



HAL
open science

Solutions formelles de systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires homogènes

Guoting Chen

► **To cite this version:**

Guoting Chen. Solutions formelles de systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires homogènes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1990. Français. NNT : . tel-00338379

HAL Id: tel-00338379

<https://theses.hal.science/tel-00338379>

Submitted on 13 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par **CHEN Guoting**

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de l'**UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

(arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

(Spécialité: **Mathématiques Appliquées**)

**SOLUTIONS FORMELLES DE SYSTEMES D'EQUATIONS
DIFFERENTIELLES LINEAIRES ORDINAIRES HOMOGENES**

Date de soutenance: 9 Février 1990

Composition du jury:

Président: B. Malgrange

Rapporteurs: L. Brenig
A. Duval

Examineurs: J. Della Dora
E. Tournier
J. Thomann

Thèse préparée au sein du laboratoire TIM3 / Imag, U.A. au CNRS n°397.

UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :
M. NEMOZ Alain

Année Universitaire 1988 - 1989

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ADIBA Michel	Informatique
ANTOINE Pierre	Géologie I.R.I.G.M.
ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU Robert	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CASTAING Bernard	Physique
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FINKE Gerde	Informatique
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIDON Maurice	Géologie
GUITTON Jacques	Chimie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean René	Mathématiques Pures

JOSELEAU Jean Paul
 KAHANE André, détaché
 KAHANE Josette
 KRAKOWIAK Sacha
 LAJZEROWICZ Jeanine
 LAJZEROWICZ Joseph
 LAURENT Pierre-Jean
 LEBRETON Alain
 DE LEIRIS Joël
 LHOMME Jean
 LLIBOUTRY Louis
 LOISEAUX Jean-Marie
 LONGEQUEUE Nicole
 LUNA Domingo
 MACHE Régis
 MASCLE Georges
 MAYNARD Roger
 OMONT Alain
 OZENDA Paul
 PANNETIER Jean
 PAYAN Jean-Jacques
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
 PERRIER Guy
 PIERRE Jean Louis
 RENARD Michel
 RIEDTMANN Christine
 RINAUDO Marguerite
 ROSSI André
 SAXOD Raymond
 SENDEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 SOUTIF Michel
 STUTZ Pierre
 TRILLING Laurent
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre

Biochimie
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Biologie
 Chimie
 Géophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Mathématiques Pures
 Physiologie Végétale
 Géologie
 Physique du Solide
 Astrophysique
 Botanique (Biologie Végétale)
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géophysique
 Chimie Organique
 Thermodynamique
 Mathématiques
 Chimie CERMAV
 Biologie
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Physique
 Mécanique
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

PROFESSEURS de 2^{ème} Classe

ARMAND Gilbert
 ATTANE Pierre
 BARET Paul
 BERTIN José
 BLANCHI J.Pierre
 BLOCK Marc
 BLUM Jacques
 BOITET Christian
 BORNAREL Jean
 BORRIONE Dominique
 BOUVET Jean
 BROSSARD Jean
 BRUANDET J.François
 BRUGAL Gérard
 BRUN Gilbert
 CASTAING Bernard
 CERFF Rudiger
 CHIARAMELLA Yves
 CHOLLET Jean Pierre
 COLOMBEAU Jean François
 COURT Jean
 CUNIN Pierre Yves
 DAVID Jean

Géographie
 Mécanique
 Chimie
 Mathématiques
 STAPS
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Automatique informatique
 Biologie
 Mathématiques
 Physique
 Biologie
 Biologie
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Mécanique
 Mathématiques (ENSL)
 Chimie
 Informatique
 Géographie

DHOUAILLY Danielle	Biologie
DUFRESNOY Alain	Mathématiques Pures
GASPARD François	Physique
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences Nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques Pures
GIORNI Alain	Sciences Nucléaires
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Mathématiques Pures
GUIGO Maryse	Géographie
GUMUCHAIN Hervé	Géographie
HACQUES Gérard	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HERAULT Jeanny	Physique
HERINO Roland	Physique
JARDON Pierre	Chimie
KERCKHOVE Claude	Géologie
MANDARON Paul	Biologie
MARTINEZ Francis	Mathématiques Appliquées
MOREL Alain	Géographie
NEMOZ Alain	Thermodynamique CNRS - CRTBT
NGUYEN HUY Xuong	Informatique
OUDET Bruno	Mathématiques Appliquées
PAUTOU Guy	Biologie
PECHER Arnaud	Géologie
PELMONT Jean	Biochimie
PELLETIER Guy	Astrophysique
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N.
PIBOULE Michel	Géologie
RAYNAUD Hervé	Mathématiques Appliquées
REGNARD Jean René	Physique
RICHARD Jean-Marc	Physique
RIEDTMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Danielle	Chimie
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SAYETAT Françoise	Physique
SERVE Denis	Chimie
STOECKEL Frédéric	Physique
SCHOLL Pierre-Claude	Mathématiques Appliquées
SUBRA Robert	Chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie Organique
VINCENT Gilbert	Physique
VIVIAN Robert	Géographie
VOTTERO Philippe	Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. I.U.T.1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BEE Marc	Physique IUT 1
BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1

CHILO Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
FOSTER Panayotis	Chimie IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
HAMAR Roger	Chimie IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
LEVIEL Jean Louis	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
TURGEMAN Sylvain	Génie civil
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1
ZIGONE Michel	Physique IUT 1

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
BUTEL Jean	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Biochimie	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	O.R.L.	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Immunologie	Hopital sud
DELORMAS Pierre	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pneumophthysiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Cardiologie	C.H.R.G.
	Pharmacologie	Faculté La Merci

HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUUD Max	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.

MOUILLON Michel
PELLAT Jacques
PHELIP Xavier
RACINET Claude
RAMBAUD Pierre
RAPHAEL Bernard
SCHAERER René
SEIGNEURIN Jean-Marie
SELE Bernard
SOTTO Jean-Jacques
STOEBNER Pierre
VROUSOS Constantin

Ophthalmologie
Neurologie
Rhumatologie
Gynécologie-Obstétrique
Pédiatrie
Stomatologie
Cancérologie
Bactériologie-Virologie
Cytogénétique
Hématologie
Anatomie Pathologique
Radiothérapie

C.H.R.G.
C.H.R.G.
C.H.R.G.
Hopital Sud
C.H.R.G.
C.H.R.G.
C.H.R.G.
Faculté La Merci
Faculté La Merci
C.H.R.G.
C.H.R.G.
C.H.R.G.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

46 avenue Felix Viallet
38031 GRENOBLE cedex

Tél. : 76.57.45.00

Année universitaire 1989

Président de l'Institut :
Monsieur Georges LESPINARD

Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG	JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
BARRAUD Alain	ENSIEG	JOST Rémy	ENSPG
BAUDELET Bernard	ENSPG	JOUBERT Jean-Claude	ENSPG
BEAUFILS Jean-Pierre	INPG	JOURDAIN Geneviève	ENSIEG
BLIMAN Samuel	ENSERG	LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
BOIS Philippe	ENSHIMG	LADET Pierre	ENSIEG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG	LESIEUR Marcel	ENSHIMG
BONNET Guy	ENSPG	LESPINARD Georges	ENSHIMG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG	LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
BRUNET Yves	IUFA	LORET Benjamin	ENSHIMG
CAILLERIE Denis	ENSHIMG	LOUCHET François	ENSEEG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG	LUCAZEAU Guy	ENSEEG
CHARTIER Germain	ENSPG	MASSE Philippe	ENSIEG
CHENEVIER Pierre	ENSERG	MASSELOT Christian	ENSIEG
CHERADAME Hervé	UFR PGP	MAZARE Guy	ENSIMAG
CHERUY Arlette	ENSIEG	MOHR Roger	ENSIMAG
CHOVET Alain	ENSERG	MOREAU René	ENSHIMG
COHEN Joseph	ENSERG	MORET Roger	ENSIEG
COLINET Catherine	ENSEEG	MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
CORNUT Bruno	ENSIEG	OBLED Charles	ENSHIMG
COULOMB Jean-Louis	ENSIEG	OZIL Patrick	ENSEEG
COUMES André	ENSERG	PAULEAU Yves	ENSEEG
CROWLEY James	ENSIMAG	PERRET Robert	ENSIEG
DARVE Félix	ENSHIMG	PIAU Jean-Michel	ENSHIMG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG	PIC Etienne	ENSERG
DEPEY Maurice	ENSERG	PLATEAU Brigitte	ENSIMAG
DEPORTES Jacques	ENSPG	POUPOT Christian	ENSERG
DEROO Daniel	ENSEEG	RAMEAU Jean-Jacques	ENSEEG
DESRE Pierre	ENSEEG	REINISCH Raymond	ENSPG
DOLMAZON Jean-Marc	ENSERG	RENAUD Maurice	UFR PGP
DURAND Francis	ENSEEG	ROBERT André	UFR PGP
DURAND Jean-Louis	ENSPG	ROBERT François	ENSIMAG
FAUTRELLE Yves	ENSHIMG	SABONNADIÈRE Jean-Claude	ENSIEG
FOGGIA Albert	ENSIEG	SAUCIER Gabrièle	ENSIMAG
FONLUPT Jean	ENSIMAG	SCHLENKER Claire	ENSPG
FOULARD Claude	ENSIEG	SCHLENKER Michel	ENSPG
GANDINI Alessandro	UFR PGP	SERMET Pierre	ENSERG
GAUBERT Claude	ENSPG	SILVY Jacques	UFR PGP
GENTIL Pierre	ENSERG	SIRIEYS Pierre	ENSHIMG
GENTIL Sylviane	ENSIEG	SOHM Jean-Claude	ENSEEG
GREVEN Héléne	IUFA	SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
GUEGUEN Claude	ENSIEG	SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
GUERIN Bernard	ENSERG	TROMPETTE Philippe	ENSHIMG
GUYOT Pierre	ENSEEG	VINCENT Henri	ENSPG
IVANES Marcel	ENSIEG	ZADWORNÝ François	ENSERG

Personnes ayant obtenu le diplôme d'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BECKER Monique
BINDER Zdenek
CHASSERY Jean-Marc
CHOLLET Jean-Pierre
COEY John
COLINET Catherine
COMMAULT Christian
CORNUÉJOLS Gérard
COULOMB Jean-Louis
COURNIL M
DALARD Francis
DANES Florin
DEROO Daniel
DIARD Jean-Paul
DION Jean-Michel
DUGARD Luc
DURAND Madeleine
DURAND Robert
GALERIE Alain
GAUTHIER Jean-Paul
GENTIL Sylviane

GHIBAUDO Gérard
HAMAR Sylvaine
HAMAR Roger
LACHENAL D.
LADET Pierre
LATOMBE Claudine
LE HUY H.
LE GORREC Bernard
MADAR Roland
MEUNIER G.
MULLER Jean
NGUYEN TRONG Bernadette
NIEZ J.J.
PASTUREL Alain
PIA Fernand
ROGNON J.P.
ROUGER Jean
TCHUENTE Maurice
VINCENT Henri
YAVARI A.R.

Chercheurs du C.N.R.S

DIRECTEURS DE RECHERCHE CLASSE 0

LANDEAU	Ioan
NAYROLLES	Bernard

Directeurs de recherche 1ère Classe

ANSARA Ibrahim
CARRE René
FRUCHART Robert
HOPFINGER Emile

JORRAND Philippe
KRAKOWIAK Sacha
LEPROVOST Christian
VACHAUD Georges
VERJUS Jean-Pierre

Directeurs de recherche 2ème Classe

ALEMANY Antoine
ALLIBERT Colette
ALLIBERT Michel
ARMAND Michel
AUDIER Marc
BERNARD Claude
BINDER Gilbert
BONNET Roland
BORNARD Guy
CAILLET Marcel
CALMET Jacques
CHATILLON Chritiant
CLERMONT Jean-Robert
COURTOIS Bernard
DAVID René
DION Jean-Michel
DRIOLE Jean
DURAND Robert
ESCUDIER Pierre
EUSTATHIOPOULOS Nicolas
GARNIER Marcel
GUELIN Pierre

JOURD Jean-Charles
KAMARINOS Georges
KLEITZ Michel
KOFMAN Walter
LEJEUNE Gérard
MADAR Roland
MERMET Jean
MICHEL Jean-Marie
MEUNIER Jacques
PEUZIN Jean-Claude
PIAU Monique
RENOUARD Dominique
SENATEUR Jean-Pierre
SIFAKIS Joseph
SIMON Jean-Paul
SUERY Michel
TEODOSIU Christian
VAUCLIN Michel
VENNEREAU Pierre
WACK Bernard
YONNET Jean-Paul

**Personnalités agréées à titre permanent à diriger
des travaux de recherche
(décision du conseil scientifique)**

E.N.S.E.E.G

HAMMOU Abdelkader
MARTIN-GARIN Régina
SARRAZIN Pierre
SIMON Jean-Paul

E.N.S.E.R.G

BOREL Joseph

E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
PERARD Jacques
REINISCH Raymond

E.N.S.H.M.G

ROWE Alain

E.N.S.I.M.A.G

COURTIN Jacques

C.E.N.G

CADET Jean
COEURE Philippe
DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIEB Maurice
VINCENDON Marc

Laboratoires extérieurs :

C.N.E.T

DEVINE Rodericq
GERBER Roland
MERCKEL Gérard
PAULEAU Yves

Situation particulière

PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

ENSIMAG	LATOMBE	J..Claude	Détachement	21/10/1989
ENSHMG	PIERRARD	J.Marie	Détachement	30/04/1989
ENSIMAG	VEILLON	Gérard	Détachement	30/09/1990
ENSIMAG	VERJUS	J.Pierre	Détachement	30/09/1989
ENSPG	BLOCH	Daniel	Recteur à c/	21/12/1988

SURNOMBRE

INPG	CHIAVERINA	Jean	30/09/1989
ENSHMG	BOUVARD	Maurice	30/09/1991
ENSEEG	PARIAUD	J.Charles	30/09/1991

A la mémoire de mon père

A ma mère, mes sœurs et mon frère

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le professeur B. Malgrange, Directeur de recherches au CNRS, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur P. J. Laurent, Professeur à l'Université de Grenoble, de m'avoir accueilli et accordé la dispense du DEA.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur J. Della Dora, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui a dirigé cette thèse. Ses conseils et encouragements ont beaucoup compté pour moi. J'ai pu apprécier durant toutes ces années ses qualités scientifiques et humaines.

J'adresse toute ma gratitude à Madame A. Duval, Professeur à l'Université de Lille, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Monsieur L. Brenig, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Ces corrections ont été très utiles pour moi.

Je remercie Madame E. Tournier, Professeur à l'Université de Grenoble, d'avoir accepté de participer à ce jury. Ses remarques et corrections m'ont beaucoup aidés.

Je remercie Monsieur J. Thomann, Ingénieur principal à l'IN2P3, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements les plus vifs vont également à C. Dicrescenzo pour son aide, à Abdel Barkatou, Françoise et Jean-Louis Roch, Pascale Sénéchaud et Isabelle Gil pour leur amitié. Merci aussi à tous les membres de l'équipe d'Algorithmique Parallèle et de Calcul Formel.

Que tous mes amis qui ont rendu mon séjour à Grenoble agréable reçoivent mes sincères remerciements. J'en garderai un bon souvenir.

Je remercie enfin, tous les membres du service de reprographie de l'IMAG pour la réalisation matérielle de cette thèse.

Table de Matières

- Introduction..... 3**

- Chapitre I Forme Normale de Jordan de Matrices Holomorphes..... 9**
 - I-1. Généralités sur les matrices holomorphes.....10
 - I-2. Calcul de la forme de Frobenius de matrices holomorphes.....12
 - I-2.1. Première étape polynôme minimal d'un vecteur.....14
 - I-2.2. Deuxième étape polynôme minimal de la matrice.....17
 - I-3. Passage de la forme de Frobenius à la forme de Jordan...24

- Chapitre II Forme normale de Arnold de matrices dépendant de paramètres.....31**
 - II-1. Introduction.....31
 - II-2. Théorie générale de déformations de matrices.....33
 - II-3. Calcul de la forme de Arnold de matrices dépendant de paramètres.....35
 - II-3.1. La procédure "pré-opérations".....42
 - II-3.2. La procédure obtenir_un_bloc.....44
 - II-4. Calcul de la forme de Arnold-Wasow de système différentiels.....46

- Chapitre III Résolution Formelle d'un Système d'Équations Différentielles Ordinaires Linéaires homogènes d'Ordre 1 Dépendant d'un Paramètre.....49**
 - III-1. Cas de base.....52
 - III-1.1. Cas $h = 0$52
 - III-1.2. Cas $n = 1$55
 - III-2. Bloc diagonalisation formelle.....56
 - III-3. Cas d'une unique valeur propre.....62
 - III-3.1. La première réduction.....63
 - III-3.2. Convergence en cas de plusieurs réductions nécessaires.....68

Chapitre IV Solutions Formelles de Systèmes d'Equations Différentielles Linéaires Ordinaires Homogènes au Voisinage d'un Point Singulier Régulier.....	79
IV-1. Cas générique.....	81
IV-2. Cas général.....	82
IV-2.1. Détermination des différences entières des valeurs propres d'une matrice.....	82
IV-2.2. Réduction au cas générique.....	86
IV-3. Le calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(1)}$ et $A_0^{(k_1)}$	88
IV-3.1. Le calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(1)}$	88
IV-3.2. Calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(k_1)}$	89
IV-4. Un exemple complet traité par cet algorithme.....	92
Chapitre V Solutions Formelles d'un Système Différentiel dans le Voisinage d'un Point Singulier Irrégulier.....	99
V-1. Introduction.....	99
V-2. Forme de Arnold-Wasow de systèmes différentiels du type (V.1).....	100
V-3. La première transformation de shearing.....	103
Bibliography.....	107

INTRODUCTION

Le travail présenté dans cette thèse est un travail algorithmique portant sur les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires dépendant ou pas d'un paramètre.

Nous étudions dans les trois premiers chapitres les solutions formelles des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires homogènes d'ordre 1 dépendant d'un paramètre ayant la forme suivante

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y \quad (1)$$

où x est une variable complexe, y un vecteur de dimension $n \geq 1$, ε un paramètre réel, h un entier positif, et $A(x, \varepsilon)$ est une matrice d'ordre n , holomorphe par rapport à x et ε dans un voisinage de $x = 0$ et ε de la forme suivante :

$$|x| \leq x_0, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (2)$$

et y admettant un développement asymptotique :

$$A(x, \varepsilon) \approx \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r \quad (3)$$

où x_0 et ε_0 sont certains réels positifs.

Le **chapitre I** est consacré au problème de la réduction d'une matrice holomorphe à sa forme de Jordan. On peut supposer que $A_0(x) \neq 0$, sinon, le système (1) peut être divisé par ε . La structure de la matrice de tête $A_0(x)$ dans le développement de la série (3) a un rôle important dans la construction des solutions formelles. Cette opération implique des opérations, qui ne sont pas évidentes, dans l'anneau des fonctions holomorphes. Ce problème est intéressant et important en lui-même. Nous présentons, dans I-1, des généralités pour des matrices à coefficients dans l'anneau des fonctions holomorphes.

Ensuite dans le paragraphe I-2, un algorithme inspiré de celui de P. Ozello [54] est présenté pour réduire une matrice holomorphe sous l'hypothèse I.1 à sa forme de Frobenius. Cet algorithme a été implanté en MACSYMA. Nous avons démontré que le polynôme minimal de $A_0(x)$ a un degré constant dans un voisinage approprié de $x = 0$, ce qui assure la convergence de l'algorithme en un nombre fini de pas.

Dans I-3, la réduction de la forme de Frobenius à la forme de Jordan basée sur un théorème de Wilkinson est considérée et nous proposons un algorithme pour trouver les blocs de Jordan ayant chacun entre eux une unique valeur propre différente de celles des autres blocs.

Le chapitre II est une contribution à l'étude de la forme normale de Arnold de matrices dépendant de paramètres et la forme de Arnold-Wasow de systèmes d'équations différentielles dépendant d'un paramètre de type (1). Nous proposons un algorithme pour le calcul exact de ces formes normales. L'étude est d'abord faite pour les déformations générales de matrices et ensuite l'algorithme est présenté pour le calcul. Dans le paragraphe II-4 nous discutons le calcul de la forme de Arnold-Wasow d'un système différentiel linéaire dépendant d'un paramètre. Cet algorithme a été aussi implanté en MACSYMA.

Le chapitre III est consacré à une étude algorithmique de la méthode de Turrittin [63] et de Wasow [67][68] pour la résolution formelle de systèmes d'équations différentielles de la forme (1), i.e. la construction d'un système fondamental de solutions formelles de système de ce type, en utilisant les algorithmes présentés dans les deux précédents chapitres.

Dans III-1, nous allons discuter des cas simples, le cas général s'y ramènera ensuite par l'algorithme suivant.

L'algorithme est formé principalement de six étapes :

- (i) Réduction de la matrice $A_0(x)$ à sa forme de Jordan par une transformation : $y=T(x) z$ où $T(x)$ est une matrice de fonctions holomorphes et holomorphiquement inversible (I.1 du chapitre I) dans un voisinage de l'origine.
- (ii) Bloc-diagonalisation de toutes les matrices $A_r(x)$, $r \geq 1$, par une transformation de la forme suivante :

$$y = \left(I + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r \right) z$$

les tailles des blocs correspondant aux multiplicités des valeurs propres distinctes de $A_0(x)$, les $P_r(x)$ étant des matrices de fonctions holomorphes d'ordre n .

(iii) Mise en facteur des expressions de cette forme pour des systèmes dont la matrice de tête $A_0(x)$ a une unique valeur propre :

$$y = \exp\left(\varepsilon^{-1} \int^x \lambda(t) dt\right) z$$

où $\lambda(x)$ est la valeur propre de $A_0(x)$, pour réduire la valeur propre de $A_0(x)$ à zéro.

(iv) Réduction du système (1) à un système sous forme de Arnold-Wasow par une transformation du même type que dans (ii).

(v) Transformation par une matrice de la forme (transformation de shearing) :

$$y = \text{diag}(1, \varepsilon^\alpha, \dots, \varepsilon^{(n-1)\alpha}) z$$

où α est un entier ou un nombre rationnel à déterminer.

(vi) Changement du paramètre $\varepsilon = \bar{\varepsilon}^q$, q étant le dénominateur de α dans l'étape précédente.

Nous considérons dans III-2 l'étape (ii) où un algorithme du à Turrittin est présenté. Nous avons implanté cet algorithme en MACSYMA. Donc si $A_0(x)$ est sous forme de Jordan, alors nous pouvons trouver une matrice $Q(x, \varepsilon)$ telle que le changement de variables $y=Q(x,\varepsilon)z$ transforme le système (1) en plusieurs systèmes disjoints d'ordres inférieurs. Ce qui nous ramène au cas de III-3.

Le paragraphe III.3 est consacré au système dont la matrice $A_0(x)$ a une unique valeur propre. La forme de Arnold-Wasow (Chapitre II) est utilisée après avoir transformé la valeur propre de $A_0(x)$ à zéro. Ensuite une transformation de

shearing de la forme (v) est utilisée pour réduire le système à un des cas considérés dans III-1 et III-2 avec n ou h diminué.

Les deux autres chapitres sont consacrés à l'étude du calcul de solutions formelles de systèmes des équations différentielles linéaires ordinaires homogènes d'ordre 1 dans un voisinage du point singulier régulier ou irrégulier.

Le **chapitre IV** est consacré à l'étude d'un algorithme pour la résolution formelle de systèmes d'équations différentielles à point singulier régulier. Nous avons mis en œuvre l'algorithme de Wasow en vue de l'implantation en calcul formel. L'implantation a été faite en MACSYMA. Des difficultés restent à surmonter pour une implantation complète de cet algorithme pour tester si une expression polynomial en nombres algébriques est nul ou pas que nous allons préciser au paragraphe IV-3.

Nous considérons dans le **chapitre V** le calcul des solutions formelles de système différentiels au voisinage du point singulier irrégulier. Nous avons appliqué l'algorithme de Turrittin-Wasow étudié dans le chapitre III à ce problème. Nous avons adapté l'algorithme étudié dans le chapitre II pour le calcul de la forme de Arnold au calcul de la forme de Arnold-Wasow de système différentiels à point singulier irrégulier, en modifiant les définitions de transformations élémentaires de type holomorphiquement semblable.

**Solutions Formelles de Systèmes d'Equations
Différentielles Linéaires Ordinaires Homogènes
Dépendant d'un Paramètre**

Chapitre I

Forme Normale de Jordan de Matrices Holomorphes

La théorie formelle des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires repose fondamentalement sur l'algèbre linéaire. Si, comme dans le chapitre III, les systèmes d'équations différentielles sont analytiques, il est essentiel de savoir lesquelles des opérations algébriques peuvent être généralisées dans l'anneau des fonctions d'une variable complexe qui sont holomorphes dans un certain domaine.

