22
1.4	La gravité quantique canonique à boucles	22
1.4.1	Ingrédients et philosophie	22
1.4.2	Les étapes du programme de quantification	23
1.4.3	Nombres quantiques et interprétation physique	23
1.4.4	Les difficultés de la gravité quantique à boucles	24
1.5	Les modèles de mousses de spin	25
1.5.1	Philosophie des modèles de mousses de spin	25
1.5.2	Le modèle de Ponzano-Regge	25
2	La quantification des systèmes contraints	29
2.1	Le programme de quantification de Dirac	29
2.1.1	Formulation hamiltonienne d'un système contraint	30
2.1.2	Le choix d'un espace de Hilbert cinématique	30
2.1.3	Résolution des contraintes	32
2.1.4	La résolution des contraintes par quantification algébrique raffinée	33
2.1.5	De la quantification algébrique raffinée à l'intégrale de chemin	35
2.2	Approche intégrale de chemin	36
2.2.1	La formule de Feynman-Kac	36
2.2.2	La formule de Feynman-Kac pour un système contraint	36
2.2.3	La méthode de DeWitt-Fadeev-Popov	37
2.3	Exemple d'un système totalement contraint : la particule libre relativiste	38
2.3.1	Particule libre classique et canonique	38
2.3.2	Quantification canonique	39
2.3.3	Intégrale de chemin pour le projecteur	40
2.3.4	Observables physique et problème du temps	41

3	Les formalismes de la Relativité Générale	43
3.1	Le formalisme d'Einstein de la relativité générale	43
3.2	La Relativité Générale comme un système contraint : le formalisme ADM	45
3.3	L'action de Palatini pour la gravité 3+1	47
3.3.1	Les variables tétrade et connexion	47
3.3.2	L'action de Palatini	48
3.3.3	L'analyse canonique de la théorie de Palatini	49
3.4	Le formalisme de Plebanski	49
3.4.1	L'action de Palatini dans le langage des formes	50
3.4.2	L'action de Plebanski	50
4	La gravité quantique à boucles	53
4.1	Formalisme classique	53
4.1.1	L'action de Palatini généralisée	53
4.1.2	Analyse canonique de l'action de Palatini généralisée	54
4.2	La quantification canonique	54
4.2.1	La définition de l'espace de Hilbert	55
4.2.2	L'implémentation des relations de commutation	57
4.2.3	Résolution des contraintes cinématiques	57
4.2.4	Spectre des opérateurs géométriques	60
4.2.5	L'entropie des trous noirs et le paramètre d'Immirzi	60
4.3	Vers la compréhension de la dynamique...	62
5	La gravité quantique en 2+1 dimensions	65
5.1	Pourquoi la gravité 2+1 ?	65
5.2	La formulation du premier ordre de la gravité 2+1	66
5.2.1	L'action de Palatini	66
5.2.2	Analyse canonique du formalisme de Palatini	67
5.2.3	Gravité quantique à boucle	67
5.3	La formulation Chern-Simons	68
5.3.1	La gravité 2+1 comme une théorie de Chern-Simons	68
5.3.2	Théorie de Chern-Simons et invariants	69
6	Le modèle de Ponzano-Regge	73
6.1	Le modèle de Ponzano-Regge	73
6.1.1	La proposition de Ponzano et Regge	73
6.1.2	La limite semi-classique du modèle de Ponzano-Regge	74
6.1.3	Les propriétés du modèle de Ponzano-Regge	75
6.1.4	Des questions de signes	76
6.2	Le modèle de Turaev-Viro	77
6.3	L'espace de Hilbert du modèle de Ponzano-Regge	78
6.3.1	L'espace de Hilbert cinématique	79
6.3.2	Le modèle de Ponzano-Regge/Turaev-Viro comme un projecteur	79
6.3.3	Lien avec la théorie de Chern-Simons	80

7	La construction du modèle de Ponzano-Regge	81
7.1	La construction du modèle de Ponzano-Regge	81
7.1.1	Définition de la discrétisation	81
7.1.2	Amplitude de Ponzano-Regge	83
7.1.3	Autres expressions de l'amplitude	84
7.2	Le projecteur sur les états physiques en gravité à boucles	85
7.2.1	Intégrale de chemin et projecteur en gravité 3D	85
7.2.2	Le modèle de Ponzano-Regge comme un projecteur	85
8	La fixation de jauge du modèle de Ponzano-Regge	89
8.1	Les symétries discrètes du modèle de Ponzano-Regge	90
8.1.1	Retour sur les symétries de la gravité classique	90
8.1.2	Symétrie de Lorentz locale dans le modèle de Ponzano-Regge	91
8.1.3	L'identité de Bianchi discrète	92
8.1.4	La symétrie translationnelle	92
8.1.5	Volume de jauge et divergences du modèle	94
8.2	Fixation de jauge du modèle de Ponzano-Regge	94
8.2.1	Fixation de jauge sur un arbre maximal	94
8.2.2	Valeur de l'amplitude fixée de jauge	96
8.2.3	Fixation de jauge comme l'insertion d'un opérateur	97
8.2.4	Invariances des fixations de jauge	97
8.3	Exemples explicites	98
8.3.1	3-sphère	98
8.3.2	Variété $\Sigma_g \times I$	100
8.4	De la fixation de jauge à l'insertion des particules	101
8.4.1	Formules de dualité	101
8.4.2	Interprétation	102
9	Insertion de particules ponctuelles	103
9.1	Insertion de particules massives	103
9.1.1	Insertion d'une particule en gravité classique	103
9.1.2	Insertion de masse dans une variété fermée	106
9.2	Insertion de particules à spin dans une variété à bords	107
9.2.1	Cinématique en présence de particules	108
9.2.2	Propagateur à spin en l'absence de gravité	109
9.2.3	Insertion de particules sur un graphe décoré	112
9.3	Exemples explicites	116
9.3.1	n particules massives sur $\Sigma_g \times I$	116
9.3.2	Braiding de deux particules	116
9.4	Effets physiques de l'insertion de particules	117
9.4.1	Physique des particules en présence de gravité quantique	117
9.4.2	Composition des moments dans le modèle de Ponzano-Regge	118
9.4.3	Limite $G \rightarrow 0$ de la gravité quantique	119

10 Invariant de Ponzano-Regge et Chern-Simons $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$	121
10.1 Invariants de variétés 3D et gravité quantique	121
10.1.1 L'invariant de Turaev-Viro	122
10.1.2 L'invariant de Reshetikhin-Turaev	123
10.1.3 L'invariant de chain-mail de Roberts	126
10.1.4 La racine carrée du modèle de Ponzano-Regge ?	128
10.2 L'amplitude de Ponzano-Regge fixée de jauge est un invariant	129
10.3 L'invariant de Ponzano-Regge et l'invariant de chain-mail $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$	130
10.3.1 Les représentations du groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$	130
10.3.2 Les évaluations Reshetikhin-Turaev de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$	131
10.3.3 Lien de chain-mail colorié	132
10.3.4 Equivalence	132
10.4 Théorème d'invariance sous les différentes fixations	134
10.5 Commentaires et conjectures	135
11 Asymptotiques et dualités en théorie des représentations	137
11.1 Asymptotique du symbole $6j$	137
11.1.1 Réécriture numérique et interprétation géométrique	137
11.1.2 Asymptotique	138
11.2 L'asymptotique du symbole $10j$	141
11.2.1 Le modèle de Barrett-Crane	141
11.2.2 L'asymptotique du symbole $10j$	142
11.2.3 Guérir le symbole $10j$?	143
11.3 Symbole $6j$ quantique et relations de dualité	144
11.3.1 Les différentes formules de dualité	144
11.3.2 Asymptotiques du $6j$ quantique	145
12 Somme non-perturbative sur les topologies	147
12.1 Problématique générale	147
12.1.1 Les triangulations dynamiques 3D	148
12.1.2 Sommes divergentes et graphes de Feynman	149
12.2 Le modèle de Boulatov	150
12.3 Notion de Borel-sommabilité et de comportement aux grands ordres	153
12.4 Un nouveau modèle et son interprétation	155
12.4.1 Définition et propriétés du nouveau modèle	155
12.4.2 Développement perturbatif du nouveau modèle	156
12.4.3 Le cas des modèles de matrices 3D	159
12.4.4 Interprétation du nouveau modèle	159
Conclusion : vers un modèle de mousses de spin en 3+1 dimensions	161
A Notions de théories des groupes	163
A.1 Généralités	163
A.1.1 Les angles d'Euler	163
A.1.2 Sous groupe de Cartan	163
A.1.3 Algèbre de Lie	164
A.1.4 Paramétrisation angle/vecteur unitaire	164

A.1.5	Le groupe $SO(3)$	165
A.2	Intégration	165
A.2.1	Mesure invariante	165
A.2.2	Formule de Weyl	165
A.2.3	Fonction(s) delta	165
A.3	Théorie des représentations	165
A.3.1	Représentations	165
A.3.2	Matrices de représentation	166
A.3.3	Fusion des représentations	166
A.3.4	Formule de Plancherel	168
B	Le groupe quantique $\mathcal{D}(SU(2))$	169
B.1	Le double de Drinfeld d'un groupe	169
B.2	Représentations de $\mathcal{D}(SU(2))$	169

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Laurent Freidel. Il a su m'accompagner dans la découverte de ce monde étrange et merveilleux qu'est la gravité quantique. J'ai pu bénéficier de sa grande culture en physique théorique et de son insatiable curiosité et volonté d'explorer les diverses pistes qui s'offraient à nous. Je remercie également les équipes du laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, ainsi que le Perimeter Institute for Theoretical Physics de Waterloo pour m'avoir accueilli durant ces 3 ans.

Un grand merci à Jean-Michel Maillet, qui m'a fait le plaisir de présider ce jury, ainsi qu'à Philippe Roche et John Barrett qui ont accepté d'être rapporteurs du manuscrit. Je remercie sincèrement Carlo Rovelli pour s'être joint à ce jury, mais surtout pour m'avoir fait découvrir la gravité quantique à boucles au travers ses articles que je lisais en DEA, ainsi que pour m'avoir accueilli en stage au CPT de Luminy. J'ai pu au cours de cette thèse rencontrer et travailler avec un grand nombre de gens passionnants. Je remercie notamment chaleureusement l'équipe Théorie du labo de physique, en particulier François Delduc, Marc Magro et Pascal Degiovanni, qui ont gardé un oeil bienveillant sur moi. Je dois également beaucoup aux nombreux pensionnaires et visiteurs du Perimeter Institute et notamment Lee Smolin, Fotini Markopoulou, Thomas Thiemann. Que soient également ici remerciés mes compagnons qui constituent aujourd'hui la jeune garde de la gravité quantique : Etera Livine, Alejandro Perez, Karim Noui, Daniele Oriti, Florian Girelli, Aristide Baratin ; bon courage à vous pour la suite !

Je remercie mes amis théoriciens ou non : Hübert, JY, Jolow, Xoff, Tri, Pad, Bricou, Emilie, les NPWKA, les Psychotests, les Green Foxes. Enfin je remercie Céline, qui a accepté de supporter pendant 3 ans la vie d'étudiant en thèse, les allers-retours transatlantiques et les mousses de spin à tous les repas.

1

VERS UNE THÉORIE DE LA GRAVITÉ QUANTIQUE

La physique fondamentale a connu deux révolutions au cours du XXIème siècle, avec l'introduction des théories de la relativité générale et de la mécanique quantique. La gravité quantique se définit comme l'hypothétique unification de ces deux théories. Il est de coutume de présenter aussi cette problématique comme celle de l'unification des quatre forces : électromagnétique, nucléaire faible, nucléaire forte et gravitationnelle. Un autre point de vue consiste à voir la gravité quantique comme la théorie de l'unification des trois constantes fondamentales.

On peut en effet distinguer en physique fondamentale trois constantes dimensionnées jouant un rôle particulier : la vitesse de la lumière c , la constante de Planck \hbar , et la constante de gravitation universelle de Newton G . Pour chacune de ces constantes on associe un régime physique qui indique dans quelles circonstances il devient nécessaire de les considérer¹ : c correspond au régime des objets "rapides", \hbar au régime des objets "petits" et G au régime des objets "lourds". Suivant que l'on décide de se placer dans un ou plusieurs de ces régimes, la physique est décrite au niveau fondamentale par différentes théories :

G	c^{-1}	\hbar	Théorie
0	0	0	Mécanique classique
1	0	0	Gravité de Newton
0	1	0	Relativité restreinte
0	0	1	Mécanique quantique
1	1	0	Relativité générale
0	1	1	Théorie quantique des champs
1	1	1	Gravité quantique ?

Il existe bien entendu de nombreuses approches à la problématique de la gravité quantique et celle qui nous préoccupe dans cette thèse ne représente qu'une approche dans l'éventail des recherches actuelles. Le reste de cette partie introductive est consacré à la présentation du problème de la gravité quantique, et aux diverses pistes de recherche qui ont conduit à l'approche des mousses de spin.

¹Bien entendu pour un théoricien, "considérer" une constante signifie la prendre égale à 1, "ne pas la considérer" signifie la prendre égale à 0!

1.1 LA PHYSIQUE FONDAMENTALE AU XXIÈME SIÈCLE

Au cours du XXIème siècle, deux nouvelles théories physiques se sont développées indépendamment : la théorie de la relativité générale et la théorie quantique. Un siècle plus tard, il est surprenant de constater à la fois à quel point ces théories se sont révélées justes au niveau expérimental, tout en modifiant violemment notre conception du monde. En décrivant des échelles éloignées de notre quotidien, ces théories ont mis en avant des notions et des faits qui vont considérablement à l'encontre de notre intuition ! Elles ont introduit de nouveaux concepts, tout en nous faisant comprendre que des notions que l'on croyait immuables (comme le temps ou le déterminisme) devaient en fait être sérieusement repensées. Au début du XXIème siècle, ces deux théories ne sont pas seulement très bien confirmées expérimentalement, elles sont aussi présentes dans notre quotidien technologique (Laser, GPS, semi-conducteurs...). Malgré cela, elles ont aussi leurs zones d'ombre et leurs points faibles.

1.1.1 La théorie de la relativité générale

La théorie de la relativité générale est née autour de 1915, de la volonté d'A.Einstein d'unifier la relativité restreinte avec la théorie de la gravité de Newton. Un des défauts de la gravité newtonienne était de faire appel à la notion d'action instantanée à distance, notion qui avait notamment été éliminée de l'électromagnétisme par la théorie de Maxwell. Le cœur de la théorie d'Einstein est de considérer que le champ gravitationnel est directement relié à la courbure de l'espace-temps. L'ensemble de l'interaction gravitationnelle se trouve donc encodé dans la géométrie de l'espace-temps, que l'on décrit à l'aide de la métrique d'espace-temps. De même que la théorie de l'électromagnétisme se compose des équations de Maxwell – qui décrivent la configuration du champ en présence de sources – et de la force de Lorentz – qui décrit le mouvement des corps chargés dans une configuration de champ donné – la théorie de la relativité générale se compose de l'équation d'Einstein et de l'équation des géodésiques. L'équation des géodésiques permet de décrire le mouvement d'une particule dans un champ de gravité, alors que l'équation d'Einstein relie le champ de gravité au contenu de matière.

Cependant, il serait erroné de considérer que la théorie de la gravité n'est rien d'autre qu'une théorie de champ classique supplémentaire, analogue à l'électromagnétisme. En effet la force, la beauté et la difficulté de cette théorie proviennent du rôle joué par le principe de *covariance générale*. En créant la théorie de la *relativité restreinte*, Einstein ne fit qu'affiner le principe de relativité galiléenne, qui stipule que les lois de la physique sont identiques pour tous les observateurs galiléens. La force du principe de covariance générale est d'étendre ce principe de relativité à **tous** les observateurs. On peut modéliser un observateur par un système de coordonnées de l'espace-temps. Le principe de covariance générale impose que les lois de la physique soient invariantes sous les changements de coordonnées d'espace-temps. En termes plus modernes : les difféomorphismes de l'espace-temps sont le groupe de jauge de la relativité générale. Les quantités physiques observables en relativité générale doivent être invariantes par difféomorphisme.

Les développements de la relativité générale[1] ont donné lieu à de nombreuses prédictions nouvelles qui sont aujourd'hui très bien confirmées expérimentalement. La précession du périhélie de Mercure – déjà observée à l'époque – fut expliquée par la relativité générale. La déviation des rayons lumineux par le Soleil fut observée dès 1919, et est aujourd'hui à la base du spectaculaire phénomène de lentille gravitationnelle. Enfin le décalage gravitationnel des fréquences fut observé

par Pund et Rebka. Parmi les prédictions plus exotiques, la théorie de la relativité générale prédit l'existence d'ondes gravitationnelles. S'il n'existe pas à l'heure actuelle de confirmations expérimentales directes de ce phénomène, il a déjà été indirectement observé via la dynamique de certains objets astrophysiques[2], et les interféromètres géants LIGO/VIRGO devraient dans les prochaines années être en mesure de le confirmer. Enfin les prédictions les plus surprenantes de la relativité générale sont certainement les trous noirs et les univers cosmologiques. La solution de Schwarzschild prévoit que si une masse M se trouve totalement concentrée à l'intérieur d'une sphère de rayon

$$R_S = \frac{2MG}{c^2},$$

il se forme à cette distance un horizon de trou noir, tel qu'aucune matière ou aucun rayonnement ne puisse s'échapper de son intérieur. Cette prédiction étonnante est la source de nombreux problèmes conceptuels. Enfin le développement de la cosmologie sur les bases des équations de la relativité générale culmine sur l'actuel modèle du Big-Bang [3], qui rend compte de l'évolution de l'univers et de la formation de la matière et des structures astrophysiques.

Malgré sa beauté mathématique et le nombre de ses confirmations expérimentales, la théorie de la relativité générale possède encore quelques zones d'ombre. La plus évidente est l'absence totale de forme générale des solutions des équations d'Einstein, même en l'absence de matière. En effet la non-linéarité de ces équations empêche toute compréhension globale de la structure des solutions. Enfin les équations d'Einstein prédisent l'existence quasi-inéluctable de *singularités* de l'espace-temps[4]. Ces singularités apparaissent notamment pour les trous noirs, et à l'origine des univers cosmologiques (singularité de type Big-Bang). Sur le plan théorique, la structure des observables en gravité pure est encore mal comprise, en ce sens qu'il est difficile de construire des observables invariantes sous les difféomorphismes[5]. En gravité pure, de telles observables doivent en effet être non-locales. Un problème manifeste est alors le problème du temps, puisqu'en l'absence de matière, toutes les observables doivent être invariantes par difféomorphismes, donc indépendantes du temps, et aucune d'elles ne peut servir d'horloge. Enfin il est important de noter que la force gravitationnelle n'est à ce jour presque pas testée expérimentalement à des échelles en deça du millimètre !

1.1.2 La théorie quantique

Le succès de la théorie quantique commence avec la quantification de l'atome d'hydrogène et culmine avec la théorie du modèle standard. Son cadre conceptuel, *théorie quantique des champs*[6], explique *en principe* l'ensemble des phénomènes observables aux échelles où la gravité peut être négligée. Comme la théorie de la relativité générale, la théorie quantique a violemment contredit certaines de nos intuitions, et a mis en avant de nouvelles notions importantes : le principe de superposition et le probabilisme qui lui est associé, la notion d'incertitude, la quantification des grandeurs physiques, la modification du concept de mesure. Le modèle standard constitue l'aboutissement de la théorie quantique, et permet de décrire dans un même cadre les forces électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte. L'ensemble des phénomènes observés dans les accélérateurs sont autant de confirmations expérimentales de la théorie du modèle standard.

Il me paraît important de mentionner ici plusieurs notions qui ont émergé au cours de la maturation de la théorie quantique, et qui sont importantes dans la perspective de la recherche d'une théorie de la gravité quantique. La première est l'idée de *quantification active*. C'est à dire qu'il existe des recettes permettant de construire un modèle quantique à partir de son modèle

classique correspondant. Ce principe s'appuie aujourd'hui essentiellement sur deux formalismes différents et complémentaires : le formalisme canonique de Dirac [7] et l'intégrale de chemin de Feynman [8]. A ces formalismes sont associées des méthodes pour quantifier des théories classiques à partir de leurs formulations hamiltonienne (pour la quantification canonique) ou lagrangienne (pour l'intégrale de chemin). Cependant il faut souligner que d'une part ces recettes sont pleines d'ambiguïtés et ne garantissent en rien une construction unique, d'autre part rien ne prouve que la quantification active soit une bonne stratégie. Si celle-ci permet en principe de produire une théorie quantique dont la limite classique est la théorie classique de départ, rien ne garantit que cette théorie quantique soit la bonne!

Une seconde notion importante qui s'est affirmée dans le contexte des théories quantiques est celle du principe de jauge. En effet les théories de champs du modèle standard contiennent toutes des degrés de liberté de jauge, et par conséquent non-physiques et non-observables. Si ce principe permet une formulation élégante des théories classiques, il est important de considérer son sort au niveau quantique. Le traitement des symétries de jauge est donc l'aspect crucial et ambigu des techniques de quantification, qu'elles soient canoniques ou par intégrale de chemin. Comme je l'ai déjà mentionné, le groupe de jauge de la relativité générale est le groupe des difféomorphismes. C'est donc autour du traitement convenable des difféomorphismes dans la démarche de quantification que va se concentrer l'ensemble des difficultés de la quantification de la gravité.

Enfin une troisième notion clé qui a émergé au cours de la compréhension des modèles de théories quantiques des champs est celle de *renormalisation*. Introduite à l'origine pour éliminer les infinis qui apparaissaient dans les calculs de théorie quantique des champs, la renormalisation a finalement pris tout son sens au contact d'idées en provenance de la physique statistique. La théorie du groupe de renormalisation met en avant le fait que *la physique dépend de l'échelle d'observation*. Les équations du groupe de renormalisation permettent alors de comprendre la sensibilité des théories des champs aux différentes échelles de la physique. En particulier l'ensemble des interactions incluses dans le modèle standard sont des interactions renormalisables, ce qui signifie que ces interactions ne sont pas sensibles aux très hautes énergies c'est à dire au détail de la structure microscopique de l'espace-temps ². Cette idée rejoint les idées de physique statistique où l'on décrit des phénomènes effectifs, pour lesquels les degrés de liberté microscopiques sont intégrés [9]. Le principe de renormalisation s'est donc imposé comme un principe de simplicité qui affirme que les théories qui décrivent les phénomènes accessibles dans les accélérateurs doivent être décrits par des théories de champs effectives ne contenant que des interactions renormalisables [10].

Pour finir, je voudrais rappeler les actuels enjeux théoriques et expérimentaux du modèle standard. Sur le plan expérimental, le principal challenge concerne le boson de Higgs qui n'a pas à ce jour été observé. Sur le plan théorique, malgré un impressionnant succès pour prédire les phénomènes perturbatifs survenant en accélérateurs, le modèle standard reste pour l'instant peu compris sur le plan non-perturbatif. Les nucléons étant par exemple des états liés en chromodynamique quantique, ils relèvent d'une approche non-perturbative qu'il faut encore maîtriser. Enfin les phénomènes d'oscillation de neutrinos doivent encore être compris au niveau fondamental. Sur le plan plus conceptuel, l'unification des 3 forces n'est pas totale en ce sens que bien qu'on sache les décrire avec un formalisme commun, seules la force électromagnétique et la force faible sont réellement vues comme deux aspects d'une *même force électrofaible*. La force

²C'est une bonne chose car on n'a alors pas besoin de quantifier préalablement la gravité pour pouvoir faire de la théorie des champs

forte est encore une entité à part et les tentatives de *grande unification* ne sont pas à ce jour en accord avec l'expérience.

1.2 LA PROBLÉMATIQUE DE LA GRAVITÉ QUANTIQUE

La juxtaposition de la relativité générale et du modèle standard fournit un cadre théorique qui décrit l'ensemble des phénomènes observés à ce jour. Aujourd'hui nous ne disposons d'aucun fait expérimental tombant explicitement et clairement dans le régime physique $\hbar = c = G = 1$. On peut donc à juste titre argumenter que la recherche d'une théorie de la gravité quantique n'est pas une nécessité dictée par l'expérience. Il est donc important d'énumérer les motivations d'une telle recherche.

1.2.1 Pourquoi la gravité quantique ?

La gravité quantique est supposée se manifester dans un régime physique où il est nécessaire de considérer à la fois \hbar , c et G . On peut par analyse dimensionnelle estimer les échelles caractéristiques de ces phénomènes. On a $[\hbar] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$, $[c] = L \cdot T^{-1}$ et $[G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$. On en déduit les échelles caractéristiques d'énergie et de longueur de Planck

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 10^{28} eV,$$

$$l_P = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} \sim 10^{-35} m.$$

Les phénomènes de gravité quantique sont supposés se manifester ces échelles, qui sont à mettre en regard des énergies des futurs accélérateurs (quelques $10^{12} eV$) ou des échelles de distances intranucléaires. Ces échelles paraissent donc hors de portée de nos expériences actuelles. Cependant il convient de noter deux choses : la première est que certains rayonnements astrophysiques[11] sont détectés à des énergies parfois supérieures à $10^{20} eV$, ce qui nous place dans des domaines où le rapport E/E_P devient non-négligeable. Enfin dire qu'il faut négliger la gravité quantique puisqu'en pratique $E \ll E_P$ suppose implicitement que les phénomènes de gravité quantique soient tous perturbatifs. Plus précisément négliger de la sorte la gravité quantique consiste à dire que toute quantité calculée en gravité quantique à une échelle d'énergie E peut se développer en puissances de E/E_P , dont on ne garde que l'ordre 0 à nos échelles expérimentales. Ce raisonnement devient faux en présence de phénomènes non-perturbatifs qui conduisent typiquement à des quantités observables qui sont non-analytiques en E/E_P . En d'autres termes, E/E_P peut être très petit mais les effets non-perturbatifs associés non-négligeables.

Au delà des possibles implications expérimentales, la recherche d'une théorie de la gravité quantique est également motivée par la volonté d'unification de la relativité générale et de la mécanique quantique. En effet ces deux théories nous donnent deux images très différentes de la Nature qu'il convient de réconcilier. L'histoire des sciences montre en effet que de nouveaux concepts importants ont souvent émergé de l'unification de descriptions en apparence contradictoires. Dans notre cas, il n'est pourtant pas a priori clair que la relativité générale et la théorie quantiques soient contradictoires, et je vais donner ici un exemple, en regard d'un argument bien connu pour l'atome d'hydrogène. Une signature typique de l'existence d'une nouvelle physique à l'échelle de l'atome d'hydrogène est donnée par l'argument suivant : dans le modèle semi-classique de l'atome de Bohr, le rayon d'orbite de l'électron est le rayon de Bohr $a_0 \sim 0,5A$.

Pour sonder la structure détaillée de l'atome d'hydrogène à l'aide d'un rayonnement, il convient donc d'utiliser une longueur d'onde d'ordre $\lambda \sim a_0$, ou inférieure. L'énergie associée à un photon correspondant est

$$\frac{hc}{a_0} \sim 10^4 eV.$$

On constate cette énergie est très supérieure à l'énergie de liaison $E_I = 13,6 eV$ de l'électron, ce qui signifie *qu'en voulant observer la structure microscopique de l'atome d'hydrogène, on le détruit*. La structure microscopique de l'atome d'hydrogène n'est pas observable.

Un raisonnement analogue existe pour la gravité quantique. Supposons qu'on veuille sonder une région de l'espace-temps de longueur l_P , la longueur de Planck. Il faut alors utiliser un rayonnement dont l'énergie associée est $E = \frac{hc}{l_P}$. Cependant le rayon de Schwarzschild associé à une telle énergie est égal à

$$\frac{E}{c^2} \frac{G}{c^2} = \frac{Gh}{l_P c^3} \sim l_P.$$

Cela signifie qu'en voulant observer une région de l'espace-temps à cette échelle, on crée un trou noir qui l'englobe. On ne peut donc pas extraire d'information physique sur la géométrie à ces échelles de distance, de la même manière qu'on ne peut pas extraire d'informations physiques sur la trajectoire de l'électron de l'atome d'hydrogène. Ce raisonnement conduit donc à penser que l'espace-temps est lui aussi gouverné par les lois quantiques et les phénomènes d'incertitude probabiliste.

1.2.2 Que peut prédire une théorie de gravité quantique ?

On peut imaginer à quoi ressemble une théorie de gravité quantique en combinant les grands principes et les grandes leçons de la relativité générale et de la mécanique quantique. La relativité générale nous apprend essentiellement que la gravité trouve son origine dans la géométrie, qui devient une quantité dynamique. La mécanique quantique nous apprend que toute quantité dynamique doit être quantifiée, auquel cas elle exhibe un comportement probabiliste, permettant la superposition d'états pour lesquels les grandeurs physiques ont des valeurs possibles discrétisées. On comprend alors que naïvement, une théorie de gravité quantique doit être une théorie de *géométrie quantique*. Notamment comme pour les autres quantités dynamiques, on peut s'attendre à ce que la géométrie quantique de l'espace-temps soit obtenue comme une superposition quantique d'espace-temps, pour lesquelles les grandeurs physiques prennent des valeurs discrètes. Au niveau quantique, la notion de trajectoire bien définie disparaît, pour ne réapparaître que dans une limite classique. Pour la gravité quantique, on s'attend à ce que la notion de géométrie classique disparaisse au profit de structures nouvelles – peut être discrètes – qui fluctueraient au niveau quantique et ne redonneraient la géométrie continue que dans une limite classique. Un analogue très concret est celui de la physique du solide, qui exhibe une structure microscopique discrète, mais qui se comporte comme un continuum au niveau macroscopique, c'est à dire à des échelles de longueur grandes devant l'espacement interatomique. D'une manière générale, on s'attend à ce que la gravité quantique donne une image de ce qu'est la structure de l'espace-temps au niveau microscopique. On imagine donc qu'une telle théorie fournisse à la fois des réponses à la question des singularités qui apparaissent en relativité générale, et à la question de la sensibilité des théories des champs aux courtes distances pour les interactions non-renormalisables.

1.2.3 Les difficultés à quantifier la gravité

Pour quantifier la gravité, il est d'abord tentant de considérer les techniques qui ont fonctionné pour la quantification des autres interactions. Le premier problème qui se pose provient du fait que la théorie quantique des champs usuelle fait un usage important du fait que les champs vivent sur un espace-temps de Minkowski, muni d'une métrique plate. Ce n'est bien évidemment plus le cas pour la relativité générale, qui n'est pas une théorie sur une métrique, mais *de* la métrique. Voici un exemple de ces difficultés : en théorie des champs usuelle, on demande que l'opérateur de champ $\hat{\varphi}(x)$ commute pour des points d'espace-temps séparés par un intervalle du genre espace

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = 0, \quad (x^\mu - y^\mu)\eta_{\mu\nu}(x^\nu - y^\nu) > 0.$$

Une requête analogue pour un opérateur de métrique

$$[\hat{g}(x), \hat{g}(y)] = 0$$

n'a bien sur plus de sens, puisque l'on a justement besoin d'une métrique pour qualifier le genre de l'intervalle entre x et y ! De manière plus formelle, l'inadéquation des méthodes usuelles de théorie des champs au cas de la gravité est illustrée par l'usage important que les axiomes de Wightman[12] font de l'invariance de Poincaré. En somme la relativité générale n'est pas une théorie de champs comme les autres. Cela implique que sur le plan technique, il faille trouver de nouvelles méthodes de quantification qui permettent de traiter les théories qui ne sont pas formulées sur une métrique de fond.

En plus de ces difficultés techniques, la quantification de la gravité pose des difficultés plus conceptuelles, notamment sur le rôle du temps et des observateurs. En effet puisque le champ gravitationnel définit l'espace-temps, on ne peut plus voir le temps comme un paramètre externe utilisé par la mécanique quantique. De même la notion d'observateur externe et de mesure sur le système quantique ne s'applique pas intuitivement au cas du champ gravitationnel (quel appareil de mesure pour la fonction d'onde de l'Univers ?). Ce type de questions suggère qu'une résolution du problème de la gravité quantique nécessite une adaptation des principes de la mécanique quantique.

Enfin il n'est pas du tout évident qu'une théorie de la gravité quantique puisse être trouvée par "quantification active", c'est à dire en appliquant une recette de quantification sur la théorie classique. Notamment la quantification de la gravité devant déboucher sur une nouvelle vision de la structure de l'espace-temps, il n'est pas clair que partir de la théorie continue soit une stratégie payante. Un exemple typique des questions qu'il faudra résoudre consiste à comprendre de quelle manière les difféomorphismes se maintiennent comme symétrie de la théorie quantique, si celle-ci révèle un paysage de géométrie discrète et probabiliste.

1.2.4 Les contraintes sur la construction de la gravité quantique

A ce jour, nous ne disposons pas de données expérimentales ou observationnelles permettant de contraindre une théorie de gravité quantique. Cela ne signifie pourtant pas que n'importe quelle théorie fasse l'affaire ! Les deux principales contraintes sont en effet que la gravité quantique doit 'contenir' la gravité classique et la théorie quantique, c'est à dire redonner ces théories les bonnes limites. Cette idée mérite d'être précisée. Il est généralement convenu que la gravité quantique doit redonner la gravité classique dans une limite $\hbar \rightarrow 0$. On estime généralement que les recettes de quantification active permettent de construire une théorie possédant une

limite classique donnée. Ceci doit bien sur être vérifié a posteriori. On souhaiterait par exemple être capables de fabriquer des états semi-classiques de gravité quantique, à la manière des états cohérents de l'oscillateur harmonique. La limite $G \rightarrow 0$ est plus subtile. En effet en gravité pure, la quantité dimensionnelle qui apparait est la combinaison $l_P^2 = G\hbar$. On comprend donc qu'en gravité pure, les limites $G \rightarrow 0$ et $\hbar \rightarrow 0$ s'identifient. Pour donner du sens à l'idée que la gravité quantique doit redonner la théorie quantique dans une limite $G \rightarrow 0$, il est nécessaire d'introduire un *couplage à la matière*. On peut alors par exemple demander que des quantités physiques calculées dans un tel modèle redonnent dans une limite $G \rightarrow 0$ les résultats de théorie des champs en espace plat. De manière plus générale, l'introduction de la matière est une étape cruciale pour la compréhension des problèmes d'observabilité en gravité quantique.

Aux contraintes que la gravité quantique doit redonner la relativité générale et la mécanique quantique dans les bonnes limites, on peut ajouter une troisième contrainte : la thermodynamique des trous noirs [13, 14]. La thermodynamique des trous noirs est un ensemble d'arguments qui conduisent à associer à un trou noir d'aire A , une entropie S définie par

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{l_P^2}.$$

Une telle définition est motivée par des calculs semi-classiques de théorie des champs en espaces-temps classiques mais courbes. De manière générale, associer une entropie à un trou noir permet de résoudre l'apparente contradiction thermodynamique que ceux-ci posent : un système désordonné avalé par un trou noir voit son entropie diminuer...sauf si précisément on a associé au trou noir une entropie qui augmente si ce dernier avale un système. Le lien de ces arguments avec la gravité quantique est le suivant : on considère que l'entropie des trous noirs est un phénomène profond qui doit trouver son origine quantitative dans une théorie de gravité quantique. En d'autres termes, on sait que l'entropie d'un système est donnée par $S = \ln\Omega$ où Ω représente le nombre d'états accessibles. En mécanique quantique, Ω est donné par la dimension de l'espace de Hilbert du système. On s'attend donc à pouvoir trouver une explication quantitative de l'entropie $S = A/4$ à partir d'une compréhension de l'espace de Hilbert du trou noir quantique. Ceci est en général considéré comme un test important pour toute théorie de gravité quantique.

Malgré l'absence actuelle de contraintes observationnelles claires sur une théorie de la gravité quantique, on peut néanmoins formuler quelques espoirs pour l'avenir. Comme je l'ai déjà évoqué, certains rayons cosmiques de très haute énergie semblent se trouver 8 ordres de grandeur en deça de l'échelle de Planck. Il y a un espoir sérieux de pouvoir observer une signature de gravité quantique dans leur propagation[15] (de même que la propagation dans un réseau cristallin se modifie quand la longueur d'onde s'approche de l'échelle inter-atomique). Un autre espoir de ce type consiste à rechercher une signature de gravité quantique dans le bruit associé au passage d'ondes gravitationnelles dans les détecteurs interférométriques.

Enfin la prochaine génération d'accélérateurs pourrait conduire à des phénomènes intéressants. D'une part il sera possible de juger de la pertinence d'une hypothèse comme la supersymétrie, d'autre part certains scénarios prévoient une signature de gravité quantique à des échelles de l'ordre du TeV. Il s'agit notamment de scénarios comportant des dimensions supplémentaires qui seraient responsables de la dilution de la gravité, de sorte que l'échelle de Planck se trouve en réalité plusieurs ordres de grandeurs en dessous de $10^{28}eV$. Sous certaines hypothèses, on peut envisager une production de trous noirs à l'échelle du TeV [16], dont le rayonnement thermique devrait être visible au sein des accélérateurs.

1.3 LES DIFFÉRENTES APPROCHES DE LA GRAVITÉ QUANTIQUE

On peut sommairement cataloguer les méthodes d'approche pour la gravité quantique en 3 familles : les approches covariantes, les approches canoniques, et les approches "intégrale de chemin".

1.3.1 Approches covariantes

Nous avons pu voir que les techniques usuelles de théorie quantique des champs – qui ont montré leur force dans la construction du modèle standard – sont plutôt inadaptée à la quantification de la gravité. La raison en est que ces méthodes requièrent l'existence d'une métrique de fond, ce qui n'est pas le cas pour la gravité qui est justement une théorie *de* la métrique. Pour contourner ces difficultés, une première approche consiste à considérer les petites perturbations de la métrique autour de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. On considère les métriques

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ et l'on regarde la théorie classique qui décrit la dynamique de $h_{\mu\nu}$. C'est une théorie des champs définie sur la métrique de Minkowski, et décrivant un champ de spin 2 (le *graviton*). On peut alors appliquer les techniques de quantification perturbative usuelles.

Il apparaît malheureusement que la théorie quantique correspondante est non-renormalisable. On peut notamment comprendre ceci par comptage de puissances, puisque la constante de couplage associée est G qui a la dimension d'une longueur au carré. Notons que la preuve explicite de ces divergences n'a été confirmée qu'assez tardivement [17]. Ce résultat est analogue à celui obtenu pour la théorie de Fermi des interactions faibles. La théorie de Fermi tente d'expliquer les interactions faibles à partir d'un modèle d'interaction à 4 fermions. Cette théorie est elle aussi non-renormalisable, et on découvrit plus tard qu'elle n'est qu'une approximation d'une théorie plus fondamentale de l'interaction faible, utilisant la médiation de l'interaction par des bosons de jauge, et étant elle, renormalisable. La non-renormalisabilité de la gravité quantique en perturbations autour de la métrique plate constitue le fait fondateur de toutes les approches modernes.

Le cas de l'interaction de Fermi peut conduire à penser que la relativité générale n'est elle aussi qu'une approximation de basse énergie d'une théorie plus fondamentale, qui serait elle renormalisable. Cette philosophie a donc conduit à rechercher une hypothétique théorie possédant ces propriétés. On essaya donc d'apporter des corrections aux équations d'Einstein via l'ajout de termes dérivés supplémentaires, ou l'ajout de supersymétrie, débouchant sur la supergravité. Malheureusement, aucune de ces théorie n'est à la fois renormalisable et unitaire. Cette recherche d'une théorie plus fondamentale que la gravité culmine avec la construction des modèles de théorie des cordes.

La théorie des cordes reformule l'ensemble de la physique fondamentale en partant du principe que les objets fondamentaux ne sont pas des particules mais des cordes qui se propagent dans l'espace-temps. Ces théories permettent de résoudre certains problèmes de non-renormalisabilité, en ce sens que les singularités des diagrammes de Feynman perturbatifs se trouvent "lissées", et les diagrammes de cordes possèdent alors des propriétés de finitude UV améliorées³. En outre les modèles de cordes sont des candidats à l'unification des forces, puisqu'ils contiennent à la

³La preuve rigoureuse de finitude n'existe pour l'instant qu'à l'ordre de deux boucles

fois la relativité générale et le modèle standard. Enfin, les théories des cordes prédisent la bonne entropie de certains types de trous noirs. Les critiques actuelles des modèles de cordes sont le fait qu'ils nécessitent la supersymétrie et l'introduction de dimensions supplémentaires. Par ailleurs, la formulation non-perturbative de ces théories est encore mal comprise, et la compactification des dimensions supplémentaires n'est pas encore clairement prescrite.

1.3.2 Approches canoniques

Les approches canoniques de la gravité quantique ont pour but passer outre les difficultés de l'approche covariante, en cherchant à mettre en place une quantification canonique qui puisse s'affranchir de la nécessité d'une métrique de fond. Dans le cas d'une approche covariante, une métrique de fond avait été introduite en considérant des perturbations de la métrique autour de la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$. Pour éviter ceci, l'approche canonique se veut essentiellement *non-perturbative*.

On peut schématiser formellement la démarche de quantification canonique de la manière suivante en se servant de l'analogie avec la quantification de l'atome d'hydrogène. Pour quantifier l'atome d'hydrogène, on procède par les étapes suivantes

- Choix d'un espace de Hilbert des états : les fonctions d'onde $\Psi(x)$;
- Représentation de x et p par des opérateurs \hat{x} et \hat{p} sur l'espace des fonctions d'onde : \hat{x} agit par multiplication et \hat{p} par dérivation ;
- Définition et résolution de l'équation de Schrödinger : on obtient les fonctions d'onde $\Psi_{nlm}(x)$;
- Interprétation physique des solutions en termes de nombres quantiques : n, l, m s'interprètent comme valeurs propres des observables physiques d'énergie et de moment angulaire ;

Le but de la démarche de quantification canonique de la gravité est de mimer ces étapes dans le cas de la relativité générale. On cherche d'abord un espace de Hilbert des états, puis on essaye d'associer à la métrique $g_{\mu\nu}(x)$ un opérateur $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. Enfin on cherche à résoudre l'équation de Schrödinger associée et à interpréter physiquement les solutions. Une tel programme a été commencé dans les années 60 et a débouché sur l'équation de Schrödinger de la gravité quantique : l'équation de Wheeler-DeWitt [18]. Malheureusement cette équation se révèle intractable en pratique, et même mal définie. Le programme de quantification canonique restera en suspend jusqu'à la fin des années 80. En 1986, Abhay Ashtekar[19] découvre une nouvelle formulation classique de la relativité générale qui permet de débloquer le programme de quantification canonique. Ce programme sera alors appliqué pour donner naissance à la *gravité quantique à boucles*[20]. Les ingrédients constitutifs de la gravité quantique à boucles sont donc : une nouvelle formulation classique de la gravité, une approche de quantification canonique et des méthodes non-perturbatives qui respectent notamment l'absence de métrique de fond.

1.4 LA GRAVITÉ QUANTIQUE CANONIQUE À BOUCLES

1.4.1 Ingrédients et philosophie

Les méthodes covariantes ont révélé que la gravité quantique est non-renormalisable en perturbations autour de la métrique plate. Pour les tenants de l'approche covariante, il s'agit d'une nouvelle cruciale, qui signale que la relativité générale n'est qu'une théorie effective de basse

énergie, qui doit être remplacée à haute énergie par une autre théorie – comme la théorie des cordes. Un autre point de vue est cependant possible : *Une quantification non-perturbative correcte peut exister malgré la non-renormalisabilité de la relativité générale.* Un argument physique soutient la foi en cette affirmation. En effet la non-renormalisabilité de la relativité générale signifie des divergences inévitables aux grandes impulsions, c'est à dire pour un comportement à courte distance. Or la gravité quantique est censée précisément modifier le paysage microscopique de l'espace-temps, par exemple introduire une échelle de cut-off à courte distance. Un autre argument est que l'on connaît des exemples de théories non-renormalisables, mais dont la quantification non-perturbative peut se faire de manière correcte.

La gravité quantique à boucles[21, 22] est tout d'abord basée sur une *reformulation* de la relativité générale. L'idée est de ne plus considérer la métrique comme l'objet d'intérêt, mais de s'intéresser à la dynamique d'autres quantités, dont la métrique n'est qu'une quantité dérivée. Notamment on ajoute des degrés de jauge puisqu'on augmente "artificiellement" le nombre de variables. Au final, cette nouvelle formulation de la relativité générale lui donne une forme plus proche de celle des théories de jauge (comme la théorie de Yang-Mills), mais sans l'usage d'une métrique de fond. La bonne surprise est que cette reformulation permet de débloquent le programme de quantification canonique.

1.4.2 Les étapes du programme de quantification

Les 20 dernières années ont donc vu se développer la gravité quantique à boucles. En particulier, si l'on compare le programme à celui de l'atome d'hydrogène, la gravité quantique à boucle permet

- De définir un espace de Hilbert de fonctions d'ondes, c'est à dire la notion d'état quantique, et ce avec une grande rigueur mathématique ;
- De résoudre une partie des équations de Wheeler-DeWitt de la gravité quantique ;
- De donner une interprétation physique de ces solutions ;
- D'obtenir certaines solutions complètes des équations de Wheeler-DeWitt ;

En effet ce qu'on appelle équation de Wheeler-DeWitt est en réalité constitué de 3 types d'équations qu'on cherche à satisfaire. La gravité à boucles a jusqu'ici réussi à en résoudre 2. Parmi les solutions de ces 2 équations (que l'on appelle les *états cinématiques*), il faut aussi déterminer celles qui satisfont la 3ième équation. Ces équations étant linéaires, la question est de déterminer quelles sont les bonnes combinaisons linéaires d'états cinématiques qui satisfont aussi la troisième équation.

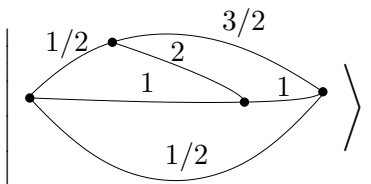
1.4.3 Nombres quantiques et interprétation physique

La résolution des deux premières équations a fournit une base des états cinématiques. On sait déjà donner une interprétation physiques à ces solutions. En mécanique quantique, on interprète physiquement les états solutions en les caractérisant par des nombres quantiques qui représentent des valeurs propres d'observables physiques. Pour caractériser des états formant une base des solutions de l'atome d'hydrogène, il suffit de donner trois nombres (n, l, m) . On a donc des états

$$|n, l, m \rangle .$$

Dans le cas de la gravité quantique, on a besoin de plus de nombres quantiques : une solution des deux premières équations de Wheeler-DeWitt est caractérisée par la donnée d'un graphe

dont les arêtes portent des demi-entiers, qu'on appelle réseau de spin[23]. On a donc des états du genre⁴



Un graphe dont les arêtes portent des demi-entiers joue donc le rôle de "nombre quantique" de la gravité quantique à boucles. Comme pour (n, l, m) , on peut en donner une interprétation physique en termes d'observables : ces nombres sont des valeurs propres de géométrie. Plus précisément les demi-entiers portés par les arêtes du graphe sont des valeurs propres d'aire[24]. Cela signifie qu'en gravité quantique à boucle, *les aires sont quantifiées*, de même que l'énergie ou le moment angulaire sont quantifiés pour l'atome d'hydrogène. Bien entendu il s'agit là d'affirmations auxquelles je donnerai un sens précis au chapitre 4. La plus grande leçon de la gravité quantique à boucles est ce fait que les quantités géométriques sont quantifiées. Ceci confirme l'intuition que l'on pouvait acquérir en combinant simplement les idées fortes de la relativité générale et de la mécanique quantique. Une conséquence importante de la quantification de la géométrie concerne l'entropie des trous noirs. Il a été montré que la gravité quantique à boucles permet de retrouver l'entropie des trous noirs $S = A/4$ [25]. Ceci constitue un résultat important de cette approche.

1.4.4 Les difficultés de la gravité quantique à boucles

On distingue principalement deux difficultés auxquelles se trouve confrontée la gravité quantique à boucles : la résolution de la 3^{ème} équation de Wheeler-DeWitt, et l'identification de propriétés semi-classiques.

A ce jour, toutes les solutions de la 3^{ème} équation de Wheeler-DeWitt ne sont pas connues. La définition de l'équation en elle-même pose problème et elle n'est pas exempte d'ambiguïtés. Cette résolution est pourtant une étape indispensable pour valider les résultats obtenus à ce jour. D'un point de vue pratique cette équation est linéaire. Cela signifie que ses solutions sont des combinaisons linéaires des solutions cinématiques labélées par des graphes. On ne connaît que quelques solutions simples de ce type.

Le second problème concerne l'identification de comportements semi-classiques. En effet la quantification canonique n'est qu'une recette et le fait que la théorie quantique obtenue redonne la théorie classique de départ dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ doit être vérifié explicitement. On cherche notamment à identifier des états semi-classiques analogues aux états cohérents de l'oscillateur harmonique.

On peut enfin mentionner un troisième problème de la gravité quantique : l'ambiguïté d'Immirzi[26]. Il s'agit de l'existence d'un paramètre libre γ qui n'a pas d'influence au niveau classique mais conduit à un ensemble de théories quantiques inéquivalentes. En particulier ce paramètre est en facteur de toutes les valeurs propres géométriques, et l'entropie des trous noirs n'est donc correcte que pour un choix précis de ce paramètre.

⁴mais l'on peut imaginer des graphes aussi compliqués que l'on veut !

1.5 LES MODÈLES DE MOUSSES DE SPIN

1.5.1 Philosophie des modèles de mousses de spin

Les modèles de mousses de spin [27, 28] sont une tentative de contourner les difficultés de l'approche à boucles en utilisant des techniques d'intégrale de chemin. Plus précisément il s'agit d'utiliser l'intégrale de chemin pour passer outre les problèmes de résolution de la 3^{ème} équation de Wheeler-DeWitt. La situation est analogue en mécanique quantique où en définissant l'opérateur d'évolution $U(t)$ par intégrale de chemin, on peut ainsi fabriquer des solutions de l'équation de Schrödinger : pour tout état $|\Psi_0\rangle$, l'état $U(t)|\Psi_0\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger. On voit donc qu'on peut voir l'intégrale de chemin comme une machine à fabriquer des solutions. L'intégrale de chemin peut venir au secours du formalisme canonique (nous précisons ceci au chapitre 2.)

De manière naive, l'intégrale de chemin de la gravité quantique [29] s'écrit

$$\int [\mathcal{D}g] e^{iS[g]}$$

où $S[g]$ désigne l'action de la gravité, et l'intégrale porte sur les métriques d'espace-temps. Le problème des définitions d'intégrale de chemin en théorie des champs est qu'elles n'ont véritablement de sens que pour les théories libres, et que l'intégration fonctionnelle est mal définie hors des méthodes perturbatives, que nous cherchons justement à éviter pour la gravité. La philosophie des mousses de spin consiste à donner un sens à ces intégrales en utilisant des discrétisations de l'espace-temps. La discrétisation est donc introduite à la main. De manière générale, il est raisonnable de penser que la discrétisation permet de régulariser les intégrales de chemin. En revanche il faut remarquer deux choses : premièrement il n'est pas du tout clair que discrétiser pour quantifier soit une technique payante, qui permette de capturer toute la physique du problème ; deuxièmement il s'agit d'une rupture méthodologique avec la philosophie de la gravité quantique à boucles, où la discrétisation de l'espace-temps n'est pas introduite à la main, mais *prédite*. Cependant ces deux remarques sont liées. C'est précisément parce que la gravité à boucles prédit une structure discrète de l'espace-temps que les méthodes d'intégrales de chemin discrète peuvent être considérées comme raisonnables. Néanmoins, l'objectif est à terme de reprendre contact avec la gravité à boucle en montrant explicitement que les modèles de mousse de spin résolvent les équations de Wheeler-DeWitt.

1.5.2 Le modèle de Ponzano-Regge

Le premier modèle de mousse de spin fut en fait proposé en 1968, bien avant la naissance de la gravité quantique à boucles. Les physiciens Ponzano et Regge posèrent ce modèle [30] comme une proposition d'intégrale de chemin discrétisée pour la gravité quantique en 2+1 dimensions. Ce modèle était à l'époque supporté par des arguments de limite semi-classique, qui montraient (sur la base d'une conjecture numérique) que la limite $\hbar \rightarrow 0$ de ce modèle redonnait la relativité générale classique discrétisée. Le problème essentiel du modèle de Ponzano-Regge était que les expressions proposées sont presque systématiquement infinies ! Ce modèle fut donc en réalité largement ignoré jusqu'au début des années 90, où sa relation avec certains travaux mathématiques et d'autres techniques de quantification lui valurent un regain d'intérêt. A partir de 1997, des modèles de mousse de spin (les modèles Barrett-Crane [31, 32]) furent proposés pour la gravité quantique 3+1, avec en perspective le contact avec l'approche canonique à boucles. Le

développement de l'activité autour des modèles de mousses de spin a donc remis le modèle de Ponzano-Regge en scène.

Bien qu'il fut en définitive assez peu étudié, le modèle de Ponzano-Regge est un laboratoire privilégié pour les méthodes de mousse de spin, et ce pour plusieurs raisons. D'une part la gravité quantique en 2+1 dimensions est un modèle jouet particulièrement utile [33] : elle possède les difficultés conceptuelles de la gravité quantique 3+1 (invariance par difféomorphismes, problème du temps, nature des observables quantiques...) tout en étant exempte de plusieurs difficultés techniques, essentiellement liées au fait que la gravité 2+1 ne contient qu'un nombre fini de degrés de liberté physiques (tous les degrés locaux sont de pure jauge). Une autre motivation pour l'étude de la gravité 2+1 est l'existence d'une grande palette de techniques de quantification a priori indépendantes. On peut alors juger et comparer ensemble les résultats de ces approches. Enfin depuis une vingtaine d'années, il existe une forte fertilisation croisée entre le domaine de la gravité quantique en 2+1 dimensions et l'étude mathématique de la topologie des variétés 3D. Il existe donc un important arsenal de concepts mathématiques à notre disposition pour étudier les modèles de gravité quantique en 2+1 dimensions.

Ma thèse s'est axée autour de l'idée que la compréhension de la structure des modèles de mousse de spin doit commencer par une étude approfondie du modèle de Ponzano-Regge, de ses propriétés (finitude, symétries), de ses possibilités de généralisation (inclusion de matière, cas lorentzien, changements de topologie), et de ses résultats en regard des autres approches (notamment gravité à boucles et approches Chern-Simons). Au cours de ce travail, j'ai obtenu les résultats suivants :

- Une preuve mathématique de la conjecture numérique qui justifie le comportement semi-classique du modèle de Ponzano-Regge, une généralisation de ce résultat au cas lorentzien, et un résultat analogue en 3+1 dimensions qui modifie la compréhension semi-classique du modèle de Barrett-Crane. Ce travail a été publié dans [34].
- L'identification des symétries de jauge du modèle de Ponzano-Regge, une méthode pour les fixer de jauge et l'élimination des infinis du modèle. Ceci fournit des amplitudes de transition physiques finies pour la gravité quantique à boucle en 2+1 dimensions. Ce travail a été publié dans [35].
- Une construction qui permet l'inclusion de particules ponctuelles massives avec spin dans le modèle de Ponzano-Regge, le calcul d'amplitudes de transition en présence de particules, l'étude de la cinématique (déformée) des particules en présence de gravité quantique. Ce travail a été publié dans [36].
- Une construction explicite d'une somme non-perturbative sur les topologies pour le modèle de Ponzano-Regge. Cette construction montre la possibilité de prendre en compte non-perturbativement les changements de topologie dans ce formalisme d'intégrale de chemin. Ce travail a été publié dans [37].
- Une compréhension mathématique du lien entre le modèle de Ponzano-Regge fixé de jauge et un invariant de type Chern-Simons construit à l'aide d'un groupe quantique. Ce groupe quantique est une déformation du groupe de Poincaré, et il encode la contrepartie mathématique de la cinématique déformée observée pour les particules. Ce travail sera publié dans [38].

- Une étude mathématique de relations de dualité entre certains objets de théorie des groupes (quantiques) qui apparaissent dans les construction de mousse de spins. Ce travail sera publié dans [39].

Dans le chapitre 2, je rappelle et je compare les techniques de quantification canonique et par intrégrale de chemin, en mettant l'accent sur leurs liens. Ces deux techniques constituent les deux facettes de l'ensemble gravité quantique à boucles/mousses de spin. Dans le chapitre 3, je présente les différentes formulations (lagrangiennes et hamiltoniennes) de la relativité générale qui sont exploitées par les diverses approches canoniques et intégrales de chemin. Le chapitre 4 présente les principaux résultats de la gravité quantique canonique à boucles. Le chapitre 5 est un bref exposé du rôle de la gravité en 2+1 dimensions dans la recherche d'une théorie de gravité quantique. Dans le chapitre 6, j'introduis les modèles de mousse de spin tels qu'ils ont été formulés à l'origine, c'est à dire indépendamment de l'approche à boucles. Au chapitre 7, je présente une construction du modèle de Ponzano-Regge qui servira de base à toute la suite du travail. Mon travail personnel commence au chapitre 8 où j'identifie les symétries de jauge du modèle de Ponzano-Regge, j'explique la méthode de fixation et je présente des calculs d'amplitudes de transition physiques finies que l'on peut ainsi obtenir. Au chapitre 9, je présente le couplage du modèle à des particules ponctuelles massives et à spin. Le chapitre 10 est consacré aux liens mathématiques entre le modèle de Ponzano-Regge et certains nouveaux invariants de variétés 3D basés sur un groupe quantique. Le chapitre 11 présente certains résultats mathématiques liés à l'étude des asymptotiques des symboles quantiques, et à leurs relations de dualité. Pour finir le chapitre 12 présente le modèle qui réalise la somme non-perturbative sur les topologies des amplitudes de Ponzano-Regge.

En annexe A, je donne quelques notations et conventions concernant le groupe $SU(2)$. L'annexe B présente les résultats que j'utilise concernant le groupe quantique $\mathcal{D}(SU(2))$.

