

Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires

Pascal Dufour

▶ **To cite this version:**

Pascal Dufour. Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires. Automatique / Robotique. Université Claude Bernard - Lyon I, 2000. Français. NNT : . tel-00337724v3

HAL Id: tel-00337724

https://theses.hal.science/tel-00337724v3

Submitted on 22 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

This document must be cited according to its final version which is the Ph.D. thesis:

Pascal Dufour[1],

« Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires »,

UCBL1, 17 Mai 2000

Advisor : Y. Touré[1].

All open archive documents of Pascal Dufour are available at:
http://hal.archives-ouvertes.fr/DUFOUR-PASCAL-C-3926-2008

The professional web page (Fr/En) of Pascal Dufour is:
http://www.lagep.univ-lyon1.fr/signatures/dufour.pascal

1
Université de Lyon, Lyon, F-69003, France; Université Lyon 1;
CNRS UMR 5007 LAGEP (Laboratoire d'Automatique et de GEnie des Procédés),
43 bd du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, France
Tel +33 (0) 4 72 43 18 45 - Fax +33 (0) 4 72 43 16 99
http://www-lagep.univ-lyon1.fr/ http://www.univ-lyon1.fr http://www.cnrs.fr

N^o d'ordre : 88-2000 Année 2000

THESE

présentée

devant l' UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

UFR de Génie Electrique et des Procédés

pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT

(Arrêté Ministériel du 30 Mars 1992)

présentée et soutenue publiquement le 17 mai 2000

par

Pascal DUFOUR

CONTRIBUTION A LA COMMANDE PREDICTIVE DES SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS NON LINEAIRES

Directeur de thèse : Youssoufi TOURE

JURY:	Monsieur	G. GILLES	Président
	Madame	M. BERGOUNIOUX	Rapporteur
	Monsieur	D. DOCHAIN	Rapporteur
	Mademoiselle	E. COURTIAL	
	Messieurs	P. LAURENT	
		Y. TOURE	

Remerciements

Ce travail a été possible grâce à l'aide de nombreuses personnes. En premier lieu, notre « chef » à nous : Youssoufi Touré, Professeur à l'Université d'Orléans. Un pédagogue qui sait faire partager ses connaissances ; mais aussi un homme qui, grâce à des qualités relationnelles franches, nous montre la voie à suivre. Qu'il trouve dans ces quelques mots l'expression de ma plus profonde gratitude.

Ensuite, Pierre Laurent, Maître de Conférences à l'Université Claude Bernard Lyon I, sans qui la réalisation expérimentale n'aurait pas été possible. Je le remercie pour l'aide apportée ainsi que pour les très bons moments passés ensemble.

Je tiens également à remercier, Estelle Courtial, Maître de Conférences à l'Université de Picardie, pour les conseils qu'elle m'a donnés au cours de ce travail. Merci aussi à elle, tout simplement, pour son intéressant côté humain.

Je suis très reconnaissant vis-à-vis de Madame Bergounioux, Professeur à l'Université d'Orléans et de Monsieur Dochain, Professeur à l'Université Catholique de Louvain (Belgique), d'avoir accepté de juger ce travail.

Merci aussi à Monsieur Gilles, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour avoir présidé le jury de cette thèse.

Je pense aussi aux autres personnes qui m'ont aidées au cours de ces années, notamment les informaticiens. Merci à eux tous.

Je n'oublierai pas non plus tous les doctorants et stagiaires, venant d'ici ou de très loin parfois, pour les bons moments passés ensemble et pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

Un « big up » à toutes les « Tribus » riches et variées que j'ai rencontrées dans mon exploration quotidienne du Monde Musical.

Enfin, merci à celles et ceux qui me soutiennent et m'aident chaque jour et qui se reconnaîtront dans ces mots.

Que chaque mur qui nous entoure
puisse un jour tomber.

Table des matières

Introduction **xi**

Chapitre 1
Rappels sur la commande prédictive : principes et problématique générale

1.1 Introduction 3
1.2 Généralités sur la commande prédictive 3
1.2.1 Origines de la commande prédictive 3
1.2.2 Applications industrielles 4
1.2.3 Principe de base de la commande prédictive 5
1.3 Problématiques liées à la stratégie de commande prédictive 11
1.3.1 Problèmes structurels de l'approche 12
1.3.2 Problèmes de synthèse de l'approche 14
1.3.3 Problème d'optimisation dans le contexte du temps réel 15
1.4 Conclusion 21

Chapitre 2
Commande prédictive de systèmes non linéaires à paramètres répartis

2.1 Introduction 25
2.2 Classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles considérée . . . 25
2.3 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant 28
2.3.1 Modèle de variation : système d'équations aux dérivées partielles linéaires temps variant 28

2.3.2 Commande prédictive par modèle interne d'un système linéaire temps variant 29
2.3.3 Problème final d'optimisation sous contraintes 31
2.4 Méthodes de résolution du modèle interne 31
2.4.1 Existence de solution au système linéaire temps variant 31
2.4.2 Méthodes numériques de résolution du modèle interne 33
2.5 Conclusion 34

Chapitre 3
Optimisation sous contraintes

3.1 Introduction 37
3.2 Généralités sur les méthodes d'optimisation utilisées 38
3.2.1 Rappel des principes de base 38
3.3 Algorithmes utilisés 44
3.3.1 Nature des contraintes et formulation du problème pénalisé . . 44
3.3.2 Problème pénalisé hors-ligne final 47
3.3.3 Problème pénalisé en ligne final 48
3.3.4 Algorithme d'optimisation d'origine 49
3.3.5 Algorithme d'optimisation en ligne 50
3.3.6 Algorithme d'optimisation hors-ligne 53
3.4 Conclusion 54

Chapitre 4
Mise en œuvre

4.1 Introduction 57
4.2 Prise en compte des contraintes 57
4.2.1 Quelques significations physiques des contraintes 57
4.2.2 Normalisation des contraintes 58
4.2.3 Utilisation de la méthode des pénalités externes 59
4.3 Les sensibilités 60
4.3.1 Etude de faisabilité 60
4.3.2 Calcul du hessien 60
4.3.3 Calcul des sensibilités 61

4.4 Conclusion 63

Chapitre 5
Procédé de cuisson par autoclave

5.1 Fabrication de matériaux composites 67
5.2 Procédé de cuisson par autoclave 68
5.3 Modèle 69
5.4 Problématique de commande 71
5.5 Résultats de simulation 73
5.5.1 Conditions de simulation 73
5.5.2 Effet de la borne $\Delta T_{\max}$ 74
5.5.3 Influence de l'horizon de prédiction 78
5.5.4 Influence de l'horizon de commande 81
5.6 Conclusion 87

Chapitre 6
Destruction catalytique de gaz polluants

6.1 Destruction de composés organiques volatils 91
6.2 Procédé d'incinération catalytique 92
6.3 Modèle 95
6.4 Problématique de commande 99
6.5 Résultats de simulation 100
6.5.1 Conditions de simulation 101
6.5.2 Concentration basse constante 103
6.5.3 Concentration moyenne constante 109
6.5.4 Concentration haute constante 113
6.5.5 Concentration basse variable 116
6.5.6 Concentration moyenne variable 120
6.5.7 Concentration haute variable 122
6.6 Conclusion 126

Chapitre 7
Séchage de peinture par rayonnement infrarouge

7.1 Rayonnement infrarouge et séchage 129
7.2 Procédé pilote de séchage 130
7.3 Modèle [4] 131
7.3.1 Bilan énergétique 132
7.3.2 Bilan massique 133
7.3.3 Système non linéaire à paramètres répartis 134
7.4 Problématiques de commande 135
7.5 Résolution numérique du modèle 136
7.6 Résultats de simulation 137
7.6.1 Conditions de simulation 137
7.6.2 Poursuite de trajectoire en humidité 138
7.6.3 Poursuite de trajectoire en température 142
7.6.4 Conclusion 146
7.7 Résultats expérimentaux 146
7.7.1 Conditions opératoires 146
7.7.2 Poursuite de trajectoire en température 147
7.8 Conclusion 153

Conclusions et perspectives **155**

Annexes **159**

Annexe A
Procédé de cuisson par autoclave

A.1 Les valeurs numériques 161

Annexe B
Destruction catalytique de gaz polluants

B.1 Les valeurs numériques 165

Annexe C
Séchage de peinture par rayonnement infrarouge

C.1 Expressions des coefficients du modèle . . . 169
C.1.1 Vitesse de séchage . . . 169
C.1.2 Bilan thermique . . . 169
C.2 Les valeurs numériques . . . 170

Annexe D
Acte publié à l'occasion du congrès CESA'98

D.1 1.Introduction . . . 175
D.2 2.Process and control problem . . . 176
D.2.1 Mass balance . . . 176
D.2.2 Energy balance . . . 177
D.2.3 Nonlinear distributed control system . . . 177
D.3 3.Time-varying linearized model . . . 178
D.4 4.Internal linearized model control . . . 180
D.4.1 Optimization algorithm . . . 181
D.5 5.Simulation results . . . 182
D.6 6.Conclusions and prospects . . . 183
D.7 7.Annexe . . . 183

Bibliographie **185**

Annexe E
Acte publié à l'occasion du congrès ECC'99

E.1 Introduction . . . 189
E.2 Process and control objectives . . . 190
E.2.1 Nonlinear boundary control system . . . 192
E.3 Reference determination . . . 193
E.3.1 Interior penalty method . . . 194
E.3.2 Exterior penalty method . . . 194
E.3.3 Resolution method . . . 194
E.3.4 Simulation results . . . 195

E.4 Nonlinear predictive control 197
E.4.1 IMC structure 197
E.4.2 Real-time control strategy 198
E.5 Conclusion 199

Bibliographie **201**

Annexe F
Acte publié à l'occasion du congrès MTNS'2000

F.1 Introduction 205
F.2 Drying process and control problem 206
F.2.1 Drying process 206
F.2.2 Energy balance 207
F.2.3 Mass balance 208
F.2.4 Nonlinear distributed parameter system 208
F.2.5 Control problem statement 209
F.3 Predictive control strategy 210
F.3.1 Constrained optimization problem 210
F.3.2 Constraints handling 213
F.3.3 Resolution method 215
F.4 Experimental results 216
F.4.1 Operating conditions 216
F.4.2 Temperature reference trajectory tracking 216
F.5 Conclusion 219
F.6 Annexe 220
F.6.1 Scheme 220
F.6.2 Drying velocity 220
F.6.3 Energy balance 221
F.6.4 Numerical values 221

Bibliographie **225**

Bibliographie **227**

Introduction

La conduite des procédés devient chaque jour de plus en plus complexe. En effet, aux objectifs de commande initialement posés (poursuite de trajectoire de référence, commande en temps minimal, etc.) s'ajoutent les contraintes d'exploitation, le plus souvent inévitables, posées sur les variables d'état et de commande (zones de fonctionnement à respecter dues à la production, à la sécurité des biens et des personnels, etc.)

Depuis une vingtaine d'années, l'utilisation des méthodes prédictives est en plein essor. En effet, par cette stratégie, les objectifs de commande et les contraintes sont conjointement pris en compte dans la formulation du problème. D'autre part, et c'est pourquoi elles sont très populaires en utilisation industrielle, elles sont relativement simples de mise en œuvre et il en va de même pour les outils théoriques nécessaires à leur étude.

Les premières études concernant cette stratégie étaient basées sur des modèles linéaires de type boîte « noire », entrées-sorties. Les résultats de commande et de stabilité en découlant sont désormais bien connus. Cependant, avec la complexité croissante des procédés, il devient nécessaire d'introduire des modèles de connaissance, plus précis mais aussi plus complexes. Pour des systèmes non linéaires, les aspects théoriques liés à la commande prédictive deviennent alors plus délicats à traiter et restent à ce jour pour la plupart encore ouverts.
Par ailleurs, les efforts de modélisation précédemment soulignés permettent d'aboutir de plus en plus à des systèmes d'équations non seulement non linéaires en terme de comportement entrées-sorties, mais faisant aussi intervenir les variables indépendantes d'espace : ce sont alors des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Dans le cadre de cette étude, on se propose d'étendre l'utilisation de la stratégie de commande prédictive à des systèmes à paramètres répartis non linéaires. Ceci constitue la première ambition de ce travail.

D'autre part, la démarche méthodologique proposée est orientée dans un souci d'applicabilité. Dans ce cadre, et c'est la deuxième contribution de ce travail, trois exemples réels issus du Génie des Procédés ont été complètement traités, dont un avec une validation concrète.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

- Dans la première section, nous faisons un point sur la stratégie de commande prédictive. Les principes de base sont énoncés. La structure de commande est alors introduite. Ceci permet de formuler le problème de commande (en général et pour la poursuite de trajectoire de référence en particulier) en un problème

d'optimisation sous contraintes.

- Dans la deuxième section, on s'intéresse plus particulièrement à l'utilisation de la structure de commande prédictive couplée à un modèle décrit par une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. La stratégie de conduite par linéarisation autour d'un fonctionnement nominal est présentée ainsi que la structure finale de commande utilisée. Les aspects méthodologiques spécifiques aux systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires sont présentés ou rappelés, tant du point de vue théorique que du point de vue résolution numérique, même si ceux-ci ne font pas l'objet principal de ce travail.

- Dans la section suivante, les méthodologies utilisées pour la prise en compte des contraintes sont introduites. Employées dans un contexte d'optimisation hors-ligne et en ligne, ces méthodologies permettent d'aboutir aux deux algorithmes que nous utilisons dans cette étude.

- La quatrième section permet de mettre en évidence les problèmes numériques sous-jacents en vue de la mise en œuvre, ainsi que les éléments de réponse apportés.

Les trois dernières sections concernent les applications étudiées :

- Dans le cadre d'une coopération avec l'équipe du Pr. P.S.Dhurjati, du département de Génie Chimique (Université du Delaware, U.S.A.), le problème posé concerne un procédé de cuisson par autoclave qui permet, à partir d'une matrice de polymère, d'obtenir un matériau composite. La problématique concerne la détermination, hors-ligne, du fonctionnement nominal.

- Dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques (CPE-Lyon), un travail de thèse est actuellement en cours dans l'équipe « Procédés catalytiques de dépollution ». Il concerne la modélisation d'un procédé pilote qui permet la destruction de composés organiques volatils par réaction catalytique. Le problème de commande est d'assurer le fonctionnement dans une zone spécifiée tout en assurant un apport minimal de puissance électrique.

- Enfin, le dernier exemple concerne le problème de séchage étudié dans l'équipe « Transferts couplés de matière et de chaleur » du laboratoire. Il s'agit du séchage de peinture par rayonnement infrarouge. Ici, les résultats de l'étude en simulation ont été confirmés sur le procédé réel, procédé pilote au laboratoire.

Cet ensemble de cas d'application permet de conclure sur cette approche de commande prédictive et de dégager quelques perspectives.

Table des figures

1.1 Difficultés de modélisation et nombre d'applications par domaine . . . 5
1.2 Diverses formes de loi de commande 10
1.3 Poursuite de trajectorie de référence par aspect prédictif 11
1.4 Poursuite d'une trajectoire de référence en créneaux 15
1.5 Structure de commande prédictive en boucle fermée 16
1.6 Structure de Commande Prédictive par Modèle Interne 18
1.7 Structure de commande pour la poursuite de trajectoire 20

2.1 Schéma bloc du système en boucle ouverte 27
2.2 Linéarisation du modèle autour d'un fonctionnement nominal 29
2.3 Structure de commande prédictive avec linéarisation du modèle . . . 30

3.1 Exemple de fonction barrière 41
3.2 Fonction de pénalité interne 42
3.3 Exemple de fonction de pénalité externe 43
3.4 Fonction de pénalité externe 44
3.5 Loi de transformation hyperbolique 47
3.6 Algorithme de Levenberg Marquardt, $(\alpha_\lambda) > 1$ 50
3.7 Algorithme d'optimisation en ligne 52
3.8 Algorithme d'optimisation hors-ligne 53

4.1 Exemple de fonction porte avec $(N_p,N_c) = (5s,3)$ 63

5.1 Procédé de cuisson par autoclave 69
5.2 Domaines spatiaux 69
5.3 Températures dans l'autoclave, en surface et au centre du polymère . 75
5.4 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction . 75
5.5 Différence de température entre la surface et le centre 76
5.6 Degrés de cuisson dans le polymère 76
5.7 Différence de température maximum autorisée entre la surface et le centre 77
5.8 Température d'autoclave 78
5.9 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction . 79
5.10 Vitesse de la température d'autoclave 79
5.11 Différence de température entre la surface et le centre 80
5.12 Degrés de cuisson dans le polymère 80

5.13 Température d'autoclave 81
5.14 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction . 82
5.15 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction, ($N_c = 1$) 82
5.16 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction, ($N_c = 2$) 83
5.17 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction, ($N_c = 5$) 83
5.18 Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction, ($N_c = 10$) 84
5.19 Vitesse de la température d'autoclave 85
5.20 Gradient de température entre la surface et le centre 86
5.21 Degrés de cuisson dans le polymère 86

6.1 Schéma de principe du procédé pilote du réacteur catalytique 93
6.2 Section du monolithe 93
6.3 Domaines spatiaux du réacteur catalytique 96
6.4 Gammes de concentration aléatoire de gaz polluant à l'entrée du réacteur 101
6.5 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s) 103
6.6 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (12, 12, 200s) 104
6.7 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 105
6.8 Concentration instantanée en sortie du procédé, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 105
6.9 Concentration moyenne en sortie du procédé 106
6.10 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial 107
6.11 Température maximale dans le réacteur 107
6.12 Concentration moyenne en sortie du modèle 108
6.13 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s) 109
6.14 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (12, 12, 200s) 110
6.15 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 110
6.16 Concentration moyenne en sortie du procédé, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 111
6.17 Puissance électrique instantanée, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) . . . 111
6.18 Température maximale dans le réacteur 112
6.19 Concentration moyenne en sortie du procédé, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 113
6.20 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 114
6.21 Puissance électrique instantanée, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) . . . 114
6.22 Température maximale dans la réacteur, (n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s) 115

6.23 Concentration moyenne en sortie du procédé 116
6.24 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial 117
6.25 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial, (n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16) 117
6.26 Condition de sortie de l'algorithme, (n_{mt},n_{mc}) = (60,60) 118
6.27 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt},n_{mc}) = (60,60) 119
6.28 Concentration instantanée en sortie du procédé, (n_{mt},n_{mc}) = (60,60) . 119
6.29 Concentration moyenne en sortie de procédé 120
6.30 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial, (n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16) 121
6.31 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial 121
6.32 Concentration moyenne en sortie de procédé 122
6.33 Puissance électrique moyenne depuis le temps initial, (n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16) 123
6.34 Puissance électrique moyenne 123
6.35 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16) 124
6.36 Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction, (n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60) 124
6.37 Température maximale dans le réacteur, (n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60) 125

7.1 Procédé pilote de séchage 131
7.2 Les divers flux 133
7.3 Trajectoire de référence en humidité moyenne 135
7.4 Trajectoire de référence en température 136
7.5 Poursuite de trajectoire pour $N_p = 15s$, $27s$, $40s$ 139
7.6 Ecart de poursuite pour $N_p = 15s$, $27s$, $40s$ 139
7.7 Amplitude de la commande pour $N_p = 15s$, $27s$, $40s$ 140
7.8 Vitesse de la commande pour $N_p = 15s$ 141
7.9 Critère de performance normalisé pour $N_p = 15s$, $27s$, $40s$ 141
7.10 Poursuite de trajectoire pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 142
7.11 Ecart de poursuite pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 143
7.12 Critère de performance normalisé pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 143
7.13 Amplitude de la commande pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 144
7.14 Vitesse de la commande pour $N_p = 3s$, $12s$ 145
7.15 Vitesse de la commande pour $N_p = 6s$ 145
7.16 Poursuite de trajectoire pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 147
7.17 Ecart de poursuite pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 148
7.18 Critère de performance normalisé pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 148
7.19 Amplitude de la commande pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 149
7.20 Vitesse de la commande pour $N_p = 3s$ 150
7.21 Vitesse de la commande pour $N_p = 6s$ 150
7.22 Sortie du modèle pour $N_p = 3s$, $6s$, $12s$ 151
7.23 Temps de calcul de la commande pour $N_p = 6s$ 151

7.24 Nombre d'itérations effectuées en fin de calcul pour $N_p = 6s$ 152

E.1 Composite layup [10]. 191
E.2 Spatial domains. 191
E.3 Temperatures 196
E.4 Through thickness curing behaviour 196
E.5 Algorithm output condition 197
E.6 Internal Model Control structure 198
E.7 Internal linearized model control structure 199

F.1 Drying process. 206
F.2 Thermal flows. 207
F.3 Temperature reference trajectory. 210
F.4 IMC principle. 210
F.5 Time Variant Linearized Internal Model Control (TVLIMC) structure. 212
F.6 Transformation law. 214
F.7 Reference tracking for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$. 217
F.8 Tracking error for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$. 217
F.9 Criteria values sequence for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$. 218
F.10 Control magnitude for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$. 218
F.11 Control velocity for $N_p = 3s$. 219
F.12 Model output for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$. 219
F.13 Model linearization. 220

1

Rappels sur la commande prédictive : principes et problématique générale

Sommaire

1.1 Introduction 3
1.2 Généralités sur la commande prédictive 3
1.2.1 Origines de la commande prédictive 3
1.2.2 Applications industrielles 4
1.2.3 Principe de base de la commande prédictive 5
1.3 Problématiques liées à la stratégie de commande prédictive 11
1.3.1 Problèmes structurels de l'approche 12
1.3.2 Problèmes de synthèse de l'approche 14
1.3.3 Problème d'optimisation dans le contexte du temps réel . 15
1.4 Conclusion 21

1.1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, la stratégie de commande prédictive est devenue une méthode de plus en plus utilisée dans plusieurs domaines d'application. L'intérêt est que des spécifications de fonctionnement ainsi que des contraintes d'exploitation, pour la plupart inévitables, peuvent être conjointement traitées dans l'élaboration de la commande.

L'objectif de ce travail est de voir les possibilités d'extension de la stratégie de commande prédictive du cadre classique où le modèle est décrit par des équations différentielles ordinaires à celui où il est décrit par des équations aux dérivées partielles.

Dans cette partie, nous faisons un rappel sur l'essor de l'utilisation de cette stratégie. Le principe de base est rappelé et les problématiques qui en découlent sont énoncées. Enfin, dans le contexte de commande en temps réel qui est le nôtre, la structure de commande adoptée est introduite. Ceci permet alors de poser les problèmes d'optimisation sous contraintes qui se dégagent.

1.2 Généralités sur la commande prédictive

1.2.1 Origines de la commande prédictive

Au début des années 1960, Propoï [37] fut l'un des premiers à proposer explicitement une forme de commande prédictive basée sur un modèle en utilisant une méthode de programmation linéaire. L'idée est d'insérer, dans l'algorithme de commande, un élément de prédiction concernant l'évolution des sorties du procédé, donnée par un modèle. Le calculateur détermine alors, à l'instant d'échantillonnage présent, la séquence de commandes à appliquer sur un horizon de prédiction. A la prochaine période d'échantillonnage, seule la première composante de cette séquence solution est effectivement appliquée au procédé et la résolution recommence de la même façon en prenant en compte les nouvelles mesures du procédé et ainsi de suite.

La première génération de commande prédictive appliquée en milieu industriel a été initiée par Richalet [44, 43] sous le nom Identification et Commande (IDCOM) et par les ingénieurs de Shell sous le nom Dynamic Matrix Control (DMC). Dans ces approches, le modèle est de type boîte noire, l'objectif est de poursuivre une référence mais les contraintes ne sont pas encore prises en compte. Ces algorithmes eurent un impact énorme sur la commande des procédés industriels et permirent de définir le paradigme de commande prédictive basée sur un modèle.

La deuxième génération qui apparaît au début des années 1980 permet en plus la prise en compte de contraintes sur les entrées et les sorties en posant un problème quadratique (Quadratic Dynamic Matrix Control).

Enfin, la génération actuelle (SMOC [25], IDCOM-M [18], PCT, RPMC) permet de distinguer divers degrés de contraintes, permet de prendre en compte certains problèmes d'infaisabilité, utilise l'estimation d'état et permet de résoudre pour des systèmes stables ou instables en boucle ouverte divers objectifs de commande.

1.2.2 Applications industrielles

Depuis le début de son application dans les années 1970, l'utilisation de la commande prédictive basée sur le modèle s'est répandue industriellement à travers plusieurs champs d'activités [38]. Dans le tableau 1.1, Allgöwer et al. [3] récapitulent les applications réalisées par les principales sociétés utilisant ce type de commande début 1998. A cela, on peut ajouter les applications locales développées en interne par des entreprises comme Shell [36, 25].

Domaines	Adersa	Aspen	CCI	Honeywell	Pavilion	Total
Raffinage	280	930	-	290	13	1513
Chimie	5	430	15	50	20	520
Alimentaire	41	-	-	-	9	50
Papier	-	15	-	30	1	46
Air et gaz	-	5	18	5	-	28
Polymère	-	1	-	-	15	16
Service	-	5	2	2	-	9
Autre	45	30	1	-	-	76
Total	371	1416	36	377	58	2258

TAB. 1.1 – *Liste d'applications industrielles de la commande prédictive (début 1998)*

Actuellement, selon cette même source [3], on peut estimer au nombre de 4000 dans le monde, les procédés utilisant cette technologie.
En ce qui concerne les champs d'application, ils sont représentés ci-dessous en fonction de leur nombre et des difficultés de modélisation.

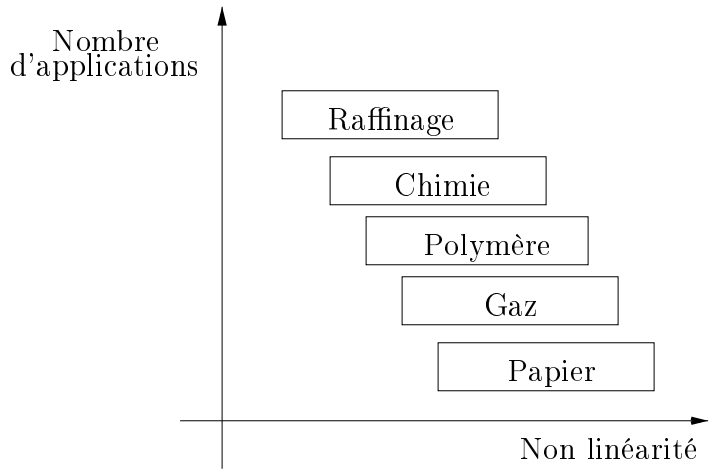


FIG. 1.1 – *Difficultés de modélisation et nombre d'applications par domaine*

Comme des applications dans des domaines tels que l'industrie du gaz, les procédés chimiques et l'industrie du papier (pour ne citer que ceux-ci) sont plutôt appelées à se développer, on saisit l'intérêt d'études utilisant des modèles de plus en plus complexes.
Enfin, l'application de cette technique permet, et c'est sans doute pourquoi elle est de plus en plus employée, l'augmentation du rendement de production d'une unité : l'intérêt technologique rejoint alors l'intérêt économique [16].

1.2.3 Principe de base de la commande prédictive

L'idée de base est d'utiliser la connaissance issue du modèle pour envisager divers scénarios de fonctionnement du procédé dans le futur et de choisir le meilleur en fonction des objectifs à atteindre. Pour ce faire, la stratégie de commande prédictive s'articule autour des points suivants :

- un objectif de fonctionnement désiré pour le procédé,
- un modèle du procédé à commander,
- un problème d'optimisation traduisant le premier point,
- une méthode de résolution pour le problème d'optimisation aboutissant aux commandes à appliquer au procédé.

On peut encore mieux préciser le principe de base en expliquant le rôle de chacun des éléments, ce qui fait l'objet des points suivants.

Objectif de fonctionnement

C'est la problématique posée par l'utilisateur du procédé qui doit être traduite en un problème de commande. A partir du cahier des charges, cela permet de spécifier :

- l'objectif qui peut être :

  - d'optimiser un critère de performance lié à des critères économiques : augmenter le rendement, diminuer les pertes de matières premières, etc.

  - d'assurer la poursuite d'une trajectoire de référence en sortie du procédé. C'est un problème assez répandu et cela traduit les performances souhaitées du procédé en boucle fermée, en terme de rapidité et de précision. L'objectif peut aussi correspondre à un comportement optimal vis-à-vis de la qualité du produit à élaborer.

- les contraintes de fonctionnement que doivent respecter certaines grandeurs physiques :

  - les actionneurs sont généralement limités en amplitude. Ils peuvent l'être aussi en vitesse et en accélération.

  - certaines grandeurs du procédé, mesurées ou estimées, doivent rester dans une zone de fonctionnement. Elles peuvent être liées à :

    + la qualité du produit (tolérance sur l'épaisseur d'une feuille de papier par exemple),

    + l'environnement (concentration de polluant inférieure à une norme par exemple),

    + la sécurité (température inférieure à un maximum par exemple).

Modèle

C'est la traduction de l'évolution du comportement du procédé. La modélisation peut se faire selon deux méthodes :

1. ***Modélisation phénoménologique : modèle de connaissance***

   Il s'agit ici de tenir compte des phénomènes physiques mis en jeu. On fait alors intervenir des bilans d'énergie, de population, de masse, etc. Le modèle est dans ce cas rarement simple en terme d'entrée-sortie. Il est principalement non linéaire, décrit par un ensemble d'équations différentielles avec seulement

la variable temps comme variable indépendante. Ce modèle est décrit par des équations aux dérivées partielles dès lors que l'on considère des évolutions spatio-temporelles pour des grandeurs physiques du procédé.
La complexité du modèle dépend alors des exigences de description souhaitées mais surtout du niveau de finesse exigé pour le comportement désiré du système.

Avantage 1 *L'importance des divers phénomènes peut se quantifier et le modèle obtenu permet de simuler le procédé avec d'autres caractéristiques physiques et dimensionnelles.*

D'autre part, il est évident que plus le modèle est fidèle au procédé, au sens physique du terme, meilleure sera la prédiction de l'évaluation du comportement du procédé.

Remarque 1 *La méthode nécessite une connaissance dans le domaine concerné. Une étude pluridisciplinaire est donc souvent obligatoire.*

2. ***Modèle de comportement global entrée-sortie :***

   A partir d'un modèle de type boîte noire, choisi a priori, il s'agit ici d'effectuer une estimation de ses paramètres. Ceux-ci sont déterminés en fonction de données expérimentales d'entrée-sortie.

   Avantage 2 *L'approche peut s'avérer plus simple et plus rapide que dans le cas précédent.*

   Par ailleurs, il peut être très difficile, voire impossible de mettre en équation le comportement de certains systèmes, ceux-ci étant plutôt nombreux.

   Inconvénient 1 *Le modèle n'a a priori aucune signification physique, surtout s'il est de nature complexe. D'autre part, et contrairement à la première méthode, on peut plus difficilement simuler le comportement d'un procédé ayant d'autres caractéristiques physiques et dimensionnelles.*

Le choix de la méthode se fait bien sûr en fonction de la précision des objectifs à atteindre et des informations disponibles.

Remarque 2 *D'un point de vue pratique, la méthode d'identification reste encore la plus utilisée, car c'est la plus simple et la plus rapide de mise en œuvre. Cependant, les problèmes posés étant de plus en plus complexes, l'utilisation de la première méthode, pluridiscipliaire, tend à s'étendre.*

Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation est la traduction mathématique des objectifs de contrôle du procédé sous les contraintes de fonctionnement.

En toute généralité, il s'agit d'optimiser (minimiser le plus souvent) une fonctionnelle J (le critère de performance, également appelé fonction coût) dépendant :

- des variables manipulables de commande représentées par le vecteur $u(t)$ indépendant des variables d'espace μ,
- des grandeurs du système (le vecteur d'état $x(\mu,t)$, le vecteur de sortie $y(t)$),
- d'un comportement désiré $c(t)$ (profils variables, consignes constantes, etc.).

Cela peut se traduire sous la forme :

$$\min_{u \in \mathcal{K}} \ \{J(u) = \int_Q g(u(t),\, y(t),\, x(\mu,t),\, c(t))\ dQ\} \tag{1.1}$$

Pour un système continu, toutes ces grandeurs dépendent du temps et de la (ou des) variable(s) spatiale(s) ; de sorte qu'en général, Q est un cylindre de base l'espace et de longueur le temps de prédiction.
L'ensemble $\mathcal{K}$ est défini par la vérification des contraintes, y compris celles concernant le modèle d'évolution du système.

Il est évident qu'une telle forme est difficilement exploitable pour l'étude mathématique et même pour la résolution tout court : c'est un problème d'optimisation en dimension infinie.

Une forme plus simple est généralement utilisée dans le cadre de la commande prédictive. Cette simplification, ou approximation, est faite à deux niveaux :

- l'argument $u(t)$, fonction continue est ramenée :
  - + soit en une suite d'arguments $u(t_k)$ pris à des instants t_k connus, $k = 1,2, ... < \infty$.
  - + soit en une fonction polynomiale du temps avec un nombre fini de coefficients qui sont alors les arguments à déterminer :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i t^i \tag{1.2}$$

- le cylindre Q est ramené en une succession d'éléments élémentaires (spatio-temporels, dans le cas de systèmes pour lequel les objectifs traduisent des

comportements spatio-temporels désirés) ou seulement en segments successifs du temps. La somme continue devient alors une somme discrète :

$$\int_Q (.)\ dQ = \sum_{Q_i} (.)\ \Delta Q_i \tag{1.3}$$

Le problème d'optimisation est ainsi ramené à un problème plus classique d'optimisation en dimension finie, pour lequel les résultats et les outils existent en grand nombre.

Remarque 3 *Il est important de noter qu'à ce niveau, la « discrétisation » précédente concerne conjointement l'argument de l'optimisation (la commande) et les instants d'évaluation du critère de performance J.*
Les contraintes variables et le modèle des états et des sorties sont par contre a priori continus (par rapport au temps et/ou à l'espace) puisqu'il suffit de pouvoir les évaluer aux noeuds de la discrétisation de l'argument.

En ayant adopté cette démarche, deux concepts s'introduisent naturellement dans la commande prédictive :

- la longueur des suites d'arguments, c'est-à-dire **l'horizon de commande** N_c,

- la longueur sur laquelle est évaluée le critère de performance, c'est-à-dire **l'horizon de prédiction** N_p.

Le problème de commande revient dès lors à déterminer la séquence des N_c commandes qui permet de minimiser le critère de performance choisi tout en assurant une vérification des contraintes. L'allure de chacune des commandes peut être (figure 1.2) :

- à déplacements multiples (figure 1.2, en haut) : une séquence de N_c commandes est appliquée de l'instant présent k jusqu'à la fin de l'horizon de commande, c'est-à-dire à $k + N_c$. Ensuite, les commandes appliquées jusqu'à la fin de l'horizon de prédiction $k + N_p$ sont prises égales au dernier élément de la séquence,

- à déplacement unique (figure 1.2, au milieu), c'est-à-dire $N_c = 1$, c'est donc un cas particulier du point précédent,

- décrite dans une base de fonctions (figure 1.2, en bas) telle que donnée par l'expression (1.2).

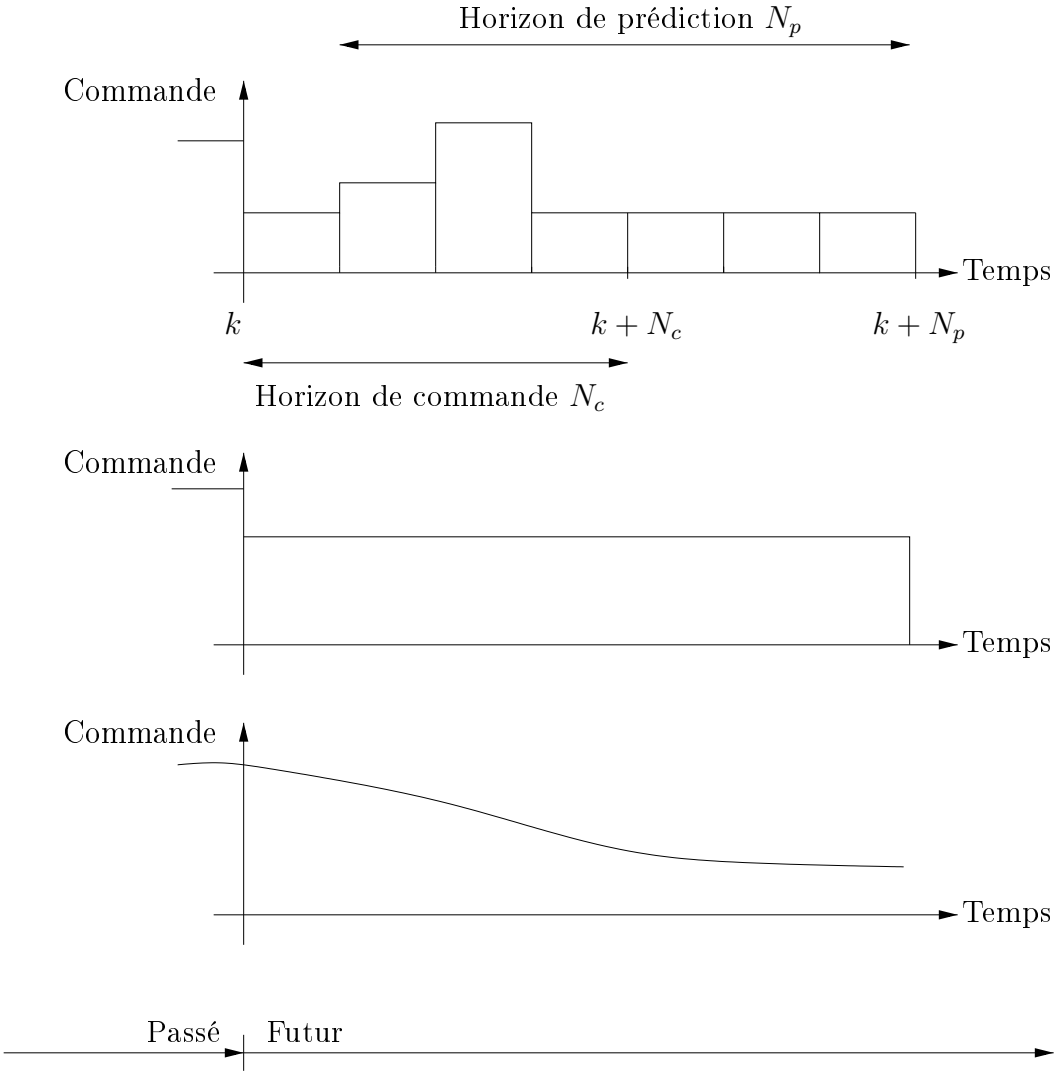


FIG. 1.2 – *Diverses formes de loi de commande*

Méthode de résolution

Sous la forme précédente, le principe de la commande prédictive revient à optimiser le critère de performance à chaque instant (à chaque période d'échantillonnage) et à déterminer la meilleure séquence de N_c commandes sur l'horizon de prédiction N_p. Finalement, la première composante de la séquence de commande solution sera appliquée à la prochaine période d'échantillonnage et la résolution recommence en prenant compte des nouvelles mesures actualisées du procédé.

La répétition de cette procédure à chaque période confère à la méthode une approximation du temps continu infini par un horizon fini que l'on dira fuyant ou glissant. Dans le cas de la poursuite de trajectoire de référence, le schéma qui résume ceci est le suivant :

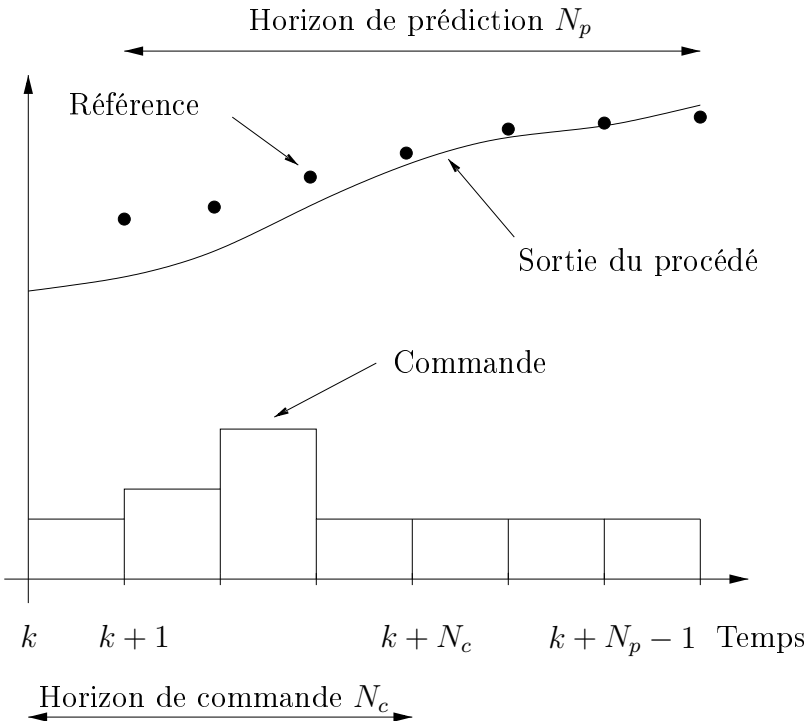


FIG. 1.3 – *Poursuite de trajectorie de référence par aspect prédictif*

En résumé, pendant chaque période de temps, il faut disposer d'une méthode d'optimisation associée à une méthode de résolution du modèle du système sur l'horizon de prédiction. On comprend alors pourquoi la stratégie de commande prédictive fut tout d'abord appliquée et proposée dans le cas de systèmes avec la possibilité de modèles simples.

Actuellement, malgré la puissance des calculateurs, des problèmes subsistent et deviennent de plus en plus complexes soit à cause du modèle, soit à cause du problème d'optimisation sous-jacent, ou des deux conjointement.
Par méthode de résolution, on entend donc les solutions proposables à ce niveau, qui sont liées aux autres problématiques de cette stratégie de commande.

1.3 Problématiques liées à la stratégie de commande prédictive

La stratégie de commande prédictive, telle qu'elle vient d'être exposée, semble bien séduisante. En ce sens que de nombreux problèmes théoriques au sens mathé-

matique semblent être évités par cette approche dans le cas de systèmes non linéaires et à paramètres localisés ou distribués.
Certaines de ces difficultés sont bien entendu conservées et d'autres apparaissent comme on s'y attend. Il nous semble judicieux de classer ces difficultés en deux rubriques :

- les problèmes structurels de l'approche,
- les problèmes de synthèse de l'approche.

1.3.1 Problèmes structurels de l'approche

En faisant un parallèle avec la commande de système en général, les problèmes dont il s'agit concernent l'analyse. Cela peut se résumer à deux niveaux : la faisabilité a priori et la stabilité (faisabilité a postériori).

Faisabilité a priori

Cela concerne, en terme formel, l'existence ou non de solution au problème d'optimisation sous contraintes qui traduit le problème de commande.
Même ramené en dimension finie par discrétisation de l'argument, l'ensemble admissible défini par les contraintes de toutes sortes peut, soit être vide au départ, soit passer pendant un instant à un ensemble vide puisque les contraintes peuvent être variables en dépendant du comportement futur du système.
Cette notion est donc à rapprocher de celle de commandabilité et sans une hypothèse équivalente, la commande prédictive telle qu'exposée n'est pas plus une solution qu'une autre.

Stabilité

Elle a déjà été un peu abordée, en ce sens que même si une optimisation est possible à chaque instant, pour un futur fini, on doit pouvoir assurer que cela est possible pour un temps infini et que le système est ainsi toujours maîtrisable. Cela rejoint bien entendu la notion de stabilisabilité et de stabilité tout court.

Quelle que soit la stratégie de commande utilisée, une étude de la stabilité est toujours nécessaire. Dans le cadre de la stratégie de commande prédictive, elle dépend fortement des comportements futurs souhaités du procédé, c'est-à-dire du critère de performance et des contraintes. Il s'agit alors de vérifier que la commande, solution de l'algorithme, permet d'assurer la stabilité du procédé en boucle fermée.

Cette étude dépend notamment de la valeur prise par l'horizon de prédiction. Les résultats les plus simples à obtenir en théorie sont obtenus avec N_p infini. Cependant, ce cas n'étant pas réalisable pratiquement, la troncature de l'horizon amène à

différentes approches.

C'est la vision d'ensemble que nous présentons dans les quatre points suivants, dans le cadre de modèles décrits par des équations aux dérivées ordinaires. En effet, à notre connaissance, il n'existe pas de résultat publié sur la stabilité de la commande prédictive appliquée à des systèmes à paramètres répartis.

- ***Contrainte égalitaire terminale***

  Le cas où l'horizon de prédiction est infini est le plus simple pour statuer de la stabilité de la boucle fermée. Keerthi et Gilbert [20] furent les premiers à donner des conditions de stabilité : à partir d'un horizon de prédiction infini, l'introduction d'une contrainte terminale égalitaire portant sur l'état permet de garantir, sous certaines conditions, la stabilité du système en boucle fermée. C'est une technique des plus populaires jusqu'à maintenant. Cependant, si dans le cas linéaire, la résolution numérique d'un tel problème est atteignable en approchant l'horizon infini par une grande valeur, une telle résolution est difficile, voire impossible à obtenir en pratique dans le cas non linéaire.

- ***Contrainte prédictive en mode dual***

  Dans cette stratégie [27], deux modes de commande sont possibles en fonction de la position de l'état dans l'espace correspondant. Une région d'état finale Ω_f est définie a priori. En dehors de Ω_f, une stratégie de commande prédictive est employée puis, à l'entrée de Ω_f, un retour d'état linéaire est appliqué. L'intérêt est que la stabilité dépend seulement de la faisabilité de la résolution du problème d'optimisation sous contraintes alors que l'optimalité de cette solution n'est pas demandée.

- ***Contrainte prédictive à horizon quasi infini***

  L'idée est que l'état doit se trouver, dans un temps futur, dans un domaine Ω_f. Pour cela, une contrainte de stabilité de type inégalitaire portant sur l'état est posée, ainsi qu'un terme de pénalité quadratique portant sur la norme future de l'état, servant à la troncature de la problématique initiale posée avec un horizon infini. La résolution du problème d'optimisation est alors atteinte par la résolution d'un problème d'optimisation sur horizon fini. Comme dans le cas précédent, la solution optimale n'est pas nécessaire alors que la faisabilité du problème garantit la stabilité [5].

- ***Stabilité robuste***

  Les méthodes que nous venons de décrire reposent cependant sur des hypothèses fortes : absence d'erreur de modélisation et de perturbation. Ce sont là

des hypothèses irréalistes en pratique et c'est dans ce cadre que se développent des études portant sur la robustesse [45, 10].

Les deux problèmes de faisabilité que l'on vient de voir sont des problèmes d'analyse de l'ensemble modèle, contraintes et objectifs de la stratégie de commande prédictive. Ils sont liés dans l'étude de l'outil de synthèse qu'est l'optimisation non linéaire comme cela a été entamé dans la thèse de Courtial [8, 9]. Des éléments de réponse à ces questions sont aussi présents dans les solutions aux problèmes de synthèse ou de mise en œuvre de l'approche.

1.3.2 Problèmes de synthèse de l'approche

Cela concerne les problèmes effectifs de mise en œuvre de la stratégie : les choix des horizons de prédiction et de commande et la résolution du problème d'optimisation dans le contexte de temps réel.

Choix des horizons

Comme décrit précédemment, la difficulté du temps continu a été contournée par une discrétisation du temps et de l'argument commande sur un temps fini. Cela a introduit les horizons de prédiction (N_p) et de commande (N_c). Le problème connu en commande prédictive depuis ses origines est leur détermination optimale.

Dans le cas de modèles linéaires, des méthodes existent pour bien fixer ces paramètres puisqu'on peut plus facilement établir les réponses de tels systèmes dans le cas de poursuite de consignes dont les dynamiques sont du même ordre que celles du système linéaire à commander [29].

Dans le cas général, cela reste un problème ouvert puisqu'un horizon optimal dépend de la dynamique de la consigne à poursuivre par exemple, mais aussi de la dureté des contraintes par rapport aux possibilités du procédé.

- ***Choix de l'horizon de prédiction*** N_p

  Le choix de l'horizon de prédiction N_p joue un rôle important tant par la quantité d'informations fournie à l'algorithme, que du point de vue de la faisabilité numérique du problème d'optimisation. Sa détermination est basée sur des considérations physiques ayant trait au comportement du modèle en boucle ouverte, à l'objectif à atteindre ainsi que dans la prise en compte des contraintes. Cependant, s'il n'existe pas encore de méthode permettant de choisir l'horizon de prédiction optimal vis à vis du problème posé, le choix d'un horizon de prédiction variable dans le temps peut être judicieux selon le cas présenté. Ainsi, pour la référence $y_{ref}(k)$ suivante en créneaux à poursuivre en sortie de procédé :

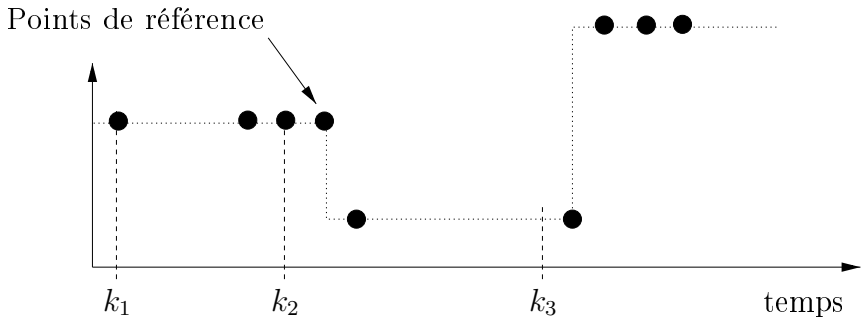


FIG. 1.4 – *Poursuite d'une trajectoire de référence en créneaux*

le choix d'un horizon de prédiction variant dans le temps de la façon suivante :

$$\begin{cases} N_p = k_2 - k + 1, \text{ pour } k_1 \leq k \leq k_2, \\ N_p = k_3 - k + 1, \text{ pour } k_2 + 1 \leq k \leq k_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

permettra a priori un meilleure poursuite qu'avec un horizon N_p constant.

D'autre part, pendant les horizons de prédiction, il faut pouvoir prédire le comportement futur du système en y incluant les écarts possibles avec le modèle dus ou non à la commande.
On conçoit donc qu'un compromis est à trouver pour ce paramètre entre une grande période de prédiction assurant la maîtrise sur un temps plus long et un petit horizon garantissant de meilleures prédictions du fait de l'information plus pertinente concernant l'écart futur entre le procédé et son modèle.

- ***Choix de l'horizon de commande*** N_c

  En ce qui concerne le choix de l'horizon de commande N_c, une valeur élevée permet a priori, en ayant plus de degrés de liberté, d'atteindre des objectifs plus difficiles. Cependant, le choix de $N_c = 1$ est reconnu comme étant suffisant dans la plupart des cas.

1.3.3 Problème d'optimisation dans le contexte du temps réel

Le paramètre le plus restrictif pour l'applicabilité de la commande prédictive est le temps de calcul. Il est en effet nécessaire, pendant une période de temps d'échantillonnage que l'on peut choisir en fonction de la dynamique finale, de trouver une solution admissible au problème d'optimisation sous contrainte posé.
En rappelant que le modèle est aussi à résoudre pendant ce même temps (et plusieurs fois !), on voit tout de suite que le choix de l'algorithme est crucial. Qualitativement, un algorithme de recherche d'optimum global est a priori exclu. Un optimum local, qui est donc admissible, est suffisant à tout instant. S'il est instantanément global,

c'est tant mieux, mais le temps de recherche d'une solution fait partie des contraintes de l'algorithme.
Ce problème d'optimisation peut-être maintenant explicité pour en dégager les concepts puisqu'il correspond à la stratégie globale de la commande prédictive par optimisation. Pour les raisons qui viennent d'être exposées, nous indiquons d'abord ce problème pour la commande prédictive en ligne telle que nous le concevons dans ce travail.

Problème d'optimisation sous contraintes en ligne

La stratégie de commande prédictive utilise une structure en boucle fermée (figure 1.5) :

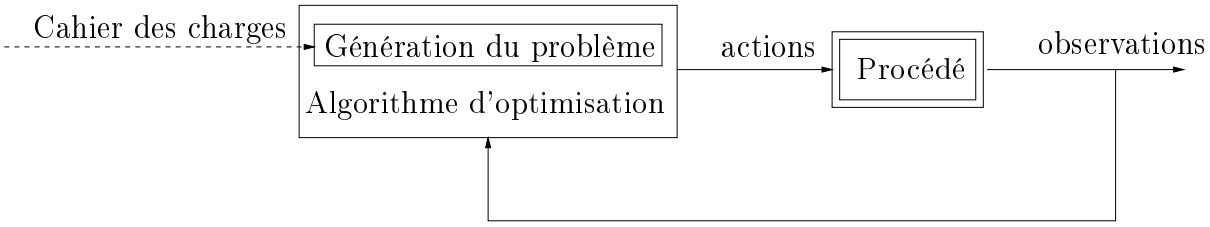


FIG. 1.5 – *Structure de commande prédictive en boucle fermée*

A partir du cahier des charges, un critère de performance J traduisant l'objectif et les contraintes sont posés et définissent le problème d'optimisation. L'algorithme a alors pour charge de déterminer, à l'instant présent k, la séquence de N_c commandes à appliquer à chaque période d'échantillonnage en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes. Celui-ci fait intervenir les variables de commande u et les variables de sorties y_p du procédé (mesurées ou estimées) et s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\min_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} g(u(j-1),\, y_p(j)) \tag{1.5}$$

avec la séquence des N_c commandes à déterminer :

$$\tilde{u} = [u(k) \;...\; u(k+N_c-1)]^T \tag{1.6}$$

les commandes restantes à appliquer jusqu'à la fin de l'horizon de prédiction étant (figure 1.2) :

$$u(j-1) = u(k+N_c-1) \qquad (j \in \{k+N_c+1,\, k+N_p\}) \tag{1.7}$$

D'autre part, ce problème est soumis, sur l'horizon de prédiction, aux contraintes sur les variables de commande ainsi que sur les autres grandeurs du système, en particulier sur les grandeurs de sortie du procédé :

$$\begin{cases} c_i(u(j-1),\, y_p(j)) \leq 0 \\ i \in \mathcal{I} = \{1,\, ...,\, n_{co}\} \\ j \in \mathcal{J} = \{k+1,\, ...,\, k+N_p\} \end{cases} \tag{1.8}$$

avec :

$$\begin{cases} T_e \text{ la période d'échantillonnage} \\ s(j) \text{ le signal } s(t) \text{ à l'instant } t = j\ T_e \\ N_p \text{ l'horizon de prédiction fini} \\ N_c \text{ l'horizon de commande fini avec } N_c\ \leq N_p \\ n_{co} \text{ le nombre de contraintes} \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y_p \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{1.9}$$

Hypothèse 1 *La fonction g intervenant dans la définition de la fonction coût J est de forme quadratique sur les fonctions de sortie.*

Hypothèse 2 *Les fonctions de contraintes c_i sont supposées être de classe C^1 par rapport à chacun de leurs arguments.*

Hypothèse 3 *Les variables intervenant dans l'évaluation de la fonction coût et des contraintes sont soit directement mesurées, soit estimées.*

Un des problèmes majeurs issu de la forme du critère de performance (1.5) et des contraintes (1.8) est de pouvoir évaluer les sorties futures du procédé $y_p(j)$ sur l'horizon de prédiction N_p. Ceci peut être résolu en utilisant la structure de commande par modèle interne comme suit.

Utilisation de la structure de commande par modèle interne

Dans la structure de commande par modèle interne (CMI) [29], la commande est non seulement appliquée au procédé, mais aussi à son modèle :

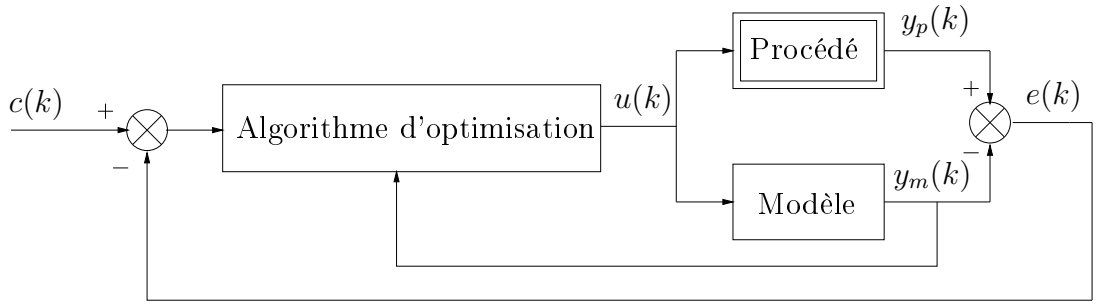


FIG. 1.6 – *Structure de Commande Prédictive par Modèle Interne*

Le modèle a les caractéristiques suivantes :

- son degré de complexité est lié à la finesse des objectifs à atteindre,
- par rapport au procédé, il doit être qualitativement juste au niveau des tendances :
  - il est dissipatif quand le procédé l'est,
  - il intègre un retard présent dans le procédé,
  - une réaction endothermique n'est pas modélisée de façon exothermique, etc..

En outre, dans une certaine mesure, des erreurs de modélisation et des erreurs additives en sortie de procédé peuvent être acceptées dans cette structure sans que cela ne vienne perturber les résultats.

Les sorties du procédé $y_p(k)$ peuvent donc, d'après la structure représentée figure 1.6, s'élaborer à partir du modèle et du signal d'erreur $e(k)$:

$$y_p(k) = y_m(k) + e(k) \tag{1.10}$$

Cette structure étant valable à tout instant, elle l'est aussi aux instants futurs j :

$$y_p(j) = y_m(j) + e(j) \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{1.11}$$

Si le signal de sortie futur $y_p(j)$ peut être évalué à partir du signal de sortie du modèle $y_m(j)$ résolu numériquement, il reste encore tributaire du signal d'erreur futur $e(j)$. Ce signal étant forcément inconnu à l'instant présent k, il est considéré comme une perturbation de sortie mais assurant tout de même le bouclage de la

structure de commande. C'est donc une information primordiale et se pose donc le problème de sa quantification. Des modèles d'estimation d'écarts ont été donnés par Morari [29]. La forme la plus simple est de considérer l'écart constant sur l'horizon de prédiction [29, 25], cet écart étant mis à jour à chaque période d'échantillonnage par la nouvelle mesure des sorties du procédé et le dernier calcul du modèle.

Hypothèse 4 *Sur l'horizon de prédiction N_p, le vecteur d'écart $e(j)$ existant entre les sorties du procédé et celles du modèle est pris constant et égal à la dernière valeur disponible $e(k)$.*

Grâce à l'hypothèse 4 d'erreur constante, le signal futur $y_p(j)$ est élaboré à l'instant présent k comme suit à partir du dernier signal d'écart disponible $e(k)$:

$$y_p(j) = y_m(j) + e(k) \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{1.12}$$

Ceci permet donc de définir le nouveau problème d'optimisation à résoudre, également soumis à la contrainte liée à la représentation du modèle :

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} g(u(j-1),\, y_m(j)) \\ \tilde{u} = [u(k) \ ... \ u(k+N_c-1)]^T \\ \\ c_i(u(j-1),\, y_m(j)) \leq 0 \qquad (i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}) \end{cases} \tag{1.13}$$

Si l'on considère maintenant le problème classique de poursuite de trajectoire, il peut être vu comme un cas particulier du cas général que l'on vient de voir, où la fonction g s'écrit sous une certaine forme.

Cas particulier de la poursuite de trajectoire

Le problème qui se pose maintenant est de réaliser, en sortie du procédé $y_p(k)$, la poursuite d'une trajectoire de référence $y_{ref}(k)$ connue à l'avance. Le problème d'optimisation initial qui se pose donc sous la forme (1.5) est (dans le cas monovariable) :

$$\min_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_{ref}(j) - y_p(j)]^2 \tag{1.14}$$

En outre, on utilise la structure de commande précédente dans la configuration suivante :

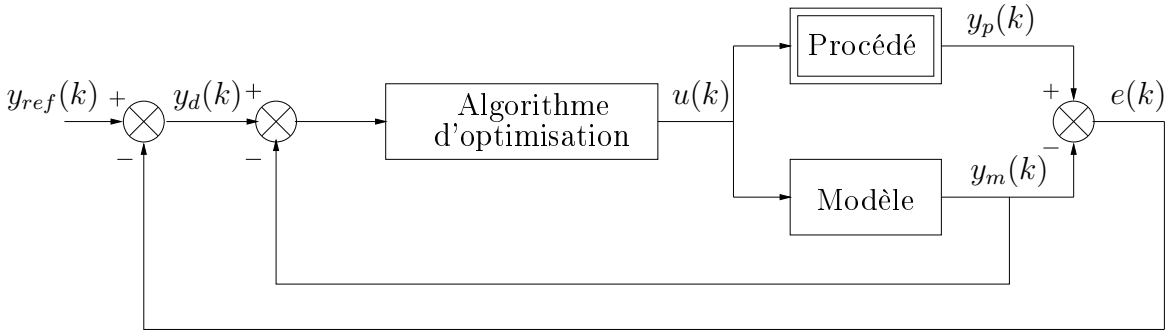


FIG. 1.7 – *Structure de commande pour la poursuite de trajectoire*

A partir de cette structure, on élabore un signal désiré $y_d(k)$ issu des signaux $y_{ref}(k)$ et $e(k)$ comme suit :

$$y_d(k) = y_{ref}(k) - e(k) \tag{1.15}$$
$$y_d(k) = y_{ref}(k) - (y_p(k) - y_m(k)) \tag{1.16}$$
$$y_d(k) - y_m(k) = y_{ref}(k) - y_p(k) \tag{1.17}$$

Imposer que le signal de sortie $y_m(k)$ issu du modèle suive le signal désiré $y_d(k)$ permet donc d'assurer en sortie de procédé $y_p(k)$ la poursuite de la référence $y_{ref}(k)$. Ceci constitue la caractéristique de correcteur de type intégrateur de la structure de CMI.

Remarque 4 *La poursuite de trajectoire peut se faire même si la sortie du modèle est différente de celle du procédé.*

Comme auparavant, l'équation (1.17) est aussi valable aux instants futurs j :

$$y_d(j) - y_m(j) = y_{ref}(j) - y_p(j) \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{1.18}$$

Le critère de performance peut alors s'écrire :

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_d(j) - y_m(j)]^2 \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{1.19}$$

De plus, comme précédemment, l'équation (1.15) et l'hypothèse 4 d'écart constant permettent d'écrire la forme du signal désiré sur l'horizon de prédiction :

$$y_d(j) = y_{ref}(j) - e(k) \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{1.20}$$

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de commande prédictive. Nous avons vu que son utilisation en milieu industriel était en pleine croissance, ce qui a motivé cette étude.

Tout d'abord, la problématique issue du cahier des charges se traduit en un problème d'optimisation sous contraintes initialement posé en dimension infinie. Une discrétisation du temps et une autre concernant l'argument de commande ont alors permis de poser ce problème en dimension finie. Cela a également permis d'introduire les paramètres de réglage essentiels de la commande prédictive : les horizons de commande et de prédiction.