Chaque matrice constante à coefficients complexes est semblable, dans le corps des complexes, à sa forme de Jordan, qui est unique à l'ordre de ses blocs près. Si A est une matrice de fonctions holomorphes, la matrice $J_A(x)$ qui est la forme de Jordan de $A(x)$ à chaque point x dans Ω n'est pas forcément holomorphe dans Ω . Même si $J_A(x)$ est holomorphe, il est possible que $A(x)$ ne soit pas holomorphiquement semblable (définition dans I-1) à $J_A(x)$ dans Ω . Et si $A(x)$ est holomorphiquement semblable à $J_A(x)$ dans Ω , il est intéressant de savoir comment calculer exactement $J_A(x)$.

Le but de ce chapitre est l'étude de ces problèmes. Dans le paragraphe I-1 nous présentons des conditions et théorèmes de base pour des matrices à coefficients dans l'anneau des fonctions holomorphes [68].

Ensuite nous proposons un algorithme pour le calcul exact de la forme de Jordan d'une matrice dépendant d'un paramètre. Pour cela nous discutons d'abord le problème de la forme de Frobenius dans le paragraphe I-2 où on propose un algorithme, et aussi son implantation en MACSYMA [14], inspiré de celui de P. Ozello [54] et nous discutons la réduction de la forme de Frobenius à la forme de Jordan dans paragraphe I-3.

I-1. GENERALITES SUR LES MATRICES HOLOMORPHES

Notations

L'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes dont les coefficients sont des fonctions holomorphes d'une variable complexe x appartenant à un domaine Ω de \mathbb{C} sera noté par $H_{nm}(\Omega)$ (H_{nm} , s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Définition

Une matrice $A(x)$ appartenant à $H_{nn}(\Omega)$ est dite holomorphiquement semblable (h-semblable) à une matrice $B(x)$ appartenant à $H_{nn}(\Omega)$, s'il existe une matrice $T(x)$ appartenant à $H_{nn}(\Omega)$ holomorphiquement inversible (son inverse est dans $H_{nn}(\Omega)$) telle que

$$T^{-1}(x) A(x) T(x) = B(x), \forall x \in \Omega.$$

Nous rappelons d'abord des résultats de Wasow [68] qui jouent un rôle important dans ce qui suit.

Théorème 1.1

S'il existe un voisinage Ω de $x = 0$ tel que toutes les valeurs propres de $A(x)$ appartenant à $H_{nn}(\Omega)$ soient holomorphes dans Ω et que toutes les valeurs propres qui sont égales en un point de Ω soient égales en tous les points du voisinage Ω , alors $A(x)$ est h-semblable sur Ω à une somme directe de matrices chacune d'entre elles ayant une seule valeur propre distincte.

Notons $J_A(x)$ la forme de Jordan de la matrice $A(x)$ à chaque point x de Ω . D'après le théorème précédent les conditions suivantes sont importantes :

Hypothèse I.1

Il existe un voisinage Ω de $x = 0$ tel que

- (i) J_A appartienne à $H_{nn}(\Omega)$;*
- (ii) toutes les valeurs propres qui sont égales en un point de Ω soient identiquement égales en tous les points du voisinage Ω .*

Théorème 1.2

Si $A(x)$ satisfait l'hypothèse I.1, alors $A(x)$ est, dans Ω , h -semblable à sa forme de Jordan J_A .

Il est clair que la condition (i) dans l'hypothèse I.1 est aussi nécessaire. La condition (ii) n'est pas nécessaire mais presque nécessaire en ce sens que des matrices qui sont h -semblables à leurs matrices de Jordan mais qui ne vérifient pas (ii) sont exceptionnelles (W. Wasow [68] page 224).

Exemple

Nous considérons la matrice d'ordre 2 suivante :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa forme de Jordan est

$$J(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x = 0. \end{cases}$$

La matrice $A(x)$ satisfait la condition (ii) de l'hypothèse I.1 pour tout x . Mais la matrice de Jordan n'est pas holomorphe dans un voisinage de $x = 0$. Elle est par contre holomorphe dans tous les ouverts qui ne contiennent pas le point $x = 0$.

Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'au comportement local d'une matrice, i.e. nous considérons les matrices holomorphes dans un voisinage de $x = 0$. Donc le domaine Ω sera toujours un voisinage de $x = 0$.

Vérification de (ii) de l'hypothèse I.1

Etant donnée une matrice holomorphe, en pratique ses coefficients sont des séries tronquées, i.e. des polynômes à degré donné. Pour déterminer si cette matrice satisfait la condition (ii) de l'hypothèse I.1, i.e. si les multiplicités des valeurs propres sont constantes, nous pouvons calculer d'abord son polynôme caractéristique $P(x, w)$ qui est en pratique un polynôme à deux variables de degré n par rapport à w . Donc nous pouvons le décomposer sous forme sans carré en utilisant des calculs de pgcd.

Supposons que $P(x, w)$ a une décomposition sans carré suivante :

$$P(x, w) = P_1(x, w) P_2^2(x, w) \dots P_k^k(x, w).$$

Notons $Q(x, w) = P_1(x, w) P_2(x, w) \dots P_k(x, w)$. Alors cette matrice satisfait la condition (ii) de l'hypothèse I.1 si et seulement si le polynôme $Q(0, w)$ n'a que des racines simples. Cela peut être vérifié par le calcul d'un pgcd.

I-2. CALCUL DE LA FORME DE FROBENIUS DE MATRICES HOLOMORPHES

Définitions

Une matrice compagnon C est une matrice de la forme suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & c_k \\ 1 & 0 & & c_{k-1} \\ & 1 & & c_{k-2} \\ & & \dots & \\ & & & 1 & c_1 \end{bmatrix}$$

Nous appelons aussi le polynôme $P = w^k - c_1 w^{k-1} + \dots + (-1)^k c_k$ polynôme associé à C .

Une matrice F est dite sous forme normale de Frobenius si $F = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_r)$, où toutes les C_i ($i = 1, 2, \dots, r$) sont des matrices compagnons et P_{i+1} divise P_i pour $i = 1, 2, \dots, r-1$, les P_i étant les polynômes associés aux matrices compagnons C_i respectivement.

Dans [54], Ozello a étudié un algorithme pour le calcul exact de la forme de Frobenius, d'une matrice à coefficients dans \mathbb{Q} , un algorithme pour la réduction de la forme de Frobenius à la forme de Jordan et aussi une matrice inversible Q de passage telle que $QF = JQ$.

Nous avons adopté cet algorithme, qui est en temps polynomial pour des matrices constantes, et nous avons démontré la convergence de cet algorithme modifié en vue du calcul exact de la forme de Jordan d'une matrice holomorphe localement, i.e. dans un voisinage de $x = 0$.

L'algorithme proposé dans [54] est une suite de transformations élémentaires de "type semblable" sur le corps considéré. Nous pouvons définir aussi des transformations élémentaires de "type holomorphiquement semblable" (h-semblable), chacune de ces transformations reposant sur des opérations dans $H_{11}(\Omega)$, les fonctions obtenues par ces opérations sont des fonctions holomorphes dans un voisinage convenable de $x = 0$.

Définitions

Une transformation élémentaire de type holomorphiquement semblable (transformation élémentaire de type h-semblable, ou simplement h-transformation élémentaire) est une des quatre transformations suivantes :

P_{ij} : permute les lignes i et j ainsi que les colonnes i et j .

$M_i(a(x))$ (pour des fonctions $a(x)$ satisfaisant $a(0) \neq 0$) :
multiplie la i -ième ligne par a , et la i -ième colonne par $1/a$.

$L_{i,j}(a(x))$:
remplace la i -ième ligne par la somme de la i -ième ligne et la j -ième multipliée par $a(x)$, puis la j -ième colonne par la différence de la j -ième colonne et la i -ième multipliée par $a(x)$.

$C_{i,j}(a(x))$:
remplace la i -ième colonne par la somme de la i -ième colonne et la j -ième colonne multipliée par $a(x)$, puis la j -ième ligne par la différence de la j -ième ligne et la i -ième multipliée par $a(x)$.

L'idée de notre algorithme est d'effectuer des h-transformations élémentaires sur $A(x)$ afin de trouver les blocs de la forme de Frobenius de $A(0)$ dont les polynômes associés sont les polynômes minimaux de $A(0)$ et des matrices qui sont obtenues à partir de $A(0)$ par ces h-transformations élémentaires.

Donc, supposons que $A(x) = (a_{ij}(x))$ soit une matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes dans un voisinage du point $x = 0$. Les opérations élémentaires seront effectuées sur $A(x)$ et on note la matrice obtenue toujours par $A(x)$. Nous présentons l'algorithme suivant.

I-2.1. Première étape : polynôme minimal d'un vecteur :

Nous commençons l'algorithme suivant par la colonne $j = 1$ sur la matrice $B(x) := A(x)$ (notons $B(x) = (b_{ij}(x))$) :

(i.1) Si il existe un élément non nul dans $\{b_{j+1,j}(0), b_{j+2,j}(0), \dots, b_{n,j}(0)\}$ on suppose que $b_{k,j}(0) \neq 0$ est le premier élément non nul de cet ensemble, on effectue les opérations suivantes :

$$P_{j+1,k} ; \quad (I.1)$$

$$M_{j+1}\left(\frac{1}{b_{j+1,j}(x)}\right), \quad (I.2)$$

$$L_{i,j+1}(-b_{ij}(x)) \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } i \neq j+1; \quad (I.3)$$

Après (I.1), nous avons $b_{j+1,j}(0) \neq 0$. Donc $M_{j+1}\left(\frac{1}{b_{j+1,j}(x)}\right)$ est une h-transformation élémentaire puisque $\frac{1}{b_{j+1,j}(x)}$ est une fonction holomorphe. Et nous avons, après cette transformation, le nouvel élément $b_{j+1,j}(x) = 1$. Ensuite les h-transformations élémentaires de type $L_{i,j+1}(-b_{ij}(x))$ ($i \neq j + 1$) transforme la matrice $B(x)$ en une matrice telle que tous les éléments de la colonne j sont nuls sauf la $(j+1)$ -ième qui vaut 1.

Après avoir effectué ces opérations sur la matrice $B(x)$ de la colonne $j = 1$ jusqu'à une colonne j dont les éléments $\{b_{j+1,j}(0), b_{j+2,j}(0), \dots, b_{n,j}(0)\}$ sont tous nuls, $B(x)$ est transformée en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} C_1 & B_1 \\ U & B_2 \end{pmatrix} \quad (I.4)$$

où U est une matrice dont tous les coefficients sont identiquement nuls sauf les éléments de la dernière colonne qui sont nuls au point $x = 0$, C_1 est une matrice compagnon d'ordre j ; B_1 et B_2 sont des matrices holomorphes d'ordre convenable.

Remarquons que ces opérations ne changent pas les éléments des lignes à gauche de la ligne j de la matrice $B(x)$.

Exemple

Soit $A(x)$ la matrice suivante

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & -2 & x & x+2 \\ x+1 & 2 & x+1 & -2x-1 \\ 1 & 2 & x+1 & -4 \\ x & -1 & 1 & x+4 \end{bmatrix}$$

en effectuant (i.1) et (i.2) pour $j = 1$ à 2 , nous obtenons la matrice suivante :

0	$\frac{3x^3-4x-2}{x+1}$	0	$-\frac{x^2+2x}{x+1}$
1	$\frac{2x^2+6x-3}{x+1}$	0	$\frac{x^3+2x+2}{x^2-1}$
0	$\frac{3x^4+3x^3-x^2}{x^2-1}$	0	$-\frac{2x^3+3}{x^2-1}$
0	$-\frac{3x^3+2x^2}{x^2-1}$	1	$\frac{x^3+x^2-3x-4}{x^2-1}$

où

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x^2}{x+1} \\ 0 & \frac{3x^3+2x^2}{x+1} \end{bmatrix}$$

est une matrice nulle sauf les éléments dans la dernière colonne qui sont nuls en $x = 0$.

Si $p(w)(x)$ est le polynôme associé à la matrice C_1 , qui est un polynôme dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes dans un voisinage Ω du point $x = 0$, alors le polynôme $q(w)(0)$, valeur en $x = 0$ du polynôme $p(w)(x)$, est le polynôme minimal du vecteur e_1 (Ozello [54] p.32, théorème 1) (les e_i , $i = 1, \dots, n$, étant la base canonique de \mathbb{Q}^n).

(i.2) Pour obtenir le polynôme minimal d'un vecteur quelconque $e = \sum_{j=r}^n b_j e_j$ où $b_r \neq 0$, et tous les b_j sont constants, il suffit, avant d'effectuer les opérations (i.1), de faire les opérations : (a) P_{1r} ; (b) $M_1(1/b_r)$; (c) $C_{1j}(b_j)$, pour $j = r+1, \dots, n$.

La matrice $A(x)$ est transformée, à l'aide d'opération (i.2), en une matrice sous la forme (I.4) où cette fois la valeur du polynôme associé à la matrice C_1 en $x = 0$ est le polynôme minimal du vecteur e .

Si l'ordre de la matrice C_1 est j , nous procédons avec les mêmes opérations que dans (i.1) pour $j := j+1$.

En continuant ces opérations de $j = 1$ jusqu'à $j = n$, on obtient une matrice de la forme suivante :

$$B(x) = \begin{bmatrix} C_1 & B_1 & B_2 & & \\ U_1 & C_2 & B_3 & & \\ U_2 & U_3 & C_3 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \dots \end{bmatrix}$$

où les matrices C_i ($i = 1, 2, \dots$) sont des matrices compagnons et les matrices U_i et B_i ($i=1, 2, \dots$) sont des matrices dont tous les coefficients sont identiquement nuls sauf ceux qui sont dans les dernières colonnes. Les coefficients des dernières colonnes des matrices U_i ($i = 1, 2, \dots$) sont nuls au point $x = 0$. Précisément la matrice $B(x)$ est de la forme suivante :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline C_1 & 0 & * & & * \\ \hline & & * & 0 & * \\ \hline * & \boxed{C_2} & & 0 & * \\ * & & & & * \\ 0 & * & & & * \\ * & 0 & * & & * \\ * & & * & & * \\ 0 & * & 0 & * & \boxed{C_r} \\ * & & * & & * \\ \hline \end{array} & (I.5) \end{array}$$

où les éléments représentés par $*$ au dessous des éléments diagonaux sont nuls en $x = 0$. Les matrices C_i sont des matrices compagnons, et les autres éléments sont identiquement nuls.

Remarque

Pour les étapes qui suivent nous aurons aussi besoin des informations suivantes. Nous initialisons un tableau "pasb" tel que $\text{pasb}[i] = i$ pour $i = 1, \dots, n$, avant d'effectuer les opérations de cette étape. Chaque fois qu'on effectue une

permutation P_{ij} dans l'algorithme, nous effectuons en même temps $\text{pasb}[i] \leftarrow \text{pasb}[j]$ et $\text{pasb}[j] \leftarrow \text{pasb}[i]$. Donc on obtient aussi par cette étape une famille de vecteurs $\{e_{\text{pasb}[i]} : i = k_1, \dots, k_r\}$ où les k_i sont les indices des premières colonnes des matrices C_i ($i = 1, \dots, r$). Rappelons que e_i désigne le vecteur de dimension n dont toutes les composantes sont nulles sauf la i -ième qui vaut 1. Nous aurons besoin de ces informations pour calculer le polynôme minimal de la matrice $A(0)$ et pour construire la matrice de transformation.

Exemple

Continuons à développer l'exemple précédent. Nous avons

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3x^3-4x-2}{x+1} & 0 & \frac{-x^2+2x}{x+1} \\ 1 & \frac{2x^2+6x-3}{x+1} & 0 & \frac{x^3+2x+2}{x^2-1} \\ 0 & \frac{3x^4+3x^3-x^2}{x^2-1} & 0 & \frac{2x^3+3}{x^2-1} \\ 0 & \frac{-3x^3+2x^2}{x^2-1} & 1 & \frac{x^3+x^2-3x-4}{x^2-1} \end{bmatrix}$$

I-2.2. Deuxième étape :

(ii.1) Calcul du polynôme minimal de $A(0)$;

La matrice de la forme (I.5) que nous avons obtenu à la première étape est en $x = 0$ une matrice de la forme suivante :

$$B(0) = \begin{bmatrix} C_1(0) & B_1(0) & B_2(0) \\ 0 & C_2(0) & B_3(0) \\ 0 & 0 & C_3(0) \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

Le polynôme minimal de la matrice $A(0)$ est le PPCM des polynômes minimaux de vecteurs $e_{\text{pasb}[i]}$ ($i = k_1, \dots, k_r$). Le calcul du polynôme minimal de $A(0)$ se fait par le même algorithme que dans Ozello [54] qui a l'avantage de ne pas calculer tous les ppcms. Dans notre cas, le calcul ne se fait pas sur $A(0)$, mais sur $A(x)$.

Le résultat que nous obtenons par cet algorithme est un polynôme $q(w)(x)$ dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes. Et ce qui est important est que le polynôme $q(w)(0)$ valeur du polynôme $q(w)(x)$ en point $x = 0$ est le polynôme minimal de $A(0)$.

(ii.2) Calcul d'un vecteur dont le polynôme minimal est le polynôme minimal de $A(0)$.

Pour cela, P. Ozello [54] a étudié un algorithme de Jacobson [38] pour calculer un vecteur f qui est une combinaison linéaire de vecteurs $e_{pasb[i]}$ ($i = k_1, \dots, k_r$) et dont le polynôme minimal est le même que celui de $A(0)$. Son algorithme construit un vecteur f dont toutes les composantes sont majorées par l'entier n , égal à la dimension de la matrice.

En utilisant ce vecteur f , nous effectuons les opérations (i.2) sur la matrice $A(x)$. Nous obtiendrons une matrice sous forme (I.4) où cette fois C_1 est un bloc de la matrice $A(x)$ dont l'ordre est égal au degré du polynôme minimal de $A(0)$, i.e. nous obtiendrons une matrice (avec des notations indépendantes des précédentes) de la forme (I.6) où B_1 est une matrice holomorphe quelconque et les $*$ représentent des fonctions holomorphes, nulles au point 0. Le polynôme associé à la matrice compagnon C_1 est un polynôme $q(w)$ dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes dans un voisinage du point $x = 0$, et le polynôme $q(w)(0)$ au point $x = 0$ est le polynôme minimal de $A(0)$.

$$B(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline C_1 & B_1 \\ \hline 0 & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (I.6)$$

Exemple

Pour l'exemple précédent, nous obtenons que le degré du polynôme minimal de $A(0)$ et $A(x)$ est 4 et nous obtenons la matrice suivante qui est la forme de Frobenius de $A(x)$:

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9x^3-6x-6 \\ 1 & 0 & 0 & 2x^2+14x+17 \\ 0 & 1 & 0 & -2x^2-11x-17 \\ 0 & 0 & 1 & 3x+7 \end{bmatrix}$$

Avant d'écrire un théorème, sous l'hypothèse I.1, qui nous assure que les éléments représentés par les * dans (I.6) sont identiquement nuls dans un voisinage de $x = 0$, considérons un autre exemple :

Exemple

Pour la matrice A qui est la suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} -2x-2 & -3x^2-12 & 3 & -\frac{6x^2-12x+3}{2} \\ x+1 & 2x^2+6 & -1 & \frac{4x^2-6x+3}{2} \\ -\frac{2x^2+x-1}{2} & \frac{5x^2-12x+10}{2} & \frac{4x+1}{2} & \frac{18x^2-14x+13}{4} \\ -x-1 & -x^2-4 & 1 & -\frac{2x^2-6x-1}{2} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons que le degré du polynôme minimal de $A(0)$ et $A(x)$ est 3 et nous obtenons la matrice suivante :

$$H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x^4+2x^3+3x^2+4x+2 & \frac{2x^4+3x^3+6x^2+8x+3}{x^2-x+1} \\ 1 & 0 & -2x^3-3x^2-6x-5 & -\frac{2x^3+3x^2+9x+5}{x^2-x+1} \\ 0 & 1 & x^2+2x+4 & \frac{2x+2}{x^2-x+1} \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix}$$

avec $H_{43} = 0$ comme on le cherche.

Théorème 1.3

Si $A(x)$ satisfait l'hypothèse I.1, alors le polynôme minimal de $A(x)$ est de degré constant dans un voisinage de $x = 0$.

Démonstration

D'après le théorème I.2, la matrice $A(x)$, qui satisfait l'hypothèse du théorème, est h-semblable à J_A , qui est bloc diagonale. Donc on peut supposer, sans perdre de généralité, que $A(x)$ a une seule valeur propre. Notons la valeur propre de $A(x)$: $\lambda(x)$. Le polynôme minimal de $A(x)$ est le même que celui de J_A .

Considérons le polynôme minimal unitaire $P(w)$ de la matrice $J_A - \lambda(x) I$, qui est une matrice constante. Il est clair que $P(w)$ est de degré constant dans un voisinage de $x = 0$. On développe $P(J_A - \lambda(x) I)$ en un polynôme en J_A , c'est un polynôme unitaire $Q(J_A)$ de degré égal à celui de $P(w)$, donc de degré constant dans un voisinage de $x = 0$. Et $Q(J_A) = 0$, donc $Q(w)$ est le polynôme minimal de J_A , et de A , qui est de degré constant dans un voisinage de $x = 0$.

Remarque

La matrice de transformation P peut être construite de manière suivante. Si d est l'ordre de la matrice C_1 dans (I.6), alors les d premières colonnes de la matrice P sont formées par $\{f, A(x)f, \dots, A(x)^{d-1}f\}$.

En continuant ces opérations (i)-(ii) sur la colonne $j := j+1$ de la matrice $B(x)$ de (I.6), nous transformons la matrice $A(x)$ en une matrice de la forme (I.7).

$$H(x) = \begin{array}{|c|ccc|} \hline & C_1 & & & * & * \\ & & 0 & * & 0 & * \\ & & & * & & * \\ \hline & & C_2 & & & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & * \\ & 0 & 0 & & & * \\ & & & & & * \\ & 0 & 0 & & & C_k \\ \hline \end{array} \quad (I.7)$$

Un autre point qui est important et qu'il faut démontrer, c'est qu'à partir de la matrice H de la forme (I.7), on peut toujours obtenir la forme de Frobenius. Nous

effectuons les opérations suivantes pour faire apparaître des zéros pour les éléments représentés par les * dans (I.7) :

$$C_{ij}, j = d_i, \dots, k_i - 1; i = 1, \dots, r.$$

k_i et d_i étant les indices de la première et dernière colonne de C_i dans (I.7).

Nous obtenons après ces opérations une matrice de la forme suivante :

$$H^*(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & C_1 & & \\ \hline & & \begin{array}{c} *** \dots \dots *** \\ 0 \end{array} & \\ \hline & & C_2 & \begin{array}{c} *** \dots *** \\ 0 \end{array} \\ \hline & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & C_k \\ \hline \end{array}$$

les * représentent des fonctions holomorphes dans un voisinage de $x = 0$. Donc il faut démontrer que tous les éléments * sont identiquement nuls dans un voisinage de $x = 0$, ce qui veut dire que H^* est la forme de Frobenius de $A(x)$. Nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 1.4

H^ est la forme de Frobenius de $A(x)$.*

Démonstration

Il faut seulement démontrer que les éléments représentés par * dans la première ligne de H^* sont identiquement nuls dans un voisinage de $x = 0$.

Si, au contraire, dans tous les voisinages de $x = 0$, il existe un point x_0 et un élément $a(x)$ non nul en x_0 représenté par une des * dans la première ligne, le même raisonnement que dans (Ozello [54], page 88) permet de démontrer que la matrice $H^*(x_0)$ et $A(x_0)$ ont des polynômes minimaux de degré plus grand que l'ordre de la matrice C_1 . Ce qui est impossible par le théorème précédent.

Remarque

Pour obtenir la matrice de transformations il suffit d'effectuer les opérations précédentes sur la matrice $\begin{bmatrix} H(x) \\ P \end{bmatrix}$ d'ordre $2n \times n$ où P est la matrice de transformation précédemment obtenue. On obtient alors une matrice sous forme $\begin{bmatrix} H^*(x) \\ P^* \end{bmatrix}$ où P^* est la matrice de transformation.

Exemple

On reprend la même matrice que dans l'exemple précédent. La matrice H^* qu'on obtient est la suivante :

$$H^*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x^4+2x^3+3x^2+4x+2 & 0 \\ 1 & 0 & -2x^3-3x^2-6x-5 & 0 \\ 0 & 1 & x^2+2x+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix}$$

C'est la forme de Frobenius de $A(x)$.

Il est facile de voir que la matrice

$$H^*(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est la forme de Frobenius de $A(0)$.

