



HAL
open science

Contribution à l'étude du découplage des systèmes linéaires multivariables

Jorge Antonio Torres Muñoz

► **To cite this version:**

Jorge Antonio Torres Muñoz. Contribution à l'étude du découplage des systèmes linéaires multivariables. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1990. Français. NNT: . tel-00338383

HAL Id: tel-00338383

<https://theses.hal.science/tel-00338383>

Submitted on 13 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Jorge Antonio TORRES MUNOZ

pour obtenir le titre de DOCTEUR
de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(arrêté ministériel du 23 Novembre 1988)

Spécialité : Automatique

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU DECOUPLAGE
DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

Date de soutenance : 9 Février 1990

Composition du jury :

Président : M. Jean DELLA DORA

Examineurs : M. Christian COMMAULT
M. Jacques DESCUSSE
M. Jean-Michel DION
M. Jean-Paul GAUTHIER
M. Michel GEVERS

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

THESE

présentée par

Jorge Antonio TORRES MUNOZ

pour obtenir le titre de DOCTEUR
de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(arrêté ministériel du 23 Novembre 1988)

Spécialité : Automatique

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU DECOUPLAGE
DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

Date de soutenance : 9 Février 1990

Composition du jury :

Président : M. Jean DELLA DORA

Examineurs : M. Christian COMMAULT
M. Jacques DESCUSSE
M. Jean-Michel DION
M. Jean-Paul GAUTHIER
M. Michel GEVERS

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué sous la direction de Monsieur Jean Michel DION, Directeur de Recherche au C.N.R.S. et Directeur Adjoint du Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Qu'il trouve ici l'expression de ma vive gratitude pour son aide, ses encouragements et la confiance qu'il m'a témoigné durant mon séjour au L.A.G.

J'adresse ma plus profonde reconnaissance à Monsieur Christian COMMAULT, Maître de conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble pour avoir suivi mon travail de thèse avec beaucoup d'intérêt et pour en avoir accepté la co-direction. Je tiens à lui exprimer aussi ma gratitude pour la collaboration et les fructueuses discussions que nous avons eues ainsi que pour ses grandes qualités scientifiques et humaines.

J'aimerais remercier vivement Monsieur Jean DELLA DORA, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble, Laboratoire TIM3, d'avoir accepté la Présidence du Jury.

Je suis honoré de la participation à ce Jury de Monsieur Jacques DESCUSSE, Directeur de Recherche au CNRS, et de Monsieur Michel GEVERS, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Automatique de Louvain La Neuve. Je les remercie plus spécialement pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-Paul GAUTHIER, Professeur à l'Université Claude Bernard d'avoir accepté aimablement de participer à ce jury.

Mes sincères remerciements vont également à tous mes collègues du L.A.G. et de façon particulière à Messieurs S. BOUSSAID, A. MONTANO et C. PILLOU avec lesquels j'ai pu partager un travail intéressant et formateur.

Enfin je ne saurais oublier le précieux support qui m'a été prodigué pendant ces années par l'ensemble du personnel du L.A.G.; je remercie particulièrement Madame Claude MANSON, responsable du Service Documentation ainsi que Mesdames I. BOYER, M.R. CHOISY, M.T. DESCOTES-GENON et L. LEMITRE.

TABLE DES MATIERES

1	INTRODUCTION.	1
2	PRELIMINAIRES.	7
2.1	Structure Finie.	8
2.2	Structure Infinie.	10
2.3	Precompensation et Retour d'Etat.. . . .	12
2.4	Découplage Ligne par Ligne.. . . .	14
2.4.1	<i>Retour d'Etat Régulier.</i>	15
2.4.2	<i>Retour d'éEtat Non Régulier..</i>	16
3	DECOUPLAGE PAR BLOCS.	19
3.1	Enoncé du Problème.	21
3.2	Sous-espaces Maximaux à l'Infini.	23
3.3	Découplage par Blocs par Retour d'Etat Dynamique.	27
3.3.1	<i>Découplage par Blocs avec Stabilité par Retour d'Etat Dynamique.</i>	33
4	INVARIANTS POUR LE DECOUPLAGE PAR BLOCS.	37
4.1	Invariants de Découplage.	41
4.2	Structure Essentielle.	50
4.3	Application au Découplage par Blocs.	57
4.3.1.	<i>Structure Minimale des Systèmes Découplables par Retour d'Etat Dynamique.</i>	61

5	INVARIANTS POUR LE DECOUPLAGE PAR BLOCS AVEC STABILITE.	63
5.1	Préliminaires.	67
5.5.1.	<i>Un rappel sur le Decouplage avec Stabilité.</i>	67
5.5.2.	<i>Un rappel des Propriétés des Matrices de Transfert Stables.</i>	68
5.2	Invariants de Découplage par Blocs avec Stabilité.	71
5.3	Structure Essentielle par Blocs avec Stabilité.	76
5.4	Application au Découplage par Blocs avec Stabilité.	83
5.4.1.	<i>Structure Minimale des Systèmes Découplables avec Stabilité par Retour d'Etat Dynamique.</i>	88
6	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.	93

ANNEXES.

BIBLIOGRAPHIE.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1 INTRODUCTION

Au cours des années 60 et 70 la théorie de systèmes linéaires multivariables a connu un développement formidable, qui est dû en partie à l'étude de propriétés structurelles pour la résolution de divers problèmes de commande.

Dans ce sens le découplage est un sujet qui a motivé un nombre impressionnant de travaux de recherche. Une compilation assez vaste des contributions sur ce domaine jusqu'aux années 70 est donnée dans [M2]. En ce qui concerne les contributions plus récentes on peut consulter [D2].

Le problème a été formulé dans un contexte de variables d'état par Morgan en 1963 [M6]. Soit (C, A, B) un système linéaire stationnaire de dimension finie décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u ; & u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n \\ y &= C x ; & y \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Il s'agit de trouver (si possible) un retour d'état $(u = F x + G(v))$, tel que chaque entrée commande indépendamment une seule sortie du système bouclé.

On peut distinguer en gros l'évolution de la théorie de découplage de la façon suivante :

- *Découplage diagonal ($p=m$) à l'aide d'un retour d'état régulier $|G| \neq 0$.* Falb et Wolovich en 1967 dans [F1] ont donné la première solution complète de découplage. Puis Gilbert en 1969 a déterminé des modes fixes qui interviennent quand on désire découpler un système [G1]. Le découplage avec stabilité sera possible lorsque les dynamiques associées

au modes fixes soient stables.

- *Découplage par blocs par retour d'état régulier* (un sous-ensemble d'entrées commandant indépendamment un sous-ensemble de sorties). En 1971 Morse et Wonham [M2] ont utilisé des méthodes géométriques pour donner des conditions de découplage avec assignation arbitraire de valeurs propres. Pour un système découplable et stabilisable ; ils emploient un algorithme d'extension dynamique qui rend le système découplable par retour d'état statique, et le système étendu ainsi obtenu ne possédant pas des modes fixes introduits par Gilbert [G1]. Plus tard, en 1983, Hautus et Heymann dans l'approche matrice de transfert (en [H1]) ont donné des conditions de découplage avec stabilité à l'aide des différentes lois de commande telles que la précompensation et le retour d'état statique ou dynamique. Ces conditions s'expriment exclusivement en fonction des propriétés structurelles du transfert du système.

- *Découplage ligne par ligne par retour d'état non régulier*. Une solution du problème à l'aide d'un retour d'état dynamique non régulier dans l'approche transfert du découplage a été donnée par Dion et Commault en 1988 [D7]. Les auteurs ont montré que si le découplage est possible il le sera aussi avec stabilité. Puis Descusse et collaborateurs en 1988 [D3] ont donné des conditions structurelles de découplage qui se basent d'une part sur des entiers invariants par bouclage "les ordres essentiels" [C3] et d'autre part sur l'étude de la modification de la structure à l'infini par feedback non régulier [L1].

Actuellement après un quart de siècle de recherches le problème du découplage dans sa formulation la plus générale, c'est à dire par retour d'état sans restrictions sur $u = Fx + Gv$ et avec stabilité du système bouclé, reste encore ouvert.

Au tableau 1 nous citons un ensemble des problèmes du découplage résolus et non résolus. On trouve en référence les travaux qui ont apporté des solutions au problème correspondant.

D E C O U P L A G E				
	LIGNE PAR LIGNE		PAR BLOCS	
	sans stabilité	avec stabilité	sans stabilité	avec stabilité
RETOUR d'ETAT STATIQUE	REGULIER	[F1] Falb et Wolovich (cas diagonal)	[G1] Gilbert (cas diagonal)	[M3] Morse et Wonham [H1] Hautus et Heymann
	NON REGULIER	[D3] Descusse, Lafay et Malabre.	?	[D5] Descusse ?
RETOUR d'ETAT DYNAMIQUE	REGULIER	/		
	NON REGULIER	[D7] Dion et Commault		[H1] Hautus et Heymann [C3] Commault, Dion et Torres [O1] Ozguler et Eldem

TABEAU 1. Quelques résultats significatifs sur le découplage par blocs par retour d'état statique ($u = Fx + Gv$) ou dynamique ($u = F(s)x + Gv$) avec G régulier ou non régulier.

Dans cette thèse notre intérêt se porte sur le *découplage par blocs au moyen d'un retour d'état dynamique éventuellement non régulier*, en utilisant essentiellement l'approche matrice de transfert. Nous traiterons après un cas encore plus important, celui du découplage avec stabilité.

Notre attention a été aussi attirée par la détermination des systèmes découplés par blocs de structure la plus simple possible. Ces solutions sont intéressantes car elles sont liées au retard minimal imposé à la dynamique du système pour pouvoir le découpler. Dans le cas ligne par ligne, le retard minimal est déterminé par les entiers invariants par bouclage introduits dans [C3, D7].

Au tableau 2 nous présentons un résumé des résultats en matière de systèmes découplés par blocs par précompensation de structure minimale.

	LIGNE PAR LIGNE	PAR BLOCS
DEGRE DE MCMILLAN MINIMAL	[D7] Dion, Commault	[D8] <u>Dion, Torres et Commault</u>
STRUCTURE A L'INFINI MINIMALE DETAILLEE	[C3] Commault, Descusse, Dion, Lafay et Malabre	[C4] <u>Commault, Descusse, Dion et Torres</u>
DEGRE DE MCMILLAN MINIMAL AVEC STABILITE	[D7] Dion et Commault	[C5] <u>Commault, Dion et Torres</u>
STRUCTURE INSTABLE DETAILLEE	[D7] Dion et Commault	[D9] <u>Dion, Commault et Torres</u>

TALBEAU 2. Structure minimale du système découplé par précompensation.

Aussi bien pour le découplage que pour le découplage avec stabilité ; les systèmes découplés minimaux que l'on obtient par retour d'état dynamique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus par précompensation [D8, C4, C5, D9].

Pour le découplage sans stabilité, les systèmes minimaux (qu'on obtient par retour d'état statique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus par précompensation [D5].

Le contenu des chapitres de cette thèse est le suivant :

Dans le chapitre 2, nous rappelons quelques notations et quelques notions de base sur la structure finie et sur la structure à l'infini des matrices de transfert. Puis nous présentons les lois de commande employées dans ce travail. Un bref rappel de quelques résultats existants sur le découplage est donné à la fin du chapitre.

Le découplage par blocs par retour d'état dynamique (non régulier) est abordé dans le chapitre 3. Il est essentiel, pour la solution de ce problème, d'étudier certains sous-espaces réels associés au comportement à l'infini d'une matrice rationnelle déduite de la matrice de transfert du système. Le découplage avec stabilité est également considéré. D'une manière analogue au cas ligne nous montrons que si le découplage par blocs est possible il le sera avec stabilité.

L'étude, abordée dans le chapitre 4, concerne les systèmes découplés par blocs de degré de McMillan minimal et de structure à l'infini minimale. A cette fin deux invariants par bouclage sont introduits. Ainsi le degré de McMillan minimal du i ème bloc du système découplé sera déterminé à l'aide d'un entier invariant par bouclage. Ensuite, nous passons à l'étude de la structure à l'infini minimale du système découplé, en la détaillant à l'aide

d'une liste d'entiers invariants par bouclage associée au ième bloc du système découplé. A la fin du chapitre nous montrerons que les systèmes minimaux que l'on peut obtenir en découplant par retour d'état dynamique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus en découplant par précompensation.

Le chapitre 5 est consacré à la généralisation des invariants du chapitre précédent au cas du découplage par blocs avec stabilité. Nous déterminerons le degré de McMillan minimal et la structure à l'infini minimale qui peuvent être obtenus en découplant un système par blocs et avec stabilité à l'aide d'un précompensateur. L'étude est fait via deux invariants (par bouclage qui préserve la stabilité). Nous illustrerons sur un exemple que si le découplage avec stabilité par retour d'état dynamique est possible, alors les systèmes minimaux que l'on peut obtenir sont identiques à ceux obtenus par précompensation.

CHAPITRE 2

PRELIMINAIRES

2 PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notations utiles à l'étude des systèmes linéaires. Nous rappelons brièvement par la suite des préliminaires sur la structure finie et infinie d'une matrice de transfert. Nous spécifions les lois de commande considérées dans ce travail et pour finir nous rappelons quelques résultats sur le découplage ligne par ligne.

Quelques notations : Pour l'étude des systèmes linéaires représentés par des matrices de transfert, les notations fréquemment adoptées sont les suivantes.

L'anneau de polynômes à coefficients dans le corps des réels \mathbf{R} est noté $\mathbf{R}[s]$. Une fraction rationnelle $f(s) = n(s)/d(s)$ est le rapport entre deux polynômes $n(s)$, $d(s)$. Elle est dite propre (strictement propre) si $\deg d(s) \geq \deg n(s)$ ($\deg d(s) > \deg n(s)$). L'ensemble des fractions rationnelles est un corps noté $\mathbf{R}(s)$. L'ensemble des fractions rationnelles propres est un anneau noté $\mathbf{R}_p(s)$.

Les ensembles de matrices de dimension $p \times m$ à éléments dans $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{R}_p(s)$, $\mathbf{R}[s]$ et \mathbf{R} sont notés respectivement $\mathbf{R}^{p \times m}(s)$, $\mathbf{R}_p^{p \times m}(s)$, $\mathbf{R}^{p \times m}[s]$ et $\mathbf{R}^{p \times m}$.

Les unités de l'anneau $\mathbf{R}^{n \times n}[s]$, c'est à dire les matrices polynômiales et d'inverse polynômiale, sont appelées matrices unimodulaires. Une matrice $B(s)$ $n \times n$ est dite bicausale si elle est rationnelle propre et d'inverse rationnelle propre, $B(s)$ est donc une unité de l'anneau $\mathbf{R}_p^{n \times n}(s)$.

2.1 Struture Finie

Il existe une grande variété de définitions concernant la structure finie d'un système linéaire. Des études approfondies sur le sujet ont été faites dans [M4, S1]. Dans ce travail nous nous limitons à la définition des pôles et des zéros basée sur les factorisations de Smith-McMillan d'une matrice de transfert [C1, K1].

Définition 2.1 : Forme de Smith-McMillan

Soit $T(s)$ une matrice de transfert rationnelle propre $p \times m$. Il existe des matrices unimodulaires $U_1(s)$ et $U_2(s)$ telles que $T(s)$ peut s'écrire :

$$T(s) = U_1(s) \Lambda(s) U_2(s)$$

$\Lambda(s)$ est une matrice de la forme :

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta(s) = \text{diag} \left(\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \right)$$

$\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ étant des polynômes premiers entre eux et r le rang de $T(s)$

$\varepsilon_i(s)$ divise $\varepsilon_{i+1}(s)$ et $\psi_{i+1}(s)$ divise $\psi_i(s)$ pour $i = 1, \dots, r-1$

De plus $\Lambda(s)$ est uniquement définie et appelée formē de Smith-McMillan de $T(s)$.

Définition 2.2 : Pôles et zéros

Les pôles de $T(s)$ sont les racines de $\psi_i(s)$ et les zéros de $T(s)$ sont les racines de $\varepsilon_i(s)$, pour $i = 1, \dots, r$.

Cette définition coïncide avec la définition géométrique pour un

ystème commandable et observable.

Exemple 2.1 : Considérons la matrice de transfert $T(s)$ suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+5} & \frac{1}{s+7} \end{bmatrix}$$

écrivons $T(s)$ sous la forme $\frac{N(s)}{D(s)}$; avec $D(s)$ le PPCM de dénominateurs de $T(s)$, nous avons :

$$N(s) = \begin{bmatrix} (s+3)(s+5)(s+7) & (s+1)(s+5)(s+7) \\ (s+1)(s+3)(s+7) & (s+1)(s+3)(s+5) \end{bmatrix}$$

$$D(s) = (s+1)(s+3)(s+5)(s+7).$$

Un moyen simple pour calculer la forme de Smith-McMillan de $T(s)$ est le suivant ; posons $N_0(s) = 1$ et soit $N_i(s)$ le PGCD des mineurs d'ordre i de $N(s)$, on a :

$n_i(s) := \alpha_i N_i(s)/N_{i-1}(s)$ où α_i est un facteur de normalisation tel que le coefficient de la plus haute puissance de $n_i(s)$ est égal à un.

$$\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) = n_i(s)/D(s) \text{ après réduction et pour } i = 1, \dots, r$$

Dans notre cas : $N_1(s) = 1$ et $N_2(s) = D(s) (-s+1)$. Alors la forme de Smith McMillan de $T(s)$ est donnée par

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)} & 0 \\ 0 & (s-1) \end{bmatrix}$$

$T(s)$ a donc quatre pôles stables en $s = -1, -3, -5, -7$ et un zéro instable en $s = 1$.

2.2 Structure Infinie

La structure à l'infini joue un rôle fondamental dans la résolution de différents problèmes de commande [D2, D3, D8]. Partons de la définition de Rosenbrock, (1970) donnée dans [R1].

Définition 2.3 : Pôles et zéros à l'infini

Soit $T(s)$ une matrice rationnelle $p \times m$. On dit qu'elle a un zéro (respect. un pôle) à l'infini d'ordre k si $T(1/\omega)$ a un pôle (respect. un zéro) d'ordre k en $\omega = 0$.

Ainsi une fonction de transfert propre n'aura qu'un seul zéro à l'infini d'ordre égal à la différence des degrés du dénominateur et du numérateur.

Exemple 2.2 : Cas monovariante

$$\text{Soit la fonction de transfert : } F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\text{elle peut s'écrire aussi : } F(s) = \frac{1}{s^2} B(s); \text{ avec } B(s) = \frac{s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$F(s)$ a un zéro à l'infini d'ordre 2, $B(s)$ est bicausale n'ayant pas de singularités en $s = \infty$.

Pour les matrice de transfert, on peut dire que les zéros sont des valeurs de la fréquence complexe s (l'infini étant inclus dans les valeurs de s), pour lesquelles il y a une perte du rang de la matrice de transfert.

Nous allons voir que, comme dans le cas monovisible, la structure à l'infini d'une matrice de transfert peut s'exhiber à l'aide de matrices bicausales [D2, V6].

Définition 2.4 : Forme de Smith-McMillan à l'infini

Soit $T(s)$ une matrice rationnelle propre $p \times m$. Il existe des matrices bicausales $B_1(s)$, $B_2(s)$ telles que $T(s)$ peut s'écrire :

$$T(s) = B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$$

avec

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Delta(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-n_r} \end{bmatrix}$$

$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 0$, r étant le rang de $T(s)$.

De plus, $\Lambda(s)$ est uniquement définie et appelée la forme de Smith-McMillan à l'infini de $T(s)$

Définition 2.5 : Zéros à l'infini

Les zéros à l'infini de $T(s)$ matrice de transfert rationnelle propre sont donnés par la forme de Smith-McMillan à l'infini de $T(s)$. On dira que $T(s)$ a r zéros à l'infini d'ordres respectifs n_1, n_2, \dots, n_r .

Exemple 2.3 : Considérons à nouveau la matrice :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+5} & \frac{1}{s+7} \end{bmatrix}$$

le calcul de sa forme de Smith McMillan à l'infini peut se faire comme précédemment en prenant $N_i(s)$ le PGCD des mineurs d'ordre i , mais cette fois ci, de $T(s)$ sur $\mathbb{R}_p(s)$. De ceci il découle une expression très simple qui nous permet d'obtenir les ordres des zéros à l'infini. Soit q_i l'ordre minimum des zéros à l'infini des mineurs d'ordre i de $T(s)$, on a :

$$n_i = q_i - q_{i-1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, r \text{ avec } q_0 = 0$$

dans notre exemple $q_1 = 1$ et le seul mineur d'ordre 2 est $N_2(s) = (-s+1) / (s+1)(s+3)(s+5)(s+7)$, donc $q_2 = 3$.

Ainsi $T(s)$ a deux zéros à l'infini d'ordres 1 et 2 respectivement.

2.3 Précompensation et Retour d'Etat

Dans ce paragraphe nous présentons les types de lois de commande qui seront utilisés dans la suite de ce travail.

Considérons d'abord une matrice de transfert $T(s)$ et une réalisation minimale en variables d'état (C, A, B) de $T(s)$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu ; & u &\in \mathbb{R}^m ; & x &\in \mathbb{R}^n ; \\ y &= Cx & ; & & y &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

avec $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Les types de lois de commande considérés sont :

- 1) Précompensation : $u = G(s) v$, avec $G(s)$ matrice de transfert propre ;
- 2) Retour d'état dynamique : $u = F(s) x + G v$, avec $F(s)$ matrice de transfert propre et G matrice constante ;
- 3) Retour d'état statique : $u = F x + G v$, avec F et G matrices constantes.

Quand la matrice G est non régulière on parlera de retour d'état statique (ou dynamique) non régulier.

Maintenant, voyons la relation entre précompensation et retour d'état. Soit $T_F(s)$ la matrice du système bouclé dans le cas où G est régulière :

$$\begin{aligned} T_F(s) &= C (sI - A - BF)^{-1}BG \\ &= T(s) [I + F(sI - A - BF)^{-1}B]G = T(s) B(s) \end{aligned}$$

$B(s)$ est causale et $B^{-1}(s) = G^{-1} [I - F(sI - A)^{-1}B]$ l'est aussi ;

$B(s)$ est donc bicausale.

Alors, tout retour d'état peut s'écrire comme un précompensateur bicausal. La propriété réciproque reste vraie quand on se restreint au retour d'état dynamique. Ceci est précisé par le résultat de Hautus et Heymann dans

[H2].

Théorème 2.1 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert propre et (C, A, B) une réalisation de $T(s)$. Soit $C(s)$ un précompensateur propre, alors $C(s)$ peut être réalisé par un retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$) sur la réalisation (C, A, B) si et seulement si $C(s)$ est bicausale.

Une condition supplémentaire apparaît nécessaire si l'on veut réaliser $C(s)$ par retour d'état statique. Une telle condition n'est pas simple à vérifier, ce qui rend difficile le traitement du retour d'état statique par l'approche transfert.

2.4 Découplage Ligne par Ligne.

Le découplage a été étudié depuis plusieurs années. La motivation est d'origine pratique. Un système multivariable est découplé si chaque sortie du système peut être commandée indépendamment par une et une seule entrée du système.

Considérons un système linéaire invariant (C, A, B) décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu ; & u &\in \mathbf{R}^m ; x \in \mathbf{R}^n \\ y &= Cx ; & y &\in \mathbf{R}^p \end{aligned}$$

que l'on cherche à découpler. La formulation du problème est due à Morgan (1964), qui donna une condition suffisante de découplage (le produit CB non singulier), [M6].

2.4.1 Retour d'Etat Régulier.

La première solution complète a été donnée dans [F1] par Falb et Wolovich (1967). Ils ont considéré le découplage diagonal ($p=m$) à l'aide d'un retour d'état $u = Fx + Gv$, avec G matrice constante régulière. Leur condition s'exprime de la façon suivante :

Théorème 2.2 :

$$\text{Soit } J = \begin{bmatrix} C_1 A^{n_1-1} B \\ \vdots \\ C_m A^{n_m-1} B \end{bmatrix}$$

avec C_i la i ème ligne de C et $n_i := \min\{k, \text{tel que } C_i A^{k-1} B \neq 0\}$.

Le système (C, A, B) est découplable par retour d'état régulier ($u = Fx + Gv$, avec G régulière) si et seulement si J est inversible.

Exemple 2.4 : Soit le système

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Après calculs on trouve : } n_1 = 2, n_2 = 1 \text{ et } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système (C, A, B) n'est donc pas découplable.

Les n_i correspondent aux zéros infinis de lignes du système (C, A, B) ,

[V3]. La condition de découplage que nous venons de voir a été reformulée en termes de la structure infinie par Descusse et Dion dans [D2].

Théorème 2.3 :

Le système (C, A, B) linéaire carré inversible peut être découplé par un retour d'état régulier si et seulement si l'union des zéros infinis de (C_i, A, B) est égale aux zéros infinis de (C, A, B) .

Sur l'exemple précédent on a :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix} = B_1(s) \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-2} \end{bmatrix} B_2(s)$$

$T(s)$ a deux zéros infinis d'ordres (1, 2) et ses lignes ont chacune un zéro infini d'ordre 1, donc $T(s)$ n'est pas découplable.

Notons qu'il suffit de comparer deux listes d'entiers (les ordres des zéros à l'infini), pour pouvoir affirmer qu'un système est découplable. Ce résultat peut être étendu au cas blocs. On peut dire brièvement que le découplage par blocs est possible si et seulement si l'union des zéros à l'infini des blocs de lignes de $T(s)$ est égale aux zéros à l'infini de $T(s)$ [D1].

2.3.2 Retour d'Etat Non Régulier.

Jusqu'à maintenant nous avons considéré un retour d'état $u = Fx + Gv$, avec G régulier. Pour les systèmes non carrés, avec un nombre d'entrées supérieur à celui des sorties ($m > p$) il est restrictif de travailler avec des lois de commande régulières.

Exemple 2.5 : Soit $T(s)$ tel que :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & s^{-5} \\ s^{-1} & s^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$T(s)$ a deux zéros à l'infini d'ordres 1 et 4, les ordres des zéros infinis des lignes sont 2 et 1. $T(s)$ n'est donc pas découplable par retour d'état régulier. Par contre le compensateur constant G donné par :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

découple bien $T(s)$ en : $T(s) G = \begin{bmatrix} s^{-5} & 0 \\ 0 & s^{-3} \end{bmatrix}$

En considérant un retour d'état dynamique non régulier Dion et Commault (1988) ont donné une solution au problème de découplage ligne par ligne, à savoir :

Théorème 2.4 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ rationnelle propre de rang p et de noyau statique nul. $T(s)$ peut être découplée par un retour d'état dynamique non régulier si et seulement si

$$m \geq 2p - k.$$

où k est le rang en colonnes à l'infini de la matrice interacteur de $T(s)$.

La matrice interacteur $I(s)$ de $T(s)$ est une matrice polynomiale (triangulaire inférieure) associée de manière unique à $T(s)$; elle est

introduite par Wolovich et Falb dans [W3]. Plus tard Morse démontrera que $I^{-1}(s)$ correspond à la forme de Hermite de $T(s)$ sur $\mathbb{R}p(s)$ [M5].

Il n'est pas très restrictif de considérer uniquement des matrices de noyau statique nul ($\text{Ker } T(s) \cap \mathbb{R}^m = 0$). Si $T(s)$ n'a pas cette propriété elle peut être rendue de noyau statique nul en éliminant ses entrées non indépendantes. En termes d'espace d'état $T(s)$ sera de noyau statique nul si et seulement si B est injective dans toute réalisation (C, A, B) de $T(s)$.

Reprenons l'exemple précédent, en factorisant d'abord $T(s)$ comme il suit :

$$T(s) = \begin{bmatrix} I^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix} B(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-3} & 0 \end{bmatrix} B(s)$$

$$\text{la matrice interacteur de } T(s) \text{ est : } I(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -s^4 & s^3 \end{bmatrix}$$

Le rang en colonnes à l'infini de $I(s)$ est défini comme le rang de I_0 , où $I_0 := \lim_{s \rightarrow \infty} \{I(s) \text{diag}(s^{-k_1}, \dots, s^{-k_p})\}$, avec k_i entier tel que I_0 n'a pas de colonnes nulles lorsque s tend vers l'infini [D7].

Dans l'exemple,

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \{I(s) \cdot \text{diag}(s^{-4}, s^{-3})\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

alors, le rang en colonnes à l'infini k de $I(s)$ est égal à 1.

Le nombre d'entrées étant $m = 3$ et le nombre de sorties étant $p = 2$, on a donc $m = 2p - k$, les trois entrées sont nécessaires pour découpler $T(s)$.

CHAPITRE 3

DECOUPLAGE PAR BLOCS

3 DECOUPLAGE PAR BLOCS

Ce chapitre est consacré à l'étude du découplage par blocs des systèmes linéaires invariants de dimension finie représentés par des matrices de transfert. Nous aborderons le découplage à l'aide d'un précompensateur $C(s)$, en construisant $C(s)$ pour que celui-ci soit réalisable par retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$, G étant éventuellement non régulière) sur une réalisation minimale de $T(s)$.

Dans un premier temps, afin de donner une solution à ce problème, nous introduisons pour une matrice rationnelle $N(s)$ un espace réel relié au comportement à l'infini des colonnes de $N(s)$. Puis nous donnerons une condition nécessaire et suffisante de découplage par blocs par retour d'état dynamique éventuellement non régulier.

En ce qui concerne le découplage (par blocs) avec stabilité nous allons montrer que si le découplage est possible, il le sera aussi avec stabilité.

Avant de commencer, nous allons essayer d'expliquer la raison de l'intérêt que nous portons, d'une part au retour d'état et d'autre part au découplage par blocs.

Pour le premier cas, nous pouvons dire qu'un retour d'état est en général plus simple que le précompensateur équivalent, dans le sens qu'il rajoute moins de dynamique. D'une façon plus concrète nous avons la proposition suivante [D7] :

Proposition 3.1 :

Considérons un système de matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ strictement

propre de noyau statique nul et soit (C, A, B) une réalisation minimale de $T(s)$. Soit $C(s)$ un précompensateur réalisable par retour d'état statique ou dynamique ($u = F(s)x + Gv$), alors $F(s)$ possède un degré de McMillan inférieur ou égal à celui de $C(s)$.

Le découplage par blocs peut être employé quand le découplage ligne par ligne n'est pas possible. Illustrons ceci par l'exemple suivant :

Exemple 3.1 :

Considérons la matrice de transfert $T(s)$ et le précompensateur $C'(s)$ suivants :

$$T(s) \cdot C'(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$$

$C'(s)$ découple bien $T(s)$. Par contre nous pouvons montrer que $T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne par retour d'état dynamique.

Néanmoins $T(s)$ sera découplable par un précompensateur réalisable par retour d'état dynamique non régulier ($u=F(s)x+Gv$, G non régulier). Ces précompensateurs ont la propriété d'être de rang plein en colonnes lorsque s tend vers l'infini. Dans l'exemple un tel $C(s)$ et $T(s) \cdot C(s)$ sont donnés par :

$$T(s) \cdot C(s) = T(s) \cdot \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & s^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-2} & -s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\lim_{s \rightarrow \infty} C(s)) = 3$, $C(s)$ sera donc réalisable par retour d'état dynamique [D7].

3.1 Enoncé du Problème

Considérons un système de matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ strictement propre, décomposé en blocs de lignes, relativement à une partition de sortie (p_1, \dots, p_k) telle que $p_1 + p_2 + \dots + p_k = p$, de la manière suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix} ; \text{ avec } T_i(s) \in \mathbf{R}_p^{p_i \times m}(s)$$

Nous dirons que $T(s)$ est *découplée par blocs*, relativement à (p_1, \dots, p_k) si il existe des entiers m_1, \dots, m_k qui satisfont la propriété $\sum_{i=1}^k m_i = m$, de manière que $T(s)$ puisse s'écrire sous la forme bloc diagonale suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{kk}(s) \end{bmatrix} = \text{diag}(T_{11}(s), \dots, T_{kk}(s))$$

avec $T_{ii}(s) \in \mathbf{R}_p^{p_i \times m_i}(s)$.

Cela veut dire qu'un sous-ensemble d'entrées agit sur un et seulement un sous-ensemble de sorties. Pour qu'une telle relation soit effective il faut que $T_{ii}(s)$ soit non nulle, dans ce cas $T(s)$ est dit non dégénérée.

Le problème de découplage analysé dans ce travail sera de *trouver (si possible) un précompensateur $C(s)$ réalisable par retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$, avec G éventuellement non régulière) sur une réalisation minimale de $T(s)$, tel que $T(s) \cdot C(s)$ soit découplée par blocs et non*

dégénérée.

Une condition supplémentaire est imposée aux précompensateurs $C(s)$ afin d'éviter les trivialisés ($C(s) = 0$). Nous supposons par la suite que $C(s)$ satisfait la "condition d'admissibilité" décrite par :

$$\text{rang } T(s) C(s) = \text{rang } T(s) \quad (3.1)$$

avec $\text{rang } T(s)$ le rang de $T(s)$ sur le corps de fonctions rationnelles. La condition (3.1) est parfois appelée condition de préservation de la commandabilité fonctionnelle de sortie. En effet, si $T(s)$ est de dimension $p \times m$, alors $T(s)$ possède la propriété de commandabilité fonctionnelle de sortie si et seulement si $\text{rang } T(s) = p$ [B1, C6].

Nous supposons par la suite que $T(s)$ vérifie la condition nécessaire et suffisante de découplage par blocs par précompensation de [H1], qui est donc nécessaire pour le découplage par précompensation réalisable par retour d'état dynamique ; elle est donnée par :

$$\text{rang } T(s) = \sum_{i=1}^k \text{rang } T_i(s) \quad (3.2)$$

où $T_i(s)$ représente le i ème bloc de lignes de $T(s)$.

Dans le cas du découplage ligne par ligne la condition (3.2) est équivalente à $T(s)$ surjective. Un précompensateur qui découple est donné par $C(s) = T^*(s) \cdot 1/s^\alpha$, avec $T^*(s)$ une inverse à droite de $T(s)$ et α un entier suffisamment grande pour assurer que $C(s)$ soit propre.

Actuellement, un problème reste encore ouvert, celui du découplage ligne par ligne (par blocs) par retour d'état statique non régulier avec stabilité, (voir tableau 1).

3.2 Sous-espaces Maximaux à l'Infini.

Dans cette partie nous allons introduire, pour une matrice rationnelle $T(s)$, un espace réel associé à l'image de $T(s)$. La dimension de cet espace va correspondre au rang maximal des matrices de la forme $T(s) \cdot P(s)$ lors que s tend vers l'infini, avec $P(s)$ matrice rationnelle propre.