La structure de commande en boucle fermée a été présentée : elle est basée sur la structure de commande par modèle interne. Celle-ci permet d'intégrer dans le problème d'optimisation sous contraintes en dimension finie non seulement les mesures issues du procédé, mais aussi son comportement futur par le biais du modèle. Cette approche a été décrite pour une problématique générale et pour un problème de poursuite de trajectoire en particulier.

L'objet du chapitre qui suit est de présenter les outils méthodologiques nécessaires à l'extension de l'utilisation de la stratégie de commande prédictive du cadre classique où le modèle est décrit par des équations différentielles ordinaires à celui où il est décrit par des équations aux dérivées partielles.

2

Commande prédictive de systèmes non linéaires à paramètres répartis

Sommaire

2.1 Introduction 25
2.2 Classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles considérée 25
2.3 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant 28
2.3.1 Modèle de variation : système d'équations aux dérivées partielles linéaires temps variant 28
2.3.2 Commande prédictive par modèle interne d'un système linéaire temps variant 29
2.3.3 Problème final d'optimisation sous contraintes 31
2.4 Méthodes de résolution du modèle interne 31
2.4.1 Existence de solution au système linéaire temps variant . 31
2.4.2 Méthodes numériques de résolution du modèle interne . . 33
2.5 Conclusion 34

2.1 Introduction

L'objet principal de ce travail est d'essayer d'étendre la stratégie de commande prédictive précédemment exposée à des systèmes dont le modèle décrivant le comportement du procédé est un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Nous essayerons donc d'apporter un élément de réponse aux difficultés soulevées par l'approche de la commande prédictive.

En ce qui concerne les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, les points cruciaux concernent la résolution du problème d'optimisation et du modèle, et en conséquence directe, l'aspect temps réel.

Les difficultés d'ordre théorique (commandabilité, stabilisabilité) sont extrêmes en ce qui concerne les équations aux dérivées partielles tant linéaires [19, 13], que non linéaires. Aussi, l'approche que nous présentons n'est certainement pas exclusive. Seulement, elle nous semble mieux adaptée pour aboutir à une mise en œuvre réelle d'une commande sachant que la faisabilité de la commande prédictive est déjà prouvée pour d'autres types de systèmes.

Dans cette partie, nous commençons par spécifier la classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles considérée. Puis la stratégie spécifique de structure de commande prédictive adoptée est exposée. Les méthodes de résolution sont enfin exposées dans leurs grandes lignes avant d'être plus approfondies dans la partie concernant la mise en œuvre de l'approche.

2.2 Classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles considérée

Quand il s'agit de systèmes d'équations aux dérivées partielles, une définition plus précise de la notion de non linéarité est nécessaire. En effet, dans le cas des systèmes à paramètres localisés, il y a coïncidence entre la non linéarité des équations différentielles (des opérateurs différentiels dirons-nous) et la non linéarité du comportement du système en terme de relations entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs reflétant l'état du système. Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, il n'y a pas forcément équivalence de ces notions. La seule certitude est qu'un système décrit par un opérateur differentiel non linéaire est forcément un système non linéaire en terme systémique (automaticien). Par exemple, l'opérateur differentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -u_1(t)\dfrac{\partial x}{\partial z} + k_0\, e^{\frac{-E}{Ru_2(t)}} \text{ dans } Q_T =]0,1]\times]0,T],\ u_1 \text{et } u_2 \in L^2(0,T) \\ x(0,t) = 0 \text{ pour } t \in]0,T] \\ x(z,0) = x_i \in L^2[0,1] \end{cases} \tag{2.1}$$

décrit un système semi linéaire pour u_1 et u_2 variables, et linéaire dans le cas où u_2 est constant.
Pour l'état du système x et son entrée $u = (u_1\ u_2)^T$, le système est bien sûr non linéaire, voire fortement non linéaire par rapport à u_2.

De même, l'opérateur différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}(D(x)\dfrac{\partial x}{\partial z}) \text{ dans } Q_T =]0,1[\times]0,T] \\ x(0,t) = u(t) \text{ pour } t \in]0,T] \\ x(1,t) = 0 \text{ pour } t \in]0,T] \\ x(z,0) = x_i \in L^2[0,1] \end{cases} \tag{2.2}$$

décrit un système quasi-linéaire, quelque soit la fonction non linéaire D. En terme systémique, c'est évidemment un système non linéaire.

Dans ce travail, nous considérons les systèmes non linéaires, au sens systémique, qui sont décrits par :

- des équations aux dérivées partielles semi-linéaires : le terme source est non linéaire soit par rapport à la variable de commande, soit par rapport à l'état, soit par rapport aux deux. Le terme différentiel est quand à lui un opérateur linéaire.

- des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires : la non linéarité est un terme non différentiel de l'opérateur interne ou externe à la différentiation.

Un point important à spécifier est que nous limitons cette étude aux systèmes d'équations aux dérivées partielles à **commande frontière** au sens où la variable de commande apparaît a priori dans les conditions aux limites du problème.

On peut résumer ceci avec les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = A(x,\nabla x) \text{ dans } Q_T = \Omega\times]0,T] \\ h(x,u) + B(x,\nabla x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,T] \\ x(z,0) = x_i \text{ dans } \partial\Omega \cup \Omega = \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.3}$$

Les opérateurs A et B sont linéaires, la fonction h est linéaire ou non, ∇x est le gradient de x.

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = Ax + f(x) \text{ dans } Q_T \\ h(x,u) + Bx = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,T] \\ x(z,0) = x_i \text{ dans } \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.4}$$

A et B étant des opérateurs linéaires, f et h des fonctions non linéaires de x, u est la variable de commande dépendant seulement du temps.

En terme systémique toujours, x étant l'état du système, on peut associer aux systèmes $(\mathcal{S}_1)$ ou $(\mathcal{S}_2)$ un vecteur de sortie :

$$y = Cx \tag{2.5}$$

où C est un opérateur linéaire que l'on suppose borné.
Par la suite, le système $(\mathcal{S}_1)$ ou $(\mathcal{S}_2)$ sera représenté en schéma bloc traditionnel où la relation globale entrée-sortie est non linéaire :

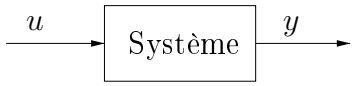


FIG. 2.1 – *Schéma bloc du système en boucle ouverte*

Selon qu'il s'agisse du procédé ou de son modèle, on notera la sortie respectivement y_p ou y_m.

Pour les systèmes $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$, on peut les écrire globalement sous la forme $(\mathcal{S}_{NL})$:

$$(\mathcal{S}_{NL})\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = F_d(x) \text{ sur } \Omega\times]0,\ +\infty[\\ F_b(x,u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\ +\infty[\\ y = Cx \text{ sur } \overline{\Omega}\times]0,\ +\infty[\\ x(z,0) = x_i(z) \text{ avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.6}$$

avec les opérateurs F_d et F_b :

$$\begin{cases} F_d(.) = \left| \begin{array}{l} A(.,\nabla.) \text{ pour } (\mathcal{S}_1) \\ A + f(.) \text{ pour } (\mathcal{S}_2) \end{array} \right. \\ F_b(.,u) = \left| \begin{array}{l} h(.,u) + B(.,\nabla.) \text{ pour } (\mathcal{S}_1) \\ h(.,u) + B \text{ pour } (\mathcal{S}_2) \end{array} \right. \end{cases} \tag{2.7}$$

Les systèmes $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$, s'ils sont injectés tels quels dans la structure de commande prédictive des figures 1.6 et 1.7 rendent difficiles non seulement les études théoriques de faisabilité (existence de solution, commandabilité, stabilité, etc), mais aussi les problèmes de mise en œuvre par le problème sous-jacent de résolution pour l'optimisation et le modèle.

C'est en ce sens que nous proposons une démarche de commande prédictive avec une **structure modifiée** dans la mesure où l'on décompose le problème en deux étapes :

- la détermination hors-ligne d'un **comportement nominal** par rapport aux objectifs et aux contraintes,
- la mise en place d'une structure d'**adaptation en ligne de comportement** en temps réel du procédé par rapport au comportement nominal.

Un modèle est alors nécessaire pour décrire la déviation par rapport au système nominal : c'est le modèle interne de variation qui fait l'objet de la section suivante.

2.3 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant

L'idée consiste à supposer que la variation vers un comportement désiré peut être décrite par une linéarisation du modèle initial pour peu que l'on puisse amener le système dans un domaine de fonctionnement suffisamment proche du fonctionnement nominal désiré. Il faut donc décrire ce modèle aux variations puis l'adapter à la structure de commande prédictive par modèle interne.

2.3.1 Modèle de variation : système d'équations aux dérivées partielles linéaires temps variant

Hypothèse 5 *Pour le système $(\mathcal{S}_1)$ ou $(\mathcal{S}_2)$ représenté dans la figure 2.1, on suppose qu'il existe un triplet (u_0, x_0, y_0) vérifiant le modèle $(\mathcal{S}_0)$ considéré (c'est-à-dire soit $(\mathcal{S}_1)$ soit $(\mathcal{S}_2)$) ; cela pour toute condition initiale.*

Pour des variations autour de ce triplet, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = u_0 + \Delta u \\ x = x_0 + \Delta x \\ y_m = y_0 + \Delta y_m \end{cases} \tag{2.8}$$

Si elles sont suffisamment proches du système nominal, ces variations seront liées par le modèle de linéarisation du modèle initial autour du triplet (u_0, x_0, y_0) :

$$(\mathcal{S}_{LTV})\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial t} = \dfrac{\partial F_d}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x \quad \text{sur } \Omega\times]0,\ +\infty[\\ \dfrac{\partial F_b}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x + \dfrac{\partial F_b}{\partial u}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\ +\infty[\\ \Delta y_m = C\Delta x \text{ sur } \overline{\Omega}\times]0,\ +\infty[\\ \Delta x(z,0) = 0 \text{ avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.9}$$

Il faut remarquer que toutes les grandeurs dépendent a priori du temps puisque le triplet $(u_0,\ x_0,\ y_0)$ décrit une « trajectoire » du système, donc le modèle linéaire $(\mathcal{S}_{LTV})$ est temps variant.
Schématiquement, le modèle de la figure 2.1 se décompose alors comme suit :

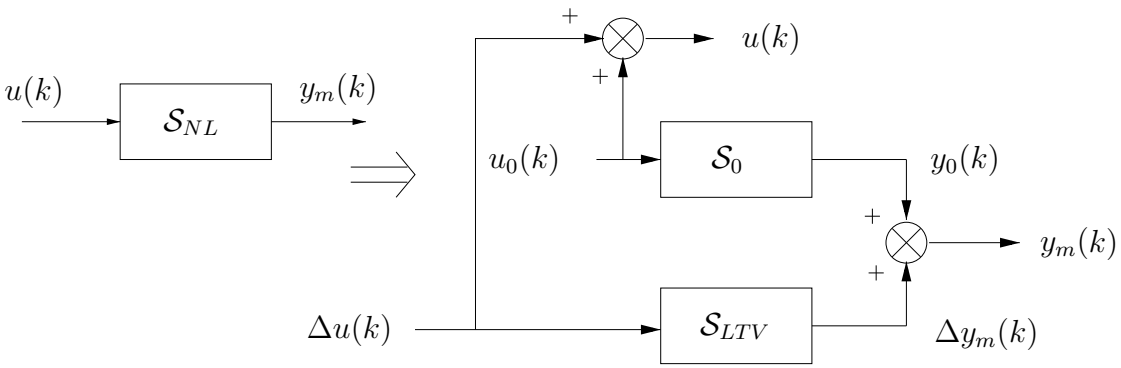


FIG. 2.2 – *Linéarisation du modèle autour d'un fonctionnement nominal*

Cela permet de modifier le schéma initial de principe de la commande prédictive.

2.3.2 Commande prédictive par modèle interne d'un système linéaire temps variant

En supposant l'existence du triplet (u_0, x_0, y_0) pour le système initial non linéaire, la structure de commande de variations pour atteindre, par exemple, une trajectoire de référence y_{ref} (provenant d'une optimisation préalable) est le suivant :

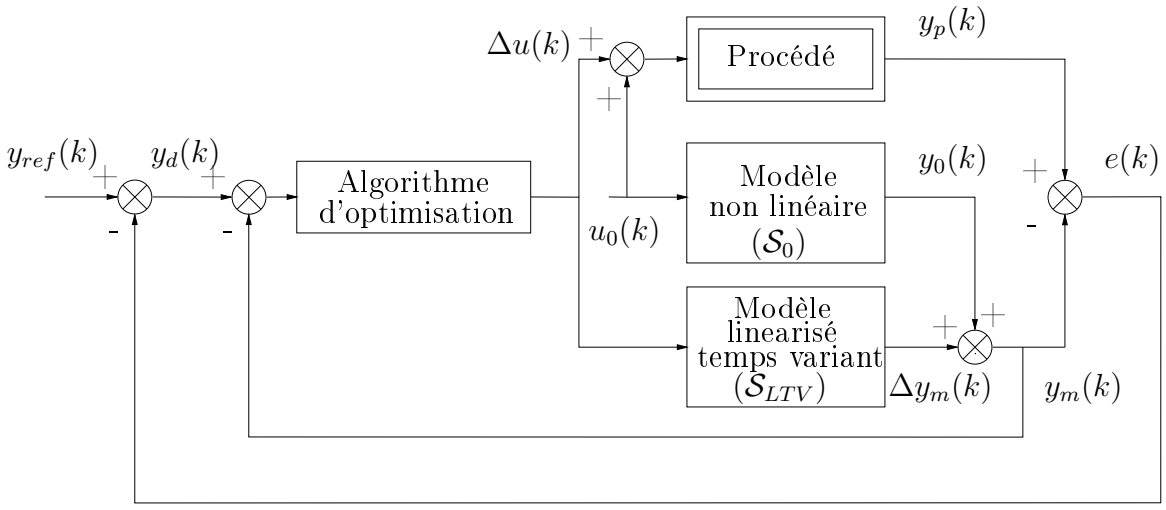


FIG. 2.3 – *Structure de commande prédictive avec linéarisation du modèle*

C'est une structure en boucle fermée dans le sens où la référence est suivie en tenant compte à chaque instant de l'erreur de prédiction et en cas d'erreur nulle, c'est un bouclage sur le modèle. Les avantages et les inconvénients de l'approche peuvent se résumer comme suit :

Avantage 3 *Le signal de commande u_0 étant choisi a priori, la résolution du modèle non linéaire ($\mathcal{S}_0$) peut se faire hors-ligne. Le problème initial de résolution en ligne du système non linéaire ($\mathcal{S}_{NL}$) est donc remplacé par un problème de résolution en ligne d'un système linéaire ($\mathcal{S}_{LTV}$) (cf. figure 2.2). Le temps de calcul en ligne s'en trouve donc diminué.*

Inconvénient 2 *Comme dans tout problème de linéarisation, le choix du fonctionnement nominal est posé. Dans un problème de régulation autour d'une position de référence, le choix se porte naturellement sur cette abscisse. Ce choix est cependant plus difficile dans le cas d'une poursuite de trajectoire temps variant et encore plus dans le cas où aucune trajectoire n'est spécifiée pour la sortie. Ce sera le cas dans les applications traitées.*
D'autre part, le domaine de validité d'une telle méthode n'est pas facilement quantifiable.

Cette modification du schéma de principe de la commande prédictive permet d'aboutir à la formulation finale du problème d'optimisation sous contraintes.

2.3.3 Problème final d'optimisation sous contraintes

A partir de la structure représentée figure 2.3, du critère d'optimisation relatif à l'exemple de poursuite de trajectoire (1.19) et du problème d'optimisation sous contraintes formulé sous la forme (1.13), le problème d'optimisation sous contraintes final s'écrit (dans le cas monovariable) :

$$\begin{cases} \min\limits_{\Delta\tilde{u}} J(\Delta\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_d(j) - (y_0(j) + \Delta y_m(j))]^2 \\ \Delta\tilde{u} = [\Delta u(k) \ ... \ \Delta u(k+N_c-1)]^T \\ c_i(\Delta u(j-1),\, \Delta y_m(j)) \leq 0 \qquad (i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}) \\ (\mathcal{S}_{LTV}) \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial t} = \dfrac{\partial F_d}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x \text{ sur } \Omega\times]0,\ +\infty[\\ \frac{\partial F_b}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x + \frac{\partial F_b}{\partial u}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\ +\infty[\\ \Delta y_m = C\Delta x \text{ sur } \overline{\Omega}\times]0,\ +\infty[\\ \Delta x(z,0) = 0 \text{ avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \end{cases} \tag{2.10}$$

La résolution de ce problème suppose donc la résolution, en ligne, du système $(\mathcal{S}_{LTV})$. Il se pose donc, naturellement, le problème d'existence de solution à ce système linéaire d'équations aux dérivées partielles temps variant ainsi que la méthodologie de sa résolution numérique.

2.4 Méthodes de résolution du modèle interne

Il s'agit là du problème de résolution du système d'équations aux dérivées partielles linéaire temps variant décrivant la variation du système par rapport à un comportement nominal. Les méthodes utilisées sont alors plus simples que celles utilisées dans la résolution du système non linéaire initial, en soulignant que pour ce dernier, dans cette approche, cela est mené hors-ligne.
En tout état de cause, à ce niveau, nous admettons l'hypothèse 5, c'est-à-dire l'existence de solution du triplet $(u_0,\, x_0,\, y_0)$.

2.4.1 Existence de solution au système linéaire temps variant

Pour la classe de systèmes $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ adoptée dans ce travail, le modèle de linéarisation (2.9) conduit à deux types de modèles linéaires temps variant. En une dimension spatiale z, cela donne :

$$(\mathcal{S}_{LTV1})\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial t} + \mathcal{A}(t)\Delta x = 0 \text{ sur } \Omega\times]0,\ +\infty[\\ \mathcal{B}(t)\Delta x + \overline{h}(z,t)\Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\ +\infty[\\ \Delta x(z,0) = 0 \text{ pour } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.11}$$

pour la classe de systèmes $(\mathcal{S}_1)$, où $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{B}(t)$ sont des opérateurs linéaires et où $\overline{h}$ est une matrice de fonction dépendant du triplet initial $(u_0,\ x_0,\ y_0)$.

De même, pour la classe de système $(\mathcal{S}_2)$, on obtient typiquement un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires ou linéaires :

$$(\mathcal{S}_{LTV2})\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial t} + \mathcal{A}(t)\Delta x + \overline{f}(z,t)\Delta x = 0 \text{ sur } \Omega\times]0,\ +\infty[\\ \mathcal{B}(t)\Delta x + \overline{h}(z,t)\Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\ +\infty[\\ \Delta x(z,0) = 0 \text{ pour } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.12}$$

Les hypothèses pour assurer l'existence et l'unicité de solution pour $(\mathcal{S}_{LTV1})$ et $(\mathcal{S}_{LTV2})$ sont :

- pour $(\mathcal{S}_{LTV1})$:

  Hypothèse 6 *[32] $\mathcal{A}(t)$ avec $t \in]0,T]$, $T > 0$ est générateur d'un semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert X et $\mathcal{B}(t)$ est un opérateur borné.*

  Hypothèse 7 *[49] $\overline{h}$ est de classe C^1 par rapport aux deux arguments z et t, et $\Delta u \in L^2(0,T)$.*

- pour $(\mathcal{S}_{LTV2})$:

  Hypothèse 8 *[42, 50] $\mathcal{A}(t)$ est un opérateur différentiel elliptique du second ordre défini par :*

  $$\mathcal{A}(t)\Delta x = -\frac{\partial}{\partial z}(a(z)\frac{\partial \Delta x}{\partial z}) + a_o(z)\Delta x \tag{2.13}$$

  où $a \in L^2(\overline{\Omega})$ et $a_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Hypothèse 9 *[42, 50]* $\overline{f}$ *et* $\overline{h}$ *sont de classe* C^1 *par rapport aux deux arguments* z *et* t*, monotones globalement lipschitziennes et* $\Delta u \in L^p(0,T)$, $p \geq 1$.

L'hypothèse la moins facile à vérifier dans les cas traités est l'hypothèse 6 de contraction du semi-groupe. Cependant, il est à noter qu'elle est vérifiée pour tout système dissipatif stable en boucle ouverte [46].

2.4.2 Méthodes numériques de résolution du modèle interne

Finalement la résolution des modèles $(\mathcal{S}_{NL})$, $(\mathcal{S}_{LTV1})$ et $(\mathcal{S}_{LTV2})$ se fait par les méthodes les plus simples d'utilisation : les méthodes d'approximation de structure dont nous rappellons rapidement le principe. Ce choix s'effectue aux dépens de méthodes de type approximation de solutions (Galerkin, collocation, etc.) qui, même si elles peuvent être plus précises, sont plus lourdes de mise en œuvre.
Dans cette approche, le domaine Ω est discrétisé en une somme finie de domaines Ω_i disjoints. Dans le cas d'une seule variable d'espace z, chaque domaine Ω_i a pour longueur Δz_i.

Approximation de structure : différences finies

Dans chaque domaine Ω_i, les opérateurs gradient et laplacien peuvent par exemple être approchés à l'aide d'un schéma de discrétisation à l'ordre 2 par différences centrées à pas constants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}_{|z=z_i} = \dfrac{x(z_i+\Delta z_i,t) - x(z_i-\Delta z_i,t)}{2\Delta z_i} \\ \dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}_{|z=z_i} = \dfrac{x(z_i+\Delta z_i,t) - 2x(z_i,t) + x(z-\Delta z_i,t)}{\Delta z_i^2} \end{cases} \tag{2.14}$$

Beaucoup d'autres schémas sont possibles : d'ordre 1 avant, d'ordre 1 arrière, à pas variables, etc [47].

Avantage 4 *L'approche est simple d'utilisation.*

Inconvénient 3 *Le nombre de domaines* Ω_i *nécessaires pour une bonne approximation de la solution peut être parfois élevé. Cela dépend de la structure du modèle.*

Approximation mixte de structure : volumes finis

L'idée est, pour un domaine Ω_i, d'écrire les divers bilans (chimique, mécanique, thermique, etc) en tenant compte de la conservation des flux ϕ mis en jeu [31] :

$$\phi_{entrant} + \phi_{produit} = \phi_{sortant} + \phi_{accumulation} \tag{2.15}$$

Avantage 5 *Les conditions aux limites interviennent plus naturellement dans la résolution que dans la méthode des différences finies, par les bilans écrits aux volumes limites.*

Avantage 6 *Selon le type de non-linéarités rencontrées, le nombre de points nécessaires est nettement moins important que dans la méthode des différences finies.*

C'est l'une ou l'autre de ces deux méthodes qui est utilisée pour estimer le comportement du procédé pour le modèle.

2.5 Conclusion

La stratégie de commande prédictive utilisant un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles non linéaires a été présentée. Etant donné la problématique liée au temps de calcul dans l'aspect temps réel, nous avons modifié la structure de commande. Cela nous a amené à prendre en compte un modèle linéarisé autour d'un fonctionnement nominal en lieu du modèle initial non linéaire.

En outre, cette nouvelle structure a permis de définir le problème final d'optimisation sous contraintes à résoudre en ligne.

Pour la classe étudiée de systèmes à paramètres répartis, des conditions d'existence et d'unicité de solution ont été données pour le modèle de variation par rapport à un comportement nominal.

Enfin, les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles utilisées dans ce travail ont été vues.

Le problème qui se pose maintenant concerne la résolution du problème d'optimisation sous contraintes hors-ligne (pour la détermination du comportement nominal) et en ligne (pour la conduite en temps réel). Ce sont ces points qui font l'objet du chapitre suivant.

3

Optimisation sous contraintes

Sommaire

3.1 Introduction 37
3.2 Généralités sur les méthodes d'optimisation utilisées . . 38
3.2.1 Rappel des principes de base 38
3.3 Algorithmes utilisés 44
3.3.1 Nature des contraintes et formulation du problème pénalisé 44
3.3.2 Problème pénalisé hors-ligne final 47
3.3.3 Problème pénalisé en ligne final 48
3.3.4 Algorithme d'optimisation d'origine 49
3.3.5 Algorithme d'optimisation en ligne 50
3.3.6 Algorithme d'optimisation hors-ligne 53
3.4 Conclusion 54

3.1 Introduction

Dans les sections précédentes, nous avons décrit la traduction du problème de commande prédictive, dans la structure proposée, en un problème d'optimisation sous contraintes. En notant θ l'argument d'optimisation, en un instant fixé, les problèmes présentés se ramènent au suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{\theta} J(\theta) \\ c_i(\theta) \leq 0 \ (i \in \mathcal{I} = \{1, ..., n_{co}\}) \\ \theta \in \mathbb{R}^n \\ m(\theta) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $c_i(\theta)$ traduit les contraintes de tout type en dehors de la contrainte de résolution liée au modèle qui est traduite ici sous la forme de la fonction $m(\theta)$. Celle-ci décrit l'ensemble des points estimés par le modèle sur l'horizon d'optimisation.

On appellera domaine d'admissibilité, l'ensemble des points du système vérifiant les contraintes. On le note :

$$\mathcal{C} = \{\theta \mid m(\theta) = 0 \text{ et } c_i(\theta) \leq 0, \, i \in \mathcal{I}\} \tag{3.2}$$

Remarque 5 *Il est à noter que ce qui est appelé ici ensemble des points du système correspond en réalité aux trajectoires du système, mais évaluées à des instants et/ou coordonnées spatiales fixées. Cela inclut notamment les conditions initiales du modèle.*

Les hypothèses d'existence de solution au problème de commande adoptée auparavant se traduisent ici par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 10 *Le domaine d'admissibilité $\mathcal{C}$ est un ensemble à intérieur non vide.*

Il en découle que l'existence au problème d'optimisation (3.1) (qui est en dimension finie), est seulement liée à la continuité des fonctions c_i, m et J. En effet, du fait que $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé, le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} \min\limits_{\theta} J(\theta) \\ \theta \in \mathcal{K} = \{\theta \in \mathcal{C} \mid J(\theta) \leq M, \, M > 0\} \end{cases} \tag{3.3}$$

La compacité de $\mathcal{K}$ assure l'existence de solution par le théorème de Weierstrass [28].

Dans cette section, nous allons donc exposer les méthodes et algorithmes d'optimisation utilisés et les modifications nécessaires qu'il a fallu apporter pour tenir compte de la contrainte de temps réel par exemple. Les schémas algorithmiques d'optimisation en ligne (résolution temps réel) et hors-ligne (détermination de comportement nominal) de la commande prédictive utilisés dans les cas traités seront présentés.

3.2 Généralités sur les méthodes d'optimisation utilisées

Il est peut-être légitime d'objecter qu'actuellement existent, sous forme logicielle y compris, des méthodes de résolution, efficaces et robustes pour le problème du type (3.1). Mais il faut tout aussi remarquer que dans l'approche de commande prédictive, la résolution du problème (3.1) doit être effectuée plusieurs fois à un instant donné et change à chaque instant. Même si cela était intégrable dans un logiciel, les méthodes existantes sous cette forme s'adressent à des problèmes de types généraux, présentent une lourdeur certaine pour un cas particulier et surtout incluent difficilement le temps réel et l'intervention sur le déroulement des algorithmes.
Pour autant, les méthodes utilisées dans ce travail ne sont qu'une adaptation d'algorithmes généraux au contexte de la commande prédictive.

3.2.1 Rappel des principes de base

On distingue trois classes de méthodes dans la résolution de problème d'optimisation sous contraintes en dimension finie [28] :

- celles dites primales (ou directes) qui cherchent à construire un ensemble de points vérifiant toujours les contraintes en essayant d'optimiser la fonction coût,
- celles qui procèdent à une résolution indirecte en construisant un problème dual,
- les méthodes qui combinent les deux approches précédentes, appelées primales-duales.

En regard des types de contraintes rencontrées dans la commande de procédé, à voir :

- des seuils sur les variables de commande et leurs dérivées,

- des plages de fonctionnement pour des grandeurs du système (états ou sortie),

les méthodes qui ramènent le problème initial en un problème approché non contraint, nous semblent plus adaptées. Nous rappellerons donc :

- les méthodes de transformation (portant directement sur l'argument d'optimisation),
- les méthodes de pénalisation :
  - interne : pour des contraintes « dures » initialisables,
  - externe : pour des contraintes souples quelconques.

Méthode de transformation de variable

C'est la méthode la plus simple pour se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte. En effet, soit $\theta \in \mathbb{R}^n$, les variables soumises aux seules contraintes sur leur amplitude :

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \tag{3.4}$$

alors, s'il existe une transformation f faisant intervenir de nouvelles variables non contraintes p :

$$\begin{cases} \theta = f(p) \\ p \in R^n \end{cases} \tag{3.5}$$

on aboutit à un problème d'optimisation sans contraintes sur p :

$$\begin{cases} \min\limits_{p} J(f(p)) \\ p \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.6}$$

Le problème se ramène ainsi au choix d'une fonction de transformation.
Par exemple :

- $$\theta = f(p) = \theta_{\min} + (\theta_{\max} - \theta_{\min}) sin^2(p) \tag{3.7}$$

présente l'avantage d'être une fonction simple mais non univoque du fait de la périodicité en p : plusieurs optima locaux en p peuvent conduire à la même variable θ.

- $$\theta = f(p) = \frac{1}{2}(\theta_{\max} + \theta_{\min}) + \frac{1}{2}(\theta_{\max} - \theta_{\min}) \tanh(p) \tag{3.8}$$

  présente l'avantage d'être univoque, utilisable pour des contraintes, mais la sensibilité devient faible aux limites.

Méthode des pénalités

Ce sont des méthodes simples et relativement efficaces en pratique. Le principe est de remplacer le problème primal par un problème pénalisé. A partir du problème (3.1), on définit une fonction de pénalité à valeurs positives H liée aux contraintes. Elle est alors ajoutée, par pondération d'un coefficient de pénalité positif w, au critère de performance J, ce qui permet de définir la nouvelle fonction coût J_{tot} à minimiser. Le nouveau problème non contraint, mais pénalisé est :

$$\begin{cases} \min\limits_{\theta} J_{tot}(\theta) = J(\theta) + w\ H(c_i(\theta)) \\ \theta \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.9}$$

Le principe est alors de rechercher la solution à ce problème d'optimisation pénalisé et de faire évoluer le poids w pour que la quantité $w\ H(c_i(\theta))$ soit suffisamment prise en compte au cours de la résolution du problème.
Selon les contraintes et la possibilité d'initialisation du problème, la méthode des pénalités internes, externes ou la combinaison des deux peut être adoptée. Ce sont ces méthodes qui sont maintenant plus détaillées dans ce domaine.

- ***Méthodes des pénalités internes***

  Le principe est d'approcher la solution par l'intérieur du domaine des contraintes. Cela suppose donc qu'à l'initialisation, ces contraintes sont vérifiées.
  Parmi les contraintes, soient c_i ($i \in \mathcal{I}_{int} = \{1, ..., n_{co.int}\}$), celles qui seront traitées par la méthode de pénalités internes.
  La fonction de pénalité interne h_i, associée à chaque contrainte c_i, peut être définie par une fonction barrière, comme par exemple la fonction inverse représentée ci-dessous :

$$h_i(c_i(\theta)) = -\frac{1}{c_i(\theta)} \tag{3.10}$$

représentée ci-dessous :

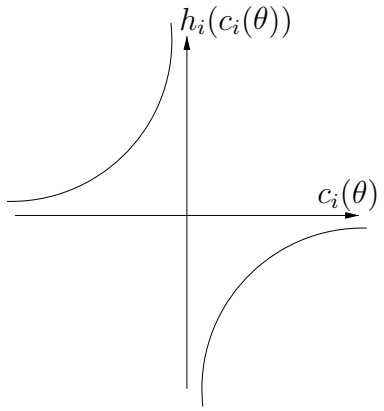


FIG. 3.1 – *Exemple de fonction barrière*

De la sorte, quand la contrainte approche les limites par l'intérieur, la fonction de pénalité interne h_i augmente et pénalise la minimisation du critère de performance. La fonction de pénalité H associée à l'ensemble des contraintes peut s'écrire dans ce cadre :

$$H(c_i(\theta)) = \sum_{i=1}^{i=n_{co.int}} h_i(c_i(\theta)) = -\sum_{i=1}^{i=n_{co.int}} \frac{1}{c_i(\theta)} \tag{3.11}$$

Cette méthode a l'avantage de contraindre les arguments du critère à rester à l'intérieur du domaine admissible. Toutefois, elle présente des inconvénients d'ordre numérique, notamment aux frontières du domaine des contraintes. Par ailleurs, associée à un algorithme d'optimisation sans contrainte sans précaution particulière, un point de recherche courant extérieur peut ne plus franchir la barrière [8].

Finalement, ce type de pénalisation de la fonction coût intervient comme montré sur la figure 3.2 ($\mathcal{C}_{int}$ étant l'espace où toutes les contraintes traitées par cette méthode sont vérifiées) :

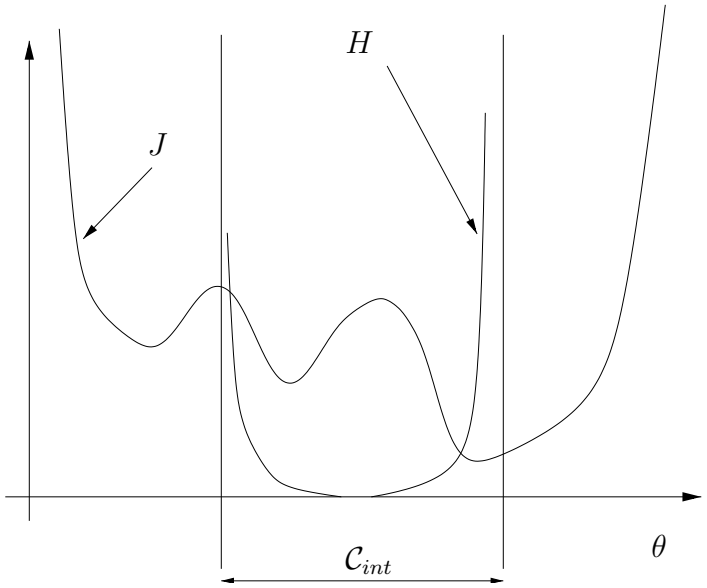


FIG. 3.2 – *Fonction de pénalité interne*

Pour ce qui est du test d'arrêt dans l'algorithme, si $w\ H(c_i(\theta))$ est suffisamment faible, alors θ est une bonne approximation de la solution recherchée θ^* et le calcul s'interrompt [28].
L'évolution du poids w se fait selon les règles suivantes :

- il augmente quand les contraintes tendent à être de plus en plus vérifiées (c'est-à-dire quand $w\ H(c_i(\theta)) \to 0$),

- il diminue quand les contraintes tendent à ne plus être vérifiées (c'est-à-dire quand $w\ H(c_i(\theta)) \to +\infty$)

– ***Méthode de pénalités externes***

Le principe est d'approcher la solution par l'extérieur du domaine admissible. Le problème d'initialisation est moins crucial que dans la méthode précédente, par contre on n'assure plus la vérification des contraintes à chaque itération.

Parmi les contraintes, soient c_i (avec $i \in \mathcal{I}_{ext} = \{1, ..., n_{co.ext}\}$), celles traitées par la méthodes de pénalités externes.
La fonction de pénalité externe h_i, associée à chaque contrainte c_i, doit avoir les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} h_i(c_i(\theta)) = 0 \text{ si } c_i(\theta) \leq 0 \\ h_i(c_i(\theta)) > 0 \text{ si } c_i(\theta) > 0 \\ h_i \text{ de classe minimum } C^1 \end{cases} \tag{3.12}$$

Exemple :

$$h_i(c_i(\theta)) = \overset{2}{\max}(0,c_i(\theta)) \tag{3.13}$$

représentée ci-dessous :

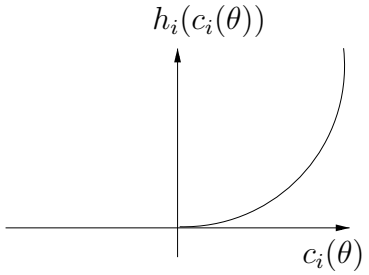


FIG. 3.3 – *Exemple de fonction de pénalité externe*

Ainsi, plus le point courant est loin du domaine admissible, plus la fonction de pénalité associée h_i augmente et pénalise la minimisation du critère de performance.
La fonction de pénalité externe H associée à l'ensemble des contraintes pourra s'écrire en utilisant la forme (3.13) :

$$H(c_i(\theta)) = \sum_{i=1}^{i=n_{co.ext}} h_i(c_i(\theta)) = \sum_{i=1}^{i=n_{co.ext}} \overset{2}{\max}(0,c_i(\theta)) \tag{3.14}$$

Comme pour le cas précédent, en notant $\mathcal{C}_{ext}$ l'espace des contraintes traitées par cette méthode, on peut schématiser la pénalisation de la fonction coût comme suit :

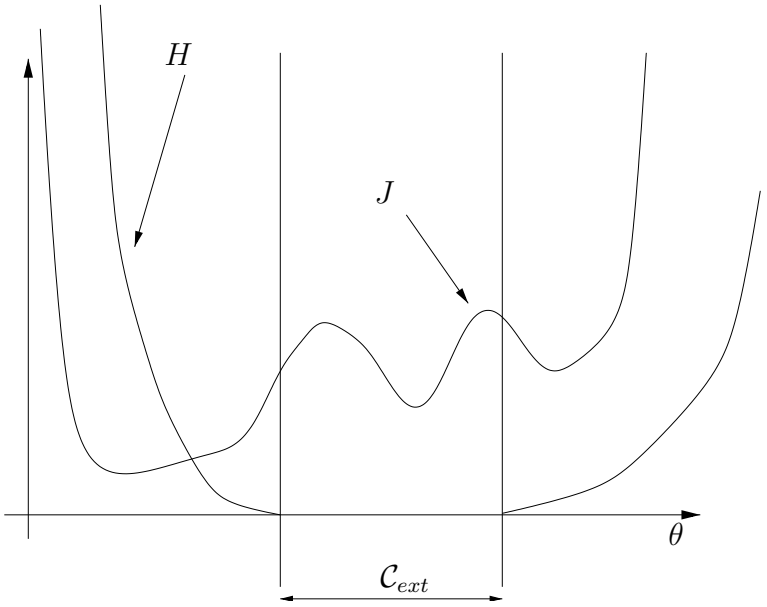


FIG. 3.4 – *Fonction de pénalité externe*

Pour ce qui est du test d'arrêt dans l'algorithme, si $H(c_i(\theta))$ est suffisamment faible, alors θ est une bonne approximation de la solution recherchée θ^* [28]. . L'évolution du poids w se fait selon les règles suivantes :

- il augmente quand les contraintes ne sont pas vérifiées (c'est-à-dire quand $H(c_i(\theta)) \rightarrow +\infty$).

Pour finir cette section, on peut indiquer que dans la suite, nous allons utiliser une combinaison des deux méthodes présentées pour diminuer au maximum les difficultés de résolution et accroître la rapidité de la structure de commande. C'est l'objet de ce qui suit.

3.3 Algorithmes utilisés

3.3.1 Nature des contraintes et formulation du problème pénalisé

Dans cette partie, nous allons donner une forme plus explicite des contraintes traitées à travers les exemples de la partie application. Cette forme générale sera plus et détaillée pour chaque cas dans la partie concernant la mise en œuvre.

Contraintes sur les commandes et transformation

Rappelons que dans le cadre de la stratégie de commande prédictive, l'algorithme doit être capable, à chaque sortie d'algorithme, de fournir des commandes situées dans le domaine des contraintes. Ainsi, les contraintes d'amplitude et de vitesse doivent être vérifiées à chaque itération et sur tout l'horizon de prédiction. La méthode de transformation paraît donc très adaptée à ce cas.

Les contraintes sur les commandes les plus courantes portent :

- sur leur amplitude :

$$u_{\min} \leq u(j-1) \leq u_{\max} \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{3.15}$$

- sur leur vitesse :

$$\Delta u_{\min} \leq \frac{u(j-1) - u(j-2)}{T_e} \leq \Delta u_{\max} \qquad (j \in \mathcal{J}) \tag{3.16}$$

Remarque 6 *D'éventuelles contraintes portant sur leur accélération peuvent être prises en compte de la même façon.*

A partir des doubles inégalités (3.15) et (3.16), quatre contraintes c_i peuvent être formulées pour chaque commande ($u \in \mathbb{R}^m$) :

$$\begin{cases} u_{\min} - u(j-1) \leq 0 \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ u(j-1) - u_{\max} \leq 0 \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ T_e \Delta u_{\min} - (u(j-1) - u(j-2)) \leq 0 \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ (u(j-1) - u(j-2)) - T_e \Delta u_{\max} \leq 0 \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{cases} \tag{3.17}$$

En utilisant la transformation hyperbolique (3.8), on aboutit :

- soit pour l'amplitude de la commande :

$$\begin{cases} u(j-1) = f(p(j-1)) = f_{\text{moy}} + f_{\text{amp}} \ \tanh[\frac{p(j-1) - f_{\text{moy}}}{f_{\text{amp}}}] \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ p(j-1) \in \mathbb{R}^{mN_c} \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{cases} \tag{3.18}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\text{moy}} = \frac{u_{\max}+u_{\min}}{2} \\ f_{\text{amp}} = \frac{u_{\max}-u_{\min}}{2} \end{array} \right. \tag{3.19}$$

- soit pour la vitesse de la commande :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(j-1) = f(p(j-1)) = f_{\text{moy}} + f_{\text{amp}} \ \tanh[\frac{p(j-1)-f_{\text{moy}}}{f_{\text{amp}}}] \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ p(j-1) \in \mathbb{R}^{mN_c} \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{array} \right. \tag{3.20}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\text{moy}} = u(j-2) + \frac{T_e(\Delta u_{\max}+\Delta u_{\min})}{2} \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\text{amp}} = \frac{T_e(\Delta u_{\max}-\Delta u_{\min})}{2} \end{array} \right. \tag{3.21}$$

- soit, en combinant ces deux fonctions, pour le vecteur courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(j-1) = f(p(j-1)) = f_{\text{moy}} + f_{\text{amp}} \ \tanh[\frac{p(j-1)-f_{\text{moy}}}{f_{\text{amp}}}] \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ p(j-1) \in \mathbb{R}^{mN_c} \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{array} \right. \tag{3.22}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\text{moy}} = \frac{f_{\max}+f_{\min}}{2} \\ f_{\text{amp}} = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{2} \\ f_{\min} = \max(u_{\min},\, u(j-2) + T_e\Delta u_{\min}) \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\max} = \min(u_{\max},\, u(j-2) + T_e\Delta u_{\max}) \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{array} \right. \tag{3.23}$$

que l'on représente sur la figure 3.5 :

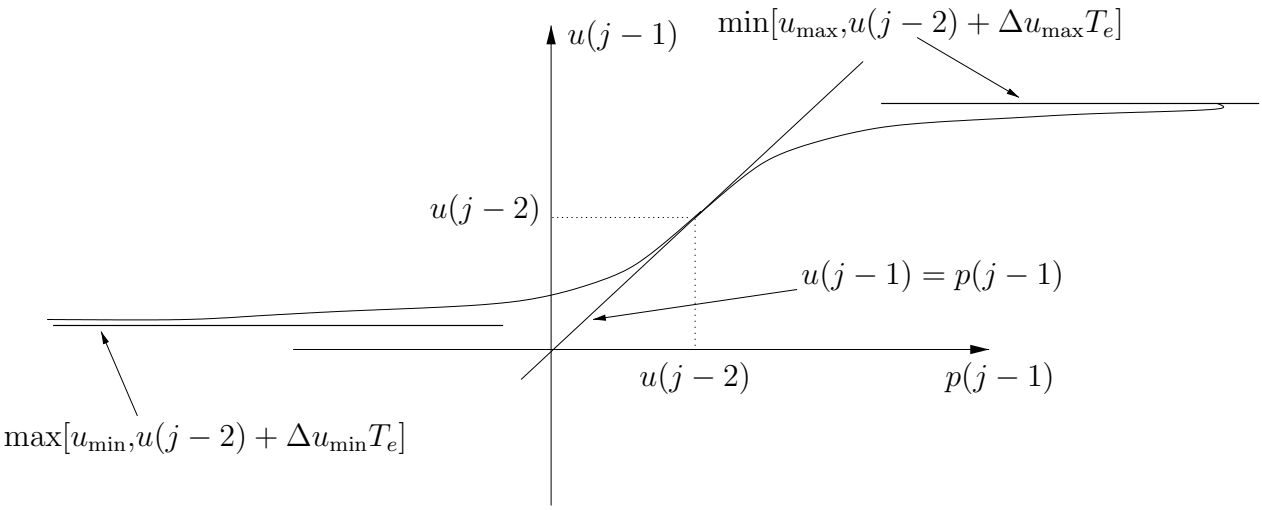


FIG. 3.5 – *Loi de transformation hyperbolique*

Contraintes sur les grandeurs variables du système

En ce qui concerne la prise en compte des contraintes sur les grandeurs autre que la commande (notamment les grandeurs de sortie), l'aspect dynamique du modèle fait qu'elles sont difficilement initialisables à l'intérieur du domaine $\mathcal{C}$. D'autre part, elles sont caractéristiques des objectifs à atteindre. La méthode la plus adaptée est donc la méthode des pénalités externes.
Les contraintes c_i du problème conduisent alors à la pénalisation :

$$H(c_i(u(j-1),\, y(j))) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \sum_{i=1}^{n_{co.ext}} \max^2[0,\, c_i(u(j-1),\, y(j))] \;(j \in \mathcal{J}) \qquad (3.24)$$

Les transformations précédentes sont maintenant utilisées pour formuler la détermination du comportement nominal (optimisation hors-ligne), puis de la commande prédictive en ligne par variation.

3.3.2 Problème pénalisé hors-ligne final

Pour le problème d'optimisation hors-ligne, il suffit de considérer le triplet d'inconnues $(u_0,\, x_0,\, y_0)$.

Ceci donne pour l'amplitude des commandes :

$$\begin{cases} u_0(j-1) = f_0(p_0(j-1)) = u_{\text{moy}} + u_{\text{amp}}\ \tanh[\frac{p_0(j-1)-u_{\text{moy}}}{u_{\text{amp}}}] \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ p_0(j-1) \in \mathbb{R}^{mN_c} \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{cases} \qquad (3.25)$$

avec :

$$\begin{cases} u_{\text{moy}} = \frac{u_{\max}+u_{\min}}{2} \\ u_{\text{amp}} = \frac{u_{\max}-u_{\min}}{2} \end{cases} \tag{3.26}$$

Pour les contraintes autres que sur l'amplitude des commandes :

$$H(c_i(\tilde{p})) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \sum_{i=1}^{n_{co}-2} \overset{m}{\max}{}^2[0,\, c_i(u_0(j-1),\, y_0(j))\ (j \in \mathcal{J}) \tag{3.27}$$

Finalement, (3.26) et (3.27) permettent de définir le problème d'optimisation pénalisé hors-ligne final :

$$(P_{p.h.l}) \begin{cases} \min\limits_{\tilde{p}}\ J_{tot}(\tilde{p}) = J(\tilde{p}) + w\ H(c_i(\tilde{p})) \\ \tilde{p} \in \mathbb{R}^{mN_c} \\ (\mathcal{S}_{NL}) \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = F_d(x) \text{ sur } \Omega\times]0,+\infty[\\ F_b(x,u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,+\infty[\\ y_m = Cx \text{ sur } \overline{\Omega}\times]0,+\infty[\\ x(z,0) = x_i(z) \text{ avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \end{cases} \tag{3.28}$$

avec la séquence des commandes du système $(\mathcal{S}_{NL})$:

$$\tilde{u} = f_0(\tilde{p}) = [u(k)\ ...\ u(k+N_c-1)]^T \tag{3.29}$$

3.3.3 Problème pénalisé en ligne final

Pour le problème d'optimisation en ligne, qui concerne les variations, pour l'amplitude et la vitesse des commandes on aboutit à :

$$\begin{cases} \Delta p(j-1) = p(j-1) - p_0(j-1) \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ \Delta u(j-1) = f(p_0(j-1) + \Delta p) - f(p_0(j-1)) \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f(.) = f_{\text{moy}} + f_{\text{amp}} \tanh(\frac{\cdot - f_{\text{moy}}}{f_{\text{amp}}}) \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\text{moy}} = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{2} \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\text{amp}} = \frac{f_{\max}+f_{\min}}{2} \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\min} = \max(u_{\min},\, u(j-2) + T_e\Delta u_{\min}) \qquad (j \in \mathcal{J}) \\ f_{\max} = \min(u_{\max},\, u(j-2) + T_e\Delta u_{\max}) \qquad (j \in \mathcal{J}) \end{cases} \tag{3.30}$$

Pour les contraintes portant sur les autres grandeurs, par la pénalisation externe :

$$H(c_i(\Delta\tilde{p})) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \sum_{i=1}^{n_{co}-4} \sum_{m}^{m} \max^2[0,\, c_i(\Delta u(j-1),\, \Delta y_m)\ (j \in \mathcal{J}) \tag{3.31}$$

Finalement, (3.30) et (3.31) permettent de définir le problème d'optimisation pénalisé en ligne final :

$$(P_{p.e.l}) \begin{cases} \min\limits_{\Delta\tilde{p}}\ J_{tot}(\Delta\tilde{p}) = J(\Delta\tilde{p}) + w\ H(c_i(\Delta\tilde{p})) \\ \Delta\tilde{p} \in \mathbb{R}^{mN_c} \\ (\mathcal{S}_{LTV}) \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial t} = \dfrac{\partial F_d}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x \text{ sur } \Omega\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial F_b}{\partial x}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta x + \frac{\partial F_b}{\partial u}_{|(u_0,\ x_0,\ y_0)} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,+\infty[\\ \Delta y_m = C\Delta x \text{ sur } \overline{\Omega}\times]0,+\infty[\\ \Delta x(z,0) = 0 \text{ avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \end{cases} \tag{3.32}$$

avec la séquence des commandes du système $(\mathcal{S}_{LTV})$:

$$\Delta\tilde{u} = f(\Delta\tilde{p}) = [\Delta u(k)\ ...\ \Delta u(k+N_c-1)]^T \tag{3.33}$$

3.3.4 Algorithme d'optimisation d'origine

Les problèmes pénalisés $(P_{p.h.l})$ et $(P_{p.e.l})$ peuvent être dès lors résolus par n'importe quel algorithme d'optimisation sans contrainte. Nous utiliserons et adapterons l'algorithme de Levenberg-Marquardt reconnu par plusieurs auteurs [17] pour son efficacité. La loi de variation du paramètre p à chaque itération est donnée par :

$$\begin{cases} p^{i+1} = p^i + \Delta p^i \\ (\bigtriangledown^2 J^i_{tot} + \lambda I)\Delta p^i = -\bigtriangledown J^i_{tot} \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\bigtriangledown J^i_{tot}$ et $\bigtriangledown^2 J^i_{tot}$ sont les gradients et les hessiens du critère total par rapport aux paramètres actuels p^i de l'itération i.
Dans son principe de base, l'algorithme correspondant est donné page suivante.

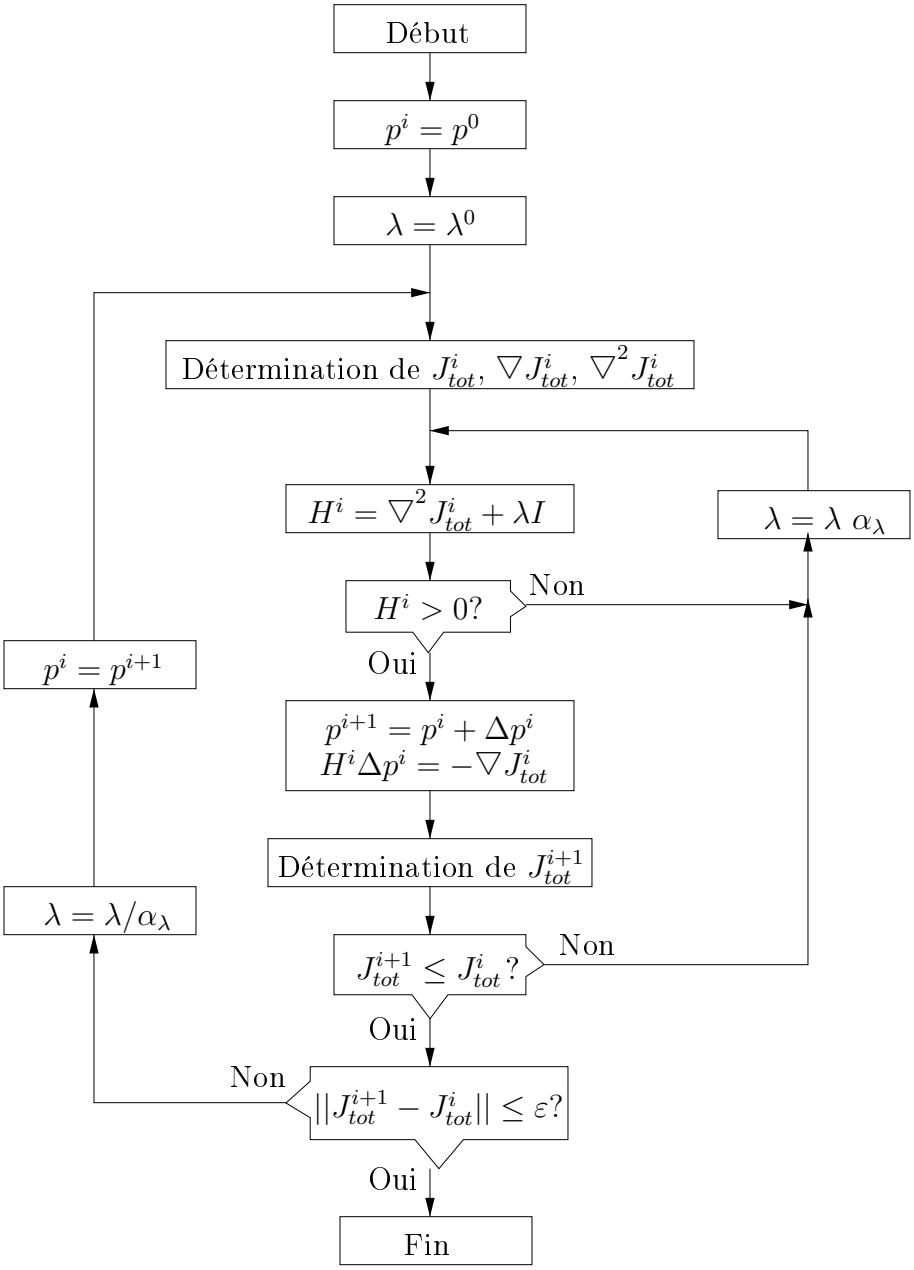


FIG. 3.6 – *Algorithme de Levenberg Marquardt,* $(\alpha_\lambda) > 1$

Les modifications nécessaires à cet algorithme pour les problématiques en ligne et hors-ligne sont les suivantes.

3.3.5 Algorithme d'optimisation en ligne

Dans ce cas, les adaptations nécessaires à cet algorithme concernent la prise en compte :

- du temps réel k,

- de la limitation du temps de calcul,

- de la méthode de pénalité externe. En effet, par cette méthode, nous avons vu qu'il peut y avoir au moins une des contraintes faiblement non vérifiée sur l'horizon de prédiction, à la fin des calculs, à chaque instant k. A partir du test d'arrêt donné pour cette méthode et afin de tenir compte des calculs qui se font sur l'horizon de prédiction, on reformule le test d'arrêt de la façon suivante.

$$\max(c_i(\Delta u(j-1),\, \Delta y_m(j)) \leq \varepsilon \qquad (i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}) \tag{3.35}$$

  Ceci permet d'affirmer (si la sortie de l'algorithme n'est pas due à la limitation du temps de calcul) que toutes les contraintes sont vérifiées à ε près sur l'horizon de prédiction.

Finalement, l'algorithme d'optimisation utilisé est représenté à la page suivante. Les problèmes rencontrés liés à la mise en œuvre de cet algorithme sont les suivants :

- l'initialisation de la structure itérative,

- le choix des différents pas α_w (> 1), α_λ (> 1) et α_{T_e} (< 1) qui influencent le déplacement de paramètres, le nombre d'itérations et la précision des résultats,

- le choix des bornes ε dans les différents tests d'arrêt qui influent sur la précision des solutions.

Remarque 7 *Le choix de chacun de ces paramètres se fait en simulation et pour chaque problème posé.*

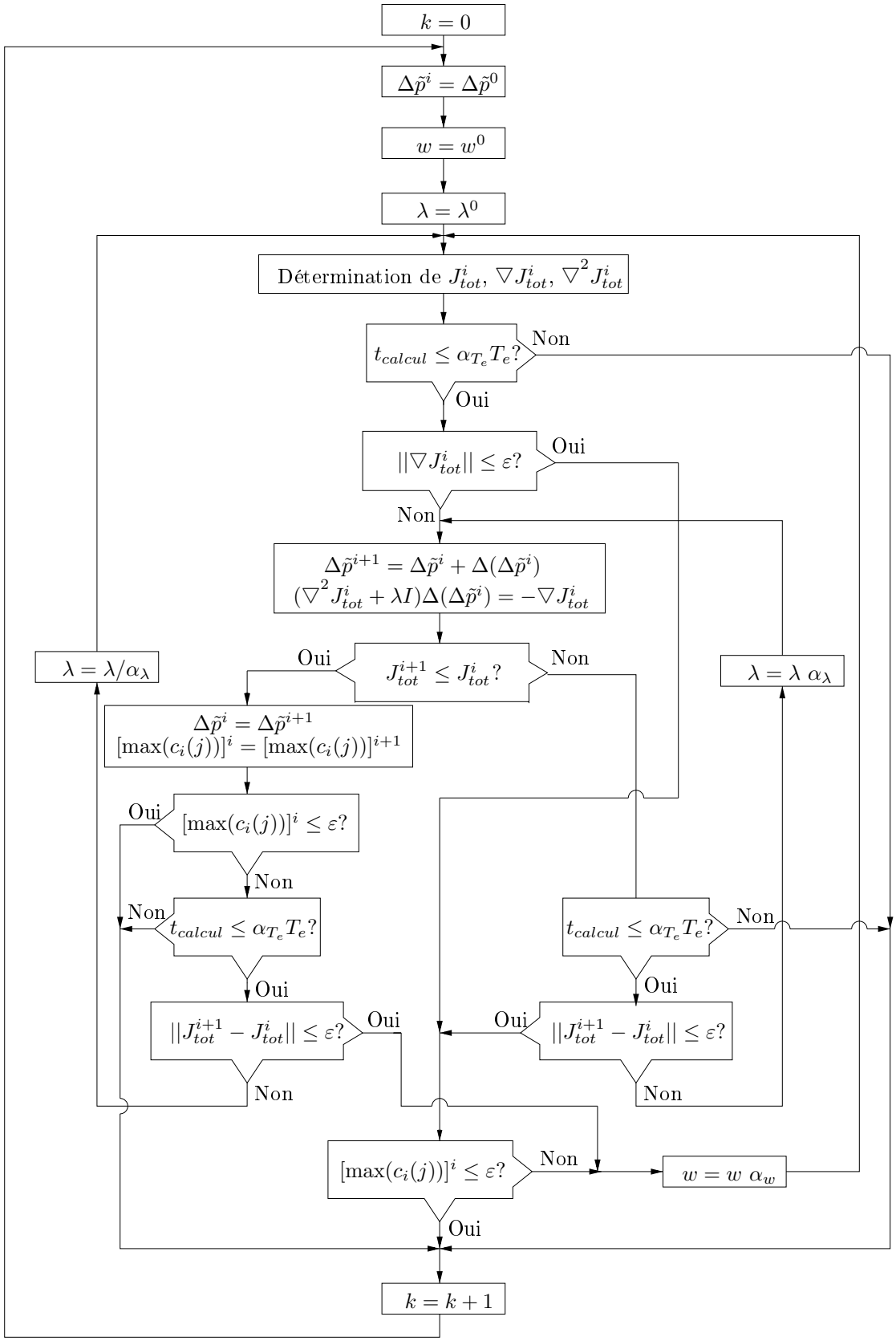


FIG. 3.7 – *Algorithme d'optimisation en ligne*

3.3.6 Algorithme d'optimisation hors-ligne

Dans l'algorithme précédent, la limitation du temps de calcul était à prendre en compte dans la résolution. Dans le cadre actuel d'un problème d'optimisation sous contraintes posés hors-ligne, ce problème n'existe plus. Cela conduit à l'algorithme d'optimisation :

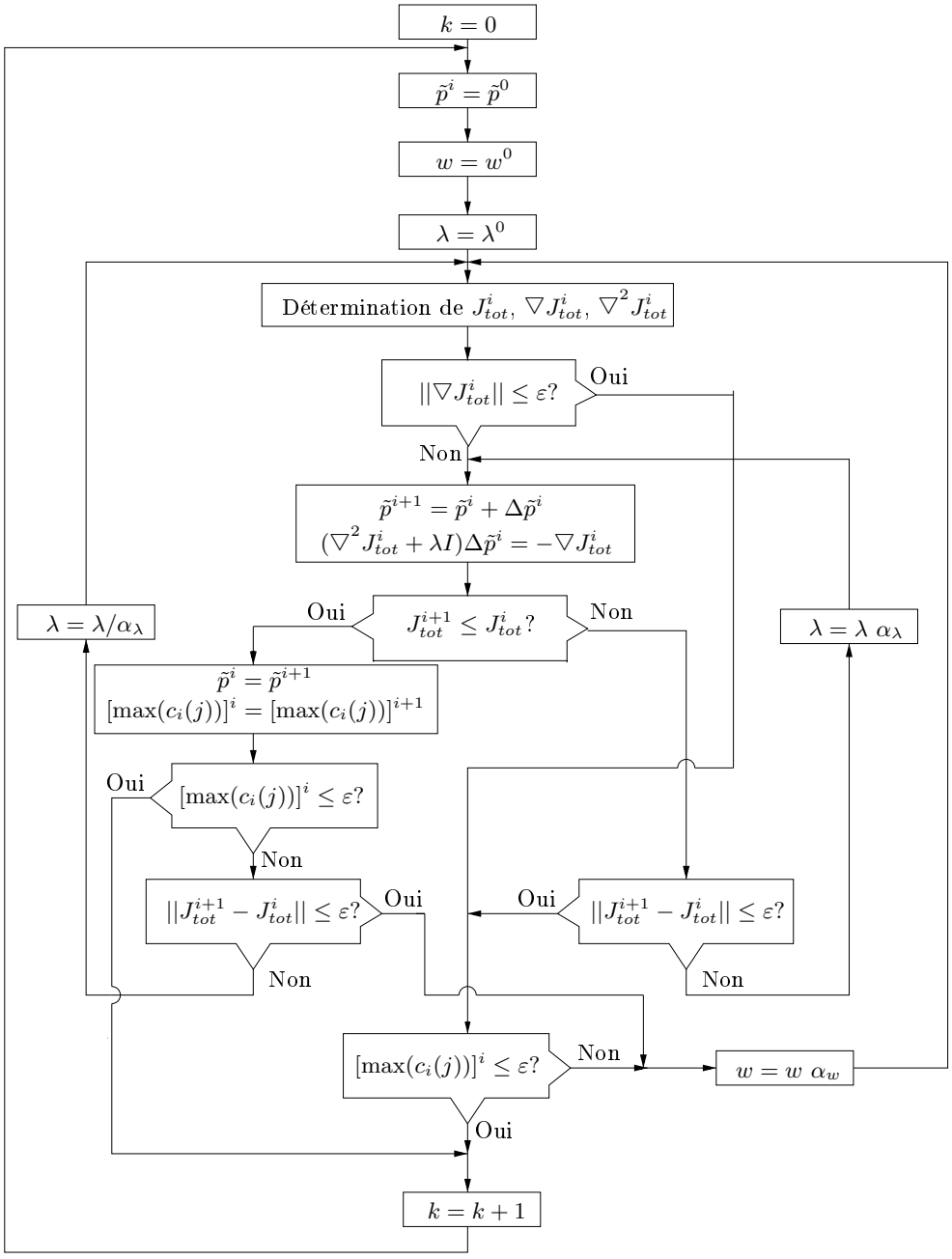


FIG. 3.8 – *Algorithme d'optimisation hors-ligne*

3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les outils concernant la prise en compte des contraintes dans la résolution du problème d'optimisation. Ceux ci font appel à une méthode de transformation hyperbolique pour les contraintes dures (celles portant uniquement que sur les commandes) et à la méthode des pénalités externes pour les autres (celles portant sur les grandeurs de sortie en autre). Ceci a permis d'aboutir, pour les problèmatiques posées en ligne et hors-ligne, aux algorithmes présentés qui dérivent de l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

Le chapitre suivant permet de voir les problèmes et solutions proposés pour la mise en œuvre effective de ces algorithmes.