Remarques 1.1 :

Si $A(x)$ satisfait (ii) de l'hypothèse I.1, d'après le théorème I.8 précédemment démontré, on sait que la forme de Jordan de $A(x)$ est holomorphe dans un voisinage de $x = 0$ si et seulement si notre algorithme nous donne la forme de Jordan à la fin. Ceci veut dire que les polynômes minimaux de la matrice $A(x)$ et les matrices obtenues à partir de $A(x)$ par l'algorithme sont de degrés constants dans Ω . Donc si la matrice $A(x)$ satisfait (ii) de l'hypothèse I, l'algorithme présenté ici nous donne soit la forme de Frobenius qui est holomorphe soit l'exécution s'arrête avant la fin de l'algorithme et dans ce dernier cas, la forme de Frobenius n'est pas holomorphe quelque soit le voisinage de $x = 0$.

Si la matrice $A(x)$ ne satisfait pas (ii) de l'hypothèse I.1, il est possible que l'algorithme s'arrête alors que la forme de Frobenius est holomorphe dans un certain voisinage de $x = 0$, et il est aussi possible que l'algorithme trouve la forme de Frobenius. Dans ce dernier cas les polynômes minimaux de $A(x)$ et des matrices obtenues à partir de $A(x)$ ne sont pas de degrés constants.

Exemple

Considérons la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{8x+1}{2} & 1 & 1-6x \\ -x & x+1 & 2x \\ \frac{10x-1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{8x-3}{2} \end{bmatrix}$$

La forme de Frobenius de $A(0)$ est la suivante :

$$F(A(0)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc le polynôme minimal de $A(0)$ est de degré 2. Et ainsi, par la méthode de réduction du paragraphe suivant, la forme de Jordan de $A(0)$ est

$$J(A(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'algorithme que nous présentons ne peut calculer la forme de Frobenius, et ainsi la forme de Frobenius de la matrice $A(x)$ existe et est holomorphe pour tout x . Ceci car les valeurs propres de $A(x)$ ne satisfont pas l'hypothèse I.1. En effet elles sont toutes égales en $x = 0$, mais il existe deux valeurs propres qui sont distinctes en $x \neq 0$.

Cependant, la matrice suivante $B(x)$:

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$$

qui est holomorphiquement semblable à la matrice $A(x)$, en est sa forme de Jordan. Pour la matrice $B(x)$, l'algorithme peut trouver la forme de Jordan de $B(x)$. En fait il nous donne la forme (faible) de Frobenius :

$$F(B(x)) = \begin{bmatrix} 0 & -x^2-2x-1 & 0 \\ 1 & 2x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$$

qui peut être réduite par la méthode du paragraphe suivant à sa forme de Jordan comme étant la même matrice $B(x)$ et la matrice de passage est

$$P(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le degré du polynôme minimal de $B(x)$ n'est pas constant quelque soit le voisinage de $x = 0$ (En fait le degré est 2 en $x = 0$, 3 en $x \neq 0$).

I-3. PASSAGE DE LA FORME DE FROBENIUS A LA FORME DE JORDAN

Dans [54], Ozello a construit formellement la forme de Jordan de la forme de Frobenius, pour des matrices à coefficients dans \mathbb{Q} , selon le théorème suivant :

Théorème 1.9 (Wilkinson, [74])

Si

$$P = P_1 * P_2^2 * \dots * P_k^k$$

est la décomposition sans carrés de P (les P_i étant premiers entre eux deux à deux et sans facteurs carrés), et si $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,t}$ ($t = d_i$) sont les d_i racines

distinctes de P_i , alors la forme de Jordan de la matrice compagnon associée à P est

$$J = \text{diag}(J_i(\lambda_{i,j})) \quad (i = 1 \text{ à } k, j = 1 \text{ à } d_i)$$

où

$$J_i(\lambda_{i,j}) = \begin{bmatrix} \lambda_{i,j} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{i,j} & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_{i,j} \end{bmatrix}$$

$J_i(\lambda_{i,j})$ étant d'ordre i .

La forme de Jordan d'une matrice holomorphe peut être obtenue à partir de sa forme de Frobenius par la même méthode. Les méthodes pour les calculs de la matrice de passage et son inverse peuvent être aussi appliquées dans ce cas. Ainsi à chaque matrice compagnon C_i , on peut lui associer sa forme de Jordan J_i et aussi une matrice Q_i telle que $Q_i C_i = J_i Q_i$. Alors la forme normale de Jordan de la matrice $F = \text{diag}(C_1, \dots, C_k)$, où C_i sont des matrices compagnons, est

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$$

et la matrice de passage est $Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_k)$.

Dans notre réalisation en MACSYMA, nous ne calculons pas les valeurs propres λ_{ij} . Donc la forme de Jordan de la matrice considérée (constante ou holomorphe) est une forme formelle, i.e. les valeurs propres sont représentées comme des racines de polynômes connus. Et ainsi les coefficients de la matrice Q et son inverse sont des fonctions rationnelles des valeurs propres λ_{ij} .

Nous donnons un exemple pour voir que la forme de Jordan est construite formellement en gardant des valeurs propres comme des racines des polynômes :

où $\lambda_{1,1}$ et $\lambda_{1,2}$ sont les racines de $P_2 = x^2 + 1$.

Exemples

Soit A une matrice constante d'ordre 8 :

$$A = \begin{bmatrix} -39 & -23 & -29 & -27 & 9 & -3 & 6 & 11 \\ -24 & -14 & -19 & -20 & 14 & -2 & 4 & 10 \\ 142 & 82 & 106 & 101 & -41 & 11 & -22 & -43 \\ -21 & -16 & -18 & -18 & -2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 236 & 116 & 164 & 152 & -92 & 17 & -33 & -70 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La forme de Jordan de A est

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \lambda_{2,1} & 1 & & & & \\ & & & \lambda_{2,1} & & & & \\ & & & & \lambda_{2,1} & & & \\ & & & & & \lambda_{2,2} & 1 & \\ & & & & & & \lambda_{2,2} & \\ & & & & & & & \lambda_{2,2} \end{bmatrix}$$

où $\lambda_{1,1} = 1$ est la racine de $P_1 = x - 1$;

$\lambda_{2,1}$ et $\lambda_{2,2}$ sont les racines de $P_2 = x^2 + x + 1$.

Le temps de calcul de la forme de Jordan (y compris le calcul de la forme de Frobenius et la matrice de transformation) est 327,133 secondes sur une machine MICROVAX II.

Pour le deuxième exemple dans le paragraphe I-2, à partir de H^* , la forme de Frobenius de $A(x)$, on obtient la matrice de Jordan de $A(x)$:

$$J_A(x) = \begin{bmatrix} x^2+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{bmatrix}$$

Chapitre II

FORME NORMALE DE ARNOLD DE MATRICES DEPENDANT DE PARAMETRES

II-1. INTRODUCTION

La réduction d'une matrice à la forme normale de Jordan n'est pas une opération numériquement stable si parmi les valeurs propres existent des valeurs multiples. En effet, par une variation aussi petite que l'on veut de la matrice on peut modifier totalement la forme de Jordan si les valeurs propres sont multiples. L'algorithme du chapitre II n'est fait que pour des matrices satisfaisant l'hypothèse I.1. Donc, si une matrice n'est connue qu'approximativement, sa réduction à la forme normale de Jordan est pratiquement impossible en cas de valeurs propres multiples. Cette réduction n'est pas indispensable puisque génériquement une matrice ne possède pas de valeurs propres multiples.

Les valeurs propres multiples sont inévitables par une petite déformation (que l'on va définir plus bas) dans le cas où l'on s'intéresse non pas à une matrice isolée, mais à toute une famille de matrices dépendant des paramètres. Dans ce cas, même si nous pouvons réduire à la forme normale de Jordan chaque matrice de la famille, cette forme normale et la transformation qui ramène à cette forme dépendront en général discontinûment des paramètres (Remarque I.1 dans le Chapitre I).

Il se pose donc la question de savoir à quelle forme simple on peut ramener une famille de matrices dépendant différentiablement des paramètres par des changements de coordonnées dépendant différentiablement (holomorphiquement) de ces paramètres.

Traitons l'exemple de toutes les matrices complexes carrées d'ordre n comme un espace vectoriel de dimension n^2 . La relation de similitude des matrices décompose l'espace \mathbb{C}^{n^2} en variétés (les orbites du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{C})$ sont les suivantes : deux matrices sont situées sur une même orbite si leurs valeurs propres et les dimensions de leurs blocs de Jordan sont les mêmes).

La famille de matrices est définie par une application de l'espace des paramètres de la famille dans l'espace \mathbb{C}^{n^2} des matrices. Il s'avère que parmi toutes les familles de matrices on peut exhiber des familles spéciales (auxquelles on peut réduire toutes les familles) telles que cette réduction soit réalisée par un changement différentiable de paramètres. Dans la suite de ce chapitre, ces familles sont appelées déformations verselles et les déformations verselles à nombre minimal de paramètres sont dites miniverselles (Définition II.3) (Arnold [4]).

Donc, les déformations miniverselles sont les formes normales possédant le plus petit nombre de paramètres à la réduction desquelles on peut conserver la dépendance différentiable par rapport aux paramètres.

Nous rappelons d'abord des résultats de Arnold pour la théorie générale de déformations verselles dans le paragraphe suivant. Ensuite dans le paragraphe II-3, nous présentons un algorithme pour le calcul de la forme de Arnold de matrices dépendant de paramètres. Nous considérerons la forme de Arnold des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre dans le dernier paragraphe.

L'algorithme qu'on va développer est le suivant :

Entrées : Une matrices $A(x)$ d'ordre n dont les coefficients sont des séries tronquées à plusieurs variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Sorties : Une matrice $B(x)$ qui est la forme normale de la matrice $A(x)$.

Forme Normale de Arnold ($A(x)$) :

début

$A(0) \leftarrow \text{Jordan}(A(0));$ { chapitre I }

Pour chaque bloc de Jordan **faire**

pré_opérations ($A(x)$);

obtenir_un_bloc ($A(x)$);

fin;

II-2. THEORIE GENERALE DE DEFORMATIONS VERSELLES

Nous rappelons dans ce paragraphe des résultats élémentaires de la théorie générale de déformations verselles de Arnold [4][5].

Définition II.1

On appellera famille de matrices une application holomorphe

$$A : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$$

où Λ est un voisinage de l'origine des coordonnées dans un espace \mathbb{C}^p (des paramètres). On appellera *déformation* de la matrice $A(0)$ le germe de la famille A au point 0.

Une déformation B de la matrice $A(0)$ est équivalente à la déformation A si il existe une déformation C de l'unité, $C(0) = I$ la matrice identité, telle que

$$B(\alpha) = C(\alpha)^{-1}A(\alpha)C(\alpha).$$

Soient $M \subset \mathbb{C}^m$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^p$ et $\varphi : (M, 0) \rightarrow (\Lambda, 0)$ une application holomorphe.

Définition II.2

On appelle famille induite par A et par l'application φ la famille φ^*A :

$$(\varphi^*A)(\mu) = A(\varphi(\mu)), \mu \in M.$$

La déformation induite φ^*A de la matrice $A(0)$ est définie par la même formule.

Définition II.3

Une déformation A d'une matrice A_0 est dite *verselle* si toute déformation A' de la matrice A_0 est équivalente à une déformation induite par A . Une déformation verselle est universelle si cette application induite φ est déterminée de façon unique par la déformation A' . Une déformation verselle est dite *miniverselle* si la dimension de l'espace des paramètres est la plus petite possible pour toute déformation verselle.

Exemple

Une famille de matrices diagonales d'éléments diagonaux $(\alpha_i + \lambda_i)$, où tous les λ_i sont distincts et α_i les paramètres de la déformation, est une déformation verselle, universelle et miniverselle de la matrice (λ_i) .

La dimension d'une déformation miniverselle d'une matrice quelconque est donnée par le théorème suivant. Soient λ_i les valeurs propres de la matrice A_0 et J la matrice de Jordan de A_0 .

$$J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_p(\lambda_p)), J_i(\lambda_i) = \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{ik})$$

Nous supposons que J_{ij} ($1 \leq j \leq k$) sont d'ordre $n_j(\lambda_i)$ sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

et $n_1(\lambda_i) \geq n_2(\lambda_i) \geq \dots \geq n_k(\lambda_i)$.

Théorème II.1

Le nombre minimal de paramètres d'une déformation verselle de la matrice A_0 est égal à

$$\sum_{i=0}^p [n_1(\lambda_i) + 3n_2(\lambda_i) + 5n_3(\lambda_i) + \dots + (2k-1)n_k(\lambda_i)]$$

Les déformations miniverselles peuvent être choisies de diverses façons. En particulier, les trois formes normales décrites dans le théorème suivant sont des déformations verselles d'une matrice réduite à une forme normale de Jordan

Théorème II.2

Soit A une famille dépendant holomorphiquement de paramètres $\alpha \in \mathbb{C}^p$ d'opérateurs linéaires de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n et supposons que pour une valeur α_0 de α la matrice de l'opérateur $A(\alpha_0)$ possède des valeurs propres λ_i et des blocs de Jordan comme ci-dessus et pour tout i

$$n_1(\lambda_i) \geq n_2(\lambda_i) \geq \dots$$

Il existe alors une base de \mathbb{C}^n dépendant holomorphiquement du paramètre α , dans un voisinage de α_0 , et telle que la matrice de l'opérateur $A(\alpha)$ y prenne la forme bloc-diagonale $A_0 + B(\alpha)$, où A_0 est une matrice de Jordan de la matrice de l'opérateur $A(\alpha_0)$, et $B(\alpha) = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_p)$ une matrice bloc-diagonale dont les blocs correspondent aux valeurs propres de la matrice A_0 . Le bloc B_i correspondant à la valeur propre λ_i est une des matrices dans le figure II.1 composées de zéros à l'exception des endroits signalés par les lignes noirs où l'on trouve des fonctions holomorphes de α .

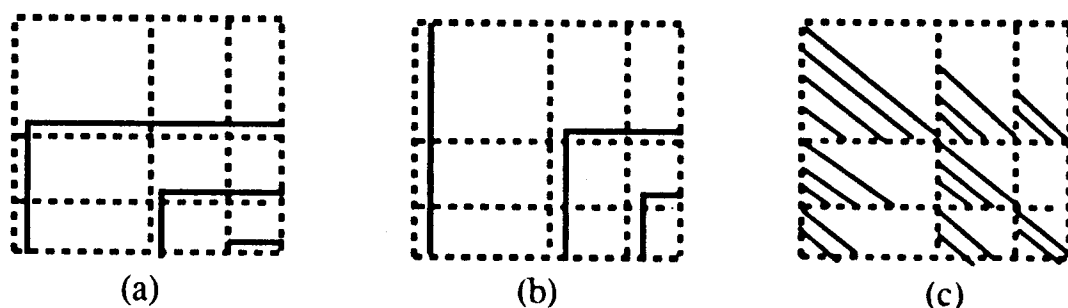


Figure II.1

La figure II.1 représente trois formes normales. Dans les deux premières le nombre d'élément non nuls de B est égal à $n_1(\lambda_i) + 3 n_2(\lambda_i) + 5 n_3(\lambda_i) + \dots$; dans la troisième tous les éléments d'une oblique sont égaux. On obtient les déformations miniverselles de la matrice A_0 si l'on suppose que les éléments repérés des matrices B_i sont des variables indépendantes. Dans les trois cas leur nombre est égal à

$$\sum_i [n_1(\lambda_i) + 3 n_2(\lambda_i) + 5 n_3(\lambda_i) + \dots].$$

II-3. CALCUL DE LA FORME DE ARNOLD DE MATRICES DEPENDANT DE PARAMETRES

Nous appelons la forme (a) dans la figure II.1 la *forme normale de Arnold*. Nous présentons dans ce paragraphe un algorithme pour le calcul de la forme de Arnold et aussi le calcul de la matrice de transformation correspondante.

Nous considérons une matrice $A(x)$ holomorphe d'ordre n dans un voisinage de $x = 0$, où x peut être un vecteur $x = (x_1, \dots, x_p)$, 0 est le vecteur zéro de dimension p . Nous savons, par une transformation de similitude de matrice constante (chapitre I), que $A(0)$ peut être ramenée à sa matrice de Jordan. Donc on peut supposer, dans la suite de ce chapitre, que $A(0)$ est déjà sous forme de Jordan. C'est l'hypothèse suivante :

Hypothèse II.1

$A(0)$ est sous forme canonique de Jordan.

Supposons que les valeurs propres distinctes de $A(0)$ sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, et que les multiplicités sont respectivement n_1, n_2, \dots, n_k avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Donc sous hypothèse II.1, $A_0 = A(0)$ est sous la forme suivante :

$$A_0 = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Chaque

$$J_i = \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{ir_i}) \quad (\text{II.3})$$

où J_{ij} a la structure suivante :

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \beta_i & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \lambda_i & \beta_i \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

où les β_i sont soit 0 soit 1.

Notons

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \text{ et } x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_p^{\mu_p}$$

Supposons que $A(x)$ est de la forme $A_0 + \dots + x^\mu A_\mu + \dots$. On va démontrer que par des transformations de la forme

$$T = I + x^\mu Q_\mu \quad (\text{II.4})$$

$|\mu| = |\mu_1| + |\mu_2| + \dots + |\mu_p| = 1, 2, 3, \dots$, la matrice $A(x)$ sera transformée en une matrice bloc-diagonale dont l'ordre de ses blocs sont respectivement n_1, n_2, \dots, n_p . A_0 étant, comme on l'a supposé, sous forme de Jordan (II.2).

Remarquons que

$$(I + x^\mu Q_\mu)^{-1} = I - x^\mu Q_\mu + x^{2\mu} Q_\mu^2 + \dots$$

Utilisant (II.4), la matrice transformée $T^{-1}A(x)T$ devient

$$T^{-1}A(x)T = A_0 + \dots + x^\mu (A_\mu - Q_\mu A_0 + A_0 Q_\mu) + \dots$$

les derniers points désignent des termes de x^q avec $|q| > |\mu|$. Nous avons donc

$$B_\mu = A_\mu + A_0 Q_\mu - Q_\mu A_0. \tag{II.5}$$

Les matrices B_μ, A_μ , et Q_μ sont sous-divisées en blocs de la même façon que la matrice normalisée A_0 dans (II.1). Après cette partition, nous notons le bloc dans la r -ième ligne et s -ième colonne par B_{rs}, A_{rs} et Q_{rs} respectivement et les éléments de la i -ième ligne et j -ième colonne de ces matrices rectangulaires par b_{ij}, a_{ij} , et q_{ij} respectivement, avec $i = 1, 2, \dots, R$ et $j = 1, 2, \dots, S$. Le but est de choisir ces q_{ij} de façon que les éléments b_{ij} dans B_{rs} soient identiquement nuls, pour les blocs dans la position (s, t) où $\lambda_r(x) \neq \lambda_s(x)$, i.e. pour $r \neq s$.

Pour cela, notons que les matrices J_r dans (II.3) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$J_r = \lambda_r I + E_r,$$

où I est la matrice identité d'ordre n_i convenable et E_r est une matrice de la forme suivante :

$$E_r = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12}^r & & & \\ & 0 & \beta_{23}^r & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & \beta_{n_i-1, n_i}^r \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

où les $\beta_{i,i+1}^r$ sont 0 ou 1. Et la même formule pour J_s ,

$$J_s = \lambda_s I + E_s.$$

D'après (II.5),

$$B_{rs} = A_{rs} + J_r Q_{rs} - Q_{rs} J_s = A_{rs} + (\lambda_r I + E_r) Q_{rs} - Q_{rs}(\lambda_s I + E_s)$$

i.e.

$$b_{ij} = a_{ij} + (\lambda_r - \lambda_s) q_{ij} + \beta_{i,i+1}^r q_{i+1,j} - \beta_{j-1,j}^s q_{i,j-1}$$

où

$$q_{i,0} = 0, i = 1, 2, \dots, R; \text{ et } q_{R+1,j} = 0, j = 1, 2, \dots, S.$$

Les q_{ij} qui sont choisis de manière à annuler les b_{ij} sont donc déterminés par le système

$$(\lambda_r - \lambda_s) q_{ij} - \beta_{i,i+1}^r q_{i+1,j} + \beta_{j-1,j}^s q_{i,j-1} = a_{ij}$$

pour $i = 1, \dots, R; j = 1, \dots, S$.

En résolvant ce système, on obtient

$$q_{R1} = \frac{a_{R1}}{\lambda_s - \lambda_r}$$

et

$$q_{R,j+1} = \frac{a_{R,j+1} - \beta_{j,j+1}^s q_{Rj}}{\lambda_s - \lambda_r}$$

pour $j = 1, 2, \dots, S - 1$.

Donc les éléments dans la R-ième ligne de la matrice Q_{rs} peuvent être construits de gauche à droite. Ensuite procédant de bas en haut, les éléments q_{ij} dans les lignes successives ($R - 1, \dots, 2, 1$) peuvent être construits. En particulier si les éléments de Q_{rs} dans la $(i+1)$ -ième ligne sont connus, ($i = 2, \dots, R-1$), alors les q_{ij} dans la i -ième ligne sont donnés successivement de gauche à droite par

$$q_{i1} = \frac{a_{i1} + \beta_{i,i+1}^r q_{i+1,i}}{\lambda_s - \lambda_r}$$

et

$$q_{i,j+1} = \frac{a_{i,j+1} - \beta_{j,j+1}^s q_{i,j} + \beta_{i,i+1}^r q_{i+1,j+1}}{\lambda_s - \lambda_r}$$

pour $j = 1, 2, \dots, S - 1$.

Remarquons que ces opérations ne changent pas les matrices A_v ($|v| \leq |\mu|$ et $v \neq \mu$). Ayant choisi les q_{ij} de cette façon, tous les blocs B_{rs} qui correspondent aux valeurs propres distinctes $\lambda_r \neq \lambda_s$ sont remplis par des zéros. Ceci est construit en utilisant d'abord des transformations (III.6) pour $|\mu| = 1$, et ensuite pour $|\mu| = 2, 3, \dots$ et ainsi jusqu'à l'infini. Pour les blocs $Q_{rs} = 0$ où $\lambda_r = \lambda_s$, nous choisissons $Q_{rs} = 0$. Ainsi une transformation formelle non singulière

$$T = \{(I + x_1 Q_1)(I + x_2 Q_2) \dots (I + x_\mu Q_\mu) \dots\} \quad (II.6)$$

est obtenue, qui transforme la matrice $A(x)$ en

$$B(x) = T^{-1}A(x)T = \begin{bmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & G_m \end{bmatrix} \quad (II.7)$$

Dans (II.7) les matrices G_i ont pour ordre n_i respectivement, $i = 1, 2, \dots, m$. Chaque matrice $G_i(0)$ est sous la forme canonique (II.2) avec une unique valeur propre λ_i .

Remarque

En pratique on peut déterminer (II.6) jusqu'à l'ordre M désiré,

$$T = (I + x_1 Q_1)(I + x_2 Q_2) \dots (I + x_M Q_M), \quad |\mu| = M.$$

Cela veut dire que les G_i dans la matrice $B(x)$ peuvent être déterminés à l'ordre M .

Donc on peut supposer que $A(x)$ satisfasse l'hypothèse suivante :

Hypothèse II.2

$A(0)$ admet une unique valeur propre.

Soient $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ les degrés des diviseurs élémentaires de $A(0)$, et supposons que les blocs de Jordan correspondants soient rangés par ordre de tailles décroissantes, i.e. $A_0 = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)$ où J_i ($1 \leq i \leq p$) est de la forme (II.1) d'ordre n_i . Ces blocs génèrent une partition de $A(0)$, $A^{mk}(0)$, $m, k = 1, 2, \dots, p$. On notera désormais, avec exposant, la partition correspondante d'une matrice d'ordre n quelconque.

Nous introduisons un ensemble de matrices distinctes d'ordre n , Γ_j , $j = 1, 2, \dots, d$, (qui sont appelées les matrices canoniques de Arnold), définies de la manière suivante :

Chaque Γ_j a un coefficient ayant la valeur 1, tous les autres étant nuls. Si Γ_j^{mk} est le bloc (correspond à la partition défini ci-dessus) de Γ_j qui est non nul, alors les coefficients non nuls sont dans la dernière ligne si $m \leq k$, dans la première colonne si $m > k$. On spécifie que l'ordre de cet ensemble de matrices est tel que Γ_1 a son coefficient non nul à la première position de la dernière ligne de Γ_1^{11} et que la numérotation procède de gauche à droite et de haut en bas. On peut vérifier directement que le nombre d est donné par la formule suivante :

$$d = n_1 + 3 n_2 + 5 n_3 + \dots$$

ce qui correspond au théorème II.2.

La figure suivante explique clairement la partition de notre matrice :

A_{11}	A_{12}	A_{13}
* * ... * *	* * ... * *	* ... *
* * A_{21}	A_{22}	A_{23}
*	* * ... * *	* ... *
* A_{31}	* A_{32}	A_{33}
*	*	* ... *

où les * représentent les endroits où les éléments de Γ_j peuvent être non nuls.