Considérons la matrice rationnelle $T(s)$ de rang 2 décrite par :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

et soient les matrices propres : $P_1 = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-2} \end{bmatrix}$ et $P_2 = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ -s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix}$

Nous avons :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{T(s) \cdot P_1(s)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \{T(s) \cdot P_2(s)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rang à l'infini de $T(s) \cdot P_1(s) = 1$; rang à l'infini de $T(s) \cdot P_2(s) = 2$

Dans l'exemple $P_2(s)$ est telle que $T(s) \cdot P_2(s)$ est de rang maximal à l'infini. Le rang maximal à l'infini (ou lorsque s tend vers l'infini) qu'on peut obtenir par matrices de la forme $T(s) \cdot P(s)$ est déterminé par le rang de $T(s)$ sur le corps de fractions rationnelles.

En général, pour une matrice $T(s)$ $p \times m$ rationnelle de rang r , il est possible de trouver une matrice rationnelle propre $Q(s)$ telle que $T(s) \cdot Q(s)$ soit de rang à l'infini égal à r , qui est le maximal qu'on peut obtenir.

Pour montrer cela considérons une factorisation de Smith-McMillan à l'infini de $T(s)$, de la manière suivante :

$$T(s) = B'(s) \Lambda(s) B(s) = \begin{bmatrix} V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B(s) \quad (3.4)$$

avec $B'(s)$, $B(s)$ matrices bicausales et $\Delta(s) = \text{Diag}(s^{-n_1}, \dots, s^{-n_r})$. $B'(s)$ est décomposée en $B'(s) = [V(s) \ W(s)]$, où $V(s)$ est rationnelle propre ppr.

La matrice décrite par :

$$Q(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} \Delta^{-1}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

est telle que $T(s) \cdot Q(s) = V(s)$ est une matrice de rang à l'infini égale à r , car $B'(s)$ est une matrice bicausale. $T(s) \cdot Q(s)$ est donc de rang maximal à l'infini.

Nous désignerons par la suite $\text{Im } V(s)$ lorsque s tend vers l'infini comme $\text{Im}_\infty(V(s))$. La même notation sera utilisée pour l'image à l'infini d'une matrice rationnelle propre quelconque.

$\text{Im}_\infty(V(s))$ constitue le sous-espace maximal à l'infini qui peut être obtenu par matrices de la forme $T(s) \cdot P(s)$. En effet, d'une part $\text{rang}(T(s) \cdot P(s)) \leq \min(\text{rang } T(s), \text{rang } P(s))$, et d'autre part on vient de voir qu'il existe une matrice $Q(s)$ telle que $\dim(\text{Im}_\infty T(s) \cdot Q(s)) = r$, avec r le rang de $T(s)$ sur le corps de fractions rationnelles $\mathbf{R}(s)$. En plus, nous

pouvons montrer que $\text{Im}_\infty(V(s))$ est indépendante de la factorisation (3.4).

Nous pouvons ainsi introduire la définition suivante :

Definition 3.1 :

Soit $T(s)$ une matrice pxm rationnelle de rang r . Considérons une factorisation de Smith-McMillan à l'infini de $T(s)$:

$$T(s) = B'(s) \Lambda(s) B(s)$$

soit $B'(s)$ décomposée en $B'(s) = [V(s), W(s)]$, où $V(s)$ est rationnelle propre pxr. Alors l'espace de colonnes maximal à l'infini, $\vartheta_\infty(T(s))$, de $T(s)$ est défini comme :

$$\vartheta_\infty(T(s)) := \text{Im}_\infty(V(s))$$

L'espace réel $\vartheta_\infty(T(s))$ est associé de manière unique à l'espace rationnel $\text{Im } T(s)$. Puisque $\text{Im } V(s)$ est identique à $\text{Im } T(s)$, car $\text{Im } T(s) \supset \text{Im } V(s)$ et $\dim(\text{Im } V(s)) = \dim(\text{Im } T(s))$.

3.2.1 Sous-espaces Maximaux à l'Infini pour Matrices Partitionnées.

Nous nous posons le problème issu du découplage par blocs par retour d'état dynamique suivant : soit $R(s)$ une matrice rationnelle rxr non singulière, quel est le rang maximal, lorsque s tend vers l'infini, des matrices de la forme :

$$R(s) D(s) = R(s) \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k) \tag{3.6}$$

où $D_i(s)$ est de dimension $r_i \times r_i$ tel que $\sum_{i=1}^k r_i = r$, et $R(s)$ est partitionnée en $R(s) = [R_1(s), \dots, R_k(s)]$ avec $R_i(s)$ de dimension $r \times r_i$.

Ce que nous pouvons faire de mieux sera de maximiser le rang à l'infini de chaque terme $R_i(s) \cdot D_i(s)$. Nous venons de voir que ceci est donné par la dimension de $\vartheta_\infty(R_i(s))$, qu'est à la fois égale au rang de $R_i(s)$ sur $R(s)$.

Définissons :

$$\vartheta = \vartheta_\infty(R_1(s)) + \vartheta_\infty(R_2(s)) + \dots + \vartheta_\infty(R_k(s))$$

avec $\vartheta_\infty(R_i(s))$ le sous-espace de colonnes maximale à l'infini de $R_i(s)$. L'espace réel ϑ présente les propriétés suivantes [annexe 1] :

- i) ϑ est invariant modulo multiplication à droite par des matrices bloc diagonaux suivant la partition en bloc de colonnes de $R(s)$.
- ii) Il existe une matrice block diagonale $D(s)$ suivant la partition en bloc de colonnes de $R(s)$ telle que :

$$\text{Im}_\infty(R(s)D(s)) = \vartheta$$

Proposition 3.2 :

Le rang maximal à l'infini, noté k^* , qui peut être obtenu par des matrices de la forme (3.6) est donné par :

$$k^* = \dim(\vartheta)$$

Montrons ceci pour $R(s) = [R_1(s), R_2(s)]$, avec $R_i(s)$ de rang r_i . Rappelons que $\dim(\vartheta_\infty(R_i)) = r_i$, et soit $\vartheta = \vartheta_\infty(R_1(s)) + \vartheta_\infty(R_2(s))$, qui

est de dimension :

$$\begin{aligned} k^* &= \dim(\vartheta) = \dim(\vartheta_\infty(R_1)) + \dim(\vartheta_\infty(R_2)) - \dim(\vartheta_\infty(R_1) \cap \vartheta_\infty(R_2)) \\ &= r_1 + r_2 - \dim(\vartheta_\infty(R_1) \cap \vartheta_\infty(R_2)) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\dim(\vartheta) > k^*$, alors :

$$\dim(\vartheta_\infty(R_1)) + \dim(\vartheta_\infty(R_2)) > r_1 + r_2 ; \text{ ce qui est impossible. } \diamond\diamond\diamond$$

3.3 Découplage par Blocs par Retour d'Etat Dynamique.

Nous abordons le découplage par blocs d'un système de matrice de transfert $T(s)$ au moyen d'un retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$; G éventuellement non régulier). Un retour d'état dynamique est équivalent à la postmultiplication de $T(s)$ par un transfert $C(s)$ qui est :

- bicausal, si G est régulier (Hautus and Heymann 1983)
- de colonnes indépendantes à l'infini, si G est non régulier.

Par la suite $C(s)$ sera dit de colonnes indépendantes à l'infini si ses colonnes sont indépendantes lorsque s tend vers l'infini. Par exemple :

$$C(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 1 & s^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est tel que } C_0 := \lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, notre but sera de trouver un précompensateur $C(s)$ (de colonnes indépendantes à l'infini) qui rend $T(s)$ découplé par blocs.

Nous partons d'un système de matrice de transfert $T(s)$ surjective de dimension $p \times m$ (m entrées et p sorties), que nous factorisons en :

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B(s)$$

avec $R(s)$ une matrice rationnelle propre non singulière $p \times p$ et $B(s)$ une matrice bicausale $m \times m$. Une solution est de prendre la forme de Hermite de $T(s)$ sur $R_p(s)$.

Notons que si $C(s)$ est un compensateur dont les colonnes sont indépendantes à l'infini qui découple $T(s)$, $B(s) \cdot C(s)$ aura la même propriété. Ceci est dû au fait que $B(s)$ est bicausale. Donc, nous nous intéressons à un précompensateur $C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix}$ de rang de colonnes à l'infini plein tel que :

$$\begin{aligned} R(s) C_1(s) &= D(s) \\ &= \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s)) \end{aligned}$$

avec $D(s)$ une matrice bloc diagonale non singulière $p \times p$. Ainsi, l'ensemble de solutions est donné par :

$$C_1(s) = R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s)) \quad (3.8)$$

où $C_1(s)$ doit être propre.

Nous cherchons à compléter $C_1(s)$ de façon que $C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix}$ soit de rang plein à l'infini, avec $C_2(s)$ matrice rationnelle propre $(m-p) \times p$. Puisque $C_1(s)$ est de dimension $p \times p$ et $C(s)$ doit être de rang à l'infini égal à p , alors

la solution est possible seulement si le rang à l'infini de $C_1(s)$ est au moins égal à $p-(m-p) = 2p - m$.

Par conséquent, il faut déterminer le rang maximal à l'infini de matrices de la forme $R^{-1}(s) D(s)$, $D(s)$ vérifiant les propriétés des matrices rationnelles propres bloc diagonales. Si le rang maximal est k^* , alors le découplage est possible seulement si $k^* \geq 2p - m$.

Le rang maximal à l'infini k^* de $R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s), \dots, \bar{R}_k(s)]$ est déterminé par :

$$k^* = \dim (\vartheta_{\infty}(\bar{R}_1(s)) + \vartheta_{\infty}(\bar{R}_2(s)) + \dots + \vartheta_{\infty}(\bar{R}_k(s)))$$

où $\vartheta_{\infty}(\bar{R}_i(s))$ est le sous-espace de colonnes maximal à l'infini de $\bar{R}_i(s)$, (voir 3.2).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre surjective de noyau statique nul et soit (p_1, \dots, p_k) une partition de sortie telle que $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Le système de matrice de transfert $T(s)$ peut être découplé par blocs relativement à (p_1, \dots, p_k) par un retour d'état dynamique admissible éventuellement non régulier ($u = F(s)x + G v$) sur une réalisation minimale de $T(s)$ si et seulement si

$$m \geq 2p - k^*.$$

Remarques :

1) k^* est invariant par multiplication à gauche par des matrices bicausales, donc indépendant de la factorisation de $T(s)$ en $T(s) = [R(s) \ 0] B(s)$. Si $R^{-1}(s)$ et $R'^{-1}(s)$ déduites de deux factorisations différentes de $T(s)$, alors $R^{-1}(s) = B'(s) \cdot R'^{-1}(s)$ avec $B'(s)$ matrice bicausale.

2) L'entier k^* est invariant par retour d'état régulier. Puisque ceci peut être écrit toujours comme une précompensation bicausale, qui ne modifie pas le comportement à l'infini de $R(s)$ et donc celui de $R^{-1}(s)$.

3) Pour le cas général d'une matrice $T(s)$ $p \times m$ rationnelle propre de rang r , la condition de découplage qu'on vient de voir se traduit par $m \geq 2r - k^*$ [annexe 1]. En fait le découplage de $T(s)$ peut être toujours ramené au découplage d'une matrice surjective, ce qui a été étudié dans ce chapitre.

Exemple 3.2 :

Nous présentons une construction d'un précompensateur qui sera réalisable par retour d'état non régulier. Soit la matrice de transfert de l'exemple 3.1 :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

Considérons $T(s)$ factorisée en $T(s) = [R(s) \ 0] B(s)$, avec :

$$R(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix} ; B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -s^2 & -s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

Il convient de remarquer que le système $T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne par retour d'état dynamique $(F(s), G)$:

- ni avec G régulière, car l'union des zéros infinis des lignes $\{1, 1, 1\}$ ne coïncide pas avec les zéros infinis de $T(s)$ $\{1, 1, 2\}$;

- ni avec G non régulière, puisque le rang en colonnes à l'infini k de $R^{-1}(s)$ est égale à 1, donc la condition $m \geq 2p - k$ n'est pas remplie avec $m=4$, $p=3$, m et p étant respectivement le nombre d'entrées et de sorties [D7].

Mais $T(s)$ est découplable par blocs par retour d'état dynamique $(F(s), G)$, non régulière relativement à la partition de sortie $(2, 1)$. En effet, la condition $m \geq 2p - k^*$ est vérifié avec $k^*=2$. Deux matrices candidates qui nous fournissent k^* de $R^{-1}(s) = [R_1(s), R_2(s)]$ sont :

$$D_1(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & -s^{-1} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} ; D_2(s) = s^{-2}$$

alors

$$C_1(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] \begin{bmatrix} D_1(s) & 0 \\ 0 & D_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le rang à l'infini de $C_1(s)$ est effectivement $k^*=2$.

Le précompensateur propre admissible donné par :

$$C(s) = B^{-1}(s) \cdot \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & -s^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $C_2(s)$ est choisi pour garantir que $C(s)$ soit de rang plein à l'infini. $C(s)$ est ainsi réalisable par retour d'état dynamique $u = F x + G v$, sur la réalisation minimale (C, A, B) de $T(s)$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un retour d'état est déterminé par les matrices :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que le transfert du système bouclé est :

$$T(s) C(s) = C(sI - A - BF)^{-1}G = \begin{bmatrix} s^{-2} & s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix}$$

3.3.1 Découplage par Blocs avec Stabilité par Retour d'Etat Dynamique.

Considérons une matrice de transfert $T(s)$ et une réalisation minimale (C, A, B) de $T(s) : \dot{x} = A x + B u ; y = C x ; (u \in \mathbf{R}^m, x \in \mathbf{R}^n \text{ et } y \in \mathbf{R}^p)$. L'approche adoptée dans ce travail consiste à employer une compensation dite combinée déterminée par :

$$u = F x + C(s) v$$

qui est composée d'un précompensateur stable $C(s)$ et d'un retour d'état stabilisant $F \in \mathbf{R}^{m \times n}(s)$, c'est à dire F est tel que les valeurs propres de $(A+BF)$ sont stables.

Remarquons que si on considère uniquement la précompensation ($F = 0$), alors des simplifications pôle-zéro instables peuvent être nécessaires si $T(s)$ instable. Par contre si $C(s)$ est la identité, $T(s)$ ne sera peut être pas découplable par retour d'état $u = F x$.

Nous pouvons maintenant préciser le problème de découplage avec stabilité abordé dans ce travail : *Soit $T(s)$ une matrice de transfert strictement propre, est-il possible de trouver un précompensateur combiné ($u = F x + C(s) v$) tel que le système compensé soit bloc découplé, non dégénéré, stable et sans simplifications pôle-zéro instables.*

Le lemme suivant montre que l'on peut se restreindre au cas des système à découpler qui sont stables.

Lemme 3.1 :

Considérons le système Σ et soit Σ_F le système bouclé par un retour

d'état F tel que les valeurs propres de $(A + BF)$ soient stables. Le problème du découplage avec stabilité défini ci-dessus est soluble si et seulement si le découplage par précompensation pure $u = C(s) v$ est soluble sur Σ_F .

Pour la suffisance, notons qu'une précompensation pure sur Σ_F est une précompensation combinée sur Σ .

Pour la nécessité, soit $u_1 = F_1 x + C(s) v$ une précompensation combinée qui découple Σ avec stabilité. Alors $u = (F_1 - F)x + C(s) v$ est une précompensation combinée qui découple Σ_F avec stabilité, et qui est équivalent au précompensateur pur découplant $Bs(s) \cdot C(s)$ sur Σ_F , avec $Bs(s) = [I - (F_1 - F)(sI - A - BF)^{-1} B]^{-1} = [I + (F_1 - F)(sI - A - BF)^{-1} B]$.

$Bs(s)$ est alors bicausale bistable. $C(s)$ et $Bs(s) \cdot C(s)$ sont stables. Ainsi $Bs(s) \cdot C(s)$ est un précompensateur qui découple Σ_F avec stabilité. $\diamond\diamond$

Par la suite nous allons considérer le découplage de systèmes Σ de matrice de transfert $T(s)$ stable à l'aide d'un précompensateur stable.

En particulier nous nous intéressons aux précompensateurs réalisables par retour d'état dynamique sur une réalisation minimale de $T(s)$. Nous rappelons ensuite le résultat qui caractérise de tels précompensateurs, à savoir [D7] :

Théorème 3.2 :

Considérons $T(s)$ une matrice de transfert pxm strictement propre stable de noyau statique nul et (C, A, B) une réalisation minimale de $T(s)$.

Soit $C(s)$ un précompensateur $m \times m$ rationnel propre. $C(s)$ est réalisable par retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$, G non singulière) avec stabilité sur (C, A, B) si et seulement si $C(s)$ est bicausal stable.

En vue de ce résultat il suffira de trouver un précompensateur bicausal stable qui découple $T(s)$ pour pouvoir affirmer que $T(s)$ est découplable par retour d'état dynamique régulier.

Présentons maintenant l'extension du découplage ligne par ligne avec stabilité de [D7] au cas du découplage par blocs.

Théorème 3.3 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre surjective stable de noyau statique nul et soit (p_1, \dots, p_k) une partition de sortie telle que $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Le système de matrice de transfert $T(s)$ peut être découplé par blocs avec stabilité relativement à (p_1, \dots, p_k) par un retour d'état dynamique admissible non régulier ($u = F(s)x + Gv$) sur une réalisation minimale de $T(s)$ si et seulement si

$$m \geq 2p - k^*.$$

Rappelons la courte démonstration de ce théorème. Si le découplage n'est pas possible, il ne le sera pas avec stabilité. Pour la suffisance, admettons que $C(s)$ soit un précompensateur découplant de colonnes indépendantes à l'infini, $C(s)$ peut être écrit comme :

$$C(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} ; \text{ avec } B_1(s) \text{ bicausal}$$

Nous proposons une matrice bicausale $B_2(s)$ telle que $B_1(s) \cdot B_2(s)$ soit bicausale stable. Prenons par exemple $B_2(s) = \text{diag}(b_1(s), \dots, b_m(s))$, telle que les zéros instables de $b_i(s)$ soient les pôles instables de la i ème colonne de $B_1(s)$. Alors, $B_1(s) B_2(s)$ est bicausale stable et

$$Q(s) = B_1(s) \cdot B_2(s) \cdot \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Q(s)$ est un précompensateur admissible qui découple $T(s)$. Donc, par le théorème 3.2, il est réalisable par retour dynamique sur une réalisation minimale de $T(s)$. ◇◇◇

En conclusion nous pouvons dire que si le découplage par blocs par retour d'état dynamique est possible il le sera avec stabilité.

CHAPITRE 4

INVARIANTS POUR LE **DECOUPLAGE PAR BLOCS**

4 INVARIANTS POUR LE DECOUPLAGE PAR BLOCS

Ce chapitre porte sur le découplage par blocs par précompensation. Pour un système bloc découplable, nous allons déterminer le degré de McMillan minimal et la structure à l'infini minimal qui peuvent être obtenus par les blocs du système compensé.

Nous introduisons deux invariants par retour d'état régulier, liés à chaque bloc du système découplé. Le premier étant un entier $n_{i,e}$ qui déterminera le degré de McMillan minimal qui peut être obtenu par le bloc correspondant du système découplé. Le deuxième étant une liste d'entiers $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ qui correspondront aux ordres minimaux des zéros infinis qui peuvent être obtenus par le bloc correspondant du système découplé.

Après avoir introduit ces invariants, nous présentons plusieurs caractérisations de ceux-ci dans les approches par matrice de transfert et géométrique. Nous montrerons ensuite qu'ils déterminent les solutions minimales du découplage par précompensation au sens du degré de McMillan et de la structure à l'infini.

A la fin du chapitre nous abordons le cas plus restrictif du découplage par blocs et par retour d'état dynamique non régulier. Quand ce dernier est possible, nous illustrerons qu'on peut obtenir également les mêmes systèmes minimaux que dans le cas où l'on utilise la précompensation.

Pour situer le problème, considérons d'abord un exemple de découplage ligne par ligne [D7].

Exemple 4.1 : Soit la matrice de transfert

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & s^{-5} \\ s^{-1} & s^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

les précompensateurs donnés par :

$$C_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad C_2(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

découplent $T(s)$ en : $T(s) C_1(s) = \text{diag}(s^{-5}, s^{-3})$

$$T(s) C_2(s) = \text{diag}(s^{-4}, s^{-3})$$

$T(s) \cdot C_2(s)$ possède une structure à l'infini plus petite que celle de $T(s) \cdot C_1(s)$. On peut donc se demander quelle est la structure minimale qui peut être obtenue en découplant un système $T(s)$ par précompensation.

Le problème a été étudié par Dion et Commault dans [D7]. Pour la solution qu'ils proposent on factorise $T(s)$ de rang plein en lignes en :

$$T(s) = [R(s) \ 0] B(s)$$

avec $R(s)$ matrice propre inversible et $B(s)$ matrice bicausale de dimensions appropriées. On définit les "invariants de découplage" n_{ie} comme suit:

$$n_{ie} := \text{ordre du pôle à l'infini de la } i\text{ème colonne de } R^{-1}(s)$$

Remarquons que $R(s)$ en tant que matrice propre n'a que des zéros à

l'infini, donc $R^{-1}(s)$ n'aura que des pôles à l'infini.

Dans notre exemple nous avons :

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-3} & 0 \end{bmatrix} B(s)$$

ainsi

$$R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -s^4 & s^3 \end{bmatrix}$$

donc : $n_{1e} = 4$ et $n_{2e} = 3$

Un système découplé minimal est donné par : $T(s) C_2(s) = \begin{bmatrix} s^{-4} & 0 \\ 0 & s^{-3} \end{bmatrix}$

En général dans le cas d'un système de rang plein en lignes, de matrice de transfert $T(s)$ de dimension $p \times m$, le précompensateur propre admissible $C(s)$ donné par :

$$C(s) := B^{-1}(s) \begin{bmatrix} R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(s^{-n_{1e}}, s^{-n_{2e}}, \dots, s^{-n_{pe}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c'est un précompensateur découplant. Le système découplé a pour transfert :

$$T(s) C(s) = [R(s) \quad 0] B(s) C(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_{1e}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-n_{pe}} \end{bmatrix}$$

$T(s) \cdot C(s)$ est de structure à l'infini minimale. Pour montrer cela, écrivons $C(s)$ comme suit :

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(s^{-t_1}, s^{-t_2}, \dots, s^{-t_p}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit $t_j < n_{je}$ pour un certain j , alors $C(s)$ sera non propre.

En effet, chaque élément $\{r_{ij}(s)\}$ de $R^{-1}(s)$ peut s'écrire comme :

$r_{ij}(s) = b_{ij}(s) s^{r_{ij}}$; avec $r_{ij} > 0$ et $b_{ij}(s)$ une fonction rationnelle propre d'inverse propre. Dans ce cas n_{je} est déterminé par :

$$n_{je} = \max_{i=1, \dots, p} (r_{ij}) \quad \text{pour } j = 1, \dots, p$$

puisque $t_j < n_{je}$ pour un certain j , alors $R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(s^{-t_1}, \dots, s^{-t_p})$ sera non propre, et par conséquent $C(s)$ sera aussi non propre.

On vient de voir que les invariants de découplage caractérisent bien la structure à l'infini minimale du système découplé ligne par ligne, [D7].

Les entiers n_{je} peuvent être interprétés comme le nombre minimal d'intégrateurs entre la i ème entrée et la j ème sortie du système découplé. Dans le cas de systèmes en temps discret, ceux-ci correspondront au retard minimale de la j ème sortie du système découplé. Il déterminent donc le retard minimale imposé au système pour le découpler.

Commault et al dans [C3], ont introduit les ordres essentiels qui caractérisent le système découplé de degré de McMillan minimal. Plusieurs caractérisations dans les approches géométriques et de matrice de transfert ont été données. Ils ont aussi montré leur équivalence avec les invariants de découplage n_{je} précédemment introduits.

4.1 Invariants de Découplage

L'étude est centrée sur le découplage par blocs à l'aide d'un précompensateur. Nous allons introduire les "invariants de découplage par blocs" en partant d'une définition géométrique, pour donner après deux caractérisations possibles des invariants dans l'approche matrice de transfert.

Plus tard ces invariants vont nous servir à déterminer le système découplé de dimension minimale, au sens de la dimension d'une réalisation d'espace d'état.

Nous allons considérer une matrice de transfert $T(s)$ strictement propre $p \times m$ et une réalisation minimale (C, A, B) de $T(s)$, donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u && ; u \in \mathbb{R}^m; x \in \mathbb{R}^n \\ y &= C x && ; y \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

avec : $T(s) = C(sI - A)^{-1} B$

La matrice $T(s)$ (resp. C) est décomposée en blocs de lignes $T_i(s)$ (resp. C_i) de dimension $p_i \times m$, suivant une partition de sortie (p_1, \dots, p_k) , telle que $p_1 + \dots + p_k = p$, de la façon suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix} \quad \text{où } T_i(s) = C_i(sI - A)^{-1} B$$

On notera par $T^i(s)$ la matrice constituée par les blocs de lignes $T_1(s), T_2(s), \dots, T_{i-1}(s), T_{i+1}(s), \dots, T_k(s)$.

En s'inspirant du cas ligne [C3], nous présentons la définition suivante.

Definition 4.1 :

Considérons le système linéaire (C, A, B) décomposé en blocs de lignes suivant la partition (p_1, \dots, p_k) . Soit \mathcal{V}^* (respec. \mathcal{T}_i^*) le sous-espace (A, B) -invariant maximal contenu dans $\text{Ker } C$ (respec. $\text{Ker } C^i$). Les invariants de découplage par blocs sont définis par :

$$n_{i,e} := \dim(\mathcal{T}_i^*/\mathcal{V}^*) \quad \text{avec } i = 1, \dots, k$$

Par la suite nous donnerons deux caractérisations des $n_{i,e}$ dans l'approche matrice de transfert.

• **Une première caractérisation transfert des $n_{i,e}$**

Dans cet objectif nous avons besoin d'abord, du concept du système feedback irréductible, qui est à la base de la compréhension de divers problèmes de commande géométrique [M3, W2]. Reprenons la définition de [M3].

Définition 4.2 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert strictement propre et (C, A, B) une réalisation canonique de $T(s)$. Alors $T(s)$ est feedback irréductible si il n'existe pas de sous-espaces (A, B) -invariants non triviaux dans $\text{Ker } C$.

Nous nous intéressons, plus spécifiquement, au lien entre les systèmes

feedback irréductibles et les factorisations de Wiener-Hopf à l'infini étudiées par Fuhrmann et Willems dans [F3].

Soit $T(s)$ une matrice de transfert pxm strictement propre et soit $T(s) = U(s) \Lambda(s) B(s)$ une factorisation de Wiener-Hopf à droite à l'infini de $T(s)$ avec

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D(s) = \text{diag}(s^{k_1}, \dots, s^{k_r}); r = \text{rang } T(s)$$

Les entiers (k_1, \dots, k_r) sont appelés "indices à droite à l'infini de $T(s)$ ".

Nous présentons le théorème suivant [F3] :

Théorème 4.1 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert strictement propre pxm. Les indices à droite à l'infini (k_1, \dots, k_r) de $T(s)$ ont des valeurs égales aux opposés des indices de commandabilité de toute réalisation canonique de tout $T'(s)$ feedback irréductible, feedback équivalent à $T(s)$. _____

Nous pouvons interpréter les valeurs opposés des indices k_i comme les indices de commandabilité d'un système rendu maximalelement non observable par retour d'état, car $T'(s)$ est feedback irréductible.

En particulier, nous intéresse ici la conséquence suivante. Soit \mathcal{V}^* le sous-espace $(A-B)$ -invariant maximal inclu dans le noyau de C et soit \mathcal{X} l'espace d'état de (C, A, B) . En rendant d'abord \mathcal{V}^* invariant par retour d'état, la dimension de l'espace d'état du système réduit est donnée par

$$\dim(\mathcal{X}/\mathcal{V}^*) = d_w(T(s))$$

d'où

$$n = d_w(T(s)) + \dim(\mathcal{V}^*) \quad (4.1)$$

avec $d_w(T(s))$ défini comme l'opposé de la somme des k_i .

Nous avons supposé que (C, A, B) est commandable et observable. Actuellement l'expression (4.1) sera vérifiée dans le cas où (C, A, B) est seulement commandable. Donc pour le sous-système $T^i(s)$ on aura :

$$n = d_w(T(s)) + \dim(\mathcal{J}_i^*)$$

L'observation précédente nous permet d'introduire une première caractérisation transfert des $n_{i,e}$, à savoir :

Théorème 4.2 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert strictement propre pxm de noyaux statiques à droite et à gauche nuls, qui est décomposée relativement à la partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . Supposons que $T(s)$ satisfait la condition : $\text{rang } T(s) = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, avec $r_i = \text{rang } T_i(s)$. Alors, les invariants de découplage par blocs vérifient :

$$\text{i) } n_{i,e} = d_w(T(s)) - d_w(T^i(s))$$

$$\text{ii) } n_{i,e} = d_\infty(T(s)) - d_\infty(T^i(s)) + \sigma(T_i(s)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, k.$$

où $d_w(T(s))$ est l'opposé de la somme des indices d'une factorisation de

Wiener-Hopf à droite à l'infini de $T(s)$, $d_{\infty}(T(s))$ est la somme de zéros à l'infini de $T(s)$, et $\sigma(T_i(s))$ est le degré d'une base polynomiale minimale du noyau à gauche de $T_i(s)$.

En ce qui concerne la base polynomiale du noyau (gauche) de $T(s)$, on peut penser à $T(s)$ comme une application de $\mathbf{R}^m(s)$ en $\mathbf{R}^p(s)$. Soit donc $W(s)$ une matrice rationnelle dont les lignes forment une base du noyau gauche de $T(s)$. En multipliant $W(s)$ par le PPCM de dénominateurs des éléments de $W(s)$, on obtient une base polynomiale du noyau gauche de $T(s)$. Parmi toutes les bases polynomiales il existent des bases de degré de lignes minimal. De telles bases minimales possèdent des propriétés intéressantes en termes de commande [F2, W1].

L'idée de la démonstration de ii) est la suivante ; soit \mathcal{X} l'espace d'état de (A, B, C) . Rendons d'abord invariant \mathcal{V}^* de $\text{Ker } C$, donc la dimension de l'espace d'état réduit est $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{V}^*) = d_{\infty}(T(s)) + \sigma(T(s))$. Ceci est vrai grâce aux équivalences entre d'une part, la liste I_4 de Morse et la structure à l'infini de (A, B, C) , et d'autre part entre la liste I_3 de Morse et $\sigma(T(s))$ [F2, W1, M1, D6]. De même pour T_i^* ; $\dim(\mathcal{X}/T_i^*) = d_{\infty}(T^i(s)) + \sigma(T^i(s))$. Pour finir $\sigma(T_i(s)) = \sigma(T(s)) - \sigma(T^i(s))$, grâce à la condition d'indépendance des blocs ($\text{rang } T(s) = r_1 + \dots + r_k$).

Quand $T(s)$ est surjective, alors $\sigma(T_i(s)) = 0$. Dans ce cas $T(s)$ est découplable ligne par ligne par précompensation, nous retrouvons ainsi les invariants introduits par Dion et Commault dans [D7]. Dans le cas blocs nous remarquons l'apparition de $\sigma(T_i(s))$, ou si l'on préfère de la liste I_3 de

Morse du sous-système (C_i, A, B) .

A présent nous jugeons utile de traiter un exemple montrant le calcul des $n_{i,e}$ et la contribution de $\sigma(T_i(s))$.

Exemple 4.2 : Soit $T(s)$ la matrice 3×3 de rang 2, décrite par :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} & s^{-2} \\ s^{-2} & s^{-2} & s^{-3} \\ s^{-1} & s^{-3} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

elle n'est pas découplable ligne par ligne par précompensation et non plus par retour d'état. Par contre $T(s)$ est bloc découplable par précompensation car $\text{rang } T(s) = \text{rang } T_1(s) + \text{rang } T_2(s)$, [H1].

Pour calculer $n_{i,e}$ à partir du théorème précédent, présentons d'abord la factorisation de Wiener-Hopf à droite à l'infini de $T(s)$:

$$T(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/s & 1/s \\ 0 & -(s-1)/s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les indices à droite à l'infini de $T(s)$ sont $k_1 = k_2 = -2$, alors $d_w(T(s)) = 4$.

Pour $T_1(s)$ et $T_2(s)$ nous avons les indices à droite à l'infini suivants :

$$T_1(s) : (-2), \text{ donc } d_w(T_1(s)) = 2$$

$$T_2(s) : (-1), \text{ donc } d_w(T_2(s)) = 1$$

Ainsi les invariants de découplage par blocs sont :

$$n_{1,e} = d_w(T(s)) - d_w(T_2(s)) = 4 - 1 = 3$$

$$n_{2,e} = d_w(T(s)) - d_w(T_1(s)) = 4 - 2 = 2$$

Illustrons le point ii) du théorème 4.2 en signalant que $w(s) = [1 \quad -s]$ est une base minimale du noyau gauche de $T_1(s)$, donc $\sigma(T_1(s)) = 1$. Nous pouvons constater que $T(s)$, $T_1(s)$ et $T_2(s)$ ont les ordres de zéros à l'infini suivants :

$$T(s) : (1, 2) \quad ; \quad T_1(s) : (1) \quad ; \quad T_2(s) : (1)$$

$$\text{alors : } d_\infty(T(s)) = 3 \quad ; \quad d_\infty(T_1(s)) = 1 \quad ; \quad d_\infty(T_2(s)) = 1$$

Nous obtenons ainsi :

$$n_{1,e} = d_\infty(T(s)) - d_\infty(T_2(s)) + \sigma(T_1(s)) = 3 - 1 + 1 = 3$$

$$n_{2,e} = d_\infty(T(s)) - d_\infty(T_1(s)) + \sigma(T_2(s)) = 3 - 1 + 0 = 2$$

• Une deuxième caractérisation transfert des $n_{i,e}$

En ce qui concerne la deuxième caractérisation de $n_{i,e}$, nous allons décomposer $T(s)$ en :

$$T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

avec :

$\tilde{T}(s)$ matrice de transfert propre $r \times m$ de rang r , partitionnée en blocs de lignes $\tilde{T}_i(s)$ de dimensions $r_i \times m$.

$U(s) = \text{bloc diagonale}(U_1(s), \dots, U_k(s)); U_i(s)$ matrice $p_i \times p_i$ unimodulaire
 $\tilde{I} := \text{bloc diagonale}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k); \tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}; I_{r_i}$ la matrice identité $r_i \times r_i$

L'intérêt de cette décomposition vient du fait que nous pouvons montrer sans trop de difficulté que $T(s)$ et $\tilde{T}(s)$ (ou bien $T^i(s)$ et $\tilde{T}^i(s)$) ont les mêmes indices de Wiener-Hopf à droite à l'infini, donc $d_w(T(s)) = d_w(\tilde{T}(s))$. En considérant le résultat i) du théorème 4.2 nous avons :

$$n_{i,e} = d_w(\tilde{T}(s)) - d_w(\tilde{T}^i(s)) \quad (4.2)$$

Donc par la suite, nous allons travailler avec $\tilde{T}(s)$ $r \times m$ de rang r . Nous sommes ainsi en position de donner une deuxième caractérisation transfert des invariants de découplage par blocs, à savoir :

Théorème 4.3 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre de rang r . Supposons que la condition : $\text{rang } T(s) = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, avec $r_i = \text{rang } T_i(s)$, soit satisfaite. Considérons $T(s)$ décomposée comme précédemment : $T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$ et soit $\tilde{T}(s)$ factorisée de la manière suivante :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B(s)$$

avec $R(s)$ matrice $r \times r$ rationnelle propre non singulière et $B(s)$ matrice $m \times m$ bicausale. Soit $R^{-1}(s)$ décomposée en blocs de colonnes relativement à la partition de sortie (p_1, \dots, p_k) comme suit :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \bar{R}_i(s) \in \mathbf{R}^{r \times r_i}(s)$$

Les invariants de découplage par blocs $n_{i,e}$ de $T(s)$ satisfont :

$$n_{i,e} = d_{\infty}(\bar{R}_i(s)); \quad \text{pour } i = 1, \dots, k$$

où $d_{\infty}(R_i(s))$ est la somme de pôles à l'infini de $R_i(s)$.

$R(s)$ en tant que matrice propre n'a pas de pôles à l'infini. Les pôles de $R(s)$ étant les zéros de $R^{-1}(s)$, alors $R^{-1}(s)$ n'a pas des zéros à l'infini.

Illustrons maintenant ce théorème par l'exemple suivant :

Exemple 4.3 : Considérons la matrice de transfert de l'exemple 4.2. Elle peut être décomposée en :

$$T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & | & \\ 1 & 0 & | & \\ \hline & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & | & \\ 0 & | & \\ \hline & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & s^{-3} & s^{-3} \\ s^{-1} & s^{-3} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

avec $\tilde{T}(s)$ matrice surjective. Factorisons $\tilde{T}(s)$ en $\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B(s)$, où $R(s)$ et $B(s)$ sont déterminés par les termes suivants :

$$R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -s^3 & s^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1/s & 1/s \\ 0 & -(s-1)/s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les invariants de découplage $n_{1,e}, n_{2,e}$ sont :

$$n_{1,e} = \text{pôles à l'infini de la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne de } R^{-1}(s) = 3$$

$$n_{2,e} = \text{pôles à l'infini de la 2}^{\text{ème}} \text{ colonne de } R^{-1}(s) = 2$$

qui vérifient le théorème précédent.

4.2 Structure Essentielle.

Dans cette partie nous présentons une liste d'entiers qui ont la propriété d'être invariants par retour d'état. Ces invariants vont nous permettre de déterminer la structure à l'infini minimale qui peut être obtenue en découplant par blocs un système donné.

Nous partons d'une définition géométrique introduite dans le travail de Descusse [D5], pour donner ensuite deux interprétations possibles dans l'approche matrice de transfert.

Définition 4.2 :

Soit (C, A, B) un système linéaire décomposé en blocs de lignes suivant la partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . Soit F_i un retour d'état tel que : $\mathcal{R}_i^* \supset (A + BF) \mathcal{R}_i^*$, avec \mathcal{R}_i^* le sous-espace maximal de commandabilité inclu dans le noyau de C^i .

Considérons G_i telle que $\text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$ et soit $A_i = A + BF_i$.

La ième structure essentielle par blocs de (C, A, B) relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$, est définie comme la structure à l'infini du sous-système $(C_i, A + BF_i, BG_i)$, notée par $\Sigma_{\infty}(C_i, A + BF_i, BG_i)$.

La structure essentielle par blocs de (C, A, B) , relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , $\Sigma_e(C, A, B)$ est définie par :

$$\Sigma_e(C, A, B) = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_{i,e}(C, A, B)$$

Rappelons que le problème de découplage consiste à trouver (si possible) un F compatible, c'est à dire un F tel que $\mathcal{R}_i^* \supset (A + BF) \mathcal{R}_i^*$. En plus, \mathcal{R}_i^* doit satisfaire la condition d'admissibilité ($C_i \mathcal{R}_i^* = \text{Im } C_i$) [W2].

• Une première caractérisation transfert de $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$.

Avant de commencer introduisons la terminologie suivante : une matrice $N(s)$ $r \times m$ rationnelle propre sera dite matrice bicausale à droite si il existe une matrice $M(s)$ $(m-r) \times m$ rationnelle propre telle que $[N(s) M(s)]$ soit bicausale.

Les matrices bicausales à droite sont de rang plein en colonnes lorsque s tend vers l'infini, car les matrices bicausales sont elles mêmes de rang plein lorsque s tend vers l'infini.

Soit $T_{F_i}(s)$ la matrice de transfert de $(C_i, A + BF_i, BG_i)$:

$$T_{F_i}(s) = T_i(s) N_i(s) ; \quad N_i(s) = (I - F_i(sI - A)^{-1}B)^{-1}G_i$$

$N_i(s)$ est propre et $N_i(s) = G_i$ pour $s=\infty$, donc $N_i(s)$ est une matrice bicausale à droite si G est de rang plein en colonnes. Par définition $T_j(s) N_i(s) = \bar{0}$ pour tout $i \neq j$ et on peut montrer que $\text{rang } N_i(s) = \dim(\text{Ker } T^i(s))$. Les colonnes de $N_i(s)$ constituent ainsi une base du noyau de $T^i(s)$.

Cette observation est à l'origine de la caractérisation suivante.

Théorème 4.4 :

La i ème structure essentielle par blocs de (C, A, B) , $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$, relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) est donnée par la structure à l'infini de $(T_i(s) \cdot V_i(s))$, c'est à dire :

$$\Sigma_{i,e}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(T_i(s) \cdot V_i(s))$$

avec $V_i(s)$ une matrice bicausale à droite, dont les colonnes forment une base du noyau de $T_i(s)$.

Cette caractérisation a été utilisée pour donner des conditions structurelles de découplage par blocs par retour d'état statique dans [D5].

•• **Une deuxième caractérisation transfert de $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$.**

Soit la matrice de transfert $T(s)$ de (C, A, B) est décomposée comme :

$$T(s) = B'(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

avec :

$\tilde{T}(s)$ matrice de transfert propre $r \times m$ de rang r , partitionnée en blocs de lignes $\tilde{T}_i(s)$ de dimension $r_i \times m$

$B'(s) =$ bloc diagonale $(B_1(s), \dots, B_k(s))$; $B_i(s)$ matrice $p_i \times p_i$ bicausale

$\tilde{I} :=$ bloc diagonale $(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$; $\tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$; I_{r_i} la matrice identité $r_i \times r_i$

Cette décomposition est intéressante car le noyau de $\tilde{T}_i(s)$ est identique au noyau de $T_i(s)$; en effet le noyau de $\tilde{T}_i(s)$ est un sous-espace du noyau de $T_i(s)$, et tout les deux ont la même dimension. Alors à partir du théorème

précédent, et du fait que $B'(s)$ est bicausale on déduit :

$$\Sigma_{i,e}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(T^i(s) \cdot V_i(s)) = \Sigma_{\infty}(\tilde{T}^i(s) \cdot V_i(s))$$

Il est possible donc de caractériser $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ en fonction de la matrice surjective $\tilde{T}(s)$. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 4.5 :

Soit (C, A, B) un système linéaire de matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ strictement propre de rang r , qui est décomposée comme précédemment en $T(s) = B'(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$. Considérons $T(s)$ factorisée de la façon suivante :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \quad 0] B(s)$$

avec $R(s)$ matrice $r \times r$ rationnelle propre de rang plein et $B(s)$ matrice bicausale. Soit $R^{-1}(s)$ décomposé en blocs de colonnes de la façon suivante :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \quad \bar{R}_i(s) \in \mathbf{R}^{r \times r_i(s)}$$

Alors, la i ème structure essentielle par blocs de (C, A, B) , $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) vérifie :

$$\Sigma_{i,e}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(\bar{R}_i(s))$$

où $\Sigma_{\infty}(\bar{R}_i(s))$ est la liste des ordres de zéros à l'infini de $\bar{R}_i(s)$.

Nous avons au paragraphe 2.3 que tout retour d'état est équivalent à une précompensation bicausale. Donc nous pouvons déduire du théorème 4.5 que la liste d'entiers $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ est invariant par retour d'état régulier.

Exemple 4.3 : Nous allons présenter le calcul de $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ et de leurs deux caractérisations transfert que nous venons de voir. Soit le système linéaire (C, A, B) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

dont sa matrice de transfert est :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

Admettons que l'on s'intéresse au découplage par retour d'état dynamique. $T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne, mais il est découplable par blocs relativement à la partition de sortie $(2, 1)$.

Calculons d'abord la structure essentielle par blocs de (C, A, B) . Décomposons C en blocs de lignes relativement à la partition de sortie $(2, 1)$.

$$C^1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \quad ; \quad C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Ker } C^i$ est le (A, B) -invariant maximal contenu dans $\text{Ker } C^i$, puisque $(\text{Ker } C^i + \text{Im } B) \supset A \text{ Ker } C^i$. En outre, le sous-système (C^i, A, B) n'a pas de zéros de transmission, donc $\mathcal{R}_i^* = \text{Ker } C^i$ [W2].

Les retours d'état donnés par :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

sont tels que : $\mathcal{R}_i^* \supset (A + BF_i) \mathcal{R}_i^*$; $\text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$. Donc, par définition la i ème structure essentielle par blocs de (C, A, B) est la structure à l'infini du sous-système $(C_i, A + BF_i, B_i)$, c'est à dire :

$$\Sigma_{1,e}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(C_1, A + BF_1, BG_1) = (1, 2)$$

$$\Sigma_{2,e}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(C_2, A + BF_2, BG_2) = (2)$$

ceci veut dire que $(C_1, A + BF_1, BG_1)$ a deux zéros à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, et $(C_2, A + BF_2, BG_2)$ a un zéro à l'infini d'ordre 2.

La première caractérisation transfert de $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$ est donnée par la suite. Soient $V_1(s), V_2(s)$ deux bases bicausales à droite respectivement de $\text{Ker } T^1(s)$ et de $\text{Ker } T^2(s)$.

$$V_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s^{-1} \\ -1 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad V_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & -s^{-1} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$T_1(s) V_1(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ -s^{-1} & -s^{-2} & 0 \end{bmatrix} ; \quad T_2(s) V_1(s) = 0$$

$$T_2(s) V_2(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \end{bmatrix} ; \quad T_1(s) V_2(s) = 0$$

Ainsi nous retrouvons la même structure essentielle :

$$\Sigma_{1,e} (C, A, B) = \Sigma_{\infty}(T_1(s) V_1(s)) = (1, 2)$$

$$\Sigma_{2,e} (C, A, B) = \Sigma_{\infty}(T_2(s) V_2(s)) = (2)$$

Ici on a pris $V_i(s) = (I - F_i (sI - A)^{-1} B)^{-1} G_i$, mais n'importe quelle autre base bicausale à droite de $\text{Ker } T^i(s)$ aurait fait l'affaire.

La deuxième caractérisation transfère de la structure essentielle est donnée en factorisant $T(s)$ de la manière suivante :

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B(s)$$

où $B(s)$ est une matrice bicausale et $R(s)$ est donné par :

$$R(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix} ; \text{ avec } R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & | & 0 \\ 0 & s & | & 0 \\ -s^2 & -s^2 & | & s^2 \end{bmatrix}$$

décomposons $R^{-1}(s)$ en blocs de colonnes relativement à $(2, 1)$. $R_1(s)$ a deux pôles à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, et $R_2(s)$ a un pôle à l'infini d'ordre 2. Nous constatons donc que :

$$\Sigma_{1,e} (C, A, B) = \Sigma_{\infty}(\overline{R}_1(s)) = (1, 2)$$

$$\Sigma_{2,e} (C, A, B) = \Sigma_{\infty}(\overline{R}_2(s)) = (2)$$

4.3 Application au Découplage.

Dans cette partie, nous illustrerons pour le problème de découplage par blocs, les invariants suivants :

- l' invariant de découplage par blocs $n_{i,e}$;
- la i ème structure essentielle par blocs $\Sigma_{i,e}(C, A, B)$;.

qui vont représenter

- le degré de McMillan minimal de la i ème bloc du système découpé ;
- la structure à l'infini minimale du i ème bloc du système découpé.

Nous montrons d'abord que pour un système bloc découpé, le degré de McMillan minimal du i ème bloc ne peut pas être inférieur à $n_{i,e}$.

Supposons que le système soit de matrice de transfert $T(s)$ surjective. Commençons par écrire $T(s)$ comme : $T(s) = [R(s) \ 0] B(s)$. Soit $C(s) = B^{-1}(s) \cdot C'(s)$ un précompensateur découplant $T(s)$; on a donc :

$$T(s) C(s) = [R(s) \ 0] \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = D(s)$$

$$\text{avec } C'(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} \text{ et } D(s) = \text{diag}(D_1(s), D_2(s), \dots, D_k(s))$$

Rappelons que la classe des compensateurs $C'(s)$ qui découpent est donnée par :

$$\begin{aligned} C_1(s) &= R^{-1}(s) D(s) \\ &= [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s), \dots, \bar{R}_k(s)] \text{diag}(D_1(s), D_2(s), \dots, D_k(s)) \end{aligned}$$

et $C_2(s)$ une matrice rationnelle propre $(m-p) \times p$.

Ainsi du fait que $C_1(s)$ doit être propre, il est possible de montrer que le nombre total de zéros à l'infini de $D_i(s)$ doit être plus grand que le nombre total de pôles à l'infini ($n_{i,e}$) de $\overline{R}_i(s)$. Donc, le degré de McMillan de chaque bloc $D_i(s)$ du système découplé est au moins égal à $n_{i,e}$.

On peut faire la même démarche pour la structure à l'infini minimale du i ème bloc du système découplé. Le théorème suivant établit la possibilité d'obtenir $n_{i,e}$ et $\Sigma_{i,e}(T(s))$.

Théorème 4.6 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert propre $p \times m$ de rang r , décomposée en blocs de lignes relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) . Si $T(s)$ peut être découplée par blocs, alors

i) Le degré de McMillan minimal qui peut être obtenu pour le i ème bloc du système découplé est donné par les invariants de découplage par blocs $n_{i,e}$;

i) La structure à l'infini minimale qui peut être obtenue pour le i ème bloc du système découplé est donnée par la i ème structure essentielle par blocs $\Sigma_{i,e}(T(s))$.

Notons que si $\Sigma_{i,e}(C, A, B) = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{iri})$, on peut prouver que

$$n_{i,e} = \sum_{j=1}^r \mu_{ij} + \sigma(T_i(s))$$

Alors, dans le cas du découplage ligne par ligne les deux invariants sont identiques, car $n_{i,e} = \sum_{i,e} (C, A, B)$ puisque $\sigma(T_i(s)) = 0$ et $r_i = 1$.

Exemple 4.4 :

Nous présentons la construction d'un précompensateur qui exhibe les solutions minimales du théorème 4.5. La construction est faite pour la matrice de transfert de l'exemple 4.3, elle peut s'écrire comme :

$$T(s) = [R(s) \ 0] B(s), \text{ avec :}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix} ; \text{ et } R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -s^2 & -s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne par retour d'état dynamique, car la condition $m \geq 2p - k$ n'est pas vérifiée quand $m = 4$ entrées, $p = 3$ sorties et $k = 1$, où k est le rang en colonnes à l'infini de $R^{-1}(s)$, [D7]. Mais elle peut être découplée par blocs par retour d'état dynamique relativement à la partition de sortie (2, 1). En effet, la condition $m \geq 2p - k^*$ est dans ce cas vérifiée, parce que $k^* = 2$, k^* étant le rang maximal en colonnes à l'infini qui peut être obtenu par les blocs de colonnes de $R^{-1}(s)$, [C2].

Considérons les factorisations de Smith-McMillan à l'infini de $\bar{R}_1(s)$ et de $\bar{R}_2(s)$ suivantes :

$$\bar{R}_1(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} \Delta_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} B'_1(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_2(s) = B_2(s) \begin{bmatrix} \Delta_2(s) \\ 0 \end{bmatrix} B'_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1]$$

Soit $C(s)$ le précompensateur déterminé par :

$$C(s) := B^{-1}(s) \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & -s^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec : $C_1(s) = R^{-1}(s) \text{diag}(B'_1{}^{-1}(s) \Delta_1^{-1}(s), B'_2{}^{-1}(s) \Delta_2^{-1}(s))$

$C_2(s)$ une matrice $(m-p) \times p$ rationnelle propre.

Ainsi, $C(s)$ découple $T(s)$ en :

$$T(s) C(s) = \begin{bmatrix} s^{-2} & -s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix} = \text{diag}(D_1(s), D_2(s))$$

Alors par construction et d'après le théorème 4.5 :

$$\sum_{\infty}(D_1(s)) = \sum_{\infty}(R_1(s)) = \sum_{1,e}(T(s)) = (1, 2) ; \text{ avec } n_{1,e} = 3$$

$$\sum_{\infty}(D_2(s)) = \sum_{\infty}(R_2(s)) = \sum_{2,e}(T(s)) = (2) ; \text{ avec } n_{1,e} = 2$$

$T(s) \cdot C(s) = \text{diag}(D_1(s), D_2(s))$ est donc de structure à l'infini minimale.

4.3.1. Structure Minimale des Systèmes Découplables par Retour d'Etat Dynamique.

Nous allons montrer sur l'exemple précédent que quand le découplage par retour d'état dynamique est possible, alors la structure à l'infini minimale qui peut être obtenue est identique à celle obtenue par précompensation.

Considérons le précompensateur $C(s)$ de l'expression (4.3), il est réalisable par retour d'état statique dynamique non régulier ($u=F(s)x + G v$) sur la réalisation minimale (C, A, B) de l'exemple 4.3.

Soit $T_F(s)$ le transfert du système bouclé, $T_F(s)$ peut s'écrire :

$$T_F(s) = T(s) (I - F(s)(sI - A)^{-1}B)^{-1}G$$

il existe $F(s)$ et G telles que : $C(s) = (I - F(s)(sI - A)^{-1}B)^{-1}G$.

Une matrice bicausale est caractérisé par $\det(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s)) \neq 0$. La matrice $(I - F(s)(sI - A)^{-1}B)^{-1}G$ tend vers l'identité I , lorsque s tend vers l'infini, elles est donc bicausale. Nous avons alors :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C(s)$ peut s'écrire comme :

$$C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G$$

ou encore comme :

$$C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot G$$

$$= [I - F(s)(sI - A)^{-1}B]^{-1} \cdot G$$

alors,

$$F(s) \cdot \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} & s^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi le retour d'état dynamique non régulier $(F(s), G)$ est déterminé par :

$$F(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est équivalent au précompensateur $C(s)$ donné précédemment. Nous pouvons vérifier que le transfert du système bouclé est :

$$T_F(s) = C(sI - A - BF(s))^{-1}BG = \begin{bmatrix} s^{-2} & -s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix}$$

Cette exemple montrer que la structure à l'infini qui peut être obtenue en découplant par retour d'état dynamique $u = F(s) x + G v$ (quand c'est possible), est la même que celle obtenue en découplant par précompensation $C(s)$. D'une façon similaire, le degré de McMillan minimal de systèmes découplables par retour d'état dynamique sera égale à celui obtenu par précompensation [D8, C4].

CHAPITRE 5

INVARIANTS POUR LE **DECOUPLAGE PAR BLOCS AVEC STABILITE**

5 INVARIANTS POUR LE DECOUPLAGE AVEC STABILITE

Il est fondamental pour les applications de prendre en compte l'aspect stabilité. Dans ce chapitre nous abordons le découplage par blocs avec stabilité, à l'aide d'un précompensateur combiné. Nous déterminerons le degré de McMillan minimal et la structure à l'infini et instable minimale qui peuvent être obtenus par un système découplé par blocs avec stabilité.

Nous rappelons d'abord le problème du découplage avec stabilité étudié dans ce travail. Ce dernier sera équivalent au découplage des matrices de transfert stables par précompensation stable (c.f. 3.3.1). Nous présentons ensuite des préliminaires sur les matrices de transfert propres stables.

Nous introduirons après la généralisation des invariants du chapitre précédent au cas du découplage par blocs avec stabilité. Nous allons déterminer, à l'aide de ces invariants, le degré de McMillan minimal et la structure à l'infini et instable minimale qui peuvent être obtenus quand on découple un système par bloc avec stabilité par précompensation.

A la fin du chapitre nous allons montrer sur un exemple que les systèmes minimaux que l'on peut obtenir en découplant par retour d'état-dynamique sont les mêmes que ceux obtenus par précompensation.

Pour illustrer le problème traité dans ce chapitre, considérons un exemple de découplage ligne par ligne avec stabilité.

Exemple 5.1 : Soit la matrice de transfert $T(s)$ stable suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{(s-1)^2}{(s+1)^4} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{(s-1)}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$T(s)$ a un zéro instable en $s = 1$. Puisque $T(s)$ est stable il suffit de trouver un précompensateur $C(s)$ stable qui découple $T(s)$ pour pouvoir assurer que $T(s) \cdot C(s)$ est découplé avec stabilité.

Considérons les systèmes découplés par les précompensateurs stables $C_1(s)$ et $C_2(s)$ comme suit :

$$T(s) C_1(s) = T(s) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)^2}{(s+1)^4} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

$$T(s) C_2(s) = T(s) \cdot \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s+1)^2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

$T(s) \cdot C_1(s)$ a une structure à l'infini et instable (2 zéros infinis d'ordres 2, et 2 zéros instables en $s=1$ d'ordres respectifs 1 et 2) plus importante que celle de $T(s) \cdot C_2(s)$ (2 zéros infinis d'ordre 2, et 2 zéros instables en $s=1$ d'ordre 1). Un problème se pose alors, c'est la recherche du *système découplé (par précompensation) de structure à l'infini et instable minimale*.

Ce problème a été étudié pour le découplage ligne par ligne d'une matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ stable surjective dans [D7]. La solution est donnée à l'aide des invariants qu'on définit en factorisant $T(s)$ en :

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B_s(s)$$

avec $R(s)$ une matrice $p \times p$ rationnelle propre stable non singulière et $B_s(s)$ une matrice $m \times m$ bicausale bistable. Les invariants appelés "invariants de découplage avec stabilité" sont définis par :

$n_{i,es} :=$ nombre de pôles instables et à l'infini de la i ème colonne de $R^{-1}(s)$

Dans notre exemple nous avons :

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B_s(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{(s-1)}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix} B_s(s)$$

$$\text{alors : } R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -\frac{(s+1)^3}{(s-1)} & -\frac{(s+1)^3}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

$\bar{R}_1(s)$ a un pôle à l'infini d'ordre 2 et un pôle instable en $s=1$;

$\bar{R}_2(s)$ a aussi un pôle à l'infini d'ordre 2 et un pôle instable en $s=1$;

ainsi : $n_{1,es} = n_{2,es} = 3$.

Une solution minimale est donc donnée par : $T(s) C_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$

Pour le cas général, on peut définir des fonctions rationnelles $h_i(s)$ telles que $R_i(s) \cdot h_i(s)$ n'a pas de pôles ni de zéros instables ou à l'infini. Ces fonctions ne sont pas uniques mais elles sont définies de manière que :

$n_{i,es}$ = nombre des zéros instables et à l'infini de $h_i(s)$

Le précompensateur propre admissible donné par :

$$C(s) = B_s^{-1}(s) \begin{bmatrix} R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(h_1(s), \dots, h_p(s)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C(s)$ rend le système $T(s)$ découplé et de structure instable et à l'infini minimale. $T(s) \cdot C(s)$ a pour transfert :

$$T(s) \cdot C(s) = \begin{bmatrix} h_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_p(s) \end{bmatrix}$$

Pour le découplage ligne par ligne avec stabilité le problème que nous venons de voir est équivalent à déterminer le système découplé ligne par ligne avec stabilité de degré de McMillan minimal [D7].

En ce qui concerne le découplage (par blocs), d'autres invariants ont été introduits, soit pour montrer l'existence de lois de découplage, soit pour déterminer le système découplé de structure la plus simple, [C3, C4, D1, D2,

D3, D4, H1]. Par contre, très peu de travaux ont traité le découplage avec stabilité.

5.1 Préliminaires.

Nous rappelons l'approche adoptée dans ce travail en ce qui concerne le découplage par blocs avec stabilité. Ce problème sera équivalent au découplage de matrices de transferts stables par précompensation stable. Une des propriétés fondamentales de l'ensemble des matrices de transfert stables est le fait qu'il soit un anneau Euclidien ; on peut dire très grossièrement que grâce à ça la plus part de résultats du chapitre 4 peuvent être traduits au cas stable, mutatis mutandis, propre par propre stable et bicausale par bicausale bistable. C'est pour ça que nous rappellerons des propriétés de cet ensemble.

5.1.1. Un rappel sur le découplage avec stabilité.

Soit un système Σ de matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ rationnelle strictement propre et soit (C, A, B) une réalisation minimale de $T(s)$ donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u & ; & & u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n \\ y &= C x & ; & & y \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Considérons un précompensateur combiné déterminé par :

$$u = F x + C(s) v$$

constitué par un précompensateur stable $C(s)$ et par un retour d'état stabilisant F , avec tel que les valeurs propres de $(A + BF)$ sont tous stables.

Ce type de "précompensation" permet d'assurer la stabilité (interne et externe) du système en bouclé fermé. Le but de F est de stabiliser le système sans simplifications de modes instables car $(A + BF)$ est de valeurs propres stables. Désignons par $T_F(s)$ le transfert $T_F(s) = C(sI - A - BF)^{-1}$, il suffit donc que $C(s)$ soit stable pour pouvoir affirmer que le système bouclé $T_F(s) \cdot C(s)$ soit stable.

Le problème de découplage avec stabilité est le suivant : trouver si possible un précompensateur combiné ($u = F x + C(s) v$) tel que le système compensé $T_F(s) \cdot C(s)$ soit bloc découplé stable.

Au lemme 3.1 nous avons vu que ce problème est équivalent au découplage de systèmes de matrice de transfert stable par précompensation stable $u = C(s) v$.

Par la suite, nous allons donc supposer sans perte de la généralité que le système Σ est de matrice de transfert strictement propre stable.

5.1.2. Un rappel des propriétés des matrice de transfert stables.

Nous rappelons certaines notations et préliminaires sur les matrices de transfert stables. Pour cela nous allons donner quelques définitions et exemples.

Une fraction rationnelle $f(s) = n(s)/d(s)$ est dite fraction rationnelle propre stable si elle est propre et si toutes les racines de $d(s)$ sont stables. La

région de stabilité considérée ici est le semi-plan gauche du plan complexe.

Hung et Anderson dans [H3] ont montré que l'ensemble de fonctions rationnelles propres stables est un anneau Euclidien, que nous notons $\mathbf{R}_{ps}(s)$, avec la fonction degré définie par : $\gamma(f(s)) = \gamma_1(f(s)) + \gamma_2(f(s))$; $\gamma_1(f(s))$ et $\gamma_2(f(s))$ étant respectivement le nombre total de zéros à l'infini de $f(s)$ et le nombre total de zéros instables de $f(s)$.

L'ensemble des matrices $p \times m$ à éléments dans $\mathbf{R}_{ps}(s)$ est noté par $\mathbf{R}_{ps}^{p \times m}(s)$. Les unités (éléments inversibles) de $\mathbf{R}_{ps}^{m \times m}(s)$ sont dites matrices bicausales bistables et sont caractérisées par la propriété que $B(s)$ est bicausale bistable si et seulement si le déterminant de $B(s)$ est une unité de $\mathbf{R}_{ps}(s)$, c'est à dire que celui-ci sera une fonction rationnelle sans pôles ou zéros instables et de degré du dénominateur égal à celui du numérateur.

Exemple 5.2 : Soit la fonction de transfert stable $F(s)$ suivante :

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$F(s)$ a un zéro instable en $s = 1$ et un zéro à l'infini d'ordre 2, donc $\gamma(F(s)) = 3$. Considérons un polynôme stable quelconque, $\pi = s + a$. $F(s)$ peut s'écrire comme suit :

$$F(s) = B(s) \frac{(s-1)}{\pi^3}$$

$B(s) = \frac{\pi^3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$; $B(s)$ étant bicausale bistable, donc sans singularités à l'infini ou instables.

Pour une matrice de transfert nous pouvons mettre en évidence sa structure instable et à l'infini par les factorisations de Smith-McMillan de $T(s)$ sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$, qui ont été étudiées par [V1, V2].

Définition 5.1 : (Forme de Smith-McMillan sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$)

Soit $T(s)$ une matrice rationnelle $p \times m$ de rang r , une factorisation de Smith-McMillan sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$ est une factorisation de la forme :

$$T(s) = B_{s1}(s) \Lambda(s) B_{s2}(s)$$

avec $B_{s1}(s), B_{s2}(s)$ matrices bicausales bistables et

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta(s) = \text{diag} \left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \dots, \frac{n_r(s)}{d_r(s)} \right)$$

$$n_i(s) = \frac{\varepsilon_i(s)}{\pi^{f_i}} \quad \text{et} \quad d_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\pi^{t_i}} ; n_i(s) \text{ et } d_i(s) \text{ sont premiers sur } \mathbf{R}_{ps}(s)$$

$$\varepsilon_i(s) \text{ divise } \varepsilon_{i+1}(s) \text{ et } \psi_{i+1}(s) \text{ divise } \psi_i(s)$$

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r ; f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r \text{ et } \pi = s + a \text{ est un polynôme stable}$$

En plus $\Lambda(s)$ est uniquement définie modulo un polynôme stable π et elle est appelée forme de Smith-McMillan sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$.

Théorème 5.1 :

Soit $T(s)$ une matrice rationnelle propre et soit $\Lambda(s)$ la forme de Smith-McMillan de $T(s)$ sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$. Les zéros (resp. pôles) instables de $T(s)$

sont donnés par les racines de $\varepsilon_i(s)$ (resp. $\psi_i(s)$) et les ordres des zéros (resp. pôles) à l'infini de $T(s)$ sont égaux à $f_i - \deg(\varepsilon_i(s))$ (resp. $t_i - \deg(\psi_i(s))$).

Exemple 5.3 : Soit la matrice de transfert propre donnée par :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s-3)} \\ \frac{1}{(s+5)} & \frac{1}{(s-7)} \end{bmatrix}$$

nous pouvons vérifier que $T(s)$ a deux zéros à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, un zéro instable en $s = 1$ et deux pôles instables en $s = 3, 7$. La forme de Smith-McMillan de $T(s)$ sur $\mathbf{R}_{ps}(s)$ est la suivante :

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)/\pi^3}{(s-3)(s-7)/\pi^2} \end{bmatrix}$$

avec $d_1(s) = 1$ et $d_2(s)$ bicausale. $\Delta(s)$ montre la structure instable et à l'infini de $T(s)$; le zéro infini d'ordre un est donné par le terme $1/\pi$, le zéro infini d'ordre 2 est donné par le terme $(s - 1)/\pi$, qui contient aussi le zéro instable en $s = 1$, et les pôles instables sont donnés par $(s - 3)(s - 7)/\pi$.

5.2 Invariants de Découplage par Blocs avec Stabilité

Nous introduisons par la suite une liste d'invariants qui vont caractériser le degré de McMillan minimal qui peut être obtenu par un

système découplé par blocs avec stabilité. Nous présentons aussi une caractérisation possible en fonction de la structure instable et à l'infini de blocs de lignes du transfert du système.

Nous partons d'un système de matrice de transfert $T(s)$ $p \times m$ strictement propre, stable et de rang r . La matrice $T(s)$ est décomposée en blocs de lignes suivant une partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . $T_i(s)$ dénote le i ème bloc de lignes de dimension $p_i \times m$ et de rang r_i .

Nous supposons maintenant que la condition nécessaire du découplage avec stabilité par précompensation de [H1] donnée par :

$$\text{rang } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i \quad \text{est vérifiée.} \quad (5.1)$$

Nous allons décomposer $T(s)$ de la façon suivante :

$$T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

avec :

$U(s)$ = bloc diagonale $(U_1(s), \dots, U_k(s))$; $U_i(s)$ matrice $p_i \times p_i$ unimodulaire

$\tilde{I} := \text{bloc diagonale}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$; $\tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$; I_{r_i} la matrice identité $r_i \times r_i$..

$\tilde{T}(s)$ matrice de transfert propre $r \times m$ de rang r , partitionnée en blocs de lignes $\tilde{T}_i(s)$ de dimension $r_i \times m$.

Remarques :

- La matrice $\tilde{T}(s)$ $r \times m$ est surjective quand $T(s)$ satisfait la condition (5.1).
- Le découplage de $\tilde{T}(s)$ entraîne celui de $T(s)$, grâce aux formes bloc diagonaux de $U(s)$ et \tilde{I} .

- Le degré de McMillan de $\tilde{T}(s)$ est celui de $T(s)$, car $U(s)$ unimodulaire ne le modifié pas [K1].
- La réécriture de $\tilde{T}(s)$ peut être faite en prenant par exemple la forme de Smith-McMillan de chaque bloc $T_i(s)$

Définition 5.2 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre, stable et de rang r . Considérons $T(s)$ décomposée comme précédemment : $T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$, et soit $\tilde{T}(s)$ factorisée de la façon suivante :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \quad 0] B_S(s)$$

avec $R(s)$ matrice $r \times r$ rationnelle propre stable non singulière et $B_S(s)$ matrice $m \times m$ bicausale bistable. Soit $R^{-1}(s)$ décomposée en blocs de colonnes comme suit :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \bar{R}_i(s) \in \mathbb{R}^{r \times r_i}(s)$$

Nous définissons "les invariants de découplage par blocs avec stabilité", notés $n_{i,es}$, comme la somme des pôles instables et à l'infini de $\bar{R}_i(s)$ (leurs multiplicités étant incluses), notée $d(\bar{R}_i(s))$, c'est à dire ;

$$n_{i,es} = d(\bar{R}_i(s)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, k$$

et nous appelons $v := \sum_{i=1}^k n_{i,es}$, le degré de découplage par blocs avec stabilité de $T(s)$.

Notons que $R^{-1}(s)$ n'a pas de zéros instables ou à l'infini, parce que

$R(s)$ est propre et stable et donc sans pôles instables ou à l'infini.

Une propriété importante des $n_{i,es}$ est le fait qu'ils soient invariants par retour d'état ($u = Fx + Gv$, G régulier) qui préserve la stabilité. Ceci parce que de tels retours d'état sont équivalents à une précompensation bicausale bistable [voir annexe 4].

• Une caractérisation des invariants $n_{i,es}$

Nous présentons une caractérisation des invariants $n_{i,es}$ en fonction exclusivement des propriétés structurelles de la matrice du transfert $T(s)$ du système.

Théorème 5.2 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre stable, qui satisfait la condition (5.1). Soit $T^i(s)$ la matrice constituée par toutes les lignes de $T(s)$ à l'exception du i ème bloc $T_i(s)$.

Alors, les invariants de découplage par blocs avec stabilité $n_{i,es}$ vérifient :

$$n_{i,es} = d(T(s)) - d(T^i(s)) + \sigma(T_i(s))$$

où $d(T(s))$ est la somme des zéros à l'infini et instables de $T(s)$ avec leur multiciplité, et $\sigma(T(s))$ la somme de degrés d'une base polynomiale minimale du noyau à gauche de $T_i(s)$.