4

Mise en œuvre

Sommaire

4.1 Introduction 57
4.2 Prise en compte des contraintes 57
4.2.1 Quelques significations physiques des contraintes 57
4.2.2 Normalisation des contraintes 58
4.2.3 Utilisation de la méthode des pénalités externes 59
4.3 Les sensibilités 60
4.3.1 Etude de faisabilité 60
4.3.2 Calcul du hessien 60
4.3.3 Calcul des sensibilités 61
4.4 Conclusion 63

4.1 Introduction

Avant de présenter les résultats de simulation et d'expérimentation, il est tout d'abord nécessaire de voir les autres points importants concernant la mise en œuvre pratique. Cela concerne la formulation pratique des contraintes à partir de leur formulation initiale, la prise en compte pratique du test d'arrêt issu de la méthode des pénalités externes, ainsi que le calcul des sensibilités du critère, donc du modèle, par rapport aux commandes sur un horizon futur. Cela est nécessaire au calcul du déplacement à l'instant courant dans la procédure de résolution itérative.

4.2 Prise en compte des contraintes

4.2.1 Quelques significations physiques des contraintes

Les actionneurs et les sorties du procédé sont soumis à différents types de contraintes :

- les actionneurs permettant d'appliquer les commandes peuvent être limités en amplitude :
  exemple 1 :

  la puissance de chauffe doit être comprise entre $u_{\min}$ et $u_{\max}$:

  $$2\ KW \leq P_{chauffe} \leq 30\ KW \tag{4.1}$$

- les actionneurs peuvent également être limités dynamiquement :
  exemple 2 :

  la variation de concentration d'alimentation varie entre $\Delta u_{\min}$ et $\Delta u_{\max}$:

  $$-3\ mol.l^{-1}.s^{-1} \leq \Delta C_{alim} \leq\ 3\ mol.l^{-1}.s^{-1} \tag{4.2}$$

- si les deux premiers types de contraintes sont communs à la majorité des problèmes (des contraintes d'accélération sont également possibles), celles qui suivent sont spécifiques à chaque procédé :
  exemple 3 :

  pour raison de sécurité, la température au sein d'un four doit être inférieure à un maximum :

  $$T \leq\ 500^o C \tag{4.3}$$

exemple 4 :

pour des raisons d'homogénéité du produit à commercialiser, la densité en fin de fabrication doit rester dans une certaine plage :

$$49\ kg.m^{-3} \leq C \leq 51\ kg.m^{-3} \tag{4.4}$$

On peut constater que ces contraintes sont d'ordres de grandeur quelconques : il convient donc d'effectuer une normalisation pour que toutes les contraintes aient le même poids dans la formulation du problème.

4.2.2 Normalisation des contraintes

Les contraintes que l'on vient de présenter s'écrivent sous la forme plus générale :

$$f_{i.\min}(j) \leq f_i(u(j-1),\, y(j)) \leq\ f_{i.\max}(j) \quad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.5}$$

Remarque 8 *Le raisonnement qui suit est le même dans les problèmes d'optimisation hors-ligne et en ligne. La différence se situe seulement au niveau de la formulation des contraintes f_i :*

- *pour l'optimisation en ligne :*

$$f_i(u(j-1),\, y(j)) = f_i(\Delta u(j-1),\, \Delta y_m(j)) \qquad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.6}$$

- *pour l'optimisation hors-ligne :*

$$f_i(u(j-1),\, y(j)) = f_i(u(j-1),\, y_m(j)) \qquad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.7}$$

Dans ce qui suit, on considère donc le cas général où les contraintes s'expriment sous la forme (4.5). Les arguments u et y se déclinent alors sous la forme $(\Delta u(j-1),\, \Delta y_m(j))$ ou $(u(j-1),\, y_m(j)))$ suivant que l'on se trouve en optimisation en ligne ou hors-ligne.

La double inégalité (4.5) peut se réécrire sous la forme normalisée :

$$0 \leq \frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f_{i.\min}(j)}{f_{i.\max}(j) - f_{i.\min}(j)} \leq 1 \quad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.8}$$

Dans le cadre de l'utilisation de la méthode de pénalité externe, ceci permet de définir, pour chaque double inégalité, deux contraintes c_i $(i \in \mathcal{I})$:

$$\begin{cases} -\frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f_{i.\min}(j)}{f_{i.\max}(j) - f_{i.\min}(j)} \leq 0 \quad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \\ \frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f_{i.\min}(j)}{f_{i.\max}(j) - f_{i.\min}(j)} - 1 \leq 0 \quad (i \in \mathcal{I}',\, j \in \mathcal{J}) \end{cases} \tag{4.9}$$

qui s'écrivent sous la forme :

$$c_i(u(j-1),\, y(j)) \leq 0 \quad (i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.10}$$

Ceci signifie que si une contrainte c_i tend à être saturée sur l'horizon de prédiction, $c_i(u(j-1),\, y(j))$ tend vers zéro.

4.2.3 Utilisation de la méthode des pénalités externes

L'utilisation de la méthode de pénalités externes nous a amenés à intégrer, dans l'algorithme d'optimisation, un test de la forme suivante :

$$\max[c_i(u(j-1),\, y(j))] \leq \varepsilon \quad (i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}) \tag{4.11}$$

Quand $\max[c_i(u(j-1),\, y(j))] = \varepsilon$, cela garantit que la contrainte la moins vérifiée sur l'horizon de prédiction l'est à ε près au delà de sa limite. Il serait donc intéressant que cela coïncide avec la saturation réelle de cette contrainte sur l'horizon de prédiction : la limite de fonctionnement serait donc réellement atteinte.

Tout ceci revient alors à définir, à partir des bornes de chacune des contraintes $f_{i.\,\min}(j)$ et $f_{i.\,\max}(j)$ issues du cahier des charges, les nouvelles bornes $f^{algo}_{i.\,\min}(j)$ et $f^{algo}_{i.\,\max}(j)$ que l'on utilisera dans l'algorithme. Ces nouvelles bornes sont identifiées à partir de la saturation des contraintes issues du cahier des charges :

$$\begin{cases} -\frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f_{i.\,\min}(j)}{f_{i.\,\max}(j) - f_{i.\,\min}(j)} = 0 \\ \frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f_{i.\,\min}(j)}{f_{i.\,\max}(j) - f_{i.\,\min}(j)} - 1 = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

devant correspondre à la limite de vérification du test (4.11) :

$$\begin{cases} -\frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f^{algo}_{i.\,\min}(j)}{f^{algo}_{i.\,\max}(j) - f^{algo}_{i.\,\min}(j)} = \varepsilon \\ \frac{f_i(u(j-1),\, y(j)) - f^{algo}_{i.\,\min}(j)}{f^{algo}_{i.\,\max}(j) - f^{algo}_{i.\,\min}(j)} - 1 = \varepsilon \end{cases} \tag{4.13}$$

Cela mène aux expressions :

$$\begin{cases} f_{i.\max}^{algo}(j) = \frac{(1+\varepsilon)f_{i.\max}(j)+\varepsilon f_{i.\min}(j)}{1+2\varepsilon} \\ \\ f_{i.\min}^{algo}(j) = \frac{(1+\varepsilon)f_{i.\min}(j)+\varepsilon f_{i.\max}(j)}{1+2\varepsilon} \end{cases} \tag{4.14}$$

L'utilisation de ces bornes permet alors d'assurer, si le test (4.11) est vérifié, que toutes les contraintes sont réellement vérifiées à chaque instant sur l'horizon de prédiction.

4.3 Les sensibilités

L'étude des sensibilités est présente à deux niveaux :

- dans l'approche préalable de faisabilité du problème,
- dans le calcul de la matrice hessienne intervenant dans l'algorithme.

4.3.1 Etude de faisabilité

Cette étude permet de vérifier en pratique que le critère est sensible vis-à-vis des commandes à déterminer :

$$\frac{\partial J_{tot}(u)}{\partial u} \not\equiv 0 \tag{4.15}$$

Ceci constitue donc un test de commandabilité pratique réalisable a priori avant la poursuite du problème.

4.3.2 Calcul du hessien

Les équations de sensibilités sont résolues en vue du calcul du déplacement de paramètres d'après l'algorithme de Levenberg-Marquardt.
Le critère de performance J étant quadratique sur les fonctions de sortie (voir l'hypothèse 1) et Q étant une matrice symétrique définie semi-positive, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$J(\tilde{p}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} y^T(j)\ Q\ y(j) \tag{4.16}$$

et la fonction de pénalité externe, par définition, s'écrit :

$$J_{ext}(\tilde{p}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum_{i=1}^{i=n_{co.ext}} \max^2[0,c_i(j)] \tag{4.17}$$

avec, pour simplifier l'écriture :

$$c_i(j) = c_i(p(j-1),p(j)) \tag{4.18}$$

Remarque 9 *On traite ici du problème où l'argument considéré s'écrit sous la forme générale $\tilde{p}$.*

Les gradients respectifs de ces critères par rapport à $\tilde{p}$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla J(\tilde{p}) = 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \nabla y^T(j)\ Q\ y(j) \\ \nabla J_{ext}(\tilde{p}) = 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum\limits_{i=1}^{i=n_{co.ext}} \nabla c_i(j) \max[0,c_i(j)] \end{cases} \tag{4.19}$$

et les hessiens de ces critères par rapport à $\tilde{p}$:

$$\begin{cases} \nabla^2 J(\tilde{p}) = 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \underbrace{\nabla^2 y^T(j)\ Q\ y(j)}_{terme\ 1} + \nabla y^T(j)\ Q\ \nabla y(j) \\ \nabla^2 J_{ext}(\tilde{p}) = 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum\limits_{i=1}^{i=n_{co.ext}} (\underbrace{\nabla^2 c_i(j)}_{terme\ 2} + \frac{\nabla^T c_i(j) \nabla c_i(j)}{c_i(j)}) \max[0,c_i(j)] \end{cases} \tag{4.20}$$

Remarque 10 *On peut utiliser l'approximation de Gauss-Newton [17] et donc ne garder que les termes du premier ordre quadratiques par rapport au gradient.*

Finalement, les expressions approchées des hessiens sont :

$$\begin{cases} \nabla^2 J(\tilde{p}) \approx 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \nabla y^T(j)\ Q\ \nabla y(j) \\ \nabla^2 J_{ext}(\tilde{p}) \approx 2 \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum\limits_{i=1}^{i=n_{co.ext}} \frac{\nabla^T c_i(j) \nabla c_i(j)}{c_i(j)} \max[0,c_i(j)] \end{cases} \tag{4.21}$$

lesquelles ne nécessitent que la résolution des équations de sensibilité du modèle par rapport à ses entrées. Ce sont ces expressions qui sont utilisées dans les algorithmes précédemment décrits.

4.3.3 Calcul des sensibilités

Les équations de sensibilité permettent de calculer la sensibilité de chaque sortie considérée par rapport à chaque élément de la séquence de commande $\tilde{u}$. Ces équations sont résolues a priori dans le cadre de l'optimisation en ligne et en temps réel pour l'optimisation hors-ligne. Ceci nous amène donc à la résolution numérique du modèle et de chaque équation de sensibilité associée à chaque composante de la

séquence de commande $\tilde{u} = [u(k) \ ... \ u(k+N_c-1)]^T$.

On se place ici dans le cas général où le modèle est soit linéaire ($(\mathcal{S}_{LTV})$ pour l'optimisation en ligne) soit non linéaire ($(\mathcal{S}_{NL})$ pour l'optimisation hors-ligne). Soit le système non linéaire aux équations aux dérivées partielles et à commande frontière que l'on a à resoudre à chaque instant k et sur l'horizon de prédiction N_p :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = A_d(x) \quad \text{sur } \Omega\times]k \ ... \ k+N_p] \\ \\ A_b(x,u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]k \ ... \ k+N_p] \\ \\ x(z,k) = x_i(z) \quad \text{avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4.22}$$

La séquence de commande $\tilde{u}$ à déterminer permet d'écrire $u(t)$ sur l'horizon de prédiction selon une somme pondérée :

$$u(t) = \sum_{i=k}^{i=k+N_c-1} u(i)\pi(i) \tag{4.23}$$

avec la fonction pondérante temporelle de type « porte » $\pi(i)$:

$$\begin{cases} \text{si } i = k+N_c-1 \quad \pi(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]i,k+N_p] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ \\ \text{si } i \neq k+N_c-1 \quad \pi(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]i,i+1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \tag{4.24}$$

Soit $s_i(z,t)$, la sensibilité de l'état x par rapport à la composante $u(i)$ de $\tilde{u}$, à partir de l'instant présent k et sur l'horizon N_p :

$$s_i(z,t) = \frac{\partial x(z,t)}{\partial u(i)} \tag{4.25}$$

Elle est solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial s_i}{\partial t} = \frac{\partial A_d}{\partial x} s_i \quad \text{sur } \Omega\times]k \ ... \ k+N_p] \\ \\ \frac{\partial A_b}{\partial x} s_i + \frac{\partial A_b}{\partial u}\pi(i) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]k \ ... \ k+N_p] \\ \\ s_i(z,k) = 0 \quad \text{avec } z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4.26}$$

qui est couplé au modèle à travers les opérateurs $\frac{\partial A_d}{\partial x}$, $\frac{\partial A_b}{\partial x}$, $\frac{\partial A_b}{\partial u}$.

Remarque 11

- *Si le modèle est linéaire, les N_c modèles de sensibilité sont indépendants de la résolution du modèle et peuvent être résolus hors-ligne. C'est le cas pour le problème d'optimisation en ligne, ce qui permet de diminuer énormément la charge de calcul en ligne ;*

- *par contre, dans le cas où le modèle est non linéaire, la résolution porte, à chaque itération, sur un système de $N_c + 1$ systèmes d'équations. Cette résolution ne peut alors se faire qu'en résolvant en parallèle le modèle initial (4.22).*

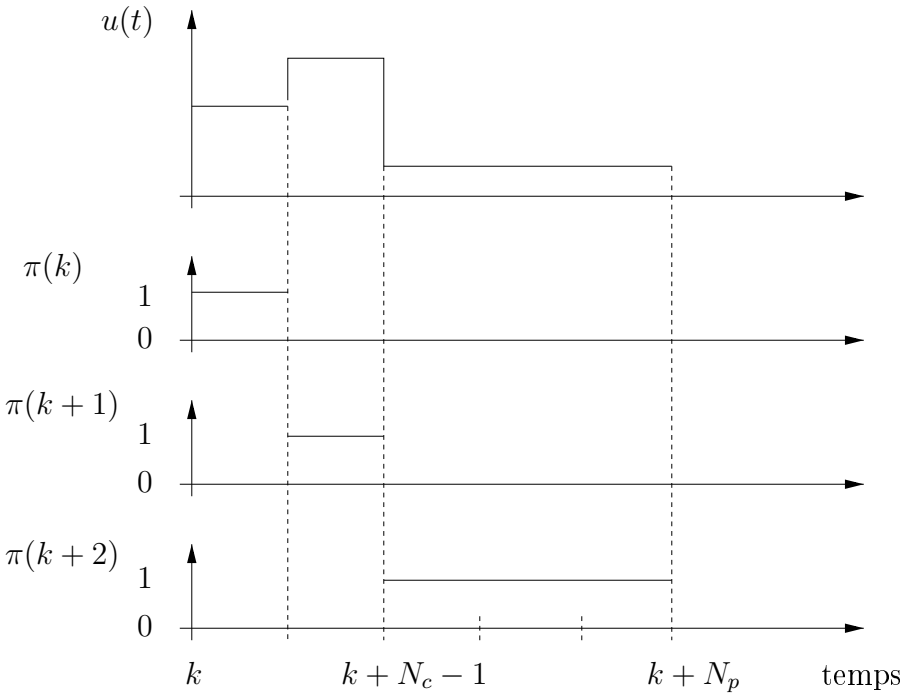


FIG. 4.1 – *Exemple de fonction porte avec* $(N_p,N_c) = (5s,3)$

4.4 Conclusion

Nous venons de voir les problèmes concrets, essentiellement d'ordre numérique, rencontrés lors de la mise en œuvre des algorithmes décrits dans le précédent chapitre.

Ils concernent tout d'abord la transformation des contraintes, telles qu'elles sont données dans le cahier des charges, en des contraintes normalisées. Elles ont ainsi toutes le même poids dans la résolution du problème.

D'autre part, une modification a été apportée au test d'arrêt issu de l'utilisation de la méthode des pénalités externes. Si ce test est vérifié, il permet d'assurer que toutes les contraintes sont effectivement vérifiées, certaines d'entre elles pouvant être saturées suivant le fonctionnement demandé.

Enfin, le calcul des sensibilités nécessaires à la variation des paramètres recherchés a été abordé.

Dans les trois sections suivantes, ce sont des applications de la stratégie de commande prédictive telle que nous l'avons considérée qui sont présentées. La première concerne la détermination hors-ligne d'un comportement nominal, les deux suivantes concernent la conduite en temps réel de procédés.

5

Procédé de cuisson par autoclave

Sommaire

5.1 Fabrication de matériaux composites 67
5.2 Procédé de cuisson par autoclave 68
5.3 Modèle 69
5.4 Problématique de commande 71
5.5 Résultats de simulation 73
5.5.1 Conditions de simulation 73
5.5.2 Effet de la borne $\Delta T_{\max}$ 74
5.5.3 Influence de l'horizon de prédiction 78
5.5.4 Influence de l'horizon de commande 81
5.6 Conclusion 87

5.1 Fabrication de matériaux composites

L'utilisation de matériaux composites est une alternative intéressante à celle de matériaux plus traditionnels dans des domaines d'applications de plus en plus nombreux. En effet, par rapport à ces derniers, les matériaux composites sont plus légers et plus résistants à leur environnement. C'est ainsi que leurs utilisations dans les domaines de l'aéronautique, de l'espace, des constructions de ponts et bien d'autres encore se sont largement développées. Toutefois, leur fabrication en terme de coût et de fiabilité reste encore un problème majeur.

L'un des moyens les plus utilisés pour les fabriquer est le procédé de cuisson par autoclave. La principale difficulté est alors de déterminer, hors-ligne, le cycle de cuisson optimal que l'on cherchera à suivre en ligne. Ce cycle doit correspondre à un temps opératoire minimal tout en assurant une qualité finale du produit acceptable. En effet, un mode opératoire trop rapide peut provoquer de trop forts gradients thermiques qui génèreront à leur tour des contraintes mécaniques. Le produit final peut alors être de qualité non acceptable.

Il existe différentes méthodes pour déterminer, hors-ligne, ce profil optimal de cuisson :

- une première approche est d'utiliser les méthodes d'essais-erreurs. Si elles sont simples, elles sont peu flexibles et ne fournissent pas nécessairement une stratégie optimale ;

- concernant les approches basées sur le modèle, le moyen le plus direct est l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin [11]. Cependant, si la méthodologie garantit une solution optimale, son utilisation sur des problèmes complexes (tel que celui considéré plus loin) est peu flexible pour la redéfinition d'un nouvel objectif [22]. Une approche alternative est de reformuler le problème en dimension finie en discrétisant la variable temporelle [23]. Cela conduit à un problème en dimension finie mais qui peut être de dimension importante (exemple : période d'échantillonnage de 1 min et 180 min de temps opératoire).
  Ces approches basées sur le modèle, malgré leur rigueur mathématique, ont été peu appliquées sur des procédés batch. Cela est, en grande partie, dû à la complexité des procédés ainsi qu'au faible gain réalisé par l'utilisation d'approches aussi rigoureuses sur des procédés avec des incertitudes typiques sur le modèle ;

- l'approche heuristique est nettement plus populaire pour les systèmes batch (fermés). La recherche d'une solution quasi-optimale est alors effectuée. Par exemple, couplée à l'utilisation de systèmes experts [24, 7], des pseudo règles, en analysant les mesures disponibles, permettent de réaliser la commande du procédé.

Exemple :

si la température T augmente
et si $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} > \beta$
alors arrêter le chauffage.

Si la méthode est simple car elle ne nécessite pas de modèle, le problème est de déterminer au mieux ces règles.
Une autre approche heuristique utilisant un modèle permet d'obtenir des résultats satisfaisants [33, 34]. L'avantage de cette technique est que la prise en compte de contraintes est possible de façon explicite. Cependant, l'analyse mathématique y est moins évidente et la convergence n'est pas assurée.

Afin de pallier les inconvénients des méthodes précitées, il a été proposé d'utiliser la méthodologie de commande prédictive pour déterminer un profil optimal hors-ligne. Basée sur la connaissance du modèle, cette stratégie permet, de plus, de tenir compte explicitement des contraintes. Le problème à résoudre est un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes.
Dans ce qui suit, nous présentons l'utilisation de la méthodologie de la commande prédictive sur un problème concret d'optimisation hors-ligne. Dans cette approche, on a l'avantage d'utiliser des informations pertinentes issues du modèle et de rechercher une séquence de N_c commandes à chaque instant, ce nombre de paramètres à déterminer étant nettement moins élevé que dans [23]. La résolution de ce problème conduit alors à la détermination, hors-ligne, de la commande assurant un temps de cuisson minimal et prenant en compte des contraintes thermiques [15].

5.2 Procédé de cuisson par autoclave

Ce procédé permet de fabriquer des matériaux composites à partir d'une matrice de polymère thermodurcissable. Avant la cuisson, le polymère se présente sous la forme d'un fluide visqueux. Le polymère, coulé dans un moule, est placé dans une chambre à vide permettant l'évacuation du trop plein au cours de la cuisson. L'ensemble est ensuite introduit dans un milieu autoclave (figure 5.1) où il subit un cycle de pression et de température appelé cycle de cuisson. Par l'application de chaleur, contrôlée par la température d'autoclave notée $T_a(t)$, le polymère se transforme en matière solide grâce à une réaction chimique de cuisson exothermique et irréversible.

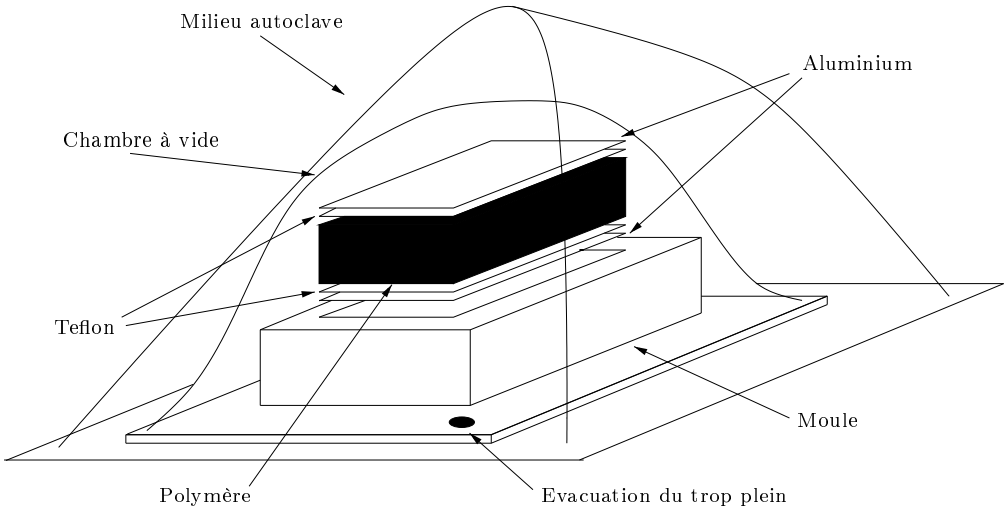


FIG. 5.1 – *Procédé de cuisson par autoclave*

5.3 Modèle

Dans de précédents travaux [35, 34], il a été montré que les phénomènes physiques n'ont lieu que le long de la seule épaisseur z.
Les grandeurs d'évolution considérées sont la température $T(z,t)$ et l'état de cuisson fractionnel (ou taux de conversion) $\alpha(z,t)$ qui varie de 0 initialement à 1 en fin de cuisson.
On considère également que les phénomènes physiques sont symétriques de part et d'autre du centre du polymère, ce qui permet de définir deux domaines spatiaux $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_c$:

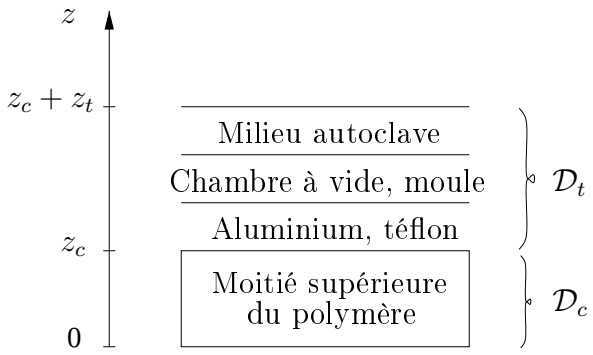


FIG. 5.2 – *Domaines spatiaux*

- $\mathcal{D}_t = \{z \in]z_c,\ z_c + z_t[\ \}$ représente le milieu autoclave, la chambre à vide, le moule ainsi que les couches d'aluminium et de teflon,

- $\mathcal{D}_c = \{z \in]0,\ z_c[\ \}$ représente la moitié supérieure du composite ($z = 0$ correspond donc au centre du polymère).

Un bilan thermique, faisant intervenir un phénomène de diffusion linéaire et la réaction exothermique dans le polymère, permet d'écrire le modèle suivant [33] :

Remarque 12 *La signification et la valeur de chaque paramètre sont données en annexe.*

Remarque 13 *Pour ne pas alourdir les expressions du modèle, on ne fait pas apparaître la dépendance spatio-temporelle des variables d'état. On notera* $T = T(z,t)$ *et* $\alpha = \alpha(z,t)$.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\rho_t c_{p_t} \frac{\partial T}{\partial t} = k_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \ \text{ avec } z \in \mathcal{D}_t,\ t > 0 \\
\\
\rho_c c_{p_c} \frac{\partial T}{\partial t} = k_c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho_c m_r (-\Delta H_r) r(z,t) \ \text{ avec } z \in \mathcal{D}_c,\ t > 0 \\
\\
\text{avec les conditions aux limites faisant intervenir la variable de commande } T_a(t) : \\
\left.
\begin{array}{l}
T(z,t) = T_a(t) \ \text{ en } z = z_c + z_t \\
-k_c \frac{\partial T}{\partial z}_{|z_c^-} = -k_t \frac{\partial T}{\partial z}_{|z_c^+} \ \text{ en } z = z_c \\
T(z_c^-,t) = T(z_c^+,t) \\
\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \ \text{ en } z = 0
\end{array}
\right\} \text{ pour } t > 0 \\
\\
\text{avec la condition initiale :} \\
\\
T(z,0) = T_0 \ \ \forall z
\end{array}
\right. \tag{5.1}
$$

Le terme de réaction $r(z,t)$ fait intervenir le taux de conversion $\alpha(z,t)$ et la température $T(t)$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
r(z,t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_\alpha(T) \alpha^m (1-\alpha)^n \ \text{ avec } z \in \mathcal{D}_c,\ t > 0 \\
\\
\text{associée à la condition initiale :} \\
\\
\alpha(z,0) = 0^+ \ \text{ avec } z \in \mathcal{D}_c
\end{array}
\right. \tag{5.2}
$$

avec le coefficient $k_\alpha(T)$ suivant une loi de type Arrhénius :

$$k_\alpha(T) = A_c e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}_c,\ t > 0 \tag{5.3}$$

Finalement, le modèle est décrit par un système non linéaire de commande frontière $T_a(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \beta_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{avec } z \in \mathcal{D}_t,\ t > 0 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \beta_c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{m_r(-\Delta H_r)A_c}{c_{pc}} e^{-\frac{E_a}{RT}} \alpha^m (1-\alpha)^n \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = A_c e^{-\frac{E_a}{RT}} \alpha^m (1-\alpha)^n \end{array}\right\} \text{avec } z \in \mathcal{D}_c,\ t > 0 \\ \text{avec les conditions aux limites :} \\ \left.\begin{array}{l} T(z,t) = T_a(t) \quad \text{en } z = z_c + z_t \\ \frac{\partial T}{\partial z}_{|z_c^-} = \frac{k_t}{k_c} \frac{\partial T}{\partial z}_{|z_c^+} \quad \text{en } z = z_c \\ T(z_c^-,t) = T(z_c^+,t) \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \end{array}\right\} \text{avec } t > 0 \\ \text{avec les conditions initiales :} \\ T(z,0) = T_0 \quad \forall z \\ \alpha(z,0) = 0^+ \quad \text{avec } z \in \mathcal{D}_c \end{array} \right. \tag{5.4}$$

5.4 Problématique de commande

Comparée à l'élaboration de matériaux composites d'épaisseur fine, la fabrication de matériaux épais (comme celui considéré ici) comporte certains problèmes. L'effet le plus important à prendre en compte dans ce mode de cuisson est la génération de chaleur due à la réaction exothermique :

- si les réactions démarrent d'abord en surface du polymère, elles y produisent une hausse importante de la température. Dans le même temps, si la réaction n'a pas encore débuté au centre, de larges gradients de température peuvent se développer entre la surface et le centre du polymère. Ces gradients, s'il sont trop importants, créent alors des contraintes mécaniques qui peuvent être préjudiciables aux futures utilisations du matériau composite obtenu ;

- si la réaction démarre tout d'abord au centre, du fait de la limitation des transferts thermiques intrinsèques au polymère, la chaleur créée n'a pas le temps de s'évacuer vers les surfaces. La température au centre subit alors une forte croissance et, comme dans le cas précédent, de larges différences de température peuvent se développer entre les surfaces et le centre ;

- d'autre part, si la réaction débute au centre alors que les réactions en surface sont terminées, des contraintes mécaniques seront forcément créées rendant le matériau final fragile donc inutilisable.

Le problème d'optimisation est donc de trouver, hors-ligne, un profil optimal de température d'autoclave $T_a(t)$ réalisant un compromis entre :

- un cycle de cuisson rapide ;

- une fin de cuisson qui doit se faire de l'intérieur vers l'extérieur. Ceci se traduit par le croisement des trajectoires de degrés de cuisson du centre et des surfaces du matériau qui doit se faire avant une valeur maximale $\alpha_{\max}$:

$$\alpha(0,t) \geq \alpha(z_c,t) \text{ si } \alpha(z_c,t) \geq \alpha_{\max} \tag{5.5}$$

- la différence de température entre le centre et la surface du polymère.

Le problème à résoudre est donc ramené à un problème d'optimisation sous contraintes hors-ligne : la traduction de la minimisation du temps de cuisson se traduit en une maximisation de la vitesse de taux de conversion qui est toujours positif. En supposant que le centre du polymère est le point où cette vitesse est la plus faible (on prendra $z = 0$), le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} \max\limits_{\tilde{T_a}} J(\tilde{T_a}) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} [r(0,j)]^2 \\ \tilde{T_a} = [T_a(k) \ ... \ T_a(k+N_c-1)]^T \end{cases} \tag{5.6}$$

ce qui revient à un problème de minimisation du type :

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{T_a}} J(\tilde{T_a}) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} \frac{1}{[r(0,j)]^2} \\ \tilde{T_a} = [T_a(k) \ ... \ T_a(k+N_c-1)]^T \end{cases} \tag{5.7}$$

avec des contraintes d'amplitude et de vitesse sur la commande :

$$\left.\begin{array}{l} T_{a\min} \leq T_a(j) \leq T_{a\max} \\ \Delta T_{a\min} \leq \frac{T_a(j)-T_a(j-1)}{T_e} \leq \Delta T_{a\max} \end{array}\right\} (j \in \{k, ..., k+N_c-1\}) \tag{5.8}$$

ainsi que des contraintes sur la différence de température entre la surface supérieure du polymère et le centre du polymère (du fait de l'hypothèse de symétrie, cette différence est la même entre la surface inférieure du polymère et le centre) :

$$\Delta T_{\min} \leq T(z_c,j) - T(0,j) \leq \Delta T_{\max} \qquad (j \in \{k+1, ..., k+N_p\}) \tag{5.9}$$

Remarque 14 *Dans cet exemple, étant donné que la minimisation de J sans les contraintes aboutirait à l'application à chaque instant de la commande maximale admissible, la prise en compte des contraintes permet de dire que la solution optimale sera déterminée si l'une des contraintes au moins est saturée.*

5.5 Résultats de simulation

Afin d'atteindre les objectifs décrits ci-dessus, trois types de simulation ont été réalisés dans les configurations suivantes :

- la première série permet de montrer l'effet de la borne $\Delta T_{\max}$ des contraintes de différence de température sur le croisement des degrés de cuisson ;
- la suivante montre l'influence de la valeur prise par l'horizon de prédiction ;
- la dernière montre l'influence de la valeur prise par l'horizon de commande.

5.5.1 Conditions de simulation

Les simulations ont été réalisées dans les conditions suivantes :

- le modèle non linéaire est simulé par la méthodes des différences finies avec 4 points de discrétisation dans $\mathcal{D}_c$ et 3 points dans $\mathcal{D}_t$;
- la période d'échantillonnage T_e vaut 1 min ;
- les bornes des contraintes d'amplitude et de vitesse sur la commande $T_a(t)$ sont :

$$T_{a\max} = 130\ ^oC \tag{5.10}$$
$$T_{a\min} = 10\ ^oC \tag{5.11}$$
$$\Delta T_{a\max} = +4\ ^oC.min^{-1} \tag{5.12}$$
$$\Delta T_{a\min} = -4\ ^oC.min^{-1} \tag{5.13}$$

- les bornes de la contrainte sur le gradient de température entre les surfaces et le centre du polymère sont :

$$\Delta T_{\max} = +10\ ^{o}C \tag{5.14}$$
$$\Delta T_{\min} = -10\ ^{o}C \tag{5.15}$$

- le croisement des degrés de cuisson doit être effectif avant $\alpha_{\max} = 0{,}6$;

- la température initiale T_0 vaut 28 ^{o}C.

Pour la résolution du problème d'optimisation :

- la contrainte portant sur l'amplitude de la commande posée dans (5.8) est traitée en utilisant une transformation hyperbolique ;

- les contraintes restantes sont introduites à l'aide d'une fonction de pénalités externes H ;

- pour le test de sortie (4.11) concernant la saturation des contraintes sur l'horizon de prédiction, $\varepsilon = 2\%$ est la valeur prise dans l'algorithme ;

- pour le test d'arrêt concernant la variation de critère sur deux itérations successives, il est pris suffisamment faible ($\varepsilon = 0.1\%$).

5.5.2 Effet de la borne $\Delta T_{\max}$

On recherche tout d'abord le cycle de cuisson optimal qui permet de tenir compte des contraintes sur la commande et sur les gradients de température telles qu'elles sont spécifiées dans le cahier des charges de (5.10) à (5.15).
Une première simulation a été effectuée avec $(N_p,N_c) = (25\ min,1)$. Les températures obtenus dans l'autoclave et le polymère sont les suivantes (figure 5.3).
La résolution de ce problème d'optimisation fait que la valeur maximale prise par l'une des contraintes sur l'horizon de prédiction est souvent nettement supérieure à celle autorisée dans l'algorithme (figure 5.4). La solution proposée par l'algorithme ne permettant donc pas alors d'assurer que toutes les contraintes soient vérifiées sur l'horizon de prédiction, elles peuvent également ne pas être vérifiées à chaque instant k (figure 5.5).
La non vérification des deux contraintes relatives à la différence de température entre la surface et le centre du polymère peut s'expliquer à travers les trois étapes de la cuisson :

- jusqu'à 75 minutes, la réaction exothermique n'a pas encore démarré : la réaction n'a commencé nulle part (figure 5.6). Les contraintes sont vérifiées (figure 5.4) et la saturation d'abord de l'une des contraintes de vitesse puis de l'une des contraintes thermiques (figure 5.5) limite le fonctionnement ;

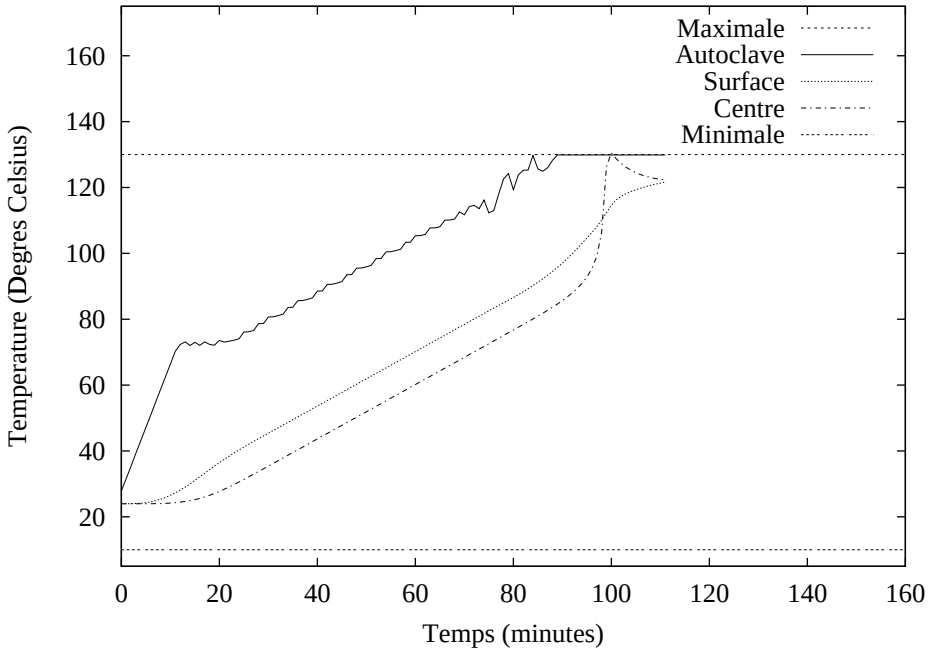


FIG. 5.3 – *Températures dans l'autoclave, en surface et au centre du polymère*

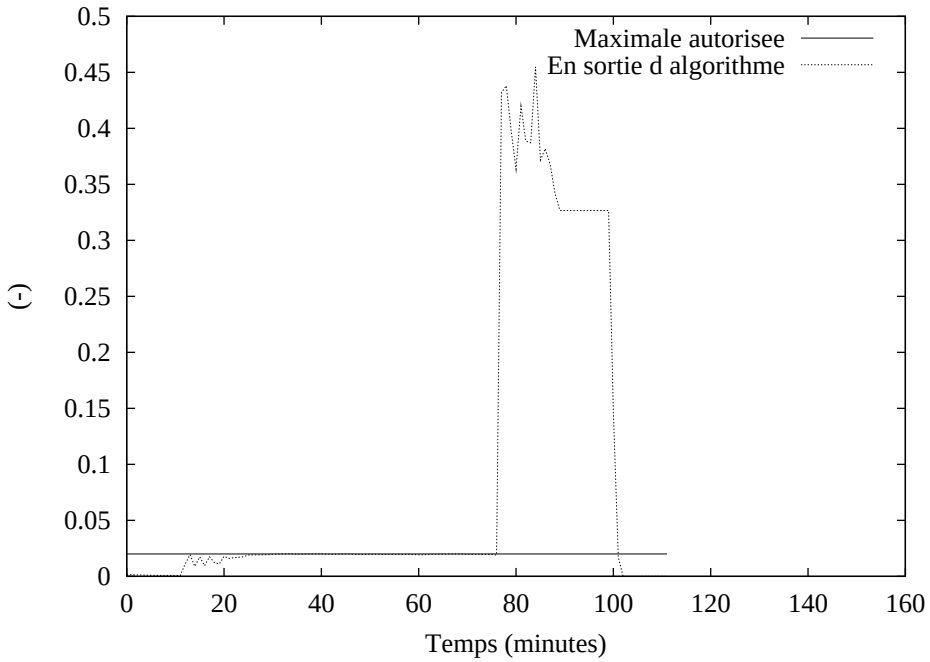


FIG. 5.4 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction*

- de 75 minutes à 90 minutes, la température de surface devient suffisamment élevée pour que la réaction démarre en surface (figure 5.3) : la chaleur ainsi créée n'est pas contrôlable et la température de surface augmente plus vite qu'avant. Dans le même temps, la température minimale nécessaire au démar-

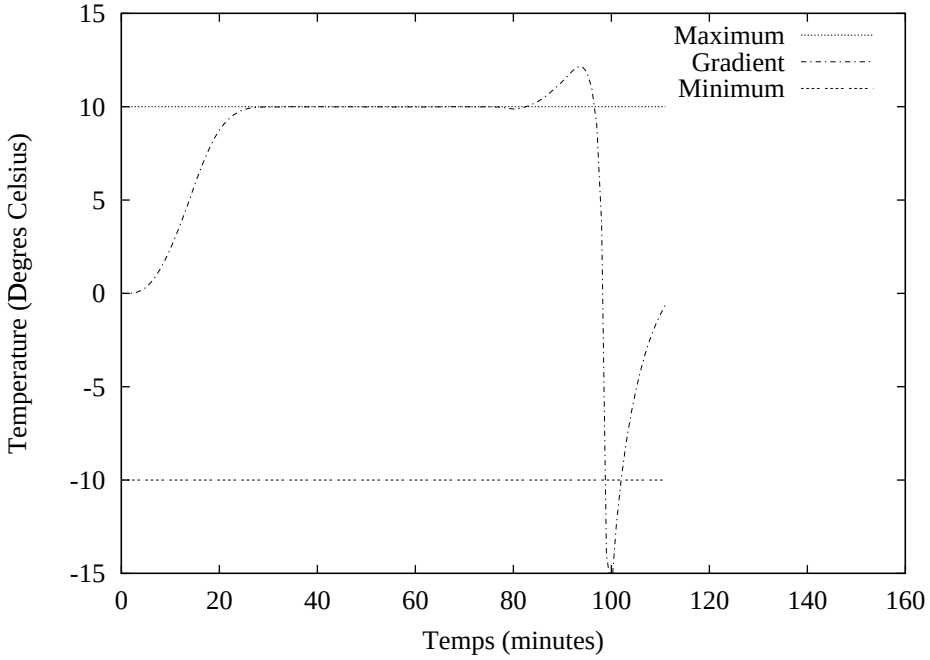


FIG. 5.5 – *Différence de température entre la surface et le centre*

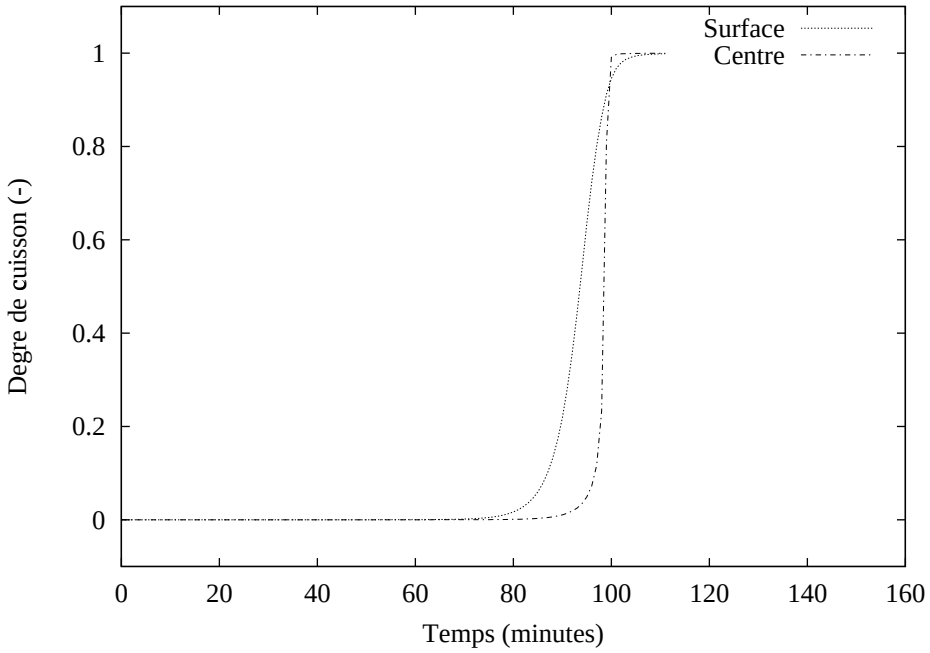


FIG. 5.6 – *Degrés de cuisson dans le polymère*

rage de la réaction au centre du polymère n'est pas atteinte. La dynamique de la température au centre est plus faible qu'à la surface : la contrainte supérieure de différence de température ne peut plus être vérifiée (figure 5.5). Parallèlement, le taux de conversion augmente à la surface et reste nettement

plus faible au centre (figure 5.6) ;

- à 90 minutes, alors que la réaction de surface se termine, la température au centre devient suffisamment importante pour initier la réaction : il y a création de chaleur au centre. Du fait de la limitation des transferts thermiques intrinsèques au polymère, cette chaleur s'évacue difficilement vers les surfaces. Comme précédemment, la contrainte inférieure de différence de température ne peut être vérifiée (figure 5.5). Dans le même temps, la conversion au centre s'accélère et le cycle de cuisson se termine (figure 5.6).

Ce cycle de cuisson ne permet donc pas de vérifier les contraintes données sur le gradient de température, et provoque un croisement des degrés de cuisson à $\alpha = 0{,}95$, c'est-à-dire bien au delà du $\alpha_{\max} = 0{,}6$ prescrit.

Afin de vérifier toutes les contraintes, il convient d'homogénéiser la réaction à travers l'épaisseur du polymère. L'expérience montre que ceci peut être atteint en transformant la borne $\Delta T_{\max}$ intervenant dans les contraintes du gradient thermique en une loi dynamique. On a alors transformé une contrainte en une contrainte de type entonnoir [38]. Après une série de simulations, on propose l'évolution décrite sur la figure 5.7.

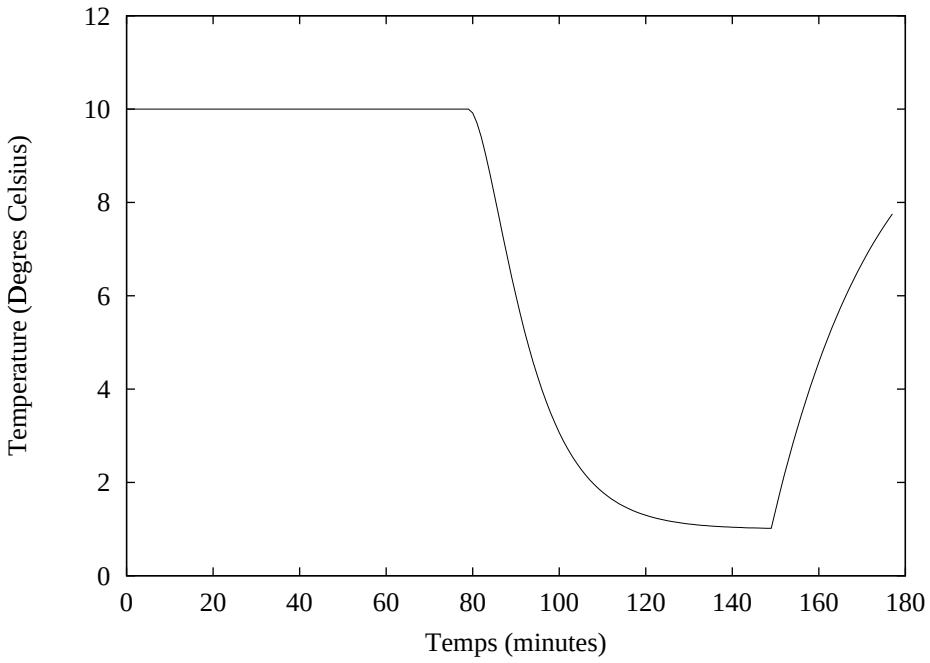


FIG. 5.7 – *Différence de température maximum autorisée entre la surface et le centre*

Les simulations suivantes sont toutes réalisées avec cette nouvelle borne pour $\Delta T_{\max}$.

5.5.3 Influence de l'horizon de prédiction

Les simulations suivantes montrent l'influence, à horizon de commande N_c unitaire, de l'horizon de prédiction ($N_p = 15\ min$, $25\ min$, $45\ min$).

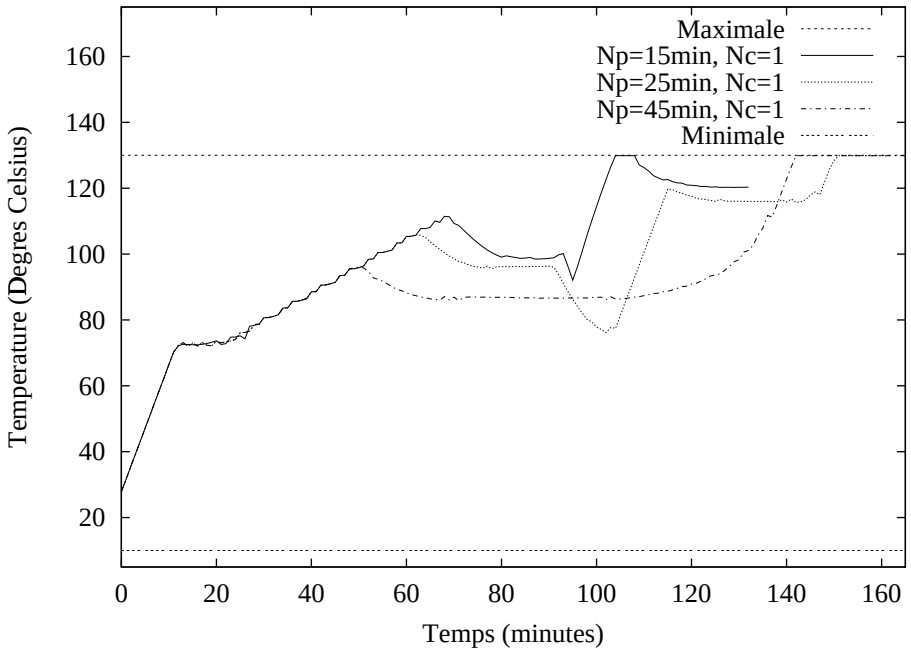


FIG. 5.8 – *Température d'autoclave*

Par rapport au cas précédent (figure 5.3), on voit que la nouvelle borne $\Delta T_{\max}$ a pour conséquence une baisse des dynamiques de température .Un horizon de prédiction faible (15 minutes), ne permet pas de prendre en compte les contraintes suffisamment tôt : les contraintes ne sont pas vérifiées à de nombreux instants (figure 5.9).
Dans les deux autres cas, les contraintes étant vérifiées sur l'horizon de prédiction, elles le sont forcément aussi à chaque instant (figures 5.10 et 5.11).
Avec un horizon de prédiction trop élevé (45 minutes), le croisement des trajectoires de degrés de cuisson n'est pas effectif avant $\alpha_{\max} = 0{,}6$ (figure 5.12).
Enfin, pour l'horizon intermédiaire de 25 minutes, les contraintes sont toujours vérifiées et le croisement des trajectoires de degrés de cuisson avant $\alpha_{\max}$ a lieu pour $\alpha = 0{,}495$.
Le choix d'un horizon de prédiction intermédiaire de 25 minutes paraît donc optimal et c'est à partir de cette valeur que l'influence de l'horizon de commande est maintenant étudiée.

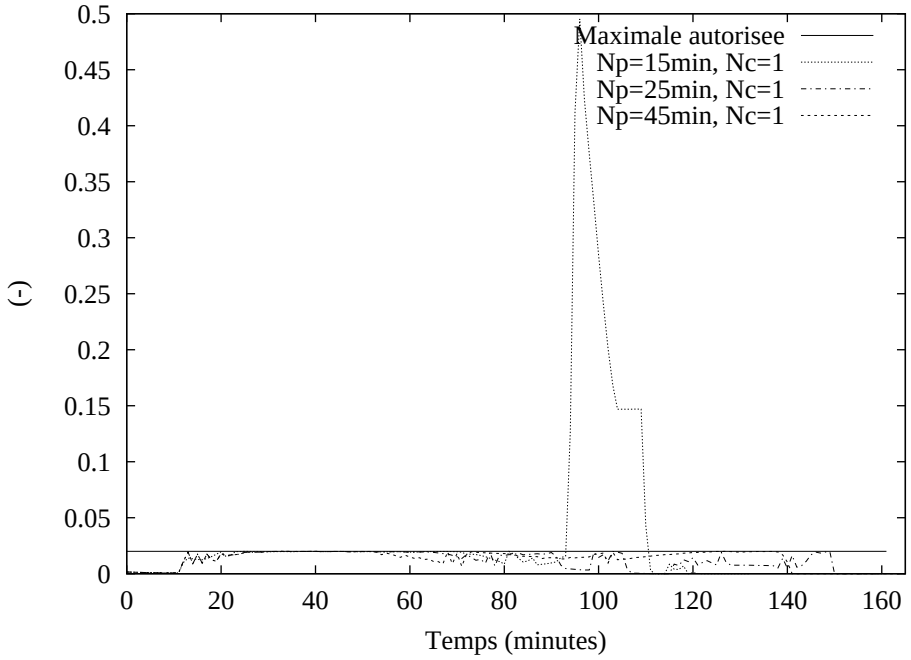


FIG. 5.9 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction*

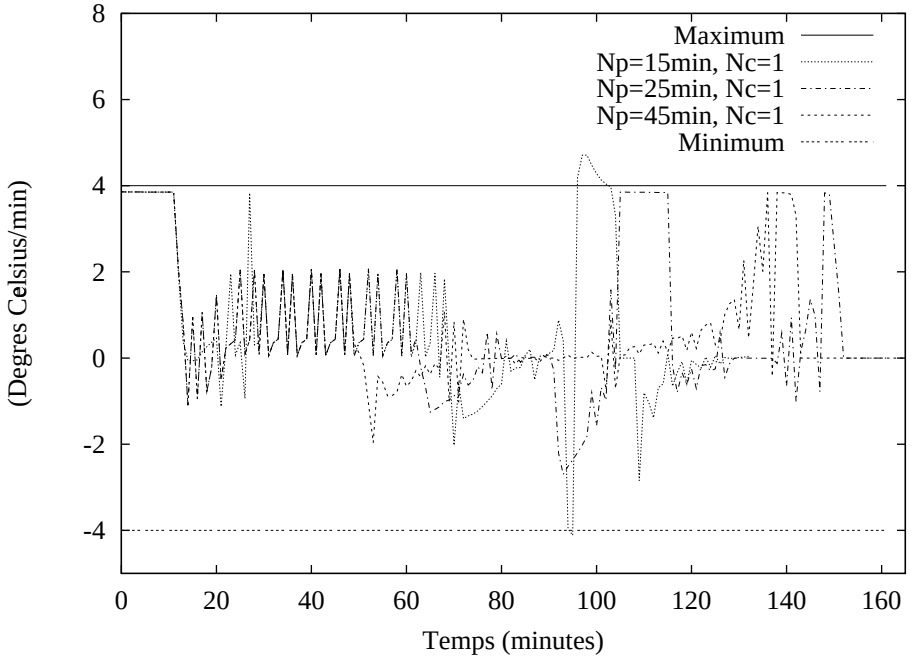


FIG. 5.10 – *Vitesse de la température d'autoclave*

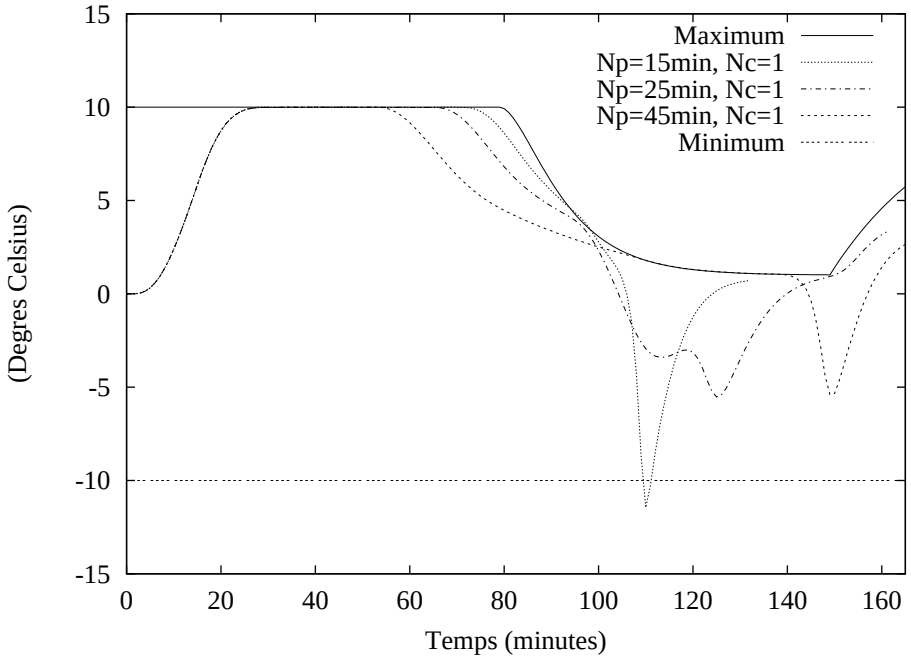


FIG. 5.11 – *Différence de température entre la surface et le centre*

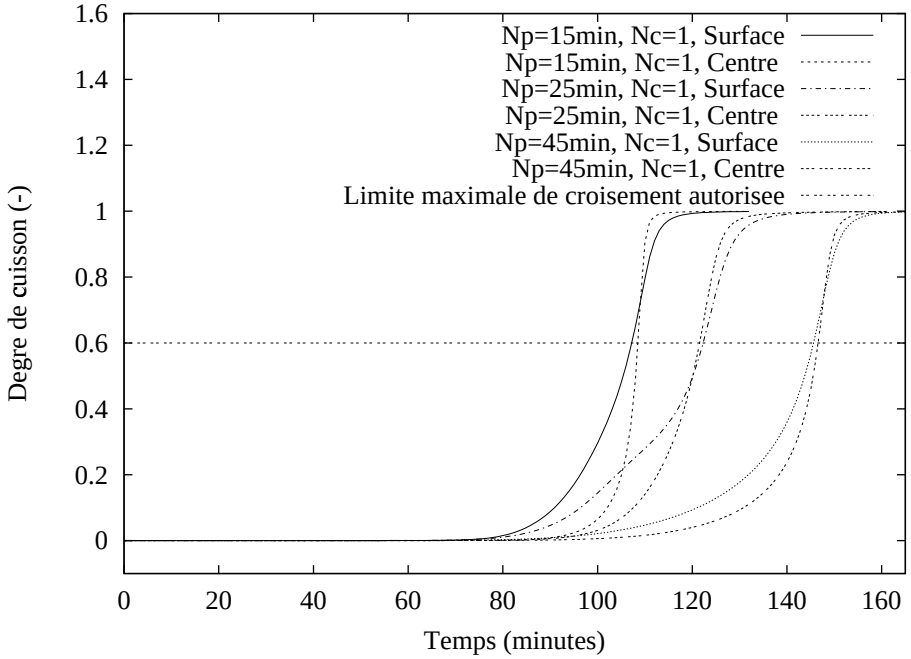


FIG. 5.12 – *Degrés de cuisson dans le polymère*

5.5.4 Influence de l'horizon de commande

Les simulations suivantes montrent l'influence, à partir de la configuration optimale précédente ($N_p = 25\ min$, $N_c = 1$) de l'horizon de commande. Celui-ci prend les valeurs 2, 5 et 10.

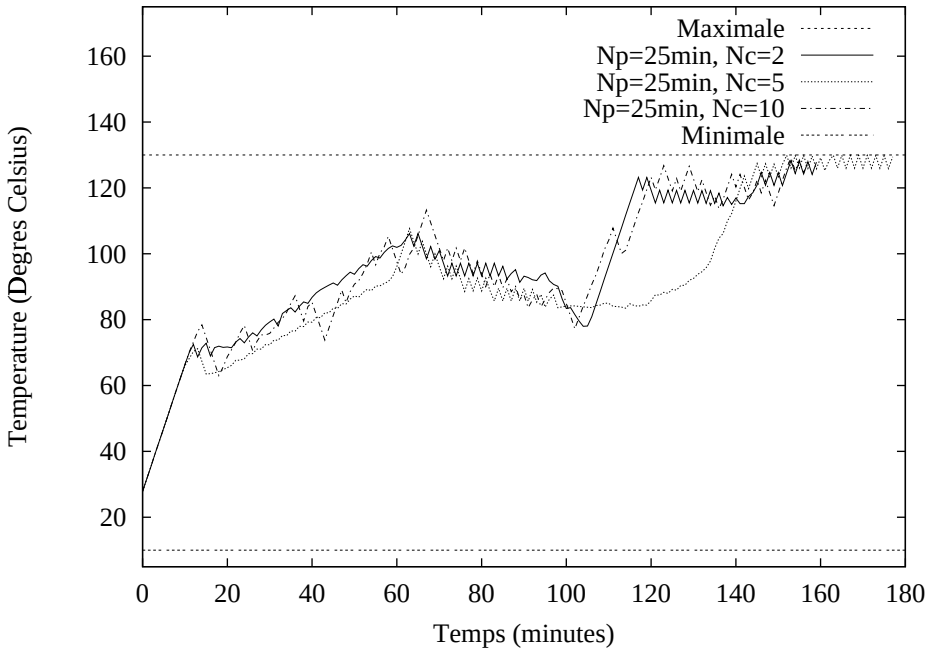


FIG. 5.13 – *Température d'autoclave*

Par rapport à la meilleure solution précédente (figure 5.8), on voit que la solution déterminée suit très souvent la même tendance. Concernant la sortie de l'algorithme, un horizon de commande $N_c = 10$ ne permet pas de déterminer une séquence de commandes assurant la vérification des contraintes sur l'horizon de prédiction (figure 5.14).
L'algorithme, déterminant une solution locale, ne peut donc pas toujours effectuer un déplacement de paramètres en vue de vérifier les contraintes sur l'horizon de prédiction. Pour cet algorithme, la dimension du problème devient dès lors trop importante au niveau de l'initialisation des paramètres à déterminer. D'autre part, avec l'augmentation de la valeur de l'horizon de prédiction, les contraintes sont de moins en moins saturées sur l'horizon de prédiction (figures 5.15, 5.16, 5.17, 5.18) : la solution au problème d'optimisation posé est donc de moins en moins intéressante car cette saturation correspond à la limite de fonctionnement, qui est donc de moins en moins atteinte.