Exemple

Considérons une matrice $A_0 = A(0)$ d'ordre 5 qui a une seule valeur propre λ avec $n_1 = 3, n_2 = 2$. Alors la forme normale de Arnold de déformations de A_0 admet la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 & \lambda+a_9 \end{bmatrix}$$

où les a_j représentent des fonctions holomorphes qui s'annulent en $x = 0$. La partition de la matrice A_0 est : A^{11} est d'ordre 3, A^{22} d'ordre 2, A^{12} est une matrice 3×2 et A^{21} une matrice 2×3 . Donc les Γ_j ($j = 1, 2, \dots, 9$) sont des matrices nulles sauf un seul coefficient qui est à la place des a_j pour chaque Γ_j .

Nous pouvons écrire le théorème II.2 sous la forme suivante :

Théorème II.3

A chaque matrice $A(x)$ d'ordre n , holomorphe en $x = 0$ et satisfaisant les Hypothèses II.1 et II.2, correspond d fonctions scalaires $\rho_j(x), j = 1, 2, \dots, d$, holomorphes et égales à zéro en $x = 0$, telles que $A(x)$ soit h -semblable à

$$A(0) + \sum_{j=1}^d \rho_j(x) \Gamma_j$$

dans un voisinage de $x = 0$.

Dans la suite, nous proposons un algorithme pour le calcul de la forme de Arnold, i.e. le calcul des fonctions scalaires $\rho_j(x)$. L'algorithme présenté ici peut être considéré comme une démonstration du théorème précédent. Nous supposerons que les Hypothèses II.1 et II.2 sont satisfaites.

II-3.1. La procédure "pré-opérations"

Tous d'abord on présente la procédure "pré_opérations(A, k)", ayant comme paramètres la matrice $A(x)$ et un entier k . Nous rappelons que les opérations P_{ij} , M_i , L_{ij} et C_{ij} sont des h-transformations élémentaires définies dans le paragraphe I.2.

pré_opérations (A, k) :

Entrées : $A(x)$ une matrice holomorphe dans un voisinage du point $x=(0, \dots, 0)$ d'ordre n et un entier k .

Sorties : Une matrice de la forme (II.8)

début

$j \leftarrow k,$

tant que $j < n$ et $A_{j,j+1}(0) \neq 0$ *faire*

opération $M_{j+1}(A_{j,j+1}),$ (ainsi $A_{j,j+1} = 1$)

pour $i = 1$ à n *faire*

si $i = j$ *alors* $C_{j,j+1}(A_{i,i}(x) - A_{i,i}(0)),$

sinon si $i \neq j + 1$ *alors* $C_{i,j+1}(A_{i,j})$

$j \leftarrow j+1,$

$d \leftarrow j$

fin

L'effet de cette procédure pour une matrice A et $k = 1$ est le suivant : Si $A_{12}(0) = 0$, cette procédure retourne un entier $d = 1$ et nous savons que les éléments de la première ligne et de la première colonne de la matrice A sont des paramètres dans la forme de Arnold. Si $A_{12} \neq 0$, on multiplie la deuxième ligne par A_{12} et ensuite la deuxième colonne par $1/A_{12}$ pour trouver une nouvelle matrice, que nous noterons encore par A , telle que $A_{12} = 1$. Puisque $A_{11} = \lambda + a(x)$, par une opération $C_{21}(a(x))$, on obtient une nouvelle matrice A telle que $A_{11} = \lambda$. Pour annuler les éléments A_{1j} ($j = 3, \dots, n$), nous effectuons les opérations $C_{2j}(A_{1j})$. En continuant ces opérations nous obtenons à la fin de cette procédure un entier et une matrice A_1 ayant la forme (II.8) où $\beta(0) = 0$, C et B sont des matrices appartenant à $H_{nn}(\Omega)$, les $*$ représentent des fonctions holomorphes qui doivent satisfaire la condition du théorème suivant.

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{|cc|ccccc|} \hline \lambda & 1 & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & \\ * & * & \lambda + * & \beta & * & \dots & * * * \\ \hline * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ * & & & & & & \\ \hline \end{array} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad (II.8)$$

Théorème II.4

$A_1(0) = A(0)$. Donc $B(0)$ est de même structure que $A(0)$ et les * dans A_1 s'annulent en $x = 0$.

Démonstration

Il est facile de voir que les opérations $M_i(A_{j,j+1})$, qui consistent en la multiplication d'une ligne et d'une colonne de $A(x)$ par une fonction holomorphe, ne changent pas la forme de $A(0)$.

Les opérations $C_{i,j+1}(A_{i,j})$, qui consistent à ajouter à la colonne i une autre colonne j multipliée par une fonction $a(x)$ et ajouter à la ligne j , la ligne i multipliée par $-a(x)$, ne changent pas les valeurs en $x = 0$ des éléments de la matrice obtenue par rapport à la matrice $A(x)$ lorsque $a(0) = 0$. Les fonctions $a(x)$ dans nos opérations sont bien nulles en $x = 0$.

Exemple

Pour la matrice $A(x)$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} x+1 & x+1 & 0 & x & 0 \\ x & x+1 & 1 & 0 & x \\ 0 & x & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x+1 & 1 \\ 0 & x & x & x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué la procédure "pré_opérations", on obtient la matrice A_1 suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2x^5+4x^4+5x^3+x^2}{x^2+x+1} & \frac{4x^2+2x}{x^2+x+1} & \frac{3x^3+5x^2+3x+1}{x^2+x+1} & x^4+x^3+x & -\frac{x^5+4x^4+4x^3}{x^2+x+1} \\ \frac{-x^2}{x^2+x+1} & \frac{-2x^2}{x^2+x+1} & \frac{-x}{x^2+x+1} & x+1 & -\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x+1} \\ -\frac{x^4+2x^3+2x^2}{x^3+2x^2+2x+1} & -\frac{x^3+x^2-x}{x^3+2x^2+2x+1} & \frac{x}{x^2+x+1} & \frac{x^3}{x+1} & -\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x+1} \end{bmatrix}$$

où $\lambda = 1$ est la valeur propre de la matrice A et $A_{33} = \lambda + a(x)$ avec $a(0) = 0$,

$$C(x) = \begin{bmatrix} \frac{-2x^2}{x^2+x+1} & \frac{x}{x^2+x+1} \\ -\frac{x^3+x^2-x}{x^3+2x^2+2x+1} & \frac{x}{x^2+x+1} \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} x+1 & -\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x+1} \\ \frac{x^3}{x+1} & -\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x+1} \end{bmatrix}$$

II-3.2. La procédure obtenir_un_bloc

La procédure suivante "obtenir_un_bloc" effectue des h-transformations élémentaires pour annuler la matrice C dans la matrice $A_1(x)$ obtenue par "pré_opérations". On notera aussi cette matrice A_1 par A.

obtenir_un_bloc :

Entrées : Une matrice holomorphe de la forme (II.8), un entier k et l'entier d calculé par la dernière procédure;

Sortie : une matrice de la forme (II.9).

début

si $d < n$ alors

pour $i = d$ à $k+2$ faire

$L_{j,i-1}(-A_{j,i})$ ($j = d+1, \dots, n$),

fin

Comme dans le théorème précédent, on voit que l'effet de la procédure "obtenir_un_bloc" ne change pas la forme de $A(0)$, et la matrice $A(x)$ est transformée en une matrice de la forme (II.9) (avec $d = 3$) où les * représentent des fonctions holomorphes qui sont nulles en $x = 0$. La matrice $B(x)$ a la même structure que dans le théorème précédent.

λ	1				
	λ	1			
*	*	$\lambda + *$	*	*	*
*					
*					
*	0			B	
*					

(II.9)

On peut continuer les mêmes opérations avec la matrice précédente et $k = d$, i.e. sur la matrice $B(x)$. En itérant ces opérations jusqu'à $k = n-1$, on obtient la forme de Arnold de la matrice $A(x)$.

Donc nous avons démontré la convergence de l'algorithme que l'on a présenté au début de ce chapitre.

Pour obtenir la matrice de la transformation, on remplace la matrice A par la matrice $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ où I est la matrice identité. L'algorithme présenté précédemment retourne la forme de Arnold F de A et la matrice de passage P sous la forme $\begin{bmatrix} F \\ P \end{bmatrix}$.

Exemple

Pour la matrice de l'exemple précédent, on trouve la matrice suivante qui est la forme de Arnold de $A(x)$:

$$\text{Arnold}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha_7 & 0 & 0 & \alpha_8 & \alpha_9 \end{bmatrix}$$

où $\alpha_3 = \frac{3x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$, $\alpha_9 = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ et $\alpha_i(0) = 0$ pour $i \neq 3$ et 9 .

II-4. CALCUL DE LA FORME DE ARNOLD-WASOW DE SYSTEMES DIFFERENTIELS

Nous considérons maintenant un système différentiel dépendant d'un paramètre ε de la forme (1)

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r \right) y \quad (\text{II.10})$$

qui de plus satisfait les conditions suivantes :

Hypothèse II.3.

La matrice $A_0(x)$ dans (II.10) est nilpotente et est sous forme de Jordan pour x dans un voisinage de $x = 0$, i.e.

$$A_0(x) = \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_R)$$

où les E_i ($i \neq 1$) sont des matrices de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

et E_1 est soit une matrice nulle soit une matrice de la forme des E_i .

La simplification de ce système, que nous considérerons dans le chapitre III, dépend de la forme de Arnold de ce système introduite par Wasow [68]. C'est le théorème et l'hypothèse suivants.

Théorème II.5

Si les matrices A_r sont holomorphes dans un voisinage du point $x = 0$ et si A_0 satisfait l'hypothèse II.3, alors le système

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r \right) y \quad (\text{II.11})$$

peut être transformé en

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = \left\{ A_0 + \sum_{j=1}^d \left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_{jr} \varepsilon^r \right) \Gamma_j \right\} z \quad (\text{II.12})$$

par un changement formel de variables

$$y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r \varepsilon^r \right) z \quad (\text{II.13})$$

dans lequel $P_0 = I$, les matrices P_r , et les fonctions scalaires ρ_{jr} étant holomorphes dans un voisinage du point $x = 0$.

Hypothèse II.4

Tous les coefficients A_r , $r > 0$ dans le système (II.10) sont de la forme :

$$A_r = \sum_{j=1}^d \rho_{jr} \Gamma_j, r > 0. \quad (\text{II.14})$$

Définition

Un système dont les coefficients satisfont l'Hypothèse II.3 et II.4 sera dit être sous forme de Arnold-Wasow. La figure II.1(a) explicite la forme des A_r .

Nous considérons dans la suite le calcul de la forme de Arnold (II.12) d'un système (II.10). L'idée de l'algorithme est de modifier les opérations des procédures présentées en haut sur la matrice $\varepsilon^h \frac{d}{dx} I - A(x, \varepsilon)$ afin de trouver la forme de Arnold de la matrice $A(x, \varepsilon)$ définie dans les paragraphes précédents, où $\frac{d}{dx}$ est la dérivée par rapport à x et I est la matrice identité.

Nous commençons par modifier la définition des opérations élémentaires de type holomorphiquement semblable en ce cas particulier sur la matrice $A(x, \varepsilon)$:

Définitions

Une transformation d'équivalence pour les systèmes différentiels de type (II.10) est une des transformations suivantes :

$M_i(a(x, \epsilon))$ (pour des fonctions $a(x, \epsilon)$ satisfaisant $a(0, 0) \neq 0$) :

multiplier la i -ième ligne par a , et la i -ième colonne par $1/a$, et puis ajouter au coefficient en position (i, i) la fonction $-\frac{\epsilon^h}{a(x, \epsilon)} \frac{\partial a(x, \epsilon)}{\partial x}$.

$L_{i,j}(a(x, \epsilon))$:

remplacer la i -ième ligne par la somme de la i -ième ligne et la j -ième multipliée par $a(x)$, la j -ième colonne par la différence de la j -ième colonne et la i -ième multipliée par $a(x, \epsilon)$, et puis ajouter au coefficient en position (i, j) la fonction $\epsilon^h \frac{\partial a(x, \epsilon)}{\partial x}$.

$C_{i,j}(a(x, \epsilon))$:

remplacer la i -ième colonne par la somme de la i -ième colonne et la j -ième colonne multipliée par $a(x)$, la j -ième ligne par la différence de la j -ième ligne et la i -ième multipliée par $a(x, \epsilon)$, et puis ajouter au coefficient en position (j, i) la fonction $-\epsilon^h \frac{\partial a(x, \epsilon)}{\partial x}$.

Etant donné un système différentiel (II.10) qui satisfait l'hypothèse II.3, les procédures "pré_opération" et "obtenir_un_bloc" sont définies en utilisant les opérations élémentaires M_i , $L_{i,j}$, $C_{i,j}$ définies ci-dessus. Le critère : $A_{j,j+1}(0) \neq 0$ dans la procédure pré_opération est maintenant remplacé par $A_{j,j+1}(0,0) \neq 0$. Nous pouvons démontrer de la même manière que dans les paragraphes précédents le théorème suivant :

Théorème II.6

Etant donné un système différentiel (II.10), l'itération des procédures "pré_opérations" et "obtenir_un_bloc" jusqu'à $k = n$, n étant l'ordre du système, produit un système (II.12) qui est sous forme de Arnold-Wasow.

Chapitre III

Résolution Formelle d'un Système d'Equations Différentielles Ordinaires Linéaires homogènes d'Ordre 1 Dépendant d'un Paramètre

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ce chapitre est consacré à l'étude de la méthode de Turrittin [63] et de Wasow [67][68] pour la résolution formelle d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires homogènes d'ordre 1 de la forme (1). Nous nous sommes intéressé à l'aspect algorithmique de cette méthode en l'adaptant (en vue de sa programmation dans un système de calcul formel) pour calculer un système fondamental de solutions formelles.

Les solutions qu'on peut trouver en pratique sont des solutions approchées, i.e. des séries tronquées jusqu'à un ordre précisé. Nous supposons dans ce chapitre que les solutions désirées sont d'ordre m_1 en x et d'ordre m_2 en ε dans les séries tronquées. Avant de présenter l'algorithme complet, nous décrivons les différents cas qui peuvent se présenter et qui nécessitent des études particulières.

III-1. Cas de base :

III-1.1. cas $h = 0$. III-1.2. cas $n = 1$.

III-2. Bloc diagonalisation formelle : si $A_0(x)$ a des valeurs propres distinctes, un processus de bloc-diagonalisation est présenté dans ce paragraphe. Le problème se ramène au cas suivant avec plusieurs systèmes indépendants d'ordres plus petits que celui du système original.

III-3. Cas où $A_0(x)$ possède une unique valeur propre.

Nous transformons le système sous forme de Arnold-Wasow par l'algorithme présenté au paragraphe II-4 du chapitre II. Ensuite nous effectuons une transformation de la forme (v). On trouve, après une ou plusieurs transformations de ce type, un nouveau système dont :

◊ soit la matrice de tête a des valeurs propres distinctes, ce qui nous ramène à III-2, l'ordre du système étant diminué.

◊ soit le h correspondant est diminué.

Les procédures qui calculeront la solution du système dans le cas III-1.1, III-1.2, III-3, III-2 respectivement, seront appelées sous-cas-1, sous-cas-2, bloc-diag, shearing. L'algorithme que nous allons développer dans ce chapitre est le suivant :

L'Algorithme Turrittin-Wasow :

Entrées Le système différentiel d'ordre n :

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y.$$

où $A(x, \varepsilon)$ est une matrice de polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} de degré m_1 en x et degré m_2 en ε de la forme

$$\begin{aligned} A(x, \varepsilon) &= A_0(x) + A_1(x) \varepsilon + \dots + A_{m_2} \varepsilon^{m_2} \\ A_i(x) &= A_{i0} + A_{i1} x + \dots + A_{im_1} x^{m_1}, \quad i=1, \dots, m_2 \end{aligned}$$

où les matrices A_{ij} sont des matrices constantes. h est un nombre positif. (Y, Q) un couple de matrices identité.

Sorties Un couple de matrices $(Y(x, \varepsilon), Q(x, \varepsilon))$. Un système de solutions fondamentales approchées est donné par $Y(x, \varepsilon) e^{Q(x, \varepsilon)}$.

L'algorithme se trouve à la page suivante pour des raisons de présentation.

Résolution $(A(x, \epsilon), i, j, h)$:

$\{1 \leq i, j \leq n$ entiers positifs; $A(x, \epsilon)$ étant bloc diagonale, cette fonction traite le système correspondant au bloc de la i -ième ligne à la j -ième ligne }

début

si $h = 0$ *alors* sous-cas-1 *sinon si* $j-i = 0$ *alors* sous-cas-2;

sinon si $(A(x, 0), i, j)$ a plusieurs valeurs propres *alors*

$k = [k_1, \dots, k_p] \leftarrow \text{bloc-diag}(A(x, \epsilon), i, j);$

$k_0 \leftarrow i; k_{p+1} \leftarrow j;$

pour $r = 0$ *jusqu'à* p *faire*

$E \leftarrow E \cup \{(k_r, k_{r+1})\}$

$\{$ la liste k satisfait les condition $k_r < k_{r+1}$ $(1 \leq r < p)$ $\}$

sinon

Arnold($A(x, \epsilon)$); { chapitre II }

shearing($A(x, \epsilon), i, j, h$);

Jordan($A(x, 0)$); { chapitre I }

$k = [k_1] \leftarrow [j];$

fin si;

$k_0 \leftarrow i;$

pour $r = 1$ *jusqu'à* p *faire*

résolution($A(x, \epsilon), k_{r-1}, k_r, h$);

si $k_p < j$ *alors* résolution($A(x, \epsilon), k_p, j, h$);

fin si;

fin Résolution;

Solution $(A(x, \epsilon), n, h)$:

début

$A(x, 0) \leftarrow \text{Frobenius}(A(x, 0));$ { chapitre II }

vérification_hypothèse(II.1); { chapitre II }

$A(x, 0) \leftarrow \text{Jordan}(A(x, 0));$ { chapitre II }

$E \leftarrow \Phi$ {l'ensemble vide}

Résolution($A, 1, n, h$)

fin Solution;

III-1. CAS DE BASE :

III-1.1. Cas $h = 0$:

Le système (1) s'écrit

$$\frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y$$

i.e.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{m_2} A_r(x) \varepsilon^r \right) y \quad (\text{III.1})$$

Nous cherchons un système fondamental de solutions approchées sous la forme suivante :

$$Y = \sum_{j=0}^{m_2} \varepsilon^j Y_j(x) \quad (\text{III.2})$$

Pour trouver les $Y_j(x)$, ($j = 0, 1, \dots, m_2$) qui sont des polynômes de degré m_1 en x dont les coefficients sont des matrices constantes à coefficients dans \mathbb{Q} , on substitue la série (III.2) dans (III.1) et compare successivement les coefficients des diverses puissances de ε . On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{dY_0}{dx} &= A_0(x) Y_0 \\ \frac{dY_1}{dx} &= A_0(x) Y_1 + A_1(x) Y_0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{dY_{m_2}}{dx} = A_0(x) Y_{m_2} + A_1(x) Y_{m_2-1} + \dots + A_{m_2}(x) Y_0$$

les $Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x) \dots, Y_{m_2}(x)$ sont calculés successivement par résolution de ces systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires de la manière suivante :

Pour $Y_0(x)$, on le remplace dans la première équation de (III.3) par le polynôme suivant

$$Y_0(x) = y_{00} + y_{01}x + \dots + y_{0m_1} x^{m_1}$$

où les y_{0i} sont des matrices constantes à coefficients dans \mathbb{Q} , $y_{00} = I$ étant la condition initiale (I est la matrice identité d'ordre n). Si $A_0(x)$ est de la forme

$$A_0(x) = A_{00} + A_{01}x + \dots + A_{0m_1}x^{m_1},$$

alors la première équation de (III.3) s'écrit

$$\begin{aligned} y_{01} + 2y_{02}x + \dots + m_1 y_{0m_1} x^{m_1-1} \\ = \sum_{j=0}^{2m_1} \left(\sum_{i=0}^k A_{0i} y_{0(k-i)} \right) x^k. \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$y_{0i} = \frac{1}{i} \sum_{i=0}^k A_{0i} y_{0(k-i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m_1.$$

Nous allons calculer les $Y_i(x)$ successivement grâce à la i -ième équation de (III.3). Si on a calculé tous les Y_i séries tronquées jusqu'à l'ordre m_1 pour $i < m$, alors :

$$Y_m(x) = Y_0(x) \int_0^x Y_0^{-1}(t) [A_1(t)Y_{m-1}(t) + \dots + A_m(t)Y_0(t)] dt. \quad (\text{III.4})$$

Puisque $Y_0(0) = I$, la matrice $Y_0(x)$ est inversible dans un voisinage de $x = 0$. Pour calculer effectivement $Y_m(x)$ jusqu'au terme de degré m_1 , il faut calculer $Y_0^{-1}(t)$ jusqu'au terme de degré m_1 . On détermine pour cela une matrice

$$B(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_{m_1} x^{m_1}$$

telle que $B(x) Y_0(x) = I + x^{m_1}N(x)$ où $N(x)$ est une matrice holomorphe au point $x = 0$. En développant ce produit matriciel, nous obtenons $B_0 = I$. Les autres B_i ($i \geq 1$) sont déterminées par les formules suivantes :

$$B_i = - \sum_{j=0}^{i-1} B_j Y_0(i-j), \quad i = 1, \dots, m_1. \quad (\text{III.5})$$

On remplace ensuite les matrices $Y_0^{-1}(t)$, $A_i(t)$ et $Y_i(t)$ ($i \leq m$) qui sont des séries tronquées d'ordre m_1 dans (III.4). En faisant des produits de matrices polynomiales et en intégrant ces polynômes jusqu'au terme de degré m_1 , nous obtenons $Y_m(x)$ jusqu'au terme désiré.

Donc la matrice carrée $Y = \sum_{i=0}^{m_2} \varepsilon^i Y_i(x)$ représente n solutions formelles indépendantes de (III.1) tronquées à l'ordre m_1 et m_2 en x et ε respectivement, pour une matrice initiale $Y_0(0) = I$.

Nous pouvons écrire la procédure *sous-cas-1* après avoir défini la fonction *inverse* par la formule (III.5) pour calculer l'inverse d'une matrice holomorphe tronquée.

sous-cas-1 ($A(x, \varepsilon), n$) :

début

$Y_0 \leftarrow 0; Y \leftarrow 0$ {0 matrice nulle d'ordre n };

$y_{00} \leftarrow I$;

pour $i = 1$ *jusqu'à* m_1 *faire*

$$y_{0i} \leftarrow \frac{1}{i} \sum_{j=0}^k A_{0j} y_{0(k-j)}$$

$$Y_0 \leftarrow Y_0 + \frac{1}{i} \sum_{i=0}^k A_{0i} y_{0(k-i)} x^i;$$

$B(t) \leftarrow \text{inverse}(Y_0(t))$;

pour $i = 1$ *jusqu'à* m_2 *faire*

$$Y_i(x) \leftarrow Y_0(x) \int_0^x B(t) [A_1(t) Y_{i-1}(t) + \dots + A_i(t) Y_0(t)] dt.$$

$Y \leftarrow Y_i(x) \varepsilon^i$;

fin;

III-1.2. Cas $n = 1$:

Dans ce cas, l'équation (1) se réduit à une seule équation scalaire

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \sum_{i=0}^{m_2} A_i(x) \varepsilon^i y \quad (\text{III.1'})$$

On pose $y = z \exp(\int_0^x \varepsilon^{-h} \rho(\tau, \varepsilon) d\tau)$ dans l'équation (III.1') avec

$$\rho(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{h-1} \varepsilon^i A_i(x).$$

Cela veut dire qu'on remplace la matrice Q par $\int_0^x \varepsilon^{-h} \rho(t, \varepsilon) dt Q$, i.e.

$$Q \leftarrow Q \sum_{i=0}^{h-1} \varepsilon^{i-h} \int_0^x A_i(t) dt.$$

Alors on a

$$\varepsilon^h \left[\frac{dz}{dx} + \varepsilon^{-h} \rho(x, \varepsilon) z \right] = A(x, \varepsilon) z.$$

où

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = [\varepsilon^h A_h + \varepsilon^{h+1} A_{h+1} + \dots] z.$$

En divisant par ε^h , (III.1') est réduit à une équation du type (III.1) et le problème est ramené au cas III-1.1. On peut décrire maintenant la procédure *sous-cas-2* :

sous-cas-2 ($A(x, \varepsilon)$, 1, h) :

début

$$Q \leftarrow Q * \sum_{i=0}^{h-1} \varepsilon^{i-h} \int_0^x A_i(t) dt;$$

pour $i = 1$ **jusqu'à** m_2 **faire**

si $i < m_2 - h$ **alors** $A_i(x) \leftarrow A_{i+h}(x)$;

sinon $A_i(x) \leftarrow 0$;

sous-cas-1($A(x, \varepsilon)$, n);

fin;

III-2. BLOC DIAGONALISATION FORMELLE

La simplification formelle du système (1) commence par la réduction de la matrice $A_0(x)$ à sa forme de Jordan par une transformation $y = T(x) z$ où $T(x)$ est une matrice de fonctions holomorphes d'ordre n , inversible (chapitre II) dans un voisinage Ω de l'origine.