2

LA QUANTIFICATION DES SYSTÈMES CONSTRAINTS

Dans ce chapitre je présente les méthodes de quantification des systèmes contraints par approche canonique et par intégrale de chemin. L'objectif est d'exposer ces techniques et d'expliquer pourquoi les méthodes d'intégrale de chemin peuvent venir compléter les méthodes canoniques. Cette idée est le coeur du rapport entre gravité quantique canonique et mousses de spin.

La relativité générale est un système (totalement) contraint. D'une manière générale, la présence de contraintes (de premières classes) pour un système s'accompagne de symétries de jauge. L'existence de contraintes et de symétries de jauge complique la démarche de quantification. Je présente ici les deux grandes techniques de quantification : l'approche canonique à la Dirac et l'approche par intégrale de chemin due à Feynman. Pour chacune de ces méthodes, les subtilités proviennent précisément du traitement des contraintes et symétries de jauge. Dans le but de justifier la complémentarité de ces deux approches, je présenterai une brève analyse de la quantification du système totalement contraint le plus simple : la particule relativiste. Cet exemple montre explicitement comment l'opérateur de projection sur les états physiques peut s'obtenir par une intégrale de chemin. La référence pour la quantification des systèmes contraints est le livre de M.Henneaux et C.Teitelboim [40].

2.1 LE PROGRAMME DE QUANTIFICATION DE DIRAC

Le programme de quantification canonique de Dirac [7, 41] est une recette (malheureusement pleine d'ambiguïtés!) qui permet de construire une théorie quantique à partir de la formulation hamiltonienne d'une théorie classique. Je présente ici les grandes étapes de ce programme. On pourra trouver dans [22] (partie I.1.2) une discussion de ce programme dans le contexte de la gravité canonique, mettant notamment l'accent sur les nombreuses sources d'ambiguïtés qui peuvent apparaître dans l'application du programme.

On peut principalement distinguer les étapes suivantes au programme de quantification canonique de Dirac :

- Formulation hamiltonienne du problème classique ;
- Définition d'un espace de Hilbert 'cinématique' ;
- Représentation des relations de commutation ;
- Définition et résolution des contraintes ;

– Recherche d'un produit scalaire sur l'espace des solutions ;

2.1.1 Formulation hamiltonienne d'un système contraint

Classiquement, une théorie peut être décrite par un ensemble de variables de configuration dépendantes du temps $q_i(t)$ et leurs dérivées $\dot{q}_i(t)$. La dynamique de la théorie est fournie par son lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i)$ et ses équations du mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange. On peut à partir de la formulation lagrangienne obtenir une formulation hamiltonienne. On définit les moments conjugués $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Les nouvelles variables sont les q_i et leurs moments conjugués p_i qui vérifient le crochet de Poisson $\{p^i, q_j\} = \delta_j^i$. On remplace la donnée du Lagrangien par celle du hamiltonien $H(q_i, p^i)$. Les équations d'évolution sont alors les équations de Hamilton. Cependant il se peut que le changement de variables de (q_i, \dot{q}_i) vers (q_i, p^i) ne soit pas inversible. On se trouve alors dans le cas de systèmes contraints, pour lesquels des relations existent nécessairement entre les variables canoniques. Ces relations sont mises sous la forme de contraintes $C_I(q_i, p^i) = 0$, indicées par I .

La formulation hamiltonienne d'un système contraint se fait donc par la donnée d'un espace des phases \mathcal{P} muni d'un crochet de Poisson. Sur cet espace sont définies les contraintes C^I et le hamiltonien H . Un système est dit totalement contraint lorsque le hamiltonien est nul sur la surface des contraintes. Ceci se produit notamment dès qu'une action est invariante par reparamétrisation du temps.

Dans la suite nous allons considérer comme exemple de ces techniques le système simple défini par deux variables $q_1(t)$ et $q_2(t)$, et le lagrangien

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + V(q_1, q_2). \quad (2.1)$$

Les moments conjugués sont donnés par

$$p_1 = \dot{q}_1 \quad (2.2)$$

$$p_2 = 0 \quad (2.3)$$

La relation $p_2 = 0$ rend le changement non-inversible et se pose comme une contrainte C .

2.1.2 Le choix d'un espace de Hilbert cinématique

Le programme de quantification canonique de Dirac commence par le choix d'un espace de Hilbert, c'est à dire d'un espace d'états. Cet espace est appelé 'cinématique' car il ignore momentanément l'existence de contraintes. Il ne s'agit pas de l'espace de Hilbert définitif.

Polarisation

Pour choisir un tel espace, on considère une *polarisation*, c'est à dire un sous-ensemble maximal de variables canoniques qui commutent par crochet de Poisson. Dans le cas simple d'un crochet $\{p^j, q_i\} = \delta_i^j$, le choix naturel de polarisation est de prendre l'ensemble des q_i (ou des p^j). On considère alors les fonctions de ces variables comme les fonctions d'onde, par exemple les fonctions $\Psi(q_i)$, pour lesquelles on peut utiliser la notation de Dirac $\langle q_i | \Psi \rangle$.

Mesure

L'espace d'états ainsi construit doit ensuite être équipé d'un produit hilbertien. On peut le faire en munissant l'espace des variables d'une mesure $d\mu$ qui permette de considérer l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ \Psi(q_i) \text{ t.q. } \int d\mu |\Psi(q_i)|^2 < +\infty \right\}. \quad (2.4)$$

D'une manière générale, le choix de l'espace de Hilbert fait intervenir des configurations distributionnelles. La mesure est donc en général à support sur les configurations distributionnelles, c'est à dire sur un espace $\bar{\mathcal{C}}$ plus grand que l'espace \mathcal{C} des configurations classiques. A ce stade rien ne semble particulièrement dicter le choix de la mesure $d\mu$. Ce choix est en fait contraint par le fait qu'on veut représenter sur \mathcal{H}_0 certaines relations classiques. Il s'agit de l'étape suivante du programme.

Représentations sur \mathcal{H}_0

L'espace de Hilbert choisi doit maintenant porter l'implémentation de deux relations classiques : l'algèbre de Poisson et les conditions de réalité. Pour représenter l'algèbre de Poisson par une algèbre de commutateur sur \mathcal{H}_0 , on recherche des opérateurs \hat{Q}_i et \hat{P}^i sur \mathcal{H}_0 , tels que

$$[\hat{P}^j, \hat{Q}_i] = i\hbar\delta_i^j. \quad (2.5)$$

La manière naturelle de faire cette représentation est d'utiliser les opérateurs de multiplication et de dérivation de l'espace des fonctions d'onde, à savoir

$$\hat{Q}_i \cdot \Psi = q_i \Psi, \quad (2.6)$$

$$\hat{P}^i \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial q_i}. \quad (2.7)$$

L'espace de Hilbert doit également implémenter les conditions de réalité de l'espace des phases classiques. Cela signifie que la conjugaison complexe \star sur l'espace des phases doit être mimée par les relations d'adjoint \dagger . Par exemple si $q_1^\star = q_2$, on demande que $\hat{Q}_1^\dagger = \hat{Q}_2$. Ces deux implémentations sont dépendantes du choix de la mesure $d\mu$ effectuée à l'étape suivante. Il faut donc retrospectivement considérer une mesure qui permette ces représentations.

Pour notre exemple, le choix de polarisation (q_1, q_2) est naturel. La mesure d'intégration sur cette espace ne pose pas de problèmes. On définit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ \Psi(q_1, q_2) \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}^2} dq_1 dq_2 |\Psi(q_1, q_2)|^2 < +\infty \right\} \quad (2.8)$$

Les opérateurs $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{P}_1, \hat{P}_2$ sont définis naturellement par multiplication et dérivation sur les fonctions d'onde

$$\hat{Q}_1 \cdot \Psi = q_1 \Psi, \quad \hat{P}_1 \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}, \quad (2.9)$$

$$\hat{Q}_2 \cdot \Psi = q_2 \Psi, \quad \hat{P}_2 \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \quad (2.10)$$

Les conditions de réalité sont très simples à implémenter : les variables classiques sont toutes réelles, on demande aux opérateurs qui les représentent d'être auto-adjoints, ce qui est le cas.

2.1.3 Résolution des contraintes

Dans le cas d'un système contraint, il s'agit maintenant de définir et de résoudre les contraintes au niveau quantique. Cela signifie qu'il faut tout d'abord donner un sens aux opérateurs de contrainte \hat{C}_I . Une définition naturelle est

$$\hat{C}_I = C_I(\hat{Q}_i, \hat{P}_i). \quad (2.11)$$

Cette opération peut en pratique se révéler non-triviale et pleine d'ambiguïtés possibles (voir [22]).

A supposer qu'on parvienne à définir les opérateurs de contrainte, il faut maintenant trouver les fonctions d'ondes $|\Phi\rangle$ qui résolvent ces contraintes c'est à dire celles qui sont telles que

$$\hat{C}_I |\Phi\rangle = 0, \quad \forall I. \quad (2.12)$$

L'espace des des fonctions d'onde solutions des contraintes forme alors un espace d'états physiques, sur lequel nous pouvons maintenant travailler. Comme va le révéler l'exemple suivant, la résolution des contraintes pose en réalité plusieurs problèmes.

La définition de la contrainte ne pose pas de problème dans notre exemple, puisqu'on prend simplement $\hat{C} = \hat{P}_2$. L'équation de contrainte est donc

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} = 0. \quad (2.13)$$

Il est facile de résoudre cette équation dont les solutions sont les fonctions $\Phi(q_1)$ qui ne dépendent pas de q_2 . L'espace des fonctions d'ondes physiques est donc celui des fonctions de q_1 seulement. Le problème est que ces fonctions ne sont pas dans \mathcal{H}_0 , puisqu'elles ne sont pas de carré intégrable ! On obtient bien un espace de solutions, mais qui n'est pas un sous-espace de \mathcal{H}_0 . En particulier, cet espace de solutions n'hérite pas du produit scalaire de \mathcal{H}_0 . Il n'est pas à ce stade un espace de Hilbert. Pour cela, il faut l'équiper d'un produit scalaire physique. Dans notre exemple les fonctions d'onde ne dépendent que de q_2 , un choix très naturel est alors de ne considérer que l'intégration sur q_1 pour définir le produit scalaire,

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_{phys} = \int dq_1 \Phi_1^*(q_1) \Phi_2(q_1). \quad (2.14)$$

Nous verrons plus tard comment justifier plus précisément un tel choix.

Cet exemple illustre les difficultés liées à la résolution des contraintes dans un cas simple de mécanique quantique. Dans la partie suivante, j'expose les principes généraux qui permettent de traiter les difficultés qui se posent lors de la résolution des contraintes.

2.1.4 La résolution des contraintes par quantification algébrique raffinée

Comme l'illustre l'exemple ci-dessus, il est fort probable que nous ayons à chercher les solutions des contraintes "légèrement en dehors" de \mathcal{H}_0 ¹. En termes plus rigoureux, on recherche les solutions dans le dual \mathcal{D}^* d'un sous-espace \mathcal{D} dense dans \mathcal{H}_0 . Il n'existe pas de prescription claire pour \mathcal{D} mais on doit choisir un domaine de \mathcal{H}_0 sur lequel les opérateurs de contraintes sont définis, et qui soit stable sous leur action. L'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{D}^*$ forme un triple de Gelfand. La résolution des contraintes revient à chercher les 'états généralisés' $\langle \Phi | \in \mathcal{D}^*$ tels que

$$\langle \Phi | \hat{C} | \psi \rangle = 0, \quad \forall | \psi \rangle \in \mathcal{D}. \quad (2.15)$$

On peut alors identifier l'espace des solutions \mathcal{H}_{phys} comme un sous espace de \mathcal{D}^* . Cet espace de solutions n'est à ce stade qu'un espace vectoriel. La principale difficulté qui s'ensuit est que bien souvent \mathcal{H}_{phys} n'est pas un sous espace de \mathcal{H}_0 et il n'hérite par conséquent pas du produit scalaire de \mathcal{H}_0 . Il faut alors trouver un nouveau produit scalaire pour équiper \mathcal{H}_{phys} .

Une manière générale de procéder est la méthode dite de *quantification algébrique raffinée* par moyenne sur le groupe [42] (voir aussi [22], partie III.7) . Le but de cette méthode est double : elle permet à la fois de fournir des solutions aux contraintes, et de trouver le bon produit scalaire. Pour cela, on cherche à définir une application² $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ dont l'image

¹Ce type de situation se produit lorsque la valeur propre 0 de l'opérateur de contrainte se situe dans la partie continue de son spectre.

²que les anglo-saxons appellent 'rigging map'.

soit les solutions des contraintes au sens de (2.15). Si \hat{C} est l'opérateur de contrainte, une telle application est par exemple formellement définie par $\hat{\Pi} = \delta(\hat{C})$. Par abus de langage, on appelle ce type d'application un projecteur. On comprend facilement qu'un tel projecteur risque de ne pas laisser stable \mathcal{H}_0 , puisque le produit scalaire \mathcal{H}_0 de deux telles solutions serait

$$\langle \Psi_1 | \hat{\Pi} \hat{\Pi} | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \delta(\hat{C}) \delta(\hat{C}) | \Psi_2 \rangle, \quad (2.16)$$

que le produit de deux fonctions δ peut rendre indéfini³. Une solution consiste à définir le produit scalaire sur \mathcal{H}_{phys} de la manière suivante. Si Φ_1 est une solution obtenue par $\delta(\hat{C})\Psi_1$ et $\Phi_2 = \delta(C)\Psi_2$, on définit leur produit scalaire physique par

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_{phys} = \langle \Psi_1 | \hat{\Pi} | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \delta(\hat{C}) | \Psi_2 \rangle. \quad (2.17)$$

Cette technique permet "d'enlever une fonction δ " et d'obtenir un produit scalaire convenable.

La méthode de quantification algébrique raffinée est reliée à la technique de *moyenne sur le groupe*. En effet l'existence d'une contrainte (de première classe) est reliée à l'existence d'une symétrie de jauge. Ainsi, demander qu'un état soit annihilé par les contraintes est équivalent à demander qu'il soit invariant de jauge. Si $U(\lambda)$ est l'opérateur qui représente la symétrie de paramètre λ , cela s'écrit

$$U(\lambda)|\Phi\rangle = |\Phi\rangle, \quad \forall \lambda. \quad (2.18)$$

En général, on recherche là aussi ces états parmi les 'états généralisés', c'est à dire dans \mathcal{D}^* . Une manière d'obtenir un tel $\langle \Phi |$ est de moyennner sur le groupe, si cette opération converge. L'état

$$\langle \Phi | = \int d\lambda \langle \Psi | U(\lambda) \quad (2.19)$$

fournit un invariant de jauge. L'équivalence entre un état invariant de jauge et un état solution des contraintes se comprend par le fait que la contrainte C est le générateur des symétries de jauge infinitésimales. On a donc

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\hat{C}}, \quad (2.20)$$

(on ignore ici le problème des transformations de symétrie non-connectées à l'identité), par conséquent l'opérateur de moyenne sur le groupe est bien le projecteur sur les solutions

$$\int d\lambda U(\lambda) = \int d\lambda e^{i\lambda\hat{C}} = \delta(\hat{C}) = \hat{\Pi}. \quad (2.21)$$

³Notamment si 0 est dans la partie continue du spectre de \hat{C}

Illustrons cette méthode sur notre exemple. La contrainte $p_2 = 0$ est le générateur d'une symétrie de jauge qui est la translation de q_2

$$q_2 \rightarrow q_2 + \lambda. \quad (2.22)$$

Un opérateur de projection défini par moyenne sur le groupe de jauge est alors

$$\Pi \cdot \Psi(q_1, q_2) = \int d\lambda \Psi(q_1, q_2 + \lambda) = \int dq_2 \Psi(q_1, q_2). \quad (2.23)$$

On peut alors construire des solutions Φ_1 et Φ_2 à partir de Ψ_1 et Ψ_2 , et utiliser le produit scalaire

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int dq_1 dq_2 \Psi_1(q_1, q_2) \int dq'_2 \Psi_2(q_1, q'_2). \quad (2.24)$$

Cette équation montre que deux solutions obtenues par intégration sur q_2 ont un produit scalaire qui est l'intégration sur q_1 . On retrouve donc par cette méthode le produit scalaire que nous avons "deviné" précédemment. En fait on peut montrer que quand la méthode de moyenne sur le groupe converge, elle fournit l'unique produit scalaire physique disponible [42].

2.1.5 De la quantification algébrique raffinée à l'intégrale de chemin

L'analyse de la méthode de Dirac et l'exemple particulier ci-dessus montrent les différentes ambiguïtés et choix inéquivalents qui se produisent lors du programme de quantification. En particulier on voit que la définition d'un projecteur Π sur les contraintes permet de faire d'une pierre deux coup, puisqu'il agit comme machine à fabriquer des solutions, mais nous donne aussi le bon produit scalaire physique. La recherche de cet opérateur de projection apparait donc comme une étape importante dans le programme de quantification. Pour comprendre ce qu'est cet opérateur et comment le définir, on peut se repencher sur sa définition formelle $\Pi = \delta(C)$. Une autre manière de récrire cette définition est la suivante

$$\Pi = \delta(C) = \int dN e^{iNC}. \quad (2.25)$$

Cette forme est exactement celle de la contrainte C associée à son multiplicateur de Lagrange N , telle qu'elle peut apparaitre dans l'exponentiation de l'action qui définit une intégrale de chemin. La formulation intégrale de chemin contient donc la notion d'opérateur de projection. Cette idée est au coeur de la philosophie des modèles de mousses de spins, dont le but est de remettre un peu d'intégrale de chemin dans la gravité quantique canonique, pour en comprendre la dynamique.

La partie suivante va donc chercher à montrer que de même que l'intégrale de chemin peut fournir les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution, elle peut fournir les éléments de matrice du projecteur sur les états physiques⁴.

⁴On peut d'ailleurs voir l'opérateur d'évolution $U(t)$ comme un projecteur sur les solution de l'équation de Schrödinger. Si $|\Psi\rangle$ est un état cinématique, $U(t)|\Psi\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger

2.2 APPROCHE INTÉGRALE DE CHEMIN

2.2.1 La formule de Feynman-Kac

Pour un système de mécanique quantique (non-contraint) décrit par un hamiltonien H , l'ensemble de la dynamique est contenue dans l'opérateur d'évolution $U(t_2 - t_1) = e^{i(t_2 - t_1)H}$. On définit les éléments de matrice de cet opérateur

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f | U(t_f - t_i) | q_i \rangle . \quad (2.26)$$

La formule de Feynman-Kac [8] permet d'écrire ces éléments de matrice sous la forme d'une intégrale de chemin sur les variables d'espace des phases

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right] . \quad (2.27)$$

Dans le cas d'un hamiltonien $H(q, p) = (p^2/2m) + V(q)$, on peut intégrer sur la variable p et obtenir

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S(q)} . \quad (2.28)$$

où $S(q)$ désigne l'action du système. La formule de Feynman-Kac exprime les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution comme une intégrale de chemin. Peut-on établir une formule de Feynman-Kac pour les éléments de matrice de l'opérateur de projection sur les états physiques ?

2.2.2 La formule de Feynman-Kac pour un système contraint

Essayons dans cette partie de donner une forme intégrale de chemin aux éléments de matrice

$$K(x_f, x_i) = \langle x_f | \hat{\Pi} | x_i \rangle , \quad (2.29)$$

d'un opérateur de projection sur les états physiques. Supposons que cet opérateur de projection découle de l'existence d'une unique contrainte \hat{C} . On suppose que cet opérateur peut alors se définir comme

$$\hat{\Pi} = \int_{\mathcal{G}} d\lambda e^{i\lambda \hat{C}} , \quad (2.30)$$

où \hat{C} est l'opérateur de contrainte (de première classe), \mathcal{G} est par conséquent le groupe de jauge. Supposons enfin pour commencer que $\Pi^2 = \Pi$, ce qui revient à supposer que le groupe de jauge est compact avec la normalisation $\int_{\mathcal{G}} d\lambda = 1$. On a donc en particulier pour un entier N quelconque l'égalité

$$K(x_f, x_i) = \langle x_f | \hat{\Pi}^N | x_i \rangle . \quad (2.31)$$

On note $x_N = x_f$ et $x_0 = x_i$, on peut alors récrire en insérant des relations de fermeture

$$K(x_f, x_i) = \prod_{k=1}^N \int dx_k \langle x_k | \hat{\Pi} | x_{k-1} \rangle = \prod_{i=k}^N \int dx_k dp_k \langle x_k | \hat{\Pi} | p_k \rangle \langle p_k | x_{k-1} \rangle . \quad (2.32)$$

En supposant l'opérateur de contrainte convenablement ordonné, on peut récrire ceci comme

$$K(x_f, x_i) = \prod_{k=1}^N \int dx_k dp_k d\lambda_k \langle x_k | p_k \rangle e^{i\lambda_k C(x_k, p_k)} \langle p_k | x_{k-1} \rangle . \quad (2.33)$$

On fait tendre N vers l'infini et on récrit cette expression en termes d'un temps non-physique $\tau \in [0; 1]$ partitionné en N segments, et de variables continues $x(\tau), p(\tau)$ et $\lambda(\tau)$. On a alors

$$K(x_f, x_i) = \int_{x(0)=x_i}^{x(1)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\lambda \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau [p\dot{x} + \lambda(\tau)C(q(\tau), p(\tau))] \right\}. \quad (2.34)$$

Cette expression fournit une expression intégrale de chemin des éléments de matrice de l'opérateur de projection, où l'amplitude est donnée par l'exponentielle de l'action hamiltonienne d'un système totalement contraint.

On peut faire deux remarques sur cette construction. La construction fait appel à l'introduction d'une partition d'un temps non-physique τ . Ceci est caractéristique d'un système totalement contraint invariant par reparamétrisation du temps. Si nous avons fait cette construction dans le cas d'un système non-totalement contraint, on aurait construit les éléments de matrice de l'opérateur $U(t)\Pi$, et la partition aurait été celle du temps physique t . Une autre conséquence de l'apparition du temps non-physique τ concerne la rotation de Wick. En effet pour rendre définis les calculs d'intégrales de chemin, on utilise usuellement la rotation de Wick $t \rightarrow it$ qui représente physique un passage à un temps euclidien. Il n'est pas clair qu'une telle opération soit possible dans le cas du temps non-physique τ , en relation avec un signature de la métrique. On peut voir cela comme une difficulté de la quantification sans métrique de fond. Une seconde remarque concerne le fait que cette construction utilise que Π est un vrai projecteur. En général ceci ne sera pas le cas, ce qui peut être relié à la non-compactité du groupe de jauge. On s'attend donc à ce que l'utilisation d'une forme intégrale de chemin de l'action pour définir le projecteur contienne des infinités. Dans le cas général, il faudra donc faire appel à des fixations de jauge dans l'intégrale de chemin, ce qui nous est rendu possible par la méthode de DeWitt-Fadeev-Popov [43, 44].

2.2.3 La méthode de DeWitt-Fadeev-Popov

Pour un système possédant des contraintes de première classe, l'imposition des contraintes au niveau de l'intégrale de chemin n'est pas suffisante. A une contrainte de première classe est associée une symétrie de jauge du système. Un volume infini de symétries de jauge provoque une divergence de l'intégrale. La méthode de DeWitt-Fadeev-Popov permet de résoudre ce problème en imposant une fixation de jauge, et en modifiant la mesure pour la rendre indépendante de ce choix de jauge [45].

Considérons un système décrit par des variables de configuration X , une action $S(X)$, et possédant une symétrie de jauge paramétrisée par des éléments $g \in \mathcal{G}$. On suppose la mesure d'intégration $\mathcal{D}X$ invariante de jauge. La fonction de partition définie sans fixation de jauge

$$Z = \int \mathcal{D}X e^{iS(X)}, \quad (2.35)$$

diverge. Choisissons une condition $\mathcal{F}(X)$ qui fixe totalement la jauge. On définit

$$\Delta^{-1}(X) = \int_{\mathcal{G}} dg \delta(\mathcal{F}(gX)). \quad (2.36)$$

Cette définition est telle que $\Delta(X)$ est un invariant de jauge $\Delta(gX) = \Delta(X)$. Si on insère $\Delta\Delta^{-1}$ dans (2.35), on obtient

$$Z = \int \mathcal{D}X \Delta(X) \int_{\mathcal{G}} dg \delta(\mathcal{F}(gX)) e^{iS(X)} \quad (2.37)$$

Grâce à l'invariance de jauge de la mesure, de l'action et de Δ , on peut écrire $\mathcal{D}X = \mathcal{D}^g X$, $S(^g X) = S(X)$ et $\Delta(^g X) = \Delta(X)$, ce qui permet de récrire

$$Z = \int_{\mathcal{G}} dg \int \mathcal{D}^g X \Delta(^g X) \delta(\mathcal{F}(^g X)) e^{iS(^g X)}, \quad (2.38)$$

et en redéfinissant $Y = ^g X$, on a

$$Z = \left(\int_{\mathcal{G}} dg \right) \int \mathcal{D}Y \Delta(Y) \delta(\mathcal{F}(Y)) e^{iS(Y)}. \quad (2.39)$$

Ceci montre que la quantité

$$Z^G = \int \mathcal{D}Y \Delta(Y) \delta(\mathcal{F}(Y)) e^{iS(Y)}, \quad (2.40)$$

correspond bien à Z divisé par le volume du groupe de jauge $\int_{\mathcal{G}} dg$. La mesure $\Delta(X) \delta(\mathcal{F}(X)) \mathcal{D}X$ permet bien de fixer de jauge de manière invariante dans la fonction de partition.

D'une manière générale, la méthode de Fadeev-Popov permet donc de fixer de jauge les intégrales de chemin. Dans le cas d'un système totalement contraint, on s'attend donc également à devoir user de cette méthode pour fixer de jauge les intégrales de chemin qui définissent les éléments de matrice de l'opérateur de projection. Nous allons étudier ceci dans l'exemple de la particule relativiste exposé dans la partie suivante.

2.3 EXEMPLE D'UN SYSTÈME TOTALEMENT CONTRAINT : LA PARTICULE LIBRE RELATIVISTE

La particule relativiste peut être formulée sous la forme d'un système totalement contraint. En ce sens il s'agit du système totalement contraint le plus simple, qu'on peut voir comme de la relativité générale en dimension 0+1. Je vais maintenant illustrer les idées des deux parties précédentes sur cet exemple, c'est à dire montrer comment développer le formalisme canonique et obtenir le projecteur sur les états physiques dans ce cadre. Dans une seconde partie je montrerai comment ce projecteur peut aussi s'obtenir dans un formalisme d'intégrale de chemin.

2.3.1 Particule libre classique et canonique

On considère l'action suivante pour la particule libre relativiste

$$S[x^\mu, N] = \int_0^1 d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}{N(\tau)} - m^2 N(\tau) \right), \quad (2.41)$$

où τ joue le rôle de temps propre non-physique, x^μ est le quadrivecteur position de la particule. N peut être vu comme une métrique unidimensionnelle g_{00} , qui joue le rôle du "lapse" de la formulation canonique de la relativité générale. Les équations du mouvement de cette action sont

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}}{N} \right) = 0, \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{\dot{x}}{N} \right)^2 + m^2 = 0. \quad (2.43)$$

Cette action possède une invariance de jauge par reparamétrisation du temps $\tau \rightarrow f(\tau)$ (difféomorphisme)

$$x(\tau) \rightarrow x(f(\tau)), \quad (2.44)$$

$$N(\tau) \rightarrow \frac{df}{d\tau} N(f(\tau)), \quad (2.45)$$

pour f différentiable et préservant les points extrêmes. Dans la jauge $\tau = x^0 = t$, la seconde équation permet d'extraire $N = \sqrt{1 - v^2}/m$, et la première équation devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = 0, \quad (2.46)$$

qui est bien l'équation du mouvement de la particule libre relativiste.

Le moment conjugué à x^μ est donné par

$$p_\mu = \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{N} \quad (2.47)$$

et le hamiltonien s'écrit alors

$$H(x, p, N) = \int d\tau N(p^2 + m^2) \quad (2.48)$$

où le lapse N joue le rôle de multiplicateur de Lagrange pour la contrainte

$$C(p) = p^2 + m^2. \quad (2.49)$$

De manière analogue au cas de la relativité générale, c'est un système totalement contraint puisque le hamiltonien est nul quand la contrainte est satisfaite. La contrainte hamiltonienne $C(p)$ engendre la symétrie de jauge par reparamétrisation du temps

2.3.2 Quantification canonique

Le choix naturel de polarisation amène à considérer l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes $\langle x^\mu | \Psi \rangle = \Psi(x^\mu)$, muni du produit scalaire \mathcal{L}^2 . La représentation de p_μ par les opérateurs de dérivation conduit à l'équation de contrainte

$$(\square + m^2)\Psi = 0, \quad (2.50)$$

où \square désigne l'opérateur d'alembertien. Les solutions de cette équation d'onde forment l'espace de Hilbert physique. Pour trouver le produit scalaire physique, l'opérateur de projection

$$\hat{\Pi} = \delta(P^2 + m^2) \quad (2.51)$$

possède des éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle x_f | \hat{\Pi} | x_i \rangle &= \int d^4p \langle x_i | p \rangle \delta(p^2 + m^2) \langle p | x_f \rangle, \\ &= \int d^4p e^{ip \cdot (x_f - x_i)} \delta(p^2 + m^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

On réalise explicitement l'intégration sur p^0 , on définit $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, on a alors les éléments de matrice du projecteur

$$\langle x_f | \Pi | x_i \rangle = \sum_{\epsilon = \pm} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{2p_0}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_i) + \epsilon \omega_{\vec{p}}(t_f - t_i)}. \quad (2.53)$$

Ce projecteur définit le produit scalaire physique.

Sur l'exemple simple de la particule relativiste, le programme de quantification canonique peut être mené à son terme avec la résolution de la contrainte et le choix du produit scalaire physique. Voyons maintenant comment une méthode d'intégrale de chemin permet elle aussi d'aboutir aux éléments de matrice du projecteur.

2.3.3 Intégrale de chemin pour le projecteur

Le but de cette partie est de montrer que le projecteur sur les états physiques peut être retrouvé à l'aide d'une définition par intégrale de chemin, assortie d'une fixation de jauge convenable. Une méthode similaire est présentée dans [46]. On considère l'action hamiltonienne de la particule

$$S[x, p, N] = \int d\tau [p\dot{x} - N(p^2 + m^2)]. \quad (2.54)$$

Cette action permet de définir l'intégrale de chemin

$$G(x_f, x_i) = \int_{x(0)=x_i}^{x(1)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}N \exp \left\{ i \int d\tau [p \cdot \dot{x} - N(p^2 + m^2)] \right\}, \quad (2.55)$$

On peut intégrer l'action par parties, pour obtenir

$$G(x_f, x_i) = \int_{x(0)=x_i}^{x(1)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}N \exp \left\{ i \left[p(1)x(1) - p(0)x(0) - \int d\tau [p \cdot \dot{x} + N(p^2 + m^2)] \right] \right\} \quad (2.56)$$

L'intégrale sur x peut alors s'effectuer facilement, elle impose que $\dot{p} = 0$, on obtient après cette intégration

$$G(x_f, x_i) = \int dp \mathcal{D}N e^{i[p(x_f - x_i) - (p^2 + m^2) \int d\tau N]}. \quad (2.57)$$

On voit clairement sur cette expression qu'elle ne dépend que de la quantité

$$T = \int d\tau N(\tau). \quad (2.58)$$

La symétrie de reparamétrisation du temps agissant sur le lapse par $N \rightarrow f'(\tau)N(f(\tau))$, on voit bien que T est un invariant de jauge. Cela suggère de reparamétriser le lapse de la manière suivante : l'ensemble des fonctions de lapse $N(\tau)$ peut être paramétrisé par un couple (T, φ) , où $T \in \mathbb{R}$ et $\varphi(\tau)$ est une fonction d'intégrale 1 sur $[0, 1]$. On a alors $N(\tau) = T\varphi(\tau)$. On peut montrer [46] que le jacobien associé à ce changement de variable est une constante. En utilisant la paramétrisation $N(\tau) = (T, \varphi(\tau))$, on a alors

$$G(x_f, x_i) = \left(\int \mathcal{D}\varphi \right) \int dp dT e^{i[p(x_f - x_i) - T(p^2 + m^2)]} \quad (2.59)$$

La division par le volume du groupe de jauge est alors facilement effectuée. On intègre ensuite sur T pour obtenir $\delta(p^2 + m^2)$ puis sur p_0 . On retrouve alors les éléments de matrice du projecteur

$$G(x_f, x_i) = \langle x_f | \hat{\Pi} | x_i \rangle . \quad (2.60)$$

que l'on avait trouvé par la quantification canonique (2.53).

Précisons ici que nous avons obtenu ce propagateur en intégrant sur les valeurs *positives et négatives* du lapse N . Nous obtenons ainsi le propagateur de Hadamard du système[47]. Ce propagateur définit une projection sur les solutions des contraintes et il encode le produit scalaire physique. En revanche il ne s'interprète pas comme une amplitude de transition car il ne rend pas compte de la notion de causalité. En restreignant l'intégration sur les lapses positifs, on obtient le propagateur de Feynman, qui distingue la causalité. Pour une théorie distinguant la notion de causalité (c'est à dire pour nous une théorie de gravité quantique lorentzienne), il est important de souligner ces différences, car le produit scalaire physique ne calcule pas une amplitude de transition causale. Il restreindre l'intégration du multiplicateur de lagrange de la contrainte hamiltonienne.

2.3.4 Observables physique et problème du temps

La particule relativiste est l'exemple le plus simple d'un système totalement contraint. Un problème particulier qui se pose avec ces systèmes est le *problème du temps*. L'origine de ce problème est la suivante : puisque le hamiltonien est purement constitué de contrainte, toute observable physique (c'est à dire opérateur qui commute avec les contraintes) commute aussi avec le hamiltonien. En conséquence toute observable physique est une constante et rien ne distingue le temps.

Une manière de résoudre ce problème consiste à introduire les notions d'*observables partielles* ou *relationnelles*. L'idée est que des observables physiques peut être construite à partir de la relations entre des opérateurs qui ne sont pas des observables. Si \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 sont des observables partielles, demander les valeurs de \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_2 n'a pas de sens. En revanche on peut utiliser \mathcal{O}_2 comme une horloge, et se demander : *Quelle est la valeur de \mathcal{O}_1 quand \mathcal{O}_2 vaut T ?*

Donnons-en un exemple pour le cas de la particule relativiste. La contrainte hamiltonienne est $p^2 + m^2$. Les moments p^μ sont donc des observables physiques, mais les x^μ n'en sont pas ! On n'a pas a priori d'observables de type distance. Pour en construire, introduisons une observable non-physique qui va servir d'horloge : l'opérateur

$$\mathcal{O} = \frac{x \cdot p}{m}. \quad (2.61)$$

Une question intéressante est maintenant par exemple de construire l'observable qui donne x^μ quand \mathcal{O} vaut T . Explicitement, il s'agit de

$$X^\mu(T) = x^\mu - \left(\frac{x \cdot p}{m} - T \right) \frac{p^\mu}{m}. \quad (2.62)$$

On peut vérifier explicitement que cet opérateur commute avec la contrainte. T est une coordonnée qui mesure la distance entre la particule le 'périhélie' de sa trajectoire, c'est à dire le point de sa trajectoire le plus proche de l'origine.

3

LES FORMALISMES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Le but de ce chapitre est de présenter les différentes formulations lagrangiennes et hamiltonienne de la relativité générale en 3+1 dimensions. En effet outre la formulation métrique d'Einstein [1] et sa contrepartie canonique, le formalisme ADM [48, 49], on peut construire des actions reproduisant l'équation d'Einstein mais en partant de variables et de formulations différentes.

Un des principes clés des approches *gravité quantique à boucles / mousses de spins* est précisément que ces approches exploitent les différentes formulations de la relativité générale qui sont à notre disposition. On classe généralement les formulations de la relativité générale entre formalismes du *second ordre* et du *premier ordre*, suivant l'ordre des équations du mouvement en jeu. Je présente ici la formulation métrique usuelle d'Einstein et le formalisme canonique ADM qui lui est associé. Je décrirai ensuite le formalisme du premier ordre de Palatini [50, 51] et son analyse canonique. Je terminerai enfin par le formalisme de Plebanski [52].

On pourra trouver de nombreux détails sur ces différentes formulations et leurs relations dans la revue de J. Romano [53] ainsi que dans celle de P. Peldan [54]. Le formalisme mathématique de la relativité générale et des théories de jauge est très bien exposé dans le livre de R. Coquereaux [55].

3.1 LE FORMALISME D'EINSTEIN DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La relativité générale dans le formalisme d'Einstein décrit la dynamique de la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$ qui vit sur une variété pseudo-riemannienne \mathcal{M} de signature $(-, +, +, +)$ ¹. A partir de la métrique $g_{\mu\nu}$, on définit la notion de symbole de Christoffel

$$C_{\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (3.1)$$

Le symbole de Christoffel associés à une métrique $g_{\mu\nu}$ permettent de qualifier le transport parallèle. On notera dans la suite ∇_{μ} la dérivée covariante associée au symbole de Christoffel. La compatibilité de la métrique avec cette dérivée covariante s'écrit

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\rho} = 0. \quad (3.2)$$

¹Notons dès à présent que la recherche d'une théorie de la gravité quantique utilise néanmoins très souvent comme modèle-jouet le cas de la métrique euclidienne.

Le tenseur de courbure associé à cette dérivée covariante est le tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$, il est défini en terme de l'action de la dérivée covariante sur les 1-formes par

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] t_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma t_\sigma. \quad (3.3)$$

A partir du tenseur de Riemann on définit alors le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma$ et la courbure scalaire $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$.

La dynamique de la métrique d'espace-temps en présence de matière et de constante cosmologique est gouvernée par l'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière, G la constante gravitationnelle et Λ la constante cosmologique.

La formulation lagrangienne standard de la relativité générale en l'absence de matière est donnée par l'action de Einstein-Hilbert

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} d^4x (R - 2\Lambda), \quad (3.5)$$

où g désigne le déterminant de la métrique. La variation par rapport à $g_{\mu\nu}$ de cette action redonne l'équation d'Einstein (3.4) en l'absence de matière.

Un point-clé de la relativité générale est le fait que *les difféomorphismes sont les symétries de la relativité générale*. Précisons ce qu'il faut entendre par là. Considérons une variété \mathcal{M} munie d'une métrique g . Pour les besoins de l'écriture et des calculs, on introduit généralement un système de coordonnées sur cette variété, c'est à dire une application

$$\begin{aligned} x &: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\rightarrow x^\mu(p). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Une propriété de la relativité générale est que sa formulation est invariante sous les *changements de coordonnées*. Un changement de coordonnées est une application

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ x^\mu &\rightarrow y^\mu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On appelle ces transformations les difféomorphismes passifs. Ils n'agissent pas sur les variables de la théorie (le tenseur métrique), et ne sont donc pas les symétries de la relativité générale. Un difféomorphisme *actif* est une application

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \\ p &\rightarrow p'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Une telle application agit sur le tenseur métrique par pull-back $(\Phi^*g)(p) = g(\Phi(p))$. Les difféomorphismes agissent sur le tenseur métrique, et relient ensemble des solutions physiquement équivalentes : les difféomorphismes actifs sont les symétries de jauge de la relativité générale.

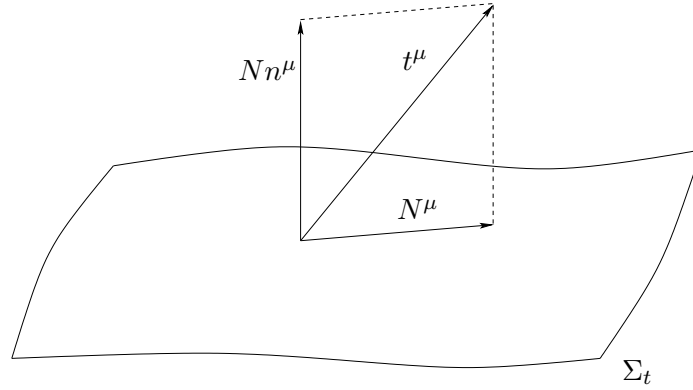


FIG. 3.1 – Le lapse et le shift représentent la décomposition normale et tangentielle du vecteur t^μ .

3.2 LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE COMME UN SYSTÈME CONTRAINT : LE FORMALISME ADM

Un éclairage nouveau est apporté sur la relativité générale par l'examen de sa structure hamiltonienne [49]. L'analyse canonique de la gravité 3+1 est due à l'origine à Arnowitt, Deser et Misner [48]. Cette analyse révèle notamment que la relativité générale est un système totalement contraint : son hamiltonien est nul et seules les contraintes contiennent sa dynamique.

Pour conduire l'analyse canonique de la relativité générale, on suppose que l'espace-temps a la topologie $\mathcal{M} = \Sigma \times I$. On choisit t une fonction de temps qui à tout point de \mathcal{M} associe une hypersurface de genre espace $\Sigma_t \sim \Sigma$. On note n^μ le champ des vecteurs unitaire normaux aux surfaces Σ_t . On se fixe également un champ de vecteur t^μ tel que $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, qui fixe le flot du temps.

On définit alors un ensemble de variables qui expriment la décomposition de la métrique $g_{\mu\nu}$ en partie spatiale et partie temporelle. La restriction de la métrique aux hypersurfaces spatiales est donnée par

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (3.9)$$

La décomposition de t^μ sur la normale n^μ et sur la surface permet de définir le *lapse*

$$N = -t^\mu n_\mu, \quad (3.10)$$

et le *shift*

$$N_\mu = q_{\mu\nu} t^\nu. \quad (3.11)$$

Les relations géométriques entre ces quantités sont exprimées sur la figure 3.1. On utilise dorénavant les indices a, b, \dots comme les indices d'espace. La métrique se réécrit en termes de ces variables

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ \hline N_a & q_{ab} \end{array} \right). \quad (3.12)$$

On définit enfin la courbure extrinsèque

$$K_{ab} = q_a^c \nabla_c n_b. \quad (3.13)$$

En termes de ces variables de décomposition espace+temps, on peut récrire l'action de Einstein-Hilbert

$$S_{ADM} = \int dt \int_{\Sigma} d^3x [\dot{q}_{ab} p^{ab} - N^a C_a - NC] \quad (3.14)$$

où \dot{q}_{ab} désigne la dérivée de Lie de q_{ab} par rapport au champ de vecteur t^μ , et où p^{ab} s'exprime en termes de la courbure extrinsèque K_{ab} et de sa trace K par

$$p^{ab} = \sqrt{q}[K^{ab} - q^{ab}K], \quad (3.15)$$

et on a

$$C_a = -2q_{ab} \nabla_c p^{bc} \quad (3.16)$$

$$C = -\frac{1}{\sqrt{q}}[p^{ab} p_{ab} - \frac{1}{2}p^2] + \sqrt{q}\tilde{R} \quad (3.17)$$

où \tilde{R} désigne le scalaire de courbure pour la métrique d'espace. Cette forme de l'action dicte la structure canonique de la relativité générale. Les variables conjuguées sont q_{ab} et p^{ab} , le hamiltonien

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma} d^3x [N^a C_a + NC], \quad (3.18)$$

est juste une combinaison linéaire des contraintes C_a et C , ayant respectivement N^a et N pour multiplicateur de Lagrange.

Pour un champ de vecteur ξ^a et un scalaire ξ , on définit les contraintes vectorielle et scalaire comme des versions lissées de C_a et C

$$V(\xi^a) = \int_{\Sigma} d^3x \xi^a(x) C_a(x), \quad (3.19)$$

$$S(\xi) = \int_{\Sigma} d^3x \xi(x) C(x). \quad (3.20)$$

L'algèbre de ces contraintes est alors donnée par *l'algèbre de Dirac*

$$\{V(\xi^a), V(\rho^b)\} = V([\xi, \rho]), \quad (3.21)$$

$$\{V(\xi^a), S(\rho)\} = S(\mathcal{L}_\xi \rho), \quad (3.22)$$

$$\{C(\chi), C(\rho)\} = V(\varsigma^a), \quad (3.23)$$

où on a définit

$$\varsigma^a = q^{ab}(\chi \partial_b \rho - \rho \partial_b \chi). \quad (3.24)$$

Ces contraintes sont de première classe, et engendrent par conséquent les symétries de jauge de la théorie. Les transformations engendrées par la contrainte vectorielle sont

$$\{V(\xi_a), q_{ab}\} = \mathcal{L}_\xi q_{ab}, \quad \{V(\xi_a), p_{ab}\} = \mathcal{L}_\xi p_{ab}. \quad (3.25)$$

Ces équations sont celles d'une variation sous l'action de difféomorphismes infinitésimaux d'espace donnés par un champ de vecteur ξ^a . Pour la contrainte scalaire, les transformations sont

$$\{C(\chi), q_{ab}\} = \mathcal{L}_\tau q_{ab}, \quad \{C(\chi), p_{ab}\} = \mathcal{L}_\tau p_{ab}, \quad (3.26)$$

où l'on a défini le champ de vecteurs $\tau^\mu = \chi n^\mu$. Il est à noter que cette contrainte engendre des difféomorphismes dont le paramètre (le champ de vecteur τ^μ) dépend de la métrique, via n^μ . Ces difféomorphismes 'dans la direction du temps' ne sont donc pas des difféomorphismes au sens usuel mais des difféomorphismes dépendant du champ. On retrouve donc que ces contraintes engendrent les difféomorphismes, qui sont la symétrie de jauge de la relativité générale. On remarque par ailleurs que la sous-algèbre (3.21) formée par les contraintes vectorielles est fermée. En revanche le crochet de Poisson (3.23) de deux contraintes scalaires est une contrainte vectorielle. De plus cette contrainte vectorielle utilise un champ de vecteur ζ^a qui dépend de la variable q^{ab} . Cela signifie que cette algèbre n'est pas une algèbre de Lie car elle ne fait pas intervenir des constantes de structure, mais des fonctions de structure.

La forme canonique de la gravité permet d'en compter les degrés de libertés. On dispose de $2 \times 6 = 12$ degrés d'espace des phases. Ces degrés de liberté sont réduits par 4 contraintes et 4 symétries de jauge. Il reste donc 4 degrés d'espace des phases, soit 2 degrés de liberté physique. On retrouve donc que la relativité générale possède deux degrés de liberté physiques locaux, qui se manifestent par l'existence des ondes gravitationnelles.

L'étude canonique de la gravité nous révèle qu'elle est un système totalement contraint : son hamiltonien est nul sur la surfaces de contraintes. Les contraintes sont associées aux difféomorphismes, qui sont les symétries de jauge de la gravité. Dans un esprit de quantification canonique, on peut noter que cette analyse apporte deux mauvaises nouvelles :

- la contrainte hamiltonienne (3.20) est extrêmement *non-polynomiale* ;
- l'algèbre de contraintes se révèle très compliquée, à cause du crochet (3.23) faisant intervenir la fonction de structure (3.24).

3.3 L'ACTION DE PALATINI POUR LA GRAVITÉ 3+1

Nous allons maintenant présenter une autre formulation de la relativité générale qui est classiquement équivalente à la formulation d'Einstein. Cette formulation est fut formulée très tôt par Palatini [50] et utilise un autre ensemble de variables. En particulier, la métrique n'y tient plus le rôle principale. Le formalisme de Palatini décrit la dynamique d'un autre objet, la *tétrade*, dont la métrique n'est qu'une quantité dérivée. Le formalisme de Palatini est bien détaillé dans [51] et dans [53]. Une bonne référence pour les éléments de géométrie différentielle ayant trait à l'utilisation des fibrés et des connexions est le cours de R. Coquereaux[55].

3.3.1 Les variables tétrade et connexion

On considère une variété \mathcal{M} de dimension 4. On considère également un espace-vectoriel fixé V de dimension 4, muni de la métrique plate $\eta_{IJ} = (-, +, +, +)$. Cet espace est appelé *espace interne*. Dans la suite les indices I, J, K, \dots désignent les indices internes. La première variable dynamique qui entre dans la formulation de Palatini est une tétrade e_μ^I , c'est-à-dire une 1-forme à valeur dans V . En tout point $p \in \mathcal{M}$, $e_\mu^I(p)$ fournit une application de l'espace $T_p\mathcal{M}$ tangent à \mathcal{M} en p vers V . Si cette application est inversible en tout point, une métrique non-dégénérée

peut alors être construite à partir de cette forme par

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^I \eta_{IJ} e_{\nu}^J. \quad (3.27)$$

On peut noter dès à présent qu'on introduit de ce fait des degrés de liberté supplémentaires. En effet des champs de tétrades différents reliés par une rotation de Lorentz locale $\Lambda_J^I(x)$ conduisent à la même métrique

$$\Lambda_I^K e_{\mu}^I \eta_{KL} \Lambda_J^L e_{\nu}^J = e_{\mu}^I \eta_{IJ} e_{\nu}^J = g_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

On s'attend donc à ce que ceci soit traduit en termes de degrés de liberté de jauge, qui seront découverts au cours de l'analyse canonique.

La seconde variable dont nous avons besoin est une connexion de Lorentz ω_{μ}^{IJ} . Cette connexion définit une dérivée covariante \mathcal{D}_{μ} agissant sur les indices internes

$$\mathcal{D}_{\mu} t_I = \partial_{\mu} t_I + \omega_{\mu I}^J t_J. \quad (3.29)$$

On peut alors définir la 2-forme de courbure associée à ω .

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[\omega] = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^{IJ} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{IJ} + \omega_{\mu}^{IK} \omega_{\nu K}^J - \omega_{\nu}^{IK} \omega_{\mu K}^J. \quad (3.30)$$

La 2-forme de courbure est invariante si la connexion subit une transformation de jauge

$$\omega_{\mu} \rightarrow \Lambda^{-1} \partial_{\mu} \Lambda + \Lambda^{-1} \omega_{\mu} \Lambda, \quad (3.31)$$

où Λ un champ d'éléments du groupe de Lorentz.

3.3.2 L'action de Palatini

À l'aide de ces deux champs e_{μ}^I et ω_{μ}^{IJ} , nous pouvons considérer la théorie donnée par l'action de Palatini

$$S_P[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_{\mu}^I e_{\nu}^J F_{\rho\sigma}^{KL}[\omega]. \quad (3.32)$$

ϵ_{IJKL} désigne le tenseur complètement anti-symétrique tel que $\epsilon_{0123} = +1$. $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}$ est la densité de tenseur complètement anti-symétrique vérifiant $\tilde{\epsilon}^{txyz} = +1$.

Cette action est une action pour la relativité générale dans le sens que *si e et ω vérifient les équations du mouvement de l'action de Palatini (3.32) et si e est inversible, alors la métrique définie par (3.27) satisfait l'équation d'Einstein de la gravité pure*. Les détails des calculs qui montrent cette équivalence peuvent être trouvés par exemple dans [53]. On peut la justifier de la manière suivante : Une première équation du mouvement est obtenue en variant l'action par rapport à la connexion ω . Cette équation impose que la connexion ω soit égale à la connexion de Levi-Civita associée à e , définie par

$$\Gamma_{\mu I}^J[e] = -e^{\nu J} (\partial_{\mu} e_{\nu I} + C_{\mu\nu}^{\rho} e_{\rho I}), \quad (3.33)$$

où $C_{\mu\nu}^{\rho}$ est le symbole de Christoffel (3.1). En d'autres termes, la solution ω de la première équation du mouvement est donc la connexion compatible avec la tétrade e_{μ}^I . La seconde équation du mouvement est obtenue par la variation de l'action par rapport à e_{μ}^I . Elle fournit l'équation

$$\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_{\nu}^J F_{\rho\sigma}^{KL}[\omega] = 0, \quad (3.34)$$

En injectant que $\omega = \Gamma[e]$ et en contractant avec $e^{\tau I}$ on montre que cette équation devient

$$R^{\mu\tau} - \frac{1}{2} R g^{\mu\tau} = 0 \quad (3.35)$$

et correspond à l'équation d'Einstein pour la métrique $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^I \eta_{IJ} e_{\nu}^J$.

3.3.3 L'analyse canonique de la théorie de Palatini

L'analyse canonique de la théorie de Palatini se conduit selon les mêmes lignes que l'analyse ADM. On la trouvera par exemple dans [53]. Cette analyse révèle que les variables canoniques conjuguées sont données par ω_a^{IJ} , la restriction spatiale de la connexion, et E_{IJ}^a un 'champ électrique' qui s'exprime en terme de la tétrade

$$E_{IJ}^a = \epsilon_{IJKL} \tilde{\epsilon}^{abc} e_b^K e_c^L. \quad (3.36)$$

Ces variables vérifient le crochet de Poisson

$$\left\{ A_a^{IJ}(x), E_{KL}^b(y) \right\} = \delta_a^b \delta_{[K}^I \delta_{L]}^J \delta(x-y). \quad (3.37)$$

Les contraintes de cette théorie sont données par

$$G_{IJ} \doteq \mathcal{D}_a E_{IJ}^a = 0, \quad (3.38)$$

$$V_a \doteq E_{IJ}^b F_{ab}^{IJ} = 0, \quad (3.39)$$

$$S \doteq E_{IJ}^a E^{bJ} F_{ab}^{KI} = 0, \quad (3.40)$$

qui sont des contraintes de première classe, et par

$$\Phi^{ab} \doteq \epsilon^{IJKL} E_{IJ}^a E_{KL}^b = 0, \quad (3.41)$$

$$\chi^{ab} \doteq \epsilon^{IJKL} [E^a, E^c]_{IJ} \mathcal{D}_c E_{KL}^b + (a \leftrightarrow b) = 0, \quad (3.42)$$

qui sont des contraintes de *seconde classe*.

Les contraintes de première classe engendrent les symétries de jauge. La contrainte de Gauss lissée

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \int_{\Sigma} \Lambda^{IJ} G_{IJ}, \quad (3.43)$$

engendre la symétrie de jauge de la connexion

$$A_a^{IJ} \rightarrow A_a^{IJ} + \mathcal{D}_a \Lambda^{IJ}, \quad (3.44)$$

tandis que la combinaison des 3 contraintes

$$\mathcal{J}(\xi^\mu) = \int_{\Sigma} [\xi^t - \xi^a (V_a - A_a^{IJ} G_{IJ})], \quad (3.45)$$

engendrent les difféomorphismes selon le champ de vecteur ξ^μ

$$A_a^{IJ} \rightarrow A_a^{IJ} + \mathcal{L}_\xi A_a^{IJ}. \quad (3.46)$$

On peut vérifier le nombre de degrés de liberté de cette théorie. L'espace des phases possède $2 \times 18 = 36$ degrés de liberté. Les 10 contraintes de première classe, les 10 symétries de jauge et les 12 contraintes de seconde classe le réduisent à 4 degrés de liberté d'espace des phases, soit deux degrés de liberté physiques.

3.4 LE FORMALISME DE PLEBANSKI

Le formalisme de Plebanski est une réécriture de l'action de Palatini qui vise à présenter la relativité générale comme un *théorie topologique contrainte*. Dans cette partie je présente cette action, en introduisant au passage l'écriture dans le langage des formes [55]. Je considérerai le cas d'une métrique euclidienne.

3.4.1 L'action de Palatini dans le langage des formes

On introduit les formes différentielles

$$e^I = e^I_\mu dx^\mu \quad (3.47)$$

$$\omega^{IJ} = \omega^I_\mu dx^\mu, \quad (3.48)$$

et la 2-forme de courbure

$$F^{IJ} = d_\omega \omega \quad (3.49)$$

où d_ω désigne la dérivée covariante extérieure associée à la connexion ω . On peut alors récrire l'action de Palatini sous la forme

$$S_P[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega), \quad (3.50)$$

où \wedge désigne le produit extérieur des formes différentielles. Cette écriture rend manifeste le fait que l'action est covariante, puisque les 4-formes s'intègrent naturellement sur les variétés de dimension 4.

3.4.2 L'action de Plebanski

La formulation de Plebanski de la relativité générale en 4D repose sur l'idée suivante : on veut récrire l'action de Palatini (3.50) sous la forme

$$\int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}, \quad (3.51)$$

en imposant à la 2-forme B d'être

$$B^{IJ} = \epsilon^{IJ}_{KL} e^K e^L. \quad (3.52)$$

Nous voulons chercher une action qui formule ceci à l'aide du terme (3.51) et d'une contrainte qui impose (3.52) explicitement, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

Pour cela, on peut d'abord montrer qu'une condition nécessaire pour que B satisfasse (3.52) est que

$$B^{IJ} \wedge B^{KL} = 0. \quad (3.53)$$

Cette condition est appelée *condition de simplicité*. A l'aide de cette condition, on définit l'action de Plebanski définie de la manière suivante. On considère donc une 2-forme B à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(4)$, et un scalaire Φ^{IJKL} satisfaisant

$$\Phi_{IJKL} \epsilon^{IJKL} = 0, \quad \text{et} \quad \Phi^{IJKL} = \Phi^{KLIJ} = -\Phi^{JIKL} = -\Phi^{IJLK}. \quad (3.54)$$

Ces symétries sont celles du tenseur de Riemann. Ce scalaire nous sert de multiplicateur de Lagrange. On définit l'action de Plebanski

$$S_{Pleb}[B, \omega, \Phi] = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ} + \Phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} \quad (3.55)$$

La variation par rapport au multiplicateur de lagrange impose la contrainte voulue $B^{IJ} \wedge B^{KL} = 0$. Cette action semble donc être un candidat convenable. Il faut maintenant vérifier qu'elle donne

effectivement les équations de la relativité générale. On peut montrer [56] que la variation de cette action par rapport au champ B redonne effectivement les équations d'Einstein, à une subtilité près. J'ai mentionné que la condition de simplicité constituait une condition nécessaire pour que B s'écrive sous la forme (3.52). Ca n'est pas une condition suffisante. En fait l'équation $B^{IJ} \wedge B^{KL} = 0$ possède 4 secteurs de solutions[56]. Si B satisfait une telle équation, alors il existe e tel que

$$(I)_{\pm} : B^{IJ} = \pm e^I \wedge e^J, \quad (3.56)$$

$$(II)_{\pm} : B^{IJ} = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L. \quad (3.57)$$

On constate alors que c'est seulement le secteur $(II)_+$ qui reproduit l'action de Palatini. L'action de Plebanski est donc une action dont un des secteurs est équivalent à la relativité générale.