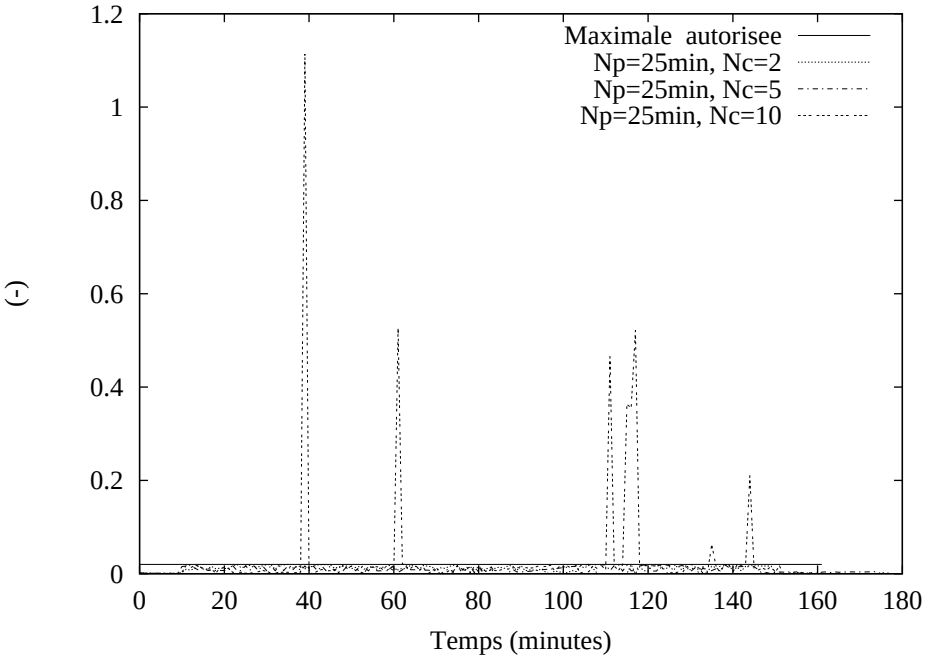


FIG. 5.14 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction*

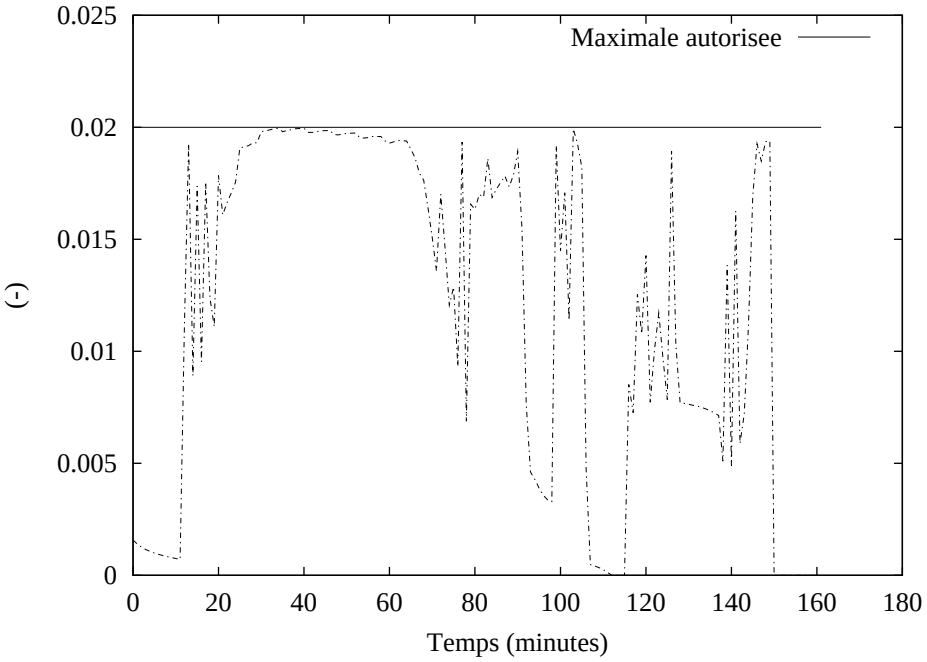


FIG. 5.15 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction,* $(N_c = 1)$

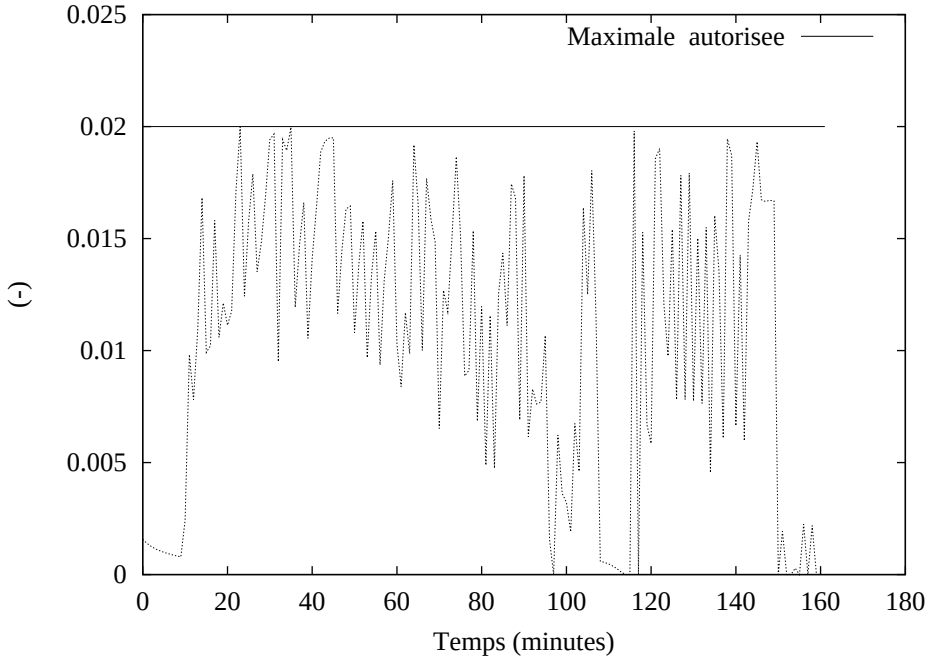


FIG. 5.16 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction,* $(N_c = 2)$

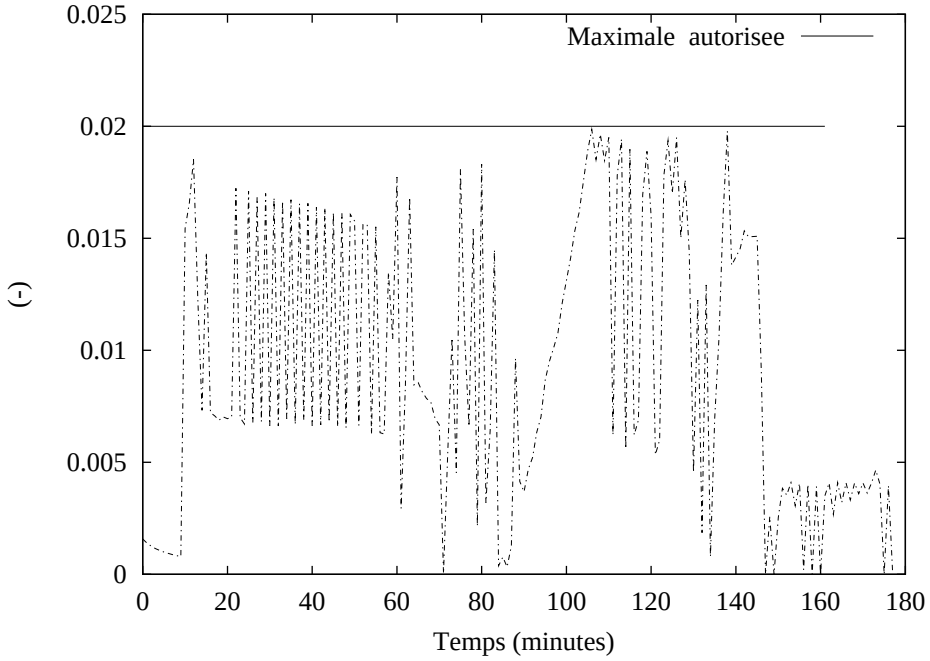


FIG. 5.17 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction,* $(N_c = 5)$

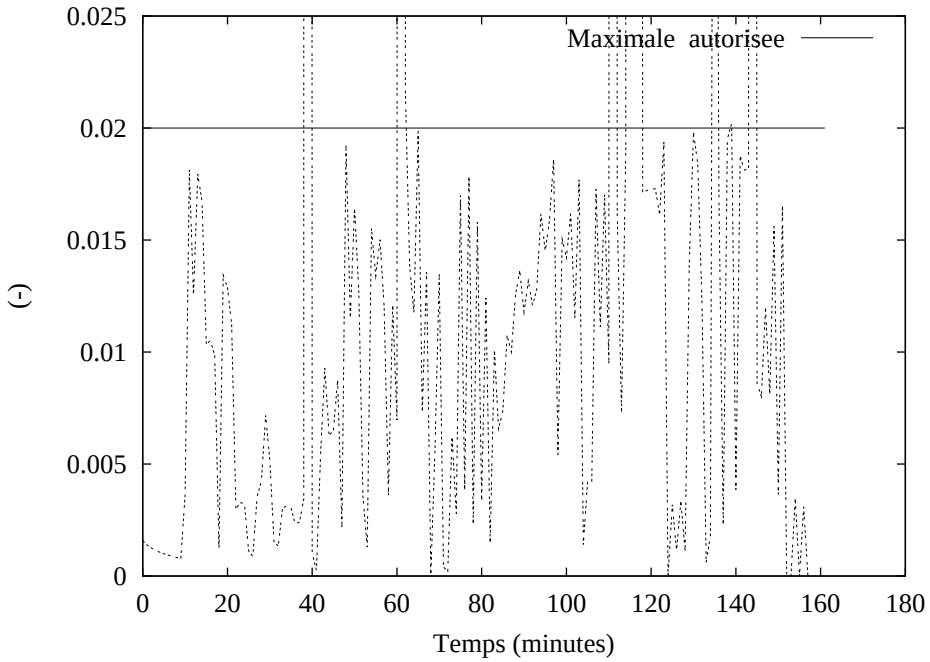


FIG. 5.18 – *Valeur maximale prise par les contraintes sur l'horizon de prédiction,* ($N_c = 10$)

Le problème précédent se retrouve aussi sur la saturation des contraintes à chaque instant (figures 5.19 et 5.20) : par exemple, par rapport au cas où $(N_p,N_c) = (25\,min,1)$ représenté figure 5.11, la contrainte de différence de température n'est plus jamais saturée entre 25 et 65 minutes. Le procédé ne fonctionne donc pas au maximum de ses possibilités.Enfin, on peut voir que dans chaque cas, le croisement des trajectoires de degré de cuisson avant $\alpha_{\max} = 0{,}6$ n'est pas effectif (figure 5.21).

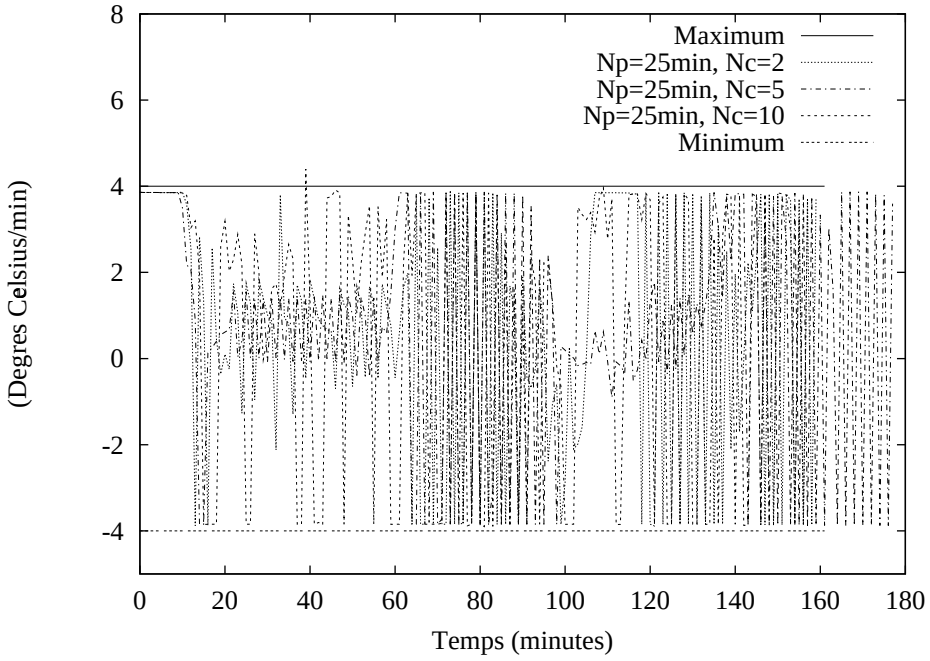


FIG. 5.19 – *Vitesse de la température d'autoclave*

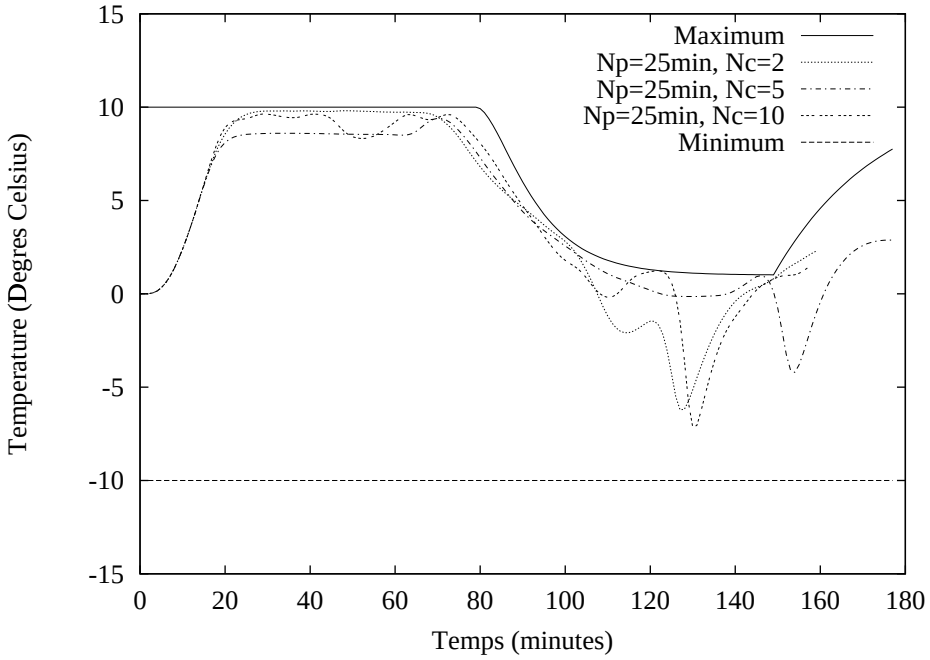


FIG. 5.20 – *Gradient de température entre la surface et le centre*

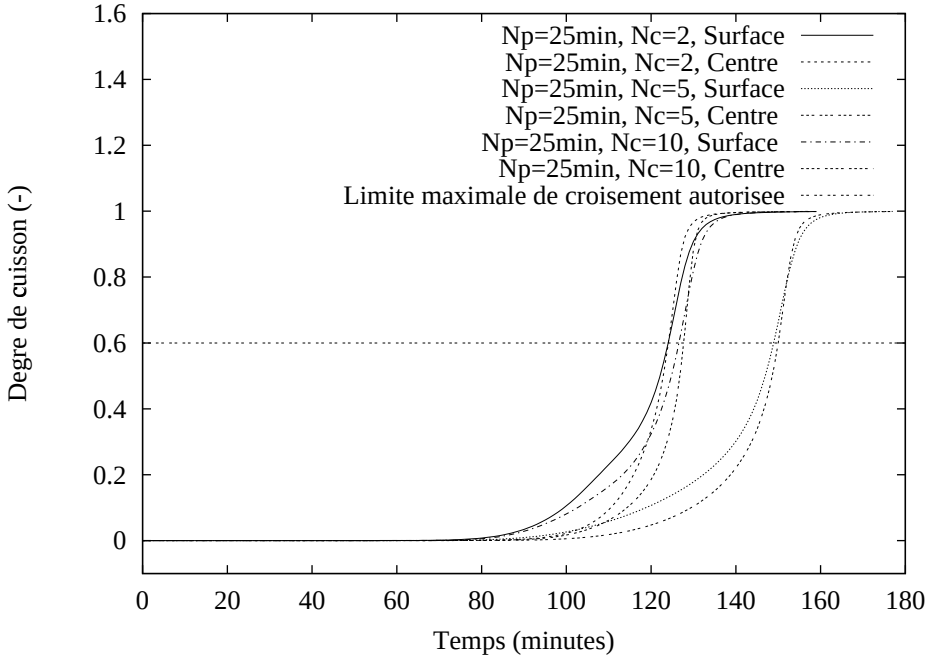


FIG. 5.21 – *Degrés de cuisson dans le polymère*

5.6 Conclusion

L'approche prédictive a été utilisée dans le cadre de la détermination hors-ligne d'un cycle de cuisson optimal. Des premiers travaux [34] ont d'abord permis de déterminer un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles non linéaires où la température de commande intervient aux limites. Des contraintes ont également été déterminées afin d'obtenir un matériau composite utilisable. Le problème majeur, par rapport à ce cahier des charges, est que le croisement des deux trajectoires de degrés de cuisson ne semble pas pouvoir se poser explicitement en terme de contrainte. Afin de résoudre ce problème, la borne d'une des contraintes a été modifiée. Cette contrainte, désormais de type entonnoir, en homogénéisant la réaction à travers l'épaisseur du modèle, rend alors possible un mode de cuisson aboutissant à un matériau composite utilisable.

A partir de cette nouvelle contrainte, nous avons montré, qu'à horizon de commande unitaire, les meilleurs résultats sont obtenus avec un horizon intermédiaire de 25 minutes. En effet, un horizon trop faible ne permet pas de prendre en compte suffisamment tôt les contraintes qui ne sont pas alors toujours vérifiées. D'autre part, si ces contraintes sont toujours vérifiées avec un horizon de prédiction plus grand, la croisement des trajectoires de degrés de cuisson ne se réalise pas avant la limite fixée. Ceci met en évidence les difficultés de détermination de nouvelles contraintes permettant d'assurer, avant une valeur donnée, le croisement des trajectoires de degrés de cuisson.

A partir de cette valeur optimale d'horizon de prédiction, l'influence de l'horizon de commande a été mise en évidence. On a pu constater que son augmentation ne permet pas d'améliorer les résultats, le problème se situant notamment à l'initialisation des paramètres recherchés.

Le problème majeur est alors de savoir comment initialiser ces paramètres afin de pouvoir atteindre l'ensemble $\mathcal{C}$ où toutes les contraintes sont vérifiées.

6

Destruction catalytique de gaz polluants

Sommaire

6.1 Destruction de composés organiques volatils 91
6.2 Procédé d'incinération catalytique 92
6.3 Modèle 95
6.4 Problématique de commande 99
6.5 Résultats de simulation 100
6.5.1 Conditions de simulation 101
6.5.2 Concentration basse constante 103
6.5.3 Concentration moyenne constante 109
6.5.4 Concentration haute constante 113
6.5.5 Concentration basse variable 116
6.5.6 Concentration moyenne variable 120
6.5.7 Concentration haute variable 122
6.6 Conclusion 126

6.1 Destruction de composés organiques volatils

Comme indiqué auparavant, cet exemple est issu d'un travail actuel de doctorat sur les problèmes de pollution au Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques (LGPC) de Lyon [40, 39]. Nous rappelons néanmoins le contexte général du problème de destruction des composés organiques volatils avant de présenter le problème de commande prédictive du procédé d'incinération catalytique.

Les problèmes de pollution de l'environnement liés à la production industrielle sont de plus en plus importants. De ce fait, les réglementations portant sur les rejets de composés organiques volatils (COV) dans l'atmosphère sont de plus en plus sévères. Si la définition même des COV reste encore floue, ils sont communément assimilés à des produits nocifs dont la réactivité chimique les rend susceptibles d'intervenir dans des processus de pollution atmosphérique. A ce titre, ils sont sources de nombreux méfaits : pluies acides, dépérissement des forêts, effet de serre, troubles de la santé, etc. Produits en quasi-totalité par l'homme, la réduction d'émission des COV constitue donc une priorité, d'autant plus que la source de ce problème touche un large champ d'activités économiques : des usines jusqu'aux PMI en passant par les pressings, etc.

Parmi les méthodes classiques possibles de réduction des COV (qui peuvent également se compléter), le choix s'effectue en fonction des éléments à éliminer, de leur niveau de concentration ainsi que de leur débit [2, 1] :

- adsorption :

  l'opération s'effectue en deux étapes : adsorption des COV sur un support solide (charbon actif par exemple) puis désorption en vue de leur récupération et de la regénération du support. Pour obtenir des rendements intéressants, il est souvent nécessaire de traiter ces gaz en amont afin d'éliminer les molécules d'eau ;

- absorption :

  les COV et un liquide d'absorption (en général de l'huile) circulent à contre-courant dans une colonne de lavage. Le principal critère à prendre en compte est la solubilité des COV dans le liquide ;

- traitement biologique :

  l'élimination des COV se fait à l'aide de microorganismes en milieu aérobique et humide. Ce type de procédé concerne principalement le traitement des odeurs et les COV à très faible concentration ;

- condensation :

  par l'augmentation de la pression, par abaissement de la température ou par combinaison des deux, on cherche ici à faire passer les COV de la phase gazeuse à la phase liquide ou solide. Ce système n'est performant que pour des déchets à forte concentration en COV et à une température suffisamment élevée ;

- incinération thermique :

  en France, 80 % des COV sont traités de cette façon et la rentabilité dépend des possibilités de récupération de chaleur ;

- incinération catalytique [6] :

  cette technique emploie les modes récupératifs permettant la diminution de l'apport d'énergie. Les températures requises à l'oxydation catalytique sont nettement inférieures à celles nécessaires en incinération thermique. La catalyse, c'est-à-dire la réaction des éléments polluants au contact de matériaux précieux, s'effectue entre 200 °C et 500 °C contre 800 °C à 1000 °C pour l'incinération thermique. Cette technologie, utilisant le mode récupératif, paraît être intéressante pour la destruction des COV à moindre coût tout en respectant les normes en vigueur.

Dans ce qui suit, nous présentons tout d'abord le procédé pilote existant au sein du LGPC. Après avoir décrit les phénomènes physico-chimiques mis en jeu, le modèle non linéaire à commande frontière est défini et la problématique de commande en ligne est exposée. Enfin, plusieurs résultats de simulation sont montrés dans divers modes d'utilisation du réacteur.

6.2 Procédé d'incinération catalytique

Basé sur la technique de l'incinération catalytique, le Girocat a été conçu afin de détruire des COV présents en faible concentration dans les effluants gazeux des cabines de peintures automobiles. Le procédé, basé sur le site d'Air Industrie à Chambéry, a une capacité de traitement de 3000 $m^3.h^{-1}$. Afin d'étudier et de modéliser les phénomènes physico-chimiques, un procédé pilote de laboratoire a été réalisé au sein du LGPC dans le cadre d'une thèse actuellement en cours. Le mode de fonctionnement de ce réacteur à inversion de flux [26] est le suivant :

- le gaz à épurer traverse tout d'abord de gauche à droite un premier monolithe thermique (figure 6.1) en forme de nid d'abeilles (figure 6.2) constitué de cordiérite nue (la surface des canaux d'écoulement n'est pas recouverte d'éléments catalyseurs). Le gaz circulant dans les nb_c canaux d'écoulement monte en température grâce à un échange thermique avec la partie solide en cordiérite ;

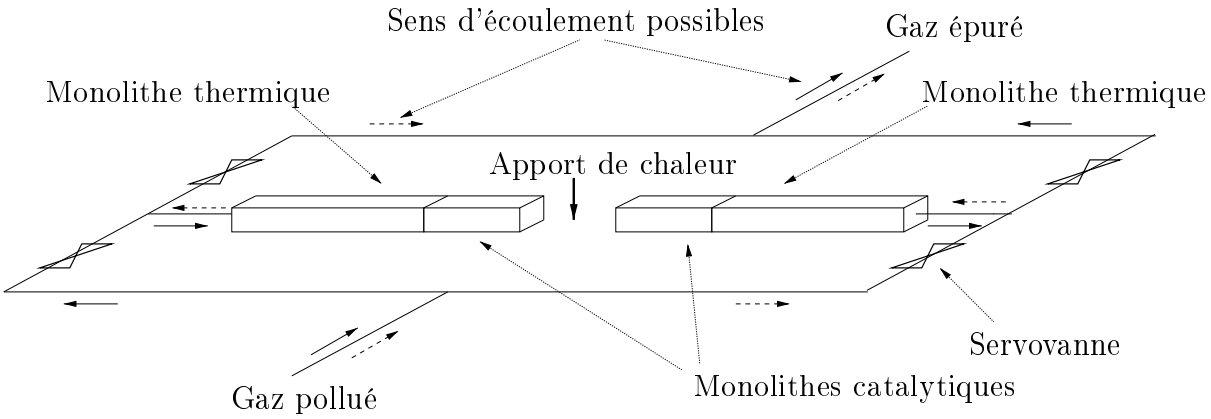


FIG. 6.1 – *Schéma de principe du procédé pilote du réacteur catalytique*

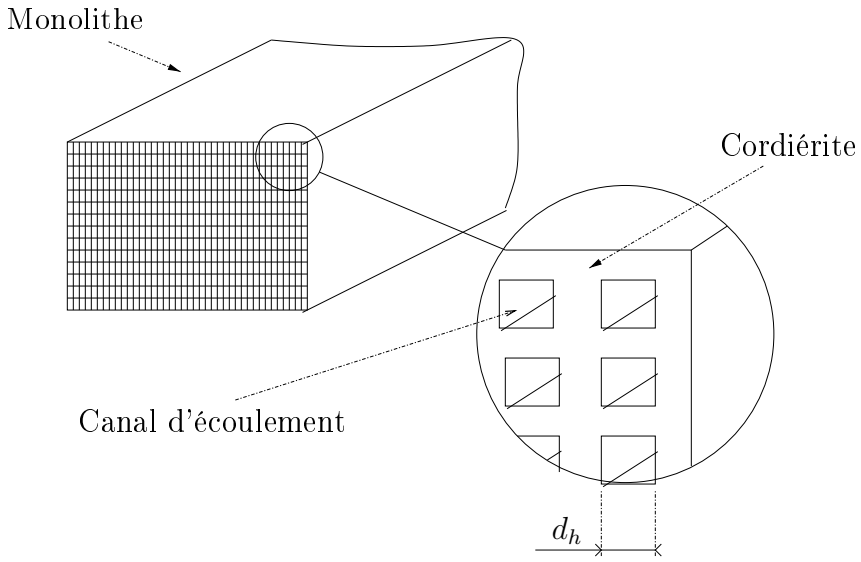


FIG. 6.2 – *Section du monolithe*

- le gaz traverse ensuite un premier monolithe catalytique qui est un monolithe thermique où la surface des canaux est recouverte d'éléments catalytiques (platine et autres métaux nobles). Le gaz étant au contact de ces éléments, la réaction chimique exothermique commence, ce qui provoque une élévation de la température et une baisse de la concentration en polluant ;

- le gaz arrive alors dans une zone soumise à un éventuel apport de puissance de chauffe P_{res}, ce qui permet de gérer la poursuite de la réaction dans le prochain monolithe catalytique ;

- enfin, la réaction se poursuit dans un second monolithe catalytique avant que le gaz n'arrive dans un second monolithe thermique en y cédant de la chaleur. Le gaz épuré est ensuite évacué ;

- à la fin de ce demi-cycle, le sens d'écoulement du gaz est inversé par les commandes des quatre électrovannes. Cette opération permet au nouveau gaz entrant de traverser d'abord l'ancien monolithe thermique de sortie. Dans cette zone, le gaz monte alors en température en utilisant la chaleur cédée par la réaction du précédent gaz : ceci constitue le mode régénératif du procédé ;

- un deuxième demi-cycle identique au premier a alors lieu, mais dans l'autre sens de circulation ;

- à la fin du cycle, le sens de circulation est à nouveau inversé et un nouveau cycle recommence.

Selon les conditions opératoires, le mode de fonctionnement peut être assez varié :

- un apport de gaz de concentration trop faible en COV provoquera, par son faible apport énergétique, l'extinction du réacteur ;

- un apport de gaz de concentration moyenne en COV permettra de fonctionner en autotherme (c'est-à-dire sans apport d'énergie extérieure) ;

- un apport de gaz de concentration trop élevée en COV, en provoquant une surchauffe du réacteur, altérera ses capacités de catalyse.

Pour les problèmes précédents, plusieurs solutions techniques sont proposées [30] :

- pour le problème d'extinction :

  - ajout de fuel dans le gaz ;

  - ajout d'énergie dans la zone centrale.

- pour le phénomène de surchauffe :

  - utilisation d'un bypass pour détourner le gaz chaud du milieu ;

  - injection de gaz froid dans la zone centrale.

Dans l'étude qui suit, on ne considère que le premier type de problème où la solution technologique adoptée est un apport de puissance électrique dans la zone centrale.

La minimisation de cet apport, tout en assurant en sortie du procédé un niveau de concentration en gaz polluant inférieur à une norme, constitue alors le problème de commande en ligne considéré.

6.3 Modèle

En vue de la modélisation, on considère, pour chacune des 5 zones (2 monolithes thermiques, 2 monolithes catalytiques, 1 zone centrale), les grandeurs physiques suivantes :

- la concentration $C_g(z,t)$ et la température $T_g(z,t)$ du gaz dans les canaux d'écoulement,
- la concentration $C_s(z,t)$ et la température $T_s(z,t)$ dans la partie solide en cordiérite.

Les phénomènes physiques mis en jeu sont décrits le long de la variable spatiale z suivant le sens de l'écoulement du fluide.
Comme la capacité thermique du solide est élevée et que le temps de résidence du gaz dans le réacteur est court, l'état transitoire est essentiellement gouverné par l'accumulation et la libération de chaleur au sein du solide.

Hypothèse 11 *On considère que les phénomènes sont instantanés dans les canaux d'écoulement. On considère également, dans la partie solide, que la dynamique de la concentration est négligeable par rapport à celle de la température.*

La particularité de ce système réside dans le fait qu'à chaque demi-cycle, le sens de circulation des flux est inversé et les conditions aux limites s'en trouvent donc modifiées à chaque demi-cycle. En un cycle complet, on retrouve le système initial. Pour tenir compte de l'inversion du flux de gaz à traiter, le modélisation s'écrit en quatre étapes sur un cycle complet $[t_0,\, t_0 + T_{cycle}[$.

Dans les 5 zones et aux 6 frontières (figure 6.3), les bilans de conservation des flux permettent de modéliser le procédé par un système non linéaire à paramètres répartis et à commande frontière.

Remarque 15 *La signification et la valeur de chaque paramètre sont données en annexe.*

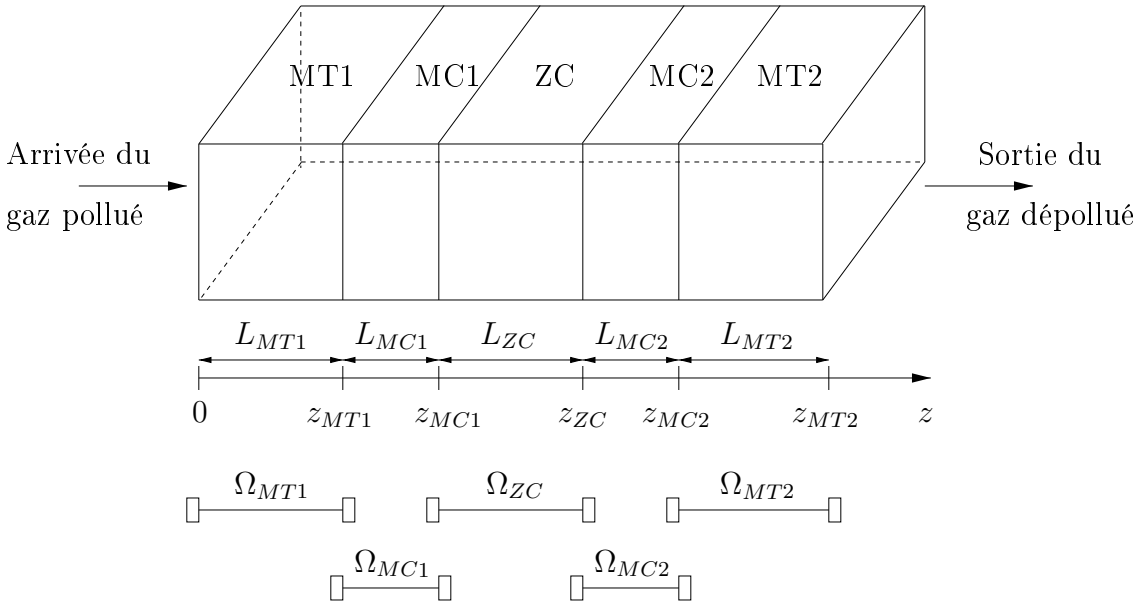


FIG. 6.3 – *Domaines spatiaux du réacteur catalytique*

1/ pour le premier demi-cycle ($t \in [t_0,\, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}[$) :

- en $z = 0$:

$$\begin{cases} T_g = T_{g.\text{entrée}}(t) \\ C_g = C_{g.\text{entrée}}(t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z} = 0 \\ C_s = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

- pour $z \in \Omega_{MT1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ C_g = C_g(0,t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{st}\ c_{ps}}\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{4\ \varepsilon\ h}{d_h\ (1-\varepsilon)\ \rho_{st}\ \ c_{ps}}(T_g - T_s) \\ C_s = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

- en $z = z_{MT1}$:

$$\begin{cases} T_{g|z^-} = T_{g|z^+} \\ C_g = C_g(0,t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z}|_{z^-} = \frac{\partial T_s}{\partial z}|_{z^+} \\ C_s = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

- pour $z \in \Omega_{MC1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{4\ k_d\ d_h\ nb_c}{Q_g}(C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{sc}\ c_{ps}}\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{4\ \varepsilon\ h}{d_h(1-\varepsilon)\ \rho_{sc}\ c_{ps}}(T_g - T_s) + \frac{4\ \varepsilon\ (-\Delta H_r)\ k^\infty}{d_h\ (1-\varepsilon)\ \rho_{sc}\ c_{ps}} e^{\frac{-E_a}{RT_s}} C_s \\ C_s = \frac{1}{1+\frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{cases} \quad (6.4)$$

- en $z = z_{MC1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{4\ k_d\ d_h\ nb_c}{Q_g}(C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z} = 0 \\ C_s = \frac{1}{1+\frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{cases} \quad (6.5)$$

- pour $z \in \Omega_{ZC}$, la commande P_{res} intervient :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{1}{nb_c\ d_h^2\ u_g\ \rho_g\ c_{pg} L_{ZC}} P_{res} \\ C_g = C_g(z_{MC1}, t) \end{cases} \quad (6.6)$$

- en $z = z_{ZC}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{4\ k_d\ d_h\ nb_c}{Q_g}(C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z} = 0 \\ C_s = \frac{1}{1+\frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{cases} \quad (6.7)$$

- pour $z \in \Omega_{MC2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{4\ k_d\ d_h\ nb_c}{Q_g}(C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{sc}\ c_{ps}}\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{4\ \varepsilon\ h}{d_h(1-\varepsilon)\ \rho_{sc}\ c_{ps}}(T_g - T_s) + \frac{4\ \varepsilon\ (-\Delta H_r)\ k^\infty}{d_h\ (1-\varepsilon)\ \rho_{sc}\ c_{ps}} e^{\frac{-E_a}{RT_s}} C_s \\ C_s = \frac{1}{1+\frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{cases} \quad (6.8)$$

- en $z = z_{MC2}$:

$$\begin{cases} T_{g|z^-} = T_{g|z^+} \\ C_g = C_g(z_{MC2^-},t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z}|_{z^-} = \frac{\partial T_s}{\partial z}|_{z^+} \\ C_s = \frac{1}{1+\frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{cases} \tag{6.9}$$

- pour $z \in \Omega_{MT2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ C_g = C_g(z_{MC2},t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{st}\ c_{ps}} \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{4\ \varepsilon\ h}{d_h\ (1-\varepsilon)\ \rho_{st}\ \ c_{ps}}(T_g - T_s) \\ C_s = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

- en $z = z_{MT2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{4\ h\ d_h\ nb_c}{Q_g\ \rho_g\ c_{pg}}(T_s - T_g) \\ C_g = C_g(z_{MC2},t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial z} = 0 \\ C_s = 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

2/ A la fin du demi cycle ($t = t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}$), l'inversion du sens de circulation se traduit en un basculement de l'état (L_{tot} est la longueur totale de l'ensemble du réacteur) :

$$\begin{cases} T_g(z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = T_g(L_{tot} - z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ C_g(z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = C_g(L_{tot} - z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ T_s(z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = T_s(L_{tot} - z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ C_s(z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = C_s(L_{tot} - z,t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \end{cases} \tag{6.12}$$

3/ Pour le deuxième demi cycle ($t \in [t_0 + \frac{T_{cycle}}{2},\ t_0 + T_{cycle}[$), les équations de (6.1) jusqu'à (6.11) sont de nouveau valables,

4/ A la fin du cycle ($t = t_0 + T_{cycle}$), une nouvelle inversion de l'état a lieu :

$$\begin{cases} T_g(z,t_0 + T_{cycle}) = T_g(L_{tot} - z,t_0 + T_{cycle}^-) \\ C_g(z,t_0 + T_{cycle}) = C_g(L_{tot} - z,t_0 + T_{cycle}^-) \\ T_s(z,t_0 + T_{cycle}) = T_s(L_{tot} - z,t_0 + T_{cycle}^-) \\ C_s(z,t_0 + T_{cycle}) = C_s(L_{tot} - z,t_0 + T_{cycle}^-) \end{cases} \tag{6.13}$$

et un nouveau cycle commence.

6.4 Problématique de commande

En ce qui concerne la loi de commande actuellement utilisée pour la conduite du procédé, l'utilisation d'un régulateur PID permet d'assurer une température de 400 ^oC dans la zone centrale du réacteur. Le problème est que cette température est choisie a priori comme assurant, en sortie du procédé, un niveau de concentration en gaz polluant inférieur à celui imposé par les normes. Si cette contrainte est alors toujours vérifiée, cela impose une consommation excessive de puissance électrique. Le problème qui se pose est donc le suivant :

- minimiser l'apport de puissance électrique nécessaire au fonctionnement de la réaction ;

- assurer un niveau de concentration de gaz polluant en sortie inférieur au maximum $C_{g.\max}$ autorisé par les normes. En pratique, on utilise la concentration moyenne calculée sur un intervalle de temps T :

$$C_{g.sortie}(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} C_g(z_{MT2},\tau)\ d\tau \leq C_{g.\max} \tag{6.14}$$

  Une telle information autorise alors les dépassements passagers du maximum autorisé $C_{g.\max}$. Etant donnée la forme de cette contrainte à réaliser, on utilisera dans le problème d'optimisation la contrainte sur la concentration instantanée :

$$C_g(z_{MT2},t) \leq C_{g.\max} \tag{6.15}$$

  En effet, la vérification de la contrainte (6.15) sur l'horizon de prédiction permettra de vérifier a posteriori la contrainte demandée (6.14) calculée sur un horizon passé T.

- assurer le fonctionnement du réacteur en dessous d'une température maximale. Cette contrainte est due aux propriétés physico-chimiques des éléments catalytiques. En effet, si la température devient trop élevée, les éléments catalytiques vont s'agglomérer, provoquant alors une diminution de la surface totale de réaction. Ce phénomène conduit alors à la baisse des possibilités de catalyse du réacteur.
  Par la suite, ce problème sera mis en évidence mais ne sera pas pris en compte dans la résolution.

En terme de stratégie de commande prédictive, le problème se pose alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min\limits_{P_{res}(k)} J(P_{res}(k)) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} [P_{res}(k)]^2 \\ \text{avec les contraintes sur la puissance électrique en amplitude et en vitesse :} \\ P_{res.\min} \leq P_{res}(k) \leq P_{res.\max} \\ \Delta P_{res.\min} \leq \frac{P_{res}(k)-P_{res}(k-1)}{T_e} \leq \Delta P_{res.\max} \\ \text{avec la contrainte de type borne :} \\ C_g(z_{MT2},t) \leq C_{g.\max} \end{cases} \tag{6.16}$$

Remarque 16 *Dans certains cas, on préfèrera représenter la puissance moyenne consommée depuis le début de la réaction plutôt que la puissance instantanée :*

$$P_{moy}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t P_{res}(\tau)\ d\tau \tag{6.17}$$

6.5 Résultats de simulation

Deux types de simulation ont été effectuées :

- dans le cas idéal où la concentration de gaz polluant en entrée est connue et constante :
  - basse ($2\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$),
  - moyenne ($5\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$),
  - haute ($17\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$),
- dans le cas plus concret où la concentration de gaz entrant est aléatoire mais mesurée. En effet, dans la réalité, le réacteur doit pouvoir fonctionner pour des gammes de concentrations différentes, chacune étant caractérisée par une valeur moyenne et une amplitude maximale également connue. Nous avons donc considéré les 3 cas précédents auxquels un signal aléatoire d'amplitude crête à crête de $2\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$ et de valeur moyenne nulle a été superposé. Ces trois zones de fonctionnement (basse, moyenne, haute) sont alors représentées sur la figure 6.4 :



FIG. 6.4 – *Gammes de concentration aléatoire de gaz polluant à l'entrée du réacteur*

6.5.1 Conditions de simulation

Les simulations ont été réalisées dans les conditions suivantes :

- concernant la résolution numérique du modèle, différentes simulations utilisant la méthode des différences finies et des volumes finis ont été effectuées. Elles ont montré que, pour ce modèle, le nombre de points nécessaires, le temps de calcul et les résultats finaux sont équivalents dans les deux cas. Pour la résolution numérique finale, la méthode des volumes finis a été choisie pour la clarté d'écriture ;

- le procédé est simulé avec une discrétisation de 200 points dans chaque monolithe thermique et 200 points dans chaque monolithe catalytique. Cela semble correspondre au nombre de points assurant une discrétisation optimale ;

- l'horizon de commande N_c est égal à 1 ;

- dans cette première approche, la période d'échantillonnage T_e est prise égale à la moitié de la période d'un cycle (aller et retour) T_{cycle} :

$$\begin{cases} T_{cycle} = 20s \\ T_e = 0{,}5\ T_{cycle} \end{cases} \tag{6.18}$$

- la température du gaz entrant $T_{g.\text{entrée}}(t)$ dans le réacteur ainsi que son débit $Q_g(t)$ sont supposés constants :

$$\begin{cases} T_{g.\text{entrée}}(t) = 20\ ^oC \\ Q_g(t) = 100\ m^3.h^{-1} \end{cases} \tag{6.19}$$

- une période de préchauffage est nécessaire avant de pouvoir commencer l'épuration de gaz. Elle permet la montée en température des éléments de catalyse en vue de rendre possible la réaction. Ce préchauffage s'effectue dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases} N_{cycles} = 300\ (-) \\ P_{res}(t) = 520\ W \\ C_{g.\text{entrée}}(t) = 0\ mol.m^{-3} \\ T_g(z,0) = 20\ ^oC \\ C_g(z,0) = 0\ mol.m^{-3} \\ T_s(z,0) = 20\ ^oC \\ C_s(z,0) = 0\ mol.m^{-3} \end{cases} \tag{6.20}$$

- le réacteur étant en zone de de fonctionnement, la linéarisation autour du modèle ($\mathcal{S}_0$) s'effectue hors-ligne dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases} P_{res.0}(t) = 500\ W \\ C_{g.\text{entrée.0}}(0,t) = 2\ 10^{-3}\ mol.m^{-3} \end{cases} \tag{6.21}$$

- les bornes des contraintes sont les suivantes :

$$\begin{cases} P_{res.\,\max} = 3000\ W \\ P_{res.\,\min} = 0\ W \\ \Delta P_{res.\,\max} = +1500\ W.s^{-1} \\ \Delta P_{res.\,\min} = -1500\ W.s^{-1} \\ C_{g.\,\max} = 4{,}7\ 10^{-4}\ mol.m^{-3} \end{cases} \tag{6.22}$$

- pour la mesure moyennée de la concentration de sortie, $T = 20\ min$;
- la température maximale à ne pas dépasser dans le réacteur vaut 650 ^oC ;
- pour les critères de sortie de l'algorithme, le coefficient α_{Te} limitant le temps de calcul vaut 95 % et le coefficient ε de la condition d'arrêt (4.11) qui correspond à la saturation de la contrainte (6.15) sur l'horizon de prédiction, vaut 2 % ;
- les bornes ε des deux tests restants sont pris suffisamment faibles pour permettre à l'algorithme de trouver, si le temps de calcul le permet, une meilleure solution ;
- les simulations sont effectuées par un PC cadencé à 500 MHz.

Afin de mettre en évidence l'influence du nombre de points de discrétisation pour le modèle (n_{mt} dans chaque monolithe thermique et n_{mc} dans chaque monolithe catalytique), et de la valeur prise par l'horizon de prédiction, les simulations ont été réalisées de la façon suivante :

- pour celles où le gaz pollué a une concentration constante : les paramètres (n_{mt}, n_{mc}, N_p) valent successivement $(16, 16, 200s)$, $(12, 12, 200s)$ puis $(16, 16, 50s)$,

- pour celles où le gaz pollué a une concentration aléatoire : ces paramètres prennent les valeurs $(16, 16, 10s)$, $(60, 60, 10s)$, $(100, 100, 10s)$ puis $(150, 150, 10s)$.

6.5.2 Concentration basse constante

Une première simulation dans la configuration $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s)$ permet de constater que l'algorithme sort souvent avec la contrainte de concentration instantanée (6.15) violée. Cette contrainte est prise en compte dans le problème d'optimisation, par la méthode de pénalité externe (figure 6.5).

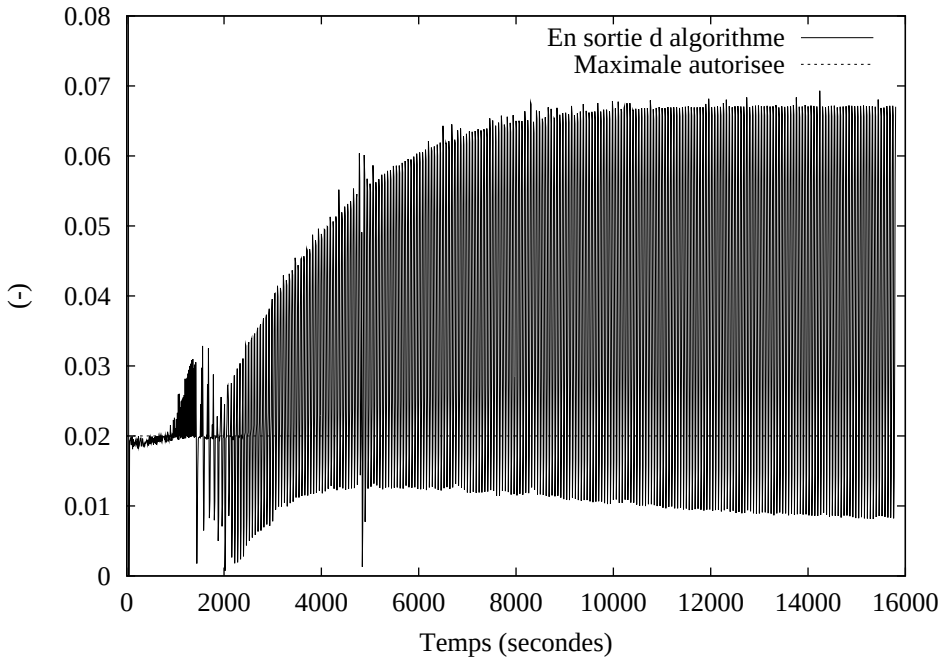


FIG. 6.5 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s)$

Dans cette configuration, le temps de calcul du modèle sur l'horizon de prédiction est trop élevé pour permettre à l'algorithme d'atteindre une commande permettant la vérification de cette contrainte.

Pour s'affranchir de ce problème de temps de calcul, on peut tout d'abord diminuer le nombre de points de discrétisation du modèle (n_{mt} et n_{mc}) en espérant qu'une solution toujours suffisamment représentative de l'évolution du procédé soit déterminée. En effet, en diminuant le nombre de points, on gagne en vitesse ce que l'on perd en précision de modélisation. Un compromis est donc à réaliser à ce niveau.

Une deuxième simulation effectuée avec une diminution de (n_{mt}, n_{mc}) de $(16, 16)$ à

(12, 12) permet une vérification de la contrainte instantanée sur l'horizon de prédiction et à chaque instant (figure 6.6).

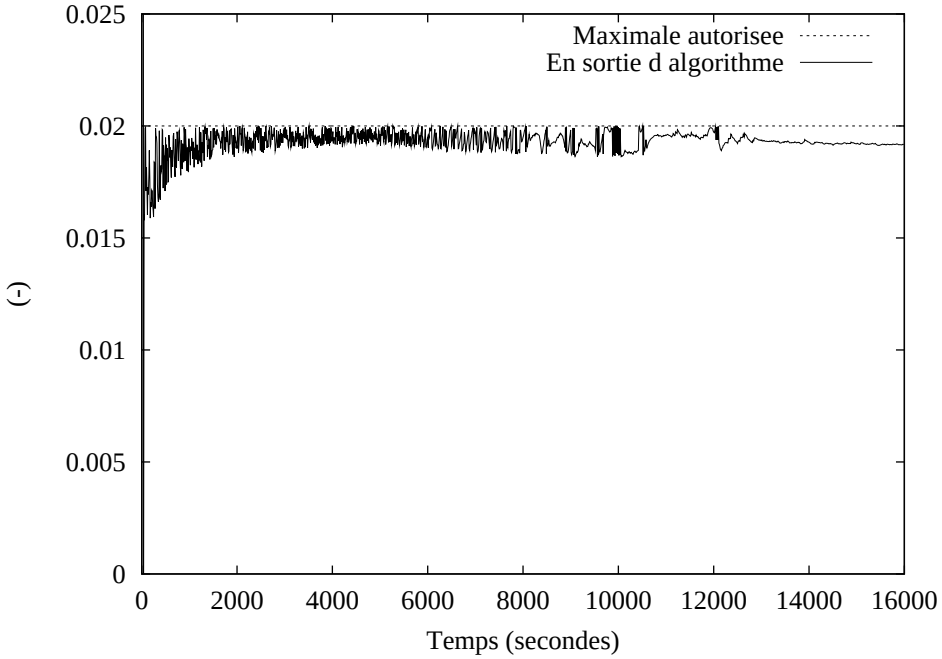


FIG. 6.6 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (12, 12, 200s)$

Une autre méthode consiste, à partir du premier jeu de paramètres, à diminuer l'horizon de prédiction. Cette dernière simulation, effectuée avec $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s)$ permet là aussi d'aboutir à une commande vérifiant la contrainte sur l'horizon de prédiction (figure 6.7) et donc à chaque instant en sortie du procédé (figure 6.8).

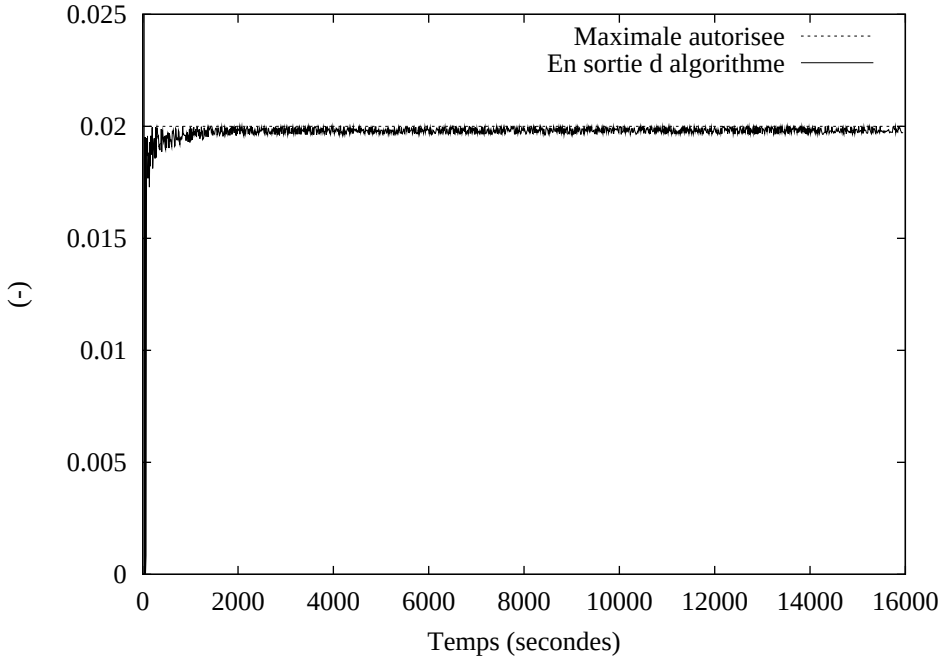


FIG. 6.7 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$

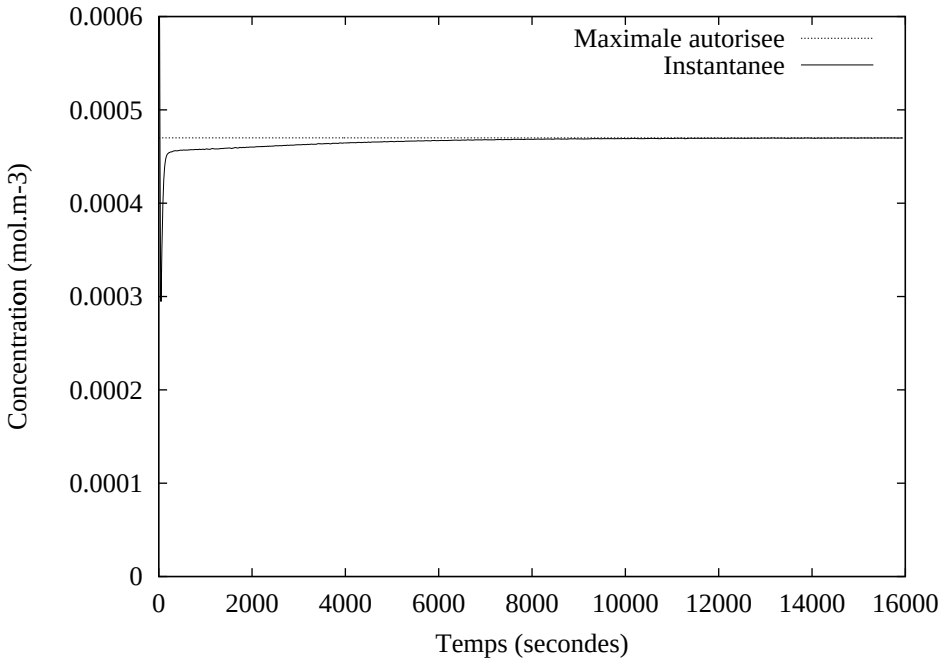


FIG. 6.8 – *Concentration instantanée en sortie du procédé,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$

Par ailleurs, on remarque que cette simulation permet d'aboutir à des résultats plus près des limites de fonctionnement demandées que dans la deuxième simulation : la contrainte instantanée est plus proche de la saturation. Cela se répercute sur la concentration moyenne recherchée (6.14) représentée figure 6.9, ainsi que sur la puissance moyenne consommée depuis le début de chaque expérience (figure 6.10). En effet, une consommation plus faible en puissance électrique permet d'obtenir une concentration de gaz plus élevée, tout en vérifiant toujours la contrainte (6.14).

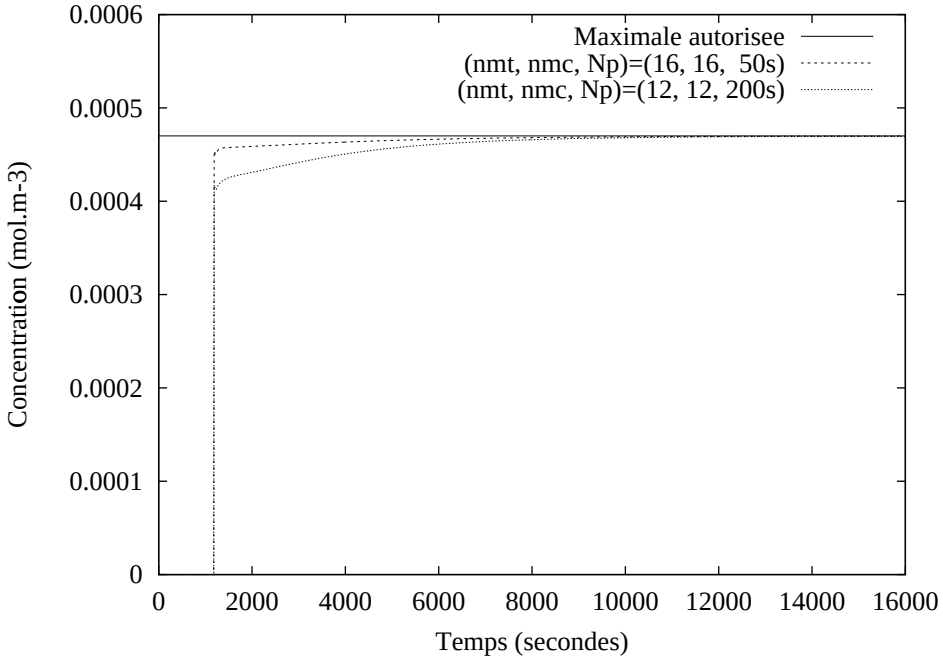


FIG. 6.9 – *Concentration moyenne en sortie du procédé*

D'autre part, la température maximum au sein du réacteur (mesurée à l'entrée du premier monolithe catalytique) est inférieure au maximum spécifié (figure 6.11).

Un faible nombre de points de discrétisation permet donc de résoudre le problème, même si la sortie en concentration instantanée du modèle est nettement différente de celle du procédé simulé avec un nombre de points plus élevé (figure 6.12). Si ce signal est faux quantitativement, il est cependant juste qualitativement et ceci est suffisant pour son utilisation dans la structure de commande par modèle interne. On vérifie donc ici la robustesse de la commande vis-à-vis d'un type d'erreur de modélisation.

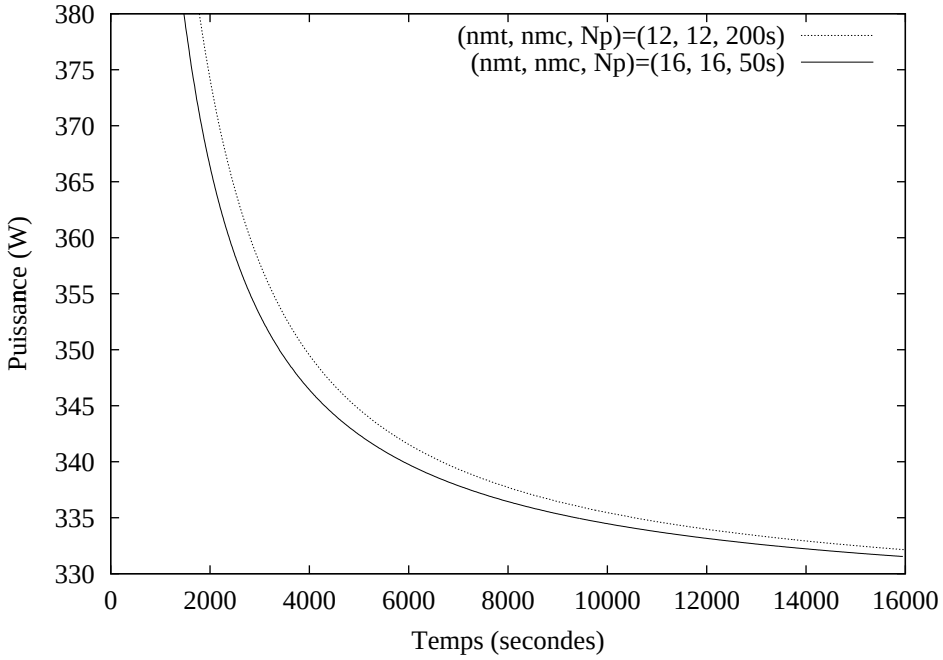


FIG. 6.10 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial*

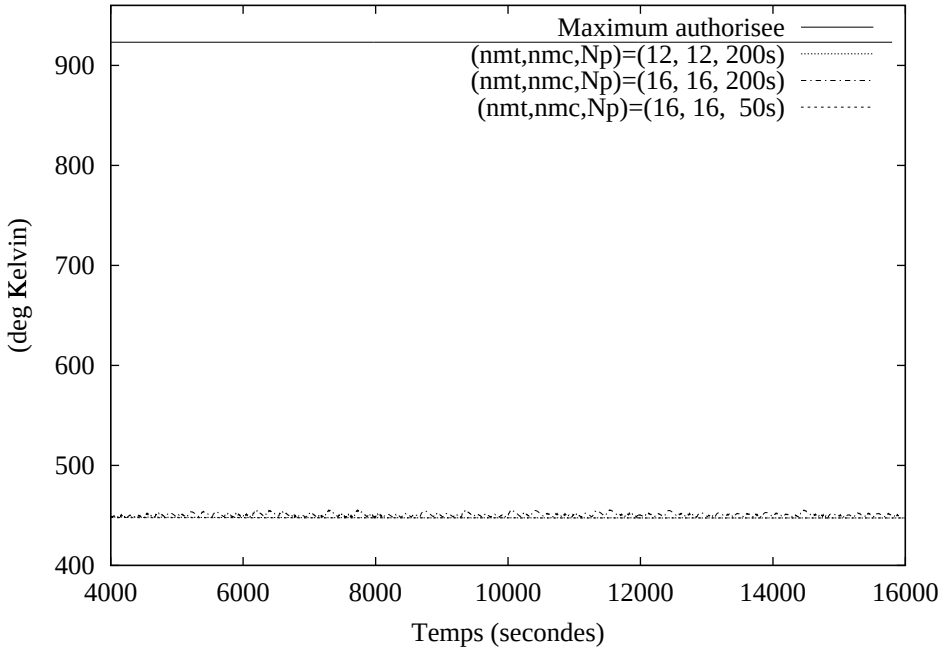


FIG. 6.11 – *Température maximale dans le réacteur*

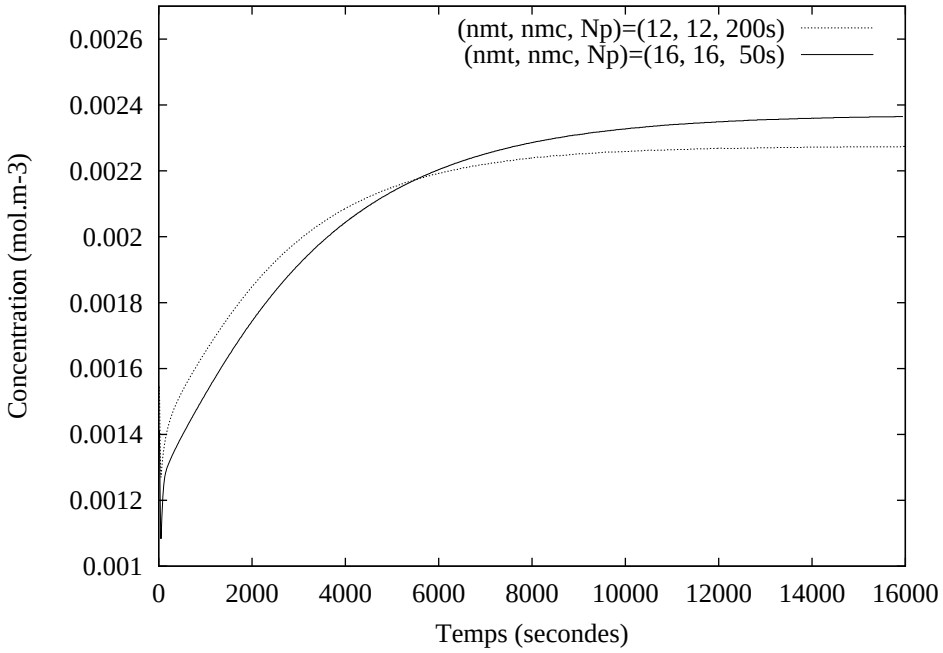


FIG. 6.12 – *Concentration moyenne en sortie du modèle*

6.5.3 Concentration moyenne constante

Une première simulation réalisée avec $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s)$ ne permet pas, comme précédemment, d'obtenir une commande assurant la vérification de la contrainte sur l'horizon de prédiction (respectivement figure 6.13).