Ceci conduit au nouveau système $\varepsilon^h z' = B(x, \varepsilon) z$ avec $B = T^{-1}AT - \varepsilon^h T^{-1}T'$.

Dans le chapitre II, on a proposé un algorithme pour effectuer cette réduction. Cet algorithme n'est valable que sous l'hypothèse II.1. Cette hypothèse implique que la matrice de transformation $T(x)$ est holomorphe ainsi que son inverse. Donc dans ce chapitre nous supposons que la matrice $A_0(x)$ est sous forme de Jordan et l'hypothèse II.1 est satisfaite, i.e. A_0 est sous la forme suivante :

$$A_0 = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p), \quad (\text{III.6})$$

où J_i ($i = 1, \dots, p$) est un bloc de Jordan d'ordre n_i , possédant une unique valeur propre, J_i et J_j ($i \neq j$) n'ont pas de valeurs propres communes.

Nous rappelons que le test algorithmique de la condition (ii) de l'hypothèse II.1 est fait par l'algorithme *vérification_hypothèse* décrit dans le chapitre II, i.e. tester si les multiplicités des valeurs propres d'une matrice dépendant holomorphiquement d'un paramètre sont constantes ou pas.

L'étape suivante de la simplification formelle du système (1) est une transformation formelle qui réduit toutes les matrices $A_1(x), A_2(x), \dots, A_{m_2}$ en des matrices bloc-diagonales. Les blocs ont pour ordre respectivement n_i . La technique pour accomplir ceci a été utilisée pour la première fois par Sibuya [60] et ensuite développée par Turriffin [63] et Wasow [68]. On présente le théorème suivant dont la forme est de Wasow [68].

Théorème III.1

Soit $\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r$ une série formelle dans laquelle les A_r sont des matrices d'ordre n d'une variable complexe x , holomorphes dans un domaine Ω de

C. Si l'hypothèse II.1 est satisfaite et $A_0(x)$ est sous forme (III.6), alors il existe une série formelle $\sum_{r=0}^{\infty} P_r \varepsilon^r$ telle que le changement de variables

$$y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r \varepsilon^r \right) z$$

transforme le système

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r \right) y$$

en le nouveau système

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r \varepsilon^r \right) y$$

ayant les propriétés suivantes :

- (i) les P_r et B_r sont holomorphes dans Ω .
- (ii) $P_0(x) = I$ pour tous les x appartenant à Ω .
- (iii) les B_r ($r \geq 1$) sont bloc diagonales. Les ordres de ces blocs sont les multiplicités des valeurs propres de A_0 dans Ω .
- (iv) $B_0 = A_0 = J$.

Démonstration

Considérons l'équation (1) et supposons que les valeurs propres distinctes de la matrice $A_0(x)$ soient respectivement $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_p(x)$; et que les multiplicités soient respectivement n_1, n_2, \dots, n_p avec $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$. On va démontrer que par des transformations de la forme

$$Y = (I + \varepsilon^k Q_k) z, \tag{III.7}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$, le système (1) d'ordre n peut être décomposé en p systèmes disjoints d'ordre n_1, n_2, \dots, n_p , chacun inférieur à n , A_0 étant, comme on l'a supposé, sous forme de Jordan (III.6).

Utilisant (III.7), (1) devient

$$\varepsilon^h \left[\varepsilon^k \frac{dQ_k}{dx} z + (I + \varepsilon^k Q_k) \frac{dz}{dx} \right] = (A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(I + \varepsilon^k Q_k) z$$

ou

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = (I + \varepsilon^k Q_k)^{-1} \left[(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(I + \varepsilon^k Q_k) - \varepsilon^{h+k} \frac{dQ_k}{dx} \right] z$$

Remarquons que

$$(I + \varepsilon^k Q_k)^{-1} = I - \varepsilon^k Q_k + \varepsilon^{2k} Q_k^2 + \dots$$

Les points désignent les termes de degrés plus grands que $2k$ par rapport à ε . Nous avons :

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = \{ A_0 + \varepsilon A_1 + \dots + \varepsilon^{k-1} A_{k-1} + \varepsilon^k B_k + \dots \} z$$

où

$$B_k = A_k + A_0 Q_k - Q_k A_0. \quad (III.8)$$

Cette équation est de la même forme que (II.5). La méthode utilisée au chapitre II peut être appliquée pour bloc-diagonaliser la matrice B_k . Ainsi une transformation formelle non singulière

$$y = \{(I + \varepsilon Q_1)(I + \varepsilon^2 Q_2)(I + \varepsilon^3 Q_3) \dots\} z \quad (III.9)$$

est obtenue en utilisant (III.7) pour $k = 1, 2, \dots$, qui transforme (1) en

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = B(x, \varepsilon) z$$

où

$$B = \begin{bmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & G_p \end{bmatrix} \quad (III.10)$$

Dans (III.10) les matrices G_i ont pour ordre n_i respectivement, $i = 1, 2, \dots, p$. Donc ce système est décomposé en p systèmes séparés

$$\varepsilon^h \frac{dz_i}{dx} = G_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (III.11)$$

chacun d'ordre inférieur à n . Quand n_i vecteurs solutions indépendantes sont trouvées pour chaque système (III.11), les solutions pour chaque système sont assemblées en une matrice carrée Z_i . Alors

$$Z = \text{diag}(Z_1, Z_2, \dots, Z_K)$$

représente n solutions indépendantes du système (III.10) et par une transformation non singulière du type (III.8) on obtient n solutions indépendantes du système (1).

Remarque

Donc en pratique, nous pouvons construire une transformation de la forme

$$Y = \{(I + \varepsilon Q_1)(I + \varepsilon^2 Q_2) \dots (I + \varepsilon^{m_2} Q_{m_2})\} z.$$

Nous remarquons aussi que les coefficients du système (1) et les Q_i ainsi que le système obtenu peuvent être des fonctions rationnelles en x .

Nous décrivons la procédure *bloc-diag* qui réduit un système en plusieurs systèmes indépendant.

bloc-diag($A(x, \varepsilon)$, i , j , h) :

{ Cette procédure, comme la procédure *résolution*($A(x, \varepsilon)$, i , j , h), traite le système correspondant au bloc de la i -ième ligne à la j -ième ligne de la matrice bloc diagonale $A(x, \varepsilon)$ }

début

pour $r = 1$ *jusqu'à* m_2 *faire*

former $Q_r(x)$ {par l'algorithme présenté ci-dessus};

$Y \leftarrow Y*(I + \varepsilon^r Q_r(x))$;

$A_r(x) \leftarrow A_r(x) + A_0(x)Q_r(x) - Q_r(x) A_0(x)$;

$k_0 \leftarrow 0$;

pour $i = 1$ *jusqu'à* $p-1$ *faire*

$k_i \leftarrow k_{i-1} + n_i$;

retourner [k_1, \dots, k_{p-1}]; {Les numéros des lignes de nouveaux blocs}

fin;

Exemple

Considérons un système d'ordre 4

$$\varepsilon^2 \frac{dy}{dx} = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + \varepsilon^2 A_2(x))y$$

avec

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} x+2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-3 & -1 \\ 1 & x^2+2x+1 & 2 & 2 \\ x-\frac{1}{2} & -x^2-x+2 & x-\frac{3}{2} & x-\frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & x^2+1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & -x-2 & 0 \\ -x & 0 & x+1 & 0 \end{bmatrix},$$

pour $m_1 = 4$ et $m_2 = 2$.

Un changement de variable $y = (T_0(x) + \varepsilon T_1(x) + \varepsilon^2 T_2(x)) u$ est obtenu, avec

$$T_0(x) = I,$$

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{x+1} & \frac{2x+1}{x^2+2x+1} & \frac{1}{x+1} \\ \frac{1}{x^2+2x+1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x+1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2x-1}{2x+2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2x^2+3x+4}{(x+1)^2} & \frac{2x^3-3x-7}{2(x+1)^3} & \frac{2x^3+2x^2-x+3}{2(x+1)^3} \\ \frac{7x-1}{2(x+1)^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4x+1}{2(x+1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4x^4+2x^3+18x^2+19x-9}{4(x+1)^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce changement de variable transforme le système en un nouveau système

$$\varepsilon^2 \frac{du}{dx} = (B_0(x) + \varepsilon B_1(x) + \varepsilon^2 B_2(x))u$$

avec $B_0(x) = A_0(x)$ et

$$B_1(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 & -1 \\ 0 & x^2+2x+1 & 2 & 2 \\ 0 & -x^2-x+2 & \frac{2x-3}{2} & \frac{2x-5}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x^2+5x+1}{2(x+1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{x}{x+1} & -\frac{x^3+4x^2+7x+3}{(x+1)^2} & -\frac{1}{x+1} \\ 0 & -\frac{2x^2-x}{2x+2} & \frac{2x^3+2x^2+6x+3}{2(x+1)^2} & -\frac{2x-1}{2x+2} \end{bmatrix}.$$

Ce nouveau système est bloc-diagonal (jusqu'à la puissance $m_2 = 2$ en ε) et peut être décomposé en deux systèmes séparés.

La première équation est

$$\varepsilon^2 \frac{du_1}{dx} = (x+2 + \varepsilon (x^2+1) + \varepsilon^2 \frac{2x^2+5x+1}{2(x+1)^2})u_1.$$

Le changement de variable

$$u_1 = v_1 \exp\left(\int_0^x \varepsilon^{-2}(t+2+\varepsilon(t^2+1))dt\right) = v_1 \exp\left[\varepsilon^{-2}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)+\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\right]$$

produit l'équation différentielle

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{2x^2+5x+1}{2(x+1)^2} v_1.$$

qui a une solution $v_1 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{7x^2}{8} - \frac{7x^3}{16} + \frac{107x^4}{128}$.

Remarque

Si toutes les valeurs propres sont distinctes, le système se décompose en n équations d'ordre 1 ce qui est l'un des cas étudiés dans le paragraphe III-1. Et donc n solutions formelles indépendantes sont ainsi construites.

III-3. CAS D'UNE UNIQUE VALEUR PROPRE

D'après le paragraphe précédent, on peut supposer que les coefficients du système

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r \right) y \quad (\text{III.12})$$

sont holomorphes dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} et que $A_0(x)$ a une unique valeur propre $\lambda(x)$.

Une simplification élémentaire et importante consiste à effectuer la transformation suivante

$$y = \exp\left\{\varepsilon^{-h} \int^x \lambda(t) dt\right\} y^* \quad (\text{III.13})$$

La matrice $Y(x, \varepsilon)$ sera remplacée par $Y(x, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int^x \lambda(t) dt)$ Après cette transformation. Le seul changement dans les équations différentielles occasionné par cette substitution est le remplacement de $A_0(x)$ par la matrice $A_0(x) - \lambda(x) I$. Cette matrice a zéro comme valeur propre unique, elle est donc nilpotente. Donc on peut supposer que l'hypothèse II.3 du chapitre II est satisfaite sans perte de généralités.

La transformation suivante, pour simplifier le système (III.12), est de réduire le système à un système qui est sous forme de Arnold-Wasow due à Wasow [49]. Nous avons discuté ce problème dans le paragraphe II-4 du chapitre II où on a proposé un algorithme pour le calcul exact de cette forme et aussi le calcul de la transformation.

Donc, on peut supposer que la transformation dans le Théorème II.5 est déjà effectuée. C'est à dire qu'à l'hypothèse II.3, on peut ajouter, sans perte de généralité, que l'hypothèse II.4 est satisfaite i.e. le système (III.12) est sous forme de Arnold-Wasow :

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = \left\{ A_0 + \sum_{j=1}^d \left(\sum_{r=1}^{m_2} \rho_{jr} \varepsilon^r \right) \Gamma_j \right\} z \quad (\text{III.14})$$

III-3.1. La première réduction

Maintenant le système (III.14) qui est déjà sous forme de Arnold sera transformé par la matrice suivante :

$$T(\varepsilon) = \text{diag}(1, \varepsilon^\alpha, \dots, \varepsilon^{(n-1)\alpha}) \quad (\text{III.15})$$

où l'exposant α est à déterminer. Après division par ε^α le système transformé devient

$$\varepsilon^{h-\alpha} \frac{dz}{dx} = \left\{ A_0 + \sum_{r=1}^{m_2} \sum_{j=1}^d \rho_{jr} \Gamma_j \varepsilon^{r-(1+\mu_j-\nu_j)\alpha} \right\} z \quad (\text{III.16})$$

où les μ_j et ν_j sont les numéros de la ligne et colonne du coefficient non nul de Γ_j respectivement. Ici la formule suivante est utilisée :

$$T^{-1}(\varepsilon) A_0 T(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha A_0.$$

Considérons maintenant l'ensemble Σ des nombres rationnels positifs de la forme $\frac{r}{1+\mu_j-\nu_j}$, $r = 1, 2, \dots, m_2$; $j = 1, 2, \dots, d$ pour lesquels le facteur ρ_{jr} dans (III.14) n'est pas identiquement nul.

Quand $\alpha \in \Sigma$ dans (III.16), le coefficient matriciel de ε^0 dans le membre à droite de (III.16) aura non seulement les éléments non nuls de A_0 mais aussi d'autres éléments non nuls. Deux cas différents sont à considérer :

cas a) : les éléments de Σ n'appartiennent pas à l'intervalle $(0, h)$, i.e. tous les éléments de Σ sont supérieurs ou égaux à h .

Dans ce cas, prenons $\alpha = h$. Alors le membre à droite de (III.16) ne contient pas de puissances négatives de ε . En effet, si on avait $r - (1 + \nu_j - \mu_j)h < 0$ pour un terme dans (III.16), alors on aurait $0 < \frac{r}{1 + \mu_j - \nu_j} < h$, contrairement à notre supposition. Le système transformé (III.16) avec $\alpha = h$ n'a plus de puissance positive de ε multipliant la dérivée dans le membre à gauche, et les puissances de ε dans le membre à droite sont entières et non négatives. Le problème est réduit à un des cas étudiés du paragraphe III-1.

Cas b) : Σ contient des nombres dans $(0, h)$.

Toutes les valeurs positives de $\frac{r}{1 + \mu_j - \nu_j}$ ne dépassent pas $\frac{1}{n+1}$, donc Σ possède un minimum. Choisissons ce minimum pour valeur de α dans (III.16). Les termes dans le membre à droite n'ont pas de puissances négatives de ε , mais au moins un terme contient ε avec un exposant nul. Ici, évidemment α peut être rationnel, notons

$$\alpha = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ sont premiers entre eux et positifs}). \quad (\text{III.17})$$

La substitution

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{1/q} \quad (\text{III.18})$$

conduit alors à un problème n'ayant que des puissances entières de $\bar{\varepsilon}$. Si les termes sont réordonnés d'après les puissances de $\bar{\varepsilon}$, la matrice de tête de $\bar{\varepsilon}$ aura maintenant des coefficients non nuls non seulement de A_0 mais aussi des autres. Ces coefficients supplémentaires se trouvent tous sur ou au dessous du terme diagonal, puisque au dessus du terme diagonal

$$r - (1 + \mu_j - \nu_j) \alpha > 0.$$

Nous définissons la procédure *shearing* suivante pour calculer le système (III.16). Pour des raison de présentation, elle se trouve à la page suivante.

shearing ($A(x, \varepsilon)$, i , j , h) :

{ i , j entiers positifs entre 1 et n . Cette procédure traite le bloc de $A(x, \varepsilon)$ entre les lignes i et j }

début

$$Y(x, \varepsilon) \leftarrow Y(x, \varepsilon) * T(\varepsilon); \quad \{T(\varepsilon) \text{ comme (III.15)}\}$$

déterminer α ;

si α est entier *alors*

$$h \leftarrow h - \alpha;$$

$$A(x, \varepsilon) \leftarrow A_0 + \sum_{r=1}^{m_2} \sum_{k=1}^d \rho_{kr} \Gamma_k \varepsilon^{r-(1+\mu_k-\nu_k)\alpha};$$

sinon

$$\{ \alpha = \frac{p}{q} \}$$

$$\varepsilon \leftarrow \varepsilon^q;$$

$$h \leftarrow (h - \alpha)q;$$

$$A(x, \varepsilon) \leftarrow A_0 + \sum_{r=1}^{m_2} \sum_{k=1}^d \rho_{kr} \Gamma_k \varepsilon^{qr-(1+\mu_k-\nu_k)q\alpha};$$

fin;

En général, la nouvelle matrice de tête aura deux valeurs propres distinctes. La méthode du paragraphe III-2 peut être utilisée et le problème sera décomposé en deux ou plusieurs problèmes d'ordres inférieurs.

Remarque III.1

(i) Il y a pourtant une différence importante entre la situation de III-2 et celle-ci : la matrice de tête du nouveau système d'équations différentielles, n'est probablement plus semblable holomorphiquement à sa forme de Jordan dans le voisinage Ω . Il est alors nécessaire de remplacer Ω par un voisinage $\Omega' \subset \Omega$.

(ii) Les éléments de la nouvelle matrice de tête sont des fonctions dont les coefficients peuvent être des fonctions rationnelles des valeurs propres de $A_0(x)$ dans (1) qui sont connues que comme racines de polynômes. Donc la forme de Jordan de cette nouvelle matrice de tête ne peut être obtenue comme dans le chapitre I. Si nous avons obtenu la forme de Jordan de $A_0(x)$ du système original, alors nous avons à calculer la forme de Jordan d'une matrice dont les coefficients sont des fonctions holomorphes à coefficients dans un corps des nombres algébriques. Donc nous avons à faire des opérations dans le corps $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ où

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de la matrice $A_0(x)$. Il existe une méthode qui a été développée dans le système D5 [25] [27] qui peut être appliquée pour ce problème. Cette méthode a été implantée en REDUCE et SCRATCHPAD II. Ce problème est encore ouvert en MACSYMA.

Exemple

Continuons à développer l'exemple précédent. Le deuxième système d'ordre 3 est transformé, après un changement de variables de la forme (III.13) avec $\lambda(x) = 1$, en un système sous la forme suivante :

$$\varepsilon^2 \frac{dw}{dx} = (B_0(x) + \varepsilon B_1(x) + \varepsilon^2 B_2(x)) w$$

où

$$B_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & x-3 & -1 \\ x^2+2x+2 & 2 & 2 \\ -x^2-x+2 & x-\frac{3}{2} & x-\frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{x}{x+1} & -\frac{x^3+4x^2+7x+3}{(x+1)^2} & -\frac{1}{x+1} \\ -\frac{2x^2-x}{2x+2} & \frac{2x^3+2x^2+6x+3}{2(x+1)^2} & -\frac{2x-1}{2x+2} \end{bmatrix}.$$

L'étape suivante est de transformer ce système en un système sous forme de Arnold-Wasow par l'algorithme du paragraphe II-4 du chapitre II. Ceci nous conduit au système suivant :

$$\varepsilon^2 \frac{dw_1}{dx} = (C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \varepsilon^2 C_2(x)) w_1$$

où $C_0(x) = B_0(x)$,

$$C_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^2+2x+1 & 3 & 2 \\ -x^2-x+2 & 0 & \frac{2x-5}{2} \end{bmatrix},$$

$$C_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^4+x^3-2x^2-13x-10}{x+1} & \frac{4x^3+9x^2+10x+3}{2x^2+4x+2} & \frac{2x^2-x-5}{2x+2} \\ \frac{4x^3-20x^2+3x+21}{4x+4} & 0 & \frac{2x^2-3x-2}{2x+2} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons effectuer maintenant une transformation $w_1 = T(\epsilon) w_2$ avec $T(\epsilon) = \text{diag}(1, \epsilon^\alpha, \epsilon^{2\alpha})$. Nous obtenons $\alpha = \frac{1}{3}$. Après le changement de variables $\bar{\epsilon} = \epsilon^3$ nous obtenons le système suivant :

$$\bar{\epsilon}^5 \frac{dw_2}{dx} = (D_0(x) + \bar{\epsilon} D_1(x) + \bar{\epsilon}^2 D_2(x) + \dots + \bar{\epsilon}^6 D_6(x)) w_2$$

où

$$D_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x^2-x+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

...

$$D_6(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x^2-x-5}{2x+2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

III-3.2. Convergence en cas de plusieurs réductions nécessaires

Soient les matrices Γ_j ordonnées de telle façon que celles qui ont leurs coefficients non nul sur ou au dessous de la diagonale, i.e., celles vérifiant $\mu_j \geq \nu_j$, apparaissent d'abord. Supposons qu'il y ait un nombre d' de ces matrices Γ_j . Alors le système transformé (III.16) possède, après un réarrangement des puissances de ε , la matrice de tête suivante :

$$\bar{A}_0(x) = A_0 + \sum_{1 \leq j \leq d'} \sigma_j(x) \Gamma_j, \quad (\text{III.19})$$

où $d' \leq d$ et $\nu_j \leq \mu_j$ pour $j = 1, 2, \dots, d'$. Les σ_j ne sont pas toutes des fonctions identiquement nulles.

Pour démontrer la convergence de l'algorithme *Turrittin-Wasow* présenté au début de ce chapitre, il reste à examiner la situation exceptionnelle où la nouvelle matrice de tête $\bar{A}_0(x)$ a encore une unique valeur propre.

On observe d'abord que si $\bar{A}_0(x)$ a un coefficient non nul sur la diagonale, le nombre α peut être choisi entier positif puisque pour ces coefficients $\nu_j = \mu_j$ et donc $\alpha = r$ pour un certain entier r . Alors $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ et l'exposant \bar{h} de $\bar{\varepsilon}$ dans l'équation transformée est inférieur à h . Par hypothèse, la matrice $\bar{A}_0(x)$ a une unique valeur propre. Donc l'étape suivante est de réduire la valeur propre à zéro par une transformation de la forme (III.13). Après ceci, le système différentiel sera transformé en sa forme de *Arnold-Wasow* qui est suivi d'une autre transformation de la forme (III.15). Si ceci réduit encore à un problème avec une matrice de tête qui a une seule valeur propre et qui a un coefficient non nul sur la diagonale, la répétition de cet argument produit un problème avec une valeur de h encore plus petite. Ce processus peut être répété un nombre fini d'étapes avant que h soit réduit à 0.

Il reste la possibilité que $\bar{A}_0(x)$ n'ait pas de coefficient non nul sur la diagonale et qu'elle ait une unique valeur propre. Puisque la trace de $\bar{A}_0(x)$ est la somme de

ses valeurs propres, on conclut donc que $\bar{A}_0(x)$ a la même propriété que $A_0(x)$ d'être nilpotente. Elle a une unique valeur propre qui est évidemment nulle. Pourtant α est une fraction, ε doit être remplacé par $\bar{\varepsilon}^q$ dans (III.16), et $(h - \alpha)q$ peut être plus grand que h .

Nous allons comparer les facteurs invariants de $T_1 = A_0 - \lambda I$ et $T_2 = \bar{A}_0(x) - \lambda I$. Supposons que les ordres des blocs diagonaux E_1, E_2, \dots, E_R soient a_1, a_2, \dots, a_R respectivement et que la normalisation ait été faite de façon que $a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_R$. Les pgcds de tous les déterminants d'ordre $1, 2, \dots, n$ de T_1 sont

$$1, 1, \dots, 1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}, \dots, \lambda^{a_i}, \dots, \lambda^{a_j}, \dots, \lambda^{a_R}$$

où il y a un nombre $(n - a_1 - R + 1)$ de 1 et a_1 de λ , n étant l'ordre de A_0 . Les plus grands communs diviseurs de tous les déterminants du premier ordre, du second ordre, ..., de T_1 sont respectivement

$$1, 1, \dots, 1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{a_1}, \lambda^{a_1+a_2}, \dots, \lambda^n \quad (\text{III.20})$$

où une fois encore il y a un nombre $(n - a_1 - R + 1)$ de 1 dans la liste.

Nous allons démontrer que le changement de variables (III.15) transforme non seulement la matrice caractéristique T_1 en T_2 , mais quand la liste des plus grands communs diviseurs des déterminants des différents ordres de T_2 est sélectionnée et cette nouvelle liste est comparée avec (III.20), il y aura au moins le même nombre de 1; la nouvelle liste sera terminée par λ^n , et chaque puissance de λ ne sera pas augmentée, et au moins une des puissances sera diminué d'une unité au moins.

Remarquons d'abord que par définition la forme de Jordan \bar{A}_0 est holomorphe dans un voisinage de $x = 0$ et que les degrés des diviseurs communs sont constants dans ce voisinage. Puisque \bar{A}_0 est nilpotente, toutes les matrices dans (III.19) dans lesquelles le coefficient non nul de Γ_j se trouve dans les blocs diagonaux de la partition doivent être identiquement nulles.