Ce résultat met en évidence l'indépendance de $n_{i,es}$ des factorisations (5.1) et (5.2) considérées dans la définition 5.

Exemple 5.4 : Considérons la matrice de transfert suivante :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Nous constaterons plus tard que $T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne et non plus par blocs par retour d'état statique par retour d'état dynamique, mais $T(s)$ est découplable par blocs par retour d'état dynamique suivant la partition de sortie (2, 1).

Commençons par factoriser $T(s)$ en $T(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$, où $B_s(s)$ est bicausale bistable. $R^{-1}(s)$ est décrite par :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] = \left[\begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ \frac{(s+1)^3}{s-1} & \frac{(s+1)^3}{s-1} & \frac{(s+1)^3}{s-1} \end{array} \right]$$

$\bar{R}_1(s)$ a deux pôles à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, et un pôle instable en $s=1$. $\bar{R}_2(s)$ a un pôle à l'infini d'ordre 2 et un pôle instable en $s=1$. Par définition :

$$n_{1,es} = \text{somme des pôles infinis et instables de } \bar{R}_1(s) = 4$$

$n_{2,es}$ = somme des pôles infinis et instables de $\bar{R}_2(s) = 3$.

Ensuite, pour la caractérisation du théorème 5.2 nous avons $\sigma(T_1(s)) = \sigma(T_2(s)) = 0$. Nous pouvons vérifier que $T_1(s)$, $T_2(s)$ et $T(s)$ possèdent les structures instables et à l'infini suivantes :

$T_1(s)$ a deux zéros à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, et pas de zéros instables ;

$T_2(s)$ a un zéro à l'infini d'ordre 2, et pas de zéros instables ;

$T(s)$ a trois zéros à l'infini d'ordres respectifs 1, 1 et 2 , et un zéro instable en $s=1$.

En se basant sur le théorème 5.2, nous avons :

$$n_{1,es} = d(T(s)) - d(T^1(s)) + \sigma(T_1(s)) = 5 - 1 + 0 = 4$$

$$n_{2,es} = d(T(s)) - d(T^2(s)) + \sigma(T_2(s)) = 5 - 2 + 0 = 3$$

on retrouve donc les invariants calculés précédemment.

5.3 Structure Essentielle par Blocs avec Stabilité.

Dans ce paragraphe nous présentons la généralisation de la structure essentielle (paragraphe 4.2) au découplage par blocs avec stabilité. Cette structure est constituée par des zéros instables et à l'infini, et correspond à la structure la plus simple qui peut être obtenue pour un système découplé par blocs avec stabilité.

Considérons, associée à $T(s)$ stable, une réalisation minimale (C, A, B)

en variables d'état ; $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, ($u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$). Nous dirons par la suite qu'un retour d'état $u = Fx + Gv$ préserve la stabilité si les valeurs propres de $(A + BF)$ sont toutes stables.

Rappelons quelques notations utiles. La matrice $T(s)$ est décomposée en blocs de lignes notés $T_i(s)$, relativement à une partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . La matrice $T^i(s)$ (ou bien C^i) est la matrice constituée par les lignes $T_1(s)$, $T_2(s), \dots, T_{i-1}(s)$, $T_{i+1}(s), \dots, T_k(s)$ de $T(s)$.

Définition 5.3 :

Soit (C, A, B) un système linéaire décomposé en blocs de lignes suivant la partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . Soit F_i un retour d'état qui préserve la stabilité et tel que : $\mathcal{R}_i^* \supset (A + BF_i) \mathcal{R}_i^*$, avec \mathcal{R}_i^* le sous-espace de commandabilité maximal inclus dans le noyau de C^i .

Considérons, G_i telle que $\text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$ et $A_i = A + BF_i$.

La *i*ème structure essentielle par blocs avec stabilité -notée $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ - de (C, A, B) relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , est définie comme la structure à l'infini et instable du sous-système $(C_i, A + BF_i, BG_i)$, qui sera notée par $\Sigma_{\infty,s}(C_i, A + BF_i, BG_i)$.

La structure essentielle par blocs avec stabilité - notée $\Sigma_{es}(C, A, B)$ - de (C, A, B) , relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) est définie par :

$$\Sigma_{es}(C, A, B) = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_{i,es}(C, A, B)$$

• Une première caractérisation transfert de $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Dans ce qui suit nous dirons qu'une matrice $N(s)$ $r \times m$ ($r \geq m$) rationnelle propre stable est une matrice bicausale bistable à droite s'il existe une matrice $M(s)$ $(m-r) \times m$ rationnelle propre stable tel que $[N(s) \ M(s)]$ est bicausale bistable.

D'une manière similaire au cas sans stabilité, nous pouvons interpréter l'action de F_i de la définition 5.3 comme une base bicausale bistable du noyau de $T^i(s)$. Cette interprétation est à l'origine de la caractérisation suivante.

Théorème 5.3 :

La i ème structure essentielle par blocs avec stabilité $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ de (C, A, B) , relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , est donnée par la structure à l'infini et instable de $T_i(s) \cdot V_i(s)$, c'est à dire :

$$\Sigma_{i,es}(C, A, B) = \Sigma_{\infty,s}(T_i(s) \cdot V_i(s))$$

avec $V_i(s)$ une matrice bicausale bistable à droite dont les colonnes forment une base pour le noyau de $T^i(s)$.

Il est possible de montrer l'existence de telles bases pour le noyau de $T^i(s)$. Pour cela, soit $M(s)$ une matrice polynomiale telle que les colonnes forment une base polynomiale minimale du noyau de $T^i(s)$, [F2, W1]. Soit t_i le degré polynomial de la i ème colonne de $M(s)$, définissons la matrice $N(s) := M(s) \text{diag}((s+a)^{-t_1}, \dots, (s+a)^{-t_f})$, avec f la dimension du noyau de $T^i(s)$. Alors $N(s)$ est une matrice bicausale bistable à droite et ses colonnes

constituent une base du noyau de $T^i(s)$.

•• Une deuxième caractérisation transfert de $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Afin de simplifier la présentation, nous supposons que le système est de matrice de transfert $T(s)$ surjective. Le cas général a été traité dans [A5].

Théorème 5.4 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre, stable et de rang p , décomposée en blocs de lignes relativement à une partition de sortie (p_1, \dots, p_k) . Supposons que la condition : $\text{rang } T(s) = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, avec r_i le rang de $T_i(s)$, soit satisfaite. Considérons la factorisation de $T(s)$:

$$T(s) = [R(s) \quad 0] B(s)$$

avec $R(s)$ matrice $r \times r$ rationnelle propre stable nonsingulière et $B_s(s)$ matrice bicausale bistable. Soit $R^{-1}(s)$ décomposée en blocs de colonnes comme suit :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \quad \bar{R}_i(s) \in \mathbf{R}^{r \times r_i(s)}$$

La i ème structure essentielle par blocs avec stabilité $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ de (C, A, B) , relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , (c'est à dire des zéros instables et à l'infini), est donnée par la structure instable et à l'infini de $R_i(s)$:

- $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ possède un zéro à l'infini d'ordre t_i à chaque fois que $\bar{R}_i(s)$ possède un pôle à l'infini d'ordre t_i ;

- $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ possède un zéro instable en $s = z_j$ d'ordre f_j à chaque fois que $\bar{R}_i(s)$ possède un pôle instable en $s = z_j$ d'ordre f_j .

Ce théorème nous sera utile pour la construction d'un précompensateur, qui en même temps découple et montre la structure essentielle par blocs avec stabilité. Ceci est dû, en grande partie, au fait que la classe des précompensateurs qui découplent dépendent des blocs de colonnes de $R^{-1}(s)$, [annexes 1 et 4].

Il est important de remarquer qu'à partir des théorèmes 5.2 ou 5.3, la structure $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ ne change pas après une multiplication à droite par des matrices bicausale, bistables. Alors, $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ est invariant par retour d'état statique régulier qui préserve la stabilité, car de tels retours d'état sont équivalents à une précompensation bicausale bistable [annexe 4].

Exemple 5.5 :

Considérons une réalisation minimale (C, A, B) de la matrice de transfert $T(s)$ de l'exemple 5.4 :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Présentons d'abord le calcul de la structure essentielle par blocs avec stabilité de (C, A, B) relativement à $(2, 1)$.

Soient :

$$C^1 = [1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0] ; C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque $(\text{Ker } C^i + \text{Im } B) \supset A \text{ Ker } C^i$, alors $\text{Ker } C^i = \mathcal{V}_i^*$, où \mathcal{V}_i^* est le sous-espace (A, B) -invariant maximal contenu dans $\text{Ker } C^i$. Par ailleurs, le sous-système (C^i, A, B) (ou bien $T^i(s)$) n'a pas des zéros de transmission, donc $\mathcal{R}_i^* = \mathcal{V}_i^* = \text{Ker } C^i$.

Considérons les retours d'état :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F_i préservent la stabilité, puisque $\mathcal{V}_i^* = \mathcal{R}_i^*$, et qui vérifient :

$$\mathcal{R}_i^* \supset (A + BF_i) \mathcal{R}_i^* ; \text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*.$$

Alors, par définition la i ème structure essentielle par blocs avec stabilité de (C, A, B) relativement à la partition $(2, 1)$ est la structure à l'infini et instable du sous-système $(C_i, A + BF_i, B_i)$, c'est à dire :

$$\Sigma_{1,es}(C, A, B) = \Sigma_{\infty,s}(C_1, A + BF_1, BG_1) = (1, 2, (s-1))$$

$$\Sigma_{2,es}(C, A, B) = \Sigma_{\infty,s}(C_2, A + BF_2, BG_2) = (2, (s-1))$$

$\Sigma_{1,es}(C, A, B)$ a donc deux zéros à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2 et un zéro instable en $s = 1$; pour sa part $\Sigma_{2,es}(C, A, B)$ a un zéro à l'infini d'ordre 2 et un zéro instable en $s = 1$.

Pour illustrer la première caractérisation transfert de $\Sigma_{1,es}(C, A, B)$, choisissons une base bicausale bistable $V_1(s)$ du noyau de $T^1(s)$. $T^1(s)$ et $V_1(s)$ sont donnés par :

$$T^1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} ; V_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{s+1} \\ -1 & \frac{1-s}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir du théorème 5.3, nous savons que $\Sigma_{1,es}(C, A, B)$ est donnée par la structure infinie et instable de $T_1(s) \cdot V_1(s)$ avec :

$$T_1(s) V_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} V_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1-s}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$T_1(s) \cdot V_1(s)$ possède la même structure infinie et instable que $\Sigma_{1,es}(C, A, B)$.

D'une façon analogue pour $\Sigma_{2,es}(C, A, B)$, soit $V_2(s)$ une base bicausale bistable du noyau de $T^2(s)$. $T^2(s)$ et $V_2(s)$ sont donnés par :

$$T^2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad V_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s+1} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors :

$$T_2(s) V_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$T_2(s) \cdot V_2(s)$ possède la même structure infinie et instable que $\Sigma_{2,es}(C, A, B)$.

Pour présenter la caractérisation du théorème 5.7, rappelons que :
 $T(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$ avec $B_s(s)$ bicausal et bistable.

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] = \left[\begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ \hline \frac{-(s+1)^3}{s-1} & \frac{-(s+1)^3}{s-1} & \frac{(s+1)^3}{s-1} \end{array} \right]$$

$\bar{R}_1(s)$ a deux pôles à l'infini d'ordres respectifs 1 et 2, et un pôle instable en $s=1$. $\bar{R}_2(s)$ a un pôle à l'infini d'ordre 2 et un pôle instable en $s = 1$.

Nous retrouvons donc la structure essentielle par blocs avec stabilité calculée précédemment.

5.4 Application au Découplage par Blocs avec Stabilité.

Ce paragraphe concerne les invariants de découplage par blocs avec

stabilité et la structure essentielle par blocs avec stabilité que nous avons introduits dans 5.2 et 5.3. Nous allons voir qu'ils correspondent respectivement :

- au degré de McMillan minimal qui peut être obtenu pour un système découplé par blocs avec stabilité ;
- à la structure instable et à l'infini minimale qui peut être obtenue pour un système découplé par blocs avec stabilité.

D'une façon analogue au cas sans stabilité, il est possible de montrer que :

- si $T(s)$ peut être découplé par blocs avec stabilité par un précompensateur propre admissible, alors le degré de McMillan du i ème bloc du système découplé est supérieur ou égal à $n_{i,es}$ -

dans le cas contraire $C(s)$ deviendrait non propre ou instable.

De même, pour la structure instable et à l'infini, la structure minimale qu'on peut obtenir sur la i ème bloc du système découplé avec stabilité est déterminée par $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Le théorème qui suit montre la possibilité d'obtenir $n_{i,es}$ et $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Théorème 5.5 :

Soit $T(s)$ une matrice de transfert $p \times m$ strictement propre stable de rang r et soit (p_1, \dots, p_k) une partition de sortie. Si $T(s)$ peut être découplée par blocs avec stabilité relativement à (p_1, \dots, p_k) alors,

i) Le degré de McMillan minimal qui peut être obtenu sur le i ème bloc du système découplé avec stabilité est donné par les invariants de découplage par blocs avec stabilité $n_{i,es}$.

i) La structure instable et à l'infini minimale qui peut être obtenue sur le i ème bloc du système découplé avec stabilité est donnée par la i ème structure essentielle par blocs avec stabilité $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Exemple 5.6 :

Nous présentons la construction d'un précompensateur qui nous fournit les systèmes découplés minimaux du théorème 5.5. La construction est faite pour la matrice de transfert stable $T(s)$ de l'exemple 5.4 :

Partons de $T(s)$ factorisée en : $T(s) = [R(s) \ 0] Bs(s)$, avec $R(s)$ matrice $r \times r$ rationnelle propre stable non singulière et $Bs(s)$ matrice $m \times m$ bicausale bistable. La matrice $R^{-1}(s)$ est donnée par :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)] = \left[\begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ \hline \frac{-(s+1)^3}{s-1} & \frac{-(s+1)^3}{s-1} & \frac{(s+1)^3}{s-1} \end{array} \right]$$

Admettons que le découplage de $T(s)$ sera fait par retour d'état dynamique. $T(s)$ n'est pas découplable ligne par ligne car $m < 2p - k$; avec $m = 4$, $p = 3$ et $k = 1$, k étant le rang en colonnes à l'infini de $R^{-1}(s)$, m et p étant respectivement le nombre d'entrées et de sorties [D7]. Par contre $T(s)$ est découplable par blocs relativement à la partition de sortie $(2, 1)$, la condition $m \geq 2p - k^*$ est vérifiée, avec $k^* = 2$ le rang maximal qui peut

être obtenu par les blocs de colonnes de $R^{-1}(s)$ [annexe 1].

Soient les factorisations de Smith-McMillan sur $R_{ps}(s)$ de $\bar{R}_1(s)$ et $\bar{R}_2(s)$ décrites par :

$$\bar{R}_1(s) = B_{s1}(s) \begin{bmatrix} \Delta_{s1}(s) \\ 0 \end{bmatrix} B'_{s1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{\pi^2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)/\pi^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1/\pi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_2(s) = B_{s2}(s) \begin{bmatrix} \Delta_{s2}(s) \\ 0 \end{bmatrix} B'_{s2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)/\pi^3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1]$$

avec $\pi = s + 1$, un polynôme stable.

Nous proposons le précompensateur stable défini par :

$$C(s) = B s^{-1}(s) \cdot \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = B s^{-1}(s) \cdot \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} & -1 & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

avec : $C_1(s) = R^{-1}(s) \cdot \text{diag}(B'_{1s}^{-1}(s) \Delta_{1s}^{-1}(s), B'_{2s}^{-1}(s) \Delta_{2s}^{-1}(s))$

$C_2(s)$ une matrice $(m-p) \times p$ rationnelle propre stable.

$C(s)$ découple $T(s)$ en :

$$T(s) C(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s-1}{(s+1)^3} \end{bmatrix} = \text{diag}(D_1(s), D_2(s))$$

Alors par construction et en s'appuyant sur le théorème 5.4 :

$$\Sigma_{\infty,s}(D_1(s)) = \Sigma_{\infty,s}(\bar{R}_1(s)) = \Sigma_{1,es}(T(s)) = (1, 2, (s-1)) ;$$

$$\Sigma_{\infty,s}(D_2(s)) = \Sigma_{\infty,s}(\bar{R}_2(s)) = \Sigma_{2,es}(T(s)) = (2, (s-1)).$$

$T(s) \cdot C(s) = \text{diag}(D_1(s), D_2(s))$ est donc de structure à l'infini et instable minimale.

Remarque :

$T(s)$ est surjective ou de noyau à gauche nul. A partir de la définition 5.2 des $n_{i,es}$ et du théorème 5.4 nous déduisons que dans ce cas :

$$n_{i,es} = \text{somme de zéros (instables et à l'infini) de } \Sigma_{i,es}(C, A, B)$$

Nous avons obtenu le système découplé de structure instable et à l'infini minimale $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$, qui est donc aussi de degré de McMillan minimal. Ainsi nous avons :

$$\text{degré de McMillan minimal avec stabilité de } D_1(s) = n_{1,es} = 4$$

$$\text{degré de McMillan minimal avec stabilité de } D_2(s) = n_{2,es} = 3$$

5.4.1 Structure Minimale des Systèmes Découplables avec Stabilité par Retour d'Etat Dynamique.

Nous avons rappelé au paragraphe 5.1.1. le problème du découplage avec stabilité considéré dans ce travail. Il est équivalent au découplage de systèmes de matrice de transfert stables $T(s)$ à l'aide d'un précompensateur stable $C(s)$.

Pour ce problème, nous venons d'étudier les systèmes découplés $T(s) \cdot C(s)$ de structure la plus simple possible au sens du degré de McMillan minimal et de la structure à l'infini minimale.

Illustrons par un exemple les points suivants :

1- Les systèmes minimaux que nous pouvons obtenir en découplant par retour d'état dynamique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus en découplant par précompensation. Ceci sera fait en montrant la réalisation par retour d'état dynamique d'un précompensateur qui fournit une solution minimale de découplage.

2- nous avons vu au paragraphe 3.3.1, que quand le découplage par retour d'état dynamique est possible il est possible alors avec stabilité. Mais cela ne veut pas dire qu'on obtient les mêmes systèmes minimaux. En effet, le degré de McMillan minimal des systèmes découplés avec stabilité est en général plus grand que celui du découplage sans stabilité.

Exemple 5.7:

1- Considérons le système de matrice de transfert stable donné dans l'exemple 5.4. Soit (C, A, B) la réalisation minimale de $T(s)$ donnée dans l'exemple 5.5

Le précompensateur découplant $C(s)$ de l'expression (5.2) nous fournit un système découplé $T(s) \cdot C(s)$ de degré de McMillan minimal.

Soit $u = F(s) x + G v$, un retour d'état dynamique non régulier. La matrice de transfert $T_F(s)$ du système bouclé peut s'écrire :

$$T_F(s) = T(s) [I - F(s) (sI - A)^{-1}B]^{-1}G$$

$C(s)$ est réalisable par retour d'état dynamique (non régulier) avec stabilité quand il existent $F(s)$ et G , telles que :

$$C(s) = [I - F(s) (sI - A)^{-1}B]^{-1}G.$$

$C(s)$ possède cette propriété quand il est un morceau de bicausale stable. Dans ce cas il existe $E(s)$ matrice rationnelle propre stable telle que $W(s) = [C(s) E(s)]$ est bicausale stable ; $W(s)$ est en vue du théorème 3.2 (page 34) réalisable par retour d'état dynamique régulier avec stabilité [H2, D7].

Illustrons maintenant le calcul de $F(s)$ et G à partir de $C(s)$. Notons que le terme $F(s) \cdot (sI - A)^{-1}B$ est strictement propre, alors le terme $[I - F(s)(sI - A)^{-1}B]^{-1}$ tend vers l'identité I quand s tend vers l'infini. Nous avons donc :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C(s)$ peut s'écrire comme suit :

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s+1)^2} & 1 & -\frac{1}{(s+1)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-s}{(s+1)^2} & \frac{(s-2)}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G$$

ou bien,

$$C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{s-1}{(s+1)^2} & \frac{2-s}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot G$$

$$= [I - F(s) (sI - A)^{-1}B]^{-1} \cdot G$$

On peut déduire $F(s)$ de cette expression. Ainsi $C(s)$ est équivalent au retour d'état dynamique déterminé par :

$$F(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{s-2}{(s+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le système bouclé a pour matrice de transfert $T_F(s)$ tel que:

$$T_F(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s-1}{(s+1)^3} \end{bmatrix} = \text{diag}(D_1(s), D_2(s))$$

$T_F(s)$ est de degré de McMillan minimal, puis que $T_F(s)$ est identique à $T(s) \cdot C(s)$ et que celui-ci est de degré de McMillan minimal (voir exemple 5.6). Pour chaque bloc on a :

degré de McMillan minimal avec stabilité de $D_1(s) = n_{1,es} = 4$

degré de McMillan minimal avec stabilité de $D_1(s) = n_{2,es} = 3$

Cette partie de l'exemple montre que quand le découplage par retour d'état dynamique est possible, le degré de McMillan minimal qu'on peut obtenir est identique à celui qu'on peut obtenir par précompensation.

2- Montrons que le degré de McMillan minimal du système découplé avec stabilité est plus grand que celui du système découplé sans stabilité.

Nous venons de voir que le précompensateur $C(s)$ nous fournit un système découplé avec stabilité de degré de McMillan minimal. Considérons maintenant $C'(s)$ qui rend découplé par blocs $T(s)$. $C'(s)$ et $T(s) \cdot C'(s)$ étant donnés par :

$$T(s) \cdot C'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & -1 & -\frac{1}{(s-1)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{s+1}{(s-1)} & 0 & \frac{s+1}{(s-1)} \\ 0 & 0 & \frac{s+1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

Le système découplé est :

$$T(s) \cdot C'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \text{diag}(D'_1(s), D'_2(s))$$

Le degré de McMillan minimal sans stabilité de $D'_1(s) = n_{1,e} = 3$ et le degré de McMillan minimal sans stabilité de $D'_2(s) = n_{2,e} = 2$. Pourtant leurs degrés de McMillan minimales avec stabilité sont respectivement $n_{1,es} = 4$ et $n_{2,es} = 3$.

Donc, le degré de McMillan minimal du découplage avec stabilité est plus grand que celui du découplage sans stabilité.

Remarque :

On peut déterminer les zéros instables nécessaires pour le découplage avec stabilité de la façon suivante :

- Le nombre minimal de zéros instables est déterminé par les différences $n_{1,es} - n_{1,e} = 4 - 3 = 1$ et $n_{2,es} - n_{2,e} = 3 - 2 = 1$.

- Leurs valeurs complexes et leurs multiplicités peuvent être déduits de la comparaison entre les listes $\Sigma_{1,es}(C, A, B)$ et $\Sigma_{2,es}(C, A, B)$, qui pour l'exemple sont déterminées par :

$$\Sigma_{1,es}(C, A, B) = (1, 2(s - 1)) \quad ; \quad \Sigma_{1,e}(C, A, B) = (1, 2)$$

$$\Sigma_{2,es}(C, A, B) = (2, (s - 1)) \quad ; \quad \Sigma_{2,e}(C, A, B) = (2)$$

Les blocs $D_1(s)$ et $D_2(s)$ du système découplé avec stabilité minimal possèdent tout le deux un zéro instable en $s = 1$

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

6 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au chapitre 3 de cette thèse nous abordons un problème resté ouvert, celui du découplage par blocs par retour d'état dynamique ($u = F(s)x + Gv$), G étant éventuellement non régulière. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un retour d'état dynamique découplant est donnée : le découplage sera possible si le système possède un nombre suffisamment grand d'entrées. L'aspect stabilité est aussi analysé ; il en résulte que quand le découplage est possible il le sera avec stabilité.

L'étude des solutions du découplage de degré de McMillan minimal et de structure à l'infini minimale est abordé au chapitre 4. Ce problème peut être considéré comme clos car nous avons déterminé les systèmes découplés minimaux qui peuvent être obtenus par précompensation et par retour d'état dynamique [C4, D8]. Par ailleurs Descusse dans [D5] a fait de même en utilisant un retour d'état statique.

Il est important de signaler que, dans tous les cas, les systèmes minimaux qu'on peut obtenir sont identiques à ceux obtenus par précompensation.

Le chapitre 5 concerne les systèmes découplés par blocs avec stabilité par précompensation de degré de McMillan minimal et de Structure à l'infini et instable minimale. L'étude est faite à l'aide de deux invariants (par bouclage régulier qui préserve la stabilité). Ce problème est lié au nombre minimal de zéros instables et infinis nécessaires pour découpler avec stabilité. Dans ce sens, les solutions minimales constituent les solutions de retard minimal du découplage avec stabilité.

Quand le découplage avec stabilité par retour d'état dynamique est

possible, les systèmes minimaux sont identiques à ceux obtenus par précompensation avec stabilité.

Nous avons dit que si le découplage est possible, il est possible avec stabilité. Cela ne veut pas dire qu'on obtient les mêmes systèmes minimaux. Le degré de McMillan minimal avec stabilité est en général supérieur à celui du découplage sans stabilité, tandis que la structure minimale avec stabilité est constituée par des zéros instables et par des zéros infinis. Les zéros infinis correspondent à la structure à l'infini minimal du cas sans stabilité.

Les problèmes de découplage des systèmes linéaires ne sont pas encore complètement résolus. Dans les perspectives à envisager on peut citer :

1) L'étude du découplage ligne par ligne avec stabilité par retour d'état statique non régulier. Ce problème ouvert est étudié au Laboratoire d'Automatique de Nantes, à l'aide de techniques géométriques. Une interprétation en termes de matrice de transfert de la solution "géométrique" sans stabilité donnée dans [D3] pourrait éventuellement nous permettre de mieux comprendre le cas avec stabilité.

2) L'extension du cas précédent au cas bloc, c'est à dire l'étude du découplage par blocs par avec stabilité retour d'état dynamique non régulier.

3) Comme problème connexe au deux point précédents, nous proposons d'étudier les systèmes minimaux qui peuvent être obtenus en découplant (quand c'est possible) par retour d'état statique. De telles solutions sont nécessairement un sous ensemble de celles trouvées au chapitre 5; car le retour d'état statique est un cas particulier de précompensation.

ANNEXES

- [1] C. Commault, J. M. Dion and J. A. Torres, "Invariant Spaces at Infinity of Linear Systems : Application to Block Decouplung", Proceedings 27th IEEE Conf. on Desicion and Control, pp. 2054-2059, Austin-Texas, Decembre (1988), A paraître dans IEEE Trans. on Aut. Control.

- [2] J. M. Dion, J. A. Torres and C. Commault, "New Feedback Invariants for The Block Decoupling Problem", A paraître dans Int. Journal on Control, Juillet (1988).

- [3] C. Commault, J. Descusse, J. M. Dion and J. A. Torres, "Block Decoupling Invariants : Geometric and Transfer Matrix Characterizations", Proceedings IFAC-Workshop on System Structure and Control, pp. 187-192, Prague, Tchécoslovaquie, Septembre (1989).

- [4] C. Commault, J. M. Dion and J. A. Torres, "Minimal Structure in The Block Decoupling Problem with Stability", Note Interne, LAG : 89/34, Soumis à revue Automatica et IFAC-World Congress, Tallinn, USSR, Août (1989).

- [3] J. M. Dion, C. Commault and J. A. Torres, "Stable Block Decoupling Invariants : Geometric and Transfer Matrix Characterizations", Note Interne, LAG 90/ , Soumis à Joint Conference. New Trends in System Theory, Gène-Italie, Juillet (1990).

**INVARIANT SPACES AT INFINITY OF LINEAR SYSTEMS
APPLICATION TO BLOCK DECOUPLING
C. COMMAULT, J.M. DION, J. TORRES***

Laboratoire d'Automatique de Grenoble (C.N.R.S. U.A. 228)
E.N.S.I.E.G. - I.N.P.G.
B.P. 46 - 38402 Saint-Martin-d'Hères, France

* Torres's work is sponsored by CONACYT-MEXICO.

Abstract. In this paper we solve the dynamic state feedback block decoupling problem in the general case, i.e. with singular or non singular input transformations. We prove that the problem is solvable if the number of inputs is large enough. The main tools for this study will be some new invariant spaces associated with the columns infinite behaviour of a rational matrix. It turns out that when the problem is solvable it is also solvable with stability.

Revised version November 1988

I- INTRODUCTION

The decoupling problem has been extensively studied during the last twenty years. Important steps in the development of the decoupling theory as well as references can be found in [1]-[4]. Numerous papers deal with decoupling by precompensation or decoupling by state feedback with non singular input transformations. Even in the case of row by row decoupling, some problems remain unsolved, e.g. the static state feedback decoupling problem with stability.

The block decoupling problem has been solved in some particular cases, let us mention the block decoupling problem by precompensation and by non singular state feedback implementable controllers [3]-[6].

When restricting the input transformation to be non-singular the static (or dynamic) state feedback block decoupling condition is fairly strong (independence at infinity of the transfer matrix row blocks). This restricts considerably the class of decouplable systems.

In this paper, we will focus our interest on the **dynamic state feedback block decoupling problem with possibly singular input transformation**. As shown in [7], feedback solutions are attractive since they require to add less dynamics than the equivalent precompensations.

We will introduce some invariant real vector spaces associated with the columns infinite behaviour of a rational matrix and will show that such spaces are invariant modulo right multiplication of the system transfer matrix by non singular rational matrices.

The dimension k^* of a particular invariant space will play a key role in the sequel. We will show that k^* is a feedback invariant and that dynamic state feedback decoupling is solvable if and only if the number of independent inputs is larger than or equal to $2r-k^*$ where r is the transfer matrix rank. We will prove also that when the dynamic state feedback decoupling problem is solvable, the problem is also solvable with stability.

The paper is structured as follows :

In section 2, the block decoupling problem is formulated and some notations and preliminaries are given. In section 3, invariant spaces at infinity are introduced and some general properties of these spaces are given. Section 4 is devoted to the dynamic state feedback block decoupling problem. Stability issues are discussed in section 5.

II- PRELIMINARIES AND PROBLEM STATEMENT

II.1 - Preliminaries

Let $\mathbb{R}(s)$ be the field of rational functions. A rational function $f(s) = n(s)/d(s)$ is said to be proper (resp. strictly proper) if $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ (resp. $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$) where $\deg(n(s))$ denotes the polynomial degree of $n(s)$.

Denote by $\mathbb{R}_p(s)$ the ring of proper rational functions and $\mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ the set of proper rational $p \times m$ transfer matrices.

The units (invertible elements) of the ring $\mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$ are called bicausal matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is a bicausal matrix if and only if :

$$\det \left(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s) \right) \neq 0$$

In the sequel, we will need Smith forms of proper rational transfer matrices over the ring of proper rational functions. Introduce a factorization at infinity which was studied in [8, 9].

Definition 1. Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix, a Smith McMillan factorization at infinity of $T(s)$ is a factorization of the form

$$T(s) = B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$$

with $B_1(s)$ and $B_2(s)$ bicausal matrices and

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where $\Delta(s) = \text{diag} (s^{n_1}, \dots, s^{n_r})$

The integers n_i are assumed to be decreasingly ordered.

A bicausal matrix possesses neither poles nor zeros at infinity. One has the following :

Theorem 1. Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix. Then there exist Smith McMillan

factorizations at infinity of $T(s)$. Moreover $\Lambda(s)$ is uniquely defined. When n_i is negative, $-n_i$ is an infinite zero order of $T(s)$, when n_i is positive, n_i is an infinite pole order of $T(s)$ and $r = \text{rank } T(s)$.

Notice that $\Lambda(s)$ coincides with the Smith form of $T(s)$ over the P.I.D. of proper rational functions. When $T(s)$ is proper the n_i 's are negative, in this case the negatives of the n_i 's are the infinite zero orders of $T(s)$. The non-uniqueness of these factorizations is characterized in [9] via a multiplicative group of bicausal isomorphisms.

II.2 - State feedback and precompensators

In this subsection we will focus our attention on state feedback implementable compensators.

Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper rational transfer matrix and (A, B, C) be a realisation of $T(s)$ i.e. :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & x &\in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= Cx & y &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

with $T(s) = C(sI - A)^{-1} B$

In the following we will restrict our attention to $p \times m$ strictly proper transfer matrices $T(s)$ with null static kernel i.e. a minimal basis of $\text{Ker } T(s)$ contains no constant vector. This can always be achieved by eliminating the dependent inputs. In the state space formulation $T(s)$ possesses a null static kernel if and only if B is injective in any realization (A, B, C) of $T(s)$.

We will consider different control laws

i) Precompensation

$u(s) = C(s) v(s)$ where $C(s)$ is a $m \times l$ proper rational matrix, then the transfer matrix of the controlled system is $T(s) C(s)$.

ii) Static state feedback

$u = Fx + Gv$ where $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ non singular, then the closed loop transfer matrix is $C(sI - A - BF)^{-1} BG$.

iii) Dynamic state feedback

$u = F(s) x + Gv$ where $F(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times n}(s)$ and $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ non singular, in this case the closed loop transfer matrix is $C(sI - A - BF(s))^{-1} BG$.

In cases ii) and iii) when the input transformation G is allowed to be singular we speak of **singular static** (or **dynamic**) state feedback.

Consider the effect of a non singular dynamic state feedback. The closed loop is

$$\begin{aligned} T_c(s) &= C(sI - A - BF(s))^{-1} BG \\ &= T(s) (I - F(s) (sI - A)^{-1} B)^{-1} G = T(s) B(s) \end{aligned}$$

where $B(s)$ is easily seen to be a bicausal precompensator.

The converse problem was studied in [10, 11].

Theorem 2. Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper rational matrix with null static kernel and (A, B, C) be a realization of $T(s)$. Let $C(s)$ be a $m \times m$ proper rational compensator, there exist a $m \times n$ proper rational matrix $F(s)$ and a square full rank constant matrix G such that :

$$T(s) C(s) = C(sI - A - BF(s))^{-1} BG$$

if and only if $C(s)$ is bicausal.

The effect of a bicausal precompensator is then equivalent to the effect of a dynamic state feedback with non singular input transformation G . This is true in any realization and in particular in a minimal one. It is shown in [10] that the effect of a bicausal precompensator is also equivalent to the effect of a static state feedback, but acting on a possibly non minimal realization of $T(s)$. A similar result has been given in [10] for static state feedback, in this case the bicausal precompensator $C(s)$ must satisfy a supplementary condition.

When considering the effect of a singular dynamic state feedback, the equivalent precompensator will be equal to $B(s) G$ where $B(s)$ is bicausal and G a possibly singular constant matrix.

II.3 - Problem formulation

We will consider now the block decoupling problem. In order to avoid trivialities we will require the compensated system to be just as "output controllable" as the original system is.

We will say that the proper precompensator $C(s)$ is **admissible** if

$$\text{rank } T(s) C(s) = \text{rank } T(s)$$

This admissibility condition is equivalent to the preservation of the C^∞ controlled output trajectories.

Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix and let (p_1, \dots, p_k) be a given set of positive integers satisfying $\sum_{i=1}^k p_i = p$. The system with transfer matrix $T(s)$ is said to be block decoupled relatively

to the partition $\{p_i\}$ if there exist positive integers m_1, \dots, m_k satisfying $\sum_{i=1}^k m_i = m$, such that

$T(s)$ has the block diafonal form :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & T_{kk}(s) \end{bmatrix} = \text{diag} (T_{11}(s), \dots, T_{kk}(s))$$

with $T_{ii}(s) \in R_p^{p_i \times m_i}(s)$, for $i = 1, \dots, k$

This means that each above defined input block influences only one output block. If one wants this influence to be effective the $T_{ii}(s)$ must be non null for each i , in this case the system is called non degenerate.

The decoupling problem can be formulated as follows : Is it possible to exhibit an admissible proper precompensator $C(s)$ such that $T(s) C(s)$ is block decoupled and non degenerate ?

The above defined decoupling problem is always solvable for full row rank (surjective) systems. A solution is given by $C(s) = 1/s^\lambda T^*(s)$ where $T^*(s)$ is a right inverse of $T(s)$ and λ is some integer sufficiently large to ensure that $C(s)$ is proper. In the present paper this rank assumption is relaxed.

In this paper we focus our interest on decoupling compensators which are **feedback implementable**. This type of solution is highly desirable from a practical point of view. In effect besides the wellknown nice properties of feedback controllers, feedback implementation leads to simpler controllers [7].

III- INVARIANT SPACES AT INFINITY

In this section we will introduce some spaces associated with the columns infinite behaviour of a rational matrix. We will give some general properties of these spaces which could be useful for solving various control problems. We will focus our attention on partitioned matrices, this will provide us with some tools for solving block decoupling problems.

III. 1 - Maximal column space at infinity

Introduce first the following

Definition 2. Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix. Denote as $t_i(s)$ the i -th column of $T(s)$. Define the integers r_i such that :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t_i(s) s^{-r_i} = t_i$$

where t_i is a non null constant vector when $t_i(s)$ is non null. When $t_i(s) = 0$ we will define r_i to be equal to $-\infty$ and t_i equal to 0.

The **column space at infinity** of $T(s)$ denoted $\text{Im}_\infty(T(s))$ is defined as the space spanned by the columns of the matrix $T = [t_1, \dots, t_m]$.

The **column rank at infinity** of $T(s)$, denoted $r_\infty(T(s))$, is defined as $\dim(\text{Im}_\infty(T(s)))$.

Notice that when r_i is negative then $-r_i$ is the infinite zero order of $t_i(s)$, otherwise r_i is the infinite pole order of $t_i(s)$.

We will now introduce a real space associated with a rational matrix. This space will be shown to have some nice invariance properties.

Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix of rank r and $B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$ be a Smith Mc Millan factorization at infinity of $T(s)$. Decompose $B_1(s)$ and $B_2(s)$ as follows

$$B_1(s) = [V(s), W(s)] \quad , \quad B_2^T(s) = [M^T(s), N^T(s)]$$

where $V(s)$ and $M(s)$ are respectively $p \times r$ and $r \times m$ rational matrices.

Consider the column space at infinity of $V(s)$:

$$\mathcal{V}_\infty(T(s)) = \text{Im}_\infty(V(s))$$

Notice that all the r_i 's of definition 2 are zero in this case. One has the following :

Proposition 1. Let $T(s)$ be a pxm rational matrix. With the previous notations $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ satisfies the following properties :

- i) $\text{Im}_\infty(T(s) R(s)) \subset \mathcal{V}_\infty(T(s))$ for any mxl rational matrix $R(s)$ with arbitrary l .
- ii) There exists a mxm right invertible rational matrix $P(s)$ such that :

$$\text{Im}_\infty(T(s) P(s)) = \mathcal{V}_\infty(T(s))$$
- iii) $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is independent from the chosen Smith Mc Millan factorization at infinity of $T(s)$.

Proof : i) Let $R(s)$ be a mxl rational matrix.

$$\begin{aligned} \text{One has } T(s) &= B_1(s) \Lambda(s) B_2(s) = [V(s), W(s)] \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \\ &= V(s) \Delta(s) M(s) \end{aligned}$$

$$\text{Denote } V_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} (V(s))$$

$$\text{Notice that } \text{Im}(V_\infty) = \text{Im}_\infty(V(s)) = \mathcal{V}_\infty(T(s)).$$

$$\text{Write } V(s) = V_\infty + Q(s) \quad \text{where} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{One has } T(s) R(s) &= (V_\infty + Q(s)) \Delta(s) M(s) R(s) \\ &= (V_\infty + Q(s)) U(s) \end{aligned}$$

Factorize $U(s)$ as in definition 2 :

$$U(s) = (U_\infty + U_1(s)) \text{diag}(s^{r_1}, \dots, s^{r_l}) \quad \text{with} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} U_1(s) = 0$$

$T(s) R(s)$ can be written as :

$$T(s) R(s) = [V_\infty U_\infty + U_2(s)] \text{diag}(s^{r_1}, \dots, s^{r_l}) \quad \text{with} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} U_2(s) = 0$$

$$\text{Then } \text{Im}_\infty(T(s) R(s)) = \text{Im}(V_\infty U_\infty) \subset \text{Im}(V_\infty) = \mathcal{V}_\infty(T(s)).$$

ii) We may choose $P(s)$ as a right inverse of $M(s)$

$$\begin{aligned} \text{Im}_\infty(T(s) P(s)) &= \text{Im}_\infty(V(s) \Delta(s)) \\ &= \text{Im}_\infty((V_\infty + Q(s)) \Delta(s)) \end{aligned}$$

where V_∞ plays the role of the matrix T in definition 2, then :

$$\text{Im}_\infty(T(s) P(s)) = \text{Im}(V_\infty) = \mathcal{V}_\infty(T(s)).$$

iii) Consider another Smith Mc Millan factorization at infinity of $T(s)$:

$$T(s) = B'_1(s) \Lambda'(s) B'_2(s) = V'(s) \Delta'(s) M'(s), \quad \Delta'(s) = \Delta(s).$$

Factorize $T(s)$ as in proof of part i) :

$$T(s) = V(s) \Delta(s) M(s) = V'(s) \Delta(s) M'(s)$$

Denote $\mathcal{V}_\infty(T(s)) = \text{Im}_\infty(V(s))$

$$\mathcal{V}'_\infty(T(s)) = \text{Im}_\infty(V'(s)), \quad V'_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} (V'(s))$$

Let $(M'(s))^+$ be any right inverse of $M'(s)$ then

$$\begin{aligned} \text{Im}_\infty(T(s) (M'(s))^+) &= \text{Im}_\infty(V'(s) \Delta(s)) \\ &= \text{Im}_\infty((V'_\infty + Q'(s)) \Delta(s)) \quad \text{with} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Q'(s) = 0 \\ &= \text{Im}(V'_\infty) = \mathcal{V}'_\infty(T(s)) \subset \mathcal{V}_\infty(T(s)) \text{ from i).} \end{aligned}$$

Reversing the roles of the factorizations, one obtains $\mathcal{V}_\infty(T(s)) \subset \mathcal{V}'_\infty(T(s))$. $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is then independent of the chosen factorization.

We are now able to give a consistant definition of $\mathcal{V}_\infty(T(s))$.

Definition 3. Let $T(s)$ be a pxm rational matrix. Consider a Smith Mc Millan Factorization at infinity of $T(s)$:

$$T(s) = B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$$

Decompose $B_1(s)$ as follows :

$$B_1(s) = [V(s), W(s)] \quad \text{where } V(s) \text{ is a pxm rational matrix}$$

$\text{Im}_\infty(V(s))$ denoted $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is called the **maximal column space at infinity** of $T(s)$.

Remark : The above defined invariants spaces can be characterized using classical tools coming from algebraic geometry [12]-[14].

As noted by a reviewer the subspace $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is nothing else but the value at infinity of the curve associated with $\text{Im } T(s)$. This curve is the continuous extension of the mapping $s \rightarrow \text{Im } T(s)$ (from \mathbb{C} with exception of the poles and zeros of $T(s)$ to the grassmannian manifold of \mathbb{C}^p) to the whole complex plane.

From Proposition 1 :

- $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is independent of the factorization
- From i) and ii) $\dim(\mathcal{V}_\infty(T(s))) = \text{rank } T(s)$ then it is indeed the maximal column rank at infinity which can be reached for $T(s) R(s)$.

We prove now that $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is invariant when multiplying on the right $T(s)$ by any square non singular rational matrix.

Proposition 2. Let $T(s)$ be a pxm injective rational matrix and $P(s)$ be a mxm non singular rational matrix. Then $\mathcal{V}_\infty(T(s) P(s)) = \mathcal{V}_\infty(T(s))$

Proof. Recall first that $\dim(\mathcal{V}_\infty(K(s))) = \text{rank } K(s)$ for any rational matrix $K(s)$.

By ii) of proposition 1, there exists a rational matrix $P'(s)$ such that

$$\text{Im}_\infty(T(s) P(s) P'(s)) = \mathcal{V}_\infty(T(s) P(s)).$$

By i) of proposition 1

$$\text{Im}_\infty(T(s) P(s) P'(s)) \subset \mathcal{V}_\infty(T(s))$$

Since $\dim(\mathcal{V}_\infty(T(s) P(s))) = \text{rank}(T(s) P(s)) = \text{rank}(T(s)) = \dim(\mathcal{V}_\infty(T(s)))$, then

$$\mathcal{V}_\infty(T(s) P(s)) = \mathcal{V}_\infty(T(s)) \quad \nabla$$

It follows that the real vector space $\mathcal{V}_\infty(T(s))$ is associated in a unique way to the rational vector space $\text{Im}(T(s))$.

III.2 - Maximal column spaces at infinity for partitioned matrices

Let $T(s)$ be a $p \times m$ injective rational matrix partitioned as follows :

$$T(s) = [T_1(s), \dots, T_k(s)] \quad \text{where } T_i(s) \in \mathbb{R}^{p \times m_i}(s)$$

Define $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\infty(T_1(s)) + \mathcal{V}_\infty(T_2(s)) + \dots + \mathcal{V}_\infty(T_k(s))$. Notice that in general $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}_\infty(T(s))$. This can be shown on the following example.

$$T(s) = [T_1(s), T_2(s)] = \begin{pmatrix} s & 0 \\ s^2 & s^2 \end{pmatrix}$$

One has the following.

Lemma 1. With the above notations :

i) \mathcal{V} is invariant modulo right multiplication of $T(s)$ by non singular block diagonal rational matrices partitioned in accordance with the column partition of $T(s)$.

ii) There exists a block diagonal rational matrix $D(s)$ partitioned in accordance with the column partition of $T(s)$ such that :

$$\text{Im}_\infty(T(s) D(s)) = \mathcal{V}$$

Proof. i) comes directly from proposition 2.

ii) is obtained constructively using ii) of proposition 1. ∇

$\text{Dim}(\mathcal{V})$ is then the maximal column rank at infinity achievable for $T(s) D(s)$, $D(s)$ block diagonal.

We present now a weaker invariance property of $\text{dim}(\mathcal{V})$.

Lemma 2. With the above notations $\text{dim}(\mathcal{V})$ is invariant modulo left multiplication of $T(s)$ by bicausal matrices.

Proof.

Let $B(s) = B_0 + B'(s)$, be a $p \times p$ bicausal matrix with $\lim_{s \rightarrow \infty} B'(s) = 0$. Consider

$$T_i(s) = [V_i(s), W_i(s)] \begin{bmatrix} \Delta_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} B_i(s) \text{ be a Smith Mc Millan factorization at infinity of } T_i(s)$$

where $V_i(s) \in \mathbb{R}^{p \times m_i}(s)$

When particularized to the row-by-row decoupling problem of surjective systems, this result is as given by Dion and Commault (1988).

Proof

By Lemma 3 the minimal McMillan degree achievable for the decoupled system is greater than or equal to n_e . We now construct a block decoupling precompensator that achieves such a minimal degree n_e .

Decompose $T(s)$ as in Lemma 1:

$$T(s) = U(s)\tilde{T}(s)$$

Consider the Hermite form of $\tilde{T}(s) = [\bar{H}(s) \ 0]B(s)$ and decompose $\bar{H}^{-1}(s)$ in column blocks relative to (r_1, \dots, r_k) as follows

$$\bar{H}^{-1}(s) = [\bar{H}_1^{-1}(s) \ \dots \ \bar{H}_k^{-1}(s)]$$

By Lemma 4, there exists a left Wiener-Hopf factorization at infinity of each $\bar{H}_i^{-1}(s)$, for $i = 1, \dots, k$, denoted as

$$\bar{H}_i^{-1}(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} \Delta_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} V_i(s)$$

$$\Delta_i(s) = \text{diag}(s^{k_{i1}}, \dots, s^{k_{ir_i}})$$

with the property

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^{r_i} k_{ij} \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

We propose the following precompensator

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

where

$$Y(s) = \bar{H}^{-1}(s) \text{diag}(V_1^{-1}(s)\Delta_1^{-1}(s), \dots, V_k^{-1}(s)\Delta_k^{-1}(s))$$

and $X(s)$ is any proper $(m-r) \times r$ matrix.

The decoupled system is

$$T(s)C(s) = U(s)\tilde{T} \text{diag}(V_1^{-1}(s)\Delta_1^{-1}(s), \dots, V_k^{-1}(s)\Delta_k^{-1}(s))$$

whose McMillan degree is clearly $n_e = n_{1e} + \dots + n_{ke}$. \square

In fact while minimizing the McMillan degree of the decoupled system the infinite structure is also minimized. This is stated in the following corollary.

Corollary 2

Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper rational matrix of null left and right static kernels, partitioned in row blocks relative to (p_1, \dots, p_k) and let $C(s)$ be an $m \times r$ proper admissible decoupling precompensator. Then the minimal infinite structure achievable for the i th block of the decoupled system satisfies

$$d_\infty(D_i(s)) = d_\infty(T(s)) - d_\infty(T^i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where

$$T(s)C(s) = \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s)) \quad \text{and} \quad D_i(s) \in \mathbb{R}_p^{p_i \times r_i}(s)$$

Proof

Consider first the decoupled system $T(s)C(s) = \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s))$, then make invariant the supremal (A_i, B_i) -invariant subspace contained in $\text{Ker } C_i$ of (A_i, B_i, C_i) a minimal realization of $D_i(s)$ ($i = 1, \dots, k$), by an adequate state feedback. Such a state feedback is equivalent to the action of a precompensator $B_i(s)$, where $B_i(s)$ is a bicausal matrix (see Hautus and Heymann 1978), then

$$T(s)C(s)B(s) = \text{diag}(D_1(s)B_1(s), \dots, D_k(s)B_k(s))$$

where $B(s) = \text{diag}(B_1(s), \dots, B_k(s))$. $C(s)B(s)$ is also an admissible block decoupling precompensator ($\text{rank}\{T(s)C(s)B(s)\} = \text{rank } T(s) = r$). The bicausal matrix $B(s)$ does not modify the infinite structure of $D(s)$, so $d_\infty(D_i(s)) = d_\infty(D_i(s)B_i(s))$.

The proof will be done by contradiction. Suppose that

$$d_\infty(D_i(s)B_i(s)) < d_\infty(T(s)) - d_\infty(T^i(s))$$

then

$$d_\infty(D_i(s)B_i(s)) + \sigma(T_i(s)) < d_\infty(T(s)) - d_\infty(T^i(s)) + \sigma(T_i(s))$$

by (b) of Theorem 4, one has

$$d_\infty(D_i(s)B_i(s)) + \sigma(T_i(s)) < n_{ie}$$

We show that $\sigma(T(s)) = \sigma(T(s)C(s)B(s))$. Firstly, observe that the left null space of $T(s)$, over $\mathbb{R}(s)$, is a subspace of the left null space of $T(s)C(s)B(s)$. Secondly, the left null space dimensions of $T(s)$ and of $T(s)C(s)B(s)$ are both equal to $p - r$, by the admissibility of $C(s)B(s)$. Therefore, the left null space of $T(s)$ equals the left null space of $D(s)B(s)$, implying $\sigma(D(s)B(s)) = \sigma(T(s))$.

Moreover

$$\sigma(T_i(s)) = \sigma(D_i(s)B_i(s))$$

It follows that

$$d_\infty(D_i(s)B_i(s)) + \sigma(D_i(s)B_i(s)) < n_{ie}$$

where the left side is equal to the McMillan degree of $D_i(s)B_i(s)$ (since $B_i(s)$ reduces the system $D_i(s)$ to a maximally non-observable form), which contradicts (b) of Theorem 6.

Finally, for a possible compensator construction see (b) of Theorem 6, where the decoupled system satisfies

$$d_\infty(D_i(s)) + \sigma(D_i(s)) = n_{ie}$$

As noted above

$$\sigma(D_i(s)) = \sigma(T_i(s))$$

hence

$$d_\infty(D_i(s)) = n_{ie} - \sigma(T_i(s))$$

By (b) of Theorem 4, one has

$$d_\infty(D_i(s)) = d_\infty(T(s)) - d_\infty(T^i(s))$$

which ends the proof. □

We show in the following corollary that when $T(s)$ is block decouplable by a dynamic state feedback implementable precompensator, the minimal McMillan degree achievable for the decoupled system is also n_e .

Corollary 3

Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper transfer matrix of null left and right static kernels, partitioned relatively to (p_1, \dots, p_k) as in Theorem 6. If the system of transfer matrix $T(s)$ is block decouplable, relative to (p_1, \dots, p_k) , by an admissible dynamic state feedback implementable precompensator on a minimal realization of $T(s)$, then the minimal McMillan degree achievable for the block decoupled system is n_e .

It is shown by Commault *et al.* (1988), that $T(s)$ is block decouplable by dynamic state feedback ($u = F(s)x + Gv$; where $F(s)$ is an $m \times n$ proper rational matrix, G is a possibly singular constant matrix and x is the n -dimensional state space vector) if and only if the number of inputs is sufficiently large ($m \geq 2r - k^*$; where k^* is as defined by Commault *et al.* 1988). A similar result is given by Ozgüler and Eldem (1988).

Proof

Note first that the minimal McMillan degree achievable by an admissible dynamic state feedback implementable precompensator is greater than or equal to n_e (see Theorem 6). We construct a feedback implementable decoupling precompensator.

Choose $X(s)$ of (4.1) in such a way that $C(s)$ becomes a 'piece' of a bicausal matrix. This is always possible since $m \geq 2r - k^*$ (see Commault *et al.* 1988). It follows that $C(s)$ is a dynamic state feedback implementable precompensator. \square

ACKNOWLEDGMENT

Torres's work is sponsored by Conacyt, Mexico.

REFERENCES

- BROCKETT, R., and MESAROVIC, M. D., 1965, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **11**, 548.
- COMMAULT, C., DESCUSSE, J., DION, J. M., LAFAY, J. F., and MALABRE, M., 1986, *International Journal of Control*, **44**, 689.
- COMMAULT, C., DION, J. M., and TORRES, J., 1988, *Proceedings of the I.E.E.E. Conference on Decision and Control*, Austin, Texas, pp. 2054.
- DESCUSSE, J., LAFAY, J. F., and MALABRE, M., 1983, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **28**, 1115; 1988, *Ibid.*, **33**, 723.
- DION, J. M., 1983, *International Journal of Control*, **37**, 521.
- DION, J. M., and COMMAULT, C., 1982, *Systems and Control Letters*, **1**, 312; 1988, *SIAM Journal of Control*, **26**, 66.
- FALB, P. L., and WOLOVICH, W. A., 1967, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **12**, 651.
- FORNEY, G. D., 1975, *SIAM Journal of Control*, **13**, 493.
- FUHRMANN, P. A., and WILLEMS, J. C., 1979, *Integral Equations Operator Theory*, **2**, 287.
- HAUTUS, M. L. J., and HEYMANN, M., 1978, *SIAM Journal of Control*, **16**, 83; 1983, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **28**, 823.
- KAILATH, T., 1980, *Linear Systems* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall).
- LOISEAU, J. J., 1985, *International Journal of Control*, **42**, 1411.
- MORSE, A. S., 1973, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **11**, 446; 1975, Systems invariants under feedback and cascade control. *Proceedings of the International Symposium*, Udine (Berlin: Springer-Verlag).

- MORSE, A. S., and WONHAM, W. M., 1973, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **16**, 568.
- OZGÜLLER, A. B., and ELDEM, V., 1988, *Technical Report*, Department of Electrical Engineering, Bilkent University, ??????
- VERGHESE, G., 1978, *Infinite frequency behaviour in generalized dynamical systems*. Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University.
- WARREN, M. E., and ECKBERG, A. E., 1975, *SIAM Journal of Control*, **13**, 434.
- WILLEMS, J. C., 1980, Proceedings of the INRIA Conference (Berlin: Springer-Verlag), p. 555.
- WOLOVICH, W. A., and FALB, P. L., 1976, *SIAM Journal of Control*, **14**, 996.
- WONHAM, W. M., 1979, *Linear Multivariable Control: a Geometric approach*, second edition (New York: Springer-Verlag).

BLOCK DECOUPLING INVARIANTS : GEOMETRIC AND TRANSFER MATRIX CHARACTERIZATIONS

C. COMMAULT*, J. DESCUSSE†, J. M. DION*, J. A. TORRES*

* Laboratoire d'Automatique de Grenoble (C.N.R.S. URA 228)

E.N.S.I.E.G. - I.N.P.G.

B.P. 46 - 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE

† Laboratoire d'Automatique de Nantes (C.N.R.S. URA 823)

E.N.S.M.

44072 Nantes Cedex 03, FRANCE

Torres's work is sponsored by CONACYT-MEXICO

Abstract. In this paper we consider the block decoupling problem for linear time invariant systems in the general case i.e. the system transfer matrix is not supposed to be surjective. The aim of this work is twofold, first to introduce new lists of integers called "Block Essential Structures" of the system and then to provide several equivalent characterizations of these invariants within both transfer matrix and geometric approaches.

It turns out that these integers represent precisely the minimal infinite structure achievable for the blocks of the decoupled system through precompensation. When the system is decouplable by static or dynamic state feedback the minimal infinite structure achievable is the same as previously.

Keywords : Linear Systems ; Block Decoupling.

1- INTRODUCTION

During the last twenty years a great deal of interest has been brought to the theory of decoupling for linear time invariant systems. Important steps in the development of the decoupling theory as well as references can be found in Falb and Wolovich (1967), Morse and Wonham (1973), Wonham (1979), Hautus and Heymann (1983). In the recent years a great deal of interest has been devoted to the structural features of decoupling problems. Various lists of integers strongly related with the deep structure of the system have been introduced. In particular Descusse and Dion (1982) expressed the solvability condition of Falb et Wolovich (1967) in terms of infinite structure equalities. In Commault and Coworkers (1986) the essential orders characterizing the minimal infinite structure of the decoupled system are presented for the row by row decoupling problem.

In this paper we will focus our interest on the block decoupling problem. We are interested in obtaining the simplest possible decoupled systems. More precisely we look for decoupled systems possessing the least possible infinite structure. We consider a linear system whose transfer matrix $T(s)$ is partitioned in subsystems $T_i(s)$ according to a desired output partition. We assume that the rank of $T(s)$ is equal to the sum of the ranks of the subsystems $T_i(s)$, then block decoupling by precompensation is always possible Hautus and Heymann (1983). The aim of the paper is mainly to introduce new lists of integers called "the i-th block essential orders" which represent precisely the minimal infinite structure achievable for the i-th block of the decoupled system through precompensation. We will define the "block essential orders" as the union of the i-th block essential orders. We will prove that the block essential orders are feedback invariants and will provide several equivalent characterizations of these invariants within both transfer matrix and geometric approaches.

The present work generalizes that one already done by Commault and Coworkers (1986) where only the row by row decoupling problem was considered.

This paper is organized as follows : Section two is devoted to notations and basic concepts. In the third section we introduce the block decoupling problem and some preliminaries are given. The new lists of invariants called block essential orders are introduced in section four. We give also several geometric and transfer matrix characterizations of these invariants. Its application to the block decoupling problem through precompensation, static or dynamic state feedback take place also in section four. We show that the block essential orders

represent the least infinite structure achievable for the decoupled system. In the last section an illustrative example exhibits both geometric and transfer matrix points of view. Some concluding remarks end the paper.

2 - NOTATIONS AND PRELIMINARIES

In this paper we will deal with linear time invariant (C, A, B) systems described by :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathcal{X} \sim \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \sim \mathcal{R}^m$ and $y \in \mathcal{Y} \sim \mathcal{R}^p$ with B monic and C epic.

Associated with (C, A, B) we will consider a k -partition of the output y into k nonempty subsets of components y_i , each of dimension p_i ($0 < p_i$, $\sum_{i \in k} p_i = p$). This partition induces a corresponding partition of C , written as $(C^T_1, C^T_2, \dots, C^T_k)^T$ with T denoting transposition. We will denote by C_i the matrix obtained from C by removing the i -th row-block C_i .

Hereafter, we will use \mathcal{V}_i^* the maximal (A, B) -invariant subspace contained in $\text{Ker } C_i$, also written $\text{sup } I(A, B, \text{Ker } C_i)$, \mathcal{T}_i^* that maximal one contained in $\text{Ker } C_i$, \mathcal{R}_i^* will denote the maximal controllability subspace contained in \mathcal{T}_i^* . The classical tools of the geometric approach are derived from the following algorithms (see Wonham 1979).

(A, B) - invariant subspace algorithm :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i^0 &= \mathcal{X} \\ \mathcal{V}_i^{\mu+1} &= \text{Ker } C_i \cap A^{-1}(B + \mathcal{V}_i^\mu) \end{aligned}$$

Controllability subspace algorithm :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i^0 &= 0 \\ \mathcal{R}_i^{\mu+1} &= \mathcal{T}_i^* \cap (A\mathcal{R}_i^\mu + B) \end{aligned} \quad (2)$$

with B the image of B .

Define

$$p_{\mu+1} = \dim(B \cap \mathcal{V}^\mu / B \cap \mathcal{V}^*) ; \mu \geq 0 \quad (3)$$

where \mathcal{V}^μ and \mathcal{V}^* are related to $\text{sup } I(A, B, \text{Ker } C)$.

The infinite zero structure of (C, A, B) is the list of integers $\{n_i\}$ defined by $n_i = \text{card}\{p_\mu \geq i\}$. By the way, (C, A, B) has p_1 infinite zeros the orders of which are n_i . Recall that $p_1 = \text{rank } T(s)$.

Let $R(s)$ be the field of rational functions. A rational function $f(s) = n(s)/d(s)$ is said to be proper (resp. strictly proper) if $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ (resp. $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$) where $\deg(n(s))$ denotes the polynomial degree of $n(s)$.

Denote by $R_p(s)$ the ring of proper rational functions and $R_p^{p \times m}(s)$ the set of proper rational $p \times m$ transfer matrices.

The units (invertible elements) of the ring $R_p^{p \times m}(s)$ are called bicausal matrices and are characterized by the property that $B(s)$

is a bicausal matrix if and only if $\det(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s)) \neq 0$.

Definition 1 : A full column rank proper rational matrix $V(s)$ is said to be a right bicausal matrix if there exists a proper rational matrix $W(s)$ such that $[V(s) \ W(s)]$ is a bicausal matrix.

The transfer matrix of system (1) is a $p \times m$ strictly proper rational matrix with null left and right static kernels, since B is monic and C is epic.

$$T(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

For a $p \times m$ rational matrix $G(s)$, there exist Smith-McMillan factorizations at infinity which were studied in Verghese (1978) and in Dion and Commault (1982) :

$$G(s) = B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$$

where $B_1(s), B_2(s)$ are bicausal matrices and $\Lambda(s)$ is uniquely defined by :

$$\Lambda(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} s^{-n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & s^{-n_r} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right]$$

where r is the rank of $G(s)$. If n_i is negative, $-n_i$ is the order of a pole at infinity, whereas if n_i is positive, n_i is the order of a zero at infinity.

In the whole paper the infinite structure of $G(s)$ will be denoted by :

$$\sum_{\infty}(G(s)) = \{n_1, \dots, n_r\} \quad (4)$$

we will also denote : $-\sum_{\infty}(G(s)) = \{-n_1, \dots, -n_r\}$.

In case, when dealing with a realization (C, A, B) of a strictly proper transfer matrix $T(s)$, the infinite structure will be denoted either by $\sum_{\infty}(C, A, B)$ or by $\sum_{\infty}(T(s))$.

Another useful notation, in the spirit of compactness, will be $d_{\infty}(T(s))$ to denote the sum of infinite pole and zero orders of $T(s)$, this means :

$$d_{\infty}(T(s)) = \sum_{i=1}^k |n_i| \quad (5)$$

The equivalence between Morse's second list I_r and the ordered list of the degrees of a minimal polynomial basis for the right kernel of the transfer matrix are well known (Forney 1975, Warren and Eckberg 1975). In particular the dimension of the largest controllability subspace \mathcal{R}^* contained in $\text{Ker } C$ of a minimal realization (A, B, C) of $T(s)$ is equal to the sum of the degrees of a minimal polynomial basis for the right kernel of $T(s)$. In fact we will use the dual formulation of this result namely :

$$\dim \left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^* + \mathcal{V}^*} \right) = \sigma(T(s)) \quad (6)$$

where $\sigma(T(s))$ denotes the sum of the degrees of a minimal polynomial basis of the left kernel of $T(s)$ and \mathcal{S}^* is the maximal (C, A) -invariant subspace containing the image of B .

3 - THE BLOCK DECOUPLING PROBLEM

Problem formulation

We will consider now the block decoupling problem. In order

to avoid trivialities we will require the compensated system to be just as "output controllable" as the original system is.

We will say that the proper precompensator $C(s)$ is admissible if

$$\text{rank } T(s) C(s) = \text{rank } T(s).$$

This admissibility condition is equivalent to the preservation of the C^* controlled output trajectories, see Brockett and Mesarovic (1965).

Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper rational matrix, partitioned in row-blocks relatively to a given list of positive integers

(p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$, in the following way :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}; \text{ with } T_i(s) \in R_p^{p_i \times m}(s) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

The system with transfer matrix $T(s)$ is said to be block decoupled relatively to the partition $\{p_i\}$ if there exist positive

integers m_1, \dots, m_k satisfying $\sum_{i=1}^k m_i = m$, such that $T(s)$ has the

block diagonal form :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{kk}(s) \end{bmatrix} = \text{diag}(T_{11}(s), \dots, T_{kk}(s))$$

with $T_{ii}(s) \in R_p^{p_i \times m_i}(s)$ for $i = 1, \dots, k$

This means that each above defined input block influences only one output block. If one wants this influence to be effective the $T_{ii}(s)$ must be non null for each i , in this case the system is called non degenerate.

The decoupling problem can be formulated as follows : Is it possible to exhibit an admissible proper precompensator $C(s)$ such that $T(s) C(s)$ is block decoupled and non degenerate ?

It is well known that the above defined decoupling problem is solvable by precompensation when the row blocks $T_i(s)$ are

independent ($r = \sum_{i=1}^k r_i$, $r = \text{rank } T(s)$ and $r_i = \text{rank } T_i(s)$),

Hautus and Heyman (1983).

In this paper we focus our attention on the simplest achievable decoupled systems. More precisely we will give the minimal McMillan degree and the minimal infinite structure achievable for the blocks of the decoupled system.

4 - THE BLOCK ESSENTIAL STRUCTURES.

In the first part of this section we are concerned with some lists of integers strongly related with the infinite structure of the system under study. Such lists, called the i -th block essential structures, are feedback invariant and represent, the minimal infinite structure achievable for the i -th block of the decoupled system.

We are also interested in the minimal McMillan degree achievable for the blocks of the decoupled system. We will recall the geometric definition and some transfer matrix properties of the block decoupling invariants $n_{i,c}$ which were introduced in Dion and Coworkers (1989).

4.1-Geometric and transfer matrix characterizations.

We will give first a geometric definition of the block essential structure of a system (C, A, B) . Then we will give two suitable possible interpretations of the block essential structure in the transfer matrix framework.

Definition 2 : Let (C, A, B) be the system (1) decomposed according to the output partition (p_1, \dots, p_k) . Let F_i denote any matrix such that $(A + BF_i) \mathcal{R}_i^* \subset \mathcal{R}_i^*$, where \mathcal{R}_i^* is the maximal controllability subspace contained in $\text{Ker } C^i$ and C^i is the matrix obtained from C by removing its i -th row-block. Consider $B_i := B \cap \mathcal{R}_i^*$, $B_i : \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{X}$ and $A_i := A + BF_i$.

We define the i -th block essential structure of (C, A, B) relatively to $\{p_i\}$, denoted $\Sigma_{ei}(C, A, B)$, as the structure at infinity of the system (C_i, A_i, B_i) , i. e. :

$$\Sigma_{ei}(C, A, B) := \Sigma_{\infty}(C_i, A_i, B_i) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

The block essential structure of (C, A, B) relatively to $\{p_i\}$, denoted $\Sigma_e(C, A, B)$ is defined by :

$$\Sigma_e(C, A, B) := \bigcup_{i=1}^k \Sigma_{ei}(C, A, B)$$

In what follows we will consider the system (C, A, B) of transfer matrix $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$, partitioned according to (p_1, \dots, p_k) , that means :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}; \text{ with } T_i(s) = C_i(sI - A)^{-1}B$$

where C_i denotes the i -th row-block of matrix C .

In the whole paper it will be assumed that :

$$\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k \text{rank } T_i(s) \quad (7)$$

The notation $T^i(s)$ will be used to denote the matrix obtained from $T(s)$ by removing its i -th row-block, in other words :

$$T^i(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_{i-1}(s) \\ T_{i+1}(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}$$

In order to give a first transfer matrix interpretation of the block essential structure of (C, A, B) , let us introduce the following :

Definition 3 : Let $\mathcal{V}(s)$ be a k -dimensional rational subspace and $M(s)$ a polynomial matrix which columns are a minimal polynomial basis for $\mathcal{V}(s)$. Denote h_i the i -th column degrees of $M(s)$. $N(s) := M(s) \text{diag}(s^{-h_1}, \dots, s^{-h_k})$ will be called a minimal polynomial basis in s^{-1} for $\mathcal{V}(s)$.

Remark that a minimal basis in s^{-1} is a right bicausal matrix.

Theorem 1 : The i -th block essential structure $\Sigma_{ei}(C, A, B)$ of the system (C, A, B) , which transfer matrix is $T(s)$, relatively to $\{p_i\}$ satisfies :

$$\Sigma_{ei}(C, A, B) = \Sigma_{\infty}(T_i(s)V_i(s)) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

where $T_i(s)$ is the i -th row-block of $T(s)$ and $V_i(s)$ is any right bicausal matrix which is a basis for $\text{Ker } T^i(s)$, with $i = 1, \dots, k$.

Notice that there always exists such a basis for $\text{Ker } T^i(s)$, i. e. g. consider a minimal polynomial basis in s^{-1} for $\text{Ker } T^i(s)$.

proof : Prove first that $\sum_{\infty}(T_i(s)V_i(s))$ is independent of $V_i(s)$. Let $V_i(s)$ and $W_i(s)$ be two right bicausal matrices which are basis for $\text{Ker } T^i(s)$. $V_i(s) = W_i(s) Q_i(s)$, with $Q_i(s)$ a nonsingular rational matrix ; since that $V_i(s)$ and $W_i(s)$ are full column rank at infinity, then $Q_i(s)$ is a bicausal matrix. It follows that : $\sum_{\infty}(T_i(s)V_i(s)) = \sum_{\infty}(T_i(s)W_i(s))$.

By definition : $\Sigma_{ei}(C, A, B) := \Sigma_{\infty}(C_i, A + BF_i, BG_i)$

where F_i is any matrix such that $(A + BF_i)\mathcal{R}_i^* \subset \mathcal{R}_i^*$ and G_i is such that $\text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$.

The transfer matrix of the system $(C_i, A + BF_i, BG_i)$, denoted $T_{Fi}(s)$, can be written as follows :

$$T_{Fi}(s) = T_i(s) V_i(s); \quad V_i(s) = (I - F_i(sI - A)^{-1}B)^{-1}G_i$$

$V_i(s)$ is clearly a right bicausal matrix, we will show now that $V_i(s)$ is a basis for the null space of $T^i(s)$. First, observe that \mathcal{R}_i^* is contained in $\text{Ker } T^i(s)$, for all $i \neq j$, this means that $T_i(s) V_i(s) = 0$ for all $i \neq j$. We will show now that $\text{rank}(V_i(s)) = \text{dim}(\text{Ker } T^i(s))$, which will end the proof.

For this we have :

$$\begin{aligned} \text{rank}(T^i(s)) &= r - r_i \\ &= \text{dim} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*} \right) = m - \text{dim}(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) \end{aligned}$$

then : $\text{dim}(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) = m - r + r_i$.

From the definition of G_i and $V_i(s)$:

$$\text{dim}(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) = \text{rank } G_i = \text{rank } V_i(s)$$

On the other hand, because of the independence between the blocks $T_i(s)$, $\text{dim}(\text{Ker } T^i(s)) = m - r + r_i$. Then :

$$\text{rank } V_i(s) = \text{dim}(\text{Ker } T^i(s)) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

which ends the proof. ∇

Give now a technical result which will be used to provide a transfer matrix characterization of $\Sigma_{ei}(C, A, B)$.

Lemma 1 : Let $T(s)$ be a pxm proper rational matrix partitioned in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$.

Let r_i denote the $\text{rank}(T_i(s))$, for $i = 1, \dots, k$. If $T(s)$ is such that such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Let r_i denote the rank of $T_i(s)$, for $i = 1, \dots, k$. If $T(s)$ is such that :

$$\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$$

then $T(s)$ can be decomposed as :

$$T(s) = B(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

where $\tilde{T}(s)$ is a rxm full row rank proper rational matrix partitioned in row-blocks relatively to $\{r_i\}$. $B(s) = \text{diag}(B_1(s), \dots, B_k(s))$, $B_i(s)$ is a $p_i \times p_i$ bicausal matrix $\tilde{I} = \text{diag}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$, $\tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$; I_{r_i} is the $r_i \times r_i$ identity matrix.

The proof is quite similar to that of lemma 1 of Dion and Coworkers (1988). It can be performed by replacing the Smith-McMillan factorization of $T_i(s)$ by a Smith-McMillan factorization at infinity of $T_i(s)$.

Now, we are able to give another interesting characterization of the block essential structure $\Sigma_{ei}(C, A, B)$, in the rational transfer matrix framework. In fact this is a non trivial generalization of the previous work of Commault and Coworkers (1986) concerning the essential orders for the row by row case.

Theorem 2 : Let (C, A, B) the system (1) of transfer matrix $T(s)$, decomposed according to the output partition (p_1, \dots, p_k)

Assume that $\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$, where $r_i = \text{rank } T_i(s)$ and let

$T(s)$ be decomposed as in lemma 1, i. e. : $T(s) = B(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$.

Let $\tilde{T}(s)$ be factorized as follows :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B'(s)$$

where $R(s)$ is a $r \times r$ strictly proper rational matrix and $B'(s)$ is a $m \times m$ bicausal matrix. Consider $R^{-1}(s)$ decomposed in the following way:

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)]; \quad \bar{R}_i(s) \in R^{r \times r_i}(s)$$

Then the i -th block essential structure of (C, A, B) relatively to $\{P_i\}$, $\sum_{ci}(C, A, B)$, satisfy:

$$\sum_{ci}(C, A, B) = - \sum_{\infty}(\bar{R}_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

proof: Using theorem 1, it is equivalent to prove:

$$\sum_{\infty}(T_i(s)V_i(s)) = - \sum_{\infty}(\bar{R}_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $V_i(s)$ is any right bicausal matrix which is a basis for $\text{Ker } T^i(s)$. In the proof we choose $V_i(s)$ a polynomial basis in s^{-1} for $\text{Ker } T^i(s)$. So, we begin by rewriting the i -th row-block of $T(s)$ in lemma 1 as follows:

$$T_i(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{T}_i(s)$$

where $B_i(s)$ is a $p_i \times p_i$ bicausal matrix, $\tilde{T}_i(s)$ is a $r_i \times m$ full row-rank proper rational matrix and where I_{r_i} is the $r_i \times r_i$ identity matrix.

In addition, since that subspaces $\text{Ker } T^i(s)$ and $\text{Ker } \tilde{T}^i(s)$ are identical, and $B_i(s)$ is bicausal we have:

$$\sum_{\infty}(T_i(s)V_i(s)) = \sum_{\infty}(\tilde{T}_i(s)V_i(s)) \quad (8)$$

Therefore it is sufficient to perform the proof for: $\tilde{T}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(s) \\ \vdots \\ \tilde{T}_k(s) \end{bmatrix}$

which is a full row-rank rational matrix.

Let $R_i(s)$ denote the i -th row-block of the matrix $R(s)$ partitioned respectively to $\{r_i\}$. Recall that $R^i(s)$ is the $(r-r_i) \times r$ matrix obtained by removing the i -th row-block $R_i(s)$ from $R(s)$. From $V_i(s)$ we will first construct a polynomial basis in s^{-1} , $U_i(s)$, for $\text{Ker } R^i(s)$. Then we will prove that $\sum_{\infty}(T_i(s)V_i(s)) = \sum_{\infty}(R_i(s)U_i(s))$. From this the result will follow, basically because the infinite structures $-\sum_{\infty}(R^{-1}(s))$, $\sum_{\infty}(R(s))$ and $\sum_{\infty}(T(s))$ are identical.

Define $W_i(s) = B'(s)V_i(s)$, which form a basis for $\text{Ker } [R^i(s) \ 0]$. We can write:

$$\tilde{T}(s) [W_1(s), \dots, W_k(s)] = \begin{bmatrix} R_1(s) & 0 \\ \vdots & \\ R_k(s) & 0 \end{bmatrix} [W_1(s), \dots, W_k(s)] \\ = \text{diag } [D_1(s), \dots, D_k(s)] \quad (9)$$

where $W_i(s)$ is a $m \times (m-r+r_i)$ proper rational matrix. Notice that, since $V_i(s)$ is a right bicausal matrix and $B'(s)$ is a bicausal matrix, $W_i(s)$ is also a right bicausal matrix.

From $W_i(s)$ we can obtain a basis, denoted $U_i(s)$, for $\text{Ker } R^i(s)$. This can be made by choosing the first r rows of $W_i(s)$, i.e., $W_i^r(s) := [I_r \ 0] W_i(s)$, where I_r is the $r \times r$ identity matrix. Since $\dim(\text{Ker } R^i(s))$ is r_i and since $W_i(s)$ possesses $m-r+r_i$ columns independent at infinity we can take r_i independent columns at infinity from $W_i^r(s)$ to constitute basis $U_i(s)$. Therefore $W_i^r(s)$ can be factorized as follows:

$$W_i^r(s) = [U_i(s) \ Z_i(s)] P_i$$

where P_i is a $(m-r+r_i)$ permutation matrix. Because $U_i(s)$ is a basis of $\text{span}(W_i^r(s))$, we have:

$$Z_i(s) = U_i(s) \Omega_i(s)$$

$$\text{we can write: } Z_i(s) = [U_i(s), Y_i(s)] \begin{bmatrix} \Omega_i(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

where $Y_i(s)$ is chosen in such a way that $[U_i(s), Y_i(s)]$ is a

bicausal matrix. Since $Z_i(s)$ is proper, then $\Omega_i(s)$ is also proper.

We can then construct a bicausal matrix $B''_i(s)$ such that:

$$[U_i(s), Z_i(s)] = [U_i(s), 0] \begin{bmatrix} I_{r_i} & \Omega_i(s) \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} = [U_i(s), 0] B''_i(s)$$

it follows that:

$$[I_r \ 0] W_i(s) = W_i^r(s) = [U_i(s) \ 0] B''_i(s) \quad (10)$$

where $B''_i(s) = B'_i(s) P_i$ is bicausal. With this in mind, write the following expression:

$$\begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_k(s) \end{bmatrix} [U_1(s), \dots, U_k(s)] = \text{diag}[E_1(s), \dots, E_k(s)] \quad (11)$$

where $E_i(s)$ is a $r_i \times r_i$ proper rational matrix. By construction $U_i(s)$ constitutes a right bicausal matrix. Consider $R^{-1}(s)$ partitioned in column-blocks relatively to $\{r_i\}$ as follows:

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)]$$

so, we have:

$$[U_1(s), \dots, U_k(s)] = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] \text{diag}[E_1^{-1}(s), \dots, E_k^{-1}(s)]$$

Since $r = \sum_{i=1}^k r_i$ and $[U_1(s), \dots, U_k(s)]$ is non singular, then $E_i(s)$ are non singular matrices. This allows us to rewrite the last expression in the following way:

$$[U_1(s), \dots, U_k(s)] \text{diag}[E_1^{-1}(s), \dots, E_k^{-1}(s)] = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)]$$

then, for each block we have:

$$[U_i(s) \ X_i(s)] \begin{bmatrix} E_i^{-1}(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{R}_i(s); \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $X_i(s)$ is any $r \times (r-r_i)$ rational matrix. Since $U_i(s)$ is a right bicausal matrix, we choose $X_i(s)$ in order to make $[U_i(s) \ X_i(s)]$ a bicausal matrix. Therefore the infinite structure

of $[U_i(s) \ X_i(s)] \begin{bmatrix} E_i^{-1}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$ and $E_i^{-1}(s)$ are equal.

Form the later, we have:

$$\sum_{\infty}(E_i(s)) = - \sum_{\infty}(\bar{R}_i(s)); \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

putting together expressions (9), (10) and (11), we obtain:

$$D_i(s) B''_i^{-1}(s) = [E_i(s) \ 0]; \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

Finally, since $B''_i(s)$ is bicausal we get:

$$\sum_{\infty}(D_i(s)) = - \sum_{\infty}(\bar{R}_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

which by (8) and (9) ends the proof. ∇

Remark: In the proof of the above theorem the choice $V_i(s)$ minimal basis in s^{-1} for $\text{Ker } T^i(s)$ is not actually necessary. Any right bicausal matrix being a basis for $\text{Ker } T^i(s)$ would do the job.

COROLLARY 1: With the above notations, the i -th block essential structure $\sum_{ci}(C, A, B)$ is feedback invariant.

proof: Immediately from theorem 2 and the fact that any state feedback control action can always be represented by a bicausal precompensator (Hautus and Heymann (1983)).

In order to study of the minimal McMillan degree achievable for the block of the decoupled system, let us recall the following "geometric" definition (Dion and Coworkers (1989)).

Definition 4: Consider the linear system (C, A, B) , with B monic and C epic, and an output partition (p_1, \dots, p_k) , such

that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Let \mathcal{V}^* (resp. \mathcal{J}_i^*) denote the largest (A, B) invariant subspace in $\text{Ker } C$ (resp. $\text{Ker } C^i$). The block decoupling invariants of $T(s)$, denoted n_{ic} , are defined as follows:

$$n_{ic} = \dim(\mathcal{J}_i^* / \mathcal{V}^*) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

The above definition give rise to the following transfer matrix characterizations of the block decoupling invariants n_{ic} .

Theorem 3: Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper rational matrix of null left and right static kernels decomposed in row-blocks according to a given partition (p_1, \dots, p_k) and (C, A, B) be a

realization of $T(s)$. Assume that $\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$, where r_i

denotes the rank of $T_i(s)$. Then the block decoupling invariants n_{ic} of $T(s)$ satisfy:

$$i) \quad n_{ic} = \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{ij} + \sigma(T_i(s))$$

where $\{\mu_{i1}, \dots, \mu_{ir_i}\}$ is the i -th block essential structure $\Sigma_{ei}(C, A, B)$.

$$ii) \quad n_{ic} = d_{\infty}(T(s)) - d_{\infty}(T_i(s)) + \sigma(T_i(s))$$

where $T_i(s)$ denotes the i -th row-block of $T(s)$, $\bar{T}_i(s)$ denotes the matrix obtained from $T(s)$ by removing the i -th row-block and $\sigma(T_i(s))$ denotes the sum of the degrees of a minimal polynomial basis for the left kernel of $T_i(s)$.

Roughly speaking the idea of the proof of ii) is as follows. Let \mathcal{X} be the state space of (C, A, B) , making invariant \mathcal{V}^* , the state space dimension of the reduced system is $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{V}^*) = d_{\infty}(T(s)) + \sigma(T(s))$. This comes from the well known equivalences between Morse's list I_3 and the infinite structure of (C, A, B) and between Morse's list I_4 and $\sigma(T(s))$ (see Morse (1973), Warren and Eckberg (1975) and Dion and Commault (1983)). Analogously, making invariant \mathcal{J}_i^* , we obtain $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{J}_i^*) = d_{\infty}(T_i(s)) + \sigma(T_i(s))$. The proof is finished noting that $\sigma(T_i(s)) = \sigma(T(s)) - \sigma(\bar{T}_i(s))$, because of the row block independence hypothesis ($\text{rank } T(s) = r_1 + \dots + r_k$).

In Dion and Cowokers (1989), it is shown that $d_{\infty}(T(s)) - d_{\infty}(\bar{T}_i(s)) = d_{\infty}(\bar{R}_i(s))$, which from theorem 2 of this paper implies i).

4-2- Application to the block decoupling problem

We are now ready to give our results above the minimal infinite structure and the minimal McMillan degree achievable for the blocks of a decoupled system.

Theorem 4: Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper rational matrix of null left and right static kernels, decomposed in row-blocks according to a given partition (p_1, \dots, p_k) and (C, A, B) a realization of $T(s)$. If the system $T(s)$ can be decoupled relatively to (p_1, \dots, p_k) by an admissible decoupling precompensateur, then we have the following:

i) The minimal McMillan degree achievable for the i -th block of the decoupled system is given by the block decoupling invariant n_{ic} .

ii) The minimal infinite structure of the i -th block of the decoupled system is given by the i -th block essential structure $\Sigma_{ei}(T(s))$.

Notice that when $\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$, where r_i denotes the rank of $T_i(s)$, block decoupling via precompensation is always possible, Hautus and Heymann (1983).

proof: i) was proven in Dion and Cowokers (1989). To prove ii), consider $T(s)$ decomposed as in lemma 1:

$$T(s) = B(s) \bar{T}(s)$$

and let be $\bar{T}(s)$ factorized as: $\bar{T}(s) = [R(s) \quad 0] B'(s)$

where $R(s)$ is a $r \times r$ full rank strictly proper rational matrix and $B'(s)$ is a $m \times m$ bicausal matrix.

Now partition $R^{-1}(s)$ as follows:

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)]; \quad \bar{R}_i(s) \in R^{r \times r_i}(s)$$

Consider now a Smith-McMillan factorization of $\bar{R}_i(s)$ written as

$$\bar{R}_i(s) = B_{i1}(s) \begin{bmatrix} \Delta_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} B_{i2}(s) \quad (12)$$

$$\Delta_i(s) = \text{diag}(\mu_{i1}, \dots, \mu_{ir_i}).$$

Let us consider the following compensator $C(s)$:

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \quad (13)$$

where $Y(s) = R^{-1}(s) \text{diag}(B_{12}^{-1}(s) \Delta_1^{-1}(s), \dots, B_{k2}^{-1}(s) \Delta_k^{-1}(s))$ and $X(s)$ any $(m-r) \times r$ proper rational matrix. Clearly $C(s)$ is an admissible precompensator.

The decoupled system is:

$$T(s) C(s) = B(s) \bar{T} \text{diag}(B_{12}^{-1}(s) \Delta_1^{-1}(s), \dots, B_{k2}^{-1}(s) \Delta_k^{-1}(s))$$

the infinite zero structure of the i -th block is equal to the infinite pole structure of $\bar{R}_i(s)$ which is, from theorem 2, equal to $\Sigma_{ei}(T(s))$.

In Dion and Cowokers (1989) it is shown that the least value for the sum of the infinite zero orders for the i -th block of the decoupled system is $n_{ic} - \sigma(T_i(s))$. Then, from i) of theorem 3 the result follows. ∇

Comments: It is proved in Commault and Cowokers (1988), that when the number of inputs is sufficiently large the system is decouplable by dynamic state feedback. It is shown in Descusse (1989), that when \mathcal{R}^* is sufficiently large and "well structured" decoupling is achievable by static state feedback.

In both cases the minimal infinite structure achievable when decoupling is possible is $\Sigma_{ei}(C, A, B)$.

5 - AN ILLUSTRATING EXAMPLE

Let the linear system (C, A, B) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

which transfer matrix is:

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

We will show later that this system is not row by row decouplable, but it is possible to decouple $T(s)$ in blocks according to the output partition $(2, 1)$.

From definition 2, the i -th block essential structure of (C, A, B) relatively to $(2, 1)$ is equal to the infinite structure of the subsystem $(C_i, A + BF_i, B_i)$, where F_i is such that: $(A + BF_i) \mathcal{R}_i^* \subset \mathcal{R}_i^*$ and G_i is such that: $\text{Im } B G_i = B \cap \mathcal{R}_i^*$ for $i = 1, 2$. In this example we have:

$$\begin{aligned} \sum_{e1} (C, A, B) &= \sum_{p0} (C_1, A + BF_1, BG_1) = \{1, 2\} \\ \sum_{e2} (C, A, B) &= \sum_{p0} (C_2, A + BF_2, BG_2) = \{2\} \end{aligned}$$

For illustrating theorem 2, let us now factorize T(s) as follows :

$T(s) = [R(s) \ 0] B(s)$; where B(s) is a bicausal matrix and R(s) is equal to :

$$R(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix}; \text{ with } R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -s^{-2} & -s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

and let $R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)]$ be partitioned in column-blocks according to (2, 1). $\bar{R}_1(s)$ has two infinite poles of orders {1, 2} and $\bar{R}_2(s)$ has one infinite pole of order {2}, this confirm us that :

$$\begin{aligned} \sum_{e1} (C, A, B) &= \sum_{p0} (\bar{R}_1(s)) = \{1, 2\} \\ \sum_{e2} (C, A, B) &= \sum_{p0} (\bar{R}_2(s)) = \{2\} \end{aligned}$$

as stated in theorem 2.

- COMPENSATOR CONSTRUCTION :

Bellow we will construct a block decoupling precompensator C(s) which will exhibit the minimal infinite structure achievable for the decoupled system. In fact T(s) is not row decouplable, since condition $m \geq 2p - k$ is not hold (see Commault and Dion 1988), where $m = 4$ is the number of inputs, $p = 3$ is the number of outputs and $k = 1$ is the column rank at infinity of $R^{-1}(s)$. However it is block decouplable according to partition (2, 1), since condition $m \geq 2p - k^*$ is satisfied, where $k^* = 2$ is the maximal column rank at infinity that can be obtained from the column blocks of $R^{-1}(s)$ (see Commault and Coworkers 1988).

To illustrate the compensator construction of theorem 3, let us consider the following Smith-McMillan factorization at infinity of $\bar{R}_1(s)$.

$$\bar{R}_1(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} \Delta_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} B^{-1}_1(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hence, from expression 13 of theorem 4 we have that a block decoupling precompensator is given by : $C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix}$

with : $Y(s) = R^{-1}(s) \text{diag}(B^{-1}_1(s) \Delta_1(s), B^{-1}_2(s) \Delta_2(s))$ and X(s) is any (m-r)xr rational matrix. Yielding in this case the following precompensator C(s) :

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & -1 & -s^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The decoupled system is :

$$T(s) C(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & -s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix}$$

As a matter of fact we have :

$$\sum_{p0} (D_1(s)) = \{1, 2\}; \sum_{p0} (D_2(s)) = \{2\}$$

or $D_1(s)$ has two infinite zeros of orders {1, 2} and $D_2(s)$ has an infinite zero of order {2}. This is the minimal infinite structure achievable for the block decoupled system, since $\sum_{e1} (T(s)) = \sum_{p0} (D_1(s))$.

To finish let us remark that the system (C, A, B) is block decouplable by non regular static state feedback since $\dim \mathcal{R}^* \geq 1$, see Descusse (1989).

Actually we can verify that the following static state feedback :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is equivalent to the precompensator C(s) given above. In fact :

$$(I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} G = C(s)$$

Then the block decoupling via non regular static state feedback (F, G) provides us with the minimal infinite structure.

REFERENCES

- R. Brockett and M.D. Mesarovic, The Reproducibility of Multivariable Systems, J. Math. Anal. Appl. II, p. 548, (1965).
- C. Commault, J.M. Dion and J. Torres, Invariant Spaces at Infinity of Linear Systems, Application to Block Decoupling, to appear in I.E.E.E. Trans. on Aut. Control.
- C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay and M. Malabre, New Decoupling Invariants : The Essential Orders, Int. J. Control, vol. 44, n° 3, pp. 689-700, (1986).
- J. Descusse and J. M. Dion, On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems, IEEE Trans. on Aut. Control, pp. 971-974, (1982).
- J. Descusse, J.F. Lafay and M. Malabre, Solution to Morgan's Problem, IEEE Trans. on Aut. Control, AC-83, n° 8, pp. 732-739, (1988).
- J. Descusse, Block Non Interacting Control with Non Regular Static State Feedback, accepted in IFAC-Workshop, Prague-Czechoslovakia, Sept. (1989)
- J.M. Dion and C. Commault, Smith Mc Millan Factorizations at Infinity or Rational Matrix Functions and Their Control Interpretation, Syst. and Contr. Letters, vol.1, n° 5, pp 312-320, (1982).
- J.M. Dion and C. Commault, The Minimal Delay Decoupling Problem : Feedback Implementation with Stability, SIAM J. Control, vol. 26, n° 1, pp. 66-82, (1988).
- J. M. Dion, J.A. Torres and C. Commault, New Feedback Invariants and The Block Decoupling Problem, Technical Report, LAG, February (1989).
- P.L. Falb and W.A. Wolovich, Decoupling in The Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans. on Aut. Control, AC- 12, n° 6, pp. 651-669, (1967).
- G.D. Forney, Minimal Bases of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems, SIAM J. Control, vol. 13, n° 3, May (1973).
- M.L.J. Hautus and M. Heymann, Linear Feedback Decoupling - Transfer Function Analysis, I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, AC- 28, n° 8, pp. 823-832, (1983).
- A.S. Morse, Structural Invariants of linear multivariable systems, SIAM J. Control Optim. 11, pp 446-465, (1973).
- A.S. Morse and W.M. Wonham, Status of Non Interacting Control, I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, AC-16, pp. 568-581, (1973).
- G. Verghese, Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems, Ph. D dissertation Dept. Elec. Eng. Stanford Univ., (1978).
- U.E. Warren and A.E. Eckberg J.R., On the Dimension of Controllability Subspaces : A Characterization Via Polynomial Matrices and Kronecker Invariants, SIAM J. Control, vol. 13, n° 2, February (1975).
- W.M. Wonham, Linear Multivariable Control, A Geometric Approach, New-York, Springer-Verlag (1979).

MINIMAL STRUCTURE IN THE BLOCK DECOUPLING PROBLEM WITH STABILITY

C. COMMAULT, J.M. DION and J.A. TORRES†

Laboratoire d'Automatique de Grenoble
E.N.S.I.E.G. (U.R.A. 228 C.N.R.S.)
B.P. 46 - 38402 Saint-Martin-d'Hères, France

† TORRES's work is sponsored by CONACYT-MEXICO.

Abstract. In this paper we consider the block decoupling problem with stability. We characterize the minimal McMillan degree achievable for the block decoupled system. For this, we introduce a new list of integers which are feedback invariant. These integers are related in a simple way to the minimal number of unstable and infinite zeros of the block decoupled system.

Keywords. Linear Multivariable Systems ; Block Decoupling ; Stability.

1 - INTRODUCTION

In the recent years a great deal of interest has been devoted to the structural features of decoupling problems. Various lists of integers strongly related with the deep structure of the system have been introduced. These integers have been successfully used for characterizing both the existence of specific decoupling control laws and the simplest achievable structure for the decoupled system.

In particular :

- In Descusse and Dion (1982), the classical static state feedback decoupling problem is revisited. The solvability condition of Falb and Wolovich (1967) can be expressed as follows : the system infinite structure is given by the infinite structure of the transfer matrix rows.
- In Commault et al (1986), the essential orders characterizing the minimal infinite structure of the decoupled system are presented for the general row by row decoupling problem.
- In Descusse et al (1988), structural conditions are given for the solvability of the row by row decoupling problem by static state feedback (with possible singular input transformation).
- In Dion and Commault (1988), the dynamic state feedback decoupling problem is considered. The minimal infinite and unstable structure of the decoupled system is characterized.
- In Hautus and Heymann (1983), necessary and sufficient conditions for solving block decoupling problems with stability are given. In Dion et al (1989), the minimal infinite structure of the block decoupled system is characterized.

In this paper, we consider the block decoupling problem with stability. We characterize the minimal McMillan degree achievable for the block decoupled system incorporating stability requirements. For this we introduce a new list of integers which are feedback invariant. Moreover we give the minimal infinite and unstable structure of the i -th block of the decoupled system. This structure is easily obtained by comparing the unstable and infinite structure of the original system transfer matrix (stabilized if necessary by an adequate static state feedback) and the one of the transfer matrix obtained by removing the i th row block.

The paper is organized as follows, in section 2 some notations and preliminaries are given. Two useful technical results concerning Hermite forms are stated and the block decoupling problem with stability is formulated.

Section 3 is devoted to the study of a new list of integers $\{n_{ies}\}$ which is invariant by static state feedback. In section 4 we prove that the minimal McMillan degree achievable for the decoupled system with stability is ν the sum of the n_{ies} .

In section 5 an illustrative example exhibits the main features of the proposed approach.

2 - NOTATIONS AND PRELIMINARIES

Let $R(s)$ be the field of rational functions. A rational function $f(s) = n(s)/d(s)$ is said to be proper (resp. strictly proper) if $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ (resp. $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$) where $\deg(n(s))$ denotes the polynomial degree of $n(s)$. The function $f(s) = n(s)/d(s)$ will be called a proper rational stable function if it is proper and if all the roots of $d(s)$ are stable. The stability domain under consideration is any region in the complex plane symmetrically located with respect to the real axis and including at least one point of the real axis.

Denote by $R_p(s)$ the ring of proper rational functions and $R_p^{pxm}(s)$ the set of proper rational pxm transfer matrices. The units (invertible elements) of the ring $R_p^{mxm}(s)$ are called bicausal matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is a bicausal matrix if and only if $\det(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s)) \neq 0$.

The set of proper rational stable functions, denoted $R_{ps}(s)$, is an Euclidean domain with degree function defined by : $d(f(s)) = d_1(f(s)) + d_2(f(s))$, where $d_1(f(s))$ is the infinite zero order of $f(s)$ and $d_2(f(s))$ is the number of unstable zeros of $f(s)$ counted with their multiplicity Hung and Anderson (1979), and Callier and Desoer (1982).

The set of pxm matrices with entries in $R_p(s)$ will be denoted by $R_p^{pxm}(s)$. The units of $R_p^{mxm}(s)$ are called bicausal-bistable matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is bicausal-bistable if and only if $\det B(s)$ is a unit of $R_{ps}(s)$.

In this paper we use the symbol $\delta_M(T(s))$ to denote the McMillan degree of a transfer matrix $T(s)$. By McMillan degree we mean the polynomial degrees sum of the denominators in the Smith-McMillan form of the transfer matrix $T(s)$, Kailath (1980).

In the sequel, we will need Smith forms of proper rational

transfer matrices over the Euclidean ring of proper stable rational functions $R_{ps}(s)$. Let us introduce such factorizations, which were studied in Verghese (1978), Vardulakis (1983).

Definition 1: Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix, a Smith McMillan factorization of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$ is a factorization of the form:

$$T(s) = B_{s1}(s) \Lambda(s) B_{s2}(s)$$

with $B_{s1}(s)$ and $B_{s2}(s)$ bicausal-bistable matrices and

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where $\Delta(s) = \text{diag}(n_1(s) / d_1(s), \dots, n_r(s) / d_r(s))$

$$\text{with: } n_i(s) = \frac{e_i(s)}{f_i} \text{ and } d_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\pi^{t_i}}$$

$e_i(s), \psi_i(s)$ are coprime polynomials with only unstable roots and $\pi = s+a$ is an arbitrary stable polynomial. The integers t_i (resp. f_i) are assumed decreasingly (resp. increasingly) ordered.

Theorem 1: Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix. Then there exist Smith McMillan factorizations of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$. Moreover $\Lambda(s)$ is uniquely defined modulo $\pi = s+a$, a stable polynomial. The unstable zeros (resp. poles) of $T(s)$ are the roots of $e_i(s)$ (resp. $\psi_i(s)$) and the infinite zero (resp. pole) orders of $T(s)$ are given by $f_i - \deg(e_i(s))$ (resp. $t_i - \deg(\psi_i(s))$).

Let $d(T(s))$ denote the sum of the infinite and unstable zero and pole orders of the rational matrix $T(s)$, counted with their multiplicity:

$$d(T(s)) = \sum_{i=1}^r (f_i + t_i) \quad (2.1)$$

For a proper stable rational matrix, which has no unstable and infinite poles ($\psi_i(s) = 1$ and $t_i = 0$, for $i = 1, \dots, k$)

$$d(T(s)) = \sum_{i=1}^r f_i. \text{ In this case the Smith McMillan factorization}$$

of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$ coincides with the usual Smith factorization over the ring of proper stable rational functions.

Recall now the Hermite form over $R_{ps}(s)$, the ring of proper rational stable functions

Theorem 2 Morse (1975): Let $T(s)$ be a $r \times m$ surjective proper rational stable matrix. $T(s)$ can be factorized in $T(s) = H(s) B(s)$, where $B(s)$ is a bicausal bistable matrix (unity of $R_{ps}(s)$) and $H(s) = [\bar{H}(s) \ 0]$, where:

$$\bar{H}(s) = \begin{bmatrix} \delta_1 / \pi^{n_1} & & & \\ & & 0 & \\ & h_{ij}(s) & & \\ & & & \delta_r / \pi^{n_r} \end{bmatrix}$$

where $\pi = s+a$ is an arbitrary stable polynomial of degree one and

$$h_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\pi^{n_{ij}}}$$

$n_{ij} < n_i$ with n_{ij}, n_i positive integers and δ_i, γ_{ij} polynomials, δ_i possessing only unstable zeros. $H(s)$ is called a Hermite form of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$.

$H(s)$ is non unique, it is defined up to units of $R_{ps}(s)$. Uniqueness of $H(s)$ may be obtained adding some conditions, Morse (1975).

We will give now two technical lemmas concerning the Hermite forms over $R_{ps}(s)$.

Since $B(s)$ is a bicausal bistable matrix, the infinite and unstable zeros of $H(s)$ are those of $T(s)$. Let α_∞ denote the maximal infinite zero order of $H(s)$ and let q be the number of different finite unstable zeros z_1, \dots, z_q of $H(s)$ and denote by α_i the maximal order of the finite zero z_i .

Define $n := \sum_{i=1}^q \alpha_i + \alpha_\infty$, we have

Lemma 1: Let $T(s)$ be a $r \times m$ surjective proper rational stable matrix and $H(s)$ be a Hermite form of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$. With the above notations the McMillan degree of each entry of $H(s)$ is less than or equal to n .

proof:

We will prove that each entry of $\bar{H}^{-1}(s)$ possesses an infinite pole (resp. an unstable pole) of order lower than or equal to α_∞ (resp. α_i), this will imply that the McMillan degree of the entries of $\bar{H}(s)$ are lower than or equal to n .

Prove first that the entries of $\bar{H}^{-1}(s)$ possess infinite poles of order at most equal to α_∞ . Suppose that one entry of $\bar{H}(s)$ has an infinite pole order $k > \alpha_\infty$, then:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^k} \bar{H}^{-1}(s) \neq 0$$

Consider now a Smith-McMillan form $\Lambda(s)$ of $\bar{H}^{-1}(s)$ over R_{ps} $\bar{H}^{-1}(s) = B_1(s) \Lambda(s) B_2(s)$; with $B_1(s), B_2(s)$ bicausal bistable matrices. By construction the infinite pole orders of the entries of $\Lambda(s)$ are lower than or equal to α_∞ , then:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^k} \Lambda(s) = 0$$

then it follows that:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^k} \bar{H}^{-1}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} B_1(s) \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s^k} \Lambda(s) \right) \lim_{s \rightarrow \infty} B_2(s) = 0$$

which contradicts the assumption, so the entries of $\bar{H}^{-1}(s)$ possess an infinite pole order less than or equal to α_∞ .

In the same way prove now that the entries of $\bar{H}^{-1}(s)$ possess an unstable pole z_i of order lower than or equal to α_i . Suppose that one entry of $\bar{H}^{-1}(s)$ has an unstable pole z_i of order $k_i > \alpha_i$, then:

$$\lim_{s \rightarrow z_i} (s - z_i)^{k_i} \bar{H}^{-1}(s) \neq 0$$

Once again, by construction of $\Lambda(s)$, the entries of $\Lambda(s)$ have an unstable pole at z_i of order lower than or equal to α_i . It follows that:

$\lim_{s \rightarrow z_i} (s - z_i) \bar{H}^{-1}(s) = 0$, which contradicts the assumption and ends the proof. \square

Lemma 2: Let $T(s)$ be a $r \times m$ surjective proper rational stable matrix. Factorize $T(s)$ as follows: $T(s) = H(s) B(s)$, where $H(s) = [\bar{H}(s) \ 0]$ is a Hermite form of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$ as in theorem 2. With the previous notations we have the following:

$$d(T(s)) = d(H(s)) = \sum_{i=1}^r n_i$$

proof :

First, observe that the infinite and unstable zero structure of $T(s)$ is equal to that of $H(s)$, since $B(s)$ is bicausal bistable matrix.

$$d(T(s)) = d(H(s)) = d(\overline{H}(s)) \quad (2.2)$$

Let $T(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \end{bmatrix} B_2(s)$, $\Delta(s) = \text{diag}(e_1(s)/\pi^{f_1}, \dots, e_r(s)/\pi^{f_r})$, be a Smith-McMillan form over $R_{ps}(s)$, $e_i(s)$ has no common factors with π^{f_j} ($i, j = 1, \dots, r$), then :

$$d(\overline{H}(s)) = d(\det \Delta(s))$$

There exist a Smith-McMillan factorization of $\overline{H}(s)$ over $R_{ps}(s)$, $\overline{H}(s) = B'_1(s) \Delta'(s) B'_2(s)$, with $\Delta'(s) = \Delta(s)$, such that :

$$\det \overline{H}(s) = b_1(s) \det(\Delta(s)) b_2(s)$$

with $b_1(s), b_2(s)$ bicausal bistable rational functions, which imply that :

$$d(\det \overline{H}(s)) = d(\det \Delta(s))$$

the last expression allows us to write :

$$d(\overline{H}(s)) = d(\det \overline{H}(s))$$

and from the particular structure of $\overline{H}(s)$ the result follows. ∇

Introduce now the block decoupling problem with stability.

Problem formulation

We will consider now the stable block decoupling problem. In order to avoid trivialities we will require the compensated system to be just as "output controllable" as the original system is.

We will say that the proper precompensator $C(s)$ is admissible if

$$\text{rank } T(s) C(s) = \text{rank } T(s)$$

This admissibility condition is equivalent to the preservation of the C^∞ controlled output trajectories, see Brockett and Mesarovic (1965).

Let $T(s)$ be a pxm proper rational matrix, partitioned in row-blocks relatively to a given list of positive integers

(p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$, in the following way :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}; \text{ with } T_i(s) \in R_p^{p_i \times m}(s) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

The system with transfer matrix $T(s)$ is said to be block decoupled relatively to the partition $\{p_i\}$ if there exist

positive integers m_1, \dots, m_k satisfying $\sum_{i=1}^k m_i = m$, such that $T(s)$ has the block diagonal form :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{kk}(s) \end{bmatrix}$$

with $T_{ii}(s) \in R_p^{p_i \times m_i}(s)$ for $i = 1, \dots, k$

This means that each above defined input block influences only one output block. If one wants this influence to be effective the $T_{ii}(s)$ must be non null for each i , in this case the system is called non degenerate.

The decoupling problem can be formulated as follows : Is it possible to exhibit an admissible proper precompensator $C(s)$ such that $T(s) C(s)$ is block decoupled with stability ($T(s) C(s)$ and $C(s)$ stable) and non degenerate ?

It is well known that the above defined decoupling problem is solvable by precompensation when the row blocks $T_i(s)$ are

independent ($r = \sum_{i=1}^k r_i$, $r = \text{rank } T(s)$ and $r_i = \text{rank } T_i(s)$), Hautus and Heyman (1983).

In this paper we focus our attention on the simplest achievable decoupled systems with stability. More precisely we will give the minimal McMillan degree and the minimal infinite and unstable structure achievable for the decoupled system ensuring the stability of the compensated system.

3 - FEEDBACK INVARIANTS

In this section we will consider a pxm strictly proper rational transfer matrix $T(s)$ of rank r , partitioned in row-blocks relatively to a given list of positive integers (p_1, \dots, p_k) ,

such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$, in the following way :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}; \text{ with } T_i(s) \in R_p^{p_i \times m}(s) \text{ for } i = 1, \dots, k$$

Let $T^i(s)$ denote the matrix obtained from $T(s)$ by removing its i -th row-block, i.e.

$$T^i(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_{i-1}(s) \\ T_{i+1}(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}$$

In what follows the following lemma will be useful, Dion et al (1988).

Lemma 3 : Let $T(s)$ be a pxm proper rational matrix partitioned in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) , such that

$\sum_{i=1}^k p_i = p$. Let r_i denote the rank of $T_i(s)$, for $i = 1, \dots, k$.

If $T(s)$ is such that :

$$\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$$

then $T(s)$ can be decomposed as :

$$T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

where $\tilde{T}(s)$ is a rxm full row rank proper rational matrix partitioned in row-blocks relatively to $\{r_i\}$, $U(s) = \text{diag}(U_1(s), \dots, U_k(s))$, $U_i(s)$ is a $p_i \times p_i$ unimodular matrix and $\tilde{I} = \text{diag}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$,

$\tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$; I_{r_i} is the $r_i \times r_i$ identity matrix.

We will define now a new list of integers $n_{i,es}$, $i = 1, \dots, k$, and show that these integers are feedback invariant. These invariants generalize the block decoupling invariants introduced in Dion et al (1989), when introducing stability requirements.

Definition 2 : Let $T(s)$ be a pxm strictly proper stable rational matrix decomposed as in lemma 3 according to the output partition (p_1, \dots, p_k) , i.e. $T(s) = U(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$ and let $\tilde{T}(s)$ be factorized as :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$$

where $R(s)$ is a $r \times r$ proper rational nonsingular matrix and $B_s(s)$ is a bicausal-bistable matrix. Consider $R^{-1}(s)$ partitioned as follows :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \bar{R}_i(s) \in R^{r \times r_i}(s)$$

We will define "the stable block decoupling invariants", denoted n_{ics} of $T(s)$ as the total number of infinite and unstable poles of $\bar{R}_i(s)$ counted with their multiplicity i. e. :

$$n_{ics} = d(\bar{R}_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

we call $v = \sum_{i=1}^k n_{ics}$, "the stable block decoupling degree" of $T(s)$.

From the above definition it is clear that v and n_{ics} are invariant under static state feedback preserving stability on a minimal realization of $T(s)$.

We will prove later that the n_{ics} are independent of the chosen factorization.

The following lemma will be used later to provide us with a nice characterization of the n_{ics} .

Lemma 4 : Let $G(s)$ be a $r \times r$ full rank strictly proper stable rational matrix, partitioned in row-blocks relatively to (r_1, \dots, r_k) . Partition $G^{-1}(s)$, the inverse matrix of $G(s)$, in column-blocks relatively to (r_1, \dots, r_k) . Let $\bar{G}_i(s)$ denote the i -th column block of $G^{-1}(s)$, then :

$$d(\bar{G}_i(s)) = d(G(s)) - d(G^i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $G^i(s)$ denotes the matrix obtained from $G(s)$ by removing the i -th row-block.

This lemma can be proved following closely the proof of lemma 2 given in Dion et al (1989). For this, $R_p(s)$ will be replaced by $R_{ps}(s)$, $d_{\infty}(\cdot)$ will be replaced by $d(\cdot)$. Mutatis mutandis the result follows using lemma 2 of the present paper.

Theorem 3 : Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper stable rational matrix decomposed in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) ,

such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Let $r = \sum_{i=1}^k r_i$, where $r = \text{rank } T(s)$

and $r_i = \text{rank } T_i(s)$. Let $\tilde{T}^i(s)$ the matrix obtained from $T(s)$ by removing the i -th row-block. Then the stable block decoupling invariants n_{ics} of $T(s)$ satisfy :

$$n_{ics} = d(T(s)) - d(\tilde{T}^i(s)) + \sigma(T_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $\sigma(T_i(s))$ denotes the sum of the degrees of a minimal polynomial basis for the left kernel of $T_i(s)$.

proof :

Begin by decomposing $T(s)$ as in lemma 3 :

$$T(s) = U(s) \tilde{T}(s) \quad (3.1)$$

and denote $\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$ a Hermite factorization of $\tilde{T}(s)$ over $R_{ps}(s)$, where $B_s(s)$ is a bicausal bistable matrix. So, by definition :

$$n_{ics} = d(\bar{R}_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $\bar{R}_i(s)$ denotes the i -th column block of $R^{-1}(s)$.

From lemma 4 :

$$n_{ics} = d(R(s)) - d(R^i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

by definition of $d(R(s))$ (see expression 2.1) and since $B_s(s)$ is a bicausal-bistable matrix we have :

$$n_{ics} = d(\tilde{T}(s)) - d(\tilde{T}^i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad (3.2)$$

In the next part, we prove that : $d(\tilde{T}(s)) = d(T(s)) + \sigma(T(s))$,

which will be also true for $\tilde{T}^i(s)$, i. e. : $d(\tilde{T}^i(s)) = d(\tilde{T}^i(s)) + \sigma(\tilde{T}^i(s))$. In this way, by the row-block independence hypothesis ($\text{rank } T(s) = \sum r_i$) we will have $\sigma(T(s)) - \sigma(\tilde{T}^i(s)) = \sigma(T_i(s))$, which proves the theorem.

For this, observe that the right null space of $\tilde{T}(s)$, denoted $\text{Ker } \tilde{T}(s)$, is equal to $\text{Ker } T(s)$. In fact, $\text{Ker } \tilde{T}(s)$ is a subspace of $\text{Ker } T(s)$ and $\dim(\text{Ker } \tilde{T}(s)) = \dim(\text{Ker } T(s)) = m-r$. Denote $\sigma_R(T(s))$ the sum of the degrees of a minimal polynomial basis for $\text{Ker } T(s)$, so we have :

$$\sigma_R(T(s)) = \sigma_R(\tilde{T}(s)) \quad (3.3)$$

which is also true for $\tilde{T}^i(s)$, i. e. $\sigma_R(\tilde{T}^i(s)) = \sigma_R(\tilde{T}^i(s))$.

Now, define $Z(T(s))$ as the number of finite stable zeros of $T(s)$ counted with their multiplicity. Since $U(s)$ of (3.1) is unimodular we can write :

$$Z(T(s)) = Z(\tilde{T}(s)) \quad (3.4)$$

Moreover, we have that the McMillan degree of $\tilde{T}(s)$ is equal to the McMillan degree of $T(s)$, which allows us to write :

$$\sigma(T(s)) + d(T(s)) + Z(T(s)) + \sigma_R(T(s)) = d(\tilde{T}(s)) + Z(\tilde{T}(s)) + \sigma_R(\tilde{T}(s))$$

and from (3.3) and (3.4), we obtain :

$$\sigma(T(s)) + d(T(s)) = d(\tilde{T}(s))$$

and similarly : $\sigma(\tilde{T}^i(s)) + d(\tilde{T}^i(s)) = d(\tilde{T}^i(s))$. This combined with (3.2) lead us to :

$$n_{ics} = d(T(s)) - d(\tilde{T}^i(s)) + \sigma(T(s)) - \sigma(\tilde{T}^i(s))$$

which ends the proof, since $\sigma(T(s)) - \sigma(\tilde{T}^i(s)) = \sigma(T_i(s))$, as noted above. ∇

Remark : From this theorem it is clear that the n_{ics} do not depend on the chosen factorization in definition 2.

4 - THE MINIMAL BLOCK DECOUPLING PROBLEM WITH STABILITY.

In this section we look for the minimal McMillan degree achievable for a decoupled system ensuring the stability of the compensated system. We will show that the stable block decoupling invariants n_{ics} defined in the previous section, represent such a minimal degree for the i -th diagonal block of the decoupled system

In what follows, we will consider stable systems. There is no loss of the generality in assuming the system is stable. In fact, when the transfer matrix is not stable, we can use a static state feedback which assigns all the closed loop poles to stable locations. Denote $T_i(s)$ the closed loop transfer matrix, $T(s)$ and $T_i(s)$ are feedback equivalent on a minimal realization of $T(s)$ without unstable pole zero cancellations. It follows that $T(s)$ is decouplable with stability if and only if $T_i(s)$ is. Let us give a lower bound for the McMillan degree of the decoupled system.

Lemma 5 : Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper stable rational matrix with $\text{rank } T(s) = r$, partitioned in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) and let $C(s)$ be a $m \times r$ proper stable admissible precompensator which block decouples $T(s)$ with stability relatively to (p_1, \dots, p_k) . The McMillan degree of the i -th block of the compensated system $D_i(s)$ is greater than or equal to n_{ics} , where $T(s)C(s) = \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s))$.

The proof follows closely the proof for the case without stability requirements, see Dion et al (1989). It was given by contradiction, assuming that there exists a block decoupling precompensator such that the McMillan degree of $D_i(s)$ is lower than n_{ies} , which leads to a non proper or non stable precompensator.

We are now ready to give the main result of this section :

Theorem 4 : Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper stable rational matrix with rank $T(s) = r$, partitioned in row-blocks relatively

to (p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. If the system $T(s)$ can be decoupled relatively to (p_1, \dots, p_k) by an admissible proper precompensator with stability, then the minimal McMillan degree achievable for the block decoupled system is v , the stable block decoupling degree of $T(s)$. In this case the i -th diagonal block of the decoupled system has McMillan degree n_{ies} .

When particularized to the row by row decoupling problem of surjective systems this result is given in Dion and Commault (1988).

proof :

By lemma 5 the minimal McMillan degree achievable for the decoupled system is greater than or equal to v . We will construct a block decoupling stable precompensator and then we will show that each block of the decoupled system has McMillan degree n_{ies} .

First, decompose $T(s)$ as in lemma 3 :

$$T(s) = U(s) \bar{T}(s)$$

and consider a factorization of $\bar{T}(s)$ over $R_{ps}(s)$ of the form :

$$\bar{T}(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$$

where $B_s(s)$ is a bicausal bistable matrix and $R(s)$ is a full rank proper stable rational matrix. A possible solution is to consider a Hermite form of $T(s)$ over $R_{ps}(s)$.

Now denote $\bar{R}_i(s)$ the i -th column-block of $R^{-1}(s)$. Define $\beta_{i\infty}$ the Maximal infinite pole order of $\bar{R}_i(s)$. Let q_i denote the number of different unstable poles a_{i1}, \dots, a_{iq_i} of $R_i(s)$ and denote β_{ij} the maximal order of the pole a_{ij} , for $j = 1, \dots, q_i$ and $i = 1, \dots, k$. Define the integers g_i as follows :

$$g_i = \beta_{i\infty} + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ij} \quad \text{for } i=1, \dots, k.$$

and also define

$$G_i(s) := \frac{p_i(s)}{\pi^{g_i}} \bar{R}_i(s) \quad \text{for } i=1, \dots, k \quad (4.1)$$

with $p_i(s) = \prod_{j=1}^{q_i} (s - a_{ij})^{\beta_{ij}}$ for $i = 1, \dots, k$ and $\pi = s + a$ is a stable monomial. $G_i(s)$ is a proper stable rational matrix.

Consider now a Hermite form $[L_i^T(s) \ 0]$ of $G_i^T(s)$ over $R_{ps}(s)$, where T denotes transposition, one has :

$$G_i(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} L_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1, \dots, k \quad (4.2)$$

where $B_i(s)$ is a bicausal bistable matrix and $L_i(s)$ is a full rank proper stable rational matrix.

We are now able to give the following stable compensator :

$$C(s) = B_i^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

where $Y(s) = R^{-1}(s) \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s))$

$$D_i(s) := L_i^{-1}(s) \frac{p_i(s)}{\pi^{g_i}} \quad \text{for } i=1, \dots, k.$$

and $X(s)$ is any $(m-r) \times r$ proper stable rational matrix. Remark that $Y(s)$ can be written as follows :

$$Y(s) = [Y_1(s), \dots, Y_k(s)] ; \text{ using (4.1), (4.2) one has :}$$

$$Y_i(s) = G_i(s) L_i^{-1}(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

then $C(s)$ is a proper stable compensator.

Recall that $\beta_{i\infty}$ and β_{ij} denote the maximal orders of the infinite and unstable poles of $\bar{R}_i(s)$. From (4.1) and using a Smith-McMillan factorization of $\bar{R}_i(s)$ over $R_{ps}(s)$ it follows that the maximal orders of the infinite (resp. unstable) zeros of $G_i(s)$ are lower than or equal to $\beta_{i\infty}$ (resp. β_{ij}).

$L_i(s)$ is a Hermite form, using lemma 1 it follows that each entry of $L_i(s)$ has a denominator degree lower than or equal to g_i . It follows that :

$$D_i^{-1}(s) = L_i(s) \frac{\pi^{g_i}}{p_i(s)}$$

has no stable poles, then $D_i(s)$ has no stable zeros. The McMillan degree $\delta_M(D_i(s))$ of the non singular matrix $D_i(s)$ is then equal to $d(D_i(s))$ the sum of the infinite and unstable zeros counted with their multiplicity.

$$\delta_M(D_i(s)) = d(D_i(s))$$

$$\text{from the definition 2.1 : } d(D_i(s)) = d(D_i^{-1}(s))$$

using (4.1) (4.2) and the definition of n_{ies} we get :

$$d(D_i^{-1}(s)) = d\left(L_i(s) \frac{\pi^{g_i}}{p_i(s)}\right) = d(\bar{R}_i(s)) = n_{ies}$$

$$\text{Therefore } \delta_M(\text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s))) = v$$

Recall that

$$T(s) C(s) = U(s) \bar{T} \text{diag}(D_1(s), \dots, D_k(s))$$

Since $U(s)$ is unimodular and due to the particular structure of \bar{T} we finally get :

$$\delta_M(T(s) C(s)) = v$$

∇

5 - AN ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Consider the system :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 & \frac{1}{(s+1)^4} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{(s-1)}{(s+1)^3} & \frac{s+2}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

Let us factorize $T(s)$ as follows : $T(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$ with :

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

$$\text{and } R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 & 0 \\ \frac{-(s+1)^4}{s-1} & \frac{-(s+1)^4}{s-1} & \frac{(s+1)^3}{s-1} \end{bmatrix}$$

The system $T(s)$ is not row by row decouplable by dynamic state feedback, since $m = 4 < 2p - k = 6 - 1$, where k is the column rank at infinity of $R^{-1}(s)$ (Dion, Commault 1988). However, it is block decouplable by dynamic state feedback with the output partition (2, 1), since $m \geq 2r - k^*$, with $m = 4$ (number of inputs), $r = \text{rank } T(s) = 3$ and the integer $k^* = 2$ (the dimension of the maximal space spanned by the column blocks of $R^{-1}(s)$ when s goes to infinity) defined in Commault et al (1988).

Write $R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)]$, according to the partition (2, 1)

The matrix $\bar{R}_1(s)$ has two infinite poles of orders (2, 3) and one unstable pole at $s = 1$. Matrix $\bar{R}_2(s)$ has one infinite pole of order 2, and one unstable pole at $s = 1$. So by definition the stable block decoupling invariants are $n_{1es} = 6$ and $n_{2es} = 3$, giving a stable block decoupling degree $v = 9$.

Recall that $d(T(s))$ denotes the sum of the infinite and unstable zero orders of $T(s)$, counted with their multiplicity. $T(s)$ has three infinite zeros of orders (1, 2, 3) and one unstable zero at $s=1$. The matrix $T_1(s)$ has two infinite zeros of orders (2, 2) and the matrix $T_2(s)$ has one infinite zero of order 1. In this example $\sigma(T_1(s)) = \sigma(T_2(s)) = 0$, then we have :

$$\begin{aligned} n_{1es} &= d(T(s)) - d(T_2(s)) = 7 - 1 \\ n_{2es} &= d(T(s)) - d(T_1(s)) = 7 - 4 \end{aligned}$$

as stated in theorem 3.

We will illustrate now the compensator construction given in the proof of Theorem 4.

For this consider $G_1(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)^4} \bar{R}_1(s)$, as in (4.1). Consider

now a left Hermite form over $R_{ps}(s)$ of $G_1(s)$:

$$G_1(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} L_1(s) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{s-1}{(s+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

the procedure is similar for $\bar{R}_2(s)$.

Using (4.3) we get the following compensator :

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix};$$

$$\text{with } Y(s) = [Y_1(s), Y_2(s)]; \quad Y_i(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

for $i = 1, 2$, where $X(s)$ is any $(m-r) \times r$ proper stable rational matrix. In this way we obtain :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s+1)^2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The decoupled system is in this case :

$$T(s)C(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^4} & -\frac{s-1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s-1}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

whose McMillan degree is equal to the stable block decoupling degree $v = n_{1es} + n_{2es} = 9$, which represents the minimal McMillan degree achievable for the decoupled system.

Concluding Remarks :

- From theorem 3, $d(T(s)) - d(T^i(s))$ represents the minimal number of unstable and infinite zeros achievable for the i -th block of the decoupled system. In Dion et al (1989), the minimal infinite structure of the decoupled system is characterized, then combining these two results the minimal unstable zero structure achievable for the decoupled system is obtained.

- In Commault et al (1988) it is proven that a system can be block decoupled with stability by dynamic state feedback if the number of inputs is sufficiently large. When this condition is met the minimal infinite and unstable structure is also given by $d(T(s)) - d(T^i(s))$.

REFERENCES

- Brockett R. and M.D. Mesarovic (1965). The Reproducibility of Multivariable Systems. *J. Math. Anal. Appl.* II, p. 548.
- Callier F.M. and C.A. Desoer (1982). *Multivariable Feedback Systems*. New York, Springer Verlag.
- Commault C., J.M. Dion and J. Torres (1988). Invariant Spaces at Infinity of Linear Systems, Application to Block Decoupling, *Trans. on Aut. Control*, to be published.
- Commault C., J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay and M. Malabre (1986). New Decoupling Invariants : The Essential Orders. *Int. J. Control*, vol. 44, n° 3, pp. 689-700.
- Descusse J. and J.M. Dion (1982). On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, pp. 971-974.
- Descusse J., J.F. Lafay and M. Malabre (1988). Solution to Morgan's Problem. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-33, n° 8, pp. 732-739.
- Dion J.M. and C. Commault (1988). The Minimal Delay Decoupling Problem : Feedback Implementation with Stability. *SIAM J. Control*, vol. 26, n° 1, pp. 66-82.
- Dion J.M., J.A. Torres and C. Commault (1989). New Feedback Invariants and The Block Decoupling Problem. Internal Report, LAG, February.
- Falb P.L. and W.A. Wolovich (1967). Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-12, n° 6, pp. 651-669.
- Hautus M.L.J. and M. Heymann (1983). Linear Feedback Decoupling - Transfer Function Analysis. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-28, n° 8, pp. 823-832.
- Hung N.D. and B. D. O. Anderson (1979). Triangularization Technique for The Design of Multivariable Control Systems, *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-27, n° 3, pp. 455-460.
- Kailath T. (1980). *Linear Systems*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- Morse A.S. (1975). System Invariants Under Feedback and Cascade Control. Proc. Int. Symp. Udine Springer Berlin New-York.
- Vardulakis A.I.G. and N. Karcanias (1983). Structure, Smith-McMillan Form and Coprime MFDs of a rational matrix inside a region $P = \Omega \cup \{\infty\}$. *Int. J. Control*, Vol.38, n° 5, pp. 927-957.
- Verghese G. (1978). Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems. Ph. D dissertation Dept. Elec. Eng. Stanford Univ.

STABLE BLOCK DECOUPLING INVARIANTS
GEOMETRIC AND TRANSFER MATRIX CHARACTERIZATIONS

*J.M. DION, C. COMMAULT, J.A. TORRES**

Laboratoire d'Automatique de Grenoble (C.N.R.S. URA 228)

E.N.S.I.E.G. - I.N.P.G.

B.P. 46 - 38402 Saint-Martin-d'Hères, France

* TORRES' work is sponsored by CONACYT-MEXICO

ABSTRACT

In this paper we consider the block decoupling problem with stability for linear time invariant systems in the general case i.e. the system transfer matrix is not supposed to be surjective. The aim of this work is twofold, first to introduce new lists of invariants called the "stable block essential structures" of the system and then to provide several equivalent characterizations of these invariants within both transfer matrix and geometric approaches.

It turns out that these invariants represent precisely the minimal infinite and the minimal unstable achievable structures for the blocks of the decoupled system through precompensation. When the system is decouplable by static or dynamic state feedback the minimal infinite and unstable achievable structures are the same as previously.

I- INTRODUCTION

During the last ten years a great deal of interest has been devoted to the structural features of decoupling problems. Various lists of integers strongly related with the deep structure of the system have been introduced. These integers have successfully been used for characterizing both the existence of specific decoupling control laws and the simplest achievable structure for the decoupled system. See for example references [1] - [5].

In contrast few work has been done concerning decoupling with stability. In this paper we consider the block decoupling problem with stability. In [1] necessary and sufficient conditions for solving block decoupling problems with stability are given. In [6] geometric and transfer matrix characterizations of feedback invariants representing the minimal infinite structure achievable for the i th block of the decoupled system are given. The minimal McMillan degree achievable for the blocks of the decoupled system (with stability) is given in [7]. The present work generalizes the above mentioned works in the sense that we give the complete infinite and unstable minimal structure for each block of the decoupled system, i.e. the minimal number of infinite and unstable zeros with multiplicities and not only the minimal McMillan degree of each block. We present geometric and transfer matrix characterizations of these new feedback invariants called the "stable block essential structure". It is shown that the "stable block essential structure" represents the minimal infinite and unstable structure achievable when block decoupling by precompensation is used. When block decoupling is possible by dynamic or static state feedback the minimal infinite and the minimal unstable structures turn out to be the same.

This paper is organized as follows :

Section two is devoted to notations and basic concepts. In the third section we introduce the block decoupling problem and some preliminary results are given. The new list of invariants called "the stable block essential structure" is introduced in section four. We also give several geometric and transfer matrix characterizations of these invariants. Application to block decoupling takes place in section five. Finally in section six a significative example illustrates both geometric and transfer matrix points of view.

II- NOTATIONS AND BASIC CONCEPTS

In this paper we will deal with linear time invariant (C, A, B) systems described by :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \right\} \quad (1)$$

where $x \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \sim \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathcal{Y} \sim \mathbb{R}^p$ with B monic and C epic.

Associated with (C, A, B) we will consider an output partition given by an integer list (p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. This partition induces a corresponding partition of C , written as $(C_1^T, C_2^T, \dots, C_k^T)^T$ with τ denoting transposition. We will denote by C^i the matrix obtained from C by removing the i -th row-block C_i .

Hereafter, we will use \mathcal{V}_i^* (resp. \mathcal{T}_i^*) to denote the maximal (A, B) -invariant subspace contained in $\text{Ker } C_i$ (resp. $\text{Ker } C^i$). \mathcal{R}_i^* will denote the maximal controllability subspace contained in $\text{Ker } C^i$. The classical tools of the geometric approach are derived from the following algorithms [8].

(A, B) - invariant subspace algorithm :

$$\mathcal{V}_i^0 = \mathcal{X}$$

$$\mathcal{V}_i^{\mu+1} = \text{Ker } C_i \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_i^\mu)$$

Controllability subspace algorithm :

$$\mathcal{R}_i^0 = 0$$

$$\mathcal{R}_i^{\mu+1} = \mathcal{T}_i^* \cap (A\mathcal{R}_i^\mu + \mathcal{B}) \quad (2)$$

where \mathcal{B} denotes image of B .

Define

$$p'_{\mu+1} = \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^\mu / \mathcal{B} \cap \mathcal{V}^*) \quad ; \quad \mu \geq 0 \quad (3)$$

where \mathcal{V}^μ and \mathcal{V}^* are respectively the μ -th step and the limit of the (A, B) -invariant algorithm for $\text{Ker } C$.

The infinite zero structure of (C, A, B) is the list of integers $\{n_i\}$ defined by $n_i = \text{card}\{p'_\mu \geq i\}$. (C, A, B) has p'_1 infinite zeros the orders of which are n_i . Recall that $p'_1 = \text{rank } T(s)$.

Let $\mathbb{R}(s)$ be the field of rational functions. A rational function $f(s) = n(s)/d(s)$ is said to be proper (resp. strictly proper) if $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ (resp. $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$) where $\deg(n(s))$ denotes the polynomial degree of $n(s)$.

Denote by $\mathbb{R}_p(s)$ the ring of proper rational functions and $\mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ the set of proper rational $p \times m$ transfer matrices.

The units (invertible elements) of the ring $\mathbf{R}_p^{mxm}(s)$ are called bicausal matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is a bicausal matrix if and only if :

$$\det \left(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s) \right) \neq 0$$

The set of proper rational stable functions, denoted $\mathbf{R}_{ps}(s)$, is an Euclidean domain with degree function $\gamma(f(s)) = \gamma_1(f(s)) + \gamma_2(f(s))$, where $\gamma_1(f(s))$ is the infinite zero order of $f(s)$ and $\gamma_2(f(s))$ is the number of unstable zeros of $f(s)$ counted with their multiplicity [9], [10].

The set of pxm matrices with entries in $\mathbf{R}_{ps}(s)$ will be denoted by $\mathbf{R}_{ps}^{pxm}(s)$. The units of $\mathbf{R}_{ps}^{mxm}(s)$ are called bicausal-bistable matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is bicausal-bistable if and only if $\det B(s)$ is a unit of $\mathbf{R}_{ps}(s)$.

Definition 1 : A full column rank proper rational matrix $V(s)$ is said to be a right bicausal-bistable matrix if there exists a proper rational matrix $W(s)$ such that $[V(s) \ W(s)]$ is a bicausal-bistable matrix.

In this paper we use the symbol $\delta_M(T(s))$ to denote the McMillan degree of a transfer matrix $T(s)$. By McMillan degree we mean the polynomial degrees sum of the denominators in the Smith-McMillan form over $\mathbf{R}[s]$ of the transfer matrix $T(s)$, [11].

In the sequel, we will need Smith-McMillan forms of proper rational transfer matrices over the Euclidean ring of proper stable rational functions $\mathbf{R}_{ps}(s)$. Let us introduce such factorizations, which were studied in [12], [13].

Definition 2 : Let $T(s)$ be a pxm rational matrix, a Smith McMillan factorization of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$ is a factorization of the form :

$$T(s) = B_{s1}(s) \Lambda(s) B_{s2}(s)$$

with $B_{s1}(s)$ and $B_{s2}(s)$ bicausal-bistable matrices and

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

where $\Delta(s) = \text{diag}(n_1(s)/d_1(s), \dots, n_r(s)/d_r(s))$, with $n_i(s) = \frac{\epsilon_i(s)}{\pi}$ and $d_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\pi}$
 $\epsilon_i(s)$, $\psi_i(s)$ are coprime polynomials with only unstable roots and $\pi = s+a$ is an arbitrary stable

polynomial. Furthermore $\epsilon_i(s)$ divides $\epsilon_{i+1}(s)$ and $\psi_i(s)$ divides $\psi_{i-1}(s)$. The integers t_i (resp. f_i) are assumed decreasingly (resp. increasingly) ordered.

Theorem 1: Let $T(s)$ be a $p \times m$ rational matrix. Then there exist Smith McMillan factorizations of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$. Moreover $\Lambda(s)$ is uniquely defined modulo $\pi = s+a$, a stable polynomial and is called the Smith-McMillan form of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$. The unstable zeros (resp. poles) of $T(s)$ are the roots of $\epsilon_i(s)$ (resp. $\psi_i(s)$) and the infinite zero (resp. pole) orders of $T(s)$ are given by $f_i - \deg(\epsilon_i(s))$ (resp. $t_i - \deg(\psi_i(s))$).

For a proper stable rational matrix, which has no unstable and infinite poles ($\psi_i(s) = 1$ and $t_i = 0$, for $i = 1, \dots, k$), the Smith McMillan factorization of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$ coincides with the usual Smith factorization over the ring of proper stable rational functions.

Recall now the Hermite form over $\mathbf{R}_{ps}(s)$, the ring of proper rational stable functions

Theorem 2 [14]: Let $T(s)$ be a $r \times m$ surjective proper rational stable matrix. $T(s)$ can be factorized in $T(s) = H(s) B(s)$, where $H(s) \in \mathbf{R}_{ps}^{r \times m}(s)$ and $B(s)$ is a bicausal-bistable matrix (unit of $\mathbf{R}_{ps}^{m \times m}(s)$). $H(s) = [\bar{H}(s) \ 0]$, with $\bar{H}(s) \in \mathbf{R}_{ps}^{r \times r}$:

$$\bar{H}(s) = \begin{bmatrix} \delta_1/\pi^{n_1} & & & \\ & & 0 & \\ h_{ij}(s) & & & \\ & & & \delta_r/\pi^{n_r} \end{bmatrix} \quad (5)$$

where $\pi = s+a$ is an arbitrary stable polynomial of degree one and

$$h_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\pi^{n_{ij}}}$$

$n_{ij} < n_i$ with n_{ij}, n_i positive integers and δ_i, γ_{ij} polynomials, δ_i possessing only unstable zeros. $H(s)$ is called a Hermite form of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$.

$H(s)$ is non unique, it is defined up to units of $\mathbf{R}_{ps}(s)$. Uniqueness of $H(s)$ may be obtained adding some conditions, [14].

III- BLOCK DECOUPLING PROBLEM AND PRELIMINARY RESULTS.

Introduce now the block decoupling problem with stability.

Problem formulation

We will consider now the stable block decoupling problem. In order to avoid trivialities we will require the compensated system to be just as "output controllable" as the original system is.

We will say that the proper precompensator $C(s)$ is **admissible** if

$$\text{rank } T(s) C(s) = \text{rank } T(s)$$

This admissibility condition is equivalent to the preservation of the C^∞ controlled output trajectories, [15].

Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper rational matrix, partitioned in row-blocks relatively to a given list of positive integers (p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$, in the following way :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix} ; \text{ with } T_i(s) \in \mathbb{R}_p^{p_i \times m}(s) \text{ for } i = 1, \dots, k \quad (6)$$

The system with transfer matrix $T(s)$ is said to be block decoupled relatively to the partition $\{p_i\}$ if there exist positive integers m_1, \dots, m_k satisfying $\sum_{i=1}^k m_i = m$, such that $T(s)$ has the block diagonal form :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{kk}(s) \end{bmatrix} = \text{diag}(T_{11}(s), \dots, T_{kk}(s)) \quad (7)$$

with $T_{ii}(s) \in \mathbb{R}_p^{p_i \times m_i}(s)$ for $i = 1, \dots, k$

This means that each above defined input block influences only one output block. If one wants this influence to be effective the $T_{ii}(s)$ must be non null for each i , in this case the system is called non degenerate.

The decoupling problem can be formulated as follows . Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper rational matrix of rank r partitioned in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) . Is it possible to exhibit an admissible proper precompensator $C(s)$ such that $T(s) C(s)$ is block decoupled and non degenerate ?

We will consider here the **block decoupling problem with stability**, i.e. the compensated system is stable and no internal unstable pole-zero cancellations occurs.

We will see later that a decoupling control law consist of a stabilizing state feedback and a decoupling precompensator.

It is well known that the above defined decoupling problem is solvable by precompensation when the row blocks $T_i(s)$ are independent ($r = \sum_{i=1}^k r_i$, $r = \text{rank } T(s)$ and $r_i = \text{rank } T_i(s)$), [1].

In this paper we focus our attention on the **simplest achievable decoupled systems with stability**. More precisely we will give the minimal number of infinite and unstable zeros of the decoupled system while ensuring the stability of the compensated system.

We will present now some results concerning compensators which are feedback implementable with stability.

Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper stable rational matrix and (A, B, C) be a minimal realization of $T(s)$. There is no serious restriction in considering only transfer matrices with null static kernel i.e., a minimal polynomial basis for $\text{Ker } T(s)$ contains no constant vector (which is equivalent to the injectivity assumption on B).

One has the following [4] :

Theorem 3 : Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper stable rational matrix with null static kernel and (A, B, C) be a minimal realization of $T(s)$. Let $C(s)$ be a $m \times m$ proper rational compensator. $C(s)$ is dynamic state feedback implementable ($u = F(s)x + Gv$, $F(s)$ proper, G non singular) with stability on (A, B, C) if and only if $C(s)$ is bicausal and stable.

In order to give a similar result for static state feedback we will use the following theorem [18].

Theorem 4 : Let $T(s)$ be a pxm strictly proper rational matrix and (A, B, C) be a realization of $T(s)$. Consider a right coprime polynomial factorization $N(s) D^{-1}(s)$ of $T(s)$. Let $C(s)$ be a mxm proper rational compensator. $C(s)$ is static state feedback implementable ($u = Fx + Gv$, G non singular) on (A, B, C) if and only if $C(s)$ is bicausal and $C^{-1}(s)D(s)$ is polynomial.

We will now prove the following result :

Theorem 5 : Let $T(s)$ be a pxm strictly proper stable rational matrix with null static kernel and (A, B, C) be a minimal realization of $T(s)$. Let $C(s)$ be a mxm proper rational compensator. $C(s)$ is static state feedback implementable ($u = Fx + Gv$, G non singular) with stability on (A, B, C) only if $C(s)$ is bicausal and bistable.

proof : (Necessity)

Consider a right coprime polynomial factorization of $T(s)$

$$T(s) = N(s) D^{-1}(s)$$

Let $C(s)$ be a mxm proper rational compensator. If it is not bicausal and bistable either $C(s)$ is not bicausal and stable contradicting theorem 3 or $C(s)$ is not stably invertible implying $C^{-1}(s)D(s)$ has unstable poles contradicting theorem 4. ∇

IV - STABLE BLOCK ESSENTIAL STRUCTURES

In this section we are concerned with some lists of invariants. Such lists called "the stable block essential structures" of the system under study are invariants by stability preserving static state feedback control laws. We will see in section V that these invariants represent the minimal infinite and unstable structures for the blocks of the decoupled system.

We will give first a geometric definition of these invariants and then two equivalent characterization in transfer matrix terms.

Definition 3 : Let (C, A, B) be a stable linear system in state space form (1) decomposed according to the output partition (p_1, \dots, p_k) . Let F_i denote any stability preserving state feedback such that $(A + BF_i) \mathcal{R}_i^* \subset \mathcal{R}_i^*$, where \mathcal{R}_i^* is the maximal controllability subspace contained in $\text{Ker } C^i$ and C^i is the matrix obtained from C by removing its i th row block. Consider $\mathcal{B}_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$ $B_i : \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{X}$, $A_i = A + BF_i$.

We define the i -th stable block essential decoupling structure of (C, A, B) relatively to $\{p_i\}$, denoted $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$, as the infinite and unstable structure (infinite and unstable zeros with multiplicities) of (C_i, A_i, B_i) denoted $\Sigma_{\infty,s}(C_i, A_i, B_i)$

The stable block essential structure of (C, A, B) relatively to $\{p_i\}$ denoted $\Sigma_{es}(C,A,B)$ is defined by :

$$\Sigma_{es}(C, A, B) = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_{i,es}(C, A, B)$$

Notice that F_i is a stability preserving state feedback, this implies that the subsystem $(C_i, A+BF_i, B_i)$ is stable and no unstable zero is canceled.

In what follows we will consider the stable system (C, A, B) of transfer matrix $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$, partitioned according to (p_1, \dots, p_k) , that means :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}; \text{ with } T_i(s) = C_i(sI - A)^{-1}B$$

where C_i denotes the i -th row-block of matrix C .

In the whole paper it will be assumed that :

$$r = \text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k \text{rank } T_i(s) = \sum_{i=1}^k r_i \quad (8)$$

The notation $T^i(s)$ will be used to denote the matrix obtained from $T(s)$ by removing its i -th row-block, in other words :

$$T^i(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_{i-1}(s) \\ T_{i+1}(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}$$

Let us give a first transfer matrix interpretation of the stable block essential structure of (C, A, B) .

Theorem 6 : The i -th stable block essential structure $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ of the stable system (C, A, B) , which transfer matrix is $T(s)$, relatively to $\{p_i\}$ satisfies :

$$\Sigma_{i,es}(C, A, B) = \Sigma_{\infty,s}(T_i(s)V_i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $T_i(s)$ is the i -th row-block of $T(s)$ and $V_i(s)$ is any right bicausal bistable matrix which columns form a basis for $\text{Ker } T^i(s)$, with $i = 1, \dots, k$ and $\Sigma_{\infty,s}(T_i(s)V_i(s))$ denotes the infinite and unstable structure (infinite and unstable zeros with multiplicities) of $T_i(s)V_i(s)$.

There always exists such a basis for $\text{Ker } T^i(s)$. Let $M(s)$ a polynomial matrix which columns form a minimal polynomial basis for $\text{Ker } T^i(s)$. Denote h_i the i -th column degree of $M(s)$ and define $N(s) := M(s) \text{diag}((s + \alpha)^{-h_1} \dots (s + \alpha)^{-h_j})$ with $j = m-r+r_i$ and where $s+\alpha$ is any stable polynomial. Then $N(s)$ is a right bicausal bistable matrix which columns form a basis for $\text{Ker } T^i(s)$

Note that $\Sigma_{\infty,s}(T_i(s)V_i(s))$ is independent of $V_i(s)$. Let $V_i(s)$ and $W_i(s)$ be two right bicausal-bistable matrices which are bases for $\text{Ker } T^i(s)$. $V_i(s) = W_i(s) Q_i(s)$, with $Q_i(s)$ a nonsingular rational matrix ; since that $V_i(s)$ and $W_i(s)$ are full column rank at infinity and at unstable frequencies, then $Q_i(s)$ is a bicausal-bistable matrix. It follows that : $\Sigma_{\infty,s}(T_i(s)V_i(s)) = \Sigma_{\infty,s}(T_i(s)W_i(s))$.

Proof: By definition :

$$\Sigma_{i,es}(C, A, B) := \Sigma_{\infty,s}(C_i, A + BF_i, BG_i)$$

where F_i is any stability preserving state feedback such that $(A + BF_i)\mathcal{R}_i^* \subset \mathcal{R}_i^*$ and G_i is such that $\text{Im } BG_i = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*$.

The transfer matrix of the stable system $(C_i, A + BF_i, BG_i)$, denoted $T_{F_i}(s)$, can be written as follows :

$$T_{F_i}(s) = T_i(s) V_i(s) ; \quad V_i(s) = B_s(s) G_i$$

where by theorem 5 $B_s(s)$ is a bicausal bistable matrix since F_i is a stability preserving state feedback.

$V_i(s)$ is then clearly a right bicausal bistable matrix, we will show now that $V_i(s)$ is a basis

for the null space of $T^i(s)$. First, observe that \mathcal{R}_i^* is contained in $\text{Ker } C_j(s)$, for all $i \neq j$, this means that $T_j(s) V_i(s) = 0$ for all $i \neq j$, then $V_i(s) \in \text{Ker } T^i(s)$. We will show now that $\text{rank}(V_i(s)) = \dim(\text{Ker } T^i(s))$, which will end the proof.

For this we have :

$$\begin{aligned} \text{rank}(T^i(s)) &= r - r_i \\ &= \dim\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*}\right) = m - \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) \end{aligned}$$

$$\text{then : } \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) = m - r + r_i.$$

From the definition of G_i and $V_i(s)$:

$$\dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i^*) = \text{rank } G_i = \text{rank } V_i(s)$$

On the other hand, because of the independence between the blocks $T_i(s)$, $\dim(\text{Ker } T^i(s)) = m - r + r_i$. Then :

$$\text{rank } V_i(s) = \dim(\text{Ker } T^i(s)) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

$V_i(s)$ is a right bicausal bistable matrix which columns form a basis for $\text{Ker } T^i(s)$, this ends the proof. ∇

Give now a technical result which will be used to provide a transfer matrix characterization of $\sum_{i,es}(C, A, B)$.

Lemma 1: Let $T(s)$ be a pxm proper stable rational matrix partitioned in row-blocks relatively to (p_1, \dots, p_k) , such that $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Let r_i denote the rank of $T_i(s)$, for $i=1, \dots, k$.

If $T(s)$ is such that :

$$\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$$

then $T(s)$ can be decomposed as :

$$T(s) = B_s(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

where $\tilde{T}(s)$ is a rxm full row rank proper stable rational matrix partitioned in row-blocks

relatively to $\{r_i\}$. $B_s(s) = \text{diag}(B_1(s), \dots, B_k(s))$, $B_i(s)$ is a $p_i \times p_i$ bicausal bistable matrix $\tilde{I} = \text{diag}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$, $\tilde{I}_i = \begin{bmatrix} I_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$; I_{r_i} is the $r_i \times r_i$ identity matrix.

The proof is quite similar to that of lemma 1 of [17]. It can be performed by replacing the Smith-McMillan factorization of $T_i(s)$ by a Smith factorization of $T_i(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$.

Now, we are able to give another interesting characterization of the stable block essential structure $\sum_{\text{eis}}(C, A, B)$, in the rational transfer matrix framework.

Theorem 7: Let (C, A, B) the stable system (1) of transfer matrix $T(s)$, decomposed according to the output partition (p_1, \dots, p_k) . Assume that $\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$, where $r_i = \text{rank } T_i(s)$ and let $T(s)$ be decomposed as in lemma 1, i.e. : $T(s) = B_s(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$.

Let $\tilde{T}(s)$ be factorized as follows :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B'(s)$$

where $R(s)$ is a $r \times r$ strictly proper rational nonsingular matrix and $B'(s)$ is a $m \times m$ bicausal-bistable matrix. Consider $R^{-1}(s)$ partitionned as follows :

$$R^{-1}(s) = [\bar{R}_1(s), \dots, \bar{R}_k(s)] ; \bar{R}_i(s) \in \mathbf{R}^{r \times r_i}(s)$$

Then the i th-stable block essential structure $\sum_{i, \text{es}}(C, A, B)$ of (C, A, B) relatively to $\{p_i\}$ (i.e. infinite and unstable zeros with multiplicities) is given by the infinite and unstable pole structure of $\bar{R}_i(s)$ as follows :

$\sum_{i, \text{es}}$ possesses an infinite zero of order α_j whenever $\bar{R}_i(s)$ possesses an infinite pole of order α_j , $\sum_{i, \text{es}}$ possesses an unstable zero of order β_j at $s = z_j$ whenever $\bar{R}_i(s)$ possesses an unstable pole of order β_j at $z = z_j$.

This theorem will be a key tool for constructing minimal block decoupling compensators. From theorems 6 or 7 it is clear that $\sum_{i, \text{es}}(C, A, B)$ is invariant under right multiplication by bicausal bistable matrices. Using theorem 5, $\sum_{i, \text{es}}(C, A, B)$ is invariant under the action of stability preserving static state feedbacks (on a minimal realization of $T(s)$).

The proof of theorem 7 can be easily deduced from the proof of theorem 2 of [6] (where block decoupling without stability is analyzed) replacing bicausal matrices by bicausal bistable

matrices and right bicausal matrices by right bicausal bistable matrices.

V- THE MINIMAL BLOCK DECOUPLING PROBLEM WITH STABILITY

In this section we are concerned about the minimal number of infinite and unstable zeros achievable for a decoupled system ensuring the stability of the compensated system. We will show that the i th stable block essential structure $\Sigma_{i,es}(C,A,B)$, defined in the previous section, represent such a minimal structure for the i -th diagonal block of the decoupled system

In what follows, we will consider stable systems. There is no loss of the generality in assuming the system is stable. In fact, when the transfer matrix is not stable, we can use a static state feedback which assigns all the closed loop poles to stable locations. Denote $T_1(s)$ the closed loop transfer matrix, $T(s)$ and $T_1(s)$ are feedback equivalent on a minimal realization of $T(s)$ without unstable pole zero cancellations. It follows that $T(s)$ is decouplable with stability if and only if $T_1(s)$ is. Let us give now the minimal unstable and infinite structure of the decoupled system.

Theorem 8 : Let $T(s)$ be a $p \times m$ strictly proper stable rational matrix of null left and right static kernels, decomposed in row-blocks according to a given partition (p_1, \dots, p_k) and (C, A, B) a minimal realization of $T(s)$. If the system $T(s)$ can be decoupled relatively to (p_1, \dots, p_k) by an admissible decoupling precompensator with stability, then the minimal infinite and unstable structure of the i th block of the decoupled system is given by $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

$\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ the i th stable block essential structure is given in definition 3. We have supposed that $\text{rank } T(s) = \sum_{i=1}^k r_i$, under this condition stable block decoupling by precompensation is always possible [1].

Proof : We will now construct a stable block decoupling compensator achieving the minimal zero structure $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ for the i th block of the decoupled system. We will prove that for any stability preserving block decoupling compensator the infinite and unstable structure of the decoupled system is greater than or equal to $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

Decompose first $T(s)$ as in lemma 1.

$$T(s) = B_s(s) \tilde{I} \tilde{T}(s)$$

Let $C(s)$ be a $m \times r$ proper stable admissible decoupling compensator, then $T(s) C(s)$ is block decoupled ; it turns out that $\tilde{T}(s) C(s)$ and $\tilde{T}(s) C(s)$ are block decoupled.

Consider a Hermite form of $\tilde{T}(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$ one has :

$$\tilde{T}(s) C(s) = [\bar{H}(s) \ 0] B'(s) C(s) = \text{diag} (\tilde{D}_1(s), \dots, \tilde{D}_k(s))$$

with $B'(s)$ bicausal and bistable.

Denote

$$B'(s) C(s) = \begin{bmatrix} C'(s) \\ C''(s) \end{bmatrix}$$

One has :

$$C'(s) = \bar{H}^{-1}(s) \text{diag} (\tilde{D}_1(s), \dots, \tilde{D}_k(s))$$

Let $C'_i(s)$ and $\bar{H}_i^{-1}(s)$ denote the i th column block of matrices $C'(s)$ and $\bar{H}^{-1}(s)$ respectively partitionned according to (r_1, \dots, r_k) . In particular for the i th block :

$$C'_i(s) = \bar{H}_i^{-1}(s) \tilde{D}_i(s)$$

The infinite and unstable pole structure of $\bar{H}_i^{-1}(s)$ gives the i th stable block essential structure $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$ by theorem 7. The unstable and infinite structure of $\tilde{D}_i(s)$ have to be greater than or equal to $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$, if it is not the case $C'_i(s)$ and then $C(s)$ is non proper or non stable contradicting the hypothesis.

Consider again $T(s)$ decomposed as in lemma 1 :

$$T(s) = B_s(s) \tilde{T}(s)$$

and consider a factorization of $\tilde{T}(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$ of the form :

$$\tilde{T}(s) = [R(s) \ 0] B'(s)$$

where $B'(s)$ is a bicausal bistable matrix and $R(s)$ is a full rank proper stable rational matrix. A possible solution is to consider a Hermite form of $T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$.

Now denote $\bar{R}_i(s)$ the i -th column-block of $R^{-1}(s)$. Define $\beta_{i,\infty}$ the maximal infinite pole order of $\bar{R}_i(s)$. Let q_i denote the number of different unstable poles a_{i1}, \dots, a_{iq_i} of $\bar{R}_i(s)$ and denote β_{ij}

the maximal order of the pole a_{ij} , for $j = 1, \dots, q_i$ and $i = 1, \dots, k$. Define the integers g_i as follows :

$$g_i := \beta_{i\infty} + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ij} \quad \text{for } i=1, \dots, k.$$

and also define

$$G_i(s) := \frac{p_i(s)}{\pi^{g_i}} \bar{R}_i(s) \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

with $p_i(s) = \prod_{j=1}^{q_i} (s - a_{ij})^{\beta_{ij}}$ for $i = 1, \dots, k$ and $\pi = s + a$ is a stable monomial.

$G_i(s)$ is a proper stable rational matrix.

Consider now a Hermite form $[L_i^T(s) \ 0]$ of $G_i^T(s)$ over $\mathbf{R}_{ps}(s)$, where T denotes transposition, one has :

$$G_i(s) = B_i(s) \begin{bmatrix} L_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

where $B_i(s)$ is a bicausal bistable matrix and $L_i(s)$ is a full rank proper stable rational matrix.

We are now able to give the following stable compensator :

$$C(s) = B^{-1}(s) \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix}$$

where $Y(s) = R^{-1}(s) \text{diag} (D_1(s), \dots, D_k(s))$

$$D_i(s) := L_i^{-1}(s) \frac{p_i(s)}{\pi^{g_i}} \quad \text{for } i = 1, \dots, k.$$

and $X(s)$ is any $(m-r) \times r$ proper stable rational matrix.

Then

$$D_i^{-1}(s) = L_i(s) \frac{\pi^{g_i}}{p_i(s)}$$

It follows that

$$B_i^{-1}(s) \bar{R}_i(s) = \frac{\pi^{g_i}}{P_i(s)} \begin{bmatrix} L_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_i^{-1}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B_i(s)$ is a bicausal bistable matrix then the infinite and unstable zeros of $D_i(s)$ which are the infinite and unstable poles of $R_i(s)$ are given by $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$. See theorem 7.

Recall that :

$$T(s) C(s) = B_s(s) \tilde{I} \text{diag} (D_1(s), \dots, D_k(s))$$

Since $B_s(s)$ is block diagonal bicausal and bistable and due to the particular structure of \tilde{I} the total infinite and unstable structure of the i th block of the decoupled system is given by $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$. ∇

In [18] it is proven that a system can be block decoupled with stability by dynamic state feedback when the number of inputs is sufficiently large. When this condition is met, the minimal zero structure of the i th block is also given by $\Sigma_{i,es}(C, A, B)$.

VI- AN ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Consider the following system (C, A, B) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

which transfer matrix is :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

The stability is considered here in the usual sense i.e. the stability region is the left hand plane $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$.

This stable system possesses one unstable zero located at $s = 1$, three infinite zeros of respective orders 1, 1 and 2 and $\dim \mathfrak{R}^* = 1$ where \mathfrak{R}^* is the largest controllability subspace of $\text{Ker } C$.

We will show later that **this system is not row by row state feedback decouplable** neither by static state feedback nor by dynamic state feedback with singular or not input transformations. Consider the output partition (2, 1), **this system is not decouplable with stability** by static state feedback with singular or not input transformations. But **this system is block decouplable** (with respect to the output partition (2, 1) **with stability** by dynamic state feedback with singular input transformation.

This example is interesting in the sense that it is the simplest one (of minimal McMillan degree) satisfying the above properties i.e. not feedback row by row decouplable with or without stability, not static state feedback block decouplable with stability (output partition (2, 1)), dynamic state feedback block decouplable with stability (output partition (2, 1)).

For this example we will give the minimal infinite and unstable structure of the blocks of the decoupled system and illustrate the different geometric and transfer matrix characterizations of these invariants.

* Stable block essential structures

From definition 3, the i th stable block essential structure of (C, A, B) relatively to (2, 1) is given by the infinite and unstable structure of the system $(C_i, A + BF_i, BG_i)$ where F_i is such that $(A + BF_i) \mathfrak{R}_i^* \subset \mathfrak{R}_i^*$ and G_i is such that $\text{Im } BG_i = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{R}_i^*$ for $i = 1, 2$.

For this example we have :

$$C^1 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathfrak{R}_1^* = \mathcal{V}_1^* = \text{Ker } C^1 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Choose

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We have $(A + BF_1) \mathfrak{R}_1^* \subset \mathfrak{R}_1^*$ and no unstable zero canceled since $\mathfrak{R}_1^* = \mathcal{V}_1^*$.

The transfer matrix of the system $(C_1, A + BF_1, BG_1)$ is given by :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1-s}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

This system possesses two infinite zeros of orders 1 and 2 and one unstable zero at $s = 1$ which gives the first stable block essential structure.

Compute now the second one

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{R}_2^* = \mathcal{V}_2^* = \text{Ker } C^2 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Choose :

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We have $(A + BF_2) \mathfrak{R}_2^* \subset \mathfrak{R}_2^*$ and no unstable zero is canceled. The transfer matrix of the system $(C_2, A + BF_2, BG_2)$ is given by :

$$C_2 (sI - A - BF_2)^{-1} BG_2 = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

This system possesses one infinite zero of order 2 and one unstable zero at $s = 1$, which provides us with the second stable block essential structure.

Illustrate now theorem 6 :

The i th stable block essential structure is given by the infinite and unstable structure of $T_i(s)V_i(s)$ where $T_i(s)$ is the i th row block of $T(s)$ and $V_i(s)$ is a right bicausal-bistable matrix which is a basis of $\text{Ker } T^i(s)$ for $i = 1, 2$.

Compute the first stable block essential structure.

$$T^1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^3} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Choose for example :

$$V_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{s+1} \\ -1 & \frac{1-s}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

we have :

$$T_1(s) V_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} V_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1-s}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

which possesses the same infinite and unstable structure as $(C_1, A + BF_1, BG_1)$.

Compute now the second stable essential structure

$$T^2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Choose for example :

$$V_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s+1} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2(s) V_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

which possesses the same infinite and unstable structure as $(C_2, A + BF_2, BG_2)$.

Illustrate now theorem 7 :

Let us factorize $T(s)$ as follows.

$T(s) = [R(s) \ 0] B_s(s)$ with $B_s(s)$ bicausal and bistable.

Choose for example

$$C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-s}{(s+1)^2} & \frac{-2}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{s-1}{(s+1)^2} & \frac{2}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{2}{s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} G$$

$$= [I - F(s) (sI - A)^{-1} B]^{-1} G$$

We have then :

$$T(s) C(s) = C(sI - A)^{-1} B [I - F(s) (sI - A)^{-1} B]^{-1} G$$

$$= C(sI - A - BF(s))^{-1} BG$$

Then the dynamic state feedback

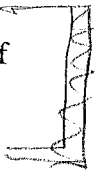
$$u = F(s) x + Gv$$

block decouples with stability.

A general compensator construction method yielding to the above given compensator $C(s)$ is described in (Commault, Dion, Torres, 1989).

REFERENCES

- [1] M.L.J. Hautus, M. Heymann, "Linear Feedback Decoupling-Transfer Function Analysis", IEEE Trans. on Aut. Control, AC-28, n° 8, pp. 823-832, (1983).
- [2] J. Descusse, J.M. Dion, "On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems", IEEE Trans. on Aut. Control, pp. 971-974, (1982).
- [3] J. Descusse, J.F. Lafay, F. Malabre, "Solution to Morgan's Problem", IEEE Trans. on Aut. Control, pp. 732-739, (1988).
- [4] J.M. Dion, C. Commault, "The Minimal Delay Decoupling Problem Feedback Implementation With Stability", SIAM Journal on Control, vol. 26, n° 1, pp. 66-82, (1988).
- [5] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay, M. Malabre, "New Decoupling Invariants : The Essential Orders", Int. J. Control, vol. 44, n° 3, pp. 689-700, (1986).
- [6] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.A. Torres, "Block Decoupling Invariants : Geometric and Transfer Matrix Characterization", IFAC Workshop on Linear Systems, Prague, (Septembre 1989).
- [7] C. Commault, J.M. Dion, J.A. Torres, "Minimal Structure in The Block Decoupling Problem With Stability", submitted for publication.
- [8] W.M. Wonham, "Linear Multivariable Control. A Geometric Approach", New-York, Springer Verlag, (1979).
- [9] N.D. Hung, B.D.O. Anderson, "Triangularization Techniques for The Design of Multivariable Control Systems", IEEE Trans. on Aut. Control, pp. 455-460, (1979).
- [10] F.M. Callier, C.A. Desoer, "Multivariable Feedback Systems", New-York, Springer Verlag, (1982).
- [11] T. Kailath, "Linear Systems", Englewood Cliffs, New-York, Prentice Hall, (1980).
- [12] G. Verghese, "Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems", Ph. D. Dissertation, Dept. Elec. Eng. Stanford University, (1978).



- [13] A.I.G. Vardulakis, N. Karkanias, "Structure Smith Mc Millan Form and Coprime MFDs of a Rational Matrix Inside a Region $P = \Omega \cup \{\infty\}$ ", *Int. J. Control*, vol. 38, n° 5, pp. 927-957, (1983).
- [14] A.S. Morse, "System Invariants Under Feedback and Cascade Control", *Proc. Int. Symp.*, Udine Springer Verlag, Berlin New-York, (1975).
- [15] R. Brockett, M.D. Mesarovic, "The Reproducibility of Multivariable Systems", *J. Math. Ana. Appl.* 11, pp. 548, (1965).
- [16] M.L.J. Hautus, M. Heymann, "Linear Feedback - An Algebraic Approach", *SIAM J. on Control and Opt.*, n° 16, pp. 83-105, (1978).
- [17] J.M. Dion, J.A. Torres, C. Commault, "New Feedback Invariants and The Block Decoupling Problem", submitted for publication.
- [18] C. Commault, J.M. Dion, J.A. Torres, "Invariant Spaces at Infinity of Linear Systems. Application to Block Decoupling", *IEEE Trans. Aut. Control*, to appear.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] R. Brockett and M.D. Mesarovic, "The Reproducibility of Multivariable Systems", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 11, pp. 548, (1965).
- [C1] F.M. Callier and C. Desoer, "Multivariable Feedback Systems", New-York, Springer Verlag, (1979).
- [C2] C. Commault, J.M. Dion and J. A. Torres, "Invariant Spaces at Infinity of Linear Systems, Application to Block Decoupling", A paraître dans *I.E.E.E. Trans. on Aut. Control*.
- [C3] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay and M. Malabre, "New Decoupling Invariants : The Essential Orders", *Int. J. Control*, vol. 44, n° 3, pp. 689-700, (1986).
- [C4] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion and J.A. Torres, "Block Decoupling Invariants : Geometric and Transfer Matrix Characterisations", *IFAC-Workshop on System Structure, Prague, Tchecoslovaquie*, pp. 187-192, Sept. (1989).
- [C5] C. Commault, J.M. Dion and J. A. Torres, "Minimal Structure in The Block Decoupling Problem with Stability", *Rapport Interne LAG-n° 89/34*, Juillet (1989).
- [C6] C. T. Chen, "Linear System Theory and Design", Holt, Rinehart and Winston, (1984).
- [D1] J. M. Dion, "Feedback Block Decoupling and Infinite Structure of Linear Systems", *Int. J. on Control*, Vol. 37, n° 3, pp. 521-539, (1983).
- [D2] J. Descusse and J. M. Dion, "On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems", *IEEE Trans. on Aut. Control*, pp. 971-974, (1982).
- [D3] J. Descusse, J.F. Lafay and M. Malabre, "Solution to Morgan's Problem", *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-83, n° 8, pp. 732-739, (1988).
- [D4] J. Descusse, "The Block Essential Orders and The Dynamic Block Decoupling Problem", *IFAC-Workshop, Germany*, (1987).

- [D5] J. Descusse, "Block Non Interacting Control with Non Regular Static State Feedback", IFAC-Workshop on System Structure, Prague, Tchechoslovaquie, Sept. (1989).
- [D6] J.M. Dion and C. Commault, "Smith-McMillan Factorizations at Infinity or Rational Matrix Functions and Their Control Interpretation", Syst. and Contr. Letters, vol. 1, n° 5, pp. 312-320, (1982).
- [D7] J.M. Dion and C. Commault, "The Minimal Delay Decoupling Problem : Feedback Implementation with Stability", SIAM J. Control, vol. 26, n° 1, pp. 66-82, (1988).
- [D8] J. M. Dion, J.A. Torres and C. Commault, "New Feedback Invariants and The Block Decoupling Problem", A paraître dans Int. J on Control.
- [D9] J.M. Dion, C. Commault, and J.A. Torres, "Stable Block Decoupling Invariants : Geometric and Transfer Matrix Characterizations", Rapport Interne LAG n° 89/ , Sept. (1989).
- [F1] P.L. Falb and W.A. Wolovich, "Decoupling in The Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Trans. Aut. Control, AC- 12, n° 6, pp. 651-669, (1967).
- [F2] G.D. Forney, "Minimal Bases of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems", SIAM J. Control, vol. 13, n° 3, (1973).
- [F3] P.A. Fuhmann and J. C. Willems, "Factorization Indices of Rational Function Matrices", Integral Operator Theory, 2, pp. 287-301, (1979).
- [G1] E. Gilbert, "The Decoupling Problem in The Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", SIAM J. on Control and Optim., pp 50-63, (1969).
- [H1] M.L.J. Hautus and M. Heymann, "Linear Feedback Decoupling - Transfer Function Analysis", I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, AC- 28, n° 8, pp. 823-832, (1983).
- [H2] M.L.J. Hautus and M. Heymann, "Linear Feedback - An Algebraic Approach ", SIAM J. Control, vol. 16, pp 83-105, (1978).
- [H3] N.D. Hung and B.D.O. Anderson, "Triangularization Techniques for The Design of Multivariable Control Systems", I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, pp 455-460, (1979).

- [K1] T. Kailath, "Linear Systems", Englewood Cliffs, New-York, Prentice Hall, (1980).
- [L1] J.J. Loiseau, "Contribution à l'Etude de Sous-espaces Presque Invariants", Thèse Doctoral de l'Université, Univ. de Nantes, (1986).
- [M1] A.S. Morse, "Structural Invariants of Linear Multivariable Systems", SIAM J. Control Optim. 11, pp 446-465, (1973).
- [M2] A.S. Morse and W.M. Wonham, "Status of Non Interacting Control", I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, AC-16, pp. 568-581, (1971).
- [M3] A.S. Morse, "System Invariants Under Feedback and Cascade Control", Proc. Int. Symp., Udine Springer Verlag, Berlin New-York, (1975).
- [M4] A.G.J. Mac Farlane and N. Karkanias, "Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems : A Survey of The Algebraic, Geometric and Complex Variable Theory", Int. J. on Control, vol. 24, n° 1, pp 33-74, (1976).
- [M5] A. S. Morse, "Parametrization for Multivariable Adaptive Control", Proceedings 20th IEEE Conf. on Decision and Control, pp 970-972, (1981).
- [M6] B. S. Morgan, "The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State Feedback", J.A.C.C., vol. 64, pp 468-472, (1964).
- [O1] A.B. Özgüler and V. Eldem, "Set of Open Loop Block-Diagonalizer of Transfer Matrices", Int. J. Control, vol. 49, n° 1, pp. 161-168, (1989).
- [R1] H.H. Rosenbrock, "State Space and Multivariable Theory", Nelson, London, (1970).
- [S1] C.B. Schrader and M.K. Sarn, " Research on System Zeros : A survey ", Proc. 27th I.E.E.E. Conf. on Decision Control, pp 890-901, Austin, Texas, (1988).
- [V1] A.I.G. Vardulakis, N. Karkanias, "Structure Smith Mc Millan Form and Coprime MFDs of a Rational Matrix Inside a Region $P = \Omega \cup \{\infty\}$ ". Int. J. on Control, vol. 38, n° 5, pp. 927-957, (1983).
- [V2] G. Verghese, "Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems", Ph. D dissertation Dept. Elec. Eng. Stanford Univ., (1978).

- [V1] A.I.G. Vardulakis, "On Infinite Zeros". *Int. J. on Control*, vol. 32, pp. 849-866, (1980).
- [W1] U.E. Warren and A.E. Eckberg J.R., "On the Dimension of Controllability Subspaces : A Characterization Via Polynomial Matrices and Kronecker Invariants", *SIAM J. Control*, vol. 13, n° 2, February (1975).
- [W2] W.M. Wonham, "Linear Multivariable Control", A Geometric Approach, New-York, Springer Verlag (1979).
- [W3] W. A. Wolowich and P. L. Falb, "Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Compensation", *SIAM J. on Control and Optim.*, vol. 14, n° 6, pp. 996-1008, (1976).

Abstract

This work is concerned with the block decoupling problem of linear multivariable systems. A solution is given for the block decoupling problem by non regular dynamic state feedback ($u = F(s) x + G v$, G eventually non regular). It turns out that block decoupling is possible if the number of system inputs is large enough. When dealing with the more important question of stability, it is shown that if decoupling is possible, it is possible at all.

Simplest achievable solutions of block decoupling by precompensation are studied. Then we look for the block decoupled systems of minimal McMillan degree and of minimal infinite structure. For this end two feedback invariants are introduced, which are related to i th block of the block decoupled system. As well in block decoupling as in block decoupling with stability, it is shown that the minimal block decoupled systems achievable by dynamic state feedback (when it is possible) are exactly the same that those obtained by precompensation.

Key words :

Linear Multivariable Systems, Decoupling, Stability.

AUTEUR : Jorge Antonio TORRES MUNOZ

ETABLISSEMENT : Institut National Polytechnique de Grenoble

THESE de DOCTORAT de l'INPG (Arrêté ministériel du 28 Novembre 1988).

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse est centré sur le découplage par blocs des systèmes linéaires multivariables. On résout le problème du découplage par blocs à l'aide d'un retour d'état dynamique non régulier ($u = F(s) x + G v$, G étant éventuellement non régulière). On montre que le problème est soluble si le système à découpler possède suffisamment d'entrées. L'aspect stabilité est aussi étudié ; il est montré que quand le découplage est possible, il est possible avec stabilité.

Nous étudions les solutions du découplage par blocs par précompensation de degré de McMillan minimal et de structure infinie minimale. A cette fin, deux invariants par bouclage sont introduits. Ils sont associés au $n^{\text{ième}}$ bloc du système découplé. Dans les deux cas, avec et sans stabilité, il est montré que les systèmes découplés minimaux que l'on obtient par retour d'état dynamique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus par précompensation.

Mot Clés :

Systèmes Linéaires Multivariables, Découplage, Stabilité.

AUTEUR : Jorge Antonio TORRES MUNOZ

ETABLISSEMENT : Institut National Polytechnique de Grenoble

THESE de DOCTORAT de l'INPG (Arrêté ministériel du 28 Novembre 1988).

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse est centré sur le découplage par blocs des systèmes linéaires multivariables. On résout le problème du découplage par blocs à l'aide d'un retour d'état dynamique non régulier ($u = F(s) x + G v$, G étant éventuellement non régulière). On montre que le problème est soluble si le système à découpler possède suffisamment d'entrées. L'aspect stabilité est aussi étudié ; il est montré que quand le découplage est possible, il est possible avec stabilité.

Nous étudions les solutions du découplage par blocs par précompensation de degré de McMillan minimal et de structure infinie minimale. A cette fin, deux invariants par bouclage sont introduits. Ils sont associés au $n^{\text{ième}}$ bloc du système découplé. Dans les deux cas, avec et sans stabilité, il est montré que les systèmes découplés minimaux que l'on obtient par retour d'état dynamique (quand c'est possible) sont les mêmes que ceux obtenus par précompensation.

Mot Clés :

Systèmes Linéaires Multivariables, Découplage, Stabilité.