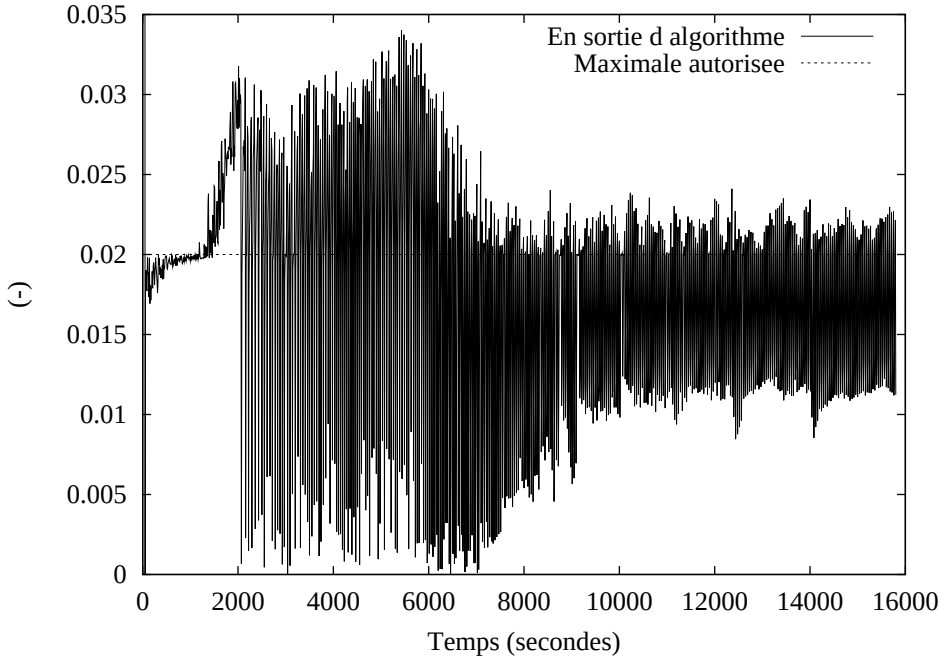


FIG. 6.13 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 200s)$

Deux simulations sont effectuées en diminuant soit le nombre de points de discrétisation de (16, 16) à (12, 12), soit la valeur de l'horizon de prédiction de 200s à 50s. Les résultats obtenus pour la prise en compte de la contrainte sont les suivants (figures 6.14 et 6.15).

Comme dans la première série de simulations, le cas où l'horizon de prédiction a été diminué fournit les meilleurs résultats en terme de saturation de la contrainte sur l'horizon de prédiction. Une solution très précise au problème est donc déterminée, comme on peut le voir sur le signal de concentration moyenne en sortie du procédé (figure 6.16).

Pour ce niveau de concentration d'entrée, on remarque que le niveau de puissance électrique à fournir a diminué, passant de $300W$ à $20W$ par rapport à la série de simulations effectuées à concentration basse (figure 6.17). On fonctionne alors à environ 1 % des capacités maximales d'apport de puissance. Cela est dû au niveau de concentration de polluant en entrée de réacteur suffisamment élevé qui permet d'entretenir la réaction. On se situe alors presque en régime autotherme. Enfin, la température maximale est toujours inférieure au maximum prescrit (figure 6.18).

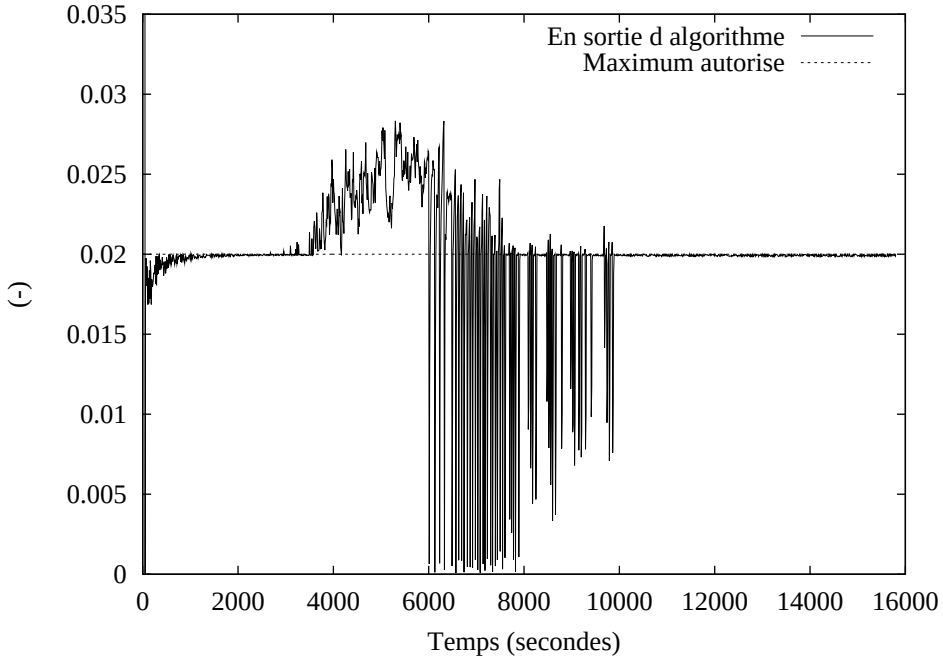


FIG. 6.14 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (12,\, 12,\, 200s)$

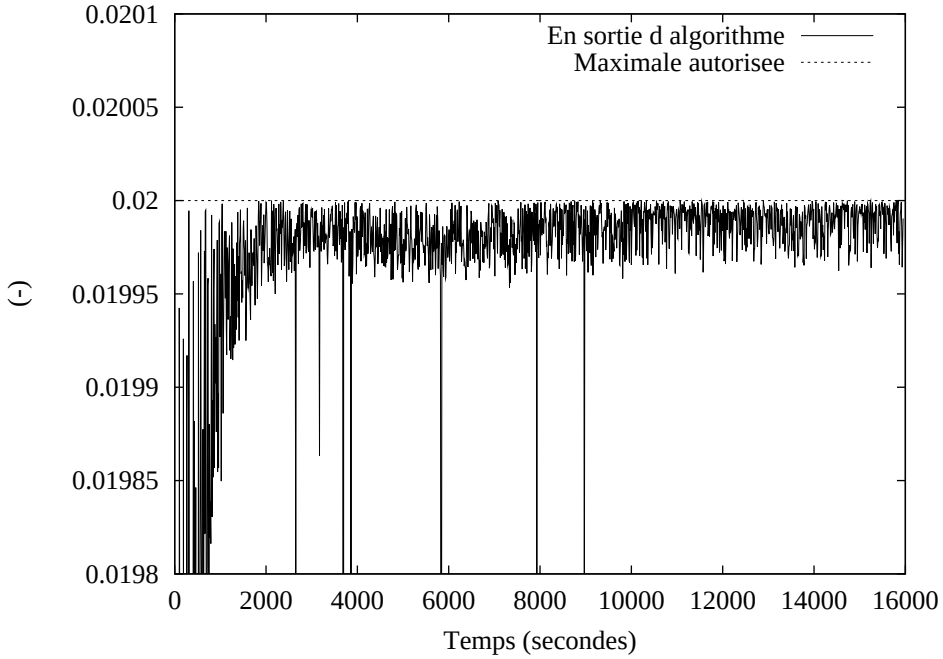


FIG. 6.15 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$

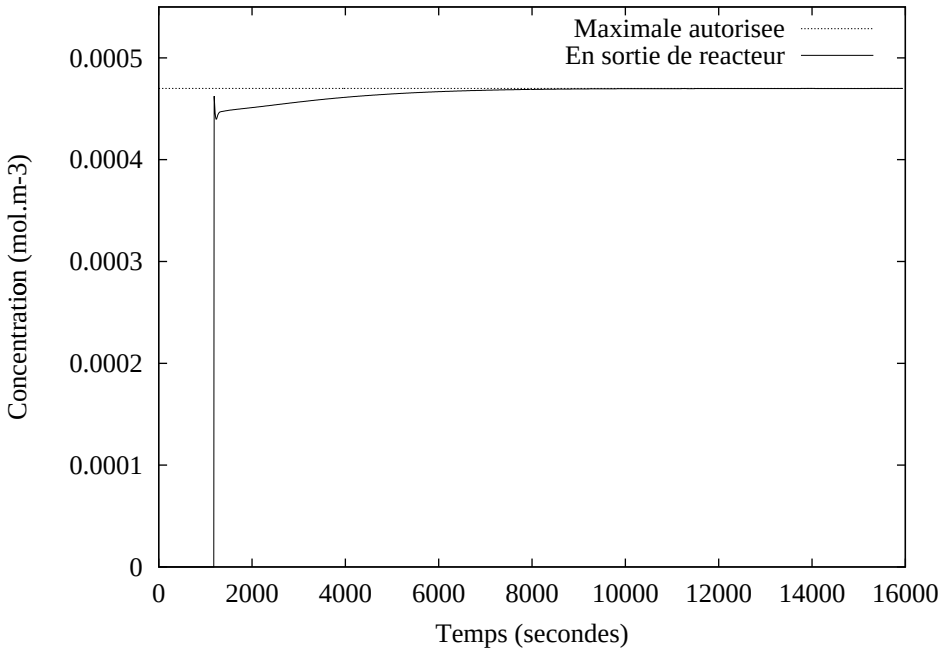


FIG. 6.16 – *Concentration moyenne en sortie du procédé,* $(n_{mt},\ n_{mc},\ N_p) = (16,\ 16,\ 50s)$

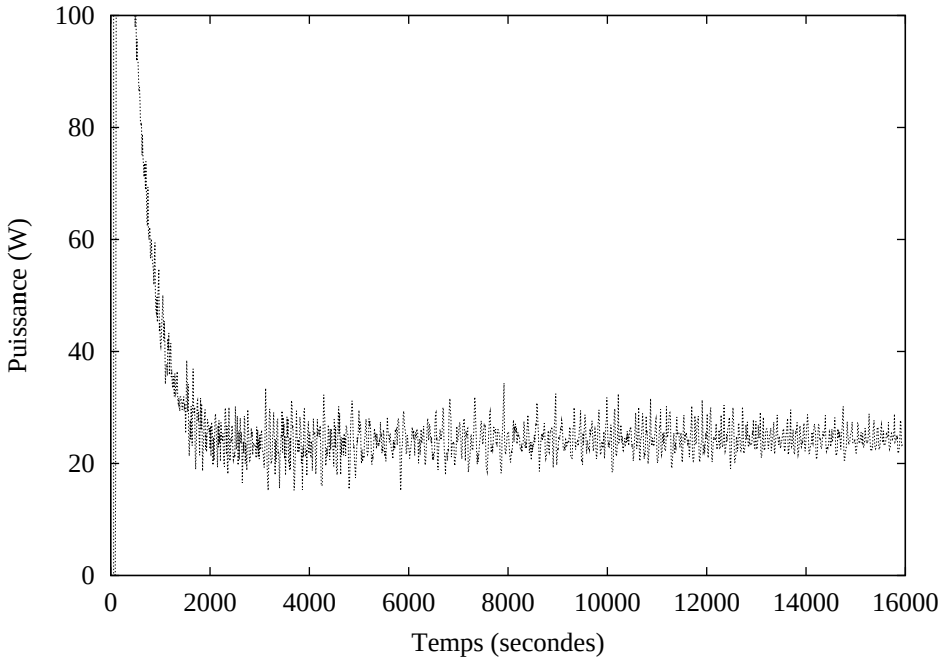


FIG. 6.17 – *Puissance électrique instantanée,* $(n_{mt},\ n_{mc},\ N_p) = (16,\ 16,\ 50s)$

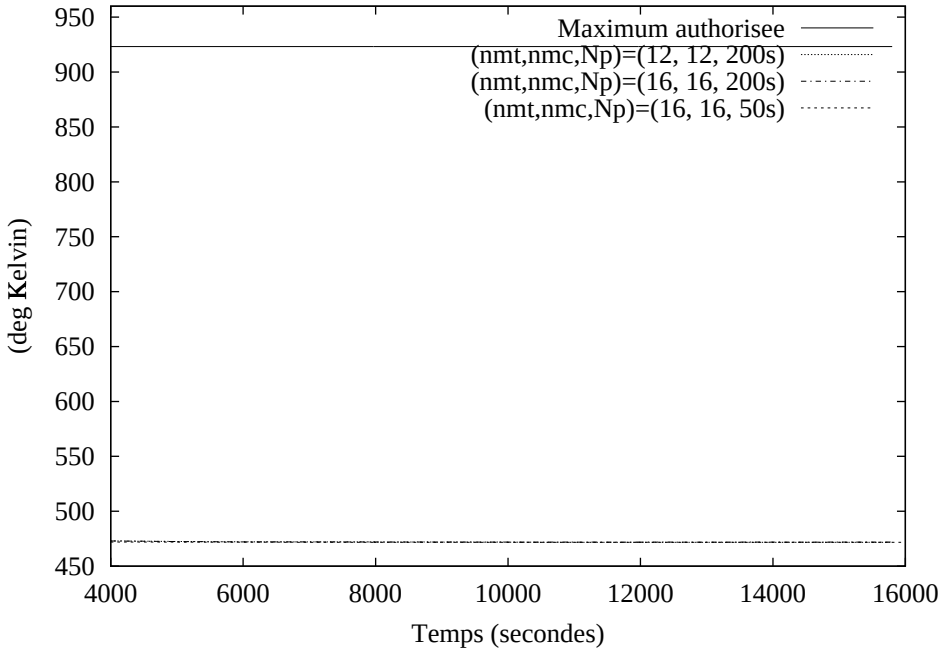


FIG. 6.18 – *Température maximale dans le réacteur*

6.5.4 Concentration haute constante

Pour ce niveau de concentration, les trois simulations mènent aux mêmes résultats (seuls les résultats obtenus avec $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s)$ sont présentés). La concentration moyenne de sortie est nettement inférieure à la norme maximale autorisée (figure 6.19) et la sortie de l'algorithme se fait toujours avec une vérification de la contrainte (figure 6.20).

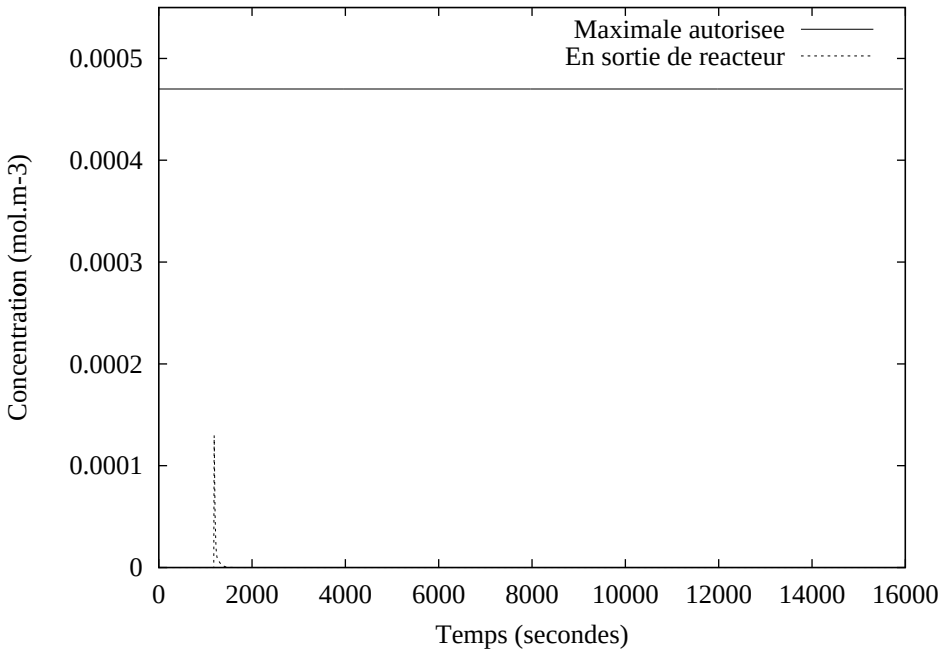


FIG. 6.19 – *Concentration moyenne en sortie du procédé,* $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s)$

Ceci est dû à l'importance du niveau de concentration d'entrée qui place le réacteur en fonctionnement autotherme : la quantité d'énergie dégagée par la destruction du gaz polluant est suffisante pour entretenir la réaction qui nécessite alors un apport de puissance électrique nul (figure 6.21).

Ce mode de fonctionnement semble donc être idéal. Malheureusement, la température à l'entrée du premier monolithe catalytique se situe au dessus du maximum autorisé (figure 6.22).
Comme nous l'avons présenté dans la problématique de commande, les éléments catalytiques tendent alors à s'agglomérer, provoquant une baisse des possibilités de réaction. La validité du modèle est alors remise en cause et les résultats ne sont plus représentatifs du fonctionnement réel. Ce phénomène met donc en évidence la nécessité d'un second actionneur sur le procédé permettant de diminuer la température dans le réacteur.

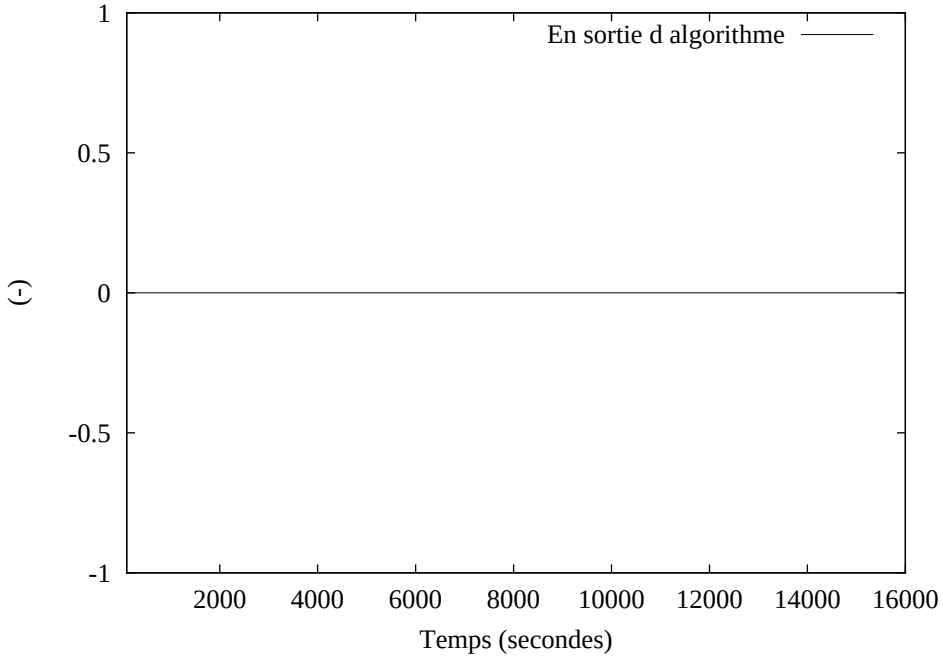


FIG. 6.20 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$

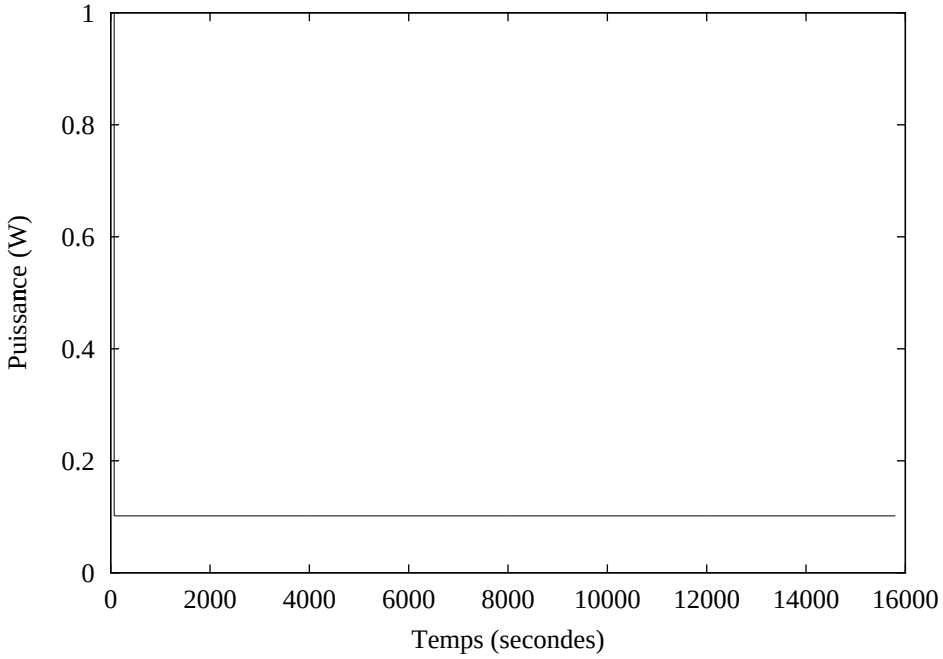


FIG. 6.21 – *Puissance électrique instantanée,* $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$

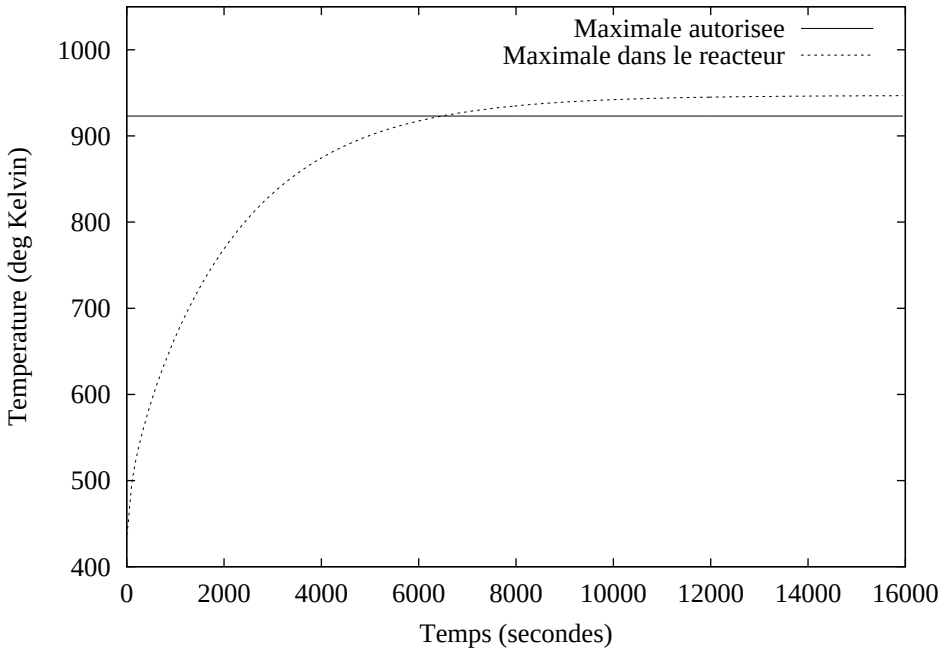


FIG. 6.22 – *Température maximale dans la réacteur,* $(n_{mt}, n_{mc}, N_p) = (16, 16, 50s)$

6.5.5 Concentration basse variable

Remarque 17 *Pour les simulations à concentration d'entrée aléatoire, l'horizon de prédiction est toujours pris le plus faible possible. En effet, suivant les dynamiques de variation de la concentration d'entrée, la vérification des contraintes ne sera pas forcément possible à chaque instant. On cherche seulement alors à minimiser les effets indésirables seulement sur la prochaine sortie et non plus sur un temps futur plus important. L'horizon de prédiction prend donc la valeur minimale possible* ($N_p = 10s$).

Par rapport au cas non bruité, on met maintenant en évidence qu'il existe un nombre minimal de points de discrétisation du modèle à partir duquel la convergence vers une solution satisfaisante au problème semble être assurée (figure 6.23).

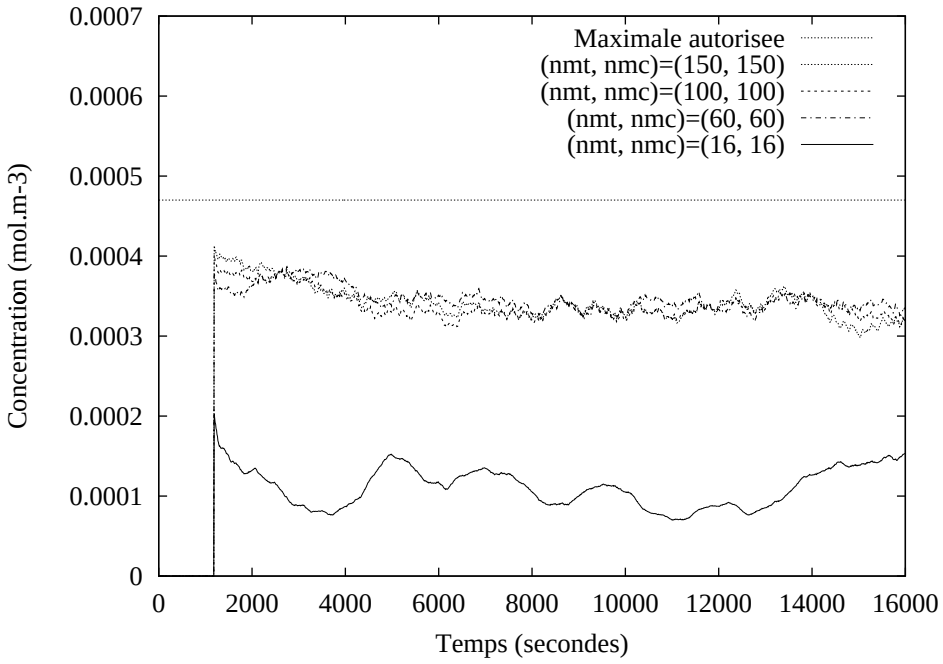


FIG. 6.23 – *Concentration moyenne en sortie du procédé*

Afin de comparer les commandes discontinues déterminées, nous représentons l'évolution de leur valeur moyenne depuis $t = 0$. Là aussi, une convergence existe à partir d'une discrétisation minimale (n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60) (figure 6.24) où la puissance nécessaire est moins importante que dans le cas où (n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16) (figure 6.25).
On peut donc remarquer qu'une diminution de quelques dizaines de watts dans l'apport de puissance provoque un triplement de la concentration de polluant en sortie, tout en continuant à respecter la contrainte (6.14) (figure 6.23). En augmentant le nombre de points de discrétisation, on gagne donc en précision sur l'évolution du procédé ce que l'on perd en temps de calcul. Comme pour le cas non bruité, un compromis est à réaliser à ce niveau.

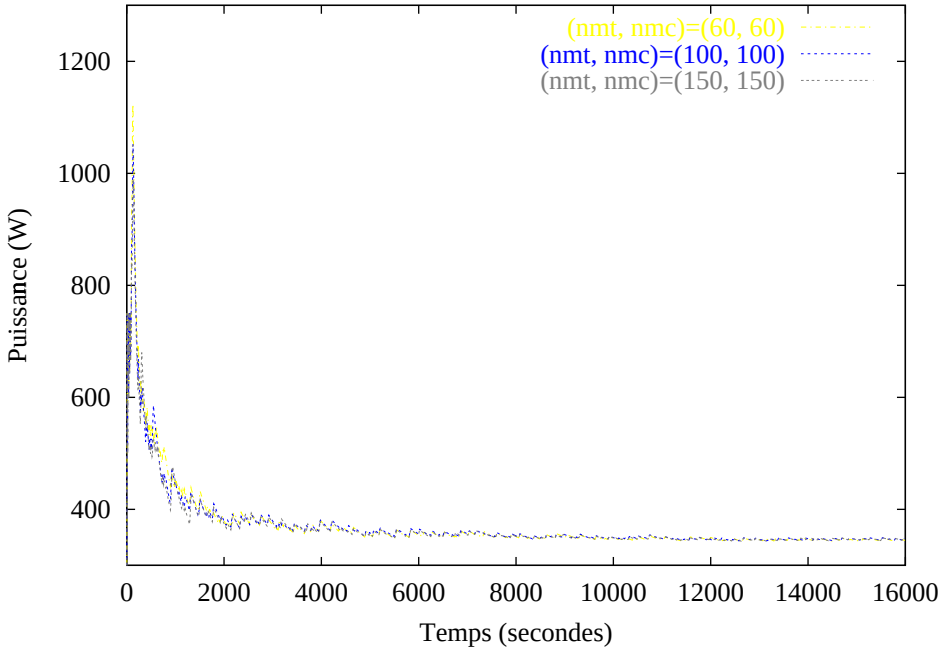


FIG. 6.24 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial*

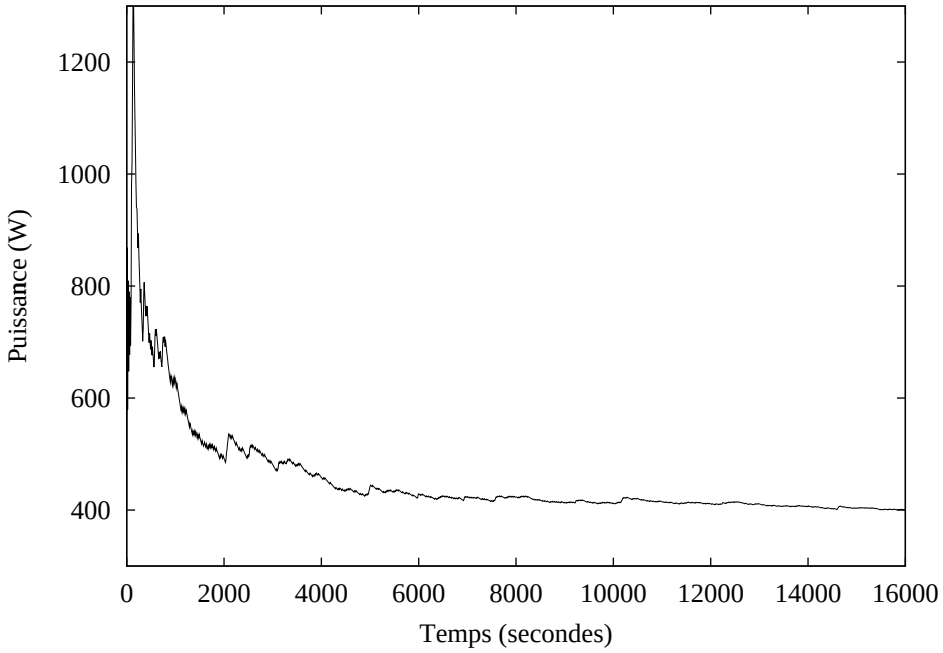


FIG. 6.25 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial,* $(n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16)$

En outre, comme l'a montré la figure 6.23, la vérification de la contrainte (6.14) est effective, bien que la sortie de l'algorithme se fasse souvent avec un temps de calcul trop élevé (figure 6.26).

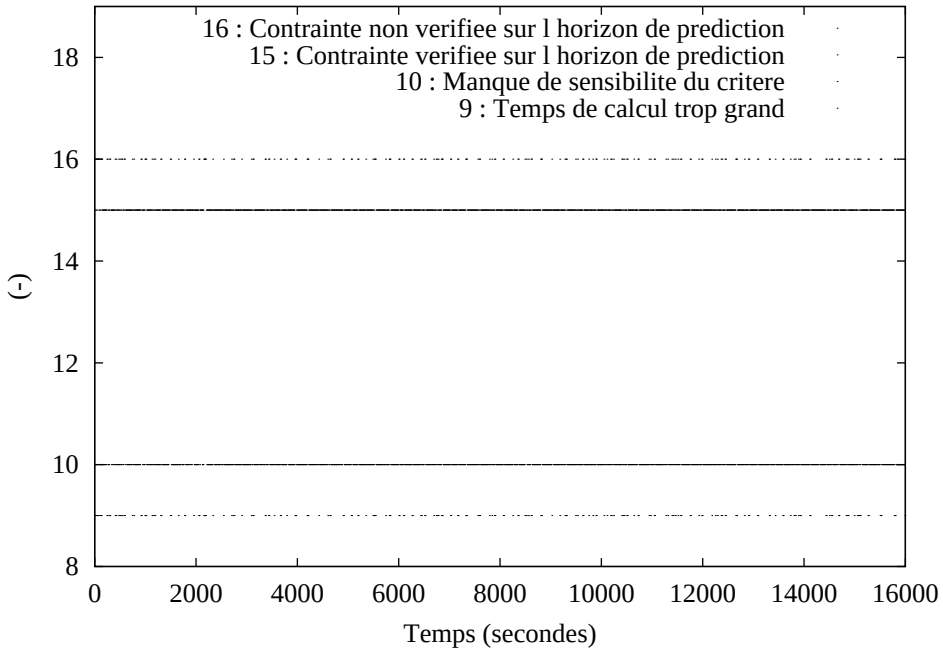


FIG. 6.26 – *Condition de sortie de l'algorithme,* $(n_{mt},n_{mc}) = (60,60)$

Dans ces conditions, l'algorithme ne permet pas toujours d'assurer la vérification de la contrainte instantanée (6.15) posée dans le problème d'optimisation (figures 6.27 et 6.28). Ceci est dû à l'impossibilité de trouver une commande physiquement admissible par l'actionneur permettant de répondre à certaines variations brutales de concentration de gaz entrant. Pour garantir que la contrainte soit vérifiée à chaque instant, il faudrait donc un actionneur ayant des limitations physiques moins importantes.

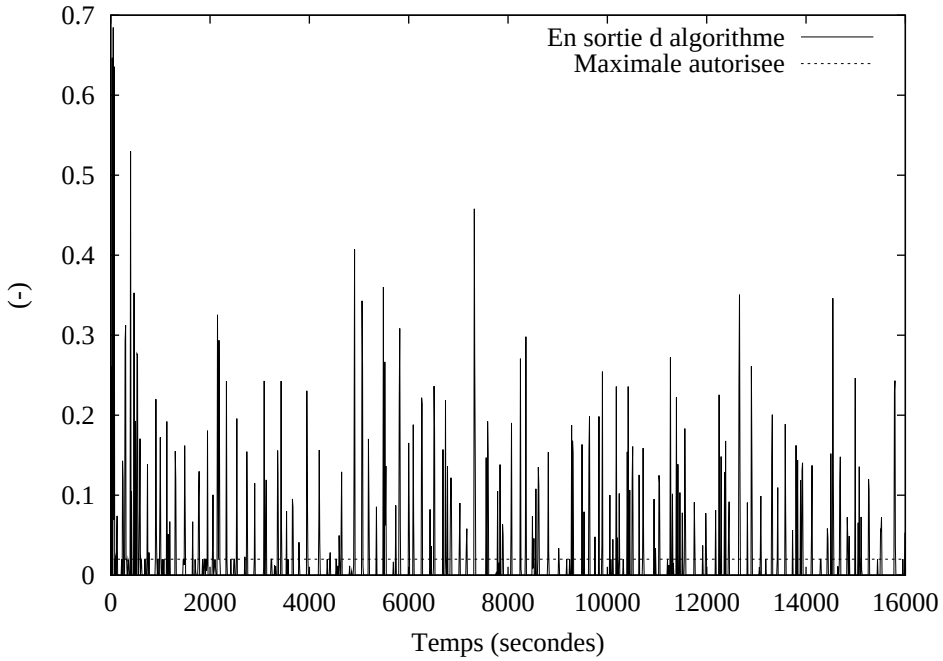


FIG. 6.27 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt},n_{mc}) = (60,60)$

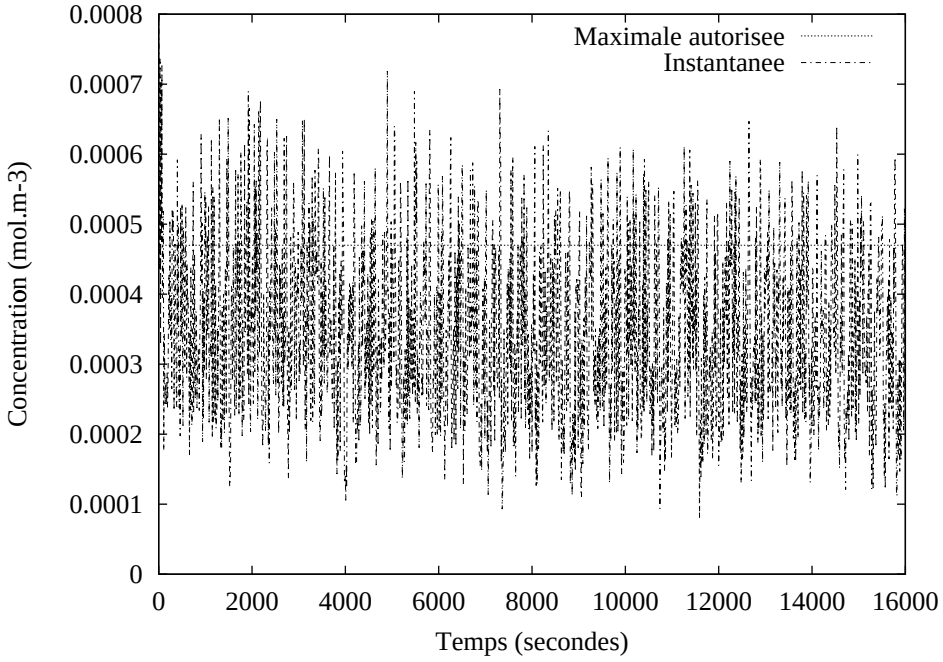


FIG. 6.28 – *Concentration instantanée en sortie du procédé,* $(n_{mt},n_{mc}) = (60,60)$

6.5.6 Concentration moyenne variable

La contrainte (6.14) est à nouveau vérifiée (figure 6.29) et la convergence vers une solution plus proche de la limite autorisée existe là aussi à partir d'un nombre de points minimal $(n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60)$.

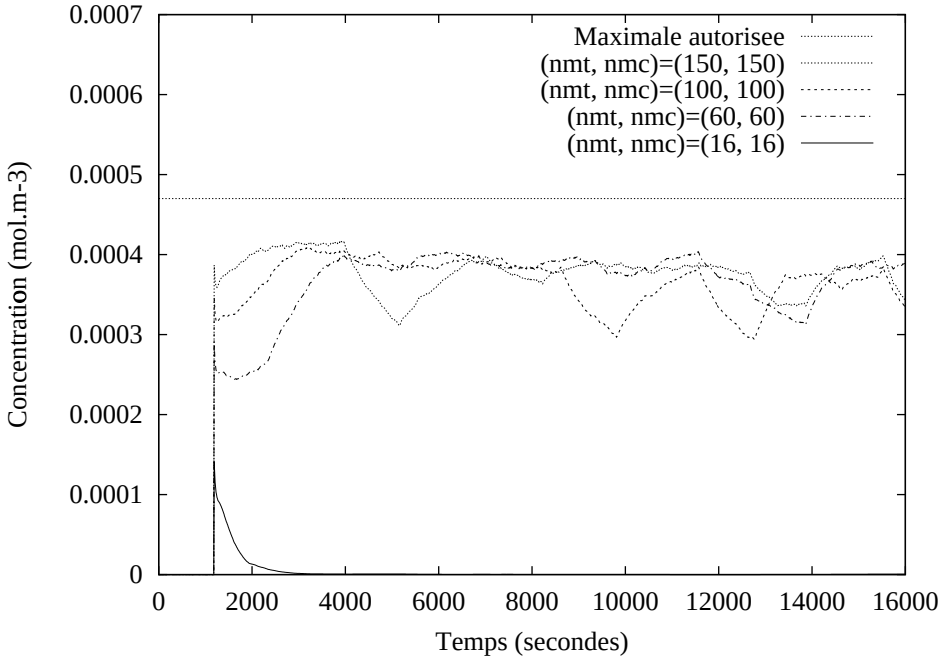


FIG. 6.29 – *Concentration moyenne en sortie de procédé*

Dans le cas le plus défavorable $(n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16)$, le modèle est trop différent du procédé. Il y a incompatibilités entre les contraintes vis-à-vis du problème d'optimisation (qui se sert du modèle). La concentration est alors nettement en dessous du maximum autorisé car l'algorithme n'a pas les moyens de déterminer correctement une commande minimisant le critère de performance. La commande déterminée est dans ce cas trop importante (figure 6.30) et par rapport au problème de minimisation d'apport d'énergie. Des résultats plus intéressants sont obtenus avec les autres jeux de paramètres (figure 6.31). Comme dans le cas non bruité, on se situe presque dans un régime autotherme.

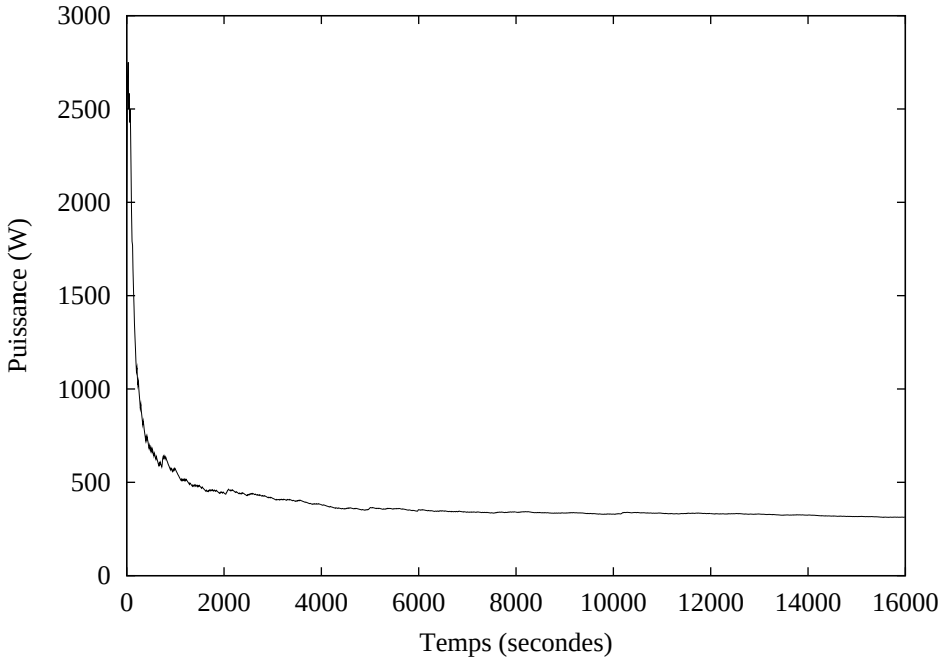


FIG. 6.30 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial,* $(n_{mt},\ n_{mc}) = (16,\ 16)$

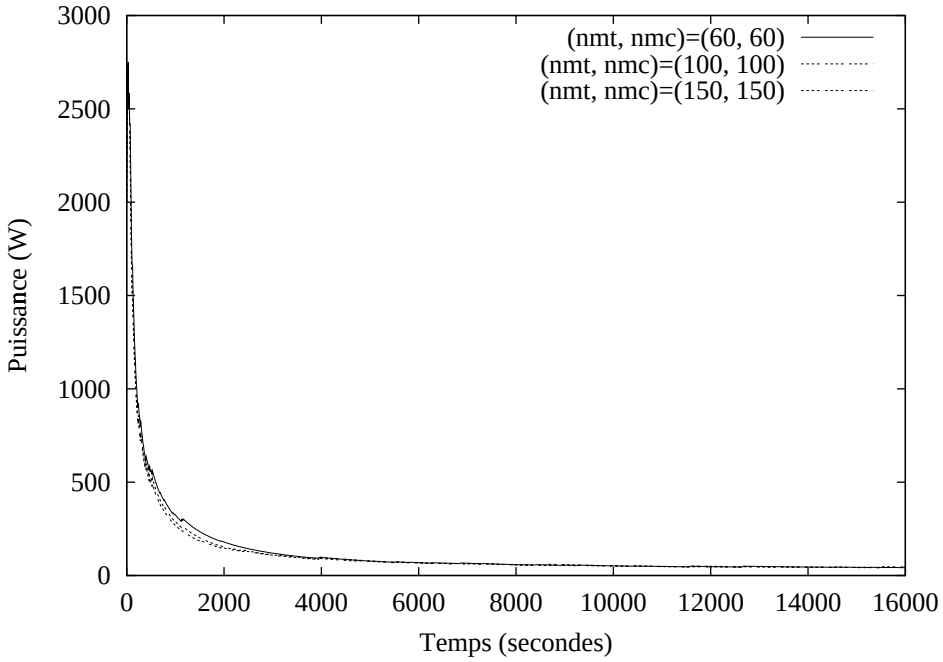


FIG. 6.31 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial*

6.5.7 Concentration haute variable

Comme dans le cas non bruité, cette gamme de concentration assure un mode de fonctionnement permettant de vérifier largement, pour chaque jeu de paramètres, la contrainte sur le rejet de gaz pollué (figure 6.32).

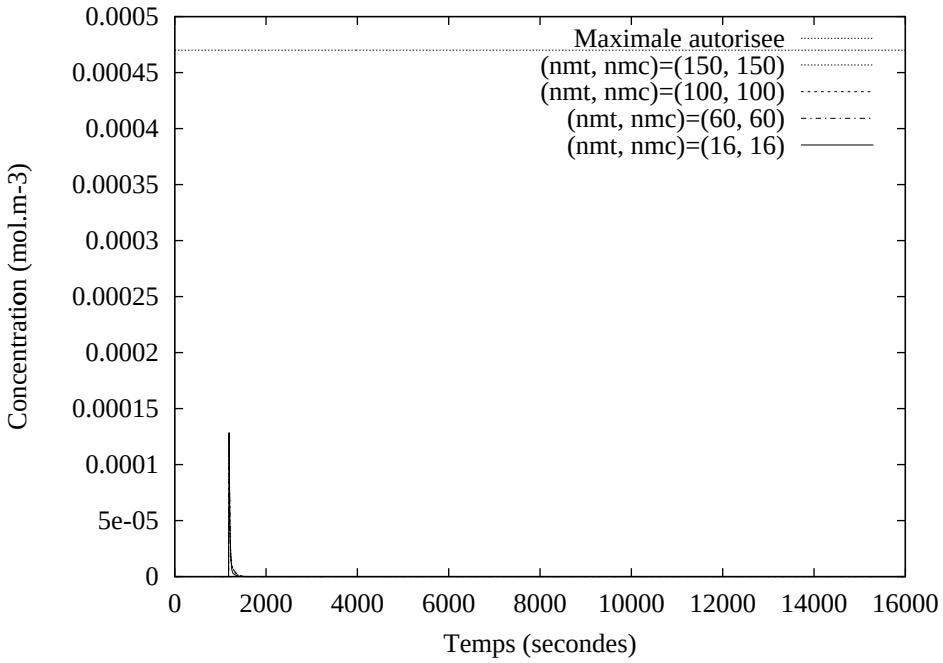


FIG. 6.32 – *Concentration moyenne en sortie de procédé*

Cependant, avec un nombre de points trop faible $(n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16)$, l'algorithme fournit une commande non nulle (figure 6.33) alors qu'avec un nombre de points plus élevé, on retrouve le comportement autotherme décrit précédemment ainsi que la convergence vers la même commande (figure 6.34) que l'on doit forcément retrouver pour cette gamme de concentrations. Il y a donc, dans le premier cas, une surconsommation d'énergie anormale qui pourrait être évitée.
Ce problème de surconsommation est dû là aussi à la mauvaise représentation du comportement du procédé calculée par le modèle obtenu avec $(n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16)$. Le nombre de points de discrétisation est trop faible et cela conduit l'algorithme à sortir, avec un temps de calcul élevé, avec une contrainte qui n'est pas vérifiée sur l'horizon de prédiction (figure 6.35) alors que la figure 6.32 prouve le contraire. Le modèle n'est donc pas assez représentatif du comportement du procédé.

Par contre, avec un nombre de points plus élevé, la représentation du procédé par le modèle est satisfaisante et des résultats cohérents sont obtenus d'après l'algorithme : les contraintes sont toujours vérifiées sur l'horizon de prédiction (figure 6.36).

Enfin, comme dans le cas non bruité, on retrouve le problème lié à la génération de température trop élevée dans le réacteur (figure 6.37).

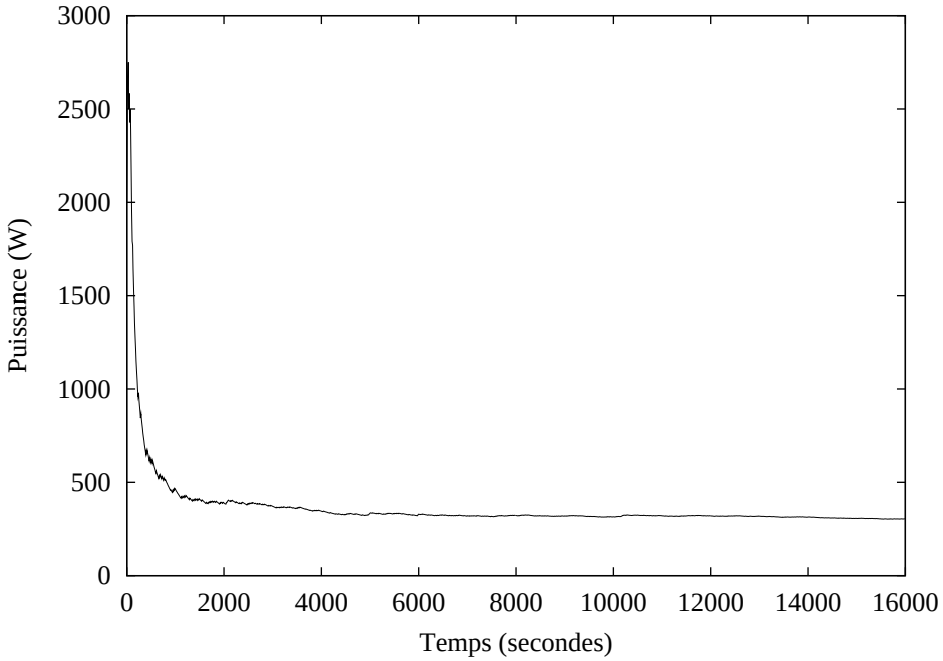


FIG. 6.33 – *Puissance électrique moyenne depuis le temps initial,* $(n_{mt},\ n_{mc}) = (16,\ 16)$

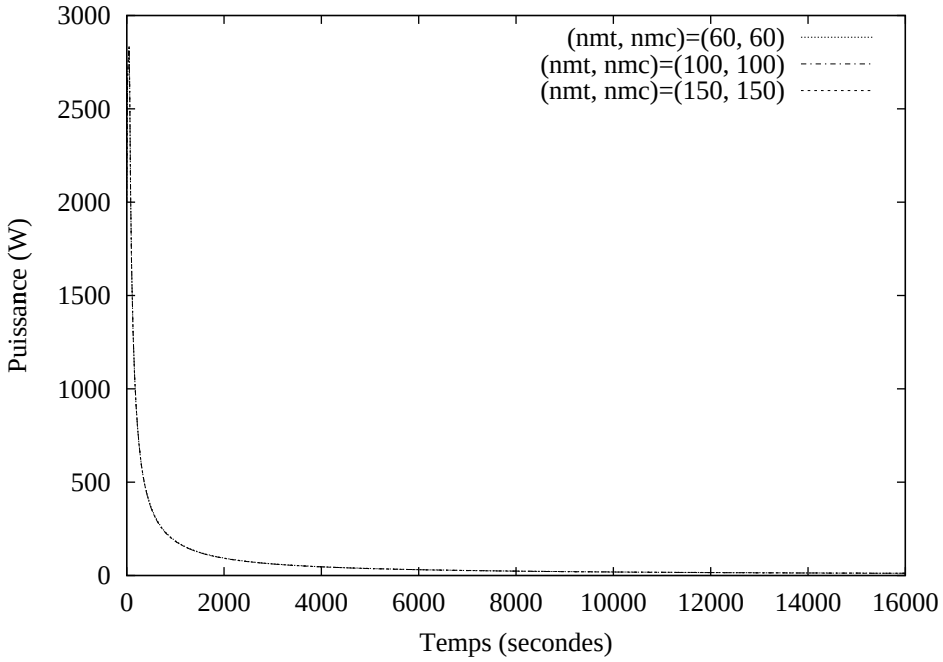


FIG. 6.34 – *Puissance électrique moyenne*

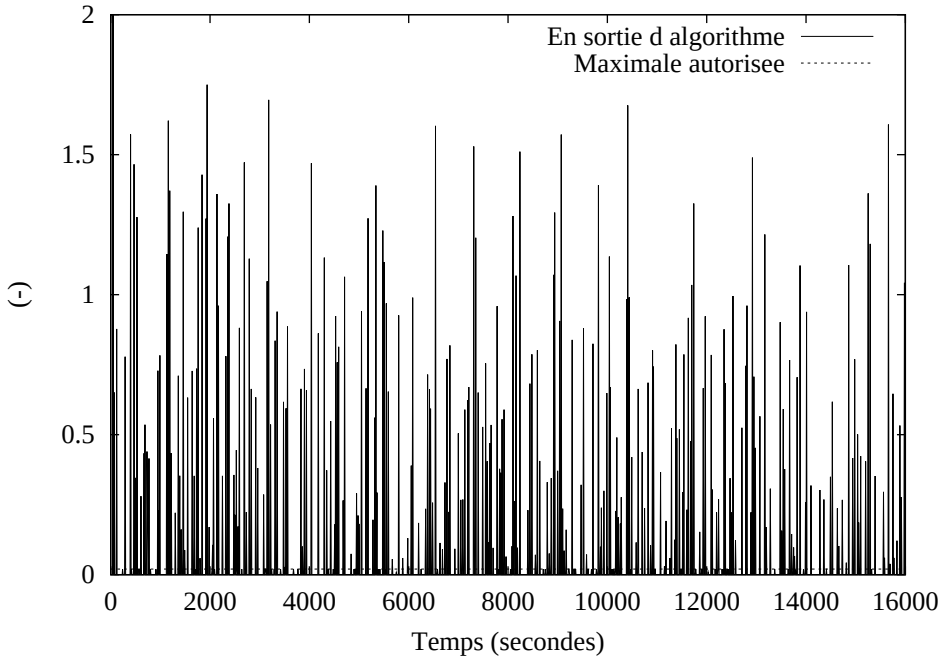


FIG. 6.35 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt}, n_{mc}) = (16, 16)$

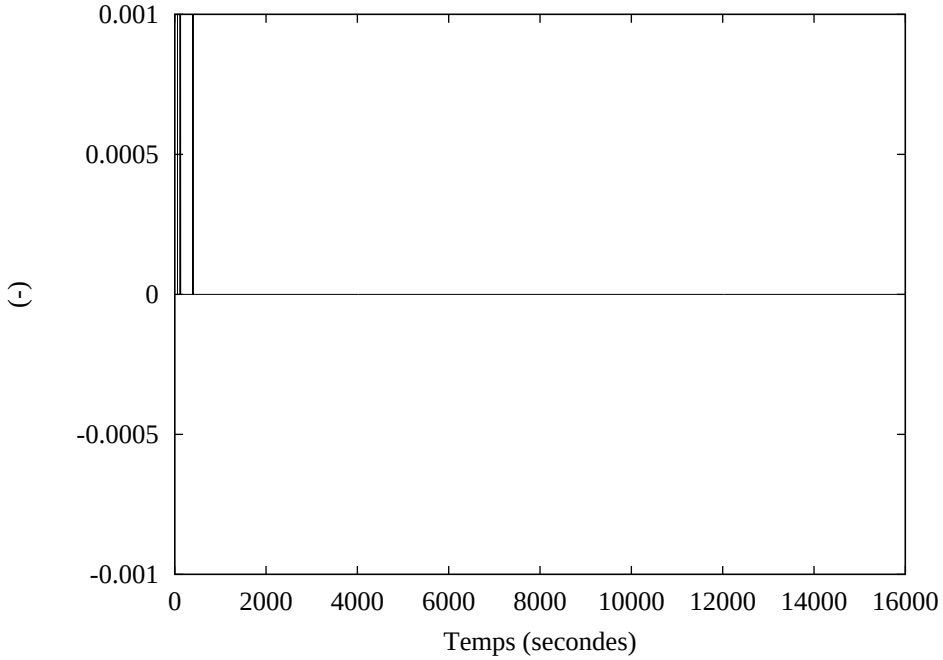


FIG. 6.36 – *Valeur maximale de la contrainte sur l'horizon de prédiction,* $(n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60)$

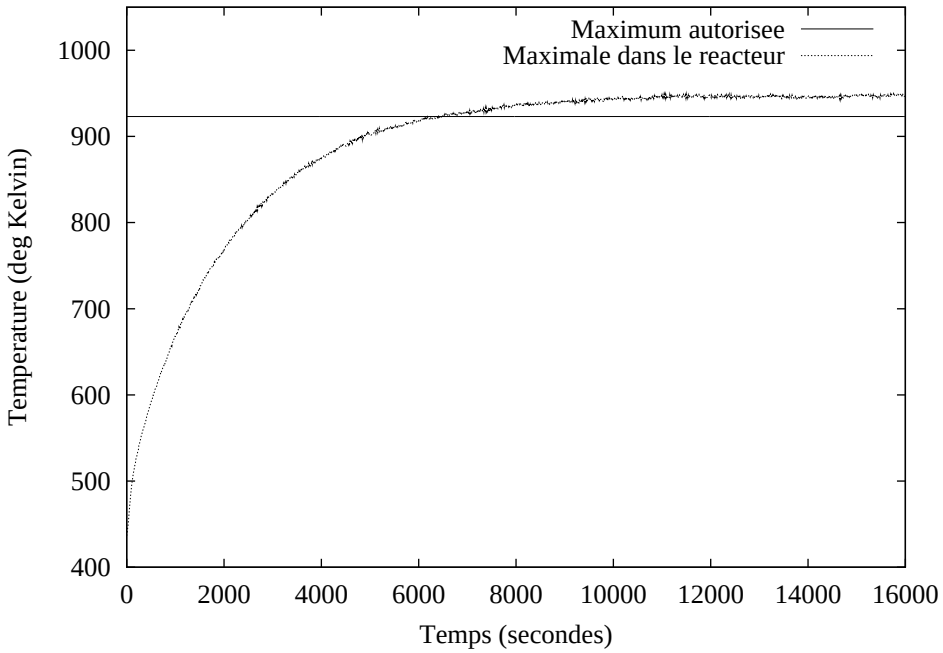


FIG. 6.37 – *Température maximale dans le réacteur,* $(n_{mt}, n_{mc}) = (60, 60)$

6.6 Conclusion

L'utilisation de la stratégie de commande prédictive pour la conduite d'un procédé de destruction de COV par catalyse a permis de mettre en évidence divers comportements : dans le cas idéal où la concentration de gaz polluant en entrée est connue et constante puis dans le second cas plus plausible où cette concentration varie dans un intervalle connu.

Dans le premier cas, l'influence du nombre de points de discrétisation et de la valeur donnée à l'horizon de prédiction a été mise en évidence. Ces paramètres ne doivent pas être trop élevés afin de laisser à l'algorithme assez de temps pour pouvoir déterminer une commande satisfaisant le cahier des charges, notamment pour la vérification de la contrainte sur l'horizon de prédiction. Le jeu de paramètres « optimal » pour chaque niveau de concentration d'entrée est $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (16,\, 16,\, 50s)$.

Dans le second cas, la présence d'une concentration aléatoire a conduit à utiliser un horizon de prédiction minimal directement lié à la dynamique de l'entrée du système : on cherche à réagir au mieux et tout de suite aux fluctuations instantanées en entrée du réacteur.
Contrairement au cas précédent, le nombre de points doit être suffisamment élevé : étant donné l'aspect dynamique de la concentration d'entrée, la représentation du comportement du procédé par le modèle doit être la plus précise afin de fournir des informations pertinentes à l'algorithme. Le jeu de paramètres « optimal » pour chaque niveau de concentration d'entrée est $(n_{mt},\, n_{mc},\, N_p) = (60,\, 60,\, 10s)$. Dans un des cas, une discrétisation trop peu précise (pourtant suffisante dans le cas non bruité) a permis de voir l'insuffisance de la qualité des informations fournies à l'algorithme par la résolution du modèle.

D'autre part, les simulations ont permis de voir que le fonctionnement autotherme était atteint pour une concentration minimale se situant autour de $5\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$: la réaction est auto entretenue par le niveau suffisamment élevé de polluant à traiter et l'apport de puissance électrique devient négligeable.

Enfin, pour des concentrations de niveau élevé (autour de $17\ 10^{-3}\ mol.m^{-3}$), le dégagement d'énergie dûe à la destruction des COV provoque l'apparition de températures trop importantes dans le réacteur : cela met en évidence la nécessité de rajouter un système de refroidissement au procédé.