T_2 est, en effet, une matrice de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & & & \\ S_{21} & S_{22} & & \\ & & \dots & \\ S_{R1} & S_{R2} & & S_{RR} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

où les blocs inférieurs sont nuls. Les S_{ij} ($i \geq 2$) sont des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & & & \\ & & \dots & & \\ & & & -\lambda & 1 \\ w_1 & \dots & & w_{a_i} & -\lambda \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

et les S_{ij} ($i < j$) sont des matrices de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ w_2 & 0 & 0 \\ \dots & & \\ w_{a_j} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

où seulement les w_i peuvent être non nuls. Si E_1 n'est pas une matrice nulle, i.e. il n'y a pas de bloc nul dans A_0 , S_{11} sera une matrice de la forme (III.22). Si E_1 est une matrice nulle d'ordre positif, la matrice S_{11} est une matrice nulle sauf les éléments de la dernière ligne et les éléments sur la diagonale qui sont λ . Nous discutons deux cas séparément.

. Si $E_1 = 0$ d'ordre non nul et si S_{11} a un coefficient w non nul qui se trouve sur la dernière ligne de S_{11} , nous formons un déterminant par l'élimination de toutes les lignes et colonnes sauf celles qui passent en w ou les 1 sur la seconde diagonale supérieure. La valeur de ce déterminant est w et l'ordre du déterminant est $(n - a_1 - R + 2)$. Puisque $w \neq 0$ non divisible par λ , le premier λ doit être remplacé par 1 dans la nouvelle liste pour T_2 , i.e., l'exposant de λ est diminué de 1 à 0.

Si un w non nul se trouve sur la colonne à gauche de S_{i1} , ($i = 2, \dots, R$) et $E_1 = 0$ d'ordre non nul, on peut procéder de la même manière comme en haut et trouver que le premier exposant de λ devient 0.

.. Le deuxième cas à examiner est celui où l'un des w non nul se trouve dans $S_{ji}, j > i, i > 1$.

Si λ^i est le plus grand commun diviseur de tous les déterminants formés à partir T_1 d'ordre u ($u = 1, 2, \dots, n$), il est possible de sélectionner un déterminant de T_2 d'ordre u qui aura λ^i pour valeur. Formons un déterminant de T_2 par l'élimination des colonnes

$$(a_1+a_2+\dots+a_{i-1}+1), (a_1+a_2+\dots+a_i+1), \dots, (a_1+a_2+\dots+a_{R-2}+1), \quad (\text{III.24})$$

et des lignes

$$(a_1+a_2+\dots+a_{i+1}), (a_1+a_2+\dots+a_{i+2}), \dots, (a_1+a_2+\dots+a_R), \quad (\text{III.25})$$

Ce déterminant est d'ordre $n - R + i$ et sa valeur $\lambda^{a_1+a_2+\dots+a_i}$. Cette valeur $\lambda^{a_1+a_2+\dots+a_i}$ est le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre $(n - R + i)$ de T_1 , comme on peut le voir sur la liste (III.20).

Cependant, si l'un des coefficients dans S_{ji} est non nul, il y a un autre déterminant d'ordre $(n - R + i)$ de T_2 ne contenant pas $\lambda^{a_1+a_2+\dots+a_i}$ en facteur. Pour construire ce déterminant, éliminons les mêmes lignes et colonnes (comme dans les listes (III.24) et (III.25)) sauf que l'on conserve la colonne $(a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1)$ et élimine la colonne $(a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + 1)$. Comme on peut le démontrer par récurrence, ce déterminant a la valeur suivante :

$$(-1)^{a_i} \lambda^{a_1+a_2+\dots+a_{i-1}} \left[w_{a_j} \lambda^{a_j-1} + w_{a_{j-1}} \lambda^{a_j-2} + \dots + w_1 \right],$$

où au moins un des w n'est pas nul. Donc le plus grand commun diviseur de tous les déterminants d'ordre $(n - R + i)$ est une certaine puissance de λ inférieure à $\lambda^{a_1+a_2+\dots+a_i}$, i.e. d'un exposant inférieur à $a_1 + a_2 + \dots + a_i$.

Donc si nous répétons des transformations de la forme (III.15), après des transformations qui réduisent des matrices de tête à sa forme de Jordan, nous aurons ou bien une matrice avec deux valeurs propres distinctes ou bien une matrice dont la forme de Jordan n'a qu'un seul bloc.

Si nous sommes dans le dernier cas, une transformation de plus introduit un coefficient non nul sur la dernière ligne de cette matrice de Jordan qui aura au moins deux valeurs propres distinctes.

Nous pouvons donc toujours réduire le système d'équations différentielles (1) à des systèmes séparés qui sont soit une seule équation différentielle soit un système avec $h = 0$. Et dans tous les cas nous trouvons les solutions formelles. Nous rassemblons les résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème III.2

Soit $\sum_{r=0}^{\infty} A_r \varepsilon^r$, le développement asymptotique de $A(x, \varepsilon)$, une série formelle dans laquelle les A_r sont des matrices d'une variable complexe x , holomorphe dans un domaine Ω de \mathbb{C} et ε est un petit paramètre réel positif. Soit h un entier positif. Supposons que la matrice de tête $A_0(x)$ et les matrices de tête obtenues dans l'algorithme présenté ci-dessus satisfont l'hypothèse I.1. Alors le système d'équations différentielles

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y \quad (1)$$

peut être satisfait en remplaçant y par une expression formelle de la forme

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} Y_r(x) \varepsilon^{r/m} \right) e^{Q(x, \varepsilon)}. \quad (\text{III.26})$$

Les symboles dans (III.26) sont définis :

(i) Les Y_r sont des matrices d'ordre n des fonctions holomorphes dans un voisinage Ω de $x = 0$.

$$Q(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} Q_j(x) \varepsilon^{(j-k)/m}$$

où les Q_j ont les mêmes propriétés que Y_r , et k est un entier positif ($Q : \equiv 0$, si $k=0$).

(ii) Le développement formel pour $\det \left[\sum_{r=0}^{\infty} Y_r(x) \varepsilon^{r/m} \right]$ en puissances de $\varepsilon^{l/m}$ est non identiquement nulle.

Démonstration

La matrice finale des transformations de la forme (III.13), (II.5) et (III.16) est un produit d'un nombre fini de transformations effectuées dans l'ordre de gauche à droite. Puisque la matrice correspondant à la transformation (III.13) qui est scalaire dans chaque bloc, commute avec les autres à sa droite, la variable indépendante de dimension n est notée z , indépendamment des notations précédentes, et la transformations formelles de y à z est notée :

$$y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^{r/m} \right) e^{\widehat{Q}(x,\varepsilon)} z, \quad (\text{III.27})$$

(les notations ci-dessus sont indépendantes des notations précédentes) où m est un entier positif, et \widehat{Q} est une matrice diagonale de la forme suivante :

$$\widehat{Q}(x,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m_j-1} \widehat{Q}_j \varepsilon^{(j-mh)/m}.$$

Les matrices P_r et \widehat{Q}_j sont holomorphes en x dans un voisinage du point $x = 0$. La matrice $P_0(x)$ est en général non inversible, à cause de l'effet de la transformation (III.15). Mais le développement formel en puissances de $\varepsilon^{1/m}$ pour $\det \left[\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^{r/m} \right]$ n'est pas identiquement nul.

Le système d'équations différentielles en z consiste en des systèmes séparés des équations différentielles scalaires et des systèmes des équations différentielles sans puissance positive en ε dans le membre à gauche. Examinant les solutions des systèmes en z , nous trouvons une solution matricielle de la forme

$$Z(x, \varepsilon) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} Z_r(x) \varepsilon^{r/m} \right) e^{\widetilde{Q}(x,\varepsilon)},$$

$$\widetilde{Q}(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{Q}_j(x) \varepsilon^{(j-k)/m}.$$

La matrice \tilde{Q} est diagonale et k est un entier non négatif (si $k = 0$, $\tilde{Q} = 0$). On doit retourner de Z à une solution matricielle Y du système original et on a une solution de la forme donnée dans le théorème.

Exemple

Nous continuons à développer l'exemple précédent en réduisant la matrice de tête $B_0(x)$ à sa matrice de Jordan. Nous obtenons la matrice de Jordan J et la matrice de passage P :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{2}+3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ceci nous conduit au système suivant :

$$\bar{\varepsilon}^5 \frac{dw_3}{dx} = (E_0(x) + \bar{\varepsilon} E_1(x) + \bar{\varepsilon}^2 E_2(x) + \dots + \bar{\varepsilon}^6 E_6(x)) w_3$$

où $E_0(x) = J$,

$$E_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+2x+1 & 0 \end{bmatrix},$$

...

$$E_6(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2x^4+x^3-10x^2-3x+10}{2x+2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensuite nous transformons ce système en un système sous forme de Arnold-Wasow par l'algorithme présenté dans II-4 du chapitre II. On obtient le système suivant :

$$\bar{\varepsilon}^5 \frac{dw_4}{dx} = (F_0(x) + \bar{\varepsilon} F_1(x) + \bar{\varepsilon}^2 F_2(x) + \dots + \bar{\varepsilon}^6 F_6(x)) w_4$$

où

$$F_0(x) = B_0(x),$$

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+2x+1 & 0 \end{bmatrix},$$

...

L'étape suivante est d'effectuer une transformation de la forme (III.13), $T = \text{diag}(1, \bar{\varepsilon}^\alpha, \bar{\varepsilon}^{2\alpha})$. On obtient $\alpha = \frac{1}{2}$. Donc après le changement de variable $\bar{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^2$ on obtient le système suivant :

$$\tilde{\varepsilon}^9 \frac{dz}{dx} = (G_0(x) + \tilde{\varepsilon} G_1(x) + \tilde{\varepsilon}^2 G_2(x) + \dots + \tilde{\varepsilon}^{12} G_{12}(x)) z \quad (\text{III.28})$$

avec la matrice de tête

$$G_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & x^2+2x+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les trois valeurs propres distinctes de cette matrice sont 0, $x+1$ et $-x-1$. Donc on peut réduire le système (III.28) en trois équations différentielles scalaires, par la méthode présentée dans le paragraphe III-2, qui peuvent être résolues par la méthode du paragraphe III-1.

**Solutions Formelles de Systèmes
d'Equations Différentielles Linéaires Ordinaires
dans un Voisinage du Point Singulier Régulier et Irrégulier**

Chapitre IV

Solutions Formelles de Systèmes d'Equations Différentielles Linéaires Ordinaires Homogènes au Voisinage d'un Point Singulier Régulier

Nous considérons dans ce chapitre la résolution formelle d'un système d'équations différentielles ayant une singularité régulière isolée à l'origine, de la forme suivante :

$$x \frac{dy}{dx} = A(x) y \quad (\text{IV.1})$$

où $A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$ est une matrice d'ordre n holomorphes à l'origine de \mathbb{C} . Les matrices A_0, A_1, A_2, \dots , sont à coefficients dans \mathbb{Q} , le corps des nombres rationnels.

Nous allons développer un algorithme de Wasow [68] qui permet de déterminer un système fondamental de solutions formelles de ce système au voisinage de l'origine de \mathbb{C} . Cet algorithme a été implanté en MACSYMA (Gil [31]).

Le premier pas de cet algorithme est de transformer la matrice A_0 en sa forme de Jordan par une matrice constante inversible P . L'algorithme du chapitre I nous permet d'effectuer cette opération. Rappelons que les valeurs propres de cette matrice sont déterminées comme racines des polynômes provenant de la décomposition sans-carré des polynômes caractéristiques. Elles ne sont calculées que si les polynômes qui les déterminent sont de degré 1.

Nous supposons dans la suite que la matrice $A_0 = J$ dans (IV.1) est déjà sous forme de Jordan.

Nous discuterons deux cas suivant que les valeurs propres de A_0 diffèrent ou non d'un entier. Le cas où il n'existe pas de valeurs propres qui diffèrent d'un entier est appelé le cas générique (IV-1). Le cas général se ramènera au cas générique (IV-2).

Les valeurs propres étant déterminées d'une façon formelle, i.e. comme des racines de polynômes, le calcul de la forme de Jordan de nouvelles matrices de tête ne peut s'obtenir par l'algorithme du Chapitre I puisque les éléments de ces matrices peuvent être des fonctions rationnelles des valeurs propres. Nous présentons un algorithme pour le calcul de la forme de Jordan de ces matrices dans le paragraphe IV-3.2 en utilisant les transformations élémentaires définies dans le chapitre I, mais pour le corps \mathbb{Q} . Nous avons implanté cet algorithme en MACSYMA.

Nous discutons à la fin de ce chapitre un exemple complet calculé par l'algorithme en MACSYMA.

Un problème qui reste à étudier dans cet algorithme est de déterminer si un polynôme en des valeurs propres, (racines de polynômes connus), est nul ou pas. Ce problème est un cas particulier de manipulations de nombres algébriques. Des résultats et algorithmes sur ce point existent et sont réalisés en REDUCE et SCRATCHPAD II (Duval et Dicresenzo [24] et Duval [27]).

IV-1. CAS GÉNÉRIQUE : A_0 N'A PAS DE VALEURS PROPRES QUI DIFFÉRENT D'UN ENTIER

Nous cherchons un système fondamental des solutions formelles du système (IV.1). L'existence d'un tel système fondamental est justifié par le théorème suivant dans le cas générique.

Théorème IV.1.[18]

Dans le système (IV.1) si les valeurs propres de $A_0 = J$ ne diffèrent pas d'entiers entre elles, alors (IV.1) a une matrice fondamentale de solutions de la forme $Y = Q(x) x^J$ où Q est de la forme :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Q_k, \text{ avec } Q_0 = I_n. \quad (IV.2)$$

En remplaçant (IV.2) dans (IV.1), nous pouvons construire les Q_m par résolution des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} Q_0 = I_n, \\ Q_{k+1}[(k+1)I_n + J] - JQ_{k+1} = C_k, k \geq 0 \end{cases}$$

où C_k est une matrice constante dépendant de A_0, \dots, A_k et Q_0, \dots, Q_k .

Remarque IV.1

Résoudre, pour un k donné, $Q_{k+1}[(k+1)I_n + J] - JQ_{k+1} = C_k$ revient à résoudre une équation matricielle de la forme $A X - X B = C$ où A, B, C sont des matrices carrées d'ordre n constantes données et X une matrice d'ordre n recherchée. La résolution de ce système pour des matrices A et B qui sont sous forme de Jordan n'ayant pas de valeur propre commune, comme pour notre besoin, fait l'objet d'un algorithme implanté en MACSYMA (Gil [31]).

IV-2. CAS GENERAL : IL EXISTE DES VALEURS PROPRES QUI DIFFERENT ENTRE ELLES D'UN ENTIER

IV-2.1. Détermination des différences entières des valeurs propres d'une matrice

Comme dans tout ce qui précède, on va travailler sur la forme de Jordan de la matrice dont on désire savoir si les valeurs propres diffèrent ou non d'un entier. Selon la méthode de calcul de cette matrice, chacune de ses valeurs propres est définie par un polynôme dont elle est racine, non nécessairement unique, et qui a les propriétés suivantes :

- chaque polynôme n'a que des racines simples
- toutes ses racines ont la même multiplicité dans le polynôme caractéristique de la matrice
- les polynômes sont deux à deux premiers entre eux.

Les valeurs propres étant donc uniquement déterminées par les polynômes, on va, pour savoir si deux valeurs propres de la matrice diffèrent ou non d'un entier, utiliser des résultats classiques sur les polynômes et leurs pgcds.

Soit P la forme sans carré du polynôme caractéristique de la matrice considérée, c'est à dire le produit des polynômes qui déterminent les valeurs propres de cette matrice, élevés aux puissances convenables. Si on note $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, \dots, d$ et $a_d \neq 0$. On a par définition

$$\text{discriminant de } P = \text{disc}(P) = \frac{\text{résultant}(P, P')}{a_d}$$

Nous avons les théorèmes suivants qui nous permettent de déterminer une liste d'entiers susceptibles d'être différences entières de racines de P . Mais celle-ci peut être beaucoup trop longue, le deuxième théorème nous permet de déterminer une borne pour ces entiers (Tournier [62], Mignotte [48]).

Théorème IV.2.

Si m est la différence entière de deux racines de P , alors m^2 divise $\text{disc}(P)$.

Théorème IV.3

Si $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_d x^d + \dots + a_0$, $a_d \neq 0$ et si l'on considère la norme

$$\|f\| = \left(\sum_{i=0}^d |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

si m est la différence de deux racines de f alors $|m| \leq \frac{2\|f\|}{|a_d|}$.

Pour déterminer une autre borne nous avons le théorème suivant :

Théorème IV.4

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{C} . Le spectre de A est dans la réunion des disques $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \Lambda_i\}$ où les a_{ij} sont les éléments de A et $\Lambda_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Nous avons donc, si m est la différence entière de deux valeurs propres de A , $|m| \leq 2\Lambda + M$, où $\Lambda = \max_{i=1, \dots, n} \{\Lambda_i\}$ et $M = \max_{i, j=1, \dots, n} \{|a_{ii} - a_{jj}|\}$.

On a donc une méthode qui permet de déterminer une liste L d'entiers qui sont susceptibles d'être différences de deux valeurs propres de notre matrice.

Remarque IV.2

Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre n ayant pour polynôme caractéristique P . On a $\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{Z}$ si et seulement si le pgcd de $P(x)$ et de $P(x + m)$ a un degré supérieur ou égal à 1. Soient λ_1 racine de $P_1(x)$ et λ_2 racine de $P_2(x)$. Alors $\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{Z}$ si et seulement si le pgcd de $P_1(x)$ et de $P_2(x+m)$ a un degré supérieur ou égal à 1.

On va donner le principe de la méthode qui a été mis au point avec I. Gil et qui a été implanté en MACSYMA [31], pour déterminer les différences entières de valeurs propres sur une matrice de Jordan définie comme dans le Chapitre I.

On a vu (chapitre I) qu'il existe en général, plus de polynômes différents pour déterminer les valeurs propres de la matrice que de polynômes distincts dans la décomposition sans carré du polynôme associé au premier bloc de la forme de Frobenius de cette matrice.

On est donc amené à envisager deux cas selon que toutes les valeurs propres de la matrice sont données par un ou plusieurs polynômes.

cas 1)

Si on a un seul polynôme P : soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les k racines différentes de P et L la liste des entiers qui peuvent être différence de deux λ_i .

Nous supposons que les entiers de L sont ordonnés de manière décroissante. Pour déterminer si le premier $m \in L$ est effectivement différence de deux λ_i il suffit de former $G = \text{pgcd}(P(x), P(x - m))$. Si pour tous m dans L , le degré de G est nul alors il n'y a pas de racines de P qui diffèrent d'un entier.

Si $\text{degré}(G) = r$, alors il y a r couples de racines tels que la différence des valeurs de chaque couple est m . Le problème est alors de déterminer quels sont ces r couples parmi les racines de P . Pour résoudre ce problème, on coupe P en deux polynômes. Il est évident qu'il y a r racines de $\frac{P(x)}{G(x)}$ de la forme $\lambda - m$ avec $G(\lambda) = 0$. Donc $P_2(x) = \frac{P(x)}{G(x)G(x+m)}$ est un polynôme.

Il est clair que les racines de $G(x+m)$, $G(x)$ et $P_2(x)$ forment les k racines de $P(x)$. On peut donc dire que les r premières racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de $P(x)$ sont les racines de $G(x+m)$, les r dernières $\lambda_{k-r+1}, \dots, \lambda_k$ sont les racines de $G(x)$ et les autres sont racines de $P_2(x)$. Alors nous avons

$$\lambda_i = \lambda_{k-i+1} - m, i = 1, \dots, r.$$

sans avoir calculé les valeurs de ces λ .

Donc nous pouvons remplacer toutes les valeurs de λ_i pour $i = 1, \dots, r$ en utilisant les formules ci-dessus. Cela veut dire que l'on a enlevé les r premières valeurs propres dans la suite de notre calcul. Il nous reste à étudier les racines de $P_1(x) = G(x)$ et $P_2(x)$ avec la liste $L_1 = L - \{m\}$. Ce qui est traité dans le deuxième cas. Remarquons qu'ici les racines de $G(x)$ ne diffèrent pas entre elles d'un entier (m était le plus grand entier dans la liste).

Exemple

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ les différentes racines de

$$P(x) = (x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 3) (x - 5) \left(x - \frac{9}{2}\right)$$

Nous avons $L = \{4, 2\}$. Nous commençons par tester $m = 4$ et nous obtenons

$$G(x) = (x - 5) \left(x - \frac{9}{2}\right).$$

On coupe les racines de $P(x)$ en trois groupes λ_1, λ_2 ; λ_3, λ_4 et λ_5, λ_6 où λ_1, λ_2 sont les racines de $G(x+4) = (x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right)$; λ_3, λ_4 sont les racines de $P_2(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 3)$; λ_5 et λ_6 sont les racines de $P_1(x) = G(x)$.

Nous avons en plus $\lambda_1 = \lambda_6 - 4$, $\lambda_2 = \lambda_5 - 4$, sans connaître les valeurs de ces λ_i . Donc nous avons enlevé les valeurs propres λ_1, λ_2 en faisant ces évaluations. Il nous reste à étudier les valeurs propres λ_3, λ_4 et λ_5, λ_6 qui sont les racines de P_2 et P_1 respectivement. Ce qui est résolu plus tard.

cas 2)

Nous avons plusieurs polynômes P_1, P_2, \dots, P_j dont les racines sont $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1k_1}$; $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2k_2}$ et $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jk_j}$ respectivement.

Nous commençons d'abord pour chaque polynôme P_i ($i = 1, \dots, j$) les tests comme dans 1). Donc nous pouvons supposer que ces opérations ont été faites et les racines de chaque polynôme P_i ($i = 1, \dots, j$) ne diffèrent pas entre elles d'un entier.

Nous commençons par construire la liste L des entiers décroissants qui peuvent être différences de racines de P_i et P_r . Pour chaque $m \in L$, nous avons à examiner toutes les paires de polynômes P_i et P_r (pour $i \neq r$). Il y a cette fois à calculer deux pgcd : $G_1 = \text{pgcd}(P_i(x), P_r(x+m))$ et $G_2 = \text{pgcd}(P_i(x), P_r(x-m))$. Si tous ces deux pgcd ont un degré nul, alors les racines de P_i et P_r ne diffèrent pas entre elles d'un entier.

Si $\text{degré}(G_1(x)) = s$ est positif, alors il y a s racines de P_i qui sont (s racines de P_r) - m . On peut décomposer P_i et P_r en quatre polynômes comme nous avons fait

dans le cas 1) dont un peut être enlevé. Cette opération signifie que l'on enlève un certain nombre de valeurs propres qui peuvent être exprimées comme des différences entre valeurs propres et entiers positifs. Ceci peut être continué jusqu'à épuisement de L .

Exemple

Continuons l'exemple précédent. Nous avons

$$G_2(x) = \text{pgcd}(P_1(x), P_2(x-2)) = x - 5.$$

On regroupe les racines λ_3, λ_4 de $P_1(x)$ et λ_5, λ_6 de $P_2(x)$ en quatre groupe : $\lambda_3 = 3$ la racine de $G_2(x+2) = x - 3$; $\lambda_4 = \frac{1}{3}$ la racine de $P^{(1)} = \frac{P_2(x)}{G_2(x+2)} = x - \frac{1}{3}$. $\lambda_5 = 5$ la racine de $P^{(2)} = G_2(x) = x - 5$, et $\lambda_6 = \frac{9}{2}$ la racine de $P^{(3)} = \frac{P_1}{G_2} = x - \frac{9}{2}$.

Nous avons $\lambda_3 = \lambda_5 - 2$ sans connaître les valeurs de ces racines. Donc on peut enlever la valeur propre λ_3 . Il nous reste à étudier les valeurs propres qui sont déterminées par les polynômes $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$. Et il n'y a plus de racines de ces trois polynômes qui diffèrent d'entiers.

Remarque IV.3

Dans notre réalisation les valeurs propres sont naturellement calculées si et seulement si les polynômes qui les déterminent sont de degré 1.