L'intérêt de la formulation de Plebanski, est qu'elle décrit la relativité générale en appliquant des contraintes quadratiques à la théorie définie par l'action

$$S_{BF}[B, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(B \wedge F). \quad (3.58)$$

Cette action est celle de la théorie BF en 4 dimensions, qui est une théorie topologique [57]. Dans la perspective de quantification, cette réécriture ouvre la possibilité d'importer certaines techniques des théories topologiques pour quantifier la gravité.

4

LA GRAVITÉ QUANTIQUE À BOUCLES

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu de la quantification canonique non-perturbative de la gravité 3+1, connue sous le nom de *gravité quantique à boucle*. Je présente tout d'abord le formalisme classique (lagrangien et canonique), puis sa quantification selon le programme de Dirac, ainsi que les résultats physiques associés. Il existe maintenant plusieurs textes [22, 21, 58, 51] qui présentent l'ensemble du sujet, selon des points de vue différents.

La gravité quantique à boucles est une implémentation du programme de quantification canonique de Dirac, à partir de la version hamiltonienne d'une action de la gravité obtenue comme une variante de l'action de Palatini. La partie du programme qui est à ce jour bien établie concerne la définition de l'espace de Hilbert, et l'implémentation et la résolution de deux des trois types de contraintes. C'est à la présentation de ces résultats qu'est consacrée cette partie.

4.1 FORMALISME CLASSIQUE

La formulation classique dont nous allons partir trouve son origine dans les variables canoniques complexes découvertes par A. Ashtekar [19, 59]. Ces variables canoniques furent ensuite généralisées [26, 60]. La forme lagrangienne correspondante la plus générale a été donnée par Holst [61] et Barros e Sa [62]. Nous allons présenter cette action et exposer son analyse canonique.

4.1.1 L'action de Palatini généralisée

L'action de Palatini généralisée est une variante de l'action de Palatini obtenue en lui adjoignant un terme :

$$S_{PB}[e, \omega] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) - \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{M}} e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}(\omega). \quad (4.1)$$

Elle dépend d'un paramètre γ appelé *paramètre d'Immirzi*[26]. En fixant ce paramètre à $+\infty$, on trouve l'action de Palatini. Cette action est classiquement équivalente car le second terme est en réalité un terme topologique. L'ajout de ce second terme proportionnel à γ^{-1} est analogue à l'ajout du terme θ dans l'action de Yang-Mills : il modifie l'action mais pas les équations du mouvement. Cependant l'ajout d'un tel terme modifie la structure symplectique de la théorie par une transformation canonique. En réalité cette transformation n'a pas de réalisation unitaire. La conséquence de cela est que les quantifications de ces théories sont inéquivalentes et dépendent de ce paramètre γ . Nous allons donc conserver ce terme au cours de la quantification canonique de cette action.

4.1.2 Analyse canonique de l'action de Palatini généralisée

La formulation hamiltonienne de l'action de Palatini généralisée fournit le cadre nécessaire à l'application du programme de Dirac. Je ne présenterai ici que les résultats de cette analyse qui seront utiles pour la suite. On pourra consulter l'analyse détaillée dans [61, 62].

On suppose qu'on peut décomposer la variété \mathcal{M} sous la forme $\Sigma \times \mathbb{R}$ où Σ est une hypersurface de genre espace. On note a, b, \dots les indices spatiaux. Après le choix d'une jauge convenable, les variables canoniques qui décrivent le problème sont une connexion $SU(2)$ A_a^i et un 'champ électrique' E^{bj} . Ces variables sont définies en termes des variables lagrangienne d'origine e et ω , de la manière suivante

$$E^{ai} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck}, \quad (4.2)$$

$$A_{ai} = \omega_{ai0} + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{ijk} \omega_a^{jk}, \quad (4.3)$$

et vérifient le crochet de Poisson

$$\left\{ A_a^i(x), E^{bj}(y) \right\} = \gamma \delta_a^b \eta^{ij} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.4)$$

La connexion $SU(2)$ A_a^i est connue sous le nom de connexion d'Ashtekar-Barbero. Elle fut initialement proposée par Ashtekar dans le cas $\gamma = i$ lorentzien [19, 59]. On note \mathcal{D}_a la dérivée covariante qui est associée à cette connexion. La théorie hamiltonienne que nous obtenons est une théorie totalement contrainte, donc les contraintes sont

$$G_i = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E^{ak} = \mathcal{D}_a E^{ai}, \quad (4.5)$$

$$V_a = E_i^b F_{ab}^i, \quad (4.6)$$

$$C = \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b \left[F_{abk} - \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) R_{abk} \right]. \quad (4.7)$$

où R désigne la courbure associée à la connexion de Levi-Civita $\Gamma[e]$.

Les contraintes de cette théorie tiennent un rôle identique à celles de la théorie de Palatini. La contrainte de Gauss

$$G_i = \mathcal{D}_a E_i^a, \quad (4.8)$$

engendre les symétries de Lorentz locales de la connexion et les rotations de la tétrade. La contrainte vectorielle V_a engendre les difféomorphismes d'espace. La contrainte scalaire C engendre les difféomorphismes dans la direction du temps. Son expression montre le caractère particulier du cas $\gamma = \pm i$ qui constituait la formulation originale proposée par Ashtekar et pour laquelle C était une contrainte polynomiale.

4.2 LA QUANTIFICATION CANONIQUE

Dans cette partie je détaille les étapes du programme de quantification qui ont été franchies avec succès et qui constituent le coeur de la théorie de la gravité quantique à boucles. Au cours des quinze dernières années, le programme de quantification a été suivi de deux manières différentes et en fait équivalentes : la représentation en boucles [20, 24] et la représentation en connexions [63, 64]. Il a depuis été compris de manière précise la relation entre ces approches [65]. Je présenterai ici la quantification en termes de la représentation en connexions.

Les étapes du programme de quantification sont

1. La définition d'un espace de Hilbert convenable ;
2. l'implémentation des relations de commutation sur cet espace ;
3. la résolution de la contrainte de Gauss ;
4. la résolution de la contrainte vectorielle ;
5. la résolution de la contrainte scalaire ;
6. la formulation de prédictions physiques à l'aide d'observables.

En particulier la résolution des contraintes successives doit nous fournir une chaîne d'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 \xrightarrow{G_i} \mathcal{H}_G \xrightarrow{V^a} \mathcal{H}_{diff} \xrightarrow{C} \mathcal{H}_{phys}. \quad (4.9)$$

Les prédictions physiques doivent ensuite être calculées sur \mathcal{H}_{phys} . On verra qu'en fait des prédictions physiques sur le spectre des opérateurs géométriques peuvent être formulée au niveau de \mathcal{H}_{diff} , c'est à dire avant la résolution de la contrainte scalaire. Le cas de la contrainte scalaire sera discuté par la suite.

4.2.1 La définition de l'espace de Hilbert

Si l'on choisit les connexions comme variables de polarisation, il nous faudrait en principe construire un espace de fonctionelles d'onde $\Psi(A)$ de carré intégrable. L'espace qu'on cherche à construire est donc grossièrement

$$\mathcal{H}_0 = " \left\{ \Psi(A) \text{ t.q. } \int [\mathcal{D}A] |\Psi(A)|^2 < +\infty \right\} ". \quad (4.10)$$

Cependant la définition rigoureuse de cet objet est loin d'être aussi simple ¹ et a fait appel à plusieurs techniques pointues de physique mathématique. Je vais dans cette partie donner un aperçu des ingrédients qui permettent de définir cet espace de Hilbert.

Il existe deux manières de s'imaginer cet espace. La première consiste à le définir comme un espace \mathcal{L}^2 de la manière suivante

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}^2(\bar{\mathcal{A}}, d\mu_0), \quad (4.11)$$

où $\bar{\mathcal{A}}$ est un espace de connexion distributionnelles, et $d\mu_0$ une mesure sur cette espace. La seconde consiste à le définir comme la complétion d'un autre espace

$$\mathcal{H}_0 = \overline{Cyl}, \quad (4.12)$$

où Cyl désigne un espace de fonctionelles de A particulières, les *fonctions cylindriques*. Cet espace est munit d'un produit scalaire ; la complétion de Cyl fournissant \mathcal{H}_0 .

Construction comme un espace \mathcal{L}^2

La construction de \mathcal{H}_0 comme un espace \mathcal{L}^2 consiste à donner un sens précis à l'équation (4.10). D'une part on sait qu'en général les états d'une théorie des champs ont leur support sur un espace de configurations plus grand que l'espace de configurations classiques, incluant notamment des configurations distributionnelles. La première étape consiste donc à construire l'espace $\bar{\mathcal{A}}$ des connexions distributionnelles. Cette construction a été faite par Ashtekar et Isham [66].

¹Comme en témoignent les 50 pages de la partie I.2 de [22].

Pour pouvoir parler d'espace \mathcal{L}^2 de fonctionnelles sur $\bar{\mathcal{A}}$, il faut le munir d'une norme. Une mesure $d\mu_0$ sur $\bar{\mathcal{A}}$ a été construite par des techniques projectives, par Ashtekar et Lewandowski [63]. Nous verrons plus tard que cette mesure est en fait l'unique mesure sur $\bar{\mathcal{A}}$ compatible avec la réalisation du programme de quantification. Ayant à disposition l'espace $\bar{\mathcal{A}}$ et la mesure $d\mu_0$, on peut donc parler d'espace \mathcal{L}^2 et construire explicitement l'espace de Hilbert des fonctionnelles de carré intégrable

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}^2(\bar{\mathcal{A}}, d\mu_0). \quad (4.13)$$

Pour comprendre le contenu de cet espace de Hilbert, nous allons nous intéresser à son autre construction.

Fonctions cylindriques

Pour comprendre à quoi ressemble l'espace de Hilbert \mathcal{H}_0 des fonctionnelles de la connexion, nous avons besoin de la notion d'holonomie selon une courbe. L'holonomie d'une connexion selon une courbe orientée de Σ paramétrisée par $\gamma(s)$, $s \in [0, 1]$ est un élément de groupe $SU(2)$ défini comme

$$h_\gamma(A) = \mathcal{P} \exp \int_0^1 ds \dot{\gamma}^\mu A_\mu^i(\gamma(s)) \mathcal{J}_i \quad (4.14)$$

où les \mathcal{J}_i sont les générateurs de $\mathfrak{su}(2)$ (voir appendice A) et $\mathcal{P} \exp$ désigne l'exponentielle ordonnée. La notion d'holonomie permet de fabriquer un type particulier de fonctionnelles $\Psi(A)$: les *fonctions cylindriques*. Ce sont des fonctionnelles qui ne dépendent de A que via des holonomies. La donnée de Γ un ensemble de courbes $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, et d'une fonction $\varphi(g_1, \dots, g_N)$ de N éléments de groupe $SU(2)$ permet de construire une fonction cylindrique

$$\Psi_{\Gamma, \psi}(A) = \varphi(h_{\gamma_1}(A), \dots, h_{\gamma_N}(A)). \quad (4.15)$$

Les fonctions cylindriques peuvent sembler un type assez restreint de fonctionnelles de la connexion, mais nous allons voir qu'en fait elles sont suffisamment générales. On peut munir l'espace des fonctions cylindriques d'un produit scalaire. Si deux fonctions cylindriques sont basées sur le même graphe Γ , on définit

$$\langle \Psi_{\Gamma, \varphi_1} | \Psi_{\Gamma, \varphi_2} \rangle = \int dg_1 \cdots dg_N \overline{\varphi_1(g_1, \dots, g_N)} \varphi_2(g_1, \dots, g_N) \quad (4.16)$$

où on utilise la mesure de Haar normalisée sur $SU(2)$. Si elles sont basées sur des graphes différents, on peut toujours les récrire comme des fonctions basées sur un même graphe qui les contient tout les deux, et appliquer le même produit scalaire. La complétion \overline{Cyl} de l'espace des fonctions cylindriques par ce produit scalaire fournit un espace de Hilbert dont on peut montrer qu'il n'est autre que \mathcal{H}_0 .

\mathcal{H}_0 étant la complétion de Cyl , nous disposons d'une triple de Gelfand $Cyl \subset \mathcal{H}_0 \subset Cyl^*$. Ce dernier pourra servir d'espace pour la recherche de solutions des contraintes qui soient des états généralisés. Une remarque intéressante qui peut être faite est que cet espace de Hilbert n'est pas séparable. C'est donc un espace énorme, ceci étant dû au fait qu'il contient énormément de degrés de jauge, qui disparaîtront quand on tiendra compte de l'invariance par difféomorphisme.

4.2.2 L'implémentation des relations de commutation

Pour réaliser la quantification de la théorie canonique, on doit représenter les variables canoniques classiques $A_a^i(x)$ et $E^{ai}(x)$ en termes d'opérateurs sur l'espace de Hilbert. Ces opérateurs doivent satisfaire deux choses : leurs relations de commutation doivent mimer les relations de crochet de Poisson classiques, et leurs relations d'adjoint doivent mimer la conjugaison complexe des variables classiques. L'implémentation de ces relations a été construite dans [64].

Pour représenter l'algèbre de Poisson

$$\left\{ A_a^i(x), E^{bj}(y) \right\} = \gamma \delta_a^b \eta^{ij} \delta^{(3)}(x - y) \quad (4.17)$$

sur l'espace de Hilbert, on cherche naïvement à construire des opérateurs $\hat{A}_a^i(x)$, qui agirait par multiplication sur les fonctionnelles de la connexion, et $\hat{E}^{ai}(x)$, qui agirait par dérivation. Dans le langage des fonctions cylindriques, nous n'allons pas stricto sensu construire ces opérateurs, mais plutôt des versions "lissées", qui évitent les problèmes liés à la présence d'une fonction $\delta^{(3)}(x - y)$ dans l'algèbre de Poisson.

Nous avons déjà rencontré les holonomies, qui sont une version lissée de la connexion. La connexion étant une 1-forme, elle s'intégrait naturellement sur une courbe γ . Nous devons aussi définir une version lissée du champ électrique E . Pour une surface $S \subset \Sigma$, on définit le flux électrique

$$\mathcal{E}_S(E) = \int_S \star E. \quad (4.18)$$

$(\star E)_{ab} = \tilde{e}_{abc} E^c$, $\star E$ est donc une 2-forme qui peut s'intégrer sur S sans structure additionnelle. On a $\mathcal{E}_S(E) \in \mathfrak{su}(2)$.

Les holonomies h_γ et les flux \mathcal{E}_S forment un ensemble de fonctions suffisant pour décrire totalement l'espace des fonctions des variables canoniques. Nous allons donc construire l'opérateur quantique \hat{h}_γ qui représente l'holonomie h_γ , ainsi que l'opérateur $\hat{\mathcal{E}}_S$ qui représente le flux \mathcal{E}_S . Les opérateurs d'holonomie dépendent d'une courbe γ et agissent par multiplication sur les fonctions cylindriques

$$\hat{h}_\gamma \cdot \Psi_{\Gamma, \varphi} = h_\gamma \Psi_{\Gamma, \varphi}. \quad (4.19)$$

Pour décrire l'action d'un opérateur de flux $\hat{\mathcal{E}}_S^i$ (i indice la base des générateurs de $\mathfrak{su}(2)$), on commence regarder le cas d'une fonction cylindrique très simple basée sur une seule courbe $\Psi_{\gamma, \varphi}(A) = \varphi(h_\gamma(A))$, tel que γ intersecte une fois S en un point p , on a alors

$$\hat{\mathcal{E}}_S^i \cdot \Psi_{g, \varphi} = \pm i \hbar \varphi(h_\gamma^{-p}(A) \mathcal{J}^i h_\gamma^p), \quad (4.20)$$

où $h_\gamma^{-p}(A)$ désigne l'holonomie de A le long de γ , jusqu'au point p , et h_γ^p l'holonomie à partir de p . Le signe \pm dépend de l'orientation relative de γ et de S à l'intersection. L'effet de l'opérateur $\hat{\mathcal{E}}_S^i$ est donc d'insérer un générateur \mathcal{J}^i à l'intérieur de l'holonomie, au niveau du point d'intersection. Cette définition se généralise au cas d'une fonction cylindrique générale : l'opérateur insère un générateur dans les holonomies de toutes les courbes qui intersectent S .

4.2.3 Résolution des contraintes cinématiques

Maintenant que nous disposons d'un espace de Hilbert \mathcal{H}_0 , muni de son produit scalaire, et d'opérateurs sur cet espace, nous devons définir et résoudre les contraintes. La résolution successive des contraintes doit fournir des espaces de Hilbert successifs, "de plus en plus petits"

$$\mathcal{H}_0 \xrightarrow{G_i} \mathcal{H}_G \xrightarrow{V^a} \mathcal{H}_{diff} \xrightarrow{C} \mathcal{H}_{phys}. \quad (4.21)$$

La contrainte de Gauss

Nous avons que la contrainte de Gauss engendre la symétrie de jauge de Lorentz sur les connexions. D'une manière générale, pour quantifier une théorie possédant une contrainte, on dispose a priori de deux stratégies : "quantifier puis contraindre" (ce qui est l'esprit du programme de Dirac), ou "contraindre puis quantifier", qui consiste à réduire les variables classiques et à quantifier les variables réduites. Dans le cas de la contrainte de Gauss, ces deux méthodes sont possibles et conduisent au même résultat \mathcal{H}_G pour l'espace de Hilbert.

Pour réduire puis quantifier, on tient compte de la contrainte/symétrie de jauge au niveau des variables classiques. On peut en effet construire l'espace $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ des connexions distributionnelles invariantes de jauge, puis l'équiper de la mesure $d\mu_0$ qui en fait un espace

$$\mathcal{H}_G = \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0). \quad (4.22)$$

L'autre méthode consiste à quantifier, puis contraindre. C'est à dire qu'on part de \mathcal{H}_0 , et on implémente la contrainte de Gauss par quantification algébrique raffinée. On obtient alors un résultat identique \mathcal{H}_G . Essayons maintenant de décrire cet espace.

Si on considère une transformation de jauge paramétrisée par un élément de groupe $k(x)$ en tout point $x \in \Sigma$, son action sur une holonomie est donnée par

$$k \triangleright h_\gamma(A) = h_\gamma({}^k A) = k(s(\gamma))^{-1} h_\gamma(A) k(t(\gamma)), \quad (4.23)$$

où $s(\gamma) = \gamma(0)$ et $t(\gamma) = \gamma(1)$ sont les extrémités de la courbe γ . L'action d'une transformation de jauge sur une fonction cylindrique basée sur $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ est donc

$$k \triangleright \Psi_{\Gamma, \varphi}(A) = \varphi(k_{s(1)}^{-1} h_{\gamma_1} k_{t(1)}, \dots, k_{s(N)}^{-1} h_{\gamma_N} k_{t(N)}). \quad (4.24)$$

La résolution de la contrainte de Gauss doit nous fournir des fonctions cylindriques invariants sous ce type de transformations, c'est à dire telles que

$$\varphi(k_{s(1)}^{-1} h_{\gamma_1} k_{t(1)}, \dots, k_{s(N)}^{-1} h_{\gamma_N} k_{t(N)}) = \varphi(h_{\gamma_1}, \dots, h_{\gamma_N}). \quad (4.25)$$

Examinons pour commencer un type de solution de cette équation : *les réseaux de spin* [23]. Un réseau de spin est une fonction cylindrique particulière, complètement spécifiée par la donnée

1. d'un graphe fermé orienté Γ ;
2. de représentations j_e associée à chaque arête de Γ . Tout élément de groupe $g \in \text{SU}(2)$ est alors représenté par un endomorphisme de V^{j_e}

$$D^{j_e}(g) \in \text{End}(V^{j_e}). \quad (4.26)$$

3. d'entrelaceurs ι_v associés à chaque vertex de Γ , et qui entrelacent les représentations des arêtes incidentes à v vers les représentations émergentes. Cela signifie que pour un vertex v , l'entrelaceur ι_v est un homomorphisme

$$\bigotimes_{e \text{ tq } t(e)=v} V^{j_e} \rightarrow \bigotimes_{e \text{ tq } s(e)=v} V^{j_e} \quad (4.27)$$

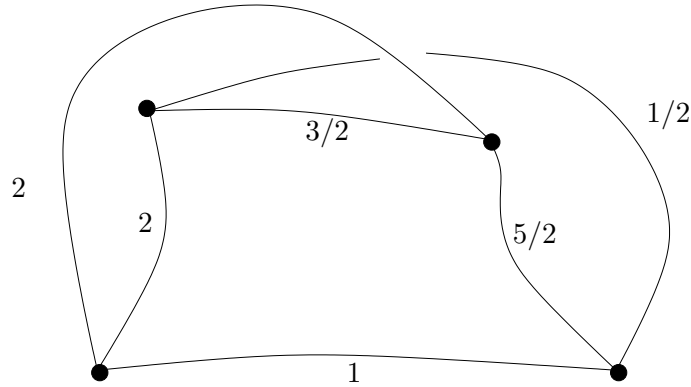


FIG. 4.1 – Exemple de réseau de spin. Les holonomies de la connexion selon les arêtes du graphe fournissent des éléments de groupe, ils sont pris dans la représentation correspondante et contracté par des entrelaceurs aux vertexs.

A l'aide de ces données, un réseau de spin est défini comme une fonctionnelle de A définie de la manière suivante

$$\Psi_{\Gamma,c}(A) = \langle \bigotimes_e D^{j_e}(h_e(A)), \bigotimes_v \iota_v \rangle. \quad (4.28)$$

Dans cette équation, \langle, \rangle désigne l'appariement des matrices de représentations et des entrelaceurs. Le graphe Γ étant fermé, le résultat est un nombre complexe. On peut vérifier qu'une fonction de ce type est invariante par la transformation de jauge (4.24). En réalité, on peut prouver que *les réseaux de spin forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert des fonctions cylindriques invariantes de jauge \mathcal{H}_G* . Ceci complète la description de \mathcal{H}_G en fournissant une base et le produit scalaire des vecteurs de base.

Résolution de la contrainte vectorielle

Il reste maintenant à résoudre la contrainte vectorielle. Cette contrainte peut également se résoudre par quantification algébrique raffinée, mais nous ne donnerons ici que le résultat qu'il est facile de comprendre intuitivement. A ce stade, les réseaux de spin de \mathcal{H}_G basés sur des graphes difféomorphes, fournissent des états *différents*. Les difféomorphismes d'espace Φ ont une représentation sur l'espace \mathcal{H}_G des réseaux de spin par l'action suivante

$$\Phi \triangleright \Psi_{\Gamma,c} = \Psi_{\Phi\Gamma,c}, \quad (4.29)$$

où $\Phi\Gamma$ désigne la transformation du graphe Γ par le difféomorphisme Φ . Les états invariants par les difféomorphismes sont donnés par les classes d'équivalence sous la déformation par difféomorphismes des graphes Γ , supports des réseaux de spin. Formellement, on moyenne sur tous les difféomorphismes. Il semble à première vue que la moyenne d'un réseau de spin sur tous les difféomorphismes ne retient de celui-ci que sa structure combinatoire, et que les réseaux de spin basés sur des graphes abstraits forment une base de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{Diff} . Ca n'est pas tout à fait vrai pour deux raisons : la première est qu'une arête peut être nouée avec elle-même, que ceci est invariant par difféomorphismes mais non reflété dans une structure de graphe abstrait. Une autre raison est que la classe d'équivalence d'un graphe par difféomorphisme possédant

des vertex au moins 4-valents doit se décrire avec un espace de modules qui sont des paramètres continus. On a donc toujours une infinité continue d'états de base après la moyenne sous les difféomorphismes. Une solution possible est de moyennner sur un groupe légèrement plus grand que les difféomorphismes : les difféomorphismes étendus. Ces difféomorphismes sont autorisés à être singulier en un nombre fini de points isolé. Si l'on utilise ce groupe, la base de \mathcal{H}_{Diff} est maintenant discrète et l'espace de Hilbert est séparable (voir [21]).

Après la résolution de la contrainte qui engendre les difféomorphismes, la dernière étape consiste donc à résoudre la contrainte scalaire C sur \mathcal{H}_{Diff} pour obtenir \mathcal{H}_{phys} . C'est malheureusement là que les bases fermes de la gravité quantique à boucle s'arrête. Il n'existe pas à ce jour de résolution convenable et complète de cette étape du programme de quantification. Avant d'aller plus loin, on peut néanmoins regarder quelques résultats qu'on sait obtenir au niveau de \mathcal{H}_{diff} .

4.2.4 Spectre des opérateurs géométriques

Pour faire de la physique avec une théorie quantique, il faut pouvoir relier les solutions qu'on obtient avec des prédictions pour des observables. Sommairement on cherche à caractériser nos solutions en termes de nombres quantiques qu'on sait relier à des quantités physiques. C'est ce que nous allons faire dans le cas des états de \mathcal{H}_{diff} . Il est en effet possible de décrire les réseaux de spin comme des vecteurs propres des opérateurs géométriques [24, 67].

Considérons une surface $S \subset \Sigma$, et la quantité classique qu'est son aire

$$\mathcal{A}(S) = \int_S d^2\sigma \sqrt{E^{ai} E_i^b n_a n_b}. \quad (4.30)$$

Il est possible de définir l'opérateur quantique $\hat{\mathcal{A}}(S)$ sur \mathcal{H}_{diff} qui lui est associé. On peut alors constater que cet opérateur est *diagonal* sur la base des réseaux de spin, avec la valeur propre

$$\hat{\mathcal{A}}(S)\Psi_{\Gamma,c} = \left(8\pi\gamma l_P^2 \sum_{p \in \Gamma \cap S} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right) \Psi_{\Gamma,c} \quad (4.31)$$

où les p sont les points où Γ intersecte S , et j_p est la représentation portée par l'arête de Γ contenant le point d'intersection p , voir figure 4.2. Les représentations qui colorent un réseau de spin représentent donc des quantas d'aire. Intuitivement, une arête donne de l'aire à une surface qui la coupe. Notons que le spectre est proportionnel au paramètre d'Immirzi γ . On constate donc explicitement que les théories classiques équivalentes conduisent à des théories quantiques non-équivalentes.

Dans ce formalisme, on peut également décrire un opérateur de volume d'une région de l'espace. Ce sont cette fois les intertwiners qui jouent le rôle de nombres quantiques. Intuitivement, un vertex du graphe donne du volume à une région de l'espace qui le contient.

4.2.5 L'entropie des trous noirs et le paramètre d'Immirzi

Une prédiction importante qui découle de la quantification des aires concerne l'entropie des trous noirs. La théorie semi-classique de Bekenstein-Hawking conduit à associer à un trou noir d'aire A une entropie

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{l_P^2}, \quad (4.32)$$

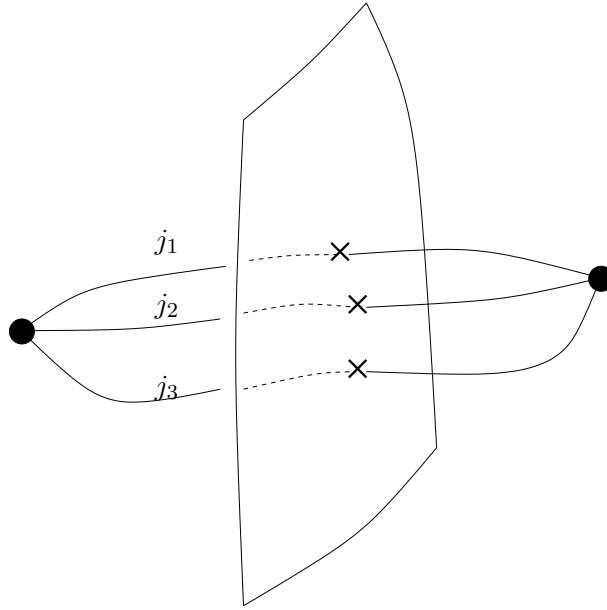


FIG. 4.2 – Les réseaux de spin sont des états propres des opérateurs d’aire. La valeur propre associée pour une surface S donnée dépend des représentations aux intersection du réseau et de la surface.

pour $k_B = 1$. Il est considéré que cette entropie semi-classique devrait trouver son origine dans une description purement quantique du trou noir, typiquement on attend que l’entropie soit relié à la dimension de l’espace de Hilbert d’un trou noir par

$$S = \ln(\dim \mathcal{H}_{TN}) \quad (4.33)$$

Il est considéré que toute théorie de gravité quantique se doit de reproduire ce résultat ².

A partir de la diagonalisation de l’opérateur d’aire, on peut faire ce calcul en gravité quantique à boucle[68, 25]. La gravité induit sur un horizon de trou noir une théorie de Chern-Simons dont on peut étudier la quantification. Cette quantification permet d’identifier un espace de Hilbert \mathcal{H}_{TN} d’états, qui conduit à une entropie

$$S = \frac{\ln 2}{4\pi\sqrt{3}\gamma} \frac{A}{l_P^2}. \quad (4.34)$$

En comparant cette formule avec celle de Bekenstein-Hawking, on trouve un résultat identique, pourvu que γ soit égal à

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}. \quad (4.35)$$

Ce paramètre γ qui n’a donc pas d’incidence sur la théorie classique joue donc un rôle crucial au niveau quantique. On peut donc considérer ce paramètre comme un paramètre libre de la théorie, qui doit être fixé par ”l’expérience”, c’est à dire ici le comportement semi-classique.

²C’est un peu le premier test ’expérimental’ de la gravité quantique.

Cette question a reçu beaucoup d'attention ces derniers temps car un argument indépendant[69] a permis de fixer la valeur de ce paramètre à une valeur identique. Supposons que l'on parte d'une hypothèse légèrement différente où le groupe $SU(2)$ est remplacé par le groupe $SO(3)$. Le quantum élémentaire d'aire est obtenu pour $j = 1$ au lieu de $j = 1/2$ et l'entropie correcte du trou noir est cette fois obtenue pour la valeur du paramètre d'Immirzi

$$\gamma = \frac{\ln 3}{2\pi\sqrt{2}}. \quad (4.36)$$

Il se trouve que cette valeur du paramètre γ est également obtenue sur la base d'arguments liés aux modes de résonance des trous noirs dits *modes quasi-normaux*. L'argument est le suivant : un trou noir de masse M possède plusieurs modes de résonance dits quasi-normaux dont la fréquence est asymptotiquement

$$\omega_{BH} = \frac{\ln 3}{8\pi M}. \quad (4.37)$$

Hod a alors conjecturé que l'énergie $\hbar\omega_{BH}$ doit correspondre à une énergie d'échange élémentaire du trou noir, de manière analogue à ce qui se produit pour l'atome de Bohr. On aurait donc pour variation élémentaire de masse

$$\Delta_{elem}M = \frac{\hbar \ln 3}{8\pi M}. \quad (4.38)$$

Enfin puisque masse et aire sont reliées, cela signifie que la variation élémentaire d'aire d'un trou noir doit être

$$\Delta_{elem}A = 4 \ln 3 l_P^2. \quad (4.39)$$

Hod a donc utilisé l'argument à la Bohr pour justifier que l'espacement élémentaire du spectre d'aire du trou noir doit être $4 \ln 3 l_P^2$. O. Dreyer a alors observé que cet espacement est exactement le quantum d'aire obtenu pour la gravité quantique pour le groupe $SO(3)$ avec

$$\gamma = \frac{\ln 3}{2\pi\sqrt{2}}. \quad (4.40)$$

Cela signifie que deux arguments indépendants (un principe de correspondance à la Bohr et l'entropie des trous noirs) nous conduisent à deux valeurs identiques du paramètre d'Immirzi. Il s'agit maintenant de comprendre s'il s'agit là d'un signe profond ou d'une coïncidence numérique.

4.3 VERS LA COMPRÉHENSION DE LA DYNAMIQUE...

J'ai jusqu'ici exposé la résolution des étapes du programme de quantification canonique en m'arrêtant avant la troisième et dernière contrainte, la contrainte scalaire, ou hamiltonienne. Cette contrainte est associée à la symétrie de difféomorphismes dans le sens du temps, et contient donc la dynamique de la théorie. C'est aussi la contrainte la plus difficile à résoudre ! La résolution d'une contrainte exige d'une part de définir celle-ci correctement comme un opérateur au niveau quantique, puis de trouver les solutions de l'équation de contrainte, et enfin d'équiper l'espace des solutions d'un produit scalaire convenable. Enfin on souhaiterait pouvoir trouver des solutions ayant des interprétations semi-classiques.

Dans le cas de la contrainte hamiltonienne, même la définition correcte de l'opérateur de contrainte pose de nombreux problèmes d'ambiguïté. Une définition convaincante a été proposée

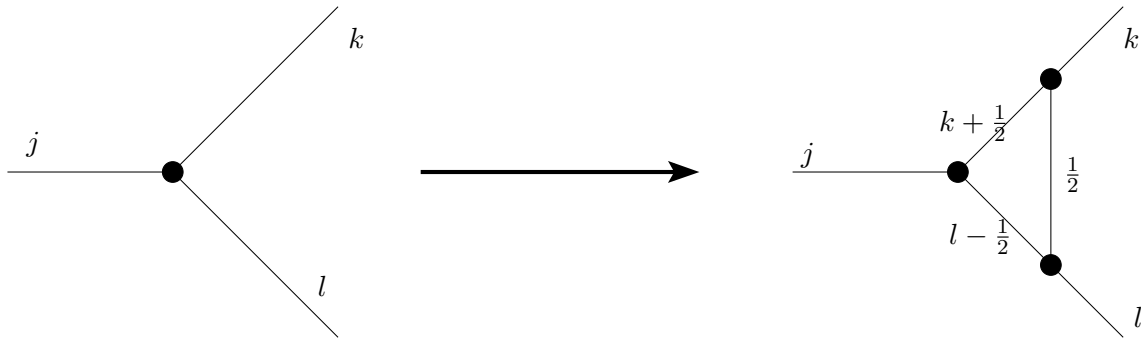


FIG. 4.3 – Exemple d’action de la contrainte hamiltonienne : elle agit au niveau des vertex en ajoutant une arête portant $1/2$, et en modifiant les spins qui se trouvent autour. L’action totale de la contrainte hamiltonienne est une combinaison linéaire d’actions de ce type.

par Thiemann[70]. L’opérateur de contrainte scalaire est correctement défini et exempt d’infinis. Pour comprendre quelles peuvent en être les solutions, on peut observer l’action de la contrainte hamiltonienne H sur un état de réseau de spin. Tout d’abord, on a en général

$$H|\Gamma, c \rangle \neq 0. \quad (4.41)$$

Cela signifie que les états de réseau de spin ne sont malheureusement pas des solutions de la contrainte hamiltonienne. Une exception notable concerne les états dont les graphes sont des boucles, c’est à dire qui ne contiennent pas de vertex. Ceci est manifeste dans le fait que la contrainte hamiltonienne agit aux vertex de Γ . En effet l’action de H sur un état $|\Gamma, c \rangle$ produit un nouvel état qui est une superposition de réseaux de spin qui diffèrent de $|\Gamma, c \rangle$ au niveau des vertex. Cette modification prend la forme générale suivante, qui est décrite à la figure 4.3 : on ajoute des arêtes portant le label $1/2$ au niveau des vertex, on modifie les labels des arêtes adjacentes par $\pm 1/2$. L’entrelaceur est lui aussi modifié en conséquence.

Malgré une définition convaincante de la contrainte hamiltonienne et une compréhension de son action sur les réseaux de spin, il n’a pas été possible à ce jour d’obtenir une compréhension globale des solutions. On ne dispose pas non plus d’états solutions possédant une interprétation semi-classique claire. Cependant on comprend que la contrainte hamiltonienne fait évoluer les réseaux de spin en en modifiant la structure. Intuitivement, on obtient donc une évolution du type représenté figure 4.4. C’est ici qu’interviennent les mousses de spin. La philosophie de cette approche est de définir le projecteur sur les solutions par des arguments d’intégrale de chemin, en les connectant à la notion d’évolution de réseaux de spin que la contrainte hamiltonienne nous donne. Cette approche se veut une solution aux trois problèmes :

1. il n’est pas besoin de définir directement l’opérateur de contrainte C , puisque seul l’opérateur de projection Π nous importe ;
2. l’opérateur de projection fournit une machine à fabriquer les solutions ;
3. l’opérateur de projection fournit le produit scalaire sur l’espace des solutions.

Il est à noter que la naissance du programme de mousses de spin ne signifie pas l’arrêt des recherches dans la direction canonique. On peut mentionner par exemple le programme de Thiemann[71], dont le but est de passer outre les problèmes de contrainte hamiltonienne, en

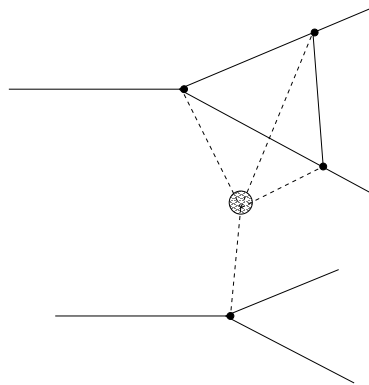


FIG. 4.4 – Evolution de réseaux de spin

approchant le problème sous un angle différent, dont le but est de réunir toutes les contraintes en une *contrainte maitresse*.

5

LA GRAVITÉ QUANTIQUE EN 2+1 DIMENSIONS

Cette thèse est centrée autour de l'étude des modèles de mousses de spin en 2+1 dimension. Cette partie présente donc plusieurs aspects de la gravité classique et quantique en 2+1 dimensions, afin de motiver cette approche et de réunir les bases nécessaires à l'étude des mousses de spin. La référence pour le sujet de la gravité 2+1 est le livre de Carlip [33]. Je m'intéresserai essentiellement dans cette partie au cas *euclidien*, c'est à dire pour un métrique de signature $(+, +, +)$.

5.1 POURQUOI LA GRAVITÉ 2+1 ?

Une manière optimiste de considérer la gravité 2+1 comme un modèle jouet serait de dire qu'elle possède toutes les difficultés conceptuelles de la gravité 3+1, sans les difficultés techniques. En effet, dans le cas particulier de la relativité générale en 2+1 dimensions, l'équation d'Einstein dans le cas sans matière

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (5.1)$$

se simplifie par le fait qu'en 2+1 dimensions le tenseur de Riemann est une fonction du tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (5.2)$$

En 2+1 et pour $\Lambda = 0$, l'équation d'Einstein implique que le tenseur de courbure s'annule et toutes les solutions sont donc plates. Pour une constante cosmologique non-nulle, les solutions sont de courbure constante. La géométrie des solutions est donc complètement déterminée et il ne reste plus de dynamique gravitationnelle, en particulier pas de gravitons. Il ne reste plus de degrés de liberté locaux et seulement des degrés de liberté globaux, liés à la topologie de l'espace-temps. Cette propriété est la source de la "simplicité technique" de la gravité 2+1. En revanche on peut restaurer des degrés de liberté par l'ajout de matière. Le couplage à la matière permet donc d'obtenir un nombre éventuellement infini de degrés de liberté physique en gravité 2+1.

Malgré cette relative simplicité, la gravité 2+1 souffre des mêmes difficultés conceptuelles que la gravité 3+1, en ce sens que c'est une théorie covariante générale, donc possédant la symétrie par difféomorphismes. La construction d'une théorie de gravité quantique 2+1 doit donc également répondre aux questions comme la construction d'observables au niveau quantique, le

problème de la limite semi-classique, le rôle des trous noirs, le couplage à la matière, l'effet de la constante cosmologique, la question de la topologie et de ses changements, le problème du temps. En particulier, la gravité 2+1 est une théorie des champs en apparence non-renormalisable que l'on peut néanmoins quantifier de manière exacte [72]. C'est l'espoir de pouvoir mieux comprendre ces questions dans un cadre techniquement simplifié qui motive l'étude de la gravité quantique en 2+1 dimensions.

La simplicité technique de la gravité 2+1 rend possible l'utilisation et la comparaison de plusieurs approches différentes de quantification [73]. La gravité 2+1 constitue donc un laboratoire idéal pour la confrontation des différentes approches.

5.2 LA FORMULATION DU PREMIER ORDRE DE LA GRAVITÉ 2+1

5.2.1 L'action de Palatini

Comme dans le cas 3+1, nous considérons comme variables lagrangiennes un champ de triades e^i_μ , une connexion $SU(2)$ ω^i_μ et sa courbure associée F^i . Les indices i sont des indices d'algèbre $\mathfrak{su}(2)$. On définit alors l'action

$$S_P[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} e_i \wedge F^i(\omega). \quad (5.3)$$

Cette action reproduit la relativité générale 2+1 pour les mêmes raisons qu'en 3+1 dimensions. L'équation du mouvement

$$d_\omega e^i = 0, \quad (5.4)$$

impose la compatibilité entre ω et e , et la variation de l'action par rapport à e^i fournit l'équation

$$F^i = 0, \quad (5.5)$$

qui exprime que la courbure associée à la connexion ω s'annule. Si on considère les générateurs \mathcal{J}_i de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ définis en appendice A, on définit la 1-forme à valeur dans $\mathfrak{su}(2)$

$$e = e^i \mathcal{J}_i, \quad (5.6)$$

et la 2-forme de courbure

$$F = F^i \mathcal{J}_i. \quad (5.7)$$

On a alors l'action de Palatini sous la forme de l'action BF $SU(2)$

$$S_{BF}[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F(\omega)). \quad (5.8)$$

Les symétries de jauge associées à cette action sont la symétrie $SU(2)$ locale

$$\delta_\Lambda e = [e, \Lambda], \quad (5.9)$$

$$\delta_\Lambda \omega = d_\omega \Lambda, \quad (5.10)$$

et la symétrie de translation locale

$$\delta_\phi e = d_\omega \phi, \quad (5.11)$$

$$\delta_\phi \omega = 0. \quad (5.12)$$

Une autre symétrie importante de la gravité 2+1 est bien évidemment la symétrie par difféomorphismes. Pour un champ de vecteur ξ^μ , l'action d'un difféomorphisme infinitésimal sur les 1-formes ω et e est donnée par

$$\delta_\xi^D e = d(\iota_\xi e) + \iota_\xi(de) \quad (5.13)$$

$$\delta_\xi^D \omega = d(\iota_\xi \omega) + \iota_\xi(d\omega) \quad (5.14)$$

où ι_ξ désigne le produit interne avec le champ de vecteur ξ . Nous aurons l'occasion de montrer au chapitre 8 que les difféomorphismes s'obtiennent comme une combinaison des deux symétries précédentes.

On peut étendre cette action au cas d'une constante cosmologique en lui adjoignant un terme de volume

$$S_{BF}[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F(\omega) - \frac{\Lambda}{6} e \wedge e \wedge e). \quad (5.15)$$

5.2.2 Analyse canonique du formalisme de Palatini

L'analyse canonique du formalisme de Palatini est plus simple que dans le cas 3+1. Les variables canoniques sont la restriction à l'hypersurface spatiale Σ de la tétrade et de la connexion. On a

$$\{\omega_a^i(x), e_b^j(y)\} = \epsilon_{ab} \eta^{ij} \delta^{(2)}(x - y). \quad (5.16)$$

Les contraintes associées sont

$$\epsilon^{ab} \mathcal{D}_a e_{bi} = 0, \quad (5.17)$$

$$F_{ab}{}^i = 0. \quad (5.18)$$

La première contrainte est la contrainte de Gauss et engendre la symétrie de jauge de Lorentz. La seconde contrainte exprime que la courbure est plate et engendre la symétrie de translation locale. Le sens physique de la symétrie de jauge associée est révélé par une reformulation et une décomposition de cette contrainte[74]. En projetant cette contrainte sur les parties normales et tangentielles, et en définissant le 'champ électrique'

$$E_i^a = \epsilon^{ab} e_{bi}, \quad (5.19)$$

on obtient les deux contraintes

$$V_a = E_i^b F_{ab}^i, \quad (5.20)$$

$$C = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ab}^i E_j^a E_k^b. \quad (5.21)$$

Sous cette forme les contraintes miment celles du cas 3+1. La contrainte V_a engendre les difféomorphismes d'espace et la contrainte C la dynamique hamiltonienne.

5.2.3 Gravité quantique à boucle

Espace de Hilbert \mathcal{H}_{kin}

La quantification canonique de la gravité 2+1 dans le formalisme de Palatini peut se faire selon les mêmes lignes que le cas 3+1. On définit un espace de Hilbert \mathcal{H}_0 de fonctions cylindriques,

on résout la contrainte de Gauss en considérant des invariants de jauge, et la contrainte par difféomorphismes d'espaces, pour obtenir une base de l'espace cinématique \mathcal{H}_{kin} qui soit décrite par les réseaux de spin abstraits.

On note considère Γ un graphe trivalent abstrait de Σ (ou plutôt une classe d'équivalence par difféomorphismes de graphes) et $c = (\{j_e\}; \{\iota_v\})$ un coloriage de ses arêtes e par des représentations j_e de $SU(2)$ et de ses vertex v par des entrelaceurs ι_v . \mathcal{H}_{kin} est engendré par la base orthonormale des réseaux de spin

$$\Psi_{\Gamma,c}(A) = \left\langle \bigotimes_e D^{j_e}(h_e(A)), \bigotimes_v \iota_v \right\rangle. \quad (5.22)$$

Opérateurs géométriques

De même que dans le cas 3+1, les réseaux de spin peuvent s'interpréter en termes de nombres quantiques d'opérateurs géométriques. Plus précisément c'est cette fois l'opérateur *longueur d'une courbe* qui se trouve diagonalisé. L'opérateur longueur d'une courbe γ qui intersecte un réseau de spin sur une arête portant la représentation j a pour valeur propre $l_P \sqrt{j(j+1)}$. Toute intersection de la courbe γ avec les arêtes du réseau de spin fournit donc une contribution de ce type, de manière analogue au cas de l'aire en 3+1 dimensions. Je rappelle que nous sommes toujours ici dans le cas euclidien. Il est intéressant de noter que cette même étude dans le cas lorentzien [75] révèle un paysage géométrique différent : la longueur des courbes de genre espace possède un spectre continu, alors que celle des courbes du genre temps possède un spectre discret. Cet exemple intéressant montre que le caractère discret de la géométrie n'est pas universel en gravité quantique à boucles.

5.3 LA FORMULATION CHERN-SIMONS

5.3.1 La gravité 2+1 comme une théorie de Chern-Simons

L'idée d'une formulation Chern-Simons de la gravité 2+1 est apparue dans les années 80 [76, 72]. L'idée consiste à récrire l'action de Palatini en termes d'une connexion de Poincaré qui regroupe triade et connexion $SU(2)$.

Considérons les générateurs \mathcal{J}_i et \mathcal{P}_i de l'algèbre de Poincaré $ISO(3)$, vérifiant les relations

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathcal{J}_k, \quad (5.23)$$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{P}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathcal{P}_k, \quad (5.24)$$

$$[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = 0. \quad (5.25)$$

On construit alors la connexion de Poincaré

$$A = e^i \mathcal{P}_i + \omega^i \mathcal{J}_i. \quad (5.26)$$

On montre alors que l'action de Palatini est égale à l'action de Chern-Simons pour cette connexion $ISO(3)$

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (5.27)$$

La symétrie de jauge locale de Poincaré reproduit alors la symétrie locale $SU(2)$ et la symétrie de translation locale de l'action de Palatini.

Ces idées peuvent s'étendre aux divers cas de signatures et de constantes cosmologique. La seule chose qui doit être modifiée est le groupe de jauge. Un cas intéressant est celui de la gravité euclidienne en constante cosmologique positive. En effet dans ce cas le groupe de jauge à considérer est $SO(4)$. L'algèbre est alors modifiée avec le commutateur

$$[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = \Lambda e_{ij}{}^k \mathcal{J}_k. \quad (5.28)$$

La décomposition $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ permet de récrire la connexion $SO(4)$ à l'aide de deux connexions $SU(2)$. On définit A^+ et A^- comme les parties self-duales et anti-self-duales de la connexion A . L'action de Chern-Simons $SO(4)$ se récrit alors comme la différence deux copies de l'action de Chern-Simons $SU(2)$, le niveau k étant relié à la constante cosmologique $k = 2\pi/\sqrt{\Lambda}$. On a donc une action de la gravité

$$S[A^+, A^-] = S_{CS\ SU(2)}[A^+] - S_{CS\ SU(2)}[A^-], \quad (5.29)$$

qui conduit à une fonction de partition qui s'écrit alors formellement

$$\int [\mathcal{D}A^+][\mathcal{D}A^-] e^{iS[A^+] - iS[A^-]} = \left| \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \right|^2. \quad (5.30)$$

La fonction de partition de la gravité 2+1 euclidienne à $\Lambda > 0$ est donc obtenue comme le carré de la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons $SU(2)$, le niveau k étant relié à la valeur de Λ .

5.3.2 Théorie de Chern-Simons et invariants

Il existe depuis une vingtaine d'années un lien profond entre l'étude mathématique des invariants de noeuds et de variétés, et la physique de certaines théories des champs invariantes par difféomorphisme. La théorie de Chern-Simons en est un prototype intéressant.

Invariants de variété

Un invariant de variété est un objet qui peut être calculé à partir d'une variété M indépendamment de toute structure additionnelle sur cette variété, comme une métrique. Considérons une théorie quantique des champs formulée sur une variété M indépendamment de toute structure métrique. Alors les quantités calculable dans cette théorie des champs peuvent fournir des invariants de variété. Les théories de gravité sont bien sûr des exemples de théories formulée sans structure métriques, mais elles ne sont qu'un cas particulier de ces théories. Dans le cas où il n'existe qu'un nombre fini de degrés de liberté physiques, ces théories sont dites *topologiques*. Dans cette partie, je présente brièvement les idées dues à Witten[77] et qui permettent de calculer des invariants à partir de la théorie de Chern-Simons. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces idées au chapitre 10.

Considérons la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons $SU(2)$ de niveau k , formulée sur une variété tridimensionnelle M

$$CS(M) = \int \mathcal{D}A \exp \left[\frac{ik}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right]. \quad (5.31)$$

Cet objet fournit *a priori* un invariant de M . Une partie du travail de Witten a consisté à montrer explicitement qu'un tel objet avait du sens au niveau de la théorie des champs, c'est à

dire pouvait être effectivement régularisé et calculé. On trouve par exemple pour les variétés les plus simples [77]

$$Z(S^3) = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{\pi}{k+2}\right), \quad (5.32)$$

$$Z(S^2 \times S^1) = 1. \quad (5.33)$$

Invariants de noeuds et de liens

Un autre aspect de ces idées est qu'elles fournissent des invariants de noeuds et de liens. En effet une observable naturelle de la théorie de Chern-Simons est fournie par les boucles de Wilson. Considérons une courbe fermée K plongée dans S^3 (c'est à dire un noeud!), choisissons une représentation j de $SU(2)$, on peut définir la fonctionnelle

$$W_{K,j}(A) = \text{tr}_j(h_K(A)), \quad (5.34)$$

où $h_K(A)$ est l'holonomie de la connexion A selon K , et tr_j désigne la trace dans la représentation j . On peut alors définir la valeur moyenne de cette boucle de Wilson en l'insérant dans la fonction de partition pour $M = S^3$

$$\langle W_{K,j} \rangle_{CS} = \int \mathcal{D}A e^{iS_{CS}[A]} W_{K,j}(A). \quad (5.35)$$

Cet objet constitue un invariant du noeud K plongé dans S^3 . Une propriété intéressante de cet invariant est que sa définition est purement tridimensionnelle et ne fait pas intervenir sa projection sur une surface 2D. Un ensemble de noeuds K_i qui ne s'intersectent pas forme un lien $L = K_1, \dots, K_n$. On peut donc étendre la définition ci-dessus. On sélectionne une représentation j_i pour chaque composante K_i de L , et on définit

$$\langle W_{L,\{j_i\}} \rangle_{CS} = \int \mathcal{D}A e^{iS_{CS}[A]} \prod_{i=1}^n W_{K_i,j_i}(A). \quad (5.36)$$

Cet objet est un invariant du lien L . A ce stade, nous avons donc défini des invariants de variété en utilisant la fonction de partition de Chern-Simons pour une variété M , et des invariants de liens en insérant des boucles de Wilson dans la fonction de partition pour S^3 . On peut combiner ces deux idées et insérer des boucles de Wilson dans une fonction de partition pour la variété M . Les liens entre ces expressions permettent alors de calculer les invariants de variété en termes d'invariants de liens dans S^3 .

Calcul par chirurgie

Pour relier invariants de variétés et invariants de liens, on utilise la notion de chirurgie. Considérons une variété M et un cercle C non-noué plongé dans M . Il est nécessaire de munir ce cercle d'un *framing*. En épaississant C dans M , son voisinage tubulaire fournit un tore plein T de bord Σ , plongé dans M . On peut alors écrire comme union sur Σ de T et de son complément $M = N \#_{\Sigma} T$. Ce tore plein T possède deux cycles : un méridien et une longitude fournies par le framing de C . Considérons maintenant un difféomorphisme S de Σ qui échange ces deux cycles. On peut ensuite recoller T à N après application de ce difféomorphisme à la

surface de T . On obtient alors une nouvelle variété \tilde{M} . En utilisant un lien L , on peut répéter l'opération de chirurgie sur toutes ses composantes. La variété \tilde{M} qu'on obtient à la fin est la variété *obtenue de M par chirurgie selon L* . Le théorème qui justifie cette notion est le suivant : toute variété M peut être obtenue de S^3 par chirurgie (le lien à utiliser étant non-unique.) Nous aurons l'occasion de revenir sur ces notions au chapitre 10.

L'opération de chirurgie permet de manière intéressante de calculer les invariants $CS(\mathcal{M})$. En effet si \tilde{M} est obtenue de M par chirurgie selon un cercle C , on a le résultat suivant[77]

$$Z(\tilde{\mathcal{M}}) = \sum_{j=0}^{k/2} \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \left[\frac{(2j+1)\pi}{k+2} \right] Z(M, \{C, j\}). \quad (5.37)$$

On peut donc calculer $CS(\mathcal{M})$ à partir d'une somme d'invariants de liens plongés dans S^3 .

6

LE MODÈLE DE PONZANO-REGGE

Les modèles de mousses de spin sont véritablement nés dans la seconde moitié des années 90. En revanche le premier modèle de mousses de spin date en réalité de 1968, et connu une lente maturation. Ce chapitre présente le modèle de Ponzano-Regge tel qu'il a été proposé en 1968, puis son amélioration 'quantique', le modèle de Turaev-Viro. Enfin je détaille la construction d'Ooguri qui a permis la comparaison de ce modèle avec l'approche Chern-Simons.

6.1 LE MODÈLE DE PONZANO-REGGE

6.1.1 La proposition de Ponzano et Regge

Historiquement, le premier modèle de mousse de spin¹ est né en 1968 de l'imagination des physiciens Ponzano et Regge[30]. Leur idée était de définir une fonction de partition pour la gravité quantique euclidienne sur une variété à 3 dimensions \mathcal{M} . Définir une telle fonction de partition signifie donner un sens à l'expression

$$Z(\mathcal{M}) = \int [\mathcal{D}g] \mathcal{A}[g] = \int [\mathcal{D}g] e^{iS[g]} \quad (6.1)$$

où $S[g]$ est l'action de la gravité pour la métrique g , et l'intégrale porte sur les classes d'équivalence de la métrique par difféomorphisme. Ponzano et Regge proposèrent comme réalisation concrète de (6.1) l'expression suivante

$$Z[\Delta] = \sum_{\{j_e\}} \mathcal{A}(\{j_e\}), \quad (6.2)$$

avec la définition de l'amplitude

$$\mathcal{A}(\{j_e\}) \doteq \sum_{\{j_e\}} \prod_e (-1)^{\chi_e} (2j_e + 1) \prod_t \left\{ \begin{matrix} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{matrix} \right\}. \quad (6.3)$$

Cette expression se comprend comme suit : au lieu de considérer la variété \mathcal{M} , on considère une triangulation Δ de celle-ci. Au lieu de sommer sur les classes d'équivalences de métriques vivant sur \mathcal{M} , on somme sur des demi-entiers j_e associés aux arêtes e de Δ . Ces demi-entiers

¹on pourrait même dire de gravité quantique !

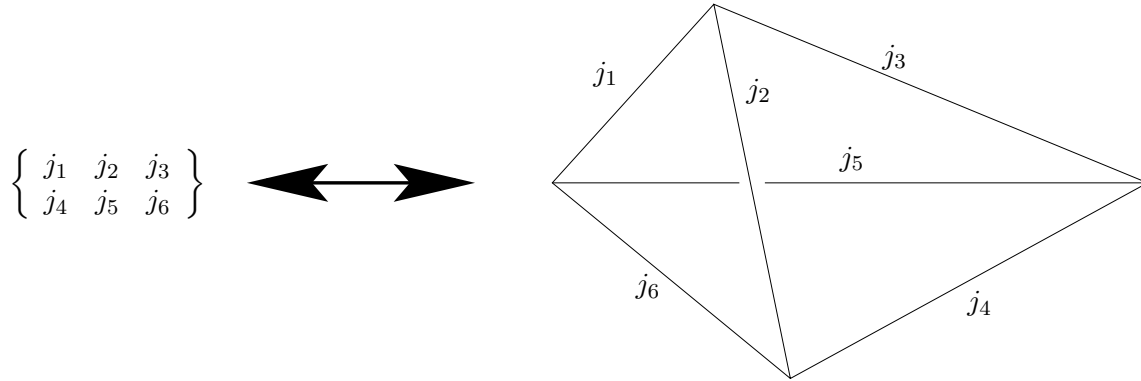


FIG. 6.1 – Lien entre un tétraèdre et le symbole $6j$ associé dans l'amplitude de Ponzano-Regge : une représentation j_e sur une arête e s'interprète comme une longueur $(j_e + 1/2)l_P$.

contiennent de l'information métrique en ce sens qu'on interprète $j_e + 1/2$ comme la longueur² en unités de Planck $l_P = G\hbar$ de l'arête e

$$l_e = (j_e + \frac{1}{2})l_P. \quad (6.4)$$

Enfin comme amplitude associée à une telle configuration métrique, on considère $\mathcal{A}(j_e)$ comme défini en (6.3). Dans cette expression les produits portent sur les arêtes e et les tétraèdres t de la triangulation Δ . Pour chaque tétraèdre t on utilise le symbole $6j$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{array} \right\}, \quad (6.5)$$

associé aux 6 représentations qui vivent sur les arêtes du tétraèdre t (voir figure 6.1). Cet objet est défini dans la théorie du recouplage des représentations de $SU(2)$, cf appendice A. Nous reviendrons plus tard sur le facteur $(-1)^{X_e}$ qui n'était pas totalement spécifié par Ponzano et Regge.

6.1.2 La limite semi-classique du modèle de Ponzano-Regge

A ce stade, on peut légitimement se demander ce qui motive la proposition de Ponzano et Regge comme réalisation de l'intégrale de chemin (6.1). La raison est que cet étrange *ansatz* discret possède un comportement semi-classique intéressant. Ce comportement se révèle en étudiant le comportement asymptotique du symbole $6j$ pour les grandes valeurs de spins.

Ponzano et Regge conjecturèrent sur la base d'observations numériques que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} \sim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left(\sum_i (j_i + \frac{1}{2})\Theta_i + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.6)$$

Dans cette formule V désigne le volume du tétraèdre \mathcal{T} dont les longueurs sont les $j_i + \frac{1}{2}$, et Θ_i désigne l'angle entre les deux normales extérieures des deux faces de \mathcal{T} qui contiennent l'arête

²On verra plus tard que la bonne interprétation est plutôt que la longueur de e est donnée – en accord avec le formalisme canonique – par $\sqrt{j_e(j_e + 1)}$ qui redonne $j_e + 1/2$ dans la limite des grands spins.

i. L'intérêt de ce résultat est le suivant : si on décompose le cosinus de cette asymptotique et qu'on ne retient pour l'instant que la partie exponentielle positive, alors l'asymptotique pour le produit de nombreux symboles $6j$ associés à des tétraèdres de la triangulation contient un terme proportionnel à

$$\exp i \left[\sum_e \left(\sum_{t \supset e} \Theta_{e,t} \right) \left(j_e + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (6.7)$$

où $\Theta_{e,t}$ désigne l'angle entre les deux normales extérieures des faces de t contenant e . La phase de cette exponentielle

$$S[\{j_e\}] = \sum_e \left(\sum_{t \supset e} \Theta_{e,t} \right) \left(j_e + \frac{1}{2} \right) \quad (6.8)$$

se trouve être l'action par ailleurs proposée par Regge[78] pour décrire la gravité discrète. Or la limite des grands spins est bien une limite semi-classique. En effet si l'on considère l'interprétation des spins comme des longueurs

$$l_e = \left(j_e + \frac{1}{2} \right) l_P = \left(j_e + \frac{1}{2} \right) G\hbar, \quad (6.9)$$

on constate que faire tendre j_e vers l'infini à l_e fixé est équivalent à faire tendre \hbar (ou l_P) vers 0. La limite semi-classique du symbole $6j$ justifie que $\mathcal{A}(j_e)$ constitue une intéressante proposition de réalisation concrète de l'amplitude $\mathcal{A}(g) = e^{iS(g)}$.

L'asymptotique du symbole $6j$ (6.6) fut conjecturée par Ponzano et Regge sur la base d'observations numériques. Wigner avait déjà montré que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\}^2 \sim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{24\pi V}. \quad (6.10)$$

Ponzano et Regge ont alors procédé en voyant dans cette asymptotique la moyenne du carré d'une fonction oscillante. Ils ont alors proposé et vérifié numériquement la forme (6.6). Étonnamment, cette formule ne fut prouvée que 30 ans plus tard par J. Roberts [79] en utilisant des techniques mathématiques pointues.

Dans l'article [34], nous avons donné une nouvelle preuve de ce résultat. Les grandes lignes de cette approche sont détaillées dans le chapitre 11. L'idée consiste à récrire le carré du symbole $6j$ comme une intégrale numérique dont l'asymptotique peut être étudiée à l'aide de la méthode de la phase stationnaire. Nous avons notamment adapté cette méthode au cas des intégrales comportant des points singuliers. L'intérêt de cette méthode est qu'elle met en oeuvre moins de technologie que la preuve de Roberts, et qu'elle se généralise par exemples aux cas Lorentzien et au cas de la dimension 3+1 [34].

6.1.3 Les propriétés du modèle de Ponzano-Regge

Le modèle de Ponzano-Regge possède deux propriétés importantes pour la suite : la première est que la valeur de la fonction de partition ne dépend pas de la triangulation choisie. La seconde est que malheureusement cette valeur est infinie pour presque toutes les triangulations.

Le fait que pour une même variété \mathcal{M} , l'amplitude de Ponzano-Regge ne dépende pas du choix de la triangulation découle des propriétés particulières du symbole $6j$. En effet comme

nous aurons l'occasion de le détailler au chapitre 10, les relations d'orthogonalité et les relations dites "pentagones" du symbole $6j$ permettent de prouver l'invariance par changement de triangulation.

Malheureusement, la fonction de partition du modèle de Ponzano-Regge est en fait infini pour la plupart des triangulations, et l'invariance sous les changements de triangulation n'est elle-même valable qu'à des facteurs infinis près, qui sont égaux à

$$\mathcal{V} = \sum_j (2j+1)^2. \quad (6.11)$$

Le modèle formellement indépendant serait obtenu en divisant l'amplitude (infinie) de Ponzano-Regge par le facteur (infini) \mathcal{V}^V où V désigne le nombre de vertexs de la triangulation.

6.1.4 Des questions de signes

Deux choses sont à commenter du modèle de Ponzano-Regge ayant rapport aux signes. Tout d'abord le rôle de la phase χ_e qui apparait dans (6.2), ensuite le fait que l'asymptotique du symbole $6j$ fait apparaître un cosinus et non une exponentielle comme on le souhaiterait.

Facteur de phase

Ponzano et Regge n'identifient pas précisément ce que devait être χ_e , mais proposèrent dans le cas d'une variété ayant la topologie d'une 3-sphère l'expression suivante

$$\chi_e = (n_e - 2)j_e. \quad (6.12)$$

La présence de ce terme s'explique de la façon suivante : l'action de Regge n'est pas exactement donnée par la phase de l'expression (6.7). L'action de Regge se définit non pas à l'aide des angles Θ entre les normales extérieures, mais à l'aide des angles diédraux $\pi - \Theta$.

$$S_{Regge}[\{j_e\}] = \sum_e \left(\sum_{t \supset e} (\pi - \Theta_{e,t}) \right) \left(j_e + \frac{1}{2} \right) \quad (6.13)$$

La conversion du facteur $(-1)^{n_e j_e}$ en $e^{\pm i\pi(n_e-2)j_e}$ fournit se facteur. Ainsi l'objet possédant l'asymptotique correcte est le suivant

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}. \quad (6.14)$$

Cet objet est en réalité naturel car il correspond à une version normalisée du $6j$, en ce sens qu'il est construit à partir des entrelaceurs normalisés de trois représentations, au lieu des symboles $3j$ qui à un signe près ne sont pas normalisés.

Il nous reste dans la phase χ_e proposée en (6.12) un terme $(-1)^{2j_e}$. Ce terme est trivial dans le cas des représentations de $SO(3)$ qui sont des entiers, mais intervient dans le cas de représentations demi-entières de $SU(2)$. On peut l'incorporer au terme d'arête en récrivant de manière générale $(-1)^{2j_e} (2j_e + 1)$. Ceci revient à utiliser la dimension graduée des représentations demi-entières. On récrit donc l'amplitude de Ponzano-Regge sous la forme

$$Z[\Delta] = \sum_{\{j_e\}} \prod_e (-1)^{2j_e} (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} \dot{j}_{t1} & \dot{j}_{t2} & \dot{j}_{t3} \\ \dot{j}_{t4} & \dot{j}_{t5} & \dot{j}_{t6} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Cosinus et exponentielle

Un autre problème de signes est à commenter : le fait que l'asymptotique du $6j$ n'est pas exactement une exponentielle, mais un cosinus. Ce problème peut être relié au fait que nous travaillons sur un modèle euclidien et pas lorentzien, ce qui rend difficile l'identification de la notion de causalité. On peut en effet construire différentes intégrales de chemin suivant qu'on s'intéresse à des propagateurs causaux ou non-causaux. Formellement, une contrainte hamiltonienne H associée à un multiplicateur de lagrange (lapse) N peut permettre de construire un propagateur causal en intégrant seulement sur les valeurs positives de N , ou bien un propagateur non-causal en intégrant sur toutes les valeurs de N . On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dN e^{iNH} = \int_0^{+\infty} dN \cos(NH) \quad (6.16)$$

Le modèle de Ponzano-Regge n'étant pas à même de distinguer l'orientation du temps, on s'attend donc naturellement à trouver ce type d'expression. La compréhension réelle de ce problème nécessite la formulation correcte d'un modèle Lorentzien au sein duquel la notion de structure causale puisse être identifiée[80].

6.2 LE MODÈLE DE TURAEV-VIRO

Le fait que le modèle de Ponzano-Regge soit infini est probablement la raison de son oubli jusqu'au début des années 90. Les mathématiciens Turaev et Viro construisirent [81] alors un analogue 'quantique' du modèle de Ponzano-Regge, leur motivation étant la formulation d'un nouvel invariant de variété 3D. Ce modèle étant lui fini, ce fut le point de départ d'un regain d'activité autour du modèle de Ponzano-Regge (nous reviendrons au chapitre 10 sur certains aspects plus mathématiques de ces questions.)

Le modèle de Turaev-Viro est l'analogue du modèle de Ponzano-Regge, mais formulé non pas à l'aide du groupe $SU(2)$ mais du groupe quantique $U_q(SU(2))$, pour q une racine de l'unité $q = e^{\frac{2i\pi}{r}}$. Le groupe quantique $U_q(SU(2))$ n'est pas un groupe, mais il peut être pensé comme une déformation de $SU(2)$ gouvernée par le paramètre q . En particulier il possède une théorie des représentations qui rend disponible des analogues q -déformés des briques élémentaires du modèle de Ponzano-Regge, à savoir le symbole $6j$ et les dimensions des représentations.

Les représentations de $U_q(SU(2))$ sont indicées par un demi-entier $0 \leq j \leq \frac{r-2}{2}$, elles sont donc en nombre fini. La dimension quantique d'une représentation j est égale à $[2j+1]_q$ où on définit pour un entier n le nombre q -déformé

$$[n]_q = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)} \quad (6.17)$$

On a alors $[r]_q = 0$. On voit alors que la 'dernière' représentation est bien celle de spin $j = \frac{r-2}{2}$ puisque la suivante $j = \frac{r-1}{2}$ a une dimension quantique nulle. On définit au passage la somme des dimensions quantiques au carré, analogue de (6.11)

$$\mathcal{V}_q = \sum_{j=0}^{\frac{r-2}{2}} ([2j+1]_q)^2. \quad (6.18)$$

Enfin on peut définir également un symbole $6j$ quantique

$$\left[\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right]_q, \quad (6.19)$$

qui partage plusieurs propriétés avec le $6j$ classique, en particulier les propriétés d'orthogonalité et les relations pentagone.

Le modèle de Turaev-Viro est comme l'analogue q -déformé du modèle de Ponzano-Regge

$$TV(\Delta) = \sum_{\{j_e \leq \frac{r-2}{2}\}} \prod_v \frac{1}{\mathcal{V}_q} \prod_e [2j_e + 1]_q \prod_t \left[\begin{array}{ccc} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{array} \right]_q. \quad (6.20)$$

La remarque importante est que cette fois-ci, la somme converge puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de représentations. Le modèle de Turaev-Viro définit donc une fonction de partition finie pour tous les choix de triangulations.

Le coeur du travail de Turaev et Viro consiste à prouver qu'un tel objet est indépendant du choix de la triangulation Δ de \mathcal{M} , et constitue donc un *invariant* de la variété \mathcal{M} . On comprend qu'ici le facteur fini \mathcal{V}_q remplace le facteur infini \mathcal{V} qui servait à rendre le modèle de Ponzano-Regge formellement invariant. Le modèle de Turaev-Viro étant fini, cet invariance n'est plus formelle dans son cas.

On est maintenant naturellement conduit à se demander si le modèle de Turaev-Viro peut être associé à un modèle de gravité quantique et lequel. La réponse nous est donnée par l'asymptotique du $6j$ quantique[82]. Puisque j est borné par $(r-2)/2$, il faut pour obtenir l'asymptotique faire tendre simultanément les spins j et le nombre r vers l'infini, en maintenant fixe le rapport des deux. Il a été conjecturé que

$$\left[\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right]_q \propto_{j,r \rightarrow \infty} \cos(S_{Regge, \Lambda_r} + \frac{\pi}{4}), \quad (6.21)$$

où S_{Regge, Λ_r} est l'action de Regge de la gravité 2+1 en présence d'une constante cosmologique Λ_r dont la valeur est reliée à r par

$$\Lambda_r = \left(\frac{2\pi}{r} \right)^2. \quad (6.22)$$

Ainsi un modèle de gravité quantique en présence de constante cosmologique Λ est décrit par le modèle de Turaev-Viro avec $q = e^{i\sqrt{\Lambda}}$. Il n'est pas clair à l'heure actuelle que les méthodes que nous avons développées dans [34] puissent s'appliquer au cas quantique. L'asymptotique du symbole $6j$ quantique est actuellement un sujet d'études pour les mathématiciens [83, 84].

6.3 L'ESPACE DE HILBERT DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

La découverte du modèle de Turaev-Viro au début des années 90 apporta un regain d'intérêt au modèle de Ponzano-Regge. Pour en faire une bonne théorie quantique, il manquait au modèle de Ponzano-Regge un espace de Hilbert. Cette construction fut faite par Ooguri[85].

On considère une variété de la forme $\Sigma \times I$. On construit un espace de Hilbert cinématique qui permet de considérer des états cinématiques vivant sur le bord. On montre ensuite que le modèle de Ponzano-Regge définit un *projecteur* qui projette ces états de bord sur un espace de Hilbert *d'états physiques*. Des états physiques peuvent être construit à la Hartle-Hawking à partir de l'amplitude de Ponzano-Regge.

6.3.1 L'espace de Hilbert cinématique

Considérons une triangulation $\bar{\Delta}$ de la surface Σ . On appelle une coloration c de $\bar{\Delta}$ la donnée d'un demi-entier $j_{\bar{e}}$ pour toute arête \bar{e} de $\bar{\Delta}$. L'ensemble des colorations de $\bar{\Delta}$ engendre un espace vectoriel dit "cinématique", associé à $\bar{\Delta}$

$$\mathcal{H}_{cin}(\bar{\Delta}) = \left\{ |\Psi\rangle = \sum_c \Psi(c) |c\rangle \right\} \quad (6.23)$$

que l'on muni du produit scalaire $\langle c|c'\rangle = \delta_{c,c'}$. Pour un bord triangulé $\bar{\Delta}$, cet espace de Hilbert permet donc de considérer des états de bord qui sont des 'fonctions d'onde' $\Psi(c)$.

6.3.2 Le modèle de Ponzano-Regge/Turaev-Viro comme un projecteur

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{cin}(\bar{\Delta})$ est un espace de Hilbert cinématique. L'amplitude de Ponzano-Regge définit l'intégrale de chemin de la théorie, à partir de laquelle on peut construire le projecteur sur les états physiques. En réalité nous avons vu que le modèle de Ponzano-Regge est mal défini et contient des infinis. On peut néanmoins construire un projecteur à partir du modèle de Turaev-Viro qui est lui fini. La discussion qui suit peut également être comprise si l'on arrive à définir une version régularisée du modèle de Ponzano-Regge. La discussion originelle de Ooguri portait sur le modèle de Turaev-Viro. Un de mes travaux a justement consisté à régulariser le modèle de Ponzano-Regge [35] comme nous le verrons au chapitre 8. On peut donc avoir à l'esprit que ce qui va suivre a également un sens bien défini si l'on utilise cette régularisation.

Considérons la variété $\mathcal{M} = \Sigma \times I$, où les surfaces initiales et finales Σ_i et Σ_f sont triangulées par $\bar{\Delta}$. On choisit une triangulation Δ de \mathcal{M} qui coïncide avec $\bar{\Delta}$ sur les bords. On désigne par C une coloration de Δ , elle induit des colorations \bar{C}_i et \bar{C}_f sur $\bar{\Delta}_i$ et $\bar{\Delta}_f$. On définit alors les éléments de matrice du projecteur Π sur les états physiques par

$$\langle c_f | \Pi | c_i \rangle = \sum_{C \text{ tq } \bar{C}_{i,f} = c_{i,f}} \mathcal{A}_{PR}[\Delta, C], \quad (6.24)$$

où $\mathcal{A}_{PR}[\Delta, C]$ désigne l'amplitude de Ponzano-Regge pour la triangulation Δ et la coloration C . Ooguri a alors montré [85] que compte-tenu de l'invariance du modèle de Ponzano-Regge par triangulation, Π est bien un projecteur. Le projecteur sur les états physiques permet d'écrire l'équation de Wheeler-DeWitt qui définit les états physiques

$$\langle c | \Pi | \Phi \rangle = \langle c | \Phi \rangle. \quad (6.25)$$

Les solutions de cette équation définissent l'espace de Hilbert physique $\mathcal{H}_{phys}(\bar{\Delta})$ et peuvent être explicitement fabriquées à partir d'états cinématiques

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \langle c | \Pi | \Psi \rangle = \sum_{c'} \langle c | \Pi | c' \rangle \langle c' | \Psi \rangle, \\ &= \sum_{c'} \Psi(c') \sum_{C \text{ tq } \bar{C}_{i,f} = c, c'} \mathcal{A}_{PR}[\Delta, C]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

A ce stade, on dispose donc d'un espace de Hilbert physique du modèle de Ponzano-Regge. Cependant celui-ci dépend de la triangulation $\bar{\Delta}$ de Σ . Ooguri a également montré [85] que deux

espaces de Hilbert définis à partir de deux triangulations $\bar{\Delta}_1$ et $\bar{\Delta}_2$ différentes étaient en fait isomorphes ; l'isomorphisme n'étant autre que le projecteur, où l'on triangule $\Sigma \times I$ de manière à coïncider avec $\bar{\Delta}_1$ d'un autre côté et $\bar{\Delta}_2$ de l'autre.

Parmi les fonctions d'ondes physiques, on peut fabriquer les fonctions d'onde physiques à la Hartle-Hawking. On considère une variété \mathcal{M} de bord Σ triangulé par $\bar{\Delta}$. On choisit une triangulation Δ de \mathcal{M} qui coïncide avec $\bar{\Delta}$ sur le bord et on définit la fonction d'onde

$$\Phi_{HH}(c) = \sum_{C \text{ tq } \bar{C}=c} \mathcal{A}_{PR}[\Delta, C]. \quad (6.27)$$

6.3.3 Lien avec la théorie de Chern-Simons

Ayant défini un espace de Hilbert physique convenable pour le modèle de Ponzano-Regge, Ooguri a ensuite montré [85] que cet espace est isomorphe à l'espace de Hilbert physique de la théorie de Chern-Simons $ISO(3)$ [86]. En particulier il a montré que les produits scalaires des fonctions d'onde Hartle-Hawking coïncident dans les deux théories.

Le travail d'Ooguri a permis d'une part d'équiper le modèle de Ponzano-Regge d'un espace de Hilbert, qui permet de formuler les notions d'états cinématiques, d'états physique et de projecteur. D'autre part, ce travail a montré que les résultats physiques du modèle de Ponzano-Regge sont en accord avec les résultats de Witten [86]. Ainsi, malgré le caractère 'approximatif' de l'argument qui motiva Ponzano et Regge à proposer cette expression (l'asymptotique du 6j), et le fait qu'il soit un modèle discret, le modèle de Ponzano-Regge se révèle être une quantification de la gravité 2+1, qui reproduit les résultats d'une approche indépendante.

7

LA CONSTRUCTION DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

A ce stade nous disposons de deux théories de gravité quantique 2+1 obtenues indépendamment : la gravité quantique à boucle et le modèle de Ponzano-Regge. En gravité quantique à boucle, nous avons une bonne compréhension de la cinématique (on connaît les états de réseaux de spin) mais pas de la dynamique (on n'a pas résolu la contrainte hamiltonienne ou construit le projecteur sur les états physiques). Avant le travail d'Ooguri, la situation pour le modèle de Ponzano-Regge était opposée : il s'agit d'une amplitude d'intégrale de chemin, mais aucune structure canonique cinématique ne lui était associée. La construction d'Ooguri ouvre la voie à une compréhension du modèle de Ponzano-Regge comme le projecteur sur les états physiques de la gravité quantique à boucle.

Au niveau cinématique, on constate l'équivalence des espaces de Hilbert. Considérons une surface Σ triangulée par $\bar{\Delta}$ et l'espace de Hilbert de Ooguri $\mathcal{H}_{\bar{\Delta}}$. On considère le graphe trivalent Γ dual à $\bar{\Delta}$. Une coloration de $\bar{\Delta}$ induit une coloration de Γ , et un état $|\bar{\Delta}, c\rangle$ peut alors être identifié avec un réseau de spin $|\Gamma, c\rangle$.

Dans ce chapitre, je présente une construction du modèle de Ponzano-Regge à partir de la fonction de partition de la gravité 2+1, et j'argumente qu'il peut servir de projecteur sur les états physiques pour la gravité à boucle.

7.1 LA CONSTRUCTION DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

Dans cette partie je construis le modèle de Ponzano-Regge à partir de l'action de la gravité BF $SU(2)$ et de techniques inspirées des théories de jauge sur réseau. Pour une construction plus générale des modèles de mousses de spin dans cet esprit, on pourra consulter [87].

7.1.1 Définition de la discrétisation

Considérons une variété fermée \mathcal{M} , et la fonction de partition associée pour la gravité euclidienne 2+1 dans sa forme BF $SU(2)$, voir (5.8). On a

$$Z(\mathcal{M}) = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}e \exp \left[i \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F(\omega)) \right]. \quad (7.1)$$

Dans l'esprit des théories de jauge sur réseau, considérons la discrétisation suivante

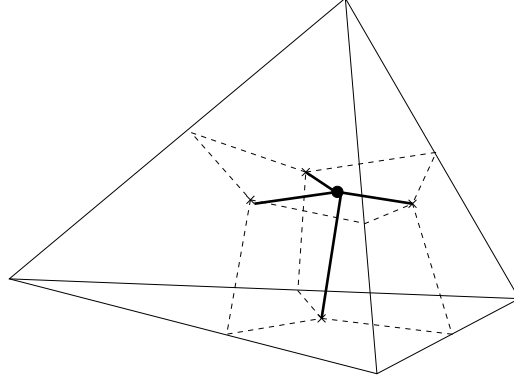


FIG. 7.1 – Complexe dual à une triangulation : à tout tétraèdre on associe un vertex dual $v^* \sim t$, à toute face on associe une arête duale $e^* \sim f$, à toute arête on associe une face duale $f^* \sim e$.

- La variété \mathcal{M} est remplacée par une triangulation Δ . Nous considérons une triangulation dont les arêtes et les faces sont munies d'une orientation. Nous considérerons également son complexe dual Δ^* (voir figure 7.1).
- La connexion est remplacée par la donnée d'un élément de groupe g_{e^*} associée à toute arête duale $e^* \in \Delta^*$. Cet élément de groupe s'interprète comme l'holonomie de la connexion le long de l'arête duale e^* . Cela signifie que de toute l'information contenue dans ω , la discrétisation ne retient que son holonomie le long des arêtes duales.
- La 2-forme de courbure $F(\omega)$ est représentée par des éléments de groupes U_e associés aux arêtes de Δ , et définis en termes des g_{e^*} par

$$U_e = \overrightarrow{\prod}_{e^* \subset e} g_{e^*}^{\epsilon(e, e^*)}. \quad (7.2)$$

Cette définition signifie qu'on considère le produit orienté des éléments g_{e^*} appartenant à la face duale $f^* \sim e$, voir figure 7.2. Elle dépend du choix d'un vertex dual de départ $st^*(e)$ et de l'orientation relative $\epsilon(e, e^*) = \pm 1$ de e et f . On considèrera en particulier la projection Z_e de U_e sur l'algèbre de Lie (cf annexe A)

$$U_e = u_e \mathbb{I} + Z_e \quad (7.3)$$

- La 1-forme e est remplacée par une collection d'éléments $X_e \in \mathfrak{su}(2)$ associés aux arêtes de la triangulation. Ces éléments s'interprète comme l'intégrale du champ de triades e sur les arêtes de Δ .

A l'aide de ces nouvelles variables, on définit l'action discrétisée

$$S(\{g_{e^*}\}, \{X_e\}) = \sum_e \text{tr}(X_e Z_e) = \sum_e \text{tr}(X_e U_e). \quad (7.4)$$

La fonction de partition discrétisée est alors donnée par

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \left(\prod_e \int_{\mathfrak{su}(2)} dX_e \right) \exp \left[i \sum_e \text{tr}(X_e U_e) \right]. \quad (7.5)$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que cette définition correspond à la définition de l'amplitude de Ponzano-Regge pour la triangulation Δ .

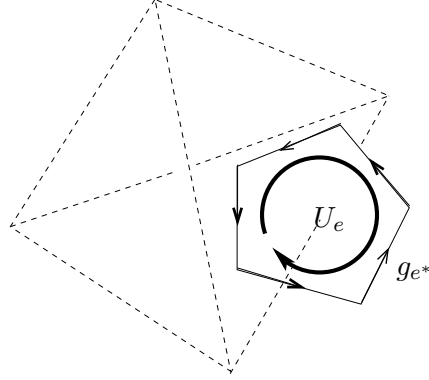


FIG. 7.2 – Calcul de courbure U_e autour d'une arête e à partir du produit des éléments de groupe g_{e^*} autour de la face duale $f^* \sim e$.

7.1.2 Amplitude de Ponzano-Regge

L'intégration sur les éléments d'algèbre de Lie

On peut d'abord réaliser l'intégration sur les variables X_e . Comme expliqué en appendice A, on a l'intégration

$$\int_{\mathfrak{su}(2)} dX e^{i\text{tr}(XU)} = \delta(U) \quad (7.6)$$

où $\delta(U)$ désigne la fonction δ^1 de l'élément U dont la projection est Z . L'amplitude s'écrit alors

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \prod_e \delta(U_e). \quad (7.7)$$

Chacune des fonctions δ peut ensuite être décomposée à l'aide de la formule de Plancherel

$$\delta(U) = \sum_j (2j+1) \chi^j(U), \quad (7.8)$$

où la somme porte sur les représentations de $\text{SO}(3)$, $d_j = (2j+1)$ désigne la dimension de la représentation et χ^j le caractère associé. On a alors

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \left(\prod_e \sum_{j_e} (2j_e+1) \right) \prod_e \chi^{j_e}(U_e). \quad (7.9)$$

Il est intéressant de noter qu'à ce stade de la construction, les variables j_e ont remplacé les variables X_e .

¹On peut montrer que qu'il s'agit là d'une fonction δ sur le groupe $\text{SO}(3)$. La fonction δ sur le groupe $\text{SU}(2)$ s'obtient en modifiant l'intégrale, voir [36].

Intégration sur les variables de groupe

On peut maintenant scinder les caractères en matrices de représentation. On note par un indice générique I une paire (e, e^*) où $e^* \subset e$. On définit alors $j_I = j_e$, $g_I = g_{e^*}$, $\epsilon(I) = \epsilon(e, e^*)$ et $s(I)$ la paire $(e, s(e^*))$ où $s(e^*)$ est le successeur de e^* autour de la face $f^* \sim e$, dans l'ordre imposé par son orientation. On peut alors scinder les caractères en matrices de représentation et écrire

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \left(\prod_e \sum_{j_e} (2j_e + 1) \right) \prod_I D_{a_I, b_I}^{j_I}(g_I^{\epsilon(I)}) \times \prod_I \delta_{b_I, a_{s(I)}}. \quad (7.10)$$

Sous cette forme, on peut réaliser l'intégration sur les éléments de groupe. En effet une face possède trois arêtes donc un élément g_{e^*} apparaît exactement 3 fois. L'intégrale sur un produit de 3 matrices de représentations (voir annexe A) fournit alors une paire de coefficients $3j$. On peut alors voir que chaque symbole $3j$ s'associe à une face d'un tétraèdre et que les symboles se combinent pour donner un symbole $6j$ normalisé pour chaque tétraèdre. On a alors après intégration

$$Z(\Delta) = \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

On retrouve bien ici l'amplitude de Ponzano-Regge. Il est à noter que les représentations apparaissent sans le signe $(-1)^{2j}$. En réalité on peut constater [36] que cette construction conduit au modèle de Ponzano-Regge pour le groupe $\text{SO}(3)$, c'est à dire avec uniquement les représentations entières. La raison en est que la fonction δ qu'on obtient par intégration sur l'algèbre de Lie est la fonction δ sur $\text{SO}(3)$. Il est présenté dans [36] la modification nécessaire pour obtenir le modèle sur $\text{SU}(2)$.

7.1.3 Autres expressions de l'amplitude

Nous avons montré que la fonction de partition discrétisée (7.7) est égale à l'amplitude de Ponzano-Regge. Ici nous considérons une expression alternative de cette amplitude que nous utiliserons par la suite. On considère l'expression (7.9) obtenue après application de la formule de Plancherel. Au lieu d'intégrer sur les variables g_{e^*} , on peut décomposer ces intégrations à l'aide de la formule d'intégration de Weyl (voir annexe A), on obtient alors

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{H/W} d\theta_{e^*} \Delta^2(\theta_{e^*}) \right) \left(\prod_e \sum_{j_e} d_{j_e} \right) Z_{\Delta}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\}) \quad (7.12)$$

où $H/W \sim U(1)$ est le sous groupe de Cartan divisé par son groupe de Weyl, $\Delta(\theta) = \sin \theta$ et on définit

$$Z_{\Delta}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\}) = \left(\prod_{e^*} \int_{G/H} dx_{e^*} \right) \prod_e \chi^{j_e}(x_{e^*}^{-1} h_{\theta_{e^*}}^{\epsilon(e, e^*)} x_{e^*}) \quad (7.13)$$

Cette nouvelle forme de l'amplitude peut s'interpréter de la manière suivante : au cours du processus de discrétisation, les variables dans le continuum B et A ont maintenant été remplacée par des variables vivant sur des structures discrètes j_e et θ_{e^*} . La variable j_e peut s'interpréter comme la norme du champ B , c'est à dire la longueur de l'arête e . La variable θ_{e^*} représente

l'angle de rotation correspondant à l'holonomie g_{e^*} obtenue par transport parallèle le long de l'arête e^* .

Nous disposons à ce stade de 3 expressions différentes (7.7), (7.11) et (7.12) pour l'amplitude de Ponzano-Regge. Nous aurons l'occasion d'utiliser les diverses formes de cette amplitude.

7.2 LE PROJECTEUR SUR LES ÉTATS PHYSIQUES EN GRAVITÉ À BOUCLES

Dans la partie précédente, nous n'avons considéré que le cas d'une variété fermée. Le cas d'intérêt pour nous est évidemment le cas d'une variété ouverte où l'amplitude de Ponzano-Regge sert pour calculer le projecteur entre états de gravité à boucle. Après la résolution des contraintes de Gauss et vectorielle, la gravité à boucle fournit des états cinématiques qui sont les réseaux de spin. Nous allons montrer comment le modèle de Ponzano-Regge fournit le projecteur sur les états physiques et permet la prise en compte de la contrainte hamiltonienne.

7.2.1 Intégrale de chemin et projecteur en gravité 3D

Nous considérons ici la gravité 3D euclidienne dans le formalisme BF $SU(2)$. Le premier objet d'intérêt dans le cas d'une variété fermée \mathcal{M} est la fonction de partition

$$Z(\mathcal{M}) = \int \mathcal{D}e \mathcal{D}\omega \exp \left[i \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F(\omega)) \right]. \quad (7.14)$$

Dans le cas d'une variété \mathcal{M} possédant un bord $\partial\mathcal{M}$, l'intégrale de chemin doit se définir en spécifiant des données au bord. Le principe variationnel appliqué à l'action BF impose de conserver les connexions ω fixées au bord. Pour une connexion au bord fixée $\bar{\omega}$, on peut définir la fonctionnelle d'onde

$$G(\bar{\omega}) = \int_{\omega|_{\partial\mathcal{M}=\bar{\omega}}} \mathcal{D}\omega \mathcal{D}e e^{iS[\omega,e]}. \quad (7.15)$$

Le fait de fixer les connexions au bord s'accorde avec le choix de polarisation de la formulation canonique à boucles, où les états cinématiques sont définis comme des fonctionnelles de ω . Si on se place dans le cas particulier d'un bord formé d'une composante initiale $\partial\mathcal{M}_i$ et d'une composante finale $\partial\mathcal{M}_f$, $G(\bar{\omega}_f, \bar{\omega}_i)$ peut servir de noyau du propagateur, dans le but de définir des amplitudes de transition. En effet si on considère une variété de la forme $\mathcal{M} = \Sigma \times I$, on peut considérer l'amplitude de transition entre deux fonctionnelles d'onde

$$\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}e \Psi_f^*(\bar{\omega}_f) e^{iS[\omega,e]} \Psi_i(\bar{\omega}_i) = \int \mathcal{D}\bar{\omega} \Psi_f^*(\bar{\omega}_f) G(\bar{\omega}_f, \bar{\omega}_i) \Psi_i(\bar{\omega}_i). \quad (7.16)$$

Une telle définition fournit un produit scalaire sur les états cinématiques qui s'interprète comme les éléments de matrice du projecteur sur les états physiques. Il fournit donc le produit scalaire sur l'espace des états physiques au sens de ce que nous avons discuté au chapitre 2.

7.2.2 Le modèle de Ponzano-Regge comme un projecteur

Nous avons donc construit le modèle de Ponzano-Regge à partir d'une discrétisation de l'action continue. Il s'agit maintenant de comprendre en quoi ce modèle constitue une proposition de projecteur sur les états physiques pour la gravité quantique à boucles. Pour cela, on considère

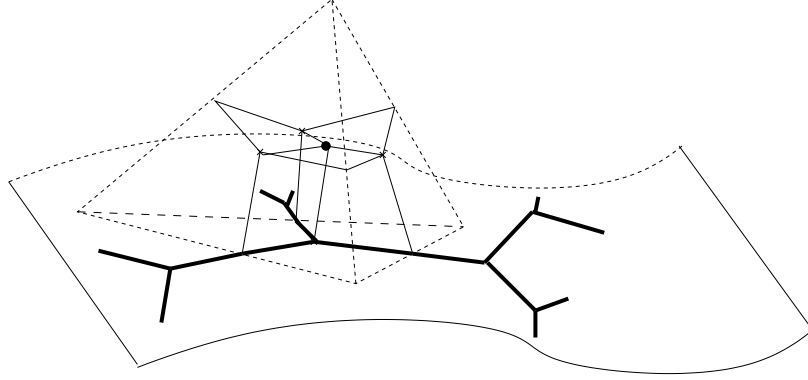


FIG. 7.3 – Le dual Δ^* intersecte le bord $\bar{\Delta}$ en $\bar{\Delta}^*$. Une arête \bar{e} du bord est duale (dans Δ) à une face et duale (dans $\bar{\Delta}$) à une arête \bar{e}^* .

une variété \mathcal{M} de la forme $\Sigma \times I$, et on cherche à définir le produit scalaire entre deux réseaux de spin vivant sur les bords initial et final. Après imposition des contraintes cinématiques, un réseau de spin est une fonction des éléments de groupes $g_{\bar{e}}$ vivant sur ses arêtes \bar{e}

$$\Psi_{\Gamma,c}(\{g_{\bar{e}}\}) = \langle \bigotimes_{\bar{e}} D^{j_{\bar{e}}}(g_{\bar{e}}), \bigotimes_{\bar{v}} \iota_{\bar{v}} \rangle. \quad (7.17)$$

où $\iota_{\bar{v}}$ est l'unique entrelaceur trivalent normalisé. Pour définir le produit scalaire physique entre deux réseaux de spin, on cherche donc un noyau d'intégration $G(g_{\bar{e}}^f, g_{\bar{e}}^i)$ tel que

$$\langle \Gamma^f, c^f | \Gamma^i, c^i \rangle = \int \prod_{\bar{e}} dg_{\bar{e}} \Psi_{\Gamma^f, c^f}^*(g_{\bar{e}}^f) G(g_{\bar{e}}^f, g_{\bar{e}}^i) \Psi_{\Gamma^i, c^i}(g_{\bar{e}}^i) \quad (7.18)$$

Considérons une triangulation Δ d'une variété \mathcal{M} possédant un bord $\partial\mathcal{M}$. La triangulation Δ induit une triangulation $\bar{\Delta}$ du bord. Considérons le complexe Δ^* dual à Δ . Si \bar{e} est une arête du bord, sa face duale dans Δ coupe le bord le long d'une arête \bar{e}^* , qui est l'arête duale à \bar{e} dans $\bar{\Delta}$ (voir figure 7.3). On réfère donc indifféremment à \bar{e} où à son arête duale \bar{e}^* suivant le contexte. On considère la procédure de discrétisation de la fonction de partition où l'on maintient les connexions fixées au bord. On considère des éléments de groupe $g_{\bar{e}^*}$ associée aux arêtes (duales) du bord. On définit alors le propagateur discrétisé

$$G_{\Delta}(\{g_{\bar{e}^*}\}) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \prod_e \delta(U_e). \quad (7.19)$$

où U_e est défini comme précédemment,

$$U_e = \overrightarrow{\prod}_{e^* \subset e} g_{e^*}^{\epsilon(e, e^*)}, \quad (7.20)$$

en particulier si l'arête est une arête \bar{e} du bord, le produit d'éléments de sa face duale dans Δ contient l'élément $g_{\bar{e}^*}$.

Cette expression peut servir de noyau d'intégration de la manière suivante : considérons deux réseaux de spin basés sur des graphes Γ_i et Γ_f respectivement dans le bord initial et final de \mathcal{M} .

Le dual dans Σ d'un graphe trivalent est une triangulation de Σ . Les graphes Γ_i et Γ_f induisent donc une triangulation Δ_i et Δ_f des bords Σ_i et Σ_f . On considère alors une triangulation Δ de \mathcal{M} dont les bords soient les triangulations Δ_i et Δ_f duales aux graphes Γ_i et Γ_f . On peut alors considérer l'intégration des réseaux de spin contre le noyau (7.19), on alors

$$\langle \Gamma^f, c^f | \Gamma^i, c^i \rangle = \int \prod_{\bar{e}} dg_{\bar{e}} \Psi_{\Gamma^f, c^f}^*(g_{\bar{e}}^f) G(g_{\bar{e}}^f, g_{\bar{e}}^i) \Psi_{\Gamma^i, c^i}(g_{\bar{e}}^i). \quad (7.21)$$

On peut montrer que l'intégration sur les variables de groupe conduit à l'amplitude

$$\langle \Gamma^f, c^f | \Gamma^i, c^i \rangle = \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

où la somme ne porte que sur les arêtes internes à Δ , les représentations des arêtes du bord étant maintenues fixées aux valeurs provenant des colorations c_i et c_f

8

LA FIXATION DE JAUGE DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

Le but de ce chapitre est de présenter la fixation de jauge du modèle de Ponzano-Regge, qui permet d'obtenir des amplitudes de transition finie. Le contenu de ce chapitre provient des articles [35] et [36].

L'amplitude définie par Ponzano et Regge est infinie pour la plupart des triangulations, et ne peut pas à ce stade servir de définition convenable d'amplitudes de transition dans le but de calculer le produit scalaire physique entre deux états de réseau de spin. Une manière de considérer une amplitude finie est de passer au groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$ et d'utiliser l'invariant de Turaev-Viro

$$TV(\Delta) = \sum_{\{j_e\}} \prod_v \frac{1}{\mathcal{V}_q} \prod_e [2j_e + 1]_q \prod_t \begin{bmatrix} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{bmatrix}_q. \quad (8.1)$$

Cependant la régularisation que fournit le modèle de Turaev-Viro n'est pas totalement satisfaisante. D'une part il s'agit d'un modèle avec constante cosmologique. On ne régularise donc pas vraiment le Ponzano-Regge mais on le remplace par un modèle physiquement différent. D'autre part l'idée de passer au groupe quantique n'est pas une recette universelle de régularisation. A terme on désire considérer aussi des modèles lorentziens, éventuellement avec une constante cosmologique, et ces modèles peuvent diverger pour des raisons que le passage au groupe quantique ne résoudra pas. Il est donc nécessaire d'avoir une compréhension plus profonde des infinis qui surgissent dans ces modèles de manière générale.

Pour régulariser l'amplitude infinie

$$Z(\Delta) = \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

Ponzano et Regge proposèrent la régularisation suivante

$$Z^{reg}(\Delta) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{\{j_e \leq R\}} \prod_v \frac{1}{\mathcal{V}(R)} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

où on définit

$$\mathcal{V}(R) = \sum_{j=0}^R (2j + 1)^2. \quad (8.4)$$

Cette définition restaure l'invariance formelle par changement de triangulation. Elle ressemble par ailleurs à un analogue $q \rightarrow 1$ de la définition de l'invariant de Turaev-Viro ¹.

Le but de ce chapitre est de montrer qu'on peut obtenir une version finie du modèle de Ponzano-Regge, sans procédure de limite, et dictée par une requête naturelle : la fixation de jauge. L'idée de base de cette démarche est que les divergences du modèle de Ponzano-Regge résultent d'un fait récurrent en théorie quantique : l'existence d'un volume infini de symétries de jauge encore présentes, c'est à dire non fixées. Avant de présenter la nécessité physique, un court argument permet de comprendre la nécessité mathématique d'une fixation de jauge. Au cours de la construction du modèle de Ponzano-Regge, nous avons obtenu l'expression suivante (7.7)

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \prod_e \delta(U_e). \quad (8.5)$$

Cette expression fait intervenir un nombre d'intégrales égal au nombre F de faces de Δ . Le nombre de fonction δ est quant à lui égal au nombre d'arêtes. On intègre donc ici E fonctions δ sur une variété de dimension F . Ces deux nombres étant différents en général, on s'attend à l'apparition d'infinis lors de l'intégration. Nous y reviendrons par la suite et on verra que la fixation de jauge corrige précisément ce problème.

8.1 LES SYMÉTRIES DISCRÈTES DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

Afin de pouvoir réaliser la fixation de jauge du modèle de Ponzano-Regge, nous devons tout d'abord identifier les symétries de jauge qu'il possède. Pour cela, nous allons revenir sur les symétries de la théorie continue, et en déduire comment ces symétries sont traduites au niveau discret du modèle de Ponzano-Regge.

8.1.1 Retour sur les symétries de la gravité classique

L'action BF SU(2)

$$S[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F(\omega)) \quad (8.6)$$

possède deux symétries de jauge. D'une part la symétrie de Lorentz locale, paramétrisée par un élément de groupe $k(x)$ en tout point de \mathcal{M} , donnée par

$$e \rightarrow {}^k e = k^{-1} e k, \quad (8.7)$$

$$\omega \rightarrow {}^k \omega = k^{-1} d k + k^{-1} \omega k. \quad (8.8)$$

D'autre part la symétrie translationnelle, paramétrisée localement par un élément d'algèbre de Lie ϕ

$$e \rightarrow e + d_\omega \phi \quad (8.9)$$

$$\omega \rightarrow \omega \quad (8.10)$$

¹Cette définition n'est pas vraiment une limite $q \rightarrow 1$ du modèle de Turaev-Viro. Dans le modèle de Turaev-Viro les spins j proches du cut-off k contribuent peu. Par exemple la dimension quantique $[2j+1]_q$ est faible pour j proche de k . En revanche dans le modèle de Ponzano-Regge régularisé par un cut-off R , les spins j proches de R sont ceux qui contribuent le plus.

L'action est alors invariante

$$\delta_\phi S = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(d_\omega \phi \wedge F) = \int_{\partial \mathcal{M}} \text{tr}(\phi \wedge F) - \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(\phi \wedge d_\omega F) = 0 \quad (8.11)$$

grâce à deux choses : d'une part l'identité de Bianchi $d_\omega F = 0$, d'autre part à condition de choisir un paramètre ϕ nul au bord. On a donc les formes infinitésimales de ces actions

$$\delta_\Lambda^L \omega = d_\omega \Lambda \quad (8.12)$$

$$\delta_\Lambda^L e = [e, \Lambda] \quad (8.13)$$

$$\delta_\phi^T \omega = 0 \quad (8.14)$$

$$\delta_\phi^T e = d_\omega \phi \quad (8.15)$$

L'action (8.6) est également invariante par difféomorphisme. Pour un champ de vecteur ξ^μ , l'action d'un difféomorphisme infinitésimal sur les 1-formes ω et e est donné par

$$\delta_\xi^D e = d(\iota_\xi e) + \iota_\xi(de) \quad (8.16)$$

$$\delta_\xi^D \omega = d(\iota_\xi \omega) + \iota_\xi(d\omega) \quad (8.17)$$

où ι_ξ désigne le produit interne avec le champ de vecteur ξ . On peut explicitement voir que cette symétrie est une combinaison des symétries infinitésimales de Lorentz et translationelle. En effet pour un champ de vecteur ξ , on définit les éléments d'algèbre de Lie $\iota_\xi \omega$ et $\iota_\xi e$, on a alors la combinaison des symétries infinitésimales

$$\delta_\xi^D \omega = \delta_{(\iota_\xi \omega)}^L \omega + \delta_{(\iota_\xi e)}^T \omega + \iota_\xi(F(\omega)), \quad (8.18)$$

$$\delta_\xi^D e = \delta_{(\iota_\xi e)}^L e + \delta_{(\iota_\xi \omega)}^T e + \iota_\xi(d_\omega e). \quad (8.19)$$

On constate donc explicitement que si les équations du mouvement $F(\omega) = 0$ et $d_\omega e = 0$ sont satisfaites, les difféomorphismes infinitésimaux sont une combinaison

$$\delta_\xi^D = \delta_{(\iota_\xi \omega)}^L + \delta_{(\iota_\xi e)}^T, \quad (8.20)$$

des symétries infinitésimales de Lorentz et translationelle.

8.1.2 Symétrie de Lorentz locale dans le modèle de Ponzano-Regge

On cherche maintenant les analogues discrets des symétries de Lorentz et translationelles. L'action de la symétrie de Lorentz sur les holonomies de la connexion est

$$k \triangleright h_\gamma(\omega) = h_\gamma(k\omega) = k(s_\gamma)^{-1} h_\gamma(\omega) k(t_\gamma) \quad (8.21)$$

où s_γ, t_γ sont les extrémités de la courbe γ . L'action de la symétrie de Lorentz discrète est donc identifiée de la manière suivante : elle est paramétrisée par des éléments de groupe k_{v^*} localisés aux vertex duaux de la triangulation, et agissant par

$$g_{e^*} \rightarrow k_{s_{e^*}}^{-1} g_{e^*} k_{t_{e^*}} \quad (8.22)$$

$$U_e \rightarrow k_{st_e^*}^{-1} U_e k_{st_e^*} \quad (8.23)$$

$$X_e \rightarrow k_{st_e^*}^{-1} X_e k_{st_e^*} \quad (8.24)$$

où s_{e^*}, t_{e^*} désignent les extrémités de e^* et st_e^* désigne le vertex dual de $f^* \sim e$ servant de point de départ pour le calcul de la courbure U_e . On voit que cette transformation

$$S \rightarrow {}^k S = \sum_e \text{tr} \left(k_{st_e^*}^{-1} X_e k_{st_e^*} k_{st_e^*}^{-1} U_e k_{st_e^*} \right) = \sum_e \text{tr}(X_e U_e) \quad (8.25)$$

laisse l'action invariante.

8.1.3 L'identité de Bianchi discrète

L'action discrète de la symétrie translationnelle est plus difficile à identifier. Au niveau classique, elle résulte de l'existence de l'identité de Bianchi $d_\omega F$. Une étape préliminaire est donc d'identifier la forme discrète de l'identité de Bianchi. Cette identification proposée originellement dans [88] a été détaillée dans [35].

L'identité de Bianchi est une identité sur une 3-forme, on s'attend donc à ce que sa forme discrète représente son intégration naturelle sur un 3-volume \mathcal{B} , comme une relation concernant la courbure au bord \mathcal{S}

$$0 = \int_{\mathcal{B}} d_\omega F = \int_{\mathcal{S}} F. \quad (8.26)$$

Considérons une surface \mathcal{S}^* formée de faces duales de Δ^* , ayant la topologie d'une 2-sphère. Il existe [35] un choix d'orientations des faces duales, et de vertex de départ pour ces faces duales, et d'un ordre sur ces faces duales $f^* \sim e$ tel que le produit orienté des courbures associées U'_e soit égal à l'identité

$$\overrightarrow{\prod_{e \sim f^* \in \mathcal{S}^*}} U'_e = \mathbb{I}. \quad (8.27)$$

(La figure 8.1 montre tel exemple pour une triangulation simple de S^2 .) Le choix des vertex de départ et des orientations étant possiblement différent de ceux qui définissent les courbures U_e , il existe des k_e fonctions des g_{e^*} et des $\sigma_e = \pm 1$ tels que

$$U'_e = k_e^{-1} U_e^{\sigma_e} k_e \quad (8.28)$$

En termes des courbures U_e , l'identité de Bianchi s'écrit donc

$$\overrightarrow{\prod_{e \sim f^* \in \mathcal{S}^*}} k_e^{-1} U_e^{\sigma_e} k_e = \mathbb{I} \quad (8.29)$$

Cette relation qui lie nécessairement les courbures associées à des faces formant une surface fermée est l'analogie discret de l'identité de Bianchi. En particulier, pour un vertex v , on peut considérer l'ensemble des faces f^* duales aux arêtes e qui contiennent v . La surface ainsi obtenue entoure le vertex v et la relation (8.29) représente l'identité de Bianchi dans son voisinage.

8.1.4 La symétrie translationnelle

Considérons l'identité de Bianchi dans le voisinage d'un vertex v

$$\sum_{e \supset v} (k_{e,v})^{-1} U_e^{\sigma_{e,v}} k_{e,v} = \mathbb{I}. \quad (8.30)$$

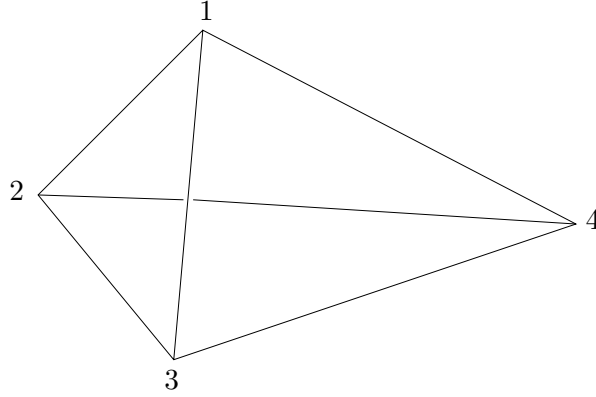


FIG. 8.1 – Exemple d'identité de Bianchi pour une triangulation de la sphère par 4 triangles. On définit les courbures , $U_1 = g_{23}g_{34}g_{42}$, $U_2 = g_{13}g_{34}g_{41}$, $U_3 = g_{12}g_{24}g_{41}$ et $U_4 = g_{12}g_{23}g_{31}$. On constate que le produit suivant d'éléments de groupe est égal à l'identité $(g_{12}g_{23}g_{31})(g_{13}g_{34}g_{41})(g_{14}g_{42}g_{21})(g_{12}g_{24}g_{43}g_{32}g_{21}) = \mathbb{I}$. Cette relation peut s'écrire $U'_4 U'_2 U'_3 U'_1 = \mathbb{I}$ en définissant les éléments suivants $U'_4 = U_4$, $U'_2 = U_2$, $U'_3 = U_3^{-1}$ et enfin $U'_1 = g_{12}U_1^{-1}g_{12}^{-1}$. Les relations entre les U' et les U sont bien via conjugaison et/ou inversion comme demandé en (8.28).

C'est une relation entre éléments de groupe dont on peut considérer la projection sur l'algèbre de Lie. On a alors [36] qu'il existe des scalaires $u_{e,v}$ et des éléments d'algèbre de Lie $\Omega_{e,v}$ tels que

$$\sum_{e \supset v} \sigma_{e,v} k_{e,v}^{-1} (u_{e,v} Z_e + [\Omega_{e,v}, Z_e]) k_{e,v} = 0. \quad (8.31)$$

Cette relation permet de proposer la transformation suivante pour la symétrie translationnelle : la symétrie translationnelle est paramétrisée par des éléments d'algèbre de Φ_v aux vertex de la triangulation, et agit sur les éléments X_e par

$$X_e \rightarrow X_e + \sigma_{e,v} (u_{e,v} k_{e,v}^{-1} \Phi_v k_{e,v} - [\Omega_{e,v}, k_{e,v}^{-1} \Phi_v k_{e,v}]) \quad (8.32)$$

pour chacun des 2 vertex de e . On peut vérifier que cette transformation est bien une symétrie de l'action. On a

$$\delta S = \sum_{e \supset v} \text{tr} [\sigma_{e,v} (u_{e,v} k_{e,v}^{-1} \Phi_v k_{e,v} - [\Omega_{e,v}, k_{e,v}^{-1} \Phi_v k_{e,v}]) Z_e]. \quad (8.33)$$

On utilise la cyclicité du commutateur dans la trace. On a alors

$$\delta S = \text{tr} \left[\Phi_v \sum_{e \supset v} \sigma_{e,v} k_{e,v}^{-1} (u_{e,v} Z_e + [\Omega_{e,v}, Z_e]) k_{e,v} \right] \quad (8.34)$$

qui est bien nul grâce à l'identité de Bianchi (8.31). Nous avons donc bien identifié l'analogue discret de la symétrie translationnelle.

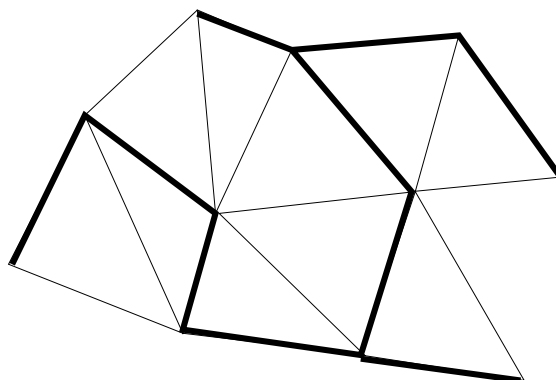


FIG. 8.2 – Exemple d’arbre maximal : un arbre maximal est un sous-graphe qui touche tous les vertexs sans former de boucle fermée.

8.1.5 Volume de jauge et divergences du modèle

L’action de la symétrie translationnelle est donnée par un élément de $\mathfrak{su}(2)$ à chaque vertex de la triangulation. L’action de la symétrie de Lorentz locale est paramétrisée par un élément de groupe $SU(2)$ à chaque vertex dual (tétraèdre) de la triangulation. A ce stade on peut donc remarquer que le volume de jauge total associé aux symétries de Lorentz et translationnelle pour une triangulation Δ est donné par

$$\text{Vol}(\mathfrak{su}(2))^V \times \text{Vol}(SU(2))^T \quad (8.35)$$

où V et T sont respectivement le nombre de vertexs et de tétraèdres de Δ . On constate deux choses : d’une part ce volume est infini, et explique donc l’existence de divergences dans le modèle de Ponzano-Regge. D’autre part dans un cas Lorentzien, le groupe $SU(2)$ sera à remplacer par le groupe $SO(2,1)$, et introduit une autre source de divergences, puisque le volume de jauge associé sera alors infini. Dans cet optique, nous devons donc chercher à fixer les deux symétries de jauge.

8.2 FIXATION DE JAUGE DU MODÈLE DE PONZANO-REGGE

8.2.1 Fixation de jauge sur un arbre maximal

Les deux symétries que nous avons identifiées agissent aux vertexs d’un graphe, sur des variables vivant sur les arêtes. La méthode générale pour fixer ce type de symétries est d’utiliser un arbre maximal. Un arbre maximal d’un graphe donné est un sous-graphe qui touche tous les vertexs sans former de boucle fermée (figure 8.2). Dans un tel sous-graphe, tout chemin d’un vertex à un autre est unique. On peut donner à ce graphe une structure d’arbre en choisissant pour racine un quelconque de ses vertexs. On fixe alors de jauge de la manière suivante : dans l’arbre, chaque vertex est utilisé pour fixer de jauge l’arête dont il est l’extrémité dans l’arbre. La racine n’est pas utilisée. Cette méthode permet de fixer toutes les symétries sauf une, dont il faut tenir compte par la suite.

Pour réaliser la fixation de jauge, on choisit donc un arbre maximal \mathcal{T} dans le 1-squelette de Δ , et un arbre maximal \mathcal{T}^* dans le 1-squelette Δ^* . On part de l'expression de la fonction de partition

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \left(\prod_e \int_{\text{su}(2)} dX_e \right) \exp \left[i \sum_e \text{tr}(X_e Z_e) \right]. \quad (8.36)$$

et on choisit pour commencer de fixer de jauge

$$g_{e^*} = \mathbb{I} \text{ sur } \mathcal{T}^*, \quad (8.37)$$

$$X_e = 0 \text{ sur } \mathcal{T}. \quad (8.38)$$

Une fois ce type de fixation de jauge effectuée, il faudra vérifier qu'elle ne dépend pas des conditions de jauge choisies, c'est à dire des arbres et des choix $g = \mathbb{I}$ et $X = 0$ des valeurs auxquelles ont fixe les variables vivant sur les arbres.

Symétrie de Lorentz

La fixation de la symétrie de Lorentz sur arbre maximale permet de fixer $T - 1$ symétries, où T est le nombre de tétraèdres de Δ . Cette fixation revient simplement à ne plus considérer les intégrations sur les variables de groupe g_{e^*} pour $e^* \in \mathcal{T}^*$. En termes de triangulation, cela revient à supprimer des faces de la triangulation.

La symétrie résiduelle au dernier vertex dual agit par action adjointe diagonale $g \rightarrow k^{-1}gk$ sur les variables de groupe restantes. On peut réaliser la fixation de jauge résiduelle [89] en utilisant une mesure fixée de jauge sur G^n/AdG . Cette mesure $d\mu$ est définie de la manière suivante. Si $f(g_1, \dots, g_n)$ est une fonction invariante par action adjointe, on a

$$\int_{G^n/AdG} d\mu(g_1, \dots, g_n) f(g_1, \dots, g_n) = \frac{1}{2} \int_{H \times (G/H) \times G^{n-2}} dh dx dg_3 \dots dg_n f(h, s(x), g_3, \dots, g_n), \quad (8.39)$$

où H est le sous-groupe de Cartan et dg la mesure de Haar sur le groupe. On a considéré une section s de $G/H \sim S^2$ dans $\text{SU}(2)$ et donnée par

$$\{\vec{x} \text{ tq } x^2 = 1\} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

La considération de cette section est en réalité superflue pour le cas euclidien mais nécessaire pour le cas lorentzien.

Translationelle

La fixation de la symétrie translationelle sur un arbre maximal permet de fixer $V - 1$ symétries. La fixation de X_e à 0 sur l'arbre revient à supprimer les intégrations correspondantes, et donc les fonctions $\delta(U_e)$ pour les arêtes associées. En termes de triangulation, cela revient à supprimer les arêtes correspondantes de la triangulation.

Considérons maintenant le cas de la symétrie translationelle résiduelle. Elle a pour origine l'identité de Bianchi autour du dernier vertex. Pour une triangulation à un seul vertex, l'identité de Bianchi discrete (8.29) contient à la fois les éléments U_e et U_e^{-1} pour toutes les arêtes. Cette identité de Bianchi résiduelle est triviale dans le cas abélien, ce qui traduit le fait qu'une

paramétrisation du groupe de jauge était possible avec seulement $V - 1$ éléments Φ_v . Dans le cas non-abélien, cette identité de Bianchi est a priori non-triviale et engendre une invariance résiduelle.

8.2.2 Valeur de l'amplitude fixée de jauge

Considérons maintenant la forme totale de l'amplitude après fixation de jauge. En particulier il faut tenir compte des déterminants de Fadeev-Popov. On montre [35] que le déterminant de Fadeev-Popov de la fixation de la symétrie de Lorentz est égal à 1. Le déterminant de Fadeev-Popov Δ_{FP} de la fixation de la symétrie translationnelle est une fonction des éléments de groupe g_{e^*}

$$PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \prod_{e^* \notin \mathcal{T}^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \prod_{e \notin \mathcal{T}} \delta(U_e) \times \Delta_{FP}. \quad (8.41)$$

On peut montrer [35] que le déterminant de Fadeev-Popov contribue comme 1 grâce aux fonctions δ sur les U_e pour $e \notin \mathcal{T}$. L'insertion de ce déterminant est donc sans effet et on a pour l'amplitude fixée de jauge

$$PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \prod_{e^* \notin \mathcal{T}^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \prod_{e \notin \mathcal{T}} \delta(U_e). \quad (8.42)$$

Ceci constitue l'expression finale fixée de jauge. La suppression de certaines arêtes et faces fait que cette expression ne peut pas en général se mettre sous une forme à la Ponzano-Regge. On peut toutefois noter que dans le cas euclidien, la fixation de la symétrie de Lorentz n'est pas indispensable puisque $\text{SU}(2)$ est compact. Dans ce cas seule la suppression des arêtes e de \mathcal{T} devient indispensable, et cette fixation peut s'incorporer dans une expression à la Ponzano-Regge en imposant $j_e = 0$ sur ces arêtes.

On peut alors revenir sur l'argument mathématique qui soulignaient la différence entre nombre d'intégrales et de fonctions δ . Après fixation de jauge, le nombre d'intégrales est $F - T + 1$ alors que le nombre de fonctions δ est de $E - V + 1$. Or pour une variété fermée, ces deux nombres sont égaux car la caractéristique d'Euler d'une variété fermée est nulle

$$\chi(\mathcal{M}) = -T + F - E + V = 0. \quad (8.43)$$

Dans l'expression de l'amplitude fixée de jauge, le nombre d'intégrales correspond au nombre de fonction δ . Ce n'est pas une preuve de finitude mais indique de meilleures chances de convergences que l'expression initiale.

Considérons maintenant le cas d'une variété possédant des bords. On sait que dans l'action continue, la symétrie de Lorentz agit aussi au bord alors que la symétrie translationnelle doit être de paramètre nul au bord. Ceci se transmet au cas des symétries discrètes du modèle de Ponzano-Regge. On peut également fixer de jauge dans ce cas avec les prescriptions suivantes :

- l'arbre \mathcal{T}^* doit toucher tous les vertex duaux, y compris ceux du bord (c'est à dire ceux qui - dans le bord - sont duaux aux faces du bord) ;
- l'arbre \mathcal{T} doit toucher tous les vertex de l'intérieur et un vertex du bord, (que l'on choisit comme racine, c'est à dire le vertex qui n'est pas utilisé lors de la fixation de jauge).

Je présenterai dans la suite des résultats explicites pour les propagateurs sur les variétés $\Sigma_g \times I$.

8.2.3 Fixation de jauge comme l'insertion d'un opérateur

Dans cette partie, on présente comment la fixation de jauge de l'amplitude de Ponzano-Regge peut s'écrire comme l'insertion d'un opérateur dans le modèle non-fixé de jauge. De manière générale, considérons une fonction de partition définie comme l'intégrale sur des variables ϕ d'une amplitude $\mathcal{A}(\phi)$

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi] \mathcal{A}(\phi). \quad (8.44)$$

Un opérateur \mathcal{O} est une fonctionnelle de ϕ et on évalue est définie comme son insertion dans la fonction de partition

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int [\mathcal{D}\phi] \mathcal{O}(\phi) \mathcal{A}(\phi). \quad (8.45)$$

Nous allons dans cette partie montrer que fixer de jauge le modèle se réécrit comme l'insertion d'un opérateur de fixation de jauge.

Après développement par la formule de Plancherel, le modèle non-fixé de jauge s'écrit

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \chi^{j_e}(U_e). \quad (8.46)$$

On observe alors que le modèle fixé de jauge $PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ peut alors s'écrire comme l'insertion dans $Z(\Delta)$ de l'opérateur

$$\mathcal{O}_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(g_{e^*}, j_e) = \prod_{e \in \mathcal{T}} \delta_{j_e, 0} \prod_{e^* \in \mathcal{T}^*} \delta(g_{e^*}). \quad (8.47)$$

On a

$$PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \left(\prod_{e^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \right) \sum_{\{j_e\}} \prod_e d_{j_e} \chi^{j_e}(U_e) \mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(g_{e^*}, j_e) \quad (8.48)$$

qu'on écrit sous la forme

$$PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \langle \mathcal{O}_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*} \rangle. \quad (8.49)$$

Cette écriture va nous permettre de répondre à la question de l'invariance du modèle sous différents choix de fixation de jauge.

8.2.4 Invariances des fixations de jauge

La première invariance à vérifier est celle sous les changements d'arbre, c'est à dire que

$$PR(\Delta, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1^*) = PR(\Delta, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2^*). \quad (8.50)$$

Ce résultat que nous avons montré dans [38] et qui sera présenté au chapitre 10 s'écrit comme le fait que les évaluations d'opérateurs associées sont identiques, on a

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1^*} \rangle = \langle \mathcal{O}_{\Delta, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2^*} \rangle \quad (8.51)$$

L'objet $PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ est donc indépendant du choix de \mathcal{T} et \mathcal{T}^* . En réalité comme expliqué au chapitre 10, il ne dépend pas non plus de la triangulation Δ utilisée pour trianguler une variété donnée \mathcal{M} . On peut donc le noter $PR(\mathcal{M})$.

L'autre invariance concerne le choix d'une fixation à d'autres valeurs que $g_{e^*} = \mathbb{I}$ et $X_e = 0$. En termes de l'expression

$$Z(\Delta) = \left(\prod_{e^*} \int_{H/W} d\theta_{e^*} \Delta^2(\theta_{e^*}) \right) \left(\prod_e \sum_{j_e} d_{j_e} \right) Z_{\Delta}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\}), \quad (8.52)$$

cette fixation de jauge correspond à fixer $j_e = 0$ et $\theta_{e^*} = 0$. Le modèle de Ponzano-Regge ne retenant de X_e que sa longueur j_e et de g_{e^*} que sa classe de conjugaison θ_{e^*} , il est intéressant de choisir comme autres valeurs de fixation de jauge d'autres choix de j_e et θ_{e^*} . On peut faire cela grâce à l'écriture comme évaluation d'opérateurs. Considérons un arbre \mathcal{T} et un choix de J_e sur ses arêtes, ainsi qu'un arbre \mathcal{T}^* et un choix de Θ_{e^*} . On définit l'opérateur

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, J_e, \Theta_{e^*}} = \prod_{e \in \mathcal{T}} \frac{\delta_{j_e, J_e}}{d_{J_e}} \prod_{e^* \in \mathcal{T}^*} \delta_{\Theta_{e^*}}(g_{e^*}), \quad (8.53)$$

où $\delta_{\Theta}(g)$ est définie en appendice A et impose g à être dans la classe de conjugaison Θ . On peut alors montrer le résultat suivant [38]

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, J_e, \Theta_{e^*}} \rangle = \left(\prod_e (2J_e + 1) \right) \times PR(\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*), \quad (8.54)$$

où $\prod_e d_{J_e}$ est un volume de jauge résiduel. Le résultat de la procédure de fixation de jauge ne dépend donc pas du choix des valeurs auxquelles ont choisit de fixer de jauge.

8.3 EXEMPLES EXPLICITES

Nous présentons ici quelques exemples explicites de calculs de propagateurs et de fonction de partition.

8.3.1 3-sphère

On considère pour variété la 3-sphère S^3 , que l'on triangule à l'aide de deux tétraèdres (voir figure 8.3). La fonction de partition non-fixée de jauge associée à ce modèle est

$$Z(\mathcal{S}^3) = \int_{\text{SU}(2)^4} dg_1 dg_2 dg_3 dg_4 \delta(g_1 g_2^{-1}) \delta(g_1 g_3^{-1}) \delta(g_1 g_4^{-1}) \delta(g_2 g_3^{-1}) \delta(g_2 g_4^{-1}) \delta(g_3 g_4^{-1}). \quad (8.55)$$

La résolution des fonctions δ pour g_1, g_2, g_3 montre que cette fonction de partition non-fixée de jauge est divergente

$$Z(\mathcal{S}^3) = \left(\int dg_4 \right) \delta(\mathbb{I}) \delta(\mathbb{I}) \delta(\mathbb{I}). \quad (8.56)$$

On peut alors fixer de jauge en utilisant des arbres maximaux comme indiqué sur la figure 8.4. La prescription pour fixer de jauge une telle amplitude conduit à éliminer une variable d'intégration et 3 fonctions δ . On a alors

$$PR(\mathcal{S}^3) = \int_{G^3} dg_1 dg_2 dg_3 \delta(g_1 g_2^{-1}) \delta(g_1 g_3^{-1}) \delta(g_1) = 1, \quad (8.57)$$

qui est fini. Cet exemple constitue une première illustration simple du fait que la procédure de fixation de jauge permet d'éliminer des infinis du modèle de Ponzano-Regge.

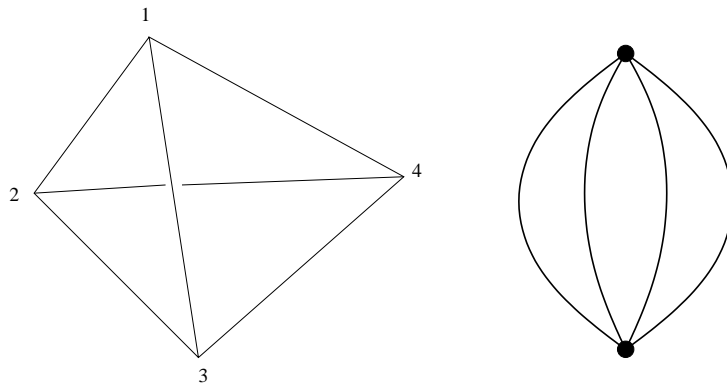
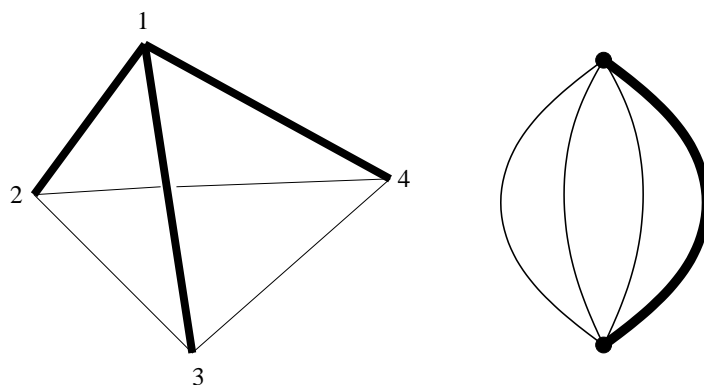


FIG. 8.3 – Triangulation de la 3-sphère par deux tétraèdres, et son dual.

FIG. 8.4 – Fixation de jauge selon un arbre et un arbre maximal dual pour S^3 .

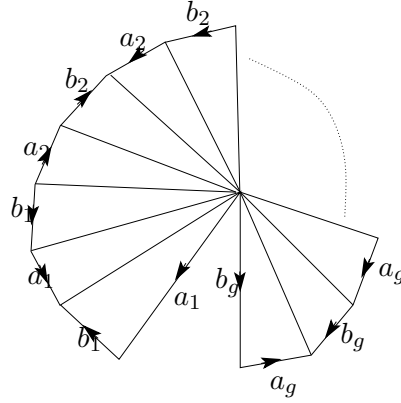


FIG. 8.5 – Triangulation de Σ_g par $4g - 2$ triangles. Les arêtes portant le même nom sont identifiées, selon la direction indiquée.

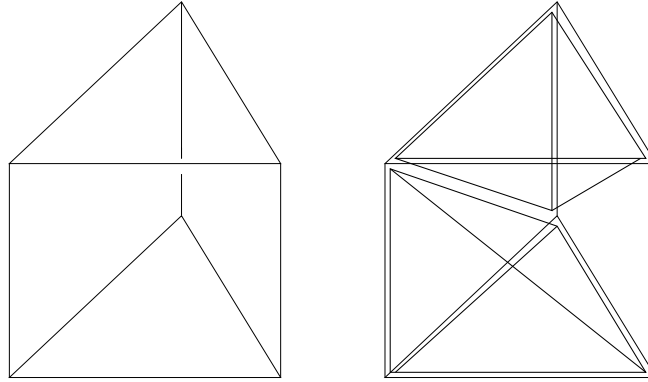


FIG. 8.6 – Triangulation d'un prisme en 3 tétraèdres.

8.3.2 Variété $\Sigma_g \times I$

On peut maintenant considérer le cas d'une variété à bord $\Sigma_g \times I$, où Σ_g est une surface de genre g . On peut trianguler une surface de genre g à l'aide de $4g - 2$ triangles (voir figure 8.5.) Cela induit un découpage de $\Sigma_g \times I$ à l'aide de $4g - 2$ prismes. Un prisme se décompose en 3 tétraèdres (figure 8.6) et on obtient une triangulation de $\Sigma_g \times I$ avec $12g - 6$ tétraèdres.

Si on conduit de manière systématique la fixation de jauge pour cette triangulation², on aboutit au résultat suivant pour le propagateur [36] : il dépend de $2g$ éléments de groupes fixés sur chaque bord, et est égal à

$$G(a_i, b_i; a'_i, b'_i) = \int_G dk \delta \left(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \right) \prod_i \delta(a'_i k a_i^{-1} k^{-1}) \delta(b'_i k b_i^{-1} k^{-1}). \quad (8.58)$$

On peut utiliser ce propagateur pour calculer des amplitudes de transition. D'une manière générale, si on considère une triangulation du bord $\bar{\Delta}$, on peut bâtir sur elle des réseaux de

²Tous les vertex de cette triangulation étant au bord, on n'a d'ailleurs pas de symétrie translationnelle à fixer, seulement la symétrie de Lorentz.

spin que l'on peut ensuite fixer de jauge [89]. Le réseau de spin fixé de jauge dépend alors de $\bar{E} - \bar{F} + 1 = 2g - 1 + \bar{V}$ éléments de groupe. Ici on a utilisé des triangulations du bord à un vertex, le propagateur que nous obtenons s'intègre donc naturellement contre un réseau de spin fixé de jauge admettant $2g$ arguments. Si l'on considère deux réseaux de spin fixés de jauge $\Psi_1(a_i; b_i)$ et $\Psi_2(a'_i; b'_i)$ on a donc le produit scalaire

$$\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = \int_G dk \Psi_2^*(a'_i, b'_i) \delta \left(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \right) \prod_i \delta(a'_i k a_i^{-1} k^{-1}) \delta(b'_i k b_i^{-1} k^{-1}) \Psi_1(a_i, b_i). \quad (8.59)$$

Il s'agit bien ici du produit scalaire physique entre réseaux de spin de la gravité quantique à boucles en 2+1 dimensions. Le modèle de Ponzano-Regge fournit donc bien l'application de 'rigging map' (voir chapitre 2) qui permet à la fois d'obtenir des solutions physiques et de calculer leur produit scalaire.

Par exemple l'amplitude de transition vide-vide entre deux réseaux de spin nuls s'écrit

$$\langle 0|0 \rangle_{\Sigma_g} = \int_{G^{4g+1}} \prod_i (da_i da'_i db_i db'_i) dk \delta \left(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \right) \prod_i \delta(a'_i k a_i^{-1} k^{-1}) \delta(b'_i k b_i^{-1} k^{-1}) \quad (8.60)$$

En appliquant les formules d'orthogonalité et de convolution de caractères et en n'oubliant pas d'utiliser la mesure (8.39), on peut écrire cette amplitude sous la forme

$$\langle 0|0 \rangle_{\Sigma_g} = \sum_j \frac{1}{d_j^{2g-2}}. \quad (8.61)$$

On constate que cette amplitude converge pour $g > 1$. Ceci montre que la procédure de fixation de jauge permet a priori d'avoir un résultat fini, mais qu'il existe encore des cas intrinsèquement divergents et que la finitude ne peut être conclue de manière systématique. Par exemple la trace du propagateur (8.58) est infinie car elle correspond à la dimension (infinie) de l'espace de Hilbert.

8.4 DE LA FIXATION DE JAUGE À L'INSERTION DES PARTICULES

La conduite de la procédure de fixation de jauge à conduit à l'insertion d'opérateurs \mathcal{O} dont le rôle est de fixer les longueurs et les classes de conjugaisons. Dans cette partie nous expliquons en quoi ces opérateurs de fixation de jauge sont reliés par transformée de Fourier à d'autres opérateurs, dont le rôle est d'introduire de la courbure dans le modèle. Ceci constituant un premier pas vers l'insertion de particules dans le modèle de Ponzano-Regge.

8.4.1 Formules de dualité

Considérons un graphe Υ de Δ , dont les arêtes portent des angles φ_e . On définit l'opérateur suivant

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\Upsilon, \varphi_e} = \prod_{e \in \Upsilon} \delta_{j_e, 0} \delta_{\varphi_e}(U_e). \quad (8.62)$$

Comme pour l'opérateur \mathcal{O} défini en (10.11), on peut considérer l'insertion de cet opérateur dans $Z(\Delta)$, ce qui définit son évaluation $\langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Upsilon, \varphi_e} \rangle$.

Les opérateurs \mathcal{O} et $\tilde{\mathcal{O}}$ sont alors reliés par les formules de dualité suivantes

$$\langle \mathcal{O}_{\Gamma, J_e} \rangle = \int \prod_{e \in \Gamma} d\varphi_e \sin[(2J_e + 1)\varphi_e] \Delta(\varphi_e) \langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma, \varphi_e} \rangle \quad (8.63)$$

$$\Delta(\varphi_e) \langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma, \varphi_e} \rangle = \frac{2}{\pi} \sum_{\{J_e\}} \prod_{e \in \Gamma} \sin[(2J_e + 1)\varphi_e] \langle \mathcal{O}_{\Gamma, J_e} \rangle \quad (8.64)$$

Ces formules expriment que ces opérateurs sont reliés l'un à l'autre par des formules de transformée de Fourier.

On peut donner une application simple de ces formules de dualité dans le cas de la sphère \mathcal{S}^3 triangulée par deux tétraèdres. Si on considère l'opérateur \mathcal{O} qui fixe totalement les 6 longueurs à des valeurs j_{12}, \dots, j_{34} , son dual est alors l'opérateur $\tilde{\mathcal{O}}$ qui fixe les classes de conjugaison autour des 6 arêtes à des valeurs $\theta_{12}, \dots, \theta_{34}$. La formule de dualité entre l'évaluation de ces deux opérateurs s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{23} & j_{24} & j_{34} \end{array} \right\}^2 = \frac{2}{\pi^4} \int \frac{\prod_{I < J} \sin[(2j_{IJ} + 1)\varphi_{IJ}] d\varphi_{IJ}}{\sqrt{\det[\cos \varphi_{IJ}]}}. \quad (8.65)$$

Cette formule est précisément celle qui se trouve à la base de notre analyse asymptotique du symbole $6j$, voir 11. Une formule analogue avait été obtenue par Barrett[90] dans le cas du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$. Notre résultat montre que ce type de formules n'est qu'un cas particulier d'un cas plus général, qui existe également dans le cas 'classique' $q = 1$. Nous avons étudié ces formules plus en détail dans [39], dont certains résultats sont résumés au chapitre 11.

8.4.2 Interprétation

Par l'intermédiaire des formules de dualité, nous sommes donc passés de l'opérateur \mathcal{O} qui fixait de jauge les j_e , à l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma, \varphi_e} = \prod_{e \in \Gamma} \delta_{j_e, 0} \delta_{\varphi_e}(U_e). \quad (8.66)$$

Examinons de plus prêt l'effet de l'insertion de cet opérateur dans la fonction de partition. La fonction de partition contient à l'origine une condition de courbure plate pour l'arête e

$$\delta(U_e) = \sum_{j_e} d_{j_e} \chi^{j_e}(U_e). \quad (8.67)$$

L'insertion du terme $\delta_{j_e, 0}$ retire cette condition de courbure plate, tandis que le terme $\delta_{\varphi_e}(U_e)$ la remplace par la condition que U_e doit se trouver dans la classe de conjugaison φ_e . L'effet de cet opérateur est donc *d'introduire de la courbure* localement, au niveau de l'arête e . Cet effet est celui qu'on attend classiquement de la présence d'une ligne d'univers d'une particule ponctuelle. Cet opérateur constitue donc un point de départ vers la compréhension de l'insertion de particules dans le modèle de Ponzano-Regge.

9

INSERTION DE PARTICULES PONCTUELLES

Ce chapitre décrit comment il est possible d'insérer des particules ponctuelles dans le modèle de Ponzano-Regge. Nous obtenons ainsi un modèle de gravité quantique couplé à de la matière (quantique elle aussi). Une propriété particulièrement intéressante de ce formalisme est qu'il peut décrire des cas où le nombre de particules n'est pas constant. Ceci ouvre a priori la voie à une seconde quantification des particules couplées à la gravité quantique. Ce modèle a été présenté et étudié dans l'article [36].

9.1 INSERTION DE PARTICULES MASSIVES

Au chapitre précédent, nous avons vu que des relations de dualité portant sur les opérateurs de fixation de jauge conduisaient à une classe nouvelle d'opérateurs. L'opérateur $\tilde{\mathcal{O}}$ (8.66) qui insère de la courbure sur les arêtes d'un graphe constitue un premier indice sur le formalisme qui permet d'insérer des particules massives dans le modèle de Ponzano-Regge. Nous allons ici donner des arguments plus précis en faveur de ce formalisme dans un cas simple, à savoir l'insertion de particules sans spin, dans une variété fermée.

9.1.1 Insertion d'une particule en gravité classique

La présence d'une ligne d'univers de particule ponctuelle en gravité classique 2+1 se traduit par la présence d'une ligne de singularité conique. Plus précisément une particule de masse M et de spin $S = s\hbar$ située à l'origine engendre[91] la métrique de cône 'spinnant'

$$ds^2 = (dt + 4SGd\varphi)^2 + dr^2 + (1 - 4GM)^2 r^2 d\varphi^2. \quad (9.1)$$

Cet espace est localement plat, φ désigne une coordonnée angulaire avec l'identification $\varphi \leftrightarrow \varphi + 2\pi$. Si on redéfinit $\phi = (1 - 4GM)\varphi$, et $\tau = t + 4SG\varphi$ on peut réécrire cette métrique comme une métrique plate,

$$ds^2 = d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (9.2)$$

avec l'identification de la coordonnée angulaire $\phi \leftrightarrow \phi + (1 - 4GM)2\pi$ et l'identification de la coordonnée temporelle $\tau \leftrightarrow \tau + 8\pi s l_P$. Cet espace peut donc se représenter comme un secteur angulaire de l'espace de Minkowski, possédant un angle de déficit $m = 8\pi GM$, avec un décalage temporel de longueur $8\pi GS = 8\pi s l_P$, voir figure 9.1.

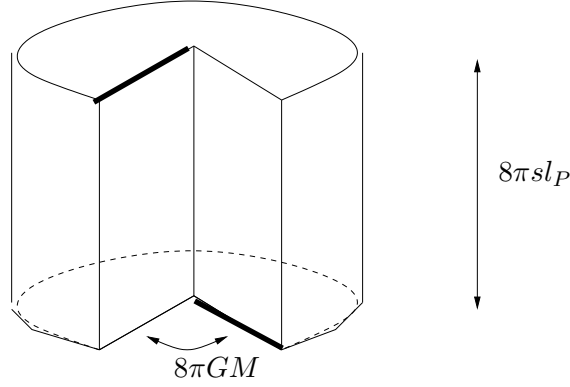


FIG. 9.1 – La métrique de cône ‘spinnant’ s’obtient comme une portion d’espace de Minkowski avec un angle de déficit $8\pi GM$ et une identification avec un décalage vertical $8\pi sl_P$. Les deux segments épais de cette figure sont par exemple identifiés.

La masse d’une particule en gravité 3D classique est donc bornée par l’angle de déficit maximal 2π , on a donc $M < 1/4G$. Un champ de tétrades pour cette géométrie (9.1) est donné par

$$e = \mathcal{J}_0 dt + \mathcal{J}(\varphi) dr + [(1 - 4GM)r\mathcal{J}'(\varphi) + 4GS\mathcal{J}_0] d\varphi, \quad (9.3)$$

où on définit $\mathcal{J}(\varphi) = \cos \varphi \mathcal{J}_1 + \sin \varphi \mathcal{J}_2$, les générateurs d’algèbre de Lie \mathcal{J}_i sont définis en appendice A et satisfont l’algèbre

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \epsilon_{ijk} \eta^{kl} \mathcal{J}_l. \quad (9.4)$$

Une connexion pour cette géométrie est donnée par

$$\omega = 2GM \mathcal{J}_0 d\varphi. \quad (9.5)$$

On peut alors calculer la torsion et la courbure associée à cette géométrie. On fait usage de l’identité $dd\varphi = 2\pi\delta(x)dx\delta(y)dy$, on a alors

$$T(x^\mu) = d_\omega e = 8\pi GS \mathcal{J}_0 \delta(x) dx \delta(y) dy, \quad (9.6)$$

$$F_\omega(x^\mu) = d_\omega \omega = 4\pi GM \mathcal{J}_0 \delta(x) dx \delta(y) dy. \quad (9.7)$$

Une particule de masse M et de spin S située en $(x = 0, y = 0)$ se manifeste donc au niveau du champ de gravité par une ligne de courbure et de torsion distributionnelle.

On peut facilement modifier l’action de la gravité pour obtenir une telle insertion de courbure et de torsion : il suffit d’ajouter un terme source. Une telle action est donnée par

$$S_0[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}[e \wedge F(\omega)] - \frac{1}{2} \int_{\text{worldline}} dt \text{tr}(M e_t + 2S \omega_t). \quad (9.8)$$

Cette action permet d’incorporer une particule dans la gravité classique 3D. Cependant à ce stade, la particule ne possède pas de dynamique propre. Il s’agit ici de la description d’une particule gelée, et aucune variable de cette action ne correspond à des degrés de liberté de la particule. Il ne s’agit donc pas encore de l’action que nous cherchons pour décrire dynamiquement l’ensemble gravité+particule.

Pour 'trouver' les degrés de liberté de la particule, on peut faire la remarque suivante : en l'absence de matière, la contrainte de courbure nulle et de torsion nulle engendrent respectivement les symétries de jauge translationnelle et de Lorentz. Une particule provoque l'introduction de courbure et de torsion distributionnelle sur sa ligne d'univers, on s'attend donc à ce que la symétrie de jauge y soit brisée. C'est en effet ce qu'on constate explicitement : si on effectue une transformation de Lorentz paramétrée par g^{-1} et une transformation translationnelle paramétrée par $-\phi$, la courbure et la torsion distributionnelle (9.6,9.7) deviennent

$$T = d_\omega e = 4\pi G_j \delta(x) dx \delta(y) dy, \quad (9.9)$$

$$F_\omega = d_\omega \omega = 4\pi G_p \delta(x) dx \delta(y) dy. \quad (9.10)$$

où j et p sont les éléments d'algèbre de Lie

$$p = Mg\mathcal{J}_0g^{-1}, \quad (9.11)$$

$$j = 2Sg\mathcal{J}_0g^{-1} - m[g\mathcal{J}_0g^{-1}, \phi]. \quad (9.12)$$

Ceci illustre le fait suivant : *l'introduction d'une particule brise localement la symétrie de jauge. Les anciens degrés de jauge de la gravité deviennent les degrés de liberté physiques de la particule.* Partant de cette constatation, on peut déduire de l'action S_0 (9.8) une action pour la gravité couplée à une particule possédant des degrés de liberté : il suffit de lui appliquer les transformations de Lorentz et translationnelles. On note $(g, \phi) \triangleright$ l'action des transformations sur les variables, on définit alors l'action

$$S[e, \omega, g, \phi] = S_0[(g, \phi) \triangleright e, (g, \phi) \triangleright \omega]. \quad (9.13)$$

où g, ϕ décrivent maintenant les degrés de liberté de la particule. On peut montrer que cette action se met sous la forme

$$S[e, \omega, g, \phi] = S_{gravite}[e, \omega] + S_{couplage}[e, \omega, g, \phi] + S_{particule}[g, \phi] \quad (9.14)$$

où on a les actions

$$S_{gravite}[e, \omega] = \int \text{tr}(e \wedge F), \quad (9.15)$$

$$S_{couplage}[e, \omega, g, \phi] = -\frac{1}{2} \int dt \text{tr}[e_t p + \omega_t j], \quad (9.16)$$

$$S_{particule}[g, \phi] = -\frac{1}{2}M \int dt \text{tr}(g^{-1} \dot{\phi} g \mathcal{J}_0) - S \int dt \text{tr}(g^{-1} \dot{g} \mathcal{J}_0). \quad (9.17)$$

Le point intéressant de ce résultat est qu'en l'absence de gravité, il ne reste que l'action $S_{particule}[g, \phi]$ qui se trouve être précisément l'action introduite par P. de Sousa-Gerbet[92] pour décrire la particule libre relativiste.

Nous avons donc découvert une action décrivant les degrés de liberté de la gravité, les degrés de liberté de la particule, et le couplage entre les deux. Nous allons donc baser notre construction sur cette action. Cette action a permis de décrire les degrés de liberté de la matière en les transformant en degrés de liberté de la gravité. La quantification de ce système va donc bien produire un modèle de gravité quantique, couplé à de la matière *quantique*. Il ne s'agit pas en somme d'une description semi-classique où la matière serait classique et la gravité quantifiée.

9.1.2 Insertion de masse dans une variété fermée

Considérons tout d'abord le cas simple d'une variété fermée. On cherche à décrire l'insertion de particules massives. Pour encoder les caractéristiques de ces particules, nous allons utiliser la notion de *graphe de particules décoré* \mathfrak{T}_D . Le graphe \mathfrak{T} est un sous-graphe de la triangulation Δ , décrivant la localisation des particules. La décoration D est la donnée d'une masse M_e sur chaque arête e de \mathfrak{T} . Nous décrirons ces masses par la présence de leur angle de déficit associé $m_e = 8\pi GM_e$. Considérons pour commencer l'action décrivant une particule massive 'gelée'

$$\int_{\mathcal{M}} \text{tr}(e \wedge F) - \frac{1}{2} \int dt \text{tr}(m e_t \mathcal{J}_0). \quad (9.18)$$

La discrétisation de cette action dans l'esprit de la construction faite au chapitre 7 conduit à considérer l'action discrète

$$S = \sum_{e \notin \mathfrak{T}} \text{tr}(X_e U_e) + \sum_{e \in \mathfrak{T}} \text{tr}(X_e U_e h_{m_e}). \quad (9.19)$$

Comme dans le cas continu, cette action ne décrit qu'une particule gelée, sans degrés de liberté propres. On restaure les degrés de liberté de la particule en appliquant une transformation de Lorentz $U_e \rightarrow u_e^{-1} U_e u_e$ sur les arêtes portant des particules. La fonction de partition obtenue après intégration sur les variables X_e est donc la suivante

$$Z(\Delta, \mathfrak{T}_D) = \left(\prod_{e^*} \int dg_{e^*} \right) \prod_{e \notin \mathfrak{T}} \delta(U_e) \prod_{e \in \mathfrak{T}} \int du_e \delta(U_e u_e h_{m_e} u_e^{-1}), \quad (9.20)$$

qu'on peut récrire

$$Z(\Delta, \mathfrak{T}_D) = \left(\prod_{e^*} \int dg_{e^*} \right) \prod_{e \notin \mathfrak{T}} \delta(U_e) \prod_{e \in \mathfrak{T}} \delta_{m_e}(U_e), \quad (9.21)$$

avec la définition

$$\delta_m(U) = \int du \delta(U u h_m u^{-1}). \quad (9.22)$$

Cette formule exprime donc la fonction de partition de la gravité en présence de particules insérées sur le graphe \mathfrak{T} , avec les masses m_e qui définissent la décoration D . Cette expression peut s'interpréter facilement en regard de son analogue classique. La version classique de la condition de masse est $\delta(p^2 + m^2)$ où p désigne l'impulsion de la particule. On voit ici clairement que U_e encode l'impulsion de la particule. Sa classe de conjugaison est imposée à être celle de h_m , et u est l'analogue de la 3-impulsion \vec{p} une fois que $\delta(p^2 + m^2)$ est appliqué. On peut comprendre le sens de l'insertion de (9.22) en termes de calculs de courbure. On peut imaginer u_e comme étant une holonomie localisée au niveau de st_e^* , et qui transporte dans le référentiel propre de la particule, dans lequel l'holonomie autour de la particule est h_{m_e} . On calcule alors l'holonomie totale $U_e u_e h_{m_e} u_e^{-1}$ qui correspond à tourner autour de l'arête, puis à se transporter dans le référentiel de la particule (voir figure 9.2).

On peut maintenant chercher à écrire ce résultat à la Ponzano-Regge. L'utilisation de la formule de Plancherel permet cette écriture. Pour la fonction δ_{m_e} , la formule de Plancherel s'écrit

$$\delta_{m_e}(g) = \sum_j \chi^j(h_{m_e}) \chi^j(g). \quad (9.23)$$

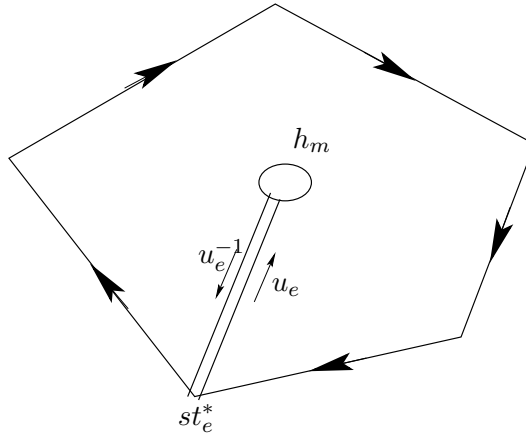


FIG. 9.2 – L'élément de groupe u_e permet de se transporter dans le référentiel de la particule. On calcule l'holonomie totale autour de la face U_e puis autour de la particule en se transportant dans son référentiel propre $u_e h_{m_e} u_e^{-1}$

(si $m_e = 0$, cette formule se réduit bien à la formule de Plancherel pour la fonction δ). On obtient alors l'expression

$$Z(\Delta, \mathfrak{T}_D) = \left(\prod_{e^*} \int dg_{e^*} \right) \sum_{\{j_e\}} \left(\prod_{e \notin \mathfrak{T}} d_{j_e} \prod_{e \in \mathfrak{T}} \chi^{j_e}(h_{m_e}) \right) \prod_e \chi^{j_e}(U_e). \quad (9.24)$$

Sous cette forme, on constate clairement que l'introduction de particules de masses M_e sur les arêtes d'un graphe \mathfrak{T} s'obtient effectivement par l'insertion de l'opérateur \tilde{O}

$$\tilde{O}_{\mathfrak{T}, m_e} = \prod_{e \in \mathfrak{T}} \delta_{j_e, 0} \delta_{m_e}(U_e). \quad (9.25)$$

De plus, on peut maintenant réaliser l'intégration sur les variables de groupe et obtenir une expression de ce résultat, à la Ponzano-Regge. Le résultat est le suivant

$$Z(\Delta, \mathfrak{T}_D) = \sum_{\{j_e\}} \prod_{e \notin \mathfrak{T}} d_{j_e} \prod_{e \in \mathfrak{T}} \chi^{j_e}(h_{m_e}) \prod_t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

A partir d'une discrétisation simple de l'action décrivant l'insertion de particules en gravité classique, on a pu retrouver explicitement que l'insertion de masse au niveau quantique se fait par l'insertion de l'opérateur \tilde{O} , qui introduit de la courbure sur les arêtes d'un graphe. Le modèle ainsi obtenu peut se mettre sous une forme compacte à la Ponzano-Regge, où seule l'amplitude associée aux arêtes est modifiée par rapport à l'amplitude sans particules. Nous allons maintenant traiter le problème de manière plus détaillée, dans le cas d'une variété possédant des bords et pour des particules possédant également un spin.

9.2 INSERTION DE PARTICULES À SPIN DANS UNE VARIÉTÉ À BORDS

Dans le cas d'une variété à bord, il s'agit tout d'abord de modifier la cinématique de la théorie. En effet il s'agit de déterminer quels états de bord décrivent la gravité en présence de particules.

9.2.1 Cinématique en présence de particules

Pour comprendre comment insérer des particules dans le modèle de Ponzano-Regge, il convient d'abord de s'intéresser à la cinématique : qu'allons nous prendre pour décrire les états au bord de la gravité couplée à des particules. Pour trouver cette réponse, il est intéressant de se pencher sur l'analyse canonique de l'action de la particule $S_{particule}[g, \phi]$ [92]. L'analyse canonique de cette théorie peut être réécrite en termes des variables réduites d'impulsion p et du moment angulaire j de la particule définis en (9.11,9.12). Ils satisfont les crochets de Poisson

$$\{p_a, p_b\} = 0, \quad (9.27)$$

$$\{j_a, j_b\} = \epsilon_{ab}^c j_c, \quad (9.28)$$

$$\{j_a, p_b\} = \epsilon_{ab}^c p_c, \quad (9.29)$$

et les contraintes de première classe

$$-\frac{1}{2}\text{tr}p^2 = m^2, \quad (9.30)$$

$$-\frac{1}{2}\text{tr}(pj) = 2ms. \quad (9.31)$$

La contrainte de masse engendre la symétrie de jauge de reparamétrisation du temps, la contrainte de spin engendre une symétrie de jauge $U(1)$ qui agit comme $g \rightarrow gh$. La quantification de ce système de contraintes peut se faire de la manière suivante : on considère comme espace de Hilbert de départ les fonctions de $\mathcal{L}^2(G)$. Cet espace de Hilbert est engendré par la base des fonctions de Wigner $D_{nk}^I(g)$. On définit les opérateurs \hat{p} et \hat{j} qui représentent p et j sur $\mathcal{L}^2(G)$ par

$$\hat{p}^a D_{nk}^I(g) = m \text{tr}(g \mathcal{J}_0 g^{-1} \mathcal{J}^a) D_{nk}^I(g), \quad (9.32)$$

$$\hat{j}_a D_{nk}^I(g) = -D_{nk}^I(\mathcal{J}_a g). \quad (9.33)$$

On peut voir [36] qu'avec ces définitions, la contrainte de masse est automatiquement satisfaite, alors que la contrainte de spin s'écrit

$$\hat{p}^a \hat{j}_a D_{nk}^I = 2ms D_{nk}^I. \quad (9.34)$$

On peut explicitement vérifier que cette contrainte est satisfaite pour $k = -s$. On trouve alors que l'espace de Hilbert physique associé à cette théorie est l'espace

$$\mathcal{H}_{m,s} = \bigoplus_{I|I-s \in \mathbb{N}} V_I = \{D_{n-s}^I(g) | I - s \in \mathbb{N}, |n| \leq I\}. \quad (9.35)$$

Un état de particule est donc labellé par un couple (I, n) . Par ailleurs on sait qu'une particule supprime des degrés de jauge de gravité pour les rendre dynamiques. L'invariance de jauge étant encodée au niveau des entrelaceurs des réseaux de spin. Ces deux constatations motivent l'introduction de *réseaux de spin à arêtes ouvertes* pour décrire les états cinématiques de la gravité couplée à des particules. Considérons Γ un graphe trivalent possédant des arêtes internes \bar{e} , des vertex \bar{v} , ainsi que des arêtes ouvertes \bar{e}_w à une de leurs extrémités w . On supposera ici que chaque face d'un réseau de spin contient au plus une arête ouverte. On colore ce graphe Γ par des représentations $j_{\bar{e}}$ sur les arêtes internes, et des représentations I_w sur les arêtes ouvertes. On

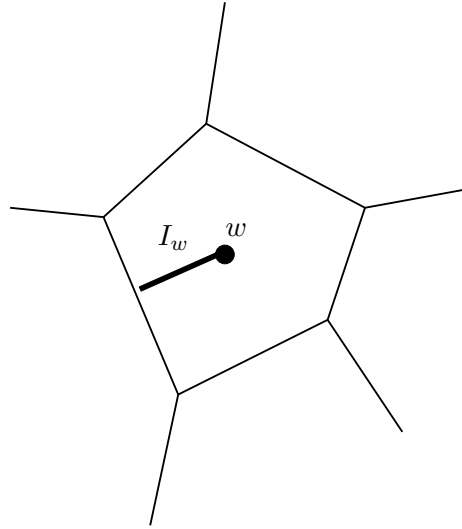


FIG. 9.3 – Réseau de spin à arête ouverte. Les arêtes e_w possédant un vertex ouvert w sont étiquetées par une représentation de Lorentz I_w .

considère alors le réseau de spin ouvert associé au graphe colorié $(\Gamma, j_{\bar{e}}, I_w)$ et défini en termes des holonomies de la connexion le long des arêtes du graphe par

$$\Psi_{\Gamma, j_{\bar{e}}, I_w}(\bar{\omega}) = \left\langle \bigotimes_{\bar{e}} D^{j_{\bar{e}}} (h_{\bar{e}}(\bar{\omega})) \bigotimes_w D^{I_w} (h_{\bar{e}_w}(\bar{\omega})), \bigotimes_{\bar{v}} \iota_{\bar{v}} \right\rangle, \quad (9.36)$$

où $\iota_{\bar{v}}$ désigne l'entrelaceur trivalent normalité. Dans cette expression, les entrelaceurs ne sont situés qu'aux vertex internes. Les éléments de matrice associés aux arêtes ouvertes ont donc un indice non-contractionné, et un tel réseau de spin est à valeur dans les vecteurs invariants de $\bigotimes_w V^{I_w}$.

Ces réseaux de spin vont nous servir à décrire les états cinématiques de la gravité couplée à des particules. Remarquons qu'au niveau cinématique, ni la masse M ni le spin S n'apparaissent. Ces deux quantités n'apparaîtront qu'au niveau dynamique, lors de la définition du propagateur.

9.2.2 Propagateur à spin en l'absence de gravité

Notre but est maintenant de décrire le propagateur entre deux états de réseaux de spin ouverts. Pour comprendre un peu mieux quel type d'objet on recherche, il est intéressant de se pencher sur le cas plus simple d'un tel propagateur en l'absence de gravité.

Le cas 4D

Il y a parfois une confusion sur les rôles respectifs des groupes de Poincaré, de Lorentz, des rotations, et sur les sens physiques des différentes représentations associées. Pour éclairer cette discussion, je vais rappeler ici la situation du cas 4D. Ceci est pour l'essentiel issu du chapitre 5 du livre de S.Weinberg [6]. Les représentations du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$ seront notées (A, B) . Les représentations du groupe des rotations $SO(3)$ seront notées s . On désigne par σ les indices de l'espace de représentation V^s (c'est à dire les moments magnétiques).

On travaille avec des champs qui sont des représentations du groupe de Lorentz. Par exemple un champ scalaire $\Phi_S(x)$ ou un champ vectoriel $\Phi^\mu(x)$. La représentation de Lorentz dans laquelle on travaille est donc, naïvement, le nombre de composantes du champ. Dans le cas du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$, on peut classifier les représentations par la donnée d'une paire (A, B) de demi-entiers. Par exemple, on a $(0, 0)$ pour la représentation scalaire, $(1/2, 1/2)$ pour la représentation vectorielle. Au sein d'une représentation (A, B) on trouve les représentations de $SO(3)$ de spin s pour

$$|A - B| \leq s \leq A + B. \quad (9.37)$$

Cela signifie par exemple que la représentation $(0, 0)$ ne contient qu'une composante qui est de spin $s = 0$. Les représentations $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$ ne peuvent contenir que $s = 1/2$. La représentation $(1/2, 1/2)$ contient à la fois $s = 1$ et $s = 0$. On comprend bien ici que la représentation de Lorentz dans laquelle on travaille (le nombre de composantes du champ) *ne fixe pas* le spin de la particule. Dans le cas des représentations scalaires ou $(1/2, 0)$, on a pas le choix, mais par exemple la représentation vectorielle contient à la fois des particules de spin 0 et de spin 1.

La démarche générale de [6] consiste à construire, pour une représentation du groupe de Lorentz, des champs causaux comme combinaisons linéaires d'opérateurs de création et d'annihilation. Les propriétés de symétrie requises fixent la forme des coefficients de ces combinaisons linéaires. En particulier les propriétés de transformation par rotation, c'est à dire le spin s de la particule, mettent des conditions sur ces coefficients. Plus précisément ces coefficients doivent fournir un entrelaceur de la représentation (A, B) du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$ vers le sous-espace de représentation de spin s de $SO(3)$. Après imposition de ces conditions, le commutateur des champs peut alors être déduit de ces coefficients.

Par exemple dans le cas du champ scalaire on cherche à construire le champ

$$\Phi_S(x) = \int d^3p u(p)a(p)e^{ip \cdot x}, \quad (9.38)$$

où les $u(p)$ sont les coefficients à déterminer et qui sont contraints par les conditions de symétrie. Dans le cas scalaire, les conditions de symétrie imposent que $u(p) = (2p^0)^{-1/2}$. On a alors le commutateur

$$[\Phi_S(x), \Phi_S^\dagger(y)] = \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (9.39)$$

qui fournit le propagateur causal.

Dans le cas du champ vectoriel, on cherche à construire des champs

$$\Phi^\mu(x) = \sum_\sigma \int d^3p u^\mu(p, \sigma)a(p, \sigma)e^{ip \cdot x}, \quad (9.40)$$

où les $u^\mu(p, \sigma)$ sont les coefficients qui dépendent de l'impulsion p et du moment magnétique σ . Si on se fixe pour commencer le spin $s = 0$, le comportement des coefficients u^μ sous l'application d'un boost impose que le coefficient $u^\mu(p)$ se déduise de $u^\mu(0)$ par

$$u^\mu(p) = i \frac{p^\mu}{\sqrt{2p^0}}. \quad (9.41)$$

Cela signifie que le champ $\Phi^\mu(x)$ s'écrit dans ce cas simplement comme la dérivée d'un champ scalaire

$$\Phi^\mu(x) = \partial^\mu \Phi_S(x). \quad (9.42)$$

On comprend pourquoi un champ dans la représentation de Lorentz vectorielle, mais de spin $s = 0$, ne décrit rien de nouveau par rapport au champ scalaire.

Si on se fixe maintenant la représentation de spin $s = 1$, on déduit des conditions de transformation que les $u^\mu(p, \sigma)$ doivent avoir la forme

$$u^\mu(p, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} L^\mu{}_\nu(p) e^\nu(\sigma) \quad (9.43)$$

où $L(p)$ est la matrice qui représente le boost d'impulsion p et où les vecteurs $e^\nu(\sigma)$ engendrent la représentation de spin 1. Cela conduit alors au commutateur

$$[\Phi^\mu, \Phi^{\dagger\nu}] = \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \Pi^{\mu\nu}(p) \quad (9.44)$$

avec

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = [L(p)PL(p)^{-1}]^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}. \quad (9.45)$$

où P est le projecteur sur la représentation de spin 1

$$P^{\mu\nu} = \sum_{\sigma} e^\mu(\sigma) e^\nu(\sigma) \quad (9.46)$$

Ce principe se généralise au cas d'une représentation de Lorentz quelconque (A, B) et d'un spin s (pourvu que $|A - B| \leq s \leq A + B$). Si $L^{(A,B)}(p)$ désigne la matrice de représentation de Lorentz du boost d'impulsion p , et si désigne $P_s^{(A,B)}$ le projecteur sur la représentation de spin s dans (A, B) , le propagateur se met sous la forme

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{ip \cdot (x-y)} \Pi(p) \quad (9.47)$$

avec

$$\Pi(p) = L^{(A,B)}(p) P_s^{(A,B)} L^{(A,B)}(p)^{-1} \quad (9.48)$$

et $P_s^{(A,B)}$ le projecteur sur la représentation de spin s dans (A, B) .

Le cas 3D

Sur la base de l'expérience du cas quadridimensionnel, on peut maintenant étendre cette discussion au cas 3D. Dans le cas euclidien, le groupe de Lorentz est le groupe $SO(3)$. Ce sont donc des demi-entiers I qui vont jouer le rôle que jouait (A, B) dans la discussion précédente. Le petit groupe est maintenant $U(1)$. Le spin des particules sera donc donné là aussi par un demi-entier s , mais qu'il faut penser comme une représentation de $U(1)$, et pas de $SU(2)$. Enfin la condition qu'un spin s peut apparaître dans une représentation I de $SO(3)$ est donnée par la condition

$$s \leq I. \quad (9.49)$$

Le projecteur de l'espace de représentation V^I sur l'espace de représentation (unidimensionnel) de s est donné par

$$P_s^I = |I, s \rangle \langle I, s|, \quad (9.50)$$

où $|I, s \rangle$ est le vecteur de base d'indice s dans V^I . L'analogie de (9.48) est alors

$$\Pi(p) = D^I(L(p)) P_s^I D^I(L(p)^{-1}), \quad (9.51)$$

où $L(p)$ est le boost d'impulsion d'impulsion p .

9.2.3 Insertion de particules sur un graphe décoré

L'insertion d'une particule à spin dans une variété ouverte se fait de manière plus complexe qu'une simple particule massive. Nous allons donc construire par étapes l'expression correspondante.

Projecteur local

En se basant sur la situation en espace plat, on peut maintenant mieux comprendre à quoi ressemble le propagateur d'une particule de masse M et de spin s . Dans le cas 3D euclidien, le groupe de Lorentz est le groupe $SO(3)$. Son petit groupe est le groupe $U(1)$ dont les représentations sont labélées par des demi-entiers. Un spin s sera donc une représentation de $U(1)$. La représentation s de $U(1)$ est contenue dans toute représentation I de $SO(3)$ pourvu que $U \geq s$. Nous avons déjà pu voir que l'insertion d'une particule de masse m se fait en introduisant la projection

$$\delta_m(g) = \int du \delta(guh_m u^{-1}). \quad (9.52)$$

L'élément de groupe g représentant l'impulsion de la particule, ce terme est l'analogie de la condition de couche de masse

$$\delta(p^2 + m^2) \quad (9.53)$$

du cas plat. On cherche donc maintenant à généraliser ceci au cas d'un spin, et à construire l'analogie de

$$\delta(p^2 + m^2) \Pi_s^I(p) \quad (9.54)$$

En suivant la forme du projecteur Π dans le cas 4D, le candidat naturel en 3D est le projecteur suivant

$$\Pi_s^I(u) = D^I(u) P_s^I D^I(u^{-1}) \quad (9.55)$$

où on définit P_s^I comme

$$P_s^I = |I, s \rangle \langle s, I|. \quad (9.56)$$

Il s'agit bien du projecteur sur la représentation s de $U(1)$ au sein de la représentation I de $SO(3)$. Nous sommes donc naturellement conduit à formuler la proposition suivante : l'insertion sur une arête e d'une particule de masse m_e et de spin s_e dans la représentation I_e du groupe de Lorentz $SO(3)$ se fait à l'aide de l'homomorphisme de V^{I_e} défini par

$$\Delta_{nn'}^{I_e, m_e, s_e} = \int du_e \delta(U_e u_e h_{m_e} u_e^{-1}) D_{ns_e}^{I_e}(u) D_{s_e n'}^{I_e}(u_e^{-1}) \quad (9.57)$$

et qui dépend des éléments de groupe g_{e^*} via U_e .

Connecter les projecteurs

Comme pour la particule massive, notre objectif insérer des particules sur les arêtes d'un graphe \mathcal{T} qui est un sous-graphe de Δ . Dans le cas d'une variété ouverte, il s'agit d'un graphe ouvert dont les extrémités doivent coïncider avec les vertex ouverts des réseaux de spin du bord, voir figure 9.4

La forme du projecteur que nous avons obtenu précédemment suggère de décorer chaque arête de \mathcal{T} par un indice de Lorentz I_e , une masse m_e et un spin s_e , et d'insérer sur chaque

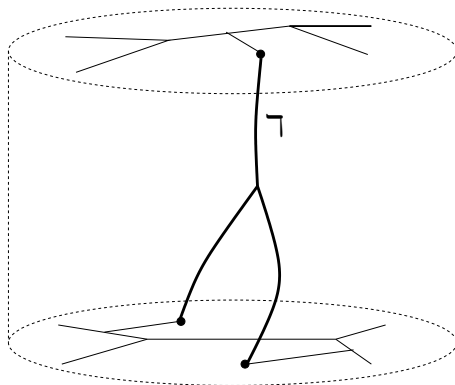


FIG. 9.4 – Graphe Γ dont les extrémités coïncident avec les vertexs ouverts des réseaux de spin au bord.

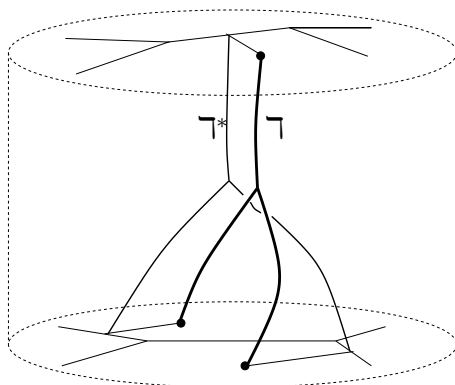


FIG. 9.5 – Graphe ruban Γ^f constitué de Γ et du graphe Γ^* . Le graphe ruban se recolle au bord sur les arêtes ouvertes des réseaux de spin.

arête l'homomorphisme de V^{Ie} (9.57). Il faut s'imaginer cette expression comme un projecteur qui agit localement au niveau de l'arête e , ou plus exactement du vertex st_e^* , qui est le vertex de départ du calcul de la courbure U_e . On comprend alors qu'on ne peut pas insérer de manière brute le produit sur les arêtes de Γ de ces homomorphismes, sans d'une manière ou d'une autre les 'connecter' entre eux. Pour cela nous allons nous servir du transport parallèle.

Nous avons besoin d'une structure additionnelle. Il s'agit d'un graphe Γ^* situé dans le dual Δ^* (voir [36] pour sa construction précise) et qui 'mime' le graphe Γ . Tout vertex v de Γ est mimé par un vertex v^* de Γ^* , et Γ^* est imposé à passer par tous les vertex duaux st_e^* qui servent de point de départ au calcul de la courbure. Enfin Γ^* touche le bord au niveau des vertex situés aux autres extrémités des arêtes ouvertes (voir figure 9.5). L'ensemble (Γ, Γ^*) donne un *framing* au graphe Γ c'est à dire le muni d'une structure de ruban. On note Γ^f le graphe ruban.

Pour comprendre comment le graphe Γ^* permet de relier ensemble les projecteurs, considérons maintenant une arête e de Γ située entre deux vertex v_- et v_+ . Le graphe Γ^* associe à v_- et v_+ deux vertex du dual qu'on appelle v_-^* et v_+^* , entre lesquels passe un chemin, lequel est astreint à passer par st_e^* . Ce chemin définit deux holonomies : l'holonomie h_{e+} de st_e^*

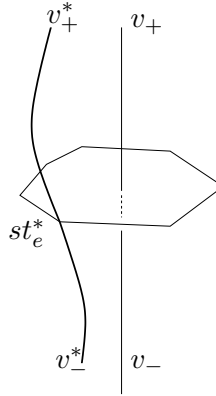


FIG. 9.6 – Graphe \mathfrak{T}^* au niveau d’une arête e de \mathfrak{T} . Le graphe \mathfrak{T}^* permet de définir des holonomies qui permettent de transporter le projecteur, initialement localisé au niveau de st_e^* .

à v_-^* et l’holonomie h_{e^-} de st_e^* à v_+^* . Ces notations sont illustrées figure 9.6. On peut alors se servir de ces holonomies pour faire du transport parallèle du projecteur vers v_-^* et v_+^* . On définit l’homomorphisme de V^{I_e}

$$\tilde{\Delta}^{I_e, m_e, s_e} = D^{I_e}(h_-^{-1}) \Delta^{I_e, m_e, s_e} D^{I_e}(h_+). \quad (9.58)$$

qui dépend des éléments de groupe via U_e , mais aussi h_{e^+} et h_{e^-} . Pour toute arête e de \mathfrak{T} , on dispose donc d’un homomorphisme $\tilde{\Delta}^{I_e, m_e, s_e}$. Maintenant les homomorphismes associés à chaque arête peuvent être connectés entre eux au niveau des vertexs de \mathfrak{T}^* . Les vertexs pouvant être multivalents, on les connecte ensemble à l’aide d’intertwiner de Lorentz ι_v .

Résumons l’ensemble des structures nécessaires. Nous avons besoin d’un graphe muni d’un framing \mathfrak{T}^f , constitué d’un graphe \mathfrak{T} de Δ , et d’un graphe \mathfrak{T}^* de Δ^* de structure identique à \mathfrak{T} . Le graphe \mathfrak{T}^* définit pour chaque arête e deux holonomies h_{e^-} et h_{e^+} qui permettent d’effectuer le transport parallèle. On muni le graphe \mathfrak{T}^f d’une décoration D constituée d’un indice de Lorentz I_e , une masse m_e et un spin s_e sur chaque arête, et un entrelaceur de Lorentz ι_v sur chaque vertex. On insère finalement l’homomorphisme associé au graphe ruban \mathfrak{T}_D^f décoré par (I_e, m_e, s_e) pour chaque arête

$$\Delta_{\mathfrak{T}_D^f} = \left\langle \bigotimes_{e \in \mathfrak{T}} \Delta^{I_e, m_e, s_e} ; \bigotimes_{v \in \mathfrak{T}} \iota_v \right\rangle. \quad (9.59)$$

qui est un homomorphisme du produit des représentations de Lorentz des arêtes ouvertes du réseau de spin initial vers celles du réseau de spin final.

A ce stade, on peut s’imaginer que l’objet que nous avons introduit dépend fortement des holonomies qui servent à faire le transport parallèle, et donc du choix particulier du graphe \mathfrak{T}^* . En réalité il n’en n’est rien, la raison en est que la courbure étant partout ailleurs plate, le transport parallèle est (presque) indépendant du chemin suivi. On peut par exemple déplacer un chemin en le faisant passer sur des plaquettes duales de courbure nulle (voir figure 9.7). Si on considère deux arêtes e_1 et e_2 de \mathfrak{T} et qu’on considère l’holonomie qui relie $st_{e_1}^*$ à $st_{e_2}^*$, celle-ci ne dépend en fait que du *winding number* du graphe \mathfrak{T}^* . C’est à dire que si on voit le graphe muni de son framing comme un graphe ruban, le résultat ne dépend que du nombre de twists que subit le ruban (figure 9.8) et pas du détail de \mathfrak{T}^* .

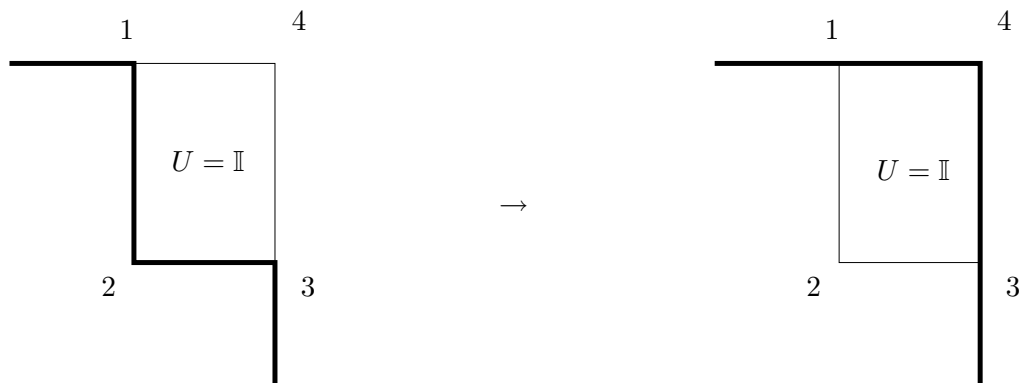


FIG. 9.7 – La condition de courbure nulle $U = g_1 g_2 g_3 g_4 = \mathbb{I}$ autour d'une plaquette s'écrit $g_1 g_2 = g_4^{-1} g_3^{-1}$ et permet de déplacer le chemin.

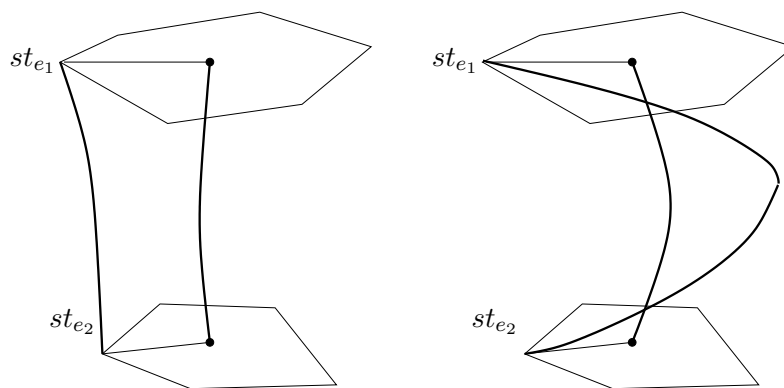


FIG. 9.8 – Exemple de deux chemins inéquivalents reliant deux vertex $st_{e_1}^*$ et $st_{e_2}^*$. Les deux chemins ne possèdent pas le même winding number et ne peuvent pas être relié par une déformation conservant les extrémités. Le second chemin définit un ruban twisté.

9.3 EXEMPLES EXPLICITES

Cette partie présente quelques résultats explicites d'amplitudes de transition que l'on peut obtenir avec les modèles d'insertion de particules. Les calculs sont détaillés dans [36]. Il est à noter que ces calculs ont été fait plus efficacement en utilisant les surfaces duales plutôt qu'une triangulation.

9.3.1 n particules massives sur $\Sigma_g \times I$

Le cas le plus simple consiste à considérer d'abord le cas de la propagation de n particules sur la sphère S^2 . Le graphe Υ est donc constitué de n segments linéaires qui ne s'entrelacent pas. Pour deux réseaux de spin Ψ_i et Ψ_f dépendant de n éléments de groupe, un choix de masses m_1, \dots, m_n , on trouve l'amplitude de transition

$$\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle = \int \prod_{k=1}^n du_k \Psi_f^*(u_1 h_{m_1} u_1^{-1}, \dots, u_n h_{m_n} u_n^{-1}) \delta \left(\prod_{k=1}^n u_k h_{m_k} u_k^{-1} \right) \Psi_i(u_1 h_{m_1} u_1^{-1}, \dots, u_n h_{m_n} u_n^{-1}) \quad (9.60)$$

Dans le même esprit, on peut calculer l'amplitude de transition pour une surface de genre g . Les réseaux de spin dépendent cette fois de $2g + n$ éléments de groupe. On trouve alors

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle &= \int \prod_{i=1}^g da_i db_i \prod_{k=1}^n du_k \quad \Psi_f^*(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; u_1 h_{m_1} u_1^{-1}, \dots, u_n h_{m_n} u_n^{-1}) \\ &\times \delta \left(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \prod_k u_k h_{m_k} u_k^{-1} \right) \\ &\times \Psi_i(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; u_1 h_{m_1} u_1^{-1}, \dots, u_n h_{m_n} u_n^{-1}) \end{aligned} \quad (9.61)$$

On peut par exemple regarder le cas particulier d'une transition vide-vide. On obtient alors le résultat suivant :

$$\langle 0 | 0 \rangle_{\Sigma_g, n} = \sum_j \frac{1}{(d_j)^{2g+n-2}} \prod_{k=1}^n \frac{\chi^j(h_{m_k})}{d_j}. \quad (9.62)$$

9.3.2 Braiding de deux particules

Un exemple intéressant consiste à regarder n particules dont deux particules avec un braiding non-trivial. On constate [36] que l'échange de 2 particules agit sur l'espace de Hilbert physique par

$$\Psi(u_1, u_2, \dots) \rightarrow \Psi(u_1 h_{m_1} u_1^{-1} u_2, u_1, \dots) \quad (9.63)$$

Cet action se trouve être un opérateur dont l'action reproduit l'action de la matrice R d'un groupe quantique : le groupe $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ qui est le double de Drinfeld de $\text{SU}(2)$. Cette apparition du groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ n'est qu'une manifestation d'un lien mathématique plus profond entre le modèle de Ponzano-Regge et la structure de groupe quantique de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$. Cette relation est l'objet du chapitre suivant.

9.4 EFFETS PHYSIQUES DE L'INSERTION DE PARTICULES

9.4.1 Physique des particules en présence de gravité quantique

D'une manière générale, on s'attend à ce qu'une théorie de gravité quantique révèle un paysage géométrique nouveau aux alentours de l'échelle de Planck $l_P = 10^{-35}m$. C'est ce qui se produit notamment en gravité quantique à boucle où des structures géométriques discrètes émergent, la structure de continuum étant retrouvée aux grandes échelles. Il est alors légitime de se demander dans quelle mesure une telle structure microscopique peut influencer le reste de la physique.

Pour comprendre cette idée, on peut considérer une analogie fournie par la physique de la matière condensée. La propagation dans un cristal de pas a est gouvernée par une relation de dispersion du type

$$E(k) = E_0 - W \cos(ka). \quad (9.64)$$

Dans la limite où la longueur d'onde est très grande devant le pas du réseau $ka \ll 1$ – c'est à dire dans la limite où l'on ne voit pas la structure discrète – on retrouve une relation

$$E(k) = (E_0 - W) + \frac{Wa^2}{2}k^2 \quad (9.65)$$

où l'énergie se comporte comme le carré de l'impulsion, ce qui reproduit la propagation d'une particule libre. Dès lors on peut se demander si un phénomène identique peut apparaître en présence de gravité quantique. Par exemple la relation de dispersion familière

$$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2 \quad (9.66)$$

ne serait que le comportement à $E \ll E_P$ d'une relation de dispersion plus compliquée, qu'on peut par exemple chercher à caractériser à partir des premiers termes d'un développement limité

$$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2 + \alpha \frac{E^3}{E_P} + \beta \frac{E^4}{E_P^2} + \dots \quad (9.67)$$

où α et β sont des coefficients sans dimension. Cette idée fut à l'origine évoquée par Snyder [93], et beaucoup étudiée ces dernières années [94], sur la base de résultats astrophysiques pouvant – entre autres – s'expliquer par une telle relation de dispersion modifiée.

Un formalisme mathématique pour étudier ce genre de phénomènes nous est fourni par la théorie des déformations de l'algèbre de Poincaré [95]. On peut en effet déformer l'algèbre de Poincaré en utilisant un paramètre de déformation κ dimensionnel, que l'on relie à la longueur de Planck. L'introduction d'un tel paramètre provoque alors une modification de la relation de dispersion. Cependant un théorème mathématique affirme que toute déformation de l'algèbre de Poincaré est en fait triviale, en ce sens qu'on peut toujours redéfinir de nouveaux générateurs \mathcal{E} et \mathcal{P} en termes des anciens générateurs E et p , et tels qu'on ait la relation familière

$$m^2c^4 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{P}^2c^2. \quad (9.68)$$

On comprend alors que si \mathcal{E} et \mathcal{P} correspondent en fait aux énergies et impulsions expérimentalement mesurées, il n'y a *pas* de modification observable de la relation de dispersion ! Il existe pourtant un autre aspect à prendre en compte. Si on considère l'algèbre de Poincaré munie de sa structure de co-algèbre, la redéfinition des générateurs qui permet d'annuler la modification de la relation de dispersion va en fait déformer la structure de co-produit.

Pour une algèbre de symétrie, la structure de co-produit est celle qui gouverne les *lois de composition*. Par exemple si l'on étudie la composition de deux représentations du groupe des rotations pour un élément de groupe g , on a

$$(\Pi_{j_1} \otimes \Pi_{j_2})(g) = \Pi_{j_1}(g) \otimes \Pi_{j_2}(g) \quad (9.69)$$

où l'on a utilisé – sans s'en rendre compte! – le co-produit $\Delta(g) = g \otimes g$ pour 'dédoubler' l'élément g . Une redéfinition des générateurs de l'algèbre de Poincaré κ -déformée va modifier la structure de co-produit, et donc modifier les lois de composition. Ceci signifie qu'un effet possible de l'introduction de gravité quantique pour la physique des particules peut être non pas la modification de la relation de dispersion, mais la modification de la composition des moments!

9.4.2 Composition des moments dans le modèle de Ponzano-Regge

A ce stade j'ai décrit comment insérer des particules dans le modèle de Ponzano-Regge, sans envisager les conséquences physiques. Nous allons ici envisager le phénomène de conservation de la masse et celui de la composition des moments.

Conservation de la masse et de l'impulsion

Une question qui vient naturellement à l'esprit est de savoir si la masse est effectivement conservée dans notre modèle d'insertion de particules. Concrètement on considère un vertex bivalent de \mathbb{T} , et l'on étudie s'il est possible d'insérer une particule de masse m_1 sur l'arête incidente et de masse m_2 sur l'arête émergente. Considérons alors l'identité de Bianchi autour de ce vertex bi-valent : le produit des courbures associées aux faces duales qui entourent ce vertex est égal à l'identité

$$\prod_{e \supset v} U_e = \mathbb{I}. \quad (9.70)$$

Cependant parmi toutes ces courbures, toutes sont imposées à l'identité dans la fonction de partition, sauf celles correspondant aux deux arêtes de \mathbb{T} , il reste donc

$$U_{e_1} U_{e_2}^{-1} = \mathbb{I} \quad (9.71)$$

(on suppose par exemple qu'on a orienté e_1 et e_2 dans des sens opposés.) La fonction de partition impose ensuite à ces courbures d'être reliées aux masses, on a donc par l'identité de Bianchi

$$u_1 h_{m_1} u_1^{-1} = u_2 h_{m_2} u_2^{-1} \quad (9.72)$$

qui prouve que $m_1 = m_2$ et $u_1 = u_2$, ce qui signifie que masse et impulsion sont conservées à un vertex bivalent. Ce type de relation est totalement analogue à une relation du type

$$\delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_1 - p_2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \quad (9.73)$$

où l'on voit d'une part que m_1 doit être égal à m_2 , d'autre part que dans ce cas il subsiste une infinité qui doit être fixée de jauge, c'est à dire qu'on doit éviter les vertex bivalents.

Composition des moments déformée

Examinons maintenant le cas d'un vertex trivalent de ∇ . Cette fois l'identité de Bianchi à ce vertex trivalent relie les holonomies U_1 , U_2 et U_3 autour des 3 particules par une relation du type

$$U_1 U_2 = U_3. \quad (9.74)$$

En termes des masses m_e et des éléments de groupe u_e , cette relation devient au sein de la fonction de partition

$$u_1 h_{m_1} u_1^{-1} u_2 h_{m_2} u_2^{-1} = u_3 h_{m_3} u_3^{-1}. \quad (9.75)$$

On constate alors que l'inégalité qui relie m_3 à m_1 et m_2 est

$$\cos\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \leq \cos\frac{m_3}{2} \leq \cos\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right). \quad (9.76)$$

Ceci est un premier résultat physique qui révèle une relation déformée par rapport à la cinématique relativiste usuelle. On peut mettre en avant une autre déformation de ce type. L'holonomie U autour d'une particule qui se trouve dans la classe de conjugaison m peut s'écrire comme l'exponentiation d'un élément d'algèbre de Lie, qu'on peut mettre sous la forme

$$U = \exp(\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{J}}), \quad \text{avec } p^2 = m^2. \quad (9.77)$$

On voit donc que l'identité de Bianchi

$$\exp(\vec{p}_1 \cdot \vec{\mathcal{J}}) \exp(\vec{p}_2 \cdot \vec{\mathcal{J}}) = \exp(\vec{p}_3 \cdot \vec{\mathcal{J}}), \quad (9.78)$$

conduit à cause de la relation de Baker-Campbell-Hausdorff à une composition des moments non-triviale

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \quad (9.79)$$

où les termes supplémentaires proviennent des commutateurs. L'apparition de ces commutateurs peut être reliée au fait que $SU(2)$ n'est pas un groupe abélien. Le terme non-abélien de la courbure de la connexion $SU(2)$ peut être vu, en redimensionnant les variables, comme proportionnel à la constante de Newton G

$$F(\omega) = d\omega + G[\omega, \omega]. \quad (9.80)$$

On comprend donc que les termes commutateurs dans la relation de composition déformée (9.79) peuvent en définitive s'écrire comme des termes proportionnels à des puissances de G . La relation de composition des moments déformée est trouvée donc bien son origine dans la présence de gravité. Le modèle de particules couplées à la gravité quantique fournit donc un exemple explicite de cinématique déformée en présence de gravité quantique. Cette cinématique déformée se déduit directement du modèle et ne découle pas d'un modèle effectif. Il s'agit là d'un premier résultat physiquement intéressant de ce modèle.

9.4.3 Limite $G \rightarrow 0$ de la gravité quantique

Une autre question que l'on peut examiner grâce à ce modèle de particules est celle de la limite $G \rightarrow 0$ de la gravité quantique. Comme je l'ai mentionné en introduction, il est considéré qu'une des premières tâches d'une théorie de gravité quantique est de reproduire la gravité classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ et la théorie quantique dans la limite $G \rightarrow 0$. La première limite a jusqu'ici concentré l'essentiel de l'attention et la question de la seconde limite reste mal posée et peu ou pas examinée. Commençons par donner une formulation plus précise à cette exigence :

La gravité quantique couplée à de la matière doit conduire à des amplitudes de transition qui dans la limite $G \rightarrow 0$ reproduisent les amplitudes de transition de la théorie des champs en espaces plats.

Nous voyons ainsi que le formalisme d'inclusion de particules que nous avons proposé ouvre la voie à l'examen de cette question. En effet dans notre formalisme, les graphes de particules décorés \mathcal{T}_D permettent notamment de décrire des situations où le nombre de particules varie. On peut donc en clair voir ces graphes comme des graphes de Feynman, et étudier la limite $G \rightarrow 0$ des amplitudes associées à ces graphes. Comme nous je l'ai indiqué ci-dessus, la limite $G \rightarrow 0$ correspond essentiellement à une limite abélienne des amplitudes calculées. On peut alors étudier la question de savoir si la limite abélienne des expressions calculées pour ces graphes en présence de gravité quantique reproduit les résultats obtenus en espace plat. Il s'agit donc d'un examen direct de la question de savoir si la limite $G \rightarrow 0$ du modèle de Ponzano-Regge (en présence de particules) est bien la théorie quantique des champs usuelle.

10

INVARIANT DE PONZANO-REGGE ET CHERN-SIMONS $\mathcal{D}(\mathrm{SU}(2))$

Ce chapitre présente un nouvel invariant de variété construit à partir des représentations du groupe quantique $\mathcal{D}(\mathrm{SU}(2))$. Cet invariant que nous avons construit dans [38] a été construit en reliant l'invariant de Ponzano-Regge à un invariant du type Witten-Reshetikhin-Turaev.

10.1 INVARIANTS DE VARIÉTÉS 3D ET GRAVITÉ QUANTIQUE

Depuis une quinzaine d'années, les travaux mathématiques sur la recherche d'invariants de variété 3D, et les travaux physiques sur la gravité quantique 3D contribuent les uns aux autres. L'idée de base est que la gravité en 3 dimensions est une théorie topologique, c'est à dire qu'elle n'est sensible qu'à un nombre fini de degrés de liberté physiques, globaux et liés à la topologie de la variété sur laquelle on travaille. Une fonction de partition de gravité quantique

$$Z(\mathcal{M}) = \int [\mathcal{D}g] e^{iS[g]}, \quad (10.1)$$

est alors un candidat d'invariant de la variété \mathcal{M} . On distingue principalement deux invariants ayant une interprétation en termes de théorie de gravité 3D : l'invariant de Turaev-Viro[81] et l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev[77, 96].

Comme nous l'avons vu au chapitre 6, l'invariant de Turaev-Viro peut être interprété comme une fonction de partition de la gravité quantique 3D euclidienne en présence d'une constante cosmologique positive. Le chapitre 7 présentait une construction de l'amplitude de Ponzano-Regge à partir de la théorie BF $SU(2)$. On ne dispose pas d'une construction similaire qui relierait explicitement le modèle de Turaev-Viro pour le groupe $U_q(\mathrm{SU}(2))$ à la formulation BF $SU(2)$ en présence de constante cosmologique positive Λ , mais on peut considérer néanmoins le modèle de Turaev-Viro comme une réalisation mathématique rigoureuse de la fonction de partition

$$Z_\Lambda(\mathcal{M}) = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}e \exp \left[i \int_{\mathcal{M}} \mathrm{tr}(e \wedge F(\omega) + \Lambda e \wedge e \wedge e) \right]. \quad (10.2)$$

où Λ est relié au paramètre de déformation q de $U_q(\mathrm{SU}(2))$ par $q = e^{i\sqrt{\Lambda}}$.

L'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev a été d'abord formulé par Witten ([77], voir chapitre 5) en termes de la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons $SU(2)$, puis sa

contrepartie mathématique a été écrite par Reshetikhin et Turaev [96] sur la base d'idées mathématiques sur des invariants de lien[97]. Cet invariant est lui aussi relié à une fonction de partition de la gravité, en ce sens que nous avons vu au chapitre 5 que la gravité euclidienne à $\Lambda > 0$ était donnée par 2 copies de la théorie Chern-Simons $\text{SU}(2)$. On s'attend donc à ce que "deux copies" de l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev correspondent à une fonction de partition de la gravité à $\Lambda > 0$. Nous verrons que cette intuition comporte une formulation mathématique bien précise.

Pour définir un invariant de variété $I(\mathcal{M})$, on part tout d'abord d'une *présentation* de cette variété, par exemple une triangulation Δ . A une variété donnée peuvent être associés des présentations différentes mais équivalentes. En général on peut relier deux présentations équivalentes par une série de *mouvements* élémentaires. Par exemple dans le cas d'une présentation par triangulation, ce sont les mouvements de Pachner [98]. La construction d'un invariant nécessite de bâtir un objet défini à partir d'une présentation, et indépendant du choix de cette présentation parmi les présentations équivalentes. On recherche donc un objet invariant sous les mouvements élémentaires qui relient des présentations équivalentes.

Dans la suite, je présente trois invariants importants de variété 3D : l'invariant de Turaev-Viro, l'invariant de Reshetikhin-Turaev et un troisième invariant qui sera important dans la suite : invariant de *chain-mail* de Roberts[99, 100].

10.1.1 L'invariant de Turaev-Viro

L'invariant de Turaev-Viro est défini en utilisant une présentation par triangulation. Cet invariant dépend du choix d'une racine de l'unité $q = e^{2i\pi/r}$, et utilise les structures de la théorie des représentations du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$.

Le groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$ et ses représentations

Les représentations du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$ sont indicées par un demi-entier $0 \leq j \leq (r-2)/2$. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 6, on définit $[2j+1]_q$ qui représente la dimension quantique de la représentation j , avec

$$[n]_q = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}. \quad (10.3)$$

On définit également la somme des dimensions quantiques au carré

$$\mathcal{V}_q = \sum_{j=0}^{\frac{r-2}{2}} ([2j+1]_q)^2. \quad (10.4)$$

Enfin la théorie des représentations de $U_q(\text{SU}(2))$ possède également un symbole $6j$ q -déformé

$$\left[\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right]_q. \quad (10.5)$$

Ce symbole $6j$ satisfait plusieurs propriétés que satisfait également le symbole $6j$ classique, en particulier la relation d'orthogonalité

$$\sum_{j_3} [2j_3+1]_q [2j_6+1]_q \left[\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right]_q \left[\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j'_6 \end{array} \right]_q = \delta_{j_6, j'_6}, \quad (10.6)$$

et la relation de Biedenharn-Elliott

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{bmatrix}_q = \sum_j [2j+1]_q \begin{bmatrix} j_5 & j_8 & j \\ j_9 & j_6 & j_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j_6 & j_1 & j \\ j_7 & j_4 & j_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j_4 & j_7 & j \\ j_8 & j_5 & j_3 \end{bmatrix}_q. \quad (10.7)$$

Définition et preuve d'invariance

L'invariant de Turaev-Viro est défini à partir d'une triangulation Δ de la manière suivante

$$TV(\Delta) = \sum_{\{j_e \leq (r-2)/2\}} \prod_v \frac{1}{\mathcal{V}_q} \prod_e [2j_e + 1]_q \prod_t \begin{bmatrix} j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ j_{t4} & j_{t5} & j_{t6} \end{bmatrix}_q. \quad (10.8)$$

Pour prouver que la définition (10.8) constitue bien un invariant de variété, il faut montrer qu'elle ne dépend pas du choix de la triangulation. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est invariante sous les mouvements de Pachner. En 3D, il existe deux mouvements de Pachner et leurs deux réciproques : le mouvement $1 \rightarrow 4$ et le mouvement $2 \rightarrow 3$. Ces mouvements (et leur équivalent dans le dual Δ^*) sont représentés sur la figure 10.1. Le mouvement $1 \rightarrow 4$ ajoute un vertex à l'intérieur d'un tétraèdre, le mouvement $2 \rightarrow 3$ transforme 2 tétraèdres adjacents en 3 tétraèdres, et ce en supprimant la face commune et en ajoutant une arête.

La raison pour laquelle la définition de Turaev-Viro est bien un invariant est liée au fait que les propriétés des symboles $6j$ quantiques miment exactement les mouvements de Pachner. Par exemple la relation de Biedenharn-Elliott (10.7) est exactement la relation nécessaire pour prouver l'invariance sous le mouvement $2 \rightarrow 3$. La relation nécessaire pour prouver le mouvement $1 \rightarrow 4$ est obtenue en utilisant la relation de Biedenharn-Elliott et l'identité d'orthogonalité.

10.1.2 L'invariant de Reshetikhin-Turaev

L'invariant de Reshetikhin-Turaev[96] est lui aussi défini en utilisant les structures des représentations du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$. En revanche, il utilise une présentation différente des variétés. Une excellente référence pour la question des invariants de liens et de variété est le livre d'Ohtsuki [101].

La présentation par chirurgie

L'invariant de Reshetikhin-Turaev peut être vu comme la contrepartie mathématique rigoureuse de l'invariant défini par Witten. La définition de l'invariant de Reshetikhin-Turaev utilise la présentation par chirurgie que j'ai décrite au chapitre 5.

La présentation par chirurgie permet d'associer à toute variété \mathcal{M} un lien de chirurgie $L_{\mathcal{M}}$ tel que \mathcal{M} puisse être obtenue de la sphère S^3 par chirurgie selon ce lien. De même que pour une même variété il existe différentes triangulations, il existe plusieurs liens de chirurgie équivalents pour une variété. Enfin de même que différentes triangulations d'une même variété sont reliées par les mouvements de Pachner, les différents liens de chirurgie d'une même variété sont eux aussi reliés par certains mouvements : les mouvements de Kirby. Pour construire un invariant de \mathcal{M} basé sur la présentation par chirurgie, on doit donc construire un objet invariant sous les mouvements de Kirby. Cependant, puisque l'isotopie de lien est le premier de ces mouvements, un invariant de variété basé sur sa présentation par lien de chirurgie doit en tout premier lieu être un invariant de lien.

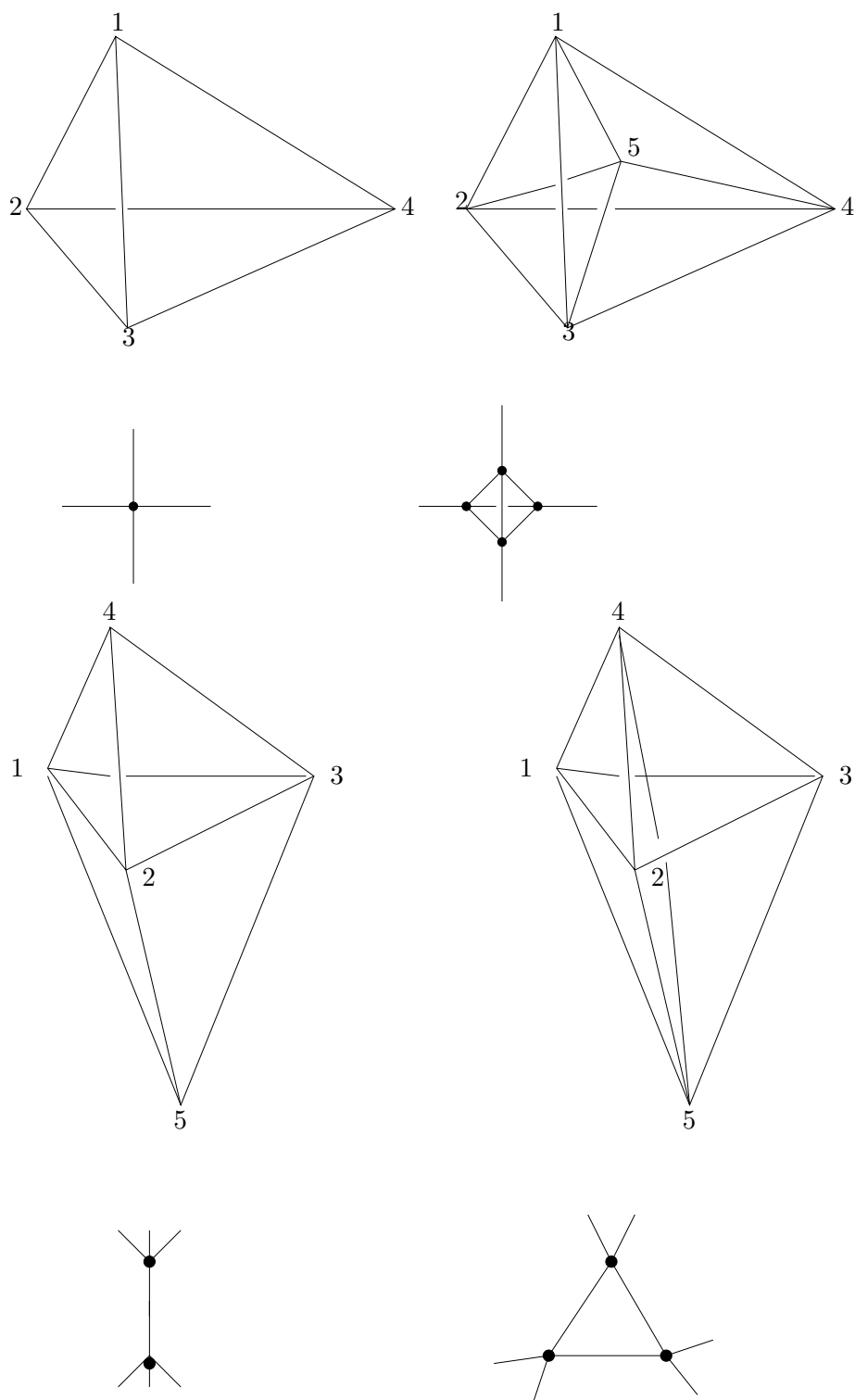


FIG. 10.1 – Les mouvements de Pachner $1 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$ dans une triangulation Δ , et les mouvements associés dans le dual Δ^* .

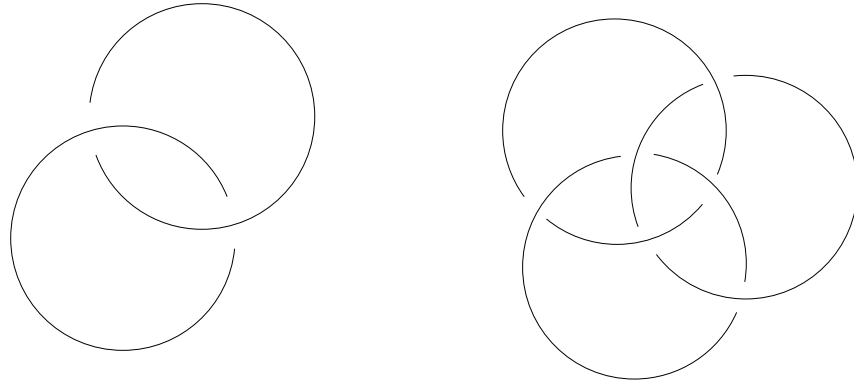


FIG. 10.2 – Exemple de projections de liens : le lien de Hopf et le lien Borroméen. Le lien Borroméen est un lien à trois composantes tel que la suppression d’une des trois composantes ne laisse que deux composantes liées entre elles.

L'évaluation de Reshetikhin-Turaev

L'invariant de Reshetikhin-Turaev est basé sur la notion d'évaluation introduite dans [97] pour construire des invariants de liens. Considérons un lien L , et assignons une représentation ρ_C à chaque composante C de ce lien. L'évaluation de Reshetikhin-Turaev est une procédure qui associe un nombre à un tel lien colorié

$$L(\{\rho_C\}) \rightarrow \text{eval}[L(\{\rho_C\})] \in \mathbb{C}. \quad (10.9)$$

Pour construire une telle évaluation, on projette le lien sur une surface 2D (voir figure 10.2), et la procédure associe alors un nombre à tout diagramme projeté. L'évaluation d'un lien colorié est un invariant de lien, c'est à dire qu'il ne dépend pas de la projection réalisée pour le calculer.

Dans le cas du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$, on associe à chaque composante d'un lien un demi-entier j_C , on peut alors considérer l'évaluation

$$\text{eval}[L, \{j_C\}] \in \mathbb{C}. \quad (10.10)$$

Cet objet fournit un invariant de lien, c'est à dire invariant sous les mouvements d'isotopie. Notre idée est cependant de construire un objet qui soit également invariant sous les mouvements de Kirby. Comment à partir de cette notion d'invariant de lien, définir un invariant de variété?

Pour cela on considère la représentation Ω , qu'on définit comme combinaison linéaire formelle de toutes les représentations irréductibles

$$(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}_q}} \sum_{j \leq (r-2)/2} [2j+1]_q (j). \quad (10.11)$$

où on a défini \mathcal{V}_q comme en (10.4). On définit alors l'invariant de Reshetikhin-Turaev de la manière suivante : soit $L_{\mathcal{M}}$ un lien de chirurgie d'une variété \mathcal{M} , on colore toutes ses composantes par la représentation Ω et on définit

$$RT(\mathcal{M}) = \frac{z}{\sqrt{\mathcal{V}_q}} \text{eval}[L_{\mathcal{M}}, \{\Omega\}]. \quad (10.12)$$

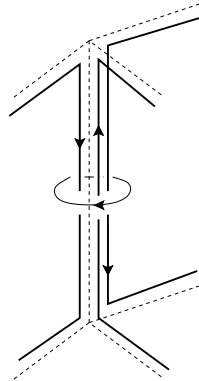


FIG. 10.3 – Construction du lien de chain-mail à partir de composantes autour des arêtes et de composantes à l'intérieur des faces.

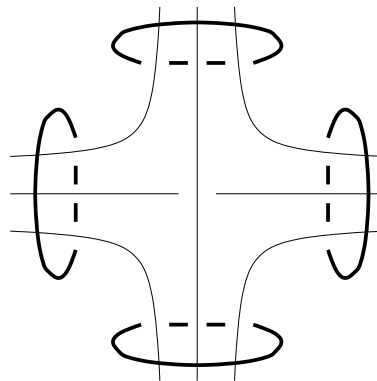


FIG. 10.4 – Morceau de chain-mail associé à un tétraèdre.

où z est un facteur de phase qui dépend de L et de k . Cet objet est un invariant de la variété \mathcal{M} , c'est à dire qu'il est invariant sous les mouvements élémentaires qui relient deux liens de chirurgie de la même variété.

10.1.3 L'invariant de chain-mail de Roberts

L'invariant de Roberts[99, 100] est lui aussi défini à partir de la notion d'évaluation de Reshetikhin-Turaev, mais en utilisant cette fois une présentation par triangulation.

Définition de l'invariant de chain-mail

On considère une triangulation Δ d'une variété \mathcal{M} . A partir de cette triangulation, on fabrique le lien de *chain-mail* L_Δ . Ce lien défini par Roberts peut être décrit de la manière suivante : on part de la triangulation Δ , et on trace un cercle autour de chaque arête, ainsi qu'à l'intérieur de chaque face (voir figures 10.3 et 10.4). L'ensemble de ces composantes forment un lien L_Δ . Une manière plus sophistiquée de décrire ce lien est de considérer le 1-squelette de Δ , puis de l'épaissir pour obtenir une variété à bord H , qui est une anse (*handlebody*) dont le bord est une

surface Σ . L'épaississement du 1-squelette du complexe dual Δ^* fournit une autre anse H^* dont le bord est également Σ . Ces variétés ayant Σ pour bord commun forment un scindement de Heegard de \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = H \#_{\Sigma} H^*. \quad (10.13)$$

L'ensemble des méridiens de H tracés sur la surface Σ et l'ensemble des méridiens de H^* forment alors le lien L_{Δ} . Le lien L_{Δ} ainsi obtenu possède les propriétés suivantes :

1. Toutes ses composantes sont des cercles non-noués ;
2. Ses composantes peuvent être classées en composantes C_e qui proviennent des arêtes de e et composantes C_{e^*} qui proviennent des faces $f \sim e^*$;
3. Les composantes C_e ne sont nouées qu'aux composantes C_{e^*} et réciproquement.

La définition de l'invariant de Roberts est alors donnée par l'évaluation de Reshetikhin-Turaev appliqué au lien L_{Δ} pour les représentations Ω définies en (10.11), on a

$$CM(\mathcal{M}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}_q}} \right)^{V+T} \text{eval}[L_{\Delta}, \{\Omega\}], \quad (10.14)$$

où V et T sont respectivement le nombre de vertexs et de tétraèdre de Δ .

Le théorème de Roberts-Turaev-Walker

L'important théorème prouvé par Roberts[99], et qui complète un théorème de Turaev et Walker est le suivant

$$TV(\mathcal{M}) = CM(\mathcal{M}) = |RT(\mathcal{M})|^2. \quad (10.15)$$

L'invariant de Roberts est égal à l'invariant de Turaev-Viro, et au module carré de l'invariant de Reshetikhin-Turaev. Le théorème prouvé par Roberts repose d'une part sur la preuve que l'invariant de chain-mail est égal à l'invariant de Turaev-Viro. Le coeur de la seconde partie de la preuve consiste à prouver que le lien de chain-mail L_{Δ} d'une variété triangulée par Δ est un lien de chirurgie pour la variété $\mathcal{M} \# \bar{\mathcal{M}}$, où $\bar{\mathcal{M}}$ désigne la variété \mathcal{M} avec l'orientation renversée. Roberts conclut ainsi que

$$CM(\mathcal{M}) = RT(\mathcal{M} \# \bar{\mathcal{M}}) = RT(\mathcal{M}) \times RT(\mathcal{M})^* = |RT(\mathcal{M})|^2. \quad (10.16)$$

Plus généralement ce théorème a été étendu dans [102] au cas d'une variété \mathcal{M} possédant un bord $\partial\mathcal{M}$ décoré par un réseau de spin (Γ, c) . Dans le cas à bord, l'invariant de Turaev-Viro ne fournit pas un nombre mais un élément $|TV(\mathcal{M}) \rangle$ dans l'espace de Hilbert engendré par les réseaux de spin. On note

$$\langle \Gamma, c | TV(\mathcal{M}) \rangle, \quad (10.17)$$

le produit scalaire entre le réseau de spin (Γ, c) et l'invariant de Turaev-Viro. On note $\mathcal{M} \#_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{M}^*$ la variété fermée obtenue par recollement de \mathcal{M} et \mathcal{M}^* selon $\partial\mathcal{M}$. On considère alors l'évaluation

$$RT(\mathcal{M} \#_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{M}^*; (\Gamma, c)) \quad (10.18)$$

obtenue par insertion du réseau de spin dans $\mathcal{M} \#_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{M}^*$ le long de $\partial\mathcal{M}$. Le théorème prouvé dans [102] est alors

$$\langle \Gamma, c | TV(\mathcal{M}) \rangle = RT(\mathcal{M} \#_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{M}^*; (\Gamma, c)). \quad (10.19)$$

Ce résultat étend le théorème précédent au cas d'une variété à bord décoré.

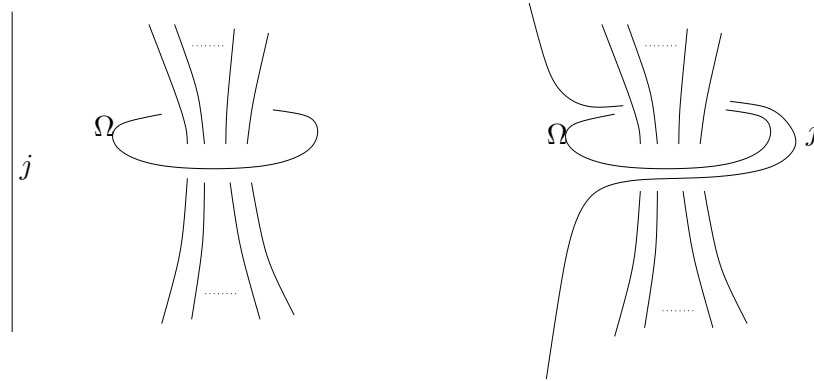


FIG. 10.5 – Propriété de sliding : toute composante portant une représentation quelconque peut être glissée sur une composante portant la représentation Ω sans changer l'évaluation correspondante.

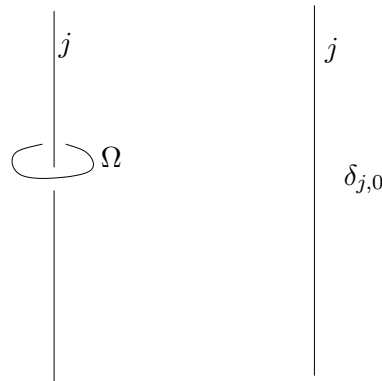


FIG. 10.6 – Propriété de killing : une représentation Ω enserrant une unique composante peut être supprimée. La représentation associée est alors projetée sur la représentation triviale.

Quelques propriétés graphiques

Les objets calculés à partir de l'évaluation Reshetikhin-Turaev possèdent plusieurs propriétés intéressantes qui se traduisent en identités graphique. On peut effectuer certaines modifications sur un lien colorié sans en changer l'évaluation. Parmi celles-ci, on distingue la propriété de *sliding* représentée figure 10.5 et qui permet de faire glisser toute composante sur une composante portant la représentation Ω .

L'autre propriété importante est la propriété de *killing*. Cette propriété représentée figure 10.6 permet de faire disparaître une représentation Ω enserrant une unique composante, et ce en imposant à la représentation vivant sur cette composante d'être la représentation triviale.

10.1.4 La racine carrée du modèle de Ponzano-Regge ?

Le théorème de Roberts prouve que l'invariant de Turaev-Viro construit avec le groupe $U_q(\text{SU}(2))$ possède une "racine carrée", obtenue en considérant l'invariant de Reshetikhin-Turaev, lui aussi

pour le groupe $U_q(\text{SU}(2))$. La procédure de fixation de jauge du modèle de Ponzano-Regge permet d'extraire des quantités finies de ce modèle. On peut alors se demander s'il existe un analogue du théorème de Roberts-Turaev-Walker dans le cas du modèle de Ponzano-Regge, et si par exemple le modèle de Ponzano-Regge possède lui aussi une "racine carrée". On sait d'ores et déjà que la réponse n'est pas l'invariant de Reshetikhin-Turaev construit avec le groupe $\text{SU}(2)$. La raison en est que cet invariant n'existe pas ! En effet la construction de Reshetikhin-Turaev fait appel à la structure d'algèbre quasi-triangulaire, qui est triviale dans le cas du groupe $\text{SU}(2)$.

10.2 L'AMPLITUDE DE PONZANO-REGGE FIXÉE DE JAUGE EST UN INVARIANT

Considérons l'expression de la fonction de partition du modèle de Ponzano-Regge après fixation de jauge, et pour une variété fermée \mathcal{M} :

$$PR(\mathcal{M}, \Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*) = \prod_{e^* \notin \mathcal{T}^*} \int_{\text{SU}(2)} dg_{e^*} \prod_{e \notin \mathcal{T}} \delta(U_e), \quad (10.20)$$

où U_e est calculé comme le produit orienté autour de $f^* \sim e$

$$U_e = \overrightarrow{\prod}_{e^* \subset e} g_{e^*}^{\epsilon(e, e^*)}. \quad (10.21)$$

Cette définition dépend

- du choix de la triangulation Δ ;
- du choix d'orientations des arêtes et des faces de Δ ;
- du choix d'un vertex dual st_e^* pour toute face duale $f^* \sim e$;
- du choix de l'arbre maximal \mathcal{T} dans Δ ;
- du choix de l'arbre maximal \mathcal{T}^* dans Δ^* ;

Pour prouver que PR définit un invariant de \mathcal{M} , il faut montrer que la définition est indépendante des choix de ces ingrédients. On a le théorème suivant :

Théorème 1 *La définition $PR(\mathcal{M}, \Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ est indépendante du choix des orientations des arêtes et des faces, des vertices de départ utilisés, des arbres maximaux \mathcal{T} et \mathcal{T}^* et de la triangulation.*

$PR(\mathcal{M}, \Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^)$ est donc un invariant de la variété et sera noté $PR(\mathcal{M})$.*

Ce théorème est prouvé en détail dans [38]. L'indépendance vis à vis des choix d'orientation et de vertex de départ résulte des propriétés d'invariance de la mesure de Haar et de la fonction $\delta(g)$. L'indépendance vis à vis du choix des arbres est montré en prouvant que la définition ne change pas sous un mouvement élémentaire d'arbres, deux arbres maximaux pouvant toujours être reliés par une suite de tels mouvements. Dans le cas de l'arbre \mathcal{T}^* , l'invariance est prouvée en utilisant la forme particulière de l'intégrand qui sur le plan physique est responsable de l'invariance de jauge de Lorentz. Dans le cas de l'arbre \mathcal{T} , l'invariance est prouvée grâce à l'identité de Bianchi (8.29). Enfin la preuve d'invariance sous les changements de triangulation est prouvée grâce aux mouvements de Pachner. On montre explicitement qu'un mouvement de Pachner de la triangulation (qui doit s'accompagner d'un changement de prescription pour les arbres \mathcal{T} et \mathcal{T}^*) ne modifie pas la valeur de l'invariant.

10.3 L'INVARIANT DE PONZANO-REGGE ET L'INVARIANT DE CHAIN-MAIL $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$

Le second théorème clé prouvé dans [38] répond à la question de l'analogie Reshetikhin-Turaev de l'invariant de Ponzano-Regge :

L'invariant de Ponzano-Regge $PR(\mathcal{M})$ est égal à l'invariant de chain-mail construit en utilisant les représentations simples du groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$.

Le groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ est un groupe quantique construit à partir de $\text{SU}(2)$ selon la recette du *double de Drinfeld*. Son usage en gravité quantique 3D a déjà été souligné dans [103, 104, 105], qu'on pourra consulter pour des notions détaillées sur ce groupe quantique.

10.3.1 Les représentations du groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$

Dans cette partie je ne présenterai que les éléments de base sur le groupe $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ utiles pour la procédure d'évaluation Reshetikhin-Turaev, c'est à dire les bases de sa théorie des représentations. Plus d'éléments sur $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ pourront être trouvés en annexe B.

Les représentations de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ sont étiquetées par un couple (θ, j) où $\theta \in [0; 2\pi]$ et j est un demi-entier. Parmi ces représentations, on distingue les représentations dites *simples* qui sont les représentations de type $(\theta, 0)$ et $(0, j)$. On notera $\mathcal{V}^{(\theta, j)}$ l'espace de représentation correspondant. On note les deux propriétés suivantes

1. L'espace de représentation $\mathcal{V}^{(0, j)}$ est isomorphe à l'espace de représentation V^j de la représentation de spin j de $\text{SU}(2)$;
2. L'espace de représentation $\mathcal{V}^{(\theta, 0)}$ peut être décomposé en un somme directe de sous-espaces

$$\mathcal{V}^{(\theta, 0)} = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{V}_k^{(\theta, 0)}, \quad (10.22)$$

où le sous-espace $\mathcal{V}_k^{(\theta, 0)}$ est isomorphe à V^k .

Une caractéristique importante du groupe quantique $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ est qu'il peut être pensé comme une déformation du groupe de Poincaré $ISO(3)$. Ce fait est par exemple discuté dans [103]. On peut d'ailleurs remarquer la similarité des structures des représentations.

La procédure d'évaluation Reshetikhin-Turaev fait intervenir la trace sur les espaces des représentations. On définit les notions suivantes :

Définition 1 Un endomorphisme \mathcal{E} de $\mathcal{V}^{(\theta, 0)}$ est dit **simple** si sa trace sur le sous-espace $\mathcal{V}_k^{(\theta, 0)}$ est égale à $(2k+1)T_{\mathcal{E}}$ pour tout k , où $T_{\mathcal{E}}$ est indépendant de k . Dans ce cas, $T_{\mathcal{E}}$ est appelé **trace réduite** de \mathcal{E} sur $\mathcal{V}^{(\theta, 0)}$.

Dans la suite, nous aurons à tracer sur des représentations $(\theta, 0)$ et nous utiliserons systématiquement la notion de trace réduite. Cela implique bien sur de prouver que tous les endomorphismes à tracer sont simples.

10.3.2 Les évaluations Reshetikhin-Turaev de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$

Je présente dans cette partie quelques exemples d'évaluations de Reshetikhin-Turaev que l'on peut faire à partir du groupe $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ et de ses représentations.

Le cas le plus simple consiste à regarder le braiding de deux représentations simples de même type. Le braiding de deux représentations simples $(0, j_1)$ et $(0, j_2)$ est en fait trivial puisqu'on a

$$\begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = P_{12} \tag{10.23}$$

où P_{12} désigne la simple permutation $V^{j_1} \otimes V^{j_2} \rightarrow V^{j_2} \otimes V^{j_1}$. L'évaluation qui sera intéressante dans notre cas est celle où un cercle portant une représentation $(\theta, 0)$ enlace une représentation $(0, j)$. Dans ce cas on montre [38] que l'endomorphisme de $\mathcal{V}^{(\theta, 0)}$ est simple, que la notion de trace réduite s'applique et qu'on a alors

$$\begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \theta \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} = \int_{G/H} dx D^j(x h_\theta x^{-1}), \tag{10.24}$$

où h_θ est un représentant de $U(1)$ décrit en appendice A. Plus généralement on a le résultat

$$\begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad j_3 \quad \dots \quad j_n \quad \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \theta \curvearrowright \quad \leftarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \int_{G/H} dx \prod_{i=1}^N D^{j_i}(x h_\theta^{\epsilon_i} x^{-1}), \tag{10.25}$$

où $\epsilon_i = \pm 1$ encode le croisement relatif des composantes j_i et de la composante θ . Là aussi l'endomorphisme à tracer est simple et la notion de trace réduite s'applique. Nous verrons que cette évaluation sera la clé de l'équivalence entre le modèle de Ponzano-Regge et l'évaluation Reshetikhin-Turaev de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$.

10.3.3 Lien de chain-mail colorié

Pour définir l'invariant de chain-mail qui nous intéresse, il nous faut spécifier un lien et sa coloration par des représentations.

On considère une triangulation Δ de \mathcal{M} , ainsi qu'un choix d'arbre maximaux \mathcal{T} et \mathcal{T}^* respectivement dans Δ et Δ^* . On construit le lien de chain-mail L_Δ associé à Δ . On définit alors le lien $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}$ obtenu de L_Δ en lui supprimant les composantes C_e pour les arêtes $e \in \mathcal{T}$ et les composantes C_{e^*} pour les arêtes duales $e^* \in \mathcal{T}^*$. On colorie ensuite les composantes C_e pour $e \notin \mathcal{T}$ par un ensemble de représentations simples $(0, j_e)$, et les composantes C_{e^*} par un ensemble de représentations simples $(\theta_{e^*}, 0)$. On obtient ainsi un lien colorié $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$, dont on peut définir l'évaluation Reshetikhin-Turaev

$$\mathrm{eval}[L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})] \in \mathbb{C}. \quad (10.26)$$

On montre [38] qu'au cours du processus d'évaluation, **tous les endormorphismes à tracer sont simples** au sens de la définition 1. Cette évaluation est donc définie en utilisant la notion de trace réduite. On définit ensuite l'invariant de chain-mail construit sur les représentations simples de $\mathcal{D}(\mathrm{SU}(2))$.

Définition 2 On définit les représentations Ω et Ω^* comme combinaison linéaire formelle des représentations simples

$$(\Omega) = \sum_j (2j+1) (j), \quad (10.27)$$

$$(\Omega^*) = \int_{H/W} d\theta \Delta^2(\theta) (\theta), \quad (10.28)$$

où on rappelle $\Delta(\theta) = \sin \theta$. L'invariant de chain-mail construit sur les représentations simples de $\mathcal{D}(\mathrm{SU}(2))$ est défini comme l'évaluation Reshetikhin-Turaev de $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}$ où toutes les composantes C_e sont coloriées par Ω et toutes les composantes C_{e^*} sont coloriées par Ω^* . On a donc

$$CM(\mathcal{M}) = \left(\prod_e \sum_{j_e} d_{j_e} \right) \left(\prod_{e^*} \int_{U(1)} d\theta_{e^*} \Delta^2(\theta_{e^*}) \right) \times \mathrm{eval}[L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})], \quad (10.29)$$

A ce stade j'appelle 'invariant' cet objet, même si je n'ai pas encore prouvé que cette définition est indépendante des divers ingrédients utilisés. Cette preuve est donnée par le théorème qui prouve son égalité avec l'invariant de Ponzano-Regge, dont la preuve d'invariance était l'objet du théorème 1.

10.3.4 Equivalence

Le second théorème important prouvé dans [38] est le suivant :

Théorème 2 L'évaluation Reshetikhin-Turaev du lien colorié $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$ est égale à

$$\mathrm{eval}[L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})] = Z_\Delta(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\}), \quad (10.30)$$

où $Z_\Delta(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$ est l'amplitude d'une triangulation coloriée définie en (7.13).

Il s'ensuit de la définition (10.29) et de la relation (7.12) que

$$CM(\mathcal{M}) = PR(\mathcal{M}). \tag{10.31}$$

Ceci prouve que $CM(\mathcal{M})$ est bien un invariant.

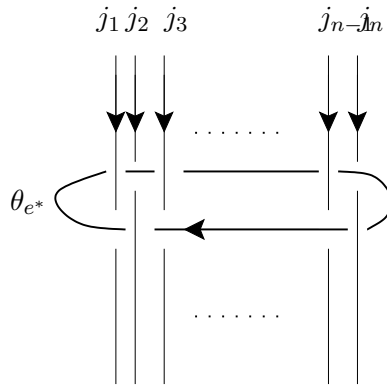
La preuve de ce théorème consiste à d'une part découper le lien colorié en blocs élémentaires qu'on sait évaluer, d'autre part à montrer que la combinaison de ces évaluations élémentaires redonne la quantité $Z_\Delta(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$. Pour cela on partira de l'expression suivante obtenue en scindant les caractères en matrices de représentation

$$Z_\Delta(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\}) = \left(\prod_{e^*} \int_{G/H} dx_{e^*} \right) \prod_I D_{a_I b_I}^{j_I} (x_I h_{\theta_I}^{c(I)} x_I^{-1}) \prod_I \delta_{b_I, a_s(I)}. \tag{10.32}$$

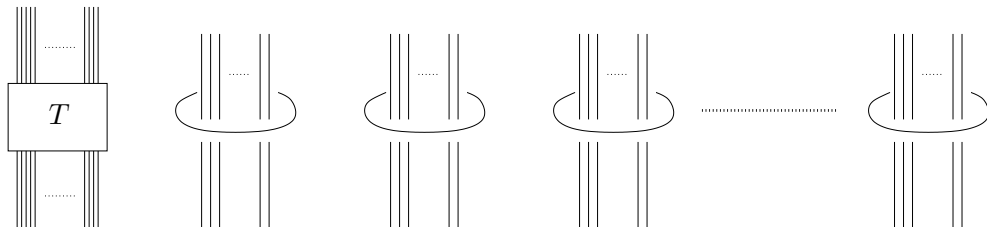
avec les notation de (7.10), c'est à dire que I désigne un couple (e, e^*) où $e \subset f \sim e^*$.

Découpage du lien

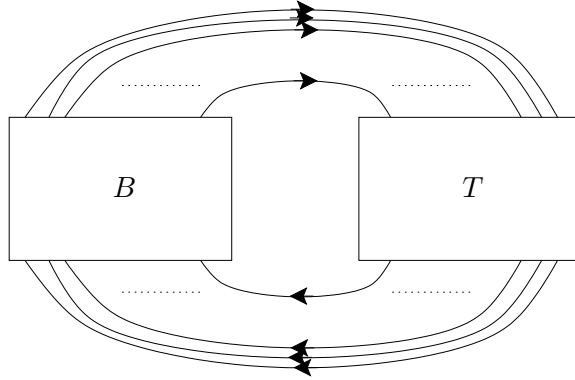
La façon dont on découpe le lien peut être sommairement décrite de la manière suivante : on isole les composantes C_{e^*} sous la forme de diagrammes



Dans un tel diagramme, chaque tresse verticale représente un couple $I = (e, e^*)$, c'est à dire une arête e de la face $f \sim e^*$. Pour chaque face, on dispose ces diagrammes les uns à côté des autres afin de former un diagramme



Chaque diagramme élémentaire est associé à une face $f \sim e^*$ de Δ . Le lien de chain-mail est ensuite obtenu en refermant les tresses, c'est à dire en connectant ensemble les tresses verticales qui sont associées à une même arête e . Cela se fait à l'aide d'un diagramme



où B désigne un diagramme qui est une simple permutation des tresses labelées par I .

Evaluation du lien

On a donc vu que le lien $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$ peut s'écrire comme le produit de deux diagrammes coloriés B et T , le diagramme T se mettant lui même sous la forme d'un produit

$$T = \bigotimes_{e^*} T_{e^*}. \quad (10.33)$$

On peut alors montrer [38] que son évaluation est

$$\mathrm{eval}[T_{e^*}] = \int_{G/H} dx_{e^*} \bigotimes_{e \subset e^*} D^{j_e}(x_{e^*} h_{\theta_{e^*}}^{\epsilon(e, e^*)} x_{e^*}^{-1}) \quad (10.34)$$

Ceci prouve que l'évaluation du diagramme T est

$$\mathrm{eval}[T] = \left(\prod_{e^*} \int_{G/H} dx_{e^*} \right) \prod_I D_{a_I b_I}^{j_I}(x_I h_{\theta_I}^{\epsilon(I)} x_I^{-1}) \quad (10.35)$$

On montre [38] pour finir que le diagramme B – qui n'est constitué que de permutations de tresses du type (10.23) – s'évalue à

$$\mathrm{eval}[B] = \prod_I \delta_{b_I, a_s(I)}. \quad (10.36)$$

Ceci prouve donc que l'évaluation de $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$ est bien égale à celle de $Z_{\Delta}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$, et par la suite que l'invariant $PR(\mathcal{M})$ est égal à $CM(\mathcal{M})$. Ce dernier est donc lui aussi un invariant.

10.4 THÉORÈME D'INVARIANCE SOUS LES DIFFÉRENTES FIXATIONS

L'invariant de chain-mail basé sur $\mathcal{D}(\mathrm{SU}(2))$ est construit à partir du lien $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}$ colorié par les représentations Ω et Ω^* . Une définition équivalente est de considérer le lien L_{Δ} tout entier, colorié de la manière suivante

- Les composantes C_e pour $e \in \mathcal{T}$ sont coloriées par la représentation simple $j = 0$;
- Les composantes C_e pour $e \notin \mathcal{T}$ sont coloriées par la représentation Ω ;

- Les composantes C_{e^*} pour $e^* \in \mathcal{T}^*$ sont coloriées par la représentation simple $\theta = 0$;
- Les composantes C_{e^*} pour $e^* \notin \mathcal{T}^*$ sont coloriées par la représentation Ω^* .

Par analogie avec l'écriture présentée pour le modèle de Ponzano-Regge (8.49), on note cet objet

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*} \rangle. \quad (10.37)$$

On peut là aussi définir une généralisation de cet objet en coloriant les composantes C_e pour $e \in \mathcal{T}$ par des représentations fixées J_e et celles de C_{e^*} pour $e^* \in \mathcal{T}^*$ par des représentations fixées Θ_{e^*} . L'évaluation correspondante définit alors

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, J_e, \Theta_{e^*}} \rangle. \quad (10.38)$$

Cet objet correspond donc à une fixation de jauge, où l'on fixe les représentations des arbres \mathcal{T} et \mathcal{T}^* à des valeurs différentes de la représentation triviale. Le théorème qui prouve l'indépendance de la procédure de fixation de jauge sous le choix des représentations des arbres est le suivant

Théorème 3 *Pour tout choix de représentations simples $(0, J_e)$ sur les $e \in \mathcal{T}$ et de représentations simples $(\Theta_{e^*}, 0)$ sur les $e^* \in \mathcal{T}^*$, on a*

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, J_e, \Theta_{e^*}} \rangle = \mathcal{V}(J_e) \times CM(\mathcal{M}), \quad (10.39)$$

où $\mathcal{V}(J_e)$ est le volume résiduel

$$\mathcal{V}(J_e) = \prod_e d_{J_e}. \quad (10.40)$$

La preuve de ce théorème se fait en utilisant les identités de sliding. On montre la chose suivante : grâce aux identités de sliding, les composantes qui forment les arbres \mathcal{T} et \mathcal{T}^* peuvent être glissées successivement et indépendamment hors du lien. A la suite de cette opération, on se retrouve avec un lien composée du lien colorié $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$, et de composantes non-nouées portant les représentations $(0, J_e)$ et $(\Theta_e, 0)$. L'évaluation du lien $L_{\Delta, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*}(\{j_e\}, \{\theta_{e^*}\})$ fournit $CM(\mathcal{M})$, l'évaluation des composantes libres est égale au volume $\mathcal{V}(J_e)$.

10.5 COMMENTAIRES ET CONJECTURES

Les deux théorèmes exposés dans cette partie et que nous avons prouvés dans [38] montrent que l'amplitude de Ponzano-Regge fixée de jauge est un invariant, et que cet invariant est égal à l'invariant de chain-mail obtenu à partir des représentations simples de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$. Ceci ne correspond qu'à la moitié du théorème de Roberts-Turaev-Walker : est-il possible d'écrire $PR(\mathcal{M})$ et $CM(\mathcal{M})$ comme le carré d'un invariant de Reshetikhin-Turaev ?

Pour cela comparons les deux situations :

Cas $U_q(\text{SU}(2))$: TV pour $U_q(\text{SU}(2)) = \text{CM}$ pour toutes les représentations de $U_q(\text{SU}(2))$;

Cas $\text{SU}(2)$: TV pour $\text{SU}(2) = \text{CM}$ pour les représentations **simples** de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$.

Ces deux situations nous donnent-elles des résultats vraiment différents ? En réalité non, la raison en est que

$$\begin{aligned} & CM \text{ pour toutes les représentations de } U_q(\text{SU}(2)) = \\ & CM \text{ pour les représentations simples de } \mathcal{D}(U_q(\text{SU}(2))). \end{aligned}$$

Les deux situations nous disent en fait la même chose : que le bon invariant de chain-mail à considérer est celui bâti avec les représentations simples du double. En revanche pour $U_q(\mathrm{SU}(2))$, le 'petit miracle' qui se produit est que

$$\mathcal{D}(U_q(\mathrm{SU}(2))) \sim U_q(\mathrm{SU}(2)) \otimes U_q(\mathrm{SU}(2)), \quad (10.41)$$

et que les représentations simples de $\mathcal{D}(U_q(\mathrm{SU}(2)))$ sont les représentations de type (j, j) , et sont en isomorphisme avec les représentations j de $U_q(\mathrm{SU}(2))$. Ce petit miracle est également à l'origine du fait que l'invariant de chain-mail possède une racine carrée.

Conjecture : Si G est un groupe à partir duquel on peut bâtir un invariant de Turaev-Viro (Essentiellement on a besoin de l'existence d'un symbole $6j$, donc d'un coefficient de Clebsch-Gordan, ce qui suppose que le produit tensoriel de deux représentations se décompose en somme de représentations, où chaque représentation apparaît avec une multiplicité un au maximum), cet invariant est égal à l'invariant de chain-mail construit avec les représentations simples du groupe quantique $\mathcal{D}(G)$.

11

ASYMPTOTIQUES ET DUALITÉS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Le but de ce chapitre est d'exposer brièvement les idées présentées dans [34] qui ont conduit à la démonstration de l'asymptotique du symbole $6j$ de $SU(2)$, ainsi que des symboles $6j$ de $SL(2, \mathbb{R})$ et du symbole $10j$. Je présente enfin quelques idées sur les asymptotiques des symboles $6j$ quantiques et les relations de dualité vérifiées par de tels symboles. Ce dernier travail est en cours de rédaction [39].

11.1 ASYMPTOTIQUE DU SYMBOLE $6j$

La problématique consiste à étudier le comportement asymptotique du symbole $6j$ lorsque les valeurs des spins tendent vers l'infini, c'est à dire le comportement asymptotique de

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Nj_1 & Nj_2 & Nj_3 \\ Nj_4 & Nj_5 & Nj_6 \end{array} \right\}, \quad (11.1)$$

pour $N \rightarrow +\infty$. La technique que nous utilisons consiste à

- Récrire le carré du symbole $6j$ sous la forme d'une intégrale numérique ;
- Étudier l'asymptotique de cette intégrale par des techniques de phase stationnaire.

11.1.1 Réécriture numérique et interprétation géométrique

Cette réécriture a été faite en deux temps. Tout d'abord on exprime le symbole $6j$ comme une intégrale sur des variables de groupe $SU(2)$, ensuite on transforme ces variables de groupe en variables numériques par une paramétrisation de $SU(2)$. Le premier résultat est le suivant[34]

Proposition 1 *Le carré du symbole $6j$ peut se récrire en termes d'intégrales sur le groupe $SU(2)$ par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{01} & j_{02} & j_{03} \\ j_{23} & j_{13} & j_{12} \end{array} \right\}^2 = \int_{G^4} dg_0 dg_1 dg_2 dg_3 \prod_{0 \leq I < J \leq 3} \chi^{j_{IJ}}(g_I g_J^{-1}), \quad (11.2)$$

où χ^j désigne le caractère de la représentation j .

L'idée qui est à la base de cette preuve est qu'un symbole $6j$ s'obtient à partir de 4 symboles $3j$. Le carré du $6j$ est donc donné par 4 paires de symboles $3j$, lesquelles peuvent être transformées

en intégrales sur le groupe en utilisant la relation (A.34). Géométriquement, on peut interpréter cette écriture de la manière suivante. Au départ l'intégrale est formulée sur $SU(2)^4$. Or le groupe $SU(2)$ est isomorphe à la 3-sphère S^3 . Un quadruplet (g_0, g_1, g_2, g_3) définit 4 points sur S^3 c'est à dire un tétraèdre sphérique. L'intégrale qui définit le $6j$ s'écrit donc comme une intégrale sur l'espace des tétraèdres sphériques.

On peut ensuite transformer cette intégrale en intégrale numérique en utilisant une paramétrisation de G^4 . En fait on constate que l'intégrand est défini sur G^3/AdG . Géométriquement cela signifie que l'intégrale n'est pas sur l'espace des tétraèdres sphériques de S^3 mais seulement sur leur classe d'équivalence modulo translation et rotation. Nous avons introduit dans [34] une paramétrisation de G^3/AdG qui, en tenant compte du changement de mesure, permet de récrire le résultat de la manière suivante.

Proposition 2 *Le carré du $6j$ se réécrit en termes de variables numériques angulaires comme*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{01} & j_{02} & j_{03} \\ j_{23} & j_{13} & j_{12} \end{array} \right\}^2 = \frac{2}{\pi^4} \int_{\mathcal{D}_\pi} \prod_{0 \leq I < J \leq 4} d\theta_{IJ} \frac{\sin[(2j_{IJ} + 1)\theta_{IJ}]}{\sqrt{\det G(\theta)}} \quad (11.3)$$

où \mathcal{D}_π est le domaine sous-ensemble de $[0; \pi]^6$ satisfaisant pour tout (I, J, K) les inégalités

$$\theta_{IJ} \leq \theta_{IK} + \theta_{JK}, \quad (11.4)$$

$$2\pi \geq \theta_{IJ} + \theta_{IK} + \theta_{JK}. \quad (11.5)$$

La matrice $G(\theta)$ est une matrice 4×4 dont les éléments sont donnés par

$$G_{IJ} = \cos(\theta_{IJ}). \quad (11.6)$$

Géométriquement, nous avons maintenant une intégrale sur l'espace des tétraèdres sphériques abstraits. De même qu'un tétraèdre plat abstrait est entièrement spécifié par ses 6 longueurs, un tétraèdre sphérique abstrait est entièrement spécifié par ses 6 longueurs sphériques θ_{IJ} . Le domaine \mathcal{D}_π est le domaine des tétraèdres sphériques, et contient les inégalités que satisfont leurs longueurs. Géométriquement, la matrice G est la matrice de Gram du tétraèdre sphérique[106].

11.1.2 Asymptotique

Si l'on multiplie les spins par N en faisant tendre N vers l'infini, on se retrouve à évaluer le comportement asymptotique de l'intégrale

$$I(N) = \frac{2}{\pi^4} \int_{\mathcal{D}_\pi} \prod_{0 \leq I < J \leq 4} d\theta_{IJ} \frac{\sin[(2Nj_{IJ} + 1)\theta_{IJ}]}{\sqrt{\det G(\theta)}}. \quad (11.7)$$

Cette intégrale est une intégrale à phase oscillante et se trouve donc parfaitement adaptée à des techniques de phase stationnaire [107]. Cependant une difficulté supplémentaire intervient du fait de la singularité du dénominateur. Je me propose d'illustrer ceci sur un exemple 1D.

Un exemple 1D

La philosophie qui conduit la méthode de la phase stationnaire consiste à

- Sélectionner les points qui vont contribuer le plus à l'asymptotique (ici les points où la phase est stationnaire) ;
- Développer l'intégrale autour de ces points contributants, en une intégrale qu'on sait calculer.

Nous allons voir que cette philosophie s'applique aussi aux points singuliers.

Considérons une intégrale

$$I(N) = \int_0^1 dx f(x) e^{i\varphi(x)}. \quad (11.8)$$

Supposons que la phase possède un unique point stationnaire $\varphi'(a) = 0$. En développant autour de ce point, on évalue la contribution de ce point à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(\delta x) f(a) e^{iN(\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi''(a)(\delta x)^2)}. \quad (11.9)$$

L'intégrale obtenue est une gaussienne que l'on sait effectuer. La contribution du point a est alors

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \times f(a) e^{iN\varphi(a)} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(\varphi''(a))} \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(a)|}} \quad (11.10)$$

où σ désigne le signe. C'est une contribution en $1/\sqrt{N}$.

Supposons maintenant que la fonction f soit en réalité singulière en 0, avec un comportement

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{C}{\sqrt{x}}. \quad (11.11)$$

On suppose que 0 n'est pas point stationnaire de l'action. On peut alors développer l'intégrale autour de ce point en essayant de se ramener à une intégrale qu'on sait calculer

$$\int_0^{+\infty} d(\delta x) \frac{1}{\sqrt{\delta x}} e^{iN(\varphi(0) + \varphi'(0)\delta x)}. \quad (11.12)$$

En posant le changement de variable $u = \sqrt{N\delta x}$, on obtient une intégrale gaussienne, et finalement la contribution du point 0 est

$$\frac{1}{\sqrt{N}} C e^{iN\varphi(0)} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(\varphi'(0))} \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi'(0)|}}, \quad (11.13)$$

qui est elle aussi une contribution en $1/\sqrt{N}$.

Ce petit calcul montre la chose suivante : *Lorsque l'intégrand est singulier, la phase stationnaire ne fournit pas la seule contribution aux asymptotiques : une contribution équivalente – voire dominante – peut provenir de points singuliers de l'intégrand. Cette contribution peut, comme pour la phase stationnaire, être capturée en développant l'intégrale autour de ces points singuliers, et en se ramenant à une intégrale qu'on sait calculer.*

Je vais maintenant présenter l'analyse asymptotique de l'intégrale $I(N)$. Cette analyse se base sur les mêmes idées que cet exemple 1D, c'est à dire que les contributions asymptotiques peuvent provenir de points stationnaires mais aussi de points singuliers.

La contribution phase stationnaire

L'intégrale numérique

$$I(N) = \frac{2}{\pi^4} \int_{\mathcal{D}_\pi} \prod_{0 \leq I < J \leq 4} d\theta_{IJ} \frac{\sin[(2Nj_{IJ} + 1)\theta_{IJ}]}{\sqrt{\det G(\theta)}}, \quad (11.14)$$

possède une contribution stationnaire. Celle-ci peut être obtenue en récrivant le déterminant comme une intégrale gaussienne d'une part, et en scindant les sinus en exponentielles d'autre part. On obtient alors l'écriture suivante

$$I(N) = \frac{2N^2}{(2\pi)^6} \sum_{\{\epsilon_{IJ} = \pm 1\}} \left(\prod_{I < J} \epsilon_{IJ} \right) \times \int_{\mathbb{R}^4} dX_I \prod_{\mathcal{D}_\pi} d\theta_{IJ} e^{i\varphi_N(\theta_{IJ}, X_I, \epsilon_{IJ})} \quad (11.15)$$

où la phase est donnée par

$$\varphi_N(\theta_{IJ}, X_I, \epsilon_{IJ}) = \sum_{I < J} \epsilon_{IJ} \theta_{IJ} + N \left(\sum_{I < J} 2\epsilon_{IJ} j_{IJ} \theta_{IJ} + \sum_{I, J} X_I \cos \theta_{IJ} X_J \right). \quad (11.16)$$

Je ne détaillerai pas ici l'analyse des différentes contributions stationnaires de ces intégrales (voir [34]), le résultat intéressant à noter vient du fait que les points stationnaires ont une interprétation géométrique. Les solutions trouvées sont essentiellement (par exemple pour l'intégrale où tous les $\epsilon_{IJ} = +1$)

$$\theta_{IJ} = \Theta_{IJ} \quad (11.17)$$

$$X_I = \frac{A_I}{3V} \quad (11.18)$$

où Θ_{IJ} , A_I et V sont respectivement les angles diédraux, les aires et le volume du tétraèdre plat dont les longueurs sont données par $2j_{IJ}$.

En calculant la contribution totale de toutes les intégrales possédant des points stationnaires, et après calcul du déterminant et de la signature de la matrice Hessienne associée [34], on trouve la contribution stationnaire totale

$$C_{stat}(N) = -\frac{1}{3\pi N^3 V} \sin \left[\sum_{I < J} (2Nj_{IJ} + 1)\Theta_{IJ} \right]. \quad (11.19)$$

On note que cette contribution est en $1/N^3$.

Contribution singulière

Dans le cas de l'intégrale dont nous cherchons l'asymptotique, il existe des contributions singulières de même poids. Ces contributions proviennent des points les plus singuliers, et ceux-ci possèdent aussi une interprétation géométrique.

Le domaine d'intégration \mathcal{D}_π peut être vu comme un domaine de longueur sphériques de tétraèdres sphériques. En revanche, le sous-espace de \mathcal{D}_π définit par

$$\det[G(\theta)] = 0, \quad (11.20)$$

est l'espace des angles diédraux possibles d'un tétraèdre plat. Il s'agit en somme de l'espace des tétraèdres plats, à dilatation près. Parmi ces tétraèdres, il en existe certains d'un type totalement dégénéré. Il s'agit des 8 configurations possibles de \mathcal{D}_π où tous les angles θ sont 0 ou π . Ces 8 configurations sont les plus singulières de l'intégrand, et contribuent au comportement asymptotique. Pour comprendre ce comportement, examinons par exemple le cas où tous les θ_{IJ} sont nuls (en fait les 8 configurations sont symétriques et la contribution est la même pour toutes ces configurations).

On développe l'intégrale autour de la configuration $\theta_{IJ} = 0$, et on étend l'intégrale à l'infini. On pose un changement de variable $u_{IJ} = N\theta_{IJ}$. Le développement du dénominateur autour des contributions dégénérées se fait grâce au développement suivant

$$\sqrt{\det[\cos G(\frac{u}{N})]} \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^3} 6V^*(u_{IJ}), \quad (11.21)$$

où V^* est le volume du tétraèdre dont la longueur de l'arête $[IJ]$ est donnée par u_{KL} avec $I \neq J \neq K \neq L$. On obtient alors la contribution dégénérée

$$C_{deg}(N) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{1}{N^3} \int_{\mathcal{D}_{+\infty}} \frac{\prod_{I < J} \sin(2j_{IJ}u_{IJ})}{3\pi V^*(u_{IJ})}, \quad (11.22)$$

où \mathcal{D}_∞ est le domaine de $(\mathbb{R}^+)^6$ satisfaisant l'inégalité triangulaire $u_{IJ} \leq u_{IK} + u_{JK}$ pour tout triple (I, J, K) .

Le point remarquable est qu'il est possible de calculer exactement cette intégrale. Le calcul explicite [34] fait apparaître une remarquable propriété de self-dualité sur le volume du tétraèdre. On a

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int_{\mathcal{D}_\infty} \left(\prod_{I < J} \sin(2j_{IJ}u_{IJ}) du_{IJ} \right) \frac{1}{V^*(u_{IJ})} = \frac{1}{V(2j_{IJ})}, \quad (11.23)$$

où $V(2j_{IJ})$ est le volume du tétraèdre dont la longueur de l'arête $[IJ]$ est donnée par $2j_{IJ}$. La forme explicite de la contribution dégénérée est donc

$$C_{deg}(N) = \frac{1}{3\pi N^3 V}. \quad (11.24)$$

Finalement, en regroupant les contributions stationnaires et dégénérées, on obtient

$$I(N) \sim \frac{1}{N^3} \frac{2}{3\pi V} \cos^2 \left[\sum_{I < J} (Nj_{IJ} + \frac{1}{2}) \Theta_{IJ} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (11.25)$$

en accord avec la conjecture de Ponzano et Regge [30].

11.2 L'ASYMPTOTIQUE DU SYMBOLE $10j$

11.2.1 Le modèle de Barrett-Crane

Le modèle de Barrett-Crane[31, 32] est un modèle de mousse de spin pour la gravité quantique. Il est formulé d'une manière analogue au modèle de Ponzano-Regge. Je ne présenterai pas ici les arguments qui permettent de construire ce modèle à partir de l'action de Plebanski (voir chapitre 3). La philosophie de cette construction est la suivante. L'action de Plebanski permet d'écrire

la relativité générale à l'aide de la théorie BF $SO(4)$ en 4 dimensions, à laquelle on adjoint une contrainte. L'idée de la construction du modèle de Barrett-Crane consiste à "quantifier puis contraindre", c'est à dire d'abord fabriquer un modèle de mousse de spin pour la théorie BF $SO(4)$, puis contraindre ce modèle au niveau quantique[56].

Le résultat de cette construction est le suivant : on considère une triangulation Δ d'une variété 4D et l'on définit l'amplitude

$$Z_{BC}[\Delta] = \sum_{\{j\}} \prod_f (2j_f + 1)^2 \prod_t A_t \prod_{\sigma} \left\{ \begin{array}{ccccc} j_{\sigma_1} & j_{\sigma_2} & j_{\sigma_3} & j_{\sigma_4} & j_{\sigma_5} \\ j_{\sigma_6} & j_{\sigma_7} & j_{\sigma_8} & j_{\sigma_9} & j_{\sigma_{10}} \end{array} \right\} \quad (11.26)$$

L'amplitude A_t pour le tétraèdre dépend des modèles considérés. L'amplitude associée à un 4-simplexe σ est appelée *symbole* $10j$. Il est une fonction des 10 spins vivant sur les faces du 4-simplexe. Une définition de ce symbole est donnée par une formule très analogue à celle du carré du $6j$ [108]

$$\int_{\text{SU}(2)^5} dg_1 \cdots dg_5 \prod_{1 \leq I < J \leq 5} \chi^{j_{IJ}}(g_I g_J^{-1}). \quad (11.27)$$

11.2.2 L'asymptotique du symbole $10j$

Un argument originel en faveur du modèle de Barrett-Crane était donné – comme pour le modèle de Ponzano-Regge – par l'asymptotique du symbole $10j$. Barrett et Williams prouvèrent[109] qu'une contribution de l'asymptotique du symbole $10j$ était proportionnelle au cosinus de l'action de Regge pour la gravité 4D discrétisée. Cet argument semblait faire du symbole $10j$ la bonne brique élémentaire pour construire un modèle de mousse de spin en 4D. Cependant des études numériques [110] montrèrent que le comportement asymptotique des symboles $10j$ est en fait dominé par une autre contribution, non-oscillante, que Barrett et Williams avaient notée, mais sans en calculer l'effet.

Dans l'article [34], nous avons analysé l'asymptotique du symbole $10j$ en tenant compte de toutes les contributions. Cette analyse peut se faire selon les mêmes lignes que celle du symbole $6j$ mais révèle une situation différente : l'asymptotique du symbole $10j$ possède lui aussi la contribution oscillante de phase stationnaire – le terme trouvé par Barrett et Williams et qui reproduit l'action de Regge – mais aussi une contribution non-oscillante provenant des configurations dégénérées. En revanche, la contribution dégénérée *domine* asymptotiquement la contribution oscillante. On trouve que la contribution oscillante se comporte en $1/N^{9/2}$, alors que la contribution dégénérée se comporte en $1/N^2$ et est égale à

$$\frac{16}{N^2} \int_{(\mathbb{R}^3)^4} \prod_{I=1}^4 \frac{d\vec{u}_I}{2\pi^2} \prod_{I < J} \frac{\sin(2j_{IJ} |\vec{u}_J - \vec{u}_I|)}{|\vec{u}_J - \vec{u}_I|}. \quad (11.28)$$

Cela signifie que dans le cas du symbole $10j$ les contributions dégénérées dominent dans l'asymptotique. La limite semi-classique du modèle de Barrett-Crane n'est donc pas donnée par l'exponentielle de l'action de Regge. On en conclut que l'asymptotique du symbole $10j$ montre que le modèle de Barrett-Crane n'a pas tel quel la bonne limite semi-classique. Ce résultat a également été étudié dans [110, 111].

11.2.3 Guérir le symbole $10j$?

L'asymptotique du symbole $10j$ semble montrer que cet objet ne constitue pas une bonne amplitude pour bâtir un modèle de mousse de spin pour la gravité 4D. Il est pourtant intéressant de regarder de plus près les problèmes que ce résultat pose, et les solutions qui s'offrent à nous pour le contourner.

L'asymptotique du symbole $10j$ suggère que les contributions dégénérées dominent l'intégrale de chemin. Cependant il est intéressant de voir que dans le cas du $6j$, les contributions dégénérées étaient *nécessaires* à l'obtention de l'asymptotique correcte ! Dans [34], nous avons proposé une explication de ce phénomène intrigant, en relation avec une idée de physique statistique : l'ordre par le désordre [112].

L'ordre par le désordre en physique statistique

En physique statistique, nous sommes concernés par le calcul d'une fonction de partition

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{T}} \quad (11.29)$$

où la somme porte sur toutes les configurations possibles n , E_n est l'énergie de la configuration n et T la température. Quand la température tend vers 0, on voit alors que la fonction de partition est gouvernée par la contribution de l'état fondamental de plus basse énergie

$$Z \sim_{T \rightarrow 0} e^{-\frac{E_g}{T}}. \quad (11.30)$$

Il s'agit ici de la méthode du col, qui est l'analogue statistique de la méthode de la phase stationnaire. Cependant il est possible que l'état fondamental soit très dégénéré et que de nombreuses configurations possèdent l'énergie minimale. On peut alors se demander lequel de ces états est sélectionné et pour quelles raisons.

Le mécanisme d'ordre par le désordre répond à cette question : ce sont les fluctuations autour des états fondamentaux qui déterminent ceux qui auront une contribution dominante. Comme pour la méthode de la phase stationnaire, on calcule une contribution en développant la fonction de partition autour du point considéré. Imaginons que l'on développe la fonction de partition autour d'un état autour duquel les fluctuations en énergie vont quadratiquement, on aura typiquement la contribution

$$\int dk e^{-\frac{E_g + \alpha k^2}{T}} \quad (11.31)$$

Cette contribution se calcule en effectuant l'intégrale gaussienne, on obtient alors une contribution qui se comporte en

$$e^{-\frac{E_g}{T}} T^{1/2}. \quad (11.32)$$

Supposons maintenant que les fluctuations soient quartiques, on comprend alors que la contribution associée se comportera en

$$e^{-\frac{E_g}{T}} T^{1/4}. \quad (11.33)$$

et sera donc privilégiée par rapport à la précédente, pour $T \rightarrow 0$. On comprend donc que parmi un grand nombre de contributions à la méthode du col provenant d'états fondamentaux dégénérés, ce sont les états ayant les fluctuations d'ordre le plus élevé qui dominent les autres à basse température.

Ordre par le désordre et gravité quantique

A la lumière de cet argument, on peut formuler une interprétation analogue pour la fonction de partition de la gravité quantique. Considérons par exemple la fonction de partition formelle pour l'action de Palatini

$$Z = \int \mathcal{D}e \mathcal{D}\omega \exp \left(\frac{i}{G\hbar} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) \right). \quad (11.34)$$

Cette fois-ci le paramètre \hbar joue le rôle de la température. Le comportement semi-classique à $\hbar \rightarrow 0$ de la fonction de partition provient des solutions classiques des équations du mouvement. Cependant l'équation du mouvement $e \wedge F = 0$ fait que l'action de Palatini évaluée sur les solutions des équations du mouvement est toujours nulle (en l'absence de termes de bord). Toutes les contributions classiques ayant la même action, elles ne sont pas départagées par celle-ci. En revanche on voit que les fluctuations autour des solutions sont quadratiques, sauf pour les solutions dégénérées ! Par exemple pour la solution totalement dégénérée $e = 0, \omega = 0$, les fluctuations sont cubiques et l'on s'attend donc à ce que la contribution associée domine dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Il est intéressant de noter qu'en 3D, les fluctuations autour des solutions totalement dégénérées sont seulement quadratiques, et cela permet de justifier que les contributions dégénérées dans l'asymptotique du symbole $6j$ sont d'un poids identique aux contributions non-dégénérées.

Cette analyse semble suggérer que la domination des contributions dégénérées n'est pas à mettre sur le compte du modèle de Barrett-Crane lui-même, mais sur le fait que nous tentons de construire un modèle de gravité quantique à partir de l'intégrale de chemin d'une action qui favorise naturellement les contributions dégénérées dans la limite semi-classique. Le rôle des configurations dégénérées en gravité n'étant pas à ce jour totalement tranché, une manière pragmatique de régler ce problème consiste à exclure à la main les configurations problématiques. Une manière de réaliser cette exclusion au niveau du modèle de Barrett-Crane consiste à modifier la définition du $10j$ en remplaçant les caractères par

$$K_\epsilon^j(g_1, g_2) = \chi^j(g_1 g_2^{-1}) C_\epsilon(g_1 g_2^{-1}) \quad (11.35)$$

où C_ϵ est une fonction de cut-off, qui satisfait $C_\epsilon(e^X) = 1$ si $|X| > \epsilon$ et $C_\epsilon(e^X) = 0$ si $|X| < \epsilon$. Un avantage de cette modification ad-hoc est qu'elle préserve un des atouts du modèle de Barrett-Crane qui est la possibilité de l'écrire à l'aide d'une théorie des champs auxiliaires [113].

11.3 SYMBOLE $6j$ QUANTIQUE ET RELATIONS DE DUALITÉ

La preuve de l'asymptotique du symbole $6j$ pour le groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$ est un problème qui a reçu beaucoup d'attention de la part des mathématiciens ces dernières années [79, 84]. Je présente ici quelques idées que nous avons développées sur ce sujet, en relation avec des formules de dualité.

11.3.1 Les différentes formules de dualité

Nous disposons à ce stade d'un ensemble étonnant de formules ayant fait leur apparition dans l'étude des symboles $6j$. Pour le symbole $6j$ du groupe quantique $U_q(\text{SU}(2))$ pour q racine de l'unité, Barrett[90] a prouvé la formule de dualité suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{01} & j_{02} & j_{03} \\ j_{23} & j_{13} & j_{12} \end{array} \right\}_q^2 = \left(\frac{2}{k} \right)^3 \sum_{i_{IJ}=1 \dots k} \left\{ \begin{array}{ccc} i_{01} & i_{02} & i_{03} \\ i_{23} & i_{13} & i_{12} \end{array} \right\}_q^2 \prod_{I < J} \sin \left[\frac{\pi}{k} (j_{IJ} + 1)(i_{IJ} + 1) \right] \quad (11.36)$$

qui relie par transformée de Fourier discrète le carré du $6j$ quantique à lui-même. Un analogue de cette formule peut également être prouvé dans le cas d'un paramètre de déformation q réel [39]. Ces formules de dualité pour les $6j$ quantiques sont à mettre en regard de deux autres formules analogues que nous avons rencontré au cours de l'étude des asymptotiques du $6j$ classique. Le carré du $6j$ classique s'exprime lui aussi comme une transformée de Fourier (11.3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_{01} & j_{02} & j_{03} \\ j_{23} & j_{13} & j_{12} \end{array} \right\}^2 = \frac{2}{\pi^4} \int_{\mathcal{D}_\pi} \prod_{I<J} d\theta_{IJ} \sin[(j_{IJ} + 1)\theta_{IJ}] \frac{1}{\sqrt{\det[\cos \theta_{IJ}]}} \quad (11.37)$$

Enfin au cours de la preuve de l'asymptotique du $6j$ classique, nous avons également rencontré la formule suivante (11.23)

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int_{\mathcal{D}_\infty} \left(\prod_{I<J} \sin(l_{IJ} u_{IJ}) du_{IJ} \right) \frac{1}{V^*(u_{IJ})} = \frac{1}{V(l_{IJ})} \quad (11.38)$$

qui est une formule de dualité sur le volume V d'un tétraèdre.

Nous disposons donc de 3 formules très analogues exprimant des relations entre symboles $6j$ via des transformées de Fourier. Nous avons commencé [39] à étudier ces relations. Ces relations suggèrent l'existence d'un phénomène plus général de ce type, que nous conjecturons être une relation entre *carré du symbole $6j$ d'un groupe G et symbole $6j$ du double du groupe $\mathcal{D}(G)$* . Cette interprétation est à l'heure actuelle cohérente avec les relations sur les $6j$ classiques et quantiques. Une utilisation concrète de ces relations consiste à les exploiter pour étudier l'asymptotique du $6j$ quantique.

11.3.2 Asymptotiques du $6j$ quantique

L'asymptotique du symbole $6j$ quantique est un problème qui a reçu une certaine attention ces derniers temps [79, 84]. On considère la racine de l'unité $q = e^{i\pi/k}$, et 6 angles l_{IJ} . On considère alors $\mathcal{T}(l)$ le tétraèdre sphérique dont les longueurs sont les l_{IJ} . On note $V(l)$ son volume et θ_{IJ} ses angles diédraux. On a alors l'asymptotique

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{k}{\pi} l_{01} & \frac{k}{\pi} l_{02} & \frac{k}{\pi} l_{03} \\ \frac{k}{\pi} l_{23} & \frac{k}{\pi} l_{13} & \frac{k}{\pi} l_{12} \end{array} \right\}_q \sim \frac{2\pi}{k^{3/2}} \frac{\cos \left[\frac{k}{\pi} \left(\sum_{I<J} l_{IJ} \frac{\theta_{IJ}}{2} - V(l) + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{\det[\cos l_{IJ}]}} \quad (11.39)$$

En étudiant la limite $k \rightarrow \infty$ de la relation de dualité des $6j$ quantique, et en la comparant à la formule de dualité pour le $6j$ classique, nous avons pu notamment prouver [39] la contribution non-oscillante de l'asymptotique du $6j$ quantique (c'est à dire l'analogue q -déformé de la formule de Wigner). On a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{k}{\pi} l_{01} & \frac{k}{\pi} l_{02} & \frac{k}{\pi} l_{03} \\ \frac{k}{\pi} l_{23} & \frac{k}{\pi} l_{13} & \frac{k}{\pi} l_{12} \end{array} \right\}_q^2 \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2}{k^3} \frac{1}{\sqrt{\det[\cos l_{IJ}]}}. \quad (11.40)$$

Un autre résultat consiste à prouver que l'asymptotique conjecturée pour le $6j$ quantique vérifie bien la relation de dualité. C'est à dire que si on définit la partie oscillante du carré de l'asymptotique conjecturée

$$\mathcal{O}_k(l) = \frac{\sin \frac{k}{\pi} [\sum_{I<J} l_{IJ} \theta_{IJ} - 2V(l)]}{\sqrt{\det[\cos l_{IJ}]}} \quad (11.41)$$

ainsi que sa transformée de Fourier

$$\tilde{\mathcal{O}}_k(\varphi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^6 \int_{\mathcal{D}_\pi} \prod_{I < J} \sin\left(\frac{k}{\pi} l_{IJ} \varphi_{IJ}\right) dl_{IJ} \mathcal{O}_k(l_{IJ}), \quad (11.42)$$

alors elle sont asymptotiquement duales, c'est à dire que

$$\tilde{\mathcal{O}}_k(\varphi) \sim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2}\right)^3 \mathcal{O}_k(\varphi). \quad (11.43)$$

Il est intéressant de noter que ce dernier résultat se prouve à l'aide d'une jolie formule géométrique. En géométrie euclidienne, la donnée de 6 longueurs suffit à spécifier un tétraèdre. On peut à tout tétraèdre associer ses 6 angles diédraux, mais en retour ces derniers ne déterminent le tétraèdre qu'à un facteur d'échelle près. La situation est différente en géométrie sphérique : si l'on considère un tétraèdre sphérique, ce dernier peut aussi bien être décrit en donnant ses 6 longueurs sphériques (qui sont des angles) θ_{IJ} , ou bien ses 6 angles diédraux ϕ_{IJ} . On peut donc considérer le changement de variables d'une de ces descriptions vers l'autre. Le jacobien du changement de variable des longueurs vers les angles est alors

$$\det_{6 \times 6} \left[\frac{d\phi}{d\theta} \right] = \frac{\det_{4 \times 4} [\cos \theta_{IJ}]}{\det_{4 \times 4} [\cos \phi_{IJ}]}. \quad (11.44)$$

Nous n'avons pas trouvé trace dans la littérature de cette formule géométrique. Il est amusant de remarquer que la seule preuve de cette identité que nous avons pu fabriquer fait intervenir la comparaison par *Maple* de deux polynômes à 6 variables, de degré 16 et comportant 1986 termes[39] !

12

SOMME NON-PERTURBATIVE SUR LES TOPOLOGIES

Ce chapitre présente un résultat sur la possibilité de définir de manière non-perturbative une somme sur toutes les topologies d'amplitudes de gravité quantique en 3 dimensions. Ce travail a été publié dans [37].

12.1 PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE

En relativité générale classique, les changements de topologie de l'espace sont interdits. Plus précisément, un théorème dû à Geroch [114] montre qu'un espace-temps contenant deux hypersurfaces de genre espace de topologies différentes doit nécessairement contenir des singularités ou des courbes fermées du genre temps. Dans le cas de la gravité quantique, la situation est moins claire et l'on considère qu'il n'y a pas de raison pour rejeter *a priori* les changements de topologie. D'une manière générale, si les changements de topologie doivent être effectivement interdits au niveau quantique, il serait intéressant d'obtenir cette restriction au niveau dynamique, plutôt que par une interdiction *a priori*.

La question des possibles changements de topologie se pose de manière privilégiée dans une quantification par intégrale de chemin. En effet par essence le formalisme canonique suppose un espace-temps ayant la topologie $\Sigma \times \mathbb{R}$ avec Σ de topologie donnée. Il est donc inadapté à la considération des changements de topologie. Le principe de la quantification de la gravité par intégrale de chemin consiste à sommer une amplitude quantique sur des classes d'équivalence de métriques. Cependant dans ce principe, le domaine des métriques sur lesquelles on doit sommer n'est pas prescrit. On doit certainement sommer sur les métriques qui sont classiquement possibles – c'est à dire les métriques lorentziennes non-singulières – mais également sur d'autres métriques interdites classiquement.

Le fait de sommer sur un ensemble de chemins qui est plus étendu que celui des chemins classique apparaît déjà dans la plus simple des intégrales de chemin : celle de la particule en mécanique quantique. On sait en effet que dans l'intégrale

$$\int [\mathcal{D}x] e^{\frac{i}{\hbar} S(x)}, \quad (12.1)$$

ce sont essentiellement les chemins *continus mais non-différentiables* qui contribuent. Partant de cette constatation, dans le contexte d'une intégrale de chemin de gravité quantique, on imagine

qu'il faille sommer sur plus de métriques que les métriques lorentziennes non-singulières vivant sur une variété \mathcal{M} de topologie donnée. Par exemple, on peut imaginer devoir sommer sur les métriques singulières, sur les différentes topologies possibles de \mathcal{M} , voire pourquoi pas sur les signatures et les dimensions d'espace-temps !

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la question de la somme sur les topologies, et en particulier à savoir si une telle somme est réalisable dans un formalisme d'intégrale de chemin définie par un modèle de mousse de spin. Un modèle de mousse de spin est défini à partir d'une triangulation fixée de l'espace-temps. En 3D ceci n'est pas gênant grâce à l'invariance des amplitudes sous les changements de triangulations. En revanche en 4D, il faut d'une manière ou d'une autre se débarrasser de la triangulation. Ceci permet de restaurer le nombre infini de degrés de liberté de la gravité en 4D. Une manière de faire ceci pourrait être de raffiner la triangulation. Une proposition alternative plus ambitieuse serait de sommer sur toutes les triangulations possibles. Outre que cette méthode présenterait l'avantage d'éviter une dépendance dans le choix du processus de raffinement, elle permet également de prendre en compte le problème de la somme sur les topologies.

En effet si l'on cherche à définir une somme sur les triangulations d'un modèle de mousse de spin, on peut tenter de sommer sur toutes les triangulations de *toutes* les topologies. Une telle somme incluerait de fait une somme sur les topologies de la variété. Cette technique s'avère en pratique difficile à mettre en place, comme le montre l'examen de la situation pour les triangulations dynamiques.

12.1.1 Les triangulations dynamiques 3D

Les modèles de triangulations dynamiques[115] sont formulés à partir d'une triangulation Δ de l'espace-temps, où la même longueur a est assignée à toutes les arêtes. On considère comme amplitude quantique associée à Δ l'amplitude obtenue en utilisant l'action de Regge de la gravité discrète. On obtient alors¹

$$\mathcal{A}(\Delta) = \lambda^T \mu^E \quad (12.2)$$

où T désigne le nombre de tétraèdres de Δ , E le nombre d'arêtes et

$$\mu = \exp\left(\frac{2\pi a}{l_P}\right), \quad (12.3)$$

$$\lambda = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^3}{l_C^2 l_P} - 6 \frac{a}{l_P} \alpha\right) \quad (12.4)$$

où $\alpha = \cos^{-1}(1/3)$, l_P est la longueur de Planck $l_P = G\hbar$ et l_C la longueur cosmologique $1/\sqrt{\Lambda}$.

La somme sur toutes les triangulations d'une telle amplitude s'écrit

$$Z = \sum_{T,E} \mathcal{N}(T, E) \lambda^T \mu^E \quad (12.5)$$

où $\mathcal{N}(T, E)$ désigne le nombre de triangulations (de n'importe quelle topologie) possédant T tétraèdres et E arêtes. Pour évaluer les chances de convergence de cette somme, on peut remarquer que $\mu \geq 1$ et la borner inférieurement par

$$Z \geq \sum_T \mathcal{N}(T) \lambda^T. \quad (12.6)$$

¹En ne tenant pas compte pour l'instant des facteurs de symétrie.

Pour espérer que cette somme converge, il faut que $\mathcal{N}(T)$ croisse au plus exponentiellement² avec T . Malheureusement, on peut montrer[115] que le nombre de triangulations de n'importe quelle topologie contenant T tétraèdres croît au moins factoriellement avec T . La somme diverge donc. Le seul moyen de rendre cette somme convergente est de se restreindre à une topologie fixée, auquel cas le nombre de triangulations croît exponentiellement et on peut donner un sens à la somme. Cet argument combinatoire semble tuer dans l'oeuf les espoirs de sommer sur les topologies en sommant sur les triangulations.

12.1.2 Sommes divergentes et graphes de Feynman

Malgré la divergence de la somme sur toutes les triangulations de toutes les topologies, on peut prendre sur ce problème un autre point de vue : celui que cette divergence n'est pas rédhibitoire. Un exemple d'un phénomène similaire nous est fourni par la théorie des champs. En effet en théorie des champs les sommes perturbatives obtenues par les techniques de diagrammes de Feynman sont elles aussi divergentes [116], à cause du nombre factoriellement croissant de diagrammes à sommer. Ceci n'empêche pas des expressions non-perturbatives d'être correctement définies. Cela provient du fait que mathématiquement, une fonction $f(z)$ peut posséder une série asymptotique divergente. Dans le contexte de la théorie quantique des champs, ce phénomène trouve son origine dans le fait que les quantités physiques sont des fonctions non-analytiques de la constante de couplage. En effet pour des constantes de couplage négatives, les potentiels sont non-bornés par le bas et les modèles ne sont pas définis [116]. En d'autres termes, les quantités non-perturbatives Z_{NP} définies en théorie des champs peuvent avoir un développement perturbatif divergent. On traduit ceci par la notation

$$Z_{NP}(\lambda) \overset{\vec{}}{=} \sum_n a_n \lambda^n. \quad (12.7)$$

Le cas de la somme sur les graphes de Feynman en théorie des champs suggère la méthode suivante pour la somme sur toutes les triangulations de toutes les topologies : *se peut-il que la somme – factoriellement divergente – de toutes les triangulations de toutes les topologies soit une version perturbative d'une quantité non-perturbative bien définie ?* Pour pousser cette idée, nous allons utiliser une *théorie des champs auxiliaire*, inspirée des modèles de matrices [117] utilisés en gravité quantique 2D et dans le contexte de la théorie des cordes. Supposons que l'on sache construire une théorie des champs telle que

- L'ensemble de ses graphes de Feynman Γ soit isomorphe à l'ensemble de toutes les triangulations de toutes les topologies ;
- L'amplitude de théorie des champs $\mathcal{A}_{QFT}(\Gamma)$ qui est associée à tout graphe est exactement l'amplitude $\mathcal{A}_{QG}(\Delta)$ de gravité quantique associée à Δ .

Si on sait trouver une telle théorie des champs, son développement perturbatif est égal à la somme sur toutes les topologies des amplitudes de gravité quantique

$$\sum_{\Gamma} \mathcal{A}_{QFT}(\Gamma) = \sum_{\Delta} \mathcal{A}_{QG}(\Gamma). \quad (12.8)$$

Les quantité *non-perturbatives* de cette théorie des champs sont alors des candidats à la définition non-perturbative de la somme sur toutes les topologies d'amplitudes de gravité quantique

$$Z_{QFT} \overset{\vec{}}{=} \sum_{\Delta} \mathcal{A}_{QG}(\Gamma). \quad (12.9)$$

²Si $\mathcal{N}(T) \sim \gamma^T$, alors la somme converge pour les $\lambda < \gamma^{-1}$

La technique de théorie des champs auxiliaire permet donc de fournir un candidat de formulation non-perturbative. Le problème clé de cette approche est ensuite de prouver qu'un tel candidat est *unique*. Le but du travail [37] présenté ici a été de construire une théorie des champs auxiliaire possédant cette propriété d'unicité. Je présente d'abord le modèle de Boulatov, qui est une théorie des champs réalisant la somme sur toutes les triangulations. Ensuite je détaille les critères nécessaires à l'unicité de la reconstruction. Le modèle de Boulatov ne satisfaisant pas ces critères, je décris le modèle modifié que nous avons proposé. Celui-ci satisfait l'unicité de la reconstruction.

12.2 LE MODÈLE DE BOULATOV

Le modèle de Boulatov[118] est une théorie des champs, dont les champs vivent sur la variété $\text{SO}(3)^3$. Plus précisément, on considère des champs réels, symétriques et invariants par translation à droite

$$\bar{\Phi}(g_1, g_2, g_3) = \Phi(g_1, g_2, g_3) \quad (12.10)$$

$$\Phi(g_1, g_2, g_3) = \Phi(g_2, g_3, g_1) = \Phi(g_3, g_1, g_2) \quad (12.11)$$

$$\Phi(g_1g, g_2g, g_3g) = \Phi(g_1, g_2, g_3), \quad \forall g \in \text{SO}(3) \quad (12.12)$$

L'action qui définit cette théorie des champs est la suivante

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \frac{1}{2} \int_{G^3} dg_1 dg_2 dg_3 \Phi(g_1, g_2, g_3)^2 \\ &+ \frac{\lambda}{4!} \int_{G^6} dg_1 \cdots dg_6 \Phi(g_1, g_2, g_3) \Phi(g_3, g_5, g_4) \Phi(g_4, g_2, g_6) \Phi(g_6, g_5, g_1). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une action non-locale, ne contenant pas de dérivées.

Pour calculer la fonction de partition associée à cette action, on va tout d'abord l'exprimer en modes de Fourier. La décomposition générale d'une fonction $\Phi(g)$ sur G en modes de Fourier s'écrit

$$\Phi(g) = \sum_{j,m,n} d_j \Phi_j^{mn} D_{mn}^j(g), \quad (12.14)$$

où $D_{mn}^j(g)$ désigne les éléments de matrice de représentation de $\text{SO}(3)$ (voir appendice A). Le coefficient de Fourier Φ_j^{mn} est défini par

$$\Phi_j^{mn} = \int_G dg \Phi(g) D_{mn}^j(g^{-1}). \quad (12.15)$$

Une fonction sur $\text{SO}(3)^3$ s'écrit alors sous la forme générale

$$\Phi(g_1, g_2, g_3) = \sum_{\vec{j}, \vec{m}, \vec{n}} d_{j_1} d_{j_2} d_{j_3} D_{m_1 n_1}^{j_1}(g_1) D_{m_2 n_2}^{j_2}(g_2) D_{m_3 n_3}^{j_3}(g_3). \quad (12.16)$$

On impose ensuite que Φ soit invariante par translation à droite. Cela peut s'écrire en utilisant la moyenne sur le groupe

$$\Phi(g_1, g_2, g_3) = \int_G dg \Phi(g_1g, g_2g, g_3g), \quad (12.17)$$

où l'on utilise la mesure de Haar normalisée sur G . On obtient alors que la décomposition générale d'une fonction possédant cette invariance s'écrit

$$\Phi(g_1, g_2, g_3) = \sum_{\vec{j}, \vec{m}, \vec{n}} A_{\vec{j}}^{\vec{m}} \sqrt{d_{j_1} d_{j_2} d_{j_3}} D_{m_1 n_1}^{j_1}(g_1) D_{m_2 n_2}^{j_2}(g_2) D_{m_3 n_3}^{j_3}(g_3) C_{\vec{n}}^{\vec{j}} \quad (12.18)$$

où $C_{\vec{n}}^{\vec{j}}$ désigne le symbole 3j de Wigner et où on introduit le coefficient

$$A_{\vec{j}}^{\vec{m}} = \sum_{\vec{n}} \sqrt{d_{j_1} d_{j_2} d_{j_3}} \Phi_{\vec{j}}^{\vec{m} \vec{n}} C_{\vec{n}}^{\vec{j}}. \quad (12.19)$$

Les symétries de Φ sont traduites sur les coefficients de Fourier

$$\bar{A}_{j_1 j_2 j_3}^{m_1 m_2 m_3} = (-1)^{\sum_{i=1}^3 (j_i + m_i)} A_{j_1 j_2 j_3}^{-m_1 - m_2 - m_3} \quad (12.20)$$

$$A_{j_1 j_2 j_3}^{m_1 m_2 m_3} = A_{j_2 j_3 j_1}^{m_2 m_3 m_1} = A_{j_3 j_1 j_2}^{m_3 m_1 m_2} \quad (12.21)$$

On montre alors [118] que l'action en modes de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} S[A] &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, j_3, m_1, m_2, m_3} |A_{j_1 j_2 j_3}^{m_1 m_2 m_3}|^2 \\ &+ \frac{\lambda}{4!} \sum_{j_1, \dots, j_6, m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{i=1}^6 (j_i + m_i)} A_{j_1 j_2 j_3}^{-m_1 - m_2 - m_3} A_{j_3 j_5 j_4}^{m_3 - m_5 m_4} A_{j_4 j_2 j_6}^{-m_4 m_2 m_6} A_{j_6 j_5 j_1}^{-m_6 m_5 m_1} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.22)$$

Cherchons maintenant à calculer la fonction de partition de cette théorie. Elle est formellement définie par l'intégrale de chemin

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]}. \quad (12.23)$$

On calcule cette fonction de partition à l'aide d'un développement perturbatif en puissances de λ . Le résultat est le suivant

- Les diagrammes de Feynman de cette théorie des champs sont les triangulations de variétés 3d ;
- L'amplitude associée à un graphe de Feynman (c'est à dire à une triangulation Δ) est donnée par l'amplitude de Ponzano-Regge associée à Δ c'est à dire

$$\mathcal{A}[\Delta] = (-\lambda)^N \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}. \quad (12.24)$$

où N est le nombre de tétraèdres de Δ .

Justifions brièvement ces deux points. Les graphes de Feynman de cette théorie sont bâtis à l'aide du propagateur et du vertex présentés figure 12.1. On peut constater qu'un tel graphe de Feynman est un 2-complexe, tel que 4 arêtes se rencontrent à chaque vertex, et 3 faces se rencontrent à chaque arête. Cette définition est exactement celle du 2-complexe dual à une triangulation 3D. Une manière visuelle rapide de constater ce fait est donnée figure 12.2 : il suffit d'attacher un triangle à chaque propagateur et de recoller ensemble les triangles au niveau des vertex pour former des tétraèdres. L'amplitude de vertex étant le symbole $6j$, on constate

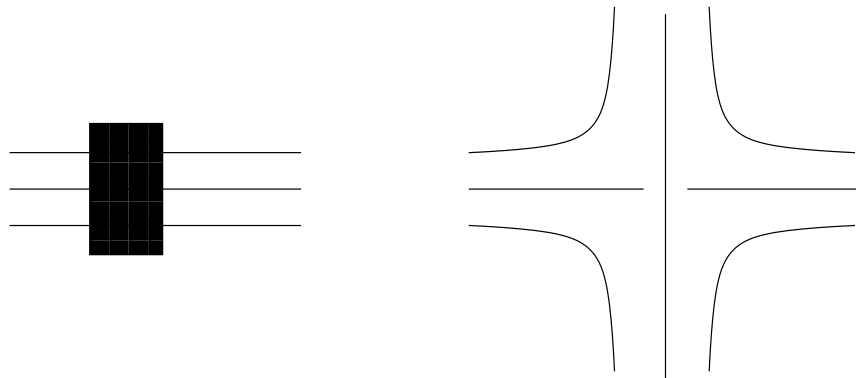


FIG. 12.1 – Propagateur et vertex pour le modèle de Boulatov : le rectangle noir indique la somme sur les permutations des lignes.

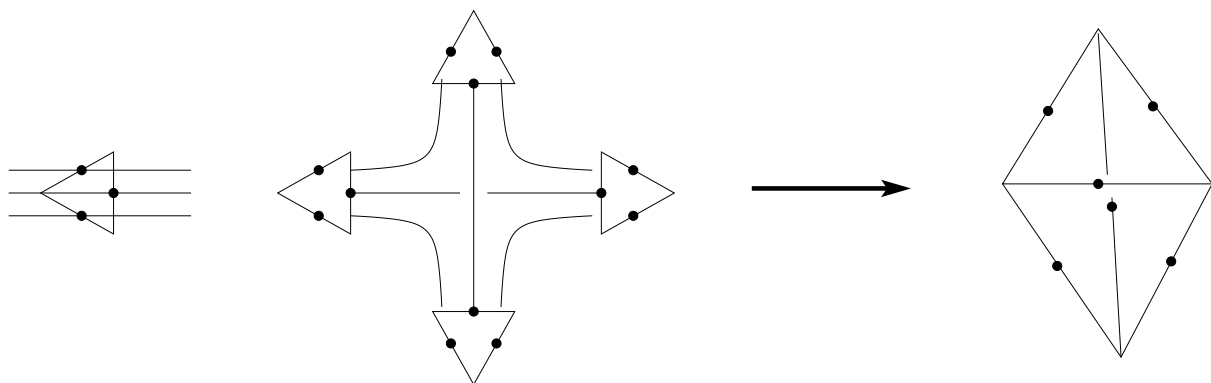


FIG. 12.2 – Construction d'une triangulation à partir d'un graphe de Feynman du modèle de Boulatov.

facilement que le calcul d'amplitude associé un graphe de Feynman redonne l'amplitude de Ponzano-Regge associée à la triangulation correspondante [118].

Le développement perturbatif total de cette théorie est donc donné par

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\Delta} \frac{(-\lambda)^N}{\text{sym}[\Delta]} \sum_{\{j_e\}} \prod_e (2j_e + 1) \prod_t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\Delta} \frac{(-\lambda)^N}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta]. \end{aligned} \quad (12.25)$$

où $\text{sym}[\Delta]$ représente le facteur de symétrie de Δ . Le développement perturbatif du modèle de Boulatov réalise donc bien une somme perturbative sur toutes les triangulations de toutes les topologies de l'amplitude de Ponzano-Regge. La question à laquelle il faut maintenant tenter de répondre est de savoir si le modèle de Boulatov dans sa version non-perturbative est susceptible de fournir un bonne définition *non-perturbative* de la somme sur les topologies.

12.3 NOTION DE BOREL-SOMMABILITÉ ET DE COMPORTEMENT AUX GRANDS ORDRES

Le lien entre développement perturbatif et formulation non-perturbative est donné par la notion de Borel-sommabilité [119]. Dans cette partie, j'illustre ces idées sur un exemple simple. On considère un nombre ϕ l'action en 'dimension 0'

$$S_{\lambda}(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (12.26)$$

Cette action est non-bornée pour des λ négatifs. On considère alors la fonction de partition

$$Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4}. \quad (12.27)$$

Le développement perturbatif de cette fonction de partition est obtenu en développant l'exponentielle en puissances de λ , en inversant l'intégration et la sommation, puis en intégrant chaque terme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \phi^{4n} = 2^{2n+\frac{1}{2}} \Gamma(2n + \frac{1}{2}). \quad (12.28)$$

Le développement perturbatif qui en résulte est

$$Z(\lambda) = \sum_n (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \sqrt{2} \Gamma(2n + \frac{1}{2}). \quad (12.29)$$

Cette série est divergente car ses termes croissent comme $(-1)^n 4^n n!$. Le développement perturbatif nous a donc fait passer d'une fonction de partition correctement définie non-perturbativement (12.27), à une série perturbative divergente (12.29). Ce phénomène général trouve son origine dans le fait que l'inversion de l'intégration et de la sommation est illicite, en particulier ici où l'action est non-bornée inférieurement pour les constantes de couplage négatives.

Cela ne signifie pas pour autant que la méthode perturbative soit vouée à l'échec. En effet on peut toujours tronquer le développement perturbatif. Si on considère une série divergente

$$Z(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \lambda^n + R_N(\lambda), \quad (12.30)$$

où le reste $R_N(z)$ est borné par

$$|R_N(z)| \leq AS^{-N} N! |\lambda|^N, \quad (12.31)$$

alors la troncature de la série à l'ordre N donne une approximation de la valeur réelle $Z(\lambda)$, dont la précision est gouvernée par $R_N(\lambda)$. Le comportement du reste R_N quand N croît est d'abord décroissant, puis il croît pour diverger. On peut donc tronquer le développement perturbatif au niveau N_0 qui correspond au minimum de R_N . La troncature au niveau N_0 est alors la meilleure approximation perturbative possible de la quantité non-perturbative $Z(\lambda)$. La précision maximale du développement perturbatif est

$$\epsilon(\lambda) = \text{Min}_N R_N(\lambda), \quad (12.32)$$

et est obtenue à l'ordre $N_0 \sim S/z$.

Cette méthode permet donc d'extraire la meilleure information physique possible d'un développement perturbatif divergent. La question suivante à se poser, c'est de savoir s'il est possible de retrouver l'information physique exacte, non-perturbative, à partir du développement perturbatif. Pour cela, on veut être capable de reconstruire $Z(\lambda)$ à partir de son développement perturbatif, et ce de manière non-ambigüe. C'est un problème a priori non-trivial car il n'existe pas en général une unique fonction $Z(\lambda)$ ayant un développement perturbatif donné. Par exemple $Z(\lambda)$ et $Z(\lambda) + e^{-S/\lambda}$ possèdent le même développement perturbatif à tous les ordres. Ca n'est pas une surprise puisqu'on s'attend à ce qu'une modification de $Z(\lambda)$ de l'ordre de la précision $\epsilon(\lambda)$ qu'on peut attendre du développement perturbatif, sera invisible dans celui-ci.

Une manière de reconstruire une fonction $Z(\lambda)$ à partir de son développement perturbatif consiste à utiliser la transformée de Borel. On considère un développement asymptotique $\sum_n a_n \lambda^n$ et on suppose que la série

$$B(z) = \sum_n \frac{a_n}{n!} z^n \quad (12.33)$$

converge. On peut considérer la fonction

$$Z(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t} B(z t) dt, \quad (12.34)$$

dont le développement asymptotique est bien $\sum a_n z^n$. Cependant là aussi des ambiguïtés de construction peuvent apparaître. Ceci est visible dans le fait que la transformée de Borel $B(t)$ peut admettre des pôles le long de l'axe réel positif. Cela rend alors la définition (12.34) incomplète : il faut spécifier un choix de contour pour éviter les pôles. C'est de ce choix que proviennent les ambiguïtés. Là aussi on constate que différentes prescriptions de contours vont donner des fonctions non-perturbatives qui différeront d'une ambiguïté $e^{-S/z}$. Pour obtenir un résultat d'unicité sur la reconstruction d'une fonction à partir de son développement perturbatif, il faut spécifier des conditions sur la fonction désirée, qui permettent de lever toutes les



FIG. 12.3 – L’analyticité de $f(z)$ dans un domaine C_R assure l’analyticité de $B(z)$ dans un voisinage de l’axe réel positif. Ceci permet de faire la transformation de Borel sans choix de contour introduisant des ambiguïtés.

ambiguïtés. Dans ce cas le développement asymptotique de la fonction est dit *uniquement Borel sommable*. C’est l’objet du théorème de Sokal-Nevalinna.

Le théorème de Sokal-Nevalinna[120] affirme que si f est une fonction analytique dans le cercle $C_R = \{z | \operatorname{Re}(z^{-1}) > R^{-1}\}$ et possède un développement asymptotique

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k + R_N(z), \quad (12.35)$$

avec un reste borné par

$$|R_N(z)| < AS^{-N} \Gamma(N+b) |z|^N, \quad (12.36)$$

alors la série asymptotique est *uniquement Borel sommable* et $f(z)$ peut être reconstruite de manière unique.

Ce théorème se prouve en montrant que si deux fonctions satisfont les critères, alors leur différence est nulle. En effet la différence de ces deux fonctions est bornée par la différence des deux restes, donc

$$(f_1 - f_2)(z) \leq AS^{-N} \Gamma(N+b) |z|^N. \quad (12.37)$$

Ceci étant valable pour tout N , la minimisation du membre de droite donne que la différence des deux fonctions est bornée par la fonction $\epsilon(z) \sim e^{-S/z}$. La preuve du théorème montre alors que toute fonction de ce type, analytique dans C_R , est identiquement nulle. Par exemple $e^{-S/z}$ n’est *pas* analytique dans C_R . En termes de transformée de Borel, le théorème dit que si f est analytique dans C_R , alors $B(z)$ est analytique dans un voisinage de l’axe réel positif, comme représenté figure 12.3. Ainsi la transformation (12.34) peut être réalisée sans ambiguïté puisque l’axe réel positif est exempt de pôles.

12.4 UN NOUVEAU MODÈLE ET SON INTERPRÉTATION

12.4.1 Définition et propriétés du nouveau modèle

Dans cette partie, je présente le coeur de ce travail [37] qui consiste à formuler un modèle qui soit une variante du modèle de Boulatov, et qui

- réalise la somme sur toutes les triangulations de toutes les topologies de l'amplitude de Ponzano-Regge ;
- soit bien défini, en particulier pour les valeurs physiquement intéressantes de la constante de couplage ;
- soit uniquement Borel-sommable, c'est à dire défini de manière non-ambigue par son développement perturbatif.

Pour cela, on considère la modification suivante de l'action du modèle de Boulatov

$$\begin{aligned}
S[\Phi] &= \frac{1}{2} \int_{G^3} \Phi(g_1, g_2, g_3)^2 \\
&+ \frac{\lambda}{4!} \int_{G^6} [\Phi(g_1, g_2, g_3) \Phi(g_3, g_5, g_4) \Phi(g_4, g_5, g_6) \Phi(g_6, g_2, g_1) \\
&- \Phi(g_1, g_2, g_3) \Phi(g_3, g_5, g_4) \Phi(g_4, g_2, g_6) \Phi(g_6, g_5, g_1)]. \tag{12.38}
\end{aligned}$$

Le terme potentiel de cette nouvelle action s'écrit comme

$$S_{pot}[\Phi] = S_{oreiller}[\Phi] - S_{tetra}[\Phi], \tag{12.39}$$

où

$$S_{tetra}[\Phi] = \frac{\lambda}{4!} \int_{G^6} \Phi(g_1, g_2, g_3) \Phi(g_3, g_5, g_4) \Phi(g_4, g_2, g_6) \Phi(g_6, g_5, g_1) \tag{12.40}$$

est le potentiel "tétraèdre" du modèle de Boulatov, et

$$S_{oreiller}[\Phi] = \frac{\lambda}{4!} \int_{G^6} \Phi(g_1, g_2, g_3) \Phi(g_3, g_5, g_4) \Phi(g_4, g_5, g_6) \Phi(g_6, g_2, g_1) \tag{12.41}$$

est un nouveau terme potentiel obtenu comme une modification simple du terme "tétraèdre". Le terme potentiel total (12.39) possède l'intéressante propriété de positivité suivante

$$S_{pot}[\Phi] \leq 0, \forall \Phi. \tag{12.42}$$

Pour ce modèle modifié, et grâce à la propriété de positivité énoncée ci-dessus, on prouve alors [37] le théorème suivant :

Théorème 4 *La fonction de partition $Z(\lambda)$ définie pour le modèle donné par l'action $S[\Phi]$ (12.38) possède un développement asymptotique uniquement Borel-sommable.*

Ce théorème est prouvé en utilisant les critères de Sokal-Nevalinna. Les preuves sont détaillées dans [37].

12.4.2 Développement perturbatif du nouveau modèle

Après avoir énoncé la propriété de Borel-sommabilité de ce nouveau modèle, il s'agit maintenant de comprendre ce que réalise ce modèle. Le modèle de Boulatov sommait les amplitudes de Ponzano-Regge sur toutes les triangulations. En modifiant ce modèle, on change a priori les graphes de Feynman et leurs amplitudes. Le second résultat que nous avons obtenu est que le développement perturbatif de ce modèle peut encore se mettre sous la forme d'une somme sur toutes les triangulations, et que son amplitude peut encore s'interpréter comme une amplitude du modèle de Ponzano-Regge.

Résultat

Le résultat final est le suivant : on classe l'ensemble des triangulations en deux catégories. On définit l'ensemble T_{irreg} des triangulations dites *irrégulières*, qui sont celle contenant une ou plusieurs paires de tétraèdres collés ensemble le long de deux faces communes. On note k le nombre de paires de tétraèdres de ce genre dans une triangulation irrégulière donnée. Ce type de triangulations est souvent exclu des définitions mathématiques des triangulations³, mais est engendré par le modèle de Boulatov. Les triangulation dites *régulières* sont celles ne contenant pas ce type de configurations. Le résultat est alors le suivant : le développement perturbatif du nouveau modèle est égal à

$$Z(\lambda) = \sum_{\Delta \in T_{reg}} \frac{\lambda^N}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta] + \sum_{\Delta \in T_{irreg}} \frac{\lambda^{N-k}(\lambda - 1/2)^k}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta], \quad (12.43)$$

où N désigne le nombre de tétraèdres d'une triangulation, et k le nombre de paires de tétraèdres collés ensemble le long de deux faces communes. En particulier pour un choix $\lambda = 1/2$ de la constante de couplage, on a le développement perturbatif

$$Z(\lambda) = \sum_{\Delta \in T_{reg}} \frac{2^{-N}}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta] \quad (12.44)$$

qui somme les amplitudes de Ponzano-Regge sur les triangulations régulières uniquement.

Arguments de preuve

Pour comprendre l'origine de ce résultat, on s'intéresse d'abord à la structure des graphes de Feynman de ce nouveau modèle. Dans le cas du modèle de Boulatov, on obtenait des triangulations car le terme potentiel est dual à un tétraèdre. On a maintenant ajouté un terme de potentiel 'oreiller'. Le vertex qui lui associé est dual à un autre objet géométrique : l'oreiller (voir figure 12.4). L'ajout du terme 'oreiller' a pour effet de donner naissance à des graphes de Feynman qui sont des triangulations 'généralisées' $\tilde{\Delta}$, faites à la fois de tétraèdres et d'oreillers . On note $\tilde{\mathcal{A}}$ l'amplitude associée à une telle triangulation généralisée. Comment dès lors réécrire la somme

$$Z = \sum_{\tilde{\Delta}} \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\Delta}) \quad (12.45)$$

comme une somme sur les 'vraies' triangulations ?

L'idée est la suivante. Géométriquement, un oreiller s'obtient comme deux tétraèdres collés ensembles par deux faces communes, voir figure 12.5. Soit $\tilde{\Delta}$ une triangulation généralisée, on peut lui associer une vraie triangulation $\Delta = \Upsilon(\tilde{\Delta})$ obtenue en remplaçant tous les oreillers par une paire de tétraèdres collés ensembles par une face commune. On peut alors réorganiser la somme (12.45) ainsi

$$Z = \sum_{\Delta} \left(\sum_{\tilde{\Delta} \text{ tq } \Upsilon(\tilde{\Delta})=\Delta} \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\Delta}) \right) = \sum_{\Delta} \mathcal{B}(\Delta) \quad (12.46)$$

³On requiert souvent que l'intersection de deux n-simplexes soit 1) l'ensemble vide OU 2) un (n-1)-simplex ; mais pas plusieurs (n-1)-simplexes.

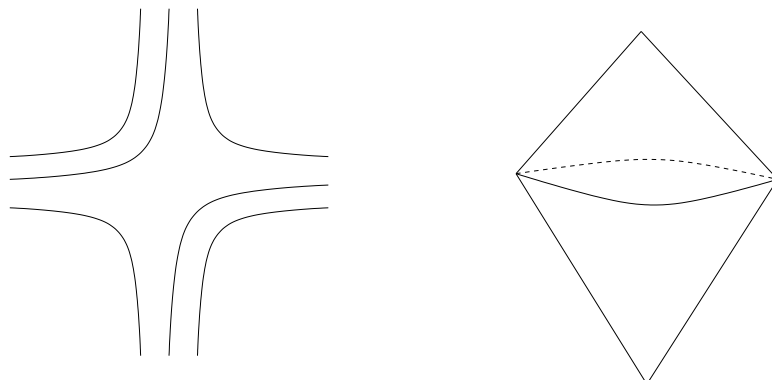


FIG. 12.4 – Le vertex associé au nouveau potentiel est dual à un objet géométrique appelé oreiller : l'oreiller est la seconde manière (outre le tétraèdre) de coller ensemble 4 triangles.

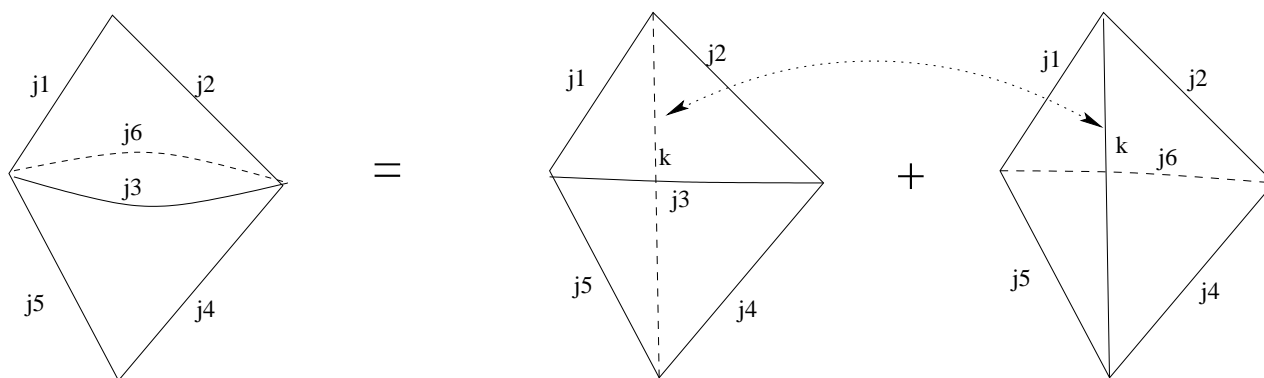


FIG. 12.5 – Géométriquement, un oreiller s'obtient à l'aide de deux tétraèdres que l'on colle ensemble le long de deux faces communes.

Cette réécriture explique pourquoi le développement perturbatif du nouveau modèle peut se réécrire comme une somme sur les 'vraies' triangulations. Le second point clé est que l'amplitude associée $\mathcal{B}(\Delta)$ est très proche de l'amplitude du modèle de Boulatov $\mathcal{A}(\Delta)$. Tout d'abord si Δ est régulière, elle ne contient aucune paire de tétraèdres qui sont collés ensemble selon deux faces communes, on comprend facilement qu'il n'existe pas de $\tilde{\Delta}$ telle que $\Delta = \Upsilon(\tilde{\Delta})$, excepté Δ elle-même. Dans ce cas on a simplement $\mathcal{B}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta)$. La somme peut donc se séparer

$$Z = \sum_{\Delta \in T_{reg}} \mathcal{A}(\Delta) + \sum_{\Delta \in T_{irreg}} \mathcal{B}(\Delta). \quad (12.47)$$

Le petit miracle qui intervient ensuite est que le calcul explicite de l'amplitude $\mathcal{B}(\Delta)$ montre qu'elle s'écrit comme une correction à l'amplitude $\mathcal{A}(\Delta)$, correction qui n'intervient que sur les constantes de couplage. Cette réorganisation fournit finalement le résultat annoncé

$$Z(\lambda) = \sum_{\Delta \in T_{reg}} \frac{\lambda^N}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta] + \sum_{\Delta \in T_{irreg}} \frac{\lambda^{N-k}(\lambda - 1/2)^k}{\text{sym}[\Delta]} Z_{PR}[\Delta]. \quad (12.48)$$

12.4.3 Le cas des modèles de matrices 3D

Le type de modèle auxiliaire que nous avons développé ici peut également s'écrire pour sommer les amplitudes de modèles de triangulations dynamiques 3D. En effet il est montré dans [37] que la somme sur toutes les triangulations de toutes les topologies obtenue par un modèle de matrices 3D peut se réécrire comme une théorie des champs sur la 2-sphère non-commutative S_N^2 . On peut là aussi écrire une théorie des champs modifiée, qui soit uniquement Borel-sommable et qui réalise un développement perturbatif sommant les amplitudes de modèles de matrices 3D sur toutes les triangulations de toutes les topologies.

12.4.4 Interprétation du nouveau modèle

Ce résultat montre que la modification du modèle de Boulatov donne une somme sur toutes les triangulations d'une amplitude qui est toujours celle du modèle de Ponzano-Regge. Seul change le facteur faisant intervenir la constante de couplage pour les triangulations irrégulières. Il existe même la possibilité de totalement supprimer ces triangulations pour un choix adéquat de la constante de couplage. Pour $\lambda = 1/2$, le modèle modifié réalise la somme de l'amplitude de Ponzano-Regge sur toutes les triangulations régulières. Cette somme étant uniquement Borel sommable, on dispose d'une définition non-perturbative sans ambiguïté. Le second point très important est qu'on obtient ce résultat dans le *régime physique* du modèle c'est à dire pour des valeurs positives de la constante de couplage.

Notre modèle possède donc deux propriétés nouvelles très importantes permettant de donner un sens à la somme non-perturbative sur les topologies. Néanmoins, le prix à payer est une modification du poids associé aux triangulations irrégulières. Comment interpréter ce résultat ? Mon point de vue est que la modification que nous proposons n'est que mineure, en ce sens qu'elle n'affecte qu'un type particulier de triangulations, qu'on aurait même pu exclure a priori de la somme. En effet rien ne prescrit exactement sur quels types de triangulations on doit sommer, et il peut être naturel de définir cette somme comme une somme sur les triangulations régulières uniquement, qui sont une définition mathématique tout aussi légitime. L'idée de se restreindre à de 'bonnes' triangulations pour pouvoir sommer sur les topologies est également celle qui motive certains modèles de triangulations dynamiques lorentziennes [121].

Un autre point de vue sur ce résultat consiste à dire que la modification que nous avons effectuée est drastique et a pour conséquence que notre modèle ne décrit plus des amplitudes de gravité quantique. Un argument en faveur de cette idée est fourni par l'examen du cas des modèles de matrices en 2D. Le potentiel de ces modèles est cubique et les développements perturbatifs associés sont non-Borel sommables. En modifiant ces modèles par l'ajout d'un terme quartique, on stabilise le potentiel (à la manière de ce que nous avons fait ici) et on peut obtenir des modèles Borel-sommables. En revanche, la physique en est drastiquement changée. On peut en effet montrer que ces modèles décrivent alors la gravité quantique 2D couplée à de la matière non-unitaire. Cependant, notre point de vue est que cet argument ne s'applique pas ici. En effet d'une part les amplitudes modifiées ne concernent qu'un type particulier de triangulations, d'autre part notre modification concerne l'ajout d'un terme potentiel de même degré. Or ce type d'ajout est naturel de part l'expérience que nous avons en théorie des champs, où les arguments du groupe de renormalisation nous indiquent que pour les termes potentiels d'une action *tout ce qui n'est pas interdit par les symétries est obligatoire*. En tout état de cause, seul un examen approfondi des propriétés de ce nouveau modèle permettra de trancher cette question. Une piste particulièrement intéressante concerne l'examen des propriétés semi-classiques déductibles de l'analyse des instantons de ces modèles.

CONCLUSION : VERS UN MODÈLE DE MOUSSES DE SPIN EN 3+1 DIMENSIONS

Le travail de cette thèse a été essentiellement autour des modèles en 2+1 dimensions. L'idée directrice de mon travail a été de comprendre au maximum ces modèles afin d'en tirer les leçons pertinentes pour le cas physique de 3+1 dimensions. Nous ne savons pas aujourd'hui quel est le bon modèle de mousses de spin en 3+1 dimensions. En 2+1 dimensions nous disposons d'une situation privilégiée, où l'approche des mousses de spin peut être comparée avec la variété d'approches existantes. De plus les résultats en 2+1 dimensions ont souvent été mis sous une forme mathématiquement rigoureuse grâce à l'interaction avec la branche des mathématiques qui s'intéresse aux invariants de variétés. Enfin la formulation du modèle de Barrett-Crane s'appuyant sur l'idée que la gravité peut se formuler comme une théorie topologique contrainte, la compréhension des mécanismes en 2+1 n'en devient que plus pertinente.

Au cours de cette thèse, nous avons fait plusieurs progrès vers une compréhension plus profonde du modèle de Ponzano-Regge, et appris plusieurs leçons qu'il faut maintenant réinvestir dans le cas 3+1. Un exemple de ceci est donné par notre méthode d'analyse asymptotique des symboles de théorie des groupes intervenant dans la construction des modèles de mousses de spin. Cela nous a permis [34] de donner une nouvelle preuve du résultat conjecturé Ponzano et Regge, mais aussi de l'étendre au cas lorentzien et au cas à 3+1 dimensions. Le comportement asymptotique du symbole $10j$ du modèle de Barrett-Crane ouvre la voie à son amélioration. Il s'agit notamment de comprendre si ce comportement asymptotique est en fait naturel, ou va disparaître dans une limite à grand nombre de 4-simplexes, ou encore si une prise en compte correcte de la mesure peut le supprimer.

Un autre progrès important concerne la compréhension plus complète des symétries de jauge des modèles de mousses de spin en 2+1 [35]. Un des obstacles à la quantification de la gravité concerne la structure particulièrement compliquée de l'algèbre des difféomorphismes. Une compréhension totale des symétries des modèles de mousses de spin est donc souhaitable. Nous avons notamment relié la présence de symétries de jauge à l'apparition d'infinis, et montré comment fixer de jauge les amplitudes et retrouver des expressions finies. Ces expressions montrent que le modèle de Ponzano-Regge fournit véritablement le produit scalaire physique des réseaux de spin de la gravité quantique canonique en 2+1 dimensions. Ce travail doit être étendu au cas 3+1 : il s'agit là aussi de comprendre la structure des symétries du modèle de Barrett-Crane mais aussi comprendre comment relier ces résultats à la gravité quantique à boucle en 3+1 dimensions. La fixation des symétries de jauge en 3+1 pourrait permettre d'obtenir des amplitudes finies sans recourir ni aux groupes quantiques ni à une modification de la mesure qui améliore les convergences. D'une manière générale, la compréhension des symétries, de la mesure, des propriétés de convergence, de l'implémentation des contraintes et du lien avec la structure ca-

nonique de la gravité à boucles sont des problématiques toutes reliées entre elles et qu'il serait intéressant de regarder à la lumière de l'analyse canonique de la théorie de Plebanski[122].

Les deux travaux que je viens de mentionner ont pour perspective la définition correcte d'un modèle de mousses de spin pour la gravité 3+1. Au delà de cet objectif, on peut doré et déjà chercher à exploiter les spécificités des modèles de mousses de spin, dans l'optique de réaliser des prédictions physiques. C'est dans cet esprit que nous avons considéré le couplage du modèle de Ponzano-Regge à la matière. Ce travail [36] fournit à la fois un formalisme pour coupler de la matière à la gravité quantique, mais aussi des exemples de prédictions physiques qui découlent de cette union. Il n'est bien sûr pas garanti ni que ce formalisme fonctionne pour le modèle de Barrett-Crane, ni que ces prédictions physiques existent en 3+1. Ceci permet en revanche de mettre en avant plusieurs leçons intéressantes : le couplage à la matière rend possible l'examen de la question cruciale des *observables physiques*. Il y a certainement à apprendre dans cette direction tant sur le plan conceptuel que sur les aspects techniques. La mise en évidence explicite d'effets de *doubly special relativity* est à cet égard très intéressante, puisqu'elle découle de principes fondamentaux sur le couplage matière-gravité quantique, et pas d'un modèle effectif. Enfin l'inclusion de matière permet de poser en propre la question de la limite $G \rightarrow 0$ de la gravité quantique, supposée redonner la théorie quantique usuelle.

Dans le même esprit d'exploitation des spécificités des modèles de mousses de spin, nous avons étudié les propriétés de sommes sur les topologies du modèle de Ponzano-Regge. Nous avons montré que la somme sur les topologies des amplitudes de Ponzano-Regge peut être réalisée de manière non-perturbative [37]. Il s'agit là d'une question spécifique aux formalismes d'intégrale de chemin puisque ceux-ci permettent – au contraire des formalismes purement canoniques – de prendre en compte les changements de topologies. Il peut sembler prématuré de s'intéresser à la question de la somme sur les topologies, alors qu'on doit encore améliorer le modèle en 3+1. Néanmoins la nécessité de se débarrasser de la structure de triangulation en 3+1 dimensions exigera un jour ou l'autre de comprendre comment sommer sur les triangulations, ou de développer des techniques alternatives. La possibilité de sommer non-perturbativement sur les triangulations de toutes les topologies devra donc certainement être étudiée en 3+1 dimensions.

Enfin au delà des préoccupations physiques, j'ai aussi eu l'occasion de m'aventurer dans le domaine mathématique des invariants de variété 3D. L'obtention d'expressions finies pour le modèle de Ponzano-Regge a ouvert la voie à la définition de nouveaux invariants [38]. Même si ces résultats semblent ne pas s'inscrire directement dans la recherche d'une théorie de la gravité quantique en 3+1 dimensions, on ne peut pas nier que l'ensemble des résultats obtenus au croisement de la théorie de la gravité quantique en 2+1 dimensions et de la théorie des invariants de variété 3D a souvent été une source d'inspiration, y compris en 3+1 dimensions. Le modèle de Barrett-Crane est d'ailleurs né à cette intersection et on ne peut qu'espérer qu'à l'avenir les mathématiques des invariants et la physique de la gravité quantique continuent à pratiquer cette fertilisation croisée.

Enfin, dans un avenir proche il conviendra d'étudier et de chercher à généraliser plusieurs de ces travaux au cas lorentzien. Même si plusieurs de nos analyses ont été faites en ayant à l'esprit le cas lorentzien (en particulier la procédure de fixation de jauge), ce cas présente des particularités spécifiques qu'il faudra analyser. Ceci constitue probablement la première perspective dans la suite logique de ces travaux.

A

NOTIONS DE THÉORIES DES GROUPES

Cet appendice présente les notions de théorie des groupes nécessaires à la formulation du modèle de Ponzano-Regge. Cet appendice concerne donc le groupe $SU(2)$ (et $SO(3)$). On présente aussi les conventions qui sont pour la plupart identiques à celles de [123].

A.1 GÉNÉRALITÉS

A.1.1 Les angles d'Euler

Une paramétrisation utile du groupe $SU(2)$ est celle des angles d'Euler. Les éléments de $SU(2)$ sont les matrices 2×2 de la forme suivante

$$u(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\varphi + \psi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\varphi - \psi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\psi - \varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i \frac{\varphi + \psi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

où les paramètres varient dans le domaine

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (\text{A.2})$$

$$0 \leq \theta < \pi, \quad (\text{A.3})$$

$$0 \leq \psi < 4\pi. \quad (\text{A.4})$$

L'élément $u(\varphi, \theta, \psi)$ peut être écrit sous la forme suivante

$$u(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i \frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i \frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Sous groupe de Cartan

Une réalisation du sous groupe de Cartan H de $SU(2)$ est donnée par

$$h_\psi = \begin{pmatrix} e^{i \frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \psi < 4\pi. \quad (\text{A.6})$$

Son groupe de Weyl est $W = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$. Les classes de conjugaison sont alors données par les angles $[0; 2\pi]$.

A.1.3 Algèbre de Lie

Matrices de Pauli

On définit les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Elles vérifient la relation

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \eta^{kl} \sigma_l + \delta_{ij} \mathbb{I}, \quad (\text{A.8})$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique à 3 indices tel que $\epsilon_{123} = +1$, η^{kl} désigne la métrique plate euclidienne $(+, +, +)$, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Générateurs d'algèbre $\mathfrak{su}(2)$

On définit les générateurs

$$\mathcal{J}_1 = \frac{i}{2} \sigma_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = -\frac{i}{2} \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_0 = \frac{i}{2} \sigma_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Ils vérifient la relation d'algèbre de Lie des générateurs de $\mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \epsilon_{ijk} \eta^{kl} \mathcal{J}_l, \quad (\text{A.10})$$

et

$$\text{tr}(\mathcal{J}_i \mathcal{J}_j) = -\frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

On définit l'opérateur de Casimir

$$C = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_0^2. \quad (\text{A.12})$$

A.1.4 Paramétrisation angle/vecteur unitaire

En utilisant le fait qu'au voisinage de 0, $\mathfrak{su}(2)$ est isomorphe à $\text{SU}(2)$, on peut donner une autre paramétrisation. Un élément de $\text{SU}(2)$ peut se paramétriser à l'aide d'un élément d'algèbre de Lie $Z = \Omega \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{J}}$ où Ω est un angle $\Omega \in [0; 2\pi]$ et \vec{n} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 .

$$g = e^Z = \exp\left(\Omega \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{J}}\right). \quad (\text{A.13})$$

L'angle Ω est relié aux angles d'Euler par

$$\cos \frac{\Omega}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}. \quad (\text{A.14})$$

On a alors

$$g = e^Z = \cos \frac{\Omega}{2} \mathbb{I} + 2 \sin \frac{\Omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{J}}. \quad (\text{A.15})$$

On définit $P_g = 2 \sin \frac{\Omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{J}}$ comme la projection de g sur l'algèbre de Lie.

A.1.5 Le groupe $SO(3)$

Le groupe $SO(3)$ est isomorphe au sous-ensemble de $SU(2)$ obtenu à l'aide de la paramétrisation (A.1) en restreignant le domaine (A.2) à $0 \leq \psi < 2\pi$. $SO(3)$ est couvert deux fois par $SU(2)$. Son groupe de Weyl est trivial et ses classes de conjugaison sont aussi données par les angles $[0; 2\pi]$.

A.2 INTÉGRATION

A.2.1 Mesure invariante

Le groupe $SU(2)$ possède une mesure invariante à droite et à gauche. En termes des angles d'Euler, la mesure invariante normalisée est donnée par

$$dg = \sin \theta d\theta \, d\varphi \, d\psi. \quad (\text{A.16})$$

A.2.2 Formule de Weyl

La formule d'intégration de Weyl permet de décomposer une intégrale sur le groupe avec une intégrale sur les classes de conjugaison. Elle s'écrit

$$\int_G dg f(g) = \int_{H/W} dh \Delta(h)^2 \int_{G/H} dx f(xhx^{-1}), \quad (\text{A.17})$$

avec dans le cas de $SU(2)$, $H/W \sim [0; 2\pi]$ pour la réalisation (A.6) de H/W , $\Delta(h_\psi) = \sin \psi$.

A.2.3 Fonction(s) delta

Les fonctions delta sur $SU(2)$ et $SO(3)$ sont définies à l'aide des mesures de Haar normalisées par

$$\int_G dg f(g) \delta^G(g) = f(e), \quad \forall f. \quad (\text{A.18})$$

On a en particulier la relation [36]

$$\int_{\mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3} dX e^{i\text{tr}(Xg)} = 4\pi \left[\delta^{SU(2)}(g) + \delta^{SU(2)}(-g) \right] = 8\pi \delta^{SO(3)}(g) \quad (\text{A.19})$$

A.3 THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

A.3.1 Représentations

Les représentations de $SU(2)$ sont labelées par un demi-entier j , $2j \in \mathbb{N}$ et réalisées sur l'espace de représentation $V^j \sim \mathbb{C}^{2j+1}$. L'opérateur de Casimir dans la représentation j est égal à $-j(j+1)\mathbb{I}$. Le caractère de la représentation j est donné en termes de l'angle Ω par

$$\chi^j(g) = \frac{\sin(2j+1)\frac{\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} = U_{2j}\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad (\text{A.20})$$

où U_n désigne les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

L'orthogonalité des caractères de représentations irréductibles d'un groupe compact s'écrit

$$\int_G dg \chi^{j_1}(g) \chi^{j_2}(g) = \delta_{j_1, j_2}. \quad (\text{A.21})$$

La convolution des caractères donne

$$\int_G dg \chi^{j_1}(g) \chi^{j_2}(xg^{-1}) = \frac{\delta_{j_1, j_2}}{2j_1 + 1} \chi^{j_1}(x) \quad (\text{A.22})$$

Les caractères s'écrivent en termes d'intégrale sur les orbites co-adjointes de l'algèbre de Lie à l'aide de la formule de Kirillov

$$\chi^j(e^Z) = \frac{\int_{\mathcal{O}_j} d_j X e^{i\text{tr}(XZ)}}{\int_{\mathcal{O}_0} d_0 X e^{i\text{tr}(XZ)}}, \quad (\text{A.23})$$

où \mathcal{O}_j désigne la sphère de rayon $2j + 1$ de $\mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3$ et $d_j X$ la mesure normalisée sur cette orbite.

A.3.2 Matrices de représentation

La représentation de spin j sur V^j est explicitement réalisée à l'aide des éléments de matrices donnés par les fonctions de Wigner

$$D_{mn}^j(u(\varphi, \theta, \psi)) = e^{-i(m\varphi + n\psi)} i^{m-n} P_{mn}^j(\cos \theta) \quad (\text{A.24})$$

où P_{mn}^j est un polynôme (cf [123]). On a la relation

$$D_{mn}^j(g^{-1}) = D_{mn}^j(\bar{g}) = \overline{D_{mn}^j(g)} = (-1)^{m-n} D_{-m-n}^j(g). \quad (\text{A.25})$$

L'orthogonalité des matrices de représentations s'écrit

$$\int_G dg D_{m_1 n_1}^{j_1}(g) \overline{D_{m_2 n_2}^{j_2}(g)} = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, m_2} \delta_{n_1, n_2}. \quad (\text{A.26})$$

A.3.3 Fusion des représentations

Entrelaceur trivalent

La décomposition du produit tensoriel de deux espaces de représentations s'écrit

$$V^{j_1} \otimes V^{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V^j \quad (\text{A.27})$$

Dans le membre de droite, chaque représentation apparaît avec la multiplicité 1. A normalisation près, il n'existe qu'un unique entrelaceur de 3 représentations. Le produit scalaire des vecteurs de base de $V^{j_1} \otimes V^{j_2}$ avec V^{j_3} est donné par les coefficients de Clebsh-Gordan

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 m_3 \rangle \quad (\text{A.28})$$

qui sont nuls sauf si $m_1 + m_2 = m_3$. On définit alors les symboles $3j$ de Wigner

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{-j_1+j_2+m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 m_3 \rangle \quad (\text{A.29})$$

Ils sont nuls sauf si $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ et $j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}$ et vérifient

$$\sum_{m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_3 \\ m_4 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{\delta_{j_1, j_4} \delta_{m_1, m_4}}{2j_1 + 1} \quad (\text{A.30})$$

Ils sont symétriques par permutation circulaire des colonnes. Par transposition de deux colonnes on a

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

On a par réflexion

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

En conséquence on a la normalisation

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3}. \quad (\text{A.33})$$

Le symbole $3j$ n'est donc pas l'entrelaceur trivalent normalisé, puisqu'il n'est normalisé qu'à un signe près.

Intégrale du produit de matrices de représentation

L'intégrale du produit de 3 matrices de représentation est donc donné par

$$\int_G dg D_{m_1 n_1}^{j_1} D_{m_2 n_2}^{j_2} D_{m_3 n_3}^{j_3} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Symbole $6j$ de Wigner

On définit le symbole $6j$ de Wigner par

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{j_4+j_5+j_6+m_4+m_5+m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_5 & j_4 \\ m_3 & -m_5 & m_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ -m_4 & m_2 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_6 & j_5 & j_1 \\ -m_6 & m_5 & m_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

On peut définir une version 'normalisée' du symbole $6j$ en ajustant le signe du au fait que les symboles $3j$ ne sont normalisé qu'à un signe près. On définit alors

$$\left[\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right] = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.36})$$

A.3.4 Formule de Plancherel

La formule de Plancherel exprime la décomposition de la fonction δ en termes des caractères de représentation. On a

$$\delta^{\mathrm{SO}(3)} = \sum_{j \in \mathbb{N}} (2j + 1) \chi^j(g). \quad (\text{A.37})$$

On a de même

$$\delta^{\mathrm{SU}(2)} = \sum_j (2j + 1) \chi^j(g). \quad (\text{A.38})$$

où la somme porte sur les demi-entiers. On a par cette formule

$$\delta^{\mathrm{SU}(2)}(-g) = \sum_j (2j + 1) \chi^j(-g) = \sum_j (2j + 1) (-1)^{2j} \chi^j(g). \quad (\text{A.39})$$

B

LE GROUPE QUANTIQUE $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$

Cette annexe présente les notions nécessaires à l'étude de l'invariant de chain-mail pour le groupe $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$. Les détails concernant ce groupe, sa théorie des représentations et son usage en gravité 3D peuvent être trouvés dans les articles de Bais et al. [103, 104, 105].

B.1 LE DOUBLE DE DRINFELD D'UN GROUPE

Le double de Drinfeld d'un groupe fini G est une algèbre quasi-triangulaire définie par :

- Structure d'espace vectoriel : $\mathcal{D}(G) = \mathcal{C}(G) \otimes \mathbb{C}[G]$ Un élément général peut être représenté comme une combinaison linéaire $(f \otimes g)$ où f est une fonction sur G et $g \in G$.
- Produit : $(f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2) = f_1(\cdot) f_2(g_1^{-1} \cdot g_1) \otimes g_1 g_2$
En particulier on a $(1 \otimes g) \cdot (\delta_k \otimes e) = \delta_k(g^{-1} \cdot g) \otimes g$ et $(\delta_k \otimes e) \cdot (1 \otimes g) = \delta_k \otimes g$.
- Coproduit : $\Delta(f \otimes g)(x_1, x_2) = f(x_1 x_2) g \otimes g$
- Antipode : $S(f \otimes g)(x) = f(g x^{-1} g^{-1}) \otimes g^{-1}$
- R-matrice : $R = \sum_g (\delta_g \otimes e) \otimes (1 \otimes g)$, en particulier $R^{-1} = \sum_g (\delta_g \otimes e) \otimes (1 \otimes g^{-1})$

En principe, pour des raisons de convergence ces définitions ne valent que dans le cas d'un groupe fini G . Pour un groupe comme $\text{SU}(2)$, ces définitions peuvent être traduites en utilisant l'isomorphisme $\mathcal{D}(G) = \mathcal{C}(G) \otimes \mathbb{C}[G] \sim \mathcal{C}(G \times G)$

$$\mathcal{C}(G) \otimes \mathbb{C}[G] \leftrightarrow \mathcal{C}(G \times G) \quad (\text{B.1})$$

$$(f \otimes g) \rightarrow f(x) \delta_g(y) \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_g F(\cdot, g) \otimes g \leftarrow F(x, y) \quad (\text{B.3})$$

Néanmoins pour maintenir les notations claires, on peut effectuer les calculs avec $\mathcal{D}(G) = \mathcal{C}(G) \otimes \mathbb{C}[G]$, en gardant à l'esprit que ceux-ci peuvent être traduits dans une forme rigoureuse à l'aide de l'isomorphisme.

B.2 REPRÉSENTATIONS DE $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$

Les représentations de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ sont étiquetées par une paire (θ, j) où θ est une classe de conjugaison de $\text{SU}(2)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $2j \in \mathbb{N}$. Les espaces de représentation correspondants $\mathcal{V}^{(\theta, j)}$

sont définis par

$$\mathcal{V}^{(\theta,j)} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \mid \forall \xi \in [0, 4\pi], \phi(xh_\xi) = e^{-ij\xi} \phi(x) \right\}, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{V}^{(0,j)} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}(G, V^j) \mid \forall h \in \text{SU}(2), \phi(xh) = D^j(h^{-1})\phi(x) \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Une base de $\mathcal{V}^{(\theta,j)}$ est donnée par les fonctions de Wigner qui sont les éléments de matrices des représentations de $\text{SU}(2)$

$$\{D_{m,j}^k(x) \mid \forall k \geq j, -k \leq m \leq k\}. \quad (\text{B.6})$$

On peut voir $\mathcal{V}^{(0,j)}$ est en fait isomorphe à V^j puisqu'une telle fonction f est entièrement déterminée par sa valeur $\phi(e) = v \in V^j$.

Les représentations des éléments de $\mathcal{D}(\text{SU}(2))$ agissant sur ces espaces sont

$$\overset{(\theta,j)}{\Pi} (f \otimes g)[\phi] = x \rightarrow f(xh_\theta x^{-1})\phi(g^{-1}x) \quad (\text{B.7})$$

$$\overset{(0,j)}{\Pi} (f \otimes g)[v] = f(e)D^j(g^{-1}) \cdot v \quad (\text{B.8})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. Wald. General relativity. Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.
- [2] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J.*, 195 :L51–L53, 1975.
- [3] P. J. E. Peebles. Principles of physical cosmology. Princeton, USA : Univ. Pr. (1993) 718 p.
- [4] G. F. R. Ellis and S. W. Hawking. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on mathematical physics.
- [5] C. Rovelli. What is observable in classical and quantum gravity? *Class. Quant. Grav.*, 8 :297–316, 1991.
- [6] S Weinberg. The quantum theory of fields. vol. 1 : Foundations. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1995) 609 p.
- [7] P. A. M. Dirac. Lectures on quantum mechanics. Academic Press, New York, 1965.
- [8] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum mechanics and Path integrals*. McGraw-Hill Higher Education, 1965.
- [9] M. Le Bellac. Des phénomènes critiques aux champs de jauge – une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs. Paris, France : Inter-éditions (1988).
- [10] S. Weinberg. What is quantum field theory, and what did we think it was? 1996, hep-th/9702027.
- [11] G. Amelino-Camelia. Quantum-gravity phenomenology with gamma rays and uhe cosmic rays. 2002, astro-ph/0201047.
- [12] R. F. Streater and A. S. Wightman. Pct, spin and statistics, and all that. Redwood City, USA : Addison-Wesley (1989) 207 p. (Advanced book classics).
- [13] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7 :2333–2346, 1973.
- [14] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43 :199–220, 1975.
- [15] Giovanni Amelino-Camelia. Quantum-gravity phenomenology : Status and prospects. *Mod. Phys. Lett.*, A17 :899–922, 2002, gr-qc/0204051.
- [16] Steven B. Giddings. Black holes in the lab? *Gen. Rel. Grav.*, 34 :1775–1779, 2002, hep-th/0205205.
- [17] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The ultraviolet behavior of einstein gravity. *Nucl. Phys.*, B266 :709, 1986.
- [18] B. S. Dewitt. Quantum theory of gravity. *Phys. Rev.*, 160 :1113–1148, 1967.

- [19] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :2244–2247, 1986.
- [20] C. Rovelli and L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nucl. Phys.*, B331 :80, 1990.
- [21] C. Rovelli. Cambridge university press.
- [22] Thomas Thiemann. Introduction to modern canonical quantum general relativity. 2001, gr-qc/0110034.
- [23] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Spin networks and quantum gravity. *Phys. Rev.*, D52 :5743–5759, 1995, gr-qc/9505006.
- [24] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B442 :593–622, 1995, gr-qc/9411005.
- [25] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov. Quantum geometry and black hole entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :904–907, 1998, gr-qc/9710007.
- [26] Giorgio Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. *Class. Quant. Grav.*, 14 :L177–L181, 1997, gr-qc/9612030.
- [27] Alejandro Perez. Spin foam models for quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20 :R43, 2003, gr-qc/0301113.
- [28] John C. Baez. An introduction to spin foam models of bf theory and quantum gravity. *Lect. Notes Phys.*, 543 :25–94, 2000, gr-qc/9905087.
- [29] J. B. Hartle and S. W. Hawking. Wave function of the universe. *Phys. Rev.*, D28 :2960–2975, 1983.
- [30] G. Ponzano and T. Regge. Semiclassical limit of racah coefficients. in 'Spectroscopic and Group theoretical methods in Physics, ed. F Bloch, North-Holland, New York, 1968.
- [31] John W. Barrett and Louis Crane. Relativistic spin networks and quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 39 :3296–3302, 1998, gr-qc/9709028.
- [32] John W. Barrett and Louis Crane. A lorentzian signature model for quantum general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 17 :3101–3118, 2000, gr-qc/9904025.
- [33] S. Carlip. Quantum gravity in 2+1 dimensions. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 276 p.
- [34] L. Freidel and D. Louapre. Asymptotics of 6j and 10j symbols. *Class. Quant. Grav.*, 20 :1267–1294, 2003, hep-th/0209134.
- [35] L. Freidel and D. Louapre. Diffeomorphisms and spin foam models. *Nucl. Phys.*, B662 :279–298, 2003, gr-qc/0212001.
- [36] L. Freidel and D. Louapre. Ponzano-regge model revisited i : Gauge fixing, observables and interacting spinning particles. 2004, hep-th/0401076.
- [37] L. Freidel and D. Louapre. Non-perturbative summation over 3d discrete topologies. *Phys. Rev.*, D68 :104004, 2003, hep-th/0211026.
- [38] L. Freidel and D. Louapre. Ponzano-regge model revisited ii. à paraitre.
- [39] Laurent Freidel, David Louapre, Karim Noui, and Phillipe Roche. Duality formulas of classical and quantum 6j symbols. à paraitre.
- [40] M. Henneaux and C. Teitelboim. Quantization of gauge systems. Princeton, USA : Univ. Pr. (1992) 520 p.

- [41] H-J. Matschull. Dirac's canonical quantization programme. 1996, quant-ph/9606031.
- [42] Donald Marolf. Group averaging and refined algebraic quantization : Where are we now ? 2000, gr-qc/0011112.
- [43] B. DeWitt. *Phys. Rev. Lett.*, 12 :742, 1964.
- [44] L. D. Fadeev and V. N. Popov. *Phys. Lett. B*, 25 :29, 1967.
- [45] Pierre Ramond. Field theory : A modern primer. *Front. Phys.*, 74 :1–329, 1989.
- [46] Emil Mottola. Functional integration over geometries. *J. Math. Phys.*, 36 :2470–2511, 1995, hep-th/9502109.
- [47] J. Halliwell and M. Ortiz. Sum over histories origin of the composition laws of relativistic quantum mechanics. *Phys. Rev.*, D48 :748–768, 1993.
- [48] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner. in 'Gravitation : An introduction to current research', ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [49] J. Isenberg and J. Nester. Canonical gravity. in 'General Relativity and Gravitation, Vol 1', A. Held ed., pages 13-93 (1980).
- [50] A. Palatini. *Rend. Circ. Math. Palermo*, 43 :203, 1920.
- [51] A. Ashtekar. Lectures on nonperturbative canonical gravity. Singapore, Singapore : World Scientific (1991) 334 p. (Advanced series in astrophysics and cosmology, 6).
- [52] J. F. Plebanski. On the separation of einsteinian substructures. *J. Math. Phys.*, 12 :2511, 1977.
- [53] Joseph D. Romano. Geometrodynamics versus connection dynamics (in the context of (2+1) and (3+1) gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 25 :759–854, 1993, gr-qc/9303032.
- [54] Peter Peldan. Actions for gravity, with generalizations : A review. *Class. Quant. Grav.*, 11 :1087–1132, 1994, gr-qc/9305011.
- [55] R. Coquereaux. Espaces fibrés et connexions. Disponible à l'adresse <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~coque>.
- [56] R. De Pietri and L. Freidel. so(4) plebanski action and relativistic spin foam model. *Class. Quant. Grav.*, 16 :2187–2196, 1999, gr-qc/9804071.
- [57] G. T. Horowitz. Exactly soluble diffeomorphism invariant theories. *Commun. Math. Phys.*, 125 :417–437, 1989.
- [58] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity. *Living Rev. Rel.*, 1 :1, 1998, gr-qc/9710008.
- [59] A. Ashtekar. New hamiltonian formulation of general relativity. *Phys. Rev.*, D36 :1587–1602, 1987.
- [60] J. Fernando Barbero. Real ashtekar variables for lorentzian signature space times. *Phys. Rev.*, D51 :5507–5510, 1995, gr-qc/9410014.
- [61] Soren Holst. Barbero's hamiltonian derived from a generalized hilbert- palatini action. *Phys. Rev.*, D53 :5966–5969, 1996, gr-qc/9511026.
- [62] Nuno Barros e Sa. Hamiltonian analysis of general relativity with the immirzi parameter. *Int. J. Mod. Phys.*, D10 :261–272, 2001, gr-qc/0006013.
- [63] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Projective techniques and functional integration for gauge theories. *J. Math. Phys.*, 36 :2170–2191, 1995, gr-qc/9411046.

- [64] Abhay Ashtekar, Jerzy Lewandowski, Donald Marolf, Jose Mourao, and Thomas Thiemann. Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. *J. Math. Phys.*, 36 :6456–6493, 1995, gr-qc/9504018.
- [65] R. De Pietri. The equivalence between the connection and the loop representation of quantum gravity. 1997, gr-qc/9711021.
- [66] Abhay Ashtekar and C. J. Isham. Representations of the holonomy algebras of gravity and nonabelian gauge theories. *Class. Quant. Grav.*, 9 :1433–1468, 1992, hep-th/9202053.
- [67] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry. i : Area operators. *Class. Quant. Grav.*, 14 :A55–A82, 1997, gr-qc/9602046.
- [68] Carlo Rovelli. Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3288–3291, 1996, gr-qc/9603063.
- [69] Olaf Dreyer. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :081301, 2003, gr-qc/0211076.
- [70] T. Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd). *Class. Quant. Grav.*, 15 :839–873, 1998, gr-qc/9606089.
- [71] Thomas Thiemann. The phoenix project : Master constraint programme for loop quantum gravity. 2003, gr-qc/0305080.
- [72] Edward Witten. (2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nucl. Phys.*, B311 :46, 1988.
- [73] Steven Carlip. Six ways to quantize (2+1)-dimensional gravity. 1993, gr-qc/9305020.
- [74] T. Thiemann. Qsd iv : 2+1 euclidean quantum gravity as a model to test 3+1 lorentzian quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 15 :1249–1280, 1998, gr-qc/9705018.
- [75] Laurent Freidel, Etera R. Livine, and Carlo Rovelli. Spectra of length and area in (2+1) lorentzian loop quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20 :1463–1478, 2003, gr-qc/0212077.
- [76] A. Achucarro and P. K. Townsend. A chern-simons action for three-dimensional anti-de sitter supergravity theories. *Phys. Lett.*, B180 :89, 1986.
- [77] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Commun. Math. Phys.*, 121 :351, 1989.
- [78] T. Regge. General relativity without coordinates. *Nuovo Cim.*, 19 :558–571, 1961.
- [79] J. D. Roberts. Classical 6j-symbols and the tetrahedron. *Geometry and Topology*, 3 :21–66, 1999.
- [80] Etera R. Livine and Daniele Oriti. Implementing causality in the spin foam quantum geometry. *Nucl. Phys.*, B663 :231–279, 2003, gr-qc/0210064.
- [81] V. Turaev and O. Viro. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology*, 31 :865–902, 1992.
- [82] Shunya Mizoguchi and Tsukasa Tada. Three-dimensional gravity from the turaev-viro invariant. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :1795–1798, 1992, hep-th/9110057.
- [83] J. D. Roberts. Asymptotics and 6j-symbols. *Geom. Topol. Monogr.*, 4 :245–261, 2002.
- [84] Y. U. Taylor and C. T. Woodward. 6j symbols for $u_q(sl_2)$ and non-euclidian tetrahedra. math.QA/0305113.

- [85] Hiroshi Ooguri. Partition functions and topology changing amplitudes in the 3-d lattice gravity of Ponzano and Regge. *Nucl. Phys.*, B382 :276–304, 1992, hep-th/9112072.
- [86] Edward Witten. Topology changing amplitudes in (2+1)-dimensional gravity. *Nucl. Phys.*, B323 :113, 1989.
- [87] Laurent Freidel and Kirill Krasnov. Spin foam models and the classical action principle. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :1183–1247, 1999, hep-th/9807092.
- [88] Noboru Kawamoto, Holger Bech Nielsen, and Noriaki Sato. Lattice Chern-Simons gravity via Ponzano-Regge model. *Nucl. Phys.*, B555 :629–649, 1999, hep-th/9902165.
- [89] Laurent Freidel and Etera R. Livine. Spin networks for non-compact groups. *J. Math. Phys.*, 44 :1322–1356, 2003, hep-th/0205268.
- [90] John W. Barrett. Geometrical measurements in three-dimensional quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A18S2 :97–113, 2003, gr-qc/0203018.
- [91] S. Deser, R. Jackiw, and Gerard 't Hooft. Three dimensional Einstein gravity : dynamics of flat space. *Ann. Phys.*, 152 :220, 1984.
- [92] Philipp de Sousa Gerbert. On spin and (quantum) gravity in (2+1)-dimensions. *Nucl. Phys.*, B346 :440–472, 1990.
- [93] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71 :38–41, 1947.
- [94] Giovanni Amelino-Camelia. Doubly-special relativity : First results and key open problems. *Int. J. Mod. Phys.*, D11 :1643, 2002, gr-qc/0210063.
- [95] Jerzy Lukierski. Relation between quantum kappa Poincaré framework and doubly special relativity. 2004, hep-th/0402117.
- [96] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of three manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103 :547–597, 1991.
- [97] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, 127 :1–26, 1990.
- [98] U. Pachner. PL-homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings. *European J. Combin.*, 12 :129–145, 1991.
- [99] J. D. Roberts. Skein theory and Turaev-Viro invariants. *Topology*, 34 :771–787, 1995.
- [100] J. D. Roberts. Quantum invariants via skein theory. Phd. Thesis, University of Cambridge (1994).
- [101] T. Ohtsuki. Quantum invariants : A study of knots, 3-manifolds, and their sets. River Edge, USA : World Scientific (2002) 489 p.
- [102] Laurent Freidel and Kirill Krasnov. 2d conformal field theories and holography. 2002, hep-th/0205091.
- [103] F. A. Bais and N. M. Muller. Topological field theory and the quantum double of $su(2)$. *Nucl. Phys.*, B530 :349–400, 1998, hep-th/9804130.
- [104] T. H. Koornwinder, F. A. Bais, and N. M. Muller. Tensor product representations of the quantum double of a compact group. *Commun. Math. Phys.*, 198 :157–186, 1998, q-alg/9712042.
- [105] F. A. Bais, N. M. Muller, and B. J. Schroers. Quantum group symmetry and particle scattering in (2+1)- dimensional quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B640 :3–45, 2002, hep-th/0205021.

- [106] D. V. Alekseevskij, E. B. Vinberg, and A. S. Solodovnikov. *Geometry of spaces of constant curvature*, volume 29 of *Encyclopaedia of mathematical science*. Springer, Berlin, 1993.
- [107] A. Erdélyi. *Asymptotic Expansions*. New York, Dover, 1987.
- [108] John W. Barrett. The classical evaluation of relativistic spin networks. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :593–600, 1998, math.qa/9803063.
- [109] John W. Barrett and Ruth M. Williams. The asymptotics of an amplitude for the 4-simplex. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 3 :209–215, 1999, gr-qc/9809032.
- [110] John C. Baez, J. Daniel Christensen, and Greg Egan. Asymptotics of 10j symbols. *Class. Quant. Grav.*, 19 :6489, 2002, gr-qc/0208010.
- [111] John W Barrett and Christopher M. Steele. Asymptotics of relativistic spin networks. *Class. Quant. Grav.*, 20 :1341–1362, 2003, gr-qc/0209023.
- [112] J. T. Chalker, P. C. W. Holdsworth, and E. F. Shender. Hidden order in a frustrated system : Properties of the heisenberg kagomé antiferromagnet. *Phys.Rev.Lett.*, 68 :855, 1992.
- [113] Roberto De Pietri, Laurent Freidel, Kirill Krasnov, and Carlo Rovelli. Barrett-crane model from a boulatov-ooguri field theory over a homogeneous space. *Nucl. Phys.*, B574 :785–806, 2000, hep-th/9907154.
- [114] R. Geroch. *J. Math. Phys.*, 8 :782, 1967.
- [115] Jan Ambjorn, B. Durhuus, and T. Jonsson. Quantum geometry. a statistical field theory approach. *Cambridge Monogr. Math. Phys.*, 1 :1–363, 1997.
- [116] F. J. Dyson. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 85 :631–632, 1952.
- [117] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2-d gravity and random matrices. *Phys. Rept.*, 254 :1–133, 1995, hep-th/9306153.
- [118] D. V. Boulatov. A model of three-dimensional lattice gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A7 :1629–1646, 1992, hep-th/9202074.
- [119] (ed.) Le Guillou, J. C. and (ed.) Zinn-Justin, J. Large order behavior of perturbation theory. Amsterdam, Netherlands : North-Holland (1990) 580 p. (Current physics - sources and comments.
- [120] A. D. Sokal. An improvement on watson’s theorem on borel summability. *J. Math. Phys.*, 21 :261–263, 1980.
- [121] R. Loll and W. Westra. Sum over topologies and double-scaling limit in 2d lorentzian quantum gravity. 2003, hep-th/0306183.
- [122] E. Buffenoi, M. Henneaux, K. Noui, and Ph. Roche. Hamiltonian analysis of plebanski theory. 2004, gr-qc/0404041.
- [123] N. Vilenkin and A. U. Klimyk. *Representation of Lie groups and special functions*. Kluwer Academic Publishers.