7

Séchage de peinture par rayonnement infrarouge

Sommaire

7.1 Rayonnement infrarouge et séchage 129
7.2 Procédé pilote de séchage 130
7.3 Modèle [4] 131
7.3.1 Bilan énergétique 132
7.3.2 Bilan massique 133
7.3.3 Système non linéaire à paramètres répartis 134
7.4 Problématiques de commande 135
7.5 Résolution numérique du modèle 136
7.6 Résultats de simulation 137
7.6.1 Conditions de simulation 137
7.6.2 Poursuite de trajectoire en humidité 138
7.6.3 Poursuite de trajectoire en température 142
7.6.4 Conclusion 146
7.7 Résultats expérimentaux 146
7.7.1 Conditions opératoires 146
7.7.2 Poursuite de trajectoire en température 147
7.8 Conclusion 153

7.1 Rayonnement infrarouge et séchage

La problématique du séchage est un des thèmes de recherche de l'équipe *Transferts couplés de matière et de chaleur* du laboratoire. Il concerne le séchage par rayonnement infrarouge de peinture.
Le rayonnement infrarouge, comme tout les transferts radiatifs, permet un transfert d'énergie entre un émetteur (panneau infrarouge par exemple) et un récepteur (pièce à sécher par exemple) sans avoir besoin de support matériel pour véhiculer l'énergie entre ces deux éléments, à la différence des transferts par conduction (qui nécessitent un support solide) ou par convection (avec un support fluide).
Industriellement, le séchage de nombreux produits est obtenu par un apport de chaleur conduisant à l'évaporation du solvant (en général de l'eau) contenu dans le produit.
La souplesse de fonctionnement et la modularité des panneaux infrarouges font qu'on les retrouve dans de nombreux domaines du séchage dans l'industrie [41] ; on citera pour mémoire l'agro-alimentaire, la papeterie et l'automobile [48].
L'utilisation de l'infrarouge en séchage (très souvent associé à la convection) présente les avantages suivants :

- le transfert à distance de l'énergie sans support matériel permet de limiter les dégradations chimiques (oxydation par exemple) ou les pollutions (par les poussières par exemple) du produit à sécher,

- la densité de puissance transférée est beaucoup plus élevée qu'avec les techniques traditionnelles de séchage par convection, d'où des vitesses de traitement plus importantes,

- l'inertie des émetteurs est généralement faible, ce qui permet une conduite plus performante.

Mais cette utilisation rencontre aussi certaines limites :

- un produit peu absorbant conduit à un rendement du transfert médiocre,

- l'absorption se fait à la surface du produit et seul les produits minces présenteront une homogénéité de température,

- le produit doit pouvoir supporter la température imposée par le transfert,

- si la surface du produit n'est pas plane, l'éclairement n'est pas homogène ce qui se traduira par des gradients thermiques qui peuvent être préjudiciables.

Dans l'industrie automobile, de nombreuses étapes de la construction font appel à des techniques de séchage (avec très souvent une réaction chimique en parallèle) :

assemblage d'éléments de carrosserie, traitements de surface, peinture et retouche. Compte tenu des puissances nécessaires et des cadences propres au monde de l'automobile, l'infrarouge est largement utilisé et l'arrivée des peintures à bases aqueuses a renforcé cette utilisation.

Dans le cadre de cette dernière application, une thèse a porté sur l'étude théorique et expérimentale du séchage d'une peinture à base aqueuse sur support métallique par rayonnement infrarouge avec validation d'un modèle sur un banc de séchage pilote monté au sein du laboratoire [4].

On s'intéresse ici à la commande de ce procédé de séchage en terme de poursuite de trajectoire de référence en température ou en humidité.

Nous présentons d'abord le procédé pilote, ce qui permet de décrire les différents phénomènes physiques présents au cours du séchage ainsi que le modèle de connaissance développé au cours de la thèse précédente. Les problèmes de commande en ligne sont alors posés. Une étude numérique de la résolution du modèle est d'abord menée, puis les résultats de poursuite de trajectoire en simulation [14] et expérimentaux [21] sont présentés.

7.2 Procédé pilote de séchage

Un procédé pilote de séchage de laboratoire a été conçu pour le travail de thèse cité ci-dessus [4]. Avec une puissance infrarouge installée de 12 kilowatt, il permet de sécher un film de peinture déposé sur un échantillon de tôle. Ce procédé a permis, à partir des mesures de masse et de température au cours de cinétiques expérimentales de séchage, de valider un modèle de connaissance que nous utilisons dans le cadre de ce travail.

La figure 7.1 représente schématiquement la partie infrarouge de ce pilote avec l'instrumentation correspondante. Sa dimension extérieure est de $1m \times 0.5m \times 0.5m$. Il est constitué par 4 parois réfléchissantes en aluminium refroidies par une circulation d'eau ; cette disposition permet de limiter les émissions parasites.

En partie basse, la zone de séchage est matérialisée par :

- sur le dessus, une plaque de verre en vitrocéramique transparente aux infrarouges courts ($0.5\mu m \leq \lambda \leq 2\mu m$) utilisés sur ce pilote,

- à la base, une surface noire rendue isotherme par circulation d'eau afin de limiter le flux infrarouge réfléchi ; cette surface dispose en son centre d'une ouverture de $200 \times 200mm$ permettant l'introduction de l'échantillon à sécher,

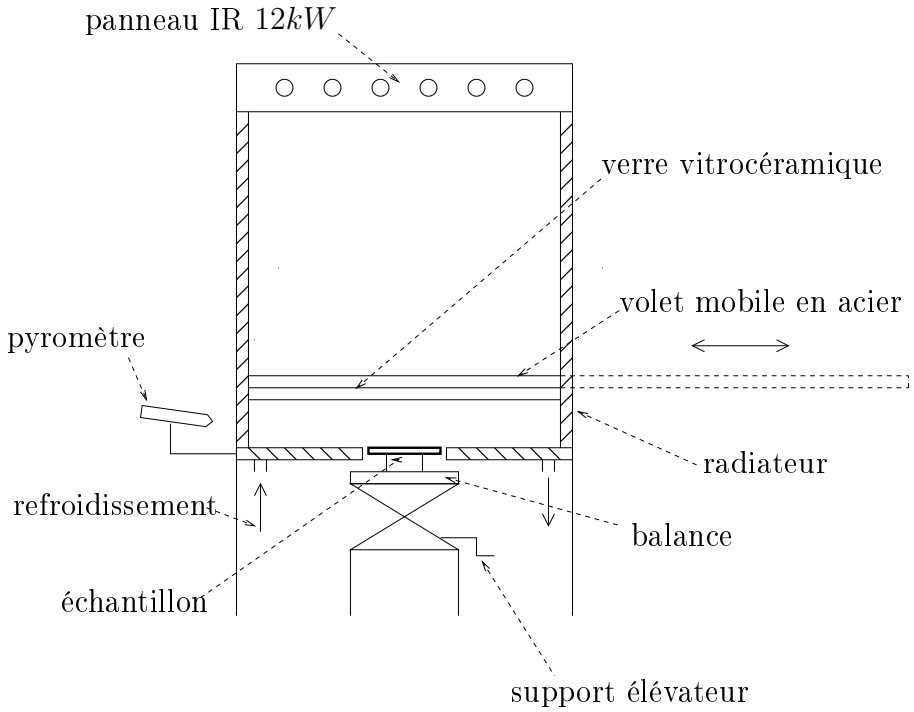


FIG. 7.1 – *Procédé pilote de séchage*

- un support élévateur permet d'amener l'échantillon à sécher ($150 \times 150mm$) posé sur une balance de précision au niveau de la base,

- un volet mobile en acier permet d'isoler l'échantillon du flux infrarouge pendant la phase de mise en place ; ce dispositif permet de garantir des conditions initiales reproductibles.

Concernant la partie instrumentation :

- un pyromètre permet de mesurer la température à la surface de l'échantillon,

- une balance de précision permet le suivi en ligne de la masse de l'échantillon faisant intervenir la masse de la tôle, la masse d'eau et la masse sèche finale de peinture.

7.3 Modèle [4]

Au cours du séchage, l'élévation de température conduit à une migration de l'eau de l'intérieur vers la couche supérieure de l'échantillon, puis à l'évaporation de celle-ci à la surface.

La peinture, déposée suivant un film de l'ordre de 0.1 mm d'épaisseur, sera caractérisée par sa température T et par l'humidité en base sèche χ. Le flux de chaleur apporté à la surface (contrôle frontière) est supposé faire varier de manière uniforme la température du film dans toute son épaisseur. La commande devient alors scalaire et indépendante de l'épaisseur z. L'humidité χ sera par contre supposée variable par rapport à z.
Expérimentalement, on mesure la température de surface qui est représentative de la température du film, ainsi que la masse de l'échantillon qui évolue en fonction de la perte en eau de la peinture au cours du séchage. On accède à l'humidité en base sèche à partir de sa définition, à savoir : c'est le rapport entre la masse d'eau contenue dans l'échantillon à un instant donné et la masse de peinture sèche. Cette dernière est calculée, a priori, en fonction de la quantité des divers éléments nécessaires à l'élaboration de la peinture.
Le séchage de la peinture, conduisant à une perte de masse, se traduit par une variation dimensionnelle ; compte tenu de la surface de peinture par rapport à l'épaisseur du film, on considère que l'extraction d'eau conduit uniquement à une diminution de l'épaisseur du film et celle-ci est supposée varier linéairement avec l'humidité moyenne $\bar{\chi}$:

$$e_p = e_{sec}(1 + \phi\bar{\chi}) \tag{7.1}$$

où e_{sec} est l'épaisseur finale théorique de la couche de peinture sèche et où l'expression de l'humidité moyenne est :

$$\bar{\chi}(t) = \frac{1}{e_{sec}} \int_0^{e_{sec}} \chi(z,t)\ dz \tag{7.2}$$

Remarque 18 *La signification et la valeur de chaque paramètre sont données en annexe.*

Finalement le modèle de séchage infrarouge du film de peinture peut être représenté par les variables d'état $T(t)$ et $\chi(z,t)$. L'écriture des bilans d'énergie et de masse permet d'aboutir à un système d'équations aux dérivées partielles à commande scalaire.
Pour les deux bilans, les divers coefficients et les expressions restantes sont donnés en annexe.

7.3.1 Bilan énergétique

L'épaisseur du film de peinture est suffisamment faible pour considérer que la température est homogène sur toute l'épaisseur z. De plus, le support est un assez bon conducteur thermique pour considérer que la température est uniforme sur tout le système (peinture+support).

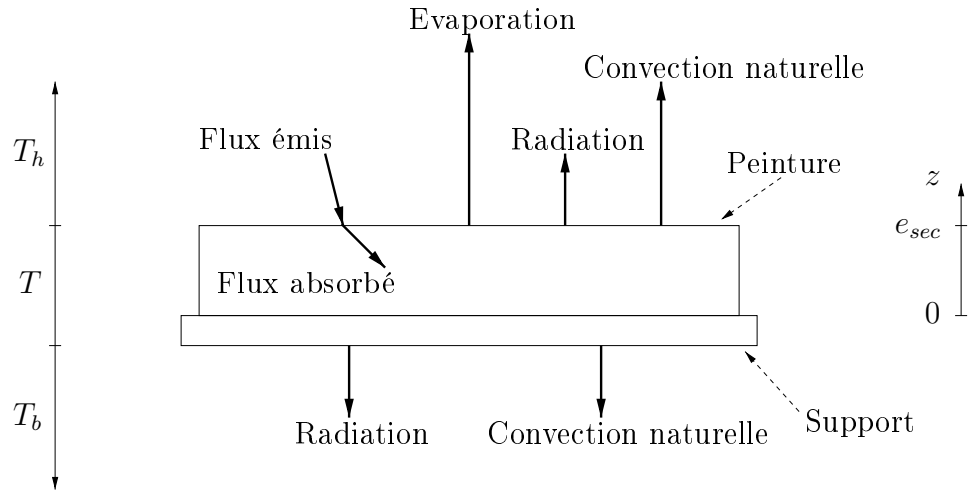


FIG. 7.2 – *Les divers flux*

Le bilan thermique qui s'en suit s'écrit donc :

$$(\rho_p C_p(\bar{\chi},T)e_p + \rho_s C_s e_s)\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{5} P_i + P_{abs} \tag{7.3}$$

où $\rho_p C_p(\bar{\chi},T)e_p$ et $\rho_s C_s e_s$ sont les capacités thermiques surfaciques respectivement liées à la peinture et au support.
Les différentes pertes dues aux phénomènes de convection et de radiation des deux surfaces de contact avec l'extérieur ont pour expression :

$$P_1 = h_c(T - T_h) \tag{7.4}$$
$$P_2 = 0.96\ \sigma(T^4 - T_h^4) \tag{7.5}$$
$$P_3 = h_c(T - T_b) \tag{7.6}$$
$$P_4 = \alpha_s\ \sigma(T^4 - T_b^4) \tag{7.7}$$

La perte d'eau par évaporation P_5, liée à la vitesse de séchage $\dot{m}$ et la puissance absorbée par infrarouge P_{abs} (qui fait intervenir la commande φ_{ir}) s'expriment selon :

$$P_5 = l_v(T)\dot{m}(\bar{\chi},T) \tag{7.8}$$
$$P_{abs} = \alpha_{ir}(\bar{\chi})\varphi_{ir} \tag{7.9}$$

7.3.2 Bilan massique

Compte tenu de l'absence de structure macroporeuse au sein de la peinture, on considère que l'eau migre uniquement par diffusion au sein du produit. Ceci permet d'écrire, grâce à la loi de Fick, le bilan massique qui suit :

- pour $z \in \Omega =]0,e_{sec}[$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}[D_{eff}(\chi,T)\frac{\partial \chi}{\partial z}] \tag{7.10}$$

avec le coefficient de diffusion effectif D_{eff} qui est fonction de l'humidité et de la température :

$$D_{eff}(\chi,T) = \frac{D_0 exp^{(\frac{-a}{\chi})} exp^{(\frac{-Ea}{RT})}}{(1+\phi\chi)^2} \tag{7.11}$$

- en $z = 0$, au niveau de la tôle, il n'y a aucun transfert de matière :

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \tag{7.12}$$

- en $z = e_{sec}$, le flux sortant est lié à la vitesse de séchage $\dot{m}$ par la relation :

$$-D_{eff}(\chi,T)\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\dot{m}(\bar{\chi},T)}{\rho_p} \tag{7.13}$$

7.3.3 Système non linéaire à paramètres répartis

Le modèle s'écrit donc sous la forme d'un système non linéaire à paramètres répartis :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial t} = F_1(\dfrac{\partial \chi}{\partial z},\ \chi,\ T) \text{ sur } \Omega\times]0,+\infty[\\ \dfrac{dT}{dt} = F_2(\bar{\chi},\ T) + F_3(\bar{\chi},T)\varphi_{ir}(t) \text{ sur }]0,+\infty[\\ \text{avec les conditions aux limites :} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \text{ sur } \{z=0\}\times]0,+\infty[\\ F_4(\dfrac{\partial \chi}{\partial z},\bar{\chi},\chi,T) = 0 \text{ sur } \{z=e_{sec}\}\times]0,+\infty[\\ \text{avec les conditions initiales :} \\ \chi(z,0) = \chi_0 \text{ sur } \overline{\Omega} \\ T(0) = T_0 \end{cases} \tag{7.14}$$

Etant donné que la commande $\varphi_{ir}(t)$ intervient dans la dynamique de la température supposée uniforme, le flux infrarouge agit instantanément en tout point. C'est donc une commande scalaire.

7.4 Problématiques de commande

La stratégie de commande, actuellement utilisée en industrie, a été conçue selon une méthode d'essais-erreurs de la façon suivante : pour une série de véhicules identiques, plusieurs expériences à divers flux infrarouges constants sont effectuées.
De façon plus générale, on peut dire que, au cours du séchage d'une peinture à l'eau, on recherche une bonne adéquation entre le temps de séchage et la qualité finale, sachant qu'un séchage trop rapide en surface conduit à un piégeage des particules d'eau au sein du produit avec pour conséquence des phénomènes de bullage ou de fissuration.
L'analyse des précédents résultats permet alors de déterminer, à partir du temps opératoire et surtout de la qualité du produit final, la meilleure commande constante à appliquer pour chaque série de véhicules.

Dans cette optique, deux problèmes de poursuite de trajectoire peuvent être posés :

- pour certains types de procédé de séchage, il peut être intéressant d'assurer à l'humidité moyenne un certain profil d'évolution (figure 7.3). Ce profil « optimal » est donné en fonction des connaissances de l'opérateur. Il ne répond donc pas à un problème d'optimisation posé hors-ligne et cela explique les discontinuités de cette trajectoire.

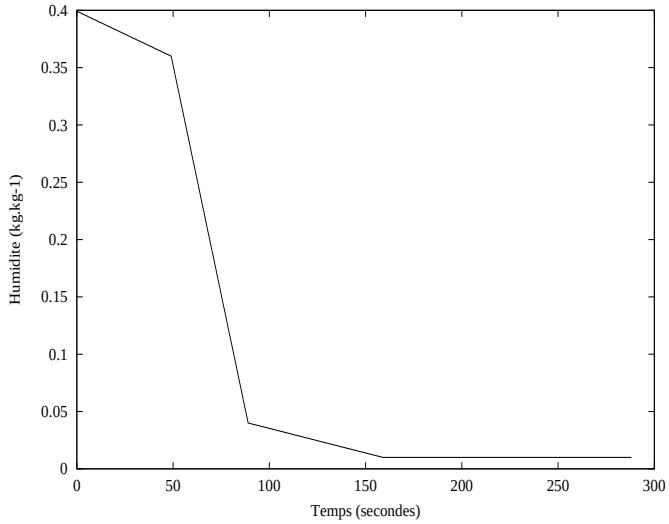


FIG. 7.3 – *Trajectoire de référence en humidité moyenne*

- actuellement, les fournisseurs de peinture proposent un profil d'évolution de la température durant le séchage avec une montée la plus rapide possible vers une

température fixée avec ensuite le maintien de cette température pendant un certain temps. Là aussi, ce profil à poursuivre correspond plus à des connaissances expérimentales « optimales » du comportement du procédé qu'à un problème d'optimisation résolu hors-ligne. On pourrait donc imaginer des trajectoires du type de celle proposée sur la figure 7.4, qui permettrait d'obtenir un compromis entre le temps de séchage et la qualité finale du film de peinture sec.

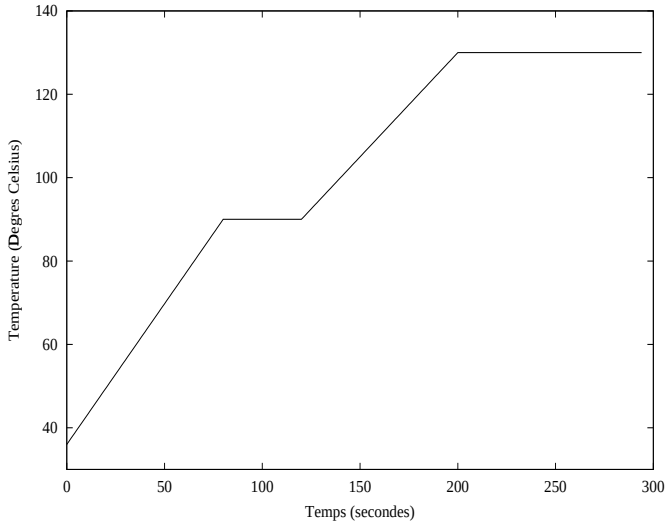


FIG. 7.4 – *Trajectoire de référence en température*

Remarque 19 *Un problème correspondant plus à la réelle problématique pourrait être traité: assurer un séchage le plus rapide possible. Cela nécessiterait alors de modéliser les problèmes liés aux phénomènes de bullage et de fissures engendrés et de formuler des contraintes. A l'heure actuelle, une telle modélisation n'est malheureusement pas encore disponible.*

Le problème de commande est donc de réaliser la poursuite de l'une des ces deux trajectoires. Ces deux problèmes de poursuite de trajectoire sont d'abord tous les deux traités en simulation, puis en temps réel uniquement pour la poursuite de température [21].

7.5 Résolution numérique du modèle

Une des contraintes les plus importantes dans la stratégie de commande prédictive est le temps de calcul de la commande qui doit être inférieur à la période d'échantillonnage. Dans cette optique, le modèle doit être résolu en un temps minimum. Une étude préliminaire concerne donc la résolution numérique du modèle non linéaire. La première approche utilisée était celle des différences finies. Les résultats

ont alors été comparés en terme de rapidité et de précision à ceux obtenus par l'utilisation de la méthode des volumes finis.
Le tableau 7.1 représente, pour ces deux méthodes, pour la température et l'humidité moyenne, le nombre de points semblant assurer une discrétisation optimale. La comparaison des temps de calcul en unité de temps est alors faite à temps simulé identique :

Méthode	Température		Humidité moyenne	
	Nb de points	Tps de calcul (u.t)	Nb de points	Tps de calcul (u.t)
Différences finies	10	2.1	20	2.6
Volumes finis	3	1	10	1

TAB. 7.1 – *Discrétisation et temps de calcul du modèle*

Si les premiers résultats de poursuite en simulation numérique utilisant la méthode des différences finies ont été satisfaisants, on voit que l'utilisation de la méthode des volumes finis permet d'arriver à une meilleure représentation de la solution en terme de rapidité.
En vue de la poursuite de trajectoire de température en temps réel, la résolution du modèle par la méthode des volumes finis est par conséquent adoptée dans la suite.

7.6 Résultats de simulation

Comme nous l'avons vu auparavant, l'objectif de commande est de déterminer le flux infrarouge $\varphi_{ir}(t)$ qui minimise la différence entre la trajectoire de référence (en température ou en humidité) et la sortie du procédé simulé, tout en respectant les contraintes d'amplitude et de vitesse du flux infrarouge.

7.6.1 Conditions de simulation

Les conditions sont les suivantes :

- la linéarisation autour du modèle ($\mathcal{S}_0$) s'effectue hors-ligne avec $u_0(t) = 5000\, W.m^{-2}$,
- le procédé et le système ($\mathcal{S}_{LTV}$) sont résolus en ligne avec le même schéma de discrétisation spatiale par la méthode des volumes finis,
- la période d'échantillonnage T_e vaut 1s,

- l'horizon de commande N_c est égal à 1,
- concernant les contraintes, seules les limitations sur l'amplitude et la vitesse de la commande sont considérées :

$$\begin{cases} 0\ W.m^{-2} \leq \varphi_{ir}(t) \leq 12000\ W.m^{-2} \\ -500\ W.m^{-2}.s^{-1} \leq \dot{\varphi_{ir}}(t) \leq 500\ W.m^{-2}.s^{-1} \end{cases} \tag{7.15}$$

- les conditions atmosphériques sont :

$$\begin{cases} \chi_{air} = 20\% \\ T_h = 52^oC \\ T_b = 20^oC \end{cases} \tag{7.16}$$

- les conditions initiales du modèle et du procédé sont :

$$\begin{cases} T_0 = 26^oC \\ \chi_0 = 0{,}4\ kg.kg^{-1} \end{cases} \tag{7.17}$$

- les bornes ε des différents tests sont prises suffisamment faibles pour permettre à l'algorithme de trouver, si le temps de calcul le permet, une solution précise au problème ;
- les simulations sont effectuées par un PC cadencé à 500 MHz.

Afin de mettre en évidence l'influence de la valeur de l'horizon de prédiction N_p sur les performances de poursuite, ce dernier prendra des valeurs différentes pour chaque expérience.

Remarque 20 *Afin de tenir compte des N_p termes nécessaires au calcul de la fonction coût, on représentera le critère de performance normalisé $\frac{1}{N_p}J_{tot}$ au lieu du critère de performance J_{tot}.*

Remarque 21 *Dans toutes les simulations, les calculs ont été terminés dans un temps inférieur au temps maximum fixé. La procédure d'optimisation s'arrête car le test sur la faible variation du critère entre les deux dernières itérations est vrai (inférieure à 0.1 %) : on sort donc toujours avec la meilleure solution possible.*

7.6.2 Poursuite de trajectoire en humidité

L'horizon de prédiction N_p est pris constant au cours de chaque expérience (15s, 27s puis 40s).

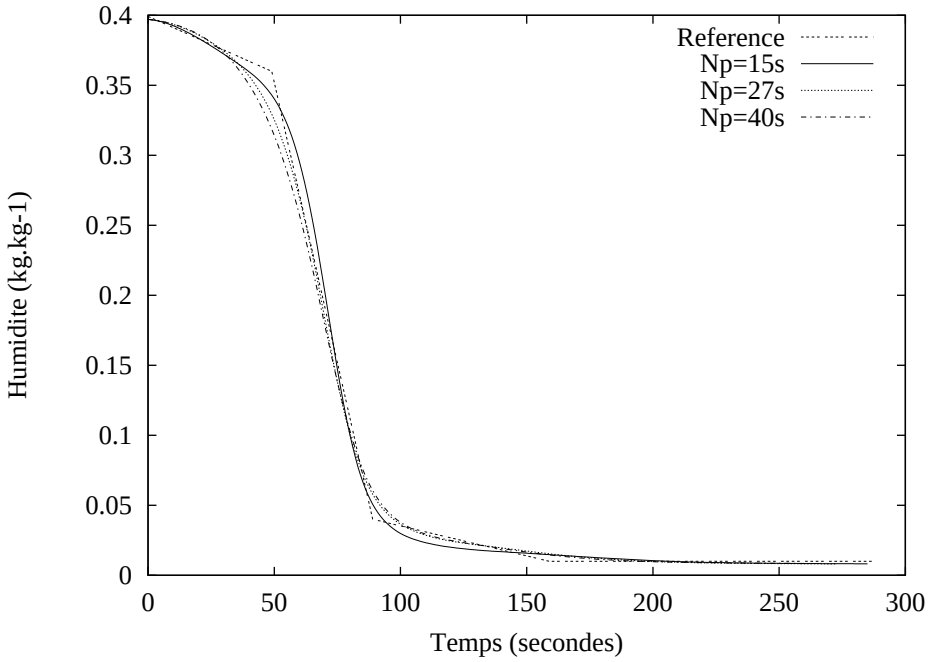


FIG. 7.5 – *Poursuite de trajectoire pour* $N_p = 15s$, $27s$, $40s$

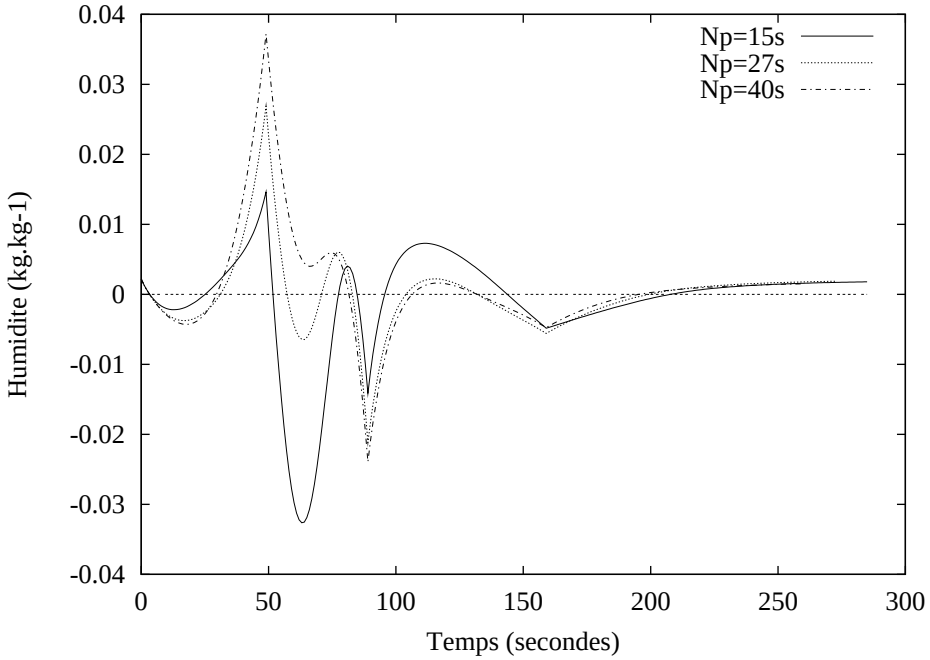


FIG. 7.6 – *Ecart de poursuite pour* $N_p = 15s$, $27s$, $40s$

Bien que la référence soit difficile à poursuivre, en raison des discontinuités qu'elle présente, la poursuite est relativement satisfaisante (figure 7.5 pour la poursuite et figure 7.6 pour l'écart de poursuite). La valeur intermédiaire $N_p = 27s$ donne les meilleurs résultats.

Pour un horizon de prédiction de 15s, le problème est mal conditionné car les contraintes sont très souvent saturées (figure 7.7 et 7.8) : l'algorithme tend alors à déterminer une commande qui n'est pas physiquement réalisable par l'actionneur. Pour un horizon de prédiction de 40s, la minimisation de la fonction coût normalisée (figure 7.9) mène, jusqu'à l'instant t =80s, à des valeurs plus importantes que pour le cas optimal où N_p = 27s. La quantité d'informations est donc trop importante et le compromis pour tenir compte des tendances attendues situées autour de la première discontinuité est trop difficile à réaliser.

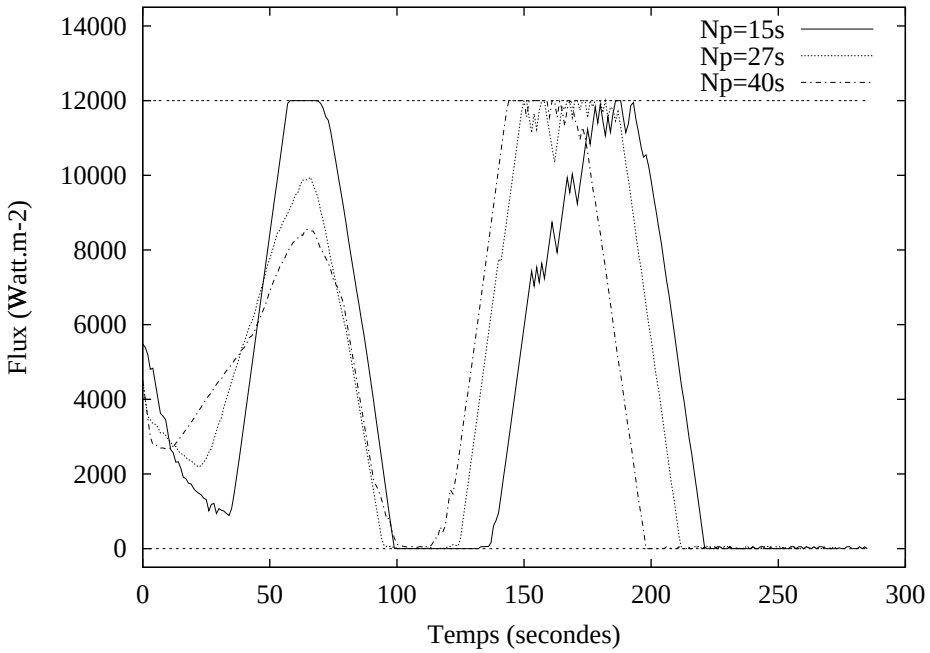


FIG. 7.7 – *Amplitude de la commande pour* $N_p = 15s$, $27s$, $40s$

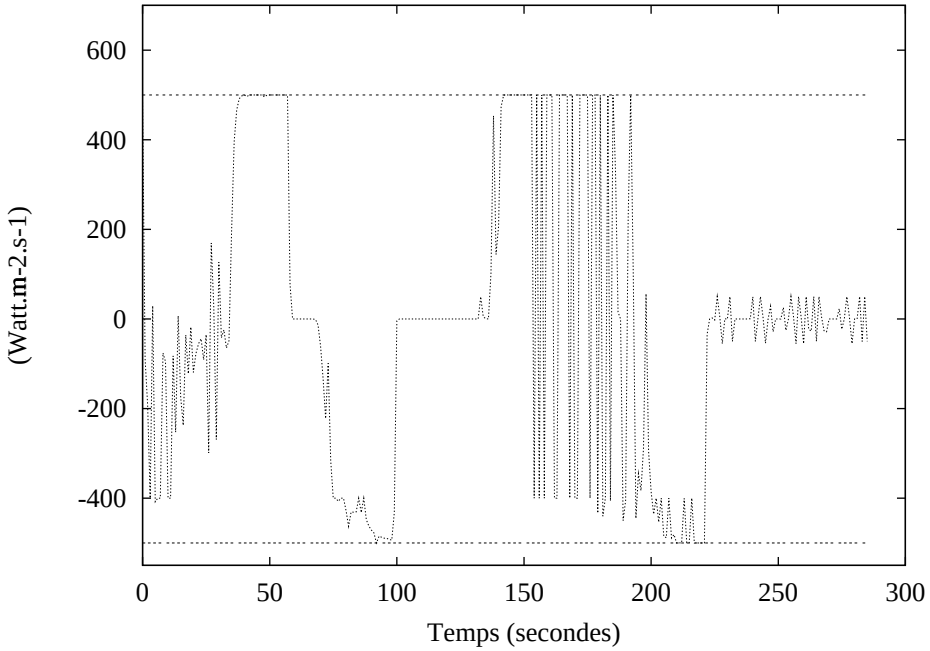


FIG. 7.8 – *Vitesse de la commande pour* $N_p = 15s$

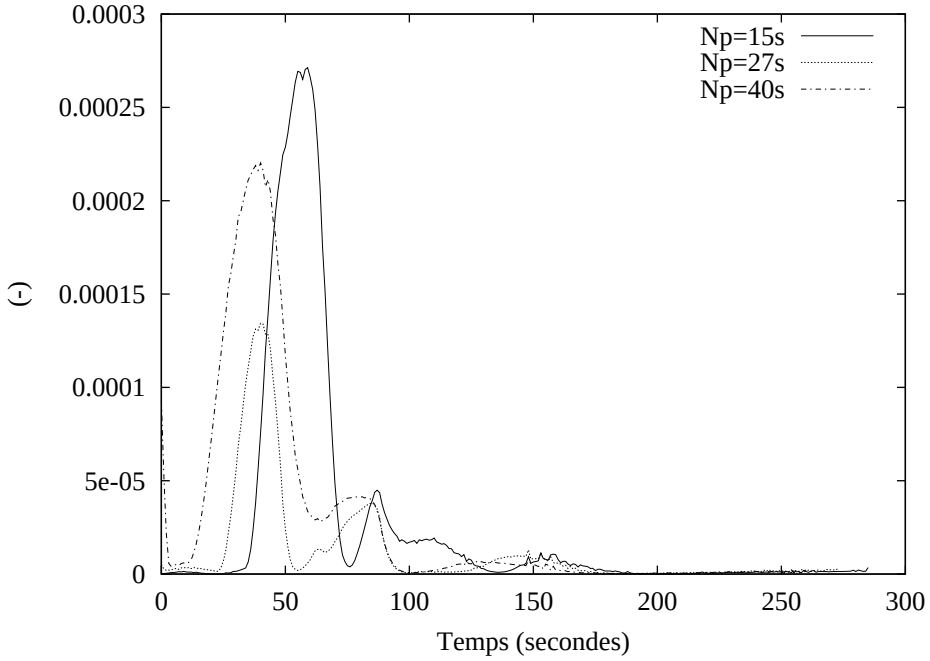


FIG. 7.9 – *Critère de performance normalisé pour* $N_p = 15s,\ 27s,\ 40s$

7.6.3 Poursuite de trajectoire en température

L'horizon de prédiction N_p est pris constant au cours de chaque expérience (3s, 6s puis 12s). Les résultats suivant montrent que l'objectif de poursuite est quasiment atteint (figures 7.10 et 7.11) malgré une erreur initiale de 10 ^oC entre la référence et la sortie du procédé.

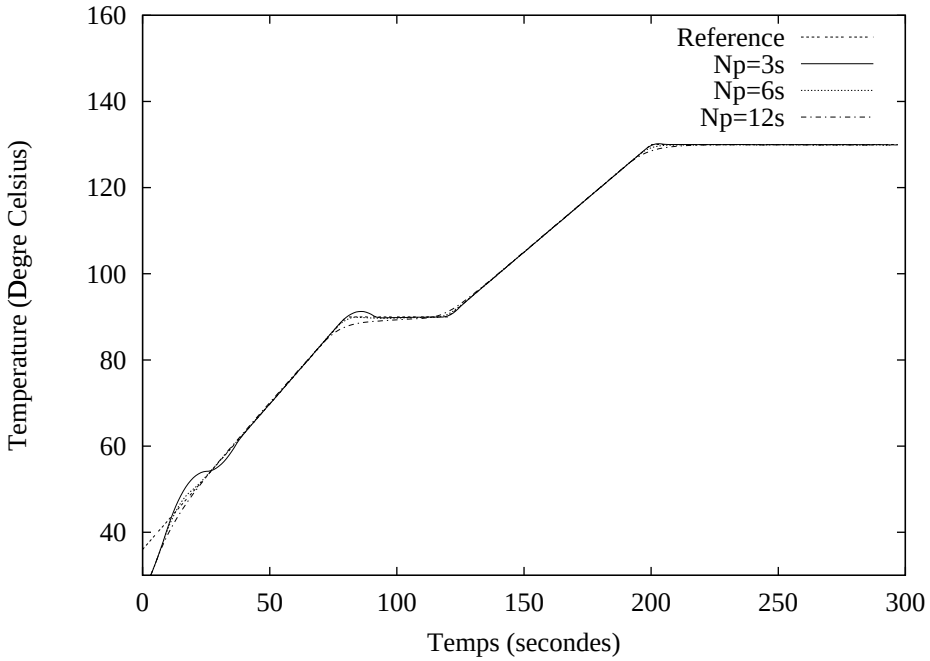


FIG. 7.10 – *Poursuite de trajectoire pour* $N_p = 3s$, $6s$, $12s$

La différence se situe principalement dans la manière dont les points de discontinuité situés aux instants t = 80s, 120s et 200s sont pris en compte, comme on peut le voir sur le signal d'écart entre la référence et la sortie du procédé (figure 7.11) et sur la suite des valeurs prises par la fonction coût normalisée (figure 7.12).
Si un horizon de prédiction de 6s permet une meilleure prise en compte de la première discontinuité (à t=80s), une valeur de 3s permet de minimiser au mieux jusqu'à la fin la fonction coût normalisée ainsi que l'écart de poursuite. On peut donc imaginer un problème d'optimisation où l'horizon de prédiction prendrait successivement ces 2 valeurs. Le problème serait de savoir quand effectuer le changement de valeur.

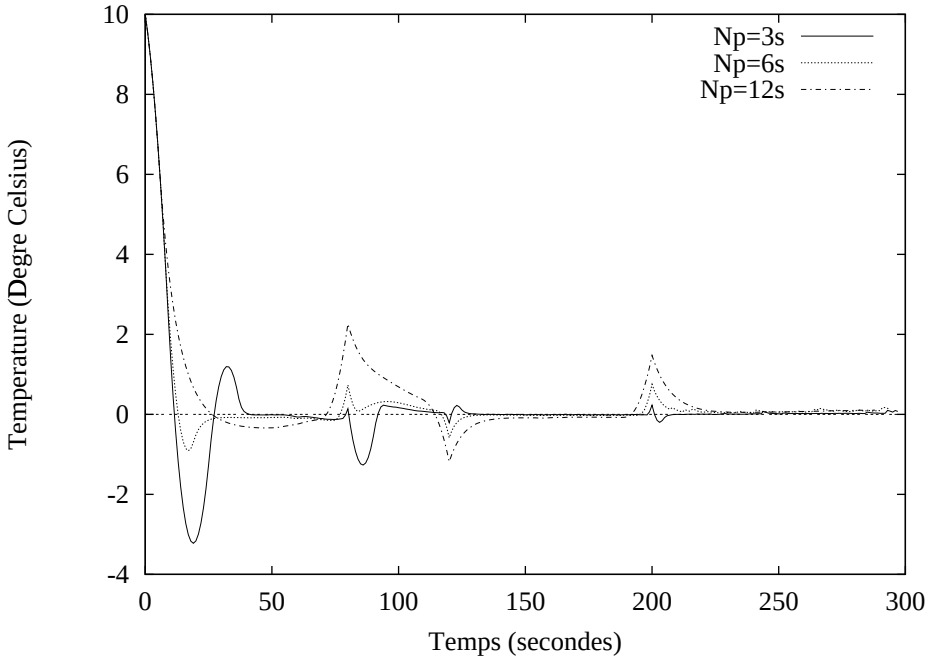


FIG. 7.11 – *Ecart de poursuite pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

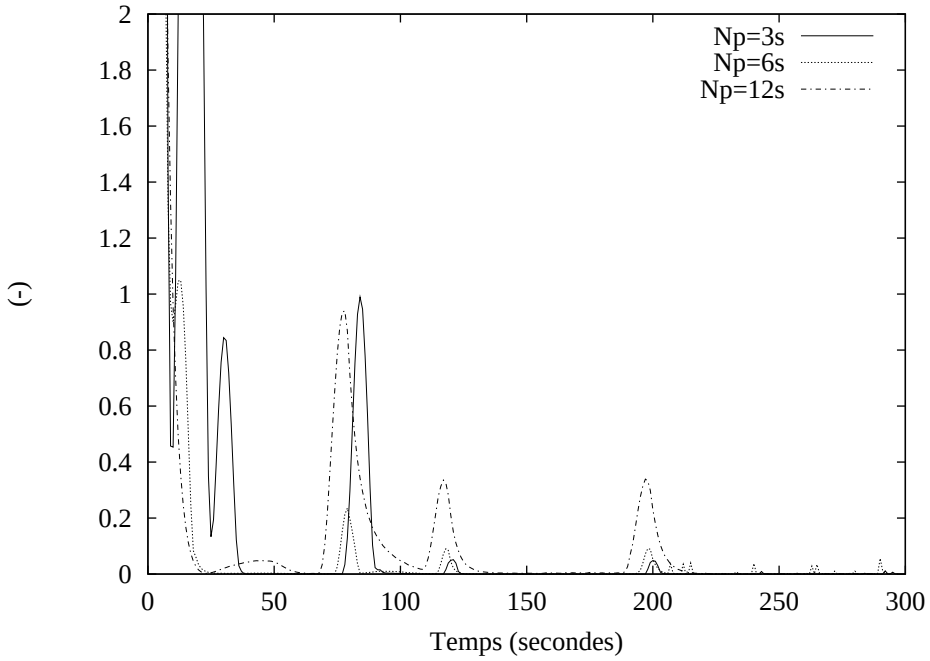


FIG. 7.12 – *Critère de performance normalisé pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

Pour ce qui est du signal de commande, son allure est la même dans les trois cas et est lissée pour de grandes valeurs d'horizon de prédiction (figures 7.13) : l'actionneur est donc de moins en moins sollicité (figures 7.14 et 7.15). Cependant, cette grande valeur, si elle permet une bonne prise en compte du comportement futur du procédé, handicape le problème d'optimisation (figure 7.12). Comme pour la poursuite de trajectoire en humidité, trop d'informations nuit au problème d'optimisation.

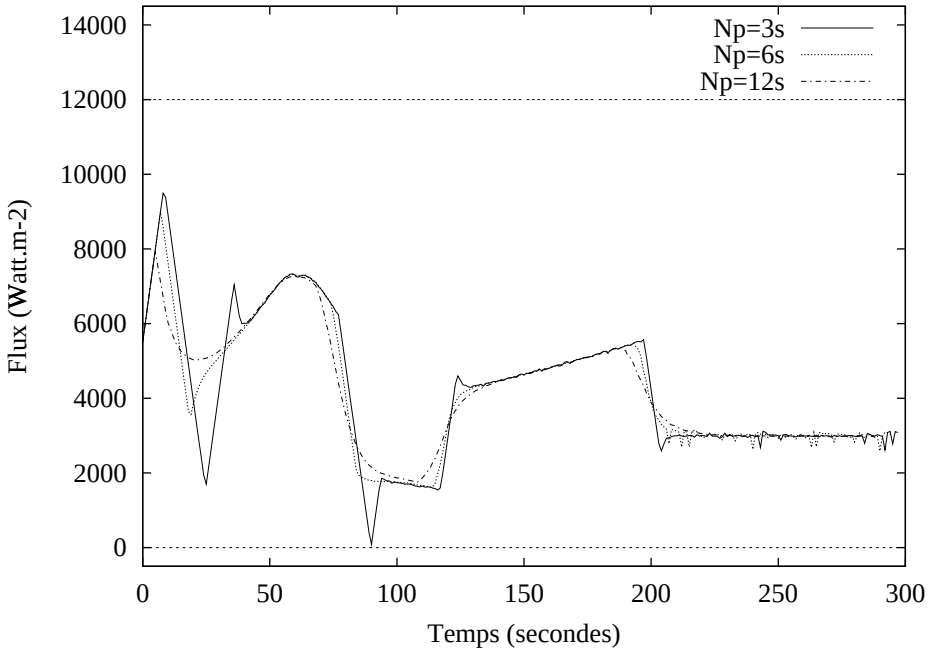


FIG. 7.13 – *Amplitude de la commande pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

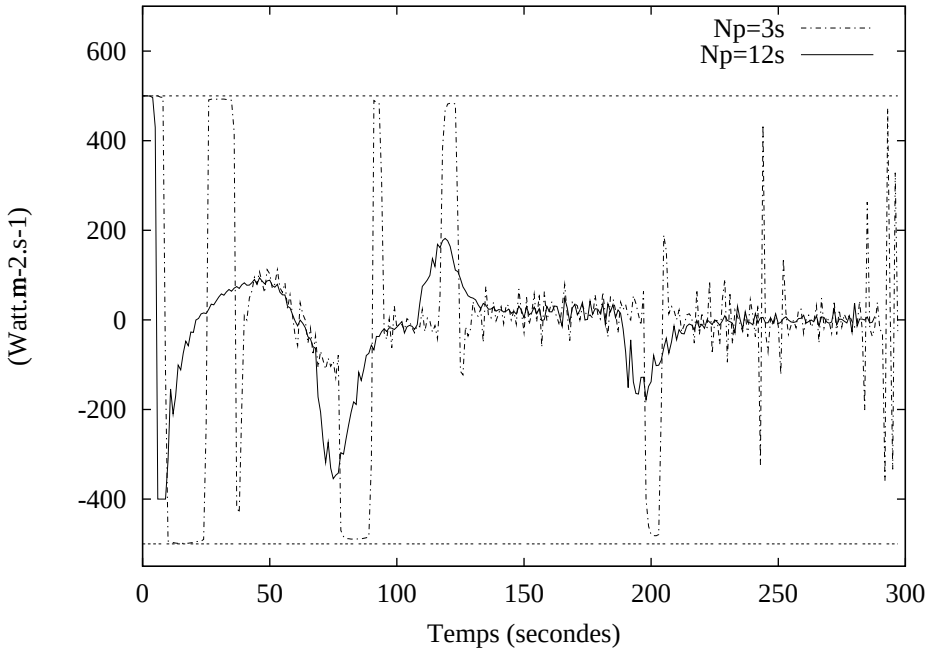


FIG. 7.14 – *Vitesse de la commande pour* $N_p = 3s,\ 12s$

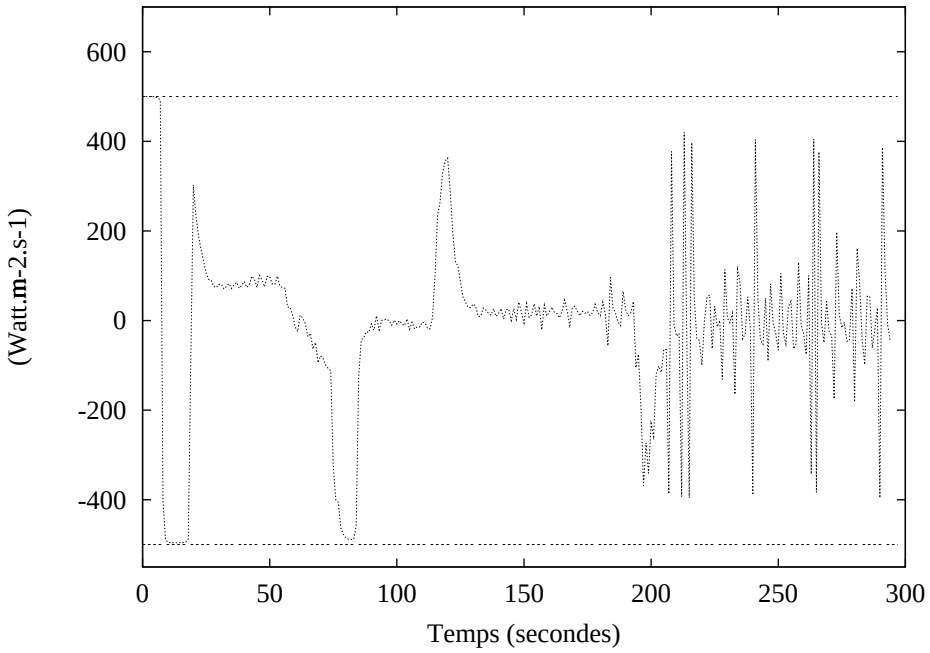


FIG. 7.15 – *Vitesse de la commande pour* $N_p = 6s$

7.6.4 Conclusion

Si les résultats de simulation ont montré que les objectifs de poursuite étaient très bien atteints, ils sont toutefois à modérer en vue des expérimentations. En effet, le procédé est simulé jusqu'ici par un modèle du même type que celui utilisé pour la commande. On se situe alors dans un cas idéal où le modèle représente avec exactitude le procédé (linéarisation mise à part). Malheureusement, de part les erreurs de modélisation et les incertitudes paramétriques, ceci est impossible à obtenir en pratique.

7.7 Résultats expérimentaux

Seuls les résultats de poursuite de trajectoire en température sont présentés ici.

7.7.1 Conditions opératoires

Les conditions sont les suivantes :

- la linéarisation autour du modèle ($\mathcal{S}_0$) s'effectue hors-ligne avec $u_0(t) = 5000\, W.m^{-2}$,
- le modèle ($\mathcal{S}_{LTV}$) est résolu en ligne par la méthode des volumes finis,
- l'horizon de commande N_c est égal à 1,
- la période d'échantillonnage T_e vaut 1s,
- concernant les contraintes, seules les limitations sur l'amplitude et la vitesse de la commande sont considérées :

$$\begin{cases} 0\ W.m^{-2} \leq \varphi_{ir}(t) \leq 12000\ W.m^{-2} \\ -500\ W.m^{-2}.s^{-1} \leq \dot{\varphi_{ir}}(t) \leq 500\ W.m^{-2}.s^{-1} \end{cases} \tag{7.18}$$

- les conditions atmosphériques du modèle sont les suivantes :

$$\begin{cases} \chi_{air} = 20\% \\ T_h = 52^oC \\ T_b = 20^oC \end{cases} \tag{7.19}$$

- les conditions initiales du modèle sont :

$$\begin{cases} T_0 = 36^oC \\ \chi_0 = 0{,}4\ kg.kg^{-1} \end{cases} \tag{7.20}$$

- l'architecture du programme de commande, écrit en fortran, a été combinée à une partie écrite en langage C afin de réaliser l'interfaçage avec les outils d'entrées-sorties ;

- le processeur utilisé a une cadence de 400 MHz.

D'un point de vue expérimental, les paramètres importants du programme sont les suivants :

- la valeur de α_{T_e} qui conditionne le temps de calcul maximum autorisé à chaque itération. Après une procédure d'essais-erreurs, ce coefficient a été choisi égal à 60 %,

- pour les autres tests, les conditions d'arrêt ont été prises suffisamment faibles pour trouver une solution optimale si le temps de calcul restant est suffisant.

Comme pour la simulation, l'horizon de prédiction N_p est pris constant au cours de chaque expérience (3s, 6s puis 12s).

7.7.2 Poursuite de trajectoire en température

D'après les figures suivantes (7.16 et 7.17), on peut voir que l'objectif de poursuite est globalement bien atteint.

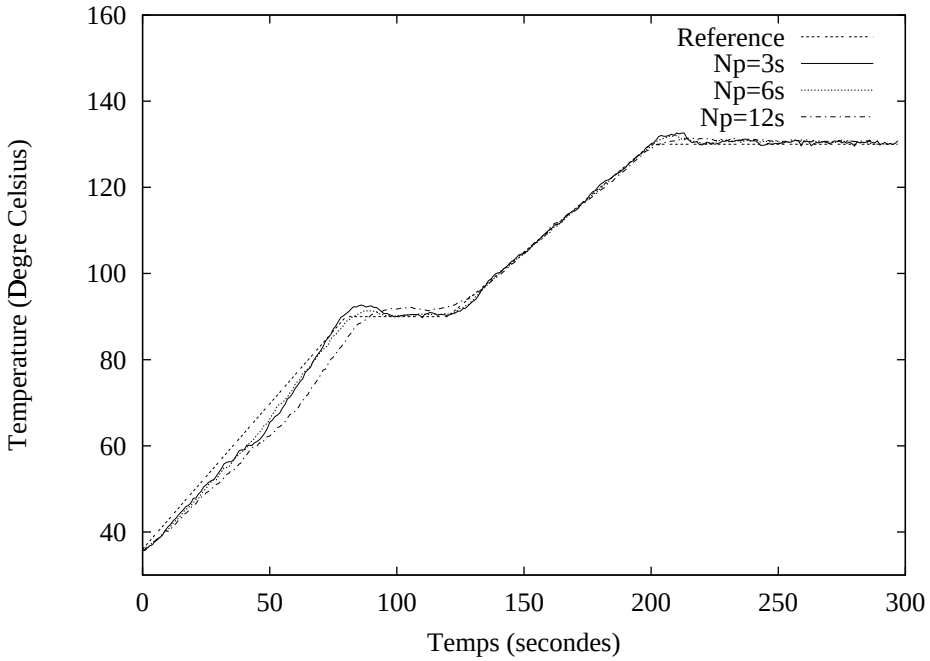


FIG. 7.16 – *Poursuite de trajectoire pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

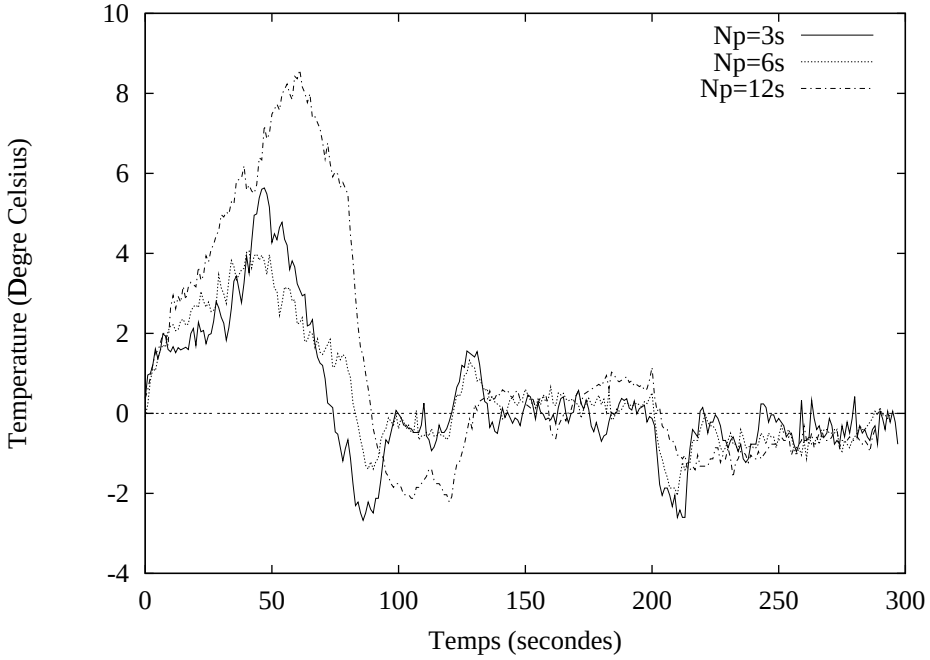


FIG. 7.17 – *Ecart de poursuite pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

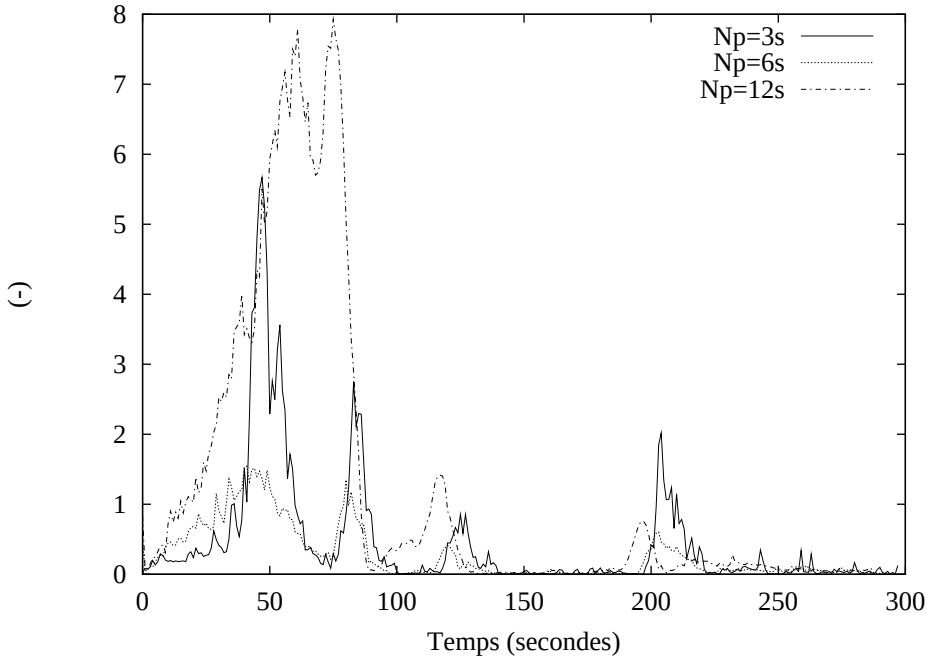


FIG. 7.18 – *Critère de performance normalisé pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

Comme nous l'avons vu en simulation, la qualité de poursuite est différente dans les régions de discontinuités du profil à suivre :

- avec un horizon de prédiction trop faible ($N_p = 3s$), trop peu d'information est

fourni et la prise en compte des points discontinus est moins bonne que dans le cas où $N_p = 6s$ (figure 7.18). Le problème est, en un certain sens, mal posé en vue de sa résolution, comme on peut le voir sur l'allure de la commande (figures 7.19 et 7.20) : on passe d'une commande saturée en amplitude à une commande saturée en vitesse. L'algorithme tend donc à trouver une solution qui serait non physiquement réalisable.
D'autre part, l'actionneur est plus sollicité dans le cas ou $N_p = 3s$ par rapport au cas ou $N_p = 6s$ (figure 7.21).

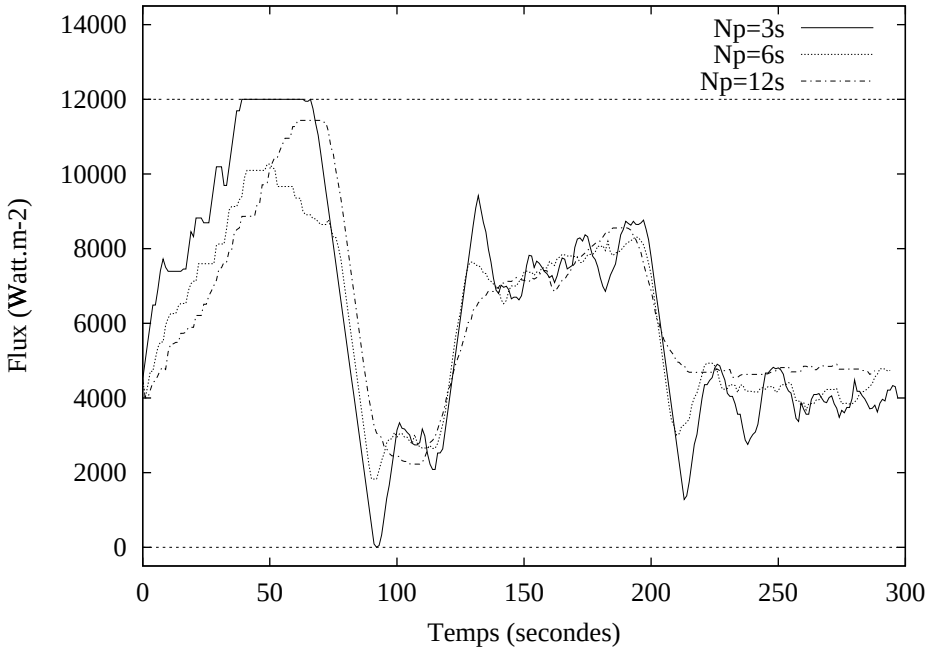


FIG. 7.19 – *Amplitude de la commande pour* $N_p = 3s$, $6s$, $12s$

- avec un horizon de prédiction grand ($N_p = 12s$), si la commande est moins bruitée que dans le cas précédent, un autre problème intervient : le modèle, s'il est qualitativement juste, est quantitativement faux (figure 7.22). Le critère de performance normalisé qui en découle prend alors une suite de valeurs moins bonne que dans le cas où on se limite à un horizon intermédiaire $N_p = 6s$ (figure 7.18).