IV-2.2. Réduction au cas générique

Dans le cas général la méthode de Wasow que nous allons développer ici consiste à chercher une transformation $T(x)$ permettant de se ramener au "cas générique". Autrement dit, si l'on désigne par $\tilde{A}(x)$, la matrice :

$$\tilde{A}(x) = T^{-1} A(x) T - x T^{-1} T'$$

les valeurs propres distinctes de $\tilde{A}(0)$, ne diffèrent pas entre elles d'un entier. Le processus est le suivant.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, un groupe de valeurs propres de A_0 qui diffèrent entre elles d'entiers. Les autres valeurs propres de A_0 , bien que pouvant différer entre elles d'un entier, ne peuvent différer de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ d'un entier. Soit m_i la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i ($i = 1, 2, \dots, p$). On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont ordonnées de la manière suivante :

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(\lambda_p) \tag{IV.2}$$

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} = k_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p - 1), \quad k_i \text{ entiers positifs} \tag{IV.3}$$

Rappelons que la matrice A_0 est déjà sous forme de Jordan. On peut supposer de plus que A_0 est sous la forme suivante :

$$A_0 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

où J_1 est d'ordre m_1 et J_2 est d'ordre $n - m_1$. J_1 est la matrice diagonale par blocs correspondant à la valeur propre λ_1 . J_2 est la matrice $A_0 = J$ à laquelle on enlève les m_1 premières lignes et colonnes. J_2 admet pour valeurs propres :

$$\lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r.$$

On peut écrire la matrice $A(x) = A_0 + x N(x)$ où $N(x) = A_1 + x A_2 + \dots$. Soit $T_0(x)$ la matrice définie par

$$T_0(x) = \begin{bmatrix} x I_{m_1} & \\ & I_{n-m_1} \end{bmatrix}$$

Notons

$$A^{(1)}(x) = T_0^{-1} A T_0 - x T_0^{-1} T_0'$$

Nous avons

$$A^{(1)}(x) = A_0 + x T_0^{-1} N(x) T_0 - x T_0^{-1} T_0' \tag{IV.4}$$

Si l'on écrit $N(x)$ sous la forme :

$$N(x) = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

où N_{11} est d'ordre m_1 , N_{22} est d'ordre $n - m_1$.

En effectuant les produits des matrices dans (IV.4), nous trouvons :

$$A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} J_1 - I_{m_1} & N_{12} \\ & J_2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $A_0^{(1)}$ sont :

$$\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r.$$

Chacune de ces valeurs propres admet la même multiplicité algébrique qu'initialement.

Puisque la matrice $A_0^{(1)}$ n'est plus sous forme de Jordan, l'étape suivante est de ramener la matrice $A_0^{(1)}$ sous forme de Jordan ce qui est le but du paragraphe suivant.

En faisant la même manipulation k_1 fois, les valeurs propres de la matrice $A_0^{(k_1)}$ deviennent :

$$\lambda_1 - k_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r.$$

On peut ainsi se ramener au cas générique en ramenant toutes les valeurs propres, qui ont des différences entières, à être égales. L'algorithme s'arrête au bout de $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ pas.

IV-3. LE CALCUL DE LA FORME DE JORDAN DE $A_0^{(1)}$ ET $A_0^{(k_1)}$

IV-3.1. Le calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(1)}$

La matrice $A_0^{(1)}$ est, après la transformation du paragraphe précédent, sous la forme triangulaire :

$$A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} J_1 - I_{m_1} & N_{12} \\ & J_2 \end{bmatrix}$$

où la matrice N_{12} est une matrice d'ordre $m_1 \times (n - m_1)$ dont tous les coefficients sont probablement fonctions des valeurs propres de la matrice A_0 , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r$. Puisque au début de la première étape, nous avons calculé la forme de Jordan en gardant les valeurs propres comme nombres algébriques, i.e. comme racines des polynômes. Le calcul de la forme de Jordan par l'algorithme du chapitre I sera trop coûteux. Cependant la matrice $A_0^{(1)}$ est sous forme très particulière et l'algorithme pour trouver la forme de Jordan de $A_0^{(1)}$ devrait être plus simple que l'algorithme présenté dans le chapitre I qui est valable pour des matrices de forme générale à coefficients constants ou fonctions holomorphes dans un voisinage de l'origine de \mathbb{C} .

Nous cherchons une matrice P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} I_{m_1} & P_1 \\ 0 & I_{n-m_1} \end{pmatrix}$$

où la matrice P_1 est à déterminer de façon que $P^{-1}A_0^{(1)}P = \text{diag}(J_1 - I_{m_1}, J_2)$. Il est clair que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & N_{12} + P_1J_2 - J_1P_1 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

Donc nous devons choisir P_1 telle que $J_1 P_1 - P_1 J_2 = -N_{12}$. La matrice P_1 peut être construite par la même méthode que celle indiquée dans la remarque IV.1.

IV-3.2. Calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(k_1)}$

Nous discutons dans ce paragraphe le calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(k_1)}$ qui est (notations indépendantes des précédentes) :

$$A_0^{(k_1)} = \begin{pmatrix} J_1 & N_1 & N_2 \\ & J_2 & N_3 \\ & & J_3 \end{pmatrix}$$

où J_1 et J_2 ont la même valeur propre mais J_1 et J_3 n'ont pas de valeur propre commune, J_1, J_2 et J_3 sont sous forme de Jordan.

Remarquons que les coefficients de N_1 , N_2 et N_3 peuvent être des fonctions rationnelles des valeurs propres de A_0 . Si nous utilisons l'algorithme de chapitre I pour le calcul de la forme de Jordan de $A_0^{(k_1)}$, nous aurons besoin de travailler dans le corps $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de A_0 . Pour minimiser le nombre de calculs dans ce corps, nous proposons un algorithme simple pour le calcul de la forme de Jordan de cette matrice qui est triangulaire supérieure.

Les transformations élémentaires P_{ij} , $M_i(a)$, $C_{ij}(a)$ et $L_{ij}(a)$ sont définies dans le chapitre I mais a peut appartenir au corps $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. L'algorithme que nous proposons est basé sur ces transformations élémentaires.

Nous supposons que les ordres de J_1 et J_2 sont n_1 et n_2 respectivement. Notons $B = \begin{pmatrix} J_1 & N_1 \\ & J_2 \end{pmatrix}$. Pour trouver la forme de Jordan de $A_0^{(k_1)}$, on calcule d'abord la forme de Jordan de B . On commence les opérations par la ligne $i = 1$.

Tant que $i < n_1 + n_2$ **faire**

si $B_{i,i+1} \neq 0$ **alors**

$M_i(B_{i,i+1})$ et annuler les autres coefficients $B_{i,j}$ pour $j > i + 1$,
aller à la ligne $i := i + 1$;

sinon

rechercher le premier coefficient non nul entre les éléments $B_{j,i+1}$,
 $B_{j,i+2}, \dots, B_{j,n_1+n_2-1}$; $j = i+2, \dots, n_1 + n_2$;

si ce coefficient non nul existe, notons i_1, j_1 la ligne et la colonne qui lui
correspond.

alors

$M_{j_1}(B_{i_1,j_1})$;

annuler les coefficients non nuls de $B_{i_1,j}$ ($j = i_1+1, \dots, j_1 - 1$);

annuler les coefficients non nuls de B_{j,j_1} ($j = i_1+1, \dots, n_1 + n_2$);

si $i_1 = i$ **alors** l'opération P_{i+1,i_1} et aller à la ligne $i := i + 1$;

sinon si $i_1 \neq i + 1$ **alors**

P_{i+1,i_1} ; pour que la ligne i_1 se trouve sur la ligne $i+1$

$i_1 := i + 1$.

si $j_1 \neq i_1 + 1$ **alors**

P_{j_1,i_1+1} ;

$j_1 := i_1 + 1$

fin

Nous obtenons après ces opérations une matrice de la forme suivante (avec notations indépendantes des précédentes) :

$$C = \begin{bmatrix} J & 0 & b \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

où C_1 est une matrice carrée triangulaire supérieure dont les coefficients sur la diagonale sont λ , a est un vecteur d'ordre égal à l'ordre de la matrice C_1 , $a = (0, 1, 0, \dots, 0)$, b est une matrice d'ordre convenable nulle sauf sur la dernière ligne dont le premier élément est nul et J est une matrice sous forme de Jordan dont la valeur propre est λ . La ligne $(0, 1, a)$ est la $(i+1)$ -ième.

Nous cherchons le premier élément non nul entre les éléments :

$$J_{i-1,i}, J_{i-2,i-1}, \dots, J_{1,2}$$

Si cet élément existe, nous notons j_2 la colonne à laquelle il appartient. C'est à dire que la matrice C est de la forme suivante (notations indépendantes des précédentes):

$$C = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & b \\ & & \lambda & a \\ & & & C_1 \end{bmatrix}$$

où la matrice J_1 est d'ordre j_2 et J_2 est une matrice sous forme de Jordan ayant un seul bloc.

Nous cherchons ensuite le premier élément non nul entre les composants de b . Si $b = 0$, nous continuons l'algorithme ci-dessus pour la ligne $i := i + 1$. Sinon cet élément existe, nous notons i_2 la colonne qui lui correspond dans la matrice C . Nous appliquons l'algorithme suivant :

début

$M_i(B_{i,i_2});$

si $j_2 = i$ *alors* $P_{i+1,i}, P_{i+1,i+2};$

sinon

annuler les coefficients B_{j,i_2} , pour $j = i+1, \dots, i_2 - 1;$

$P_{i+1,i_2};$

pour $j = i_2$ *jusqu'à* $i + 3$ *faire* $P_{j,j-1};$

annuler successivement les coefficients

$B_{i_2-i+r,r}, B_{i_2-i+r-1,r}, \dots, B_{j_2+1,r};$ pour $r = i, i-1, \dots, j_2+1$

aller à la ligne $i+1 (i \leftarrow i+1);$

fin

Nous obtenons, avant d'effectuer les mêmes opérations pour la ligne $i + 1$, une matrice de la forme suivante :

$$C = \begin{bmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

où la matrice \bar{J} est une matrice d'ordre i sous forme de Jordan, C_1 est une matrice d'ordre $n - i$, triangulaire supérieure.

Continuant l'algorithme jusqu'à la ligne $i = n_1 + n_2 - 1$, nous obtenons la forme de Jordan J_0 de la matrice B . Maintenant la matrice $A_0^{(k_1)}$ devient une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} J_0 & N \\ & J_3 \end{pmatrix}$ où J_0 est la forme de Jordan de B , N est une matrice d'ordre convenable. J_0 et J_3 n'ont pas de valeur propre commune. Cette matrice est de la même forme que $A_0^{(1)}$. Donc en appliquant la même méthode que pour $A_0^{(1)}$, on trouve la matrice de Jordan de $A_0^{(k_1)}$.

IV-4. UN EXEMPLE TRAITÉ PAR CET ALGORITHME

Nous considérons un système d'ordre 4 suivant :

$$x \frac{dy}{dx} = A(x) y \quad (\text{IV.5})$$

où $A(x)$ est la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2x^2+x+2 & x^2+2 & -x-7 & x^2+5 \\ x^2-1 & \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 & x^2+2 & \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - 5 \\ 2x^2+x+1 & -x^2-2x+1 & x^2-2 & 2x^2+x \\ x^2 & 1-x & 2x^2+x+1 & 3-x \end{bmatrix}$$

La matrice de tête A_0 est donc,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -7 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Le calcul de solutions formelles du système (IV.5) commence par le calcul de la forme de Jordan. En utilisant l'algorithme du chapitre I, nous obtenons une matrice de passage (*pasjor*) qui transforme A_0 à la matrice J suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{lam} & 0 & 0 & 0 \\ & 1,1 & & \\ & & & \\ 0 & \text{lam} & 0 & 0 \\ & & 1,2 & \\ & & & \\ 0 & 0 & \text{lam} & 0 \\ & & & 1,3 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & \text{lam} \\ & & & 1,4 \end{bmatrix}$$

où $\text{lam}_{1,1}$, $\text{lam}_{1,2}$, $\text{lam}_{1,3}$, $\text{lam}_{1,4}$ sont les racines simples du polynôme

$$P = w^4 - 2w^3 + 5w^2 - 4w + 15.$$

Nous donnons à titre d'exemple une colonne de la matrice de passage (*pasjor*) :

$$\begin{array}{r}
 \left[\begin{array}{cccc} & 3 & & 2 \\ 43 \text{ lam} & & -147 \text{ lam} & +179 \text{ lam} & -120 \\ & 1,1 & & 1,1 & & 1,1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ 330 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} & 3 & & 2 \\ 6 \text{ lam} & & -19 \text{ lam} & +3 \text{ lam} & -15 \\ & 1,1 & & 1,1 & & 1,1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ 110 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} & 3 & & 2 \\ 13 \text{ lam} & & -27 \text{ lam} & +29 \text{ lam} & +60 \\ & 1,1 & & 1,1 & & 1,1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ 330 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} & 3 & & 2 \\ 4 \text{ lam} & & +9 \text{ lam} & +17 \text{ lam} & +15 \\ & 1,1 & & 1,1 & & 1,1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ 330 \end{array} \right]
 \end{array}$$

L'étape suivante de l'algorithme est le calcul d'une liste d'entiers susceptibles d'être différences entières de racines de P . Nous obtenons que la liste est $\{2\}$. Et ensuite nous calculons le pgcd de polynôme P et $P(w-2)$ et nous obtenons

$$P_1 = G = w^2 - 3w + 5, P_2 = \frac{P(w)}{G(w)G(w+2)} = 1.$$

Les valeurs propres $\text{lam}_{1,1}, \text{lam}_{1,2}$ sont racines simples de $G(w+2)$ et les autres $\text{lam}_{1,3}, \text{lam}_{1,4}$ sont racines simples de $P_1(w)$. Nous avons en plus

$$\text{lam}_{1,1} = \text{lam}_{1,3} - 2;$$

$$\text{lam}_{1,2} = \text{lam}_{1,4} - 2.$$

Donc $J = \text{diag}(\text{lam}_{1,3} - 2, \text{lam}_{1,4} - 2, \text{lam}_{1,3}, \text{lam}_{1,4})$ est la matrice de Jordan de A_0 . Ainsi nous pouvons faire les mêmes évaluations pour les matrices pasjor et les $A_i^{(1)}$ ($1 \leq i \leq m = 2$) obtenues.

En faisant plusieurs permutations, nous transformons la matrice J en la matrice

$$\text{diag}(\text{lam}_{1,4}, \text{lam}_{1,4} - 2, \text{lam}_{1,3} - 2, \text{lam}_{1,3}).$$

L'étape suivante est la réduction du paragraphe IV-2.2. Après la première réduction nous trouvons la nouvelle matrice de tête $A_0^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} \text{lam}_{1,4} & -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ & \text{lam}_{1,4} & & & \\ & & \text{lam}_{1,4} & -2 & 0 & 0 \\ & & & \text{lam}_{1,3} & -2 & 0 \\ & & & & \text{lam}_{1,3} & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & \text{lam}_{1,3} \end{bmatrix}$$

où

$$\alpha = \frac{47\text{lam}_{1,4} - 10}{22}, \beta = \frac{(4 \text{lam}_{1,3} + 16) \text{lam}_{1,4} + 19 \text{lam}_{1,3} + 10}{22},$$

$$\gamma = \frac{(6 \text{lam}_{1,3} + 24) \text{lam}_{1,4} + 53 \text{lam}_{1,3} + 3}{66}.$$

Et nous calculons ensuite la forme de Jordan de $A_0^{(1)}$ qui est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{lam}_{1,4} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{lam}_{1,4} & & & \\ & & \text{lam}_{1,4} & -2 & 0 & 0 \\ & & & \text{lam}_{1,3} & -2 & 0 \\ & & & & \text{lam}_{1,3} & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & \text{lam}_{1,3} \end{bmatrix}$$

La deuxième réduction conduit à la matrice de tête $A_0^{(2)}$ de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix}
 \text{lam} & -2 & \alpha & \beta & \gamma \\
 & 1,4 & & & \\
 & & & & \\
 0 & & \text{lam} & -2 & 0 \\
 & & & 1,4 & \\
 & & & & \\
 0 & & 0 & \text{lam} & -2 & 0 \\
 & & & & 1,3 & \\
 & & & & & \\
 0 & & 0 & 0 & \text{lam} \\
 & & & & & 1,3]
 \end{bmatrix}$$

où cette fois,

$$\alpha = \frac{(5208 \text{ lam}_{1,3} + 79011) \text{ lam}_{1,4} + 16069 \text{ lam}_{1,3} - 169628}{2904},$$

$$\beta = \frac{(51616 \text{ lam}_{1,3} + 90733) \text{ lam}_{1,4} + 86531 \text{ lam}_{1,3} - 328924}{8712},$$

$$\gamma = -\frac{(126997 \text{ lam}_{1,3} + 1471) \text{ lam}_{1,4} - 6262 \text{ lam}_{1,3} - 255223}{26136}.$$

Donc d'après l'algorithme du paragraphe IV-3, nous devons savoir si α est nul ou pas. Ceci est un problème non résolu en MACSYMA. D5 implanté en REDUCE et en SCRATCHPAD II, permet de résoudre ce problème (Duval et Dicresenzo [25] [27]).

Pour cet exemple, nous savons que α est différent de zéro. Et nous obtenons la matrice de Jordan de $A_0^{(2)}$ qui est la suivante :

$$\begin{bmatrix}
 \text{lam} & -2, & 1 & 0 & 0 \\
 & 1,4 & & & \\
 & & & & \\
 0 & & \text{lam} & -2 & 0 \\
 & & & 1,4 & \\
 & & & & \\
 0 & & 0 & \text{lam} & -2 & 0 \\
 & & & & 1,3 & \\
 & & & & & \\
 0 & & 0 & 0 & \text{lam} \\
 & & & & & 1,3]
 \end{bmatrix}$$

En continuant les mêmes opérations pour les valeurs propres $\text{lam}_{1,3} - 2$, $\text{lam}_{1,3}$, nous obtenons enfin un système dont la matrice de tête J_0 est :

$$\begin{bmatrix}
 \text{lam}_{1,3} - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \text{lam}_{1,3} - 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \text{lam}_{1,4} - 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \text{lam}_{1,4} - 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \text{lam}_{1,4} - 2
 \end{bmatrix}$$

Nous sommes ramenés au cas générique. Nous obtenons ensuite un système de solutions fondamentales approchées d'ordre 2 : $S = (Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2) x^{J_0}$ où les Q_i sont des matrices d'ordre 4 dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\text{lam}_{1,3}$, et $\text{lam}_{1,4}$.

$$x^{J_0} = \begin{bmatrix}
 x^{\text{lam}_{1,3}-2} & x^{\text{lam}_{1,3}-2} \log(x) & 0 & 0 \\
 0 & x^{\text{lam}_{1,3}-2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & x^{\text{lam}_{1,4}-2} & x^{\text{lam}_{1,4}-2} \log(x) \\
 0 & 0 & 0 & x^{\text{lam}_{1,4}-2}
 \end{bmatrix}$$

Puisque ces deux valeurs propres sont racines simples du polynôme $P = w^2 - 3w + 5$, nous obtenons que, après des simplifications, les coefficients de S sont fonctions rationnelles d'une de ces valeur propre, $\text{lam}_{1,4}$ par exemple. Nous donnons un élément de S à titre d'exemple, qu'il se trouve à la page suivante en raison de présentation.

$S[1, 1] =$

$$\begin{aligned}
 & x^{-\text{lam}_{1,4} - 2} ((- 8219000303519663212093440000 \text{ lam}_{1,4} \\
 & - 15761771579667122388910080000) x^{2 \text{ lam}_{1,4} + 2} \log(x) \\
 & + x^{2 \text{ lam}_{1,4}} ((6963733094969419264438272000 \text{ lam}_{1,4} \\
 & + 6337512570290636934144000000) x^2 + (10582984278374993152081920000 \\
 & - 794569107162339741450240000 \text{ lam}_{1,4}) x \\
 & - 1014343541058306052915200000 \text{ lam}_{1,4} + 2637293206751595737579520000)) \\
 & / 2231555790328273316413440000 .
 \end{aligned}$$

Chapitre V

Solutions Formelles d'un Système Différentiel dans le Voisinage d'un Point Singulier Irrégulier

V-1. INTRODUCTION

Nous avons étudié dans le chapitre IV le problème du calcul des solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires homogènes dans un voisinage d'un point *singulier régulier*. Ce chapitre continue à développer l'algorithme pour calculer les solutions formelles de systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires dans un voisinage d'un point *singulier irrégulier* de la forme suivante :

$$x^h \frac{dy}{dx} = A(x) y \quad (\text{V.1})$$

où $A(x)$ est une matrice d'ordre n que nous écrivons $A(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 \dots$ et $h > 1$ est un entier ($x = 0$ est le point singulier).

Il est bien connu qu'un tel système peut être réduit à une équation différentielle linéaire d'ordre n par la méthode du vecteur cyclique [21]. Les coefficients de l'équation ainsi construite sont longs et difficiles à manipuler. Donc il est souhaitable de chercher des algorithmes directs. Hilali [34] a étudié un algorithme en utilisant le polygone de Newton comme dans le cas d'une équation scalaire d'ordre n [62]. On sait que $h > 1$ ne représente pas forcément une singularité irrégulière. L'algorithme de Hilali nécessite de réduire le système (V.1) à un système sous forme super-irréductible [34], i.e. avec un h minimum. Nous allons appliquer l'algorithme de Turrittin-Wasow (que nous avons étudié dans le chapitre III) pour le calcul des solutions formelles sans utiliser le polygone de Newton.

Cet algorithme consiste à réduire le système (V.1) en plusieurs systèmes séparés, chacun étant :

- > soit une équation scalaire d'ordre 1;
- > soit un système sous forme (V.1) avec $h = 1$, où $x = 0$ est un point singulier régulier.

Dans le premier cas les solutions formelles peuvent être déterminées facilement. Pour le second cas l'algorithme étudié dans le chapitre IV et implanté en MACSYMA peut être utilisé.

En utilisant l'algorithme présenté dans le chapitre I, nous pouvons supposer que la matrice A_0 est réduite à sa forme de Jordan, i.e.

$$A_0 = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p), \quad (\text{V.2})$$

où J_i ($i = 1, \dots, p$) est un bloc de Jordan d'ordre n_i , possédant une unique valeur propre, J_i et J_j ($i \neq j$) n'ayant pas de valeurs propres communes.

En utilisant l'algorithme de bloc diagonalisation que nous avons étudié dans les chapitre II et III, nous pouvons supposer que la matrice de tête du système considéré a une unique valeur propre.

Dans ce chapitre nous allons appliquer l'algorithme de Turrittin-Wasow étudié dans le chapitre III (pour la résolution formelle d'un système d'équations différentielles ordinaires dépendant d'un paramètre) sur le système (V.1).

Ce chapitre et le chapitre IV constituent donc une étude complète du calcul des solutions formelles du système différentiel de la forme (1) avec $h \geq 1$ dans un voisinage de l'origine sans avoir à connaître la nature (régulière ou irrégulière) de la singularité du système à l'origine.

V-2. FORME DE ARNOLD-WASOW DE SYSTEMES DIFFERENTIELS DU TYPE (V.1)

D'après le paragraphe précédent, on peut supposer que la matrice de tête du système

$$x^h \frac{dy}{dx} = A(x) y \quad (\text{V.3})$$

$A_0(x)$ a une unique valeur propre λ .

Une simplification élémentaire et importante consiste à effectuer la transformation suivante :

$$y = e^{\frac{\lambda}{-h+1}x^{-h+1}} z \quad (V.4)$$

Le seul changement dans le système (V.3) occasioné par cette substitution conduit à remplacer A_0 par la matrice $A_0 - \lambda I$. Cette matrice a zéro comme valeur propre unique, elle est donc nilpotente.

La transformation suivante, pour simplifier le système (V.3), est de réduire le système à un système qui est sous forme de Arnold-Wasow. Cette transformation est la même que pour des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre. On peut démontrer le théorème suivant où l'entier d et les matrices Γ_j sont définis dans le chapitre II.

Théorème V.1

Par une transformation non singulière $y = (P_0 + xP_1 + \dots)z$ où $P_0 = I$, le système (V.3) est transformé en un système de la forme suivante :

$$x^h \frac{dz}{dx} = \left\{ A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^d \rho_j \Gamma_j \right] x^r \right\} z \quad (V.5)$$

qui est appelé la forme de Arnold-Wasow du système (V.3).

Les transformations élémentaires définies dans le chapitre II pour des systèmes différentiels peuvent être modifiées en vue du calcul de la forme de Arnold (V.5) du système (V.3). Ici, l'idée est de travailler sur la matrice non commutative $x^h \frac{\partial}{\partial x} I - A(x)$. Les définitions sont les suivantes :

Définitions

Une transformation élémentaire de type holomorphiquement semblable (ou simplement h -semblable) est une des transformations suivantes :

$M_i(a(x))$ (pour des fonctions $a(x)$ satisfaisant $a(0) \neq 0$) :

multiplier la i -ième ligne par a , et la i -ième colonne par $1/a$, puis ajouter au coefficient qui est en position (i, i) la fonction $x^h \frac{a'(x)}{a(x)}$.

$L_{i,j}(a(x)) :$

remplacer la i -ième ligne par la somme de la i -ième ligne et la j -ième colonne multipliée par $a(x)$, puis la j -ième colonne par la différence de la j -ième colonne et la i -ième multipliée par $a(x)$, puis ajouter au coefficient qui est en position (i, j) la fonction $x^h a'(x)$.

