



HAL
open science

Étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORET dans un milieu poreux : analyse de stabilité linéaire et simulations 3D

Haykel Ben Ahmed

► **To cite this version:**

Haykel Ben Ahmed. Étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORET dans un milieu poreux : analyse de stabilité linéaire et simulations 3D. Physique mathématique [math-ph]. Université de Cergy Pontoise; Faculté des Sciences de Tunis, 2008. Français. NNT : . tel-00337572

HAL Id: tel-00337572

<https://theses.hal.science/tel-00337572>

Submitted on 7 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE TUNIS EL MANAR
FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS

UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE

THESE¹

Présentée pour obtenir le diplôme de :

DOCTEUR
Spécialité : PHYSIQUE

Sujet : Étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORÉ dans un milieu poreux : analyse de stabilité linéaire et simulations 3D

par

Haykel Ben AHMED

Soutenu le 10 avril 2008, devant le jury composé de :

Mr. A. BELGHITH	Pr.Em (F.S.Tunis)	Président
Mr. M. COMBARNOUS	Pr. Em. (U. Bordeaux 1))	Rapporteur
Mr. E. SEDIKI	MC (F.S.Tunis)	Rapporteur
Mr. R. BENNACER	MC-HDR. (U. de Cergy-Pontoise, France)	Directeur de thèse
Mr. H. SAMMOUDA	Pr. (F.S. Monastir, Tunisie)	Directeur de thèse
Mr. J. POUSIN	Pr. (INSA-LYON)	Examineur
Mr. M. EL GANAOUI	MC (U. de Limoges, France)	Invité CMCU France

¹ Thèse en cotutelle réalisée dans le cadre du projet UTIQUÉ 04G1312 du Comité Mixte Tuniso-Français

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué en cotutelle entre **l'Université de Cergy-Pontoise en France** et **l'Université de Tunis El Manar en Tunisie** au laboratoire d'Energétique et des Transferts Thermiques et Massiques (LETTM), au sein de l'équipe des Transferts Multiphasiques et Milieux Poreux à la Faculté des Sciences de Monastir sous la direction de Monsieur Habib **SAMMOUDA**, et le Laboratoire d'Energétique et d'Environnement et de Valorisation de matériaux (LEEVAM) sous la direction de Monsieur Rachid **BENNACER**.

Je remercie Mr. Ali BELGHITH, Professeur Emérite à la Faculté des Sciences de Tunis , pour avoir accepté présider le jury de ce travail, et qui était toujours proche de moi dans ma formation de chercheur, et qui par sa sagesse et sa compétence a semé en moi l'amour de la science. Il nous a toujours apporté culture et finesse scientifique.

Je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèse :

Mr. Rachid BENNACER, Maître de Conférences et HDR à l'Université de Cergy Pontoise (Paris, France), qui a accepté de m'intégrer dans son labo, et en qui j'ai toujours trouvé le personnage de frère, de père, d'ami, de collègue et de facilitateur des difficultés courantes que je trouve que ce soit au travail ou ailleurs. J'ai agréablement aimé travailler avec lui, je suis fier d'être son disciple, et je le remercie fortement pour l'apport scientifique qu'il m'a fourni. Il m'a appris de nouveau à raisonner et à voir les choses autrement et poser les questions autrement. Il a forgé en moi un état d'esprit de chercheur, et je pense : c'est ce qui compte dans la recherche. Il n'a guère économisé un effort pour me conseiller.

Mr. Habib SAMMOUDA, Professeur à la Faculté des Sciences de Monastir, qui n'a jamais épargné un effort pour m'aider sur tous les plans. Bien que j'ai travaillé avec lui moins que Mr. Bennacer vu les contraintes des lieux, mais j'ai pu profiter de son expérience et compétence scientifique. Ce fut un plaisir de le côtoyer, car il s'est toujours comporté avec moi, comme ami et père protecteur.

Je tiens aussi à remercier Mr. Michel COMBARNOUS, Professeur Emérite de l'Université de l'Université de Bordeaux 1 en France, et Mr. Ezeddine SEDIKI, Maître de Conférences à la

Faculté des Sciences de Tunis, pour leur courage et de la bonne volonté qui leur ont été nécessaires pour se plonger dans ce manuscrit et dont les avis et remarques particulièrement justes et constructifs me furent très utiles.

Je remercie vivement Mr. Jérôme POUSIN, Professeur à l'institut INSA de Lyon en France, pour son vif intérêt à ce travail et d'avoir accepté de le juger.

Je remercie messieurs Bernard PATEYRON Ingénieur de Recherche et Mohamed El GANAOUI maître de Conférences, de l'Université de Limoges (France), pour leur appui et soutien à la réalisation de ce travail à travers le projet de coopération scientifique Tuniso-Française (CMCU). Dans ces remerciements, je ne voudrais pas oublier Mr. Hassen BEJI, Professeur à l'Université de Jules Vernes, pour ses précieux actes et conseils, ainsi que tous les membres du laboratoire **LETTM**, notamment Mr. Mohamed Afif El CAFSI, Directeur du dit laboratoire et le personnel de la direction des affaires estudiantines du ministère pour leur précieux soutien matériel.

Le soutien psychologique sans faille, bien que subjective à l'égard de la valeur de mon travail, est à mettre au crédit de ma chère Mère ; quant à mon cher Père, il sait tout ce que je lui dois et à quel point je lui en suis reconnaissant. Il fait symbole absolu du coaching didactique, continu et efficace.

Je pense enfin à Manel qui a plutôt connu de cette thèse les mauvais cotés que les bons et qui n'a pourtant jamais perdu patience.

Mes frères, mes amis, compagnons de fortune ou d'infortune selon les jours, ne sont jamais écartés de ces expressions de gratitude, et de reconnaissance.

Haïkel Ben Hamed



*À ma mère et
mon père &*

*À tous ceux
qui m'aiment*



TABLE DES MATIERES

TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	8
PROLOGUE	16
RESUME	20
INTRODUCTION :	22
CHAPITRE 1	25
SUR LA CONVECTION MIXTE INFLUENCEE PAR L'EFFET SORET : ÉTAT DE L'ART	25
1 ÉTAT DE L'ART	25
1.1 PRELIMINAIRES.....	25
1.2 NOTIONS DE BASE	26
1.2.1 Convection naturelle, forcée et mixte.....	26
1.2.2 L'effet SORET ou LUDWIG	26
1.2.3 Milieu poreux.....	28
1.2.4 Modèles d'écoulement en milieux poreux :.....	32
1.3 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES SYSTEMES DE RAYLEIGH BENARD	34
1.3.1 Mécanisme fondamental de RAYLEIGH BENARD	34
1.3.2 Un peu d'histoire : de RUMFORD à RAYLEIGH :	37
1.3.3 Convection mixte en configuration de Rayleigh Bénard :	39
1.3.4 Convection mixte en milieu de DARCY : $C_M RBD$	51
1.3.5 Le RAYLEIGH BENARD SORET en milieu de DARCY : $RBSD$	52
1.3.6 Convection mixte en configuration de Rayleigh Bénard Soret :	53
1.4 RECAPITULATIF DE BIBLIOGRAPHIE :	56
1.5 VALEUR AJOUTEE APPOREE PAR CE TRAVAIL :	56
CHAPITRE 2	58
METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL LINEAIRE DE LA STABILITE DE LA SOLUTION DE CONDUCTION.....	58
2 CALCUL DE LA STABILITE :.....	58
2.1 THEORIE LINEAIRE DE LA STABILITE :.....	60
2.2 ÉQUATIONS DE BASE :	60
2.3 MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE :.....	61
2.3.1 Équations aux perturbations :.....	62
2.3.2 Conditions aux frontières des perturbations :.....	64
2.4 STABILITE LINEAIRE :	65
2.4.1 Stabilité marginale $\mathbf{p} = \mathbf{0}$:.....	65
2.4.2 Méthode des éléments finis.....	66
2.4.3 Stabilité transitoire : $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$	77
2.5 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE.....	79

2.5.1	Convection naturelle thermosolutale en milieu de Darcy-Brinkman :.....	79
2.5.2	Écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard :	80
CHAPITRE 3	81
ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE	81
3 RESULTATS ISSUS DE L'ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE :	81
3.1	CONVECTION NATURELLE THERMIQUE	82
3.2	CONVECTION NATURELLE EN FLUIDE BINAIRE SOUS EFFET SORET	87
3.2.1	Étude paramétrique de la stabilité marginale supercritique :.....	88
3.2.2	Étude paramétrique de la stabilité transitoire.....	89
3.2.3	Représentation graphique des résultats et interprétations	91
3.3	CONVECTION MIXTE EN FLUIDE PUR	98
3.3.1	Formulation générale du seuil de stabilité.....	105
3.4	CONVECTION MIXTE EN FLUIDE BINAIRE SOUS L'EFFET SORET :	111
3.4.1	Un coefficient de séparation positif.....	111
3.4.2	Un coefficient de séparation négatif.....	113
3.5	CONCLUSION	117
CHAPITRE 4	119
MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE DES SIMULATIONS 3D.....		119
4 FORMULATION MATHÉMATIQUE.....		119
4.1	HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES.....	120
4.2	ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES	121
4.3	SYSTEMES D'ÉQUATIONS ADIMENSIONNELLES	122
4.3.1	Valeurs de références et grandeurs adimensionnelles	122
4.3.2	Choix de la concentration de référence :	125
4.4	CONDITIONS AUX LIMITES :	129
4.4.1	Conditions aux limites de la concentration :	129
4.4.2	Conditions aux limites d'entrée :	130
4.4.3	Conditions aux limites de sortie :	131
4.4.4	Résumé des conditions aux limites :	133
4.5	RESOLUTION NUMERIQUE :	134
4.5.1	Discrétisation des équations :	134
4.5.2	Accélération de convergence – technique multigrille :	139
4.6	DISCRETISATION DU TERME TRANSITOIRE :	144
4.7	EXERCICES DE VALIDATION :	145
4.7.1	Mode purement diffusif :	145
4.7.2	Confrontation avec solution de benchmark 3D :	147
CHAPITRE 5	149
SIMULATIONS NUMERIQUES TRIDIMENSIONNELLES.....		149
5 SIMULATIONS NUMERIQUES TRIDIMENSIONNELLES.....		149
5.1	EFFET DES DIMENSIONS DE LA CAVITE	151
5.1.1	Influence de la longueur	152

5.1.2	<i>Influence de la profondeur</i>	155
5.2	CONFRONTATION AUX DONNEES DE LA STABILITE LINEAIRE.....	160
5.2.1	<i>La genèse de la convection</i>	160
5.2.2	<i>Caractère ondulatoire de l'écoulement</i>	163
5.2.3	<i>Mise en évidence des structures pleinement établies</i>	163
5.3	INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES.....	165
5.3.1	<i>Conditions d'admission et zone d'entrée thermique</i>	166
5.3.2	<i>Conditions de sortie</i>	167
5.4	ÉTUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION MIXTE SOUS EFFET SORET.....	168
5.4.1	<i>Situation générale</i>	168
5.4.2	<i>Mécanique de la convection : Analyse numérique du diagramme de stabilité</i> 169	
5.5	ÉTUDE NUMERIQUE QUANTITATIVE DES ROULEAUX TRANSVERSAUX EN CONVECTION MIXTE SOUS EFFET SORET.....	183
5.5.1	<i>Contexte général</i>	183
5.5.2	<i>Caractéristiques ondulatoire</i>	184
5.5.3	<i>Pulsations et vitesses de phases</i>	187
5.5.4	<i>Transferts thermiques et massiques</i>	195
5.6	CONCLUSION SUR LES SIMULATIONS NUMERIQUES :.....	198
6	CONCLUSION GENERALE	199
	BIBLIOGRAPHIE	202
	ANNEXE	212
7	ANNEXES	212
7.1	SCHEMAS D'INTERPOLATION :.....	212
7.1.1	<i>UPWIND Differencing Scheme (UDS)</i> :.....	212
7.1.2	<i>Schéma puissance : Power law scheme</i> :.....	213
7.1.3	<i>Central Differencing Scheme (CDS)</i> :.....	213
7.1.4	<i>Quadratic Upwind Interpolation (QUICK)</i> :.....	214
7.2	PHENOMENE DE DIFFUSION NUMERIQUE :.....	215
7.3	INSTABILITE NUMERIQUE ET CONSISTANCE :.....	216
7.3.1	<i>Erreurs de Troncature TE</i> :.....	216
7.3.2	<i>Erreurs d'arrondissements</i> :.....	216
7.3.3	<i>Règles de stabilité de PATANKAR</i> :.....	217
7.3.4	<i>Oscillations numériques</i> :.....	218
7.4	SOLVEURS :.....	219
7.5	MAILLAGE ET TRAITEMENTS SPECIAUX :.....	220
7.5.1	<i>Grilles décalées</i> :.....	220
7.5.2	<i>Nœuds imaginaires</i> :.....	223

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1-1 : représentation stérique de l'effet Soret. - <i>a</i> - Fluide multi-constituant en équilibre. - <i>b</i> - Genèse d'un gradient de concentration sous l'effet du gradient thermique.	27
Figure 1-2 : Exemple de géométrie de KOZNEY-KARMAN.	30
Figure 1-3 : Illustration de la taille intermédiaire <i>l</i> (du V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique <i>L</i> et à l'échelle des pores <i>d</i>	32
Figure 1-4 : rouleaux transversaux de RAYLEIGH BÉNARD dans une cellule expérimentale remplie avec de l'eau pure. $\Delta T=4^{\circ}\text{C}$, température à l'extérieur : 21°C	35
Figure 1-5 : Schéma de principe de la convection de RAYLEIGH-BÉNARD. Les flèches vertes donnent les poussées d'ARCHIMÈDE différentielles, moteurs du mouvement. Et les flèches noires donnent les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction, entraves au mouvement.	36
Figure 1-6 : Comparaison schématique des modes de transfert de chaleur conductif et convectif. Les flèches ondulantes représentent une diffusion de chaleur, celles rectilignes un déplacement de fluide. Les lignes discontinues représentent les isothermes attendues dans les deux situations.	37
Figure 1-7 : Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de BÉNARD observées par KOSCHMIEDER et PALLAS (1974).	38
Figure 1-8 : Cellule de PRB avec profil de POISEUILLE purement conductif : écoulement de base pour l'analyse de stabilité temporelle.	40
Figure 1-9 : Diagrammes de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB.	41
Figure 1-10 : rouleau longitudinal : $R \parallel$ à gauche, rouleaux transversaux : $R \perp$ à droite et en bas visualisation expérimentale (PIV) des $R \perp$	41
Figure 1-11 : Rouleaux longitudinaux de première et de deuxième espèce selon MORI et UCHIDA (1966).	41
Figure 1-12 : Diagramme de stabilité des rouleaux longitudinaux stationnaires dû à R. M. CLEVER et al. (1991)	42
Figure 1-13 : Rouleaux longitudinaux observés grâce à la visualisation par plans LASER. A gauche $R \parallel$ stationnaires et à droite $R \parallel$ sinueux oscillant en phase. Images tirées du travail de S. XIN et al (2005).	42
Figure 1-14 : Nombre de RAYLEIGH critique d'apparition des $R \parallel$ en fonction de la profondeur Ay ($=B$ en notations de l'auteur), et nombre de $R \parallel$ apparaissant au dessus du seuil de transition, d'après une analyse de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de POISEUILLE purement conductif (tiré de NICOLAS et al. (2000) avec notations de l'auteur).	48
Figure 1-15 : Comparaison à $Pr=6.4$ entre le diagramme de stabilité déterminé expérimentalement par OUZZANI et al. (1990-1993) ; les résultats de la stabilité linéaire temporelle par LUIJKX (1983) et NICOLAS et al. (2000) ; le courbe de transition entre les $R \perp$ convectivement et absolument instables calculés par MÜLER et al. (1992) pour un écoulement PRB 2D.	48
Figure 1-16 : Courbes de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille vis-à-vis des $R \perp$ et des $R \parallel$ dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension infinie chauffé uniformément par le bas pour $1 \leq Pr \leq 100$ et $Pe=0.5$ (tiré de CHENG et WU (1976)).	50

Figure 2-1 : Présentation de la démarche de linéarisation des équations de NAVIER-STOKES selon le modèle de stabilité par éléments finis.	59
Figure 2-2 : conditions aux frontières	62
Figure 2-3: Expression des perturbations sur la frontière Γ	64
Figure 2-4 : Élément rectangulaire d’Hermite à quatre nœuds.	71
Figure 2-5 : Construction de la matrice d’assemblage	74
Figure 3-1 : Plan du chapitre : Démarche de présentation des résultats.	82
Figure 3-2: Courbes neutres de la naissance de convection dans un canal long. Les mêmes valeurs sont représentées en nombres de Darcy-Rayleigh R_T et en fonction du Rayleigh thermique Ra	84
Figure 3-3: Influence du rapport de forme sur le Darcy-Rayleigh normalisé à la naissance de la convection. $Da = 10 - 8$	85
Figure 3-4: Influence du rapport de forme sur le Rayleigh à la naissance de la convection. $Da = +\infty$	86
Figure 3-5: Apport des résultats obtenus et perspectives.....	89
Figure 3-6: Variation en fonction du rapport de forme et du paramètre de flottabilité N du Rayleigh critique à $Le = 10 ; Pr = 2$. Les lignes de courant et les iso-surfaces de température et de concentration sont données pour $N = -0.01$	91
Figure 3-7: Diagramme de bifurcation en convection naturelle avec et sans effet Soret...	92
Figure 3-8: Actions des forces solutales sur la stabilité.....	92
Figure 3-9 : Formules obtenues par différentes études de la convection naturelle thermosolutale.	93
Figure 3-10: Courbes neutres des différentes bifurcations dans le plan (R, N) pour $Le = 3 ; \varepsilon = 0.7$	94
Figure 3-11: Courbes neutres des bifurcations d’un fluide binaire saturant un milieu poreux à hauts nombres de Le (mélanges liquides) : $Le = 100 ; \varepsilon = 0.7 ; Da = 10 - 8$.	95
Figure 3-12: Courbes neutres des bifurcations d’un fluide binaire saturant un milieu poreux à hauts nombres de Le (mélanges gazeux) : $Le = 0.2 ; \varepsilon = 0.7 ; Da = 10 - 8$	96
Figure 3-13 : Différentes zones définissant les modes de convection en fonction du nombre de Lewis : $N = -0.05$ et $\varepsilon = 0.2$	97
Figure 3-14: Différentes zones définissant les modes de convection en fonction du nombre de Lewis : $N = -0.1$ et $\varepsilon = 0.5$	97
Figure 3-15: illustration de l’aspect physique du problème de convection mixte dans un canal chauffé par le bas et refroidi par le haut.	99
Figure 3-16: Lignes de courant marquant le passage de l’état de repos vers la convection.	101
Figure 3-17: Influence de l’allongement sur le nombre de Rayleigh normalisé au début de la convection mixte	101
Figure 3-18: Évolution de la longueur et du nombre d’onde en fonction de Pe	102
Figure 3-19: Oscillation d’amplitude pour une particule sur la ligne moyenne horizontale (pour $Pe = 3.55$) et développement des rouleaux à partir de la section d’entrée.	103
Figure 3-20: Vue de dessus d’un vortex d’écoulement d’air pour : $Ra = 2500, Pr = 0.71, Re = 5$, l’entrée est à gauche. Source : Lir et al. (2001).....	104
Figure 3-21: Résumé des principaux résultats obtenus en convection mixte.....	104
Figure 3-22 : différentes description du problème de convection mixte.....	108
Figure 3-23 : Représentation graphique des rayons spectraux des matrices d’ordre 1 et 2 de la série de VON NEUMANN. $Da = 10 - 8$	109
Figure 3-24 : Évaluation de la perturbation induite en convection forcée. $Da = 10 - 8$	110

Figure 3-25 : Comparaison graphique entre le RT critique calculé et numérique. $Re = 2$ $Pr = 0.71$	110
Figure 3-26 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation $N > 0$ sur le RAYLEIGH critique à $A = 12, Le = 10, Pr = 7$. Il est à noter que $R(Re)N = 0 \geq 1$	112
Figure 3-27 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation N sur le RAYLEIGH critique à $A = 12, Le = 100, Pr = 10, Da = 10 - 8$	114
Figure 3-28 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation N sur le RAYLEIGH critique à $A = 4 Le = 10 Pr = 1 Da = +\infty$	115
Figure 3-29 : Influence du nombre de Reynolds et du taux de séparation N sur le Rayleigh critique à $A = 4 Le = 1 Pr = 1 Da = 10 - 8$	115
Figure 3-30: Résumé des principaux résultats obtenus en convection mixte.....	116
Figure 4-1 : géométrie à étudier avec conditions aux limites sur les parois actives	120
Figure 4-2 : Profil de Poiseuille à l'entrée, solution de l'équation de Poisson.....	131
Figure 4-3 : Volume élémentaire de contrôle.	135
Figure 4-4 : Structures des cycles multigrilles. S désigne 'smoothing', E désigne la solution exacte sur la grille la moins fine. Chaque ligne descendante symbolise la restriction R alors que chaque ligne ascendante symbolise la prolongation P. La grille la plus fine est au sommet de chaque diagramme.	142
Figure 4-5 : Schéma explicatif de l'affinement des grilles	143
Figure 4-6 : structure des cycles de la méthode FMG. Les mêmes symboles que la Figure 4-4 sont conservés.....	143
Figure 4-7 : principales caractéristique de la technique numérique	144
Figure 4-8 : Nombres de NUSSELT moyen analytiques et numériques.	146
Figure 4-9 : profil linéaire de la température dans le cas diffusif et en régime stationnaire.	147
Figure 4-10 : Diagramme schématique de la configuration physique	147
Figure 5-1 : Ondulations imagées par les vecteurs vitesses (Plans horizontal et vertical médians) d'une simulation 3D mettant en évidence les $R \perp$ pleinement établis.	150
Figure 5-2 : plan de la résolution numérique tridimensionnelle directe.	151
Figure 5-3 : $-a -$ Ondulations des lignes de courant marquant la transition d'un écoulement de Poiseuille sollicité par un chauffage inférieur vers les rouleaux transversaux aux valeurs $Re = 0.05, Pr = 0.71, Ax = 6, Ay = 1, Ra = 2350$. $-b -$ Structures thermoconvectives à axes obliques, saillant la transition des $R \parallel$ vers les $R \perp$ à $Re = 0.05, Pr = 0.71, Ax = 6, Ay = 1, Ra = 2810$	152
Figure 5-4 : Zones de dominance des $R \perp$ et $R \parallel$ en fonction du rapport d'aspect Ax de la longueur. Le nombre des rouleaux longitudinaux est alors fonction de la profondeur Ay	153
Figure 5-5 : Lignes de courant marquant l'installation de la convection naturelle sous forme d'un $R \parallel$ pour une valeur non entière de Ax . $R = 1, Ax = 6, Ay = 1.2, Da = 10 - 8$	153
Figure 5-6 : Lignes de courant en convection naturelle marquant la transition du mode $R \parallel$ vers le mode $R \perp$, sous l'unique influence du changement de l'allongement Ax de la cellule. $R = 1, Ax = 6, Ay = 1.2, Da = 10 - 8$	154
Figure 5-7 : Chevauchement d'un $R \perp$ et d'un $R \parallel$. Solution numérique 3D obtenue pour $RT = 42; Da = 10 - 8; Pr = 1$	156
Figure 5-8 : Représentation spatiale désignant le choix des $R \perp, R \parallel$ et obliques lors de la naissance de la convection.....	157
Figure 5-9 : Diagramme de bifurcations présentant l'influence de la profondeur sur la genèse des rouleaux longitudinaux et transversaux en milieu de DARCY.	158

Figure 5-10 : Diagramme de bifurcations présentant l'influence de la profondeur sur les lieux (R, Ay) de naissance des rouleaux longitudinaux et transversaux. La valeur $R = 1.001$ a été obtenue par stabilité linéaire 2D et vérifiée lors des simulations directes. Essais à : $Re = 0.05$, $Pr = 0.71$, $Ax = 6$, $Da = +\infty$	159
Figure 5-11 : Lignes de courant, montrant l'influence de la profondeur Ay sur le mode convectif, établis pour $Re = 0.05$, $Pr = 0.71$, $Ax = 6$, $Ra = 2670$ ($\Rightarrow R = 26001708 = 1.522$) et respectivement de gauche à droite $Ay = 1$, $Ay = 2$ (les symboles repèrent les structures sur le diagramme)	159
Figure 5-12 : Isothermes dans le plan horizontal médian montrant la cohabitation des $R \parallel$ et $R \perp$ établis pour $Re = 0.5$, $Pr = 0.71$, $Ax = 20$, $Ay = 12$, $Ra = 2500$	160
Figure 5-13 : Exemple de transformée de Fourier des amplitudes de la fonction de courant pour la détermination des longueurs d'ondes.	163
Figure 5-14 : $-a -$ Oscillations de la perturbation de la fonction de courant $-b -$ Naissance des rouleaux loin de l'entrée. (Stabilité linéaire $Ra = 1726$, $N = 0$, $Pe = 7$, $A = 40$).	164
Figure 5-15 : Plan Y et Z montrant le champ de la température le long de la cavité à $Ra = 2500$, $Re = 5$, $Pr = 0,71$	164
Figure 5-16 : Plan vertical médian montrant les isocontours de $w -a -$ et les vecteurs vitesses $-b -$. $Ra = 2500$, $Re = 5$, $Pr = 0,71$	165
Figure 5-17 : Plan médian vertical avec différentes conditions d'entrée du fluide à $Pe = 3.55$ $Ra = 2500$; Maillage $262 \times 42 \times 22$ dimensions de la cavité $20 \times 12 \times 1$; coloration des vectrices vitesses en fonction de la température.	167
Figure 5-18 : Composantes verticales de vitesse sur la ligne horizontale médiane pour les différents cas considérés $Pe = 3.55$; $Ra = 2500$	167
Figure 5-19 : Franchissement d'un rouleau transversal de la frontière virtuelle qui simule des conditions remplaçant un canal infini. $Ra = 2500$ et $Pe = 2.5$	168
Figure 5-20 : Digramme de stabilité dans le plan R, N à $Le = 3$ et $\varepsilon = 0.7$; les flèches numérotées indiquent le sens de variation du RAYLEIGH désignant les cas que étudiés. .	170
Figure 5-21 : Genèse et migration d'un $R \perp$ en mode pleinement établi (plan X, Z). Ces graphes révèlent l'aspect des ondes progressives. Rouleaux transversaux captés sur le plan vertical médian. $RT = 41, Da = 10 - 8, Pe = 0.5, Le = 3, N = -0.05, \Delta t = 5.10 - 2$	172
Figure 5-22 : Morphologie de l'écoulement. $RT = 41, Da = 10 - 8, Pe = 0.5, Le = 3, N = -0.05$	172
Figure 5-23 : Aspect bidimensionnel de l'écoulement loin des parois latérales. Illustration à : $Ra = 2500, Da = \infty, Re = 0.5, Pr = 2, Le = 7, N = -0.01$	173
Figure 5-24 : Légèrement un peu au dessus de la bifurcation de HOPF, on visualise les harmoniques de FOURIER et le graphe paramétré vt, wt aux conditions $RT = 40, Da = 10 - 8, Le = 3, Pr = 1, \varepsilon = 0.3, N = 0.5$	174
Figure 5-25 : Visualisation de l'état oscillatoire au-delà de la bifurcation de Hopf. La figure montre le plan médian d'une cellule suffisamment large où les rouleaux transversaux oscillent en rotation bi-axiale entres ces situations extrêmes représentées par les plans à : $RT = 40, Da = 10 - 8, Le = 3, Pr = 1, \varepsilon = 0.3, N = 0.5$	175
Figure 5-26 : Trajectoire d'une particule dans un rouleau sinueux en convection mixte. $RT = 40, Da = 10 - 8, Le = 3, Pr = 1, \varepsilon = 0.3, N = 0.5$	176
Figure 5-27 : Bien loin au-dessus de la limite surstable, on visualise les harmoniques de Fourier et le graphe paramétré ut, vt, wt à $RT = 100, Da = 10 - 8, Le = 3, Pr = 1, \varepsilon = 0.3, N = 0.5$	176

Figure 5-28 : Coupe transversale de rouleaux longitudinaux sinueux de seconde espèce vus à $Ra = 23500$ jusqu'à $Ra = 2350$ par décroissance. $Da = \infty$, $Le = 100$, $Pr = 10$, $N = -0.2$	178
Figure 5-29 : Coupe transversale de rouleaux longitudinaux vus à l'état de surstabilité à : $Ra = 43500$, $Da = \infty$, $Le = 9$, $Pr = 2$, $N = -0.1$	179
Figure 5-30 : Historique des Vitesses de phase $V\varphi = \omega KC$ obtenue à partir des données numériques 3D. $Ra = 2800$, $Da = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -8 \times 10^{-3}$. Condition initiale : Poiseuille en entrée.....	180
Figure 5-31 : Migration en remontant l'écoulement moyen, d'un $R \perp -$ en mode pleinement établi (plan X, Z). Rouleaux transversaux captés sur le plan vertical médian. $Ra = 2800$, $Da = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -0.01$, $\Delta t = 8.75$	180
Figure 5-32 : Image vectorielle tridimensionnelle de rouleaux transversaux captés à : $Ra = 2800$, $D = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -0.01$, $\Delta t = 8.75$	181
Figure 5-33 : Convection naturelle thermosolutale dans le cas d'un chauffage par le haut avec coefficient de séparation négatif. $Ra = -1710$, $Le = 3$, $Pr = 1$, $N = -5$	182
Figure 5-34 : principaux résultats des simulations numériques nécessaires pour balayer l'espace R, N, Le à la recherche des rouleaux transversaux 3D.....	182
Figure 5-35 : Lieux du plan R, N sièges d'apparition de rouleaux transversaux et d'ondes longitudinales progressives en convection mixte. Les bandes hachurées sont les domaines d'apparition de nos structures recherchées $R \perp +$ et $R \perp -$	183
Figure 5-36 : Nombre d'onde kC en fonction de RT pour différents Pe obtenu à partir des données numériques. $Da = 10 - 8$, $N = 0$ et $\mathcal{E} = 0.5$	184
Figure 5-37 : Nombre d'onde kC en fonction de Pe obtenu à partir des données numériques à un RT voisin de $\mathcal{R}0$. $Da = 10 - 8$, $Le = 1$ et $\mathcal{E} = 0.5$	185
Figure 5-38 : Nombre d'onde k en fonction de Ra pour différents Pe obtenu à partir des données numériques. $Da = \infty$ et $N = 0$	186
Figure 5-39 : Nombre d'onde kC en fonction de Pe obtenu à partir des données numériques à un Ra voisin de $\mathcal{R}0$. $Da = \infty$ et $Le = 1$	186
Figure 5-40 : Image de l'évolution spatio-temporelle de la température construite à partir de la juxtaposition des lignes verticales médianes coordonnées par $(x = 0.5, y = 0.5, z, t)$ captés à : $Ra = 2700$, $Da = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -0.01$	188
Figure 5-41 : Images de l'évolution spatio-temporelle de la vitesse et de la concentration construites à partir de la juxtaposition des lignes verticales médianes coordonnées par $(x = 0.5, y = 0.5, z, t)$ captés à : $Ra = 2700$, $Da = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -0.01$	189
Figure 5-42 : Module de la transformée de FOURIER (F.F.T) du suivi temporel de la température au point $(x = 0.5, y = 0.5, z = 0.5)$ en fonction de la pulsation avec (F.F.T sur plus que 210 points) $Ra = 2800$, $Da = \infty$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = -0.01$; rouleaux se propageant vers l'aval.	189
Figure 5-43 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de RT obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de Pe . $Da = 10 - 8$ et $Le = 1$	190
Figure 5-44 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH. $Da = 10 - 8$, $N = 0$	190
Figure 5-45 : Vitesses de phase des ondes progressives $V\varphi = \omega KC$ en fonction de DARCY-RAYLEIGH obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de PECLLET. $Da = 10 - 8$ et $N = 0$	191

Figure 5-46 : Vitesses de phase des ondes progressives : $V\varphi = \omega KC$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH. $Da = 10 - 8$ et $N = 0$	191
Figure 5-47 : Vitesses de phase des ondes progressives $V\varphi = \omega KC$ comparées. Ces vitesses sont données en fonction de Pe et obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH. $Da = 10 - 8, Pr = 1$ et $Le = 100$	192
Figure 5-48 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents DARCY-RAYLEIGH. $Da = 10 - 8$ et $N = 0$	193
Figure 5-49 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différentes valeurs de Ra . $Da = \infty$ et $N = 0$	193
Figure 5-50 : Pulsations critiques à différents taux de séparations d'un mélange liquide dans un canal large de manière à avoir un écoulement plan loin des parois : $Le = 100, Pr = 10, Ax = 14, Ay = 8$	194
Figure 5-51 : Évolution expérimentale de Nu en fonction de Ra pour différents fluides, dont nous n'avons retenu que la masse volumique. On y remarque une croissance soudaine et rapide de Nu lorsque Ra vaut environ 1708.....	195
Figure 5-52 : Effet du nombre de Darcy sur le Nu et Sh moyens à la naissance de la convection dans le point de surstabilité (mélange eau alcool). $Le = 10, Pr = 7, RT = 20 \times \mathcal{R}0$	196
Figure 5-53 : Transport du soluté par les ondes progressives des $R \perp$. $Le = 100, Pr = 10, N = -0.05, Ra = 2470$, entre les dates $t = 0.2; t = 1.5$ et $t = 4$	197
Figure 5-54 : Isosurfaces de concentration 3D $Pr = 10, Le = 100, Re = 0.05, N = -0.05$ et $Ra = 2470$	197
Figure 7-1 : choix des nœuds pour le schéma Upwind.....	212
Figure 7-2 : interpolation linéaire entre les nœuds voisins.	213
Figure 7-3 : construction de la parabole pour l'interpolation quadratique.....	214
Figure 7-4 : Domaine de stabilité pour le schéma quick [2].	217
Figure 7-5 : volume de contrôle principal.	220
Figure 7-6 : maillage décalé par rapport au centre, et les surface où on calcule les flux.	222
Figure 7-7 : maillage à la frontière.....	223

PROLOGUE

Le soleil couchait dans un fluide d'or oscillant comme le pendule de l'horloge des siècles, un ciel qui ne voyait guère de nuages, les vents caressaient une terre parfaitement lisse, pas de pluies, pas d'averses dans la météo simulée sur le micro-ordinateur primaire d'EDWARD LORENZ (1963). L'univers, selon ses calculs, est fantastique, mais en réalité il est beaucoup plus compliqué et non linéaire. LORENZ, lui ne savait pas, à l'époque, qu'il travaillait sur un problème typiquement chaotique. Il décrivit peu de temps après la convection de RAYLEIGH BENARD selon une nouvelle approche, il s'agissait de la théorie du chaos, éliminant l'utopie Laplacienne d'une prédictibilité déterministe. Il détecta une logique dessinant une suite de bifurcations qui étaient avant lui imprévisibles. Les bifurcations étaient la pierre philosophale recherchée, et des milliers de scientifiques sont partis à la poursuite.

Le problème de BENARD remonte dans le temps à l'année zéro du siècle précédent. Ses origines les plus significatives étaient les expériences d'HENRI BENARD (1900), et la théorie linéaire de LORD RAYLEIGH¹ (1842-1919) peu après. Les intérêts se développaient dès lors, et les effets se croisaient, une longue file de physiciens se succédant sans relâche sur le problème, afin de lui donner sa dimension la plus universelle.

JEAN-LOUIS MARIE POISEUILLE (1797-1869), C. LUDWIG (1856), C. SORET (1879) et HENRY DARCY (1803-1858) travaillaient chacun d'eux dans son coin et à son époque dans des problèmes touchant les fluides, mais sans être identiques ou même proches, et sans jamais savoir que leurs noms seront un jour réunis pour baptiser la désignation d'un problème qui allait les allier à leurs successeurs RAYLEIGH et BENARD. Il s'agit de la convection mixte sous effet LUDWIG dans un milieu poreux.

Dans toutes ces histoires, HENRI NAVIER (1785-1835) et GEORGES STOKES (1819-1903) restent maîtres de l'œuvre de point de vue mathématique puisque, en se basant sur les travaux de DANIEL BERNOULLI (1700-1782) et LEONHARD EULER (1707-1783), NAVIER découvre les fameuses équations en 1821 et 1822. Elles sont fondamentales dans la description mathématique des fluides. Celles-ci sont correctes mais la

¹ LORD RAYLEIGH : prix Nobel de physique en 1904.

méthode pour y aboutir ne l'est pas. La bonne sera trouvée par STOKES, mathématicien irlandais, quelques années plus tard. Quelle que soit l'apport d'une tierce personne venant insérer un terme portant son nom dans les équations de conservation en dynamique des fluides, il se trouve qu'on se ramène toutefois à la forme canonique toujours baptisée équations de NAVIER-STOKES.

Étant décrit par ces mêmes équations de NAVIER-STOKES, le problème de RAYLEIGH BENARD est le paradis des mathématiques appliquées. Que ce soit sous leur forme analytique ou numérique, des théories diverses ont été établies à ce propos. Chacun façonnait les équations dans son moule selon les outils mathématiques, numériques et expérimentales dont il disposait. On fondait des paradigmes divers, mais au delà de leur divergence ils ont un point d'accumulation, voire d'adhérence, commun c'est le problème de RAYLEIGH BENARD. La théorie du chaos, l'analyse entropique, les modèles avec tension superficielle variable, sans ou avec approximation de BOUSSINESQ, avec génération de chaleur au sein du fluide, et l'analyse de stabilité linéaire connurent un âge d'or, des analyses asymptotiques et spectrales aussi. Et finalement le monde du numérique vient d'ébranler l'impitoyable abstraction des mathématiques et la lourde inertie des expériences, avec la dernière révolution des calculateurs superpuissants de nos jours. Il est pratiquement impossible de dénombrer le nombre de travaux touchant les différentes variantes du problème de BENARD, et pourtant le champ est encore exploitable et très fertile.

Dans les écrits des dynamiciens du fluide traitant la convection naturelle et mixte, les recherches en vue de dépasser les non-linéarités abondent, que ce soit dans les théories de stabilité par la négligence des termes non linéaires et des dérivées croisées, ou dans les modèles numériques par approximations des dérivées partielles selon les formules de TAYLOR-YOUNG ou les transformations de LAX-MILGRAM. En dynamique des fluides, tout se ramène aux équations canoniques de conservation, ce miracle de concision reliant vitesse, pression, densité, viscosité, énergie, entropie et espèces, mais qui s'avère fortement non linéaire et couplé. « Toutes les caractéristiques essentielles de l'équation changent simultanément : elle change à la fois d'ordre et de degré. Il faut donc s'attendre à de sérieuses difficultés mathématiques¹ ». « Si l'équation de NAVIER-STOKES ne connaît pas ce démon de non linéarité, le monde ne serait pas ce qu'il est² ». Ainsi, vu la rébellion des équations de STOKES contre les solutions analytiques, ce présent travail ne s'écartera pas de la tradition scientifique de linéariser les non-linéarités. Ces techniques de

¹ JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

² JAMES GLEICK (1989)

linéarisation sont un art à part, et dont le statut est indépendant, mais les physiciens se trouvent de nos jours obligés de voir les choses que leurs prédécesseurs ont appris à ne pas voir, surtout que les résultats peuvent dépendre fortement des méthodes utilisées, et des phénomènes par exemple numériques peuvent apparaître, et se mélanger avec les solutions approchées calculées. Un scientifique habile arrive à voir la superposition et la décomposer en solution physique et phénomène numérique. Une deuxième étape dans sa tâche, c'est interpréter les solutions tolérablement admissibles.

On vient d'évoquer cet historique pour dire que ce travail n'est qu'une particule dans le cosmos de la science, qui a évolué sous l'effet d'un effort de groupe pour contribuer à esquisser le paysage scientifique du début du 21^{ème} siècle. Et les petites échelles interfèrent avec les grandes. Enfin nous évoquons que ce travail, dans sa modestie, a dissipé tant d'énergie physique et mentale du groupe, une interaction de réflexions, une attention, et un soin attentif pour aboutir à le finaliser. C'est à ce moment que nous profitons de l'occasion afin de fructifier les expressions d'hommage aux grands philosophes des mathématiques et de physique qui ont converti le réel en abstrait et reconverti l'abstrait en réel.

Haïkel Ben Hamed

« La valeur de chaque personne est ce qu'elle maîtrise »

Ali Ibn Abi-Taleb / 600-653

« Les sciences n'essaient pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter ; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner.»

John Von Neumann / 1903-1957

RESUME

Lorsqu'un fluide en écoulement ou au repos est chauffé par le bas, l'instabilité thermique apparaît permettant une dissipation du gradient de température au-delà de ce qui est possible par simple conduction ou diffusion. Le fluide est soumis à des forces qui permettent un écoulement convectif lié à la différence de température entre les faces inférieure et supérieure de la couche. Le problème est rendu encore plus complexe par le fait que la distribution de température est elle-même déterminée par l'écoulement convectif. En d'autres termes, la force qui engendre l'écoulement est elle-même modifiée par l'écoulement. Pour un fluide multi composants, et avec prise en compte de l'effet SORET le phénomène devient d'une complexité particulièrement ardue, car la séparation des constituants engendre une compétition entre les forces volumiques d'origine thermique et compositionnelle. Le phénomène admet des développements extrêmement larges et de multiples applications en science et en ingénierie. En effet, l'instabilité thermique peut être étudiée avec tension superficielle variable, sans approximation de BOUSSINESQ, avec génération de chaleur au sein du fluide, avec ou sans confinement, etc. Ici, par souci de simplicité, nous étudierons le cas particulier d'une couche de mélange de fluides binaires entre deux plaques horizontales à températures fixées influencée par un écoulement forcé à faible nombres de PECLET. Nous commencerons par une étude qualitative du phénomène via une analyse de stabilité linéaire marginale et transitoire par éléments finis, laquelle démarche nous a conduit à réduire sous forme diagonale un opérateur linéaire rigoureusement déterminé. Les éléments spectraux de cet opérateur contiennent les informations utiles à déterminer les plus déstabilisants parmi une infinité de modes propres. Ces résultats nous serviront comme guide afin de déterminer une démarche d'expérimentation numérique par usage d'un code 3D en volumes finis hautement précis en espace, et utilisant le schéma d'EULER en temps, ouvrant la porte à des études qualitative spatiale et quantitative ultérieures.

L'ensemble de ces opérations nous ont conduit à déterminer le comportement d'un fluide binaire en convection mixte. Des relations littérales déterminant les seuils de transitions entre les différents états du système ont été démontrées. Des diagrammes de stabilité généraux ont été établis ; la mécanique de la convection est mieux éclaircie, l'influence de l'allongement du canal a été étudiée, la propagation dans les deux sens des ondes progressives des rouleaux transversaux ont été mises en évidence, un recueil de paramètres caractéristiques de ces écoulements est donné en

termes de nombre d'ondes, pulsations, vitesses de phase et de transferts de chaleur et de masse. Pour finir, nous nous sommes intéressés au cas particulier de la séparation en essayant de mettre au point des idées permettant de séparer des constituants par appui sur les résultats trouvés.

Introduction

Contexte et enjeux

Les instabilités hydrodynamiques se développant dans un milieu confiné ou semi confiné bénéficient d'une attention inégalée chez les scientifiques, mécaniciens qu'ils soient ou mathématiciens ou industriels, depuis l'époque de RAYLEIGH. La raison est simple ; il s'agit de phénomènes dont les applications abondent. Citons par exemple, le problème célèbre et étudié par excellence partout dans le monde, qui est le problème de RAYLEIGH-BENARD et son homologue en milieu poreux baptisé HORTON-ROGERS-LAPWOOD. Bien que fondamental, ses dérivés sont de poids estimable dans les enjeux industriels, citons par exemple la convection de RAYLEIGH-BENARD-SORET applicable, par exemple, dans la séparation des constituants tel que dans les gisements pétroliers, ou la séparation d'isotopes. On peut également citer les problèmes de POISEUILLE-RAYLEIGH-BENARD, et de POISEUILLE-RAYLEIGH-BENARD-SORET, qui sont idéalement adaptés respectivement au refroidissement des composants électroniques, et de l'élaboration de revêtements et de couches minces par des procédés originaux de dépôt chimique en phase vapeur (CVD pour la fonctionnalisation et la protection des surfaces, avec un intérêt particulier pour l'étude des relations conditions de formation-microstructure-propriétés et pour l'analyse et la modélisation des mécanismes régissant leur croissance). La demande croissante en couches minces, revêtements et particules supportées à hautes performances d'une part, et en procédés de dépôt à basse température d'autre part, conduit les mécaniciens du fluide à pousser des efforts considérables à maîtriser ces problèmes. Dans ce travail on s'intéressera à la famille des problèmes de POISEUILLE-RAYLEIGH-BENARD-SORET.

La situation générale est donc l'étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORET dans un canal parallélépipédique garni ou non d'un milieu poreux, rempli d'un fluide binaire et soumis à un gradient de température. La convection est engendrée par des conditions aux limites thermiques et solutales de types DIRICHLET, imposées sur les parois horizontales actives du système. Bien entendu, la configuration géométrique de l'enceinte et les conditions limites imposées sur ses frontières ont une influence majeure sur la structure de l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de matière résultants. L'investigation porte essentiellement sur la maîtrise des paramètres de contrôle du problème, sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de matière au sein du système. La méthode de recherche se base sur deux

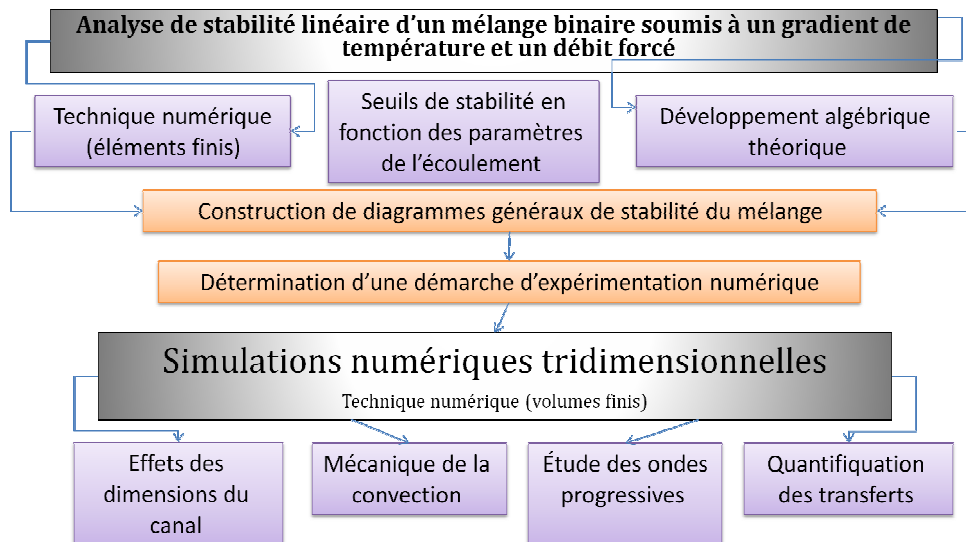
axes principaux : la simulation numérique tridimensionnelle directe, appuyée par le calcul numérique de la stabilité du système.

Stratégie de l'analyse

Le problème que nous abordons est très complexe du fait que nous traitons un milieu continu à propriétés très variées, partant d'un simple fluide pur, passant par un fluide binaire saturant un milieu de DARCY-BRINKMAN et arrivant à un fluide binaire saturant un milieu de DARCY. Pour les analyses on ne se contentera pas de l'état stationnaire, mais on simulera également le régime transitoire. Afin que la présente étude soit claire et facilement suivie et assimilée par le lecteur, nous proposons de définir à partir de problèmes déjà connus dans le monde de la physique des états de référence sur lesquels on viendra introduire des modifications sur les hypothèses de base telle que la prise en compte de l'effet SORÉT. Également nous introduirons des perturbations sur les conditions aux frontières verticales (imposer un écoulement qui traverse la cellule ou un gradient de pression et des conditions de continuité des contraintes pour les cavités d'extensions infinies afin de ne pas gêner les phénomènes transitoires à la sortie de la cavité). Nous prenons comme système de référence pour cette étude le célèbre problème de RAYLEIGH BENARD, noté RB, que nous allons définir au § 1.3.1. Sur ce problème on viendra modifier les conditions aux limites, en introduisant de la convection forcée, ainsi on parlera de convection mixte en configuration de RAYLEIGH BENARD pour le cas d'un milieu de DARCY, notée DRB, et de l'écoulement de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD, qu'on notera dans toute la suite PRB, pour le cas d'un milieu fluide ou partiellement poreux. En introduisant dans le problème de référence l'effet SORÉT, nous serons face aux écoulements de type RAYLEIGH BENARD SORÉT, qu'on notera dans toute la suite RBS. En combinant les deux effets, nous distinguerons l'écoulement de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD SORÉT, noté PRBS, pour le cas fluide, et la convection mixte dans un milieu poreux avec effet Soret notée DRBS. Ainsi, au cours de cette thèse, nous prenons ces différents types d'écoulements cas par cas, en faisant l'étude de la stabilité supercritique et transitoire afin de déterminer l'influence de l'effet SORÉT et/ou de la convection forcée sur la stabilité, puis en faisant des simulations tridimensionnelles directes afin de caractériser ces écoulements de point de vue qualitative et quantitatives. Nous tirons les interprétations correspondantes et les conclusions utiles à chaque fois que l'occasion le permet.

Contenu de la thèse

Après une introduction du travail, un état de l'art sur le problème de la convection mixte sous effet Soret a été effectué. Le deuxième chapitre sert à donner une présentation détaillée du formalisme mathématique et de la procédure numérique par éléments finis de l'analyse de stabilité linéaire. Cette démarche nous conduit à réduire sous forme diagonale un opérateur linéaire rigoureusement déterminé. Les éléments spectraux de cet opérateur contiennent les informations utiles à déterminer les plus déstabilisants parmi une infinité de modes propres. Le troisième chapitre est une étude qualitative du phénomène via une analyse de stabilité linéaire marginale et transitoire par éléments finis. Les problèmes de la convection mixte à faible Péclet, sans et avec effet Soret, sont étudiés. Les résultats sont présentés sous forme de diagrammes de stabilités, de formules de calculs du RAYLEIGH critique, et de tableaux donnant ces valeurs. Ces résultats nous serviront comme guide afin de déterminer une démarche d'expérimentation numérique par usage d'un code 3D. Ces résultats ont donné lieu à deux articles acceptés, H. ben Hamed et al. (PCFD 2007, IJDF 2007) ; et un article soumis H. ben Hamed et al. (PCFD 2008). Le quatrième chapitre est consacré au traitement des équations de NAVIER-STOKES dans le cadre d'un schéma en volumes finis hautement précis en espace, et utilisant le schéma d'EULER en temps. Le cinquième chapitre est consacré à l'étude numérique tridimensionnelle, en se basant sur les données de la stabilité linéaire. Une expérimentation numérique a été poussée dans le but de préciser les limites de l'influence de chacun des paramètres de contrôle du problème. Des articles traduisant ces résultats sont en cours de rédaction.



Représentation schématique du principal contenu du document.

*« Ces problèmes ne sont pas faciles, mais c'est bien là que réside tout
le défi ! »*

Koschmieder (1996), Benard cells and Taylor vortices

Chapitre 1

Sur la convection mixte influencée par l'effet Soret : État de l'art

1.1 Préliminaires

Dans une solution initialement homogène constituée d'au moins deux composants un gradient thermique engendre, par simple diffusion, des transferts de matière au sein du mélange. Il en résulte la formation d'un gradient de concentration (effet LUDWIG-SORET). La poussée d'ARCHIMEDE thermo-compositionnelle résultante donne naissance à un écoulement convectif au sein de la solution. Si cette dernière est confinée dans une colonne étroite appropriée, le couplage de la convection et de la thermodiffusion, appelée thermo-gravitation, peut conduire à une séparation des composants du mélange. Ce principe simple de la nature sera-t-il à l'origine du changement de la stabilité de la solution vu que les forces

thermiques et solutale peuvent coopérer ou s'opposer ? Et pourra-t-il être utilisable efficacement dans des applications de recherche ou industrielles ?

1.2 Notions de base

Au cours de ce travail nous serons amené à utiliser des termes spécifiques de la convection mixte de DRBS, c'est pour cela qu'on se propose de fournir au lecteur des définitions brèves des différents mots clefs afin de le familiariser avec le langage qui sera utilisé dans ce texte.

1.2.1 Convection naturelle, forcée et mixte

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les une par rapports aux autres. On parle de convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique. La convection forcée concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, i.e. les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment, on parle alors de convection mixte.

1.2.2 L'effet SORET ou LUDWIG

Dans un fluide soumis à un gradient de température il apparaît un gradient de concentration dû au gradient de la température, c'est l'effet SORET ou bien encore appelé effet LUDWIG (plus généralement, le nom "thermodiffusion" désigne cet effet en milieu gazeux, alors que l'expression effet SORET ou effet LUDWIG sera plus utilisée dans les liquides). Cet effet fut découvert simultanément par LUDWIG en 1856, et (mieux exploité) par C. SORET en 1879, d'où le nom attribué au phénomène. Dans le champ de pesanteur, la convection au sein d'un fluide pur est due aux changements locaux de la masse volumique qui dépend non seulement de la température, mais également de sa composition. Généralement, les phénomènes de

convection et de thermodiffusion ne peuvent être dissociés. Ce couplage est appelé diffusion thermo gravitationnelle. Il est important de noter les travaux de DUFOR qui, en 1872, avait déjà découvert l'effet inverse de l'effet SORET qui porte également son nom : l'effet DUFOR, qui consiste en l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration. Toutefois, cet effet est négligeable en dehors des phases gazeuses. Dans notre étude, cet effet sera négligé devant l'effet SORET et ce quelle que soit la phase. L'effet SORET est un phénomène particulier puisqu'il appartient à la famille des phénomènes thermodynamiques "croisés", c'est-à-dire que le flux est créé par une force qui ne lui est pas conjuguée. La figure 1-1 permet de visualiser spatialement la migration préférentielle des espèces.

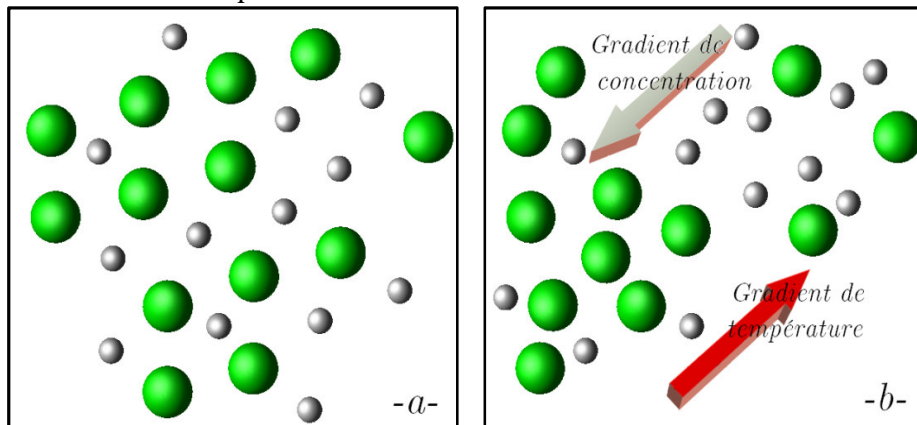


Figure 1-1 : représentation stérique de l'effet SORET. -a- Fluide multi-constituant en équilibre. -b- Genèse d'un gradient de concentration sous l'effet du gradient thermique

◆ Intérêt pratique et industriel de l'effet SORET

Les écoulements monophasiques et multi-constituants interviennent dans de nombreux secteurs industriels. Les combustibles sont en effet souvent stockés sous forme liquide ou solide pour les moteurs à combustion interne ou pour les moteurs fusées. Il est aussi possible de séparer les isotopes d'un même élément. De plus, en couplant la convection naturelle au phénomène de thermodiffusion, il est possible d'accroître notablement le degré de séparation. La maîtrise de la quantification des écoulements de BENARD est très importante aussi pour les métallurgistes lors des traitements thermo-chimiques des métaux dans les bains salins. Dans un but d'optimisation des coûts de production lors de l'extraction des fluides de gisements par les producteurs pétroliers (extraction à des profondeurs de plus en plus importantes et donc nécessitant des moyens technologiques

plus avancées), il est important de connaître de façon précise la distribution des différentes espèces à l'intérieur d'un gisement. Cette distribution s'est établie pendant de longues périodes de formation du gisement et a été principalement influencée par la gravité ainsi que par la distribution des pressions dans le réservoir. Des moyens importants ont été mis en œuvre afin d'obtenir des modèles thermodynamiques fiables, permettant de restituer de manière correcte la répartition des espèces dans le réservoir. Étant donné qu'il n'est pas possible de négliger l'importante extension verticale d'un gisement, il est très probable que cette répartition soit influencée par la convection naturelle (la gravité est l'une des premières composantes intégrées dans les modèles), mais aussi par le gradient géothermique (gradient de température naturel de la Terre). Ce gradient pourrait être la cause de la migration d'espèces par l'effet SORET. Ce dernier consiste en l'établissement d'un gradient de concentration d'un composant chimique par la présence d'un gradient thermique, i.e. l'existence d'un gradient thermique est cause d'une migration différenciée des espèces.

1.2.3 Milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu continu, cohésif ou non, qui présente intérieurement une fraction de volume accessible à un fluide. Cette fraction de volume non solide, composée de cavernes, de crevasses, de pores etc. constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux. La porosité est évidemment un élément descriptif essentiel du milieu, toutefois, deux milieux poreux présentant la même porosité peuvent avoir des propriétés très différentes. On peut trouver dans un milieu poreux des pores ne débouchant pas (pores aveugles) ou occlus ; un milieu poreux contenant à la fois des pores aveugles et des pores ouverts plus ou moins interconnectés, pourra grâce à ces pores ouverts laisser s'écouler le fluide. Dans la réalité complexe que constitue un milieu poreux, des paramètres comme le diamètre de capillaire ou la porosité, ne constituent que des valeurs globales moyennes, incapables de traduire exactement la topologie complexe de l'écoulement réel à travers le milieu. Dans le cas où les espaces vides sont remplis par une même phase (liquide ou gazeuse), le milieu poreux est dit saturé par le fluide. Les milieux poreux jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Pour nous limiter à quelques exemples typiques : le génie pétrolier, le génie chimique, le génie civil, la médecine, etc.

◆ Porosité

La porosité d'un milieu poreux notée ε , est la fraction du volume moyen du milieu poreux occupé par les espaces vides. L'espace vide est égal au rapport du volume total du milieu poreux V duquel on soustrait le volume de la matrice solide V_s par le volume total du milieu poreux V_T .

$$\varepsilon = \frac{V_T - V_s}{V_T}$$

En outre on distingue plusieurs définitions de la porosité selon les littératures et les académies¹.

◆ Perméabilité

La perméabilité K d'un milieu poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. L'unité de la perméabilité K est le DARCY (1 DARCY = perméabilité d'un milieu poreux de 1 cm² de section, 1 cm de longueur, soumis à une différence de pression de 1 bar traversé par un fluide dont la vitesse de filtration est 1 cm/s) 1 Darcy = 9,8710⁻⁹ m². La valeur de la perméabilité K est déterminée par la mesure expérimentale.

¹ - En prenant en compte la connexion entre les interstices il a été distingué deux types de porosité : LA POROSITE TOTALE OU ABSOLUE, elle est définie pour le milieu poreux idéal où tous les pores sont interconnectés car elle considère tous les pores y compris qui ne sont pas envahis par le fluide, et LA POROSITE EFFECTIVE OU ACCESSIBLE, qui est définie comme le rapport des pores connectés, à travers desquels s'effectue l'écoulement, sur le volume total du milieu. Cette définition n'est utilisée que si on connaît bien la structure du milieu poreux.

En hydrogéologie, des distinctions ne sont plus exclusivement géométriques mais se réfèrent à l'eau contenue dans le milieu poreux, à ses liaisons physiques avec la matrice solide et à ses mouvements possibles.

LA POROSITE EFFICACE (CASTANY, 1961) est le rapport du volume d'eau gravitaire qu'un milieu poreux peut contenir en état de saturation puis libéré sous l'effet d'un drainage complet (égouttage en laboratoire sur échantillon), à son volume total. Terme complémentaire de la capacité de rétention, elle équivaut en pratique au coefficient d'emmagasinement d'un milieu aquifère à nappe libre. Ce concept est dénommé aussi, suivant les auteurs : porosité effective (TISON, 1951), porosité de drainage (VACHAUD, 1968), porosité utile (MULLER-FEUGA, 1956), porosité dynamique (SCHOELLER, 1955), capacité d'écoulement (MULLER-FEUGA, 1960), capacité de libre écoulement (SCHOELLER, 1955), coefficient d'écoulement, coefficient de restitution, coefficient de stockage (RUBY, 1969). Absorption spécifique (FOURMARIER, 1939) ou capacité effective d'absorption (SCHOELLER, 1955) désignent le même concept, en considérant la quantité d'eau gravitaire à ajouter, au lieu de la quantité libérée par égouttage.

LA POROSITE CINEMATIQUE est le rapport de la vitesse de déplacement moyenne de l'eau en mouvement dans un milieu perméable, déterminée expérimentalement (notamment par traçage), à la vitesse de filtration (de DARCY). Il est équivalent au rapport du volume des interstices réellement parcourus par l'eau en mouvement (à des vitesses variées) au volume total du milieu (saturé ou non) : c'est la teneur en eau mobile. Ce concept est dénommé aussi, suivant les auteurs : porosité effective cinématique, porosité effective dynamique, porosité de surface, coefficient superficiel de porosité. Il est équivalent à « effective porosity » dans la terminologie américaine moderne recommandée par l'U.S.G.S. - "interconnected pore space available for fluid transmission" (1972) - différent de l'« effective porosity » de MEINTZER, et équivalent à porosité "active" des auteurs russes (CHESTAKOV, 1974).

C'est le moyen le plus efficace pour évaluer cette valeur. Plusieurs évaluations de K ont été proposées.

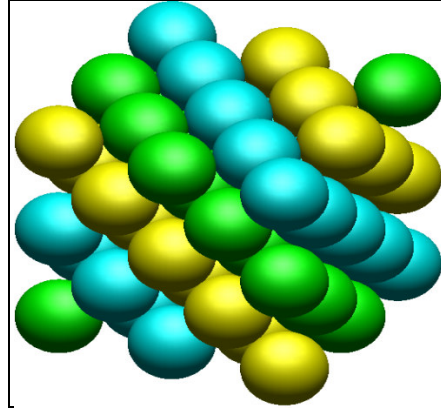


Figure 1-2 : Exemple de géométrie de KOZENY-KARMAN

La relation de KOZENY-CARMAN (1927) pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{36C_0(1 - \varepsilon)^2}$$

où d désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$). La relation d'ERGUN (1927), semblable à l'équation ci-dessus établie en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible, au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètre d . La colonne est soumise à un gradient de pression :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150(1 - \varepsilon)^2}$$

Cette relation est identique à la relation de la loi de KOZENY-CARMAN pour la valeur de $C_0 = 4.16$. Quand on modélise la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles, l'expression de la perméabilité est :

$$K = \varepsilon^2 \frac{d^2}{32}$$

où $\varepsilon = n\pi d^2/4$ et n est le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement et d le diamètre des capillaires.

◆ Tortuosité

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité d'un chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut aussi tenir compte des 'bras morts', qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit un paramètre τ , appelé tortuosité, que l'on définit de la manière suivante :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L}\right)^2$$

où L_e est la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur L . La tortuosité joue un rôle important en diffusion.

◆ Conductivité thermique équivalente

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité, nous pouvons citer les travaux de, TOBBAL et BENNACER (1997), BEJI (1989).

◆ Domaine homogène équivalent ou Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

L'étude des écoulements impose la description des phénomènes intervenant dans le milieu poreux saturé. L'échelle des pores, ou échelle microscopique est associée au diamètre moyen des pores d . A l'intérieur de cette échelle les grandeurs locales peuvent très largement varier. A l'échelle du milieu poreux, ou échelle macroscopique, la variation des grandeurs physiques est définie en moyenne, sur un certain volume de milieu poreux, appelé volume élémentaire représentatif et noté V.E.R. Cette échelle macroscopique est associée à une dimension géométrique L_a du milieu. Soit L la dimension caractéristique du V.E.R. Cette dimension L doit satisfaire à la double inégalité suivante :

$$d \ll L \ll L_a$$

Plusieurs méthodes ont été proposées pour passer de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique.

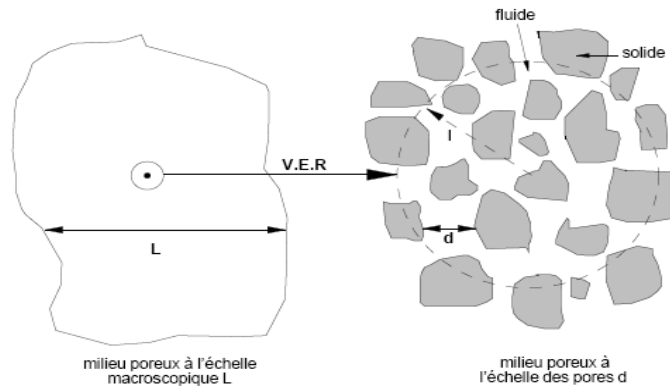


Figure 1-3 : Illustration de la taille intermédiaire l (du V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d

1.2.4 Modèles d'écoulement en milieux poreux

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'aux phénomènes à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées.

◆ La loi de DARCY

Établie par DARCY (1856) sur la base d'observations expérimentales, c'est une relation empirique qui décrit macroscopiquement les écoulements dans les milieux poreux, moyennant la vitesse de filtration.

$$\vec{V} = \frac{K}{\nu} \left(-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} \right)$$

où K est la perméabilité et ν la viscosité cinématique du fluide. L'équation de DARCY a été vérifiée pour les écoulements de faible vitesse. La valeur du nombre de REYNOLDS est utilisée comme critère pour caractériser la transition d'un régime d'écoulement laminaire à un régime turbulent. Pour cela on a défini un nombre de REYNOLDS de pore pour les écoulements en milieu poreux. En définissant d comme longueur caractéristique qui représente la dimension caractéristique des pores, le nombre de REYNOLDS s'écrit :

$$Re = V \frac{d}{\nu}$$

En termes de détermination de d , COLLINS (1961) a proposé l'expression $d = \sqrt{K/\mathcal{E}}$, alors que WARD (1964) a plutôt suggéré que $d = \sqrt{K}$ quelle que soit la porosité.

◆ Formulation de FORCHHEIMER

La formulation de DARCY-FORCHHEIMER (1950) la plus couramment utilisée, pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationnaire et en présence de pesanteur, est la suivante :

$$\nabla P^* = \rho g - \frac{\mu}{K} V^* + \frac{b\rho}{\sqrt{K}} |V^*| V^*$$

où b est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, appelé paramètre de FORCHHEIMER. Résultant de la prise de moyenne sous fortes hypothèses, cette formulation introduit un terme convectif qui exprime la contribution inertielle devenant importante avec les Re croissant.

◆ Formulation de BRINKMAN

BRINKMAN (1947) a encore généralisé la loi de DARCY en introduisant un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de STOKES.

$$\nabla P^* = \rho g - \frac{\mu}{K} V^* + \mu_{eff} \nabla^2 V^*$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de DARCY BRINKMAN, fortement utile pour le cas des hautes porosités. Le premier terme de droite de l'équation ci dessus contenant la viscosité μ est le terme de DARCY et le deuxième contenant la viscosité effective μ_{eff} est appelé le terme de BRINKMAN. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff} . En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). BRINKMAN a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide ($\mu_{eff} \approx \mu$). Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de NEALE et NADER (1974) et BECKERMANN et VISKANTA (1988). Le modèle de BRINKMAN permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

◆ Modèle général

On généralise les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif $(V^* \nabla) V^*$, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2} (V^* \nabla) V^* = -\nabla P^* + \rho g - \frac{\mu}{K} V^* + \frac{b\rho}{\sqrt{K}} |V^*| V^* + \mu_{eff} \nabla^2 V^*$$

Cette équation est équivalente à l'équation de NAVIER STOKES issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en milieu poreux peut être le résultat des effets d'inertie et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois.

1.3 Revue bibliographique sur les systèmes de RAYLEIGH BENARD

Dans cette section nous donnons les principales études antérieures traitant les types d'écoulements déjà présentés, tout en essayant de garder la logique de tenir comme référence le problème de RB, afin de permettre une comparaison par rapport à des résultats déjà célèbres et qu'on ne manquera pas de rappeler.

1.3.1 Mécanisme fondamental de RAYLEIGH BENARD

Le problème de l'écoulement de RB, est un problème d'instabilité dans un fluide confiné entre deux plaques horizontales portées à deux températures différentes. Si la plaque supérieure est la plus chaude, le système reste stable¹ et stratifié en température. Mais, si la paroi inférieure est la plus chaude et si une perturbation est introduite dans le système, alors pour une valeur critique de la différence de température entre les deux plaques il peut apparaître des mouvements à l'intérieur du fluide, le système est instable et des mouvements sont organisés en rouleaux périodiques contrarotatifs. Ces rouleaux, également appelées cellules de RB, apparaissent quand il y a un couplage entre le champ dynamique et le champ thermique.

La situation générale est donc celle d'un fluide présentant une masse volumique croissante avec l'altitude et manifestant dès lors un caractère potentiellement instable. Ce système physique couple ainsi un problème de stabilité mécanique lié aux variations de densité et un problème de transport de chaleur lié aux variations de température. Si en un lieu donné du fluide, une perturbation initiale positive de température apparaît, la poussée d'ARCHIMEDE induira un mouvement ascendant du fluide. Si la perturbation est négative, la poussée d'ARCHIMEDE induira un mouvement descendant. Il résulte de cela un apport convectif local des particules fluides venant des couches inférieures plus chaudes dans le premier cas, des couches

¹ À l'exception de fluides ayant un maximum de densité (à un stade donné la masse volumique n'est pas décroissante quand la température croît). Ex. (Eau~ 4°C, Bismuth, Antimoine...)

supérieures plus froides dans le second cas, et qui renforcent la perturbation initiale et entretiennent le mouvement. Le déplacement ascendant ou descendant se transmet ainsi jusqu'à ce que le fluide rencontre une interface. La conservation de la masse implique alors un mouvement du fluide parallèle à cette interface. Ce déplacement horizontal se fait jusqu'à ce que le fluide rencontre une nouvelle zone de mouvement ascendant s'il se trouve sur l'interface inférieure, ou descendant s'il se trouve sur l'interface supérieure. Le raccordement par ces déplacements horizontaux d'une zone d'ascension et d'une zone de descente forme alors des rouleaux (bidimensionnels) contrarotatifs ou des cellules (tridimensionnelles), suivant les caractéristiques géométriques et physiques du système. Il apparaît donc un mouvement d'ensemble régulier et auto organisé au sein du fluide.

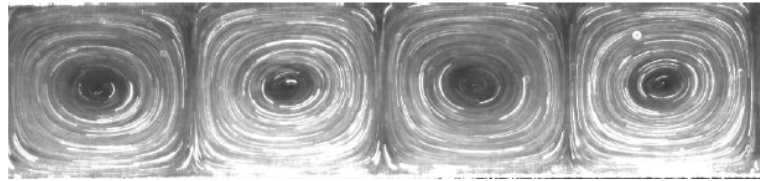


Figure 1-4 : Rouleaux transversaux de RAYLEIGH BENARD dans une cellule expérimentale¹ remplie avec de l'eau pure. $\Delta T=4^{\circ}\text{C}$, température à l'extérieur : 21°C

Cependant, celui-ci ne peut s'établir que si les mécanismes amortissant, qui sont la conductivité thermique (qui diffuse la perturbation de température) et la viscosité (qui atténue la perturbation de vitesse) ne sont pas trop importants. Ces mécanismes microscopiques de diffusion sont d'autant plus importants que les gradients de température et de vitesse sont élevés. Un mouvement du fluide a lieu lorsque la différence de température excède une certaine valeur, appelée seuil critique d'instabilité. La taille -la longueur d'onde- des rouleaux est aussi contrainte par ces deux mécanismes de diffusion d'énergie. Considérons en effet des rouleaux très serrés. Les forts gradients de vitesse et de température entre les rouleaux permettent de fortes diffusions de quantité de mouvement et de chaleur qui, en réduisant les déséquilibres moteurs, entravent le mouvement. D'autre part, si on considère des rouleaux très écartés, le frottement pariétal, lié au mouvement horizontal du fluide au niveau des plaques, devient de plus en plus important et freine le mouvement. Les rouleaux ne doivent donc être ni trop serrés ni trop allongés. En pratique, les rouleaux présentent en effet un rapport d'aspect au voisinage de l'unité (cf. Figure 1-4). On peut aussi donner une description de l'organisation du système physique en termes de

¹- Cliché réalisé par Vélocimétrie laser par Images de Particules, tiré du travail de Piquer E.

transfert de chaleur. Au-dessous du seuil critique d'instabilité, le transfert de chaleur est purement conductif, par transmission microscopique de l'agitation thermique.

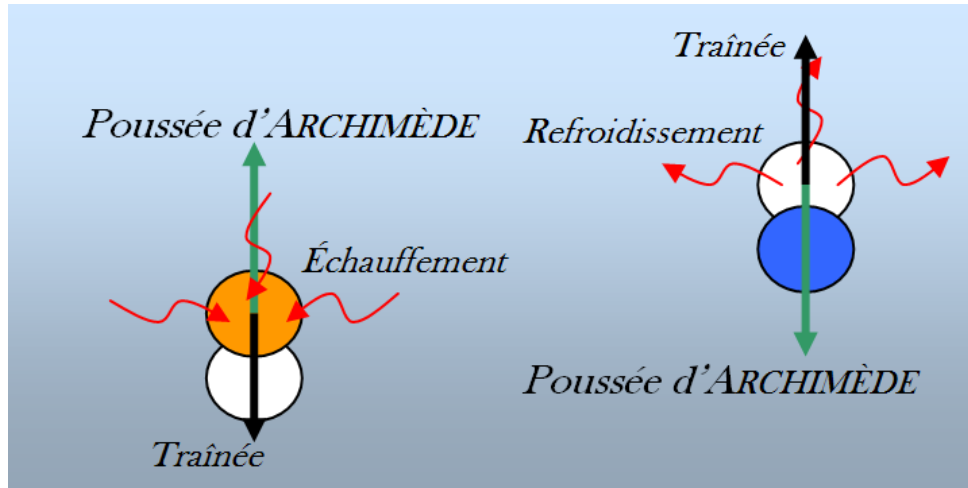


Figure 1-5 : Schéma de principe de la convection de RAYLEIGH-BENARD. Les flèches vertes donnent les poussées d'ARCHIMEDE différentielles, moteurs du mouvement. Et les flèches noires donnent les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction, entraves au mouvement

Ce mode de transport peu efficace est suffisant pour un flux de chaleur faible entre les plaques chaude et froide. Au-dessus, un ensemble de rouleaux contrarotatifs apparaît et le transfert de chaleur devient convectif, par transport macroscopique de l'agitation thermique. Ce mode de transport est plus efficace et permet des flux de chaleur plus élevés, mais son établissement est généré par les phénomènes diffusifs créés par les mouvements du fluide. Microscopiquement, le transfert de chaleur au niveau des parois se fait toujours par diffusion mais le mouvement de convection permet d'accroître les gradients de température pour rendre cette diffusion plus efficace. Au seuil d'apparition des mouvements, le système physique en transport conductif devient instable, ce qui signifie que dans le bruit de fond, invariablement présent dans toute réalisation pratique, certaines structures des champs de vitesse, température et pression, qui sont les variables à considérer, se trouvent amplifiées au cours du temps.

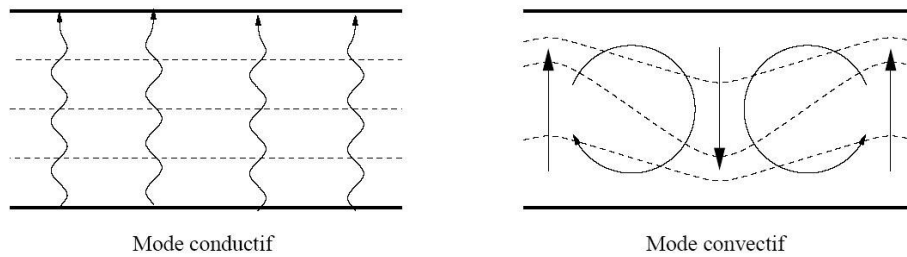


Figure 1-6 : Comparaison schématique des modes de transfert de chaleur conductif et convectif. Les flèches ondulantes représentent une diffusion de chaleur, celles rectilignes un déplacement de fluide. Les lignes discontinues représentent les isothermes attendues dans les deux situations

◆ Caractéristique de stabilité de l'écoulement RB en fonction du milieu

Tenant compte de ce que le système de RB perd sa stabilité pour des valeurs données de l'écart de température traduit par le nombre de RAYLEIGH, plusieurs travaux ont été réalisés afin de déterminer ces valeurs. Certaines sont possibles théoriquement et sont données par : $Ra_c = 1707.76$ pour le cas fluide, et $Ra \times Da = 4\pi^2$ si on a affaire à une matrice poreuse saturée par le fluide. Il est à noter que l'analogie du problème de RB en milieu poreux est connu sous le nom de HORTON ROGERS LAPWOOD (1945-1948), et aussi sous le nom de RAYLEIGH DARCY. Néanmoins nous allons, afin d'homogénéiser les nominations utiliser la désignation RAYLEIGH BENARD DARCY, et le symbole RBD.

Da	10^2	10^0	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-82}
$R_T = Ra \cdot Da$	17.08E2	1752.37	60.4557	40.5838	40.17604	39.4792	39.47841

Tableau 1-1 : Nombres de RAYLEIGH critiques issus de la stabilité linéaire numérique, décrivant la limite de la bifurcation supercritique dans un fluide, un milieu de Darcy BRINKMAN et un milieu de Darcy

1.3.2 Un peu d'histoire : de RUMFORD à RAYLEIGH

La première description de la convection thermique a été présentée en 1790 par BENJAMIN THOMPSON, pour expliquer le transfert de chaleur dans une tarte aux pommes ! Les recherches systématiques n'ont commencé que bien plus tard, en 1900, l'expérience la plus significative et la plus pertinente étant celle de HENRI BENARD : il a étudié un système convectif simple en apparence, sans savoir qu'il était en réalité tellement compliqué que certains des principes physiques sur lesquels il était basé n'ont été découverts que très récemment ! Peu après JOHN WILLIAM STRUTT, LORD

RAYLEIGH, s'intéressa à son tour à la convection, formulant sa célèbre théorie. C'est dans l'un de ses derniers articles (1916) qu'il essaya d'expliquer ce que l'on désigne aujourd'hui par la Convection de RAYLEIGH- BENARD, introduisant un nombre sans dimensions qui, comme nous le verrons, joue un rôle essentiel dans la description de la stabilité thermique.

Parmi les trois modes de transfert de chaleur, par conduction, convection ou rayonnement, le mode convectif est historiquement le premier à être utilisé à des finalités pratiques. On trouve ainsi dans les ruines des maisons romaines des systèmes de chauffage central amenant de l'air chaud d'un foyer dans les pièces. Même si le terme convection apparaît en 1834 dans les textes de PROUT (1834), son étude qualitative débute avec RUMFORD en 1797. Ce lien notable entre mouvement et transport de chaleur est sûrement l'une des causes qui sont à l'origine de la théorie calorique de CARNOT (1824), interprétant la chaleur comme un fluide passant d'un corps à un autre. Alors qu'au début du dix-neuvième siècle la théorie calorique est mise en défaut par RUMFORD, JOULE et CLAUSIUS, les liens entre mouvements de fluides et transport de chaleur ne font quasiment plus l'objet d'explications et de recherches. En 1882, THOMSON observe la formation de structures régulières au sein d'un fluide chauffé par le bas et animé d'un mouvement de convection. Les études quantitatives de ces structures attendront 1901, et les expériences de BENARD (1900) dans lesquelles une fine couche de blanc de baleine liquide contenue dans un récipient est chauffée par dessous. BENARD caractérise les structures spatiales organisées en cellules hexagonales comme celles de la Figure 1-7 et l'interface formée par le fluide et l'air mais pas la température minimale nécessaire à la mise en mouvement.

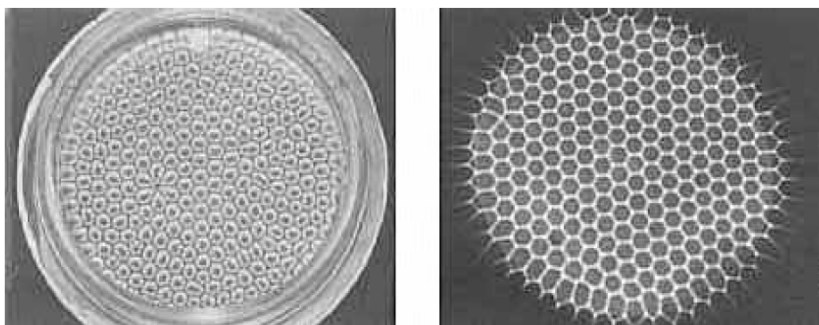


Figure 1-7 : Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de BENARD observées par KOSCHMIEDER et PALLAS (1974)

Ces premières expériences ne rencontrent guère d'écho, mais RAYLEIGH y trouve tout de même un intéressant champ d'application aux calculs de stabilité linéaire, déjà utilisés en mécanique des fluides par ORR,

SOMMERFELD et KELVIN sur les couches de cisaillement. En partant des équations de NAVIER STOKES et en se plaçant dans l'approximation de BOUSSINESQ, RAYLEIGH propose en 1916 un calcul de la différence de température et de la longueur d'onde critique pour un mouvement de convection s'organisant en rouleaux bidimensionnels au sein d'une couche infinie de fluide contenu entre deux interfaces planes horizontales infinies aux températures imposées et le long desquelles le fluide peut glisser librement. L'accord entre résultats expérimentaux et prévisions analytiques est bon et le phénomène est baptisé écoulement de RAYLEIGH BENARD (RB). Cet accord nous apparaît maintenant pour le moins fortuit, la modélisation de RAYLEIGH n'étant pas idoine pour décrire l'expérience de BENARD. D'une part, le liquide repose sur un support solide imposant l'adhérence du fluide sur la surface inférieure. En 1940, PELLEW et SOUTHWELL (1940) déterminent la différence de température critique et la longueur d'onde des rouleaux au seuil de l'instabilité pour une couche confinée entre deux parois sur lesquelles le fluide ne peut glisser, situation plus proche de celles observées et obtenues en pratique, même si ce n'est pas exactement celle de l'expérience originelle. D'autre part les variations de la tension superficielle avec la température, nommées l'effet MARANGONI thermique, sont à prendre en compte pour une interface se déformant, ce qui est le cas dans l'expérience de BENARD. Cet effet s'ajoute à la poussée d'ARCHIMEDE, atténuée par la minceur de la couche fluide, pour mettre en mouvement et organiser le fluide. Cet effet, qui ne sera mis en évidence par PEARSON qu'en 1958, explique notamment l'établissement d'hexagones et non de rouleaux, le phénomène étant baptisé convection de BENARD MARANGONI.

1.3.3 Convection mixte en configuration de Rayleigh Bénard

La convection mixte en configuration de RB se divise en deux catégories : écoulements de PRB en milieux purement fluides et partiellement poreux, et en écoulements en C_M RBD en milieux de DARCY. Aucune étude en milieu de DARCY BRINKMAN jusqu'à présent n'a été révélée. Très rares sont les études de ce problème en milieu de DARCY. L'écoulement PRB en milieux fluides, a suscité de nombreux travaux de recherche en raison d'intérêts fondamentaux et industriels. Cette configuration est riche en structures d'écoulements convectifs (sous forme de rouleaux transverses, parallèles, obliques, sinueux, variqueux, etc.) et constitue un problème type en matière d'analyse de stabilité et contrôle d'écoulements. Dans ce qui suit nous allons présenter le problème de PRB qui sera ensuite suivi par le problème de C_M RBD.

◆ Définition de l'écoulement PRB et modes convectifs observables

Un écoulement de **PRB** est un système de **RB** en milieu fluide sur lequel on vient introduire de la convection forcée, en d'autres termes on a modifié les conditions aux limites du système soit en imposant un gradient de pression horizontal sur toute la longueur de la cavité, soit en imposant un profil de **POISEUILLE** à l'entrée de la cavité et une condition de sortie qui permet la conservation de la matière et de la contrainte dans le cas incompressible. D'une manière simpliste, le profil approché de **POISEUILLE** à l'entrée est approché par :

$$V(0, y, z) = -6RePr. z(z - 1) \frac{y}{A_y} \left(1 - \frac{y}{A_y} \right)$$

forme proportionnelle au nombre de **REYNOLDS**. Par suite un $Re = 0$ nous ramène au cas de **RB**. Le problème de **PRB** dépend de plusieurs paramètres : la hauteur de la cavité, ses rapports d'aspects, l'écart de la température, les propriétés du fluide et sa vitesse d'entrée. Plusieurs structures convectives peuvent apparaître. Des combinaisons données de ces grandeurs, constituent les paramètres universels, non dimensionnels, de contrôle. A savoir : Re, Ra, Pr, Ax, Ay .

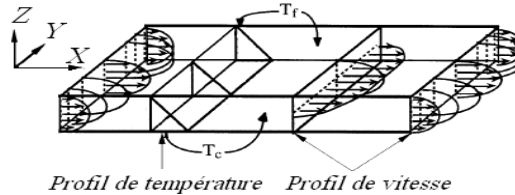


Figure 1-8 : Cellule de PRB avec profil de **POISEUILLE** purement conductif : écoulement de base pour l'analyse de stabilité temporelle¹

D'une manière simpliste, partant de l'écoulement de **POISEUILLE** de base, on se met à chauffer par le bas, jusqu'à atteindre un nombre de Ra critique ($Ra_c = 1707.76$ pour une cavité d'extension latérale infinie) à partir duquel la solution n'est plus stratifiée en température et deux solutions sont possibles (cf. Figure 1-9) : l'apparition de R_{\perp} ou R_{\parallel} mais les R_{\perp} restent possibles uniquement pour des faibles nombres de Re (en général $Re < 10$).

¹ Figure tirée de l'article de NICOLAS (2001)

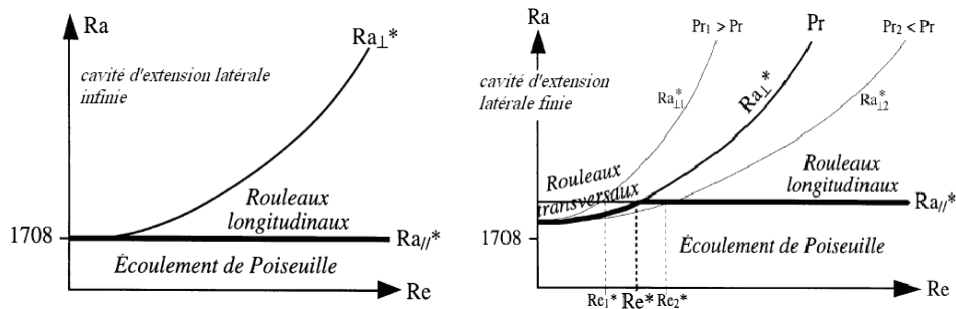


Figure 1-9 : Diagrammes de stabilité linéaire temporelle ¹ de l'écoulement de PRB

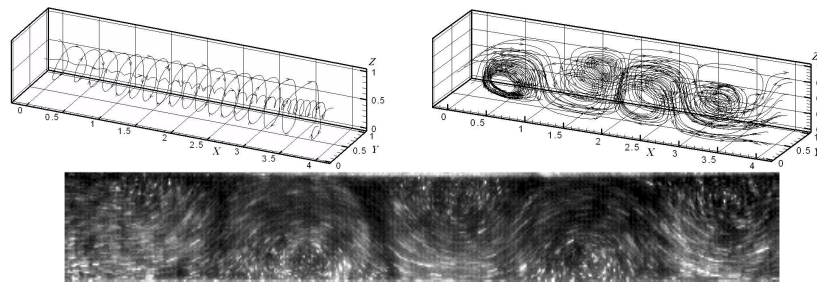


Figure 1-10 : rouleau longitudinal : R_{\parallel} à gauche, rouleaux transversaux : R_{\perp} à droite et en bas visualisation expérimentale (PIV) des R_{\perp}

Au delà d'un nombre de Re donné, les rouleaux transversaux cèdent définitivement la place pour les rouleaux longitudinaux. Si on continue à chauffer une nouvelle bifurcation aura lieu, cette nouvelle transition est la naissance de rouleaux longitudinaux du second ordre comme schématisé dans la Figure 1-11.

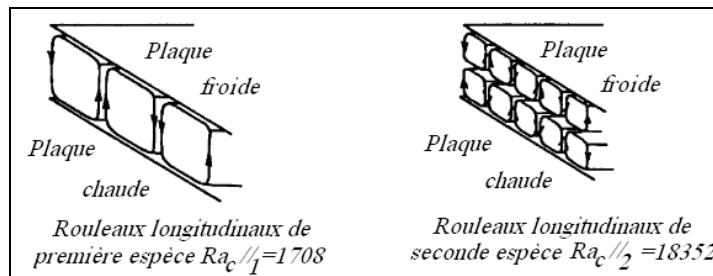


Figure 1-11 : Rouleaux longitudinaux de première et de deuxième espèce selon MORI et UCHIDA (1966)²

¹ - Ces diagrammes sont extraits de NICOLAS et al. (2000) d'après un graphe de LUIJKX et al. (1981). L'exposant * désigne selon l'auteur la valeur critique.

² - Figure tirée de MORI & UCHIDA (1966).

Entre temps les R_{\parallel} ne restent pas stationnaires pendant toute la phase du changement de Ra et Re jusqu'à $Ra_{C_{\parallel}}$. Une analyse de stabilité linéaire temporelle de ces rouleaux entre deux plaques d'extensions infinies menée par CLEVER et BUSSE (1991) a montré l'existence d'une instabilité sinueuse dans une zone définissant approximativement un quadrant : $Re > 75$ et $Ra > 2200$, et d'une instabilité oscillatoire dans une zone définissant approximativement un quadrant : $Re < 100$ et $Ra > 6000$ (cf. Figure 1.10).

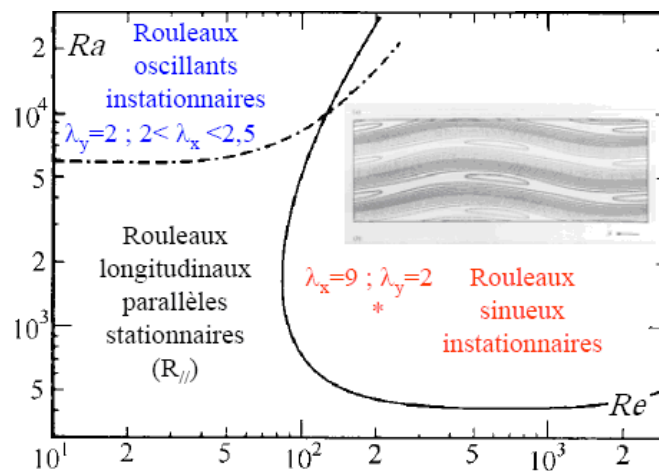


Figure 1-12 : Diagramme de stabilité des rouleaux longitudinaux stationnaires dû à CLEVER et al. (1991)

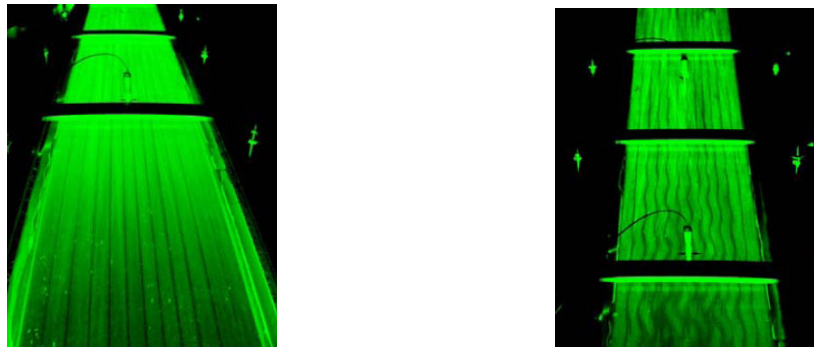


Figure 1-13 : Rouleaux longitudinaux observés grâce à la visualisation par plans LASER. A gauche R_{\parallel} stationnaires et à droite R_{\parallel} sinueux¹ oscillant en phase. Images tirées du travail de XIN et al. (2005)

¹ - Les rouleaux sinueux ne sont observés expérimentalement qu'en perturbant mécaniquement le système par vibration continue.

Ainsi nous avons donné une vue globale de ce qui peut se passer en manipulant les paramètres de contrôle d'un écoulement de **PRB**. D'autres structures dérivant de celles déjà décrites existent, tels que des rouleaux obliques et variqueux. Jusqu'à présent on ignore le comportement des R_{\parallel} de seconde espèce. Et bien qu'on ait avancé sur l'aspect qualitatif des écoulements de **PRB**, il reste beaucoup de travail à faire : à l'heure actuelle on ne dispose pas d'un diagramme de stabilité universel qui décrit toutes les transitions possibles de l'écoulement ainsi que les structures correspondantes à ses bifurcations.

◆ Un peu d'histoire

La première étude sur le problème de **RB** en présence d'un écoulement, est attribuée à **IDRAC** (1920). Ce dernier a pu visualiser des rouleaux longitudinaux (1921) au cours de ses études sur les planeurs à voile. L'étude des rouleaux longitudinaux R_{\parallel} a été ensuite répandue dans plusieurs milieux de recherche. Des résultats expérimentaux de visualisation de ces écoulements ont été réalisés, en essayant d'expliquer l'alignement des bandes nuageuses sous l'action du vent, par le météorologue japonais **TERADA** (1928). L'écoulement considéré est donc un écoulement cisailé de type **COUETTE**, souvent choisi pour reproduire l'entraînement cisailé dû au vent. La première observation de rouleaux transversaux, en écoulement cisailé pour de petits nombre de **REYNOLDS**, est attribuée aux anglais **PHILIPS** et **WALKER** (1932) qui ont réalisé des expériences dans des couches d'air de 6 mm d'épaisseur. L'existence des R_{\perp} sera ensuite confirmée par **GRAHAM** (1933). **BENARD** et **AVSEC** lancent alors des études systématiques sur tous les problèmes de la famille **PRB**. Ainsi jusqu'en 1938, **AVSEC** va expérimenter beaucoup de configurations et visualiser à son tour les R_{\perp} et R_{\parallel} . Tous ces résultats sont reportés dans un article de synthèse (1938) dû à **BENARD** lui même.

◆ Revue bibliographique sur les écoulements de **PRB**

La période de la seconde guerre mondiale a connu une « hibernation » des recherches, mais vers 1949 les recherches sur le problème de **PRB** ont repris. La théorie de la stabilité linéaire a connu une époque d'or pendant 30 ans. Différents auteurs se sont donc intéressés à l'analyse de stabilité du problème, établi et transitoire, tant au niveau thermique que dynamique, d'autres ont restreint leurs études à la zone d'entrée thermique, là où naissent les structures convectives. Un important travail résumant cette période de recherche, est dû à **NICOLAS** (2000). Au début des années 80, et avec l'accès de l'informatique aux laboratoires du

monde scientifique, la mode des simulations numériques directes motivée par l'application industrielle s'est installée. La plupart des recherches sont initiées par des applications industrielles à fort enjeux économiques telles que l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (Chemical Vapor Deposition : CVD) ou le refroidissement des composants électroniques. Le but dans le premier cas est de contrôler finement le dépôt chimique afin d'optimiser la fabrication de composants électroniques par exemple, dans l'autre cas, l'objectif est d'augmenter les transferts thermiques afin d'accroître la capacité de refroidissement de composants de plus en plus miniaturisés. Ainsi, on peut citer les travaux plus fondamentaux de MÜLLER et al. (1989) et les travaux de OUAZZANI et al. (1989-1995) sur le problème de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes. Tous ces travaux sont présentés dans la revue bibliographique de NICOLAS (2002). Cette revue couvre la période 1920-2001 et comporte 154 références. La gamme des paramètres concernés est : $0 < Pr < 1000$, $0 < Re < 100$ et $0 < Ra < 10^6$.

Depuis lors, les recherches sur ce type de problème se sont poursuivies. Du point de vue numérique, ROTH et al. (1996) ont étudié l'influence des conditions aux limites sur la formation des structures convectives. KATO (2000) s'est intéressé à la compétition qui naît de la formation simultanée de R_{\perp} et R_{\parallel} en présence d'écoulement dans une cavité rectangulaire chauffée par le bas. Dans la même configuration, des études de l'analyse de stabilité linéaire du problème de PRB en cavité confinée avec des conditions aux limites aussi proches que possible de la réalité permettent une confrontation avec des simulations numériques et des résultats expérimentaux.

HUANG (1997), YU et LIN (1997), LIR et al. (2001) ont étudié le comportement d'écoulement d'air dans des cavités rectangulaires chauffées par le bas d'un point de vue expérimental. Ces écoulements d'air sont généralement obtenus pour de grandes valeurs des nombres de RAYLEIGH et de REYNOLDS, ne permettant la formation que de R_{\parallel} et de rouleaux sinueux dans certains cas. Les derniers résultats expérimentaux ont porté sur l'influence du confinement longitudinal des cellules expérimentales et sur la formation des rouleaux longitudinaux, ainsi que sur l'étude à faible nombre de REYNOLDS, c'est-à-dire proche de la convection naturelle. Actuellement plusieurs auteurs sont en train de contribuer à l'établissement d'un benchmark numérique traitant le problème de PRB. Le travail est encore en cours. Les dernières années, ont permis d'avoir une compréhension plus juste de la dynamique linéaire et faiblement non linéaire de ces structures convectives.

♦ **Seuil d'apparition des R_{\perp} en conduite d'extension latérale infinie et vérification expérimentale de l'augmentation de $Ra_{C\perp}$ avec Re**

GAGE et REID (1968) ont abordé une analyse de stabilité linéaire de pour $Ay \rightarrow \infty$ se limitant à $Pr = 1$ lorsque $Ra > 0$ et s'étend sur $0 < Ra < 10^6$. Leurs hypothèses de départ autorisent des perturbations donnant naissance à des R_{\parallel} , à des R_{\perp} ou à des cellules thermoconvectives 3D quelconques telles que des cellules d'axes obliques à la direction de l'écoulement de base. Pour ces structures le nombre de RAYLEIGH critique est une fonction croissante de Re et se situe entre $Ra_{C\parallel} = 1708$ et $Ra_{C\perp}$. Pour $Re \geq 7200$ les instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes transverses de type TOLLMIE-SCHLICHTING, responsables par leur amplification de la transition laminaire-turbulent de la couche limite. PLATTEN (1971), en considérant des perturbations 2D ne permettant la naissance que des R_{\perp} , et TVEITEREID (1974), en considérant la naissance d'instabilités sous la forme de R_{\perp} , de R_{\parallel} , et d'ondes de TOLLMIE-SCHLICHTING, vérifient, pour tous les nombres de PRANDTL, les résultats obtenus par GAGE et REID. Les premiers qui ont étudié expérimentalement l'action de la vitesse de l'écoulement sur le nombre de RAYLEIGH critique Ra_c en particulier sur l'augmentation de $Ra_{C\perp}$ avec Re , sont PLATTEN et LEFEBVRE (1971). En montant une expérience de type SCHMIDT-MILVERTON (1935) avec de l'eau dans une conduite d'allongements 150/80, ils montrent que Ra_C croît de 1708 à 2063 lorsque l'on passe de $Re = 0$ à $Re = 28$. Ils en déduisent que la preuve expérimentale de l'augmentation de Ra_C avec Re , montrée théoriquement par PLATTEN (1971) est apportée. Cependant, dans le cas d'un écoulement d'eau ($Pr = 6,4$), OUZZANI (1990) trouve que dans une conduite d'allongement transversal $A_y = 80$, pour un REYNOLDS considérable pour ce type d'écoulements ($Re = 28$), les structures thermoconvectives ne sont pas des R_{\perp} mais des R_{\parallel} pour lesquels $Ra_{C\parallel}$ ne varie pas avec Re . Donc, la variation de Ra_c dans l'expérience de PLATTEN et LEFEBVRE à une autre cause.

Plusieurs explications à ce problème ont été données. PLATTEN et LEGROS (1984) (au Chapitre VIII, pp. 545 à 556) recherchent théoriquement si une structure résiduelle, se superposant à l'écoulement de R_{\parallel} et ayant une périodicité dans la direction longitudinale, ne pourrait pas provoquer l'augmentation de Ra_c . La structure qui résulterait de cette superposition pourrait avoir l'apparence des R_{\parallel} obliques ou de rouleaux sinueux. PLATTEN et LEGROS vérifient leur hypothèse expérimentalement en enregistrant un signal sinusoïdal témoignant de la présence effective d'une périodicité longitudinale résiduelle dans l'écoulement. Cependant, ces observations sont faites à $Re \approx 1,5$; elles ne concordent pas avec des photos

prises à des nombres de REYNOLDS plus élevés ($Re = 28$) montrant des R_{\parallel} parfaitement réguliers et ne laissant apparaître ni inclinaison ni sinuosité.

PLATTEN et LEGROS font alors une deuxième proposition : ils montrent qu'à $Re = 28$ l'intervalle de temps pendant lequel un volume d'eau élémentaire passe sur la plaque chauffée dans l'expérience de PLATTEN et LEFEBVRE (1971) est environ égal au double du temps caractéristique nécessaire pour atteindre l'état thermoconvectif stationnaire du problème de convection naturelle équivalent ($Re = 0$). Il est donc vraisemblable que les R_{\parallel} ne soient pas complètement établis dans cette expérience. En effet, lorsqu'on se trouve dans la zone d'entrée thermique Ra_C est plus élevé que dans la zone où l'écoulement est pleinement établi et il décroît lorsque x augmente. La mise en évidence de l'augmentation de $Ra_{C\perp}$ avec Re a été réalisée par LUIJKX et al. (1981) grâce à une expérience de visualisation dans de l'huile de silicone. Cette expérience a montré que les R_{\perp} disparaissent de plus en plus de la conduite quand Re augmente (cet élément visuel faisait défaut dans la première expérience de PLATTEN et LEFEBVRE (1971)). Le canal utilisé est très long $Ax \simeq 100$ et plus de 90 R_{\perp} peuvent s'y développer. Lorsque le débit est suffisamment élevé, les R_{\perp} disparaissent de la zone d'entrée du canal et, plus Re augmente, plus les R_{\perp} sont rejetés vers l'aval, jusqu'à disparaître complètement.

◆ Paramètres critiques en conduite d'extension latérale finie, obtenus par analyse de stabilité linéaire temporelle

Pour avoir une analyse qualitativement exacte de l'influence de Re , de Ay et de Pr sur les nombres de RAYLEIGH critiques d'apparition des R_{\perp} et des R_{\parallel} , dans le cas d'une conduite d'extension latérale finie, il faut attendre la parution de l'article de LUIJKX et al. (1981). Cette analyse peut se résumer graphiquement par le diagramme de stabilité de la Figure 1-9. On rappelle brièvement les résultats principaux de cette analyse :

$Ra_{C\parallel} = Ra_{C\parallel}(Ay)$	$Ra_{C\parallel}$ est indépendant de Re et de Pr .
$Ra_{C\perp} = Ra_{C\perp}(Ay, Re, Pr)$	$Ra_{C\perp}$ augmente si Re, Pr ou Ay augmente.
Si $0 < Re < Ra_{C\parallel} \Rightarrow Ra_{C\perp} \leq Ra_{C\parallel}$	formation de R_{\perp} à la transition.
Si $Re \geq Re^* \Rightarrow Ra_{C\perp} \geq Ra_{C\parallel}$	il apparaît des R_{\parallel} au seuil de transition.
$Re^* = Re^*(Pr, Ay)$	Re^* diminue si Pr augmente à Ay fixé.

On notera que ces résultats qualitatifs sont le fruit d'une étude de stabilité linéaire temporelle pour un écoulement de base 3D et des perturbations 3D, dont la théorie et la totalité des résultats quantitatifs se trouvent dans la thèse de LUIJKX (1983). Nous démontrons par ailleurs que

la deuxième conclusion est restrictive et que l'aspect Ay influence alternativement $Ra_{c\perp}$ (cf. § 5.1.2). KATO et FUJIMURA (2000) viennent aussi de publier une analyse théorique 3D qui, dans sa première partie, est comparable à celles que nous venons de citer (analyse linéaire temporelle en conduites d'extension latérale finie). Par contre, dans sa deuxième partie, elle va bien au-delà puisqu'elle étudie à partir de deux équations d'amplitudes couplées l'interaction faiblement non linéaire entre les R_{\perp} et les R_{\parallel} au voisinage du point triple en $Re = Re^*$ et $Ra = Ra_{c\perp} = Ra_{c\parallel}$ (cf. Figure 1-9), dans des conduites d'extension latérale finie avec des conditions aux limites thermiques adiabatiques et parfaitement conductrices sur les parois latérales. La stabilité de l'écoulement de POISEUILLE conductif, des R_{\perp} , des R_{\parallel} et d'une structure mixte se présentant comme la superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} est étudiée au voisinage de ce point triple.

♦ **Critique des résultats obtenus par analyse de stabilité linéaire temporelle**

Comme le montre la Figure 1-14 ou les travaux de KURTZWEG (1965) et de LUIJKX et PLATTEN (1981), l'analyse de la stabilité linéaire temporelle prédit la formation d'un nombre pair ou impair de R_{\parallel} stationnaires au-dessus du seuil de transition en fonction de la valeur du rapport de forme Ay . Ce résultat a été vérifié expérimentalement, et numériquement dans le cas convection naturelle. Cependant, en convection mixte, il est en contradiction avec toutes les expériences et les simulations numériques directes qui prévoient un nombre pair de R_{\parallel} quel que soit $Ay > 1,1$ et $Re > 0$. SHAHDA et NARUSAWA (1997) ont donné une explication théorique à cette contradiction. Ils ont calculé une expression analytique du profil de vitesse axiale $u(t)$ pour les écoulements de R_{\parallel} , en comparant les taux de croissance initiaux de ces profils ($\partial u / \partial t$ à $t = 0$) pour un nombre pair de R_{\parallel} et un nombre impair de R_{\parallel} . Ils montrent effectivement qu'un seul R_{\parallel} apparaît lorsque $Ay \leq 1.1$ et qu'un nombre pair de R_{\parallel} est sélectionné lorsque $1.1 < Ay \leq 10$. En appliquant le second principe de la thermodynamique, NARUSAWA (2001) montre également par une analyse théorique et des simulations numériques que le passage d'une paire à deux paires de R_{\parallel} pleinement établis est caractérisé par une variation brutale et discontinue des taux de production d'entropie liés aux dissipations thermiques et aux dissipations visqueuses. NICOLAS et al. (2000) comparent les courbes de transition $Ra_{c\parallel}$ et $Ra_{c\perp}$ déterminées par l'analyse linéaire temporelle pour A , fini aux courbes de transition déterminées expérimentalement ou par simulations numériques directes entre écoulement de POISEUILLE et R_{\parallel} d'une part, et entre écoulement de

POISEUILLE et R_{\perp} d'autre part. Ces comparaisons, effectuées pour les couples de valeurs $(Pr, A_y) = \{(0.7, 2), (6.4, 3.6), (453.5, 5.25)\}$, montrent que les résultats théoriques, expérimentaux et numériques coïncident quantitativement en ce qui concerne $Ra_{c\parallel}$.

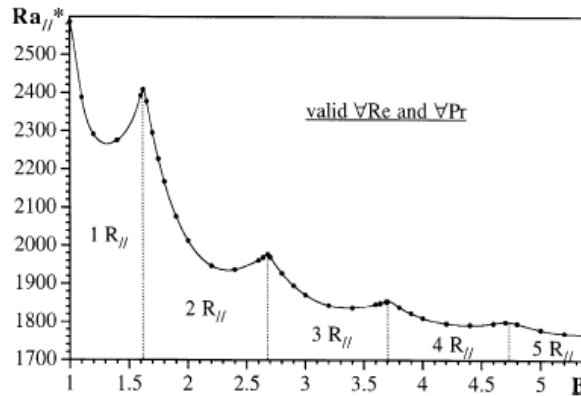


Figure 1-14 : Nombre de RAYLEIGH critique d'apparition des R_{\parallel} en fonction de la profondeur A_y ($=B$ en notations de l'auteur), et nombre de R_{\parallel} apparaissant au dessus du seuil de transition, d'après une analyse de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de POISEUILLE purement conductif (tiré de NICOLAS et al. (2000) avec notations de l'auteur).

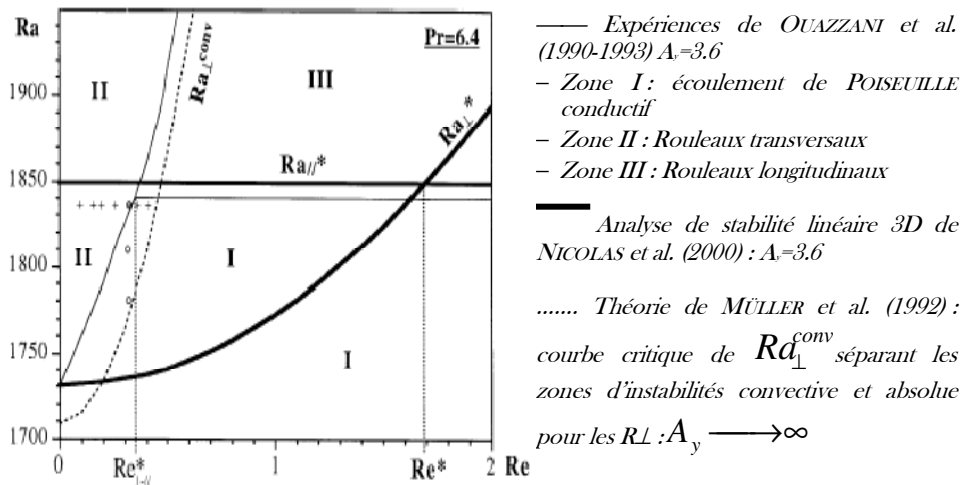


Figure 1-15 : Comparaison à $Pr=6.4$ entre le diagramme de stabilité déterminé expérimentalement par OUZZANI et al. (1990-1993) ; les résultats de la stabilité linéaire temporelle par LUIJKX (1983) et NICOLAS et al. (2000) ; le courbe de transition entre les R_{\perp} convectivement et absolument instables calculés par MÜLLER et al. (1992) pour un écoulement PRB 2D.

Par contre, les courbes $Ra_{c\perp}(Re)$ dans le plan $Ra-Re$ sont toujours nettement en dessous des courbes de transition expérimentales (cf. Figure

1.14) et numériques entre écoulement de POISEUILLE et R_{\perp} . Ce décalage se répercute sur la valeur du nombre de REYNOLDS critique : la valeur de Re^* déterminée par la théorie linéaire est toujours très supérieure à la valeur de $Re_{\perp-\parallel}^*$ déterminée expérimentalement ou par simulations numériques (cf. Figure 1-14). On notera que Re est obtenu pour $Ra = Ra_{c\parallel} = Ra_{c\perp}$, c'est-à-dire qu'il se rapporte à des perturbations infinitésimales. Par contre, comme expérimentalement on ne peut mesurer que des perturbations finies, $Re_{\perp-\parallel}^*$ est déterminé en général pour des valeurs supercritiques du nombre de RAYLEIGH (c'est-à-dire pour $Ra > Ra_{c\perp}$ et $Ra = Ra_{c\parallel}$).

Quoi qu'il en soit, on vient de voir que la théorie de la stabilité linéaire temporelle n'est pas capable de retrouver quantitativement la valeur du nombre de RAYLEIGH critique expérimental entre l'écoulement de POISEUILLE et les R_{\perp} .

◆ Cas des écoulements dans la zone d'entrée thermique

A partir de l'abscisse $x = 0$ où le gradient vertical de température est imposé, un écoulement pleinement développé hydro-dynamiquement a besoin d'une certaine distance pour s'établir thermo-convectivement. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette zone et ont essayé d'y déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités. Parmi les premiers à avoir étudié le cas de l'écoulement de PRB, on trouve HWANG et CHENG (1973). Ils réalisent une étude de stabilité linéaire pour un écoulement entre deux plaques infinies. Les modes normaux introduits dans les équations de perturbations linéarisées se rapportent uniquement aux R_{\parallel} stationnaires ; ils sont de la forme $f(x, y, z) = \hat{f}(z)e^{c_x x} e^{ik_y y}$. La stabilité marginale est obtenue lorsque le coefficient d'amplification spatiale dans la direction longitudinale c_x s'annule. Le profil thermique de l'écoulement de base est tel qu'en $x = 0$ (là où commence le chauffage) la température du fluide est uniforme et égale à la température de la plaque supérieure froide ; c'est à dire que la conduction axiale de la chaleur vers l'amont est négligée dans l'écoulement de base. Pour un nombre de PRANDTL $Pr \geq 0,7$ et à grand nombre de PECLET, il est montré que l'écoulement de base est plus stable dans la zone d'entrée que vers l'aval, le résultat est inverse pour $Pr \leq 0,2$. Dans les deux cas, lorsqu'on s'éloigne de l'entrée, on retrouve que Ra_c tend vers 1708. L'étude précédente est généralisée par CHENG et WU (1976) qui introduisent deux modifications importantes :

⊗ les perturbations sont 3D avec des modes normaux de la forme

$$f(x, y, z) = \hat{f}(z)e^{c_x x} e^{i(k_x x + k_y y)} \text{ (les } R_{\perp} \text{ ne sont donc pas écartés) ;}$$

& la conduction de la chaleur vers l'amont est rendue possible en considérant un canal allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ et en prenant des conditions aux limites adéquates.

L'étude montre que, pour $Pe < 25$, l'hypothèse de fluide à température uniforme en $x = 0$ est erronée et que la conduction axiale de la chaleur ne peut pas être négligée. A faible nombre de PECLET, la courbe $Ra_{c\parallel} = f(x)$ est nettement en dessous de celle obtenue par HWANG et CHENG (1973) car le problème est elliptique et les perturbations remontent vers l'amont. D'autre part, les R_{\perp} sont plus stables que les R_{\parallel} pour $Pe \leq 0,5$ et $Pr \geq 1$ et ils se développent uniquement en amont et juste en aval de $x = 0$ (cf. Figure 1-16). Plus loin en aval, on retrouve les R_{\parallel} . Sans avoir connaissance du travail de CHENG et WU (1976), KAMOTANI et OSTRACH (1976) puis KAMOTANI et al. (1979) étudient expérimentalement la zone d'entrée thermique dans des écoulements d'air. Les deux études concernent les gammes d'écoulements suivants :

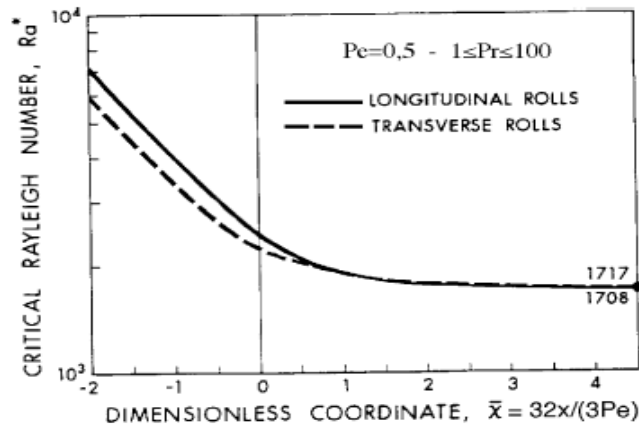


Figure 1-16 : Courbes de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille vis-à-vis des R_{\perp} et des R_{\parallel} dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension infinie chauffé uniformément par le bas pour $1 \leq Pr \leq 100$ et $Pe=0.5$ (tiré de CHENG et WU (1976)).

& $1000 \leq Ra \leq 31000$ et $30 \leq Re \leq 1100$ pour la première.

& $2.2 \times 10^4 \leq Ra \leq 2.1$ et $50 \leq Re \leq 300$ pour la seconde.

Les auteurs constatent que la longueur d'entrée thermique décroît lorsque Ra croît ou lorsque Re^2/Gr décroît. Dans les expériences de KAMOTANI et al. (1979), Ra_c est déterminé lorsqu'on peut détecter une petite déviation dans le profil transversal de température en un x donné. Bien que l'on retrouve que Ra_c décroisse avec x , les valeurs expérimentales de Ra_c dans la zone d'entrée sont nettement supérieures aux valeurs théoriques : à la même position axiale $x = 0.01$, $Ra_c \approx 30000$ pour l'expérience alors que $Ra_c \approx 3000$ pour la théorie. Ce résultat sera confirmé peu après par une

expérience de même type réalisée par HWANG et LIU (1976). L'explication donnée est qu'en théorie les perturbations caractérisant Ra_c sont infinitésimales alors qu'expérimentalement les appareils de mesure n'enregistrent que des perturbations finies. LEE et HWANG (1991) ont aussi démontré que Ra_c décroît en s'éloignant de la zone d'entrée, quel que soit le nombre de PRANDTL (à la différence de HWANG et CHENG (1973)).

1.3.4 Convection mixte en milieu de DARCY : $C_M RBD$

Parmi les très rares travaux à ce niveau, DELACHE (2005) a étudié l'évolution spatio-temporelle des structures thermoconvectives en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. Des données expérimentales montrent que dans la région laminaire, deux types de structures ont été observés : des rouleaux propagatifs transverses par rapport à l'écoulement de base R_{\perp} et des rouleaux fixes longitudinaux R_{\parallel} . Il a été obtenu, analogiquement au cas PRB, que l'analyse temporelle ne permet pas de prédire la sélection de structures observées, alors que la transition convectif absolu dans l'espace des paramètres correspond parfaitement à la transition entre les deux types de structures. Cet accord entre la théorie de l'instabilité absolue et l'expérience, a été retrouvé également lorsque l'on compare les périodes d'oscillations et les longueurs d'onde des R_{\perp} . Lorsque le rapport de forme transversal du milieu et l'inertie sont pris en compte, l'interaction non linéaire des R_{\perp} et des R_{\parallel} est étudié grâce à deux équations d'enveloppes, obtenues au voisinage d'un point de bifurcation double. La simulation numérique de ce modèle réduit en présence du bruit permet d'expliquer certaines observations expérimentales. D'autre part la résolution numérique directe bidimensionnelle du problème en méthode spectrale montre que les caractéristiques des modes globaux non linéaires sont identiques à celles obtenues par la théorie linéaire d'instabilité absolue. Par ailleurs le transfert de chaleur moyen est analysé et comparé à l'expérience. L'auteur a démontré que l'étude linéaire de stabilité temporelle prouve que la nature des structures thermoconvectives bifurquées dépend du rapport de forme latéral du milieu et de l'inertie poreuse. Dans le cadre de l'hypothèse d'un rapport de forme latéral infini, on trouve que :

- ⊗ la loi de DARCY conduit à une dégénérescence : toute structure convective, dont le nombre d'onde est $k_c = \pi$ peut apparaître au delà de $Ra_c = 4\pi^2$ et ce indépendamment du débit imposé.
- ⊗ la loi de DARCY FORCHHEIMER prévoit l'apparition de rouleaux longitudinaux indépendamment de la valeur prise par le débit. Ce résultat a été établi aussi par CARRIERE et MONKEWITZ (1999) par une analyse de stabilité linéaire du problème dans le cas d'un rapport

de forme latéral infini i.e. avec parois latérales verticales rejetées à l'infini et le spectre du nombre d'onde est continue.

La prise en compte d'un rapport de forme latéral fini a pour effet de stabiliser les rouleaux longitudinaux. Dans ce cas, le modèle de DARCY FORCHHEIMER met en évidence le rôle joué par le débit. Il existe une valeur critique Re_K^* telle que la solution de conduction perd sa stabilité au profit de structures tridimensionnelles propagatrices si $Re_K < Re_K^*$. En revanche pour des valeurs de $Re_K > Re_K^*$, on doit s'attendre à l'émergence de rouleaux longitudinaux fixes. Ce résultat est analogue à celui de NICOLAS dans son analyse du problème de PRB avec confinement latéral du milieu. Lorsque le rapport de forme latéral du milieu poreux est supposé infini, seuls les rouleaux transversaux peuvent devenir absolument instables. Les autres configurations thermoconvectives demeurent convectivement instables et ce quelle que soit la valeur du débit imposé. Un changement majeur intervient si l'on tient compte du confinement latéral. En effet, ce dernier peut promouvoir des instabilités absolues tridimensionnelles ou sous la forme de rouleaux longitudinaux. Cependant, du fait que leur taux d'accroissement temporel dans la région d'instabilité absolue est plus petit que celui des rouleaux transversaux, ces derniers constituent le motif le plus probable d'organisation de la convection dans une expérience de laboratoire.

1.3.5 Le RAYLEIGH BENARD SORET en milieu de DARCY : RBSD

◆ Définition

Cette configuration est définie comme la convection naturelle du problème de RB dans une matrice poreuse et là où on ne néglige pas l'effet SORET. Peu nombreux sont les travaux qui détaillent ce problème. Toutefois des cas particuliers sont traités. On notera que, pour les milieux partiellement poreux, on n'a pu trouver aucune référence.

◆ Revue bibliographique sur les écoulements de RBSD

BRAND et STEINBERG (1983) ont étudié des instabilités dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire en fonction du signe de l'amplitude du coefficient de SORET. Ils ont montré que, quand le coefficient d'expansion volumique est supérieur à zéro, une instabilité oscillante apparaît si le chauffage se fait par le bas et dans ce cas le paramètre de SORET est négatif. Pour des valeurs positives de la conductivité thermique et le chauffage se faisant par le haut il n'y a pas d'instabilité. Pour certains paramètres du fluide binaire, une possibilité d'oscillations peut apparaître quand le chauffage se fait par le haut. Ces mêmes auteurs ont examiné le cas d'une couche poreuse horizontale saturée par un fluide

binaire. Ils ont considéré la convection au voisinage du point d'intersection de la ligne de la stabilité neutre et celle de la stabilité oscillante.

SOVRAN et al. (2001) ont étudié la naissance de la convection dans une couche poreuse infinie, saturée par un fluide binaire, en présence d'effet SORET. Les parois horizontales, imperméables à la matière, sont maintenues à des températures constantes et différentes. Pour une cellule chauffée par le bas, la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire lorsque le facteur de séparation N est supérieur à N_0 , fonction du nombre de LEWIS et de la porosité normalisée ; pour $N < N_0$, elle perd sa stabilité via une bifurcation de HOPF (voir § 3.2.2). Dans le cas d'une cellule chauffée par le haut, la solution d'équilibre est infiniment linéairement stable pour $N > 0$, alors qu'elle perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire pour $N < 0$. Ces résultats sont corroborés par une simulation numérique directe.

MANSOUR et al. (2004) ont traité numériquement, dans le même axe de recherche, l'effet SORET sur une solution à plusieurs constituants à l'équilibre dans une cavité carrée poreuse. Les parois horizontales sont imperméables et soumises à des gradients verticaux de température, par contre les parois verticales sont adiabatiques et sujettes à un gradient horizontal de concentration. Dans la formulation du problème, le modèle de DARCY est pris en compte, et les résultats numériques sont présentés pour $Ra = 100$, $Le = 0.1$, $N = 0.1$ et $-31.4 < Sr < 40$, où les nombres Ra, Le, N et Sr sont respectivement le RAYLEIGH thermique, le LEWIS, le rapport de flottabilité et le nombre de SORET. Ils ont analysé l'effet de ce dernier sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique et massique introduit par chaque solution. Ils ont trouvé que le transfert thermique et massique change largement pour des systèmes dépendant du paramètre Sr .

1.3.6 Convection mixte en configuration de Rayleigh Bénard Soret

◆ Définition

En réalité la définition de ce problème ne diffère du problème de PRB ou C_M RBD que par la présence de l'effet SORET, que nous avons décrit dans le § 1.2.2 et qu'on va définir mathématiquement ultérieurement. Un problème de PRBS (respectivement C_M RBSD) sera donc un PRB (respectivement C_M RBD) là où on ne néglige pas l'effet SORET en fluide binaire. Également, toute étude en milieu de DARCY-BRINKMAN ou en milieu de DARCY est absente de l'historique des publications scientifiques.

Ainsi on se contentera dans la revue bibliographique de citer les travaux, déjà peu nombreux en configuration PRBS.

◆ Revue bibliographique sur les écoulements de PRBS

THOMAES (1950) était le premier à imaginer, Dans les années cinquante, une cellule cartésienne, d'épaisseur très mince, dans laquelle circulait un fluide binaire, afin de mettre en évidence l'effet SORET. Cette cellule expérimentale a été largement utilisée au cours des années 1970, PLATTEN et LEGROS (1978) ont présenté un bon recueil des expériences menées.

Les premières études théoriques et numériques sur le problème de PRBS, ont été entamées par LEGROS et PLATTEN dans une tentative d'expliquer les résultats obtenus au cours des expériences de LEGROS. L'analyse de stabilité linéaire du problème a montré que, dans le cas d'un mélange binaire caractérisé par un facteur de séparation négatif, il existe un maximum local sur la courbe $Ra = f(Re)$ caractérisant la naissance des rouleaux transversaux. Autrement dit lorsque le nombre de REYNOLDS est faible, l'écoulement, censé stabiliser la solution de base, a en fait, pour un petit intervalle, un effet déstabilisant. Ensuite, en augmentant le Re , on retrouve l'effet stabilisant classique dû à la présence d'un écoulement forcé. Nous retrouvons également, au cours de notre analyse de la stabilité, ce comportement dans le cas des mélanges à fort LEWIS. Les études effectuées par LEGROS et PLATTEN en 1977 et 1978 ont permis, malgré des moyens de calcul assez limités, d'extraire une allure du comportement général de la convection mixte en fluide binaire avec prise en compte de l'effet SORET.

JUNG et LÜCKE (1996) étudièrent les modifications apportées au comportement d'un écoulement de POISEUILLE de mélanges binaires, tel qu'on a $0 < Re < 1$, déstabilisé par un chauffage par le bas. Une méthode de tir a été exploitée pour résoudre les équations linéarisées. Les résultats de ce travail sont en accord avec le comportement théorique obtenu par LEGROS et PLATTEN. D'une manière générale, JUNG et LÜCKE montraient, pour différents mélanges, que la présence de l'écoulement modifie le seuil de la bifurcation, la vitesse de propagation, le nombre d'onde et les fonctions propres. Dans ce même article, JUNG et LÜCKE montrent qu'à la naissance de la convection mixte, pour des fluides binaires à facteur de séparation négatif, la solution de base perd sa stabilité pour laisser apparaître des rouleaux transverses allant dans le sens de l'écoulement moyen ou en sens inverse. Ils ont tracé des diagrammes correspondant à l'évolution des nombres de RAYLEIGH critiques, des nombres d'ondes critiques et des pulsations critiques en fonction du nombre de REYNOLDS. Ces résultats sont obtenus à l'aide de développements en fonction d'un paramètre (produit du

nombre de REYNOLDS, du nombre de PRANDTL et du nombre d'onde dans la direction infinie x) et comparés à ceux obtenus à partir d'une méthode variationnelle. Les courbes séparant les régions où l'écoulement est linéairement stable, convectivement instable et absolument instable sont tracées dans un plan (Re, Ra) . Récemment, BÜCHEL et LÜCKE (2000) publient deux articles traitant le problème de PRBS, l'écoulement de POISEUILLE étant borné par la gamme $0 < Re < 1$. Dans le premier article paru en avril 2000, BÜCHEL et LÜCKE étudient, à partir d'une analyse linéaire et non linéaire, l'influence de la présence d'un écoulement de type POISEUILLE sur l'apparition des rouleaux transversaux dans une couche de fluide binaire chauffé par le bas. Les solutions sont recherchées à l'aide de deux moyens de simulation numérique, l'un basé sur un code aux différences finies et l'autre utilisant une méthode de GALERKIN pour la recherche des valeurs propres du système d'équations aux perturbations. Les auteurs s'intéressaient à un mélange binaire dont les caractéristiques correspondent à un mélange eau-éthanol. Ils établissent des diagrammes de bifurcation, montrant la variation du nombre de NUSSELT et de la fréquence de propagation des structures convectives en fonction du taux du RAYLEIGH et également, des diagrammes plus classiques, donnant l'évolution de ces paramètres en fonction du nombre de REYNOLDS. Dans le second article de BÜCHEL et LÜCKE, les auteurs focalisent leur travail sur des couches de fluides binaires, chauffées par le bas, auxquelles on applique un écoulement de POISEUILLE et différents types de perturbations convectives. Les comportements linéaire et non linéaire de la couche fluide sont analysés avant et après l'application des perturbations. Pour cela, la réponse obtenue en résolvant numériquement le système complet d'équations non linéaires est comparée à celle obtenue à partir de l'approximation des équations d'amplitudes de type GINZBURG LANDAU. Pour de faibles valeurs du nombre de REYNOLDS, les auteurs montrent un bon accord entre les deux méthodes.

Plus récemment PIQUER et al. (2005) se sont intéressés plus profondément au problème PRBS, ils ont entrepris une étude numérique bidimensionnelle, avec un code de laboratoire et séparément avec le FEMLAB, afin d'obtenir des résultats comparatifs. Ils ont aussi établi une analyse de stabilité linéaire temporelle dans le but de caractériser la stabilité supercritique du système. Des simulations tridimensionnelles à titre indicatif ont été poussées à l'aide du logiciel FEMLAB. Et enfin ils ont visualisé expérimentalement les rouleaux mobiles à l'aide de la PIV. Le principal apport dans le travail est d'avoir généralisé le comportement des systèmes PRBS pour une large gamme de mélanges, et pour des valeurs de $0 < Re < 10$, tout en caractérisant précisément l'aspect ondulatoire de l'écoulement.

D'importants résultats traitant l'aspect spatio-temporel et fréquentiel ont été fournis. Ces auteurs ont été les premiers à mettre en évidence numériquement les ondes se déplaçant en aval. Leur travail est un travail de synthèse qui a résumé parfaitement le problème PRBS en 2D. Nous citerons les études expérimentales de LHOST et PLATTEN (1989) concernant l'apparition des 'Travelling waves' dans des mélanges eau-isopropanol où le facteur de séparation est négatif. Ces auteurs détectent la naissance de la convection oscillante en enregistrant la vitesse en un point par LDV (Vélocimétrie Laser Doppler). COLOMBANI et al. (1995) ont réalisé des visualisations similaires par interférométrie holographique dans les mélanges liquides ($LiCl, 9H_2O$).

1.4 Récapitulatif de bibliographie

Dans le Tableau 1-2 nous fournissons une récolte d'informations résumant les travaux de convection naturelle et mixte en configuration de RAYLEIGH BENARD et sous l'effet SORET ou non. Nous indiquons si le milieu est fluide, semi poreux ou poreux.

- Chaque case du tableau correspond à une configuration physique.
- Dans chaque case nous mettrons les auteurs des principaux travaux. Nous avons essayé de fournir les dates afin de renseigner le lecteur sur l'actualité du travail.
- Une case vide signifie que cette configuration physique est un champ de recherche pratiquement vierge.

1.5 Valeur ajoutée apportée par ce travail

Jusqu'à présent et à notre connaissance, et comme indiqué au Tableau 1-2. Il n'existe pas de travail numérique tridimensionnel qui traite de manière synthétique le problème PRBS, à part les expériences numériques tridimensionnelles préliminaires dues à PIQUER et al. (2005). Il n'existe pas de travail théorique, numérique ou expérimental traitant le problème de convection mixte en configuration de RB et avec effet SORET dans un milieu partiellement poreux ou en milieu de DARCY. Pour cela nous avons choisi de faire l'effort de contribuer à la compréhension du problème de convection mixte en configuration de RB et avec effet SORET dans différents milieux : contribution tridimensionnelle en milieu fluide et en milieu de DARCY, analyse de stabilité linéaire en milieu fluide et en milieu poreux. Les détails de ces contributions seront l'objet du reste de ce texte.

	Sans effet Soret		Avec effet Soret	
	Convection naturelle	Convection mixte	Convection naturelle	Convection mixte
Fluide pur	Thomson 1882, Bénard 1901 Rayleigh 1916 Pellew et al. 1940 Un nombre énorme de travaux récents	2D et exp. P. Idrac 1920/ Walker 1932/ Graham 1933 Un très grand nombre de travaux récents	un grande nombre de travaux récents	2D et exp. Platten/Legros 1978 Jung/Lücke 1996 Büchel/Lücke 2000 Piquer 2005
Darcy Brinkman				
Milieu de Darcy	Un grand nombre de travaux	Un grand nombre de travaux	Brand 1993 Sovran 2011 Mansour 2004 Bourich 2002	

Tableau 1-2 : Revue des principaux travaux sous différentes configurations dérivant du problème de Rayleigh Bénard

Chapitre 2

Méthode des éléments finis pour le calcul linéaire de la stabilité de la solution de conduction

Un état d'équilibre d'un système physique est la situation la plus régulière et la plus symétrique. On pourra aussi expliquer l'équilibre par la dissipation minimale de l'énergie mécanique. Mais sous une contrainte extérieure de plus en plus accentuée, le système se déstabilise et perd sa régularité. Chaque brisure de symétrie est accompagnée d'une bifurcation qui fait évoluer le système d'un état vers un autre qui lui est macroscopiquement différent, et où la dissipation est moins privilégiée par rapport au cas correspondant à la persistance de l'ancien état. L'étude de la stabilité nous permet de marquer les conditions de passage entre ces états. Au cours de cette section nous aborderons l'analyse numérique de stabilité linéaire de la convection naturelle et mixte étudiées dans le cadre d'une géométrie rectangulaire garnie ou non par un milieu poreux sous les hypothèses de BOUSSINESQ. La motivation étant d'expliquer les mécanismes de transition vers des régimes complexes, afin d'ultérieurement faciliter l'expérimentation numérique. La technique utilisée consiste à réduire le problème de NAVIER STOKES linéarisé via la méthode des éléments finis vers un système matriciel couplé. Une seconde

manœuvre consistera à convertir ce système en une réduction d'un endomorphisme dont on définira les propriétés. Ainsi la solution approchée du système sera sous forme d'une base de vecteurs propres. D'une manière générale on s'intéressera à la détermination numérique par la méthode des éléments finis du nombre de RAYLEIGH critique à partir duquel il y aura naissance de la convection qui se manifestera par la perte de symétrie (apparition de rouleaux transversaux 2D) de la solution de conduction stratifiée en vitesse, en température et en concentration, et ce dans le cas d'une conduite d'éclatement fini. Ceci peut se déterminer par la stabilité marginale. La stabilité marginale est le cas où une perturbation n'est ni amplifiée ni amortie, elle est donc utile pour déterminer les modes les plus instables. Bien que cette recherche soit le but principal du présent chapitre, une analyse de stabilité transitoire a été entreprise afin de caractériser l'état universel d'une solution binaire contrainte à un gradient de température vertical. La stabilité transitoire permet la détermination des passages entre les différentes bifurcations. On peut plus précisément définir l'action principale dans ce chapitre dont l'aspect est méthodologique ; il s'agit d'explicitier les algorithmes et les méthodes numériques permettant de calculer les valeurs propres de l'opérateur linéarisé et d'obtenir les valeurs numériques des coefficients du système réduit.

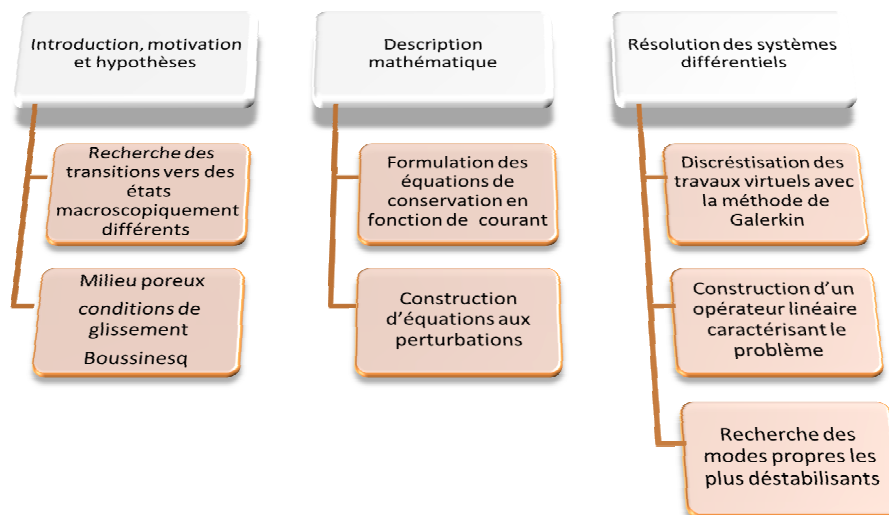


Figure 2-1 : Présentation de la démarche de linéarisation des équations de NAVIER-STOKES selon le modèle de stabilité par éléments finis.

2.1 Théorie linéaire de la stabilité

Les équations linéaires admettent des solutions. C'est pour cela qu'on en rencontre autant dans les manuels. Les systèmes linéaires donnent l'avantage de jouer librement avec les lois de compositions algébriques les plus banales, on peut décomposer ces problèmes et les reconstituer, leurs éléments s'emboîtent. Le problème de NAVIER-STOKES, par excellence non linéaire et couplé, devra être, comme l'impose la tradition scientifique, linéarisé afin qu'il obéisse à cette règle du jeu. Une technique mathématiquement rigoureuse est indispensable à cet effet. La théorie d'analyse fonctionnelle nous donne la grande faveur de gérer les équivalences, pas à pas vers la linéarité, entre les problèmes durement compliqués, sous des contraintes mathématiques consistantes. L'un des plus beaux exploits de cette théorie est la méthode des éléments finis, qui sera notre outil d'obtention des valeurs des seuils de stabilité en termes de vecteurs (Ra, Re, Pr, Le, N) via une démarche longuement compliquée. La présentation de la technique est l'objet de ce chapitre.

2.2 Équations de base

La description mathématique du problème selon le modèle DARCY-BRINKMAN, tenant compte des hypothèses de BOUSSINESQ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V^* = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\varepsilon^2} V^* \cdot \nabla V^* = -\vec{\nabla} \cdot P^* + \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} V^* + \mu_{eff} \nabla^2 \cdot V^* \\ \sigma \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (V^* \cdot \nabla) T^* = \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_{eq}}{\rho C_p} \nabla T^* \right) \\ \varepsilon \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + (V^* \cdot \nabla) C^* = \nabla \cdot (D_C \nabla \cdot C^* + D_T \nabla \cdot T^*) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

L'équation de continuité est la condition d'existence d'une fonction de courant ψ^* à partir de laquelle les composantes de vitesse peuvent être reliées selon :

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \quad (2.2)$$

$$v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (2.3)$$

2.3 Mise sous forme adimensionnelle

Les longueurs sont comparées à la hauteur de la cavité prise comme référence. La vitesse est adimensionnée par rapport à la diffusivité thermique a . Par ailleurs la température et la concentration sont adimensionnées respectivement par rapport aux écarts de température et de concentration entre les deux parois horizontales de la cavité. Les variables adimensionnelles sont données par :

Coordonnées spatiales	$(x, y, z) = \frac{(x^*, y^*, z^*)}{H^*}$
Vitesse	$(u, v, w) = \frac{(u^*, v^*, w^*)}{V_{ref}}$
Fonction de courant	$\psi = \frac{\psi^*}{a}$
Pression	$P = \frac{P^*}{P_{ref}}$
Temps	$t = \frac{t^*}{t_{ref}}$
Température	$T = \frac{T^* - T_{ref}}{T_{chaud} - T_{froid}}$
Concentration	$C = \frac{C^* - C_{ref}}{\Delta C_{ref}} \quad \Delta C_{ref} = -S_t C_0 (1 - C_0) \Delta T$

Tableau 2-1 : Variables sans dimension.

En introduisant ces variables dans les équations du système (2.1), en prenant le rotationnel de l'équation de DARCY-BRINKMAN, afin d'anéantir de terme de la pression ($rot(\nabla P) = 0$), et enfin en remplaçant les composantes des vitesses par leurs expressions en ψ^* , nous obtenons les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes qui décrivent respectivement, la quantité de mouvement, l'énergie et les espèces.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} J(\psi, \nabla^2 \psi) - Pr \nabla^4 \cdot \psi \right] + \frac{1}{Da} \nabla^2 \psi = Pr R_T \frac{\partial}{\partial x} (T + NC) \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + J(\psi, T) = \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + J(\psi, C) = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où $R_T = Ra/Da$ est le nombre de DARCY-RAYLEIGH et l'opérateur J est défini par :

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z}$$

Les frontières du domaine respectent les conditions décrites à la Figure 2-2.

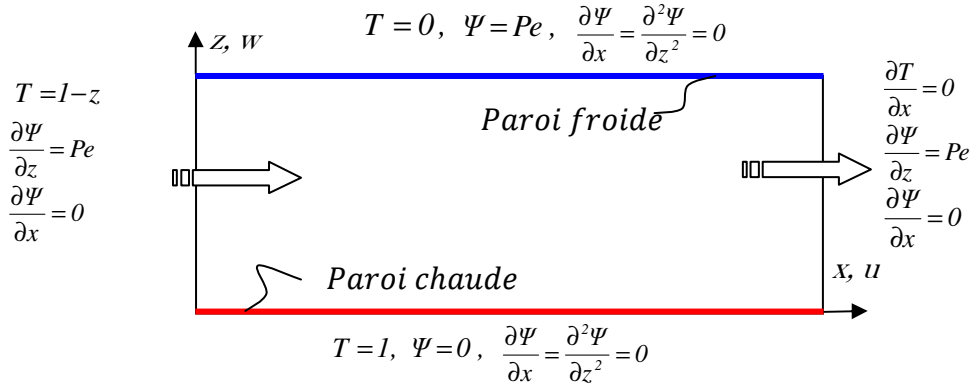


Figure 2-2 : Conditions aux frontières

Il est à remarquer que la solution conductive $T = C = 1 - z$ (pour la température et la concentration) et une vitesse $V = u \geq 0$ est une solution possible du système d'équations (2.4). Le nombre de RAYLEIGH critique, à partir duquel cet état de repos est brisé et la solution perd sa stabilité, est maintenant déterminé sur la base de la méthode des éléments finis.

2.3.1 Équations aux perturbations

Dans le but de faciliter l'usage de la formulation variationnelle, nous allons décomposer la solution générale des équations de base en la somme d'une solution conductive et d'une autre convective de la manière :

$$\begin{cases} \psi = \psi_c + \tilde{\psi}(t, x, z) \\ T = T_c + \tilde{\theta}(t, x, z) \\ C = C_c + \tilde{\phi}(t, x, z) \end{cases} \quad (2.5)$$

où (ψ_c, T_c, C_c) et $(\tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ représentent respectivement, les solutions conductive et convective du problème. La solution conductive est définie par :

$$\begin{cases} \psi_c = Pe \cdot z \\ T_c = C_c = 1 - z \end{cases} \quad (2.6)$$

En injectant les égalités (2.5) dans (2.4) nous aurons :

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \frac{\partial(\psi_c + \tilde{\psi})}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} J((\psi_c + \tilde{\psi}), \nabla^2.(\psi_c + \tilde{\psi})) - Pr \nabla^4.(\psi_c + \tilde{\psi}) \right] \\ + \frac{1}{Da} \nabla^2.(\psi_c + \tilde{\psi}) = Pr R_T \frac{\partial}{\partial x} ((T_c + \tilde{\theta}) + N(C_c + \tilde{\phi})) \\ \sigma \frac{\partial(T_c + \tilde{\theta})}{\partial t} + J((\psi_c + \tilde{\psi}), (T_c + \tilde{\theta})) = \nabla^2.(T_c + \tilde{\theta}) \\ \varepsilon \frac{\partial(C_c + \tilde{\phi})}{\partial t} + J((\psi_c + \tilde{\psi}), (C_c + \tilde{\phi})) = \frac{1}{Le} (\nabla^2.(C_c + \tilde{\phi}) - \nabla^2.(T_c + \tilde{\theta})) \end{cases}$$

Utilisant la linéarité de la dérivée et en éliminant les termes nuls, il vient :

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} J((\psi_c + \tilde{\psi}), \nabla^2.(\psi_c + \tilde{\psi})) - Pr \nabla^4.(\psi_c + \tilde{\psi}) \right] + \frac{1}{Da} \nabla^2.(\psi_c + \tilde{\psi}) \\ = Pr R_T \frac{\partial}{\partial x} ((T_c + N C_c) + (\tilde{\theta} + N \tilde{\phi})) \\ \sigma \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_c}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial T_c}{\partial z} = \nabla^2. \tilde{\theta} \\ \varepsilon \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_c}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial C_c}{\partial z} = \frac{1}{Le} (\nabla^2. \tilde{\phi} - \nabla^2. \tilde{\theta}) \end{cases}$$

Or nous avons :

$$\begin{cases} \psi_c = Pe \cdot z \\ T_c = C_c = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi_c}{\partial z} = Pe \\ \frac{\partial T_c}{\partial z} = \frac{\partial C_c}{\partial z} = -1 \end{cases}$$

C'est ainsi qu'on pourra affirmer après arrangement et éliminations des termes du second ordre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - Pr \nabla^4 \cdot \tilde{\psi} - Pe \frac{\partial \nabla^2 \cdot \tilde{\psi}}{\partial x} \right] + \frac{1}{Da} \nabla^2 \cdot \tilde{\psi} = Pr R_T \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\theta} + N \tilde{\phi}) \\ \sigma \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + Pe \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} - 1 \right) = \nabla^2 \cdot \tilde{\theta} \\ \varepsilon \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + Pe \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - 1 \right) = \frac{1}{Le} (\nabla^2 \cdot \tilde{\phi} - \nabla^2 \cdot \tilde{\theta}) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

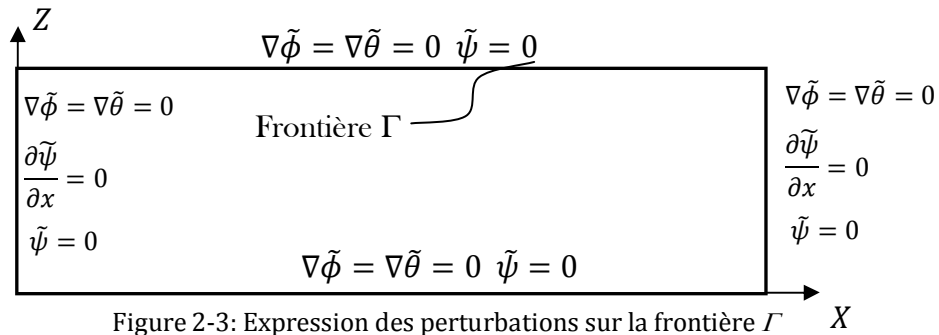
Ce système représente les équations aux perturbations.

2.3.2 Conditions aux frontières des perturbations

Les conditions aux frontières hydrodynamiques, thermiques et massiques pour les solutions convectives (ou perturbations) diffèrent par rapport à celles des grandeurs de base. Elles sont résumées sur la figure 2-3 et interprétées comme suit :

1. $\nabla \tilde{\theta} = 0 \Rightarrow$ la perturbation du flux est nulle.
2. $\nabla \tilde{\phi} = \nabla \theta = 0 \Rightarrow$ Découpe de la loi de conservation des espèces.
3. $\partial \tilde{\psi} / \partial x = 0 \Rightarrow$ à l'entrée, écoulement unidirectionnel suivant x .

$$\partial \tilde{\psi} / \partial x = 0 \Rightarrow \tilde{\psi} = c^{te} = \tilde{\psi}(x=0) = \tilde{\psi}(x=A) = 0$$



Ces conditions aux limites serviront par la suite dans l'écriture des intégrales de GALERKIN.

2.4 Stabilité linéaire

Afin d'étudier la stabilité marginale et transitoire il est convenable de décomposer les solutions convectives spatio-temporelles en un produit d'une exponentielle temporelle et de fonctions spatiales.

$$\begin{cases} \psi = \psi_c + \tilde{\psi}(t, x, z) \\ T = T_c + \tilde{\theta}(t, x, z) \\ C = C_c + \tilde{\phi}(t, x, z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\psi}(t, x, z) = \psi_0 e^{pt} F(x, z) \\ \tilde{\theta}(t, x, z) = \theta_0 e^{pt} G(x, z) \\ \tilde{\phi}(t, x, z) = \phi_0 e^{pt} H(x, z) \end{cases} \quad (2.8)$$

Les fonctions F, G et H décrivent les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration juste au moment de la perte de stabilité de la solution (seuil de convection), et vérifient les mêmes conditions aux limites que leurs grandeurs correspondantes. Les valeurs ψ_0, θ_0, ϕ_0 désignent les amplitudes de ces fonctions. Le paramètre p est un nombre qui décrit le taux d'accroissement de l'amplitude de la perturbation. Lorsque le paramètre p est nul, on parle de stabilité marginale, et lorsqu'il est non nul on parle de stabilité transitoire c'est-à-dire la recherche des modes convection décroissante, oscillante ou croissante.

2.4.1 Stabilité marginale $p = 0$

Les équations régissantes sont d'abord linéarisées en introduisant les transformations (2.8) avec la condition $p = 0$ dans les équations (2.7) :

$$\begin{cases} \psi_0 \left(\frac{1}{Pr \cdot Da} \nabla^2 \cdot F - \left(\nabla^4 \cdot F + Re \frac{\partial \nabla^2 \cdot F}{\partial x} \right) \right) = R_T \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 G + N \phi_0 H) \\ Pe \theta_0 \frac{\partial G}{\partial x} + \psi_0 \frac{\partial F}{\partial x} = \theta_0 \nabla^2 \cdot G \\ Pe \phi_0 \frac{\partial H}{\partial x} + \psi_0 \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Le} (\phi_0 \nabla^2 \cdot H - \theta_0 \nabla^2 \cdot G) \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous allons par la suite résoudre ce système numériquement avec la méthode des éléments finis, et le réduire en un système à valeurs propres. Pour cela nous allons donner une brève description de la méthode puis nous évoquerons les passages principaux de calcul amenant à la solution.

2.4.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a été développée au départ dans le domaine de la mécanique des solides pour calculer les contraintes et les déformations dans des structures complexes. Elle doit son origine, en effet, à l'idée de minimiser l'énergie potentielle d'un système, comme dans l'approche lagrangienne de la mécanique classique. De nos jours, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans tous les domaines du génie et des mathématiques appliquées. Le grand avantage de la méthode des éléments finis par rapport aux autres méthodes est la facilité avec laquelle sont traitées les conditions limites d'un problème. Beaucoup de problèmes physiques impliquent des conditions limites de type NEUMANN et des frontières irrégulières. Comme nous le verrons, la procédure de construction de la méthode offre l'avantage d'être indépendante des conditions limites particulières du problème, puisque l'information sur les conditions aux limites sera contenue dans la matrice d'assemblage du système linéaire final à résoudre. De plus elle est beaucoup plus flexible que les procédures ADI, puisqu'elle permet de changer de maillage sans modifier le schéma de discrétisation. Le principe de discrétisation a un fondement différent par rapport aux volumes et différences finies qui utilisent les développements limités pour calculer les dérivées partielles. En éléments finis il s'agit de réécrire le problème avec ses conditions aux limites sous forme d'une formulation faible qui inclut ces dernières dans les intégrales à évaluer. Le reste du calcul consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte du problème aux dérivées partielles sous la forme d'un champ $\tilde{F}(M, t)$ défini par morceaux sur des sous domaines de Ω . Les n sous domaines Ω_i formant une partition Ω de doivent être tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \text{ et } \tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_j = \emptyset \forall i \neq j \text{ où } \tilde{\Omega}_i = \Omega_i \setminus \partial\Omega_i$$

Les champs locaux $\tilde{f}(M, t)$, définis sur chaque sous domaines, sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs généralement polynomiaux. Cette famille est appelée « espace des fonctions d'interpolation de l'élément ». La famille des champs globaux $\tilde{F}(M, t)$, obtenus par juxtaposition des champs locaux (assemblage des matrices élémentaires) est appelée espace des fonctions d'interpolation du domaine Ω . Le champ dans chaque sous domaine Ω_i est déterminé par un nombre fini de valeurs, représentant la variable ou ses dérivées $n^{\text{ièmes}}$, en des nœuds choisis arbitrairement dans le sous domaine. Le champ local est une interpolation entre les valeurs aux nœuds. Le sous domaine muni de son interpolation est appelé élément. Chercher une solution par éléments

finis consiste donc à construire par juxtaposition des champs locaux le champ global $\tilde{F}(M, t)$ de façon qu'il soit au mieux proche de la solution du problème. Parmi les contraintes qu'on impose à la solution approchée cherchée, il y a au moins une continuité simple (C_0) à la frontière entre les sous domaines. Nous détaillerons étapes principales de la mise en œuvre de la méthode sur notre exemple. Le travail avec la méthode des éléments finis requiert une bonne dose d'analyse fonctionnelle, outil fondamental pour une véritable rigueur sur les passages. Mais toutefois les démonstrations mathématiques ne sont pas notre objectif, nous nous contenterons d'évoquer les résultats nécessaires à l'enchaînement de notre raisonnement. Parmi les outils de base, on retrouve les notions de distributions, d'espaces de HILBERT et de SOBOLEV.

◆ Formulation forte du problème

On désigne par $\Omega = [0, A] \times [0, 1]$ le domaine physique et par $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . La formulation forte de notre problème est l'écriture des équations aux dérivées partielles couplées avec leurs conditions aux limites, présentées ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \left(\frac{1}{Pr \cdot Da} \nabla^2 \cdot F - \left(\nabla^4 \cdot F + Re \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial x} \right) \right) = \\ \quad R_T \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 G + N \phi_0 H) \quad \forall (x, z) \in \Omega \\ \\ Pe \theta_0 \frac{\partial G}{\partial x} + \psi_0 \frac{\partial F}{\partial x} = \theta_0 \nabla^2 \cdot G \quad \forall (x, z) \in \Omega \\ \\ Pe \phi_0 \frac{\partial H}{\partial x} + \psi_0 \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Le} (\phi_0 \nabla^2 \cdot H - \theta_0 \nabla^2 \cdot G) \quad \forall (x, z) \in \Omega \\ \\ F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \nabla \cdot G \cdot \vec{n} = \nabla \cdot H \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall (x, z) \in \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.10)$$

La fonction F fait partie de l'espace de SOBOLEV $\mathbb{H}^2(\Omega)$ défini par :

$$\mathbb{H}^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) ; 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

Alors que les fonctions G et H font partie de l'espace de SOBOLEV $\mathbb{H}^1(\Omega)$ défini par :

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega) ; 1 \leq i \leq 2 \right\}$$

Dans la définition de l'espace fonctionnel, il est important de noter que les fonctions F, G et H et leurs dérivées partielles sont équivalentes à des distributions régulières de $L^2(\Omega)$ et de $L^1(\Omega)$.

◆ Formulation variationnelle du problème

Afin d'établir la formulation faible du problème (2.11) nous devons introduire des fonctions tests \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} correspondant respectivement à F, G et H , et qui seront conditionnées par leur appartenance au même espace que la solution exacte et par leur vérification des conditions aux frontières. Notons que la formulation variationnelle n'est pas unique. On multiplie par les fonctions test et on applique le théorème de GREEN (opérations analogues au principe des travaux virtuels en mécanique). Ainsi on intègre au sens des distributions par parties les termes qui contiennent des dérivées secondes et on intègre par parties deux fois le terme des efforts visqueux afin de s'affranchir de la dérivée quatrième. On obtient la formulation variationnelle :

$\forall \bar{u}, \bar{v}$ et \bar{w} nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr.Da} (\nabla.F)(\nabla.\bar{u}) - \nabla^2.F(\nabla^2.\bar{u} + Re.\bar{u}) \right) d\Omega \\ - \psi_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{Pr.Da} \frac{\partial F}{\partial n} \bar{u} \Big|_{\bar{u}=0} - \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} + Re.\bar{u} \Big|_{\bar{u}=0} \right) \right) d\Gamma = R_T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 G + N\phi_0 H) \bar{u} d\Omega \\ \underbrace{\hspace{10em}}_0 \\ Pe\theta_0 \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial x} \bar{v} d\Omega + \psi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} \bar{v} d\Omega = \theta_0 \int_{\Omega} (\nabla.G)(\nabla.\bar{v}) d\Omega - \theta_0 \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \bar{v} d\Gamma}_0 \\ Pe\phi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} \bar{w} d\Omega + \psi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} \bar{w} d\Omega = \\ \frac{1}{Le} \left(\int_{\Omega} (\phi_0 (\nabla.H)(\nabla.\bar{w}) - \theta_0 (\nabla.G)(\nabla.\bar{w})) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma} \left(\phi_0 \frac{\partial H}{\partial n} \bar{w} + \phi_0 \frac{\partial G}{\partial n} \bar{w} \right) d\Gamma}_0 \right) \end{array} \right.$$

Nous savons déjà que les fonctions F, G et H ainsi que les fonctions test ou leurs dérivées premières sont nulles sur la frontière. D'où l'élimination de tous les termes sur $\Gamma = \partial\Omega$. Réarrangeons les termes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\psi_0 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr.Da} (\nabla \cdot F)(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla^2 \cdot F(\nabla^2 \cdot \bar{u} + Re \cdot \bar{u}) \right) d\Omega = \\
\qquad \qquad \qquad R_T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 G + N\phi_0 H) \bar{u} d\Omega \\
\psi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} \bar{v} d\Omega = \theta_0 \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot G)(\nabla \cdot \bar{v}) - Pe \frac{\partial G}{\partial x} \bar{v} \right) d\Omega \\
\psi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} \bar{w} d\Omega + \frac{\theta_0}{Le} \int_{\Omega} (\nabla \cdot G)(\nabla \cdot \bar{w}) d\Omega = \\
\qquad \qquad \qquad \phi_0 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Le} (\nabla \cdot H)(\nabla \cdot \bar{w}) - Pe \frac{\partial H}{\partial x} \bar{w} \right) d\Omega
\end{array} \right. \quad (2.11)$$

Ces équations sont vraies presque partout sur $\Omega \forall \bar{u}, \bar{v}$ et \bar{w}

On peut trivialement vérifier que ce problème est composé d'égalités entre des formes bilinéaires et linéaires déterminées dans l'ordre respectif des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{\psi}(F, \bar{u}) = L_{\psi}(\bar{u}) \\
L_{\theta}(\bar{v}) = a_{\theta}(G, \bar{v}) \\
L_{\phi}(\bar{w}) = a_{\phi}(H, \bar{w})
\end{array} \right. \quad (2.12)$$

On peut vérifier d'après le théorème de LAX-MILGRAM, le problème (2.11) qui est la formulation faible est équivalent au problème (2.10) (formulation forte) presque partout sur $\Omega = [0, A] \times [0, 1]$ et sa solution existe et est unique. La notion presque partout est due à l'intégration au sens des distributions dans la méthode de GALERKIN. Nous remarquons bien que l'information sur les conditions aux frontières est implicitement véhiculée dans la forme variationnelle, et que l'ordre des dérivées est devenu plus faible (d'où l'appellation formulation faible) c'est-à-dire que nous imposons moins de régularité sur notre solution approchée.

◆ Approximation variationnelle

L'espace fonctionnel $\mathbb{H}^2(\Omega)$ est un HILBERT de dimension infinie séparable. Pour cela on va l'approximer par un espace fonctionnel de dimension finie, construit par des fonctions polynomiales par morceaux sur

chaque Ω_i . Les Ω_i sont choisis suffisamment réguliers pour conserver les propriétés de la solution.

$$\mathbb{H}^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) ; 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

Les solutions locales sur chaque élément sont telles que :

$$\begin{cases} F_i \rightarrow F(x_i, z_i) \text{ lorsque } h_x, h_z \rightarrow 0 \\ G_i \rightarrow G(x_i, z_i) \text{ lorsque } h_x, h_z \rightarrow 0 \\ H_i \rightarrow H(x_i, z_i) \text{ lorsque } h_x, h_z \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Grâce à la géométrie simple de la cavité, l'élément rectangulaire d'HERMITE à haute précision (Figure 2-4) a été choisi¹ comme élément de maillage du domaine Ω . A chaque nœud de cet élément rectangulaire la fonction inconnue, possède quatre degrés de liberté, la fonction elle-même, ses deux dérivées premières et sa dérivée croisée. Les profils des fonctions F, G et H sont quadratiques continus sur chaque élément. Au niveau élémentaire les fonctions F, G et H sont définies par la relation :

$$\begin{Bmatrix} F(x, z) \\ G(x, z) \\ H(x, z) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} F_i & \frac{\partial F_i}{\partial x} & \frac{\partial F_i}{\partial z} & \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial z} \\ G_i & \frac{\partial G_i}{\partial x} & \frac{\partial G_i}{\partial z} & \frac{\partial^2 G_i}{\partial x \partial z} \\ H_i & \frac{\partial H_i}{\partial x} & \frac{\partial H_i}{\partial z} & \frac{\partial^2 H_i}{\partial x \partial z} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{N}_{i+4} \\ \mathcal{N}_{i+8} \\ \mathcal{N}_{i+12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

où $F_i(x, z)$, $G_i(x, z)$ et $H_i(x, z)$ sont les vecteurs des inconnues nodales et \mathcal{N}_i sont les fonctions de forme (ou d'interpolation) d'HERMITE. Les expressions de ces fonctions dans le système de référence sont données par les relations (2.15).

¹ En réalité pour les fonctions G et H qui appartiennent à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ nous n'avons pas besoin de l'élément d'Hermite, donc c'est F qui impose ce choix, et nous l'avons utilisé pour raison d'utilisation d'un même élément pour toutes les variables, et par suite facilité de programmation.

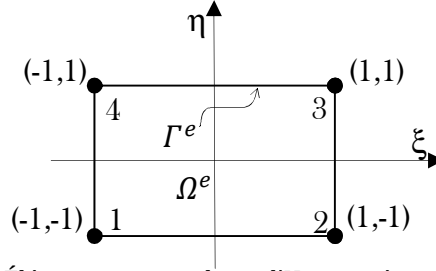


Figure 2-4 : Élément rectangulaire d'Hermite à quatre nœuds

$$\begin{cases} f : \mathcal{N}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 2) (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 2) & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} : \mathcal{N}_{i+4}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} \xi_i (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 1) (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 2) & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} : \mathcal{N}_{i+8}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} \eta_i (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 1) (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 2) & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} : \mathcal{N}_{i+12}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} \eta_i (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 1) \xi_i (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 1) & i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (2.15)$$

où (ξ, η) représentent les coordonnées des nœuds dans le domaine de référence. Sur le niveau élémentaire, les coordonnées physiques sont calculées en fonction des coordonnées de référence (ξ, η) et les fonctions d'interpolation $\mathcal{N}_i(x, z)$ et données par la relation :

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}_e = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \end{Bmatrix}_e \quad (2.16)$$

◆ Discrétisation de la formulation variationnelle

La discrétisation des équations consiste à faire le changement des variables selon le maillage établi lors de l'approximation variationnelle. Les fonctions inconnues seront écrites des manières discrètes :

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_i F_i = \langle \mathcal{N} \rangle \{F\} \\ G = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_i G_i = \langle \mathcal{N} \rangle \{G\} \\ H = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_i H_i = \langle \mathcal{N} \rangle \{H\} \\ \bar{w}, \bar{v}, \bar{u} = \mathcal{N}_i \end{cases} \quad (2.17)$$

En substituant ces expressions dans le système (2.11) nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0\{F\} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr.Da} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - \nabla^2 \cdot \mathcal{N}_i (\nabla^2 \cdot \mathcal{N}_j + Re \mathcal{N}_j) \right) d\Omega = \\ R_T \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j d\Omega (\theta_0\{G\} + N\phi_0\{H\}) \\ \psi_0\{F\} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j d\Omega = \theta_0\{G\} \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega \quad (2.18) \\ \psi_0\{F\} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j d\Omega + \frac{\theta_0\{G\}}{Le} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) d\Omega = \\ \phi_0\{H\} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Le} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega \end{array} \right.$$

Ainsi apparaissent les matrices élémentaires définies par :

$$(K_{\psi_{i,j}})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr.Da} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - \nabla^2 \cdot \mathcal{N}_i (\nabla^2 \cdot \mathcal{N}_j + Re \mathcal{N}_j) \right) d\Omega ;$$

$$(K_{\theta_{i,j}})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega ;$$

$$(K_{\phi_{i,j}})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Le} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega ;$$

$$(K_{i,j})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) d\Omega \quad ; \quad (B_{i,j})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j d\Omega$$

La matrice $[K_{\psi}]$ est relative à la fonction de courant, son premier terme $(\nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j) / (Pr.Da)$ est lié aux pertes de charges dues au milieu poreux, alors que le second terme $\nabla^2 \mathcal{N}_i (\nabla^2 \mathcal{N}_j + Re \mathcal{N}_j)$ est le quantificateur de l'effet des efforts visqueux. De même, les matrices $[K_{\theta}]$ et $[K_{\phi}]$ sont respectivement relatives à la température et à la concentration, leur premier terme $(\nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j)$ est la source due au Laplacien de chacune des deux variables, et leur second terme ainsi que la matrice $[B]$ signent le poids de l'advection sur le système. $[K_{\psi}]$, $[K_{\theta}]$, $[K_{\phi}]$, $[K]$ et $[B]$ font partie de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et sont inversibles. Le problème discrétisé est ramené au système matriciel :

$$\begin{cases} \psi_0[K_\psi]\{F\} = R_T[B](\theta_0\{G\} + N\phi_0\{H\}) \\ \psi_0[B]\{F\} = \theta_0[K_\theta]\{G\} \\ \psi_0[B]\{F\} + \theta_0 \frac{1}{Le} [K]\{G\} = \phi_0 \frac{1}{Le} [K_\phi]\{H\} \end{cases} \quad (2.19)$$

La construction des matrices se base essentiellement sur le calcul des intégrales sur les éléments via une méthode numérique d'intégration. On utilisera la méthode de GAUSS à deux dimensions qui consiste à utiliser dans chaque direction ξ et η une intégration unidimensionnelle. Si on utilise une subdivision à n_1 points dans le sens ξ et n_2 points dans la direction η , la méthode de GAUSS intègre le produit d'un polynôme en ξ de degré $(2n_1 - 1)$ et d'un polynôme en η de degré $(2n_2 - 1)$. Les termes des matrices élémentaires seront donc évalués par l'expression :

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} \mathcal{W}_i \mathcal{W}_j f(\xi_i, \eta_i)$$

où \mathcal{W}_i et \mathcal{W}_j sont les coefficients de poids d'intégration de GAUSS, (ξ_i, η_i) sont les coordonnées des points de GAUSS et N_G est le nombre de point de GAUSS (pour le présent cas $N_G = 4$).

$1 \leq i \leq N_G$	1	2	3	4
(ξ_i, η_i)	$-\frac{\sqrt{3+2 \times \sqrt{6/5}}}{7}$	$-\frac{\sqrt{3-2 \times \sqrt{6/5}}}{7}$	$\frac{\sqrt{3-2 \times \sqrt{6/5}}}{7}$	$\frac{\sqrt{3+2 \times \sqrt{6/5}}}{7}$
\mathcal{W}_i	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \times \sqrt{6/5}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6 \times \sqrt{6/5}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6 \times \sqrt{6/5}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \times \sqrt{6/5}}$

Tableau 2-2 : Point de GAUSS et poids de GAUSS (DHATT et TOUZOT 1981)

◆ Matrices d'assemblage

Les matrices globales contiennent toutes les informations dispersées dans les matrices élémentaires et sont construites de la manière qui suit. Pour chaque F_i dans la maille élémentaire, on porte le coefficient de

l'intégrale $(K_{\psi_{i,j}})_e$ en ligne I colonne J (déterminés selon la numérotation des nœuds du maillage) de la matrice $[K]$ en l'ajoutant à ce qui y existe déjà, et on porte en ligne i de $[B]$ le résultat des intégrales du second membre toujours en l'ajoutant à ce qui s'y trouve déjà. Ainsi sera construit le système de CRAMER à résoudre.

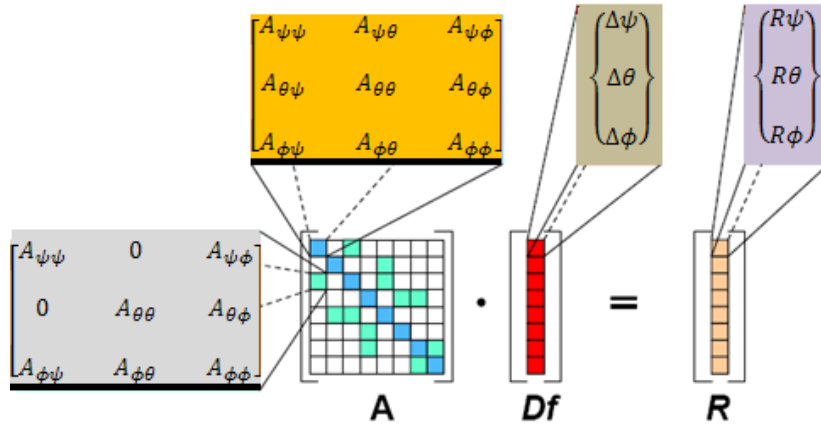


Figure 2-5 : Construction de la matrice d'assemblage

Les matrices assemblées sont énormes en taille. Si on établit une subdivision à N_x point selon la direction x et une subdivision à N_z points selon z , fixant à N_G le nombre de nœuds de l'élément d'HERMITE, le rang de ces matrices sera :

$$\text{rang}[K_\psi] = (N_x + 1)(N_z + 1) \times N_G \tag{2.20}$$

Par exemple : $N_x = N_z = 20 \Rightarrow [K_\psi], [K_\theta], [K_\phi], [K], [B] \in \mathcal{M}_{1764}(\mathbb{R})$

Pour l'amélioration informatique de la résolution, on a utilisé l'algorithme de GIBBS, qui consiste à numéroté les nœuds de la manière à réduire au maximum les différences entre les nœuds voisins. Par conséquent les termes non nuls de la matrice globale seront regroupés autour de la diagonale ce qui améliore sensiblement le temps des opérations algébriques effectuées sur la bibliothèque IMSL.

◆ Introduction des conditions aux frontières

Dans la méthode des éléments finis, les conditions aux limites naturelles sont implicites dans les intégrales de la formulation variationnelle. Antérieurement, nous avons démontré que toutes les intégrales de bord sont nulles. Néanmoins il existe un traitement spécial afin d'éviter les formes singulières des matrices de rigidité, et ce sans altérer leurs dimensions. En effet pour exprimer des parois rigides dans une matrice d'assemblage, sachant que la perturbation de la fonction de courant et sa dérivée sont

nulles, on force la valeur des termes de la matrice à zéro sur les nœuds de frontières reconnus par leurs numéros dans le maillage principal et par suite par leurs positions dans la matrice. Dans cette opération on excepte les éléments diagonaux qu'on force à un. En expressions indicielles :

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_i = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_i = 0 \quad (K_\psi)_{i,j} = (K_\psi)_{j,i} = \delta_{ij}$$

L'indice i désignant les nœuds appartenant à Γ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de KRONECKER. Cependant, dans le second membre on force à zéro tous les éléments de la ligne i de la matrice.

◆ Détermination du RAYLEIGH supercritique

L'astuce dans cette manœuvre est de ramener le système matriciel fortement couplé vers un problème de recherche de valeurs propres. Pour cela une suite d'opérations est nécessaire, et au bout de laquelle nous retrouvons une famille de nombres de RAYLEIGH ayant plusieurs significations. On s'intéressera à la valeur minimale de ces nombres obtenus car c'est celle qui correspond au seuil inférieur d'instabilité. Partant des équations (2.19) on peut écrire :

$$\begin{cases} \psi_0[B]\{F\} = \theta_0[K_\theta]\{G\} \\ \psi_0[B]\{F\} + \theta_0 \frac{1}{Le} [K]\{G\} = \phi_0 \frac{1}{Le} [K_\phi]\{H\} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \theta_0\{G\} = \psi_0[K_\theta]^{-1}[B]\{F\} \\ \phi_0\{H\} = Le\psi_0[K_\phi]^{-1}[B]\{F\} + \theta_0[K_\phi]^{-1}[K]\{G\} \end{cases}$$

$$\psi_0[K_\psi]\{F\} = R_T[B](\theta_0\{G\} + N\phi_0\{H\})$$

$$\Rightarrow \psi_0[K_\psi]\{F\} = R_T[B] \left(\psi_0[K_\theta]^{-1}[B]\{F\} + N \left(Le\psi_0[K_\phi]^{-1}[B]\{F\} + \theta_0[K_\phi]^{-1}[K]\{G\} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \psi_0[K_\psi]\{F\} = \psi_0 R_T[B] \left([K_\theta]^{-1}[B]\{F\} + NLe[K_\phi]^{-1}[B]\{F\} + [K_\phi]^{-1}[K][K_\theta]^{-1}[B]\{F\} \right)$$

$$\Rightarrow \left([K_\psi]^{-1}[B] \left([K_\theta]^{-1}[B] + N \left(Le[K_\phi]^{-1}[B] + [K_\phi]^{-1}[K][K_\theta]^{-1}[B] \right) \right) - \frac{1}{R_T} I_d \right) \{F\} = 0$$

où I_d est la matrice identité. Posons :

$$[E] = [K_\psi]^{-1}[B] \left([K_\theta]^{-1}[B] + N \left(Le[K_\phi]^{-1}[B] + [K_\phi]^{-1}[K][K_\theta]^{-1}[B] \right) \right)$$

L'écriture symbolique du résultat sera :

$$\left([E] - \frac{1}{R_T} I_d \right) \{F\} = 0 \quad (2.21)$$

Le problème est transformé en une réduction sous forme canonique d'un endomorphisme E :

$$\begin{cases} E : \Omega = [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \Omega = [0, A] \times [0, 1] \\ \text{la matrice caractéristique de } E \text{ est : } [E] \end{cases}$$

Du point de vue mathématique l'équation (2.21) admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant $|[E] - \lambda I_d|$ est nul. Ceci nous conduit à chercher toutes les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres $\{F\}_i$ vérifiant l'équation (2.21). Ces derniers sont déterminés en utilisant les procédures DE2CRG et EVEC de la librairie IMSL. Une fois que les vecteurs propres $\{F\}_i$ sont déterminés, les profils des fonctions $G(x, y)$ et $H(x, y)$ sont déduits des relations (2.21) sous la forme :

$$\begin{cases} \{G\} = \frac{\psi_0}{\theta_0} [K_\theta]^{-1}[B]\{F\} \\ \{H\} = Le \frac{\psi_0}{\phi_0} [K_\phi]^{-1}[B]\{F\} + \frac{\theta_0}{\phi_0} [K_\phi]^{-1}[K]\{G\} \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons que les valeurs propres obéissent à l'égalité (2.23). Nous pouvons également ordonner ces valeurs propres suivant (2.24).

$$\lambda = 1/R_T \quad (2.23)$$

$$|\lambda_j| \leq |\lambda_p| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots \leq |\lambda_m| \quad 1 \leq j, p, k, m \dots \leq n \quad (2.24)$$

où λ_m est le rayon spectral de l'endomorphisme E . Il est à souligner qu'une ou plusieurs valeurs propres peuvent être multiples, ces qui engendre

plusieurs vecteurs propres pour la même valeur. De toute manière, vu que les nombres de RAYLEIGH sont inversement proportionnels aux valeurs propres, la plus petite valeur qui génère la perte de stabilité de l'écoulement sera obtenue à partir du rayon spectral de la matrice $[E]$. Physiquement, dans le cas où le rayon spectral est une valeur multiple, il s'agit alors d'une bifurcation vers plusieurs solutions convectives possibles.

Pour voir l'aspect de l'écoulement à différents modes propres, il suffit de représenter les champs découlant des vecteurs propres autres que celui correspondant à λ_m .

2.4.3 Stabilité transitoire : $p \neq 0$

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour calculer la valeur de la fonction $R_T^{sup}(Pe, Pr, Le, N, Da)$ correspondant au seuil de la convection supercritique ainsi que les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration. La stabilité marginale fait que tous les termes transitoires s'annulent, et ainsi on ne peut pas observer l'évolution des perturbations dans le temps. L'hypothèse $p \neq 0$ fait que le système matriciel découlant de l'approximation variationnelle devient :

$$\begin{pmatrix} [K_\psi] & R_T[B] & NR_T[B] \\ [B] & -[K_\theta] & 0 \\ [B] & \frac{1}{Le}[K_\theta] & \frac{-1}{Le}[K_\phi] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{F\} \\ \{G\} \\ \{H\} \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & \sigma[M] & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon[M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{F\} \\ \{G\} \\ \{H\} \end{pmatrix}$$

Dans la formulation variationnelle, les fonctions $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ et $\bar{w}(x, y)$ admissibles comme fonctions test sont arbitraires et non connues de manière explicite (d'où le concept de virtualité). Elles doivent vérifier les mêmes régularité et conditions aux limites que la solution. Dans ce cas rien n'interdira de prendre les solutions $F(x, y)$, $G(x, y)$ et $H(x, y)$ comme fonctions admissibles. Ainsi la forme intégrale faible des équations de perturbations (2.7) se réduit au système matriciel ci dessous aux équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \psi_0 p \mathcal{M} + \psi_0 \mathcal{K}_\psi = R_T \mathcal{B} (\theta_0 + N \phi_0) \\ \sigma \theta_0 p \mathcal{M} + \psi_0 \mathcal{B} = \theta_0 \mathcal{K}_\theta \\ \varepsilon \theta_0 p \mathcal{M} + \psi_0 \mathcal{B} = (1/Le) (\phi_0 \mathcal{K}_\phi - \theta_0 \mathcal{K}_\theta) \end{cases} \quad (2.25)$$

où \mathcal{M} , \mathcal{B} , \mathcal{K}_ψ , \mathcal{K}_θ et \mathcal{K}_ϕ sont des constantes définies par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \int_{\Omega} F^2 d\Omega = \int_{\Omega} G^2 d\Omega = \int_{\Omega} H^2 d\Omega \\
\mathcal{B} &= \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} F d\Omega & \mathcal{K}_{\phi} = \mathcal{K}_{\theta} &= \int_{\Omega} \nabla G \nabla H d\Omega \\
\mathcal{K}_{\psi} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr.Da} (\nabla F)^2 - ((\nabla^2 F)^2 + (\nabla^2 F) \cdot F) \right) d\Omega \\
&\quad \left(\frac{1}{Pr.Da} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - \nabla^2 \mathcal{N}_i (\nabla^2 \mathcal{N}_j + Re \mathcal{N}_j) \right) \\
\mathcal{K} &= \int_{\Omega} (\nabla G)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla H)^2 d\Omega
\end{aligned}$$

Les intégrales ci-dessus sont discrétisées avec la méthode des éléments finis et calculées avec la méthode d'intégration de GAUSS. Les constantes $\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{K}_{\phi}, \mathcal{K}_{\theta}$ et \mathcal{K}_{ψ} pourront être déduites des matrices élémentaires décrites précédemment. Il vient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{M} = \sum_{k=1}^{N^e} \left(\sum_{k=1}^{N^e} \sum_{k=1}^{N^e} (M)_{i,j}^e F_j^e F_i^e \right) \\
\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{N^e} \left(\sum_{k=1}^{N^e} \sum_{k=1}^{N^e} (B)_{i,j}^e G_j^e F_i^e \right) \\
\mathcal{K}_{\psi} = \sum_{k=1}^{N^e} \left(\sum_{k=1}^{N^e} \sum_{k=1}^{N^e} (\mathcal{K}_{\psi})_{i,j}^e F_j^e F_i^e \right) \\
\mathcal{K}_{\theta} = \mathcal{K}_{\phi} = \mathcal{K} = \sum_{k=1}^{N^e} \left(\sum_{k=1}^{N^e} \sum_{k=1}^{N^e} (\mathcal{K})_{i,j}^e F_j^e F_i^e \right)
\end{array} \right.$$

En combinant par substitution les équations (2.25), et après plusieurs manipulations mathématiques on aboutit à une équation polynomiale du second ordre en fonction de taux de croissance de la perturbation p .

$$p^2 - (2p_0 p_1) p - (p_0^2 p_2) = 0 \quad (2.26)$$

Les coefficients de l'équation sont définis par :

$$\begin{cases} p_0 = \frac{\mathcal{K}}{2\mathcal{M}\varepsilon Le\mathcal{R}^0} \\ p_1 = R_T(NLe + \varepsilon Le) - \mathcal{R}^0(1 + \varepsilon Le) \\ p_2 = 4\mathcal{R}^0 Le [R_T(1 + N(1 + Le)) - \mathcal{R}^0] \end{cases} \quad (2.27)$$

La résolution de l'équation (2.26) et la détermination des valeurs critiques de transitions entre différents modes seront entreprises dans le § 3.2.2.

2.5 Validation du code numérique

A présent il n'existe pas de travaux publiés dans la littérature traitant le cas HORTON ROGERS LAPWOOD SORET avec une vitesse à l'entrée imposée dans un domaine poreux. Cette configuration est le but de notre étude. Pour cela la stratégie que nous adopteront pour vérifier le bon fonctionnement du programme est la validation pour chaque effet séparé, puis on traitera les effets combinés. En principe si les résultats sont vrais pour les effets séparés ils le seront pour les effets croisés.

1. Valider en pur fluide, en milieu de DARCY-BRINKMAN et en milieu de DARCY pour le cas de la convection naturelle de RAYLEIGH BENARD.
2. Valider en pur fluide dans le cas de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD.
3. Valider en pur fluide dans le cas de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD SORET.

2.5.1 Convection naturelle thermosolutale en milieu de DARCY-BRINKMAN

Nous dressons le tableau suivant afin de comparer nos résultats (aux résultats de REES (2002) et aux valeurs théoriques connues. Dans le cas de la convection naturelle purement thermique ($N = 0$).

Da	100	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}
R_T (présent travail)	1707.76	40.5838	40.17604	39.4792	39.478495
R_T [Rees, (2002)]		40.38100	39.73927	39.55812	
<i>Théorique</i>	1707.76				39.4784

Tableau 2-3 : Nombres de Rayleigh critiques issus de la stabilité linéaire numérique, comparées aux valeurs issues d'une analyse asymptotique [REES (2002)] et aux valeurs théoriques ($N = 0$).

En thermosolutal sous influence Soret nous démontrons à partir des équations matricielles une formule permettant de calculer le RAYLEIGH critique (cf. 4.2). Cette formule a été trouvée dans certains cas particuliers d'études de convection sous effet Soret (MAMOU (1998)), et démontrée analytiquement par BOURICH (2004) en étude d'écoulement parallèle (condition de flux sur les parois). On rappelle que notre étude se fait en condition de température imposée sur les parois.

2.5.2 Écoulement de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD

Le calcul établi dans cette section est paramétré par un nombre de Pr et un Re . Nous allons essayer de diversifier les supports de littérature sur lesquelles se basera notre comparaison. Le nombre d'onde et la longueur d'onde sont reliés par $k_c = 2\pi/L_\lambda$. L'analyse du tableau comparatif montre une concordance avec la littérature.

Méthode		Présent travail			NICOLAS et al.		LUIJKX		MÜLLER et al.	
		Stab. par E.F.			Sim. Num. 2D		Stab. Lin. théorique		Sim. Num. 2D	
Re	Pr	Ra_c	k_c	λ	Ra_c	λ	Ra_c	k_c	Ra_c	λ
0		1707.95	3.114				1707.76	3.116		
0.14	7	1730.39	3.012				1729.614	3.017		
0.28	7	1802.38	3.09				1793.625	3.081		
1	6.4	3462.18		1.78	3460	1.77				
2	1	1900.97		1.98					1900	1.98

Tableau 2-4 : Nombres de RAYLEIGH critiques¹ ; correspondant à la transition vers les rouleaux transversaux à $N = 0$

¹ Dans chaque calcul on s'aligne avec l'adimensionnement et les conditions d'obtention des valeurs critiques.

*« Tout est pour le mieux dans le meilleur des modes possibles »
Leibniz (1646-1716)*

Chapitre 3

Analyse de stabilité linéaire

Dans notre problème déjà paramétré au précédent chapitre nous allons essayer de comprendre l'influence de différents paramètres physiques en regardant comment ils modifient le seuil du point de bifurcation et le comportement non linéaire après la transition. Ces résultats permettent de mieux exploiter les codes de simulation directe et de guider l'expérimentateur. Tirer profit du code numérique de la stabilité afin de caractériser les seuils de la perte de stabilité pour la convection naturelle et mixte sous l'influence de l'effet SORÉT, est l'un des principaux buts de cette partie. Pour cette fin, nous commençons l'analyse par notre problème de référence ; la convection naturelle thermique, domaine déjà largement étudié dans la littérature. Puis nous complexifions le problème soit en ajoutant l'effet solutal seul, ou en imposant un écoulement forcé traversant le canal, et à la fin en combinant les deux. Un développement théorique de l'expression du RAYLEIGH critique (dans le cas de la convection mixte sans SORÉT) sera présenté. Son but est d'explicitier l'expression sous forme d'une perturbation induite sur la valeur du RAYLEIGH critique de notre problème de référence. D'après la théorie linéaire de la stabilité thermique, le motif des cellules et la direction de l'écoulement sont en principe déterminés de façon unique par les conditions initiales. Cependant, en pratique, les observations d'instabilité sont faites à des Ra légèrement supérieurs à Ra_c , et le motif des cellules et

la direction de l'écoulement sont alors largement indépendants des conditions initiales inconnues. Enfin, le fait que l'écoulement soit stationnaire et à direction privilégiée montre que la non-linéarité intervient de façon non négligeable.

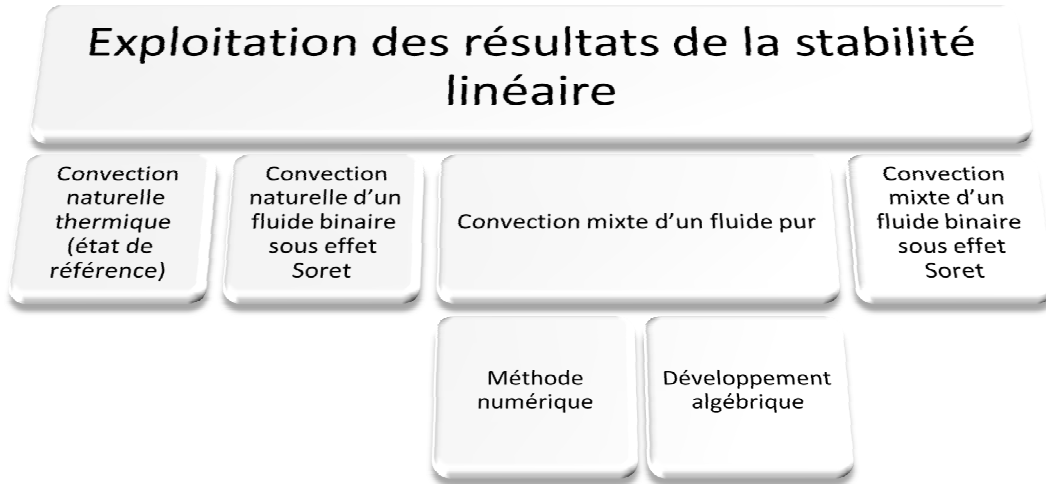


Figure 3-1 : Plan du chapitre : Démarche de présentation des résultats

3.1 Convection naturelle thermique

Ce cas est caractérisé par l'absence d'écoulement moyen le long du canal et d'effet solutal, d'où l'annulation des paramètres de contrôle Re et N . Or, nous avons démontré au § 2.4.2 que l'étude de stabilité se ramène à la réduction sous forme diagonale de l'application linéaire :

$E : \Omega = [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \Omega = [0, A] \times [0, 1]$ définie par sa matrice $[E]$:

$$[E] = [K_\psi]^{-1} [B] \left([K_\theta]^{-1} [B] + N \left(Le [K_\phi]^{-1} [B] + [K_\phi]^{-1} [K] [K_\theta]^{-1} [B] \right) \right)$$

La matrice de la température se réduit à

$$\begin{aligned} (K_{\theta_{i,j}})^e_{1 \leq i, j \leq 4} &= \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - \underbrace{Pe}_{=0} \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) d\Omega = (K_{i,j})^e_{1 \leq i, j \leq 4} \end{aligned}$$

Et par suite la matrice d'assemblage devient : $[E^0] = [K_\psi]^{-1}[B][K]^{-1}[B]$. Le nombre de RAYLEIGH R_T^{Cr} est donné relativement au rayon spectral de $[E^0]$.

$$R_T^{Cr} = \frac{1}{|\lambda_m|} \quad (3.1)$$

Le nombre R_T^{Cr} dépend seulement de l'allongement de la cavité, et converge asymptotiquement à une constante \mathcal{R}^0 selon le nombre de DARCY. Une série de valeurs \mathcal{R}^0 est fournie dans le tableau 3.1. La précision de la valeur prévue par le présent procédé numérique dépend de la densité de grille ($N_{ex} \times N_{ey}$). Des essais numériques utilisant divers maillages ont été menés sous les mêmes conditions afin de déterminer le meilleur compromis entre l'exactitude des résultats et la durée de calcul. Des résultats typiques sont donnés dans le tableau 3.2, comparé à la valeur exacte prévue analytiquement par NIELD (1967) pour un milieu de DARCY où $\mathcal{R}^0(Da \leq 10^{-8}) = 4\pi^2 \cong 39.4784176$, et prévue par beaucoup d'auteurs par analyse temporelle de stabilité dans le cas fluide. Le développement au chapitre 2 a été fait pour des conditions de glissement aux parois cas libre-libre ou L-L) où $\mathcal{R}_{glissement}^0(Da = \infty) = 27\pi^4/4$. Néanmoins, il est possible de « capturer » la valeur critique pour un système à parois rigides (R-R) dans le cas particulier $Pe = 0$; où $\mathcal{R}^0(Da = \infty) = 1707.76$.

Da	10^2	10^0	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	
\mathcal{R}^0	1707.76	102	1752.37	60.455	40.583	39.47842

Table 3-1: Valeurs de la constante \mathcal{R}^0 en fonction de Da

Les valeurs fournies ci-dessus ont été comparées aux résultats asymptotiques de l'étude présentée par REES (2002). Une excellente concordance a été révélée. Nous présentons à la Figure 3.2 la variation par rapport à Da des valeurs R_T critiques, en cellule très allongée ($A \gg 1$). En s'approchant à la limite de DARCY $Da \rightarrow 0$ il est facilement vu que $R_T \rightarrow 4\pi^2$. L'approche à la limite de BENARD est plus facilement visible si nous considérons le nombre de RAYLEIGH fluide Ra variant selon $Da \rightarrow \infty$; ceci est également montré sur la même figure et semble être en très bon accord avec les figures respectives présentées dans REES (2002) et WALKER et HOMS (1976).

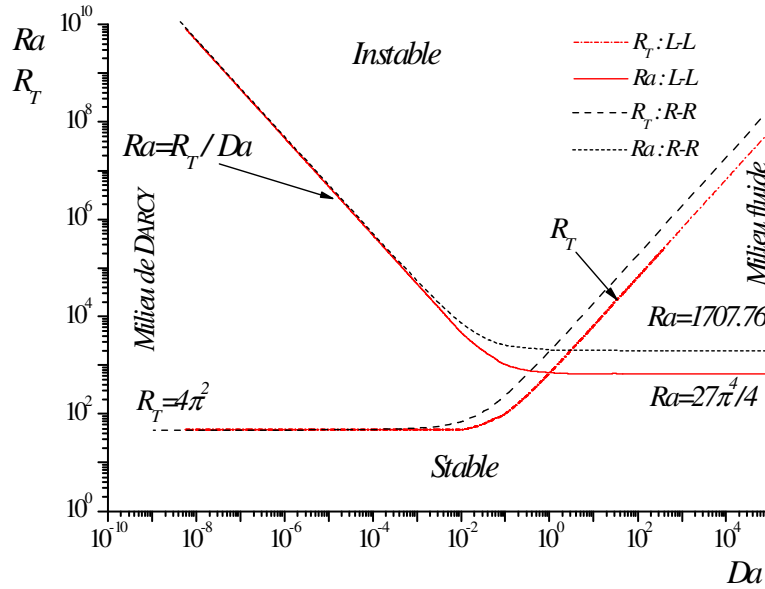


Figure 3-2: Courbes neutres de la naissance de convection dans un canal long. Les mêmes valeurs sont représentées en nombres de DARCY-RAYLEIGH R_T et en fonction du Rayleigh thermique Ra

$N_{ex} \times N_{ey}$	4×4	8×8	16×16
\mathcal{R}^0	39.4788	39.478434	39.478425
Erreur	1.212×10^{-5}	4.23×10^{-7}	2.012×10^{-7}

Table 3-2: Effet de la finesse du maillage sur la valeur calculée de \mathcal{R}^0 pour $A_x = 1$. Erreurs données par rapport aux valeurs exactes.

Selon les résultats ci-dessus, une densité de maille de 10×10 a été adoptée dans cette étude pour tous les cas traitant un rapport d'aspect de l'ordre de l'unité. Cependant, pour de longues cellules $A \geq 12$, un maillage de précision 10×38 a été retenu. Des valeurs intermédiaires sont employées pour les canaux dont la longueur vérifie $1 < A < 12$. Ainsi, en variant l'allongement et le maillage, nous fournissons la courbe neutre marquant le début de la convection naturelle dans la cellule rectangulaire.

◆ **Cas rigide-rigide et cas du milieu de DARCY**

La symétrie observée pour des cellules dont $A < 1$ se brise lorsqu'on a à étudier des couches horizontales. Ceci est dû au fait que quand $A < 1$

l'unique mode possible est un écoulement monocellulaire (voir lignes de courant $A = 0.25$). En augmentant A de l'unité à exactement $A = \sqrt{2}$, un mode unicellulaire est encore installé et le DARCY-RAYLEIGH normalisé atteint un maxima local $R(A = \sqrt{2}) = 1.125$ signifiant que, par exemple dans le cas d'un milieu de Darcy :

$$R_T(A = \sqrt{2}) = R(A = \sqrt{2}) \times \mathcal{R}^0 = 9\pi^2/2 \quad (3.2)$$

Après ($A = \sqrt{2}$) deux cellules s'installent et le R diminue atteignant l'unité pour les valeurs entières, et en général, le passage de n à $n + 1$ rouleaux se fait aux rapports données par $A_n = \sqrt{n(n + 1)}$ marquant un pic de stabilité égal à :

$$R = \frac{R_{Tc}}{\mathcal{R}^0} = \frac{(A_n^2 + n^2)^2}{4A_n^2 n^2} \quad (3.3)$$

Ces pics s'expliquent par le phénomène de confinement de la longueur d'onde des rouleaux transversaux qui fait que ce mode est plus dissipateur d'énergie mécanique et moins « transportant » du gradient de température. Mais, pour les cellules dont les allongements ne sont pas entiers, n'y a-t-il pas de convection au delà de $R = 1$? La réponse sera apportée au § 5.1.1 où on parlera de la convection 3D.

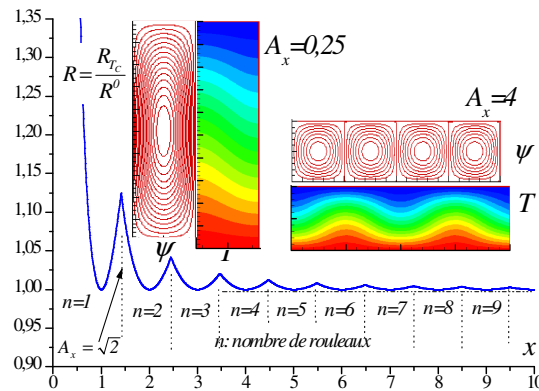


Figure 3-3: Influence du rapport de forme sur le DARCY-RAYLEIGH normalisé à la naissance de la convection. $Da = 10^{-8}$

En interpolant cette courbe obtenue numériquement, on trouve qu'elle correspond exactement à la fonction $Y(A)$ continue par morceaux sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$Y(A) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2A} + \frac{A}{2}\right)^2, & 0 < A < 1 \\ \inf \left[\left(\frac{E(A)}{2A} + \frac{A}{2E(A)}\right)^2, \left(\frac{E(A+1)}{2A} + \frac{A}{2E(A+1)}\right)^2 \right], & A \geq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R_T^C = \mathcal{R}^0 \cdot Y(A) \quad (3.5)$$

Finalement la formule (3.4) explicite la variation de la ligne neutre R en fonction de l'allongement.

◆ **Cas libre-libre**

Les mêmes observations seront faites pour ce cas, sauf que les longueurs d'ondes et les valeurs du RAYLEIGH critique changent par rapport au cas fluide rigide-rigide. En fait, la valeur de bifurcation est réduite à $Ra_c = 27\pi^4/4 = 657.11$. Le premier pic est atteint pour $A = 2$, puis les transitions de n à $n + 1$ rouleaux s'effectuent à chaque fois que A varie d'une quantité égale à $\sqrt{2}$. La figure 3-4 illustre ce comportement et présente la fonction (3.6) définie par morceaux sur $]0, +\infty[$ où n est le nombre de rouleaux.

$$Y(A) = \left(\frac{n}{A\sqrt{2}} + \frac{A}{2n\sqrt{2}}\right)^3 \quad (3.6)$$

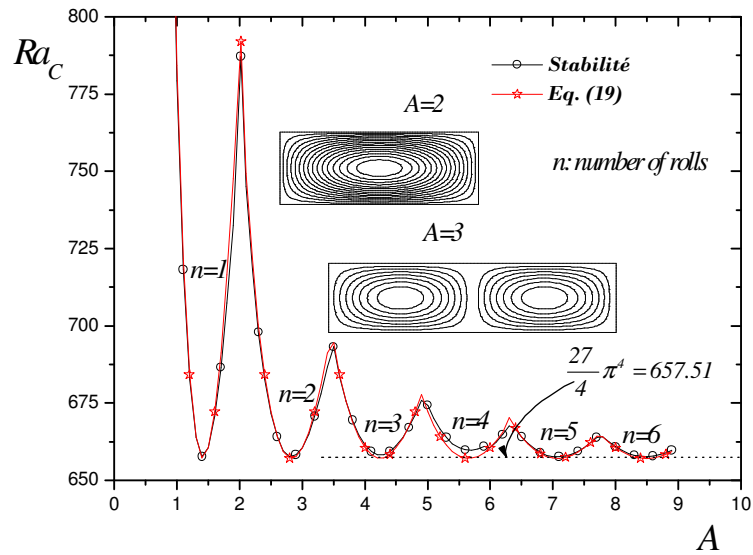


Figure 3-4: Influence du rapport de forme sur le RAYLEIGH à la naissance de la convection. $Da = +\infty$

3.2 Convection naturelle en fluide binaire sous effet Soret

La prise en compte de l'effet solutal se traduira par un rapport de forces volumiques de flottabilité non nul $N \neq 0$. L'hypothèse convection naturelle conservera la condition $Re = Pe = 0$. Ainsi on se servira toujours de la matrice globale générale $[E]$ définissant l'opérateur linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} E : \Omega = [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \Omega = [0, A] \times [0, 1] \\ [E] = [K_\psi]^{-1} [B] \left([K_\theta]^{-1} [B] + N \left(Le [K_\phi]^{-1} [B] + [K_\phi]^{-1} [K] [K_\theta]^{-1} [B] \right) \right) \end{array} \right.$$

Sous ces conditions, les matrices élémentaires de température et de concentration se réduisent à :

$$\begin{aligned} (K_{\theta_{i,j}})^e_{1 \leq i, j \leq 4} &= \int_{\Omega} \left(\nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j d\Omega \\ &= (K_{i,j})^e_{1 \leq i, j \leq 4} \\ (K_{\phi_{i,j}})^e_{1 \leq i, j \leq 4} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Le} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega = \frac{1}{Le} \int_{\Omega} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j d\Omega \\ &= \frac{1}{Le} (K_{i,j})^e_{1 \leq i, j \leq 4} \end{aligned}$$

En introduisant ces deux égalités dans l'expression de $[E]$ il résulte :

$$\begin{aligned} [E] &= (1 + N(1 + Le)) [K_\psi]^{-1} [B] [K]^{-1} [B] \\ [E] &= (1 + N(1 + Le)) [E^0] \end{aligned} \quad (3.7)$$

D'où la forme canonique :

$$(1 + N(1 + Le)) [E^0] - \frac{1}{R_T} I_d = 0 \quad (3.8)$$

Nous rappelons que l'opérateur I_d est l'application identité et $[E^0]$ est la matrice de la convection naturelle. Finalement on peut réduire le RAYLEIGH critique à sa plus simple expression :

$$R_T^{sup} = \frac{R^0 \Upsilon(A)}{1 + N(1 + Le)} \quad (3.9)$$

où R_T^{Sup} est la valeur supercritique du nombre de RAYLEIGH-DARCY et qui signifie la valeur minimale de R_T à partir de laquelle la convection naturelle va naître sous l'effet d'un accroissement du chauffage. La valeur \mathcal{R}^0 est une constante qui dépend du nombre de DARCY et du rapport de forme de la cavité. Selon le signe de R_T^{Sup} on peut déterminer si le chauffage se fait par le bas ou par le haut. Un RAYLEIGH négatif équivaut un chauffage par le haut, alors qu'un RAYLEIGH positif indique une configuration déstabilisante. On peut démontrer les cas suivants :

Cavité chauffée par le bas	$\begin{array}{l} R_T^{Sup} \rightarrow +\infty \\ 0 < R_T^{Sup} < +\infty \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Si } N(1 + Le) < -1 \\ \text{Si } N(1 + Le) > -1 \end{array}$
Cavité chauffée par le haut	$\begin{array}{l} -\infty < R_T^{Sup} < 0 \\ R_T^{Sup} \rightarrow -\infty \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Si } N(1 + Le) < -1 \\ \text{Si } N(1 + Le) > -1 \end{array}$

3.2.1 Étude paramétrique de la stabilité marginale supercritique

La convection naturelle en fluide binaire sous l'influence de l'effet SORÉT dépend trivialement du mélange caractérisé par le nombre de Le , et du taux de séparation N , qui sont les paramètres essentiels déterminant le seuil de stabilité. En plus si on remplit l'espace par un milieu poreux le nombre de DARCY sera lui aussi déterminant pour ce seuil.

Dans la relation (3.9), on remarque bien que le dénominateur peut être composé en termes à significations physiques différentes, à savoir :

1. Si $N=0$, alors $R_T^{Sup} = R^0 \Upsilon(A)/1$, donc ce 1 du dénominateur correspond à la pondération de la force d'origine thermique dans le bilan total des forces d'ARCHIMEDE.
2. Le terme $N(1 + Le)$ correspondra nécessairement à la pondération de la force d'origine solutale dans le bilan total des forces de volume. Cette quantité signifie la somme pondérée de :
 - a. La force d'origine double diffusive quantifiée par $N \times Le$.
 - b. La force issue de l'effet SORÉT et quantifiée par : $N = Ra_S/Ra$.

Connaissant ces interprétations, il est clair que l'effet SORÉT est d'autant plus faible que Le est grand. Par contre, il est fortement présent lorsque Le se réduit à des valeurs voisines de 0^+ . Ce dénominateur qui ne doit pas s'annuler de point de vue mathématique afin de préserver l'existence de la fonction, pourra-t-il correspondre en s'annulant à une réalité physique ? Le cas échéant R_T^{Sup} sera égal à l'infini, condition

suffisante pour affirmer qu'au delà de ce point précis il n'y aura jamais d'état supercritique. On passera de l'état stable vers d'autres états qui seront définis par la suite dans le modèle de la stabilité transitoire. Cette condition sera traduite par :

$$1 + N(1 + Le) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} N = \frac{-1}{1 + Le} \\ Le = -\frac{N + 1}{N} \end{cases} \quad (3.10)$$

Du fait que Le est toujours positif, cette valeur de N sera, par sa définition, nécessairement comprise entre 0 et -1 . Ce qui fait que pour des mélanges dont le taux de séparation est négatif et supérieur à -1 , i.e. où les forces thermique et solutale en compétition sont comparables en ordre de grandeur de la valeur absolue. Dans ce cas, la convection stationnaire n'est pas possible. Un échange local et continu de la dominance de la force thermique et solutale s'effectue. Ainsi le système oscille indéfiniment entre ces deux situations compétitives.

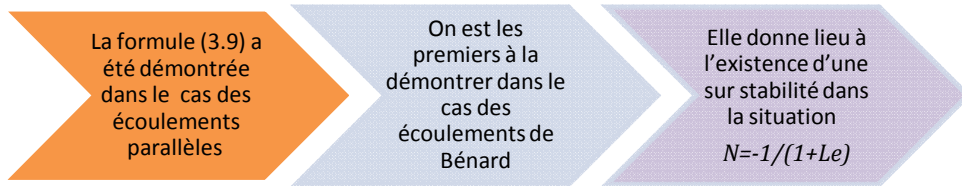


Figure 3-5: Apport des résultats obtenus et perspectives.

3.2.2 Étude paramétrique de la stabilité transitoire

On rappelle que le taux d'accroissement de la perturbation suit une loi polynomiale du second ordre $p^2 - (2p_0p_1)p - (p_0^2p_2) = 0$ (cf. équ. 2.26) où :

$$\begin{cases} p_0 = \frac{\mathcal{K}}{2\mathcal{M}\varepsilon Le \mathcal{R}^0} \\ p_1 = R_T(NLe + \varepsilon Le) - \mathcal{R}^0(1 + \varepsilon Le) \\ p_2 = 4\mathcal{R}^0\varepsilon Le [R_T(1 + N(1 + Le)) - \mathcal{R}^0] \end{cases}$$

L'équation (2.26) admet une solution dans le corps \mathbb{C} algébriquement clos. Par suite le nombre p sera complexe.

p	Mode de convection
Réel positif	Mode oscillatoire direct l'amplitude des oscillations croît d'une manière exponentielle
Réel négatif	Tendance vers l'état de repos
Complexe	Mode oscillatoire
Nul	Convection stationnaire

Tableau 3-3 : Modes de convection en fonction du taux de croissance p de la perturbation.

Dans le cas où $p = 0$ on se ramène à la stabilité marginale. L'expression de du RAYLEIGH supercritique est déduite de $p_2 = 0$. On retrouve l'expression (3.9)

$$R_T^{Sup} = \frac{\mathcal{R}^0}{1 + N(1 + Le)}$$

Le nombre R_T^{Sup} marque la naissance de la convection stationnaire (dite aussi supercritique). La solution convective bifurque à partir de l'état de repos, sous l'effet d'un chauffage croissant, avec une amplitude nulle en $R_T^{Sup} = \mathcal{R}^0$. L'état de surstabilité marginale correspond à la condition $p_1 = 0$. La transition correspondante s'appelle bifurcation de HOPF. Selon SOVRAN et al. (2001) la bifurcation de HOPF ne peut avoir lieu que si $R_T^{Souscr} < R_T < R_T^{osc}$.

$$R_T^{Hopf} = \frac{\mathcal{R}^0(1 + \varepsilon Le)}{Le(N + \varepsilon)} \quad (3.11)$$

Le nombre R_T^{Hopf} caractérise la transition de l'écoulement convectif stationnaire vers un autre oscillant. La solution de l'état de repos devient instable pour des perturbations à amplitudes finies si on part d'un état sous critique et pour des perturbations infinitésimales si on part d'un état supercritique. La borne inférieure de la convection oscillatoire est déduite du cas où le paramètre p peut prendre des valeurs complexes. En d'autres termes il faut que le déterminant $p_1^2 + p_2 < 0$. La valeur du R oscillatoire sera déduite de la condition :

$$p_1^2 + p_2 = 0 \quad (3.12)$$

Les nombres R_T critiques de la convection oscillante en mode direct, ou encore appelé surstable R_T^{Osc} doivent vérifier l'équation polynomiale du second degré découlant de (3.13) :

$$(R_T^{Osc})^2 - 2 \times R_T^{Osc} \times R^{Hopf} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}Le(1 + N(1 + Le))}{(NLe + \mathcal{E}Le)(1 + \mathcal{E}Le)} \right) + (R^{Hopf})^2 \times \left(1 - \frac{4\mathcal{E}Le}{(1 + \mathcal{E}Le)^2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Dans ce qui suivra nous allons énumérer et commenter les résultats obtenus de l'analyse précédente.

3.2.3 Représentation graphique des résultats et interprétations

En convection naturelle thermosolutale, les forces solutales n'ont pour effet que de translater les lignes neutres de naissance du mouvement convectif (stabiliser si $N < 0$ et déstabiliser si $N > 0$), sans avoir à modifier les longueurs d'ondes.

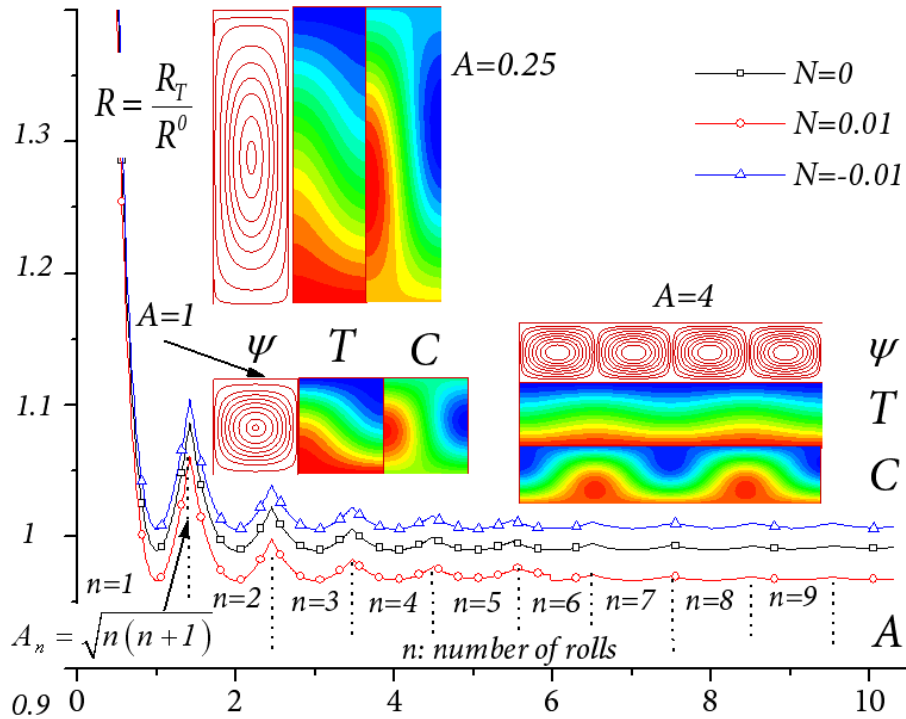


Figure 3-6: Variation en fonction du rapport de forme et du paramètre de flottabilité N du RAYLEIGH critique à $Le = 10$; $Pr = 2$. Les lignes de courant et les iso-surfaces de température et de concentration sont données pour $N=-0.01$

Cet effet est visible sur le graphe 3.6. Le diagramme 3.7 forme une autre représentation du phénomène. Nous y affichons les bifurcations fourches à différentes valeurs de la séparation. La convection naît avec une amplitude nulle quand $N \leq 0$, par contre une amplitude finie existe toujours dans le cas des $N > 0$; chose qui n'interdira pas le passage par une branche instable.

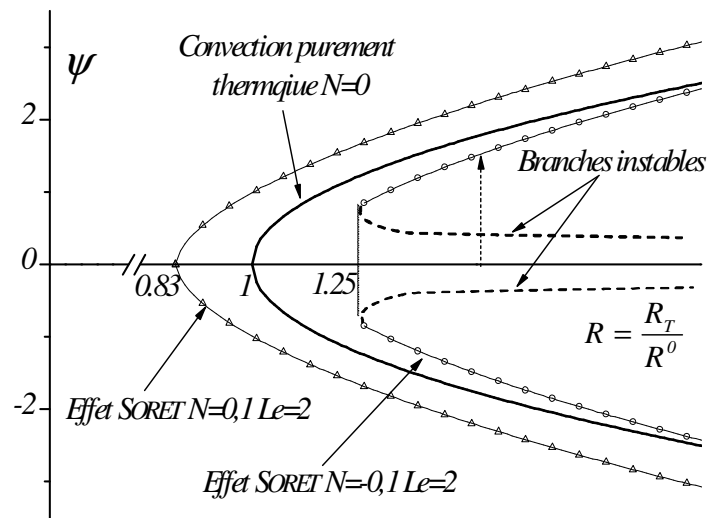


Figure 3-7: Diagramme de bifurcation en convection naturelle avec et sans effet Soret

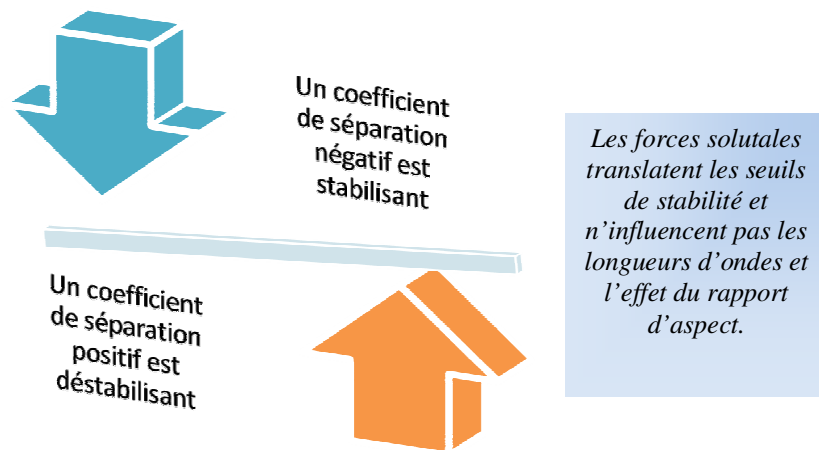


Figure 3-8: Actions des forces solutales sur la stabilité

◆ **Importance du phénomène de SORÉT**

Dans le champ de pesanteur, la convection dans un fluide pur est due aux changements locaux de la densité qui dépend du champ de la température. Néanmoins, dans le cas de mélanges binaires, la densité du milieu continu ne dépend pas uniquement de la température, mais aussi de la concentration. Donc, dans un fluide soumis à la variation de la température, l'agitation thermique s'intensifie et il apparaît des gradients de concentration dus à la différence de l'énergie cinétique des particules se différenciant par leur masse, les mouvements établis à l'intérieur de volume proprement appelés : la convection thermique et le thermodiffusion ou effet SORÉT. La loi de modération impose qu'un changement d'état d'un système cause un phénomène dont les effets ont tendance à être opposé à ce changement. L'effet SORÉT a tendance à modérer le gradient de concentration produit par le gradient thermique et mesuré par la convection double diffuse. Le signe moins, attribué à l'opérateur LAPLACE de la température dans le terme source de l'équation de l'espèce, atteste cette réalité.

◆ **Construction du diagramme de stabilité**

Les courbes dessinées sur le diagramme de stabilité (figure 3-7) découlent des formules explicites de l'analyse déjà menée, et résumée dans le graphe ci-dessous.

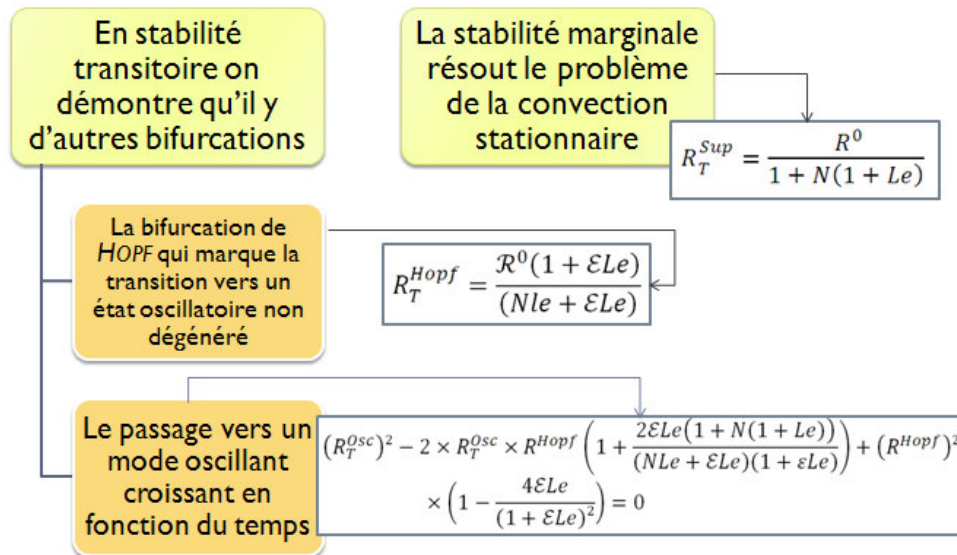


Figure 3-9 : Formules obtenues par différentes études de la convection naturelle thermosolutale

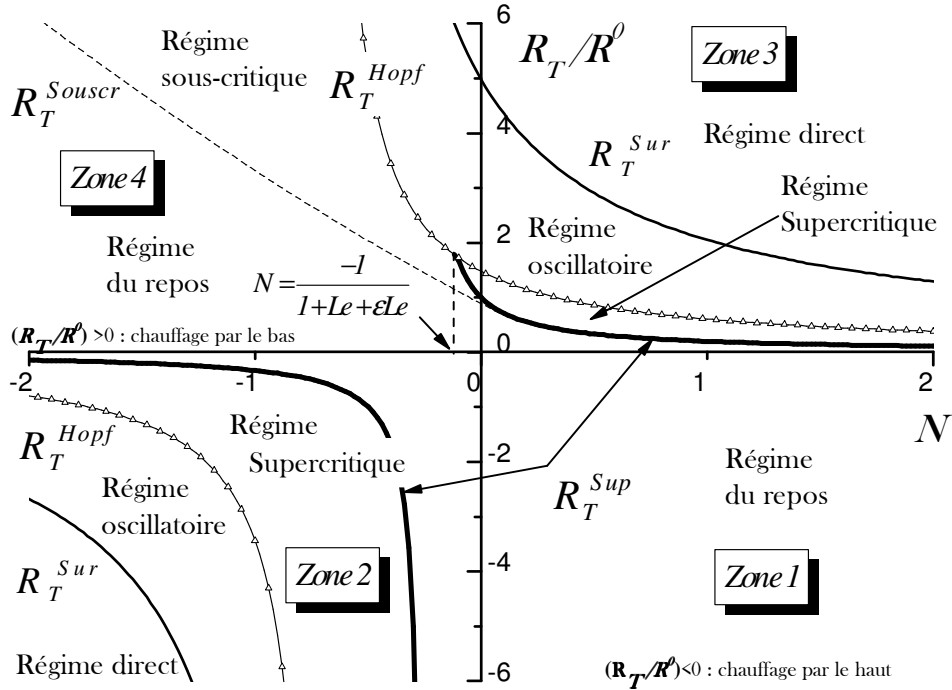


Figure 3-10 : Courbes neutres des bifurcations dans le plan (R, N) à $Le = 3$; $\varepsilon = 0.7$

La figure 3.10 donne un diagramme général de stabilité selon le taux de séparation des forces volumiques. On distingue que le plan (R, N) est partagé en quatre zones, où les forces d'ARCHIMEDE sont ou bien en concurrence ou bien en coopération. Dans la section $(R < 0, N > 0)$ correspondant à la zone 1, un état de repos absolu règne en raison de l'action stabilisante des deux paramètres. Dans la zone 2 tandis que la température, qui est le moteur habituel de convection, stabilise, la déstabilisation de l'action des forces solutales peut surmonter, et trois modes des convections sont possibles. Dans la partie supérieure du plan, tous les modes de convection sont possibles. La troisième zone est marquée par la transition plus rapide à différents états convectifs sous l'action coopérative déstabilisante de tous les agents. Cependant, quand les espèces tendent à stabiliser (la zone 4), un état sous-critique se produit si on modifie certains paramètres d'un fluide initialement hors repos. La branche sous-critique a été obtenue grâce aux simulations numériques directes 3D. Comme conclusion, nous prouvons que le phénomène de la convection thermosolutale peut être partagé dans trois régions : dans la première, la

commande de la convection est due aux effets thermiques $N \gg -1/(1 + Le)$ et trois modes convectifs sont possibles avant le chaos. Dans la seconde, les effets solutaux dominent $N \ll -1/(1 + Le)$ et il est difficile d'observer des structures stationnaires et régulières. Considérant que, dans la troisième région, les deux effets sont comparables et opposés $N \approx -1/(1 + Le)$, quatre modes de la convection peuvent se produire selon des valeurs de paramètres de commande.

◆ Paramétrage avec le nombre de Lewis

Comme décrit antérieurement, le plan est partagé en zones de dominance des forces thermales ou de l'effet du mélange binaire. Cependant, le taux N de séparation est insuffisant pour décrire cette dominance, puisque dépendant du nombre de Le qui raccorde la diffusivité massique et de la diffusivité thermique, et est une caractérisation sans dimensions d'un fluide groupant par convection transfert simultanés de la chaleur et de la masse. En effet, en dépit d'une petite valeur de N , un grand Le donne la puissance au facteur d'espèces, mesuré comme décrit ci-dessus pour la bifurcation supercritique par $N(1 + Le)$.

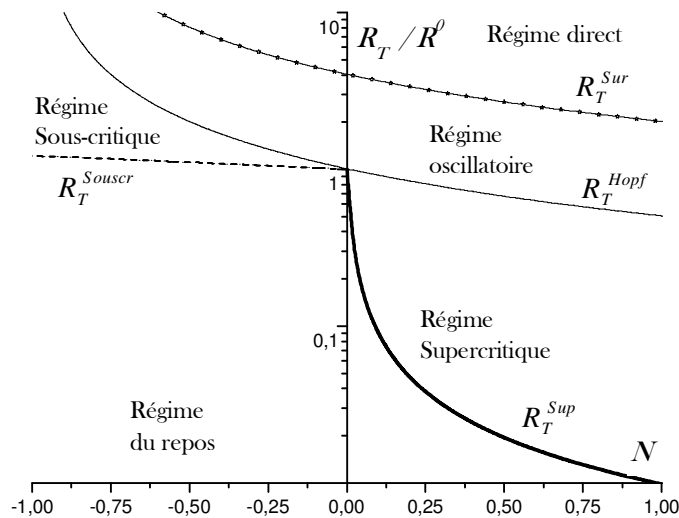


Figure 3-11: Courbes neutres des bifurcations d'un fluide binaire saturant un milieu poreux à hauts nombres de Le (mélanges liquides) : $Le = 100$; $\varepsilon = 0.7$; $Da = 10^{-8}$

D'ailleurs, les formules (équ. 3.9) et (équ. 3.11) montrent une dépendance de ce nombre pour des transitions postérieures à d'autres modes de convection. Une illustration graphique à ce qui a été dit, est fournie sur les figures 3.11 et 3.12. Dans la Figure 3.11 la valeur prise par Le est grande

(symbole des mélanges liquides), une telle valeur entraîne une baisse de la bifurcation de Hopf. La jonction de Hopf est sécante avec le régime supercritique près de $R = 1$; ne laissant de choix au fluide que de bifurquer avec une amplitude finie vers un état oscillatoire à des $N < 0$.

En contre partie, la figure 3.12 montre le cas d'un faible Le ce qui symbolise les mélanges gazeux. Nous remarquons clairement que la transition de HOPF est repoussée vers le haut, et la convection stationnaire occupe des territoires plus larges sur la zone 4 du plan (R, N) . Dans tous les cas la borne supercritique possède une asymptote verticale d'équation $N = -1/(1 + Le)$ encadrée par $N = 0$ et $N = -1$, ainsi que la transition de HOPF, qui elle aussi possède une asymptote verticale d'équation $N = -\varepsilon$ et ce quelque soit le signe du gradient de la température.

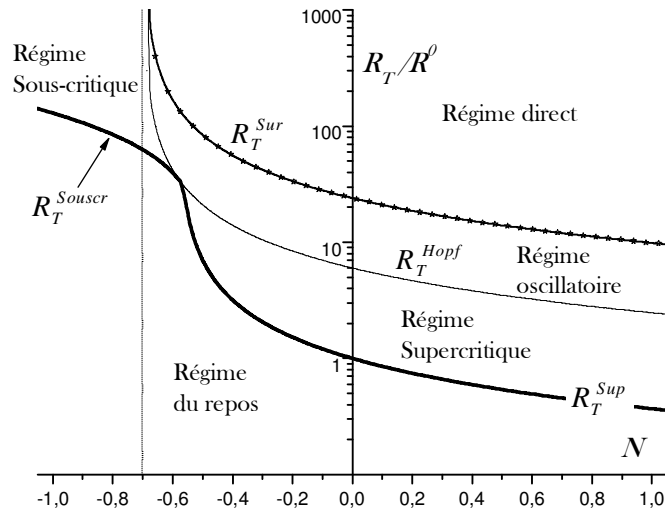


Figure 3-12: Courbes neutres des bifurcations d'un fluide binaire saturant un milieu poreux à hauts nombres de Le (mélanges gazeux) : $Le = 0.2$; $\varepsilon = 0.7$; $Da = 10^{-8}$

Les mêmes effets peuvent être décrits sur le plan (R, Le) d'un autre point de vue du problème, où nous partagerons l'espace dans différents modes de convection prenant comme variables Le et N comme paramètre (Fig. 3.13 et 3.14). Les Figures 3.13 et 3.14 montrent différents diagrammes de stabilité, où les mêmes équations sont employées pour définir les seuils pour l'évolution de l'écoulement. En suivant la verticale $Le \approx 6$, on passe respectivement par tous les régimes possibles ; repos puis convection stationnaire puis oscillatoire, et en fin un mode direct. Toutefois le régime sous critique est toujours possible si par décroissance du RAYLEIGH, on part d'un état de convection stationnaire. Comme conclusion générale de cette

discussion, nous soulignons l'existence d'un diagramme de stabilité pour chaque triplet des paramètres (Le, N, ε) , décrivant le problème de BENARD sous l'effet SORÉT. Ces diagrammes sont semblables mais jamais identiques.

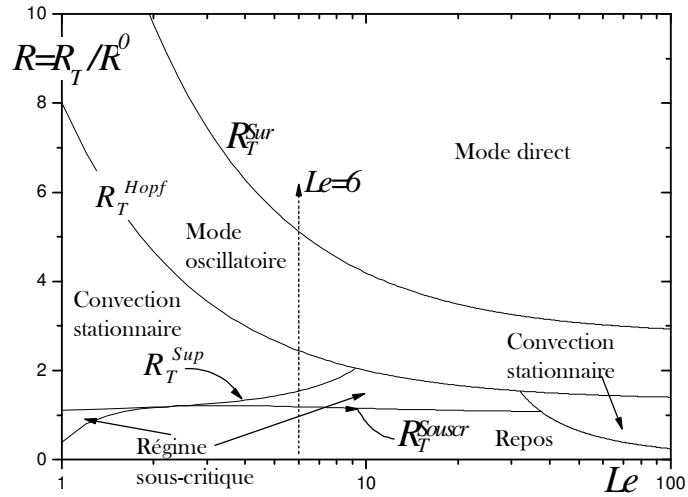


Figure 3-13 : Différentes zones définissant les modes de convection en fonction du nombre de Lewis : $N = -0.05$ et $\varepsilon = 0.2$

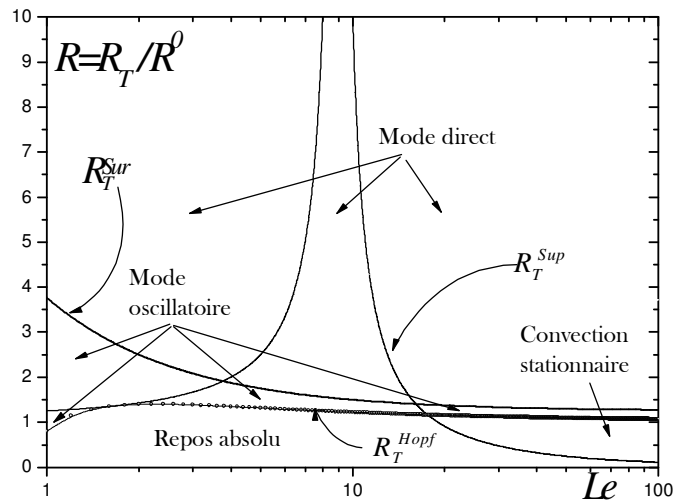


Figure 3-14: Différentes zones définissant les modes de convection en fonction du nombre de LEWIS : $N = -0.1$ et $\varepsilon = 0.5$

3.3 Convection mixte en fluide pur

Comme en terminologie chimique, le mot pur indique que le fluide est constitué d'une seule espèce, se traduisant dans notre paramétrage par un nombre N nul. La convection mixte est la coprésence des modes convection naturelle et convection forcée qui se caractérise par le nombre de PECLLET non nul à l'entrée. Cette modification des conditions aux frontières d'entrée et de sortie nous fait confronter à un nouveau problème différemment paramétré des deux précédents.

De point de vue physique un effet advectif non négligeable du moins auprès des frontières sera imposé. Ce paramètre qui assure le transport affecte la stationnarité des rouleaux, puisque les particules qui y sont convectées seront rejetées vers l'aval, même si une onde thermique peut remonter l'écoulement.

De point de vue mathématique, l'opérateur linéaire à diagonaliser est doté d'une nouvelle variable touchant les intégrales des termes advectifs. Le système reste néanmoins factorisable d'une manière que l'on peut le ramener à la forme bilinéaire de base (matrice d'assemblage du problème de la convection naturelle) perturbée par des matrices contenant le terme PECLLET. Ainsi, deux approches seront possibles ; utiliser le théorème de perturbations d'une matrice dépendant d'un paramètre, dû à LIDSKII¹ et essentiellement basé sur la structure de JORDAN de la matrice non perturbée. Une nouvelle classe de perturbations génériques peut ainsi être traitée de manière explicite. Néanmoins cette approche nécessite une spécialisation dans l'algèbre des perturbations. La seconde approche consiste à un calcul numérique des racines du polynôme caractéristique de la matrice des perturbations. Au cours de ce travail nous avons choisi le chemin numérique afin de caractériser ce phénomène. Enfin, du point de vue numérique, on démontre que loin de l'entrée l'effet du nombre de Pe est de moins en moins important. Ceci est expliqué par des gradients verticaux de la température croissants en fonction de la position axiale. En pratique, on voit une particule qui rentre, se déplace linéairement, et puis en s'échauffant au cours du chemin elle commence à osciller et enfin à faire des révolutions autour des centres des rouleaux. Une moisson bibliographique au sujet de la convection mixte a été présentée au § 1.3.3. A présent nous mettons la main sur ce que nous apportons de palpable avec cette contribution. En effet :

1. Nous traitons le problème de stabilité de convection mixte par une méthode variationnelle.

¹ Mathématicien russe du 20^{ème} siècle. Père de la théorie des perturbations des valeurs propres de matrices nilpotentes jordanisables.

2. Tous les travaux basés sur la stabilité linéaire temporelle supposent le canal de la longueur infinie. Dans ce travail nous accentuons l'effet de l'aspect sur la stabilité de l'écoulement de convection mixte.
3. L'analyse de la stabilité temporelle n'a jusqu'à présent pas pu démontrer l'influence la zone d'entrée thermique. À l'infini elle donne une valeur de RAYLEIGH critique plus haute que \mathcal{R}^0 (1708 dans le cas fluide). Par contre la présente analyse variationnelle peut démontrer ce fait, déjà montré par l'expérience.
4. Nous donnons une nouvelle formulation du problème de convection mixte sous la forme de problème de référence (convection naturelle) perturbé par un opérateur nilpotent (matrice des termes advectifs).

Quant à l'aspect physique du problème, jusqu'à quel point nos équations de stabilité le modélisent-ils ? S'agissant d'un écoulement stratifié en température à l'entrée ; qui, déstabilisé par une température de chauffage inférieure, peut être dans un lieu lointain des parois latérales considéré comme bidimensionnel. Ainsi nous évaluons le moment et le mode de la perte de stabilité de cet écoulement à un nombre de Pe moyen à l'origine des abscisses. La figure ci-contre, obtenue numériquement par résolution directe, clarifie pour le lecteur un aspect qualitatif de l'écoulement et illustre son aspect presque 2D et la naissance d'ondes transverses dans un fluide initialement stratifié thermiquement. Ainsi nous pouvons considérer que le modèle répond aux contraintes les plus essentielles d'un tel problème.

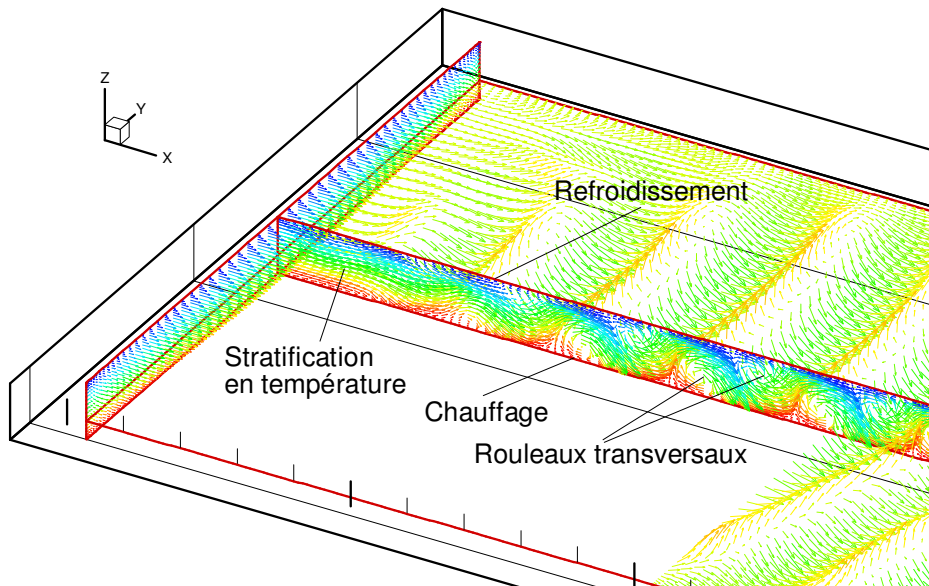


Figure 3-15: illustration de l'aspect physique du problème de convection mixte dans un canal chauffé par le bas et refroidi par le haut

À présent nous passons à l'analyse de stabilité. L'hypothèse convection mixte conservera la condition $Pe \neq 0$ alors que $N = 0$. Ainsi on se servira toujours de la matrice globale générale $[E]$ définissant l'opérateur linéaire :

$$\begin{cases} E : \Omega = [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \Omega = [0, A] \times [0, 1] \\ [E] = [K_\psi]^{-1}[B] \left([K_\theta]^{-1}[B] + N \left(Le[K_\phi]^{-1}[B] + [K_\phi]^{-1}[K][K_\theta]^{-1}[B] \right) \right) \end{cases}$$

La matrice de l'endomorphisme E sera réduite à :

$$[E] = [K_\psi]^{-1}[B][K_\theta]^{-1}[B] \text{ avec :}$$

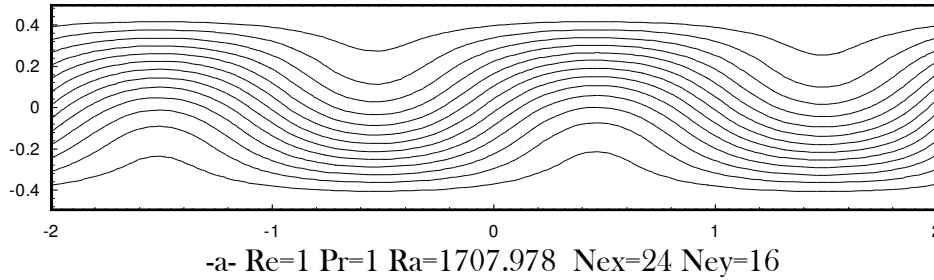
$$(K_{\psi_{i,j}})^e_{1 \leq i, j \leq 4} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr} (\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Da(\nabla^2 \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla^2 \cdot \mathcal{N}_j) \right) d\Omega$$

$$(K_{\theta_{i,j}})^e_{1 \leq i, j \leq 4} = \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega$$

Les premiers calculs du RAYLEIGH critique montrent que la convection forcée est stabilisante, et en s'ajoutant à un chauffage par le haut et ne va rien changer sur la stabilité du système. Ainsi le nombre de RAYLEIGH critique correspondant au cas du chauffage par le bas sera déterminé grâce au rayon spectral de la matrice.

$$R_T^{Sup} = \frac{1}{|\lambda_i|_{max}} \geq R^0$$

Le mode propre le plus déstabilisant correspondant à ce seuil déterminé ci-haut est défini par le vecteur propre correspondant à $|\lambda_i|_{max}$. Le seuil illustrant la transition de l'état de repos est marqué par de légères oscillations et illustré dans la figure 3.16-a. De telles oscillations sont une superposition d'écoulement horizontal et un rouleau convectif de faible intensité. Un nombre plus élevé de Ra signifiera l'installation d'un PRB formé d'une superposition évidente des rouleaux de RB d'une magnitude plus élevée avec l'écoulement horizontal (Figure 3.16-b).



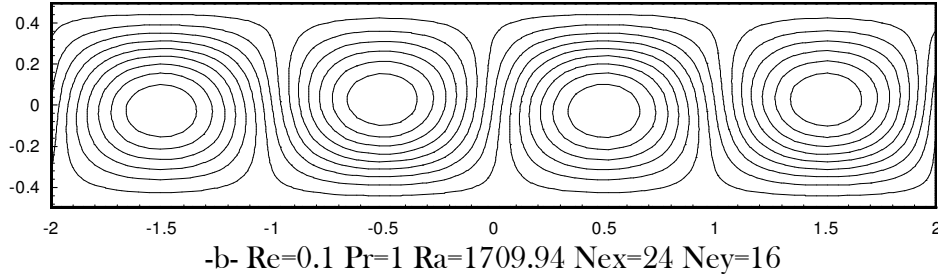


Figure 3-16: Lignes de courant marquant le passage de l'état de repos vers la convection

Nous avons vu qu'en convection naturelle, le rapport d'aspect influence et le RAYLEIGH critique et la multiplicité des rouleaux installés. Évidemment cet élanement influencera la convection mixte si l'on a affaire à une superposition de solutions comme on vient de l'évoquer.

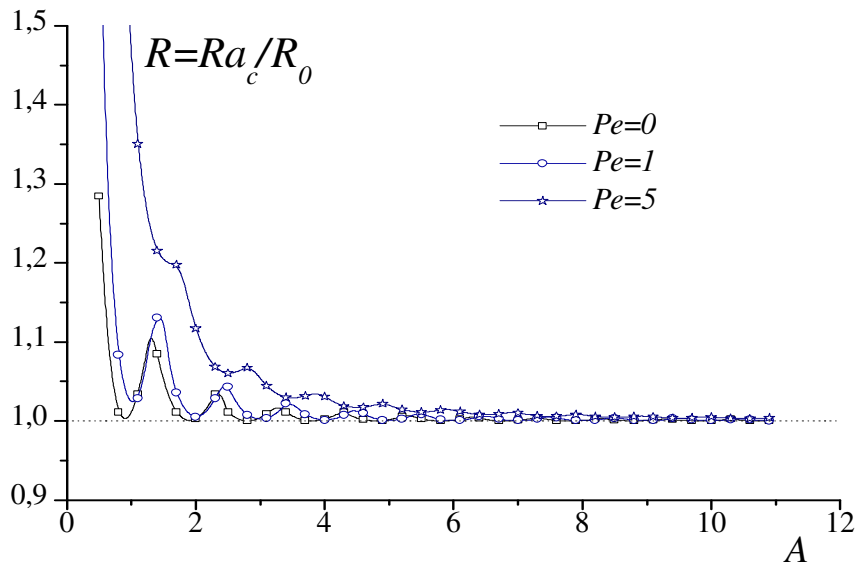


Figure 3-17: Influence de l'allongement sur le nombre de Rayleigh normalisé au début de la convection mixte

Les résultats obtenus illustrent l'existence d'un paramètre de contrôle unique sur la stabilité, qui est le nombre de PECLET $Pe = Re \times Pr$. Le schéma 3.17 illustre l'influence des couples REYNOLDS et PRANDTL sur le nombre critique de Ra . Notons que, pour un allongement fixe, le nombre de Pe a une action stabilisante sur l'écoulement, et que l'effet de la longueur d'onde est de moins en moins important au fur et à mesure que le nombre

Pe est grand. Nous notons également que, pour un débit moyen de plus en plus grand, les crêtes produites par l'effet de compétition longueur d'onde et frontières verticales diminuent et disparaissent dans le cas d'une advection forte. Pour le Pe plus grand que cinq l'effet le rapport longueur d'onde aspect, devient désormais non perceptible. Nous observons un tel effet stabilisant parce que les premiers rouleaux sont advectés vers l'aval, ainsi la zone d'entrée thermique occupe un domaine plus étendu. Le système est doté de longueurs d'ondes plus importantes avec l'augmentation du nombre de Pe , spécialement pour $Pe > 2$ comme représenté ci-dessous.

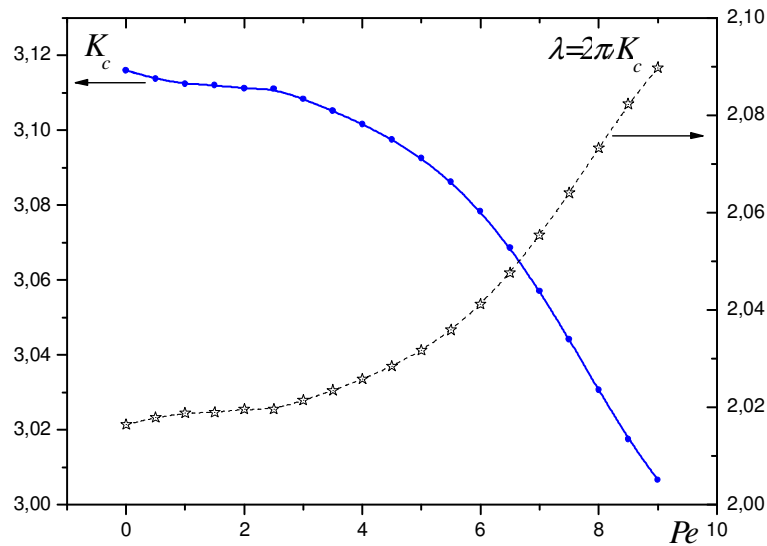


Figure 3-18: Évolution de la longueur et du nombre d'onde en fonction de Pe

Partant de l'abscisse $x = 0$ où la variation verticale de la température est imposée, un écoulement entièrement hydro-dynamiquement développé a besoin d'une certaine distance pour être thermo-convectivement établi (*cf.* lignes de courant Figure 3.19). Certains auteurs, tels que CHENG et WU (1976), étaient intéressés par cette zone et éprouvés à déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités. Ils ont observé qu'à l'entrée de la conduite, le RAYLEIGH critique est clairement plus grand que 1708, et tend vers 1708 à l'infini. Les présents résultats sont en bonne concordance avec les études précédentes dans la tendance, et nous pouvons maintenant prévoir et évaluer les valeurs critiques (*cf.* Figures 3.17 et 3.19). L'effet de la condition d'entrée sur la vitesse et de développement de couche limite thermique est illustré sur le schéma 3.19. Les particules du fluide

entrant au canal ont besoin d'un certain temps pour acquérir l'énergie nécessaire de sorte que les forces d'ARCHIMEDE étant exercées à ces particules commencent à être efficaces. La distance suffisante pour la naissance des mouvements convectifs par rapport à l'entrée change selon les valeurs du couple (Ra, Pe).

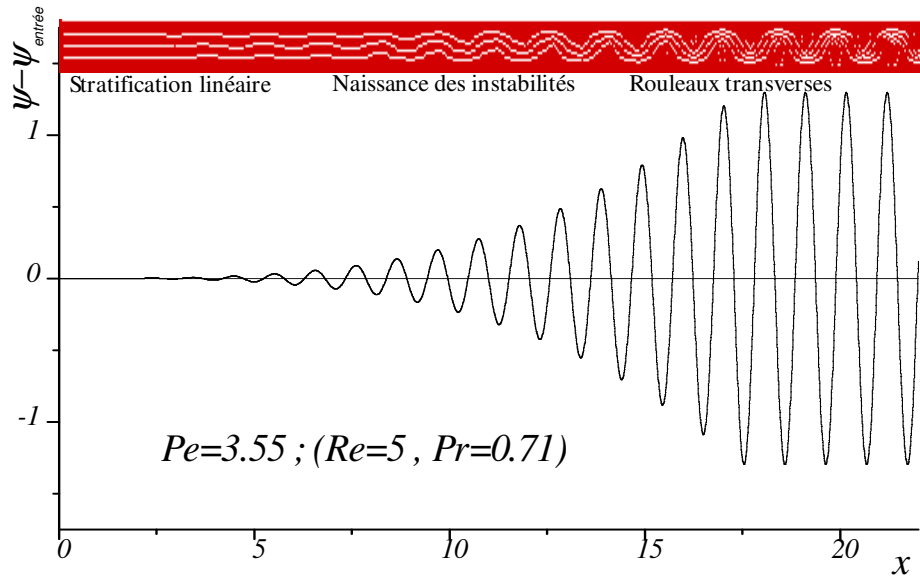


Figure 3-19: Oscillation d'amplitude pour une particule sur la ligne moyenne horizontale (pour $Pe = 3.55$) et développement des rouleaux à partir de la section d'entrée

L'intensité d'écoulement le long de la cavité montre une trajectoire tumultueuse de plus en plus intense, liée à l'installation des rouleaux convectifs (cf. Figure 3-19). Cette distance est naturellement dépendante de l'intensité de l'écoulement moyen. Cet effet a été vérifié expérimentalement par plusieurs auteurs, par exemple LIR et al. (2001) et OUAZZANI et al. (1995). La figure 3.20 montre une vue de dessus d'un vortex de rouleaux transversaux. Il est clair que le premier rouleau est formé loin de l'entrée, à peu près en $x = 10$ (en coordonnée de l'auteur). L'intensité lumineuse faible du premier rouleau signifie qu'il a une amplitude de mouvement de particules inférieure à celle des rouleaux les plus lumineux. L'écoulement est établi thermo-convectivement au voisinage de $x = 15$. Cette figure montre aussi que loin de la couche limite l'hypothèse de bi-dimensionnalité est valable, ce qui renforce l'illustration donnée par la figure 3-20. De même nous montrons sur la figure 3-19, en représentant les lignes de courant et les variations d'oscillation d'amplitude des particules et sous les mêmes tailles

des paramètres de contrôle, que l'écoulement passe par une étape de stratification linéaire, alors que la naissance des mouvements convectifs apparaît sous forme d'ondulation dont l'amplitude croît de plus en plus, atteignant une structure cellulaire à la fin. Nous trouvons des phénomènes sensiblement comparables avec les résultats expérimentaux. D'après tout ce qui précède, nous savons désormais que le RAYLEIGH critique est en relation étroite avec la longueur d'onde et cette relation est aussi de moins en moins importante lorsque Pe est grandit. Le nombre R_T critique n'est pas unique pour deux cavités d'élanement différent bien qu'elles partagent le même Pe à l'entrée. Une cavité très longue aura $\lim_{x \rightarrow \infty} R_T = \mathcal{R}^0$.

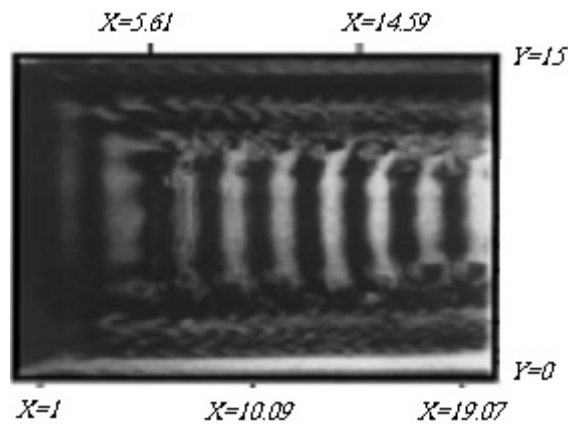


Figure 3-20: Vue de dessus d'un vortex d'écoulement d'air pour : $Ra = 2500$, $Pr = 0.71$, $Re = 5$, l'entrée est à gauche. Source : LIR et al. (2001)

◆ Résumé

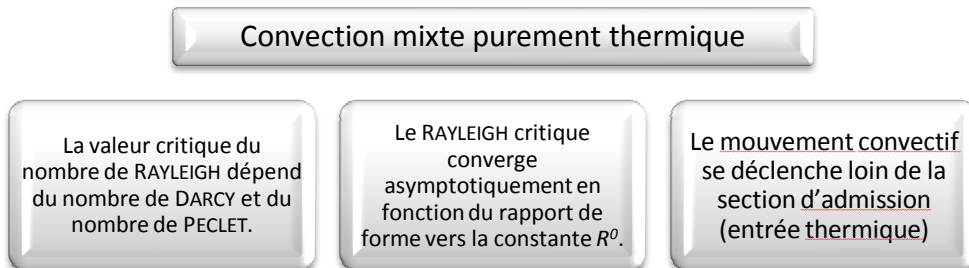


Figure 3-21: Résumé des principaux résultats obtenus en convection mixte

La solution stratifiée en température et en vitesse, linéaire à la base, évolue très loin de la section d'admission vers un monde de non linéarités s'installant à partir de la fin de l'aire d'entrée thermique. Dans ce qui suit nous nous proposons d'établir un développement théorique afin d'exprimer le problème sous une nouvelle formulation.

3.3.1 Formulation générale du seuil de stabilité

Ce paragraphe est une parenthèse qui nous fait voyager du monde de la physique et des chiffres, vers la pureté des mathématiques. Toutefois les mathématiques ne doivent pas contredire l'expérience. L'idée de base est simple, bien que le développement ne soit pas aussi évident. En effet la question qui se pose en regardant l'expression du R_T^C en convection thermosolutale, qui s'exprime en fonction de la constante \mathcal{R}^0 (cf. équ. 3.9), est : pourra-t-on aussi exprimer le R_T^C en convection mixte d'une manière similaire ? Ainsi se développe l'idée d'essayer de factoriser la matrice globale de la convection mixte en fonction de celle du problème de référence (convection naturelle thermique) $[E^0]$.

◆ Un peu d'algèbre

Rappelons que l'opérateur décrivant la convection mixte est :

$$[E(Pe)] = [K_\psi]^{-1} [B] [K_\theta]^{-1} [B]$$

avec :

$$(K_{\theta_{i,j}})^e_{1 \leq i,j \leq 4} = \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \mathcal{N}_i)(\nabla \cdot \mathcal{N}_j) - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega$$

Nous pouvons écrire $[K_\theta] = [K] - Pe[B]$ ce qui donne en remplaçant et en factorisant par la matrice $[K]$:

$$\begin{aligned} [E(Pe)] &= [K_\psi]^{-1} [B] [[K] - Pe[B]]^{-1} [B] \\ &= [K_\psi]^{-1} [B] [K]^{-1} [I_d - Pe[B][K]^{-1}]^{-1} [B] \end{aligned}$$

Or on démontre dans l'algèbre linéaire que :

$$[I_d + M]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M^k \quad (3.13)$$

Cette série s'appelle série de VON-NEUMANN et est convergente pour $\|M\| < 1$. Nous vérifions bien, pour les valeurs faibles de Pe permettant l'apparition de rouleaux transversaux $Pe \leq 25$, que la norme¹ (fonction IMSL-NRIRR) obéit à :

$$\|Pe[B][K]^{-1}\| < 1 \quad (3.14)$$

¹ Norme infinie d'une matrice rectangulaire réelle.

Nous précisons que la stabilité de la solution de la conduction peut être brisée avec la transition vers les rouleaux stationnaires longitudinaux R_{\parallel} . Toutefois notre modèle de stabilité ne laissant pas regarder cette transition uniquement visualisable en simulations tridimensionnelles et se produit pour un Pe inférieur à un certain Pe^* généralement plus petit que 20 pour des bas nombres de R_T . Utilisant (3.13) on peut écrire :

$$\begin{aligned} [E(Pe)] &= [K_{\psi}]^{-1} [B][K]^{-1} [I_d - Pe[B][K]^{-1}]^{-1} [B] \\ &= \underbrace{[K_{\psi}]^{-1} [B][K]^{-1} [B]}_{[E^0]} [B]^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B] \\ &= [E^0] \left[[B]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} (Pe[B][K]^{-1})^k [B] \right] \end{aligned}$$

En utilisant la distributivité de la multiplication des matrices par rapport à la loi + ; on peut écrire après avoir sorti le premier terme de la série infinie :

$$\begin{aligned} [E(Pe)] &= [E^0] \left[[B]^{-1} [B] + [B]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B] \right] \\ &= [E^0] \left[I_d + [B]^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k [B] \right] \end{aligned}$$

En ramenant cette factorisation dans l'équation des valeurs propres on aura :

$$\begin{aligned} [E(Pe)] - \frac{1}{R_T} I_d &= 0 \\ \Rightarrow [E^0] \left[I_d + [B]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B] \right] - \frac{1}{R_T} I_d &= 0 \\ \Rightarrow [E^0] + \left[[E^0][B]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B] \right] - \frac{1}{R_T} I_d &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi définir une matrice de perturbation hydrodynamique telle que :

$$[E_{hydr}^{perturb}(Pe)] = [E^0][B]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B]$$

Il vient ainsi : $[E(Pe)] = [E^0] + [E_{hydr}^{perturb}(Pe)]$

Si on admet la Propriété suivante : Si λ_{E^0} et λ_X sont valeurs propres simples de même ordre, respectives de $[E^0]$ et $[X]$ qui sont deux matrices diagonalisables alors la sommation des équations aux valeurs propres engendre :

$$\begin{cases} E^0 - \lambda_{E^0} I_d = 0 \\ X - \lambda_X I_d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\sum} (E^0 + X) - (\lambda_{E^0} + \lambda_X) I_d = 0$$

Partant de l'équation des valeurs propres et utilisant la propriété :

$$[[E^0] + [E_{hydr}^{perturb}]] - \frac{1}{R_T} I_d = 0$$

on aura par suite l'équation ci-dessus, vraie quelque soit $1 \leq i \leq n$. On rappelle que n est la dimension de $[E^0]$ et de $[E_{hydr}^{perturb}]$.

$$(\lambda_{E^0})_i + (\lambda_{E_{hydr}^{perturb}})_i = \frac{1}{R_T}$$

On rappelle également que le mode propre qui nous intéresse, est celui le plus déstabilisant, dans notre cas $i = m$. Ceci donne que :

$$(\lambda_{E^0})_m = \frac{1}{R^0}$$

Il nous reste à déterminer le rayon spectral de la matrice des perturbations. Or cette dernière est une somme infinie de matrices pseudo-nilpotentes.

$$\begin{aligned} (\lambda_{E_{hydr}^{perturb}})_m &= \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k)_m \\ (\lambda_k)_m &= v. \text{propre d'ordre } m \left([E^0][B]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Pe[B][K]^{-1})^k \right) [B] \right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres $(\lambda_k)_m$ dépendent du rapport d'aspect du canal et du nombre de Da . En pratique, on ne peut généralement pas calculer une somme infinie de matrices. Pour cela, on a procédé à calculer les n premiers termes de cette somme, puis ses valeurs propres comme montré sur l'exemple d'illustration. L'inéquation (3.14) est la condition nécessaire montrant que $(Pe[B][K]^{-1})^k$ tend vers la matrice nulle, quand k tend vers un entier très grand. En effectuant le calcul numérique, nous vérifions cet

effet par la simple remarque que les valeurs $|(\lambda_k)_m|$ sont de plus en plus faibles i.e. $(\lambda_k)_m \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Notons aussi que la série des $(\lambda_k)_m$ est alternée ce qui implique :

$$S_k = \sum_{k=1}^{+\infty} Pe^k (\lambda_k)_m = \sum_{k=1}^{+\infty} (-Pe)^k |(\lambda_k)_m|$$

Finalement et après développement algébrique, le seuil de convection mixte peut être donné par la formule :

$$R_T^C(Pe, A) = \frac{\mathcal{R}^0}{1 + \mathcal{R}^0 \sum_{k=1}^{+\infty} (-Pe)^k |(\lambda_k)_m|} \quad (3.15)$$

Puisqu'il est impossible de calculer numériquement une somme infinie, nous avons estimé l'erreur induite sur le résultat général si nous prenons seulement les n premiers termes. La condition ci-dessous prouve que l'évaluation de l'erreur est plus précise lorsque le nombre Pe est petit. En développant la série S_k en une somme de n premiers termes d'une série géométrique, plus un reste ξ , nous obtenons :

$$S_k = \sum_{k=1}^n (-Pe)^k |(\lambda_k)_m| + \xi_n$$

$$\Rightarrow \xi_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-Pe)^k |(\lambda_k)_m| \Rightarrow |\xi_n| \leq |(Pe^k (\lambda_k)_m)^{n+1}|$$

◆ **Morale de l'exercice**

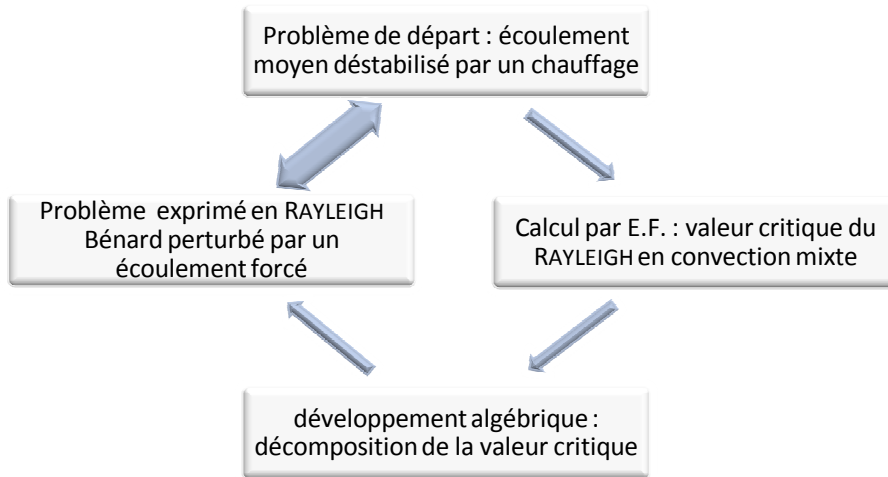


Figure 3-22 : Différentes description du problème de convection mixte

Grâce à ce développement algébrique, et au-delà des formules et de l'abstraction des mathématiques, on a pu établir une équivalence entre le problème de départ qui n'est qu'un écoulement forcé déstabilisé par un chauffage par le bas, et le problème de RAYLEIGH BENARD perturbé par l'écoulement forcé dû à l'expression récemment formulée. La figure 3.22 est un dessin du plan relationnel entre les différents problèmes.

◆ Illustration du résultat

Maintenant nous illustrerons la formule (3.15) par une application pour le cas $n = 2$. Ces valeurs propres sont calculées de la même manière que pour \mathcal{R}^0 . La figure 3.23 montre l'ordre de grandeur des valeurs propres calculées. Comme précédemment dit, ces valeurs sont alternées et de plus en plus tendant vers zéro, signifiant que le terme de VON-NEUMANN représente la perturbation induite par l'écoulement forcé et que cette perturbation s'annule à l'infini. L'expression du R_T^C est le produit de la constante \mathcal{R}^0 de la convection naturelle par la perturbation (évaluée dans la figure 3.24 à l'ordre 2 dans un milieu de DARCY). Enfin, et afin de prouver la validité de cette formule, nous présentons un graphe qui montre deux courbes l'une obtenue par calcul direct traitant la matrice d'assemblage globale, et l'autre obtenue à l'aide de la formule (3.15), où le problème est la somme de deux phénomènes, i.e. le cas de référence (convection naturelle thermique) et une perturbation (convection forcée). La fig. 3.25 montre la validité de la formule même à faible ordre d'approximation.

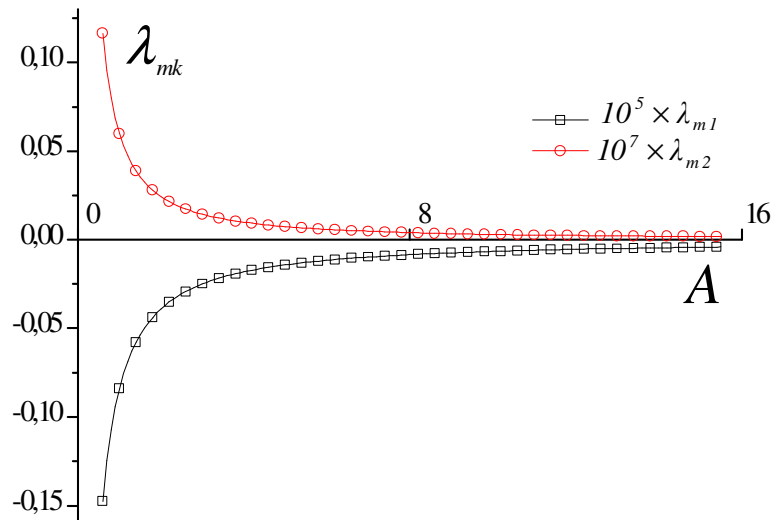


Figure 3-23 : Représentation graphique des rayons spectraux des matrices d'ordre 1 et 2 de la série de VON NEUMANN. $Da = 10^{-8}$

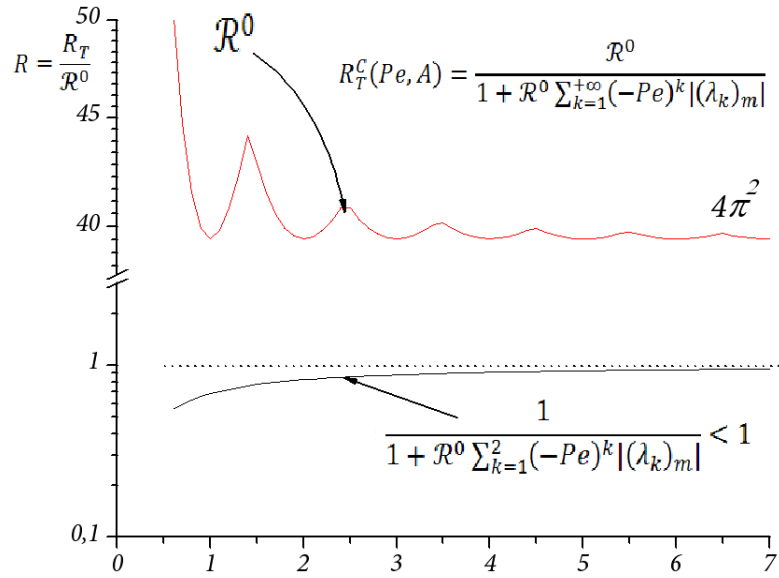


Figure 3-24 : Évaluation de la perturbation induite en convection forcée. $Da = 10^{-8}$

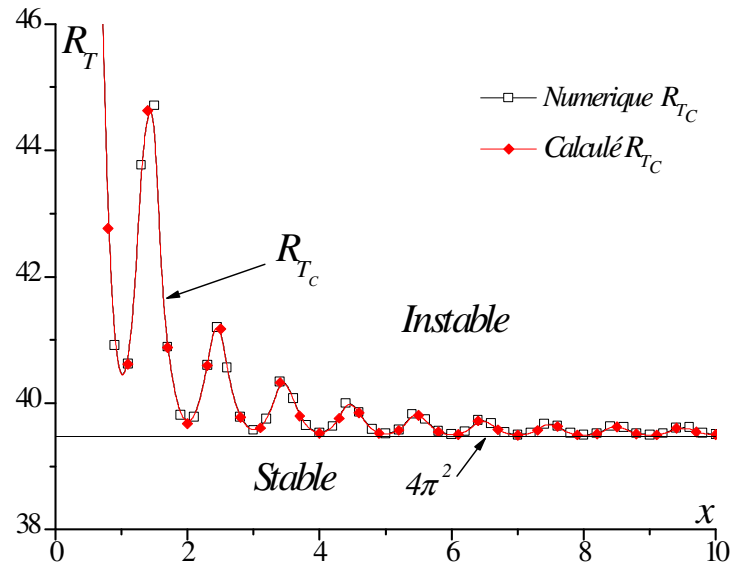


Figure 3-25 : Comparaison graphique entre le R_T critique calculé et numérique. $Re = 2 Pr = 0.71$

L'intérêt de cette approche, en plus du travail méthodologique, réside dans l'utilisation des résultats, obtenus précédemment par les différents auteurs dans le cas classique de la convection naturelle thermique de RAYLEIGH BENARD.

3.4 Convection mixte en fluide binaire sous l'effet SORET

Dans cette phase, nous passons au problème le plus général de notre étude de stabilité. Il s'agit de la convection mixte influencée par les forces des corps dissous ou mélangés dans le fluide. L'entreprise du calcul se fera avec les conditions $Pe \neq 0$ et $N \neq 0$. Ainsi on se servira toujours de la matrice globale générale $[E]$ définissant l'opérateur linéaire E :

$$\left\{ \begin{array}{l} E : \Omega = [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \Omega = [0, A] \times [0, 1] \\ [E] = [K_\psi]^{-1}[B] \left([K_\theta]^{-1}[B] + N \left(Le[K_\phi]^{-1}[B] + [K_\phi]^{-1}[K][K_\theta]^{-1}[B] \right) \right) \end{array} \right.$$

$$\left(K_{\psi_{i,j}} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}^e = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr \cdot Da} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - \nabla^2 \mathcal{N}_i (\nabla^2 \mathcal{N}_j + Re \mathcal{N}_j) \right) d\Omega$$

$$\left(K_{\theta_{i,j}} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}^e = \int_{\Omega} \left(\nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega$$

$$\left(K_{\phi_{i,j}} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}^e = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Le} \nabla \mathcal{N}_i \nabla \mathcal{N}_j - Pe \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x} \mathcal{N}_j \right) d\Omega$$

La matrice de l'endomorphisme E n'est pas simplifiable à ce stade, sauf pour le cas $Le = 1$. Nous n'allons pas développer un calcul algébrique matriciel pour déterminer une formule générale du RAYLEIGH critique. Par ailleurs, nous présentons les résultats numériques de l'analyse de stabilité. Nous allons classer les résultats par influence des paramètres de contrôle.

3.4.1 Un coefficient de séparation positif

Par son effet déstabilisant, un coefficient de séparation positif pousse les molécules lourdes et chaudes à prendre de l'altitude dans le canal rendant moins inerte le système. Cette conséquence est remarquable, quelque soit le nombre de Pe, Le et Da . Le graphe 3.26 montre cet effet couplé à la stabilisation apportée par l'écoulement forcé (courbes croissantes en fonction de Re , mais toujours situées en bas de la valeur $R = 1$). Dans le tableau 3-4 on fournit une série de valeurs des longueurs d'ondes en fonction du nombre de REYNOLDS dans le but de réaliser une base de données numérique du problème. Il est à constater que la longueur d'onde n'a pas une variation régulière en fonction du Pe .

Re	Le = 100 Pr = 10		Le = 10 Pr = 7	
	$K_c = 2\pi/\lambda_c$	λ_c	$K_c = 2\pi/\lambda_c$	λ_c
0	2.906	2.159	3.071	2.046
0.02	2.998	2.093	3.075	2.043
0.04	3.155	1.989	3.070	2.046
0.06	3.155	1.989	3.069	2.047
0.08	3.153	1.990	3.069	2.047
0.1	3.168	1.981	3.067	2.048
0.2	3.248	1.932	3.066	2.049
0.4	3.332	1.883	3.064	2.050
0.6	3.514	1.786	3.061	2.052
0.8	3.396	1.848	3.058	2.054
1	3.447	1.820	3.054	2.057
1.5	3.080	2.038	3.052	2.058
2	3.018	2.079	3.047	2.060
3	2.986	2.101	3.037	2.068
4	3.304	1.899	3.029	2.074
5	3.302	1.900	3.018	2.081

Table 3-4 : Longueurs et nombres d'ondes en fonction de REYNOLDS. $N = 0.1$

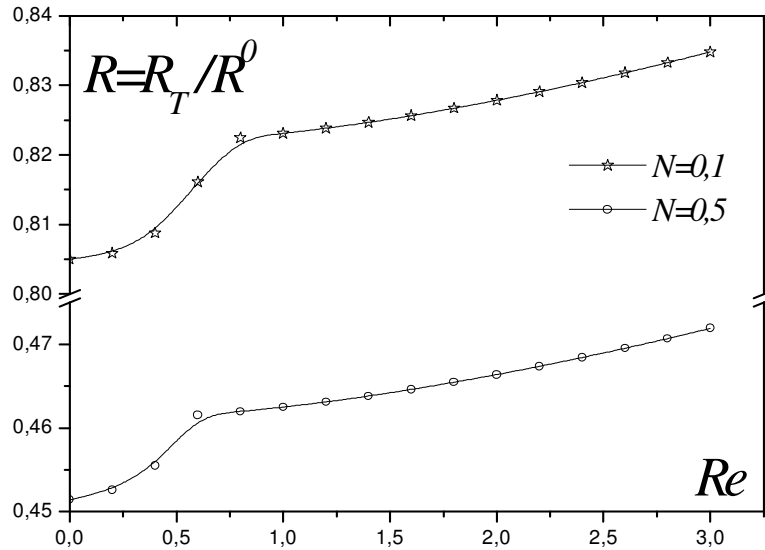


Figure 3-26 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation $N > 0$ sur le RAYLEIGH critique à $A = 12, Le = 10, Pr = 7$. Il est à noter que $(R(Re))_{N=0} \geq 1$

3.4.2 Un coefficient de séparation négatif

Dans la zone des $N < 0$ se situe le point de surstabilité marginale $N = -1/(1 + Le)$. M. BOURICH et d'autres auteurs ont trouvé la même expression de surstabilité en problèmes analytiques d'écoulements parallèles. En convection naturelle, et à gauche de cette valeur, il n'y a pas de limite supercritique en configuration déstabilisante. En se rapprochant à droite de cette limite une asymptote verticale oblige la courbe supercritique à la suivre. On explique cet état par une opposition directe des forces thermique et solutale. Perturbant ce fluide binaire par un débit forcé, on assiste à une chute spectaculaire du RAYLEIGH critique, prononcée énergiquement pour des LEWIS allant vers les valeurs grandes. PIQUER et al. ont trouvé une alternance d'effet de Pe , qui impose son effet stabilisant au départ avec des ondes remontant l'écoulement, puis perd ce pouvoir pour une gamme de valeurs et le regagne désormais. PIQUER et al. n'ont pas signalé l'existence d'un point de surstabilité quelque soient les valeurs de Le et de N . La brisure de cet état de repos avec une perturbation du type débit forcé, indique que le suréquilibre obtenu est métastable, i.e. les gradients de concentration résultant de ceux de la température et annulant leur pouvoir sont advectés par l'écoulement moyen détruisant ainsi cet équilibre local très délicat. Une explication plus détaillée, et plus argumentée sera apportée au § 5.4.2.

◆ Cas des mélanges liquides

L'effet de surstabilité est franc dans ces situations (cf. Figure 3.27). Dans le cas illustré par la figure ci-dessous ($Le = 100$), le point de surstabilité se situe en $N = -1/101 \approx 0.0099$ définissant la courbe supérieure du graphe, laquelle courbe décroissant de l'infini vers un minima local, puis regagne un taux d'accroissement positif dû au débit forcé. Le même comportement est enregistré pour un milieu de DARCY ou un milieu fluide. Notre modèle de stabilité capte des bifurcations figées dans le temps et ne peut prévoir des ondes à vitesses de phase négatives. Ces ondes seront captées par les simulations directes dont l'exécution est indispensable afin d'expliquer les digrammes de stabilité obtenus au sein de ce chapitre.

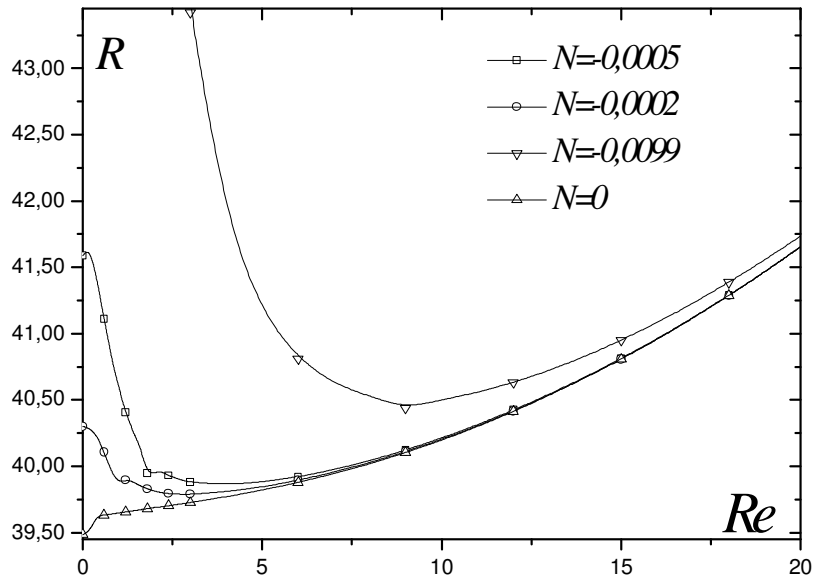


Figure 3-27 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation N sur le RAYLEIGH critique à $A = 12, Le = 100, Pr = 10, Da = 10^{-8}$

◆ Cas des mélanges gazeux

En prenant en compte des gaz dont le nombre LEWIS est moyennement élevé, l'effet de surstabilité brisée est encore observé, mais pour les faibles Le il est moins perceptible car en baissant la valeur du nombre de Le on baisse le pouvoir de diffusion massique par rapport à la diffusivité thermique, et ainsi s'amointrit la capacité de la force solutale à maintenir l'équilibre local lors de la surstabilité. Ici, par souci d'allègement, on ne présente que les résultats pour le cas du pur fluide, tout en soulignant pour le lecteur que les résultats pour le cas DARCY leurs sont similaires.

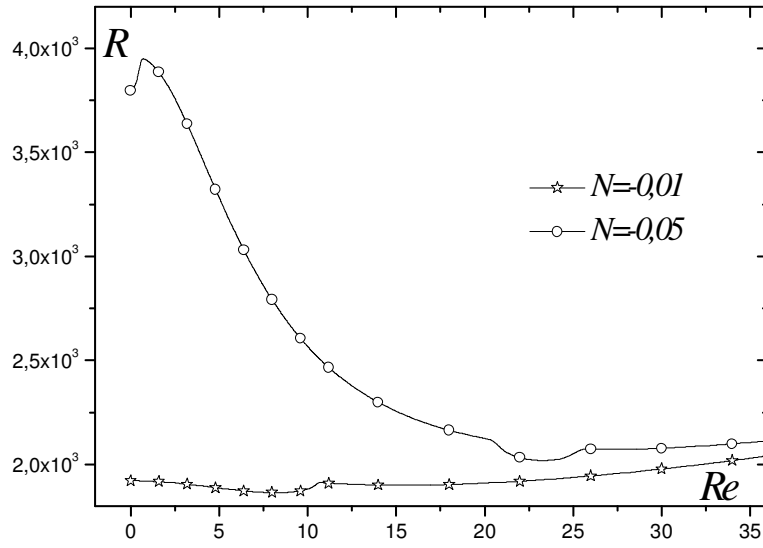


Figure 3-28 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation N sur le RAYLEIGH critique à $A = 4$ $Le = 10$ $Pr = 1$ $Da = +\infty$

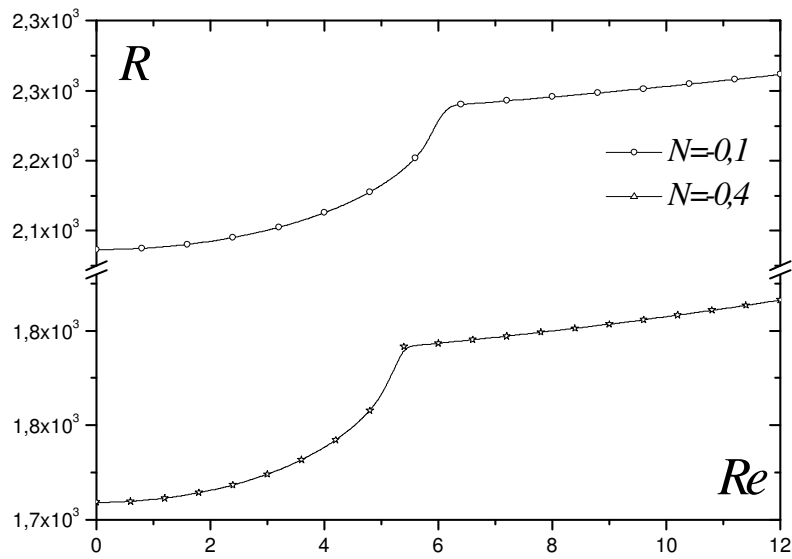


Figure 3-29 : Influence du nombre de REYNOLDS et du taux de séparation N sur le RAYLEIGH critique à $A = 4$ $Le = 1$ $Pr = 1$ $Da = 10^{-8}$

◆ Nombres d'ondes

Nous résumons ici certaines valeurs de nombres d'ondes obtenues par transformées de FOURIER de la fonction de courant, à différents Pe et N . Le sens de variation de ces nombres d'ondes est irrégulier, et il ne nous est pas possible à ce stade d'interpréter cette irrégularité, faute d'informations sur l'écoulement (sens de propagation des rouleaux et vitesse de phase). Ainsi, on se contente de présenter les résultats tels qu'ils sont.

Pe	k_c			
	$N = -0.05$	$N = -0.01$	$N = 0$	$N = 0.05$
0,0	3,0826	3,1135	3,1103	3,0365
0,5	3,0813	3,1121	3,1090	3,0362
1,0	3,0810	3,1118	3,1088	3,0359
1,5	3,0802	3,1110	3,1080	3,0353
2,0	3,0790	3,1098	3,1067	3,0341
2,5	3,0773	3,1081	3,1050	3,0325

Table 3-5 : Nombres d'onde en fonction de Pe et N à $Le = 1$ $Pr = 1$

Pe	k_c			
	$N = -0.099$	$N = -0.005$	$N = 0$	$N = 0.05$
0,0	—	3,1750	3,1718	3,0972
0,5	3,0805	3,0796	3,0765	3,0035
1,0	3,0792	3,0782	3,0752	3,0032
1,5	3,0789	3,0779	3,0748	3,0028
2,0	3,0781	3,0772	3,0741	3,0023
2,5	3,0770	3,0760	3,0728	3,0011
3,0	3,0752	3,0742	3,0712	2,9996

Table 3-6 : Nombres d'onde en fonction de Pe et N à $Le = 100$ $Pr = 10$

◆ Résumé

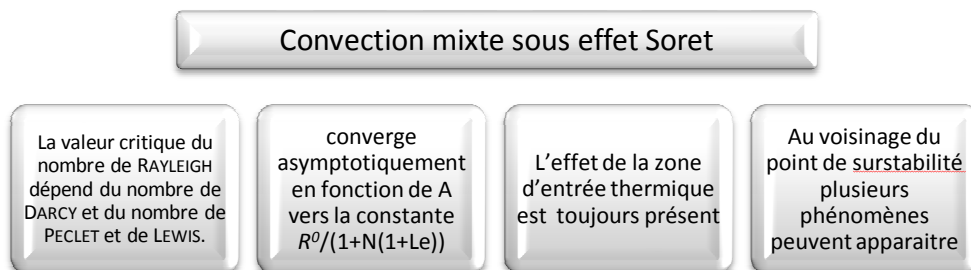


Figure 3-30: Résumé des principaux résultats obtenus en convection mixte

3.5 Conclusion

L'analyse linéaire de stabilité entreprise dans cette section a été présentée sous forme d'un découplage aussi bien mathématique que physique de chacun des problèmes élémentaires contribuant à la convection mixte sous effet SORET. On a commencé par la convection naturelle de RAYLEIGH BENARD, pour la présenter comme exercice de validation et comme problème de référence. Puis on est venu perturber ce système soit par l'effet SORET soit par un débit forcé, et à la fin par les deux phénomènes ensemble. On a montré que l'effet solutal est stabilisant ou déstabilisant selon le signe du taux de séparation N , autrement dit selon le fluide binaire lui-même et la concentration de référence. Il existe souvent pour chaque LEWIS une valeur de N négative telle que le fluide peut se mettre en surstabilité supercritique.

Avec la convection forcée, l'apparition des rouleaux est retardée grâce à l'effet stabilisant du nombre de Pe . La reconstruction de la solution perturbée a dévoilé la prévention d'une zone d'entrée thermique nécessaire à l'établissement de l'écoulement loin de la section d'admission. Un développement algébrique des équations matricielles a été en mesure de prouver que le problème peut être traité comme un écoulement forcé déstabilisé par un chauffage par le bas, ou comme un fluide en convection de RB stabilisé par un débit forcé. L'équivalence des deux situations est vérifiée numériquement.

Enfin on a couplé les deux problèmes afin de traiter le cas le plus général de cette étude (convection mixte sous effet SORET). Le problème apparaît d'une complexité rare, et la superposition de divers phénomènes physique rend chaque couple (Le, Pr) un cas à étudier, surtout au voisinage des points de surstabilité où l'on voit apparaître des influences spectaculaires sur la stabilité.

◆ Applications

Comme applications à ces problèmes on énumère deux grands axes.

Dans le cas de la convection naturelle avec effet Soret on cite particulièrement le cas de la séparation des espèces dans les gisements pétroliers, les colonnes de distillation à échelle industrielle, les problèmes de pollution dans les océans, les techniques de traitement thermo-chimique des matériaux et les bains de fusion des métaux.

En convection mixte sous effet Soret, on trouve d'autres applications telles que le traitement des surfaces par dépôt de vapeur chimique, et à grande échelle on note très particulièrement un problème à impact environnemental qui touche le climat de la terre, il s'agit des Ice-streams. Ce phénomène est dû à la fusion de la croûte de l'arctique et de l'antarctique, ce qui génère des écoulements d'eau douce dans les océans, l'effet de la thermodiffusion va influencer la salinité globale des mers, et les principaux courants marins, et par suite la faune et la flore marine et le climat global de la terre.

La stabilité linéaire permet de prédire les seuils de changement d'états macroscopiques de ces problèmes appliqués à échelle industrielle ou naturelle et par suite les limites de notre action si on veut intervenir pour le maintien ou le changement de l'un de ces états.

"La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou de dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives."

(Bertrand Russell / 1872-1970 / ABC de la relativité)

Chapitre 4

Mise en œuvre numérique des simulations 3D

Les équations de NAVIER-STOKES, même exprimées dans le cadre de l'approximation de BOUSSINESQ restent mathématiquement d'un formalisme particulièrement ardu. Il s'agit en effet d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace, non linéaires et fortement couplées. Aucun cadre général n'existant pour ce genre de problèmes, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des modélisations abordables mathématiquement. Les mathématiques appliquées ont ouvert un vaste chemin pour la résolution même approchée de ce problème. Plusieurs méthodes furent établies, et la course est continue vers la perfection. Les solutions numériques des équations de NAVIER-STOKES incompressibles laminaires ont été obtenues par des méthodes aux différences finies, aux éléments finis, aux volumes finis, ou par des méthodes spectrales, ou encore par LATTICE BOLTZMANN sur réseau. Il n'y a pas à ce jour d'algorithme particulier reflétant l'état de l'art pour la simulation des écoulements à bas nombre de REYNOLDS.

L'ensemble des simulations numériques de ce travail est effectué à l'aide d'un code 3D basé sur la méthode classique des volumes finis développée par SPALDING (voir PATANKAR). Vu le grand nombre de nœuds que présente une simulation tridimensionnelle et afin d'accélérer le calcul, une technique de maillage multigrille a été implémentée. Grâce à elle nous avons pu aborder des calculs « pharaoniques » dans des temps très raisonnables. La configuration géométrique étudiée est constituée d'une cavité parallélépipédique tridimensionnelle allongée remplie ou non d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire totalement miscible. Le fluide est supposé incompressible sauf pour le terme de la flottabilité d'ARCHIMEDE. Les conditions aux limites imposées sont de plusieurs types et seront détaillées selon l'application. L'effet SORET est pris en considération dans l'équation de conservation d'espèce. Nous simulerons principalement les écoulements de RB sous différentes hypothèses et conditions aux limites.

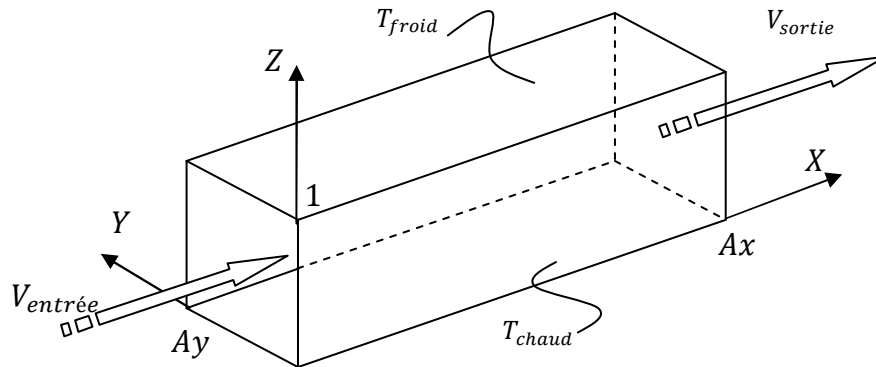


Figure 4-1 : Géométrie à étudier avec conditions aux limites sur les parois actives

4.1 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses de simplification retenues afin de réduire les équations générales aux problèmes étudiés dans ce travail sont les hypothèses classiques couramment retenues dans les études de la convection naturelle et mixte :

1. Le fluide étudié (saturant le milieu poreux si c'est le cas) est newtonien et incompressible
2. L'écoulement est laminaire.
3. Les propriétés physiques du fluide sont constantes (conductivité, viscosité,...) sauf pour la masse volumique dans le terme de force de volume (hypothèse de BOUSSINESQ). On considère que la masse volumique varie linéairement avec la température et la concentration du fluide dans l'enceinte. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho(T, C) = \rho_{ref} [1 - \beta_T(T - T_{ref}) - \beta_C(C - C_{ref})] \quad (4.1)$$

Où ρ_{ref} est la masse volumique de référence du fluide à la température T_{ref} et à la concentration C_{ref} . Les paramètres β_T et β_C sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique donnés par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_{ref}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho_{ref}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T \quad (4.2)$$

En général, la masse volumique d'un fluide décroît avec la température ($\beta_T > 0$) et augmente avec la concentration du constituant le plus dense $\beta_C < 0$.

4. L'effet DUFOR est supposé négligeable dans le milieu étudié.
5. L'effet SORLET dans l'équation de conservation de l'espèce est pris en compte.
6. La matrice du milieu poreux est supposée indéformable et en équilibre thermodynamique avec le fluide (approche « à une température »).
7. L'anisotropie en perméabilité du milieu poreux n'est pas prise en considération.
8. Le transfert d'énergie par rayonnement est négligé.
9. La diffusion de matière dans la matrice solide est négligée.

4.2 Équations simplifiées

Compte tenu des simplifications engendrées par les hypothèses précédemment citées, le système d'équations de conservation couplées qui régit l'écoulement et le transfert s'écrit dans le classement respectif ; conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, conservation de l'énergie et conservation des espèces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla V^* = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\varepsilon^2} V^* \nabla V^* = -\nabla P^* + \rho g \bar{z} - \frac{\mu}{K} V^* + \mu_{eff} \nabla^2 V^* \\ \sigma \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + V^* \nabla T^* = \nabla \left(\frac{\lambda_{eq}}{\rho C_p} \nabla T^* \right) \\ \varepsilon \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + V^* \nabla C^* = \nabla (D_C \nabla C^* + D_T \nabla T^*) \end{array} \right. \quad (4.3,4,5,6)$$

Notons que l'équation de la quantité de mouvement est vectorielle, et sera donc projetée sur les trois axes de la géométrie cartésienne étudiée. Le symbole \bar{z} désigne la direction du champ de pesanteur. Nous sommes donc face à un problème à six degrés de liberté : u, v, w, P, T et C . On notera une

par une étoile les variables dimensionnelles pour les différencier dans ce qui suit des grandeurs sans unités.

4.3 Systèmes d'équations adimensionnelles

4.3.1 Valeurs de références et grandeurs adimensionnelles

De manière générale, toutes les grandeurs mécaniques peuvent être exprimées à partir de quatre dimensions fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Or les phénomènes physiques sont indépendants du choix de l'unité, donc ils doivent nécessairement dépendre de combinaisons des différentes grandeurs intervenant au phénomène. Certaines combinaisons nous permettent d'écrire des nombres sans unité, ces nombres définissent aussi des similitudes entre les prototypes servant à examiner le même phénomène à différentes échelles. Il existe plus d'une façon de représenter un problème adimensionnel partant d'un problème physique dimensionnel de base, et ceci varie selon le choix des grandeurs de références. Pour les équations d'un écoulement en convection naturelle ou mixte nous avons deux choix 'standards' des grandeurs de références selon que l'écoulement est convectif ou diffusif. Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des valeurs de référence à choisir.

Grandeur	Cas diffusif	Cas convectif	Dimension
L_{ref}		H^*	[m]
V_{ref}	$\frac{\nu}{H^*}$	$\frac{a}{H^*}$ $\sqrt{g\beta\Delta T^*H^*}$	[m.s ⁻¹]
t_{ref}		$\frac{H^{*2}}{\nu}$	[s]
P_{ref}		$\rho_{ref} \times V_{ref}^2$	[kg.m ⁻¹ .s ⁻²]
T_{ref}		$\frac{1}{2}(T_{chaud} - T_{froid})$	[K]
Concentration		C_{ref} (voir discussion au § 4.3.2)	[mol/l]

Tableau 4-1 : Choix des grandeurs de références

La valeur C_0 est la concentration initiale du constituant le plus dense du mélange. Le choix de C_{ref} sera justifié avec plus de détails dans le paragraphe § 4.3.2. En utilisant les valeurs de références indiquées au Tableau 4-1, on définit les grandeurs adimensionnelles indiquées ci-dessous.

Coordonnées spatiales	$(x, y, z) = \frac{(x^*, y^*, z^*)}{H^*}$
Vitesse	$(u, v, w) = \frac{(u^*, v^*, w^*)}{V_{ref}}$
Pression	$P = \frac{P^*}{P_{ref}}$
Temps	$t = \frac{t^*}{t_{ref}}$
Température	$T = \frac{T^* - T_{ref}}{T_{chaud} - T_{froid}}$
Concentration	$C = \frac{C^* - C_{ref}}{C_{ref}}$

Tableau 4-2 : Variables adimensionnelles

En multipliant et en divisant les variables longueur, vitesse, pression, température et concentration dans le système d'équations (4.3,4,5,6) par les grandeurs de références on écrit un nouveau problème équivalent sans unités, où apparaît les variables sans unités et une famille de nombres adimensionnels usuels caractérisant la similitude des écoulements, et dont les valeurs sont les paramètres de contrôle de l'écoulement, du transfert de chaleur et du taux de séparation d'espèces dans la cavité. Ces paramètres sont classés, définis et interprétés [ci-dessous](#).

<i>Nombre ou grandeur</i>	<i>Définition</i>	<i>Signification</i>
Rapports d'aspect	$Ai = \frac{i}{H}, i = x, y$	Multiple de distance référence dans la direction i .
REYNOLDS	$Re = \frac{V^* H^*}{\nu}$	Rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité, les forces d'inertie sont déstabilisantes alors que les forces de viscosité sont stabilisantes.
PRANDTL	$Pr = \nu/a$	rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité thermique.
SCHMIDT	$Sc = \nu/D$	rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité massique.

LEWIS	$Le = Sc/P_r = a/D$	rapport de la diffusivité thermique à la diffusivité massique.
GRASHOF thermique	$Gr = \frac{g\beta_T \Delta T^* H^3}{\nu^2}$	Importance de la force d'ARCHIMEDE par rapport à la traînée visqueuse.
RAYLEIGH thermique	$Ra = Gr \times Pr$	Importance de la force d'ARCHIMEDE par rapport au produit de la traînée visqueuse par le taux de diffusion thermique
SORET dimensionnel	$S_T = D_T/D_C$	Rapport des coefficients de diffusion thermique et massique.
Taux de séparation	$N = S_T \times \frac{\beta_C}{\beta_T} C_{ref} (1 - C_{ref})$	Rapport entre les forces d'origine thermique et solutale
Chaleur spécifique	$\sigma = \frac{(\rho C_p)_{eq}}{(\rho C_p)_{fluide}}$	Rapport des chaleurs volumétriques du milieu équivalent et du fluide
diffusivité thermique équivalente	$a = \frac{\lambda_{eq}}{(\rho C_p)_{fluide}}$	Caractérise l'importance de la diffusion thermique dans le domaine.
Viscosité équivalente	Γ	Rapport de viscosité de BRINKMAN
DARCY	$Da = K/H^2$	Nombre caractérisant l'effet de la perméabilité du milieu poreux.

Tableau 4-3 : Paramètres de contrôle du problème

Les transferts de chaleur et de masse sont caractérisés par des nombres de NUSSELT et de SHERWOOD. Les valeurs locales respectives des transferts de chaleur et de masse sur les parois sont définies par :

Le nombre de NUSSELT :

$$Nu = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.7)$$

Et le nombre de SHERWOOD :

$$Sc = \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4.8)$$

où ΔT et ΔC sont respectivement les différences de température et de concentration. Les valeurs moyennes du nombre de NUSSELT et de SHERWOOD le long des parois actives sont exprimées par :

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{A_i} \int_0^{A_i} Nu \cdot di \quad \text{avec } i = x, y, z \quad (4.9)$$

$$\overline{Sc}_i = \frac{1}{A_i} \int_0^{A_i} Sc \cdot di \quad \text{avec } i = x, y, z \quad (4.10)$$

Les équations de conservation s'écrivent dans le cas où l'on retient les valeurs du cas diffusif $V_{ref} = \nu/H^*$ (Tableau 4-1) sous leur forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla V = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \Gamma \nabla^2 \cdot V + \frac{Ra}{Pr} \left(T + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{C_{ref}}{T_C - T_f} C \right) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Sc} \left(\nabla^2 \cdot C + \frac{S_T C_0 (1 - C_0) (T_C - T_f)}{C_{ref}} \nabla^2 \cdot T \right) \end{array} \right. \quad (4.11,12,13,14)$$

Ainsi, apparaissent des quantités caractérisant les effets solutaux. On utilisera ces quantités pour définir la valeur de la concentration de référence.

4.3.2 Choix de la concentration de référence

En examinant les termes contenant C_{ref} dans les équations (4.12) et (4.14), on extrait deux choix possibles pour la concentration de référence : $C_{ref} = \frac{\beta_T}{\beta_C} \Delta T$ ou $C_{ref} = -S_T C_0 (1 - C_0) \Delta T$.

◆ Discussion

Dans le cas où $C_{ref} = \frac{\beta_T}{\beta_C} \Delta T$

Le coefficient de la concentration dans le terme d'ARCHIMEDE de l'équation selon z de la quantité de mouvement est réduit à -1 , alors que le

coefficient du Laplacien de T de l'équation des espèces devient égal au taux de séparation N .

Dans le cas où $C_{ref} = -S_T C_0(1 - C_0)\Delta T$

Le coefficient de la concentration dans le terme d'ARCHIMEDE de l'équation selon z de la quantité de mouvement devient égal à N , alors que le coefficient du Laplacien de T de l'équation des espèces est réduit à -1.

Nous aurons donc six systèmes adimensionnels possibles selon les choix des grandeurs de références. Pour résumer tout ce qui a été développé on peut noter les points suivants :

1. Les variables non dimensionnelles qu'on sortira dépendent du choix de V_{ref} .
2. Le choix de C_{ref} va permettre de mettre l'information contenant le couplage entre température et espèces dans l'équation de Navier Stokes selon la direction de pesanteur ou dans l'équation des espèces.
3. Si β_C et β_T sont positifs alors le signe de N coïncidera avec le signe du SORÉT.
4. N définit le couplage entre la température et la concentration, ainsi on contrôle N en faisant varier la température et la concentration initiale du constituant le plus dense du mélange binaire.
5. La séparation maximale possible est : $C_{max} = S_T C_0(1 - C_0)\Delta T$

◆ Récapitulatif :

Nous détaillons les équations obtenues selon les choix de V_{ref} et de C_{ref} . Ces équations désignent un seul problème réécrit de plusieurs manières homologues en utilisant les grandeurs de similitude. On les évoque ici dans quatre buts.

1. Le premier est que nous avons eu besoin de changer les adimensionnements pour nous aligner avec les textes de différents auteurs lors des exercices de validation.
2. Le deuxième est un souci de convergence du calcul, car dans certaines gammes de paramètres il est plus facile de converger avec une forme que d'autres.
3. Le troisième est académique servant à fournir au lecteur un recueil synthétique présentant les formes sans dimensions avec une discussion des choix de référence.
4. Le quatrième est une préparation au développement informatique du schéma de résolution, cette préparation consiste à répartir les équations en différents termes se différenciant uniquement par les coefficients sans dimension.

Six formes générales sont présentées.

Forme 1 : $V_{ref} = \sqrt{g\beta\Delta T^*H^*}$ et $C_{ref} = \left[\frac{\beta_T}{\beta_C} \Delta \right] T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \frac{\Gamma}{Re} \nabla^2 \cdot V + \frac{Ra}{Re^2 Pr} (T - C) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Re Sc} (\nabla^2 \cdot C + N \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Forme 2 : $V_{ref} = \sqrt{g\beta\Delta T^*H^*}$ et $C_{ref} = S_T C_0 (1 - C_0) \Delta T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \frac{\Gamma}{Re} \nabla^2 \cdot V + \frac{Ra}{Re^2 Pr} (T + NC) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Re Sc} (\nabla^2 \cdot C - \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Forme 3 : $V_{ref} = v/H^*$ et $C_{ref} = \left[\frac{\beta_T}{\beta_C} \right] \Delta T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \Gamma \nabla^2 V + \frac{Ra}{Pr} (T - C) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Sc} (\nabla^2 \cdot C + N \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Forme 4 : $V_{ref} = v/H^*$ et $C_{ref} = S_T C_0 (1 - C_0) \Delta T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \Gamma \nabla^2 \cdot V + \frac{Ra}{Pr} (T + NC) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Sc} (\nabla^2 \cdot C - \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Forme 5 : $V_{ref} = a/H^*$ et $C_{ref} = \left[\frac{\beta_T}{\beta_C} \right] \Delta T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{1}{Pr \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{Pr \varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\frac{1}{Pr} \nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \Gamma \nabla^2 \cdot V + Ra (T - C) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 \cdot C + N \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Forme 6 : $V_{ref} = a/H^*$ et $C_{ref} = S_T C_0 (1 - C_0) \Delta T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{1}{Pr \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{Pr \varepsilon^2} V \cdot \nabla \cdot V = -\frac{1}{Pr} \nabla \cdot P - \frac{1}{Da} V + \Gamma \nabla^2 \cdot V + Ra (T + NC) \bar{k} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot T = \nabla^2 \cdot T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla \cdot C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 \cdot C - \nabla^2 \cdot T) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

4.4 Conditions aux limites

Pour la vitesse on utilise en général des conditions de DIRICHLET, i.e. V est constante ou fonction de la couche limite sur la face d'entrée du fluide et constante nulle pour le cas de non glissement. Pour la température plutôt un mixage entre la condition de DIRICHLET de NEWMAN est imposé, en effet il existe des parois où l'on impose une température chaude ou froide, alors sur le reste des parois on impose un gradient thermique nul.

4.4.1 Conditions aux limites de la concentration

La condition à la frontière la plus délicate est celle de la concentration, du fait qu'elle se réajuste avec la température par la condition de flux nul. L'expression du flux découle de la loi de FICK et dépend aussi bien de T que de C .

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = -\rho(D_C \vec{\nabla} C^* + D_T C_0 (1 - C_0) \vec{\nabla} T^*) \cdot \vec{n} \quad (4.21)$$

Afin de rendre sans unités l'expression du flux de matière on multiplie et on divise par les grandeurs de références les variables de l'équation (4.21).

$$\begin{aligned} j &= -\rho D_C \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C^* \cdot C_{ref}}{H^* \cdot C_{ref}} \right) + \frac{D_T}{D_C} C_0 (1 - C_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T^* \cdot T_{ref}}{H^* \cdot T_{ref}} \right) \right) \\ \Rightarrow j &= -\frac{\rho D_C \cdot C_{ref}}{H^*} \left(\nabla C + \frac{D_T}{D_C} C_0 (1 - C_0) \frac{T_{ref}}{C_{ref}} \nabla T \right) \\ \Rightarrow j &= -\frac{\rho D_C \cdot C_{ref}}{H^*} (\nabla C + S_T \nabla T) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Une condition d'imperméabilité à l'espèce sur une frontière est équivalente à un flux j nul ce qui engendre :

$$0 = (\nabla C + S_T \nabla T) \quad (4.23)$$

On résume l'ensemble des conditions aux frontières applicables sur n'importe quelle paroi du parallélépipède de rapports d'aspects A_x et A_y dans la table 4.4.

4.4.2 Conditions aux limites d'entrée :

Le profil de vitesse $U_{Poiss}(y, z)$ pour un écoulement tridimensionnel dans un canal à extensions finies est solution de l'équation de POISSON (4.24) avec conditions de non glissement aux parois latérales rigides.

$$\frac{\partial^2 U_{Poiss}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{Poiss}^*}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (4.24)$$

Analytiquement $U_{Poiss}(y, z)$ est donnée par l'expression ci-dessous, où la vitesse moyenne d'un écoulement de POISEUILLE plan (i.e. dans un canal 2D) s'exprime par l'égalité $U^0 = -(H^2/12\mu)(\partial P^*/\partial x^*)$.

$$U_{Poiss}^* = U^0 \left(6z(1-z) + \frac{48}{\pi^3} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cosh \left[(2n+1)\pi \left(y - \frac{A_y}{2} \right) \right] \cos \left[(2n+1)\pi \left(z - \frac{1}{2} \right) \right]}{(2n+1)^3 \cosh \left[(2n+1)\pi \frac{A_y}{2} \right]} \right) \quad (4.25)$$

La vitesse moyenne U_{Poiss}^* de l'écoulement de POISEUILLE est donnée par :

$$U_{moy}^* = U^0 \left(1 + \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sinh \left[(2n+1)\pi \frac{A_y}{2} \right] \sin \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \right]}{(2n+1)^5 A_y \cosh \left[(2n+1)\pi \frac{A_y}{2} \right]} \right)$$

Certes ces vitesses sont dimensionnelles. Ainsi lors de l'implémentation des conditions aux limites nous avons à établir le rapport de ces grandeurs par la vitesse de référence. Cette solution de POISEUILLE n'est utilisable que lorsqu'on prend U_{moy}^* comme vitesse de référence. Par suite on se ramène aux formes adimensionnelles (2.15) et (2.16). Dans le cas où on a une cavité peu élargie nous pouvons utiliser la solution approchée de l'équation de POISSON donnée par :

$$V(0, y, z) = 6RePr(z - z^2) \left(\frac{y}{A_y} - \left(\frac{y}{A_y} \right)^2 \right) \quad (4.26)$$

Le profil à l'entrée peut être décrit comme parabole spatiale. Ci-dessous la visualisation vectorielle du sujet.

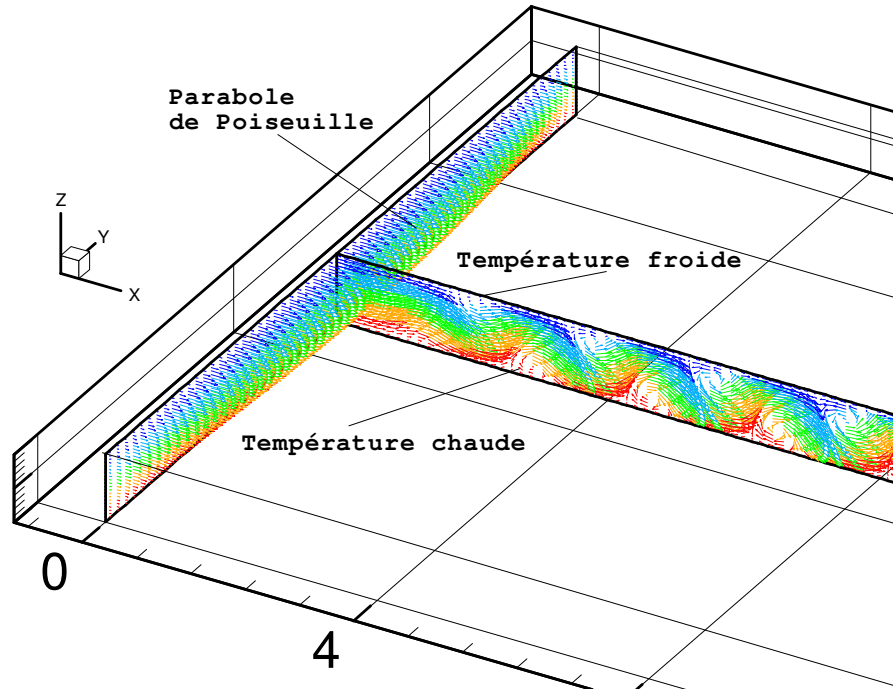


Figure 4-2 : Profil de POISEUILLE à l'entrée, solution de l'équation de POISSON

4.4.3 Conditions aux limites de sortie :

Lors de l'étude des écoulements binaires, sous effet SORLET, traversant un domaine chauffé par le bas et refroidi par le haut, nous allons nous intéresser aux ondes progressives se formant sous l'effet de la convection. Ces ondes se manifestant sous forme de rouleaux conditionnant la circulation de la matière et de l'énergie, et qui ne se déplacent pas nécessairement en phase avec l'écoulement moyen. D'autre part l'une des hypothèses qu'on retient est que le domaine est très long, chose qu'on ne peut pas réaliser numériquement, pour cela on doit restreindre le domaine de calcul, ce qui fait apparaître des frontières du domaine de calcul qui sont arbitrairement déterminées par le modélisateur, et sur lesquelles on applique des conditions aux limites dites 'numériques', par opposition aux conditions aux limites usuelles, issues du problème physique.

Au passage de ces frontières l'écoulement doit subir des conditions aux limites passives vis-à-vis de la qualité de la solution obtenue. En effet, pour être pertinentes ces conditions aux limites numériques doivent comporter une modélisation des interactions entre le domaine de calcul et la partie complémentaire du domaine d'étude, afin d'introduire implicitement dans le premier l'influence virtuelle du second. Notre problème est donc trouver les conditions aux limites qu'on devra imposer

afin que les rouleaux mobiles ne soient pas altérés par l'ouverture imaginaire imposée par notre limitation sur la longueur du domaine ou par découplage du domaine de calcul avec un réservoir inférieur. La principale difficulté à surmonter provient du fait que tous les champs (vitesse, pression, température, concentration) sont inconnus sur la section de sortie du domaine de calcul, et que par conséquent les conditions aux limites sur la section de sortie sont de nature implicite. Les mathématiques appliquées donnent, selon la nature des équations à résoudre, quelques solutions dans les cas limites : lorsque les équations sont de nature elliptique, on doit nécessairement imposer des conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine, tandis que dans le cas hyperbolique, il ne faut en imposer que sur les frontières où le flux est entrant au domaine. Cependant, quel type de conditions aux limites doit-t-on imposer dans les cas de nature parabolique, qui nous intéressent ici ? Pour cela nous partons des équations générales de la mécanique des milieux continus.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \vec{V} = 0 & / \Omega \\ \frac{D(\rho \vec{V})}{Dt} = \vec{\nabla} \bar{\sigma} + \vec{f}_V & / \Omega \\ \vec{V} = \vec{V}_n & / \Omega_E \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) & / \Omega_S \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Dans ces équations on injecte la loi de comportement de fluide newtonien.

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \mu \left(\overline{\nabla \vec{V}} + (\overline{\nabla \vec{V}})^T \right) \quad (4.28)$$

La difficulté réside donc à maintenir le caractère implicite de l'expression de la contrainte (qui contient la pression) dans le cadre de résolution par un algorithme de projection (SIMPLE par exemple), dont le principe consiste à fractionner le problème couplé vitesse-pression en deux parties, au sein d'une démarche itérative. La première étape de l'algorithme concerne la détermination du champ de vitesse, par résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide (à champ de pression connu), tandis que la seconde étape est consacrée à la détermination de la correction du champ de pression assurant l'incompressibilité de l'écoulement précédemment calculé (étape de projection). MEDALE¹ (2006) propose l'adaptation de l'algorithme de projection inconditionnellement stable développé par GUERMOND et QUARTAPELLE (1997), afin d'y introduire le concept de condition aux limites de sortie proposée par PAPANASTASIOU et al. (1992). L'idée consiste à décomposer la pression en

¹- Marc Medale proposition pour benchmark de convection mixte PRB.

deux contributions : la première est relative à la satisfaction de l'incompressibilité produite par l'étape de projection, tandis que la seconde tient compte de la présence de conditions aux limites de type NEUMANN (ou DIRICHLET non homogène) pour la pression.

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.30)$$

On démontre que les équations associées à la résolution des deux champs de pression sont les suivantes :

Champ de pression associé à la satisfaction de l'incompressibilité p_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 & / \partial \Omega_E \\ p_1 = 0 & / \partial \Omega_S \end{cases} \quad (4.31)$$

Champ de pression associé à la contrainte de sortie désigné p_2 :

$$\begin{cases} p_2 = 0 & / \partial \Omega_E \\ \frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) & / \partial \Omega_S \end{cases} \quad (4.32)$$

Cet ensemble de conditions sur le champ de pression permet de satisfaire une condition de passivité de la condition de sortie, que l'on peut interpréter par le fait que la contrainte mécanique ne soit pas modifiée au passage de la frontière de sortie. Ceci peut s'écrire formellement :

$$\frac{\partial(\bar{\sigma} \cdot \vec{n})}{\partial n} = \vec{0} \quad / \partial \Omega_S \quad (4.33)$$

En réécrivant l'égalité (4.32). La condition de continuité de la contrainte sera sous sa forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 n} \quad / \partial \Omega_S \quad (4.34)$$

Cette condition sera implémentée sur un ensemble de nœuds imaginaires nécessaires pour créer de nœuds intermédiaires où on calcule la vitesse. Ainsi se formule finalement la condition qui permet de considérer la frontière de sortie comme inexistante assurant une continuité de l'écoulement considéré comme s'il est entre deux plaques infinies.

4.4.4 Résumé des conditions aux limites

L'ensemble des conditions aux frontières possibles dans notre problème est résumé dans la table ci-dessous.

<i>Condition sur une paroi</i>		<i>Expression sur la paroi</i>
Vitesse à l'entrée	Profil approché de POISEUILLE	$V(0, y, z) = 6RePr(z - z^2) \left(\frac{y}{A_y} - \left(\frac{y}{A_y} \right)^2 \right)$
	Profil exact de POISEUILLE	$V(0, y, z) = U_{Poiss}$
	Vitesse uniforme	$V(0, y, z) = Re$
Adhérence		$V(x, y, z) = 0$
Paroi adiabatique		$\nabla T \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Température imposée		$T = T_c \text{ ou } T_f$
Imperméabilité à la masse		$\nabla C = S_T \cdot \nabla T$
Vitesse à la sortie		$\partial u / \partial n = 0$
Pression à l'entrée		$\partial P / \partial n = 0$
Pression à la sortie		$\frac{\partial P}{\partial n} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$

Tableau 4-4 : Expressions des conditions aux frontières.

4.5 Résolution numérique

4.5.1 Discrétisation des équations

De manière générale, les systèmes adimensionnels des équations de transport peuvent être décomposés en une somme d'un terme transitoire, un terme de diffusion et un autre d'advection, munis d'un ensemble de coefficients provenant de la mise sous forme non dimensionnée. On désigne par :

- ϕ = degré de liberté
- τ_ϕ = coefficients de transition
- C_ϕ = coefficients d'advection
- Γ_ϕ = coefficients de diffusion
- S_ϕ = termes sources

La forme générale des équations de transport est :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\tau_\phi \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(u C_\phi \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v C_\phi \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w C_\phi \phi) \\ &= \frac{\partial y}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial y}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le tableau 4-5 résume de manière synthétique l'écriture des équations de conservation. Il est à noter que certaines formes adimensionnelles sont plus adaptées à certains problèmes plus que d'autres. Ces équations non linéaires fortement couplées seront résolues numériquement sur un ordinateur P.C. en utilisant la programmation de l'algorithme SIMPLE. Le code outil de la simulation est conçu de façon à supporter ces formes non dimensionnelles selon le choix des paramètres d'entrée de l'utilisateur. La méthode des volumes finis présentée par PATANKAR est utilisée pour former les intégrales sur les volumes finis. Cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents nœuds, chacun d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire sur lequel on intègre les équations aux dérivées partielles. Les dérivées partielles étant linéarisées en utilisant le théorème de TAYLOR-YOUNG.

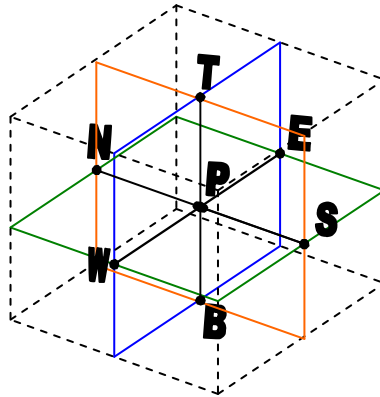


Figure 4-3 : Volume élémentaire de contrôle.

L'écriture des équations sous la forme (4.35) permet une grande flexibilité de programmation, en ce sens qu'on résout une seule forme d'équations. L'usage des coefficients supplémentaires devant chaque terme permet d'enlever ou laisser ce terme selon les hypothèses de base.

V_{ref}	ϕ	τ_ϕ		C_ϕ			Γ_ϕ			S_ϕ			
		$\sqrt{g\beta\Delta TH}$	$\frac{v}{H}$	$\frac{a}{H}$	$\sqrt{g\beta\Delta TH}$	$\frac{v}{H}$	$\frac{a}{H}$	$\sqrt{g\beta\Delta TH}$	$\frac{v}{H}$	$\frac{a}{H}$	$\sqrt{g\beta\Delta TH}$	$\frac{v}{H}$	$\frac{a}{H}$
Équation :	Continuité	V	0		1			0			0		
	V suivant x	u	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon^2}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon^2}$	$\frac{\Gamma}{Re}$	Γ		$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{Da}u$			
	V suivant y	v	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon^2}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon^2}$	$\frac{\Gamma}{Re}$	Γ		$-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{Da}v$			
	V suivant z	w	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon^2}$	$\frac{1}{Pr \varepsilon^2}$	$\frac{\Gamma}{Re}$	Γ		$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{Da}w$	$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{Da}w$	$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{Da}w$	
	Température	T	σ		1			$\frac{1}{Re Pr}$	$\frac{1}{Pr}$	1	0		
	Espèces	C	ε		1			$\frac{1}{Re Sc}$	$\frac{1}{Sc}$	$\frac{1}{Le}$	$\Gamma_\phi \times B \times \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$		

Table 4-5 : Ce tableau résume les termes sources et les coefficients des différentes équations de transport selon la forme non dimensionnelle. Il sert de référence pour la programmation de la méthode de résolution du problème

A et B dépendent du choix de C_{ref} et sont définis comme suit :

	$C_{ref} = -S_T C_0 (1 - C_0) \Delta T$	$C_{ref} = (\beta_T / \beta_C) \Delta T$
A	N	-1
B	-1	N

Nous pouvons réduire l'équation (4.35) sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(J_x) + \frac{\partial}{\partial y}(J_y) + \frac{\partial}{\partial z}(J_z) = S_\phi \quad (4.36)$$

$$J_x = u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; J_x = u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; J_x = u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; J = \sum_i J_i \quad i = x, y, z$$

En intégrant l'équation (4.36) à travers le volume de contrôle de la Figure 4-3, on aboutit à la somme discrète (4.37) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla J d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_p^{n+1} + \phi_p^n}{\Delta \tau} \Delta V + (J_e - J_w) \Delta z \Delta y + (J_n - J_s) \Delta z \Delta x + (J_t - J_b) \Delta x \Delta y \\ = S_\phi \Delta V \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les quantités J_i avec $i = e, w, n, s, t, b$ représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle et $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ est le volume de contrôle total. Lorsqu'on intègre l'équation de conservation de la masse sur un volume de contrôle on aboutit à une égalité de la forme :

$$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b = 0 \quad (4.39)$$

où F_i représentent les débits massiques à travers les faces de la maille de contrôle.

$F_e =$	$F_w =$	$F_n =$	$F_s =$	$F_t =$	$F_b =$
$u_e \Delta y \Delta z$	$u_w \Delta y \Delta z$	$v_n \Delta x \Delta z$	$v_s \Delta x \Delta z$	$w_t \Delta x \Delta y$	$w_b \Delta x \Delta y$

On multiplie l'équation (4.38) par ϕ_p et on soustrait le produit de (4.37)

$$\begin{aligned} \frac{\phi_p^{n+1} + \phi_p^n}{\Delta \tau} \Delta V + (J_e \Delta z \Delta y - F_e \phi_p) + (J_w \Delta z \Delta y - F_w \phi_p) \\ + (J_n \Delta z \Delta x - F_n \phi_p) + (J_s \Delta z \Delta x - F_s \phi_p) + (J_t \Delta x \Delta y - F_t \phi_p) \\ + (J_b \Delta x \Delta y - F_b \phi_p) \\ = S_\phi \Delta V \end{aligned} \quad (4.40)$$

PATANKAR propose d'écrire les fonctions $a_i = (\phi_p - \phi_i) = J_i \Delta S - F_i \phi_{p_i}$ $i = e, w, n, s, t, b$ de la manière explicitée ci-dessous. Ces fonctions d'interpolation varient selon le nombre de PECLET de maille Pe_i .

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + B \quad (4.41)$$

Les coefficients d'approximation $a_E, a_W, a_N, a_S, a_T, a_B$ sont définis en fonction de l'interpolation de la valeur ϕ entre deux points voisins du maillage, B est un groupement qui contient le terme source et le terme $a_p \phi_p$ est la quantité calculée au pas précédent.

$(J_e \Delta z \Delta y - F_e \phi_p) = a_E (\phi_p - \phi_E)$	$a_E = D_e \cdot A(Pe_e) + \ -F_e, 0 \ $
$(J_w \Delta z \Delta y - F_w \phi_p) = a_W (\phi_p - \phi_W)$	$a_W = D_w \cdot A(Pe_w) + \ F_w, 0 \ $
$(J_n \Delta z \Delta x - F_n \phi_p) = a_N (\phi_p - \phi_N)$	$a_N = D_n \cdot A(Pe_n) + \ -F_n, 0 \ $
$(J_s \Delta z \Delta x - F_s \phi_p) = a_S (\phi_p - \phi_S)$	$a_S = D_s \cdot A(Pe_s) + \ F_s, 0 \ $
$(J_t \Delta x \Delta y - F_t \phi_p) = a_T (\phi_p - \phi_T)$	$a_T = D_t \cdot A(Pe_t) + \ -F_t, 0 \ $
$(J_b \Delta x \Delta y - F_b \phi_p) = a_B (\phi_p - \phi_B)$	$a_B = D_b \cdot A(Pe_b) + \ F_b, 0 \ $

Tableau 4-6 : Schémas d'approximations

où est $A(|Pe_i|)$ $i = e, w, n, s, t, b$ la fonction d'interpolation avec la variable P_i qui est le nombre de PECLLET de maille. Les approximations $A(|Pe_i|)$ et les schémas d'interpolation seront explicitement détaillés en annexe. La substitution dans l'équation (4.40) des quantités $J - F \phi_p$ par $a_i (\phi_p - \phi_i)$ conduit à une relation algébrique entre les quantités de la variable ϕ au centre de la maille et aux nœuds adjacents aux faces du volume de contrôle :

$$B = S_\phi \Delta V + a_p^{n-1} \phi_p^{n-1} \quad \text{où} \quad a_p^{n-1} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (4.42)$$

où D_i sont les coefficients de diffusion, ou encore appelés conductances, et sont donnés par les expressions :

$D_e =$	$D_w =$	$D_n =$	$D_s =$	$D_t =$	$D_b =$
$\frac{\Gamma_e \Delta x \Delta z}{\delta x)_e}$	$\frac{\Gamma_w \Delta x \Delta z}{\delta x)_w}$	$\frac{\Gamma_n \Delta y \Delta z}{\delta y)_n}$	$\frac{\Gamma_s \Delta y \Delta z}{\delta y)_s}$	$\frac{\Gamma_t \Delta y \Delta x}{\delta z)_t}$	$\frac{\Gamma_b \Delta y \Delta x}{\delta z)_b}$

Tableau 4-7 : Coefficients de diffusion

Le nombre de PECLLET de maille est défini comme suit :

$$Pe_i = \frac{F_i}{D_i} = \frac{\text{convection}}{\text{conduction}}, \quad i = e, w, n, s, t, b$$

$Pe_e =$	$Pe_w =$	$Pe_n =$	$Pe_s =$	$Pe_t =$	$Pe_b =$
$\frac{u_e \delta x)_e}{\Gamma_e}$	$\frac{u_w \delta x)_w}{\Gamma_w}$	$\frac{u_n \delta x)_n}{\Gamma_n}$	$\frac{u_s \delta x)_s}{\Gamma_s}$	$\frac{u_e \delta x)_t}{\Gamma_t}$	$\frac{u_e \delta x)_b}{\Gamma_b}$

4.5.2 Accélération de convergence – technique multigrille :

En géométrie tridimensionnelle, le calcul est généralement fastidieux à cause du grand nombre de nœuds qui engendre une amplification légendaire d'opérations logiques dans les machines de simulation. A titre de citation, pour une grande partie de nos simulations nous utilisons un maillage $202 \times 122 \times 42 = 1035048 > 10^6$ points, nombre déjà très grand par rapport aux calculs bidimensionnels, ainsi le temps inhérent du calcul sur un tel nombre de points sera colossal avec les méthodes classiques. La technique multigrille offre l'avantage de réduire le temps de calcul d'une façon comparable par rapport aux codes 2D, voire mieux, et ce en accélérant la convergence vers la solution en passant par interpolation de solutions calculées sur une grille grossière vers une grille plus fine. Cette technique a été en 1970 pour la première fois mise en pratique par BRANDT (1977). Il n'existe pas un algorithme universel multigrille capable de fournir des solutions pour toutes les équations paraboliques, ainsi cette technique a connu plusieurs variantes se basant sur deux approches distinctes. La première approche, nommée 'méthode multigrille', est l'accélération de la convergence des méthodes de relaxation traditionnelles, définies sur une grille de finesse pré-spécifiée. Dans ce cas, on a besoin de définir le problème (i.e. l'évaluation des termes sources) uniquement sur cette grille. Les autres grilles utilisées par cette méthode pourront être évaluées comme adjonctions temporaires de calcul. La seconde approche, nommée 'the Full MultiGrid (FMG) method', nécessite la définition du problème sur des grilles de tailles différentes, généralement en discrétisant les mêmes EDP en des équations à différences finies avec des pas de maillage spatiaux différents. Par cette approche, la méthode donne des solutions successives dans des grilles de plus en plus fines. On peut décider à propos de l'arrêt du calcul de la solution à une finesse de maillage spécifiée, ou contrôler les erreurs de troncature dues à la discrétisation, et décider l'arrêt uniquement quand ces erreurs sont tolérablement petites. Dans ce qui suivra nous expliciterons quelques aspects de la mise en œuvre de la technique. D'un

point de vue algorithmique, à chaque itération globale, on construit l'approximation du second membre et des éléments constitutifs de la matrice implicite. Dans le cas d'approximations par volumes finis sur des maillages structurés, la factorisation LU spatiale de la matrice peut être effectuée et la largeur de bande est inconnue a priori. C'est pourquoi on résout par relaxation. L'analyse de FOURIER (en espace), ou analyse modale, de systèmes linéaires représentatifs des équations à résoudre après discrétisation d'équations aux dérivées partielles, permet d'ordonner les composantes de l'erreur itérative suivant les valeurs d'un (ou plusieurs) paramètres fréquentiels, la valeur de la plus haute fréquence étant liée au pas de discrétisation en espace, ou, à l'inverse, au nombre de degrés de liberté. Un principe de base concernant les méthodes itératives classiques, telles que l'itération de JACOBI, est le suivant : l'itération agit avec la plus grande efficacité sur les composantes de l'erreur de hautes fréquences ; à l'inverse, ce sont les composantes de basses fréquences qui persistent et sont la manifestation de la raideur du système. Par contre, ces modes de basses fréquences, qui sont la représentation discrète de fonctions lisses des coordonnées d'espace, peuvent être interpolés sans grande perte de précision sur des grilles de moindre finesse. La méthode multigrille due à HACKBUSCH (1985)- BRIGGS (1987)- WESSELING (1991)- DESIDERI (1998), est issue de cette observation. On construit a priori une hiérarchie de niveaux de grille, associés à des intervalles de fréquences différents. Une méthode itérative de type classique, dite lisseur est utilisée pour atténuer efficacement les modes de hautes fréquences de l'erreur associés à la discrétisation la plus fine ; le problème résiduel est ensuite reformulé sur une grille plus grossière, sur laquelle on lisse à nouveau avant de transférer le problème sur une grille encore plus grossière, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le problème devienne trivial. On construit ensuite à l'inverse des approximations sur les différentes grilles de dimensions croissantes par prolongement (et éventuellement lissage)¹.

◆ Concept global de la technique

L'idée clef de la technique multigrille peut être saisie en considérant le cas simple de deux grilles. D'une manière générale, nous pouvons écrire les équations de notre problème sous la forme (4.43).

¹ En procédant de la sorte, les phases de lissage associées aux différentes grilles éliminent efficacement les composantes de l'erreur itérative suivant les différentes fréquences, jusqu'à la plus basse qui est éliminée par résolution directe d'un système trivial. Dans le cas d'un problème linéaire elliptique, la théorie permet d'établir que la complexité de la méthode multigrille est proportionnelle au nombre de degrés de liberté. Cela signifie que le coût de résolution du système à la précision fixée par l'erreur d'approximation est directement proportionnel au nombre d'inconnues du problème.

$$L\phi = S \quad (4.43)$$

où L est un opérateur linéaire défini pour chaque variable ϕ en se référant au tableau 4-5, et S est le terme source. L'équation (4.43) est discrétisée sur une grille avec une finesse $h(x, y, z)$, uniforme ou variable. Le résultat de cette étape s'écrit sous la forme algébrique linéaire :

$$L_h\phi_h = S_h \quad (4.44)$$

Soit ϕ_h une solution approximative de l'équation (4.44). Nous utiliserons le symbole Φ_h pour désigner la solution exacte. L'incertitude par rapport ϕ_h est :

$$v_h = \phi_h - \Phi_h \quad (4.45)$$

Le résidu (ou défaut) s'écrit alors :

$$d_h = L_h\phi_h - S_h \quad (4.46)$$

A ce stade nous aurons besoin de faire une approximation de l'opérateur L_h et ce dans le but de trouver v_h . Les méthodes itératives classiques, comme par exemple JACOBI ou GAUSS-SEIDEL, peuvent fournir une solution approximée en chaque itération.

$$L_h^*v_h^* = -d_h \quad (4.47)$$

où L_h^* est un opérateur plus simple que L_h . Par exemple est une matrice triangulaire inférieure dans les itérations de GAUSS-SEIDEL. L'approximation suivante est générée par :

$$(\Phi^{new})_h = \Phi_h + v_h^* \quad (4.48)$$

Nous allons maintenant construire une approximation L_H sur une grille plus grossière de finesse $H(x, y, z)$, nous prendrons $H = n \times h$, où n est entier (autres choix sont possibles). Le nouveau résidu s'écrit :

$$L_H^*v_H^* = -d_H \quad (4.49)$$

Puisque L_H a une dimension plus petite, (4.49) sera plus facile à résoudre que (4.47). Pour définir le résidu d_H sur la grille grossière, nous avons recours à un opérateur de restriction \mathfrak{R} qui restreint d_h à la grille grossière.

$$d_H = \mathfrak{R} \times d_h \quad (4.50)$$

L'opérateur restriction est aussi appelé opérateur *fine-to-coarse* ou encore opérateur *injection*. Une fois nous avons une solution v_H^* de l'équation (4.48), nous aurons besoin un opérateur de prolongation \mathcal{P} qui prolonge ou interpole la correction vers la grille plus fine.

$$V_h^* = \mathcal{P}v_H^* \quad (4.51)$$

L'opérateur prolongation est aussi appelé opérateur *coarse-to-fine* ou encore opérateur d'*interpolation*. Les deux opérateurs \mathfrak{R} et \mathcal{P} sont tous les deux choisis pour être linéaires. Finalement l'approximation est mise à jour selon l'égalité (4.52).

$$(\Phi^{new})_h = \Phi_h + V_h^* \quad (4.52)$$

Résumons le schéma d'un pas de correction sur une grille grossière.

1. calculer le résidu sur la grille fine par (4.46).

2. faire la restriction du résidu par (4.50).
3. résoudre exactement (4.49) sur la grille grossière pour la correction.
4. prolonger (interpoler) la correction pour la grille fine par (4.51).
5. calculer l'approximation suivante par (4.52).

Nous allons énumérer les avantages et les défauts de la relaxation et de la correction sur la grille grossière. Considérons l'erreur v_h développée en série de FOURIER. Appelons les composants dans la moitié inférieure du spectre de fréquences les 'lisseurs' ou '*smoothers*', et les composants des hautes fréquences les 'non lisseurs' ou '*nonsmooth*'. La convergence devient très lente aux voisinages de h tendant vers zéro, autrement quand nous avons un grand nombre de points dans le maillage. La raison de ce ralentissement de convergence est que les *smoothers* sont légèrement réduits en amplitude en chaque itération. Il est remarquable que plusieurs méthodes de relaxation réduisent largement l'amplitude des '*nonsmoothers*' en chaque itération, ce sont de bons '*smoothers*'.

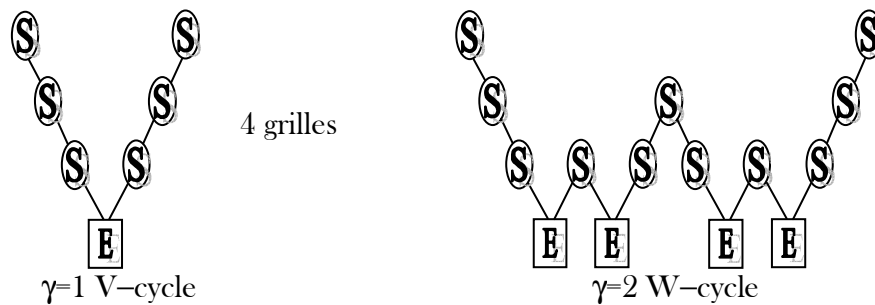


Figure 4-4 : Structures des cycles multigrilles. S désigne 'smoothing', E désigne la solution exacte sur la grille la moins fine. Chaque ligne descendante symbolise la restriction R alors que chaque ligne ascendante symbolise la prolongation P. La grille la plus fine est au sommet de chaque diagramme

Dans un cycle à deux grilles, les composants de l'erreur avec une longueur d'onde $\leq 2H$ ne sont pas représentables sur la grille grossière, et par suite irréductibles à zéro sur cette grille. Mais c'est exactement ces composantes hautes fréquences qui seront réduites par relaxation sur la grille fine. Une itération sur un maillage multigrille, de la grille fine vers la grille moins fine et réciproquement s'appelle *cycle*. Soit γ le nombre d'itérations effectuées entre deux niveaux de grilles, la structure exacte d'un cycle dépend de la valeur γ . Le cas $\gamma = 1$ est appelé V-cycle, alors que pour $\gamma = 2$ on l'appelle W-cycle. Ce sont les cas les plus populaires dans la pratique multigrille.

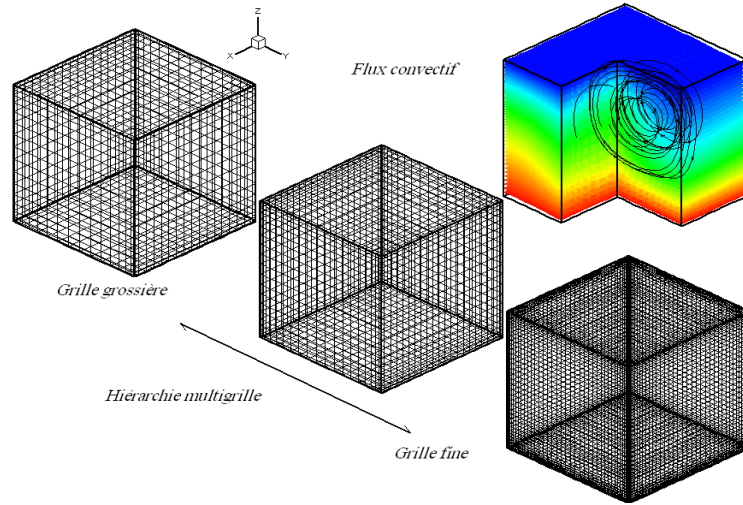


Figure 4-5 : Schéma explicatif de l'affinement des grilles

◆ **Algorithme ‘Full MultiGrid’ FMG :**

Le calcul commence par une première approximation obtenue en interpolant une solution sur la grille grossière.

$$\Phi_h = \mathcal{P} \times \Phi_H \tag{4.53}$$

La solution sur cette grille est elle même obtenue par un processus FMG similaire sur la grille moins fine adjacente, et ainsi de suite jusqu’au niveau le plus grossier, où on utilise la solution exacte. Contrairement à la méthode multigrille simple qui n’utilise le RHS ‘right-Hand Side’ S uniquement sur la grille la plus fine, le FMG l’utilise sur toutes les grilles. Si les conditions aux limites sont homogènes on peut utiliser $S_H = \mathcal{R}.S_h$. Cet usage n’étant pas toujours vrai pour des conditions non homogènes. Dans ce cas il vaut mieux discrétiser S sur chaque grille. Notons que l’algorithme FMG produit une solution dans chaque niveau.

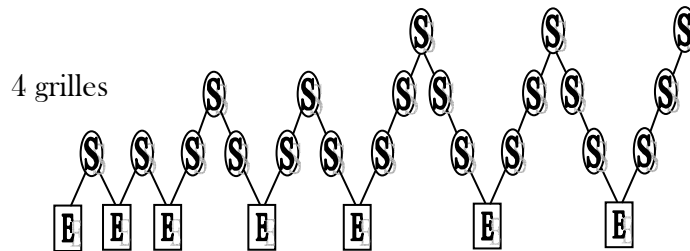


Figure 4-6 : Structure des cycles de la méthode FMG. Les mêmes symboles que la Figure 4-4 sont conservés

Dans notre application nous utilisons, des cycles en V sur un maillage composé de quatre grilles. Pour la prolongation, nous avons utilisé une interpolation tri-linéaire pour toutes les variables. Pour la restriction, nous

avons utilisé une moyenne surfacique pondérée pour toutes les quantités définies sur une surface du volume de contrôle tel que la vitesse. Une moyenne volumique pondérée est adoptée pour les quantités définies sur le centre du volume de contrôle telles que la pression et la température.

4.6 Discrétisation du terme transitoire

Les termes transitoires relient le présent au futur avec une certitude mathématique. L'évolution temporelle d'un système est inexprimable en terme de moyenne, des études successives des états transitoires se fait via des pas temporels globaux ; où un nombre considérable d'itérations spatiales se déroule, fournissant une description discrétisée des de la mécanique du système. Les dérivées partielles dépendant du temps dans les équations de continuité sont discrétisées au second ordre. Un schéma aux différences finies décentré est utilisé définissant une formulation implicite sur la base nodale. L'itération temporelle en cours dépend du passé en termes de pondérations (dues au développement limité) des deux itérations d'avant. Sauf les deux premières itérations qu'on peut assimiler à des itérations d'initialisation car nous n'avons pas encore un stockage des solutions du passé. La linéarisation de la dérivée partielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{n-1}}{2\Delta t} - 4 \frac{\partial \phi_n}{2\Delta t} + 3 \frac{\partial \phi_{n+1}}{2\Delta t} \quad (4.54)$$

◆ Résumé de la démarche numérique

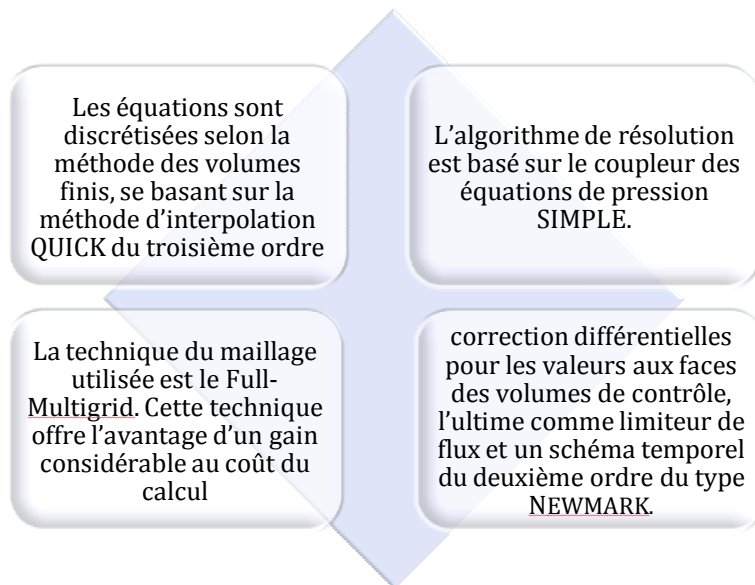


Figure 4-7 : Principales caractéristique de la technique numérique

4.7 Exercices de validation

Pour valider notre code numérique, nous allons confronter les résultats fournis par notre programme à certaines solutions analytiques d'équations paraboliques connues, et à des résultats publiés dans la littérature en régime permanent et en régime transitoire. Dans notre stratégie de comparaison, nous allons citer tout d'abord les résultats de la littérature tenus comme références, chacun dans son contexte, puis nous allons présenter les résultats obtenus par notre code porté aux mêmes conditions tenues par la référence. Nous allons ainsi établir autant que possible la comparaison qualitative et quantitative.

4.7.1 Mode purement diffusif

Prenons le cas de l'équation de la conduction monodimensionnelle (problème (4.55)). Ce problème possède une solution analytique, à laquelle nous allons comparer les résultats donnés par notre programme en régime purement diffusif, i.e. cavité fermée et $Ra < Ra_c$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ T(z=0) = 1 \quad T(z=1) = 0 \\ T(t=0) = f(z) \end{array} \right. \quad (4.55)$$

La solution analytique de ce problème de la chaleur peut se présenter de la manière suivante : $T = T_1 + T_2$ avec :

$$T_1 = 1 - z; T_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\pi z) e^{-t(n\pi)^2}; A_n = \int_0^z (f(x) - T_1) \sin(n\pi x) dx$$

Nous avons tracé le taux du transfert de chaleur au cours du temps traduit par la variation du nombre de NUSSELT. La figure 4-8 illustre l'accord parfait entre les nombres de NUSSELT numériques et analytiques dans le régime diffusif.

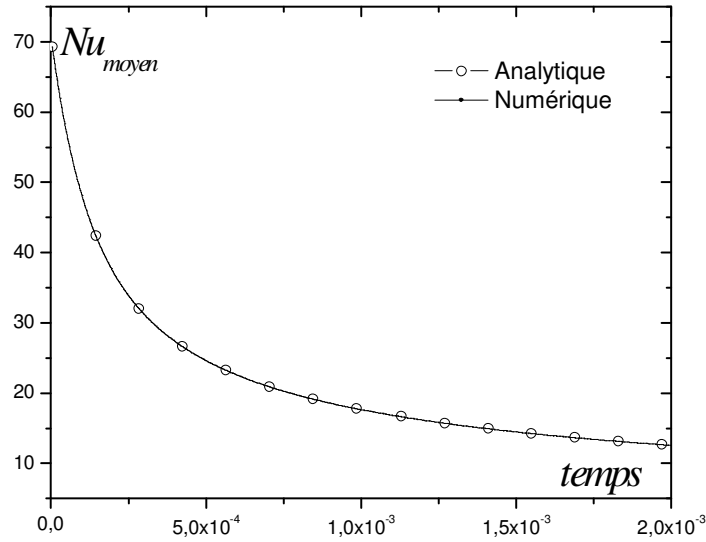


Figure 4-8 : Nombres de NUSSELT moyens analytiques et numériques

En régime établi la température est une fonction affine $T(z) = 1 - z$, solution de l'équation (4.56).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ T(z=0) = 1 \quad T(z=1) = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

Dans ce cas, la représentation spatiale de la température nous donne des iso-surfaces de températures planes pour z fixé et dont la valeur est $1 - z$. La figure 4-9 montre la parfaite concordance des résultats théoriques et numériques. Il est à remarquer que la solution pour l'équation de l'espèce en régime diffusif et stationnaire est aussi une fonction affine de z , puisque les deux équations sont homologues grâce au Laplacien nul de la température. Les résultats numériques ne manquaient pas de vérifier ceci encore.

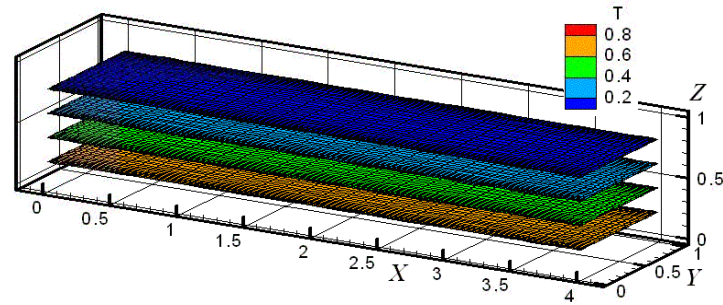


Figure 4-9 : Profil linéaire de la température dans le cas diffusif et en régime stationnaire

4.7.2 Confrontation avec solution de benchmark 3D :

Ce benchmark dû à BENNACER et al. (2001) a été publié lors du CHT01 à Cairns (Australie). Il a pour sujet la convection naturelle dans une cavité cubique remplie avec de l'air. La figure 4-10 montre un diagramme schématique du problème étudié. La cavité est inclinée avec un angle φ par rapport à la direction de la pesanteur. La cavité a une paire de faces opposées portées aux températures T_H (chaud) et T_C (froid) respectivement. Les quatre faces restantes sont supposées conductrices, i.e. la température change linéairement de T_H à T_C le long de la direction indiquée.

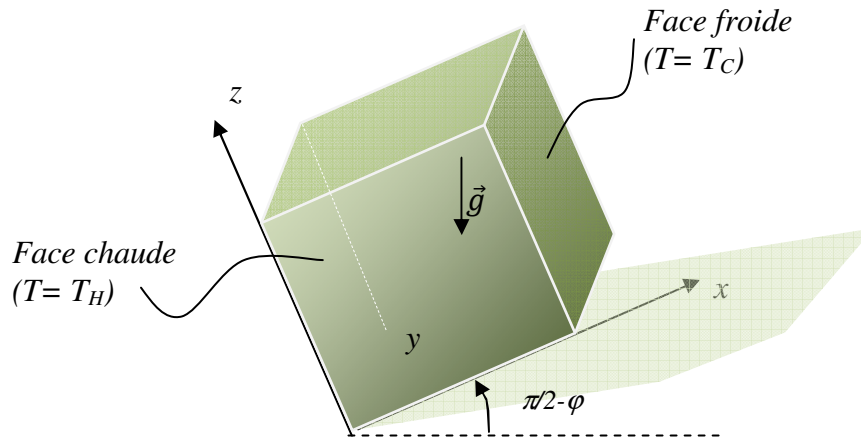


Figure 4-10 : Diagramme schématique de la configuration physique

Nous tiendrons le cas où $\varphi = 0$ afin de comparer quantitativement la configuration de chauffage par le bas en convection naturelle laminaire 3D. Le tableau ci-dessous présente une comparaison de notre solution en termes du nombre de NUSSELT moyen sur la face supérieure avec les valeurs données au benchmark. Une concordance remarquable est vérifiée.

Ra	\overline{Nu}_{exp}	Ce travail	BENNACER, et al. (France)	MOSSAD (Australie)	KREPPER (Allemagne)
10^5	3.474- 3.544	3.265	3.24	3.34-3.47	3.27-3.34
10^6	7.792- 7.974	8.09	8.12	7.31-7.42	7.57
10^7	15.19- 15.57	14.71	14.78	14.77-15.78	14.14
10^8	30.79- 31.65	26.701	26.69	31.22	24.55

Table 4-8 : Comparaison du NUSSELT moyen avec les solutions de références

Chapitre 5

Simulations numériques tridimensionnelles

Les simulations numériques mettent en œuvre des modèles théoriques souvent complexes de phénomènes réels et servent à étudier le fonctionnement et les propriétés du système modélisé ainsi qu'à en prédire l'évolution. Si leur utilisation est généralement plus économique et plus souple que les expériences réelles, des validations sont toujours indispensables pour garantir leur pertinence. Les développements récents ont montré que de nombreuses difficultés rencontrées dans la résolution des équations de NAVIER-STOKES, étaient dues, non seulement aux choix des équations aux différences (précision), mais aussi, dans la méthode de résolution ou algorithme (convergence et stabilité), à la manière dont les variables indépendantes ou les équations étaient reliées (couplage), dans le choix de la grille de calcul (génération du maillage) et dans le fait que, pour des nombres de PECLET de maille élevés, tous les termes des équations de NAVIER-STOKES n'avaient pas la même importance (parabolisation, direction privilégiée de l'écoulement, interaction de pression, caractère mathématique des équations). De ce fait, dans les simulations informatiques présentées au cours de ce texte, et considérées comme élément de démarche expérimentale, nous avons développé un effort élevé afin de comprendre les phénomènes numériques accompagnant chaque calcul de solution d'un problème donné, et par conséquent juger la

pertinence du résultat obtenu. Les résultats exhibés au cours du développement de ce chapitre, concernent en premier lieu une focalisation sur l'effet du confinement longitudinal et latéral. Deuxièmement, il s'agit d'une entreprise de comparaison avec les données de la stabilité linéaire aussi bien en convection thermosolutale qu'en convection mixte où en 3D. On fait bien la différence au voisinage des parois entre le cas fluide et le cas DARCY. Loin des parois les deux écoulements sont solidement analogues, et le modèle de stabilité est jugé efficace. En dernier lieu nous abordons le problème le plus complexe qui est formellement l'influence de l'effet Soret sur une convection mixte, après avoir décortiqué chaque problème élémentaire à part. Les cas avenants ne seront guère privés d'étude temporelle, augurant l'évolution mécanique, énergétique et solutale du fluide. La Figure 5-1 est présentée à titre illustratif de la beauté et de l'utilité des résultats 3D. Rien qu'au premier regard on remarque l'effet du transport et de la couche limite. Sur la Figure 5-2 on présente la démarche qu'on suivra dans ce chapitre.

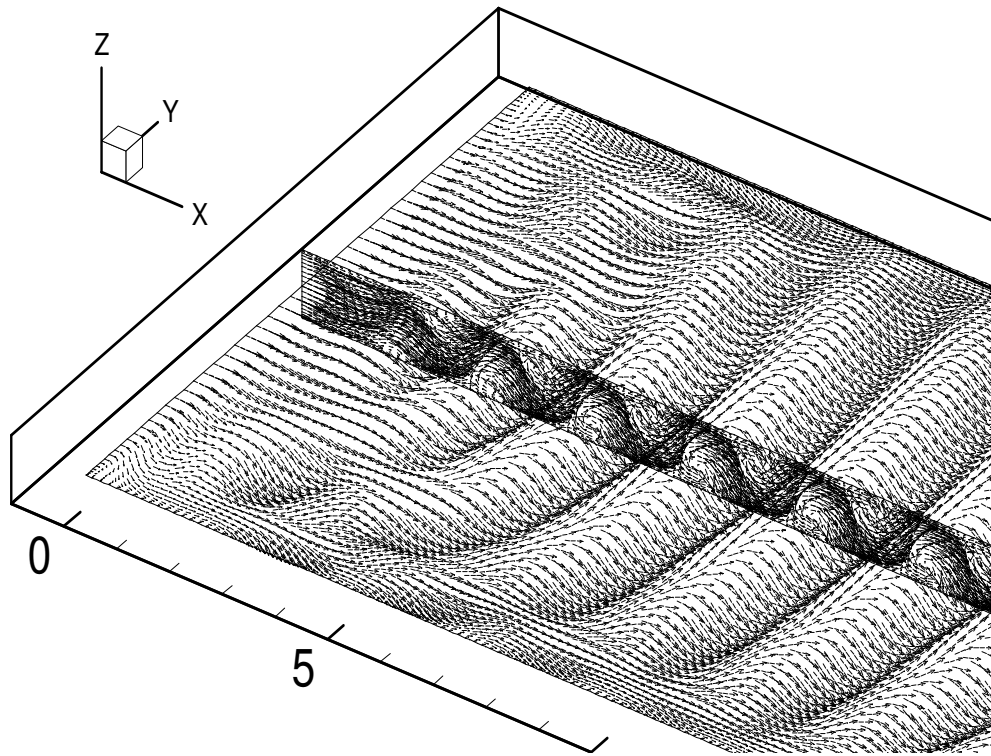


Figure 5-1: Ondulations imagées par les vecteurs vitesses (Plans horizontal et vertical médians) d'une simulation 3D mettant en évidence les R_{\perp} pleinement établis

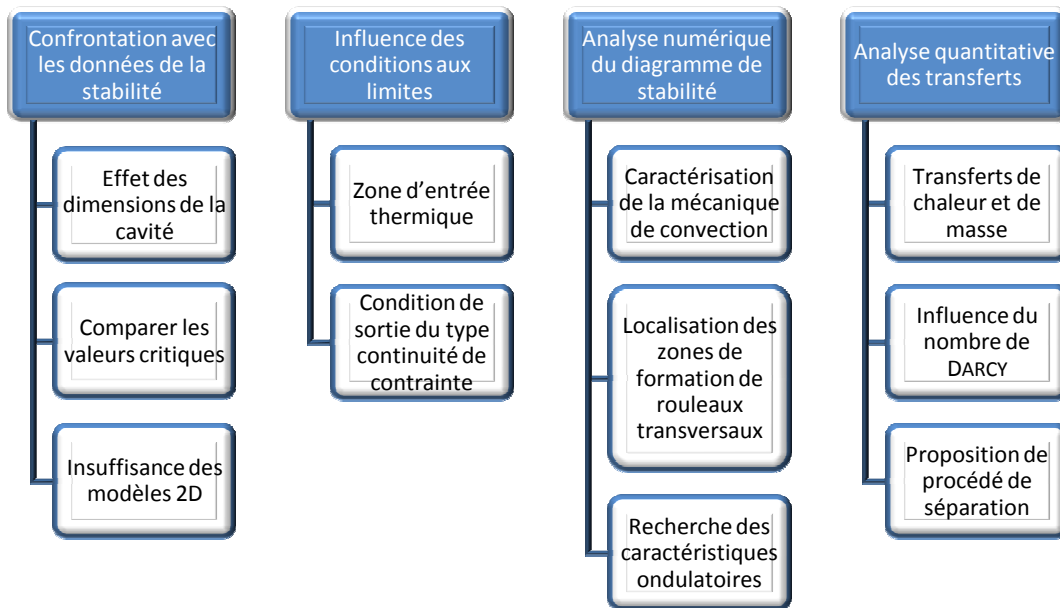


Figure 5-2 : Plan de la résolution numérique tridimensionnelle directe

5.1 Effet des dimensions de la cavité

Un mouvement convectif ne peut s'engendrer que si les forces de flottabilité ascendantes peuvent vaincre le poids rajouté aux forces dissipatives telles que l'effet visqueux. Ce mouvement a pour but d'uniformiser la température du fluide. Si dans le cadre d'un écoulement de BRINKMAN, les parois latérales sont peu éloignées, une bonne partie de l'énergie du fluide sera dissipée par la viscosité, retardant ainsi le déclenchement du mouvement. Dans une matrice poreuse de DARCY, cet effet sera absent. Ce paragraphe sera alors une paramétrisation, selon les dimensions du canal et le type du milieu, du seuil de naissance des structures thermoconvectives possibles en bas nombres de Ra et de Re . Pour cela, il est nécessaire de définir la manière avec laquelle on décide que la convection se crée. En effet, en convection naturelle si un rouleau commence à apparaître on considèrera que l'état de repos est brisé, alors qu'en convection mixte on observe les ondulations des lignes de courant et des profils de température s'il y a formation de R_{\perp} , alors qu'on observe, pour le cas de la genèse des $R_{//}$, le début de rotation autour de la verticale des axes des R_{\perp} (cf. Figure 5-3 -b-). La transition se termine par l'alignement de ces axes formant finalement un tube spiral. Si on déstabilise un écoulement de POISEUILLE par un gradient de température alors des

ondulations sur les lignes de courant apparaissent lors de la transition comme indiqué sur la Figure 5-3 -a-.

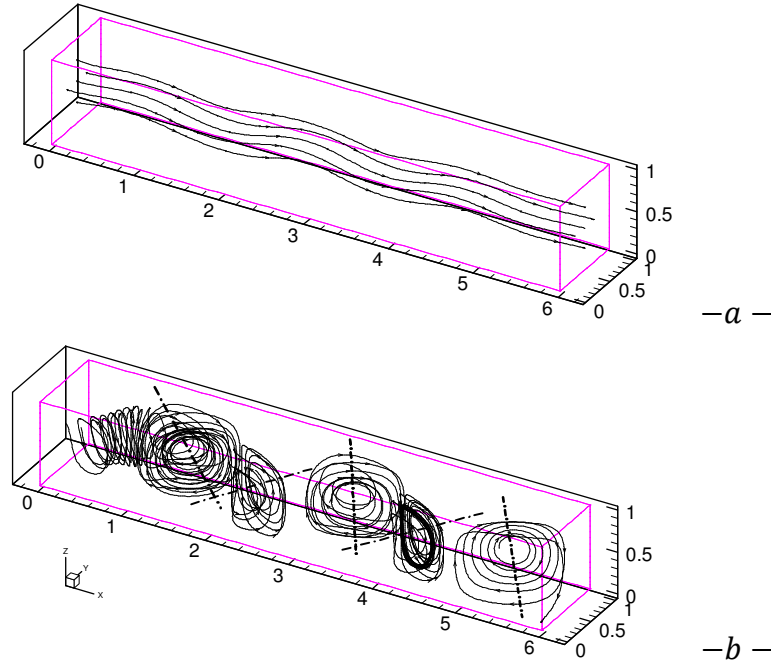


Figure 5-3 : -a - Ondulations des lignes de courant marquant la transition d'un écoulement de Poiseuille sollicité par un chauffage inférieur vers les rouleaux transversaux aux valeurs $Re = 0.05, Pr = 0.71, Ax = 6, Ay = 1, Ra = 2350$. -b - Structures thermoconvectives à axes obliques, saillant la transition des R_{\parallel} vers les R_{\perp} à $Re = 0.05, Pr = 0.71, Ax = 6, Ay = 1, Ra = 2810$

5.1.1 Influence de la longueur

◆ Cas de la convection naturelle

Rappelons qu'en stabilité linéaire 2D, nous avons obtenu un diagramme (cf. Figure 3-3) qui relie le seuil de la naissance des R_{\perp} à l'aspect de la longueur en convection naturelle. On désignera par R_{\perp} les structures dont les axes de symétrie sont normaux à la longueur x . Ce diagramme montre les difficultés qu'ont ces structures pour prendre place lorsque Ax n'est pas entier. Néanmoins ces difficultés s'anéantissent lorsque le canal est fortement prolongé. Est-ce cela signifie que si la valeur de Ax n'est pas entière, le fluide demeure au repos pour des valeurs de $R = R_T/R^0 > 1$? La réponse à cette interrogation s'argumente par deux choses :

- ✚ Le modèle de stabilité ne permet que la visualisation des structures dont les axes soient perpendiculaires à la longueur. Ainsi, même si un autre mode est plausible, il ne sera pas captable.

✚ La simulation 3D, permet une expérimentation de différents points du plan (R, Ax) , et montre admirablement que la convection se déclenche bien à $R = 1$ et qu'une sélection des sens des rouleaux peut se produire selon l'aspect Ax .

Comme résultat de ce qui vient d'être évoqué, un complément du diagramme de la Figure 3-3 ; et est indiqué sur la Figure 5-4 peut se faire en indiquant les zones où règnent les R_{\perp} ou R_{\parallel} .

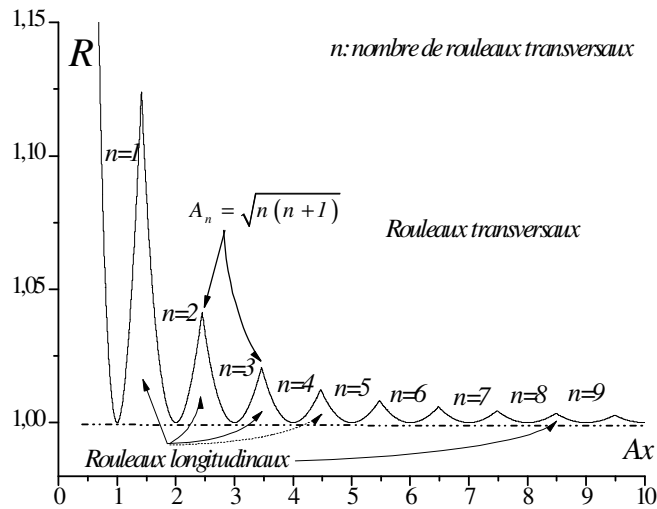


Figure 5-4 : Zones de dominance des R_{\perp} et R_{\parallel} en fonction du rapport d'aspect Ax de la longueur. Le nombre des rouleaux longitudinaux est alors fonction de la profondeur Ay

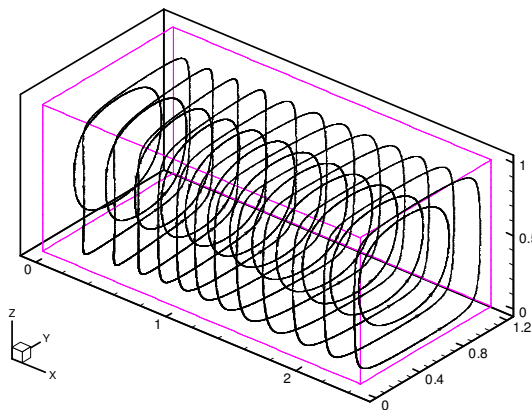


Figure 5-5 : Lignes de courant marquant l'installation de la convection naturelle sous forme d'un R_{\parallel} pour une valeur non entière de Ax . $R = 1$, $Ax = \sqrt{6}$, $Ay = 1.2$, $Da = 10^{-8}$

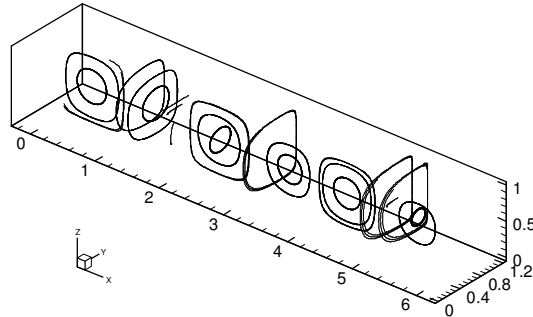


Figure 5-6 : Lignes de courant en convection naturelle marquant la transition du mode R_{\parallel} vers le mode R_{\perp} , sous l'unique influence du changement de l'allongement Ax de la cellule. $R = 1$, $Ax = 6$, $Ay = 1.2$, $Da = 10^{-8}$

Les images 3D de l'écoulement exposées aux Figure 5-5 et Figure 5-6, représentent deux simulations dans des conditions identiques sauf pour l'allongement Ax . La première, étant établie dans un paramétrage défini par $R = 1$; $Ay = 1,2$ et $Ax = \sqrt{2(2 + 1)} = \sqrt{6}$ correspondant au deuxième pic, montre une préférence aux R_{\parallel} (cf. Figure 5-6). Plusieurs simulations vérificatives ont donné le même résultat pour des rapports d'aspect Ax non entiers. Comme exemple de valeur entière minimisant le seuil d'apparition des R_{\perp} nous avons présenté le cas $R = 1$, $Ay = 1.2$ et $Ax = 6$. Dans ces conditions nous nous plaçons sur la ligne neutre où la convection risque de naître, la ligne neutre indique un comportement non préférentiel des structures convectives d'où l'existence équiprobable de R_{\parallel} et R_{\perp} . La Figure 5-7 est un exemple vigoureux de démonstration de cette simultanéité. Si on a à varier un autre paramètre, le système évoluera selon que ce paramètre est choisi de manière à nous guider vers une zone à sélection préférentielle. La prise en compte des forces thermosolutales n'a pour effet que d'amplifier la valeur critique du RAYLEIGH de $1/1 + N(1 + Le)$. Aucune influence sur les longueurs d'ondes ou la direction des structures convectives n'a été enregistré.

◆ Cas de la convection mixte

En convection mixte, l'effet du confinement sur la longueur bien qu'existant aux faibles Pe , tend à s'anéantir pour des débits de plus en plus importants. Inévitablement les pics marquant les lignes neutres de transition $R_{\parallel} \leftrightarrow R_{\perp}$ sont advectés vers l'aval.

5.1.2 Influence de la profondeur

Dans ce paragraphe on entreprend la discussion différemment au précédent. Le cadre général étant un milieu de DARCY, l'aspect selon y du canal n'a pas d'influence sur la naissance de la convection car les efforts de cisaillement à coté des bords sont nuls, en d'autres termes on retrouve sensiblement les valeurs critiques fournies dans les données de la stabilité linéaire 2D. Cependant, dans un milieu de BRINKMAN, l'expérimentation numérique prouve la forte influence de Ay sur ce seuil. Ces faits sont bien vérifiés tant en convection naturelle qu'en mixte. Lors des essais numériques, et après avoir défini plusieurs points de l'espace (RAYLEIGH, Rapport de forme) ; nous avons remarqué que l'accroissement de la ligne neutre est alternatif, d'où l'idée de superposer ces points avec la courbe obtenue par la fonction d'aspect définie au § 3.1, et dont l'expression est redonnée ci-dessous. Une bonne coïncidence des points avec la courbe est révélée. L'analogie est parfaite entre les directions principales. La nature est indépendante du référentiel.

$$Y(Ay) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2Ay} + \frac{Ay}{2} \right)^2, & 0 < Ay < 1 \\ \inf \left[\left(\frac{E(Ay)}{2Ay} + \frac{Ay}{2E(Ay)} \right)^2, \left(\frac{E(Ay+1)}{2Ay} + \frac{Ay}{2E(Ay+1)} \right)^2 \right], & x \geq 1 \end{cases}$$

◆ Convection naturelle en milieu de DARCY

Cette situation est très riche en structures thermoconvectives. S'agissant d'un problème où le tenseur de cisaillement est nul au voisinage des bords, les rouleaux tendront à s'installer dans les directions des parois les plus allongés de la cavité. Par contre, si la cellule a une base carrée ou si Ax et Ay sont grands et de même ordre de grandeur, aucune direction n'est privilégiée, dans ce cas les rouleaux prennent le confort de s'installer sur la diagonale de chaque cube dont la dimension du coté est égale à l'unité (en adimensionnel). Enfin il est possible qu'on assiste à un chevauchement d'un R_{\perp} et d'un R_{\parallel} permettant une trajectoire plus longue dans le déplacement des particules et visant à uniformiser la température du milieu (Figure 5-7).

Dans le cas où les rapports de formes sont différents, le fluide choisit le mode le plus économique en énergie, ce qui est traduit par un nombre minimum de rouleaux, et pour cela il faut que les rouleaux s'allongent sur le coté de rapport d'aspect le plus grand. La Figure 5-8 clarifie le mode d'installation de ces structures convectives à la naissance de la convection. Pour expliquer cette figure, on rappelle que les appellations Ax et Ay ne sont que des variables muettes, puisque la direction x et la direction y sont sous les mêmes conditions (mêmes C.L. ; pas d'écoulement moyen forcé...)

et par suite, la fonction de forme $Y(A)$ est valable dans les deux directions, et les rouleaux prendront la position qui minimise l'énergie mécanique. On notera toujours un R_{\perp} comme « rouleaux perpendiculaires » à la direction x . La fonction de forme qui identifie les R_T sera alors :

$$F(A_x, A_y) = \begin{cases} Y(A_x) & \text{si } A_x > A_y \\ Y(A_y) & \text{si } A_x < A_y \end{cases}$$

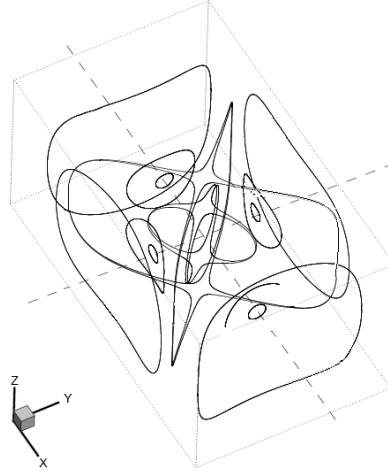
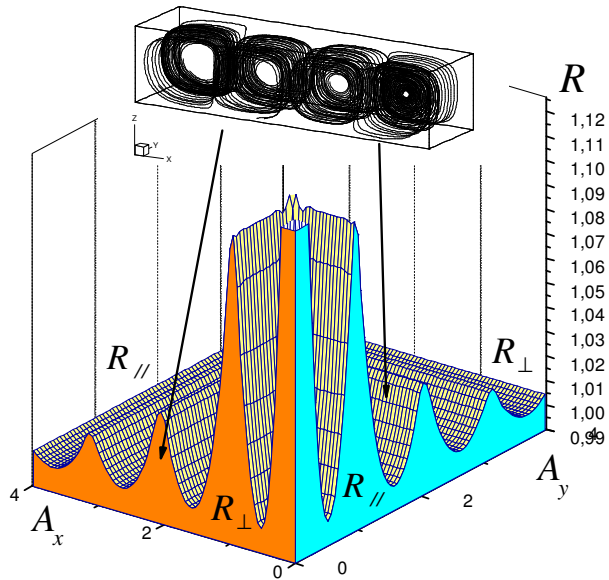


Figure 5-7 : Chevauchement d'un R_{\perp} et d'un R_{\parallel} . Solution numérique 3D obtenue pour $R_T = 42$; $Da = 10^{-8}$; $Pr = 1$



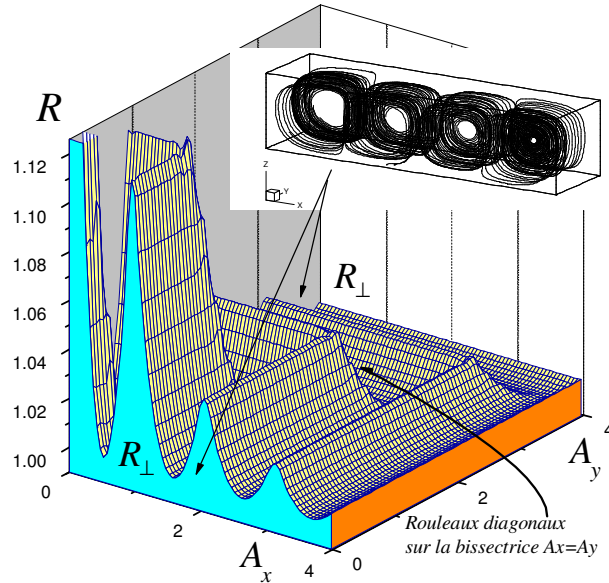


Figure 5-8 : Représentation spatiale désignant le choix des R_{\perp} , R_{\parallel} et obliques lors de la naissance de la convection

◆ Convection mixte en milieu de DARCY

Une structure poreuse de DARCY ne permet que de faibles vitesses de filtration, de manière qu'on peut négliger les dissipations du tenseur de cisaillement à proximité des parois. De ce fait, les effets de bord seront absents, et on n'a pas besoin d'importantes largeurs pour observer des phénomènes bidimensionnels. La direction de la longueur est différenciée de la largeur par la présence de l'écoulement de filtration. Du fait qu'en convection mixte, nous avons prouvé que le RAYLEIGH critique dépend de Ax , nous avons essayé de tracer un diagramme général de stabilité, valable quelque soit Pe et Ax , en se référant à $R_T^C(Ax)$. La lecture dans la Figure 5-9 se fait via la connaissance de la valeur $R_T^C(Pe, Ax)$. Comme exemple nous donnons les deux cas suivants :

■ Si $Ax = 6$ et $Pe = 0.05$ alors $R_T^C(Ax = 6) = 1.001 \times 4\pi^2 = 39.5179$

■ Si $Ax = 6$ et $Pe = 0$ alors $R_T^C(Ax = 6) = 4\pi^2 = 39.4784$

On remarque que sur la Figure 5-9 la courbe du RAYLEIGH critique des R_{\perp} conserve un minima unique contrairement à la courbe de la figure 5.10 qui est influencée par le confinement latéral.

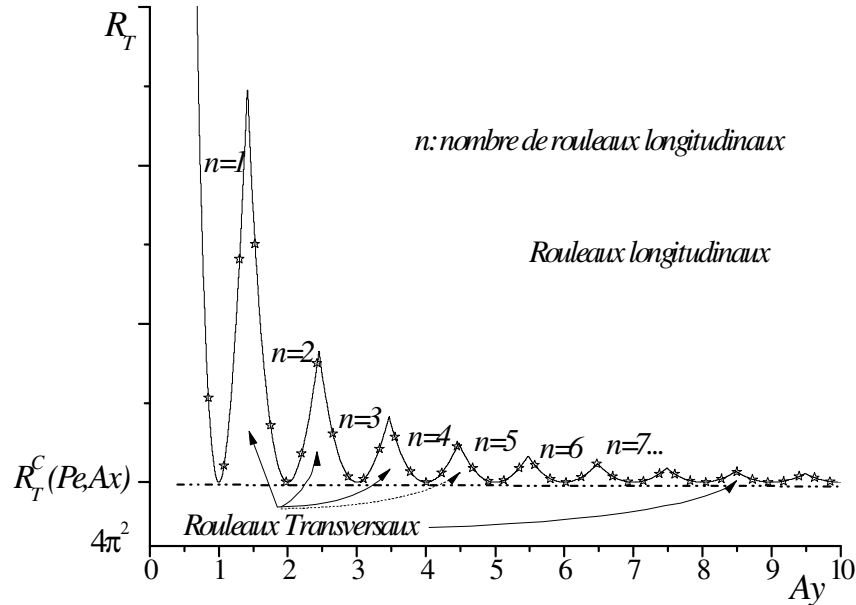


Figure 5-9 : Diagramme de bifurcations présentant l'influence de la profondeur sur la genèse des rouleaux longitudinaux et transversaux en milieu de DARCY

◆ Convection mixte dans un milieu fluide

Les cisaillements visqueux de BRINKMAN, constituent un terme puits dans l'équation de NAVIER-STOKES. Leur présence est donc un facteur de retard de la bifurcation. Deux phénomènes coopèrent alors, pour édifier une nouvelle façon de la brisure de l'état de repos. Le rapprochement des couches limites engendrées par le parage des bords, et le confinement de la longueur d'onde. La signature du premier se fait via la translation des lignes neutres vers le haut, accentuée pour des cloisons latérales fortement voisines, tandis que celle du deuxième conserve son aspect de sommets locaux. Un milieu de BRINKMAN offre plus de territoires pour les R_{\perp} . La Figure 5-11 est un modèle, en mesure de montrer le comportement de la bifurcation à différents volumes de la cellule. La variation du nombre de Pe agit sur l'emplacement des lignes neutres, ainsi on aura un diagramme spécifique pour chaque Pe . Les points anguleux, présentent une singularité physique du fait qu'ils ont une colocation triple due à l'hésitation du système entre le choix de $n \times R_{\perp}$ ou $(n + 1) \times R_{\perp}$ ou bien des R_{\parallel} . Les représentations spatiales des lignes de courant (cf. Figure 5-11) établis dans des exigences identiques sauf pour le rapport d'aspect, illustrent

formellement l'existence de la sélectivité du système à certains modes parmi d'autres dans des circonstances données.

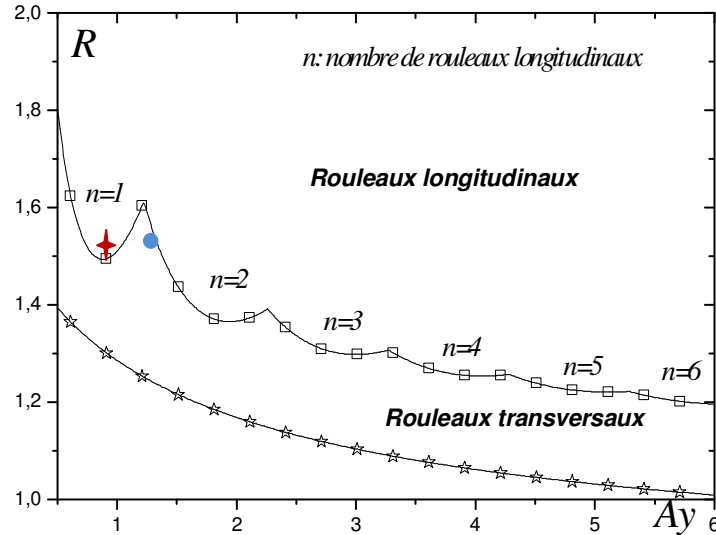


Figure 5-10 : Diagramme de bifurcations présentant l'influence de la profondeur sur les lieux (R, Ay) de naissance des rouleaux longitudinaux et transversaux. La valeur $R = 1.001$ a été obtenue par stabilité linéaire 2D et vérifiée lors des simulations directes. Essais à : $Re = 0.05$, $Pr = 0.71$, $Ax = 6$, $Da = +\infty$

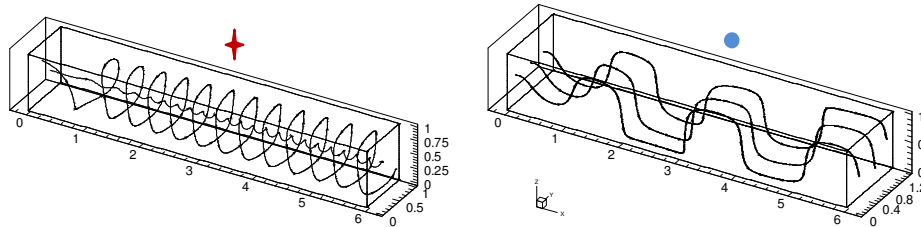


Figure 5-11 : Lignes de courant, montrant l'influence de la profondeur Ay sur le mode convectif, établis pour $Re = 0.05$, $Pr = 0.71$, $Ax = 6$, $Ra = 2670$ ($\Rightarrow R = \frac{2600}{1708} = 1.522$) et respectivement de gauche à droite $Ay = 1$, $Ay = \sqrt{2}$ (les symboles repèrent les structures sur le diagramme)

À la base de cette étude on ne s'intéresse qu'aux rouleaux transverses, mais au cours de la discussion qui a précédé, nous fûmes aussi amenés à converser la genèse des rouleaux longitudinaux stationnaires, puisqu'ils s'approprient des mêmes domaines. La compétition entre les deux structures est si rude qu'elles trouvent souvent des moyens de partager l'espace. (cf. Figure 5-12)

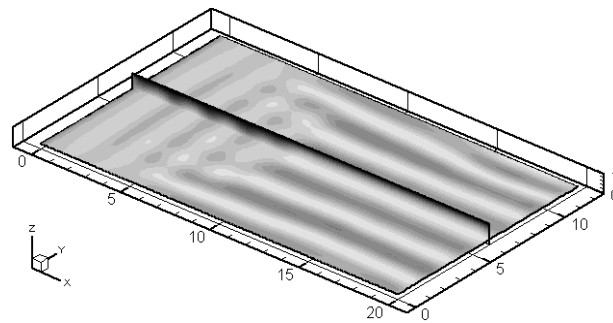


Figure 5-12 : Isothermes dans le plan horizontal médian montrant la cohabitation des R_{\parallel} et R_{\perp} établis pour $Re = 0.5$, $Pr = 0.71$, $Ax = 20$, $Ay = 12$, $Ra = 2500$

5.2 Confrontation aux données de la stabilité linéaire

Bien qu'elle n'ait pas été rudimentaire, la stabilité linéaire nous sert comme acte préliminaire accédant à la détermination des zones à différents modes convectifs, que ce soit en convection naturelle, ou mixte ou thermosolutale. La prise de connaissance des diagrammes de stabilité obtenus, devra faciliter la démarche d'expérimentation numérique. Pour cette fin, nous devons nous assurer de la bonne harmonie des deux modèles, numérique et de stabilité. La réalisation d'une suite de comparaisons est le moyen le plus efficace permettant de définir une plage de concordance. Ainsi, une certitude des résultats peut être évaluée.

5.2.1 La genèse de la convection

Dans ce qui suit nous allons vérifier si le fluide perd vraiment sa stabilité aux valeurs issues de l'analyse de stabilité. Une récolte comparative de nombres de RAYLEIGH critiques sera exposée. Nous rappelons que le confinement s'implique dans la valeur critique recherchée, pour cela on ne manque pas de donner la valeur d'aspect pour laquelle le calcul est poussé. La manière de détecter la bifurcation en numérique fut définie au § 5.1, une fois détectée nous enregistrons son Ra correspondant ; c'est la valeur critique recherchée, et que le code de stabilité fournit directement. Comme déjà expliqué, un écoulement fluide doit avoir une largeur suffisante pour être assimilé à un problème plan loin des parois, tandis qu'en DARCY, cette condition n'est pas nécessaire. Il s'en suit un choix de $Ay = 8$ découlant des observations du cas fluide (cf. Figure 5-15), et $Ay = 1$ en matrice de DARCY.

♦ Comportement des mélanges gazeux $Le = 1$ et $Pr = 1$

En général les mélanges gazeux sont caractérisés par un nombre de Pr proche de l'unité (par exemple : $Pr_{air} = 0.71$), alors que le nombre de

Le peut varier jusqu'à plusieurs multiples ou dividendes de Pr . Nous avons choisi de comparer le cas où aucune des forces thermique et solutales n'est privilégiée.

Milieu purement fluide $Da = +\infty$. Finesse du maillage : Maillage régulier $Nex \times Nez = 26 \times 6$ en stabilité ; pour le Numérique 3D : maillage régulier sur x et sinusoïdal sur les autres directions $Nx \times Ny \times Nz = 242 \times 162 \times 22$; $Ax = 12$ et $Ay = 8$											
Ra_c	$Re = 0$		$Re = 0.5$		$Re = 1$		$Re = 2$		$Re = 4$		
	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	
$Pr=1, Le=1$	$N=2$	341.6	3.41	342.1	342.6	342.6	342.7	342.9	343.2	342.1	342.5
	$N=1$	569.3	570	570.1	570.6	571.1	571.4	571.6	572	571.5	573
	$N=0.1$	1423.1	1424	1425.4	1426	1427.5	1427	1429	1428.7	1428.5	1430
	$N=0$	1707.76		1710.5	1710	1713	1712	1714.8	1715	1715	1717
	$N=-0.01$	1742.6	1740	1745.4	1743	1747.9	1447	1749.9	1450	1749	1749
	$N=-0.05$	1897.5	1895	1900.5	1898	1903.2	1904	1905.3	1905.3	1904.9	1905
	$N=-0.1$	2134.7	2130	2138.1	2134	2141.1	2140	2142.7	2142	2142.1	2141.5
	$N=-0.5$	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.
Milieu de DARCY $Da = 10^{-8}$. Finesse du maillage : Maillage régulier $Nex \times Nez = 16 \times 8$ en stabilité ; pour le Numérique 3D : maillage régulier sur x et sinusoïdal sur les autres directions $Nx \times Ny \times Nz = 162 \times 42 \times 42$; $Ax = 4$ et $Ay = 1$											
R_T	$Re = 0$		$Re = 0.5$		$Re = 1$		$Re = 2$		$Re = 4$		
	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	
$Pr=1, Le=1$	$N=2$	7.895	7.9	7.931	7.92	7.999	8.01	8.039	8.04	8.067	8.069
	$N=1$	13.159	13.2	13.218	13.25	13.336	13.341	13.4	13.39	13.442	13.52
	$N=0.1$	32.89	33.01	33.036	33.02	33.323	33.41	33.206	33.34	33.572	33.61
	$N=0$	39.478		39.64	39.52	39.98	39.81	40.09	39.93	40.272	40.3
	$N=-0.01$	40.28	40.32	40.45	40.46	40.80	40.72	40.60	40.70	41.092	41.3
	$N=-0.05$	43.86	43.91	44.04	44.1	44.42	44.46	44.18	44.2	44.73	44.8
	$N=-0.1$	49.35	49.32	49.54	49.5	49.97	50.02	49.67	49.8	50.31	50.26
	$N=-0.5$	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.	$+\infty$	divg.

Table 5-1 : Comparatif de valeurs du RAYLEIGH critique obtenus par stabilité linéaire (*SL*) et simulations numériques (*Num*) à Pr et Le gazeux

◆ Comportement des mélanges liquides $Le = 100$ et $Pr = 10$:

Milieu purement fluide $Da = +\infty$. Finesse du maillage : maillage régulier $Nex \times Nez = 16 \times 8$ en stabilité ; pour le Numérique 3D : maillage régulier sur x et sinusoïdal sur les autres directions $Nx \times Ny \times Nz = 242 \times 162 \times 22$; $Ax = 12$ et $Ay = 8$											
Ra_c	$Re = 0$		$Re = 0.5$		$Re = 1$		$Re = 2$		$Re = 4$		
	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	
$Pr=10, Le=100$	$N=2$	8.409	8.41	10.843	11	17.812	11.2	44.76	45.3	141.54	136.9
	$N=1$	16.57	17	21.550	22.3	35.260	36.1	87.259	88.2	261.65	259.7
	$N=0.1$	153.87	154	963.19	962.3	1166.1	1165.4	1452.7	1450.3	1635.9	1640
	$N=0$	1707.76		1717.5	1718	1719.1	1719	1721.2	1722	1725.1	1725.6
	$N=-10^{-4}$	1724.4	1725	1724.4	1726	1723.2	1724.54	1724.1	1725.3	1726	1426.5
	$N=-0.01$	$+\infty$	4. E3	1759.2	1761	1807.7	1810	1865	1867	2074.8	2074

Milieu de DARCY $Da = 10^{-8}$. Finesse du maillage : maillage régulier $Nex \times Nez = 16 \times 8$ en stabilité ; pour le Numérique 3D : maillage régulier sur x et sinusoïdal sur les autres directions $Nx \times Ny \times Nz = 162 \times 42 \times 42$; $Ax = 4$ et $Ay = 1$											
R_T	$Re = 0$		$Re = 0.5$		$Re = 1$		$Re = 2$		$Re = 4$		
	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	<i>SL</i>	<i>Num</i>	
$Pr=10$ $Le=100$	$N=2$	0.194	0.20	3.47	3.45	3.54	3.56	2.63	2.71	2.51	2.51
	$N=1$	0.383	0.4	6.902	7.01	6.814	6.94	5.13	5.142	4.891	4.9
	$N=0.1$	3.55	3.6	28.83 5	2.8.14	37.01	37.21	32.66	3.24	31.64	32.01
	$N=0$		39.47	40.79	40.8	41.24	41.3	42.53	42.46	47.28	47.4
	$N=-0.01$	$+\infty$	72.6	43.06	42.8	40.63	41.02	42.58	42.67	47.29	47.81

Table 5-2 : Comparatif de valeurs du RAYLEIGH critique obtenus par stabilité linéaire (*SL*) et simulations numériques (*Num*) à Pr et Le gazeux

Commentaires : nous observons une très bonne concordance des résultats de trois points de vue :

1. Dans les valeurs même.
2. Dans le sens des variations des valeurs, interprété au § 3.4.
3. Le numérique direct nous a permis de retrouver l'état de surstabilité atteint aux valeurs voisines de $N = -1/(1 + Le)$.

À présent nous ouvrons une parenthèse pour expliquer la divergence des simulations 3D pour les valeurs de N vérifiant $N = -1/(1 + Le)$; condition nécessaire de l'existence d'une surstabilité marginale. En effet, deux sortes de simulations ont été établies afin de vérifier ce phénomène. La première avec des conditions aux limites de concentrations du type flux massique nul partout sur les frontières, et la deuxième avec $C = 1$ en bas et $C = 0$ en haut. Ces deux types vérifient la solution stratifiée de conduction, elles restent donc valables pour la comparaison avec le modèle de stabilité. Pour la première, comme on travaille à très haut RAYLEIGH, les gradients locaux de concentration prennent des valeurs très hautes au milieu de la cellule pour compenser les gradients de température, à qui ils sont directement opposés. Au bout de quelques itérations, les concentrations atteignent des valeurs très élevées et le calcul diverge. Au deuxième cas, compte tenu des concentrations limitées aux valeurs des frontières horizontales, cette divergence n'aura pas lieu, mais la première ondulation apparaît pour $R \cong 17.6 \times \mathcal{R}^0$ ($Ra_c^{Osci} = 3.10^4$ en fluide et $R_T^{Osci} = 694.8$ en DARCY) témoignant sur la justesse de la stabilité linéaire qui prédit une zone surstable puis un mode oscillatoire direct. Évidemment les solutions obtenues sont oscillatoires dans le cas de convection naturelle.

5.2.2 Caractère ondulatoire de l'écoulement

Les écoulements de BENARD sont périodiques dans l'espace. Une même structure sous forme de deux rouleaux contrarotatifs, se réitère tout le long de la cavité. Le moyen de détermination de la longueur de la cellule est la transformée de FOURIER d'une suite de valeurs d'une même grandeur sur une même ligne dans la direction de répétition (cf. Figure 5-13). L'analyse comparative d'une suite de valeurs obtenues par simulation directe *Num* et par analyse de stabilité *SL* montre de nouveau une bonne harmonie entre les résultats.

	Longueur d'onde λ					
	Re	0	0.5	1	2	4
$Le = 1, Pr = 1, N = -0.1$	SL	2.115	2.019	2.105	2.104	2.103
	Num	2.115	2.020	2.105	2.103	2.101
$Le = 10, Pr = 7, N = -0.01$	SL	2.144	2.103	2.073	2.047	2.038
	Num	2.146	2.104	2.080	2.050	2.038
$Le = 100, Pr = 10, N = -10^{-4}$	SL	2.138	2.121	2.117	2.11	2.109
	Num	2.139	2.122	2.116	2.111	2.1095

Table 5-3 : Longueurs d'ondes détectées au moment de la bifurcation par usage des deux méthodes (*Num.*, *SL*). $Da = 10^{-8}$

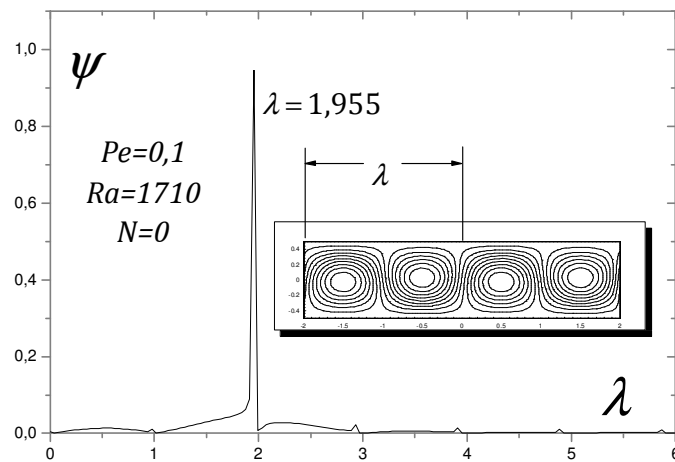


Figure 5-13 : Exemple de transformée de FOURIER des amplitudes de la fonction de courant pour la détermination des longueurs d'ondes

5.2.3 Mise en évidence des structures pleinement établies

La recherche, en stabilité linéaire, des valeurs de RAYLEIGH critique pour des cavités très longues nous a permis de découvrir la possibilité de voir l'effet de l'entrée thermique sur l'écoulement. Le phénomène est

expliqué au § 3.3. À ce niveau on confronte ce que peut nous donner la simulation numérique en comparaison avec ce qu'a donné l'étude de la stabilité. La simulation numérique 3D ne manque pas elle aussi de vérifier cet effet de renvoi, par l'écoulement moyen, des rouleaux de convection vers l'aval. De point de vue qualitatif le phénomène est bien vérifié. Les illustrations : Figure 5-14, Figure 5-15 et Figure 5-16 illustrent ce fait. Les aspects quantitatifs seront discutés ultérieurement.

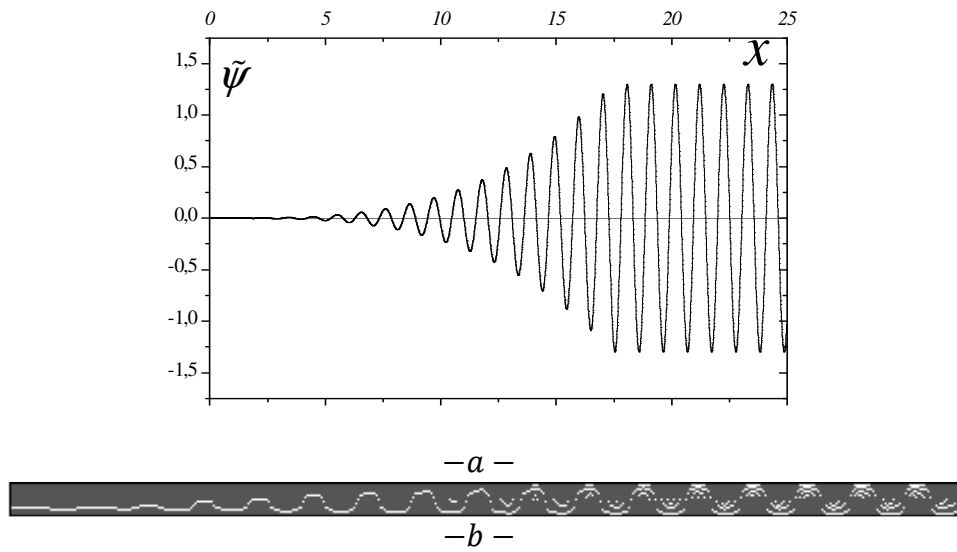


Figure 5-14 : $-a-$ Oscillations de la perturbation de la fonction de courant $-b-$ Naissance des rouleaux loin de l'entrée. (Stabilité linéaire $Ra = 1726$, $N = 0$, $Pe = 7$, $A = 40$)

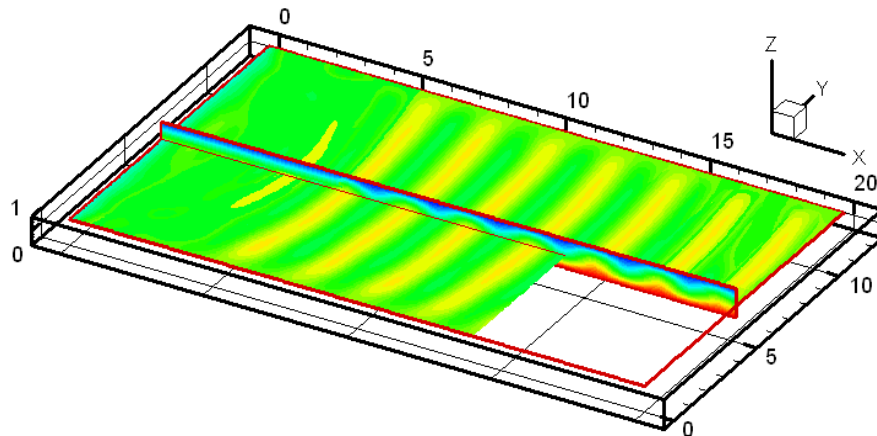


Figure 5-15 : Plan Y et Z montrant le champ de la température le long de la cavité à $Ra = 2500$, $Re = 5$, $Pr = 0,71$

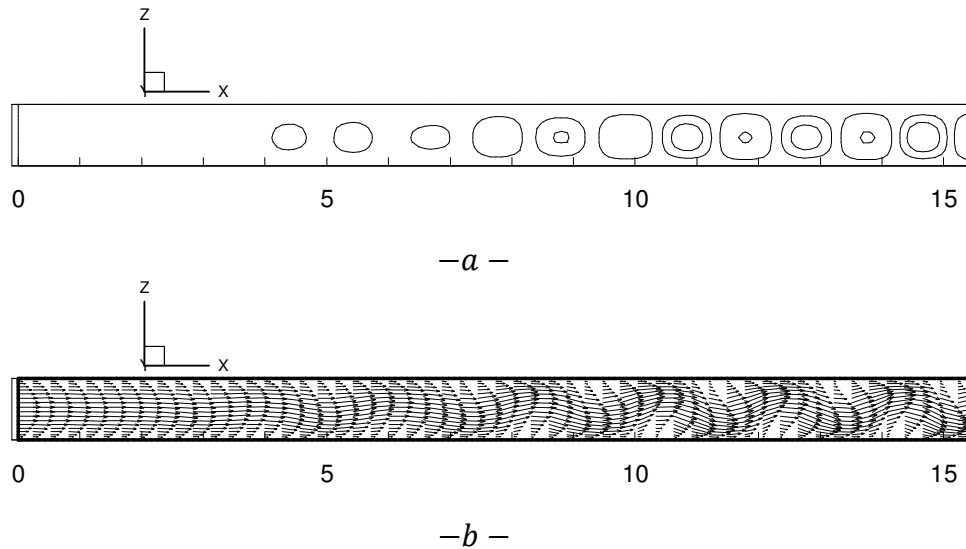


Figure 5-16 : Plan vertical médian montrant les isocontours de w $-a-$ et les vecteurs vitesses $-b-$. $Ra = 2500$, $Re = 5$, $Pr = 0,71$

◆ Résumé

Jusqu'ici, nous avons entrepris le rapprochement entre les résultats de la stabilité linéaire et les simulations directes. Comme conclusion pour cela on peut énoncer que l'étude de la stabilité 2D est concordante avec les simulations numériques 3D en ce qui concerne la détermination de la naissance de la convection, les longueurs d'ondes et la zone d'entrée thermique.

A présent, avec la confiance accrue au modèle de stabilité, nous passons à une étude numérique plus pure, dans laquelle on va essayer d'approfondir les informations qui s'attachent à la genèse, l'établissement et le mouvement des rouleaux transversaux. Bien que guidées par les résultats de la stabilité, une grande quantité de simulations est nécessitée afin de présenter les résultats qui suivront.

5.3 Influence des conditions aux limites

L'initialisation du système d'équation à résoudre est fondamentale pour la solution à obtenir. De ce fait, il n'est pas par hasard que les théoriciens du chaos ont toujours décrit le système de BENARD comme un modèle type de l'attracteur étrange de Lorenz. Une perturbation même minimale des conditions initiales peut engendrer une différenciation importante des résultats. La manière d'entrée et de sortie du fluide

traversant le canal est aussi en mesure de nous amener à des solutions se diversifiant sous l'influence de ces conditions.

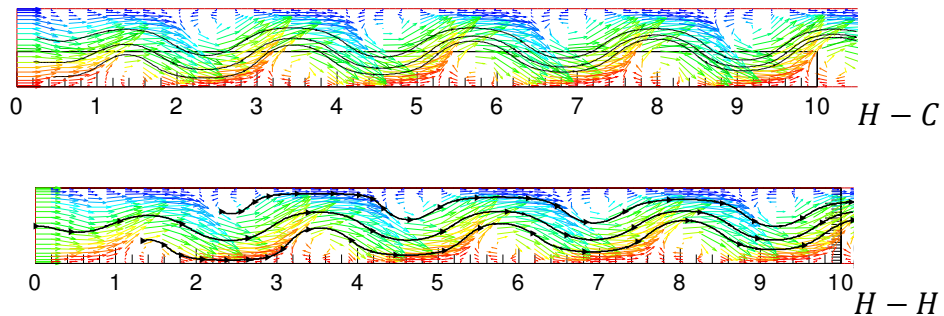
5.3.1 Conditions d'admission et zone d'entrée thermique

Dans des cas pratiques, différentes conditions à la frontière d'admission existent et certains d'entre ces cas sont récapitulés dans la table ci-dessous. Les différents cas récapitulés correspondent à deux genres de répartition de la température (homogène ou conductrice) et de la vitesse (homogène, $u = c^{te}$ ou écoulement de POISEUILLE). L'interrogation qui se pose est quelle est la condition qui influe fortement sur la zone d'entrée ?

Cas	I (H-C)	II (H-H)	III (P-C)	IV (P-H)*
$U_{entrée}$	Re	Re	<i>Poiseuille</i>	<i>Poiseuille</i>
$T_{entrée}$	$1 - z$	$1/2$	$1 - z$	$1/2$

Table 5-4 : Différents cas des conditions d'entrée. * Vitesse-Température ($U_{entrée} - T_{entrée}$) : H=homogène, P=Poiseuille, C=conduction

Aux Figure 5-17 on présente les plans médians verticaux afin de donner une approche visuelle de l'écoulement. La composante verticale de vitesse le long du domaine sur le même plan est représentée sur le schéma 5.18. Il est évident d'après ces illustrations que la situation la plus instable est relative à la forme régulière d'apport de chaleur à l'entrée (cas II). L'écoulement de POISEUILLE imposé à l'entrée stabilisant le système permet d'augmenter la distance nécessaire pour atteindre entièrement l'oscillation PRB. Cette distance est accrue avec la température homogène. Un tel effet est une conséquence du développement de la couche limite thermique qui réduit la plage d'action de la convection stationnaire de RB.



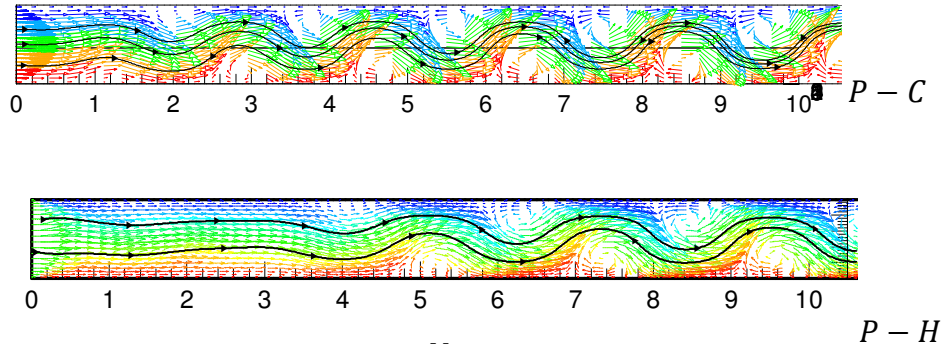


Figure 5-17 : Plan médian vertical avec différentes conditions d'entrée du fluide à $Pe = 3.55$ $Ra = 2500$; Maillage $262 \times 42 \times 22$ dimensions de la cavité $20 \times 12 \times 1$; coloration des vectrices vitesses en fonction de la température

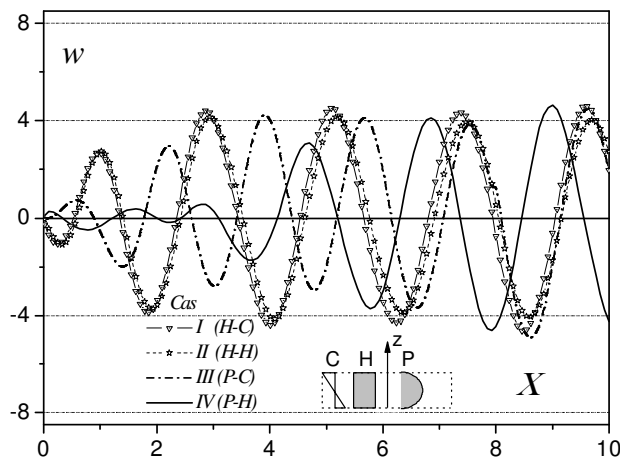


Figure 5-18: Composantes verticales de vitesse sur la ligne horizontale médiane pour les différents cas considérés ($Pe = 3.55$; $Ra = 2500$)

5.3.2 Conditions de sortie

La description du problème de la sortie et ses solutions proposées remontent au § 4.4.3. On rappelle que dans les cas de nos équations de nature parabolique et compte tenu du caractère implicite de l'expression de la contrainte (qui contient la pression) nous avons utilisé la proposition de M. MEDALE (2006) qui consiste en l'adaptation de l'algorithme de projection inconditionnellement stable développé par GUERMOND et QUARTAPELLE (1997), afin d'y introduire le concept de condition aux limites de sortie

proposée par PAPANASTASIOU et al. (1992), traduite par une condition sur la contrainte aux nœuds imaginaires, de la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad \text{sur } \partial\Omega_S$$

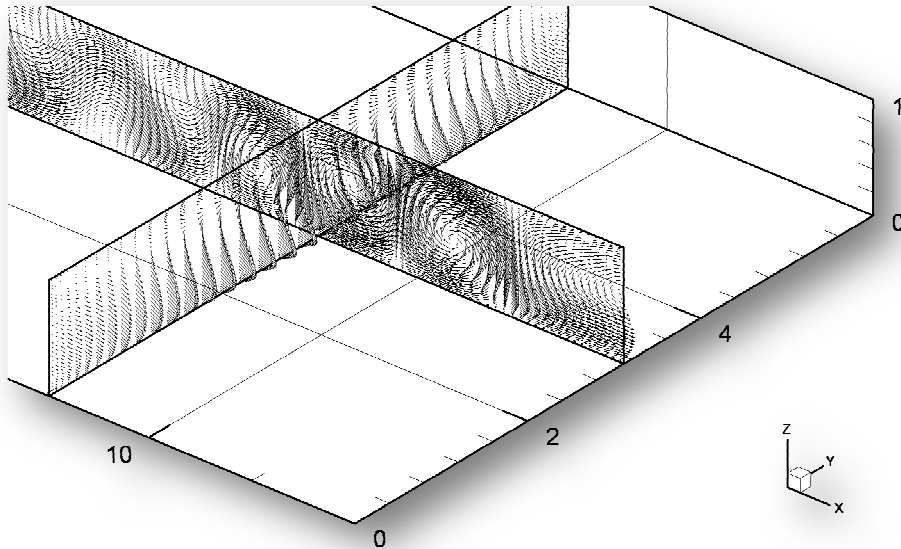


Figure 5-19 : Franchissement d'un rouleau transversal de la frontière virtuelle qui simule des conditions remplaçant un canal infini. $Ra = 2500$ et $Pe = 2.5$

Sur le plan longitudinal moyen de la Figure 5-19, et allant vers les x croissant, on voit la naissance des rouleaux, puis trois rouleaux pleinement établis émergent le volume du canal et enfin, à la section de sortie, le rouleau traversant le plan extrême 'virtuel', laissant pour l'infini la décision à propos du sort du rouleau. Sur le plan transversal, on contemple les vecteurs de vitesse témoignant sur l'allongement du rouleau sur toute la largeur du canal, un effet de couche limite dynamique se formant allant des extrémités vers le centre.

5.4 Étude numérique de la convection mixte sous effet SORET

5.4.1 Situation générale

Un problème complexe doit vérifier tous ses cas particuliers se ramenant à des contextes plus précis et plus accessibles. Tel le cas de la convection mixte sous l'effet SORET, qui se ramène à d'autres cas physiques

rien qu'en annulant Re ou N . La vérification et la maîtrise de ces cas particuliers est exigée au traitement du présent cas général, ce qui a demandé un effort étendu afin de synthétiser un état de l'art, et a représenté en elle-même une contribution aux problèmes de **RB** et **HRL** sous effet **SORET**, et de convection mixte en **DARCY BRINKMAN**.

L'orientation actuelle étant de développer une modélisation de l'évolution du fluide binaire pompé dans le canal, en fonction des paramètres du problème ; la stratégie que nous traçons pour présenter les résultats englobera une exposition de diagrammes généraux de bifurcations, une quantification des transferts de masse et d'énergie, et enfin une étude spatio-temporelle du caractère ondulatoire de l'écoulement. Une fois décortiqué, ce problème nous permet de dégager des enseignements utiles à définir un procédé de séparation des composants du fluide binaire. Un double profit se dégage de cette étude, l'un est académique par tout ce qui présenté comme méthodes et calculs et l'autre est industriel par le procédé proposé.

5.4.2 Convection : Analyse numérique du diagramme de stabilité

La question qui laisse toujours perplexes les physiciens face à un problème qu'on ignore est : que va-t-il se passer si on modifie tel ou tel paramètre ? Et pourra-t-on quantifier l'influence de ce paramètre ? Supra, nous avons présenté des diagrammes de stabilité prévus par l'analyse linéaire de stabilité. Mais à quel point ces diagrammes sont vérifiés et sont-ils réalistes et utilisables ? La connaissance actuelle a engendré l'ignorance. Ainsi nous espérons apporter réponse à ces interrogations, en lançant des simulations directes avec différents types de chauffage, pour enfin pouvoir évaluer les phénomènes observables. Pour cette fin, on va appliquer un chauffage croissant dans les trois zones à convection possible, sauf pour le deuxième cas où le chauffage est inversé (cf. Figure 5-20). On observera et on analysera le mode de convection qui va prendre place. Après cela on vient forcer un écoulement moyen à vitesse modérée à traverser la cavité et on étudie le phénomène résultant. Une autre approche possible consiste à se placer dans des conditions Ra, Le, N définissant un statut donné de la convection naturelle, mais en initialisant le calcul avec l'admission d'un écoulement moyen à l'entrée. Loin de l'origine des dates les deux situations sont homologues, malgré une phase de transition différente vers les structures pleinement établies. On prendra pour le cas de la flèche 3 de la Figure 5-20 comme axe central des simulations la droite d'équation $N = -1/(1 + Le)$ (valeur de surstabilité marginale) ; c.à.d. qu'on fera du calcul

des solutions numériques en $N = -1/(1 + Le)$ et légèrement à droite et légèrement à gauche.

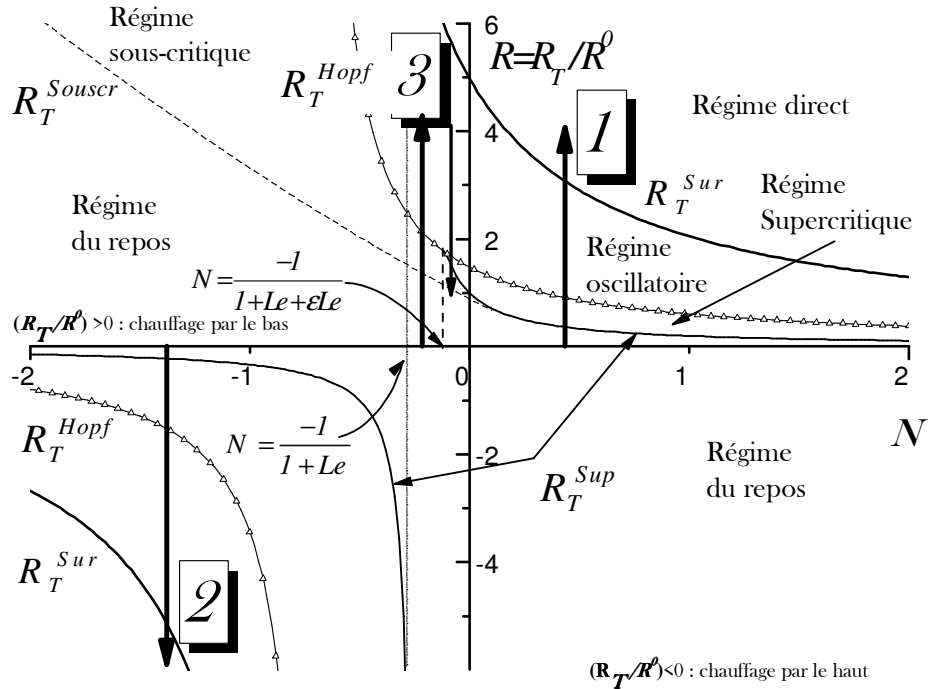


Figure 5-20 : Diagramme de stabilité dans le plan (R, N) à $Le = 3$ et $\varepsilon = 0.7$; les flèches numérotées indiquent le sens de variation du RAYLEIGH désignant les cas que étudiés

◆ Mécanique de la convection au cas $N \approx -1/(1 + Le)$

Dans ce cas on traite des problèmes où N et Le sont loin de vérifier leur rapport satisfaisant la surstabilité marginale. Quatre modes convectifs sont possibles pour cette gamme de séparation, un état supercritique, une phase sous-critique atteinte uniquement par décroissance du R après la naissance du mouvement convectif, un état oscillatoire non dégénéré (bifurcation de HOPF) et un état oscillatoire conduisant vers un chaos déterministe. Sous un effet thermique et solutal déstabilisants, tout est au mieux vers le chaos. Entre le fluide et le poreux la porosité est capitale pour définir un état oscillant (cf. 4.12), bien qu'on retrouve les situations de rouleaux transversaux et longitudinaux clairs dans une plage réduite de

(R, N, Le) permettant une convection stationnaire, à laquelle s'ajoutant un débit forcé il apparaît des structures mobiles dans le mode supercritique.

Convection supercritique

Le mode supercritique est la zone délimitée par les lignes neutres R^{sup} et R^{Hopf} . C'est les lieux de l'espace (R, N, Le) qui nous permettent de voir les structures convectives les plus symétriques et les plus ordonnées surtout à bas nombres de RAYLEIGH. L'esquisse générale décrivant cet état peut se résumer en l'existence de rouleaux s'allongeant sur la plus grande dimension en absence de convection forcée. Un débit moyen traversant la cavité engendre un comportement sélectif de R_{\perp} et R_{\parallel} , voire même leur coexistence, tout en favorisant le développement d'ondes progressives évoluant vers l'amont ou rarement en opposition à l'écoulement moyen. La mécanique du mouvement gérée par une onde thermique se propageant le long du canal, et qui par son déplacement favorise le transport des rouleaux.

Les figures ci-dessous ne sont que des images figées de l'écoulement dans des dates définies. Elles montrent néanmoins des changements au niveau des positions des structures convectives, témoignant d'un transport global de la matière et de l'énergie. La majorité des études des R_{\perp} est accomplie en bidimensionnel, ne permettant ainsi que la captation de R_{\perp} quelque soit le RAYLEIGH. L'étude spatiale prouve que l'écoulement est bidimensionnel loin des parois (cf. Figure 5-23), ce qui conforte les études 2D d'un côté, mais prouve aussi que les R_{\perp} ne peuvent guère exister pour des plages données de (R, Re) ce qui met en cause une bonne partie des données des études planes¹, et consolide l'intérêt des essais 3D. Sur la Figure 5-23 on montre les variations des modules des composantes de vitesse sur la ligne horizontale moyenne où $\|v\|$ est très voisin de zéro partout. Sur la représentation vectorielle on voit de face un R_{\perp} où les lignes centrales montrent aussi l'absence d'une composante v sur la verticale. En milieu de DARCY cet effet est plus simple à voir en raison de l'absence de couches limites. L'écoulement est plan partout sur la profondeur.

¹ Dans les études 2D on fournit par exemple des longueurs d'ondes des fréquences de propagation, des vitesses de phases de R_{\perp} pour des couples (R, Re) où les R_{\perp} ne peuvent point exister.

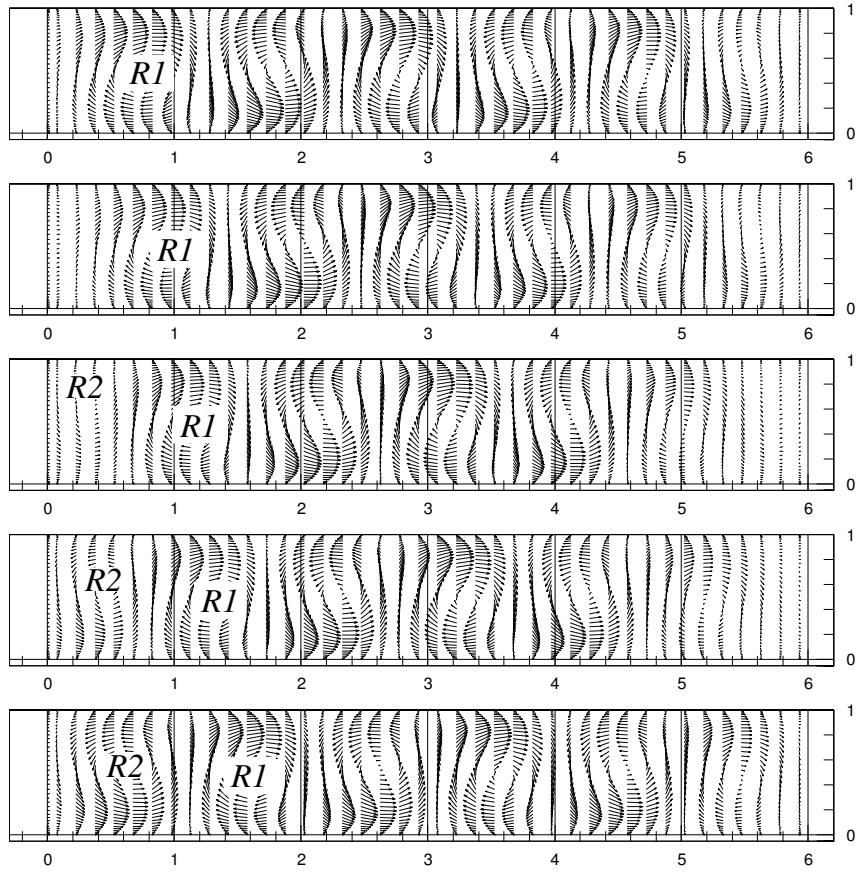


Figure 5-21 : Genèse et migration d'un R_1 en mode pleinement établi (plan (X, Z)). Ces graphes révèlent l'aspect des ondes progressives. Rouleaux transversaux captés sur le plan vertical médian. $R_T = 41, Da = 10^{-8}, Pe = 0.5, Le = 3, N = -0.05, \Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$

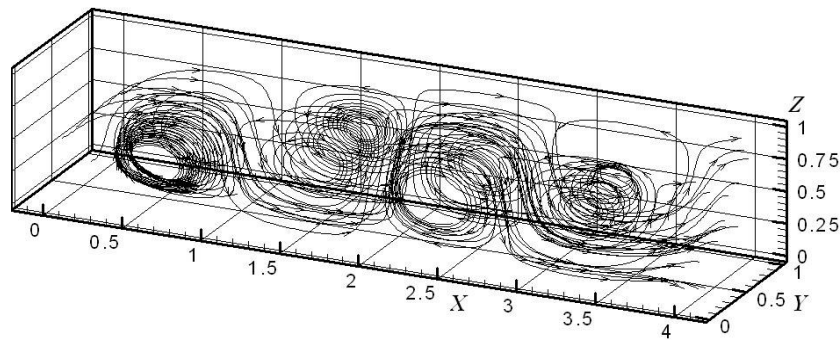


Figure 5-22 : Morphologie de l'écoulement. $R_T = 41, Da = 10^{-8}, Pe = 0.5, Le = 3, N = -0.05$

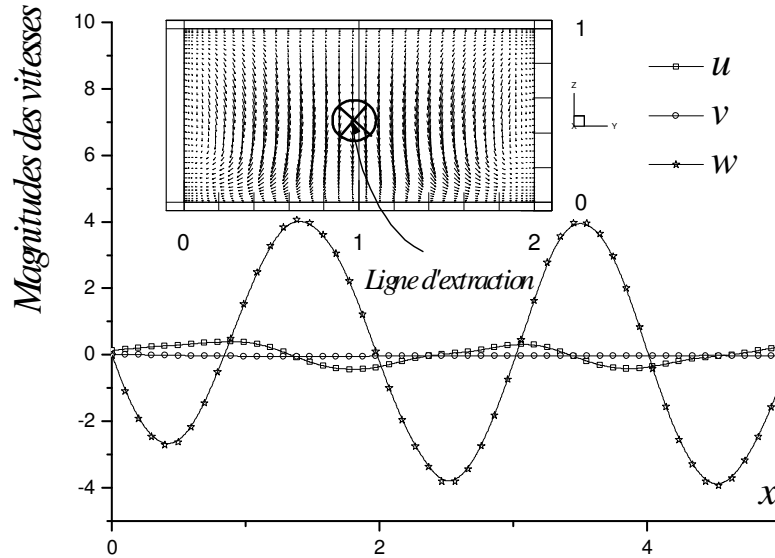


Figure 5-23 : Aspect bidimensionnel de l'écoulement loin des parois latérales.
Illustration à : $Ra = 2500, Da = \infty, Re = 0.5, Pr = 2, Le = 7, N = -0.01$

A présent nous continuons la démarche d'expérimentation numérique en élevant le RAYLEIGH jusqu'à atteindre ou dépasser les autres limites R_T^{Hopf} et R_T^{Osc} .

Bifurcation de HOPF

Les forces solutales sont à l'origine des oscillations qu'elles soient en fluide ou en poreux, la porosité n'étant qu'un translateur des transitions. L'oscillation naît d'une hésitation de la structure convective entre deux états en rivalité, l'impuissance de chacun d'eux à maintenir une situation stationnaire mène à un échange de position des gradients moteurs du mouvement, d'où l'oscillation. Du fait que la différence de concentration germe de celle de la température, ces deux forces ne sont jamais synchrones et l'espèce est toujours en poursuite de l'énergie, il s'en suit, par tentative de compenser un gradient local de température, une migration locale de l'espèce laissant l'endroit vide à un autre gradient de température, et la course est perpétuelle. En regardant le graphe paramétré $(v(t), w(t))$ de la Figure 5-24, on comprend très bien que l'oscillation est loin d'être bidimensionnelle puisque la composante selon y de la vitesse oscille entre deux valeurs non nulles, voire même supérieures à celles de la composante verticale.

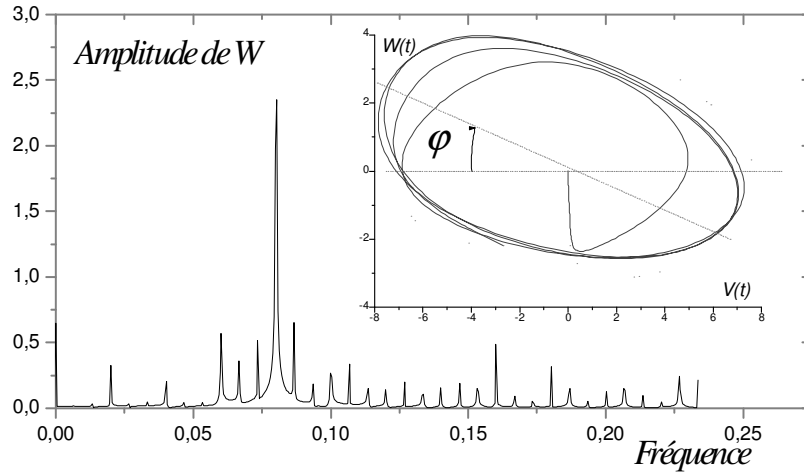


Figure 5-24 : Légèrement un peu au dessus de la bifurcation de HOPF, on visualise les harmoniques de FOURIER et le graphe paramétré $(v(t), w(t))$ aux conditions $R_T = 40, Da = 10^{-8}, Le = 3, Pr = 1, \varepsilon = 0.3, N = 0.5$

Cet espace des phases montre un comportement déterministe autour d'un point attracteur. La transformation topologique dans l'espace des phases possède aussi une signification physique. En effet, la dilatation des orbites $(v(t), w(t))$ en fonction du temps montre un comportement homéomorphe signifiant une amplification de l'énergie des particules oscillant sous l'effet de l'interaction d'un univers de non linéarités reliant effort volumiques massiques et solutaux. L'inclinaison des axes du graphe des phases est le déphasage entre les deux grandeurs interdépendantes. La fréquence adimensionnelle du mouvement est aussi donnée. Des harmoniques d'ordre supérieur à l'unité, sont présentes, signifiant que le mouvement n'est pas géré par l'unique pulsation du premier terme de la série en polynôme trigonométrique de FOURIER, i.e. qu'il y d'autres mouvements périodiques non négligeables et que nous n'arrivons pas à visualiser, au sein du système. Les images qui suivent cela, illuminent le mode d'oscillation au-delà du franchissement de la limite de HOPF. Il s'agit de cellules contrarotatives qui elles-mêmes pivotent autour de leurs axes verticaux, de manière opposées pour deux structures voisines, arrivant à un moment d'alignement où se visualise un rouleau longitudinal instationnaire, et puis les rotations continuent jusqu'à regagner la position initiale.

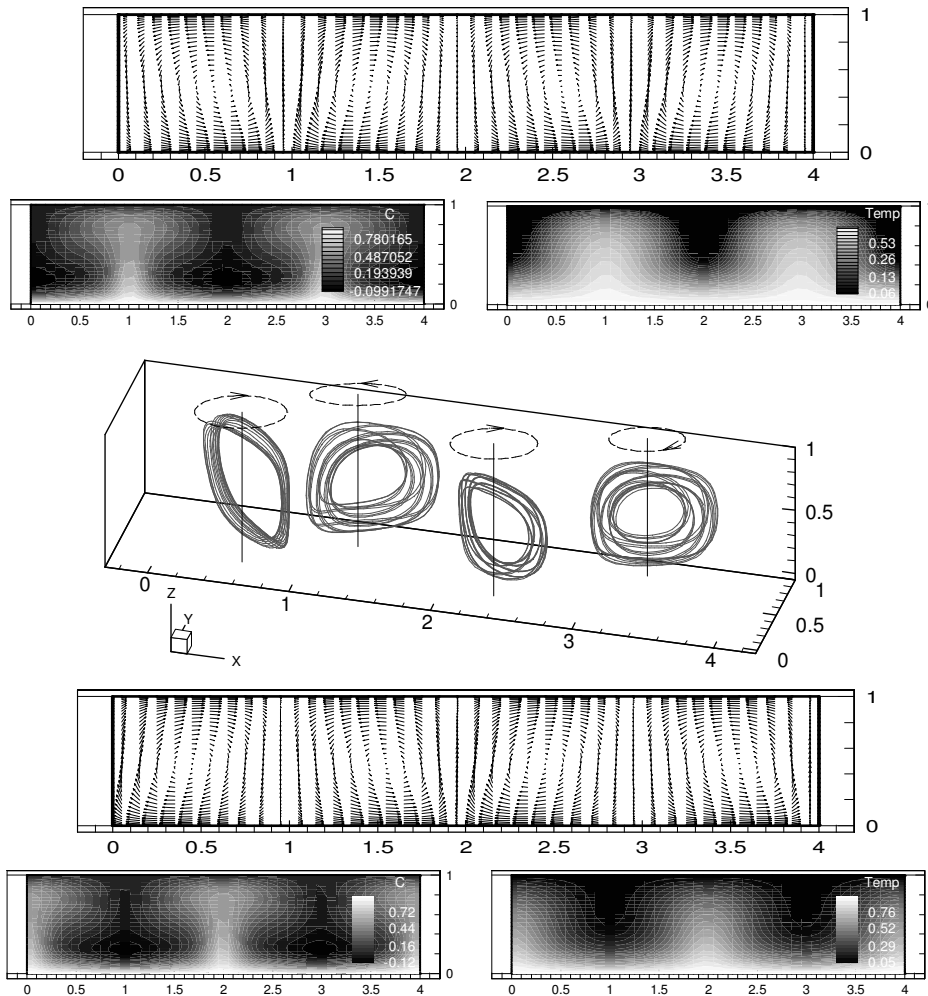


Figure 5-25 : Visualisation de l'état oscillatoire au-delà de la bifurcation de Hopf. La figure montre le plan médian d'une cellule suffisamment large où les rouleaux transversaux oscillent en rotation bi-axiale entres ces situations extrêmes représentées par les plans à : $R_T = 40$, $Da = 10^{-8}$, $Le = 3$, $Pr = 1$, $\varepsilon = 0.3$, $N = 0.5$

Cela étant narré à propos de la convection naturelle thermosolutale, alors que ce passe-t-il si on vient stabiliser le fluide par un débit à bas nombre de REYNOLDS ? Les essais numériques successifs ont toujours capté des rouleaux sinueux se déplaçant en rampant à la manière des cordes vibrantes (cf. Figure 5-26) instables ne sont pas intéressantes du point de vue études des R_{\perp} et de optimisation de la séparation.

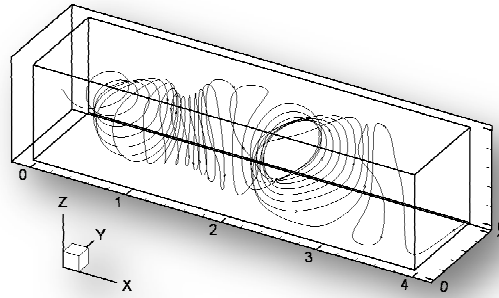


Figure 5-26 : Trajectoire d'une particule dans un rouleau sinueux en convection mixte. $R_T = 40$, $Da = 10^{-8}$, $Le = 3$, $Pr = 1$, $\varepsilon = 0.3$, $N = 0.5$

Après la présentation des résultats obtenus pour la convection naturelle et mixte après la bifurcation de HOPF, on poursuit notre démarche d'analyse décrite au § 5.4.2. On rappelle qu'on est à présent en train d'élever le RAYLEIGH dans la zone d'essai matérialisée par la flèche n°1 de la Figure 5-20, afin de dépasser la valeur de R_T^{Osc} .

Surpassement de R_T^{Osc}

Après le dépassement de la limite R_T^{Osc} , la stabilité prévoit une croissance exponentielle en fonction du temps des amplitudes, rien que par la forme des fonctions que nous avons imposées.

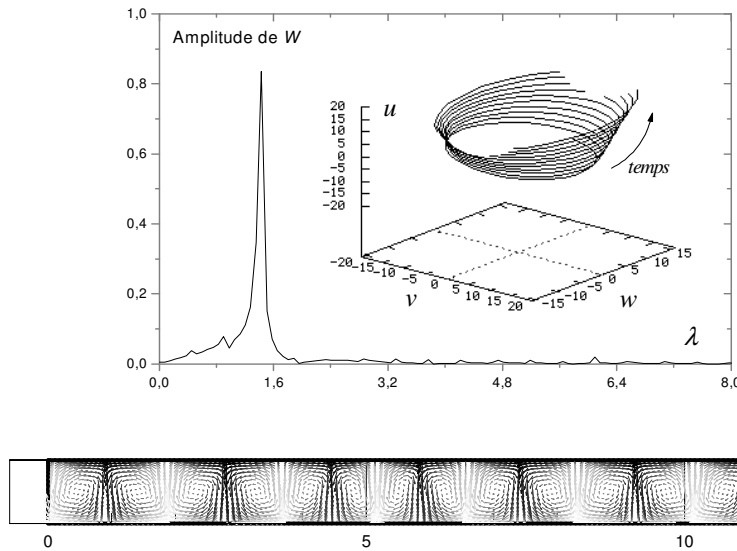


Figure 5-27 : Bien loin au-dessus de la limite surstable, on visualise les harmoniques de FOURIER et le graphe paramétré $(u(t), v(t), w(t))$ à $R_T = 100$, $Da = 10^{-8}$, $Le = 3$, $Pr = 1$, $\varepsilon = 0.3$, $N = 0.5$

Sur la Figure 5-27 on montre trois choses. Une image vectorielle des rouleaux de convection qui paraissent plus serrés ; on montre alors une transformée de FOURIER donnant la valeur de la longueur d'onde qui est nettement inférieure aux longueurs d'ondes obtenues en convection supercritique. La fréquence du mouvement est alors plus importante. Troisièmement nous présentons un espace des phases pour les composantes de la vitesse. Le graphe paramétré montre l'accroissement de ces grandeurs en fonction du temps. Chose qui est en concordance avec l'analyse de stabilité transitoire.

Dans le paragraphe qui suivra on s'intéressera à la zone qui se trouve à gauche de l'asymptote $N = -1/(1 + Le)$.

♦ Mécanique de la convection au cas $N \lesssim -1/(1 + Le)$

En allant vers les N négatifs, la limite de séparations $N = -1/(1 + Le)$ définit la fin d'existence d'un état supercritique. La limite de HOPF déclare sa fin en $N = -\mathcal{E}$. Ainsi, on ne trouve que le mode sous-critique comme aspect de convection dominant. On ne peut l'observer qu'en partant d'un état initial convectif par décroissance du nombre de RAYLEIGH, ou par décroissance de la séparation. L'état sous-critique imite en général son état parent, avec des amplitudes bien plus faibles. Quand $N \lesssim -1/(1 + Le)$, nous avons amené le fluide, afin de le déstabiliser, à $Ra = 23500$, puis on abaisse ce dernier jusqu'à 2350. Dans l'environnement chaud, on a observé les rouleaux longitudinaux de seconde espèce décrits par MORI et UCHIDA (1966) (cf. § 1.3.3). Ces derniers ont résolu approximativement les équations non-linéaires de la quantité de mouvement et de l'énergie pour en se basant sur les bilans d'énergie et de production d'entropie des tourbillons en rouleaux. Ils ont décrit ces rouleaux en convection purement thermique. Pour nos simulations on n'a pu les voir dans un tel cas. Néanmoins ils (MORI et UCHIDA) ont vu ces rouleaux expérimentalement. Or tout fluide est binaire, rien que par la présence d'isotopes dans ces molécules, par quoi nous expliquons cette observation uniquement en thermosolutal. La figure ci-dessous (Figure 5-28) montre les R_{\parallel} de seconde espèce, qui ont été vus au dessus de la valeur de HOPF et en sous-critique aussi bien en convection naturelle qu'en forcé. On notera que ces structures ne sont pas stationnaires et qu'elles sont sinueuses.

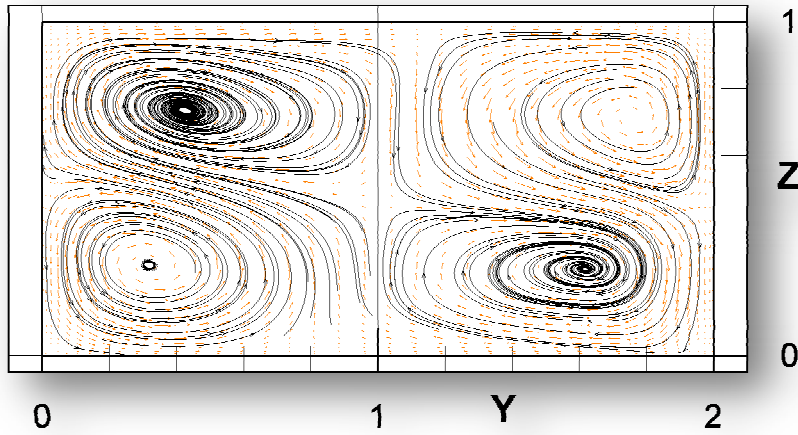


Figure 5-28 : Coupe transversale de rouleaux longitudinaux sinueux de seconde espèce vus à $Ra = 23500$ jusqu'à $Ra = 2350$ par décroissance. $Da = \infty$, $Le = 100$, $Pr = 10$, $N = -0.2$

◆ **Mécanique de la convection au cas $N \cong -1/(1 + Le)$**

Les équations décrivant notre modèle nous prédisent un état de surstabilité supercritique. L'analyse transitoire y prévoit une bifurcation de HOPF à haut RAYLEIGH. Quoi qu'il en soit, cet état est particulier car la somme des forces volumiques d'ARCHIMEDE due aux effets solutaux et thermiques est nulle. Ainsi, si la flottabilité est nulle et en absence de convection forcée, théoriquement il ne doit pas y avoir de mouvements convectifs. En transitoire, une convection peut naître à partir des perturbations amplifiées au cours du temps. Ces perturbations se créent grâce aux infimes différences locales entre les gradients opposés de température et de concentration. Numériquement nous avons essayé de matérialiser la surstabilité marginale avec deux types de conditions aux limites de concentration. Le premier décrit un flux nul aux parois ; ce cas mène toujours à une divergence du calcul que nous avons expliquée, après observation des résidus numériques et des valeurs locales, par des gradients locaux de C s'élevant sans limites afin de compenser la température. En convection mixte le calcul converge normalement. Le deuxième cas, bien que moins réaliste, se constitue de $C_{bas} = 1$ et $C_{haut} = 0$ et conduit à un calcul oscillant en simulations stationnaires ($\Delta t \gg 1$), et convergent en chaque pas de temps pour ($\Delta t \approx 10^{-2}$). Le premier mouvement convectif s'observe à $R = 23\mathcal{R}^0$. Sa structure est formée de rouleaux longitudinaux instationnaires (sinueux) de longueur d'onde transversale $\cong 4$.

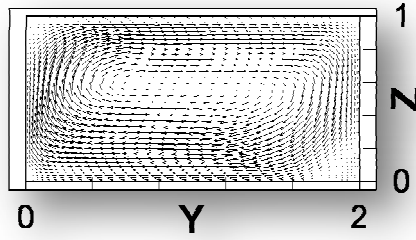


Figure 5-29 : Coupe transversale de rouleaux longitudinaux vus à l'état de surstabilité à : $Ra = 43500$, $Da = \infty$, $Le = 9$, $Pr = 2$, $N = -0.1$

Précédemment (cf. Table 5-1 ; Table 5-2), nous avons trouvé numériquement qu'en convection naturelle nous retrouvons l'état de surstabilité en partant d'une condition initiale de repos absolu, laquelle surstabilité peut être facilement démolie par une convection forcée même à très faibles Pe . On explique cela par le fait que la redistribution des gradients par le mouvement forcé interdit tout équilibre, même localement. L'équilibre local de ce point particulier est métastable. En effet les conditions initiales ont un apport majeur sur la situation ultérieure du fluide, ensemble de comportements que nous résumons à la Table 5-5. En perturbant cet équilibre par un mouvement forcé on voit deux phénomènes non conventionnels.

1. Lorsque N est légèrement strictement supérieur à $-1/(1 + Le)$ et pour des nombres de RAYLEIGH peu élevés (i.e. à partir de $1.01 \times \mathcal{R}^0$) on observe la bifurcation commencer par des petites ondulations se propageant vers l'aval, i.e. remontant le débit forcé, puis la vitesse de phase diminue en valeur absolue jusqu'à s'annuler et les rouleaux apparaissent et commencent à regagner le mécanisme supercritique conventionnelle (cf. Figure 5-30) en se déplaçant pratiquement en phase vers l'amont avec le débit moyen (cf. Figure 5-31). Un mouvement vers l'amont peut aussi s'installer dès le départ.
2. Quant N est légèrement inférieur ou égal à $-1/(1 + Le)$ on retrouve un état composé de rouleaux remontant clairement l'écoulement moyen. En allant vers les valeurs de N négatives mais de plus en plus grandes en valeur absolue, on retrouve uniquement les ondes se propageant au sens de l'écoulement moyen, puis pour des N négatifs plus éloignés de zéro l'écoulement redevient plus stable par l'addition de l'effet stabilisant de Pe et N .

On désignera par R_{\perp}^{+} les rouleaux se déplaçant avec l'écoulement et R_{\perp}^{-} par les rouleaux le remontant.

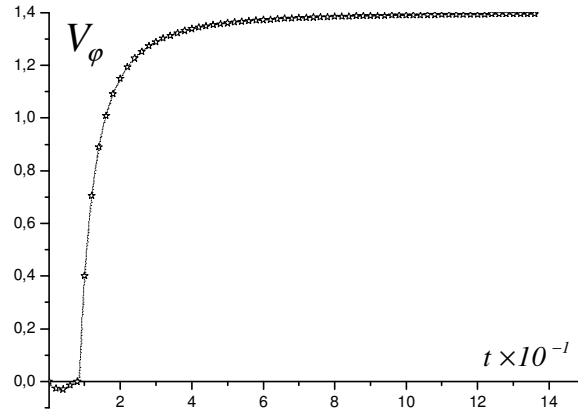


Figure 5-30 : Historique des vitesses de phase $V_\varphi = \omega/K_C$ obtenue à partir des données numériques 3D. $Ra = 2800, Da = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -8 \times 10^{-3}$. Condition initiale : POISEUILLE en entrée

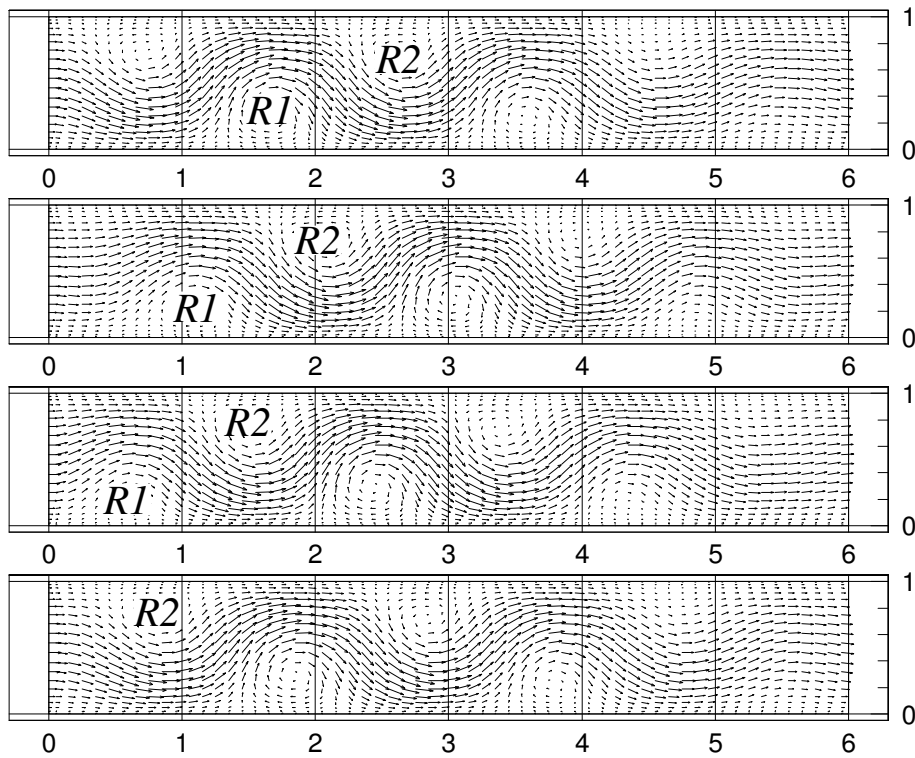


Figure 5-31 : Migration en remontant l'écoulement moyen, d'un R_1^- en mode pleinement établi (plan (X, Z)). Rouleaux transversaux captés sur le plan vertical médian. $Ra = 2800, Da = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -0.01, \Delta t = 8.75$

Le système étant très influencé par l'état initial en ce point très particulier, nous présentons le tableau suivant afin de faciliter au lecteur la vision des déroulements des essais numériques. La colonne de gauche désigne toujours le résultat d'un calcul préliminaire jusqu'à la convergence, après quoi on reprend le calcul en initiant l'état par ces résultats et en définissant un nouveau statut des paramètres de contrôle (ex. si on part d'un état de repos absolu en prenant un R en croissance on aura un état de surstabilité).

État initial (résultat d'un calcul d'initiation)	Réinitialisation des paramètres de contrôle à $t > 0$; ($N \cong -1/(1 + Le)$)			
	Croissance de R	Décroissance de $R \gg 1 \rightarrow R \sim \mathcal{R}^0$ avec $Pe > 0$	Perturbation numérique*	$Pe > 0$
Repos $Pe = R = 0$	Surstabilité	—	—	POISEUILLE ou débit filtrant
Surstabilité $Pe = 0$; $R \gg 1$	État oscillatoire irrégulier	$R_{\perp} \begin{cases} + si N > N_0 \\ \pm si N \lesssim N_0 \end{cases}$	État oscillatoire irrégulier	État oscillatoire irrégulier
$Pe > 0$; $R = 0$	$R_{\perp} \begin{cases} + si N > N_0 \\ \pm si N \lesssim N_0 \end{cases}$	—	—	POISEUILLE ou débit filtrant
Surstabilité $Pe = 0$, $R \sim \mathcal{R}^0$	Surstabilité	—	Surstabilité	$R_{\perp} \begin{cases} + si N > N_0 \\ \pm si N \lesssim N_0 \end{cases}$

Table 5-5 : Evolution du système en fonction de l'état initial au voisinage proche du point de surstabilité défini par $N \cong -1/(1 + Le)$. (* On désigne par perturbation numérique le fait qu'on vient changer sur un point de la grille de calcul une ou plusieurs grandeurs du problème).

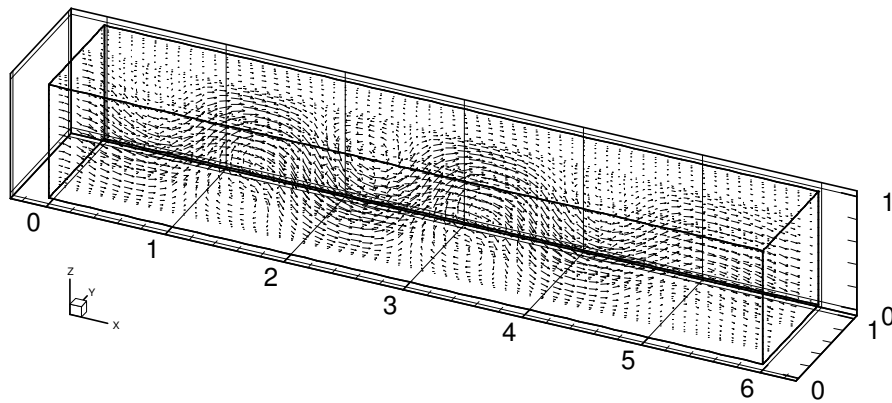


Figure 5-32 : Image vectorielle tridimensionnelle de rouleaux transversaux captés à : $Ra = 2800, D = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -0.01, \Delta t = 8.75$

♦ Cas d'un chauffage par le haut

L'unique intérêt de ces essais est de démontrer que le soluté pour des $N < 0$ et $R < 0$ peut être l'effet moteur de la convection bien que la température soit stabilisante. L'écoulement est généralement instable et irrégulier. La structure la plus régulière à observer est un écoulement de

rouleaux longitudinaux généralement instationnaire de longueur d'onde de l'ordre de quatre (cf. Figure 5-33). Le cas d'un coefficient de séparation positif avec un R négatif donne toujours un fluide interminablement stable.

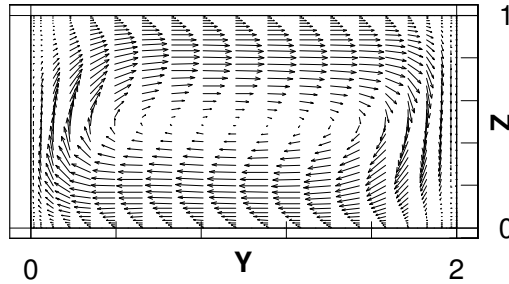


Figure 5-33 : Convection naturelle thermosolutale dans le cas d'un chauffage par le haut avec coefficient de séparation négatif. $Ra = -1710$, $Le = 3$, $Pr = 1$, $N = -5$

◆ Morale de l'exercice sur la mécanique de la convection

L'étude mécanique antérieure a éclairci les modes de convections possibles en fonction du triplet (R, N, Le) et nous a permis de localiser les lieux susceptibles d'être, à bas nombres de Pe , le siège de R_{\perp} et d'ondes progressives qui sont les cibles de notre étude. Ces lieux sont définis par la zone supercritique et un voisinage restreint de $N = -1/(1 + Le)$. La Figure 5-34 rappelle les résultats les plus utiles de cette étude. La Figure 5-35 nous semble l'un des plus beaux fruits de cette étude ; puisqu'on y localise avec précision la naissance des R_{\perp} . Dans ce qui suivra, nous concentrons l'étude sur les propriétés mécaniques des rouleaux transversaux.

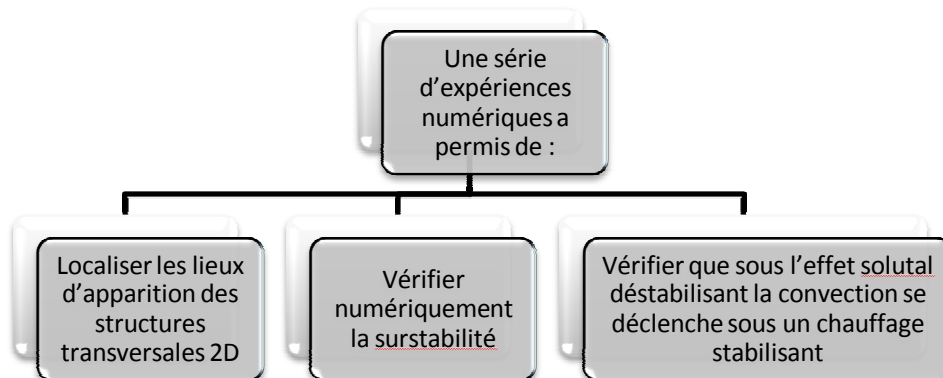


Figure 5-34 : Principaux résultats des simulations numériques nécessaires pour balayer l'espace (R, N, Le) à la recherche des rouleaux transversaux 3D

5.5 Étude numérique quantitative des rouleaux transversaux en convection mixte sous effet SORET

5.5.1 Contexte général

Comme on s'est fixé pour but de ce travail l'étude des structures convectives transversales, et après leur localisation, nous passons à une phase plus quantitative. Tout d'abord, on présente le résultat le plus précieux du paragraphe précédent. Sur la Figure 5-35 on précise les lieux d'apparition de ces structures. Les rouleaux remontant l'écoulement moyen ne peuvent exister qu'à gauche de la limite surstable. Le texte qui suivra présentera une petite base de données permettant de décrire quantitativement ces structures convectives.

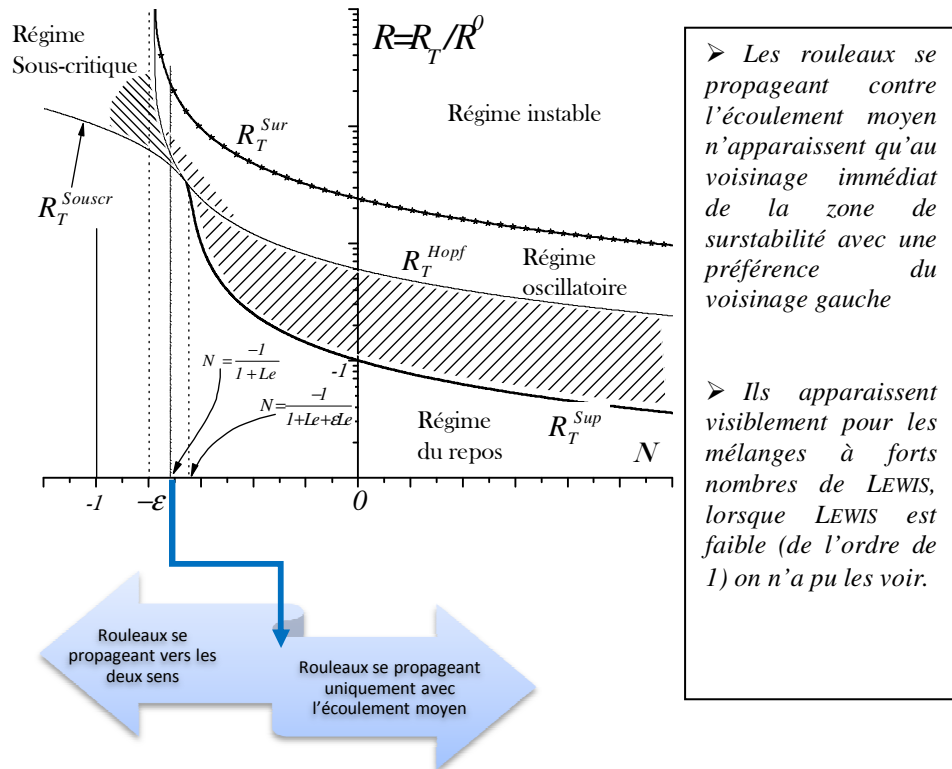


Figure 5-35 : Lieux du plan (R, N) sièges d'apparition de rouleaux transversaux et d'ondes longitudinales progressives en convection mixte. Les bandes hachurées sont les domaines d'apparition de nos structures recherchées R_T^+ et R_T^-

5.5.2 Caractéristiques ondulatoires

◆ Milieu de DARCY

Le milieu poreux par ses caractéristiques diffère du cas fluide, de plusieurs points de vue ; à citer la faiblesse des vitesses et par suite l'absence d'un tenseur de cisaillement, et l'influence de la porosité, la perméabilité et des capacités calorifiques. Ces effets croisés laissent leurs empreintes sur les caractéristiques de l'écoulement, bien que le comportement général reste présentant une grande similitude. Pour ces raisons nous avons choisi de séparer la discussion des cas fluide et DARCY.

Commençant par ce dernier, on présente sur la Figure 5-36 l'influence du nombre R_T sur la périodicité spatiale du mouvement convectif. Cette périodicité spatiale est traduite par le nombre d'onde $k_C = 2\pi/\lambda$. L'enseignement général qu'on pourra tirer à partir des résultats de cette figure, est que le chauffage plus accentué tend à compresser les longueurs d'onde (cf. Figure 5-27 qui montre un effet similaire). Un moyen d'expliquer cela est qu'un nombre plus élevé de cellules de rotation permet de mieux dissiper le gradient de température inhérent du R_T plus haut.

L'effet du Pe sur la longueur d'onde est dressé sur la Figure 5-37, qui montre un k_C décroissant (i.e. un λ croissant) en fonction de l'intensité du débit filtrant. L'hypothèse la plus vraisemblable d'expliquer ceci est l'effet de l'advection. D'autres paramètres caractéristiques du fluide tels que le Le et le Pr peuvent influencer également la longueur d'onde, qui est généralement plus petite dans le cas des mélanges liquides (sous l'effet d'un même coefficient de séparation N).

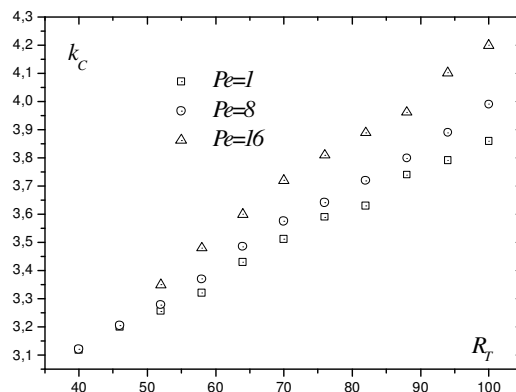


Figure 5-36 : Nombre d'onde k_C en fonction de R_T pour différents Pe obtenu à partir des données numériques. ($Da = 10^{-8}$, $N = 0$ et $\mathcal{E} = 0.5$)

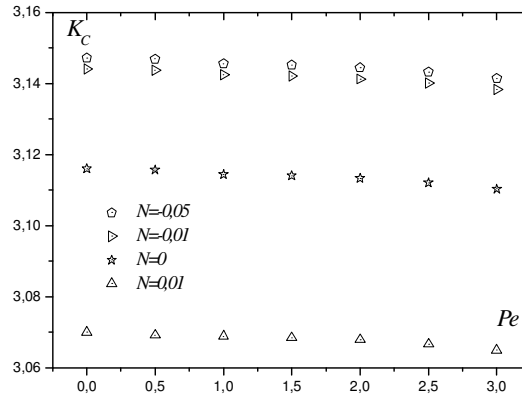


Figure 5-37 : Nombre d'onde k_c en fonction de Pe obtenu à partir des données numériques à un R_T voisin de \mathcal{R}^0 . ($Da = 10^{-8}$, $Le = 1$ et $\mathcal{E} = 0.5$)

Pe	k_c			
	$N = -0.05$	$N = -0.01$	$N = 0$	$N = 0.05$
0,0	3,0861	3,1170	3,1138	3,0399
0,5	3,0848	3,1156	3,1125	3,0396
1,0	3,0845	3,1153	3,1123	3,0393
1,5	3,0837	3,1145	3,1115	3,0387
2,0	3,0825	3,1133	3,1102	3,0375
2,5	3,0808	3,1116	3,1085	3,0359
3,0	3,0861	3,1170	3,1138	3,0399

Table 5-6 : Évolution du nombre d'onde critique en fonction de N et du Pe au cas des mélanges gazeux ($Pr = 1$, $Le = 2$, $R_T = 40$, $Da = 10^{-8}$ et $\mathcal{E} = 0.5$)

Pe	k_c			
	$N = -0.099$	$N = -0.005$	$N = 0$	$N = 0.05$
0,0	—	3,1472	3,1440	3,0700
0,5	3,0534	3,0525	3,0494	2,9770
1,0	3,0521	3,0511	3,0481	2,9767
1,5	3,0518	3,0508	3,0478	2,9763
2,0	3,0510	3,0501	3,0471	2,9758
2,5	3,0499	3,0489	3,0458	2,9746
3,0	3,0481	3,0472	3,0442	2,9731

Table 5-7 : Évolution du nombre d'onde critique en fonction de N et du Pe au cas des mélanges liquides ($Pr = 10$, $Le = 100$, $R_T = 40$, $Da = 10^{-8}$ et $\mathcal{E} = 0.5$)

◆ Milieu Fluide

Une entreprise de la même démarche, de caractérisation de l'influence des divers paramètres sur les ondes d'énergie, est continuée en milieu fluide. Les résultats sont illustrés dans les graphes et les tableaux qui suivent.

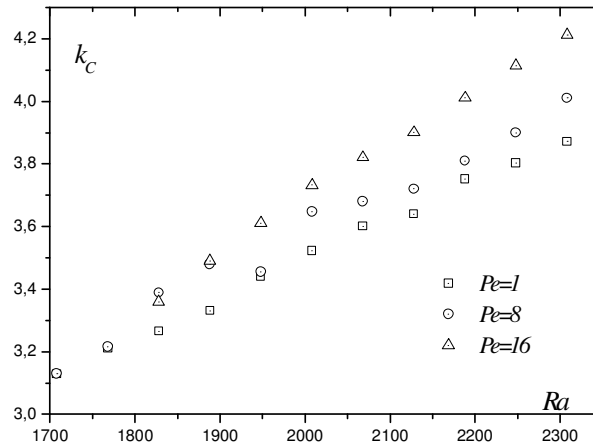


Figure 5-38 : Nombre d'onde k en fonction de Ra pour différents Pe obtenu à partir des données numériques. ($Da = \infty$ et $N = 0$)

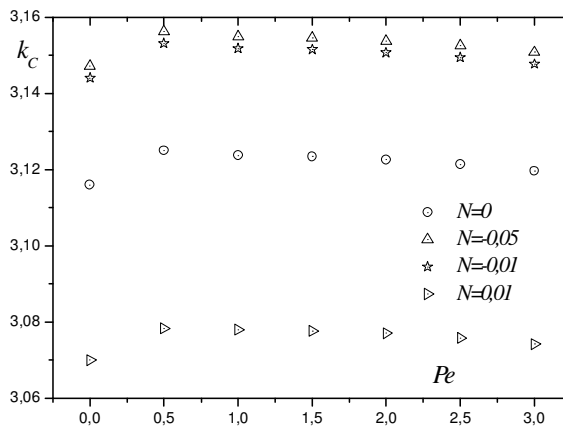


Figure 5-39 : Nombre d'onde k_C en fonction de Pe obtenu à partir des données numériques à un Ra voisin de \mathcal{R}^0 . ($Da = \infty$ et $Le = 1$)

Quoi qu'il en soit, en fluide ou en DARCY, l'ordre de grandeur des nombres d'ondes est la même ainsi que l'évolution en fonction des nombres Pe et R est similaire (voir description au § 5.5.2). Néanmoins les valeurs sont un peu différentes à cause de la présence de certains paramètres tels que la porosité

et le cisaillement dans un milieu ou dans l'autre. De toutes manières, dans les fluides ou dans les gaz (comparaison des tableaux), en fonction de Pe ou de R les longueurs d'ondes sont plus petites en milieu de DARCY. L'influence des paramètres caractéristiques du fluide i.e. Le et Pr sur la longueur d'onde suit le même comportement qu'en milieu poreux de DARCY. On reprend la même comparaison pour les mélanges gazeux et liquides.

Pe	k_c			
	$N = -0.05$	$N = -0.01$	$N = 0$	$N = 0.05$
0,0	3,116	3,14716	3,1440	3,07
0,5	3,1157	3,1468	3,1437	3,0691
1,0	3,1144	3,1455	3,1424	3,0688
1,5	3,1141	3,1452	3,1421	3,0684
2,0	3,1133	3,1444	3,1413	3,0678
2,5	3,1121	3,1432	3,1400	3,0666
3,0	3,1103	3,1414	3,1383	3,065

Table 5-8 : Évolution du nombre d'onde critique en fonction de la séparation N et du PécLET au sein des mélanges gazeux ($Pr = 1$, $Le = 2$, $Ra = 2200$ et $Da = \infty$)

Pe	k_c			
	$N = -0.099$	$N = -0.005$	$N = -0.05$	$N = -0.05$
0,0	—	3,1535	3,1503	3,0761
0,5	3,0966	3,1336	3,1305	3,0572
1,0	3,0775	3,1140	3,1110	3,0385
1,5	3,0585	3,0947	3,0916	3,0200
2,0	3,0398	3,0756	3,0725	3,0018
2,5	3,0213	3,0566	3,0537	2,9837
3,0	3,0030	3,0379	3,0350	2,9659

Table 5-9 : Évolution du nombre d'onde critique en fonction de la séparation N et du PécLET au sein des mélanges liquides ($Pr = 10$, $Le = 100$, $Ra = 2200$ et $Da = \infty$)

5.5.3 Pulsations et vitesses de phases

Certaines caractéristiques des rouleaux transversaux, comme la longueur d'onde obtenue à partir de la distribution spatiale de la température ou n'importe quelle autre variable du problème, la période d'oscillations obtenue à partir du suivi temporel de la température et la

vitesse de phase. Ces grandeurs sont classées cas par cas selon le milieu et le type du mélange et sont comparées entre elles.

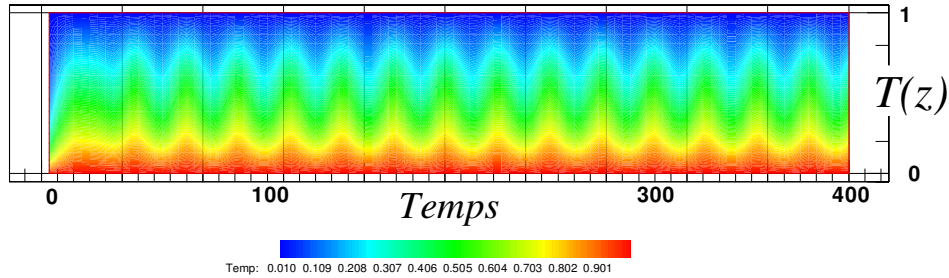


Figure 5-40 : Image de l'évolution spatio-temporelle de la température construite à partir de la juxtaposition des lignes verticales médianes coordonnées par $(x = 0.5, y = 0.5, z, t)$ captée à : $Ra = 2700, Da = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -0.01$

A partir des données numériques, nous avons déterminé le spectre temporel de la température au point $(0.5, 0.5, 0.5)$ en effectuant une transformée de FOURIER rapide (F.F.T)¹. Les nombres d'onde sont calculés de la même manière mais à partir de la distribution spatiale de la vitesse. On a tracé le module de la transformée de FOURIER en fonction de la fréquence du mouvement et du nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ sans la pulsation nulle et le nombre d'onde nul qui indiquent le signal moyen. Le spectre de ces derniers, se réduit à la forme particulière d'un "pic" autour d'une harmonique précise caractéristique du régime convectif. Bien évidemment la pulsation ω et la vitesse de phase V_ϕ critiques sont dépendants de Pe et Ra .

¹ Plus exactement on a effectué une F.F.T après avoir rallongé le signal avec répétitions successives des phases alternatives de variation de la température sur la direction x . Ce rallongement du signal réduit la fourchette d'erreur sur la pulsation ; puisqu'en F.F.T on divise par le nombre de points discrets donnés. Ce traitement est très utile lorsque le spectre est localisé dans les basses fréquences.

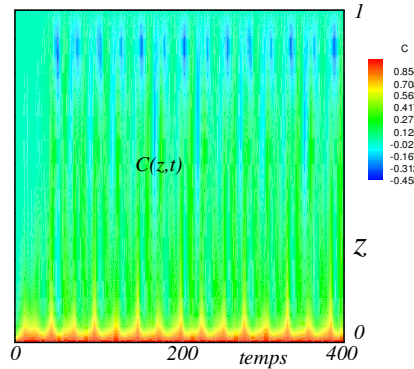


Figure 5-41 : Images de l'évolution spatio-temporelle de la vitesse et de la concentration construites à partir de la juxtaposition des lignes verticales médianes coordonnées par $(x = 0.5, y = 0.5, z, t)$ captés à : $Ra = 2700, Da = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -0.01$

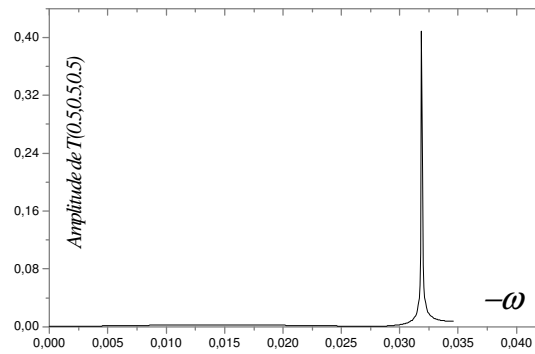


Figure 5-42 : Module de la transformée de FOURIER (F.F.T) du suivi temporel de la température au point $(x = 0.5, y = 0.5, z = 0.5)$ en fonction de la pulsation avec (F.F.T sur plus que 2^{10} points) $Ra = 2800, Da = \infty, Re = 0.1, Pr = 10, Le = 100, N = -0.01$; rouleaux se propageant vers l'aval.

◆ **Convection mixte des fluides purs en milieu de DARCY**

On a suivi numériquement via les transformations antérieurement décrites, l'évolution des propriétés propagatrices des ondes progressives. Pour cela on focalise au départ sur le cas $N = 0$ afin de le retenir comme référence pour les résultats ultérieurs. La pulsation est croissante en fonction de R_T alors qu'on peut déduire que (cf. Figure 5.42 et 5.43) :

$$V_\phi \approx Pe$$

Ce résultat est concluant lorsqu'on le compare au travail présenté par DELACHE (2005).

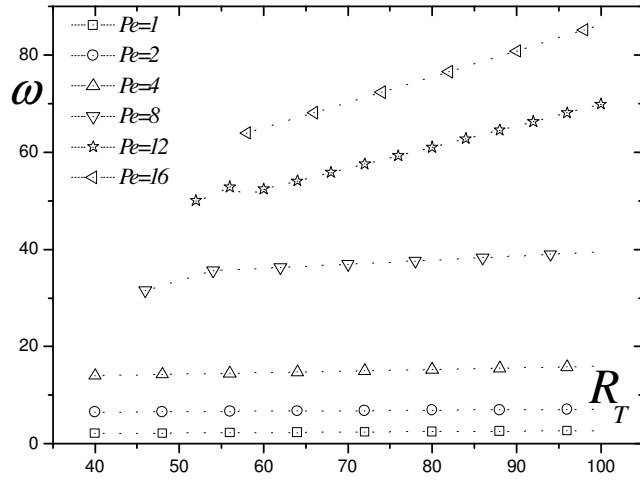


Figure 5-43 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de R_T obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de Pe . ($Da = 10^{-8}$ et $Le = 1$)

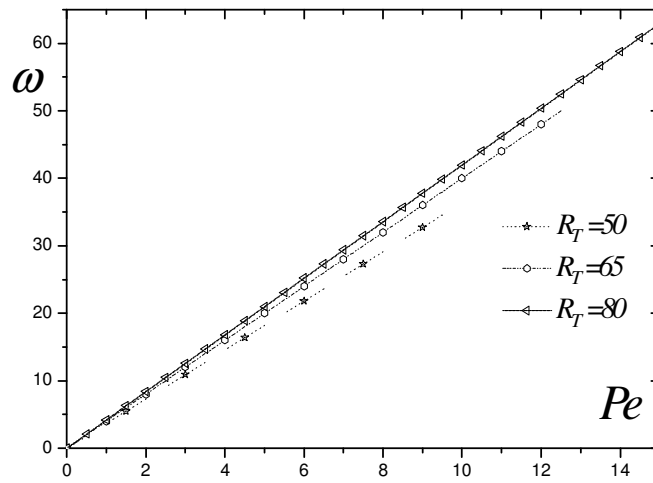


Figure 5-44 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH $Da = 10^{-8}$, $N = 0$

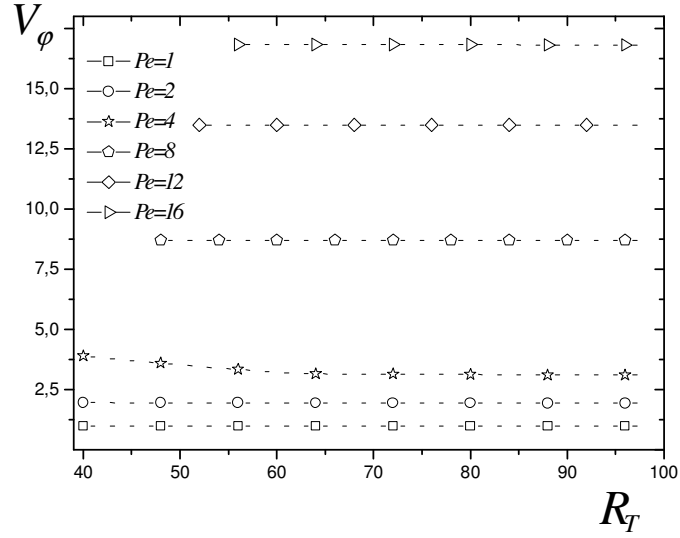


Figure 5-45 : Vitesses de phase des ondes progressives $V_\phi = \omega/K_C$ en fonction de DARCY-RAYLEIGH obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de PECKET ($Da = 10^{-8}$ et $N = 0$)

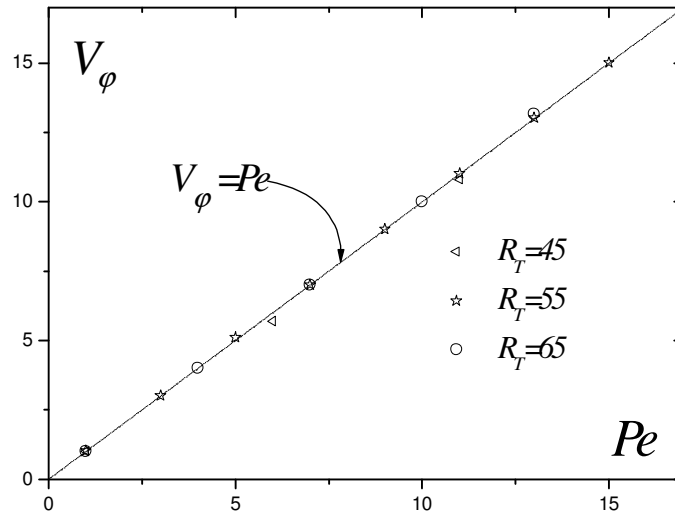


Figure 5-46 : Vitesses de phase des ondes progressives : $V_\phi = \omega/K_C$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH ($Da = 10^{-8}$ et $N = 0$)

◆ **Convection mixte des fluides binaires en milieu de Darcy**

Un mélange binaire qui sature la matrice poreuse agit sur la vitesse de phase. Les rouleaux remontant à contre courant ont des vitesses négatives, alors qu'un coefficient de séparation négatif affaiblit cette vitesse et un coefficient positif l'agrandit.

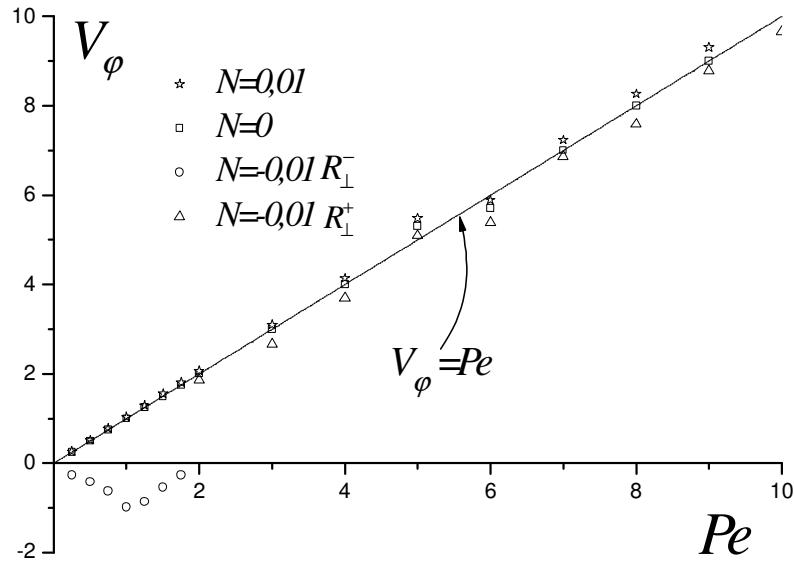


Figure 5-47 : Vitesses de phase des ondes progressives $V_\phi = \omega/K_c$ comparées. Ces vitesses sont données en fonction de Pe et obtenues à partir des données numériques 3D à différents nombres de DARCY-RAYLEIGH ($Da = 10^{-8}$, $Pr = 1$ et $Le = 100$)

◆ **Convection mixte des fluides binaires en milieu fluide**

Pareillement en fluide en entreprend un départ de présentation des résultats avec le cas $N = 0$. La pulsation est croissante en fonction du R_T alors qu'on peut déduire que pour la majorité des cas traités :

$$V_\phi \approx 1.17 \times Pe$$

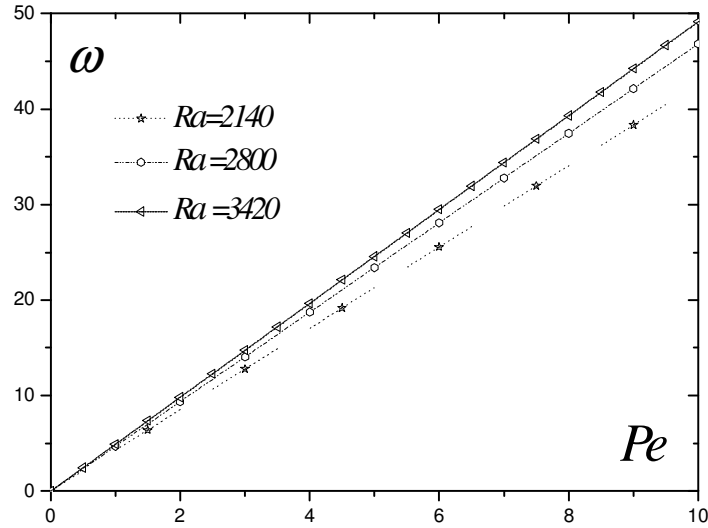


Figure 5-48 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différents Darcy-RAYLEIGH. ($Da = 10^{-8}$ et $N = 0$)

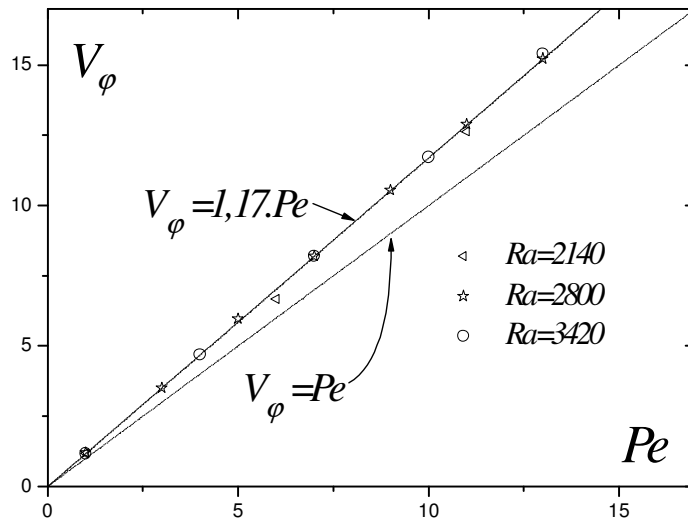


Figure 5-49 : Pulsations de propagation des ondes progressives $\omega = 2\pi f$ en fonction de Pe obtenues à partir des données numériques 3D à différentes valeurs de Ra . ($Da = \infty$ et $N = 0$)

◆ Convection mixte des fluides binaires en milieu fluide

En fluide binaire on regarde le problème de point de vue l'influence des solutés sur ces grandeurs propagatrices. L'analyse de plusieurs cas de coefficients de séparations, ne nous permet pas de tirer une allure comportementale générale, puisque, par exemple on trouve des valeurs négatives de N qui accélèrent l'onde alors que d'autres la décélèrent et on trouve aussi des croisements de points. Comme conclusion pour cette situation, on dira que chaque situation est un cas d'étude à part.

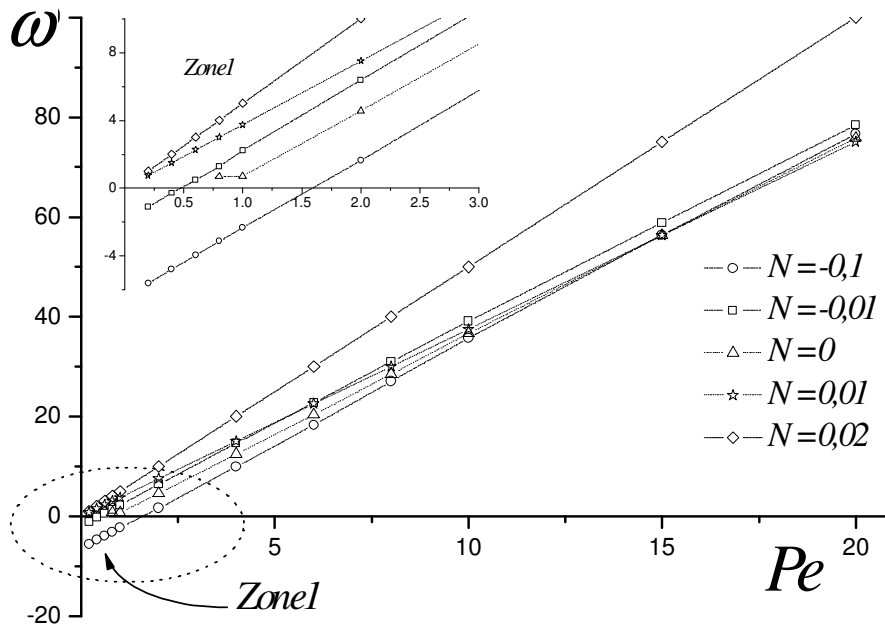


Figure 5-50 : Pulsations critiques à différents taux de séparations d'un mélange liquide dans un canal large de manière à avoir un écoulement plan loin des parois : $Le = 100, Pr = 10, Ax = 14, Ay = 8$

Pe	Pulsations critiques : ω_c		
	$N = -0,01$	$N = -0,05$	$N = -0,1$
0	-0,0188	-0,0251	-0,1820
0,05	0,1192	0,1255	1,9011

0,1	0,2321	0,2510	1,9952
0,5	1,1607	1,2611	2,7481
1	2,3214	2,5097	3,6829

Table 5-10 : Pulsations critiques à différents taux de séparations d'un mélange liquide dans un canal large : $Le = 2$ et $Pr = 1$; $(Ax, Ay) = (14,8)$

5.5.4 Transferts thermiques et massiques

D'après toute l'étude qui précède et par observations des nombres de Nu au cours en fonction de R , on conclue que parmi tous les régimes possibles, celui qui est réalisé correspond à un transport de chaleur maximal, c'est-à-dire à un système de rouleaux de convection. Ensuite, suivant la valeur du nombre d'onde k ce système peut être stable ou pas, conduisant à différentes sortes de structures. L'expérience mettant en évidence l'apparition d'un mouvement de convection et d'une structure en cellules lorsque le chauffage est assez important a pour explication physique que, pour un chauffage suffisant, les forces déstabilisantes l'emportent sur les forces stabilisantes, le rapport de ces forces étant représenté par le nombre de RAYLEIGH Ra . Ceci se traduit en particulier par une croissance soudaine et rapide du nombre de NUSSELT, caractérisant le transfert de chaleur.

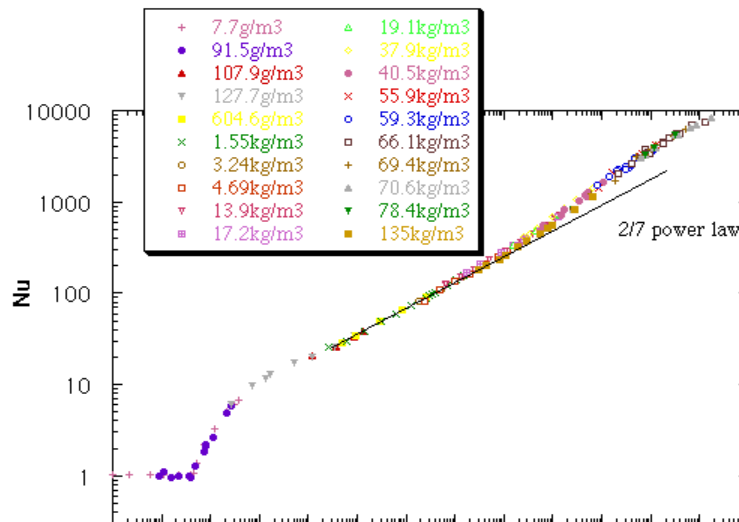


Figure 5-51 : Évolution expérimentale de Nu en fonction de Ra pour différents fluides, dont nous n'avons retenu que la masse volumique. On y remarque une croissance soudaine et rapide de Nu lorsque Ra vaut environ 1708.

En ce qui suit une étude comparative des transferts de chaleur et de matière sera entreprise. Son but est de déterminer la séparabilité maximale stable au sein du fluide, permettant de placer des aiguilles d'extraction afin de récolter le composant désiré.

◆ Cas de convection naturelle

Dire qu'un espace est garni d'une matrice poreuse, c'est aussi dire qu'il y a plus de surfaces de contact, plus de transferts et d'emmagasinage de chaleur. En plus, en convection naturelle on n'intervient pas sur les vitesses de l'écoulement, donc tout se fait de manière naturelle poussant le système à évoluer vers un équilibre permettant une dissipation maximale de la chaleur et minimale de l'énergie cinétique. Les expériences numériques ont montré aussi que les milieux poreux favorisent la séparabilité dans un fluide multi-constituant. La figure 5.51 illustre l'évolution des transferts en fonction du DARCY. Quand la perméabilité Da du milieu croît, les cisaillements à coté des parois deviennent de plus en plus importantes et la circulation du fluide s'intensifie. Allant vers les milieux purement fluides, le nombre de Sh chute spectaculairement alors que le Nu suit une diminution plus sobre.

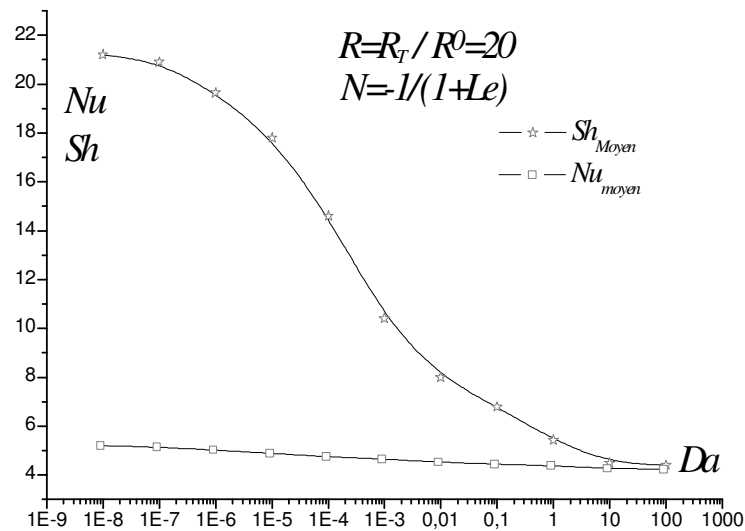


Figure 5-52 : Effet du nombre de Darcy sur le Nu et Sh moyens à la naissance de la convection dans le point de surstabilité (mélange eau alcool). $Le = 10, Pr = 7, R_T = 20 \times R^0$

◆ Cas de convection mixte

Les simulations numériques montrent que le nombre $Nu(t)$ oscille légèrement (de l'ordre de 7%) autour d'une valeur moyenne. Elles montrent

également que le nombre de PECKET influence la zone d'entrée thermique qui en s'allongeant fait baisser le nombre de NUSSELT moyen. Ces résultats sont en bonne harmonie avec plusieurs résultats expérimentaux. Quant au nombre de SHERWOOD, il est en général décroissant en fonction du $Pe > 0.5$ et sensiblement le même qu'en convection naturelle pour les faibles débits. Le sens de propagation de l'onde progressive n'influence pas trop lui aussi la séparabilité. Les rouleaux longitudinaux apparaissant en général à plus hauts RAYLEIGH et PECKET, évoluent à un NUSSELT plus grand dû à la grandeur de RAYLEIGH, et annihilent la séparation par leur effet de transport spiral. Les R_{\parallel} sont des parfaits mélangeurs de soluté. Les rouleaux transversaux permettent une meilleure séparation et on voit des rouleaux de soluté qui se propagent le long du canal (Figure 5-53 et Figure 5-54).

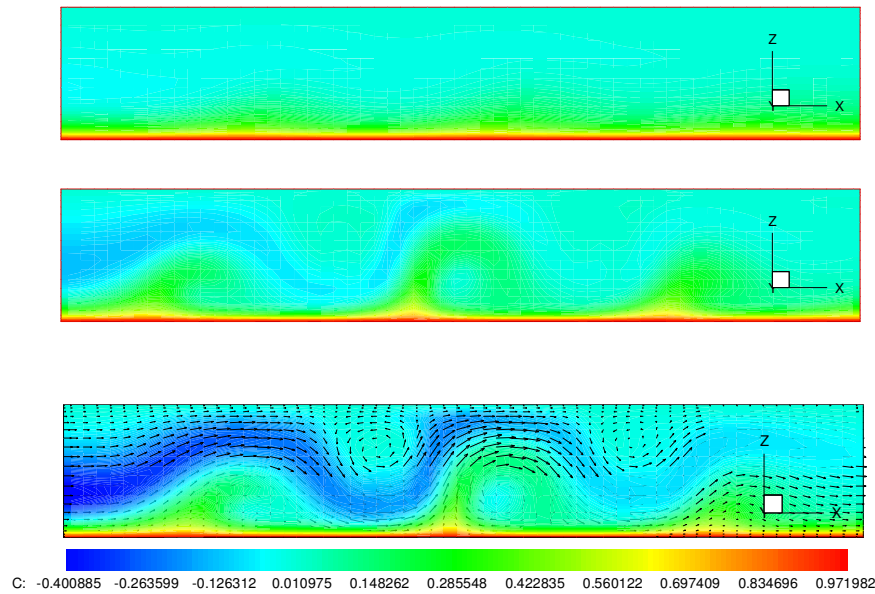


Figure 5-53 : Transport du soluté par les ondes progressives des R_{\perp} . $Le = 100, Pr = 10, N = -0.05, Ra = 2470$, entre les dates $t = 0.2; t = 1.5$ et $t = 4$

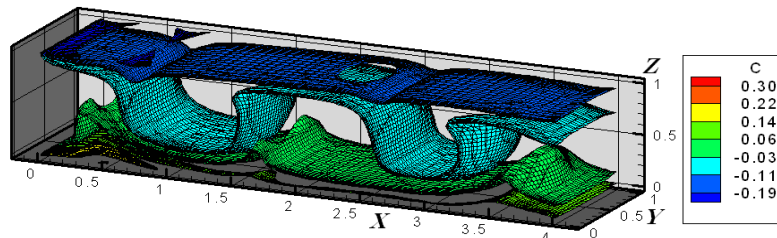


Figure 5-54 : Isosurfaces de concentration 3D $Pr = 10, Le = 100, Re = 0.05, N = -0.05$ et $Ra = 2470$.

5.6 Conclusion sur les simulations numériques

Ce chapitre riche en matière de d'illustrations et de calcul, a suivi une méthodologie de vérification puis d'exploration. En effet, dans sa première partie on a vérifié les données obtenues par stabilité numérique 2D, puis on a jugé les limites de validité d'un tel modèle 2D par rapport a des simulations 3D instationnaires qui paraissent plus réalistes. On a vérifié l'effet des rapports de formes sur la sélection des directions des structures convectives, puis on a vérifié les valeurs des RAYLEIGH critiques et des longueurs d'ondes. Une deuxième phase a consisté en l'exploration du diagramme général de stabilité, afin de définir minutieusement les lieux de la genèse des rouleaux transversaux, et surtout ceux qui remontent l'écoulement moyen. Une fois ce travail est accompli on s'est concentré sur la caractérisation mécanique de ces rouleaux en termes de vitesses de phase et de pulsations. Une bonne base de données a été établie, surtout que le domaine de la convection mixte 3D sous effet SORET en est en manque.

Au cours de ce chapitre on a pu montrer que, malgré l'utilité extrême des prédictions 2D en matière de stabilité, une insuffisance s'annonce lorsqu'il s'agit des rouleaux longitudinaux, ou des structures mixtes ou obliques.

Les simulations 3D directes nous ont permis de montrer cela et de mieux comprendre la physique du problème, surtout que les non linéarités ont une influence majeure sur son évolution.

A l'aide de ces simulations on a pu compléter les diagrammes de stabilité, d'interpréter les zones des plans délimités par ces derniers, et de voir dans l'espace à quoi ressemble l'écoulement. D'autre part nous avons pu mettre en évidences les rouleaux transversaux mobiles. Ces rouleaux ne peuvent apparaître qu'en zone supercritique, et voyagent avec l'écoulement moyen dans le cas des faibles Lewis, et peuvent remonter le débit forcé dans le cas des taux de séparations négatifs et de forts Lewis.

Ces résolutions directes des équations de conservations nous ont permis aussi de donner les valeurs des fréquences, des longueurs d'ondes et de vitesse de phase qui est égale à Pe en milieu de Darcy et $1,17Pe$ en milieu fluide.

6 Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenté deux études numériques de la convection mixte thermosolutale sous effet SORET. La première, est relative à la stabilité linéaire d'un écoulement déstabilisé par un chauffage par le bas, et la seconde se constitue par des simulations tridimensionnelles du régime transitoire. Après plusieurs réflexions de la manière d'aborder ce problème, nous avons choisi de le décomposer en des problèmes élémentaires et enfin de le généraliser.

En effet, un fluide chauffé par le bas nous fait référence au célèbre problème de RB, qui sous l'effet de cette énergie demeure au repos jusqu'à un seuil donné pour enfin perdre son état le plus inerte à une constante du RAYLEIGH dépendant du nombre de DARCY.

Lorsque le fluide est binaire, plusieurs effets peuvent s'ajouter dans la balance des forces de volume. La prise en compte de l'effet Soret joue un rôle important dans le décalage de cette constante du RAYLEIGH, et présente un problème fortement fertile en matière d'analyse de stabilité.

En conservant l'hypothèse de fluide non binaire, mais en imposant une convection mixte à faibles PECLETS, on se trouve face au fameux problème de POISEUILLE RAYLEIGH BENARD (ou son analogue en poreux). Dans ce présent texte on s'est intéressé à la formation des rouleaux transversaux instationnaires. Ceci est aussi un grand problème d'analyse de stabilité et est un domaine fertile des simulations directes.

Mais que se passe-t-il si le fluide est binaire et la convection est mixte ? c'est à quoi nous avons essayé d'apporter des éléments de réponses à ce problème particulièrement ardu en se basant sur les simulations directes et l'analyse linéaire de stabilité, et tout en essayant de nous référer à la littérature pour valider nos résultats.

Les résultats de l'analyse de stabilité nous ont permis de comprendre et d'établir les lignes neutres de stabilité entre différentes régions de l'espace (Ra, Le, N) . On a pu montrer que pour un fluide binaire initialement au repos porté par une croissance du nombre de Ra (chauffage croissant) jusqu'à un seuil critique où il perd sa stabilité. Le nouvel état, appelé supercritique, est ainsi formé de rouleaux stationnaires qui se développent suivant une direction minimisant l'énergie mécanique de l'onde associée. Si on chauffe davantage, l'écoulement traverse un nouveau seuil de bifurcation, appelée bifurcation de HOPF, consistant à un nouvel état convectif macroscopiquement différent de son précédent sous forme de rouleaux oscillants avec des amplitudes finies et de plus en plus serrés (longueur d'ondes plus faible) permettant d'augmenter l'évacuation de la chaleur inhérente du chauffage.

En chauffant encore, (Ra de plus en plus élevé), l'amplitude des oscillations croît indéfiniment en fonction du temps traduisant un régime chaotique et par suite turbulent.

Ce même système est soumis à un débit forcé en plus du chauffage maintenu, pour établir un écoulement de convection mixte. Nos résultats montrent que les rouleaux qui étaient stationnaires dans l'état supercritique ne le sont généralement plus en convection mixte. En effet, les rouleaux transversaux par rapport à l'écoulement moyen, sont entraînés par cet écoulement et on parle ainsi d'ondes progressives. Les longueurs d'ondes augmentent en général avec l'advection et une zone d'entrée thermique peut s'établir dans le cas d'un Pe important. Une vitesse de phase sera le paramètre caractéristique du milieu ($1,17Pe$ en fluide, Pe en Darcy et des valeurs intermédiaires pour des Da intermédiaires) dans l'entraînement des ondes progressives. Finalement si le Le est important ($Le > 70$: diffusivité solutale dominante), les rouleaux convectifs peuvent remonter l'écoulement et ceci est dû à un retard de la diffusion thermique par rapport à la diffusion solutale.

Par ailleurs, le présent manuscrit permet au lecteur de voir la technique des éléments finis appliquée au problème de la stabilité en convection mixte. Une telle technique permet un large recueil de résultats servant de guide pour les simulations directes 3D. Les simulations numériques directes ont servi à éclaircir les effets des rapports de forme, de traiter les conditions aux limites diverses, telles que continuité de contraintes afin de simuler des cavités très longues, de visualiser les rouleaux longitudinaux et transversaux instationnaires auxquels nous avons calculé les paramètres de propagation, sens vitesse de phase et fréquence.

Finalement, il est utile à citer un nombre d'applications dérivant de ces problèmes.

Dans le cas de la convection naturelle avec effet Soret on cite particulièrement le cas de la séparation des espèces dans les gisements pétroliers, les colonnes de distillation à échelle industrielle, les problèmes de pollution dans les océans, les techniques de traitement thermo-chimique des matériaux et les bains de fusion des métaux.

En convection mixte sous effet Soret, on trouve d'autres applications telles que le traitement des surfaces par dépôt de vapeur chimique, et à grande échelle on note très particulièrement un problème à impact environnemental qui touche le climat de la terre, il s'agit des Ice-streams. Ce phénomène est dû à la fusion de la croûte de l'arctique et de l'antarctique, ce qui génère des écoulements d'eau douce dans les océans, l'effet de la thermodiffusion va influencer la salinité globale des mers, et les principaux courants marins, et par suite la faune et la flore marine et le climat global de la terre.

BIBLIOGRAPHIE

- Beckerman C. et Viskanta R., Double-diffusive convection during dendritic solidification of binary mixture, *PhysicoChem. Hydrodyn.*, Vol . 10, pp. 195-213, 1988.
- Bejan A., Mass and heat transfer by natural convection in a vertical cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 6, pp.149-159, 1985
- Brandt A., *Mathematics of computation*, Vol. 31, pp. 333-390, 1977
- Briggs W.-L., *A multigrid tutorial*. SIAM, 1987
- Beji H., Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé : Modélisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique, thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1989.
- Bénard H., Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. gén. Sci. pur. appl.*, Vol. 11, pp. 1261-1271, 1309-1328, 1900
- Bénard H., Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris, 1901
- Bennacer R., Mohamad A.A., Sezai I., Validation Exercise Natural Convection In Air-Filled Cubical Cavity, 2nd International Conference for Heat and Mass Transfer Symposium, Palm Cove, Queensland, Australia (25-28 Mai, 2001).
- Bourich M., Effet Soret sur la convection naturelle dans des cavités poreuses saturées par des fluides binaires, thèse de doctorat, Université de Cadi Ayyad. 2004
- Boussinesq J., Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courants de convection. Gauthier-Villars, 1903.

- Brand H. , Stienberg V., Nonlinear Effects in the Convective Instability of a Binary Mixture in a Porous Medium Near Threshold. *Physics letters*, Vol. 93A Number 7, 1983
- Brand H., Hohenberg P. et Stienberg V., Codimension-2 Bifurcation pour convection thermogravitationnelle multiconstituants en milieu poreux, *Entropie*, pp. 184-185, 1984
- Brinkman H.C., A calculation for the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules, *Appl. Sci. Res.*, Vol A1, pp. 27-34, 1947
- Büchel P. , Lücke M.. Influence of through flow on binary fluid convection. *Phys. Rev. E*, 61, pp. 3793–3810, 2000
- Büchel P. , Lücke M.. Localized perturbations in binary fluid convection with and without throughflow. *Phys. Rev. E*, 63, pp. 1–19, 2001
- Carnot S.. *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu et sur les Machines Propres à Développer cette Puissance*. Bachelier, Paris, 1824.
- Chang M.Y., Yu C.H., and Lin T.F., Changes of longitudinal vortex roll structure in mixte convective air flow through a horizontal plane channel: An experimental study. *Int. J.Heat Mass Transfer*, Vol. 40 pp. 347–363, 1997
- Chen T.C., Lir J.T., Lin T.F.. Stationary transverse rolls and u-rolls in limiting low Reynolds number mixed convective air flow near the convective threshold in a horizontal flat duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1211-1227, 2002
- Cheng K.C., Wu R.S., Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane Poiseuille flows heated from below, *J. Heat Transfer*. Vol 98. pp. 564–569, 1976
- Clever R. M., Busse F. H., Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow , *J. Fluid Mech.*, 229 (1991) 517-529.
- Combarous M., *Convection naturelle et convection mixte en milieux poreux*, Thèse d'état, faculté des Sciences de l'Université de Paris, (1970)
- Combarous M., Description du transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide fluide, *C.R.Acad. Sc. Paris*, t. 275, Série A, p. 1375-1378, (1972)

- Combarnous M., Bories S. A., Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.17, p.505-514, (1974)
- Delache A., Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience, Thèse de Doctorat, Université de Lille1, 2005
- Delache A., Ouarzazi M.N., Combarnous M. Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in Porous media heated from below: Comparison with experiments *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 50 pp. 1485–1499, 2007
- Désidéri J.A., Modèles discrets et schémas itératifs. Application aux algorithmes multigrilles et multidomaines. Hermes, 1998
- Ergun S., Fluid flow through packed columns, *Chem. Engineering Prog.*, 48, 89-94, 1952.
- Gage K.S., Reid W.H., The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* Vol. 33, pp. 21–32, 1968
- Graham A.. Shear patterns in an unstable layer of air. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, serial A, 232:285–296, 1933.
- H. Ben Hamed, R. Bennacer, H. Sammouda ; Poiseuille Rayleigh-Benard problem in a horizontal duct of finite length in streamwise direction: stability analysis. *Progress in Computational Fluid Dynamics* (under press)
- H. Ben Hamed, R. Bennacer, H. Sammouda ; Linear stability analysis of Poiseuille Rayleigh-Bénard problem in a bounded rectangular domain, *International Journal of Dynamics of Fluids* (Under press)
- Hackbusch W. 1985, *Multi-Grid Methods and applications* (New York: Springer-Verlag).
- Hackbusch W. et Trottenberg U., *Multigrid Methods III* (Boston: Birkhauser), (eds.) 1991
- Horthmann M., Peric M., et Scheuerer G., finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-mark solutions, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 11, pp. 189, 1990

- Horton C.W., Rogers F.T., Convection currents in a porous medium, *J. Appl. Phys.*, 16, p.367-370, (1945)
- Huang C.C., Yu C.H., Chang M.Y. and Lin T.F.. Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: a numerical study. *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 31 pp. 745-764, 1997
- Hwang G.J., Cheng K.C., Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *J. Heat Transfer Ser. C* 95, pp. 72–77, 1973
- Hwang G.J., Liu C.L., An experimental study of convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *Canad. J. Chem. Engrg.* 54. pp. 521–525, 1976
- IDRAC P.. Sur les courants de la convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses. *C.R.A.S.*, July-Dec : 42–44, 1920.
- JAMES GLEICK : « la théorie du chaos » édition FLAMMARION 1989.
- J. L. Guermond & L. Quartapelle, Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM. *J. Comp. Physics* 132, pp. 12-33 (1997).
- Kato Y., Fujimura K., Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below, *Phys. Rev. E* 62, pp. 601–611, 2000
- Jung C., Lücke M., Büchel P.. Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection. *Phys. Rev. E*, 54, pp. 1510–1529, 1996
- Kamotani Y., Ostrach S., Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow, *J. Heat Transfer*. Vol.98, pp. 62–66, 1976
- Kamotani Y., Ostrach S., Miao H., Convective Heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability, *J. Heat Transfer*. Vol.101, pp. 222–226, 1979.

- Kato Y. , Fujimura K.. Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse mode in a flow through a rectangular channel heated from below. *Phys. Rev. E*, Vol. 62(1) pp. 601–611, 2000
- Koschmieder E. L. et Pallas S. G.. Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *Int. J. heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 991-1002, 1974.
- Kozeny J., Flow in porous media.S.B. Akad. Wiss, 2a: 126, 1927.
- Kurtzweg U.H., Convective instability of a hydrodynamic fluid within a rectangular cavity, *Internat. J. Heat Mass Transfer*. Vol 8, pp. 35–41, 1965
- Lapwood E.R., Convection of a fluid in a porous medium, *Proc. Cambridge, Phil. Soc.*, 44, p. 508-525, (1948)
- Lee F.S., Hwang G.J., Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel, *J. Heat Transfer*. Vol.113, pp. 363–370, 1991
- Legros J.C. , Platten J.K.. The two-component Bénard problem with flow. *J. Non-Equilibrium Thermodyn.*, Vol. 2, N° 4, pp. 211-232, 1977
- Legros J.C. , Platten J.K., Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte. *Lecture Notes in Physics*, pp. 72, 1978
- Legros J.C. , Platten J.K.. The two-component Bénard problem with flow ii. Further numerical results. *J. Non-Equilibrium Thermodyn.*, Vol. 3, N° 1, pp. 1-10, 1978
- Lhost o. et Platten J.K., Transitions between steady states, travelling waves and modulated waves in the system water-isopropanol, *Physical review A*, Vol. 38(6), pp. 3147-3150, 1988
- Lhost o. et Platten J.K., Experimental study from transition from nonlinear travelling waves to steady overturning convection in binary mixtures, *Physical review A*, Vol. 40(8), pp. 4552-4557, 1989
- Lir J.T., Chang M.Y., Lin T.F., Vortex flow patterns near critical state for onset of convection in air flow through a bottom heated horizontal flat duct, *Internat. J. Heat Mass Transfer*. Vol.44, pp. 705–719, 2001

- Luijkx J.M., Platten J.K., On the onset of free convection in a rectangular channel, *J. Non-Equilibrium Thermodynam.* N° 6, pp. 141–158, 1981
- Luijkx J.M., Platten J.K., Legros J.C., On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow, *Internat. J. Heat Mass Transfer.* Vol.24, pp. 803–817, 1981
- Shahda J., Narusawa U., On pattern selection in mixed convection in rectangular ducts, *Heat and Mass Transfer.* Vol.32, pp. 213–222, 1997
- Sovran O., Charrier-Mojtabi M.-C. et Mojtabi A. Naissance de la convection thermo-solutale en couche poreuse infinie avec effet Soret, *Fluid mechanics C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, pp. 287–293, 2001
- Mamou M., Vasseur P. et Bilgen E., A Galerkin Finite Element Study of Double-diffusive convection in an inclined porous enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 41, pp. 1513–1529, 1998
- Mansour A., Amahmid A., Hasnaoui M. et Bourich M. : Soret effect on double-diffusive multiple solutions in a square porous cavity subject to cross gradients of temperature and concentration, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, N°3, pp. 431-440, 2004
- Narusawa U., The second law analysis of mixed convection in rectangular ducts, *Heat Mass Transfer.* 37, pp. 197–203, 2001
- Neale G. et Nader W., Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and bounding porous medium, *The Canadian J. Chem. Eng.*, Vol. 52, pp. 475-478, 1974
- Nicolas X., Luijkx J.M., Platten J.K.. Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *Int. J.Heat Mass Transfer*, Vol.43, pp. 589-610, 2000
- Nicolas X.. Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas. *Int. J. Thermal Sc.*, Vol. 41, pp. 961-1016, 2002
- Nicolas X., Luijkx J.M., Platten J.K., Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension

- heated from below, *Internat. J. Heat Mass Transfer*. Vol.43, pp. 589–610, 2000
- Pabiou H., Nicolas X., Xin S., and Mergui S. Observations d’une instabilité convective apparaissant sous la forme de rouleaux sinueux dans un écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard. *Méca. et Indus.*, Vol. 4 pp. 537-543, 2003
- Patankar S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, New York, 1980
- Paul M.R., Chiam K.H., Cross M.C., Fisher P.F., and Greenside H.S., Pattern formation and dynamics in Rayleigh-Bénard convection : numerical simulations of experimentally realistic geometries. *Physica D*, Vol. 184, pp. 114-126, 2003
- Philips A.C. and Walker Sir G.T.. The forms of stratified clouds. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc., London*, 58(243) : 23–30, 1932.
- Piquer E., Charrier-Mojtabi M.-C., Azaiez M. et Mojtabi A., Convection mixte en fluide binaire avec effet Soret : étude analytique de la transition vers les rouleaux transversaux 2D, *Comptes Rendus de Mécanique*, on line
- Piquer E., Convection mixte en fluide binaire avec prise en compte de l’effet Soret, Thèse de doctorat, Université de Paul Sabatier, Toulouse. 2005
- Platten J.K., A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients, *Internat. J. Engng. Sci.* Vol. 9, pp. 855–869, 1971
- Platten J.K., Legros J.C., *Convection in Liquids*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- Platten J.K., Lefebvre M., A preliminary experimental investigation of the stability of flows with an imposed temperature gradient, *Phys.* Vol. 51, pp. 330–332, 1971
- Pellew A. et Southwell R. V.. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 176, pp. 312-343, 1940.
- Pearson J. R. A.. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, pp. 215-240, 1958

- Prout W. Bridgewater Treatises. W. Pickering, London, 1834.
- Rayleigh Lord On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, Vol. 32, pp. 529-546, 1916.
- Rees D.A.S., Department of Mechanical Engineering, University of Bath, UK; The onset of Darcy–Brinkman convection in a porous layer: an asymptotic analysis, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 45, pp. 2213–2220, 2002
- Roth D., Büchel P., Lücke M., Müller H.W., Kamps M., and Schmitz R.S.. Influence of boundaries on pattern selection in through-flow. *Physica D.*, Vol. 97, pp. 253-263, 1996
- Rumford Count. Of the Propagation of Heat in Fluids. Complete Works, volume 1. American Academy of Art and Sciences, Boston, 1870.
- Sakai K., Numerical Oscillation Analysis on High-Order LECUSSO Scheme Based on Characteristic Polynomial Technique, *J. Atomic Energy Soc. Japan*, Vol. 34, pp. 544-564, 1992
- Stone H. L., Iterative solution of implicit approximations of multidimensionnal partial differential equations, SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.), *J. Numer. Anal.* Vol. 5, pp. 530, 1968
- T. C. Papanastasiou, N. Malamataris, K. Ellwood, A new outflow boundary condition, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 14, pp. 587-608 (1992).
- TERADA T. and second year students of physics. Some experiments on periodic columnar formation of vortices caused by convection. *Report of the Aeronautical Research Institute / Tokyo University*, 3: 1–46, 1928.
- Thomson J., On a changing tessellated structure in certain liquids. *Proc. Phil. Soc. Glasgow*, 13, pp. 464-468, 1882
- Tobbal A., Bennacer R. et Cabrillac R., Effet de l’anisotropie des matériaux poreux sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse, *Proceedings du 13ème Congrès Français de Mécanique*, Vol. II, pp. 457-460, 1997.

- Tomiyama A. et Takahashi R., Numerical Stability and Numerical Oscillation of High Order Difference Methods for Computational Fluid Dynamics, *J. Atomic Energy Soc. Japan*, Vol. 32, pp. 53, 1990
- Tveitere M., On the stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *Z. Angew. Math. Mech.* Vol. 54, pp. 533–540, 1974
- Van Doormaal J.P. et Raithby G.D., Enhancements of the Simple method for predicting incompressible fluid flows, *Num. Heat Transfer*, Vol. 7, pp.147-163, 1984
- Versteeg, H.K., et Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, Addison-Wesley Longman, N.Y., 1995
- Xin S. et al. Étude des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard dans l'air et leur contrôle (2005) ; (on line)
- Yu C.H. and Lin T.F.. Effects of aspect ratio on vortex flow patterns in mixed convection of air through a bottom-heated horizontal rectangular duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40(2) pp. 333-346, 1997
- Y. MORI, Y. UCHIDA, Forced convective heat transfer between horizontal flat plates, *International J. Heat Mass Transfer*, Vol. 9, 803–817, 1966
- Wesseling P., an Introduction to multigrid Method (New York: Wiley), 1992
- Natural convection in an air-filled cubical cavity exercice de validation (référence Benchmark) qui a été publié lors CHT01 à Cairns (Australie)

Communications et articles soumis

- H. Ben Hamed, R. Bennacer, H. Sammouda, H. Beji and A. Belghith et P. Vasseur ; Convection mixte tridimensionnelle, application : plancher rafraichissant, Journées Internationales de Thermique, Tanger, Maroc 16-18 novembre 2005
- H. Ben Hamed, R. Bennacer, H. Sammouda, H. Beji and A. Belghith ; Energy-efficiency And Flow Structure Analysis Using A Floor Cooling 2nd International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications, Al Ain, United Arab Emirates, January 3 - 6, 2006

Haïkel Ben Hamed, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Thierry Langlet ;
Analyse de stabilité de la convection naturelle thermosolutale dans un
milieu de darcy, Journées Internationales de Thermique, Albi, France 26-
30 aout 2007

Haïkel Ben Hamed, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Numerical 3D study
of poiseuille Rayleigh Bénard soret problem in a finite extent rectangular
duct, PCFD (Soumis 2008)

ANNEXES

7.1 Schémas d'interpolation :

Du fait que les valeurs du flux sont ignorées aux faces des cellules, et que le flux doit être quantifié à ce niveau pour déterminer les vitesses, une nécessité d'interpoler ϕ va naître. Nous avons utilisé dans le code de simulation différentes méthodes pour approximer ϕ et ses dérivées normales. Il existe plusieurs schémas d'interpolation couramment utilisés et cités dans l'ouvrage de PATANKAR. On ne citera que les schémas utilisés dans le notre outil de simulation.

Schéma	$A(P_i)$
Central Differencing Scheme (CDS)	
Upwind Differencing Scheme (UDS) du second ordre Power (Puissance)	$1 - 0.5 P $
Quick : Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics	$\ 0. (1 - 0.1 P)^5\ $ cf. § 7.1.4

Tableau 7-1 : schémas de discrétisation utilisés dans le code.

La technique de discrétisation quick sera ultérieurement détaillée et commentée ainsi que sa stabilité numérique.

7.1.1 UPWIND Differencing Scheme (UDS)

En regardant le sens de l'écoulement on choisit la valeur du nœud en amont.

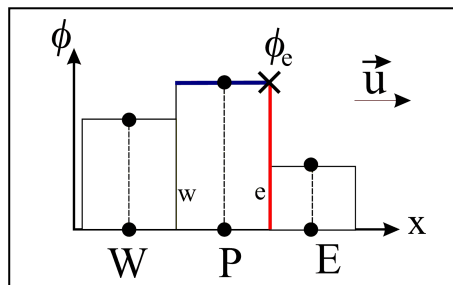


Figure 7-1 : Choix des nœuds pour le schéma Upwind

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_p & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

- ⌘ Le schéma Upwind est du premier ordre.
- ⌘ Il est inconditionnellement stable.
- ⌘ Pas d'oscillations numériques.
- ⌘ Il engendre la diffusion numérique.

Pour être plus précis, nous avons choisi l'usage d'un schéma Upwind du second ordre au lieu du premier ordre, les valeurs sont alors des interpolations linéaires des nœuds en amont.

7.1.2 Schéma puissance : Power law scheme :

Il a été introduit par PATANKAR pour fournir une stabilité pour la simulation numérique. Le comportement du schéma Power est similaire au CDS pour les faibles Pe , et au schéma Upwind pour les grands nombres de PECLET. Bien qu'il ait une précision du premier ordre concernant l'erreur de troncature, le schéma power est une formulation conservative et ne souffre pas du problème d'oscillations numériques, par contre il permet la diffusion numérique.

7.1.3 Central Differencing Scheme (CDS) :

Ce schéma consiste en des interpolations linéaires entre les nœuds voisins. L'erreur de troncature du CDS est du second ordre. Le schéma est performant dans les régions où la diffusion domine et/ou pour les maillages fins. Le calcul d'une solution à grand nombre de Reynolds n'est pas toujours possible sans manœuvres spéciales. Le CDS peut produire des solutions oscillatoires.

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_p (1 - \lambda_e) \quad (2.44)$$

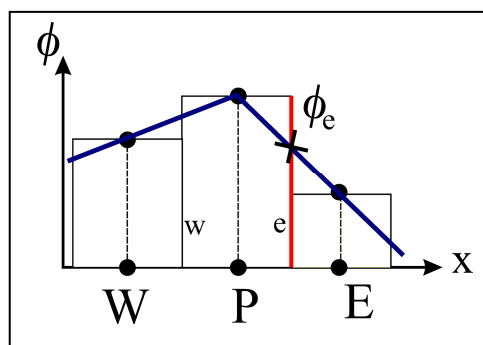


Figure 7-2 : Interpolation linéaire entre les nœuds voisins

7.1.4 Quadratic Upwind Interpolation (QUICK):

Nous avons fréquemment utilisé un schéma quick avec une précision du troisième ordre, technique largement utilisée dans le domaine de l'ingénierie nucléaire pour la simulation des phénomènes de convection. Une telle technique d'ordre élevé nous permet d'éviter le phénomène de diffusion numérique, néanmoins elle nous fait parfois souffrir du phénomène d'oscillation numérique.

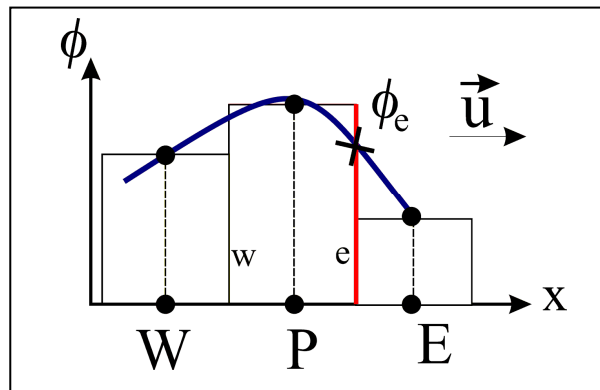


Figure 7-3 : Construction de la parabole pour l'interpolation quadratique

Du fait que cette technique d'approximation a demeuré la favorite dans nos simulations nous allons donner plus d'espace et de soin pour sa description et sa mise en œuvre par rapports aux autres schémas déjà cités. L'interpolation quadratique se fait par une parabole, trois points sont alors nécessaires P, E et un point du coté amont. On utilise donc cinq points pour en total selon que le flux est positif ou négatif.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_p + g_1(\phi_E - \phi_p) + g_2(\phi_p - \phi_W) & \text{si } u_x > 0 \\ \phi_E - g_3(\phi_E - \phi_p) + g_2(\phi_E - \phi_{EE}) & \text{si } u_x < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Où g_i sont des coefficients calculés pour chaque cellule (par le programme) dans le système des coordonnées nodales. Le schéma quick (introduit par LEONARD en 1979) est le plus précis parmi ceux déjà cités dans l'approximation du terme d'advection. Les traitements des grandeurs dans le reste des directions se fait de manière similaire à la direction x . En substituant les ϕ_i dans l'équation (2.34), nous obtenons l'équation discrétisée à résoudre. Le schéma QUICK a deux défauts principaux, le premier est que les coefficients des flux amont de l'équation discrète ne sont pas garantis à être positifs et les coefficients des flux aval ne sont pas garantis à être négatifs. Cette incertitude par rapport aux signes des coefficients viole la seconde règle de PATANKAR (7.3.3) pour obtenir une solution réaliste, et

donne naissance aux instabilités sous certaines conditions de l'écoulement. Par suite le schéma quick est conditionnellement stable (VERSTEEG et MALALASEKERA, 1995) [1]. Le second défaut est la difficulté d'implémenter les méthodes implicites avec une interpolation quick. Nous avons utilisé le limiteur de flux ULTRA-SHARP pour éliminer les oscillations non physiques descendantes du schéma quick en mode établi, et nous avons utilisé le limiteur de flux ULTIMATE pour éliminer les oscillations non physiques pour les simulations du mode transitoire. Puisque la solution utilise cinq points autour de chaque nœud un PDMA (pentadiagonal matrix inversion algorithm) est nécessaire, ou résoudre les équations en un double balayage de type ADI. La résolution du système pentadiagonal est ramenée par ce biais à la résolution de deux systèmes tridiagonaux grâce à l'algorithme de THOMAS.

7.2 Phénomène de diffusion numérique

La diffusion numérique peut être introduite à cause du terme non stationnaire comme elle peut être introduite à cause des termes spatiaux. Considérons l'équation de transport dans le cas général.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V\nabla f = 0 \quad (2.46)$$

Où V est la vitesse de transport, t est le temps. Pour la simplicité nous considérons que V est constante positive. La discrétisation Upwind des termes convectifs produit l'équation suivante :

$$f_i^{n+1} = (1 - C)f_p^n + f_p^n \quad (i, p, k \text{ sont des indices spatiaux}) \quad (2.48)$$

$$C = \frac{V\Delta t}{\Delta_{vol}}, \quad \Delta_{vol} = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Le nombre C est appelé nombre de COURANT¹ (COURANT-FRIEDRICH-LEVY). En considérant des développements de TAYLOR pour exprimer les dérivées spatiales et temporelles de la solution numérique f_i autour du nœud (x, y, z, t) nous pouvons démontrer que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n + V(\nabla f)_i^n = \frac{V\Delta_{vol}}{2}(1 - C)(\Delta^2 f)_i^n + O(x^2, y^2, z^2, t^2) \quad (2.49)$$

Remarquons que l'équation de départ est $(\partial f / \partial t)_i^n + V(\nabla f)_i^n = 0$ et que dans l'équation (2.44) le RHS est non nul. Le membre droit de l'équation (RHS) de l'équation (2.44) correspond à l'erreur de troncature (TE). Le terme principal de TE se comporte comme un terme de fausse diffusion, le

¹- RICHARD COURANT : mathématicien anglais 1888-1972

coefficient de la diffusion numérique ou de fausse diffusion pour un schéma explicite est $0.5V\Delta_{vol}(1 - C)$. La quantité $0.5V\Delta_{vol}$ provient des erreurs numériques du terme d'ordre un du schéma Upwind avec respect de l'espace. Le second terme, avec C , provient des erreurs numériques avec respect du temps. Des conclusions similaires sont tirées quand nous discrétisons le terme convectif d'une manière totalement implicite dans un niveau de temps $n + 1$, et le coefficient de diffusion numérique s'écrit alors $0.5V\Delta_{vol}(1 - C)$.

7.3 Instabilité numérique et consistance

En se référant au théorème d'équivalence de LAX, la stabilité de la solution numérique (ϕ) est une condition nécessaire et suffisante pour converger vers la solution exacte (ϕ_{exact}) de l'équation aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites bien posées et approximées pour garantir les conditions de consistance. La différence entre (ϕ) et la solution exacte (ϕ_{exact}) est l'erreur numérique (E), qu'on peut décomposer (sans détailler dans cette section du texte) en somme d'erreurs provenant des procédures numériques (erreurs de troncatures TE dans les développements limités) et d'erreurs dues aux arrondissements dans les machines de calcul et aux oscillations numériques. Un schéma numérique est jugé stable si les erreurs ne sont pas amplifiées et les solutions numériques sont bornées. La consistance est traduite par des erreurs de troncatures nulles pour un maillage très fin et un schéma d'ordre élevé.

7.3.1 Erreurs de Troncature TE

Comme décrit au § 7.3, le RHS dans l'équation (2.49) est non nul, alors que dans le problème de départ le RHS est nul (2.46) et les deux égalités sont supposées équivalentes. Le membre droit de l'équation (RHS) de l'équation (2.49) correspond à l'erreur de troncature (TE). Le terme principal de TE se comporte comme un terme de fausse diffusion.

7.3.2 Erreurs d'arrondissements

La discrétisation d'une équation de transport bien posée de la forme d'une équation type :

$$\text{Non stationnaire} + \text{advection} = \text{diffusion} + \text{source} \quad (2.50)$$

Conduit à une équation matricielle :

$$(\Phi^{n+1}) = (A)(\Phi^n) + (B) \quad (2.51)$$

Dans le $n^{\text{ième}}$ pas de temps, dans l'équation (2.46), A et B sont 2N matrices carrées $N \times N$. Pour que la solution numérique Φ^{n+1} soit stable en chaque pas de temps $n + 1$ nous devons avoir une norme de A : $\|A\| \leq 1$. Quand nous optons pour une solution stationnaire, et pour que la solution numérique Φ^∞ soit stable nous devons avoir un rayon spectral de A tel que $\rho(A) \leq 1$.

7.3.3 Règles de stabilité de PATANKAR

Selon PATANKAR la stabilité numérique doit être soumise à un ensemble de règles décrites comme suit :

⊗ Règle 1 : l'EDP est discrétisée et écrite sous la forme :

$$a_0 \phi_0 = \sum a_i \phi_i + S$$

⊗ Règle 2 : les coefficients sont tels que : $a_i > 0, (i = 0, 1, \dots)$

⊗ Règle 3 : le terme source s'écrit : $S = S_0 + a_s \phi$ et $a_s < 0$

Les schémas à ordre élevé tel que quick, ne satisfont jamais la règle 2, mais donnent des solutions non oscillantes pour des maillages avec un nombre de REYNOLDS de mailles ≤ 2 . Par suite la deuxième règle de PATANKAR est très restrictive. On définit Le nombre de REYNOLDS de maille $R_m = V \Delta L_m / \nu$ où $L_m = (x, y, z)$, qu'on représente en fonction du nombre de COURANT. La stabilité d'un schéma de discrétisation s'exprime souvent en terme de valeur d'un R_m à ne pas dépasser.

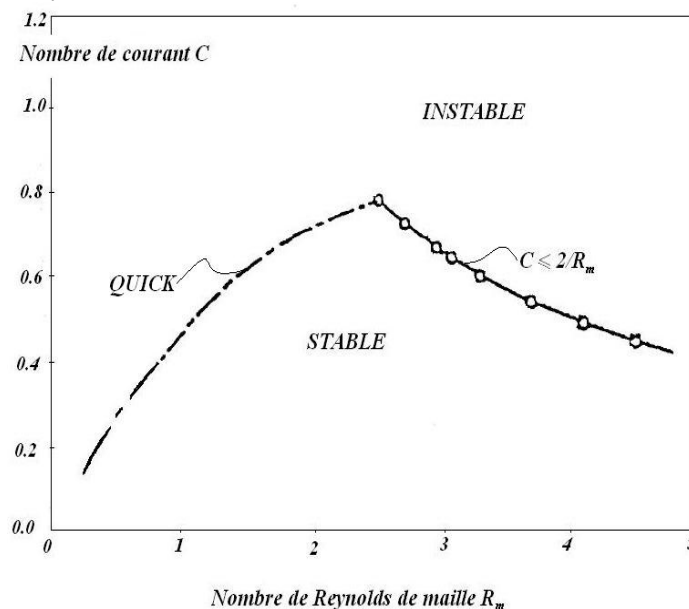


Figure 7-4 : Domaine de stabilité pour le schéma quick

Le nombre de Courant est un indicateur pour définir le pas de temps à utiliser lors des simulations transitoires. Lors d'une simulation dans le régime établi, les oscillations numériques indiquent une solution non stationnaire.

7.3.4 Oscillations numériques

L'oscillation numérique, qui est différente de l'instabilité numérique due à l'accumulation des erreurs d'arrondissement, est l'indicateur de la performance de la solution calculée. Il existe plusieurs méthodes pour examiner l'oscillation numérique.

◆ Analyse par polynôme caractéristique

La discrétisation du terme d'advection dans une équation de conservation du type advection=diffusion+source, en utilisant quatre points consécutifs dans une direction donnée (*x ou y ou z*), et du terme de diffusion par un schéma centré en espace donne le problème discret suivant :

$$A\phi_{i+1} - B\phi_i + C\phi_{i-1} - D\phi_{i-2} = 0 \quad (2.52)$$

Dont la solution générale est :

$$\phi_i = a(\lambda_1)_i + b(\lambda_2)_i + c(\lambda_3)_i \quad (2.53)$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines de l'égalité caractéristique :

$$\lambda^3 - B\lambda^2 + C\lambda - D = 0 \quad (2.54)$$

Par le fait que les schémas numériques sont en général construits d'une manière à vérifier (la conservation du flux) une solution constante $\Phi = 1$, nous aurons l'équation (2.55). **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** dont 1 est une racine remarquable.

$$A - B + C - D = 0 \quad (2.55)$$

Par conséquent, les racines de l'équation (2.54) sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{B - A + \Sigma^{1/2}}{2A} \\ \lambda_3 = \frac{B - A - \Sigma^{1/2}}{2A} \quad \Sigma \equiv (A - B)^2 - 4AD \end{array} \right.$$

L'expérience numérique montre que si l'une des racines est négative, la solution calculée oscille. Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour une solution stationnaire non oscillante est :

$$\Sigma \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \quad (2.56)$$

Dans le cas du schéma Quick, nous aurons :

$$\left\{ A = 1 - \frac{3R_m}{8}, B = 2 + \frac{3R_m}{8}, C = 1 + \frac{7R_m}{8}, D = \frac{R_m}{8} \right. \quad (2.57)$$

En partant de la condition (2.51) on peut conclure que $R_m \leq 8/3$. Dans les cas du schéma à différences centrées du second ordre et du schéma quick avec des maillages réguliers, les conditions de non oscillation de la solution sont montrées dans le Tableau 7-2. Cette analyse par polynôme caractéristique a été récemment étendue aux maillages irréguliers [2].

<i>Schéma</i>	<i>CDS (2^{ème} ordre)</i>	<i>Quick (3^{ème} ordre)</i>
<i>A</i>	$1 - R_m/2$	$1 - 3R_m/8$
<i>B</i>	2	$2 + 3R_m/8$
<i>C</i>	$1 + R_m/2$	$1 + 7R_m/8$
<i>D</i>	0	$R_m/8$
Σ	$(R_m)^2/4$	$1 + R_m + 3(R_m)^2/4$
λ_1	1	1
λ_2	$\frac{2 + R_m}{2 - R_m}$	$\frac{1 + 3R_m/4 + \sqrt{\Sigma}}{2(1 - 3R_m/8)}$
λ_3		$\frac{1 + 3R_m/4 - \sqrt{\Sigma}}{2(1 - 3R_m/8)}$
Condition de non oscillation	$R_m \leq 2$	$R_m \leq 8/3$

Tableau 7-2 : Conditions de non oscillation basées sur l'analyse par polynôme caractéristique

7.4 Solveurs :

Le processus de discrétisation consiste à dériver les matrices des volumes finis afin de mettre ensemble les équations matricielles.

$$([A_e^{transitoire}] + [A_e^{advection}] + [A_e^{diffusion}])\{\phi_e\} = \{S_e^\phi\}$$

On est amené à résoudre plusieurs systèmes linéaires à chaque itération globale, on devra donc définir un solveur des systèmes de CRAMER de chaque degré de liberté du problème. Pour les variables qui présentent une grande variation dans la solution lorsqu'on a une petite variation dans les matrices bandes pentadiagonales A , nous avons recours à un préconditionnement, et nous utilisons en général le PCGS : PreConditionned Conjugate Gradient Stabilized. Nous pouvons également utiliser le Gradient Conjugué, et le SIP : Strongly Implicit Procedure due à STONE [3]. Ainsi le code présente une bonne flexibilité pour construire le modèle numérique selon le choix des grandeurs de références, de la discrétisation, du nombre d'équations à résoudre, du maillage, des schémas d'interpolation et des solveurs des systèmes linéaires.

7.5 Maillage et traitements spéciaux :

Dans le but d'éviter les temps excessifs de calcul produits par les solutions de convection naturelle tridimensionnelle, nous avons utilisé la procédure FAS -Full Approximation Storage- de stockage des données en parallèle avec une technique multigrille de maillage : FMG ; Full MultiGrid method [4].

7.5.1 Grilles décalées :

Le volume de calcul est défini par les faces de la cellule. Un point de la grille est toujours placé au centre géométrique de chaque volume. Ce type de construction est désigné par la figure 22.

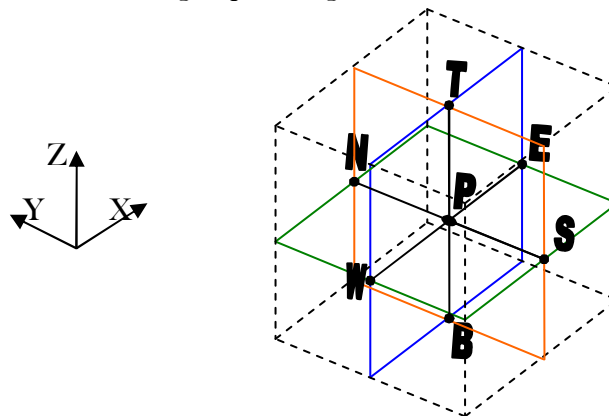


Figure 7-5 : Volume de contrôle principal

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui des équations d'énergie et de concentration, la seule différence réside dans le choix de la grille. Il est montré –par PATANKAR– que si on calculait les variables u , v , w , P , T et C sur la même grille, on aboutirait à une solution non réaliste. Nous utilisons un maillage décalé par rapport au volume de contrôle, dans lequel tous les champs sont calculés au centre de la cellule, par contre les variables flux sont calculées sur une surface située à mi-distance entre le centre et la face de la cellule (cf. Figure 7-6). Ce maillage décalé joue un rôle très primordial dans la suppression des oscillations de la pression. Le champ de vitesse obtenu par résolution de l'équation de NAVIER-STOKES à partir d'un champ de pression estimé (à priori incorrect) ne satisfait pas en général l'équation de continuité qui est utilisée pour corriger le champ de vitesse. Pour cela, on utilise alors une procédure itérative de correction de vitesse et de pression basée sur l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) initialement développé par PATANKAR et SIMPLER qui n'est que le SIMPLE Revised (VAN DOORMAAL et RAITHBY [5]). Vu la non superposition conclue des maillages utilisés pour la discrétisation des champs de vitesse et de pression. La Figure 7-6 visualise les deux maillages de base définis à cet effet : Un maillage principal pour le calcul des champs de pression, de température et de concentration, et un maillage décalé dont les nœuds sont situés à mi-distance de ceux du maillage principal, pour calculer les composantes horizontales u et v et verticale w de la vitesse. Chaque composante de la vitesse est décalée selon sa direction. Ainsi on calcule la vitesse u au point e alors que la pression la température et la concentration sont calculées au nœud P . On traite les champs v et w de manière similaire à u .

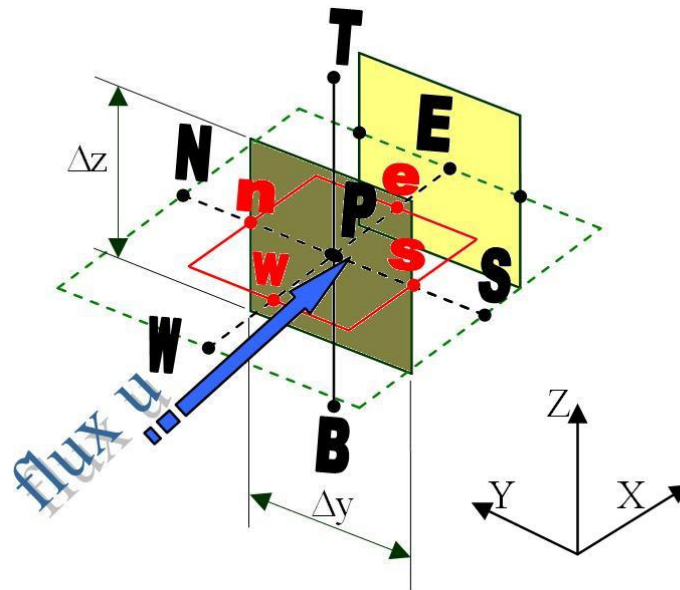


Figure 7-6 : Maillage décalé par rapport au centre, et les surface où on calcule les flux

Nous sommes ramenés à fournir la solution du système d'équations discrétisé par une méthode classique, qui consiste à résoudre les équations en un double balayage de type ADI. La résolution du système pentadiagonal est ramenée par ce biais à la résolution de deux systèmes tridiagonaux par l'algorithme de Thomas. Le calcul itératif s'arrête quand le critère de convergence est atteint. Ce critère est fondé sur le contrôle du maximum d'erreur dans l'équation de continuité et du résidu quadratique moyen sur tout le domaine de u, v, w, T et C . Ces résidus peuvent être définis localement pour chaque variable ϕ

$$R_{\phi_{i,j,k}} = a_{i,j,k} \phi_{i,j,k} - B_{i,j,k} \quad (2.58)$$

La condition (2.59) est le critère absolu d'arrêt général du calcul d'une solution stable et consistante.

$$\frac{1}{N \times M \times L} \sqrt{\sum_{i,j,k}^{N,M,L} (R_{\phi_{i,j,k}})^2} < \varepsilon \quad (2.59)$$

Le produit $N \times M \times L$ est le cardinal des volumes de contrôle dans la géométrie étudiée. Le nombre ε étant réel choisi tolérablement petit pour juger la finesse de la convergence. La convergence sera atteinte lorsque ce résidu est inférieur à ε généralement pris 10^{-5} . L'analyse effectuée par BEJAN [6], concernant une cavité rectangulaire dont les parois horizontales sont imperméables et adiabatiques et les parois verticales soumises à des flux

imposés de masse et de chaleur, montre que les couches limites sont d'autant plus minces que le nombre de RAYLEIGH est important ($\delta_t \approx Ra_t^{-1/4}$, $\delta_c \approx Ra_c^{-1/4}$). Il en résulte une nécessité de construire un maillage serré au niveau des frontières soumises à de forts gradients. Pour cela, nous utilisons un maillage irrégulier sinusoïdal dense près des parois où les gradients sont considérables. Dans tous nos essais on s'assure que le nombre de points dans la couche limite thermique et solutale est suffisant pour bien les représenter spatialement.

7.5.2 Nœuds imaginaires

Sur les frontières physiques, les parois de la cavité coïncident avec une face des volumes de contrôle extrêmes. Dans certaines étapes du calcul, les composantes des vitesses étant connues mais leurs corrections ne sont pas encore établies. D'autre part, les conditions aux limites sur la pression seront traitées implicitement car nous sommes face à une équation de correction de la pression parabolique avec des conditions aux limites de continuité des contraintes § 4.4.3 du type NEWMAN. Il résulte de tout ce qui a précédé une nécessité de créer des nœuds imaginaires pour la pression au delà de chaque face de la géométrie, afin de pouvoir corriger les valeurs des vitesses aux nœuds décalés.

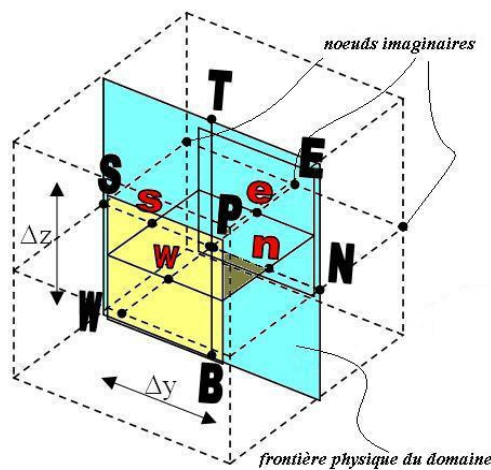


Figure 7-7 : Maillage à la frontière

La Figure 7-7 explique le cas de la frontière verticale droite, où on connaît la composante u de la vitesse au point e , par contre nous manquons de données pour calculer la correction de la vitesse en ce point, nous définissons un nouveau plan de nœuds où on impose implicitement la condition de la pression sur cette frontière.