En ce qui concerne le temps de calcul de la commande, il met en évidence le rôle du paramètre de réglage α_{T_e} introduit dans l'algorithme utilisé. Etant donné que le temps de calcul pour une itération dépend principalement de la valeur prise par l'horizon de prédiction, son réglage doit se faire pour chaque valeur de N_p. Les résultats montrés (figures 7.23 et 7.24) permettent de dire que la valeur de $\alpha_{T_e} = 60\%$ pourrait être augmentée. Les résultats de poursuite pourrait alors être améliorés.
Enfin, on vérifie là aussi que la poursuite est satisfaisante bien que la sortie du

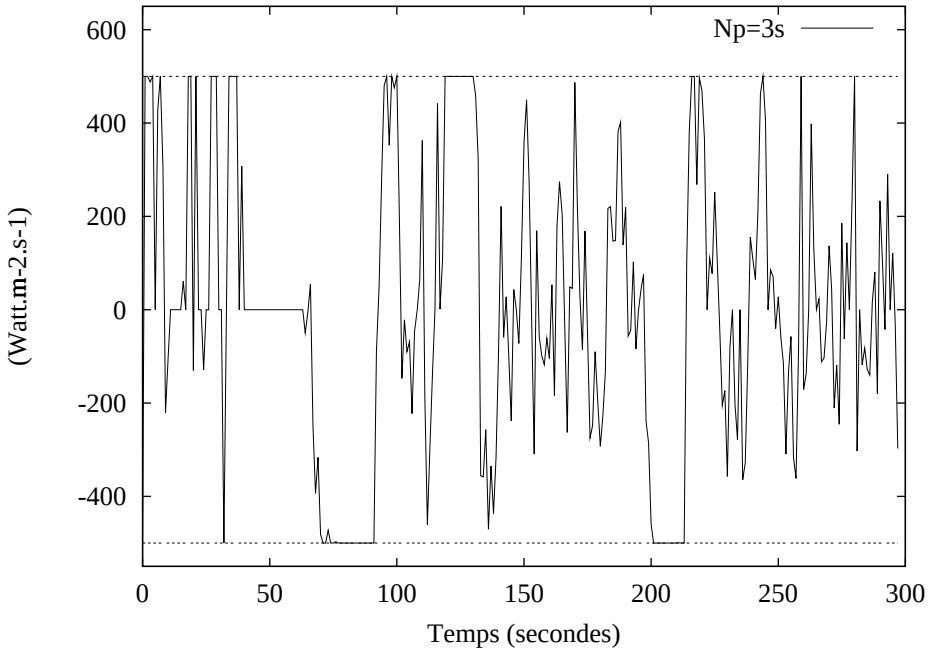


FIG. 7.20 – *Vitesse de la commande pour* $N_p = 3s$

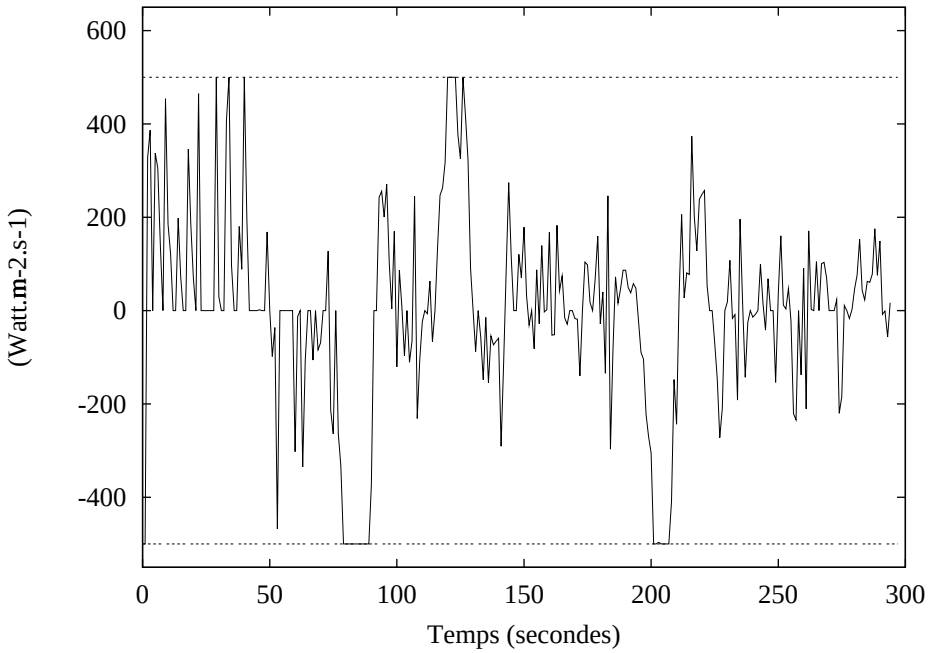


FIG. 7.21 – *Vitesse de la commande pour* $N_p = 6s$

modèle ne suive pas la trajectoire de référence (figure 7.22). C'est l'aspect robuste de la structure de commande par modèle interne vis-à-vis des erreurs de modélisation.

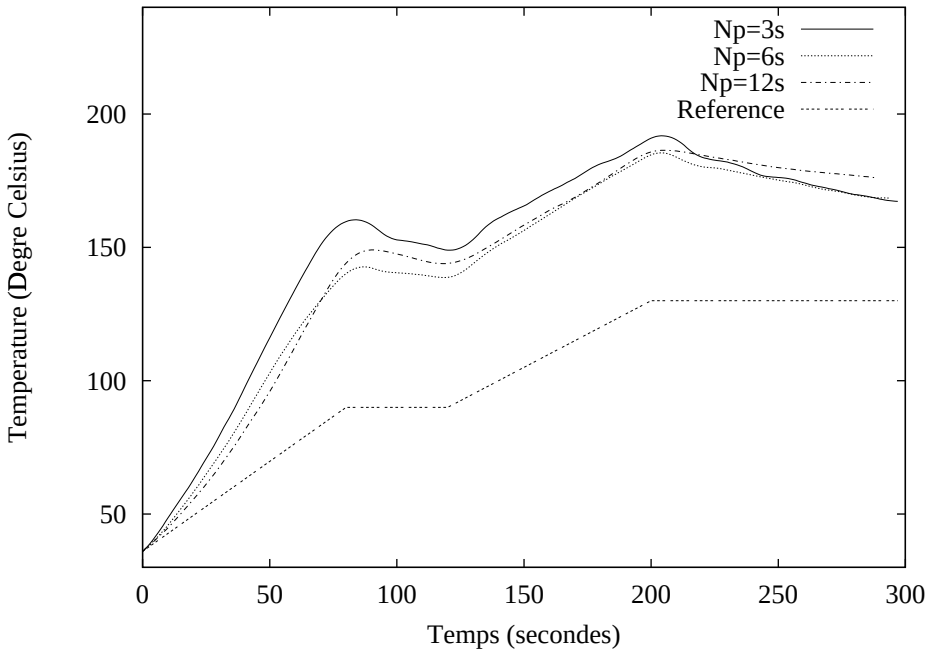


FIG. 7.22 – *Sortie du modèle pour* $N_p = 3s,\ 6s,\ 12s$

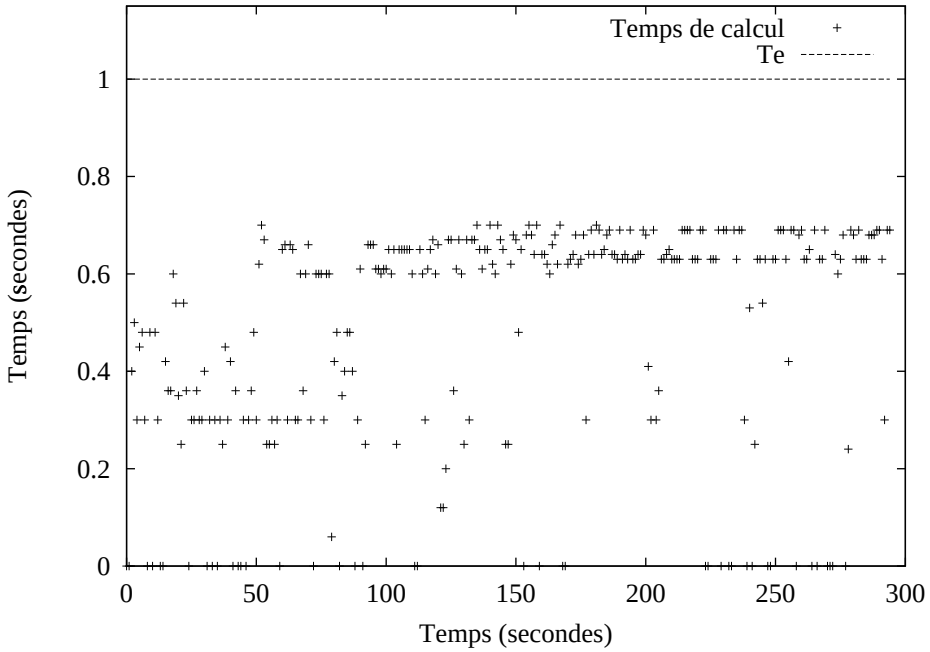


FIG. 7.23 – *Temps de calcul de la commande pour* $N_p = 6s$

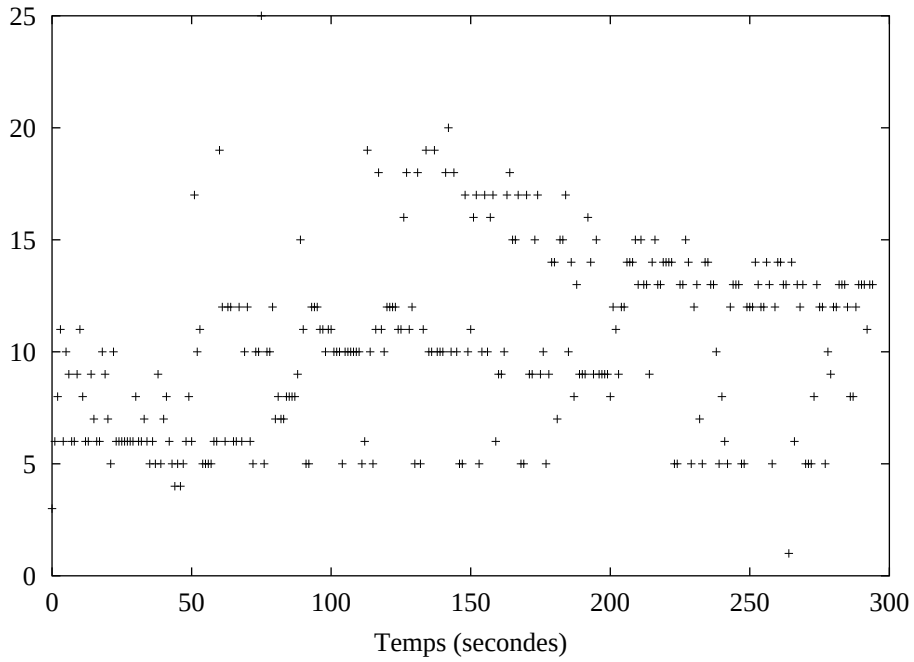


FIG. 7.24 – *Nombre d'itérations effectuées en fin de calcul pour* $N_p = 6s$

7.8 Conclusion

Deux problèmes de poursuite de trajectoire ont été traités en simulation, puis en temps réel pour la température.

Les résultats de simulation ont permis de vérifier, a priori, la qualité des performances possibles, notamment pour la prise en compte des discontinuités dans chaque trajectoire de référence. Les résultats obtenus en pratique ont permis de confirmer ces résultats, même si une erreur de poursuite plus importante existe. Cela est en grande partie dû aux erreurs de modélisation qui sont cependant prises en compte par la structure de commande par modèle interne même.

Le choix de la valeur de l'horizon de prédiction doit satisfaire un compromis. Un horizon de prédiction trop faible, en fournissant trop peu d'informations sur le comportement futur du procédé, oblige l'algorithme à générer une commande souvent saturée.

Avec un horizon trop élevé, trop d'informations quantitativement fausses calculées par le modèle sont fournies à l'algorithme. La solution au problème d'optimisation est alors médiocre.

Enfin, l'influence du temps de calcul nécessaire à la résolution du modèle et du problème d'optimisation est toujours préjudiciable pour une application temps réel. Cependant, nos résultats sont encourageants et ne peuvent que s'améliorer grâce aux performances sans cesse accrues de la puissance des microprocesseurs.

Pour ce qui est des perspectives, des expérimentations concernant la poursuite de trajectoire en humidité sont en cours. Etant donné le caractère bruité de la masse mesurée, l'utilisation d'un observateur de type horizon glissant est à l'étude [8, 12].

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail a été de voir les possibilités d'extension de la stratégie de commande prédictive à des systèmes non linéaires décrits par des équations aux dérivées partielles .

Cette approche a permis de déterminer une méthode assurant d'une part, le mode de fonctionnement a priori applicable pour la conduite en temps réel et d'autre part, d'assurer la conduite effective du procédé en temps réel.

Dans les deux cas, la traduction du cahier des charges a abouti à un problème d'optimisation sous contraintes. En outre, pour la conduite en temps réel, une structure de commande par modèle interne a été ajouté.

L'aspect le plus contraignant en vue de la conduite en temps réel est justement le temps. Ceci nous a obligé à aborder le problème d'optimisation sous contraintes en prenant en compte deux aspects :

- la nécessité d'avoir une méthode d'optimisation avant tout rapide pour être utilisable en commande en temps réel,

- l'aspect prédictif nécessitant la résolution du modèle en ligne, ce temps de calcul devait être le plus faible possible.

Pour le premier point, un algorithme existant a été modifié en combinant une loi de transformation (pour les contraintes dures) et une méthode de pénalisation pour les autres.

Pour la résolution du modèle, une méthode de linéarisation effectuée hors-ligne autour d'un fonctionnement nominal a été choisie. Le choix de ce dernier a été discuté, pouvant être également résolu a priori par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes.

L'approche prédictive a finalement été appliquée à trois problèmes concrets issus du Génie des Procédés. Ces exemples ont permis de vérifier en simulation et expérimentalement pour l'un d'entre eux, l'efficacité de cette approche. Le problème classique du choix des horizons liés à la commande prédictive a été souligné, le compromis étant à faire entre :

- un horizon de prédiction faible, moins gourmand en temps de calcul, mais trop peu prévoyant dans le comportement futur du procédé,

- un horizon de prédiction élevé, qui permet certes une bonne prise en compte qualitative du comportement futur du procédé, mais qui devient trop quantitativement faux et nécessite aussi un temps de calcul important.

Enfin, vis-à-vis des systèmes à paramètres répartis, l'exemple du réacteur catalytique a montré également l'importance de la représentation du procédé par la résolution du modèle : tout dépend alors du mode de fonctionnement du procédé. Dans un cas, le choix de l'horizon de prédiction semble être plus déterminant dans la qualité des résultats ; dans un autre cas plus concret, le nombre de points de discrétisation spatiale est plus important.

En perspective, les résultats pratiques encourageants dans le domaine des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires ouvrent au moins trois voies :

- Concernant les objectifs de commande : on peut penser que la réalisation de l'objectif lié à des variables internes non mesurées est à portée de main, par la construction d'un observateur non linéaire qu'est le modèle interne quand ce dernier est fiable. Une structure d'observateur en boucle ouverte est ainsi à l'étude [12].

- Concernant la faisabilité a priori : comment garantir, avant toute chose, qu'il existe (ou non) des solutions admissibles à chaque instant ? Cela traduit la compatibilité du fonctionnement attendu (critère de performance et contraintes), les possibilités physiques du procédé et les moyens mis en œuvre pour résoudre ce problème tant d'un point de vue algorithmique (choix des horizons) que du point de vue du temps disponible pour résoudre le problème. Ce domaine d'étude est ouvert.

- Concernant la stabilité du système ainsi bouclé, si la stabilité de la structure de commande prédictive est bien intuitive, ne serait-ce que par construction, elle n'est déjà pas évidente à établir rigoureusement pour des systèmes non linéaires à dérivées ordinaires. L'étude rigoureuse et théorique doit certainement rejoindre en difficulté le point précédent. Il est en effet naturel de penser que s'il est possible de montrer l'existence de solutions à tout instant, il doit être plus « facile » de donner des conditions, ne serait-ce que suffisantes, pour que ces solutions soient dans un domaine de stabilité.

A

Procédé de cuisson par autoclave

A.1 Les valeurs numériques

Les expressions permettant de simplifier le modèle sont les suivantes :

$$\beta_t = \frac{k_t}{\rho_t c_{p_t}} \tag{A.1}$$

$$\beta_c = \frac{k_c}{\rho_c c_{p_c}} \tag{A.2}$$

Les pamarètres physico-chimiques sont les suivants :

Signification	Nom	Valeur	Unité
Conductivité thermique	k_c	0,23793	$W.m^{-1}.K^{-1}$
Masse volumique du polymère	ρ_c	1890	$kg.m^{-3}$
Capacité thermique du polymère	c_{p_c}	1,134 10^3	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Coefficient de diffusion dans la couche supérieure	β_t	$0{,}3\beta_c$	$m^2.s^{-1}$
Fraction massique de résine dans le composite	m_r	46	%
Enthalpie de la réaction	$(-\Delta H_r)$	8,525 10^4	$J.kg^{-1}$
Facteur pré-exponentiel de la réaction	A_c	1,233 10^{21}	s^{-1}
Energie d'activation de la réaction	E_a	1,674 10^5	$J.mol^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	8,314	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
Facteur exponentiel	m	0,524	$(-)$
Facteur exponentiel	n	1,476	$(-)$

Les données géométriques sont :

Signification	Nom	Valeur	Unité
Epaisseur de la couche supérieure	z_t	1 10^{-2}	m
Demi épaisseur du polymère	z_c	1,27 10^{-2}	m

B

Destruction catalytique de gaz polluants

B.1 Les valeurs numériques

Les paramètres relatifs à la cordiérite et du gaz sont les suivants :

Signification	Nom	Valeur	Unité
Masse volumique du solide dans les parties thermiques	ρ_{st}	2500	$kg.m^{-3}$
Masse volumique du solide dans les parties catalytiques	ρ_{sc}	4000	$kg.m^{-3}$
Masse volumique du gaz	ρ_g	1,2	$kg.m^{-3}$
Capacité thermique du solide	c_{p_s}	850	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Capacité thermique du gaz	c_{p_g}	1030	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Conductivité thermique	λ	1,5	$W.m^{-1}.K^{-1}$
Coefficient de transfert de chaleur	h	32	$W.m^{-2}.K^{-1}$
Constante cinétique de la réaction	k^{∞}	300	$m.s^{-1}$
Coefficient de transfert de masse	k_d	0,11	$m.s^{-1}$
Energie d'activation de la réaction	E_a	4,2 10^4	$J.mol^{-1}$
Enthalpie de la réaction	$(-\Delta H_r)$	4,6 10^6	$J.mol^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	8,314	$J.mol^{-1}.K^{-1}$

Les données géométriques sont :

Signification	Nom	Valeur	Unité
Volume vide/volume total	ε	70	%
Longueur des monolithes thermiques	L_{MT}	37,5	cm
Longueur des monolithes catalytiques	L_{MC}	7,5	cm
Diamètre d'un canal d'écoulement	d_h	1,09	mm
Nombre de canaux d'écoulement	nb_c	13225	$(-)$

C

Séchage de peinture par rayonnement infrarouge

C.1 Expressions des coefficients du modèle

C.1.1 Vitesse de séchage

L'expression de la vitesse de séchage $\dot{m}(\bar{\chi},T)$ fait intervenir la différence de pression entre l'échantillon et l'air ambiant qui provoque le déplacement des particules d'eau de l'intérieur vers la surface :

$$\dot{m}(\bar{\chi},T) = \frac{k_m m_v}{R} P_t \frac{2}{T+T_h} log_{10}[\frac{P_t - \chi_{air} P_{v_{sat}}(T_h)}{P_t - a_w(\bar{\chi}) P_{v_{sat}}(T)}] \tag{C.1}$$

La pression de vapeur de saturation $P_{v_{sat}}(T)$ est donnée en millibar par l'expression :

$$\begin{aligned} log_{10} P_{v_{sat}}(T) &= C_0(1 - \frac{T_1}{T}) - C_1 log_{10}\frac{T}{T_1} && \text{(C.2)} \\ &+ C_2(1 - 10^{-C_3(T/T_1 - 1)}) + C_4(10^{C_5(1-T_1/T)} - 1) + C_6 && \text{(C.3)} \end{aligned}$$

L'activité $a_w(\bar{\chi})$ est solution de l'équation :

$$\frac{a_w(\bar{\chi})}{\bar{\chi}} = A_1 a_w^2(\bar{\chi}) + A_2 a_w(\bar{\chi}) + A_3 \tag{C.4}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= K_k \frac{\frac{1}{c} - 1}{\chi_m} && \text{(C.5)} \\ A_2 &= \frac{1 - \frac{2}{c}}{\chi_m} && \text{(C.6)} \\ A_3 &= \frac{1}{\chi_m \; c \; K_k} && \text{(C.7)} \end{aligned}$$

C.1.2 Bilan thermique

Le coefficient d'absorption $\alpha_{ir}(\bar{\chi})$ est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha_{ir}(\bar{\chi}) &= \alpha_p(\bar{\chi})(1 - \rho_p^{'}) + \alpha_s(1 - \rho_p^{'})(1 - \alpha_p(\bar{\chi})) && \text{(C.8)} \\ &+ \alpha_p(\bar{\chi})(1 - \alpha_s)(1 - \rho_p^{'})(1 - \alpha_p(\bar{\chi})) && \text{(C.9)} \end{aligned}$$

avec :

$$\alpha_p(\bar{\chi}) = 1 - [aa_3(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}})^3 + aa_2(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}})^2 + aa_1\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}} + aa_0]\frac{1}{1 - \rho_p^{'}} \tag{C.10}$$

Le coefficient de chaleur latente $l_v(T)$ ainsi que la capacité thermique calorifique $C_p(\bar{\chi},T)$ dépendent de la température T exprimée en degrés Celsius :

$$l_v(T) = [a_5T^5 + a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0] \times 10^3 \quad \text{(C.11)}$$

$$C_p(\bar{\chi},T) = [oT + b + \bar{\chi}\{c_{p_3}T^3 + c_{p_2}T^2 + c_{p_1}T + c_{p_0}\}]\frac{1}{1+\bar{\chi}} \times 10^3 \quad \text{(C.12)}$$

C.2 Les valeurs numériques

Les valeurs numériques nécessaires au calcul du modèle sont les suivantes :

- pour le coefficient de diffusion D_{eff} :

Nom	Valeur	Unité
D_0	0,68 10^{-5}	$m^2.s^{-1}$
a	0,42 10^{-1}	$kg.kg^{-1}$
Ea	26464	$J.mol^{-1}$
R	8,314	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
ϕ	1,1685	$m.m^{-1}$
e_{sec}	102,138	μm

- pour la vitesse de séchage $\dot{m}$:

Nom	Valeur	Unité
k_m	5,19 10^{-3}	$m.s^{-1}$
m_v	18 10^{-3}	$kg.mol^{-1}$
T_1	273,16	K
P_t	1,01325 10^5	Pa

- pour le lissage de l'expression de la pression de vapeur de saturation $P_{v_{sat}}$:

Nom	Valeur	Unité
C_0	10,79574	(-)
C_1	5,028	(-)
C_2	1,50475 10^{-4}	(-)
C_3	8,2969	(-)
C_4	0,42873 10^{-3}	(-)
C_5	4,76955	(-)
C_6	0,78614	(-)

- pour l'activité a_w :

Nom	Valeur	Unité
K_k	0,985	(-)
c	2,21	(-)
χ_m	0,0593	$kg.kg^{-1}$

- pour les bilans thermiques :

Nom	Valeur	Unité
h_c	3	$W.m^{-2}.K^{-1}$
σ	5,67 10^{-8}	$W.m^{-2}.K^{-4}$
ρ_p	1165	$kg.m^{-3}$
$\rho_s C_s e_s$	3540,16	$J.m^{-2}.K^{-1}$

- pour le lissage de l'expression du coefficent d'absorption α_{ir} :

Nom	Valeur	Unité
α_s	0,8	$(-)$
$\rho_p^{'}$	0,12	$(-)$
aa_3	0,3751	$(-)$
aa_2	$-0{,}6545$	$(-)$
aa_1	$-0{,}129$	$(-)$
aa_0	0,939	$(-)$

- pour le lissage de l'expression du coefficient de chaleur latente l_v :

Nom	Valeur	Unité
a_5	$-0{,}69851352\ 10^{-6}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-5}$
a_4	$0{,}47175172\ 10^{-3}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-4}$
a_3	$-0{,}12963934$	$J.kg^{-1}.^oC^{-3}$
a_2	$0{,}12413792\ 10^{2}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-2}$
a_1	$-2{,}7913724\ 10^{3}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-1}$
a_0	$0{,}25037\ 10^{7}$	$J.kg^{-1}$

- pour le lissage de l'expression de la capacité thermique calorifique C_p :

Nom	Valeur	Unité
o	0,00647	$J.kg^{-1}.^oC^{-2}$
b	2,3754	$J.kg^{-1}.^oC^{-1}$
c_{p_3}	$0{,}749972\ 10^{-7}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-4}$
c_{p_2}	$-0{,}943717\ 10^{-5}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-3}$
c_{p_1}	$0{,}448761\ 10^{-3}$	$J.kg^{-1}.^oC^{-2}$
c_{p_0}	4,18674	$J.kg^{-1}.^oC^{-1}$

D

Acte publié à l'occasion du congrès CESA'98

A Nonlinear Distributed Parameter Process Control :
an Internal Linearized Model Control Approach

DUFOUR P., TOURE Y., LAURENT P.
LAGEP UPRES-A CNRS Q 5007 - Bât. 308 G- 3^{e}étage
Université Claude Bernard - CPE Lyon
43, bd du 11 Novembre 1918
69 622 Villeurbanne cedex
e-mail : dufour@lagep.univ-lyon1.fr

ABSTRACT

This paper deals with the nonlinear distributed parameter process control. The aim is to realize a predictive type control that minimize an optimization criterion under some constraints. The well-known internal model control (IMC) structure is used to make the predictive control strategy where the internal model is a time-varying linearized model around a tracking trajectory. This nonlinear distributed parameter system control is developped and presented through a practical distributed control application : an infrared drying process control.

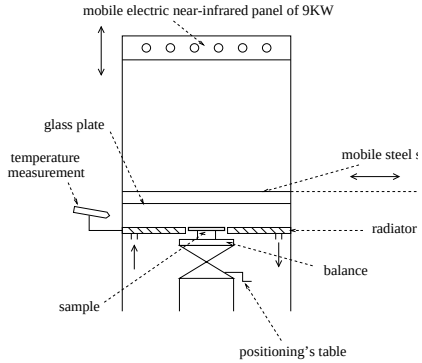
D.1 1.Introduction

This work concerns the distributed parameter system control governed by nonlinear partial differential parabolic type equations. There are few works directly concerning the nonlinear distributed parameter systems. The existed ones deal with structurally interested cases for one partial derivative equation but not for a set of equations. Notably there are the works of Ibragimov & Shabat [6] based on the inverse scattering problem developed by Miura [8] or Magri's one [7], where an exact linearization by geometrical transformation is proposed. Moreover, the order of this transformation has to be fixed there by a non trivial manner. The most extended approach in the nonlinear systems study (distributed or lumped parameter systems) is the linearization approach, or else the finite dimensional approximation [11] [4].
In this work, we give an intermediate alternative in the sense that the linear model is time-varying and its parameters depend on the nonlinear model at each time. It allows a larger validity domain and so a most extended initial nonlinear system control. However, a control synthesis, like explicit control law for example, becomes more difficult. So, we use the IMC structure in its indirect version that bring to a predictive control approach by minimization on a receding horizon. The framework is developed through an application example, but the results can be seen in the generic sense since the assumptions used aren't very strong, the main ones being the open loop stability and the controllability assumptions.
This application example is an infrared drying plant. It's a physically stable process because the system always tends to its minimum humidity. The control aim is to track a given drying profile corresponding to a given dried material quality.

In the first section that follows, we present the drying plant and its control problem. The model is then described and the final nonlinear distributed control system stated. Then, the time-varying linear model around a given profile is determined and its validity limits studied. The next section deals with control strategy. We first recall the IMC structure and bring out its main properties, advantages and difficulties. The tracking control problem, stated in term of constrained minimization, is then exposed. The last section deals with simulation results on the optimal profile tracking improving.

D.2 2.Process and control problem

The drying process, presented behind, allows to dry a painting film coated on a car iron sample by supply of infrared flow :



This painting coat, of low thickness (order of 0.1mm), is characterised by its temperature supposed uniform T and by its dry basis humidity χ, assumed to varying only according to the thickness z (by definition, the dry basis humidity is the ratio of the water mass on the dry mass of the sample). The drying under infrared results in a migration of the water contained in the painting film to the radiated surface as well as a vaporization of this water at this surface. The humidity is deduced from the weighing follow-up of the iron+painting film system during the drying; this measurement allowing us to accede only to the painting film mean humidity $\bar{\chi}$. Finally, the system can be represented by the state variables $\chi(z,t)$ and $T(t)$ cause of the uniform assumption on temperature [9].

D.2.1 Mass balance

A diffusional drying model, written in a landmark linked to the solid matrix representing the paint, allows to obtain the following equations :

- for $0 < z < e_{sec}$:

$$\chi_t = \frac{\partial}{\partial z}[D_{eff}(\chi,T)\chi_z]$$

with the effective diffusion coefficient :

$$D_{eff}(\chi,T) = \frac{D_0 exp^{(\frac{-a}{\chi})} exp^{(\frac{-Ea}{RT})}}{(1+\phi\chi)^2}$$

where D_0,a,E_a,R and ϕ are positive constants,

- at z=0 :

$$\chi_z = 0$$

- at $z = e_{sec}$, the leaving flow is linked to the drying velocity $\dot{m}(\chi,T)$ by the relation :

$$-D_{eff}(\chi,T)\chi_z = \frac{\dot{m}(\chi,T)}{\rho}$$

with the drying velocity given in the annexe.

D.2.2 Energy balance

Energy balance, taking into account the different losses P_i as well as the absorbed infrared power, is given by the following equations :

- $$(\rho C_p(\bar{\chi},T)e + \rho_s C_s e_s)T_t = -\sum_{i=1}^{5} P_i + P_{abs}$$

where $\rho C_p(\bar{\chi},T)e$ and $\rho_s C_s e_s$ are respectively the surface thermal capacity of the paint and its support and where the different losses due to the convection as well as the radiation by the two faces have for expression :

$$\begin{cases} P_1 = h_c(T - T_{air}) \\ P_2 = 0.96\sigma(T^4 - T_{air}^4) \\ P_3 = h_c(T - T_{sup}) \\ P_4 = \alpha_s\sigma(T^4 - T_{sup}^4) \end{cases}$$

and where the vaporization energy P_5 and the infrared energy P_{abs}, both depend on the temperature T and the humidity :

$$\begin{cases} P_5 = l_v(T)\dot{m}(\chi,T) \\ P_{abs} = \alpha_{ir}(\bar{\chi})\varphi_{ir} \end{cases}$$

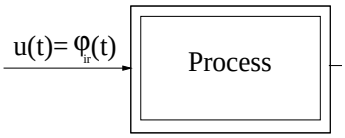
The remaining coefficients expessions are given in the annexe.

D.2.3 Nonlinear distributed control system

According to the spatial uniform property assumption on the temperature, the control problem becomes a distributed control problem one, since the control, ie the infrared flow $\varphi_{ir}(t)$, acts instantaneously at the boundary ($z = e_{sec}$) and over the painted film. So, the system can be summarized as follows :

$$(\mathcal{S}_1)\ \begin{cases} \chi_t = F_1(\chi_{zz},\chi_z,\chi,T) \text{ for } 0 < z < e_{sec} \\ T_t = F_2(\bar{\chi},\chi(e_{sec},t),T) + F_3(\bar{\chi},T)\varphi_{ir}(t) \text{ for all } z \\ F_4(\chi_z,\chi,T) = 0 \text{ at } z = e_{sec} \\ \chi_z = 0 \text{ at } z = 0 \\ \text{with the initial conditions :} \\ \chi(z,0) = \chi_0 \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

The control problem now is to find the power φ_{ir} such that the painting film mean humidity $\bar{\chi}$ measurement tracks a desired profile. This desired profile is chosen to avoid bubling and fissures phenomena. This process control problem can be schematized in input-output external representation as follows :



where the mean humidity $\bar{\chi}$ is :

$$\bar{\chi}(t) = \frac{1}{e_{sec}} \int_0^{e_{sec}} \chi(\zeta,t)\, d\zeta$$

From a practical point of view, this control problem can be restated as : for a given humidity profil (for any given starting infrared power, there is a given humidity profile), find a control profile such that the final drying profile moves to a desired one. This can be reached by moving the representation model around any initial profile. This is a linearization problem which follows.

D.3 3.Time-varying linearized model

For a more accuracy presentation, let set the state $\underline{\omega}^T = [\chi(z,t)\ T(t)]$, the control $u(t) = \varphi_{ir}(t)$ and the measured output $y(t) = \bar{\chi}(t)$. Then, the nonlinear control problem becomes :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\omega}}(z,t) = \mathcal{A}(\underline{\omega}(z,t)) + \mathcal{B}(\underline{\omega}(z,t))\ u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}(\underline{\omega}(z,t)) \end{cases}$$

where the nonlinear operators $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ depend on the F_1, F_2, F_3, F_4 in $(\mathcal{S}_1)$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\underline{\omega}(z,t)) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}(\underline{\omega}(z,t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}(\underline{\omega}(z,t)) = \frac{1}{e_{sec}} \int_0^{e_{sec}} \chi(\zeta,t)\, d\zeta \end{cases}$$

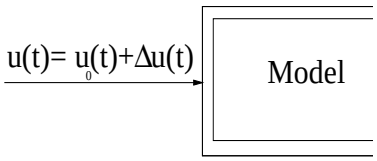
with :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = D_1(\mathcal{A}) \cap D_2(\mathcal{A}) \cap D_3(\mathcal{A}) \\ \Omega = (0\ ,\ e_{sec}) \\ D_1(\mathcal{A}) = \{\chi,\ \chi_z,\ \chi_{zz},\ T \in L_2(\Omega)\} \\ D_2(\mathcal{A}) = \{\chi_z,\ \chi,\ T\ \ |\ F_4(\chi_z,\ \chi,\ T) = 0\ at\ z = e_{sec}\} \\ D_3(\mathcal{A}) = \{\chi_z\ \ |\ \chi_z = 0\ at\ z = 0\} \end{cases}$$

We assume that system $(\mathcal{S}_1)$ is regular in the sense of the solution according to [1] or [3] for example.
A given profile can be represented by some control $u_0(t)$ and $y_0(t)$ according to a state vector profile $\underline{\omega}_0(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\omega}}_0(z,t) = \mathcal{A}(\underline{\omega}_0) + \mathcal{B}(\underline{\omega}_0)\ u_0(t) \\ y_0(t) = \mathcal{C}(\underline{\omega}_0) \end{cases}$$

A variation model around this profile can be get by local linearization :



The control problem now is to find the control variation Δu such that the output tracks a known reference profile $y_{ref}(t)$.
A variation model around the profiles $y_0(t)$, $u_0(t)$ and $\underline{\omega}_0(t)$ can be get by local linearization if $y_{ref}(t)$ is in the neighbourhood of $y_0(t)$. This variation model around these trajectory is a time-varying one :

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} \Delta\dot{\underline{\omega}}(z,t) = A(t)\Delta\underline{\omega}(z,t) + B(t)\Delta u(t) \\ \Delta y_0(t) = C\Delta\underline{\omega}(z,t) \\ \text{with the initial conditions :} \\ \Delta\underline{\omega}(z,0) = 0 \end{cases}$$

Where A, B are time varying linear operators and C is a constant bounded operator with :

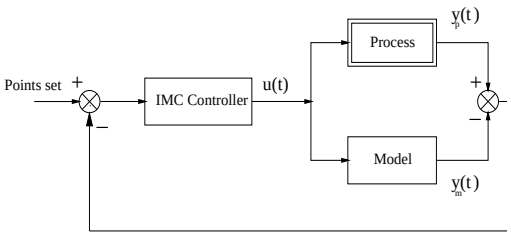
$$\begin{cases} A(t) = \begin{bmatrix} \nabla_\chi F_1(\underline{\omega}_0(t)) & \nabla_T F_1(\underline{\omega}_0(t)) \\ \nabla_\chi (F_2 + F_3 u_0)(\underline{\omega}_0(t)) & \nabla_T (F_2 + F_3 u_0)(\underline{\omega}_0(t)) \end{bmatrix} \\ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_3(\underline{\omega}_0(t)) \end{bmatrix} \\ C\Delta\underline{\omega} = \frac{1}{e_{sec}} \int_0^{e_{sec}} \Delta\chi(\zeta,t)\, d\zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(A(t)) = D_1(A(t)) \cap D_2(A(t)) \cap D_3(A(t)) \\ D_1(A(t)) = \{\Delta\underline{\omega} \in L_2(\Omega) \mid \Delta\underline{\omega}, \Delta\underline{\omega}_z \text{ are a.c.}, \Delta\underline{\omega}_{zz} \in L_2(\Omega)\} \\ D_2(A(t)) = \{\Delta\underline{\omega}_z(0,t) = 0\} \\ D_3(A(t)) = \{\nabla_\chi F_4(\underline{\omega}_0)\Delta\chi(e_{sec},t) + \nabla_T F_4(\underline{\omega}_0)\Delta T = 0\} \end{cases}$$

For the regularity property for the time-varying evolution system on can see [10] for example. Now this final time-varying control problem can be achieved by the following IMC strategy.

D.4 4.Internal linearized model control

The principle schema of IMC is described as follows :

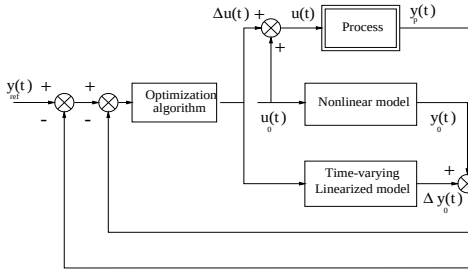


The objective of the IMC structure is to find a controller such that the process output tracks some reference points set in spite of some modelling error and added

disturbances. With a good modelling, this structure allows to make a total disturbance rejection but has poor closed-loop performances. The IMC controller can be an explicite control law for linear time invariant systems even for distributed system [5]. But for nonlinear system and time-varying system, a more faisable approach is the indirect one. The features are :

- to fixe a reference behaviour by possibly a variable points set,
- to compute over a prediction horizon, a control sequence which optimizes (minimizes) a tracking criterion,
- to use the model over this prediction horizon to predict the process output,
- the computation is restarted at each sampling to make a receding horizon over desired time.

The resulting structure, including optimization and according to the preceding local linearization, becomes :



D.4.1 Optimization algorithm

The optimization concerns now the minimization problem for the tracking criterion over a given horizon. The discrete mathematical formulation using a simple quadratic criterion is :

$$\begin{cases} \min\ J(\Delta\underline{u}) = \Sigma_{j=k+1}^{j=k+N_p} \varepsilon(j)^T \varepsilon(j) \\ \Delta\underline{u} = (\Delta u_k\ \ldots\ \Delta u_{k+N_c-1})^T \\ u_{min} \leq u_o + \Delta u_i \leq u_{max}\ (i = 1 \text{ to } N_c) \\ \text{with } \varepsilon(j) = y_{ref}(jT_e) - y_p(jT_e) \end{cases}$$

where T_e is the time sampling period, N_c and N_p are respectively the control horizon and the prediction horizon. Δu_i denotes the time-varying linearized model control

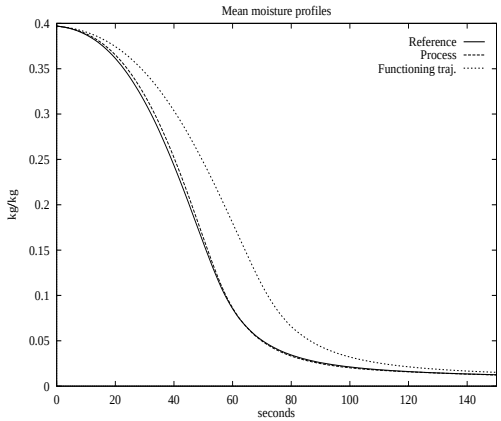
for $t = iT_e$.
To solve this constrained optimization problem, we choose an interior penalty method associated with the Levenberg-Marquardt method [2]. The computation is made at each sampling period to get the optimal control vector $\Delta\underline{u}$, but only the first is applied to both time-varying linearized model and process (nonlinear model).

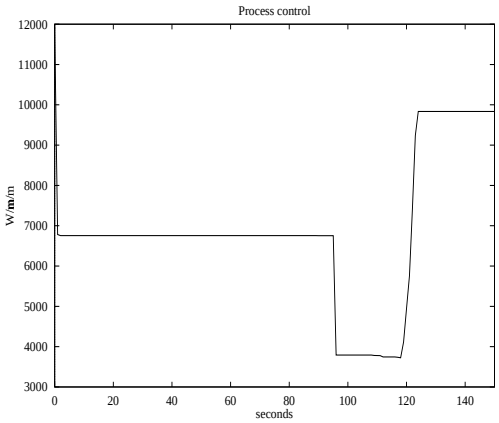
D.5 5.Simulation results

The nonlinear partial differential system and the time-varying linearized one are both solved by semi-finite difference technique (i.e finite difference only in spatial dimension variable). The resulting ordinary differential system is solved by using a predictor corrector method in the ACSL software package. The final control profile is found by the preceding nonlinear programming algorithmn. The initial desired profile, as well as the linearized model, are chosen according to a final quality result. The conditions, according to the set of physical relations in the annexe, are :

$$\begin{cases} T_{air} = 52^oC \\ T_{sup} = 20^oC \\ T_0 = 26^oC \\ \chi_{air} = 20\% \\ \chi_0 = 0.397 \end{cases}$$

We find the following results for $N_p = 4$, $N_c = 1$, $T_e = 1s$:





As it can be seen, these results show a satisfying behaviour for the process simulated output by the control strategy. We can improve the control variable evolution by adding some regularity constraints without more difficulty. Remaining problem are more practical such as the horizons and sample periode determination. As for the computational time, it can be improved using over numerical method.

D.6 6.Conclusions and prospects

In this work, we have given an efficient approach for the control of a class of nonlinear distributed parameter systems. It concerns nonlinear partial differential parabolic type equations with a tracking control problem. We have presented an internal linearized model control structure with predictive control approach using a local time-varying linear model around the tracking trajectory. As showed by the simulation results, this approach is efficient. The framework has been developed through an infrared drying plant example. The prospects are a generalization study for theoritical limits and accurate characterization.

D.7 7.Annexe

The drying velocity $\dot{m}(\chi,T)$ expression is :

$$\dot{m}(\chi,T) = C_7 \frac{1}{T_{moy}} [a_w(\chi) P_{v_{sat}}(T) - P_{v_{air}}]$$

where :

$$T_{moy} = \frac{T + T_{air}}{2}$$

The activity $a_w(\chi)$ is solution of the equation :

$$\frac{a_w(\chi)}{\chi} = A_1 a_w^2(\chi) + A_2 a_w(\chi) + A_3$$

The saturated vapour pressure $P_{v_{sat}}(T)$ is given in millibar by the expression :

$$\begin{aligned} log_{10}P_{v_{sat}}(T) &= C_0(1-\frac{T_1}{T}) - C_1 log_{10}\frac{T}{T_1} \\ &+C_2(1-10^{-C_3(T/T_1-1)}) \\ &+C_4(10^{C_5(1-T_1/T)}-1)+C_6 \end{aligned}$$

with $T_1 = 273.16K$, the C_i being positive constants.

The different following coefficients depend on the temperature T in Celsius degrees :

$$\begin{cases} l_v(T) = [a_5T^5 + a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0] * 10^3 \\ \alpha_{ir}(\bar{\chi}) = \alpha_p(\bar{\chi})(1-\rho_p) + \alpha_s(1-\rho_p)(1-\alpha_p(\bar{\chi})) \\ \qquad +\alpha_p(\bar{\chi})(1-\alpha_s)(1-\rho_p)(1-\alpha_p(\bar{\chi})) \\ \alpha_p(\bar{\chi}) = 1 - [aa_4(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi}_0})^3 + aa_3(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi}_0})^2 + aa_2\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi}_0} + aa_1]\frac{1}{1-\rho_p} \\ C_p(\bar{\chi},T) = [oT + b + \bar{\chi}\{c_{p_3}T^3 + c_{p_2}T^2 + c_{p_1}T + c_{p_0}\}] * 10^3 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] Barbu V., *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems*, Academic Press Inc., 1993.

[2] Courtial E., *Commande prédicitve et estimation d'état de systèmes non linéaires*, PhD Thesis, Univ. Claude Bernard Lyon 1, 1996.

[3] Dafermos C.M., Slemrod M., *Asymptotic behaviour of nonlinear contractions semigroup*, J. of Funct. Anal, Vol. 13, pp. 97–106, 1973.

[4] Dochain D., Babary J.P., Tali-Maamar N., *Modelling and adaptive control of nonlinear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation*, Automatica, Vol. 28, No. 5, pp. 873–883, 1992.

[5] Dufour P., Josserand L., Toure Y., *Commande par actions frontières d'un système d'échangeurs de chaleur* RAIRO-APII-JESA, Vol. 30, pp. 1375–1391, 1996.

[6] Ibragimov N.Kh., Shabat A.B., *Evolutionnary equations with nontrivial* L*ie*-B*acklund group*, Functionnal Analysis and the Application, Vol. 14, pp. 19–28, 1980.

[7] Magri F., *Equivalence transformations for nonlinear evolution equations*, J. of Math. Physics, Vol. 18, No. 7, pp. 1405–1411, 1977.

[8] Miura R.M., *The Korteweg-de Vries equation: a survey of results.* SIAM, Review, Vol. 18, pp. 412-459, 1976.

[9] Navarri P., *Etude du séchage par rayonnement infrarouge. Application à un produite capilloporeux et à une enduction*, PhD Thesis, Univ. Claude Bernard Lyon 1, 1992.

[10] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation*, Springer Verlag New-York, 1983.

[11] Toure Y., Biston J., Gilles G., *Modeling of a distributed parameter process with a variable boundary: application to its control*, Chem. Eng. Sci., Vol. 49, No. 1, pp 61–73, 1994.

E

Acte publié à l'occasion du congrès ECC'99

Optimal trajectory determination and tracking of an autoclave curing process : a model based approach

P. Dufour[1] , Y. Touré[2], D.J. Michaud[3], P.S. Dhurjati[3]

[1] *LAGEP UPRES-A CNRS Q 5007*
Université Claude Bernard
43, bd du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France
[2] *IUT de Bourges*
Université d'Orléans
63 Avenue de Lattre de Tassigny
18020 Bourges cedex, France
[3] *Department of Chemical Engineering and Center for Composite Materials*
University of Delaware
Newark, DE 19716, U.S.A

Fax : [1] *4 72 43 16 99,* [2] *2 48 23 80 17,* [3] *(302) 831-1048*
e-mail : [1] *dufour@www-lagep.cpe.fr,* [2] *Youssoufi.Toure@bourges.univ-orleans.fr,*
[3] *michaud,dhurjati@che.udel.edu*

Keywords : Model predictive control, constrained optimization, distributed parameter system control, curing process.

Résumé

This work deals with a model-based approach to non-linear (NL) parabolic distributed parameter system control. We address two problems in the optimization and control of the autoclave lay-up curing process as presented in [11]. The first is to find the best process trajectory corresponding to the shortest possible operating time. The second is to determine the process control required to track the optimized trajectory within the constraints of the system. In previous work, a simulation based approach was used called local criteria optimization (LCO) [10]. Here the former problem is stated as a constrained optimization problem. A predictive type approach with a penalty method is solved by the Levenberg-Marquardt (LM) algorithm. For the tracking problem, the well-known Internal Model Control (IMC) structure is used for the predictive control strategy. Finally, we show that a time-varying linear model around the optimal profile can be used for the on-line optimization like in [4].

E.1 Introduction

This paper deals with the distributed parameter systems (DPS) control governed by non-linear parabolic partial differential equations where we state two problems. Find the control and output trajectories such that the process output reaches a minimum extent in a minimum time. Then, find the process control in order to track in process output the best trajectory induced by the first problem. Concerning the

former problem, a first approach consists in the model based approach. The most direct way is using the Pontryagin's minimum principle developed through calculus of variations. But, in spite of basic methodology that guarantees optimal solutions, it does not seem to be easily implementable for NL DPS [8]. It is also possible to use an expert control [7] where finding pseudo-rules is a very difficult task. For batch processes, a simulation based optimization scheme with heuristic rules for control has been found to be more successful. This approach was previously applied to the process described in [10].
In this work, we propose a model-based approach. A constrained optimization problem, set in finite dimension, is combined with a predictive approach and solved using a nonlinear programming (NLP).
Few works have dealt with distributed parameter systems. The existed ones deal with structurally interested cases for one partial derivative equation but not for a set of equations. A first approach consists of using a transformation method based on the inverse scattering problem developed by Magri [9], where an exact linearization by geometrical transformation is proposed. The main problem is that the order of this transformation has to be fixed by a non trivial manner. In the nonlinear distributed parameter systems study, the most popular approach is the linearization approach, or else the finite dimensional approximation [12]. Concerning the control synthesis, explicit control law becomes more difficult : in [1], the problem is to solve Riccati equations, but therefore, it is still an open loop control. In [6], a structural approximation of the DPS is done in finite dimension taking into account of constraints. In this paper, we use an optimization approach taking into account of various constraints. We use also the Internal Model Control structure in its indirect version that brings to a predictive control approach by minimizing a criterion over a receding horizon [3, 4].
This approach is developed through an application example : an autoclave curing process used to manufacture composites from a thermosetting polymer matrix. The first objective is to find the fastest curing cycle, taking into account of constraints on the temperature and the degree of cure. Then, the control aim is to track a given temperature profile in process output. In the first section that follows, we present the autoclave curing process and its control problem : we describe the nonlinear boundary control system. In the next section, the reference determination problem is stated as a constrained optimization and the results are shown. The tracking problem, stated also in term of constrained optimization, is then exposed.

E.2 Process and control objectives

The process being studied is an autoclave curing process used to manufacture composites with a thermosetting polymer matrix. Prior to cure, the polymer is a viscous fluid. The assembly (Fig. E.1) is sealed in a vacuum-bag and placed in an autoclave. It is then subjected to a prescribed autoclave temperature $T_a(t)$ (the process control variable) and pressure cycle, known as a cure cycle. Due to the application of heat, the resin solidifies through an irreversible exothermic chemical

reaction of cure. The model version used here is in one spatial dimension since a 2-D problem has demonstrated that the temperature gradients in the lateral direction were negligible. The critical dimension is therefore across the thickness and is divided in three parts $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_c$, $\mathcal{D}_d$ (Fig. E.2).

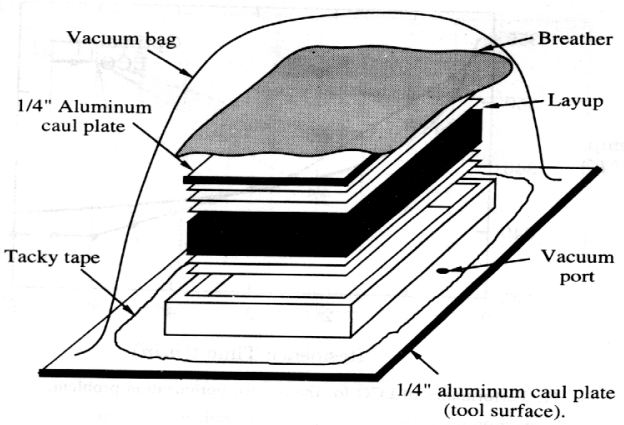


FIG. E.1 – *Composite layup [10].*

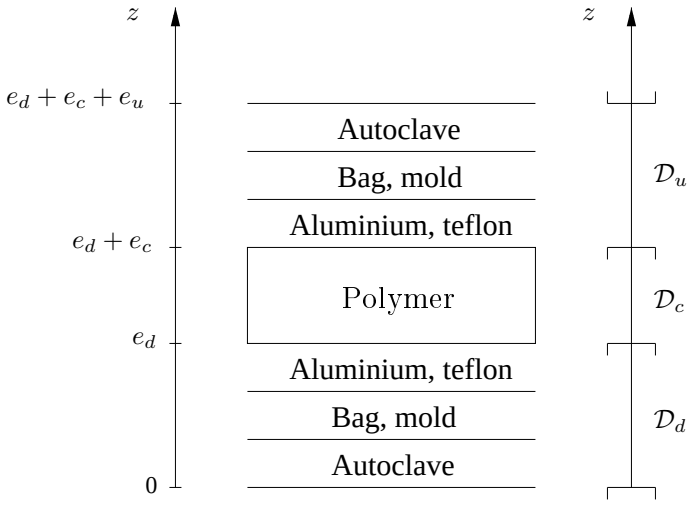


FIG. E.2 – *Spatial domains.*

At the edge of the composite ($\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_d$) , heat transfer resistance in the autoclave, the bag, the fabric and the mold have been lumped. In the composite part ($\mathcal{D}_c$), the behaviour of temperature $T(z,t)$ is linked with the distributed degree of cure $\alpha(z,t)$ via the internal heat generation term. This degree of cure is equivalent to an extent of reaction and ranges from 0 to 1.

E.2.1 Nonlinear boundary control system

The curing process can then be described by the following NL system ($\mathcal{S}_{NL}$) [10] (where the model parameters description can be found) :

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho_t c_{p_t} \frac{\partial T}{\partial t} = k_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{with } z \in \mathcal{D}_u,\ t > 0 \\
\rho_c c_{p_c} \frac{\partial T}{\partial t} = k_c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho_c(-\Delta H_r) m_r A e^{-\frac{E_a}{RT}} \alpha^m (1-\alpha)^n, \\
\frac{\partial a}{\partial t} = A e^{-\frac{E_a}{RT}} \alpha^m (1-\alpha)^n \quad \text{with } z \in \mathcal{D}_c,\ t > 0 \\
\rho_t c_{p_t} \frac{\partial T}{\partial t} = k_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{with } z \in \mathcal{D}_d,\ t > 0 \\
\text{with the boundary conditions :} \\
\left.\begin{array}{l} T(e_d + e_c + e_u, t) = T_a(t) \\ T(0,t) = T_a(t) \end{array}\right\} \text{ with } t > 0 \\
\text{with the output :} \\
y(t) = T(e_d + e_c, t) \quad \text{with } t > 0 \\
\text{and with the initial conditions :} \\
T(z,0) = T_0 \quad \text{with } z \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \\
\alpha(z,0) = 0 \quad \text{with } z \in \mathcal{D}_c
\end{array}\right.$$

where the center point is located at $c = \frac{e_d+e_c+e_u}{2}$, $\partial\mathcal{D} = \{0, e_d + e_c + e_u\}$ and $\mathcal{D} = \mathcal{D}_d \cup \mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_u$. This system can be represented by a more general boundary control nonlinear distributed parameter system $[(\mathcal{S}_{NL}), \overline{\omega}(z), \omega(z,t), u(t), y(t), A, B, C,\ z \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D},\ t > 0]$:

$$(\mathcal{S}_{NL}) \left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial w}{\partial t}(z,t) = A(\omega(z,t)) \quad \text{with } z \in \mathcal{D},\ t > 0 \\
B(\omega(z,t), u(t)) = 0 \quad \text{with } z \in \partial\mathcal{D},\ t > 0 \\
y(t) = C\omega(z,t) \quad \text{with } z \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D},\ t > 0 \\
\omega(z,0) = \overline{\omega}(z)
\end{array}\right.$$

where $\omega(z,t)$ is the state defined on a Hilbert space X, $u(t)$ is the control and $y(t)$ the output. A is a NL operator, B and C are bounded operators. Moreover, we assume that this NL model is regular in the sense of [2].

E.3 Reference determination

The manufacture of such thick composites is fraught of problems. The most detrimental effect is an internal temperature exotherm resulting from the heat generated by the cure reaction within the thermosetting resin. Hence, large thermal gradients can develop, which result in nonuniform curing. Moreover, if the part cures from outside inward, the large thermal stresses trapped in the part can lead to delamination and render it unusable. The task in optimizing lies therefore in decreasing the process time, while simultaneously improving the reliability and quality of the final product.
The problem is to find the control variable $u(t)$ such that the operating time is minimum taking into account of the following constraints : limit thermal gradients and ensure an inside-out curing. Obviously, the determinated control variable must be physically applicable : its amplitude and its control must be bounded. This problem can be expressed as a discrete time constrained optimization problem. At each sampling time k, we seek a vector $\tilde{p}$ minimizing a performance index J. This vector $\tilde{p}$ is the N_c horizon control sequence. At each sampling time k, only the first component of the final $\tilde{p}$ is kept and the procedure is performed again at the next sampling time. The performance index is chosen in order to maximize the degree of cure dynamic at the center of the polymer over a receding horizon N_p :

$$(\mathcal{P}_0)\begin{cases} \underset{\tilde{p}}{max}\ J(\tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} ||\dot{\alpha}(c,j)||^2 \\ \tilde{p} = (u(k)...u(k+N_c-1))^T \end{cases}$$

The *nco* constraints must be satisfied at any time :

$$g_{i,min} \leq g_i(w,u) \leq g_{i,max} \quad (1 \leq i \leq nco) \tag{E.1}$$

Then, these constraints are reformulated by rescaling them such that they have the same weight in the problem :

$$(\mathcal{C}_0)\begin{cases} -\frac{g_i(w,u)-g_{i,min}}{g_{i,max}-g_{i,min}} \leq 0 \\ \frac{g_i(w,u)-g_{i,min}}{g_{i,max}-g_{i,min}} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

The maximization problem $(\mathcal{P}_0)$ is finally formulated under an equivalent minimization problem :

$$(\mathcal{P}_c)\begin{cases} \underset{\tilde{p}}{min}\ J(\tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} \frac{1}{||\dot{\alpha}(c,j)||^2} \\ c_i(\tilde{p}) \leq 0 \quad (i \in I = \{1 \rightarrow 2nco\}) \\ \tilde{p} = (u(k)...u(k+N_c-1))^T \end{cases}$$

In order to solve the constrained optimization problem $(\mathcal{P}_c)$, we adopt a nonlinear programming method that combines the interior and exterior penalty methods [5],

a transformation method and an unconstrained nonlinear resolution method. The advantage is that constraints can be easily introduced in the formulation. We then expressed the constrained problem into an unconstrained penalized optimization problem where the new performance index J_{tot} to minimize is :

$$(\mathcal{P}_u) \begin{cases} \min\limits_{\tilde{p}} J_{tot}(\tilde{p}) = J(\tilde{p}) + p_{int} J_{int}(c_i(\tilde{p})) + p_{ext} J_{ext}(c_i(\tilde{p})) \\ \tilde{p} = (u(k)...u(k+N_c-1))^T \end{cases}$$

From the previous performance index J in $(\mathcal{P}_c)$, we have added an interior (resp. exterior) penalty function depending on the constraints. It is weighted by a penalty coefficient p_{int} (resp. p_{ext}).

E.3.1 Interior penalty method

The main advantage of this method is that we can ensure that every constraint is checked at any time for any control sequence $\tilde{p}$ tried by the resolution method. It is therefore a very interesting way if we have to determine an on-line control : the algorithm has to be able to give a physical solution even if the resolution method is stopped due the maximal computational time constraint. The major known drawback is the initialization problem. For the *nci* constraints set here, the interior penalty function J_{int} can be an inverse barrier function [5] :

$$J_{int}(c_i(\tilde{p})) = \sum_{i=1}^{i=nci} \frac{-1}{c_i(\tilde{p})} \tag{E.2}$$

J_{int} is defined on $\overset{\circ}{K} = \{\tilde{p} \text{ such that } c_i(\tilde{p}) < 0\}$. The advantage of this formulation is that, in the domain $\overset{\circ}{K}$, J_{int} is always a penalty term since it takes always positive value.

E.3.2 Exterior penalty method

The advantage of this method is that the vector $\tilde{p}$ can be initialized anywhere. The induced drawback is that the constraints can be violated during the calculation time. For the *nce* constraints stated here, the exterior penalty function J_{ext} is [5] :

$$\begin{cases} J_{ext}(c_i(\tilde{p})) = \sum\limits_{i=1}^{i=nce} f(c_i(\tilde{p})) \\ f(c_i(\tilde{p})) = max^2(0, c_i(\tilde{p})) \end{cases}$$

E.3.3 Resolution method

The problem $(\mathcal{P}_u)$ can now be solved by any unconstrained optimization method. In this domain, the Levenberg-Marquardt's algorithm is one of the most important [5]. The evolution in the parameters space P follows the law :

$$\tilde{p}^{i+1} = \tilde{p}^i - (\nabla^2 J^i_{tot} + \lambda I)^{-1} \nabla J^i_{tot} \tag{E.3}$$

Algorithm modification

But, a structural problem can occur. Indeed, this algorithm is able to find a solution anywhere in P. Since the interior penalty function J_{int} is defined anywhere out of the boundary of the constraints domain K, some $\tilde{p}$ vector are prohibited. Moreover, we have to ensure that any $\tilde{p}$ tried by the algorithm is such that J_{int} is a positive term otherwise it is not a penalty term. This leads to a modification in the algorithm by introducing a new parameter θ :

$$\tilde{p}^{i+1} = \tilde{p}^{i} - \theta(\nabla^2 J_{tot}^{i} + \lambda I)^{-1} \nabla J_{tot}^{i} \tag{E.4}$$

Parameter transformation

Considering the nonlinear model ($\mathcal{S}_{NL}$), a numerical divergence can happen with the Arrhenius kinetic behavior and the temperature therefore has to be kept over a minimal value. The only way to avoid a small polymer temperature is to forbid small control values. So, the constraints dealing with the control amplitude are stated using a parameter transformation instead of the interior penalty function :

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \tag{E.5}$$

becomes :

$$u = \frac{u_{max} + u_{min}}{2} + \frac{u_{max} - u_{min}}{2} tanh(w) \tag{E.6}$$

where $\tilde{p} = (w(k)...w(k + N_c - 1))^T$ is the new parameters vector to find that can take value anywhere in P. In this application, this replaces implicitly θ.

E.3.4 Simulation results

Concerning the constraints, the control sequence computed must be physically attainable :

$$T_{a_{min}} \leq T_a \leq T_{a_{max}} \tag{E.7}$$

$$\dot{T}_{a_{min}} \leq \dot{T}_a \leq \dot{T}_{a_{min}} \tag{E.8}$$

As we mentioned before, control amplitude constraints have been expressed using a transformation method. Since computational time is not constrained here, the other constraints are set using an exterior penalty function. We just take into account of the inside-out cure problem. This is done by introducing fictitious constraints. This means that we express our process behavior skill. At first sight, the inside-out cure happens if the temperature inside the polymer is almost uniform and has reached a minimum extent. We have therefore put thermal gradients constraints and extent of cure gradient constraints :

$$\Delta T_{min} \leq T(e_d + e_c,t) - T(c,t) \leq \Delta T_{max} \tag{E.9}$$

$$\Delta \alpha_{min} \leq \alpha(e_d + e_c,t) - \alpha(c,t) \leq \Delta \alpha_{max} \tag{E.10}$$

The previous framework is then applied to the optimization problem $(\mathcal{P}_u)$. The best resulting trajectories for temperatures and extents of cure inside the composite are performed with $N_c = 1$, $N_p = 15$:

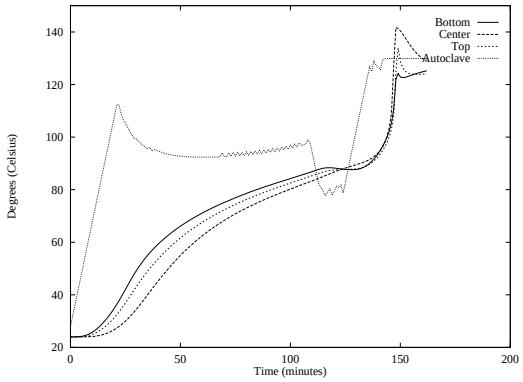


FIG. E.3 – *Temperatures*

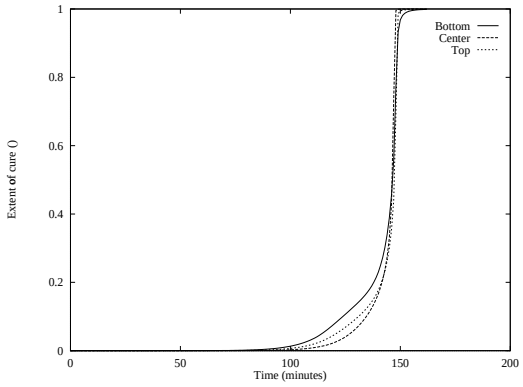


FIG. E.4 – *Through thickness curing behaviour*

In this case, the cure is completed in 163 minutes. The inside-out cure is ensure but the thermal gradient seems to be too important when the exothermic reaction occurs.At each sampling time, the algorithm output condition ensures that the most violated exterior constraints related to the final solution $\tilde{p}$ does not exceed 1% of the constraints scale (cf $(\mathcal{C}_0)$) :

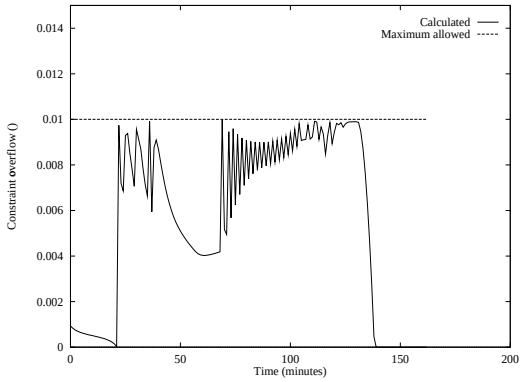


FIG. E.5 – *Algorithm output condition*

With this method, we have found the best manner in which to cure the polymer. The problem is now to find the control of the closed-loop system such that the output temperature tracks effectively the optimal output temperature $y_{ref}(t)$ induced we just have found. This is a more classical control problem that follows.