$C_{i,j}(a(x)) :$

remplacer la i -ième colonne par la somme de la i -ième colonne et la j -ième colonne multipliée par $a(x)$, puis la j -ième ligne par la différence de la j -ième ligne et la i -ième multipliée par $a(x)$, puis ajouter au coefficient qui est en position (j, i) la fonction $-x^h a'(x)$.

En remplaçant ces opérations dans l'algorithme du chapitre II, il est clair que nous construisons un système sous la forme (V.5).

Donc, on peut supposer que la transformation dans le théorème 2 est déjà effectuée. C'est à dire que l'on peut supposer sans perte de généralité, le système (V.3) sous forme de Arnold-Wasow (V.5).

Exemple

Considérons le système différentiel

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ x^4+x^3 & -x^2 & x^5+x^4+x & 0 \end{pmatrix} y$$

La matrice de tête a été transformée en sa forme de Jordan et elle a une unique valeur propre qui est zéro. La transformation suivante est de réduire ce système à sa forme de Arnold-Wasow. D'après l'algorithme précédent, nous obtenons une matrice de transformation $y = T(x) z$ avec

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x^2 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que le système différentiel considéré soit transformé en le système suivant :

$$x^2 \frac{dz}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^4+x^3 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} z.$$

L'étape suivante est d'effectuer une transformation de shearing qui est étudiée dans le paragraphe suivant.

V-3. LA PREMIERE TRANSFORMATION DE SHEARING

Maintenant le système (V.5) sera transformé par $y = T(x) z$ avec :

$$T(x) = \text{diag}(1, x^\alpha, \dots, x^{(n-1)\alpha}) \quad (\text{V.6})$$

où l'exposant α est à déterminer. Après division par x^α le système transformé devient

$$x^{h-\alpha} \frac{dz}{dx} = \left\{ A_0 - x^{h-\alpha-1} H + \sum_{r=1}^{m_2} \sum_{j=1}^d \rho_{jr} \Gamma_j x^{r-(1+\mu_j-\nu_j)\alpha} \right\} z \quad (\text{V.7})$$

où

$$H = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \dots & \\ & & & (n-1)\alpha \end{bmatrix}$$

et les μ_j et ν_j sont les numéros de la ligne et colonne du coefficient non nul de Γ_j respectivement. Ici la formule suivante est utilisée : $T^{-1}(x)A_0T(x) = x^\alpha A_0$.

Considérons maintenant l'ensemble Σ des nombres rationnels positifs de la forme $\frac{r}{1+\mu_j-\nu_j}$, $r = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, d$ pour lesquels le facteur ρ_{jr} dans (V.7) n'est pas nul.

Deux cas différents sont à considérer :

cas a) : les éléments de Σ n'appartiennent pas à l'intervalle $(0, h-1)$, i.e. tous les éléments de Σ sont supérieurs ou égaux à $h-1$.

Dans ce cas, prenons $\alpha = h - 1$. Le système transformé (V.7) avec $\alpha = h - 1$ devient

$$x \frac{dz}{dx} = \{-H + A_0 + \sum_{r=1}^{m_2} \sum_{j=1}^d \rho_{jr} \Gamma_j x^{r-(1+\mu_j-\nu_j)(h-1)}\} z \quad (\text{V.8})$$

Alors le membre à droite de (V.8) ne contient pas de puissances négatives de x . En effet, si on avait $r - (1 + \mu_j - \nu_j)(h-1) < 0$ pour un terme dans (V.7), alors on aurait $0 < \frac{r}{1+\mu_j-\nu_j} < h-1$, contrairement à notre supposition.

Donc le point $x = 0$ est un point singulier régulier pour le système différentiel (V.8). Un système fondamental de solutions formelles peut être obtenu par l'algorithme étudié dans le chapitre précédent.

Cas b) : Σ contient des nombres dans $(0, h - 1)$.

Toutes les valeurs positives de $\frac{r}{1+\mu_j-\nu_j}$ ne dépassent pas $\frac{1}{n+1}$, donc Σ possède un minimum. Choisissons ce minimum pour valeur de α dans (V.7). Les termes dans le membre à droite n'ont pas de puissances négatives de x , mais au moins un terme contient x avec un exposant nul. Ici, évidemment α peut être rationnel, notons

$$\alpha = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ sont premiers entre eux et positifs}). \quad (\text{V.9})$$

La substitution

$$\bar{x} = x^{1/q} \quad (\text{V.10})$$

conduit alors à un problème n'ayant que des puissances entières de \bar{x} . Si les termes sont réordonnés d'après les puissances de \bar{x} , la nouvelle matrice de tête de \bar{x} aura maintenant de nouveaux coefficients non nuls. Ces coefficients supplémentaires se trouvent tous sur ou au dessous du terme diagonal, puisque au dessus du terme diagonal

$$r - (1 + \mu_j - \nu_j) \alpha > 0.$$

En général, la nouvelle matrice de tête aura deux valeurs propres distinctes. La méthode de bloc diagonalisation du chapitre II et III peut être utilisée et le problème sera décomposé en deux ou plusieurs problèmes d'ordre inférieur.

Si la nouvelle matrice de tête a toujours une unique valeur propre, la convergence de cet algorithme peut être obtenue par la même méthode que celle du paragraphe III-3.2 du chapitre III.

Remarque

Les éléments de la nouvelle matrice de tête peuvent être des fonctions rationnelles des valeurs propres de $A_0(x)$ dans (V.1) qui sont connues que comme racines de polynômes (chapitre I). Alors nous avons à calculer la forme de Jordan d'une matrice à coefficients dans le corps des nombres algébriques. Pour cela il faut déterminer si une expression polynomiale en les valeurs propres est nulle ou pas, ce qui est un problème ouvert en MACSYMA. Nous signalons que les méthodes de D5 [25] [27] peuvent être utilisées (D5 est implanté en REDUCE et en SCRATCHPAD II).

Exemple

Pour l'exemple précédent, nous effectuons une transformation de shearing

$$z = \text{diag}(1, x^\alpha, x^{2\alpha}, x^{3\alpha}) w$$

et nous obtenons le système différentiel suivant :

$$x^{2-\alpha} \frac{dw}{dx} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^{4-4\alpha} + x^{3-4\alpha} & 0 & x^{1-2\alpha} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \alpha & & & \\ & 2\alpha & & \\ & & 3\alpha & \end{pmatrix} x^{1-\alpha} \right] w.$$

Donc, nous prendrons pour α le minimum de $\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\}$, i.e. $\alpha = \frac{1}{2}$. Après la substitution $x = t^2$, on a le système différentiel suivant :

$$t^2 \frac{dw}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2t & 2 \\ 2t^4 + 2t^2 & 0 & 2 & -3t \end{pmatrix} w.$$

La matrice de tête de ce système est :

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a une valeur propre de multiplicité 2 et deux valeurs propres simples ± 2 . Donc l'étape suivante est de diagonaliser ce système par bloc en trois systèmes séparés dont un est d'ordre 2 et deux sont d'ordre 1.

Pour les équations scalaires, les solutions formelles peuvent être calculées facilement. Et pour le système d'ordre 2, on recommence l'algorithme pour le réduire soit à un système dont $h = 1$ soit à une équation scalaire. Et dans tous les cas, les solutions formelles peuvent aussi être construites.

Bibliography

- [1] K. Adjmagbo, Sur la calculabilité des déterminants de matrices d'opérateurs différentiels, Préprint.
- [2] K. Adjmagbo, Déterminants sur des anneaux filtrés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293, série I, 447-449.
- [3] A. S. Amitsur, Differential polynomials and division algebras, Annals of Math. vol. 59, No. 2, 245-278.
- [4] V. I. Arnold, On matrices depending on parameters. Russ. Math. Surv., 26, No. 2(1971), 29-43.
- [5] V. I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, 1988.
- [6] E. Artin, Geometric algebra, Interscience, 1957.
- [7] J-E. Björk, Rings of differential polynomials, North-Holland, 1979.
- [8] J. Briançon & Ph. Maisonobe, Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variables. L'Enseignement Mathématique, t. 30(1984), 7-38.
- [9] W. S. Brown & J. F. Traub, On Euclid's algorithm and the theory of subresultants. J. ACM., vol. 18, No. 4(1971), 505-514.
- [10] W. S. Brown, On Euclid's algorithms and the computation of polynomial common divisors, J. of ACM, vol. 18, 4(1971), 478-504.
- [11] B. Buchberger, A theoretical basis for reduction of polynomials to canonical forms, ACM SIGSAM Bull. vol. 10, No. 3(1976), 19-29.
- [12] B. Buchberger, Some properties of Gröbner bases for polynomial ideals, ACM SIGSAM Bull. vol 10, No. 4(1976), 19-24.
- [13] B. Buchberger, Gröbner basis: an algorithmic method in polynomial ideal theory, in "Recent trends in multidimensional system theory", ed. by N. K. Bose, Reidel(1985).
- [14] G. Chen, Computing the normal forms of matrices depending on parameters, Proceeding ISSAC-89, Portland, USA.

- [15] G. Chen, Opération fondamentales dans l'algèbre de Weyl, RR-722-M-, IMAG, Mai 1988.
- [16] G. Chen, On differential polynomials and their resultants, RR 732-M, IMAG, Mai 1988.
- [17] G. Chen, Gröbner bases in rings of differential operators, MM préprint, vol 3, 1989.
- [18] E. A. Coddington & N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, Mc. Graw-Hill Book Company, INC New York, 1955.
- [19] G. E. Collins, The calculation of the multivariate polynomial resultants. J. ACM, vol. 18, NO. 4(1971), 515-523.
- [20] G. E. Collins, Subresultants and reduced polynomial remainder sequences, J. ACM, Vol. 14, No. 1(1967), 515-532.
- [21] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag Berlin 1970.
- [22] J. Della Dora & S. Watt, Fundamental operations in the ring of differential operators, Preprint.
- [23] J. Della Dora, C. Dicrescenzo & E. Tournier, An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogeneous differential equation at an irregular singular point, Proc. EUROCAM 82, Springer Lecture Notes in Computer Science 144, 273-280, Springer-Verlag, 1982.
- [24] C. Dicrescenzo & D. Duval, Computations with algebraic numbers : the D5 methods. à paraître.
- [25] C. Dicrescenzo & D. Duval, Algebraic computation on algebraic numbers. Computers and Computing, ed. P. Chenin, C. Dicrescenzo, F. Robert, Masson et Wiley 1985, 54-61.
- [26] J. Dieudonné, Les déterminants sur un corps non commutatif, Bull. Soc. Math. Fra. 1943, 27-45.
- [27] D. Duval, Thèse d'Etat, Université de Joseph Fourier, Grenoble, 1987.
- [28] A. Galligo, Some algorithmic questions on ideals of differential operators. EUROCAL'85 II, Lecture Notes in Comp. Sci. 204, 1985, 413-421.
- [29] A. Galligo, A propos du théorème de préparation. Lect. Notes in Math. 409(1974), 543-579.

- [30] F. Gantmacher, *The theory of matrices*, vol. I, II, Chesela, New York.
- [31] I. Gil, *Résolution formelle d'équations différentielles ordinaires linéaires au voisinage de singularité régulière*. Rapport de DEA, IMAG Université de Joseph Fourier, Grenoble 1989.
- [32] R. Hanson, *Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point*. *J. Math. Anal. and Appl.* 16(1968), 280-301.
- [33] R. E. Hartwig, *The resultant and the matrix equation $AX = XB$* , *SIAM J. Appl. Math.* vol. 22, No. 4(1972), 538-544.
- [34] A. Hilali, *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*. Thèse d'Etat, Université de Grenoble I, 1987.
- [35] A. Hilali, *Characterization of linear differential system with a regular singularity*, *Computer Algebra EUROCAL'83*, Springer-Verlag, *Lecture Notices in Computer Sciences* 162(1983), 68-77.
- [36] G. Hufford, *On the characteristic matrix of a matrix of differential operators*, *J. Diff. Equa.*, vol.1(1965), 27-38.
- [37] M. Iwano, *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter ϵ* , *Funk. Ekva.* 5(1963), 71-134.
- [38] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra II*, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1975.
- [39] N. Jacobson, *Pseudo linear transformation*, *Annals of Math.* vol. 38, No. 2, 484-507.
- [40] D. E. Knuth, *The art of computing*, vol. I, II, Addison-Wesley Publishing company, 1981.
- [41] J. J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*. *J. Symbolic Comp.* 2(1986), 3-43.
- [42] D. Lazard, *Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations*. *Proc. EUROCAL'83*, *Lect. Notices of Computer Sciences* 162, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, 146-157.
- [43] M. Lauer, *Generalized p-adic constructions*. *SIAM J. Computing*, vol. 12, No.2(1983), 395-410.

- [44] M. Lauer, Computing by holomorphic images. *Symbolic and Algebraic Computation (Computing Supplementum 4)*, ed. B. Buchberger, G. E. Collins & R. Loos, Springer-Verlag, Wien-New York, 139-168.
- [45] R. Loos, Generalized polynomial remainder sequences. *Symbolic & Algebraic Computation (Computing Supplementum 4)*, ed. B. Buchberger, G. E. Collins & R. Loos, Springer-Verlag, Wien-New York, 115-137.
- [46] B. Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, *L'Enseignement Mathématique*, t. XX, 1-2(1974), 147-176.
- [47] B. Malgrange, Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrégulière. Preprint Institut Fourier, Grenoble, 1981.
- [48] M. Mignotte, Some useful bounds. *Symbolic and Algebraic Computation (Computing Supplementum 4)*, ed. B. Buchberger, G. E. Collins & R. Loos, Springer-Verlag, Wien-New York, 259-263.
- [49] M. Miyake, On the determinant of matrices of ordinary differential operators and an index theorem. *Funk. Ekva.* 26(1983), 155-171.
- [50] F. Mora, Gröbner bases for non-commutative polynomial rings, in *Algebraic algorithms and error-correcting codes, Lecture Notes in Comp. Sci.*, 229, 353-362.
- [51] T. Mora, Gröbner bases in non commutative algebras. Università di Genova, preprint.
- [52] S. Noui-Mehidi, Microlocalisation algébrique, idéaux de fitting et D-modules, Prépublication, Univ. Poitiers, 1986.
- [53] Ore, Theory of non commutative polynomials, *Ann. of Math.* 34(1933), 480-508.
- [54] P. Ozello, Calcul exact des formes de Jordan et de Frobenius d'une matrice, Thèse doctorat, Univ. de Grenoble I, 1987.
- [55] J. P. Ramis, Théorème d'indices de Gevrey pour les équations différentielles, *Memoirs of American Mathematical Society* Vol 48, Num. 296, March 1984.
- [56] Reference Manual of MACSYMA, Symbolics, Version Ten, second printing, Dec. 1983.
- [57] P. Robba, Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle d'équations différentielles. *L'enseignement mathématique*, XXVI, fasc. 3-4(1980), 279-311.

- [58] L. Robiano, On the theory of graded structures, *J. Symbolic Computation* 2(1982), 139-170.
- [59] M. Rothstein, On the pseudo-resultants, *EUROSAM 84, Lecture Notes in Computer Sciences* 174, 386-396.
- [60] Y. Sibuya, Sur la réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 7, No.1(1958), 527-540.
- [61] Y. Sibuya, Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point, *Funkcial. Ekvac.* 4(1962), 83-113.
- [62] E. Tournier, Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR, étude théorique et réalisation. Thèse d'Etat, Université de Grenoble I, 1987.
- [63] H.L. Turriffin, Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations containing a parameter. Contribution to the theory of nonlinear oscillations, II, *Annals of Math. Study* No.29, Princeton 1952, 81-116.
- [64] H. L. Turriffin, Convergent solutions of ordinary homogeneous differential equations in the neighbourhood of a singular point, *Acta Math.* 93(1955), 27-66.
- [65] P. S. Wang, A p-adic algorithm for univariate partial fractions. Proceedings of the 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM Inc., New York 1981, 212-217.
- [66] P. S. Wang, An improved multivariate polynomial factorising algorithm. *Math. Comp.* 32(1978), 1215-1231.
- [67] W. Wasow, Arnold's canonical matrices and the asymptotic simplification of ordinary differential equations, *Linear Alg. and Appl.*, 18(1977), 163-170.
- [68] W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer-Verlag, 1985.
- [69] W. Wasow, *Asymptotic theory of ordinary differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, reprint of the ed. published by Interscience, 1976.
- [70] W. Wasow, On the asymptotic solutions of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter. *J. Math. Phys. (Mass. Univ.)*, 32(1944), 173-183.

- [71] W. Wasow, On the holomorphically similar matrices, *J. Math. Anal. and Appl.*, 4(1962), 202-206.
- [72] Van der Waerden, *Modern algebra*, vol. I & II.
- [73] J. H. M. Wedderburn, Non commutative domain of integrity, *J. Für Math.* 167(1932), 129-141.
- [74] J.H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, 1965.
- [75] D. Y. Y. Yun, *The Hensel lemma in algebraic manipulation*. Ph. D. thesis & Project MAC TR-138, M.I.T., 1974., reprinted Garland Publishing Co., New York, 1980.
- [76] D. Y. Y. Yun, On square free decomposition algorithms. *Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ACM Inc., New York, 1976, 26-35.

Abstract

The work presented in this thesis is an algorithmic work on the asymptotic solutions of systems of linear ordinary differential equations depending or not on a small parameter.

We have proven the convergence of an algorithm and developed a program in Macsyma for computing the normal forms of Frobenius and Jordan of holomorphic matrices under certain hypothesis. We have proposed an algorithm for computing the Arnold's form of matrices depending on parameters and the Arnold-Wasow's form of differential systems depending or not on a small parameter. Using these algorithms, the algorithm of Turrittin-Wasow is adapted to symbolic computation for computing the asymptotic solutions of differential systems depending on a small parameter.

We have studied and implemented in Macsyma an algorithm for computing the asymptotic solutions of systems of linear ordinary differential equations in a neighborhood of a regular singular point. We have applied the algorithm of Turrittin-Wasow studied in the chapter III to the computation of the formal solutions of differential systems in a neighborhood of an irregular singular point.

Key words: Symbolic computation, differential system, asymptotic solution, holomorphic matrix, Jordan's form, Arnold's Form, shearing transformation, regular and irregular singular point.

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse est un travail algorithmique portant sur le calcul de solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires dépendant ou pas d'un paramètre.

Nous avons démontré la convergence d'un algorithme et développé un programme en Macsyma pour le calcul de la forme de Jordan de matrices holomorphes sous l'hypothèse I.1. Nous avons aussi développé un algorithme et un programme en Macsyma pour le calcul de la forme de Arnold de matrices dépendant de paramètres et la forme de Arnold-Wasow de systèmes différentiels dépendant ou pas d'un paramètre. Grâce à ces algorithmes, l'algorithme de Turrittin-Wasow est adapté au calcul formel pour trouver les solutions formelles de systèmes différentiels dépendant d'un paramètre.

Nous avons étudié un algorithme et développé un programme en Macsyma pour le calcul de solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires dans un voisinage du point singulier régulier. Nous avons aussi appliqué l'algorithme de Turrittin-Wasow étudié dans le chapitre III au calcul des solutions formelles de systèmes différentiels dans un voisinage du point singulier irrégulier.

Mots clés : Calcul formel, système différentiel, solution formelle, matrice holomorphe, forme de Jordan, forme de Arnold, transformation de shearing, point singulier régulier et irrégulier.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT INGENIEUR,
DOCTORAT DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M L. Brenig.....

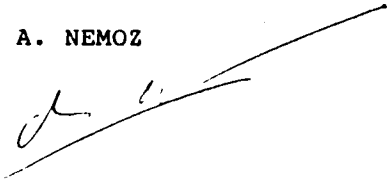
M A. Duval.....

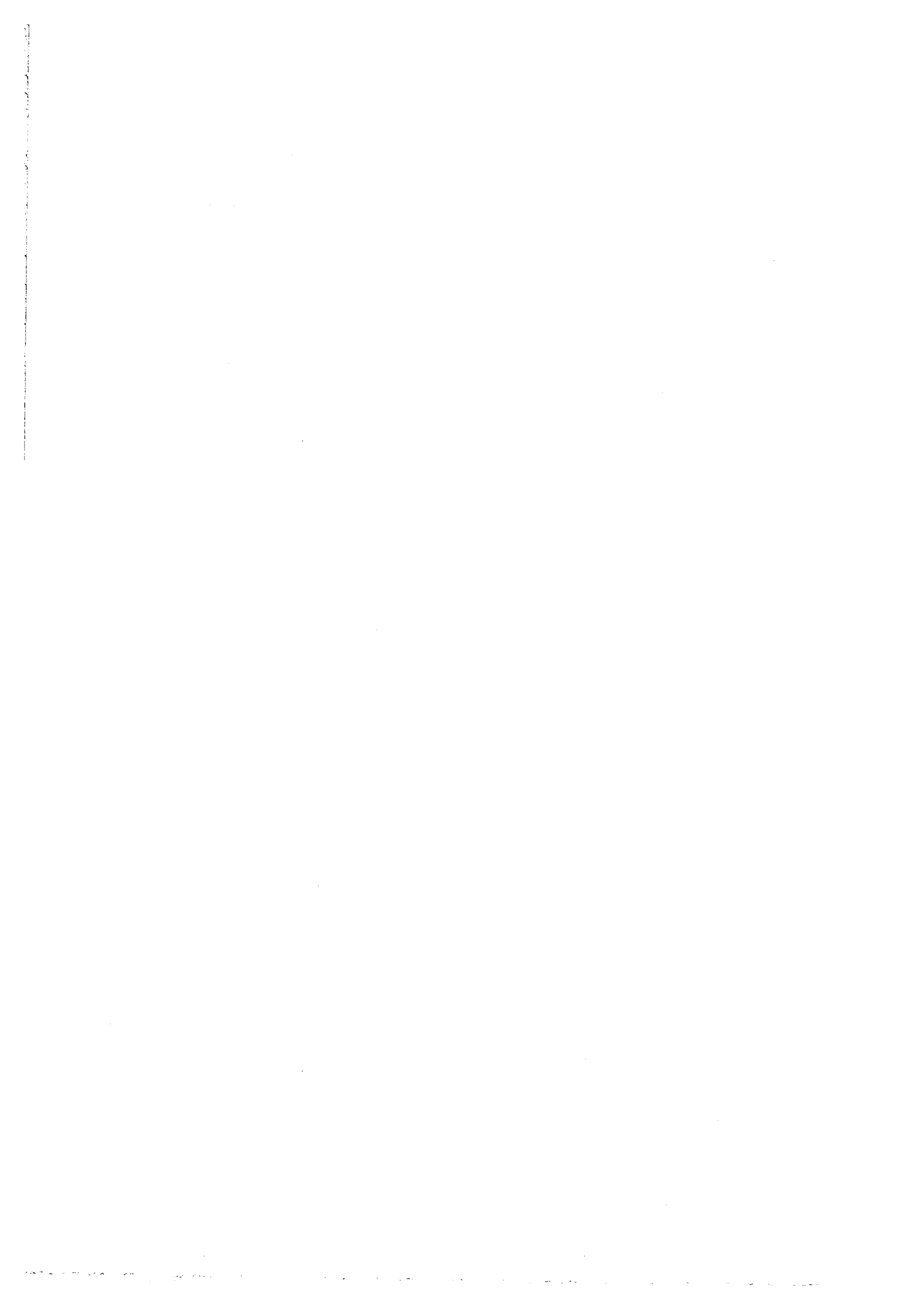
M CHEN Guoting.....est autorisé(e)
à présenter une thèse en vue de l'obtention du Doctorat de
Grenoble I.....Mathématiques Appliquées.....

29 JAN. 1990
Grenoble, le

Le Président de l'Université
Joseph Fourier - Grenoble 1

A. NEMOZ





Résumé

Le travail présenté dans cette thèse est un travail algorithmique portant sur le calcul de solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires dépendant ou pas d'un paramètre.

Nous avons démontré la convergence d'un algorithme et développé un programme en Macsyma pour le calcul de la forme de Jordan de matrices holomorphes sous l'hypothèse I.1. Nous avons aussi développé un algorithme et un programme en Macsym pour le calcul de la forme de Arnold de matrices dépendant de paramètres et la forme de Arnold-Wasow de systèmes différentiels dépendant ou pas d'un paramètre. Grâce à ces algorithmes, l'algorithme de Turrittin-Wasow est adapté au calcul formel pour trouver les solutions formelles de systèmes différentiels dépendant d'un paramètre.

Nous avons étudié un algorithme et développé un programme en Macsyma pour le calcul de solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires dans un voisinage du point singulier régulier. Nous avons aussi appliqué l'algorithme de Turrittin-Wasow étudié dans le chapitre III au calcul des solutions formelles de systèmes différentiels dans un voisinage du point singulier irrégulier.

Mots clés : Calcul formel, système différentiel, solution formelle, matrice holomorphe, forme de Jordan, forme de Arnold, transformation de shearing, point singulier régulier et irrégulier.