E.4 Nonlinear predictive control

The control problem can be stated as follows : for a given optimal output temperature trajectory (Fig. E.3), find a control strategy such that the process output tracks this profile with the above control constraints and the extent of cure crossover constraint. We restate this control problem again as a constrained optimization problem with a predictive type approach in the Internal Model Control (IMC) like structure.

E.4.1 IMC structure

The objective is to find a controller such that the process output y_p tracks some reference points set y_{ref} in spite of some modelling error and added disturbances. It can be an explicit control law [13]. But for nonlinear systems and time-varying linear systems, the indirect one seems to be more feasible : at each sampling time, a control sequence over a control horizon optimizing a criterion is computed [3]. It uses the process output predicted over the prediction horizon by the model. The control structure becomes the following one :

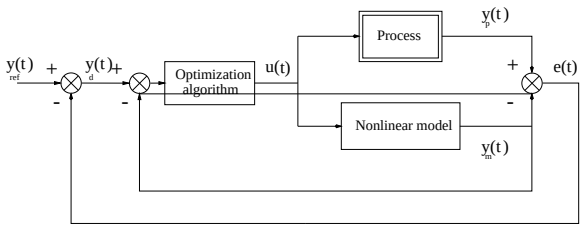


FIG. E.6 – *Internal Model Control structure*

The optimization problem is similar to $(\mathcal{P}_C)$. It is formulated in the discrete form by minimizing a classical tracking criterion over a receding horizon N_p :

$$\begin{cases} \underset{\tilde{p}}{max} = \frac{1}{2}\Sigma_{j=k+1}^{j=k+N_p}||y_{ref}(j) - y_p(j)||^2 \\ \\ \tilde{p} = (u(k)...u(k+N_c-1))^T \\ \\ g_{i,min} \leq g_i(w,u) \leq g_{i,max} \quad (1 \leq i \leq nco) \end{cases}$$

To solve this constrained optimization problem, we choose again the penalty method associated with the Levenberg-Marquardt method. The computation is made at each sampling time to get the optimal control sequence $\tilde{p}$, but only the first component $u(k)$ is applied to both model and process. As expected, it can be viewed as the dual problem of the optimal trajectory determination and the results are similar to the previous trajectory determination results.

E.4.2 Real-time control strategy

The previous results show that, for this process, we are able to find optimal temperature and extent of cure corresponding to the optimal control. In order to take into account the on-line control problems (computational time limitation, modelling uncertainties and some disturbances), we adopt the internal linearized model control approach like in [4]. We just recall here the main ideas : the first one is to assume that the previous system (S_0) is not so far from the real-time optimal system. So, this variations can be described by a moving system $(\mathcal{S}_{LTV})$ which is a time-varying linearized distributed parameter system :

$$\begin{cases} \Delta\omega_t(z,t) = A_L(t)\Delta\omega(z,t) \quad \text{with } z \in \mathcal{D},\ t > 0 \\ \\ B_{L_1}(t)\Delta\omega(z,t) + B_{L_2}(t)\Delta u(t) = 0 \quad \text{with } z \in \partial\mathcal{D},\ t > 0 \\ \\ \Delta y_m(t) = C\Delta\omega(z,t) \quad \text{with } z \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D},\ t > 0 \\ \\ \Delta\omega(z,0) = 0 \end{cases}$$

$A_L(t)$, $B_{L_1}(t)$ and $B_{L_2}(t)$ are linear time-varying (LTV) operators obtained by the linearization of the nonlinear operators A and B around the standard operating point $(u_0(t),\omega_0(t))$. The control problem is now to find the control variation $\Delta u(t)$, with $u(t) = u_0(t) + \Delta u(t)$ leading to the moved output $y_m(t) = y_0(t) + \Delta y_m(t) = C(\omega_0(z,t) + \Delta\omega(z,t))$, such that the process output $y_p(t)$ tracks the given optimal trajectory $y_{ref}(t)$: this time-varying control problem can be achieved using the IMC strategy :

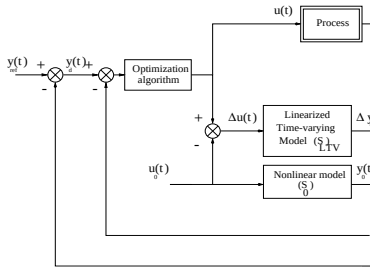


FIG. E.7 – *Internal linearized model control structure*

E.5 Conclusion

In this work, we have presented a dual problem in the control of nonlinear parabolic distributed parameter system. It concerned the determination of the process trajectory such that the operating time becomes the shortest possible and the classical induced tracking problem. For the former problem, we have used a model based approach with a predictive approach using nonlinear programming. The most important problem is to set constraints from the behaviour knowledge. Indeed, we still do not have an efficient model linking the autoclave temperature and the residual stresses induced during the cure cycle. Concerning the horizons tuning, a control horizon of 1 seems to be sufficient like in the tracking problem. Concerning the prediction horizon, it has to be sufficiently important to take correctly into account of the constraints. Otherwise, the optimization problem is not well set and has no physical solution. For the tracking problem, we have introduced the Internal Model Control strategy with the same predictive approach. The internal model is the combination of a nonlinear model and its small perturbations model. The perspectives are a generalization study for the closed-loop stability.

Bibliographie

[1] Banks S.P., "Controllability and optimal control of partial differential equations on compact manifolds", *Int. J. Systems Sci.*, **15(5)**, 543–562, (1984).

[2] Barbu V., "Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems", *Academic Press Inc*, (1993).

[3] Courtial E., Touré Y., "Nonlinear Model Predictive control : constrained optimization and practical stability", *International Symposium on Nonlinear Model Predictive Control, Ascona, Switzerland*, Preprints p36., (1998).

[4] Dufour P., Touré Y., Laurent P., "A nonlinear distributed parameter process control : an internal linearized model control approach", *CESA'98 IEEE IMACS Multiconference, Hammamet*, **1**, 134–138, (1998).

[5] Fletcher R., "Practical methods of optimization" *John Wiley and Sons*, (1987).

[6] Imai K., Kawahara M., "A study of water pollution control problem under inequality constraint on the control value", *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mathematical Problems in Industry*, **1**, 237–251, (1993).

[7] LeClair S.R, Abrams F.L, "Qualitative process automation", *Int. J. Integ. Manuf.*, **2**, 205–211, (1988).

[8] Loos A.C, Nagendra S., "Optimization of the curing process of filament wound composites", *Proc. of the 34th Int. SAMPE Symp.*, 1853–1867, (1989).

[9] Magri F., "Equivalence transformations for nonlinear evolution equations", *Journal of Mathematical Physics*, **18(7)**, 1405–1411, (1977).

[10] Pillai V., Beris A.N., Dhurjati P., "Heuristics guided optimization of a batch autoclave curing process", *Computers Chem. Engng*, **20(3)**, 275–294, (1996).

[11] Pillai V., Beris A.N., Dhurjati P., "Intelligent curing of thick composites using a knowledge-based system", *Journal of Composite Materials*, **31(1)**, 22–51, (1997).

[12] Touré Y., Biston J., Gilles G., "Modeling of a distributed parameter process with a variable boundary : application to its control" *Chemical Engineering Science*, **49(1)**, 61–73, (1994).

[13] Touré Y., Josserand L., "An extension of IMC to boundary control of distributed parameter systems" *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics-CCS Orlando Floride - USA*, **3**, 2426–2431, (1997).

F

Acte publié à l'occasion du congrès MTNS'2000

Predictive control of a nonlinear distributed parameter system : real time control of a painting film drying process

M.C. Larabi[1], P. Dufour [1 1] , P. Laurent[1], Y. Touré[2]
[1] LAGEP UPRES-A CNRS Q 5007
University Claude Bernard Lyon 1
43, bd du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France
{larabi,dufour,laurent}@lagep.univ-lyon1.fr
[2] LVR UPRES EA 2078
University of Orléans
63, avenue de Lattre de Tassigny
18020 Bourges Cedex, France
Youssoufi.Toure@bourges.univ-orleans.fr

Keywords : Nonlinear distributed parameter system, predictive control, constraints handling, drying process, real time control.

Résumé

This paper deals with the model predictive control of processes. The new step is the use of a distributed parameter system instead of a lumped parameter system. The internal model control structure is also used to solve the trajectory tracking problem. The internal model is obtained from the linearization of the initial set of nonlinear partial differential equations about the desired trajectory. Finally, the control problem stated as a constrained optimization problem is solved by a control algorithm. Experimental results presented here show the efficiency of this control strategy.

F.1 Introduction

This work is concerned with a model based approach to the nonlinear parabolic distributed parameter system control. There are few practical works directly dealing with the control of such systems. Even if the existed one are based on interesting structures, they treat neither complex nonlinearities nor a set of partial differential equations [6, 5]. Besides, these results do not seem to be applicable to nonlinear models like the described one in this paper.
The control synthesis is reached by extending the classical use of the model predictive control (MPC) strategy [9, 11, 10] from systems described by ordinary differential equations to systems described by partial differential equations. This leads to a control problem stated as a constrained optimization problem. Moreover this strategy is combined here with the internal model control structure (IMC) [8] where the model is obtained by the off-line linearization of the initial nonlinear model about a given trajectory. This allows to decrease the on-line calculation time due to the

1. Author to whom all correspondence should be addressed.

model resolution needed in the constrained optimization problem resolution. Indeed, this is an important problem to be kept in mind for real time control.
In the first section, we present the drying plant described by a nonlinear distributed parameter system . The control problem is then exposed. In the next section, MPC strategy and the resolution method are explained in more details. Experimental results are finally exposed to show the possibilities for this approach in real time control applications.

F.2 Drying process and control problem

F.2.1 Drying process

Within the framework of a previous study [1], an experimental drying process has been built. It allows to dry a painting film sample coated on a car iron support by supply of an infrared flow. The plant is represented Fig. F.1 with the infrared part and with the instrumention part. The sensors are : a pyrometer that allows the on-line temperature measurement of the sample at the upper surface and a precision balance that allows the follow-up of the sample and support set mass. The painting film sample mass is the sum of the constant final dried mass of the sample with the time variant water mass in the sample. Indeed, during the drying under infrared flow, this water mass decreases since the water contained in the painting film sample migrates from inside to the upper surface and vaporizes at this surface.

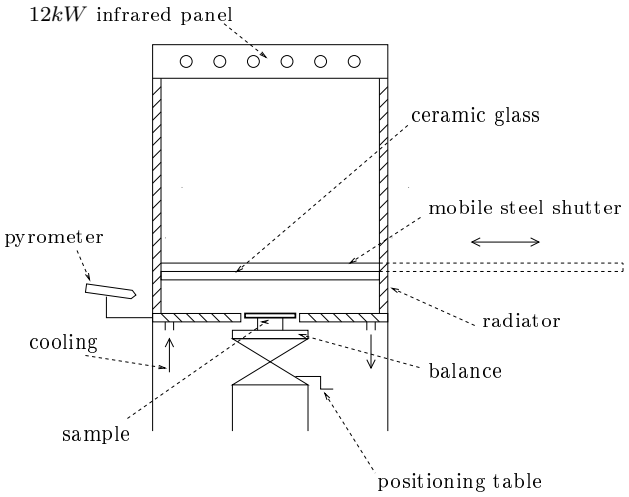


FIG. F.1 – *Drying process.*

These mass and temperature measurements during experimental drying kinetics have allowed to validate the knowledge model that we use in this paper : this low thickness painting film sample is characterised by its temperature assumed uniform $T(t)$ and by its dry basis humidity $\chi(z,t)$ assumed to varying only according to the thickness z of the sample [1].

The drying leads to water losses which produces a variation in the sample geometry. Considering the surface size and the thickness of the sample, we consider that the water extraction leads only to the linear reduction of the sample thickness e_p with respect to the mean humidity $\bar{\chi}$:

$$e_p = e_{sec}(1 + \phi\bar{\chi}) \tag{F.1}$$

where e_{sec} is the final dried thickness of the sample and with :

$$\bar{\chi}(t) = \frac{1}{e_{sec}} \int_0^{e_{sec}} \chi(z,t)\ dz \tag{F.2}$$

The model of the painting film sample infrared drying can be finally represented by the state variables $T(t)$ and $\chi(z,t)$. It is deduced from the following energy and mass balances (remaining expressions are given in the annexe).

F.2.2 Energy balance

We assume that the car iron support is a reliable enough thermical conductor to consider that the temperature T is uniform on the sample and support set. Taking into account of the different losses P_i as well as the absorbed infrared flow represented Fig. F.2,

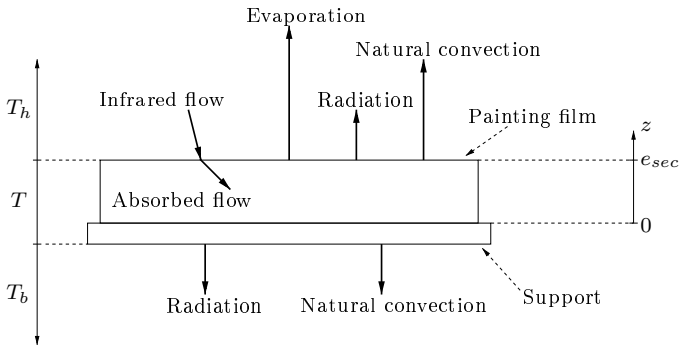


FIG. F.2 – *Thermal flows.*

the energy balance leads to :

$$(\rho_p C_p(\bar{\chi},T)e_p + \rho_s C_s e_s)\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{5} P_i + P_{abs} \tag{F.3}$$

where $\rho_p C_p(\bar{\chi},T)e_p$ and $\rho_s C_s e_s$ are respectively the surface thermal capacity of the painting film sample and the surface thermal capacity of the support.
Different losses due to the natural convection and radiation phenomena on both

surfaces have for expression :

$$P_1 = h_c(T - T_h) \quad \text{(F.4)}$$
$$P_2 = \sigma_h(T^4 - T_h^4) \quad \text{(F.5)}$$
$$P_3 = h_c(T - T_b) \quad \text{(F.6)}$$
$$P_4 = \alpha_s\ \sigma(T^4 - T_b^4) \quad \text{(F.7)}$$

The water loss P_5 is linked to the drying velocity $\dot{m}(\bar{\chi},T)$:

$$P_5 = l_v(T)\dot{m}(\bar{\chi},T) \quad \text{(F.8)}$$

and the absorbed flow P_{abs} depends on the manipulated variable, i.e. the infrared flow $\varphi_{ir}(t)$:

$$P_{abs} = \alpha_{ir}(\bar{\chi})\varphi_{ir} \quad \text{(F.9)}$$

F.2.3 Mass balance

Since there is no macroporous structure, we consider that the water migrates only by diffusion phenomenon. It allows to write the mass balance using the Fick law :

- for $z\ \in \Omega =]0,e_{sec}[$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}[D_{eff}(\chi,T)\frac{\partial \chi}{\partial z}] \quad \text{(F.10)}$$

  with the effective diffusion coefficient D_{eff} depending on the humidity and the temperature :

$$D_{eff}(\chi,T) = \frac{D_0 exp^{(\frac{-a}{\chi})} exp^{(\frac{-Ea}{RT})}}{(1+\phi\chi)^2} \quad \text{(F.11)}$$

- at $z = 0$, i.e. at the painting film sample lower surface, there is not any mater transfert :

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \quad \text{(F.12)}$$

- at $z = e_{sec}$, the outgoing flow is linked to the drying velocity through :

$$-D_{eff}(\chi,T)\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\dot{m}(\bar{\chi},T)}{\rho} \quad \text{(F.13)}$$

F.2.4 Nonlinear distributed parameter system

From the previous energy and mass balances, the process is represented by the following nonlinear distributed parameter system $(\mathcal{S}_{NL})$:

$$(\mathcal{S}_{NL})\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial t} = F_1(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2},\ \frac{\partial \chi}{\partial z},\ \chi,\ T) \text{ for } z \in \Omega,\ t > 0 \\ \frac{dT}{dt} = F_2(\bar{\chi},\ T) + F_3(\bar{\chi},T)u(t) \text{ for } t > 0 \\ \text{with :} \\ \text{the scalar input : } u(t) = \varphi_{ir}(t) \text{ for } t > 0 \\ \text{the output : } y_m(t) = T(t) \text{ for } t > 0 \\ \text{with the boundary conditions :} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \text{ for } z = 0,\ t > 0 \\ F_4(\frac{\partial \chi}{\partial z},\bar{\chi},\chi,T) = 0 \text{ for } z = e_{sec},\ t > 0 \\ \text{with the initial conditions :} \\ \chi(z,0) = \chi_i \text{ for } z \in \Omega \cup \{0,\ e_{sec}\} \\ T(0) = T_i \end{cases} \tag{F.14}$$

Remark F.2.1 *According to the spatial uniform property assumption on the temperature, the control problem is a distributed control one : indeed the manipulated variable, i.e. the infrared flow $\varphi_{ir}(t)$, acts instantaneously at the boundary ($z = e_{sec}$) and over the painting film sample.*

F.2.5 Control problem statement

For real applications, the final product obtained by the painting film sample drying has to be usable : bubbles and fissures phenomena have therefore to be avoided. To ensure the final product quality, paint producers propose a reference temperature profile during the drying cycle (temperature rising with a constant velocity and upholding at a given temperature).
The control problem considered here is the tracking of the temperature reference trajectory shown Fig. F.3, subject to constraints on the manipulated variable $u(t)$.

Remark F.2.2 *This reference could be the result of an off-line optimization problem like in [3]. The ideal optimal problem would consist in finding the way to simultaneously achieve the drying as far as possible and to handle the bubbles and fissures phenomena. A modeling for such problems is unfortunately not available yet.*

Considering this constrained control problem, a MPC strategy seems to be well-adapted to satisfy such control requirements.

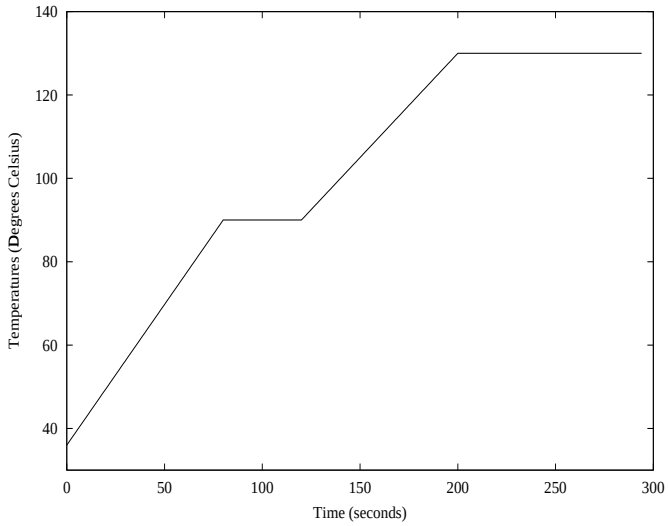


FIG. F.3 – *Temperature reference trajectory.*

F.3 Predictive control strategy

F.3.1 Constrained optimization problem

A reference trajectory tracking problem can be achieved by the use of the internal model control structure (IMC) [8] depicted Fig. F.4 where the manipulated variable is applied to both process and model.

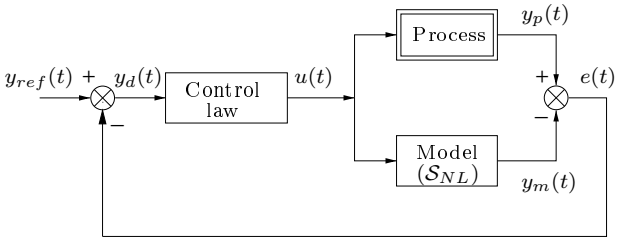


FIG. F.4 – *IMC principle.*

The objective is to determine a control law such that the process output $y_p(t)$ tracks some reference $y_{ref}(t)$ in spite of some modeling errors. This control strategy can be an explicit control law for linear time invariant systems even for distributed parameter system [12]. But for nonlinear or time variant system, a more feasible approach is the indirect one. In a previous work [2], we introduce a MPC strategy to deal with the trajectory tracking task. The mathematical discrete-time formulation, for

a SISO process, can be written as the following constrained optimization problem :

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_{ref}(j) - y_p(j)]^2 \\ \\ \tilde{u} = [\varphi_{ir}(k) \ ... \ \varphi_{ir}(k+N_c-1)]^T \\ \\ \text{and } \forall j \in \mathcal{J} = \{k+N_c, ..., k+N_p-1\} : \\ \\ u(j) = u(k+N_c-1) \\ \\ \text{subject to constraints on the manipulated variable.} \end{cases} \tag{F.15}$$

First of all, the knowledge of $y_p(j)$ over the prediction horizon N_p is not available at the present time k. Due to the IMC, this problem can be solved by reformulating the tracking problem :

$$y_{ref}(j) - y_p(j) = y_d(j) - y_m(j) \tag{F.16}$$
$$y_d(j) = y_{ref}(j) - e(j) \tag{F.17}$$

Assumption 1 *The error $e(j)$ between the process output and the model output remains the same at each sample time k over the prediction horizon N_p [7, ?]. The error value is updated at each sampled time k.*

Then, according to (F.16) and assumption (1) the initial criterion J to be minimized can be expressed as :

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_d(j) - y_m(j)]^2 \tag{F.18}$$

From a practical point of view, the second problem is the computational time aspect. Indeed, in the MPC strategy, the model aims to predict the future dynamic behaviour of the process output over a finite prediction horizon N_p. To reduce the on-line model resolution time, we use a linearization method of the nonlinear model ($\mathcal{S}_{NL}$) about a similar nonlinear model (S_0) computed off-line by choosing its input u_0. Then, a time variant linearized model (S_{TVL}) can represent the small state variations $\Delta\chi(k)$ $\Delta T(k)$ and small output variation $\Delta y_m(k)$ about (S_0) with respect to small input variation $\Delta u(k)$ (Fig. F.13 given in annexe).

$$u(k) = u_0(k) + \Delta u(k) = \varphi_{ir0}(k) + \Delta\varphi_{ir}(k) \tag{F.19}$$
$$\chi(k) = \chi_0(k) + \Delta\chi(k) \tag{F.20}$$
$$T(k) = T_0(k) + \Delta T(k) \tag{F.21}$$
$$y_m(k) = y_0(k) + \Delta y_m(k) \tag{F.22}$$

Finally, the off-line solved nonlinear model (S_0) and the on-line solved linearized model (S_{TVL}) replace the initial nonlinear model ($\mathcal{S}_{NL}$) in the IMC structure (Fig F.5).

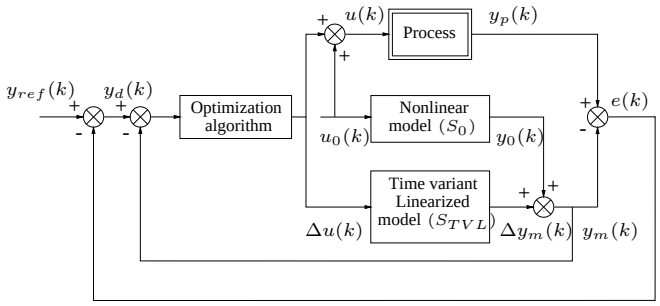


FIG. F.5 – *Time Variant Linearized Internal Model Control (TVLIMC) structure.*

The objective is now to find the variation $\Delta u(k)$ of the manipulated variable $u(k)$ about a chosen trajectory $u_0(k)$ leading to the best optimization result. According to the TVLIMC structure, the trajectory tracking is now equivalent to the following constrained optimization problem :

$$
\begin{cases}
\underset{\Delta\tilde{u}}{min}\ J(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_d(j) - (y_0(j) + \Delta y_m(j))]^2 \\
\Delta\tilde{u} = [\Delta\varphi_{ir}(k)\ ...\ \Delta\varphi_{ir}(k+N_c-1)]^T \\
\Delta u(j) = \Delta u(k+N_c-1)\ \forall j \in \mathcal{J} \\
\text{subject to the time-variant linearized model } (\mathcal{S}_{LTV})\ : \\
\begin{cases}
\frac{\partial \Delta\chi}{\partial t} = A_1(t)(\Delta X\ \Delta T)^T \text{ for } z \in \Omega, t \in T =]kT_e, (k+N_p)T_e] \\
\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = A_2(t)(\Delta X\ \Delta T)^T + A_3(t)\Delta u(t) \text{ for } t \in T \\
\text{with :} \\
\text{the scalar input : } \Delta u(t) = \Delta\varphi_{ir}(t) \text{ for } t \in T \\
\text{the output : } \Delta y_m(t) = \Delta T(t) \text{ for } t \in T \\
\text{with the boundary conditions :} \\
\frac{\partial \Delta\chi}{\partial z} = 0 \text{ for } z = 0,\ t \in T \\
A_4(t)(\Delta\chi\ \Delta T)^T = 0 \text{ for } z = e_{sec},\ t \in T \\
\text{with the initial conditions :} \\
\Delta\chi(z,0) = 0 \text{ for } z \in \Omega \cup \{0,\ e_{sec}\} \\
\Delta T(0) = 0
\end{cases} \\
\text{and subject to constraints on the manipulated variables } \Delta\tilde{u}
\end{cases}
\tag{F.23}
$$

where the time-variant linear operators $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ and $A_4(t)$ are deduced from the model linearization about $(\mathcal{S}_0)$ [2].

F.3.2 Constraints handling

The problem is now to find a method to handle magnitude and velocity constraints on the manipulated variable that follow into account (T_e is the sampling period) :

$$u_{\min} \leq u(j) \leq u_{\max} \tag{F.24}$$

$$\Delta u_{\min} \leq \frac{u(j)-u(j-1)}{T_e} \leq \Delta u_{\max} \tag{F.25}$$

Since the manipulated variable is the only constrained variable, an easy method is the use of the following transformation method depicted Fig. F.6.

$$\begin{cases} u(j) = f(p(j)) = f_{\text{moy}} + f_{\text{amp}} yanh[\frac{p(j)-f_{\text{moy}}}{f_{\text{amp}}}] \\ p(j) \in \mathbb{R}^{N_c} \end{cases} \tag{F.26}$$

with the following datas updated at each time k :

$$\begin{cases} f_{\text{moy}} = \frac{f_{\max}+f_{\min}}{2} \\ f_{\text{amp}} = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{2} \\ f_{\min} = max[u_{\min}, u(j-1) + \Delta u_{\min} T_e] \\ f_{\max} = min[u_{\max}, u(j-1) + \Delta u_{\max} T_e] \end{cases} \tag{F.27}$$

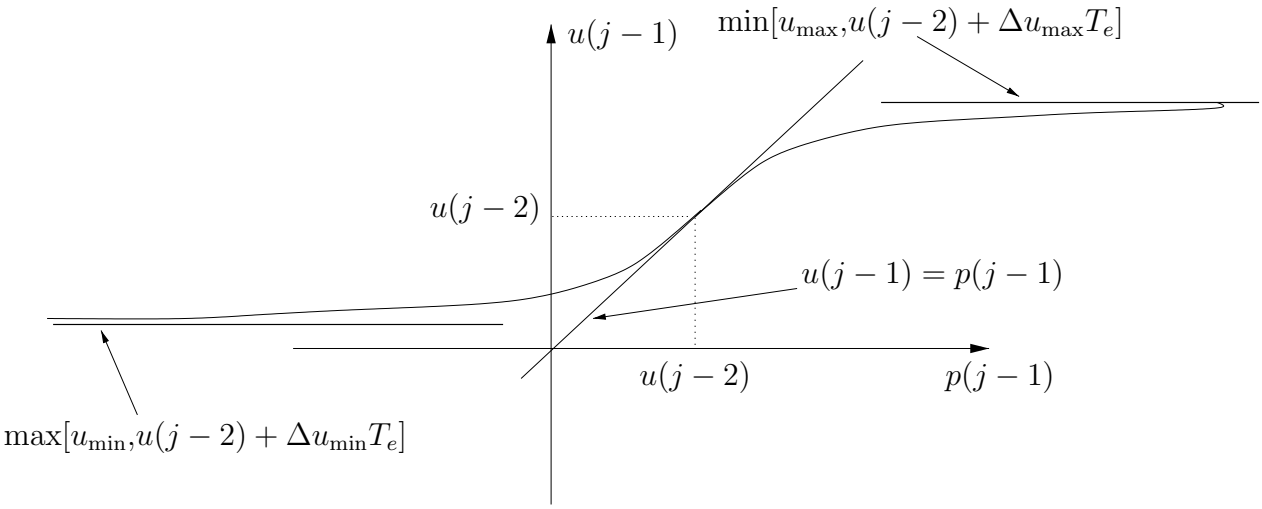


FIG. F.6 – *Transformation law.*

Seeking now these unconstrained parameters $p(j)$ always ensures the constraints check on the manipulated variable.
Besides, from the linearization method and the function f bijectivity we can also define the small variations of the new seeked parameter $p(j)$ about $p_0(j) = f^{-1}(u_0(j))$:

$$\Delta p(j) = p(j) - p_0(j) \tag{F.28}$$

Finally, combining the constrained optimization problem ($F.23$), the transformation law f and the linearization method, we can define the final unconstrained optimization problem :

$$
\begin{cases}
\underset{\Delta\tilde{p}}{min}\ J(\Delta\tilde{p}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} [y_d(j) - (y_0(j) + \Delta y_m(j))]^2 \\
\Delta\tilde{p} = [f^{-1}(\Delta\varphi_{ir}(k))\ ...\ f^{-1}(\Delta\varphi_{ir}(k+N_c-1))]^T \\
\Delta p(j) = f^{-1}(\Delta\varphi_{ir}(k+N_c-1))\ \forall j \in \mathcal{J} \\
\Delta\tilde{p} \in \mathbb{R}^{N_c} \\
\text{subject to the time-variant linearized model } (\mathcal{S}_{LTV})\ : \\
\quad \begin{cases}
\frac{\partial\Delta\chi}{\partial t} = A_1(t)(\Delta X\ \Delta T)^T \text{ for } z \in \Omega,\ t \in T \\
\frac{\partial\Delta T}{\partial t} = A_2(t)(\Delta X\ \Delta T)^T + A_3(t)\Delta u(t) \text{ for } t \in T \\
\text{with :} \\
\text{the scalar input : } \Delta u(t) = \Delta\varphi_{ir}(t) \text{ for } t \in T \\
\text{the output : } \Delta y_m(t) = \Delta T(t) \text{ for } t \in T \\
\text{with the boundary conditions :} \\
\frac{\partial\Delta\chi}{\partial z} = 0 \text{ for } z = 0,\ t \in T \\
A_4(t)(\Delta\chi\ \Delta T)^T = 0 \text{ for } z = e_{sec},\ t \in T \\
\text{with the initial conditions :} \\
\Delta\chi(z,0) = 0 \text{ for } z \in \Omega \cup \{0,\ e_{sec}\} \\
\Delta T(0) = 0
\end{cases}
\end{cases}
\tag{F.29}
$$

with the time variant linearized model input in the TVLIMC structure :

$$\Delta u(k) = u(k) - u_0(k) = f(p_0(k) + \Delta p(k)) - f(p_0(k)) \tag{F.30}$$

This unconstrained optimization problem ($F.29$) can now be solved by any unconstrained optimization algorithm.

F.3.3 Resolution method

Widely known for its robustness and convergence properties, we apply the Levenberg-Marquardt's algorithm[4], where the variables $\Delta\tilde{p}$ are determined at each sample

instant k by the iteration procedure :

$$\Delta\tilde{p}^{i+1} = \Delta\tilde{p}^{i} - (\bigtriangledown^2 J^i_{tot} + \lambda I)^{-1} \ \bigtriangledown J^i_{tot} \tag{F.31}$$

where $\bigtriangledown J^i_{tot}$ and $\bigtriangledown^2 J^i_{tot}$ are the criteria gradient and the criteria hessian with respect to $\Delta\tilde{p}^i$.
This resolution algorithm is now implemented on the process and allows to track any kind of reference trajectory.

F.4 Experimental results

Experiments have been realized to point out the prediction horizon influence. In this first attempts, the unity control horizon is chosen.

F.4.1 Operating conditions

The operating conditions are the following one :

- the linearization about $(\mathcal{S}_0)$ is performed with $u_0 = 5000\ W.m^{-2}$ and with the initial conditions $T_i = 36\ ^oC$ and $\chi_i = 0.4\ kg.kg^{-1}$;
- the models $(\mathcal{S}_0)$ and (S_{TVL}) are solved by the finite volumes method (6 volumes) ;
- the sampling period T_e value is 1 second ;
- constraints boundaries are :

$$u_{\max} = 12{,}000\ W.m^{-2} \tag{F.32}$$
$$u_{\min} = 0\ W.m^{-2} \tag{F.33}$$
$$\Delta u_{\max} = +500\ W.m^{-2}.s^{-1} \tag{F.34}$$
$$\Delta u_{\min} = -500\ W.m^{-2}.s^{-1} \tag{F.35}$$

- atmospheric conditions are :

$$\chi_{air} = 20\% \tag{F.36}$$
$$T_h = 52\ ^oC \tag{F.37}$$
$$T_b = 20\ ^oC \tag{F.38}$$

- the control algorithm, written in Fortran code, has been combined to C code in order to realize the interface with the sensors and the actuator ;
- the processor rate is $400MHz$.

F.4.2 Temperature reference trajectory tracking

From Fig. F.7 and Fig. F.8, we can see that the tracking objective is correctly achieved.

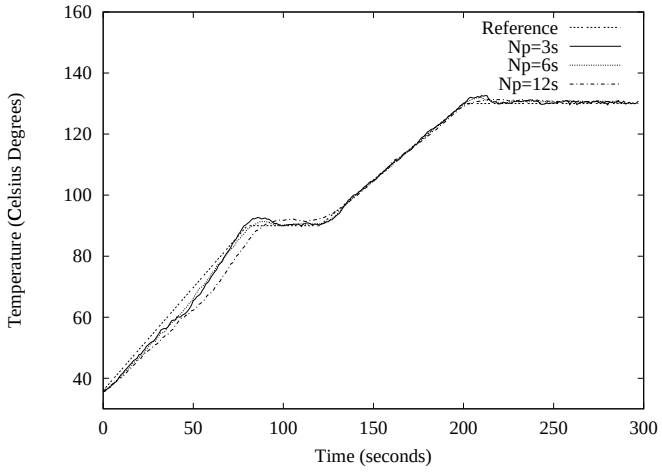


FIG. F.7 – *Reference tracking for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$.*

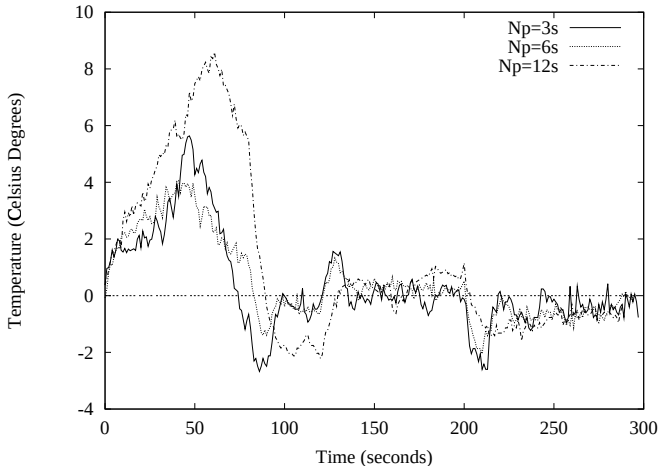


FIG. F.8 – *Tracking error for $N_p = 3s$, $6s$, $12s$.*

Moreover, the intermediate value $6s$ for the horizon prediction gives the best result. It can notably be explained by the discontinuities handling (at $k = 80s$, $120s$ and $200s$) for each horizon prediction value :

- with a small prediction horizon ($N_p = 3s$), the discontinuities handling is less efficient than with $N_p = 6s$ as we can see for the values taken by the criteria J (Fig F.9). In this case, informations quantity available describing the future process behaviour are insufficient. In a way, with $N_p = 3s$ the problem is badly stated for its resolution, as we can see on the applied control : when the three discontinuities points appear, the infrared flow is always either satured on its magnitude (Fig. F.10) or on its velocity (Fig. F.11). This means that the algorithm tends too often to find a non admissible solution. This leads consequently to poor tracking performances ;
- increasing the prediction horizon value to $6s$ and $12s$, the infrared flow becomes more and more smooth (Fig. F.10), but with a big prediction horizon ($N_p =$

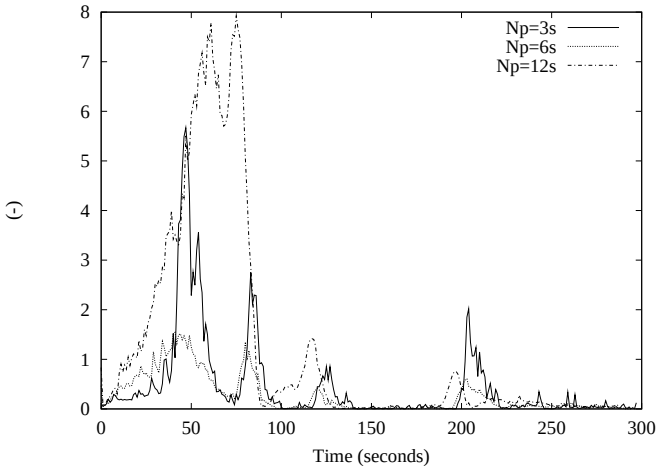


FIG. F.9 – *Criteria values sequence for* $N_p = 3s$, $6s$, $12s$.

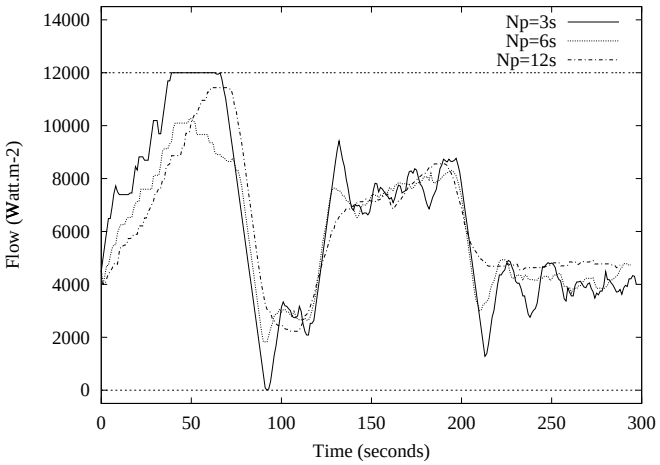


FIG. F.10 – *Control magnitude for* $N_p = 3s$, $6s$, $12s$.

$12s$), another problem appears : the model, qualitatively true, is quantitatively false (Fig. F.12). Since more values calculated by the model resolution are taken into account in the optimization problem, the criteria minimization is less efficient than in the case where the prediction horizon take an average value for ($N_p = 6s$) (Fig F.9).

Therefore, the prediction horizon value $N_p = 6s$ is the « optimal » choice for this main parameter.
Moreover, one of the property of the IMC structure is confirmed by these experimental results : the tracking is effective in spite of the model output used to find the control algorithm does not track quantitatively the temperature reference trajectory (Fig. F.12).

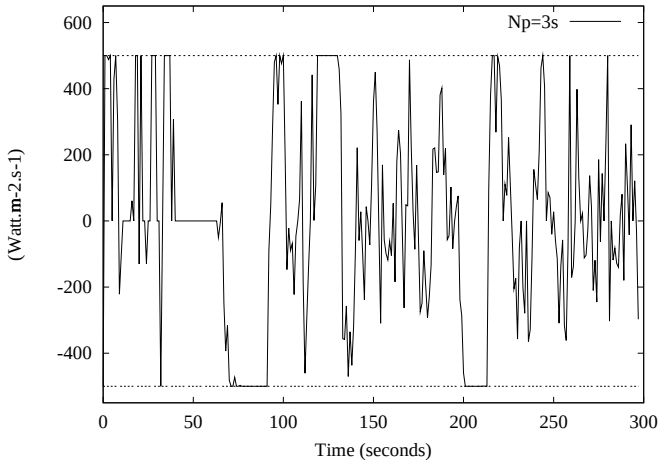


FIG. F.11 – *Control velocity for* $N_p = 3s$.

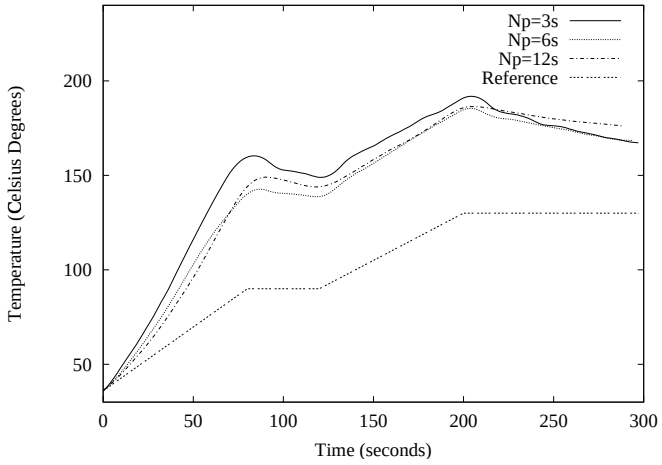


FIG. F.12 – *Model output for* $N_p = 3s$, $6s$, $12s$.

F.5 Conclusion

In this paper, we have developed an efficient approach for an on-line control problem. It dealed with the trajectory tracking problem of the process output. We have presented a control strategy combining both the model based predictive control and the internal model control structure. The new advance in the MPC strategy is the use of a distributed parameter system instead of a lumped parameter system. Since the on-line control algorithm seeks the manipulated variable by solving the model, we also use an off-line linearization method.
Experimentals results have shown the efficiency of the MPC strategy : the influence of the prediction horizon has been shown. A trade off has to be found between smallest value that leads to a badly stated optimization problem and a long horizon control. In this latter case, since too many quantitatively false model informations are computed during the final unconstrained optimization problem resolution, the

final control does not lead to good tracking performances.
In perspective, others results concerning the application of this predictive control strategy to another nonlinear distributed parameter system with output constraints handling will be published. It deals with the destruction of volatile organic compounds (VOC) by catalytic reaction.
As for the theoretical perspectives, the accurate characterisation and the closed loop stability study are expected.

F.6 Annexe

F.6.1 Scheme

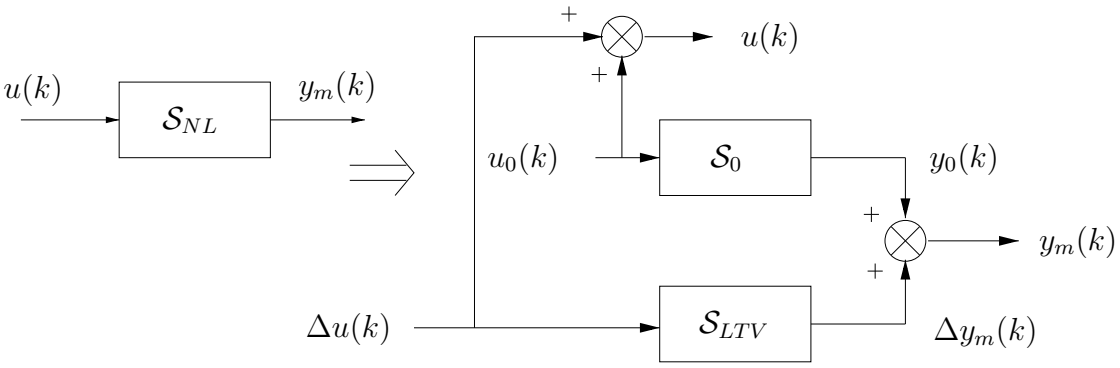


FIG. F.13 – *Model linearization.*

F.6.2 Drying velocity

The pressure difference between the sample and the ambiant air leads to an inside out water migration. This is characterised by the drying velocity $\dot{m}(\bar{\chi},T)$:

$$\dot{m}(\bar{\chi},T) = \frac{k_m m_v}{R} P_t \frac{2}{T+T_h} log_{10}[\frac{P_t - \chi_{air} P_{v_{sat}}(T_h)}{P_t - a_w(\bar{\chi}) P_{v_{sat}}(T)}] \tag{F.39}$$

where the saturated vapor saturation $P_{v_{sat}}(T)$ is given in millibar by the expression :

$$\begin{aligned} log_{10} P_{v_{sat}}(T) = C_0(1 - \frac{T_1}{T}) - C_1 log_{10}\frac{T}{T_1} + \\ C_2(1 - 10^{-C_3(T/T_1 - 1)}) + \\ C_4(10^{C_5(1-T_1/T)} - 1) + C_6 \end{aligned} \tag{F.40}$$

The activity $a_w(\bar{\chi})$ is the solution of :

$$\frac{a_w(\bar{\chi})}{\bar{\chi}} = A_1 a_w^2(\bar{\chi}) + A_2 a_w(\bar{\chi}) + A_3 \tag{F.41}$$

with :

$$A_1 = K_k \frac{\frac{1}{c} - 1}{\chi_m} \quad \text{(F.42)}$$

$$A_2 = \frac{1 - \frac{2}{c}}{\chi_m} \quad \text{(F.43)}$$

$$A_3 = \frac{1}{\chi_m \; c \; K_k} \quad \text{(F.44)}$$

F.6.3 Energy balance

The absorption coefficient $\alpha_{ir}(\bar{\chi})$ is given by :

$$\alpha_{ir}(\bar{\chi}) = \alpha_p(\bar{\chi})(1-\rho_p) + \alpha_s(1-\rho_p)(1-\alpha_p(\bar{\chi}))+ \alpha_p(\bar{\chi})(1-\alpha_s)(1-\rho_p)(1-\alpha_p(\bar{\chi})) \quad \text{(F.45)}$$

with :

$$\alpha_p(\bar{\chi}) = 1 - [aa_3(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}})^3 + aa_2(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}})^2 + aa_1\frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi_0}} + aa_0]\frac{1}{1-\rho_p} \quad \text{(F.46)}$$

The latent heat coefficient $l_v(T)$ and the calorific thermal capacity $C_p(\bar{\chi},T)$ are expressed with the temperature in Celsius degrees :

$$l_v(T) = [a_5T^5 + a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0] * 10^3 \quad \text{(F.47)}$$

$$C_p(\bar{\chi},T) = [oT + b + \bar{\chi}\{c_{p_3}T^3 + c_{p_2}T^2 + c_{p_1}T + c_{p_0}\}] * 10^3 \quad \text{(F.48)}$$

F.6.4 Numerical values

The numerical values are :

– for the diffusion coefficient D_{eff} :

Name	Value	Unit
D_0	$0.68\ 10^{-5}$	$m^2.s^{-1}$
a	$0.42\ 10^{-1}$	$kg.kg^{-1}$
Ea	26464	$J.mol^{-1}$
R	8.314	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
ϕ	1.1685	$m.m^{-1}$
e_{sec}	102.138	μm

– for the drying velocity $\dot{m}$:

Name	Value	Unit
k_m	$5.19\ 10^{-3}$	$m.s^{-1}$
m_v	$18\ 10^{-3}$	$kg.mol^{-1}$
T_1	273.16	^oK
P_t	$1.01325\ 10^5$	Pa

– to smooth the saturation vapor pressure expression $P_{v_{sat}}$:

Name	Value	Unit
C_0	10.79574	(-)
C_1	5.028	(-)
C_2	$1.50475\ 10^{-4}$	(-)
C_3	8.2969	(-)
C_4	$0.42873\ 10^{-3}$	(-)
C_5	4.76955	(-)
C_6	0.78614	(-)

– for the activity a_w :

Name	Value	Unit
K_k	0.985	(-)
c	2.21	(-)
χ_m	0.0593	$kg.kg^{-1}$

– for the thermal balance :

Name	Value	Unit
h_c	3	$W.m^{-2}.K^{-1}$
σ	$5.67\ 10^{-8}$	$W.m^{-2}.K^{-4}$
σ_h	$0.96\ \sigma$	$W.m^{-2}.K^{-4}$
ρ_p	1165	$kg.m^{-3}$
$\rho_s C_s e_s$	3540.16	$J.m^{-2}.K^{-1}$

– to smooth the expression of the absorption coefficient α_{ir} :

Name	Value	Unit
α_s	0.8	$(-)$
ρ_p	0.12	$kg.m^{-3}$
aa_3	0.3751	$(-)$
aa_2	-0.6545	$(-)$
aa_1	-0.129	$(-)$
aa_0	0.939	$(-)$

– to smooth the expression of the latent heat coefficient l_v :

Name	Value	Unit
a_5	$-0.69851352\ 10^{-9}$	$kJ.kg^{-1}.^oC^{-5}$
a_4	$0.47175172\ 10^{-6}$	$kJ.kg^{-1}.^oC^{-4}$
a_3	$-0.12963934\ 10^{-3}$	$kJ.kg^{-1}.^oC^{-3}$
a_2	$0.12413792\ 10^{-1}$	$kJ.kg^{-1}.^oC^{-2}$
a_1	-2.7913724	$kJ.kg^{-1}.^oC^{-1}$
a_0	$0.25037\ 10^{4}$	$kJ.kg^{-1}$

– to smooth the expression of the thermal capacity coefficient C_p :

Name	Value	Unit
o	0.00647	$J.kg^{-1}.K^{-2}$
b	2.3754	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
c_{p_3}	$0.749972\ 10^{-7}$	$J.kg^{-1}.K^{-4}$
c_{p_2}	$-0.943717\ 10^{-5}$	$J.kg^{-1}.K^{-3}$
c_{p_1}	$0.448761\ 10^{-3}$	$J.kg^{-1}.K^{-2}$
c_{p_0}	4.18674	$J.kg^{-1}.K^{-1}$

Bibliographie

[1] Blanc D., Laurent P., Andrieu J., Gerard J.F. *Modeling of the reactive infrared drying of a model water-based epoxy-amine painting coated on iron support with experimental validation*, Proc. 11th *IHTC*, Kyongju, South Korea, Vol. 5, pp. 181–186, 1998.

[2] Dufour P., Touré Y., Laurent P. *A nonlinear distributed parameter process control: an internal linearized model control approach*, Proc. *CESA'98 IEEE IMACS Multiconference*, Hammamet, Tunisia, Vol.1, pp. 134–138, 1998.

[3] Dufour P., Touré Y.,Michaud D.J., Dhurjati P.S. *Optimal trajectory determination and tracking of an autoclave curing process : a model based approach*, Proc. *European Control Conference*, Karslruhe, Germany, Paper No. F1033-6, 1999.

[4] Fletcher R *Practical methods of Optimization*, John Wiley and Sons, 1987.

[5] Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. *Evolutionnary equations with nontrivial* Lie-B*acklund group*, Functionnal Analysis and the Application, Vol. 14, pp. 19–28, 1980.

[6] Magri F. *Equivalence transformations for nonlinear evolution equations*, J. of Math. Physics, Vol. 18, No. 7, pp. 1405–1411, 1977.

[7] Marquis P., Broustail J.P. SMOC*, a bridge between state space and model predictive controllers : application to the automation of a hydrotreating unit*, Proc. *1988 IFAC Workshop on Model Based Process Control*, pp. 37-43, 1998.

[8] Morari M., Zafiriou E. *Robust control*, Dunod, 1983.

[9] Propoi A.I, *Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems*, Automn. Remote Control, Vol. 24, No. 7, pp. 837–844, 1963.

[10] Qin S.J., Badgwell T.A., *An overview of industrial model predictive control technology*, Proc. *Fifth International Conference on Chemical Process Control*, pp. 232–256, 1996.

[11] Richalet J., Rault A., Testud J.L., Papon J. *Algorithmic control of industrial processes*, Proc. 4th *IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Tbilissi, pp. 1119-1167, 1976.

[12] Touré Y., Josserand L. *An extension of IMC to boundary control of distributed parameter systems*, Proc. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics-CCS*, Orlando, USA, Vol. 3, pp. 2426–2431, 1997.

Bibliographie

[1] Choisir un procédé de traitement des COV. *Décision environnement*, 38, july 1995.

[2] COV : réduction à la source, récupération ou destruction. *Supplément* E*nergie* P*lus*, 204 :3–22, April, 15th 1998.

[3] ALLGÖWER F., BADGWELL T.A., QIN J.S., RAWLINGS J.B., WRIGHT S.J. *Advances in control. Highlights of ECC'99*, chapter Nonlinear predictive control and moving horizon estimation. Springer, 1999.

[4] BLANC D. *Etude expérimentale et modélisation du séchage et de la réticulation sous rayonnement infrarouge d'une peinture de type époxy-amine à base aqueuse sur support acier*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 1997.

[5] CHEN H., ALLGÖWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 34(10) :1205–1218, 1998.

[6] CHU W., WINDAWI H. Control VOCs via catalytic oxidation. *Chem. Eng. Progress*, pages 37–43, march 1996.

[7] CIRISCIOLI P.R., SPRINGER G.S., LEE W.I. An expert system for autoclave curing of composites. *J. of composite materials*, 25 :1542–1587, 1991.

[8] COURTIAL E. *Commande prédictive et estimation d'état de systèmes non linéaires*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 1996.

[9] COURTIAL E., TOURÉ Y. Modified Levenberg-Marquardt's algorithm for nonlinear optimal control. *Z. Angew. Math. Mech.*, 76(3) :395–396, 1996.

[10] COURTIAL E., TOURÉ Y. Nonlinear model predictive control : constrained optimization and practical stability. In *International Symposium on Nonlinear Model Predictive Control*, Ascona, 1998. Preprints p 36.

[11] DENN M. *Optimization by variational methods*. McGraw-Hill, New York, 1969.

[12] DUFOUR P., COURTIAL E., TOURE Y., LAURENT P. Distributed parameter model predictive control : a real time implementation. *en soumission à Control Eng. Practice*.

[13] DUFOUR P., JOSSERAND L., TOURÉ Y. Commande par actions frontières d'un système d'échangeurs de chaleur. *RAIRO-APII-JESA*, 30 :1375–1391, 1996.

[14] DUFOUR P., TOURÉ Y., LAURENT P. A nonlinear distributed parameter process control : an internal linearized model control approach. In *Proc. of the CESA Multiconference*, volume 1, pages 134–138, Hammamet, 1998.

[15] DUFOUR P., TOURÉ Y.,MICHAUD D.J., DHURJATI P.S. Optimal trajectory determination and tracking of an autoclave curing process : a model based ap-

proach. In *Proc. of the European Control Conference*, Karslruhe, 1999. Paper No. F1033-6.

[16] Eder H.H. . MBPC benefits and key success factors. In *Proc. of the European Control Conference*, Karlsruhe, 1999. Paper No. F1033-6.

[17] Fletcher R. *Practical methods of Optimization.* John Wiley and Sons, 1987.

[18] Grosdidier P., Froisy B., Hammann M. The idcom-m controller. In Y. Arkun T.J. Mc Avoy and editors E. Zafiriou, editors, *Proc. of th 1988 IFAC Workshop on Model Based Process Control*, pages 31–36. Pergamon Press, 1988.

[19] Josserand L. *Commande frontière par modèle interne de systèmes à paramètres distribués. Application à un double échangeur de chaleur.* PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 1996.

[20] Keerthi S.S., Gilbert E.G. Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems : stability and moving horizon approximations. *J. Opt. Theory and Appl.*, 57(2) :265–293, 1988.

[21] Larabi M.C., Dufour P., Laurent P., Touré Y. Predictive control of a nonlinear distributed parameter system : real time control of a painting film drying process. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2000.

[22] Loos A.C, Nagendra S. Optimization of the curing process of filament wound composites. In *Proc. of the 34th Int. SAMPE Symp.*, pages 1853–1867. Tomorrow's materials, 1989.

[23] Luus R. Application of dynamic programming to high dimensional nonlinear optimal control problems. *Int. J. Control*, 52 :239–250, 1990.

[24] Manzini R.A., Roehl E.A. Flexible control of an organic matrix composite cure process using object-oriented control concepts. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 1980–1985, 1990.

[25] Marquis P., Broustail J.P. SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers : application to the automation of a hydrotreating unit. In McAvoy T.J. Arkun Y. Zafiriou E., editor, *Proc. of the 1988 IFAC Workshop on Model Based Process Control*, pages 37–43, Oxford, 1988. Pergamon Press.

[26] Matros Y.S., Bunimovich G.A. Reverse-flow operation in fixed bed catalytic reactors. *Catal. Rev.-Sci. Eng.*, 38(1) :1–68, 1996.

[27] Michalska H., Mayne D.Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-38(11) :1623–1633, 1993.

[28] Minoux M. *Programmation mathématique*, volume 1. Dunod, 1983.

[29] Morari M., Zafiriou E. *Robust control.* Dunod, 1983.

[30] Nieken U., Kolios G., Eigenberger G. Control of the ignited steady state in authothermal fixed-bed reactors for catalytic combustion. *Chem. Eng. Sci.*, 49(24) :5507–5518, 1994.

[31] Patankar S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Taylor & Francis, 1980.

[32] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer Verlag New-York, 1983.

[33] Pillai V., Beris A.N., Dhurjati P.S. Heuristics guided optimization of a batch autoclave curing process. *Computers Chem. Eng.*, 20(3) :275–294, 1996.

[34] Pillai V., Beris A.N., Dhurjati P.S. Intelligent curing of thick composites using a knowledge-based system. *J. of Comp. Mat.*, 31(1) :22–51, 1997.

[35] Pillai V.K., Beris A.N., Dhurjati P.S. Implementation of model-based optimal temperature profiles for autoclave curing of composites using a knowledge-based system. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 33 :2443–2452, 1994.

[36] Prett D.M., Gilette R.D. Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit. In *Proc. of the Joint Automatic Control Conference*, volume 1, 1980. Paper No. WP5-C.

[37] Propoi A.I. Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automn. Remote Control*, 24(7) :837–844, 1963.

[38] Qin S.J., Badgwell T.A. An overview of industrial model predictive control technology. In *Fifth International Conference on Chemical Process Control*, pages 232–256. American Institute of Chem. Eng., 1996.

[39] Ramdani K. *Modélisation d'un réacteur à inversion de flux pour la destruction des COV*. PhD thesis, Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques, CPE-Lyon, débutée en oct. 1997.

[40] Ramdani K., Pontier R., Schweich d. Reverse flow reactor short switching periods for voc combustion. In *ISRE (en soumission)*, Cracovia, Sept. 10-13 2000.

[41] Raymond D., Lemaitre A., Lescoat Y. L'infrarouge : ses applications industrielles. *Revues Générale d'Electricité*, 4(93) :57–61, 1993.

[42] Raymond Jean Pierre. Nonlinear boundary control of semilinear parabolic equations with pointwise state constraints. *Discontinuous and continuous dynamical systems*, 9 :341–370, 1997.

[43] Richalet J., Rault A., Testud J.L., Papon J. Model predictive heuristic control : application to industrial processes. *Automatica*, 14 :413–428, 1978.

[44] Richalet J., Rault A., Testud J.L., Papon J. Algorithmic control of industrial processes. In *Proc. 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 1119–1167, Tbilissi, 1976.

[45] Slupphaug O., Foss B.A. Bilinear matrix inequalities and robust stability on nonlinear multi-model mpc. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, pages 1689–1694, Philadeplhia, 1998.

[46] Touré Y., Josserand L. An extension of imc to boundary control of distributed parameter systems. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics-CCS*, volume 3, pages 2426–2431, Orlando, 1997.

[47] Vaissière J.C, Nougier J.P. *Programmes et exercices sur les méthodes numériques*. Masson, 1991.

[48] Vilnat M. Les peintures tout à l'eau s'imposent chez opel. *L'usine nouvelle*, 2453 :64–65, 1994.

[49] Washburn D. A bound on the boundary input map for parabolic equations

with application to time optimal control. *SIAM J. Control and Optimization*, 17(5) :652–671, 1979.

[50] ZIDANI H. *Optimal control problem for semilinear parabolic equations : optimality conditions and numerical approximations.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996.

Résumé

Ce travail se situe dans le cadre de la commande des **systèmes à paramètres répartis** régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires. On cherche ici à élargir l'utilisation de la stratégie de **commande prédictive** du cadre classique de systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires à celui où les systèmes sont décrits par **une classe d'équations non linéaires aux dérivées partielles** (EDP). L'intérêt de l'utilisation de la stratégie de commande prédictive est de pouvoir résoudre **divers problèmes de conduite** tout en tenant compte explicitement de diverses **contraintes de fonctionnement**. Nous avons choisi une démarche qui a consisté à considérer directement des cas réels issus du Génie des Procédés, où de nombreux modèles de connaissance sont décrits par des EDP fortement non linéaires : un procédé de **séchage de peinture par infrarouge** (donnant lieu à une **application réelle**), un **procédé de fabrication de matériau composite** et un **procédé de destruction de gaz polluants par catalyse**. La particularité de ce travail concerne le fait de proposer une structure adaptée de commande prédictive par **modèle interne**, celui-ci étant déterminé autour d'une trajectoire soit prédéfinie, soit générée en tenant compte de diverses contraintes de fonctionnement. Dans le contexte de résolution du problème d'**optimisation** posé par l'approche prédictive, nous proposons un algorithme hors-ligne (génération de trajectoire) et un autre en ligne.

Title

Contribution to the predictive control of nonlinear distributed parameter systems.

Abstract

This work deals with the control of **nonlinear distributed parameter systems** described by nonlinear partial differential equations (PDE). The aim of this study is to extend the use of the **model predictive control** (MPC) strategy from the classical case where systems are described by ordinary differential equations to the case where systems are described by **a class of nonlinear partial differential equations**. The interest in the use of MPC strategy is to be able to solve **various conduct problems** by explicitly handling **functioning constraints**. We have chosen an approach that consisted in directly considering real problems in process engineering, where many knowledge models are described by strongly nonlinear PDE : a **painting drying by infrared radiation** (including a **real-time application**), an **autoclave curing of thick composites**, a **catalytic destruction of volatile organic compounds**. The particularity of this study is to propose an **internal model** predictive control structure leading to the seeked process trajectory from a pre-defined trajectory or a handling constraints generated trajectory. For the **optimization** problem introduced by the MPC approach, we propose an off-line algorithm (trajectory generation) and an on-line algorithm.

Discipline

Automatique.

Mots-clés

Commande prédictive, systèmes non linéaires à paramètres répartis, commande par modèle interne, optimisation sous contraintes en dimension finie, séchage de peinture, cuisson de polymère par procédé autoclave, procédé catalytique de destruction de gaz polluants.

Intitulé et adresse du laboratoire

Laboratoire d'**A**utomatique et de **GE**nie des **P**rocédés, Université Claude Bernard Lyon 1
43 bd du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex