



HAL
open science

Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement

François Kuss

► **To cite this version:**

François Kuss. Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. Français. NNT : . tel-00338614

HAL Id: tel-00338614

<https://theses.hal.science/tel-00338614>

Submitted on 13 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



L.M.A

Université de Provence

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

UPR 7051

Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement

Thèse présentée devant

l'Université de Provence

pour obtenir le grade de

Docteur en mécanique

par

Kuss François

Directeur de thèse :

Frédéric Lebon

soutenue le 7 juillet 2008 devant le jury composé de

Pierre Beckers	Professeur Ordinaire à l'Université de Liège	Rapporteur
Laurent Champany	Professeur des Universités à L'ENS Cachan	Rapporteur
Pierre Alart	Professeur des Universités à l'Université de Montpellier 2	Examineur
Christian Hochard	Professeur des Universités à l'Université de Provence	Examineur
Frédéric Lebon	Professeur des Universités à l'Université de Provence	Examineur
Nunziante Valoroso	Professore Associato Università "Parthenope" di Napoli	Examineur

Remerciements

Je remercie chaleureusement le Professeur Frédéric Lebon d’avoir encadré ce travail de thèse, avec compétence, enthousiasme et disponibilité. Merci Frédéric pour m’avoir fait découvrir et donné goût à la recherche, pour tes bons conseils et ta bonne humeur. Merci également pour les nombreuses relectures de ce manuscrit et surtout pour ne pas avoir classé mon adresse email dans la catégorie “SPAMS”.

Je tiens également à remercier tous les membres de l’équipe “Modélisation en Mécanique du Contact” pour leur accueil, leurs aides aussi bien administratives que scientifiques, et également pour ma nomination en qualité de “Ministre du café” durant ma thèse.

Toute mon amitié à Mathieu Schryve, avec qui je partageais mon bureau ainsi que mon activité d’enseignement à Unimeca à Marseille, pour m’avoir supporté, notamment lors des périodes de débogage de mes lignes de code.

Je souhaite également remercier toutes les personnes rencontrées au cours de cette thèse, trop nombreuses pour les citer, qui ont contribué à l’excellent souvenir que je garderai de ces trois années.

Enfin, pour leur soutien en toutes périodes, je tiens à remercier de tout coeur mes proches, mes parents et Marion, ma compagne.

Table des matières

Partie I	Formulations du problème et estimation d'erreur	17
-----------------	--	-----------

I	Formulation du problème	19
----------	--------------------------------	-----------

I.1	Présentation du problème	20
I.1.1	Lois de contact et de frottement	21
I.1.1.1	Loi de contact unilatéral	21
I.1.1.2	Lois de frottement	21
I.1.2	Formulation forte du problème	25
I.2	Formulation en déplacements ou primale	26
I.2.1	Résolution par introduction multiplicateurs de Lagrange	28
I.2.2	Résolution par pénalisation	28
I.2.3	Résolution par la méthode du Lagrangien augmenté	29
I.2.4	Résolution par point fixe	29
I.2.5	Résolution par programmation non linéaire	29
I.2.6	Méthode de résolution adoptée	30
I.3	Formulation en contraintes ou duale	30
I.4	Formulation duale condensée	31
I.5	Equivalences entre les formulations	32
I.6	Conclusion	33

II	Estimateurs d'erreur pour les problèmes de contact avec frottement	35
<hr/>		
II.1	Introduction	36
II.2	Estimateurs d'erreur par lissage des contraintes	36
II.3	Estimateurs d'erreur basés sur les résidus	38
II.4	Estimateurs d'erreur basés sur la dualité	39
II.4.1	Expression générale de l'erreur	39
II.4.1.1	Erreur en déplacement	40
II.4.1.2	Erreur en contrainte	41
II.4.1.3	Erreur globale	42
II.4.1.4	Contact sans frottement	42
II.4.1.5	Contact et frottement	43
II.4.1.6	Ecriture locale de l'erreur	43
II.4.2	Estimateurs d'erreur en relation de comportement	44
II.4.2.1	Estimateur pour les problèmes sans contact	44
II.4.2.2	Estimateur pour les problèmes avec contact	46
II.4.2.3	Estimateur pour les problèmes avec contact et frottement	47
II.4.3	Estimateurs d'erreur par analyse duale	50
II.4.3.1	Estimateurs pour les problèmes sans contact	50
II.4.3.2	Estimateurs pour les problèmes avec contact et frottement	50
II.5	Raffinement et remaillage	52
II.5.1	Mesure locale de l'erreur	52
II.5.2	Raffinement de maillage	53
II.5.3	Amélioration de la solution par remaillage	56
II.5.3.1	Remaillage progressif	57
II.5.3.2	Remaillage adaptatif	58
II.6	Conclusion	60

Partie II Traitement numérique du problème **63**

III Discrétisation des formulations en contraintes **65**

III.1	Formulation discrète	66
III.2	Champ de contraintes élémentaire	67
III.2.1	Principe de construction du champ de contrainte	67
III.2.2	Eléments finis C^1	70
III.2.3	L'élément de Bogner-Fox-Schmidt	72
III.2.3.1	Fonctions de Hermite	72
III.2.3.2	L'élément BFS de référence	73
III.2.4	L'élément de Hsieh-Clough-Tocher	75
III.2.4.1	Coordonnées barycentriques	75
III.2.4.2	Paramètres d'excentricité	76
III.2.4.3	Polynômes de base	76
III.2.4.4	Introduction des degrés de liberté globaux	77
III.2.4.5	Champ de contraintes	78
III.3	Introduction des efforts	79
III.4	Construction des matrices de flexibilité élémentaires	82
III.5	Système global et résolution	84
III.6	Conclusion	85

IV Résolution du problème dual **87**

IV.1	Résolution par des méthodes de condensation	88
IV.1.1	Rappels sur la condensation	88
IV.1.2	Partitionnement du problème dual	88
IV.1.3	Condensation "brute" par la méthode SYMMLQ	90
IV.1.4	Condensation en trois étapes	91
IV.1.5	Préconditionneurs	92
IV.1.5.1	Factorisation incomplète de Cholesky	92

IV.1.5.2	Le préconditionneur SSOR	93
IV.1.6	Résolution du système condensé	93
IV.2	Résolution par la méthode d'Uzawa	95
IV.3	Stratégies de stockage des matrices	97
IV.3.1	Stockage bande	97
IV.3.2	Stockage ligne de ciel	98
IV.3.3	Stockage morse	99
IV.4	Optimisation des algorithmes	99
IV.4.1	Renumérotation	99
IV.4.2	Influence du stockage	100
IV.4.3	Parallélisation de la méthode de condensation	102
IV.4.4	Optimisation apportée à la condensation en trois étapes directe . . .	103
IV.5	Conclusion	104

Partie III Validations et essais numériques 105

V Comparaison des méthodes de résolution 107

V.1	Comparaisons de différentes méthodes numériques	108
V.1.1	Configuration de test	108
V.1.2	Comparaison des préconditionneurs	109
V.1.3	Comparaisons des méthodes	113
V.2	Conclusion	116

VI Validation du modèle dual 117

VI.1	Validation du modèle éléments finis équilibre	118
VI.2	Validation des résultats de contact	120
VI.3	Influence des résultats de contact sur le champ de contrainte	123
VI.4	Conclusion	125

VII Validation de l'estimateur d'erreur 127

VII.1	Comparaison à une solution de référence	128
VII.1.1	Exemples traités	129
VII.1.1.1	Contact d'un lopin	129
VII.1.1.2	Contact d'une dent	131
VII.2	Raffinement de maillage	135
VII.2.1	Remaillage	137
VII.3	Conclusion	141

Conclusion et perspectives	142
-----------------------------------	------------

Bibliographie	145
----------------------	------------

Annexes	151
----------------	------------

A	Comparaison des stratégies de condensation	151
A.1	Condensation en deux étapes	151
A.2	Condensation en trois étapes	152
A.3	Évaluation des coûts de condensation	153
A.4	Comparaison des différentes techniques	155
B	Continuité du vecteur contrainte	158

Introduction

Les travaux effectués au cours de cette thèse portent sur la résolution des problèmes de contact avec frottement par utilisation d'une méthode d'éléments finis "équilibre".

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (UPR CNRS 7051) au sein de l'équipe Modélisation en Mécanique du Contact, qui s'intéresse de façon générale à la modélisation, au traitement numérique et à l'analyse mathématique des problèmes de contact et d'interface, tels que le frottement, l'adhésion et l'usure en statique et en dynamique. Mon travail a été effectué de façon plus précise au sein de l'Opération de Recherche "Contact, frottement, interface".

Les phénomènes de contact et de frottement sont pris compte de plus en plus souvent dans les problèmes industriels tels que les analyses du contact roue sur sol en aéronautique, du contact roue sur rail en Ingénierie ferroviaire, dans la modélisation des prothèses médicales, des assemblages mécaniques, des procédés de mise en forme, etc. Ceci nécessite d'avoir à disposition des outils de résolution et d'analyse efficaces, robustes, fiables et précis.

Même si ces phénomènes sont observés et pris en compte depuis la Haute Antiquité (afin de transporter de lourdes charges, comme le montre la figure 1, les Egyptiens les plaçaient sur des traîneaux glissant sur un film d'argile humide), ils ne sont analysés scientifiquement que depuis la Renaissance. Les premiers travaux remontent, à notre connaissance, à Léonard de Vinci mais ce sont Amontons et Coulomb qui ont formalisé de façon simple et précise les phénomènes de frottement. La figure 2 montre quelques dispositifs utilisés par Coulomb pour étudier les phénomènes de frottement. Depuis le milieu des années 1970, ces études ont connu de très fort développements des points de vue analyse mathématique [DL72], numérique [Wri02], expérimental [Geo00] et modélisation [WP00].

D'un point de vue numérique, c'est au début des années 1960 que les méthodes de résolution des Equations aux Dérivées Partielles ont connu un développement considérable. Leur traitement numérique nécessite la formulation dite faible des équations. En mécanique, trois types de formulations sont envisageables : la formulation en déplacements (les inconnues du problème sont les déplacements), la formulation en contraintes (les inconnues du problème sont les contraintes) et la formulation mixte. Même si dès l'origine les auteurs se

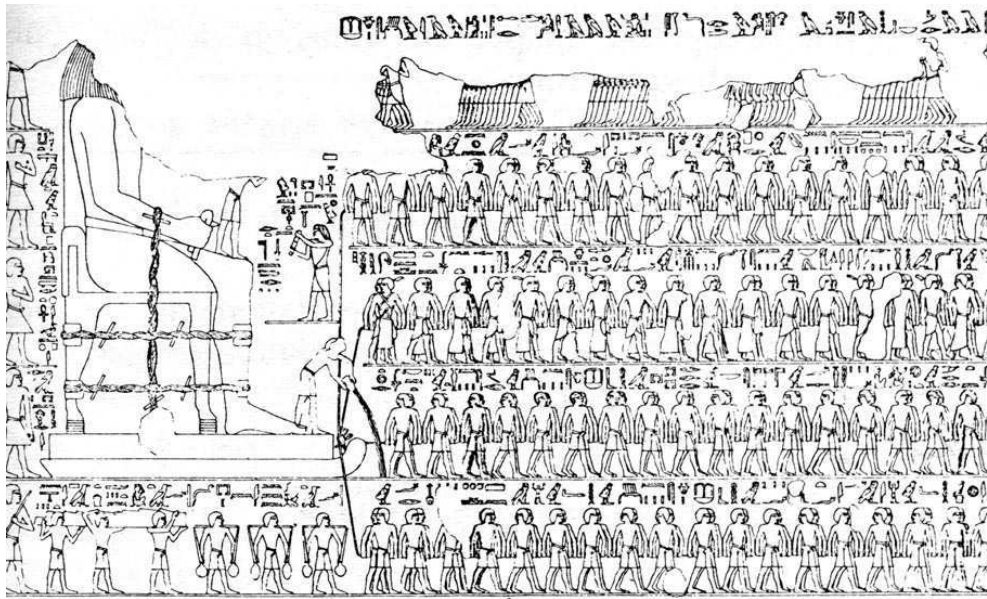


FIG. 1 – Bas relief Egyptien représentant le transport d'une statue par 172 hommes

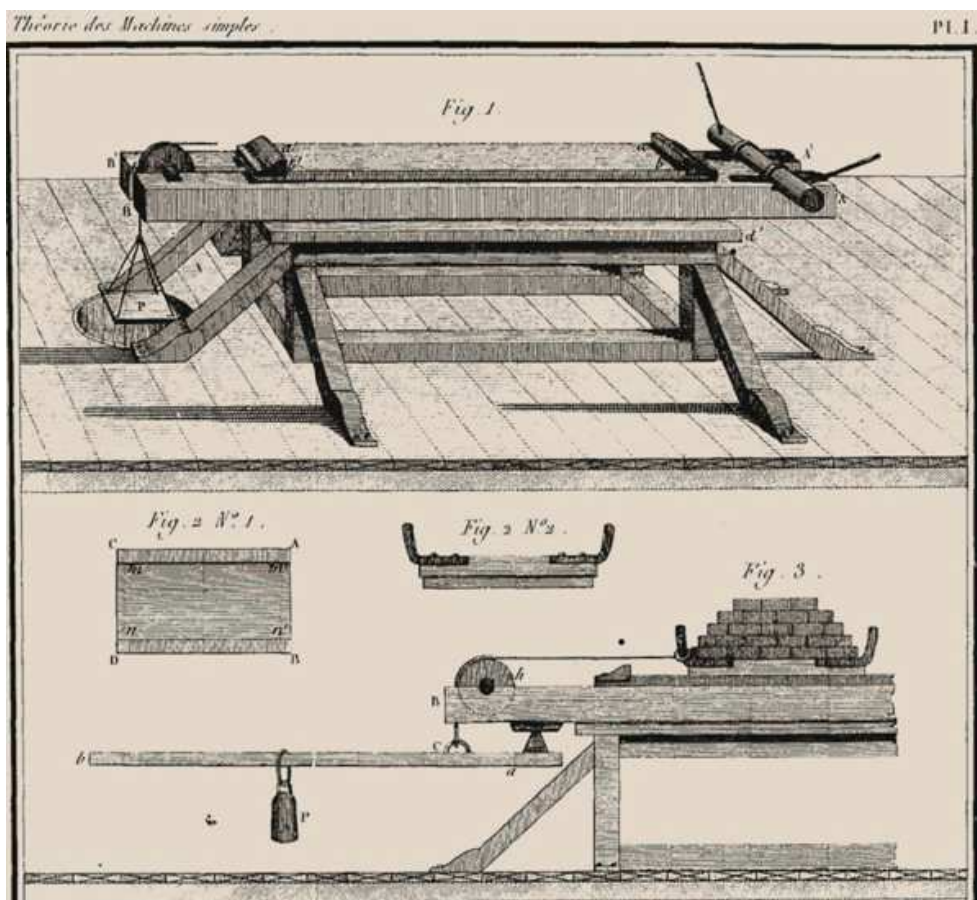


FIG. 2 – Dispositifs utilisés par Coulomb pour étudier les phénomènes de frottement

sont penchés sur ces trois types de formulation, de nos jours, les codes commerciaux sont basés sur des formulations en déplacements (dites primales) ou mixtes. En effet, la formulation primale est renommée comme étant la plus simple à mettre en oeuvre.

De par leur caractère unilatéral, les problèmes de contact se placent dans le domaine de la mécanique non régulière (Non Smooth Mechanics) défini par J J Moreau. En ce qui concerne la résolution numérique, on peut observer qu'à chaque loi de contact peut être associée, en général, une méthode propre. Bien que le modèle, le plus classique (Signorini-Coulomb) soit assez rudimentaire, son intégration et son traitement numérique font l'objet de nombreuses recherches (de nombreux congrès et sessions de congrès y sont entièrement dédiés). La résolution numérique de ces problèmes est tout naturellement basée sur la formulation primale dans la plupart des codes de calcul. Dernièrement, certains auteurs ont remis au goût du jour les formulations duales [Kem06] [BLM04] [BLM01] dont un article fondateur a été re-édité [Fra01].

De nos jours, l'utilisation de méthodes de résolution basées sur une formulation duale semble en adéquation avec la constante évolution des moyens de calculs. Le but premier de cette thèse était donc d'évaluer la possibilité de traitement des problèmes de contact avec frottement via une telle méthode. Le but n'étant pas de créer une quelconque concurrence aux méthodes en déplacements, mais de proposer une méthode complémentaire, utile aux développements d'autres outils.

La construction d'estimateurs d'erreur en est un exemple. Les estimateurs d'erreur permettent d'évaluer l'erreur, effectuée sur la solution numérique d'un problème, liée à sa discrétisation spatiale. Ce dernier aspect a déjà connu de très nombreux traitements [Wri02] [CHH01] faisant intervenir des techniques variées (lissage des contraintes, quantification des résidus d'équilibre, erreur en relation de comportement) mais qui sont basés en général sur les seules formulations primales. Dans sa thèse, [Kem06] a proposé d'utiliser à la fois la formulation primale et la formulation duale afin d'estimer l'erreur. Comme nous le verrons plus loin, nous proposerons d'étendre cette technique à des problèmes de contact frottant et d'y coupler des méthodes de raffinement de maillage et de remaillage.

Ce mémoire de thèse est composé de trois parties, la première partie traite de la formulation du problème et de l'estimation d'erreur.

Nous présentons dans le premier chapitre le problème mécanique ainsi que les lois de contact et de frottement couramment utilisées. La résolution de ce problème passe par la formulation de ses équations soit en termes de déplacements, soit en termes de contraintes (voire mixte). Les formulations en déplacements et en contraintes sont présentées dans ce même chapitre et sont respectivement dénommées formulations primale et duale.

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution numérique des problèmes de mécanique. Aux premiers développements de la méthode, dans les années 50, son application aux formulations primale et duale fut envisagée. De par les capacités de calcul et de stockage des premières unités de calcul, la formulation primale fut naturellement la plus adoptée et est devenue la méthode standard de formulation des problèmes de mécanique pour la méthode des éléments finis. La majeure partie des méthodes de résolution des problèmes de contact avec frottement s'appuient donc sur des formulations en déplacements, une présentation non exhaustive de ces méthodes est effectuée dans ce même chapitre.

Le second chapitre traite des méthodes d'estimation d'erreur couramment utilisées pour les problèmes avec et sans contact et frottement, basées sur le post traitement des résultats obtenus via une méthode primale. Nous présentons ensuite les estimateurs d'erreur par analyse duale, utilisant les résultats des méthodes primale et duale afin d'obtenir une estimation de l'erreur liée à la discrétisation. Nous présentons ensuite les techniques de raffinement de maillage et de remaillage pouvant être utilisées afin de réduire l'erreur évaluée.

La seconde partie regroupe les chapitres décrivant le traitement numérique du problème.

Une technique de discrétisation du champ de contrainte par la méthode des éléments finis "équilibre" est tout d'abord détaillée dans le chapitre 3. Les différents étapes nécessaires à la construction du système d'équation local puis global sont ensuite présentées. La discrétisation adoptée repose sur la vérification *a priori* des équations d'équilibre local par le champ de contraintes interpolé. Deux éléments finis "équilibre" convenant à la résolution des problèmes de contact avec frottement sont choisis dans ce chapitre. Les techniques de construction des fonctions d'interpolation des contraintes de ces deux éléments ainsi que leur mise sous forme matricielle y sont décrites.

Dans le chapitre 4, plusieurs méthodes de résolution du problème dual sont proposées. La formulation duale impliquant l'utilisation d'éléments finis "équilibre", la taille du système à résoudre est généralement deux à trois fois plus importante que dans le cas primal. La prise en compte des conditions de contact et de frottement complique également la résolution du problème, différentes méthodes de résolution, directes et itératives ont donc été élaborées.

La troisième et dernière partie de ce manuscrit est consacrée à l'évaluation numérique des principes proposés en amont.

La comparaison numérique des différentes méthodes de résolution est effectuée dans le chapitre 5 en se basant sur le coût de chaque méthode en termes de temps de calcul et d'utilisation mémoire. Cette comparaison permet de sélectionner les méthodes les plus adaptées

au type de problèmes à résoudre.

Dans le chapitre 6, la méthode duale de résolution des problèmes de contact avec frottement est évaluée par comparaison aux résultats issus d'une méthode primale.

La méthode duale présentée dans cette thèse a été implémentée au code de calcul LMGC90 [LMGC90], commun aux laboratoires LMA de Marseille et LMGC de Montpellier et permettant, entre autres, la résolution des problèmes de contact avec frottement par une méthode primale. Ceci nous a permis d'implémenter les techniques d'estimation d'erreur et d'amélioration de maillages présentées dans le chapitre 2. Une validation de l'estimateur d'erreur pour les problèmes de contact avec frottement est proposée dans le chapitre 7 puis les techniques d'amélioration de maillages y sont appliquées.

PREMIÈRE PARTIE

FORMULATIONS DU PROBLÈME ET
ESTIMATION D'ERREUR

Chapitre I

FORMULATION DU PROBLÈME

RÉSUMÉ

On s'intéresse ici au problème de contact avec frottement sec entre un solide élastique et un obstacle rigide, dans le cadre élastostatique. Dans ce chapitre, le problème mécanique et son cadre variationnel sont introduits. La formulation en déplacements, classique de par l'utilisation traditionnelle de la méthode des éléments finis, est tout d'abord rappelée. Cette formulation vérifie les équations de compatibilité de manière forte et les équations d'équilibre local de manière faible. La formulation en contraintes, bien moins répandue, est ensuite abordée. À l'inverse de la formulation en déplacement, cette dernière vérifie les équations de compatibilité de manière faible et les équations d'équilibre local de manière forte. Nous présentons ensuite la version condensée de la formulation duale, c'est à dire limitée aux grandeurs présentes sur la zone de contact. Les équivalences entre les différentes formulations sont abordées dans la dernière partie.

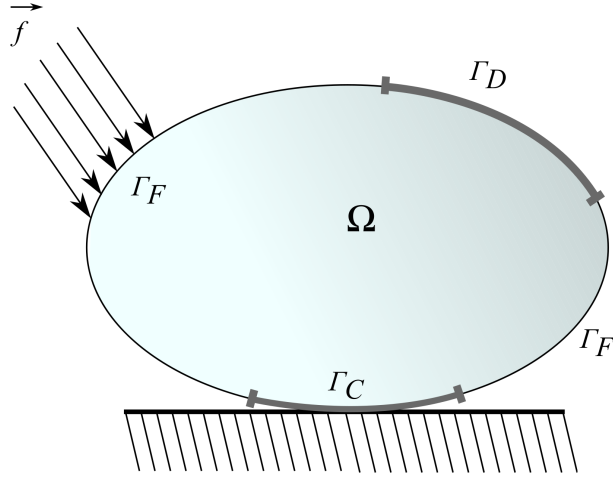


FIG. I.1 – Définition du problème

I.1 Présentation du problème

On considère un solide élastique qui occupe l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$ constituée de trois parties ouvertes disjointes Γ_D, Γ_F et Γ_C telles que $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_F \cap \bar{\Gamma}_C$ et $mes(\Gamma_D) > 0$.

Les notations classiques des problèmes d'élasticité sont utilisées ici, on note :

- $u = (u_i)$ le champ des déplacements
- $\varepsilon = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ le tenseur des déformations linéarisé
- $\sigma = \sigma_{ij}(u) = \mathbb{K}_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$ le tenseur des contraintes
- $\mathbb{S} = \mathbb{K}^{-1}$ le tenseur de souplesse

avec \mathbb{K} borné et vérifiant les conditions de symétrie et de positivité usuelles.

Le corps est soumis à une densité de forces de volume $F = (F_i)$ dans Ω et à une densité de forces de surface $f = (f_i)$ sur Γ_F . On suppose que $F \in [L^2(\Omega)]^d$ et $f \in [L^2(\Gamma_F)]^d$. Sur Γ_D le déplacement $u = u_0$ est donné.

Le corps est en contact affleurant avec un obstacle rigide sur la partie de frontière Γ_C où le déplacement et le vecteur contrainte sont décomposés en introduisant le vecteur normale extérieure n à Γ :

$$\begin{aligned} u_N &= u_i n_i, \quad u_T = u - u_N n \\ \sigma_N &= \sigma_{ij} n_i n_j, \quad (\sigma_T)_i = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i \end{aligned} \tag{I.1}$$

Le contact sera modélisé par l'une des lois usuelles que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

I.1.1 Lois de contact et de frottement

Le contact entre deux solides est généralement modélisé en couplant deux lois, une loi régissant le comportement normal et une loi régissant le comportement tangentiel à l'interface, ici, on souhaite modéliser le contact unilatéral d'un solide déformable sur un obstacle rigide avec frottement sec.

I.1.1.1 Loi de contact unilatéral

La formulation du problème de contact d'un solide élastique sur un obstacle rigide fut proposée par Signorini dans [Sig33], les lois de Signorini en découlant sont maintenant très largement adoptées. Ces lois sont représentées sur la figure I.2, elles s'écrivent :

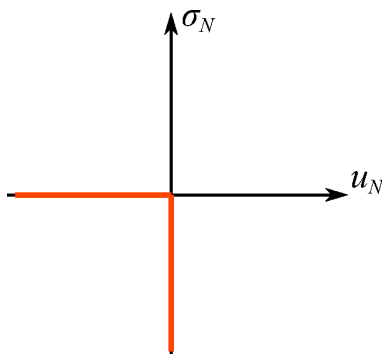


FIG. I.2 – La loi de contact de Signorini

$$\begin{cases} u_N \leq 0 \\ \sigma_N \leq 0 \\ u_N \sigma_N = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (\text{I.2})$$

et traduisent respectivement la non pénétration de la zone de contact sur l'obstacle, l'impossibilité d'apparition d'efforts de traction sur la zone de contact et la complémentarité des efforts et déplacements normaux (si le contact est établi alors $u_N = 0$, s'il y a décollement alors $\sigma_N = 0$).

I.1.1.2 Lois de frottement

Les premières traces d'étude du frottement entre deux corps remontent aux travaux de Léonard de Vinci dans lesquels on retrouve des esquisses de machines à mesurer les forces de frottement. Ces études furent ensuite développées par Amontons dans [Amo99] puis formalisées par Coulomb dans [Cou85].

La loi de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \|\sigma_T\| \leq -\mu\sigma_N \\ \text{Si } \|\sigma_T\| < -\mu\sigma_N \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{Si } \|\sigma_T\| = -\mu\sigma_N \text{ alors } \dot{u}_T = -\lambda\sigma_T \text{ avec } \lambda \in R^+ \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Cette loi traduit la dépendance d'un seuil de frottement aux efforts normaux et définit, lors du glissement, la vitesse tangentielle comme directement opposée et proportionnelle aux efforts de frottement. μ désigne le coefficient de frottement, généralement considéré constant pour un problème donné, mais dépendant en réalité des matériaux en présence, des états de surface, de la température, de la vitesse de glissement, etc.

La loi de Tresca peut également être adoptée, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \|\sigma_T\| \leq g \\ \text{Si } \|\sigma_T\| < g \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{Si } \|\sigma_T\| = g \text{ alors } \dot{u}_T = -\lambda\sigma_T \text{ avec } \lambda \in R^+ \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Avec cette modélisation les efforts de frottement ne peuvent dépasser un seuil fixe noté g . A la limite de ce seuil se produit le glissement de la zone de contact, le déplacement tangentiel est alors considéré opposé et proportionnel à l'effort tangentiel.

Les lois de Tresca et de Coulomb sont assez proches et peuvent être représentées sur un même graphe présenté sur la figure I.3.

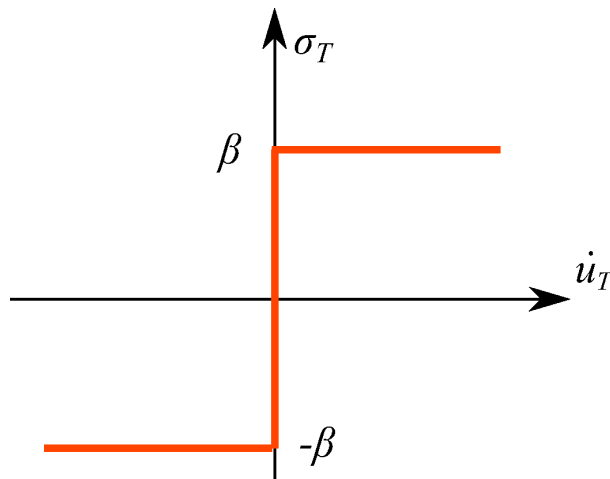


FIG. I.3 – Les lois de frottement de Tresca ($\beta=g$) et de Coulomb ($\beta=-\mu\sigma_N$).

La différence majeure réside dans la forme des domaines d'admissibilité des efforts représentés sur la figure I.4 par un cylindre pour la loi de Tresca et par un cône pour celle de Coulomb. La résultante des efforts de contact ne peut sortir de ce domaine : si la résultante

atteint le bord du domaine, le contact est glissant, sinon le contact est adhérent.

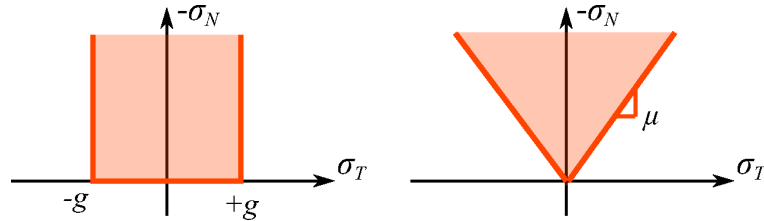


FIG. I.4 – Les domaines d’admissibilité de Tresca et de Coulomb

La loi de Tresca a l’avantage d’être très simple, toutefois, imaginons un objet posé sur le sol, il paraît naturel que l’effort nécessaire à le faire glisser dépende de son poids.

La loi de Coulomb permet de modéliser ce type de comportement plus fidèlement, c’est pourquoi par la suite, nous adopterons la loi de (Signorini-)Coulomb, puisque plus fidèle à la réalité. D’autre part, nous nous plaçons dans le cadre de la résolution d’un problème statique, représentatif d’un pas de charge du problème quasi-statique. Comme proposé par Duvaut et Lions dans [DL72], nous adopterons alors la loi de (Signorini-)Coulomb, écrite en déplacements et non en vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N \leq 0 \\ \sigma_N \leq 0 \\ u_N \sigma_N = 0 \\ \|\sigma_T\| \leq -\mu \sigma_N \\ \text{Si } \|\sigma_T\| < -\mu \sigma_N \text{ alors } u_T = 0 \\ \text{Si } \|\sigma_T\| = -\mu \sigma_N \text{ alors } u_T = -\lambda \sigma_T \text{ avec } \lambda \in R^+ \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (I.5)$$

Notons finalement que le contact entre deux corps est très complexe car il dépend de nombreux paramètres et pourrait être traité en adoptant une loi différente pour chaque problème. La loi de Coulomb permet toutefois de modéliser bon nombre des problèmes de frottement et présente l’avantage de ne nécessiter la connaissance que d’un seul paramètre μ (voire deux si l’on différencie adhérence et glissement) pour être appliquée. Le tableau I.1 donne quelques valeurs usuelles du coefficient de frottement.

Matériaux en contact	μ (adhérence)	μ (glissement)
Acier / acier	0,2	0,15
Acier / glace	0,02	0,02
Acier / bronze	0,1	0,05
Acier / garnitures de freins	0,4	0,25
Pneu / route sèche	1	0,5
Pneu / route mouillée	0,7	0,35

TAB. I.1 – Valeurs usuelles des coefficient de frottement d'adhérence et de glissement.

I.1.2 Formulation forte du problème

Les sections précédentes ont permis de définir les équations du problème mécanique de contact frottant entre un corps élastique et un obstacle rigide :

Problème (P) Trouver le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \mathbb{K}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \sigma = -F \quad \text{dans } \Omega \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = f \quad \text{sur } \Gamma_F \\ u_N \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad u_N \sigma_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C \\ |\sigma_T| \leq -\mu \sigma_N \quad \text{sur } \Gamma_C \quad \text{et} \quad \begin{cases} |\sigma_T| < -\mu \sigma_N \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = -\mu \sigma_N \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, u_T = -\lambda \sigma_T \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

Le problème ainsi posé ne présente théoriquement pas de solution unique en général. L'existence de la solution a été démontrée par Duvaut dans [Duv80] puis par Cocu dans [Coc84] sous certaines conditions de régularité. Ces hypothèses consistent à remplacer les conditions portant sur des grandeurs appartenant à des espaces de traces par des conditions dans L^2 . Elles consistent en particulier à régulariser les efforts de contact, tel que :

$$\sigma_N^* = \int \sigma_N \phi \quad (\text{I.7})$$

où une forme possible de régularisation de σ_N est présentée sur la figure I.5.

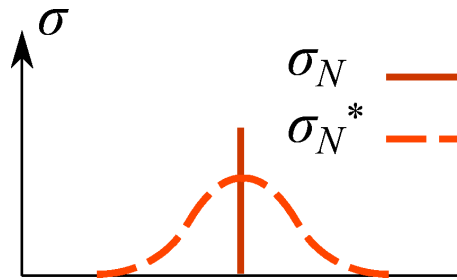


FIG. I.5 – Régularisation des efforts de contact

La condition de contact de Signorini est reportée sur σ_N^* , on parle alors de frottement non local.

L'existence de la solution du problème non régularisé, pour un coefficient de frottement suffisamment petit a ensuite été démontrée par Cocu et Rocca dans [CR00].

Les questions d'unicité et de régularité de la solution dans le cadre général restent, quand à elles, des problèmes ouverts. On peut notamment trouver des exemples de non unicité de la solution dans [Hil03] pour des coefficients de frottement assez grands.

I.2 Formulation en déplacements ou primale

Le but d'établir une formulation faible est généralement de traiter le problème par le biais d'une méthode numérique. La méthode des éléments finis en déplacements étant historiquement la plus répandue, le problème est généralement décrit en termes de déplacements.

La formulation en déplacements, appelée ici **formulation primale**, s'obtient en intégrant l'équation d'équilibre sur le volume :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma)(v - u) d\Omega + \int_{\Omega} F(v - u) d\Omega = 0 \quad \forall v \in K \quad (\text{I.8})$$

avec

$$\begin{cases} K = \{u \in V; u_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\} \\ V = \{v \in [H^1(\Omega)]^d; v = u_0 \text{ p.p. sur } \Gamma_D\} \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

où H^1 représente l'espace de Sobolev d'ordre 1 (des fonctions de carré intégrable et de dérivée première intégrable).

L'intégrale contenant la divergence est transformée en utilisant la formule de Green :

$$\int_{\Gamma} \sigma n(v - u) d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad}(v - u) d\Omega + \int_{\Omega} F(v - u) d\Omega = 0 \quad \forall v \in K \quad (\text{I.10})$$

On décompose alors l'intégrale sur Γ et on introduit la relation de comportement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{K} \varepsilon \operatorname{grad}_s(v - u) d\Omega &= \int_{\Gamma_C} \sigma_N(v_N - u_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma_T(v_T - u_T) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_F} f(v - u) d\Gamma + \int_{\Omega} F(v - u) d\Omega \quad \forall v \in K \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

En tenant compte des conditions de Signorini, il apparaît que $\sigma_N u_N = 0$ et que $\sigma_N v_N \geq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{K} \varepsilon \operatorname{grad}_s(v - u) d\Omega &\geq \int_{\Gamma_C} \sigma_T(v_T - u_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_F} f(v - u) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} F(v - u) d\Omega \quad \forall v \in K \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

De plus, u_T et v_T sont soit nuls soit égaux à $-\lambda \sigma_T$, on a donc :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_T(v_T - u_T) d\Gamma = \int_{\Gamma_C} |\sigma_T| (||u_T|| - ||v_T||) d\Gamma \quad \forall v \in K \quad (\text{I.13})$$

En réécrivant la condition de Coulomb en efforts telle que :

$$|\sigma_T| = \mu |\sigma_N| - a \quad \text{avec } a \in R^+ \quad (\text{I.14})$$

on obtient :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_T(v_T - u_T)d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N||u_T|d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N||v_T|d\Gamma - a \int_{\Gamma_C} ||u_T| - |v_T||d\Gamma \quad \forall v \in K \quad (\text{I.15})$$

Dans le cas de glissement, $a = 0$, dans le cas d'adhérence, $u_T = 0$, on a donc :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_T(v_T - u_T)d\Gamma \geq \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N||u_T|d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N||v_T|d\Gamma \quad \forall v \in K \quad (\text{I.16})$$

On obtient alors la formulation en termes de déplacements :

Problème (P_d). Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \rightarrow H$ tel que :

$$\begin{cases} u \in K \\ a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

avec

$$\begin{cases} a(u, v - u) = \int_{\Omega} \mathbb{K}\varepsilon(u)\varepsilon(v - u)d\Omega \\ L(v - u) = \int_{\Gamma_F} f(v - u)d\Gamma + \int_{\Omega} F(v - u)d\Omega \\ j(v, w) = \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N(v)||w_T|d\Gamma \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Le problème P_d est une inéquation variationnelle implicite car les efforts de contact dépendent du champ de déplacement solution.

Le problème est alors généralement discrétisé par la méthode des éléments finis. Le problème obtenu est un problème de pseudo optimisation sous contraintes. Les difficultés liées à sa résolution proviennent principalement du fait que l'on ne peut le ramener à un vrai problème de minimisation sous contraintes; ceci est du au caractère non associé des lois de frottement de Coulomb.

De nombreuses stratégies de résolution du problème ont été proposées. De manière non exhaustive, les méthodes les plus répandues sont la résolution par introduction de multiplicateurs de Lagrange et la résolution par régularisation du problème.

I.2.1 Résolution par introduction multiplicateurs de Lagrange

Dans cette première démarche, on peut montrer que les multiplicateurs introduits correspondent aux efforts de contact et de frottement [KO88]. Les conditions de contact et de frottement en efforts sont donc reportées aux multiplicateurs. Le problème est alors un problème de point-selle. Cette approche permet de résoudre le problème en appliquant strictement les conditions de contact et de frottement mais implique généralement une convergence lente des algorithmes de résolution associés.

I.2.2 Résolution par pénalisation

Il est également possible de résoudre le problème par pénalisation des efforts de contact, ou similairement en remplaçant les lois de contact et de frottement par des lois approchées, on parle alors de régularisation du problème [MO87]. La version régularisée des lois de frottement est représentée figure I.6.

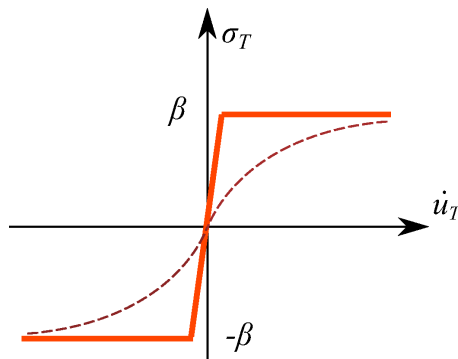


FIG. I.6 – Les lois de frottement de Tresca ($\beta=g$) et de Coulomb ($\beta=-\mu\sigma_N$) régularisées.

La partie verticale de la loi peut être remplacée par une droite de pente donnée (en traits gras), cette modification peut être interprétée comme l'ajout d'une rigidité tangentielle traduisant la déformation microscopique des surfaces en contact. On peut également remplacer la loi entière par une loi plus régulière (en traits interrompus). Ces lois présentent l'avantage d'être différentiables en tout point et rendent les efforts directement reliables aux déplacements sur la zone de contact. Le problème est alors converti en problème de minimisation sous contraintes plus aisément solvable.

Les inconvénients de ce type d'approche sont, la non vérification des conditions de contact et de frottement stricto sensu, les difficultés liées à l'identification et à la mesure des paramètres de régularisation et les possibilités d'apparition de problèmes numériques de conditionnement lorsque l'on souhaite appliquer des lois de régularisation trop sévères.

On a alors le choix entre deux stratégies de résolution, la première permettant de résoudre le système en vérifiant les conditions de contact et de frottement de manière stricte, au détriment de la rapidité des algorithmes de résolution mis en jeu. La seconde permettant de résoudre rapidement le système en admettant une vérification approximative des conditions de contact et de frottement.

I.2.3 Résolution par la méthode du Lagrangien augmenté

Pour pallier les problèmes évoqués précédemment, Fortin et Glowinski [FG83] ont proposé une méthode hybride aux deux précédentes : le méthode du Lagrangien augmenté. Son principe est de traiter le problème à l'aide de multiplicateurs de Lagrange auxquels on vient rajouter un terme de pénalisation. Le système peut alors être résolu par l'algorithme d'Uzawa [LS93] ou de Newton généralisé [Ala97]. Les paramètres de pénalisation permettent d'accélérer la convergence de l'algorithme d'Uzawa et les multiplicateurs permettent de vérifier les conditions de contact et de frottement de manière stricte lorsque l'on s'approche de la solution.

I.2.4 Résolution par point fixe

Duvaut et Lions ont proposé dans [DL72] une formulation, basée sur la similitude entre les lois de Tresca et de Coulomb, appliquée numériquement dans [RCL88]. Le problème de contact avec frottement de Tresca a l'avantage de pouvoir se ramener à un problème de minimisation sous contraintes. L'idée est de résoudre le problème à seuil de frottement de Tresca g fixé, de mettre à jour ce seuil en fonction des résultats obtenus sur la partie normale des efforts de contact, puis d'itérer ce principe jusqu'à l'obtention de valeurs de seuils suffisamment stables. La convergence de cette méthode, appelée point fixe a été prouvée dans [LPR91b].

I.2.5 Résolution par programmation non linéaire

Une méthode de résolution par programmation non linéaire, nommée Lemke, à également été proposée par Klarbring dans [Kla86], dont le principe est d'écrire le problème de contact avec frottement sous forme de problème complémentaire, de condenser le problème et d'y introduire des variables auxiliaires (frottement avant ou arrière), l'application des conditions de contact et de frottement s'effectuant alors lors de la factorisation de la matrice de rigidité du système.

I.2.6 Méthode de résolution adoptée

La mise en oeuvre de la méthode de résolution duale développée au cours de cette thèse a été effectuée dans la plateforme de calcul LMGC90 [LMGC90], développée par F. Dubois et M. Jean [DJ03] et [DJ04]. Cette plateforme étant dédiée à la résolution des problèmes de dynamique en présence de contact et de frottement, la méthode de résolution, Non Smooth Contact Dynamics (NSCD), utilisée dans cette thèse diffère légèrement des méthodes précédemment citées. Nous appliquons la méthode au cas quasi statique en ne considérant qu'un seul pas de temps. Dans ce cadre, le principe de la méthode NSCD est le suivant :

On cherche à résoudre le problème discret :

$$[K][u] = [F] + [R] \quad (\text{I.19})$$

où $[K]$ désigne la matrice de rigidité de la structure considérée, $[u]$ le vecteur des déplacements nodaux, $[F]$ le vecteur des efforts extérieurs et $[R]$ le vecteur des efforts de contact et de frottement initialement inconnus.

On commence par résoudre le système à efforts de contact nuls puis on applique les conditions de contact et de frottement à $[u]$. Le vecteur $[R]$ est ensuite mis à jour par calcul des résidus $[K][u] - [F]$ puis on itère sur ce principe jusqu'à obtention de valeurs de contact suffisamment stables.

Cette description du principe de la méthode NSCD appliquée au cas statique étant assez sommaire, nous invitons le lecteur à se référer à [Jea99] pour de plus amples détails.

I.3 Formulation en contraintes ou duale

La formulation variationnelle en termes de contraintes du problème (P) , appelée **formulation duale**, a été introduite par Telega [Tel91], on l'obtient en intégrant l'équation de compatibilité :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})d\Omega = \int_{\Omega} \text{grad}_s(u)(\tau_{ij} - \sigma_{ij})d\Omega \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma(\tau) = \{\sigma \in H_{F,f}; \sigma_N \leq 0, |\sigma_T| \leq -\mu\tau_N \text{ sur } \Gamma_C\} \\ H_{F,f} = \{\sigma \in H; \sigma_{i,j,j} + F_i = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma_{ij}n_j = f_i \text{ sur } \Gamma_F\} \\ H = \{\sigma = (\sigma_{ij}), \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

où L^2 représente l'espace des fonctions de carré intégrable.

Que l'on transforme en utilisant la formule de Green et la relation de comportement :

$$\int_{\Omega} \mathbb{S}_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) = \int_{\Gamma} u_i(\tau_{ij}n_j - \sigma_{ij}n_j)d\Gamma - \int_{\Omega} u_i(\tau_{i,j,j} - \sigma_{i,j,j})d\Omega \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \quad (\text{I.22})$$

τ vérifiant les conditions d'équilibre local, on obtient, en décomposant l'intégrale sur Γ :

$$\int_{\Omega} \mathbb{S}_{ijkl} \sigma_{kl} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) = \int_{\Gamma_D} u_{0i} (\tau_{ij} n_j - \sigma_{ij} n_j) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u_N (\tau_N - \sigma_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u_T (\tau_T - \sigma_T) d\Gamma \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \quad (\text{I.23})$$

Les conditions de contact impliquent $u_N \sigma_N = 0$ et $u_N \tau_N \geq 0$. Les conditions de Coulomb imposent $u_T = 0$ dans le cas d'adhérence et $u_T (\tau_T - \sigma_T) \geq 0$ dans le cas de glissement. En tenant compte de ces relations, on obtient la formulation du problème en termes de contraintes :

Problème (\mathbf{P}_s). Trouver un champ de contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow H$ tel que

$$\begin{cases} \sigma \in \Sigma(\sigma) \\ b(\sigma, \tau - \sigma) \geq l(\tau - \sigma) \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

avec

$$\begin{cases} b(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \mathbb{S} \sigma \cdot \tau d\Omega \\ l(\tau) = \int_{\Gamma_D} u_0 \tau \cdot n d\Gamma \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Le problème \mathbf{P}_s est une inéquation quasi-variationnelle, la solution, si elle existe, appartient à un espace dépendant lui même de la solution.

I.4 Formulation duale condensée

Cette formulation permet de ne considérer le problème que sur le bord de contact où les inconnues sont alors les efforts et déplacements U et s . On introduit formellement deux opérateurs de relèvement (voir par exemple [QV99]), $s \in H^{-1/2}(\Gamma_C) \rightarrow \sigma = R(s) \in H_{F,f}$ et $U \in H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow u = T(U) \in V$. Ils permettent de passer de la description du problème dans le volume à celle sur le bord de contact.

Le problème dual condensé s'écrit :

Problème (\mathbf{P}_d^*). Trouver $s = (\sigma_N, \sigma_T) \in \Sigma^*(\sigma_N)$ tel que

$$B(s, t - s) \geq L(t - s), \forall t = (\tau_N, \tau_T) \in \Sigma^*(\sigma_N) \quad (\text{I.26})$$

avec

$$\begin{cases} B(s, t) = \int_{\Gamma_C} R^T \mathbb{S} R s \ t \ dl \\ L(t) = \int_{\Gamma_C} R^T T u_0 R t \ dl. \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

et

$$\begin{cases} \Sigma^*(\xi) = (-K_n^*) \times C(\xi) \\ K_n^* = \{\tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C); \langle \tau, U \rangle \leq 0, \forall U \in K_n\} \\ C(\xi) = \{\tau \in (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2; |\tau| \leq -\mu\xi\} \\ K_n = \{U \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C); U = \gamma u / \Gamma_C \text{ avec } u \in V, U \leq 0\} \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

où $H^{1/2}$ représente l'espace des traces des fonctions de H^1 , et $H^{-1/2}$ l'espace des traces des fonctions de H_{div} (H_{div} étant l'espace des fonctions de L^2 dont la divergence appartient à L^2).

Ici encore, le problème est une inéquation quasi-variationnelle, écrite sur la frontière de contact.

I.5 Equivalences entre les formulations

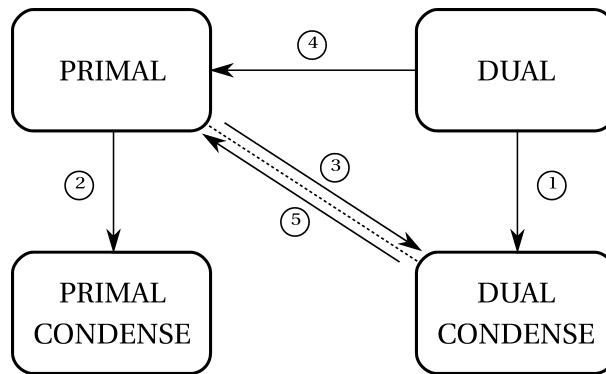


FIG. I.7 – Schéma d'équivalence des formulations

La formulation duale condensée peut s'obtenir par condensation de la formulation duale (① sur figure I.7), en utilisant des techniques similaires à la condensation classique utilisée pour le problème primal (② sur figure I.7). Elle peut aussi s'obtenir à partir de la formulation primale (③ sur figure I.7) en utilisant la théorie de la dualité au sens de Mosco-Capuzzo Dolcetta-Matzeu (notée M-CD-M) (voir [Mos76, CDM80]). Les deux problèmes obtenus par

① et ③ sont formellement équivalents. Une démonstration rigoureuse de cette équivalence est, à notre connaissance, un problème ouvert.

En utilisant la théorie M-CD-M, on peut aussi montrer que la formulation primale s'obtient par dualisation, soit de la formulation en contraintes (④ sur figure I.7) soit de la formulation en contraintes condensée (⑤ sur figure I.7).

L'utilisation de formulations condensées permet généralement de simplifier la résolution numérique du problème. Comme vu précédemment, le problème dual condensé peut être obtenu par ① ou ③ ; toutefois, l'utilisation de la théorie M-CD-M au niveau discret semble moins évidente à mettre en oeuvre que la condensation du problème dual.

Le choix fait dans cette thèse a donc été de s'intéresser à la formulation et à la discrétisation du problème dual, puis aux techniques de résolution dont la condensation du problème fait partie.

I.6 Conclusion

Les formulations forte et faibles du problème de contact avec frottement ont été présentées dans ce chapitre. Comme nous l'avons vu, il est possible de traiter un même problème soit en privilégiant la vérification des équations de compatibilité (approche primale), soit en privilégiant la vérification des équations d'équilibre (approche duale). Dans les deux cas, la méthode des éléments finis peut être utilisée afin de discrétiser le problème.

La discrétisation des formulations en déplacement est classique et ne sera donc pas abordée ici. La résolution des problèmes de contact avec frottement peut être effectuée, comme nous l'avons vu, de diverses manières.

La discrétisation des formulations en contrainte est moins classique. Deux alternatives sont possibles : la formulation duale et sa version condensée, la première a ici été choisie car sa discrétisation, qui fait l'objet du chapitre III, nous a semblé plus accessible.

Dans les deux cas, primal et dual, la solution obtenue par la méthode des éléments finis comporte une erreur, qu'il est possible d'évaluer via diverses techniques présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre II

ESTIMATEURS D'ERREUR POUR LES PROBLÈMES DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

RÉSUMÉ

Nous présentons dans ce chapitre les principales méthodes d'évaluation de l'erreur issue de la discrétisation par éléments finis : les méthodes d'évaluation de l'erreur par lissage des contraintes et par évaluation des résidus et leurs extensions aux problèmes de contact avec frottement. Une attention plus particulière est enfin portée aux estimateurs d'erreurs basés sur la dualité puisqu'ils entrent dans le cadre de cette thèse.

II.1 Introduction

Le méthode des éléments finis étant une méthode de résolution par approximation du problème mécanique initial, la solution obtenue est alors une solution approchée de la solution exacte. L'écart à la solution exacte pouvant provenir de nombreuses sources : approximation des données matériau, des conditions aux limites, de la géométrie, erreur due à la discrétisation du problème ...

La source d'erreur issue de l'approximation par éléments finis provenant principalement de la manière dont a été discrétisé le champ étudié sur la géométrie, il est important de pouvoir évaluer l'importance de l'erreur ainsi induite.

Les estimateurs d'erreur permettent d'évaluer l'erreur, locale ou globale, induite par le choix fait sur la discrétisation du problème. Il devient alors possible de corriger la discrétisation du problème, localement ou globalement, de manière à obtenir une solution satisfaisant aux exigences de précision précédemment fixées.

Nous présentons trois familles d'estimateurs : par lissage des contraintes, par analyse des résidus et par dualité. Les estimateurs d'erreur par lissage des contraintes et les estimateurs d'erreur basés sur les résidus exploitent tous deux les écarts mesurables entre solution approchée et idéale, le premier se basant sur la discontinuité du champ de contraintes approché et le second sur la violation des conditions d'équilibre. Certaines extensions de ces estimateurs au problème de contact et de frottement sont présentées.

La troisième famille d'estimateurs est basée sur la dualité, et plus précisément sur des notions de bornes de l'énergie de déformation. Cette famille d'estimateurs nécessite la construction d'une solution statiquement admissible, on peut la diviser en deux groupes d'estimateurs, dont la différence essentielle est la manière d'obtenir une solution statiquement admissible.

II.2 Estimateurs d'erreur par lissage des contraintes

Lorsque l'on traite un problème de mécanique régulier, on peut s'attendre à ce que le champ de contraintes solution du problème soit continu dans le volume étudié. Lors d'une analyse par la méthode des éléments finis en déplacements, la seule continuité généralement imposée est la continuité C^0 du champ de déplacement, le champ de contraintes peut alors présenter des discontinuités à l'interface entre éléments. Les estimateurs d'erreur par lissage des contraintes se basent sur la mesure de ces discontinuités pour évaluer l'erreur effectuée sur la solution approchée.

A partir du champ de contraintes approché $\hat{\sigma}_h$, résultat d'une analyse par la méthode des

éléments finis, on construit un champ de contraintes σ^* continu sur l'ensemble du volume Ω occupé par le corps étudié. On estime alors l'erreur en mesurant la distance entre ces deux champs telle que :

$$e = \left(\int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma}_h)^T \mathbb{S} (\sigma^* - \hat{\sigma}_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.1})$$

La construction du champ de contrainte lissé σ^* est effectuée en appliquant les valeurs nodales S^* des contraintes aux fonctions de forme Φ_i du modèle éléments finis utilisé :

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^N \Phi_i S_i^* \quad (\text{II.2})$$

Les différents estimateurs d'erreur par lissage des contraintes se distinguent par la manière de calculer les contraintes nodales S^* .

Zienkiewicz et Zhu [ZZ87] ont proposé la méthode de projection globale, dont le principe est de minimiser la distance entre $\hat{\sigma}_h$ et σ^* au sens des moindres carrés de manière à obtenir S^* .

Le champ lissé peut également être obtenu par minimisation locale de l'écart entre σ_h et σ^* . Sur ce principe, la méthode la plus connue est la méthode SPR (Superconvergent Patch Recovery) proposée par Zienkiewicz et Zhu [ZZ92]. L'idée de cette méthode est, par la construction d'un patch Ω_p englobant plusieurs éléments, de minimiser l'écart entre le champ de contraintes $\hat{\sigma}_h$ et un polynôme σ_p , représentant le champ de contraintes sur ce patch, en n_p points du patch (de coordonnées x_i, y_i, z_i) correctement choisis :

$$\min \left[\sum_{i=1}^{n_p} (\hat{\sigma}_h - \sigma_p)_{x_i, y_i, z_i}^2 \right] \quad (\text{II.3})$$

Le champ de contraintes lissé global σ^* peut alors être obtenu en calculant les valeurs nodales des contraintes S^* à partir des champs σ_p .

Pour que cet estimateur soit fiable, le champ de contraintes σ_p doit être proche du champ exact. Les points où la contrainte approchée est la plus proche de la contrainte exacte étant les points de Gauss des éléments [Bar76], le choix de ces points pour le calcul de σ_p permet à ce dernier de représenter au mieux la solution exacte, on parle alors de points de super-convergence. Babushka et al. [BSUGC94] ont démontré la robustesse de cet estimateur dans le cas de problèmes élastostatiques classiques.

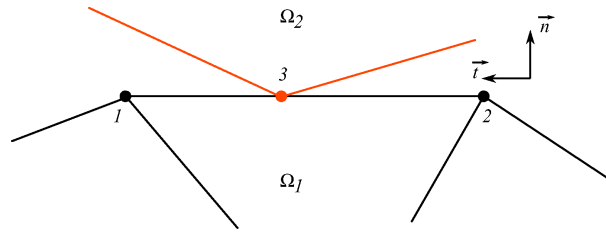


FIG. II.1 – Contact entre deux corps élastiques

Dans le cas de problèmes de contact unilatéral avec frottement, la zone de contact est par définition incluse dans le calcul de l'erreur. Toutefois, Wriggers propose dans [Wri02] d'ajouter une terme permettant le calcul de l'erreur issue du traitement du problème de contact par pénalisation, qui s'exprime sur le bord d'un élément de longueur l (figure II.1), appartenant à un corps Ω_1 , en contact avec un noeud 3 appartenant à un corps Ω_2 par :

$$e_C = \left(\int_0^1 \frac{l}{C_T} [\sigma_T^*(\xi) - t_{Th}]^2 + \frac{l}{\epsilon_N} [\sigma_N^*(\xi) - p_{Nh}]^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.4})$$

où ϵ_N et C_T sont les paramètres de pénalisation normal et tangentiel, p_{Nh} et t_{Th} les efforts normal et tangentiel au noeud 3 du corps 2 obtenus par pénalisation dans le repère (\vec{n}, \vec{t}) . σ_N^* et σ_T^* sont les interpolations linéaires des efforts normaux et tangentiels entre les noeuds 1 et 2 :

$$\sigma_N^* = (1 - \xi)\sigma_{N1}^* + \xi\sigma_{N2}^* \quad (\text{II.5})$$

$$\sigma_T^* = (1 - \xi)\sigma_{T1}^* + \xi\sigma_{T2}^* \quad (\text{II.6})$$

et où les valeurs σ_{Ni}^* et σ_{Ti}^* au point i sont obtenues par projection du champ de contrainte σ_i^* dans le repère (\vec{n}, \vec{t}) . σ_i^* étant la contrainte lissée calculée sur un patch recouvrant l'ensemble des segments auxquels appartient le noeud i .

REMARQUE. — Robustesse de l'estimateur

L'estimateur de Zienkiewicz et Zhu [ZZ92] est reconnu comme robuste dans les cas de problèmes sans contact. Dans le cadre du problème de contact unilatéral avec frottement, l'unicité de la solution ne pouvant être assurée, on ne peut assurer que le présent estimateur d'erreur définisse une borne supérieure à l'erreur réelle.

II.3 Estimateurs d'erreur basés sur les résidus

Ce type d'estimateurs est également très employé, il fût introduit par Babuska et Rheinboldt [BR78]. Il s'applique également à la solution du problème d'éléments finis classiques en déplacements et vise à quantifier par le calcul des résidus d'équilibre, la (non-)vérification des conditions d'équilibre locales. Ces estimateurs présentent l'avantage d'être simples à calculer mais ne permettent de connaître une estimation de l'erreur réelle qu'à une constante près.

Dans le cas du problème de contact, Wriggers [Wri02] propose de décomposer le résidu total en trois parties :

$$\|\sigma - \hat{\sigma}_h\|_{\Omega}^2 \leq \sum_{k=1}^3 \|hC_k R_k(\hat{\sigma}_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (\text{II.7})$$

avec

$$\|\sigma - \hat{\sigma}_h\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma}_h) \mathbb{S}(\sigma - \hat{\sigma}_h) d\Omega \quad (\text{II.8})$$

$$R_1(\hat{\sigma}_h) = |\text{div} \hat{\sigma}_h + F| \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{cases} R_2(\hat{\sigma}_h) = \frac{1}{h_e} (f - \hat{\sigma}_h n) \quad \text{sur } \partial\Omega_e \cap \Gamma_F \\ \text{ou } R_2(\hat{\sigma}_h) = \max_{s \in \partial\Omega_e} \sup_s \frac{1}{2h_e} [\hat{\sigma}_h n] \quad \text{sur } \partial\Omega_e \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$R_3(\hat{\sigma}_h) = |\epsilon_N u_N - \sigma_{\hat{N}h}| \quad \text{sur } \partial\Omega_e \cap \Gamma_C \quad (\text{II.11})$$

où F représente les efforts volumiques dans Ω , f les efforts imposés sur Γ_F , h_e la taille caractéristique d'un élément, $[\hat{\sigma}_h n]$ le saut de vecteur contrainte entre éléments, ϵ_N le paramètre de régularisation normal, u_N le déplacement normal et $\sigma_{\hat{N}h}$ l'effort normal calculé par projection de la contrainte $\hat{\sigma}_h$ sur la zone de contact.

Le premier résidu mesure la non vérification de l'équation d'équilibre locale, le second résidu mesure la non vérification des conditions limites imposées en efforts et la discontinuité de la contrainte aux frontières entre éléments, le troisième résidu mesure l'écart entre effort normal calculé par la relation de pénalisation et par projection de la contrainte.

Disposant de résultats de convergence pour le problème de contact pénalisé obtenus par Kikuchi et Oden [KO88], ce troisième résidu permet d'ajuster le paramètre de pénalisation normal de manière à diminuer l'erreur.

REMARQUE. — détermination des constantes C_k

L'inconvénient majeur de ce type d'approche est l'introduction des constantes notées C_k dans II.7 qui sont a priori inconnues. La détermination de ces constantes peut toutefois se faire lors d'un processus de raffinement de maillage en utilisant les résultats du dernier maillage généré.

II.4 Estimateurs d'erreur basés sur la dualité

II.4.1 Expression générale de l'erreur

Cette famille d'estimateurs est basée sur les notions de bornes de l'énergie de déformation introduites par Fraeijns de Veubeke [Fra01] puis étendues par Debongnie et al. dans [DZB95]

aux problèmes à conditions aux limites quelconques. Le principe est d'utiliser une solution approchée cinématiquement admissible u_h et une solution approchée statiquement admissible σ_h pour le calcul d'une borne supérieure de l'erreur.

Nous présentons ici l'estimateur d'erreur développé pour le problème de mécanique élasto-statique avec contact unilatéral et frottement, puis analysons les différents cas dérivables à partir de cet estimateur.

Dans ce cadre, l'énergie de déformation U d'un solide élastique s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega \quad (\text{II.12})$$

et peut être décomposée en deux parties :

$$\int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(u) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} \sigma d\Omega \quad (\text{II.13})$$

Une partie calculée via le champ cinématiquement admissible u exact et une partie calculée via le champ statiquement admissible σ exact.

Cette même énergie peut également être décomposée via la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \text{grad}_s(u) d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma n) u d\Gamma - \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) u d\Omega \quad (\text{II.14})$$

soit

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(u) d\Omega - \int_{\Omega} F u d\Omega - \int_{\Gamma_F} f u d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_D} (\sigma n) u_d d\Gamma = \int_{\Gamma_C} (\sigma n) u d\Gamma \quad (\text{II.15})$$

qui peut se réécrire

$$E_p^*(u) + E_c^*(\sigma) = \int_{\Gamma_C} (\sigma n) u d\Gamma \quad (\text{II.16})$$

On notera que les énergies $E_p^*(u)$ et $E_c^*(\sigma)$ correspondent respectivement aux énergies potentielle et complémentaire dans lesquelles les termes dûs au contact ont été retirés.

Comme évoqué précédemment, le principe de ces estimateurs est de relier les erreurs relatives aux solutions approchées cinématiquement et statiquement admissibles par l'intermédiaire de la relation fondamentale II.16.

II.4.1.1 Erreur en déplacement

L'erreur en déplacement Δu est définie comme la différence entre le champ discret et le champ exact : $\Delta u = u_h - u$. L'énergie $E_p^*(u)$ a été définie comme :

$$E_p^*(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(u) d\Omega - \int_{\Omega} F u d\Omega - \int_{\Gamma_F} f u d\Gamma \quad (\text{II.17})$$

De manière à exprimer une norme de l'erreur, on évalue $E_p^*(u_h)$:

$$E_p^*(u_h) = E_p^*(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\Delta u) \mathbb{K} \varepsilon(\Delta u) \, d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(\Delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega} F \Delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma_F} f \Delta u \, d\Gamma \quad (\text{II.18})$$

La formulation primale du problème de contact avec frottement peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(v-u) \, d\Omega - \int_{\Omega} F(v-u) \, d\Omega - \int_{\Gamma_F} f(v-u) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} (\sigma n)(v-u) \, d\Gamma \quad \forall v \in K_C \quad (\text{II.19})$$

Il faut alors que $u_h \in K_C$ pour pouvoir évaluer les trois derniers termes de II.18, soit :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) \mathbb{K} \varepsilon(\Delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega} F \Delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma_F} f \Delta u \, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u \, d\Gamma \quad (\text{II.20})$$

Nous définissons la norme énergétique de l'erreur en déplacement par :

$$\|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} \varepsilon(\Delta u) \mathbb{K} \varepsilon(\Delta u) \, d\Omega \quad (\text{II.21})$$

que l'on retrouve dans II.18, l'équation II.20 se réécrit donc :

$$\frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 = E_p^*(u_h) - E_p^*(u) - \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u \, d\Gamma \quad (\text{II.22})$$

II.4.1.2 Erreur en contrainte

L'erreur en contrainte est définie comme la différence entre champ discret et champ exact : $\Delta \sigma = \sigma_h - \sigma$. L'énergie $E_c^*(\sigma)$ a été définie par :

$$E_c^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} (\sigma n) u_d \, d\Gamma \quad (\text{II.23})$$

on peut alors calculer

$$E_c^*(\sigma_h) = E_c^*(\sigma) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \sigma \mathbb{S} \Delta \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} \Delta \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} (\Delta \sigma n) u_d \, d\Gamma \quad (\text{II.24})$$

La formulation duale du problème de contact avec frottement nous donne :

$$\int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} (\tau - \sigma) \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} u_d (\tau - \sigma) n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} u (\tau - \sigma) n \, d\Gamma = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \quad (\text{II.25})$$

De la même manière que pour la discrétisation des déplacements, le champ discret doit vérifier $\sigma_h \in \Sigma(\sigma)$ pour pouvoir écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma \mathbb{S} \Delta \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} u_d \Delta \sigma n \, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} u \Delta \sigma n \, d\Gamma \quad (\text{II.26})$$

Comme précédemment, on introduit la norme énergétique de l'erreur en contrainte :

$$\|\Delta \sigma\|^2 = \int_{\Omega} \Delta \sigma \mathbb{S} \Delta \sigma \, d\Omega \quad (\text{II.27})$$

qui peut être calculée à partir de II.24 et II.26 :

$$\frac{1}{2} \|\Delta \sigma\|^2 = E_c^*(\sigma_h) - E_c^*(\sigma) - \int_{\Gamma_C} u \Delta \sigma n \, d\Gamma \quad (\text{II.28})$$

II.4.1.3 Erreur globale

La sommation des erreurs en déplacement et en contraintes s'écrit :

$$\frac{1}{2} \|\Delta\sigma\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 = E_p^*(u_h) - E_p^*(u) - \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u \, d\Gamma + E_c^*(\sigma_h) - E_c^*(\sigma) - \int_{\Gamma_C} u \Delta\sigma n \, d\Gamma \quad (\text{II.29})$$

la relation II.16 permet alors de supprimer les énergies liées aux solutions exactes u et σ de cette équation et d'obtenir :

$$\frac{1}{2} \|\Delta\sigma\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 = E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h) - \left(\int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u \Delta\sigma n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma n) u \, d\Gamma \right) \quad (\text{II.30})$$

L'erreur globale exacte (ou réelle) est alors définie par :

$$e_r = \left[\|\Delta u\|_{\Omega}^2 + \|\Delta\sigma\|_{\Omega}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.31})$$

qui est un majorant pour les erreurs en déplacement et en contraintes.

Dans le cas sans contact, l'erreur peut être calculée par la seule connaissance des solutions u_h et σ_h :

$$e_r = \sqrt{2} (E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h))^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.32})$$

Dans le cas avec contact unilatéral et frottement, on s'intéresse aux termes entre parenthèse de II.30 dans lesquels interviennent les champs exacts u et σ :

$$\int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u \Delta\sigma n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma n) u \, d\Gamma \quad (\text{II.33})$$

Du fait de la présence de contact (avec ou sans frottement) on trouve dans la première et dernière intégrale de II.33 le terme σn qui est une fonction non linéaire de u , dans la deuxième intégrale u est une fonction non linéaire de σ , on se place dans le cas général (c'est à dire sans régularisation du problème de contact). Il est à ce point nécessaire de préciser le cas pris en compte.

II.4.1.4 Contact sans frottement

On considère ici les efforts tangentiels nuls sur Γ_C , l'expression de l'erreur globale se ramène donc à :

$$\frac{1}{2} e_r^2 = E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_N u_{Nh} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} u_N \sigma_{Nh} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u_N \sigma_N \, d\Gamma \quad (\text{II.34})$$

Les solutions cinématiquement et statiquement admissibles doivent vérifier les conditions de Signorini, la solution exacte également, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{Nh} \leq 0 \\ \sigma_{Nh} \leq 0 \\ u_N \leq 0 \\ \sigma_N \leq 0 \\ \sigma_N u_N = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.35})$$

ce qui assure aux intégrales sur Γ_C présentes dans II.34 d'être négatives ou nulles, on en déduit donc une majoration de l'erreur globale :

$$e_r \leq \sqrt{2}(E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h))^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.36})$$

II.4.1.5 Contact et frottement

Dans le cas avec frottement le terme II.33 se ramène à :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \sigma_N(u_{Nh} - u_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma_T(u_{Th} - u_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u_N(\sigma_{Nh} - \sigma_N) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_C} u_T(\sigma_{Th} - \sigma_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma_N u_N + \sigma_T u_T) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Comme précédemment, la partie normale des efforts et déplacements majore l'erreur, l'expression de l'erreur globale se ramène donc à :

$$\frac{1}{2}e_r^2 = E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h) + P_{pos} + \int_{\Gamma_C} (\sigma_T u_{Th} + u_T \sigma_{Th} - \sigma_T u_T) d\Gamma \quad (\text{II.38})$$

où P_{pos} représente la partie de II.33 positive du fait des conditions de contact. Dans le cadre général, rien n'assure que les approches cinématiquement admissible et statiquement admissible aient convergé vers une même solution ou même vers une même tendance (zones de glissement, adhérence et décollement identiques). On ne peut alors lier ces deux solutions et aller plus loin dans la démarche.

II.4.1.6 Ecriture locale de l'erreur

L'erreur exacte globale II.30 peut également être décomposée en une somme de contributions locales. En partant de l'équation II.30, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta\sigma\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u_h) \mathbb{K} \varepsilon(u_h) d\Omega - \int_{\Omega} F u_h d\Omega - \int_{\Gamma_F} f u_h d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_h \mathbb{S} \sigma_h d\Omega - \int_{\Gamma_D} (\sigma_h n) u_d d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u + u \Delta \sigma n + (\sigma n) u d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

que l'on peut écrire, via la formule de Green :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta\sigma\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u_h) \mathbb{K} \varepsilon(u_h) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_h \mathbb{S} \sigma_h d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \sigma_h \varepsilon(u_h) d\Omega + \int_{\Gamma_C} (\sigma_h n) u_h d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \Delta u + u \Delta \sigma n + (\sigma n) u d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

et qui se simplifie en :

$$\frac{1}{2} \|\Delta\sigma\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) \mathbb{S}(\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) \, d\Omega + \int_{\Gamma_C} (\Delta\sigma n) \Delta u \, d\Gamma \quad (\text{II.41})$$

Le calcul de l'erreur à partir des différentes contributions élémentaires peut alors s'écrire :

$$e_r^2 = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} (\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) \mathbb{S}(\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) \, d\Omega + 2 \int_{\Gamma_C} (\Delta\sigma n) \Delta u \, d\Gamma \quad (\text{II.42})$$

L'expression de l'erreur écrite sous cette forme montre qu'elle peut être calculée en mesurant l'écart entre solutions cinématiquement et statiquement admissibles. C'est le point de départ de l'estimateur introduit par Ladevèze, baptisé estimateur d'erreur en relation de comportement [LP01], [Lad75].

Nous allons maintenant présenter deux estimateurs basés sur la dualité dans les cas avec et sans contact frottant.

Le premier est l'estimateur d'erreur en relation de comportement, introduit par Ladevèze dans [Lad75] et enrichi par Coorevits et al. dans [CHH01] dans le cas du problème de contact unilatéral avec frottement. Cet estimateur diffère légèrement de l'idée de base proposée par Fraeijns de Veubeke dans la manière d'obtenir la solution statiquement admissible σ_h .

Le second est l'estimateur d'erreur par analyse duale, correspondant strictement au concept introduit par Fraeijns de Veubeke. La solution statiquement admissible étant obtenue par la méthode des éléments finis équilibre.

II.4.2 Estimateurs d'erreur en relation de comportement

II.4.2.1 Estimateur pour les problèmes sans contact

Comme nous l'avons déjà évoqué, cet estimateur est basé sur les principes de dualité présentés précédemment. Son nom provient de l'idée de mesurer la (non-)vérification des relations de comportement entre la solution cinématiquement admissible et une solution statiquement admissible σ_h construite à partir de cette dernière, le principe de construction de cet estimateur d'erreur est présenté sur la figure II.2.

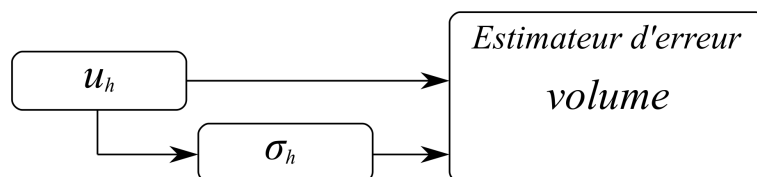


FIG. II.2 – Principe de construction de l'estimateur d'erreur en relation de comportement.

La solution statiquement admissible est reliée à la solution cinématiquement admissible par prolongement au sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \\ \forall \Omega_e \in \Omega \end{aligned} \int_{\Omega_e} (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \text{grad} \phi_i \, d\Omega_e = 0 \quad (\text{II.43})$$

où I est l'ensemble des noeuds i du maillage, $\hat{\sigma}_h = \mathbb{K}\varepsilon(u_h)$ et ϕ_i la fonction de forme au noeud i issue de la modélisation cinématiquement admissible.

Cette condition de prolongement impose un travail équivalent à σ_h et $\hat{\sigma}_h$, et notamment, pour des fonctions de forme ϕ_i linéaires, l'égalité des contraintes moyennes sur chaque élément.

On impose également au champ de contrainte statiquement admissible σ_h d'équilibrer les tractions de surface aux frontières communes aux éléments et les efforts imposés sur les bords des éléments appartenant à Γ_F .

Sur le bord $\partial\Omega_e$ de chaque élément, on définit une fonction η_e constante sur chaque face de l'élément Ω_e et valant $+1$ ou -1 de manière à ce que, sur la frontière commune à deux éléments 1 et 2, l'on vérifie :

$$\eta_1 + \eta_2 = 0 \quad (\text{II.44})$$

On définit alors les densités d'efforts F^* sur chaque face de l'élément telles que :

$$\sigma_h|_{\Omega_e} n_e = \eta_e F^* \quad \text{sur } \partial\Omega_e \quad (\text{II.45})$$

où n_e est la normale unitaire sortante des faces de Ω_e .

Pour les bords de Ω_e appartenant à Γ_F , on impose :

$$\eta_e F^* = f \quad (\text{II.46})$$

On impose aux densités d'efforts d'être en équilibre avec les efforts volumiques sur chaque élément du maillage :

Pour tout champ de déplacement solide u_s :

$$\int_{\Omega_e} f u_s \, d\Omega_e + \int_{\partial\Omega_e} \eta_e F^* u_s \, d\partial\Omega_e = 0 \quad (\text{II.47})$$

La construction du champ de contrainte σ_h doit ensuite satisfaire à :

$$\begin{cases} \text{div} \sigma_h + f = 0 \text{ dans } \Omega_e \\ \sigma_h n_e = \eta_e F^* \text{ sur } \partial\Omega_e \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Plusieurs techniques sont envisageables pour le calcul du champ de contraintes, analytique ou numérique, locale ou globale. Nous invitons le lecteur à consulter [Kem06] pour plus de détails à ce sujet. Notons simplement que seule la construction analytique permet d'obtenir un champs de contrainte strictement statiquement admissible. La construction numérique, plus souple et moins coûteuse est basée sur la détermination du champ de contrainte par dualité sur un élément. On considère alors le problème mécanique du chargement d'un élément du maillage par les densités d'efforts précédemment déterminées, traité par une approche élément finis en déplacements de degrés d'interpolation supérieur à celui d'origine (ou de même degrés mais en subdivisant l'élément un plusieurs éléments). La contrainte est alors obtenue en appliquant la relation de comportement à un champ de déplacement solution de ce dernier problème.

II.4.2.2 Estimateur pour les problèmes avec contact

L'estimateur d'erreur en relation de comportement a été étendu au problème de contact unilatéral de deux corps élastiques par Coorevits et al. dans [CHP00] en ajoutant un terme d'erreur contrôlant la non pénétration des corps sur l'interface de contact, le problème étant traité par introduction de multiplicateurs de Lagrange pour le contact.

L'estimateur d'erreur en relation de comportement s'exprime alors par :

$$e = \left[\sum_{l=1}^2 \|\sigma_h^l - \mathbb{K}^l \varepsilon(u_h^l)\|_{\sigma, \Omega^l}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} (I(-\delta u) + I^*(r) + r \delta u) d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.49})$$

où l désigne le numéro de corps considéré, δu le saut de déplacement sur l'interface de contact, r la réaction sur l'interface de contact, calculée par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange, $I(-\delta u)$ la fonction indicatrice du cône de Signorini en déplacements, $I^*(r)$ la fonction indicatrice du cône de Signorini en efforts telles que :

$$I(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_N \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

et

$$I^*(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_N \leq 0 \text{ et } r_T = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

et $\|\sigma\|_{\sigma, \Omega^l}^2$ la norme énergétique en contraintes telle que :

$$\|\sigma\|_{\sigma, \Omega^l}^2 = \int_{\Omega^l} \sigma \mathbb{S} \sigma \, d\Omega^l \quad (\text{II.52})$$

Le principe de construction de cet estimateur est présenté sur la figure II.3.

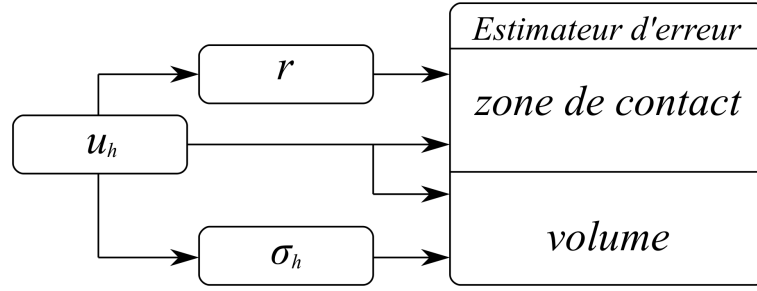


FIG. II.3 – Principe de construction de l'estimateur d'erreur en relation de comportement avec prise en compte du contact.

Dans ce cas, l'estimateur d'erreur reste un majorant de l'erreur réelle.

II.4.2.3 Estimateur pour les problèmes avec contact et frottement

Dans le cas du problème de contact unilatéral avec frottement, d'un corps élastique sur un corps rigide, Coorevits et al. [CHH01] ont étendu le précédent principe à la résolution du problème par multiplicateurs de Lagrange. L'estimateur d'erreur s'écrit alors :

$$e = \left[\|\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)\|_{\sigma, \Omega}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} (I(w) + I_{\Sigma}(r) + \mu|r_N||w_T| + r_T w_T + r_N w_N) d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.53})$$

où $I_{\Sigma}(r)$ est la fonction indicatrice du cône de Signorini-Coulomb en efforts telle que :

$$I_{\Sigma}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_N \leq 0 \text{ et } |r_T| \leq \mu|r_N| \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Les déplacements (w_N, w_T) et efforts de contact (r_N, r_T) sont issus de la solution cinématiquement admissible.

Par manque de résultats d'unicité de la solution, cet estimateur ne peut assurer une majoration de l'erreur réelle. La partie de cet estimateur calculée sur la zone de contact permet d'augmenter la valeur de l'estimateur d'erreur lorsque les solutions cinématiquement et statiquement admissibles ne vérifient pas les lois de complémentarité de Signorini-Coulomb. Il est donc important de vérifier :

$$2 \int_{\Gamma_C} (I(w) + I_{\Sigma}(r) + \mu|r_N||w_T| + r_T w_T + r_N w_N) d\Gamma \geq 0 \quad (\text{II.55})$$

qui revient à vérifier

$$\begin{cases} \mu|r_N||w_T| + r_T w_T \geq 0 \\ r_N w_N \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

Dans le cas bidimensionnel, la relation $w_T = k r_T$ avec $k \in \mathbb{R}$ est toujours vérifiée, la première condition est alors vérifiée si les efforts vérifient $|r_T| \leq -\mu r_N$. La seconde condition est vérifiée si $w_N \leq 0$ et $r_N \leq 0$.

Dans [CHH01], deux stratégies de résolution sont proposées pour satisfaire II.55. Dans la première, les conditions de contact sont vérifiées de manière faible sur les déplacements et de manière forte sur les multiplicateurs de Lagrange, représentant les efforts de contact.

Les déplacements et efforts de contact sont alors choisis tels que :

$$\begin{cases} w_N = \min(0, u_{hN}) \\ w_T = u_{hT} \\ r_N = \lambda_{hN} \\ r_T = \lambda_{hT} \end{cases} \quad \text{Aux noeuds de la zone de contact} \quad (\text{II.57})$$

Le principe de construction de cet estimateur adoptant cette stratégie est présenté sur la figure II.4.

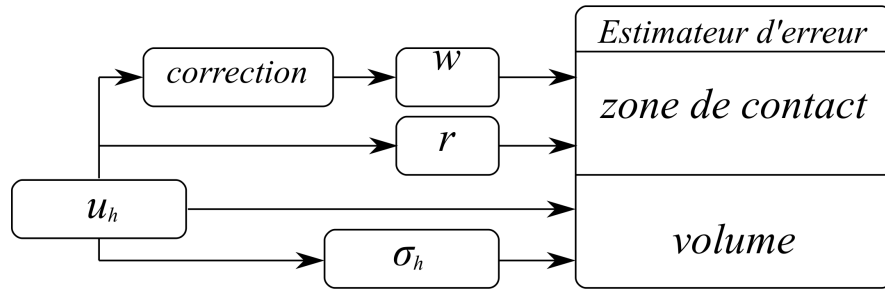


FIG. II.4 – Principe de construction de l'estimateur d'erreur en relation de comportement avec prise en compte du contact et du frottement (correction des déplacements sur la zone de contact).

Dans la seconde stratégie, les conditions de contact sont vérifiées de manière forte sur les déplacements et de manière faible sur les multiplicateurs de Lagrange. Sur chaque segment de contact composant Γ_C , Les multiplicateurs de Lagrange sont alors corrigés pour vérifier les relations de Coulomb :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{hT} = \lambda_{hT} + d \text{ au noeud } i \\ \hat{\lambda}_{hT} = \lambda_{hT} - d \text{ au noeud } j \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

avec d choisi de manière à vérifier $|\hat{\lambda}_{hT}| \leq \mu|\lambda_{hN}|$ sur le segment délimité par les noeuds i et j .

Les déplacements et efforts de contact sont alors choisis tels que :

$$\begin{cases} w_N = u_{hN} \\ w_T = u_{hT} \\ r_N = \lambda_{hN} \\ r_T = \hat{\lambda}_{hT} \end{cases} \quad \text{Aux noeuds de la zone de contact} \quad (\text{II.59})$$

Le principe de construction de cet estimateur adoptant cette seconde stratégie est présenté sur la figure II.5.

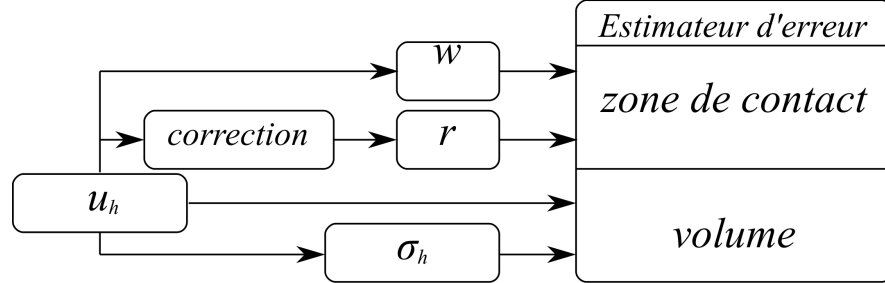


FIG. II.5 – Schéma de principe de l'estimation d'erreur en relation de comportement avec prise en compte du contact et du frottement (correction des efforts sur la zone de contact).

Les corrections apportées aux déplacements et aux efforts de contact permettent d'assurer les conditions II.56. Dans les deux cas, les conditions de complémentarité $w_N r_N = 0$ et $w_T = -\lambda r_T$ ne sont vérifiées que faiblement. L'estimateur permet alors de contrôler les lieux où ces relations ne sont pas vérifiées. Notons que les modifications apportées aux solutions de contact et de frottement impliquent la construction de l'estimateur d'erreur basée sur des données non solution d'un problème d'équilibre.

REMARQUE. — Lien avec l'erreur réelle :

L'indicateur d'erreur présenté ne peut assurer la majoration de l'erreur réelle, on peut simplement montrer que :

$$e_r^2 \geq \|\sigma - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + \|u - u_h\|_{u, \Omega}^2 + 2\mu \int_{\Gamma_C} (|\sigma_N| - |r_N|)(|u_T| - |w_T|) d\Gamma \quad (\text{II.60})$$

où σ_N et u_T représentent les efforts normaux et déplacements tangentiels exacts sur la zone de contact. Par manque de résultats d'unicité du problème de contact avec frottement, on ne peut prédire le signe de l'intégrale et donc assurer que l'estimateur majore l'erreur réelle. Dans le cas où une loi de frottement de Tresca est adoptée, l'unicité de la solution peut être prouvée. Coorevits et al. [CHH01] ont montré que ce type d'estimateurs appliqué au cas du frottement de Tresca, comme dans le cas du contact sans frottement, est bien un majorant de l'erreur réelle.

II.4.3 Estimateurs d'erreur par analyse duale

Ces estimateurs sont très similaires aux estimateurs d'erreur en relation de comportement. La différence majeure réside dans le fait que la solution statiquement admissible est obtenue par résolution du problème considéré par une méthode d'éléments finis "équilibre" présentée dans le chapitre III.

II.4.3.1 Estimateurs pour les problèmes sans contact

Comme présenté précédemment, cet estimateur consiste en l'application directe des principes énoncés dans la section II.4. Il a été mis en oeuvre par Kempeneers et al. dans [KBMA03] et par Kempeneers dans [Kem06] à l'aide d'éléments triangulaires et tétraédriques.

Pour un problème donné, deux analyses par éléments finis sont effectuées. La première utilisant des éléments finis classiques, interpolant un champ de déplacement, permettant l'obtention du champ cinématiquement admissible u_h . La seconde utilisant des éléments finis "équilibre", interpolant un champ de contrainte vérifiant les conditions d'équilibre à priori, permettant l'obtention de la solution statiquement admissible σ_h . Une borne supérieure de l'erreur est alors obtenue par l'application de l'expression II.32. Le principe de construction de cet estimateur est schématisé sur la figure II.6

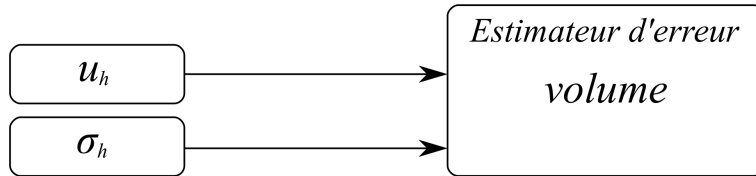


FIG. II.6 – Schéma de principe de l'estimation d'erreur par analyse duale.

Dans [Kem06], cet estimateur a été utilisé sur des problèmes sans contact et numériquement comparé aux principaux estimateurs présentés précédemment. Cette comparaison a été effectuée pour différents degrés d'interpolation des éléments "équilibre" et en déplacements. L'estimateur s'est alors montré très performant, bien que plus coûteux que les autres estimateurs de par la nécessité d'effectuer un calcul par éléments finis supplémentaire.

II.4.3.2 Estimateurs pour les problèmes avec contact et frottement

Afin d'estimer l'erreur par analyse duale sur les problèmes avec contact et frottement, nous proposons l'adaptation de l'estimateur d'erreur en relation de comportement présenté dans la section II.4.2 :

$$e = \left[\|\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)\|_{\sigma, \Omega}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} (I(w) + I_{\Sigma}(r) + \mu|r_N||w_T| + r_T w_T + r_N w_N) d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.61})$$

Les solutions cinématiquement et statiquement admissibles sont ici obtenues par des approches éléments finis dédiées aux problèmes de contact avec frottement.

Souhaitant construire un estimateur d'erreur à partir de solutions n'intégrant pas d'erreurs liées à la violation des conditions de contact et de frottement, nous limitons l'étude, comme expliqué dans la section III.3, à l'utilisation d'éléments finis linéaires.

Les solutions cinématiquement et statiquement admissibles vérifient les conditions :

$$w_N \leq 0 \quad (\text{II.62})$$

et

$$\begin{aligned} r_N &\leq 0 \\ |r_T| &\leq -\mu r_N \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

la positivité de l'estimateur d'erreur est donc assurée. La partie de l'estimateur d'erreur appliquée à la zone de contact sera alors non nulle aux endroits où les solutions cinématiquement et statiquement admissibles sont en désaccord.

Dans ce cas, comme dans celui sans contact, l'estimateur d'erreur par analyse duale présente l'avantage d'être basé sur la mesure de l'écart entre deux champs, strictement solutions du problème d'équilibre considéré (figure II.7).

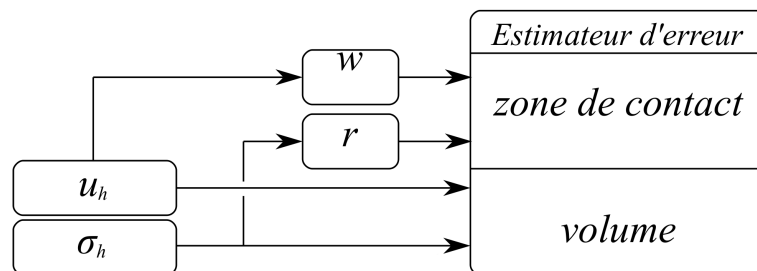


FIG. II.7 – Schéma de principe de l'estimation d'erreur par analyse duale avec prise en compte du contact et du frottement.

Notons d'autre part que, comme l'estimateur d'erreur en relation de comportement, cet estimateur ne permet de majorer l'erreur que dans les cas sans frottement (avec ou sans contact). L'absence de résultats d'unicité de solution en présence de frottement empêchant l'établissement d'une borne supérieure de l'erreur.

II.5 Raffinement et remaillage

II.5.1 Mesure locale de l'erreur

Souhaitant diminuer l'erreur globale de l'approximation par éléments finis tout en limitant la hausse du coût de calcul, il convient de modifier la taille de chaque élément en regard de sa contribution à l'erreur globale. Cette contribution, appelée erreur locale, ou erreur élémentaire, quantifie l'écart entre les deux solutions cinématiquement et statiquement admissibles sur chaque élément, elle se calcule par :

$$e_e = \left(\int_{\Omega_e} (\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h))^T \mathbb{S}(\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) d\Omega_e \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.64})$$

Dans le cas sans contact, on peut montrer que le carré de l'erreur globale s'obtient par sommation des carrés des erreurs élémentaires :

$$e = \left(\sum_{e=1}^N e_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.65})$$

Dans le cas avec contact, il convient d'ajouter un des estimateurs d'erreur e_{ec} présentés précédemment pour les problèmes de contact avec ou sans frottement, qui s'exprime, dans sa forme la plus globale par :

$$e_{ec} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_e}} 2I_{ec} \int_{\Gamma_{ej}} (I(w) + I_{\Sigma}(r) + \mu|r_N||w_T| + r_T w_T + r_N w_N) d\Gamma_{ej} \quad (\text{II.66})$$

$$\text{avec } I_{ec} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma_{ej} \in \Gamma_C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où Γ_{ej} représente le bord j de l'élément e et N_{Γ_e} le nombre de bords de cet élément.

L'erreur locale s'exprime alors par :

$$e_e = \left(\int_{\Omega_e} (\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h))^T \mathbb{S}(\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) d\Omega_e \right)^{\frac{1}{2}} + e_{ec} \quad (\text{II.67})$$

et la valeur globale de l'estimateur d'erreur se calcule par :

$$e = \left(\sum_{e=1}^N (e_e^2 + e_{ec}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.68})$$

Pour finir, notons que l'on ne peut assurer, même dans le cas sans contact, que l'erreur locale représente une borne locale de l'erreur exacte, elle représente simplement une mesure numérique de la participation élémentaire à l'estimateur d'erreur, nécessaire à l'amélioration du maillage.

II.5.2 Raffinement de maillage

La qualité de la solution éléments finis peut être améliorée par raffinement local du maillage, le raffinement d'un élément consistant à le diviser en plusieurs éléments.

Afin de déterminer la participation relative de chaque élément à l'erreur globale, nous introduisons le ratio erreur élémentaire sur erreur globale :

$$\gamma_e = \frac{e_e}{e} \quad (\text{II.69})$$

En se basant sur cette valeur, on peut choisir de ne raffiner que les éléments représentant une part importante de l'erreur globale.

La procédure de raffinement de maillage peut alors être la suivante :

– **Localisation des éléments à raffiner :**

Si $\gamma_e > \gamma_{lim}$ l'élément e sera raffiné, où la valeur γ_{lim} est déterminée par l'expérience et les exigences de l'utilisateur.

– **Subdivision des éléments à raffiner :**

il paraît judicieux de découper les éléments triangulaires en quatre, comme représenté sur la figure II.8, de manière à limiter l'écrasement des éléments du maillage final.

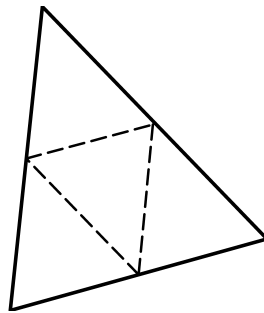


FIG. II.8 – Principe de subdivision d'un élément

– **Raccord aux éléments non raffinés :**

Souhaitant conserver un type unique d'élément par maillage, les éléments raffinés et non raffinés doivent être raccordés entre eux. Si un élément non raffiné n'a comme voisin qu'un seul élément raffiné, il peut y être raccordé de la manière représentée sur la figure II.9, s'il en a plus, il doit lui aussi être subdivisé en quatre, comme représenté sur la figure II.10, toujours dans le but de limiter les écrasements d'éléments.

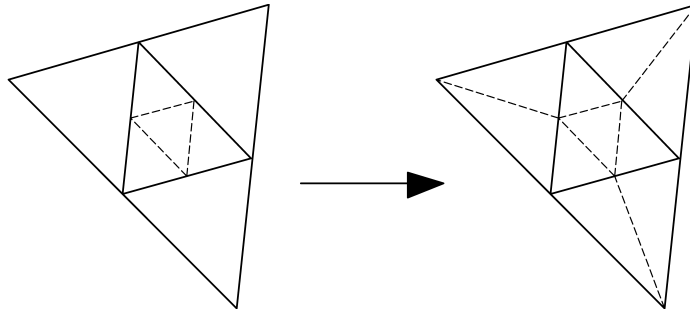


FIG. II.9 – Principe de raccord des éléments

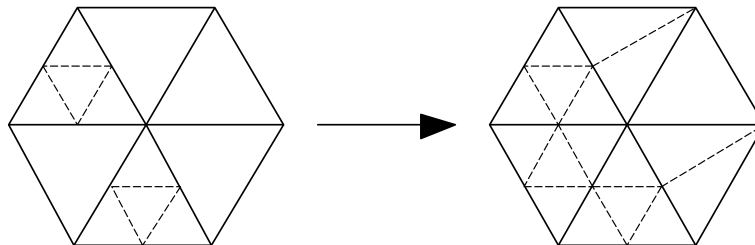


FIG. II.10 – Principe de raccord des éléments

Cette dernière opération a pour effet d'étendre la liste des éléments raffinés, comme illustré sur la figure II.11, où l'élément grisé devra lui aussi être subdivisé en quatre éléments. Ce phénomène pouvant se produire de proche en proche, la procédure représentée sur la figure II.12 est appliquée, le raffinement y est effectué en plusieurs passes. Pour des raisons pratiques, on ne comptabilise plus le nombre d'éléments voisins mais le nombre de segments coupés sur chaque triangle.

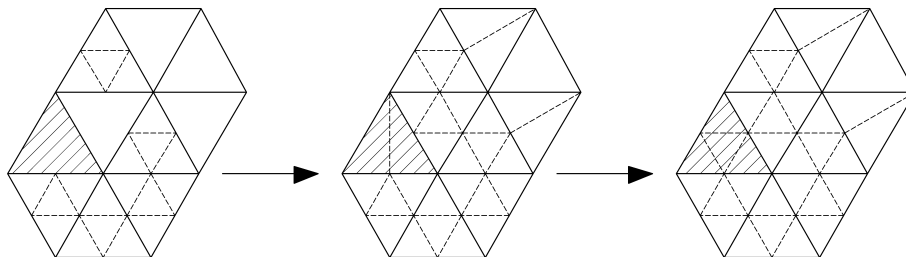


FIG. II.11 – Principe de raccord des éléments

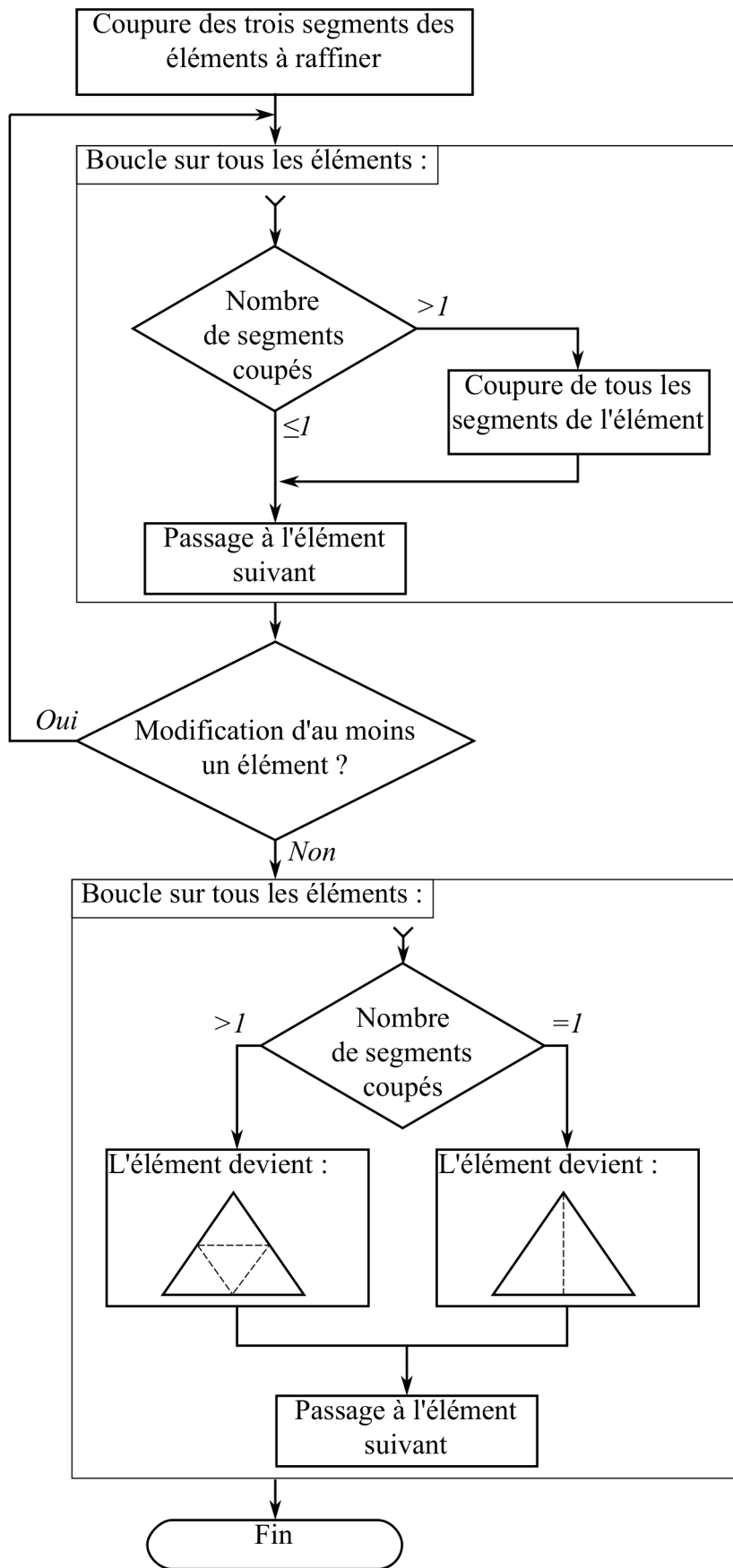


FIG. II.12 – Procédure globale de raccordement des éléments

Le calcul d'erreur est alors effectué sur le maillage généré. De manière à obtenir la précision souhaitée, cette procédure doit ensuite être répétée.

La procédure de raffinement de maillage a été évaluée sur quelques exemples mais nous a paru peu efficace car elle peut, malgré les précautions prises dans la subdivision des éléments, engendrer l'écrasement de certains éléments et induire des erreurs numériques importantes. Notons que des développements plus poussés, tenant compte de la géométrie des éléments, doivent permettre de contourner ce genre de problèmes [Riv84]. Ce genre de situation est illustré sur la figure II.13

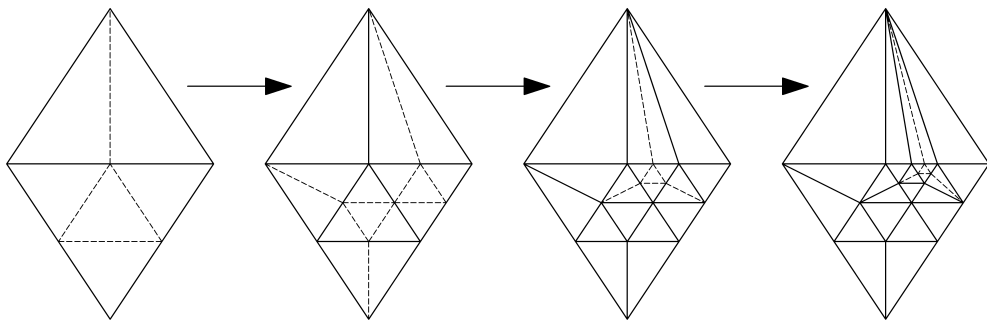


FIG. II.13 – Ecrasement d'éléments au cours du processus de raffinement

II.5.3 Amélioration de la solution par remaillage

De manière à éviter les phénomènes d'écrasement d'éléments évoqués dans la section précédente, il convient d'aborder la modification du maillage différemment. Nous adoptons donc une stratégie de remaillage de la géométrie étudiée. Son principe est, à partir d'un premier maillage sur lequel sont déterminées l'erreur et ses contributions locales, de définir la valeur d'un coefficient de réduction de taille sur chaque élément, dépendant de la valeur locale de l'erreur et permettant de dresser la carte des longueurs caractéristiques du maillage à générer sur la géométrie étudiée, permettant de réduire l'erreur de la solution approchée.

Ce coefficient s'exprime par :

$$r_e = \frac{h_e^*}{h_e} \quad (\text{II.70})$$

où h_e représente la longueur caractéristique initiale de l'élément e et h_e^* sa longueur caractéristique cible.

A partir de la carte des longueurs caractéristiques, on fait appel à un mailleur qui générera le maillage souhaité. Le mailleur utilisé ici est GMSH [GMSH], il génère, à partir d'une géométrie donnée, un maillage par triangulation de Delaunay contraint par une carte des

longueurs caractéristiques superposée sur la géométrie.

Les parties suivantes visent à présenter les différentes stratégies de remaillage, qui diffèrent dans la manière de construire la carte des longueurs caractéristiques.

II.5.3.1 Remaillage progressif

Une première démarche de détermination du coefficient de réduction de taille d'un élément consiste à s'intéresser au ratio de sa contribution locale relative à l'erreur globale :

$$\gamma_e = \frac{e_e}{e} \quad (\text{II.71})$$

On peut alors considérer que plus ce ratio est fort, plus la taille de l'élément doit être diminuée. Par exemple, si la contribution d'un élément représente 5% de l'erreur globale, sa taille doit être réduite de 5%.

Ce critère étant purement empirique, on peut en moduler l'effet par ajout d'un coefficient k_r , conduisant au calcul du coefficient de réduction de taille :

$$h_e^* = (1 - k_r \gamma_e) h_e \quad (\text{II.72})$$

la valeur du coefficient k_r est fixée par l'expérience de l'utilisateur.

L'erreur étant liée à la taille des éléments, l'erreur calculée sur le maillage ainsi obtenu sera inférieure à l'erreur initiale. En revanche, rien n'assure que cette erreur soit inférieure à une limite jugée acceptable. Ce processus doit alors être réitéré jusqu'à obtention de la précision souhaitée. L'algorithme de remaillage progressif ainsi défini est présenté sur la figure II.14.

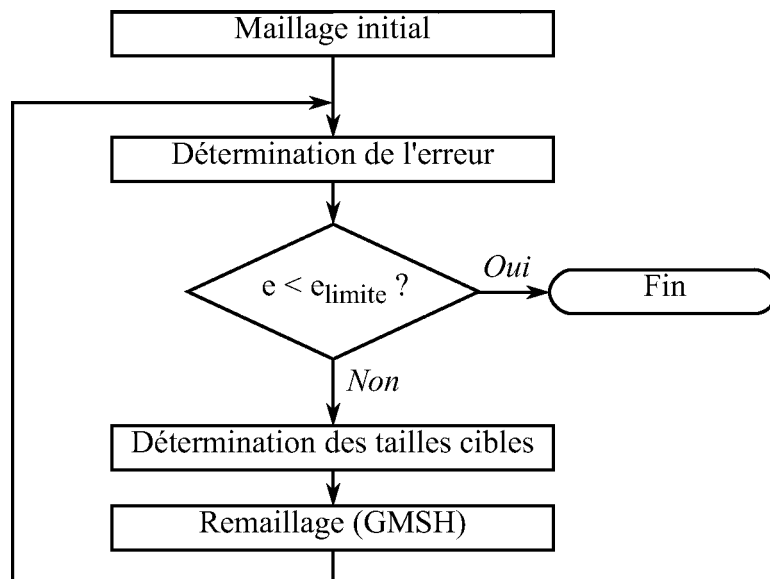


FIG. II.14 – Algorithme de remaillage progressif

L'emploi de cette stratégie implique que la taille de tous les éléments soit réduite, ce qui peut amener, après plusieurs itérations, à obtenir un maillage fin dans des zones où cela n'est pas forcément nécessaire. On peut alors seulement modifier la longueur caractéristique des éléments dont le ratio de la contribution locale relative à l'erreur globale est supérieur à une certaine limite γ_{lim} qui devra elle aussi être fixée par l'expérience numérique.

D'autre part, la valeur du coefficient k_r va globalement contrôler l'importance de la réduction des longueurs caractéristiques et donc conditionner le nombre d'itérations nécessaire à l'obtention d'une solution acceptable. Le choix d'une valeur haute de k_r réduira donc le nombre d'itérations nécessaire mais peut également conduire à l'obtention d'un maillage trop raffiné.

Cette stratégie s'apparente à l'amélioration de la solution par raffinement de maillage, elle permet d'améliorer la solution sans introduire d'éléments distordus, mais reste une procédure itérative, basée sur des règles relativement empiriques et n'assure donc pas l'obtention d'un maillage optimal.

II.5.3.2 Remaillage adaptatif

Cette stratégie de remaillage a été élaborée par [LCP86] et [LPR91a] et vise à obtenir un maillage optimal en une itération, c'est à dire un maillage comportant le nombre minimal d'éléments permettant d'obtenir une erreur cible e_0 imposée. Cette stratégie corrige donc les défauts majeurs de la stratégie précédente et est basée sur l'utilisation des théorèmes de convergence des éléments finis.

Ces théorèmes relient l'erreur à la longueur caractéristique des éléments par la formule :

$$e = O(h_e^p) \tag{II.73}$$

où p est le taux de convergence de l'approximation par éléments finis appliquée à un problème donné, valant, en élasticité sans contact, 1 pour un élément fini linéaire primal [Cia79], 1 pour un élément fini linéaire dual [JM78]. Pour les cas avec contact et frottement, il vaut $\frac{2}{3}$ pour un élément fini linéaire primal [CC91] et $\frac{1}{2}$ pour un élément fini linéaire dual [CL05].

On peut alors relier la réduction d'erreur au taux de réduction de la taille d'élément par :

$$\frac{e_e^*}{e_e} = \left(\frac{h_e^*}{h_e}\right)^p = (r_e)^p \tag{II.74}$$

où e_e^* est l'erreur locale obtenue pour une taille d'élément h_e^* .

On sait que le carré de l'erreur globale est égal à la somme des carrés des erreurs locales, on peut donc calculer l'erreur obtenue après remaillage e_0 par :

$$e_0^2 = \sum_E (e_e^*)^2 \quad (\text{II.75})$$

où E représente l'ensemble des éléments du maillage, et en utilisant II.74 :

$$e_0^2 = \sum_E e_e^2 r_e^{2p} \quad (\text{II.76})$$

Le nombre d'éléments du maillage optimisé se calcule par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_e} \quad (\text{II.77})$$

L'obtention d'un maillage optimisé visant à imposer une valeur donnée de l'erreur avec un nombre minimal d'éléments, on détermine les coefficients de réduction de taille en résolvant le problème d'optimisation suivant :

Problème P_o : Trouver l'ensemble des $r_e > 0$ minimisant N^* et vérifiant :

$$e_0^2 = \sum_E e_e^2 r_e^{2p} \quad (\text{II.78})$$

qui revient à minimiser la fonctionnelle :

$$J = \sum_E \frac{1}{r_e^2} + \lambda \left[\sum_E e_e^2 r_e^{2p} - e_0^2 \right] \quad (\text{II.79})$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange permettant d'introduire la condition II.76 dans la fonctionnelle.

Si l'on considère le taux de convergence uniforme sur l'ensemble des éléments, la solution du problème d'optimisation est explicite, on peut alors calculer pour chaque élément :

$$r_e = \frac{e_0^{1/p}}{e_e^{\frac{1}{p+1}} \left(\sum_E e_e^{\frac{2}{p+1}} \right)^{\frac{1}{2p}}} \quad (\text{II.80})$$

Dans les cas où des singularités géométriques ou mécaniques existent, le taux de convergence ne peut plus être considéré uniforme [Cia79], le problème devient :

Problème P'_o : Trouver l'ensemble des $r_e > 0$ minimisant N^* et vérifiant :

$$e_0^2 = \sum_E e_e^2 r_e^{2p_e} \quad (\text{II.81})$$

où p_e est le taux de convergence associé à l'élément e .

La fonctionnelle à minimiser devient alors :

$$J = \sum_E \frac{1}{r_e^2} + \lambda \left[\sum_E e_e^2 r_e^{2p_e} - e_0^2 \right] \quad (\text{II.82})$$

Dans ce cas le coefficient de taille dépend de la valeur de λ , valeur qui ne peut être obtenue de façon explicite :

$$r_e = \frac{1}{(p_e \lambda e_e^2)^{\frac{1}{2(p_e+1)}}} \quad (\text{II.83})$$

La valeur de λ solution du problème s'obtient en résolvant :

$$F(\lambda) = \sum_E \left(\frac{e_e^{2/p_e}}{\lambda p_e} \right)^{\frac{p_e}{p_e+1}} - e_0^2 = 0 \quad (\text{II.84})$$

par exemple en utilisant un algorithme de Newton.

II.6 Conclusion

Diverses méthodes d'évaluation de l'erreur ont été présentées dans ce chapitre. Toutes se basent plus ou moins sur les imperfections du champ de contrainte obtenu par une méthode primale. Dans le cas des estimateurs d'erreur basés sur la dualité, le principe est d'obtenir un champ de contrainte statiquement admissible, via une simulation par éléments finis ou via un post traitement, afin de le confronter au champ cinématiquement admissible. On parle alors respectivement d'estimateur d'erreur par analyse duale et d'estimateur d'erreur en relation de comportement.

On peut penser que l'estimation d'erreur par analyse duale est deux fois plus coûteuse que les autres méthodes, car nécessite une simulation par la méthode des éléments finis supplémentaire. En pratique, ce point mérite réflexion et vraisemblablement des études plus poussées. Principalement car cette seconde simulation peut être effectuée en parallèle de la première, ce qui n'est évidemment pas le cas pour les estimateurs basés sur le post-traitement des résultats issus la méthode primale.

D'autre part, nous avons noté que dans le cas d'estimation d'erreur sur les problèmes de contact avec frottement, le manque de résultats d'unicité de la solution empêche l'établissement d'un estimateur strictement supérieur à l'erreur réelle. Il paraît toutefois raisonnable

de s'attendre à ce que l'erreur évaluée soit proche de l'erreur réelle dans de nombreux cas, notamment après avoir utilisé une des techniques de raffinement de maillage ou de remaillage présentées dans ce chapitre.

DEUXIÈME PARTIE

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU PROBLÈME

Chapitre III

DISCRÉTISATION DES FORMULATIONS EN CONTRAINTES

RÉSUMÉ

Nous abordons dans ce chapitre la discrétisation du problème dual introduit dans le chapitre I. Le principe de discrétisation d'un champ de contrainte statiquement admissible par la méthode des éléments finis "équilibre" est introduit. Les contraintes d'implémentation de la méthode d'éléments finis nous amènent au choix d'éléments finis C^1 issus des problèmes de plaques et de coques. La construction du problème élémentaire est alors détaillée, menant par assemblage à l'obtention du problème matriciel global.

III.1 Formulation discrète

Nous présentons dans ce chapitre la discrétisation du problème dual présenté précédemment :

Problème (P_s). Trouver un champ de contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow H$ tel que

$$\begin{cases} \sigma \in \Sigma(\sigma) \\ b(\sigma, \tau - \sigma) \geq l(\tau - \sigma) \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec

$$\begin{cases} b(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \mathbb{S}\sigma \cdot \tau d\Omega \\ l(\tau) = \int_{\Gamma_D} u_0 \tau \cdot n d\Gamma \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

De manière à simplifier la présentation des étapes de discrétisation du problème, nous partons de l'écriture de la fonctionnelle de l'énergie complémentaire π qui s'écrit :

$$\pi = \frac{1}{2}b(\tau, \tau) - l(\tau). \quad (\text{III.3})$$

La discrétisation du problème amène à transformer la fonctionnelle π en une somme de fonctionnelles élémentaires. On a alors :

$$\pi = \sum_{e=1}^N \pi_e \quad \text{avec :} \quad \pi_e = \frac{1}{2}b(\tau^e, \tau^e) - l(\tau^e) \quad \text{et} \quad (\text{III.4})$$

$$b(\sigma^e, \tau^e) = \int_{\Omega_e} \mathbb{S}_{ijkl} \sigma_{ij}^e \tau_{kl}^e d\Omega_e$$

$$l(\tau^e) = \int_{\Gamma_{D_e}} \tau_{ij}^e n_j u_{0i} d\Gamma_e \quad \text{si le bord de l'élément} \in \Gamma_D$$

Sur chaque élément K , il faut vérifier la condition d'équilibre local, vérifier la continuité du vecteur contrainte sur les bords des éléments voisins K' , et imposer les conditions aux limites de type effort si le bord de l'élément appartient à Γ_F ou Γ_C ; soit respectivement :

$$\text{div} \tau^e + F = 0 \quad \text{sur } K \quad (\text{III.5})$$

$$\tau^e n = \tau^{e'} n \quad \text{si } \Gamma_K = \Gamma_{K'} \quad (\text{III.6})$$

$$\tau^e n = f \quad \text{si } \Gamma_K \in \Gamma_F \quad (\text{III.7})$$

$$\tau^e n = f_C \quad \text{si } \Gamma_K \in \Gamma_C \quad (\text{III.8})$$

De par la nécessité de vérification de la condition III.5, les éléments finis à utiliser diffèrent des éléments classiques. Nous présentons dans la section suivante le principe de construction

de tels éléments puis nous proposons un choix d'éléments adaptés au problème à résoudre dont vont dépendre la manière dont seront vérifiées les conditions III.6, III.7 et III.8.

III.2 Champ de contraintes élémentaire

III.2.1 Principe de construction du champ de contrainte

L'imposition de la condition III.5 peut être effectuée de plusieurs manières, Kikuchi et Oden [KO88] imposent l'équilibre local en utilisant des méthodes de pénalisation, la vérification de cette condition n'est alors pas strictement assurée. La plupart des auteurs utilisent la méthode des éléments finis "équilibre", introduite par Fraeijns de Veubeke dans [Fra01] : le champ de contraintes est défini comme dérivant d'un potentiel de Airy permettant de vérifier la condition d'équilibre locale a priori.

Le principe de construction de tels éléments est décrit dans les paragraphes suivants.

Sur l'élément, une fonction de Airy Φ^e est interpolée par un polynôme :

$$\Phi^e(x, y) = a + bx + cy + \dots \quad (\text{III.9})$$

que l'on peut classiquement décomposer en une partie fonction de forme $[Y^e(x, y)]$ et une partie degrés de liberté $[\phi^e]$.

$$\Phi^e(x, y) = [Y^e(x, y)][\phi^e] \quad (\text{III.10})$$

Le champ de contrainte élémentaire est alors obtenu par dérivation de cette fonction

$$[\tau^e] = \begin{vmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \overline{rot} \Phi^e(x, y) \quad (\text{III.11})$$

Avec

$$\overline{rot} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial xy} \end{vmatrix} \quad (\text{III.12})$$

D'où :

$$[\tau^e] = \overline{rot}[Y^e(x, y)][\phi^e] \quad (\text{III.13})$$

On peut alors directement définir la matrice d'interpolation des contraintes $[B^e]$ telle que

$$[\tau^e] = [B^e][\phi^e] \quad (\text{III.14})$$

REMARQUE. — Efforts volumiques

Nous nous plaçons ici dans le cas d'efforts volumiques nuls de manière à simplifier la notation et le problème. Notons tout de même que les efforts volumiques peuvent être introduits en ajoutant un terme à l'expression III.11. Ce cas est traité dans [ZR01] et [Kem06].

L'application directe de ce principe amènerait par exemple à définir un élément triangulaire sur lequel le champ de contrainte serait linéaire en définissant un potentiel cubique. Le champ de contrainte serait alors défini par 7 constantes indépendantes. La condition III.6 pourrait être imposée en définissant des connecteurs sur les bords de l'élément, correspondants aux valeurs ponctuelles du vecteur contrainte, 12 connecteurs seraient alors nécessaires.

Toutefois, certains problèmes pourraient apparaître de part l'utilisation d'un tel élément. L'imposition des conditions limites sur les bords de cet élément reviendrait à fixer les 12 valeurs des connecteurs sur les faces de l'élément. Parmi elles, trois sont linéairement dépendantes des autres car doivent respecter l'équilibre global de l'élément. On essayerait alors d'imposer 9 conditions sur un élément ne présentant que 7 degrés de liberté.

Un second point problématique concerne l'application de conditions aux limites proches d'un sommet :

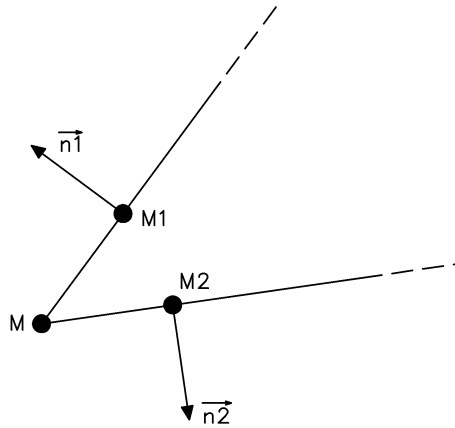


FIG. III.1 – Application des conditions limites au voisinage d'un noeud.

si, comme illustré sur la figure III.1, l'on souhaite appliquer $\overrightarrow{T(M_1, \vec{n}_1)}$ et $\overrightarrow{T(M_2, \vec{n}_2)}$ indépendamment au voisinage du point M , on impose donc :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma}}_{(M_1)} \vec{n}_1 &= \overrightarrow{T(M_1, \vec{n}_1)} \\ \overline{\overline{\sigma}}_{(M_2)} \vec{n}_2 &= \overrightarrow{T(M_2, \vec{n}_2)} \end{aligned}$$

La position des connecteurs M_1 et M_2 pouvant être choisie arbitrairement, dans la configuration où ces points sont confondus avec M , on essaye d'imposer quatre conditions à un endroit où le champ de contrainte ne dépend que de trois variables.

Ces problèmes semblent étroitement liés à la possibilité d'apparition de modes parasites, identifiés par Fraeijs de Veubeke dans [Fra01] comme des modes de déplacement à énergie nulle. D'après Kempeneers [Kem06], le nombre n_{mcp} de ces modes peut être calculé, pour des degrés d'interpolation des contraintes inférieurs ou égaux à trois, par la relation :

$$n_{mcp} = n_g - n_s - n_r \quad (\text{III.15})$$

où n_g représente le nombre de connecteurs, n_s le nombre de constantes indépendantes définissant le champ de contrainte et n_r le nombre de modes rigides (égal à trois en deux dimensions).

Pour remédier à ce type de problèmes Watwood et al. [WH68] et Maunder et al. [MMAR96] proposent l'utilisation d'éléments composites qui consiste à former un élément par assemblage de sous éléments. Kempeneers [Kem06] utilise un assemblage de trois triangles à champ de contrainte linéaire, le champ global est alors défini par 3x7 constantes et 12 relations d'égalité d'efforts sur les faces communes aux sous éléments sont imposées, le champ global est alors défini par 9 constantes indépendantes. Le nombre de connecteurs étant toujours égal à 12, ce type d'assemblage permet donc bien de supprimer les modes parasites de l'élément.

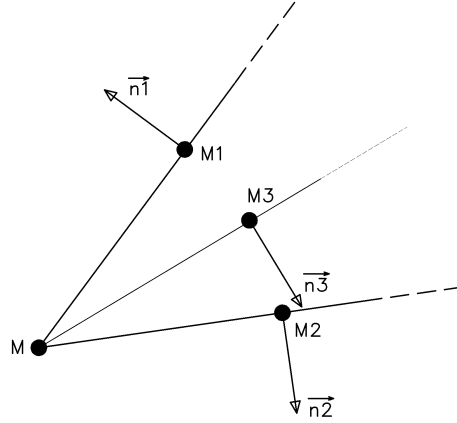


FIG. III.2 – Applications des conditions limites au voisinage d'un noeud, élément composite.

On peut également noter, en se référant à la figure III.2, que l'utilisation d'éléments composites résout le problème d'application de conditions aux limites au voisinage d'un noeud : dans le sous triangle supérieur règne l'état de contrainte σ , dans le sous triangle inférieur règne l'état de contrainte σ' , au voisinage du noeud M , on impose :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma}}_{(M1)} \vec{n}_1 &= \overline{\overline{T}}(M_1, \vec{n}_1) \\ \overline{\overline{\sigma'}}_{(M2)} \vec{n}_2 &= \overline{\overline{T}}(M_2, \vec{n}_2) \end{aligned}$$

D'autre part, l'assemblage des sous triangles impose :

$$\overline{\overline{\sigma}}_{(M3)} \vec{n}_3 = \overline{\overline{\sigma'}}_{(M3)} \vec{n}_3$$

Les efforts ainsi imposés correspondent à un système de six équations à six inconnues et peuvent donc être fixés indépendamment.

Partant du concept des éléments finis équilibre (composites ou non), on peut définir deux familles d'éléments distinctes par la manière d'assurer la condition III.6. Kempe-neers [Kem06] utilise des éléments composites pour lesquels les fonctions d'interpolation des contraintes sont obtenues par dérivation de la fonction de Airy et où les variables linéairement dépendantes sont éliminées du vecteur $[\phi^e]$. Les degrés de liberté, appelés connecteurs, sont définis sur les faces de l'élément, la matrice de flexibilité élémentaire est formée pour chaque élément puis inversée pour pouvoir imposer la condition III.6 par assemblage.

Des éléments C^1 issus des problèmes de plaques et de coques ont aussi fréquemment été utilisés, comme dans [SG89], [VA81] et [WYM99]. Comme précédemment, le champ des contraintes est défini par dérivation d'un potentiel de Airy, mais ici, tous les degrés de liberté décrivant le potentiel sont conservés dans le vecteur $[\phi^e]$. L'assemblage des degrés de liberté nodaux assure la continuité C^1 de la fonction de Airy et, comme prouvé dans l'annexe B, assure la vérification de la condition III.6.

Cette seconde famille d'éléments implique une étape supplémentaire, nécessaire pour relier les degrés de liberté aux efforts extérieurs, lors de la discrétisation. Elle permet en contrepartie de gérer des degrés de liberté nodaux et semble donc plus simple à intégrer dans un code de calcul classique. C'est pourquoi des éléments appartenant à cette famille ont été utilisés ici.

De nombreux éléments, initialement destinés aux problèmes de plaques, permettent d'interpoler une fonction C^1 , en vue de l'application au problème de contact avec frottement, nous cherchons à utiliser une fonction d'ordre le plus faible possible. D'une part pour minimiser le nombre de degrés de liberté du système, de l'autre pour simplifier la gestion des conditions de contact et de frottement.

III.2.2 Éléments finis C^1

L'élément C^1 rectangulaire le plus simple est l'élément de Bogner, Fox et Schmidt (BFS) présenté sur la figure III.3, il fut utilisé comme élément équilibre par Sarigul et Gallagher [SG89], par Wieckowski et al. [WYM99] et par Bisegna et al. [BLM04] [BLM01], il présente 16 degrés de liberté correspondants aux valeurs nodales $\Phi(ai)$ de la fonction de Airy et de ses dérivées $\frac{\partial\Phi(ai)}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi(ai)}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi(ai)}{\partial xy}$ en chaque noeud i . Sur les bords de cet élément, les contraintes normales sont linéaires, et les contraintes tangentielles sont quadratiques.

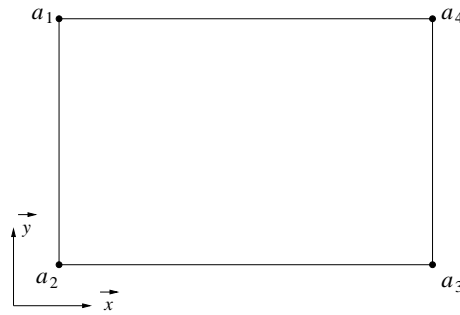


FIG. III.3 – L'élément BFS. Degrés de liberté : $[\Phi(ai), \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial y}, \frac{\partial^2\Phi(ai)}{\partial xy}]$

L'élément C^1 triangulaire le plus simple est l'élément de Bell [Cia79] présenté sur la figure III.4, il fut utilisé comme élément équilibre par [VA81] et présente 18 degrés de liberté. Sur ses bords, les efforts normaux et tangentiels sont cubiques.

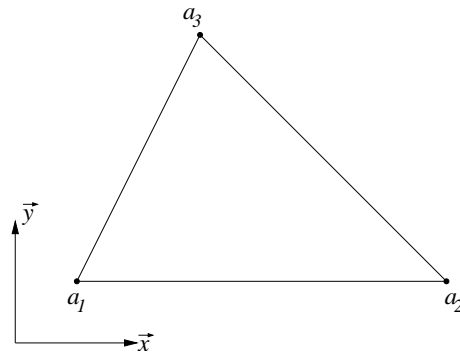


FIG. III.4 – L'élément de Bell. Degrés de liberté : $[\Phi(ai), \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial y}, \frac{\partial^2\Phi(ai)}{\partial xx}, \frac{\partial^2\Phi(ai)}{\partial yy}, \frac{\partial^2\Phi(ai)}{\partial xy}]$

Bien qu'étant l'élément triangulaire de type C^1 le plus simple, il présente deux inconvénients majeurs. Cet élément comporte un nombre important de degrés de liberté, ce qui rend la résolution du système coûteuse, de plus les variations cubiques des efforts sur ses bords compliquent l'application des conditions de contact et frottement.

Pour s'affranchir de ces inconvénients, nous utilisons l'élément de Hsier, Clough et Tocher (HCT) présenté sur la figure III.5, qui est un élément composite, utilisé par Wieckowski et al. [WYM99]. La fonction de Airy y est décomposée en trois sous-fonctions, chacune de régularité C^1 . Cet élément présente 12 degrés de liberté et le champ de contrainte est linéaire par morceaux.

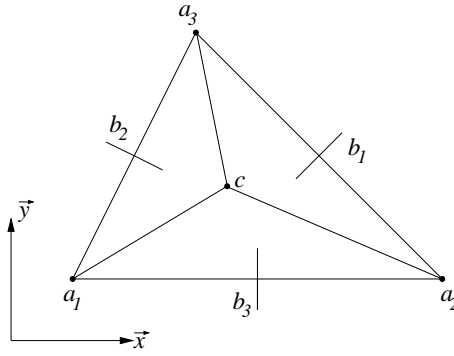


FIG. III.5 – L'élément HCT. Degrés de liberté : $[\Phi(ai), \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(ai)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi(bi)}{\partial n}]$

Les éléments retenus pour la résolution des problèmes de contact avec frottement sont donc l'élément BFS et l'élément HCT dont nous détaillons la construction dans la section suivante.

III.2.3 L'élément de Bogner-Fox-Schmidt

Nous avons tout d'abord adopté cet élément pour sa simplicité de mise en oeuvre. Il a été utilisé par Sarigul et Gallagher dans [SG89] pour résoudre le problème dual sans contact et par Bisegna et al. [BLM04] pour le problème de contact avec frottement.

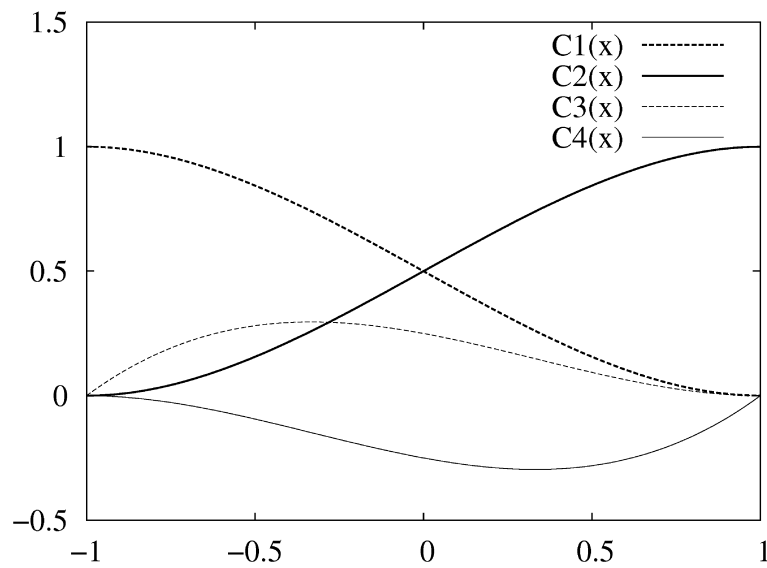
Le principe de construction de cet élément est d'interpoler une fonction de Airy cubique par l'intermédiaire de fonctions de Hermite sur un domaine rectangulaire, puis de dériver ces fonctions pour obtenir les fonctions d'approximation du champ de contraintes.

III.2.3.1 Fonctions de Hermite

De manière à obtenir une fonction de Airy cubique, nous utilisons les fonctions de Hermite cubiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 C1(x) &= \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3) \\
 C2(x) &= \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3) \\
 C3(x) &= \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3) \\
 C4(x) &= \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3)
 \end{aligned}
 \tag{III.16}$$

Comme représenté sur la figure III.6, les deux premières fonctions sont respectivement égales à 1 aux points $x = -1$ et $x = 1$, et leurs dérivées premières sont nulles en ces deux points. Les deux dernières fonctions sont nulles en ces deux points et leurs dérivées sont respectivement égales à 1 aux points $x = -1$ et $x = 1$.


 FIG. III.6 – Les quatre fonctions de Hermite sur l'intervalle $x = [-1 : 1]$

III.2.3.2 L'élément BFS de référence

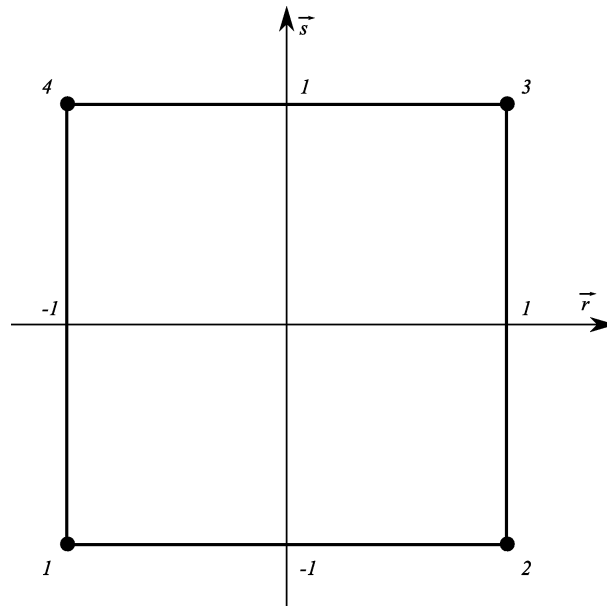


FIG. III.7 – L'élément BFS de référence

On définit l'élément de référence dans le repère (O, \vec{r}, \vec{s}) comme présenté sur la figure III.7. La fonction de Airy est interpolée sur cet élément en combinant les fonctions de Hermite de manière à avoir égalité entre la fonction, ou ses dérivées, avec les degrés de liberté aux différents noeuds de l'élément :

$$\phi(r, s) = \begin{bmatrix} C1(r)C1(s) \\ C3(r)C1(s) \\ C1(r)C3(s) \\ C3(r)C3(s) \\ C2(r)C1(s) \\ C4(r)C1(s) \\ C2(r)C3(s) \\ C4(r)C3(s) \\ C2(r)C2(s) \\ C4(r)C2(s) \\ C2(r)C4(s) \\ C4(r)C4(s) \\ C1(r)C2(s) \\ C3(r)C2(s) \\ C2(r)C3(s) \\ C3(r)C4(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_{1,r} \\ \phi_{1,s} \\ \phi_{1,rs} \\ \phi_2 \\ \phi_{2,r} \\ \phi_{2,s} \\ \phi_{2,rs} \\ \phi_3 \\ \phi_{3,r} \\ \phi_{3,s} \\ \phi_{3,rs} \\ \phi_4 \\ \phi_{4,r} \\ \phi_{4,s} \\ \phi_{4,rs} \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

noté

$$\phi(r, s) = [N][\phi^e] \quad (\text{III.18})$$

Les fonctions d'approximation des contraintes $[B^e]$ sont alors obtenues par

$$[\tau^e] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [\phi^e] \quad (\text{III.19})$$

noté

$$[\tau^e] = [B^e][\phi^e] \quad (\text{III.20})$$

III.2.4 L'élément de Hsieh-Clough-Tocher

L'interpolation d'un polynôme de degrés trois par morceaux sur l'élément de Hsieh, Clough et Tocher (HCT) est présentée dans [BH80] ; cet élément est présenté sur la figure III.8.

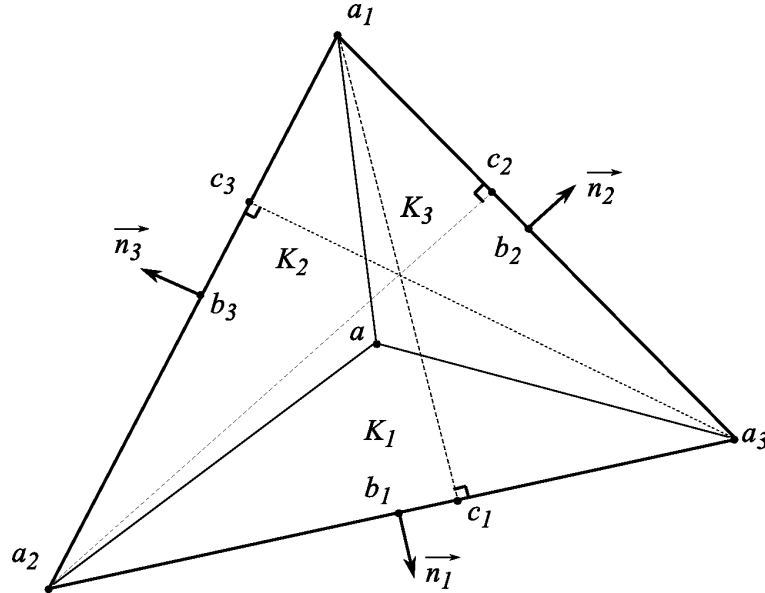


FIG. III.8 – Géométrie de l'élément HCT

Le triangle K , de sommets a_1, a_2 et a_3 est divisé en trois sous triangles K_i de sommets a, a_{i+1} et a_{i+2} avec $i = 1, 2, 3$. Le point a est le barycentre de K , le point c_i représente la projection orthogonale de a_i sur le segment qui lui est opposé et b_i le milieu de ce même segment.

Sur chaque sous triangle K_i , une fonction cubique $\Pi_{K_i} v$ est interpolée par le produit des polynômes de base, exprimés en fonction des coordonnées barycentriques de l'élément et des degrés de liberté ϕ_L^e relatifs aux noeuds du triangle K :

$$\Pi_{K_i} v = [R_i][\phi_L^e] \quad (\text{III.21})$$

La démarche de construction des fonctions d'interpolation est détaillée dans [BH80], elle permet d'assurer une continuité C^1 des fonctions entre les sous triangles et nécessite l'introduction des coordonnées barycentriques et des paramètres d'excentricité.

III.2.4.1 Coordonnées barycentriques

On définit les coordonnées d'un sommet a_i de K dans le repère global orthonormé (O, \vec{x}, \vec{y}) telles que :

$$\vec{Oa_i} = x_i \vec{x} + y_i \vec{y} \quad (\text{III.22})$$

Les relations entre les coordonnées globales (x, y) d'un point P et ses coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont :

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ &\text{avec } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\Delta} [(x - x_2)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(y - y_2)] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\Delta} [(x - x_3)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y - y_3)] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\Delta} [(x - x_1)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(y - y_1)] \\ &\text{avec } \Delta = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

III.2.4.2 Paramètres d'excentricité

Les paramètres d'excentricité η_i sont définis par :

$$\eta_i = 2 \frac{\overline{c_i b_i}}{a_{i-1} a_{i+1}} \quad (\text{voir figure III.8}) \quad (\text{III.25})$$

et peuvent être calculés par :

$$\eta_i = \frac{(l_{i+2})^2 - (l_{i+1})^2}{(l_i)^2} \quad (\text{III.26})$$

où l_i représente la longueur du coté opposé à a_i .

III.2.4.3 Polynômes de base

Les polynômes de base $[R_i]$ associés aux sous triangles K_i sont définis par :

$$[R_i] = [A_i][\lambda^i] \quad (\text{III.27})$$

avec

$$[A_i] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{3}{2}(3 + \eta_{i+1}) & \frac{3}{2}(3 - \eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - 2\eta_i - \eta_{i+2}) & 1 & 0 & -\frac{3}{2}(1 - \eta_i) & \frac{3}{2}(\eta_i + \eta_{i+2}) & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1 - \eta_i) \\ \frac{1}{2}(1 + 2\eta_i + \eta_{i+1}) & 0 & 1 & -\frac{3}{2}(\eta_i + \eta_{i+1}) & -\frac{3}{2}(1 + \eta_i) & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1 + \eta_i) \\ -\frac{1}{12}(1 + \eta_{i+1}) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(7 + \eta_{i+1}) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}(1 - \eta_{i+2}) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(7 - \eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}(7 + \eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(5 + \eta_{i+2}) & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{6}(4 - \eta_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(3 - \eta_i) & -\frac{1}{4}(5 - \eta_i) & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3 - \eta_i) \\ \frac{1}{6}(4 + \eta_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(5 + \eta_i) & -\frac{1}{4}(3 + \eta_i) & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(3 + \eta_i) \\ -\frac{1}{12}(7 - \eta_{i+1}) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(5 - \eta_{i+1}) & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

et

$$[\lambda^i] = \begin{bmatrix} \lambda_i^3 \\ \lambda_{i+1}^3 \\ \lambda_{i+2}^3 \\ \lambda_i^2 \lambda_{i+2} \\ \lambda_i^2 \lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+1}^2 \lambda_i \\ \lambda_{i+1}^2 \lambda_{i+2} \\ \lambda_{i+2}^2 \lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+2}^2 \lambda_i \\ \lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Cette écriture permet de séparer ces polynômes en un produit de deux matrices : l'une, la matrice $[A_i]$ dépendante des paramètres d'excentricité, donc de la géométrie du triangle K , l'autre, la matrice des coordonnées barycentriques $[\lambda^i]$, dépendante des coordonnées barycentriques et donc de celles du point considéré.

La fonction globale v est alors interpolée par :

$$v = \sum_{i=1}^3 [R_i][\phi_L^e] = \sum_{i=1}^3 [A_i][\lambda^i][\phi_L^e] \quad (\text{III.30})$$

III.2.4.4 Introduction des degrés de liberté globaux

Dans l'expression III.2.4.3, l'interpolation de la fonction v fait intervenir les degrés de liberté locaux de l'élément K . Dans l'optique de réaliser un calcul par élément finis, l'assemblage des matrices élémentaires est simplifiée par l'introduction des degrés de liberté globaux suivants :

$$\phi_G^e = \left\{ v(a_1), v(a_2), v(a_3), \frac{\partial v(a_1)}{\partial x}, \frac{\partial v(a_2)}{\partial x}, \frac{\partial v(a_3)}{\partial x}, \frac{\partial v(a_1)}{\partial y}, \frac{\partial v(a_2)}{\partial y}, \frac{\partial v(a_3)}{\partial y}, \frac{\partial v(b_1)}{\partial n}, \frac{\partial v(b_2)}{\partial n}, \frac{\partial v(b_3)}{\partial n} \right\} \quad (\text{III.31})$$

En utilisant la définition de la dérivée directionnelle, on relie les degrés de liberté locaux et globaux associés aux noeuds de K :

$$\begin{bmatrix} Dv(a_i)(a_{i-1} - a_i) \\ Dv(a_i)(a_{i+1} - a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i-1} - x_i & y_{i-1} - y_i \\ x_{i+1} - x_i & y_{i+1} - y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v(a_1)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(a_1)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

De manière à relier les degrés de liberté aux points b_i , on norme et on oriente les degrés de liberté locaux tel que :

$$\frac{\partial v(b_i)}{\partial n} = n_i Dv(b_i)(a_i - c_i) \quad (\text{III.33})$$

avec

$$n_i = \begin{cases} \frac{|\overrightarrow{c_i a_i}|}{|x_{c_i a_i}|} \frac{x_{c_i a_i}}{|x_{c_i a_i}|} & \text{si } x_{c_i a_i} \neq 0 \\ \frac{|\overrightarrow{c_i a_i}|}{|y_{c_i a_i}|} \frac{y_{c_i a_i}}{|y_{c_i a_i}|} & \text{si } x_{c_i a_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

et

$$\begin{aligned} x_{c_i a_i} &= \overrightarrow{c_i a_i} \cdot \overrightarrow{x} \\ y_{c_i a_i} &= \overrightarrow{c_i a_i} \cdot \overrightarrow{y} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

On relie alors les degrés de liberté locaux et nodaux en introduisant la matrice de passage $[D]$, diagonale par blocs telle que :

$$[\phi_L^e] = [\phi_G^e][D] \quad (\text{III.36})$$

On peut alors interpoler la fonction v par :

$$v = \sum_{i=1}^3 [A_i][\lambda^i][\phi_G^e][D] \quad (\text{III.37})$$

III.2.4.5 Champ de contraintes

Une fois la fonction v , qui représente dans notre cas la fonction de Airy, interpolée, on souhaite définir les fonctions d'approximation des contraintes telles que :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Dans l'expression III.2.4.4, seul le vecteur des coordonnées barycentriques dépend des coordonnées globales. On peut donc obtenir l'expression du champ de contrainte sur un sous triangle K_i par :

$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{bmatrix} = [\phi_G^e][D_i][A_i][\partial^2 \lambda^i] \quad (\text{III.39})$$

avec

$$[\partial^2 \lambda^i] = \begin{bmatrix} \partial_{yy} \lambda^i \\ \partial_{xx} \lambda^i \\ -\partial_{xy} \lambda^i \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

et

$$\begin{aligned}
 [\partial_{xx}\lambda^i] &= \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2[\lambda^i,_{ii}] + \left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\right)^2[\lambda^i,_{i+1\ i+1}] + \left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)^2[\lambda^i,_{i+2\ i+2}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i\ i+1}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i+1\ i+2}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i+2\ i}]
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

$$\begin{aligned}
 [\partial_{yy}\lambda^i] &= \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2[\lambda^i,_{ii}] + \left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y}\right)^2[\lambda^i,_{i+1\ i+1}] + \left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y}\right)^2[\lambda^i,_{i+2\ i+2}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{i\ i+1}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{i+1\ i+2}] \\
 &\quad + 2\left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{i+2\ i}]
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

$$\begin{aligned}
 [\partial_{xy}\lambda^i] &= \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{ii}] + \left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{i+1\ i+1}] \\
 &\quad + \left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y}\right)[\lambda^i,_{i+2\ i+2}] \\
 &\quad + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i\ i+1}] \\
 &\quad + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y} + \frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i\ i+2}] \\
 &\quad + \left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial y} + \frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial y}\frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial x}\right)[\lambda^i,_{i+1\ i+2}]
 \end{aligned} \tag{III.43}$$

où $[\lambda^i,_{jj}]$ représente la dérivée seconde de $[\lambda^i]$ par rapport à la coordonnée barycentrique λ_j .

III.3 Introduction des efforts

L'utilisation d'éléments finis C^1 permet de vérifier les conditions III.5 et III.6 a priori. Il reste à imposer les conditions III.7 et III.8. Comme nous venons de le voir, les degrés de liberté de ces éléments ne sont pas directement des efforts ou des contraintes. Afin de vérifier ces deux dernières conditions, on interpole le vecteur contrainte sur un bord de l'élément

par :

$$\tau^e(r_i)n = g^e(r_i) \quad (\text{III.44})$$

où ri désigne les coordonnées d'un point du bord de l'élément. Le vecteur $[g^e]$ des efforts généralisés représente donc les valeurs de $\tau^e n$ en différents points du bord. Le nombre d'efforts généralisés nécessaires pour complètement définir l'effort sur le bord dépend du degré de la fonction d'approximation des efforts, donc de celui de la fonction d'approximation des contraintes. Le tableau III.3 détaille le nombre d'efforts généralisés nécessaires pour chaque type d'élément.

Elément	BFS	Bell	HCT
Degrés de la fonction d'approximation normale	1	3	1
Nombre d'efforts généralisés normaux	2	4	2
Degrés de la fonction d'approximation tangentielle	2	3	1
Nombre d'efforts généralisés tangentiels	3	4	2

TAB. III.1 – Nombre d'efforts généralisés pour chacun des éléments

On relie ensuite les efforts généralisés aux degrés de liberté par :

$$g^e(r_i) = \tau^e(r_i)n = [n][B^e(r_i)][\phi^e] \quad (\text{III.45})$$

$$\text{Soit : } [g^e] = [C^e][\phi^e] \quad (\text{III.46})$$

Avec $[n]$ la matrice de projection sur la normale au bord de l'élément, telle que

$$n = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad \text{dans le repère (x,y)} \quad (\text{III.47})$$

$$[n] = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

Les conditions [III.7] et [III.8] sont alors imposées en définissant un vecteur $[f^e]$ (respectivement $[f_C^e]$) représentant les valeurs discrètes des efforts extérieurs f appliqués aux bords de l'élément (respectivement efforts de contact et frottement f_C), et en les reliant aux degrés de liberté élémentaires :

$$[F^e] = [C_F^e][\phi^e] \quad (\text{III.49})$$

$$[F_C^e] = [C_C^e][\phi^e] \quad (\text{III.50})$$

En tenant compte des définitions précédentes, la fonctionnelle, sous sa forme matricielle, devient :

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\tau^e]^T \mathbb{S} [\tau^e] d\Omega_e - \int_{\Gamma_{D_e}} ([\tau^e][n])^T [u] d\Gamma_e \quad (\text{III.51})$$

On introduit le vecteur des déplacements généralisés $[q^e]$ sur les bords de l'élément considéré tel que :

$$\int_{\Gamma_{De}} ([\tau^e][n])^T [u] d\Gamma_e = [\phi^e]^T \int_{\Gamma_{De}} [C^e]^T [u] d\Gamma_e = [\phi^e]^T [q^e] \quad (\text{III.52})$$

La fonctionnelle s'écrit finalement, en introduisant la matrice de souplesse élémentaire $[S^e]$:

$$\pi_e = \frac{1}{2} [\phi^e]^T [S^e] [\phi^e] - [\phi^e]^T [q^e] \quad (\text{III.53})$$

$$[f^e] = [C_F^e] [\phi^e] \text{ si } \Gamma_K \in \Gamma_F \quad (\text{III.54})$$

$$[f_C^e] = [C_C^e] [\phi^e] \text{ si } \Gamma_K \in \Gamma_C \quad (\text{III.55})$$

REMARQUE. — Vérification des conditions de contact et frottement

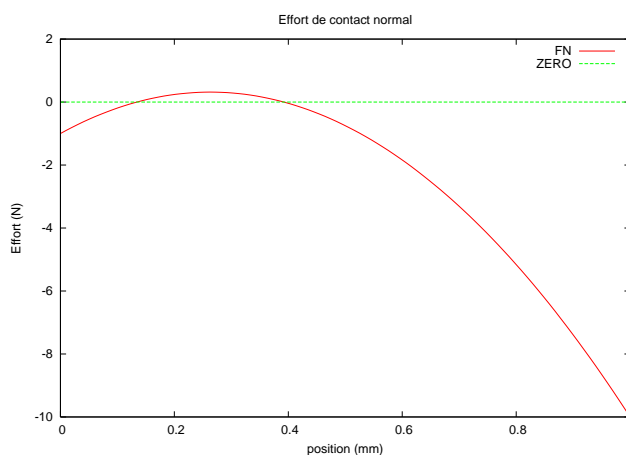


FIG. III.9 – Violation de la condition de Signorini

La figure III.9 permet de comprendre la raison nous poussant à préférer les éléments d'ordre le plus faible possible. Prenons l'exemple d'un élément dont l'effort normal serait quadratique. Etant donnée la manière dont nous introduisons les efforts, les efforts imposés seraient appliqués sans problème en fixant la valeur de trois efforts généralisés. Si cette fois on s'intéresse à un bord de cet élément en contact, la vérification de la condition de Signorini se résume à imposer la négativité de trois efforts généralisés normaux (positions 0, 0.5 et 1 mm sur la figure III.9). Ceci peut conduire, comme illustré sur la figure III.9, à des violations de la condition de Signorini, et les mêmes problèmes peuvent être rencontrés en traitant les conditions de Coulomb. Dans ce sens, l'élément HCT semble optimal pour traiter les problèmes de contact avec frottement, ses parties normales et tangentielles étant toutes deux linéaires. L'utilisation de l'élément BFS peut entraîner ce type de violations mais sa simplicité de mise en œuvre nous a tout d'abord poussé à l'utiliser lors de nos premiers traitements du problème.

III.4 Construction des matrices de flexibilité élémentaires

D'après les équations III.51 et III.53, la matrice de flexibilité élémentaire se calcule par :

$$[S^e] = \int_{\Omega_e} [B^e]^T \mathbb{S} [B^e] d\Omega_e \quad (\text{III.56})$$

avec

$$\mathbb{S} = \frac{t}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \text{ en contraintes planes} \quad (\text{III.57})$$

$$\mathbb{S} = \frac{t}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \text{ en déformations planes} \quad (\text{III.58})$$

où t désigne l'épaisseur du solide étudié et E son module de Young.

Le calcul de S^e est effectué par intégration numérique de Gauss. L'intégration sur l'élément BFS est effectuée par :

$$[S^e] = \frac{S}{2} \sum_{P_j} \omega_j [B^e(P_j)]^T \mathbb{S} [B^e(P_j)] \quad (\text{III.59})$$

où S représente la surface de l'élément dans le repère global et P_j et ω_j représentent les coordonnées et poids des points de Gauss représentés sur la figure III.10. Les valeurs des poids et coordonnées des points de Gauss sont données dans le tableau III.2, dans le repère local de l'élément BFS.

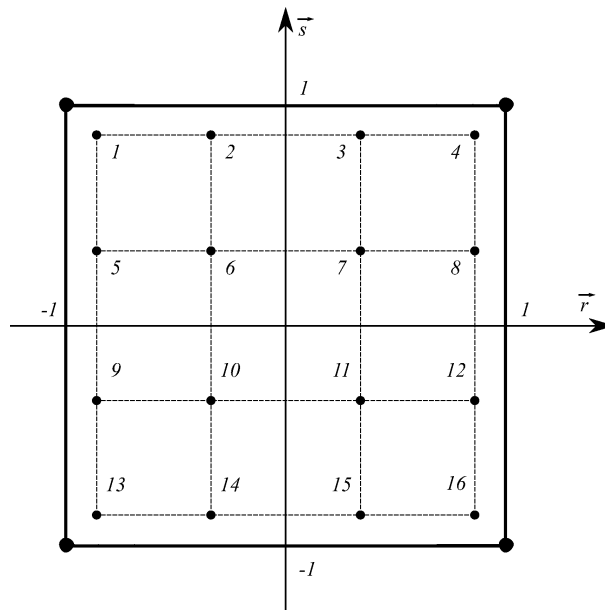


FIG. III.10 – Points de Gauss pour l'élément BFS

j	r	s	poids	j	r	s	poids
1	-b	b	p2*p2	9	-b	-a	p1*p2
2	-a	b	p1*p2	10	-a	-a	p1*p1
3	a	b	p1*p2	11	a	-a	p1*p1
4	b	b	p2*p2	12	b	-a	p1*p2
5	-b	a	p1*p2	13	-b	-b	p2*p2
6	-a	a	p1*p1	14	-a	-b	p1*p2
7	a	a	p1*p1	15	a	-b	p1*p2
8	b	a	p1*p2	16	b	-b	p2*p2

Avec

$$a = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$$

$$b = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$$

$$p1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

$$p1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

TAB. III.2 – Positions et points de Gauss pour l'élément BFS

L'intégration sur l'élément HCT est décomposée sur chaque sous triangle par la formule :

$$[S^e] = S \sum_{K_i} \sum_{P_j} \omega_j [B_i^e(P_j)]^T \mathbb{S}[B_i^e(P_j)] \quad (\text{III.60})$$

où S représente la surface du triangle global, B_i^e la fonction d'interpolation des contraintes sur le sous triangle K_i , P_j et ω_j représentent les coordonnées et poids des points de Gauss représentés sur la figure III.11 et donnés dans le repère local du sous élément K_i dans le tableau III.3.

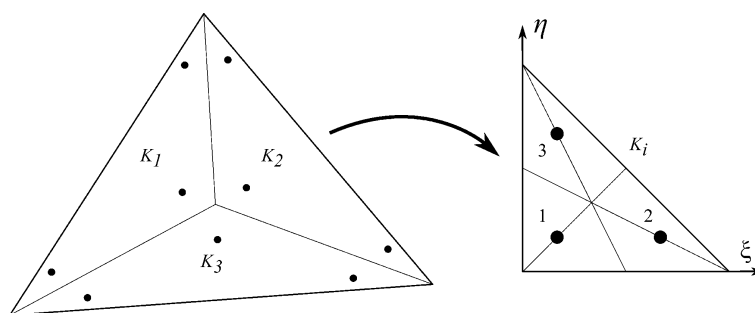


FIG. III.11 – Points de Gauss pour l'élément HCT

j	ξ	η	poids
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$

 TAB. III.3 – Positions et points de Gauss pour le sous élément i de l'élément HCT

III.5 Système global et résolution

Nous avons précédemment défini le système élémentaire, le système global s'obtient directement par assemblage et se note :

$$\pi = \frac{1}{2}[\phi]^T[S][\phi] - [\phi]^T[q] \quad (\text{III.61})$$

$$[C_F][\phi] = [F] \text{ sur } \Gamma_F \quad (\text{III.62})$$

$$[C_C][\phi] = [F_C] \text{ sur } \Gamma_C \quad (\text{III.63})$$

où les matrices $[S], [C_F], [C_C], [F]$ et $[F_C]$ sont obtenues par assemblage des matrices $[S^e], [C_F^e], [C_C^e], [F^e]$ et $[F_C^e]$. $[\phi]$ représente le vecteur des degrés de liberté du système global.

Les deux dernières conditions [III.62] et [III.63] sont prises en compte par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. On obtient alors une fonctionnelle de l'énergie complémentaire augmentée :

$$\pi^* = \frac{1}{2}[\phi]^T[S][\phi] - [\phi]^T[q] + [\lambda]([C_F][\phi] - [f]) + [\lambda']([C_C][\phi] - [f_C]) \quad (\text{III.64})$$

L'annulation de la première variation de cette fonctionnelle par rapport aux variables ϕ , λ , λ' , et f_C nous donne :

$$\begin{bmatrix} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.65})$$

Comme précisé auparavant, ce système correspond au cas sans contact. Tel qu'il est présenté, il correspond au cas où la zone de contact Γ_C est encadrée. En effet, les efforts de contact et frottement sont introduits comme inconnus et non dans le second membre. De manière à prendre en compte les conditions de contact et frottement, le système se réécrit :

$$\begin{bmatrix} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.66})$$

où le vecteur de droite correspond au vecteur des résidus engendrés par les conditions de contact et frottement.

De manière à appliquer les conditions de contact et de frottement, on utilise généralement (dans le cas primal) des algorithmes de relaxation. Le principe est de résoudre le système en vérifiant les conditions de contact et frottement au cours des itérations. De tels algorithmes

ne peuvent en général être appliqués sur la matrice du système global car souvent réservés aux matrices définies positives. Pour ce faire, on peut condenser le système sur la zone de contact de manière à obtenir le système équivalent :

$$[D][f_C] = [G] + [G_C] \quad (\text{III.67})$$

où $[G_C]$ est inconnu et dépend des réactions de contact, on peut alors mettre ce système sous forme d'inéquation :

$$[\delta f_C - f_C][D][f_C] \geq [G][\delta f_C - f_C] \quad \forall \delta f_C \quad (\text{III.68})$$

Où D est une matrice définie positive. L'utilisation d'algorithmes de relaxation classiques sera alors possible. Il est également possible de résoudre le système global par l'utilisation de l'algorithme d'Uzawa. Les différentes méthodes de résolution sont présentées et comparées dans le chapitre V.

III.6 Conclusion

La discrétisation de la formulation duale du problème implique l'obtention d'un champ de contrainte vérifiant les équations d'équilibre local. La technique de construction de ce champ est ici basée sur l'utilisation de fonctions de Airy en utilisant des éléments finis initialement destinés à la résolution des problèmes de plaques et de coques. Deux de ces éléments ont été choisis, la construction des fonctions d'interpolation des contraintes est présentée pour ces éléments.

De part le type d'éléments choisi, il a été montré qu'il est nécessaire d'introduire des multiplicateurs de Lagrange afin de prendre en compte les efforts imposés et les efforts de contact. S'ajoutant à ceci la nécessité d'appliquer les conditions de contact et de frottement, une méthode de résolution adaptée au problème est donc nécessaire et fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre IV

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DUAL

RÉSUMÉ

Le système global à résoudre est contraint par les conditions de contact et de frottement et fait intervenir une matrice symétrique non définie positive, nous présentons dans ce chapitre diverses méthodes numériques pour la résolution de ce système. Nous nous intéressons tout d'abord aux méthodes basées sur le principe de condensation du système, elles permettent d'obtenir un système contraint de taille réduite dont la matrice est symétrique et définie positive qui peut donc être résolu par l'utilisation d'un algorithme de Gauss Seidel non linéaire. Nous proposons également la résolution du système formulé sous la forme du Lagrangien augmenté en utilisant l'algorithme d'Uzawa.

IV.1 Résolution par des méthodes de condensation

IV.1.1 Rappels sur la condensation

La condensation d'un système a pour but de réduire sa taille en effectuant une série de transformations linéaires. Prenons l'exemple du système linéaire quelconque $[A][X] = [B]$, on sépare le vecteur $[X]$ en deux parties : une partie $[X_i]$ des inconnues internes au système et une partie $[X_e]$ des inconnues externes au système qu'il nous intéresse de conserver dans le système condensé.

Le système peut se réécrire

$$\begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ie} \\ A_{ei} & A_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i \\ B_e \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Le but de la condensation est de se ramener au système

$$[A_{ee}^*][X_e] = [B_e^*] \quad (\text{IV.2})$$

avec

$$A_{ee}^* = A_{ee} - A_{ei}A_{ii}^{-1}A_{ie} \quad (\text{IV.3})$$

$$B_e^* = B_e - A_{ei}A_{ii}^{-1}B_i \quad (\text{IV.4})$$

La majeure partie du coût de condensation vient donc du calcul des matrices A_{ee}^* et B_e^* qui fait intervenir l'inverse de A_{ii} . Comme l'inversion de cette matrice peut s'avérer coûteuse, on calcule le terme $A_{ii}^{-1}A_{ie}$ par résolutions successives du système $A_{ii}^{-1}A_{ie}(j) = C_{ie}(j)$, où $A_{ie}(j)$ représente la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_{ie} . Si cette matrice a n_{ie} colonnes, on effectue $(n_{ie} + 1)$ résolutions de système pour obtenir le système condensé.

Etant donné que chaque résolution fait intervenir la même matrice A_{ii} , l'utilisation d'une méthode de factorisation est très avantageuse pour la condensation du système ; la matrice A_{ii} est factorisée une seule fois, puis chaque résolution nécessite seulement une opération de descente et montée.

IV.1.2 Partitionnement du problème dual

Le coût de condensation provenant principalement du coût des résolutions de systèmes linéaires, il convient de choisir convenablement les variables qui sont considérées comme internes et externes. Nous nous intéressons aux trois partitionnements suivants du système :

La condensation "brute" :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

la condensation en deux étapes :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ \hline C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

ou la condensation en trois étapes :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ \hline C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Le premier partitionnement est l'application directe du principe précédemment énoncé. Au vu du système à résoudre, symétrique mais non défini positif, nous proposons, dans la section suivante, l'utilisation de l'algorithme SYMMLQ pour les résolutions successives de systèmes linéaires.

Les deux derniers partitionnements présentent l'avantage de tirer partie du profil et des propriétés de la matrice S . En effet, tout comme la matrice de raideur dans le cas primal, la matrice de souplesse est une matrice bande, symétrique et définie positive, de largeur de bande assez faible si l'on utilise un algorithme de numérotation adéquat. L'utilisation de ces partitionnements permet également d'éviter le stockage de termes inutiles issus de l'introduction des efforts par multiplicateurs de Lagrange. L'espace de stockage et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution se trouvent alors diminués. Ces deux techniques étant très similaires, leur comparaison est présentée en annexe A. La méthode de condensation en trois étapes se révélant théoriquement légèrement plus efficace, c'est cette dernière qui sera retenue par la suite. Une démarche de résolution directe et une démarche itérative sont proposées.

Pour la suite, nous introduisons les grandeurs n_ϕ , n_f et n_C représentant respectivement le nombre de degrés de liberté nécessaire à la discrétisation, le nombre d'efforts imposés et le nombre d'efforts de contact et de frottement.

IV.1.3 Condensation “brute” par la méthode SYMMLQ

La première manière de condenser le système est d’appliquer directement le principe de condensation, on réécrit alors le système global en regroupant les trois premiers groupes d’inconnues dans ϕ_i , vecteur des inconnues internes au système, tel que :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_i \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

En résolvant :

$$\phi_i = M_{11}^{-1}U_i - M_{11}^{-1}M_{12}F_C \quad (\text{IV.9})$$

on obtient le système condensé :

$$M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}F_C = M_{21}M_{11}^{-1}U_i \quad (\text{IV.10})$$

que l’on écrit

$$[D][F_C] = [G] \quad (\text{IV.11})$$

où la matrice

$$M_{11} = \begin{bmatrix} S & C_F^T & C_C^T \\ C_F & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

est stockée par blocs adaptés aux profils des matrices S , C_F et C_C .

La détermination de l’inverse d’une matrice étant généralement coûteuse, la résolution de IV.9 est effectuée par des résolutions successives de systèmes linéaires faisant tous intervenir une même matrice M_{11} . Au vu de la structure de cette matrice, la méthode SYMMLQ est utilisée pour effectuer ces résolutions successives.

La méthode SYMMLQ est présentée dans [PS75], c’est une méthode itérative, similaire à celle du gradient conjugué, dédiée à la résolution de systèmes linéaires symétriques et non définis positifs. Comme pour bon nombre de méthodes itératives, son efficacité dépend du choix du préconditionneur utilisé. La méthode étant appelée plusieurs fois au cours du processus de condensation, la construction d’un préconditionneur très proche de M_{11}^{-1} en est d’autant plus justifiée. Un préconditionneur par blocs est utilisé dans [CGTR06]. En simplifiant les notations de (IV.12) tel que :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} S & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Le préconditionneur P , associé à M_{11} , est la matrice diagonale par blocs :

$$P = \begin{bmatrix} S^* & 0 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Où S^* est une approximation de S .

Le second bloc de P est construit tel que $T = CS^{*-1}C^T$.

Plusieurs approximations de S sont proposées, et ont été évaluées dans le chapitre suivant : la factorisation incomplète de Cholesky de S et le préconditionneur SSOR. La factorisation complète de Cholesky a également été utilisée de manière à évaluer les performances maximales de la méthode SYMMLQ.

Ces préconditionneurs étant communs à d'autres méthodes de résolution, ils sont présentés dans la section IV.1.5.

IV.1.4 Condensation en trois étapes

De manière à tirer partie de la structure de chaque matrice, le système global est divisé en quatre parties et peut être assimilé au système de quatre équations :

$$\begin{cases} S\phi + C_F^T\lambda + C_C^T\lambda' = q \\ C_F\phi = F \\ C_C\phi = F_C \\ I\lambda' = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

La procédure de condensation se déroule en trois étapes :

Étape 1 : Evaluation de ϕ tel que :

$$\phi = S^{-1}q - S^{-1}C_F^T\lambda - S^{-1}C_C^T\lambda' \quad (\text{IV.16})$$

Comme dans la méthode "brute", l'expression de ϕ est obtenue par des résolutions successives de systèmes linéaires. Ici, la matrice S est symétrique et définie positive, on peut donc envisager l'utilisation de méthodes directes ou itératives :

- Utilisation d'une méthode directe : S est factorisé une fois par la méthode de factorisation LDL^T et les produits $S^{-1}q$, $S^{-1}C_F^T$ et $S^{-1}C_C^T$ sont obtenus par $(1 + n_f + n_C)$ montées et descentes de systèmes triangulaires. L'opération la plus coûteuse de la méthode directe n'est donc effectuée qu'une seule fois.
- Utilisation de l'algorithme du gradient conjugué : d'une manière analogue, on construit un préconditionneur efficace une seule fois qui permet d'obtenir rapidement les produits précédemment cités.

Puis ϕ est introduit dans les lignes 2 et 3 du système (IV.15).

Étape 2 : Le système devient :

$$\begin{cases} C_F S^{-1} q - C_F S^{-1} C_F^T \lambda - C_F S^{-1} C_C^T \lambda' = F \\ C_C S^{-1} q - C_C S^{-1} C_F^T \lambda - C_C S^{-1} C_C^T \lambda' = F_C \\ I \lambda' = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

L'expression de λ est obtenue par $(1 + n_C)$ résolutions d'un système symétrique, généralement plein, de taille n_f lignes par n_f colonnes. Ici encore, le système peut être résolu par une méthode directe ou itérative. Au vu des dimensions mises en jeu, nous utilisons un solveur direct basé sur la factorisation LDL^T , qui n'est également effectuée qu'une seule fois.

Étape 3 : L'expression de λ est introduite dans la ligne 2 du système (IV.17) et l'expression de λ' est obtenue de la même manière que précédemment (par $(1 + n_C)$ résolutions d'un système symétrique de taille n_C lignes par n_C colonnes).

L'expression de λ' est finalement introduite dans la dernière ligne du système (IV.17) et le système condensé est obtenu.

Notons que les deux dernières étapes reposent sur la résolution de systèmes de matrices pleines, mais au vu des tailles n_f et n_C comparées à n_ϕ , ces résolutions ne sont généralement pas très onéreuses.

IV.1.5 Préconditionneurs

La convergence des méthodes itératives, utilisées dans les deux procédures de condensation, dépend grandement du choix d'un préconditionneur. Nous présentons les préconditionneurs classiques, qui ont été employés avec ces méthodes.

IV.1.5.1 Factorisation incomplète de Cholesky

Comme son nom l'indique, ce type de factorisation vise à obtenir une bonne approximation de la factorisation (complète) de Cholesky :

$$S = LL^T \quad (\text{IV.18})$$

Le but est donc de trouver une approximation, notée L^* , de L ; les principales stratégies de construction de cette approximation sont rappelées dans [JP95]. L'idée directrice est de ne garder que les termes les plus importants de L dans L^* . Pour cela nous évaluons deux stratégies :

– La stratégie “drop tolérance” :

Le terme $L^*(i, j)$ est gardé seulement si : $L^*(i, j) \geq 10^{-c} * \sqrt{L^*(i, i) * L^*(j, j)}$.

– La stratégie “filling level” :

Seuls les $n_{fl} * n_i$ termes les plus importants de la ligne i de L^* sont gardés, où n_i est la taille de la ligne i de L et n_{fl} un paramètre contrôlant le remplissage de L^* .

Notons que l’utilisation de factorisations incomplètes vise principalement à diminuer le temps de calcul du préconditionneur et le nombre d’opérations élémentaires effectuées dans chaque itération de la méthode itérative. Rappelons qu’ici, la méthode itérative va permettre de résoudre une succession de systèmes linéaires impliquant tous le même préconditionneur. Il peut alors être intéressant d’utiliser la factorisation complète de Cholesky comme préconditionneur.

Dans une même optique, le calcul de la factorisation incomplète de Cholesky peut être effectué de deux manières selon le souhait de minimiser le temps de calcul du préconditionneur ou de maximiser son efficacité : lorsque l’on calcule la factorisation complète de Cholesky, la ligne i de L est calculée en utilisant les $(i - 1)$ lignes précédentes de L et les autres lignes de S . Lorsque l’on calcule la factorisation incomplète de Cholesky, on peut soit choisir d’utiliser les lignes précédentes de L^* , donc un nombre réduit de termes qui entraîne un calcul plus rapide, soit choisir d’utiliser les lignes précédentes de L , donc un calcul plus lourd mais un préconditionneur plus proche de L . De manière à comparer ces deux idées, la première sera appliquée à la stratégie “filling level”, la seconde à la stratégie “drop tolerance” dans le chapitre suivant.

IV.1.5.2 Le préconditionneur SSOR

La matrice S est décomposée de la façon suivante :

$$S = D - E - E^T \tag{IV.19}$$

où D est la diagonale de S , et $-E$ sa partie triangulaire inférieure. Le préconditionneur SSOR S^* est défini tel que :

$$S^* = \frac{1}{\omega(2 - \omega)} (D - \omega E) D^{-1} (D - \omega E)^T \tag{IV.20}$$

avec ω le paramètre de relaxation compris entre 0 et 2 pour assurer la convergence.

Le principal avantage de ce préconditionneur est que, contrairement aux préconditionneurs basés sur la factorisation incomplète de Cholesky, son calcul est quasiment immédiat.

IV.1.6 Résolution du système condensé

Une fois le système condensé obtenu par l’une des méthodes précédemment décrites, on utilise un algorithme de type Gauss Seidel, permettant d’appliquer les conditions de contact

et de frottement. Cet algorithme est présenté sur la figure IV.1, où n_C représente la taille du vecteur $[F_C]$.

Jusqu'à convergence :

Pour $i = 1$ à n_f :

$$F_C^* = \frac{1}{D(i, i)} \left[G(i) - \sum_{j=1}^{i-1} D(i, j) F_C(j) - \sum_{j=i+1}^{n_f} D(i, j) F_C(j) \right]$$

- **Si** $F_C(i)$ est normal : **Si** $F_C^* \geq 0$

- **Alors** : $F_C(i) = 0$

- **Sinon** : $F_C(i) = F_C^*$

- **Si** $F_C(i)$ est tangent : **Si** $|F_C^*| > \mu |F_{C_N}|$

(Où F_{C_N} est l'effort normal correspondant à $F_C(i)$)

- **Alors** : $F_C(i) = \mu \operatorname{sign}(F_C^*) |F_{C_N}|$

- **Sinon** : $F_C(i) = F_C^*$

Fin de boucle

Convergence si i_C^k petit

Fin de boucle

FIG. IV.1 – L'algorithme de Gauss Seidel

On définit l'indicateur de convergence i_C^k au pas k :

$$i_C^k = \sup_i \left\{ 0; \frac{\|F_C^k(i) - F_C^{k-1}(i)\|}{\|F_C^k(i)\|} \right\}, \text{ pour } F_C^k(i) \neq 0 \quad (\text{IV.21})$$

qui permet de déterminer le moment où les efforts de contact et de frottement ne varient plus. La valeur limite pour i_C^k est choisie égale à 10^{-5} , valeur couramment utilisée avec ce type d'algorithmes [GLT81].

Sur ce principe, l'ordonnement des parties normales (F_N) et tangentielles (F_T) du vecteur $[F_C]$, dont plusieurs possibilités sont présentées sur la figure IV.2, peut jouer en rôle important sur la rapidité de convergence de cet algorithme.

$$[F_C] = \begin{bmatrix} F_N^1 \\ F_T^1 \\ \vdots \\ F_N^i \\ F_T^i \\ \vdots \\ F_N^n \\ F_T^n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} F_N^1 \\ \vdots \\ F_N^i \\ \vdots \\ F_N^n \\ F_T^1 \\ \vdots \\ F_T^i \\ \vdots \\ F_T^n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} F_T^1 \\ \vdots \\ F_T^i \\ \vdots \\ F_T^n \\ F_N^1 \\ \vdots \\ F_N^i \\ \vdots \\ F_N^n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} F_T^1 \\ F_N^1 \\ \vdots \\ F_T^i \\ F_N^i \\ \vdots \\ F_T^n \\ F_N^n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

FIG. IV.2 – Présentations de plusieurs ordonnancements du vecteur $[F_C]$ ($n = n_C/2$)

D'autres modifications sont également possibles : Bisegna et al. [BLM04] proposent l'utilisation d'un algorithme de Gauss Seidel traité par blocs, qui revient à figer les efforts tangentiels et appliquer l'algorithme aux efforts normaux jusqu'à convergence, puis à figer les efforts normaux et appliquer l'algorithme aux efforts tangentiels jusqu'à convergence, et à itérer ce processus jusqu'à convergence globale de l'algorithme. D'autre part, la valeur du coefficient de frottement influe également sur la rapidité de convergence.

De part la taille du système condensé, comme montré dans le chapitre suivant, le temps nécessaire à sa résolution est faible en comparaison au temps nécessaire à la condensation pour la plupart des problèmes de contact avec frottement. Une étude plus poussée de ces diverses possibilités et facteurs influant, bien qu'intéressante, n'a donc pas été menée ici.

IV.2 Résolution par la méthode d'Uzawa

Le système (III.65) peut également être résolu par l'utilisation de l'algorithme d'Uzawa, pour cela, nous réécrivons la fonctionnelle de l'énergie complémentaire dans sa forme augmentée :

$$\begin{aligned}
 \pi_{a*} &= \frac{1}{2}\phi^T S \phi - \phi^T q \\
 &+ \lambda(C_F \phi - F) + \mathcal{X}(C_C \phi - F_C) \\
 &+ \frac{r}{2}(C_F \phi - F)^2 + \frac{r}{2}(C_C \phi - F_C)^2 \quad \text{avec } F_C \in \Sigma(F_C)
 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Où r est le paramètre de pénalisation. L'annulation des variations premières de cette fonctionnelle vis à vis des variables ϕ , λ , \mathcal{X} et F_C donne le système à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}\phi = \tilde{U} \\ \text{avec : } \tilde{S} = S + rC_F^T C_F + rC_C^T C_C \\ \text{et : } \tilde{U} = q - \lambda C_F - \lambda' C_C + rC_F^T F + rC_C^T F_C \\ C_F \phi - F = 0 \\ C_C \phi - F_C = 0 \\ \lambda' - r(C_C \phi - F_C) = 0 \text{ avec } F_C \in \Sigma(F_C) \end{array} \right. \quad (\text{IV.24})$$

L'algorithme d'Uzawa est basé sur le principe de résolutions d'états d'équilibres successifs, il permet de résoudre ce système tout en tenant compte des conditions de contact et de frottement, son adaptation au problème à traiter est présentée sur la figure IV.3 où ρ est le pas de la méthode d'Uzawa.

Un nombre important d'itérations étant généralement requis pour atteindre la convergence, la première étape est traitée en utilisant une méthode de résolution directe. Ici encore, la factorisation de \tilde{S} n'est effectuée qu'une seule fois, au premier pas de l'algorithme, puis la matrice factorisée est utilisée au cours de itérations.

Initialisation de ϕ , λ , λ' , et F_C

Jusqu'à convergence, itération k :

- 1- Détermination de $\tilde{U}^k(\lambda^k, \lambda'^k, F_C^k)$
- 2- Détermination de ϕ^k en résolvant $\tilde{S}\phi^k = \tilde{U}^k$
- 3- Mise à jour de F_C :

$$F_C^{k+1} = P_{\Sigma(F_C)}(C_C \phi^k - \frac{\lambda'^k}{2})$$
- 4- Mise à jour de λ et λ' :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(C_F \phi^k - F)$$

$$\lambda'^{k+1} = \lambda'^k + \rho(C_C \phi^k - F_C)$$

Convergence si i_C^k petit

Fin de boucle

Avec $P_{\Sigma(F_C)}$ désignant l'opérateur de projection dans le cône de Signorini-Coulomb.

FIG. IV.3 – L'algorithme d'Uzawa

L'indicateur de convergence est défini tel que :

$$i_C^k = \sup_i \|r^k(i)\| \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{avec } r^k = C_C \phi^k - F_C^{k+1} + C_F \phi^k - F \quad (\text{IV.26})$$

dont la valeur limite a été choisie par la suite égale à 10^{-3} MPa au vu des problèmes traités.

IV.3 Stratégies de stockage des matrices

Les stratégies de stockage utilisées dans les méthodes de résolution ayant une forte influence sur leurs performances, nous présentons ici chaque stratégie de stockage adoptée. L'exemple choisi pour illustrer les détails de chacune des stratégies est celui d'une matrice symétrique présentée sur la figure IV.4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

FIG. IV.4 – Matrice symétrique A de dimensions n par n

IV.3.1 Stockage bande

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

FIG. IV.5 – Principe du stockage bande

Cette stratégie est celle initialement adoptée dans le code LMGC90 [LMGC90] et très largement répandue, elle est par exemple adoptée par la bibliothèque de solveurs linéaires LAPACK [LAPACK]. Comme représenté sur la figure IV.5, elle consiste à stocker tous les termes de la partie inférieure de la matrice A compris dans une bande de largeur bw dans

une matrice bidimensionnelle $AMAT$, de dimensions bw lignes par n colonnes :

$$\begin{bmatrix} x & x & x & 0 & 6 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ avec } n = 5 \text{ et } bw = 4 \quad (\text{IV.27})$$

On accède aux termes de la matrice A par application de la formule :

$$A(i, j) = AMAT(bw + j - i, i) \quad (\text{IV.28})$$

Cette stratégie, appliquée au stockage de matrices de rigidité ou de flexibilité ayant généralement une largeur de bande petite devant les dimensions de la matrice, permet de réaliser l'économie de stockage des termes nuls hors bande. On remarque pour l'exemple proposé, que pour des matrices de faibles dimensions ou de grande largeur de bande, le stockage d'une des parties symétrique de la matrice A peut nécessiter autant d'espace que pour le stockage symétrique plein.

IV.3.2 Stockage ligne de ciel

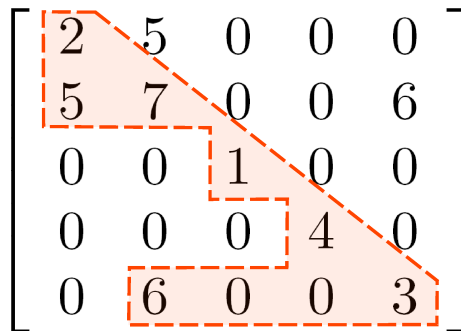


FIG. IV.6 – Principe du stockage ligne de ciel

Ce type de stockage est similaire au stockage bande. Comme représenté sur la figure IV.6 la partie de chaque ligne commençant par un terme non nul et terminant par un terme diagonal, est stockée dans un vecteur $ATAB$ et la position de chaque terme diagonal dans ce vecteur est stockée dans un vecteur $INDIAG$:

$$\begin{aligned} ATAB &= [2 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 6 \ 0 \ 0 \ 3] \\ INDIAG &= [1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 9] \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

On accède aux termes de la matrice A par application de la formule :

$$A(i, j) = ATAB(INDIAG(i) + j - i) \quad (\text{IV.30})$$

Cette stratégie permet d'éviter le stockage d'une partie des termes nuls inclus dans la stratégie bande.

IV.3.3 Stockage morse

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{5} & \boxed{7} & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

FIG. IV.7 – Principe du stockage morse

Le principe de cette stratégie, représenté sur la figure IV.7, est de ne stocker que les termes non nuls de la matrice A . Nous adoptons ici la stratégie de stockage morse ordonnée par lignes qui permet, contrairement à un stockage désordonné, d'accéder rapidement aux termes de la matrice A . Les termes non nuls de la matrice A sont stockés dans un vecteur $ATAB$, on repère l'indice de colonne de chacun de ces termes par un vecteur $INDC$ et le premier terme de chaque ligne par un vecteur $INDPL$:

$$\begin{aligned} ATAB &= [2 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 6 \ 3] \\ INDC &= [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5] \\ INDPL &= [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6] \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

L'accès au terme $A(i, j)$ se fait en recherchant le terme $INDC(k) = j$ pour $k \in [INDPL(i); INDPL(i + 1) - 1]$

IV.4 Optimisation des algorithmes

IV.4.1 Renumerotation

De manière à optimiser l'efficacité des stratégies de stockage bande et ligne de ciel, il est nécessaire de minimiser la largeur de bande de la matrice A qui est directement liée au choix de numérotation du maillage éléments finis. Nombreux maillages permettent d'optimiser la numérotation du maillage. Dans le cadre de construction d'un maillage par éléments finis équilibré à partir d'un maillage par éléments finis en déplacements traditionnel ou dans le cadre d'un raffinement local du maillage ou d'un remaillage, nous avons choisi d'appliquer l'algorithme de renumérotation de Cuthill Mac Kee inverse sur un maillage non optimisé. Pour plus de détails sur la renumérotation de Cuthill Mac Kee, nous invitons le lecteur à consulter [LT04]

Le principe de cet algorithme est de minimiser l'écart de numérotation entre les noeuds voisins d'un maillage en numérotant un premier noeud convenablement choisi puis de numéroter ses voisins non encore numérotés et de continuer la procédure à partir des derniers noeuds numérotés.

Cette technique s'est révélée peu coûteuse et permet d'augmenter de manière significative l'efficacité des stratégies de stockage précédemment citées.

IV.4.2 Influence du stockage

Le principe des stratégies de stockage présentées précédemment est de stocker un nombre minimal de termes nuls, ceci de manière à éviter toute opération inutile lors d'opérations telles que multiplications de matrices par un vecteur et de minimiser la taille occupée en mémoire.

Le stockage morse est à ce sens optimal. Toutefois, dans le cadre d'utilisation de méthodes de résolution de systèmes linéaires directes, le calcul de la matrice de souplesse (ou de rigidité dans le cas primal) ne sert qu'à l'obtention de la matrice factorisée. On peut montrer, comme illustré sur la figure IV.8, que cette dernière est une matrice ayant un profil plein, identique au profil de la matrice de souplesse stockée suivant le schéma ligne de ciel. Le stockage de la matrice factorisée nécessite alors autant d'espace mémoire dans les cas morse et ligne de ciel.

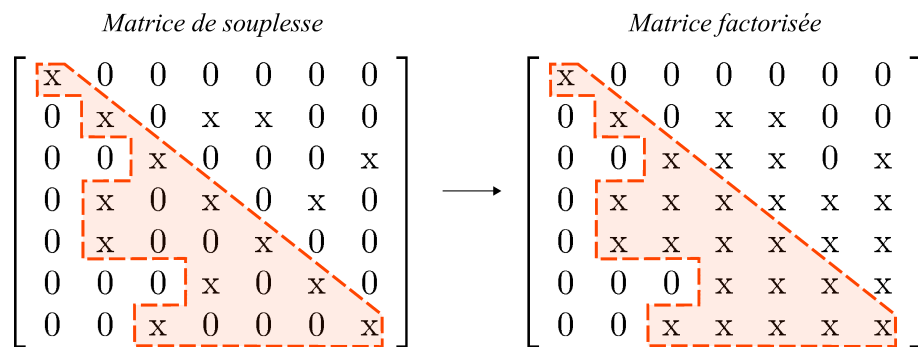


FIG. IV.8 – Lien entre les profils des matrices de souplesse et factorisée (x : terme non nul)

D'autre part, le calcul d'une ligne i de la matrice factorisée ne demande que la connaissance des lignes d'indices supérieurs à i de la matrice de souplesse. La matrice factorisée peut donc être entièrement stockée à la place de la matrice de souplesse.

On peut également noter, comme le confirment les résultats présentés dans le tableau IV.1, que le temps de factorisation est équivalent quel que soit le stockage initial de la matrice de souplesse. Comme c'est le cas pour le stockage ligne de ciel, l'accès aux termes d'une ligne de la matrice de souplesse est plus rapide s'ils sont stockés en mémoire de manière contiguë, la

perte due au stockage de termes nuls supplémentaires est compensée par le gain de rapidité d'accès au données.

Nombre de lignes de la matrice de souplesse	1536	4280	38122	60692
Nombre de termes stockés (morse)	18990	53972	490528	782648
Nombre de termes stockés (ligne de ciel)	108228	4449776	11113829	22055061
Temps de calcul en s (morse)	0.0379	0.2369	16.089	40.103
Temps de calcul en s (ligne de ciel)	0.0369	0.2319	16.068	40.017

TAB. IV.1 – Comparaison des temps de factorisation LDL^T pour les stockages morse et ligne de ciel (calculs effectués sur un ordinateur Pentium4 3Ghz).

Dans ces conditions, il est préférable d'utiliser une matrice ligne de ciel unique, servant initialement au stockage de la matrice de souplesse puis au stockage de la matrice factorisée.

D'autre part, lorsque l'on adopte une stratégie de stockage par lignes, pour une matrice symétrique, on ne stocke généralement que la partie inférieure (ou supérieure) de la matrice de manière à minimiser l'espace occupé en mémoire. On a donc accès à la partie supérieure (respectivement inférieure) de la matrice selon un schéma par colonnes. Le tableau IV.2 permet de comparer, pour des systèmes linéaires de tailles différentes, les temps de montée et descente d'une matrice factorisée, dans le cas où seule la partie inférieure de la matrice factorisée est stockée en ligne de ciel (noté L) et dans le cas où l'on stocke également sa partie supérieure (noté $L&L^T$).

Nombre de lignes de la matrice de souplesse	1536	4280	38122	60692
Temps de descente/montée (L)	0.0049	0.029	1.9327	4.778
Temps de descente/montée ($L&L^T$)	0.0020	0.0079	0.1839	0.3599
Temps de stockage partie supérieure	0.0059	0.041	2.51	6.3770

TAB. IV.2 – Comparaison des temps de descente/montée avec (noté $L&L^T$) et sans stockage de la partie supérieure (noté L) de la matrice factorisée (calculs effectués sur un Pentium4 3Ghz).

Dans le cas de résolution d'un système linéaire unique, le stockage de la partie supérieure de la matrice n'apporte aucun gain lors de la descente et montée de la matrice factorisée, du fait du temps important nécessaire au stockage de la matrice supérieure à partir de la matrice inférieure. En revanche, lors de l'utilisation de la méthode de résolution directe pour condenser un système linéaire, où la matrice factorisée est réutilisée plusieurs fois, le stockage supplémentaire de la partie supérieure de la matrice factorisée devient très intéressant.

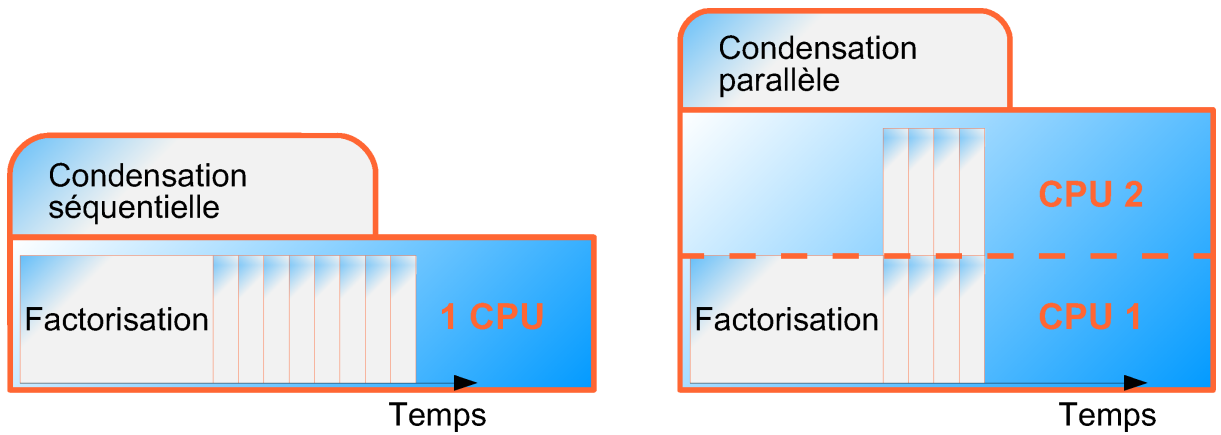


FIG. IV.9 – Possibilité de parallélisation de la méthode

Un algorithme de résolution de systèmes linéaires par factorisation LDL^T avec stockage par ligne de ciel, prenant en compte ces remarques a été développé au cours de cette thèse. Cet algorithme a été implémenté dans la branche principale du code de calcul LMGC90 [LMGC90] dédié à la résolution des problèmes dynamiques de contact avec frottement et adhérence. Appliqué à plusieurs problèmes d'éléments finis en déplacements, il a permis l'obtention de gains significatifs en termes de temps de calcul, en comparaison aux algorithmes de résolution utilisant les bibliothèques d'algèbre linéaire LAPACK [LAPACK] et un stockage bande, adoptés initialement.

IV.4.3 Parallélisation de la méthode de condensation

Une évolution intéressante de l'algorithme de condensation de systèmes développé au cours de cette thèse pourrait être sa parallélisation. Prenons l'exemple de la première étape de la méthode de condensation en trois étapes décrite dans la section IV.1.4, dans la version actuelle (séquentielle) de l'algorithme, la matrice de flexibilité est factorisée une fois, puis la matrice factorisée est utilisée n fois sur les n points de condensation. Le principe est représenté sur la partie gauche de la figure IV.9, le principe de parallélisation de la méthode est présenté sur la partie droite : supposons que l'on utilise un système bi-processeur ou bi-core, une fois la factorisation effectuée, les n montées/descentes peuvent être réparties sur les deux unités de calcul et prendre théoriquement moins de temps.

Un premier essai de parallélisation de la méthode a été effectué sur ce principe. Nous avons utilisé pour cet essai un processeur bi-core de première génération (Pentium D930) et l'interface de programmation pour le calcul parallèle sur architecture à mémoire partagée OpenMP [OpenMP].

Ces modifications n'ont pas permis d'obtenir de gain significatif en termes de temps de calcul. Les causes hypothétiques sont :

- Nombre insuffisant de coeurs pour observer un gain de temps.

- Architecture du processeur inadaptée.
- Programmation de la parallélisation inadaptée.

IV.4.4 Optimisation apportée à la condensation en trois étapes directe

Lors de l'utilisation de la méthode de condensation en trois étapes directe, décrite dans la section IV.1.4, il est nécessaire lors de la première étape, d'effectuer le calcul des produits $S^{-1}q$, $S^{-1}C_F^T$ et $S^{-1}C_C^T$. Ces calculs sont effectués par $(1 + n_f + n_C)$ montées et descentes de systèmes triangulaires dont nous rappelons le principe :

- Factorisation de la matrice de souplesse telle que : $[S] = [L][D][L]^T$
Avec $[L]$ matrice triangulaire inférieure, $[L]^T$ sa transposée et $[D]$ matrice diagonale.
- Le système à résoudre $[S][x] = [y]$ est décomposé en :
 - $[L][D][z] = [y]$ (descente).
 - $[L]^T[x] = [z]$ (montée).

Or, lors du calcul des produits $S^{-1}C_F^T$ et $S^{-1}C_C^T$, le vecteur noté $[y]$ correspond successivement aux colonnes de C_F^T puis de C_C^T . Les matrices C_F et C_C sont les matrices reliant respectivement les efforts imposés et efforts de contact aux degrés de liberté. Les matrices C_F^T et C_C^T ont donc respectivement leurs n_ϕ et $n_\phi + n_f$ premières lignes nulles. On peut donc prévoir que le vecteur $[z]$ sera nul sur ses n_ϕ premières lignes lors du calcul du produit $S^{-1}C_F^T$ et sur ses $n_\phi + n_f$ premières lignes lors du calcul du produit $S^{-1}C_C^T$. Pour la plupart des problèmes, le nombre d'efforts imposés n_f et d'efforts de contact n_C est faible devant le nombre de degrés de liberté n_ϕ , une quantité importante de calculs inutiles peut alors être évitée.

Le temps de calcul de la première étape passe alors de 14.44 secondes à 11.67 secondes pour un problème avec $n_\phi=954$, $n_f=356$ et $n_C=128$ et de 213 secondes à 168 secondes pour un problème avec $n_\phi=38122$, $n_f=728$ et $n_C=256$ sur un Pentium4 cadencé à 3Ghz.

Notons finalement que cette dernière optimisation est ultérieure à la campagne de calculs présentée dans le chapitre suivant et n'y a donc pas été utilisée.

IV.5 Conclusion

Diverses méthodes de résolution du problème dual de contact avec frottement ont été proposées dans ce chapitre. La majorité de ces méthodes reposent sur le principe de condensation du système. Cette condensation peut être effectuée en divisant le système matriciel en blocs de dimensions convenablement choisies et en appliquant une méthode de résolution adaptée, directe ou itérative.

La résolution par la méthode du Lagrangien augmenté, adaptée au problème dual, a également été proposée.

La dernière section de ce chapitre a montré l'importance de la préparation et du stockage des matrices, dont le choix dépend de la méthode de résolution choisie.

TROISIÈME PARTIE

VALIDATIONS ET ESSAIS NUMÉRIQUES

Chapitre V

COMPARAISON DES MÉTHODES DE RÉSOLUTION

RÉSUMÉ

Nous comparons dans ce chapitre les différentes méthodes de résolution du problème dual présentées précédemment. La configuration de test est tout d'abord définie. Une comparaison des différents préconditionneurs utilisés dans les méthodes itératives appliquées au système dual est ensuite effectuée. Elle permet de retenir un nombre limité de préconditionneurs de manière à limiter le nombre de méthodes comparées dans la dernière partie.

V.1 Comparaisons de différentes méthodes numériques

V.1.1 Configuration de test

Nous comparons les différentes méthodes appliquées à deux exemples de contact de dents sur un obstacle rigide, présentés sur la figure V.1. Quatre discrétisations du premier exemple sont effectuées et nommées Mesh0 à Mesh3, quatre discrétisations du second exemple sont également effectuées et nommées Mesh4 à Mesh7. Leurs caractéristiques sont listées dans le tableau V.1.

Notons que tous les maillages ont été renumérotés en utilisant l'algorithme de Cuthill et Mac Kee. D'autre part, comme effectué dans [CGTR06] de manière à limiter les erreurs numériques, les matrices de flexibilité ont subi un équilibrage, consistant en une multiplication à gauche et à droite par l'inverse de leurs diagonales.

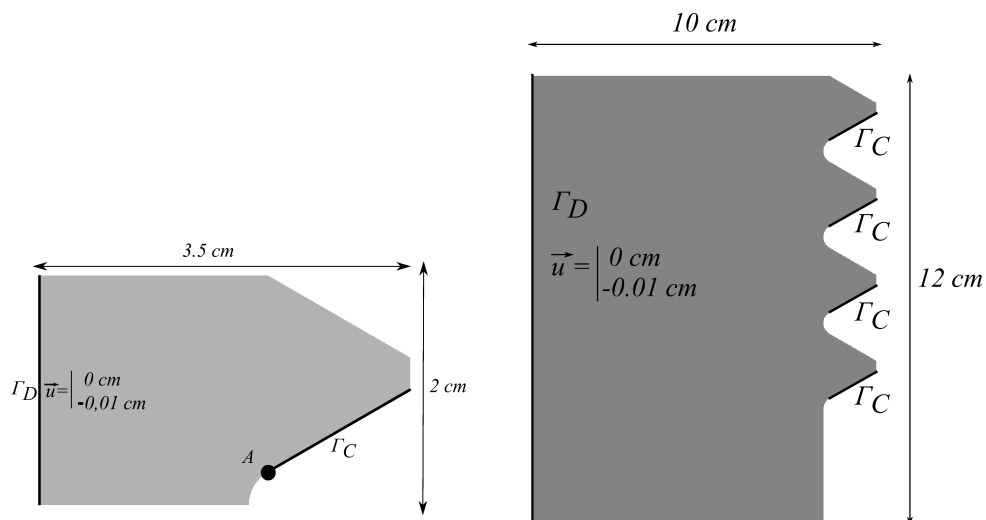


FIG. V.1 – Problèmes de contact traités dans ce chapitre

Nom	n_ϕ	n_f	n_C	Nom	n_ϕ	n_f	n_C
Mesh0	761	96	38	Mesh4	8360	392	200
Mesh1	1973	144	80	Mesh5	19128	588	480
Mesh2	3105	176	120	Mesh6	26538	708	576
Mesh3	6287	232	160	Mesh7	50483	920	640

TAB. V.1 – Caractéristiques des exemples traités

Les comparaisons sont effectuées sur les performances en termes de temps de calcul et d'utilisation mémoire pour les méthodes suivantes :

- La méthode de condensation SYMMLQ.
- La méthode de condensation en trois étapes directe : la première étape de condensation est achevée par l'utilisation d'une méthode directe basée sur la factorisation LDL^T .
- La méthode de condensation en trois étapes itérative : la première étape de condensation est achevée par l'utilisation de la méthode du gradient conjugué.
- La résolution de la formulation augmentée par la méthode d'Uzawa.

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur de milieu de gamme, à savoir un Intel P4 1.7 Ghz avec 1 Go de mémoire vive.

V.1.2 Comparaison des préconditionneurs

Afin de cibler au mieux les comparaisons des différentes méthodes précédemment citées, une comparaison préalable des différents préconditionneurs, utilisés dans les méthodes de condensation SYMMLQ et de condensation en trois étapes itérative, est effectuée.

Les préconditionneurs suivants ont été évalués :

- La factorisation incomplète de Cholesky “drop tolérance” avec un paramètre de tolérance $c \in [3; 6]$. Elle sera notée “DTIC c ” (où c prend la valeur du paramètre considéré).
- La factorisation incomplète de Cholesky “filling level” avec un facteur de remplissage $n_{fl} \in [1; 5]$. Elle sera notée “FLIC n_{fl} ”.
- Le préconditionneur SSOR avec un paramètre de relaxation $\omega \in]0; 2[$. Elle sera notée “SS ω ”.
- La factorisation exacte de Cholesky. Elle sera notée SKY.

Le temps global de condensation va dépendre à la fois du temps nécessaire au calcul du préconditionneur, de l'efficacité du préconditionneur et du stockage adopté.

Pour les trois premiers préconditionneurs, un stockage Morse par ligne est adopté. Le dernier préconditionneur ayant généralement un profil plein, un stockage ligne de ciel par ligne est adopté. Dans tous les cas, on stocke les matrices inférieures et supérieures du préconditionneur afin de minimiser le temps nécessaire à la montée et à la descente du

préconditionneur.

Quelle que soit la méthode de condensation utilisée et quel que soit l'exemple traité, les mêmes tendances ont été observées concernant les performances relatives des préconditionneurs.

Nous présentons ici les temps de calculs ainsi que les pics maximum de mémoire utilisée en cours de résolution, pour chacun des préconditionneurs, dans le cas de la résolution par la méthode de condensation SYMMLQ appliquée à l'exemple Mesh3.

Les résultats sont détaillés dans le tableau V.2 et synthétisés sur les figures V.2 et V.3. Dans le tableau V.2, nous donnons de gauche à droite : le nom du préconditionneur, la valeur du paramètre associé, le temps de calcul du préconditionneur, le temps de condensation, le temps global de résolution, la taille du préconditionneur, le pic maximal de mémoire utilisée, la valeur de δ ajouté à la diagonale.

Ces résultats montrent en premier lieu que le préconditionneur DTIC3 donne un bon compromis entre utilisation mémoire et temps de calcul. Le préconditionneur DTIC6 donne les temps de calcul les plus faibles, car assez proche, en termes de taille de la factorisation complète de Cholesky.

Lors du calcul du préconditionneur FLIC, pour lequel on a choisi de construire la ligne i de L^* en utilisant les lignes précédentes de L^* , le calcul du préconditionneur peut échouer. Il est alors nécessaire d'ajouter un terme diagonal δ le plus faible possible de manière à ce que L^* soit le plus proche possible de L . La procédure utilisée est de démarrer le calcul du préconditionneur sans terme diagonal puis, si le calcul échoue, d'ajouter $\Delta\delta$ (pris ici égal à 0.005) à δ et de redémarrer le calcul du préconditionneur. L'ajout de termes diagonaux semble pénaliser le préconditionneur FLIC qui est alors moins efficace que le préconditionneur DTIC : à taille équivalente, considérons par exemple les préconditionneurs FLIC4 et DTIC3, le temps de calcul est supérieur lors de l'utilisation de la stratégie FLIC.

D'autre part, la comparaison des préconditionneurs DTIC6 et SKY montre qu'il est ici plus coûteux de calculer la factorisation incomplète de Cholesky que sa factorisation exacte. Ceci apparaît évident en rappelant que la factorisation incomplète est ici obtenue en calculant la factorisation complète de laquelle on ne conserve que les termes les plus importants. Ceci s'explique également car, **à nombres de coefficients de la matrice égaux** (par exemple pour une matrice à profil plein), la multiplication d'une matrice par un vecteur est plus coûteuse lorsque la matrice est stockée selon un schéma Morse que lorsqu'elle est stockée selon un schéma ligne de ciel.

Concernant le préconditionneur SSOR, son calcul à l'avantage d'être très rapide, car assez simple, mais ce type de préconditionneur ne s'est pas avéré efficace quand appliqué aux types de matrices associés à la méthode duale.

Pour conclure, ces résultats confirment que puisque le même préconditionneur est utilisé de nombreuses fois lors de la condensation du système, il est préférable de consacrer suffisamment de temps à son calcul afin de maximiser son efficacité.

Parmi les différents préconditionneurs proposés, nous ne retenons donc que les préconditionneurs DTIC3, DTIC6 et SKY pour la suite.

Nom	Paramètre	Tprec	Tcond	Ttotal	Taille L^*	Maxmem	δ
Unité		s	s	s	nb termes	Mb	
DTIC2	2	5,92	258,66	258,72	171548	31,84	
DTIC3	3	6,61	91,50	91,56	353749	36,66	
DTIC4	4	9,73	58,54	58,60	655518	43,58	
DTIC5	5	13,45	43,50	43,56	1005769	51,59	
DTIC6	6	15,52	41,10	41,16	1204640	56,14	
FLIC1	1	5,99	546,54	546,60	80018	29,74	3,5.10-2
FLIC2	2	5,98	292,95	293,01	159908	31,64	5.10-3
FLIC3	3	13,11	258,99	259,05	239097	33,31	5.10-3
FLIC4	4	19,23	285,38	285,44	317324	35,85	5.10-3
FLIC5	5	24,65	315,80	315,86	393895	37,60	5.10-3
SKY		6,91	14,50	14,56	1264705	47,87	
SS02	0,2	2,46	1571,28	1571,34	80018	30,67	
SS04	0,4	2,61	1258,93	1258,99	80018	30,67	
SS06	0,6	2,64	1081,68	1081,74	80018	30,67	
SS08	0,8	2,62	975,84	975,90	80018	30,67	
SS10	1	2,60	921,31	921,37	80018	30,67	
SS12	1,2	2,65	926,26	926,32	80018	30,67	
SS14	1,4	2,70	984,78	984,84	80018	30,67	
SS16	1,6	2,78	1136,87	1136,93	80018	30,66	
SS18	1,8	2,88	1457,94	1458,00	80018	30,66	

TAB. V.2 – Résultats obtenus pour différents préconditionneurs appliqués à la méthode de condensation SYMMLQ sur l'exemple Mesh3 (6287 ddl)

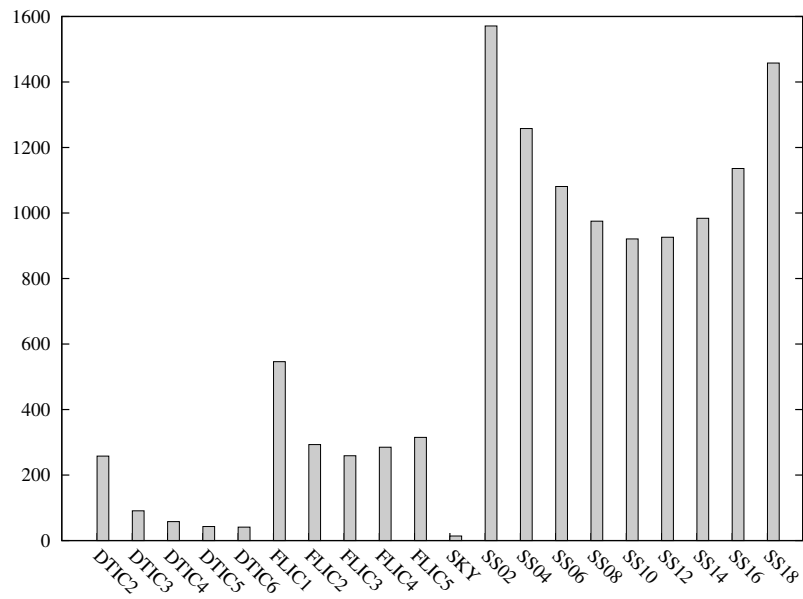


FIG. V.2 – Comparaison des préconditionneurs : Temps globaux de calcul (secondes)

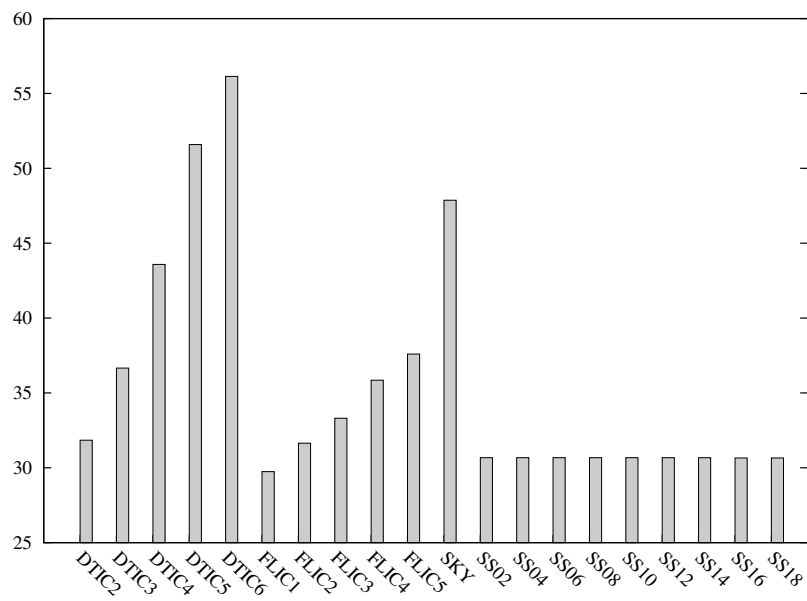


FIG. V.3 – Comparaison des préconditionneurs : Utilisation mémoire (en Mb).

V.1.3 Comparaisons des méthodes

Dans la section précédente, trois préconditionneurs destinés aux méthodes itératives ont été retenus. Dans cette section, nous comparons les méthodes de résolution suivantes :

- La méthode de condensation SYMMLQ, couplée aux préconditionneurs DTIC3, DTIC6 et SKY, dont les résultats sont respectivement notés SDTIC3, SDTIC6 et SSKY.
- La méthode de condensation en trois étapes directe notée 3STEPD.
- La méthode de condensation en trois étapes itérative couplée aux préconditionneurs DTIC3 et DTIC6, dont les résultats sont respectivement notés 3STEPD3 et 3STEPD6.
- La résolution par l’algorithme d’Uzawa notée ALM.

Notons que dans le cas de la méthode directe basée sur la factorisation LDL^T , les matrices triangulaires inférieure et supérieure (L et L^T issues de la factorisation) sont stockées dans les parties inférieure et supérieure de la matrice initiale S , en utilisant un stockage en ligne de ciel ordonné par ligne.

D’autre part, la convergence de l’algorithme d’Uzawa dépend grandement du choix du jeu de paramètres r et ρ . Le paramètre r définit le poids des produits $C_F^T C_F$ et $C_C^T C_C$ vis à vis de la matrice S , les matrices C_F et C_C sont multipliées par les facteurs p_F et p_C définis tels que :

$$\begin{aligned} p_F &= \frac{\sqrt{\text{moyenne}(S)}}{\text{moyenne}(C_F)} \\ p_C &= \frac{\sqrt{\text{moyenne}(S)}}{\text{moyenne}(C_C)} \end{aligned} \tag{V.1}$$

de manière à donner une importance équivalente au paramètre r quel que soit l’exemple traité.

De plus, n’ayant pas de critère pour choisir le jeu de paramètres (r, ρ) , pour chaque exemple, plusieurs jeux de paramètres ont été préalablement testés pour r et $\rho \in [1; 20; 40; 60; 80; 100; 200; 300]$ et le meilleur jeu de paramètres a été retenu pour les comparaisons suivantes.

Les temps de calcul et pics maximums d’utilisation mémoire sont respectivement synthétisés sur les figures V.4 et V.5.

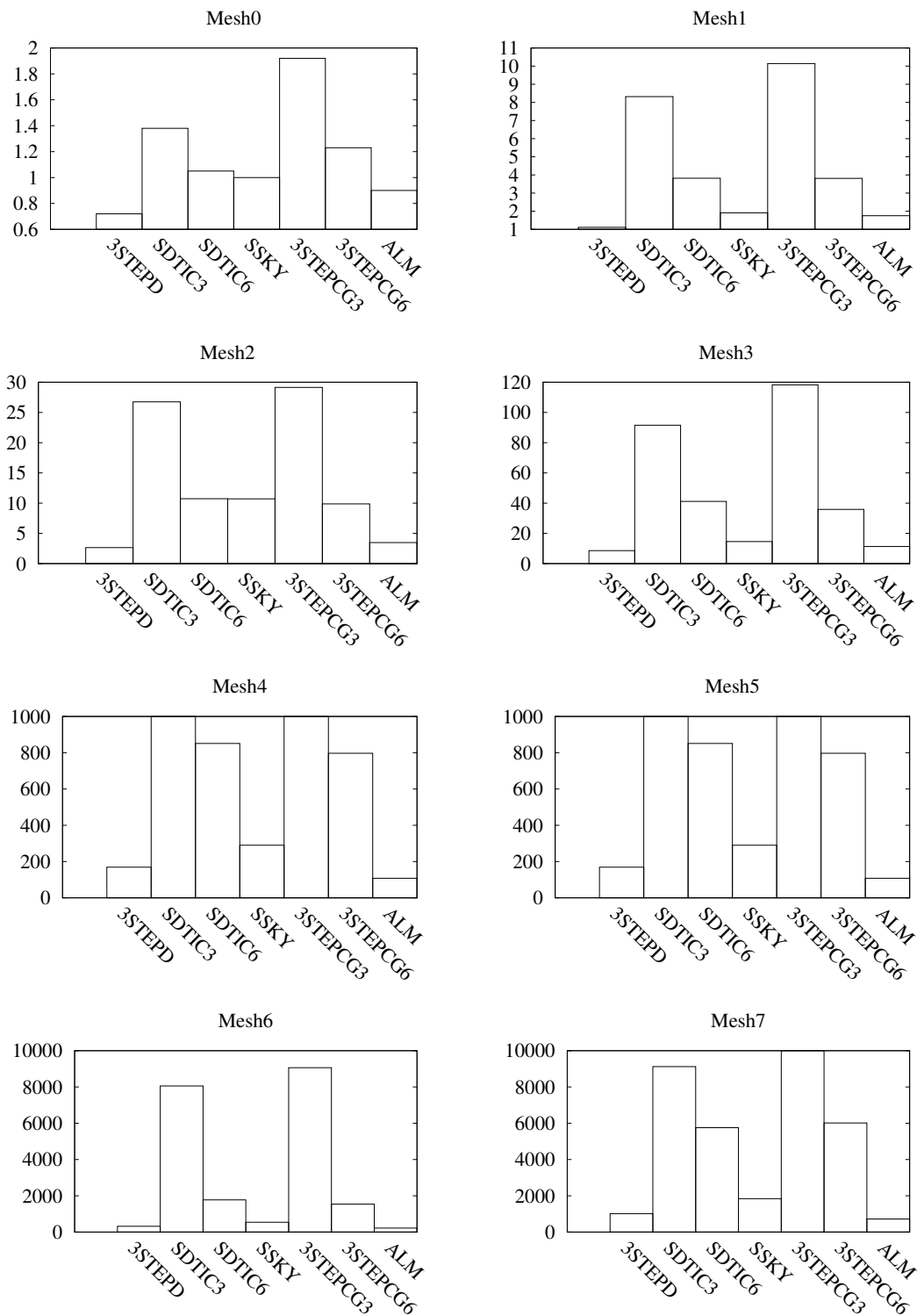


FIG. V.4 – Comparaisons entre temps de calculs (en secondes)

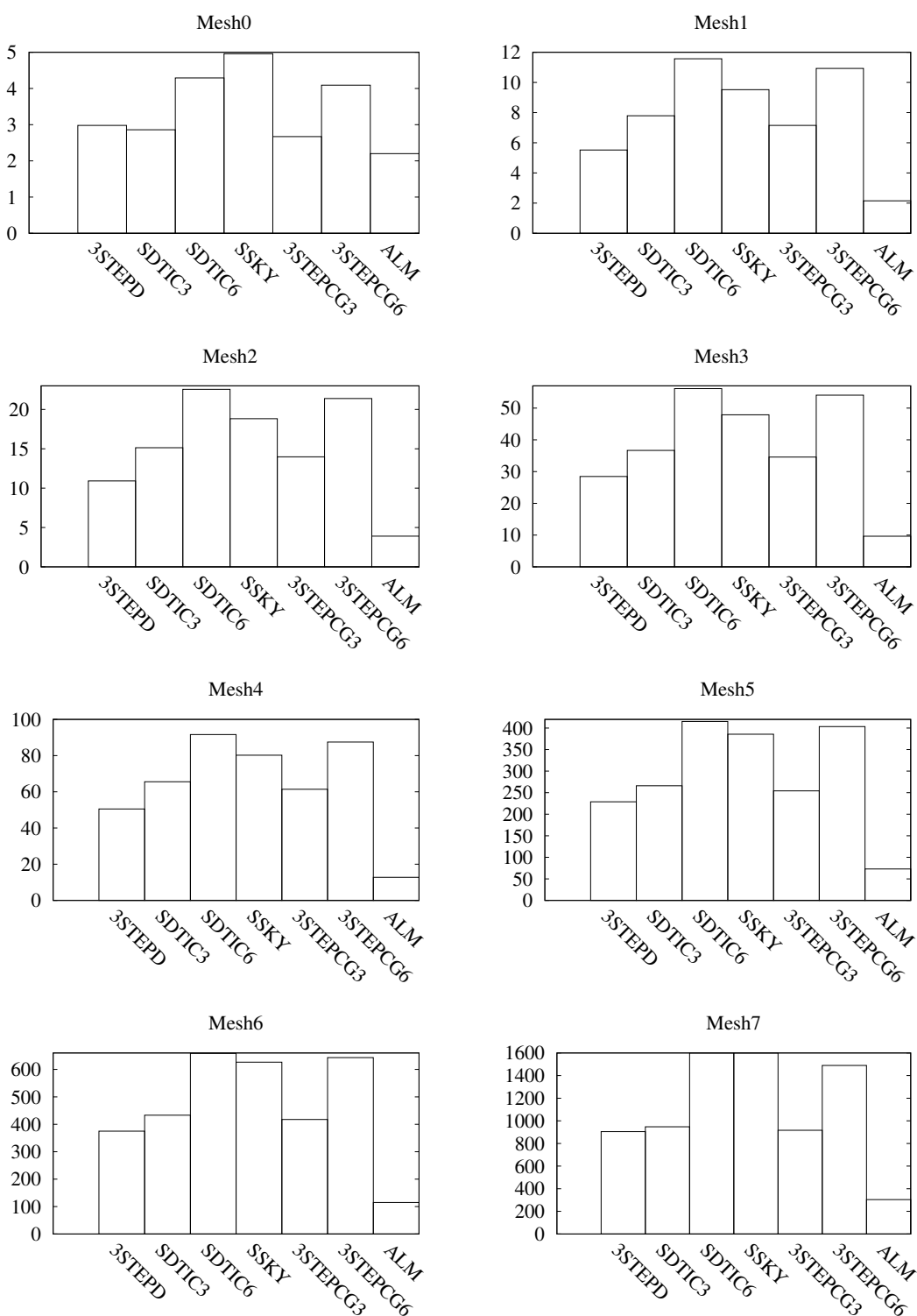


FIG. V.5 – Comparaisons des consommations mémoire (en Mb)

La comparaison des résultats SDTIC3 avec 3STEP3 et SDTIC6 avec 3STEP6 montre que les méthodes de condensation SYMMLQ et 3STEP3 donnent respectivement des résultats très proches, en termes de temps de calcul et d'utilisation mémoire, sur les exemples considérés. Mais ces quatre méthodes se sont ici montrées les moins efficaces. La comparaison des résultats issus des méthodes de condensation SYMMLQ, 3STEP3 et

3STEPD laissent penser que le conditionnement de la matrice de souplesse rend les méthodes itératives peu efficaces. Même en utilisant le préconditionneur SKY, très proche de la matrice S , la méthode directe est plus rapide. De plus, les méthodes itératives demandent à la fois le stockage de la matrice S et du préconditionneur, ce qui les rend coûteuses du point de vue de la consommation mémoire.

Les méthodes 3STEPD et ALM se sont donc montrées, pour les problèmes traités, les plus efficaces, nécessitant des temps de calcul équivalents sur tous les exemples, bien que légèrement plus faibles pour la méthode ALM.

Les avantages majeurs de la méthode ALM sont sa rapidité et sa grande sobriété en termes d'utilisation mémoire. L'inconvénient majeur rencontré ici est qu'il n'existe, à notre connaissance, pas de critère pour déterminer les valeurs de paramètres r et ρ pour ce type de problème.

Les avantages de la méthode 3STEPD sont sa rapidité et sa robustesse : contrairement à la méthode ALM, la détermination d'aucun paramètre n'est nécessaire, de plus s'agissant d'une méthode directe et la partie itérative ne représentant qu'une partie faible en termes de temps de calcul, le temps nécessaire est totalement prédictible. Néanmoins, cette méthode est plus coûteuse en termes d'utilisation mémoire du fait du stockage en mémoire des matrices intermédiaires aux étapes de condensation. Une stratégie de stockage sur disque adéquate peut permettre de contourner ce problème. Un autre point non traité ici mais tout à fait d'actualité vis à de la modernisation des technologies informatiques, est la parallélisation de cette méthode.

V.2 Conclusion

Nous avons comparé, dans ce chapitre, les différentes méthodes de résolution proposées précédemment. Lors de l'utilisation de méthodes itératives, un bon préconditionneur se caractérise généralement par un bon équilibre entre le temps nécessaire à sa construction et le temps nécessaire à la résolution du système. Au vu du type de problèmes à traiter ici, quel que soit le préconditionneur utilisé, le temps de construction est faible vis à vis du temps de résolution. Notre choix s'est donc porté sur des préconditionneurs dont l'efficacité de résolution est la plus forte.

Ce choix fait, les diverses méthodes de résolution ont été comparées et il a été montré qu'au vu du type et de la taille des problèmes à résoudre, l'utilisation de méthodes de condensation basées sur des méthodes de résolution itératives n'était pas avantageux. Deux méthodes de résolution se sont montrées particulièrement efficaces : La méthode du Lagrangien Augmenté et la méthode de condensation en trois étapes directe.

Chapitre VI

VALIDATION DU MODÈLE DUAL

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la validation du modèle dual développé précédemment. Cette validation est basée sur la comparaison des résultats des méthodes primale et duale appliquées à des exemples simples. Nous traitons dans la première partie un exemple sans contact, les solutions primale et duale sont comparées pour plusieurs niveaux de raffinement de maillages à une solution de référence obtenue en utilisant la méthode primale et un maillage fin. Dans la seconde partie, nous traitons un problème classique de contact avec frottement. Les résultats sont tout d'abord comparés sur la zone de contact, puis nous analysons l'évolution de l'erreur en fonction du raffinement des maillages des deux approches par comparaison à une solution de référence. Ces comparaisons montrent que la méthode duale fournit de meilleurs résultats que la méthode primale à nombre de degrés de liberté équivalent. Une explication qualitative de cette observation, présentée dans la troisième partie, montre l'importance du lien direct entre efforts de contact et contraintes sur le volume dans le cas dual.

VI.1 Validation du modèle éléments finis équilibre

Nous comparons en premier lieu les résultats issus du modèle d'éléments finis équilibre sur le problème présenté sur la figure VI.1 ne présentant pas de contact. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$.

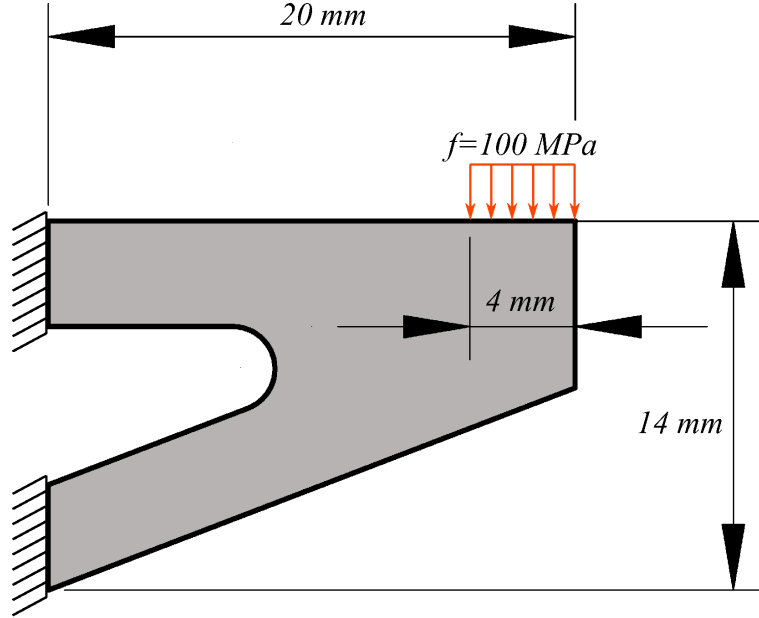


FIG. VI.1 – Problème élastique sans contact

De manière à évaluer la précision du modèle, nous considérons comme solution de référence la solution du problème obtenue par la méthode des éléments finis en déplacements avec un maillage très raffiné d'éléments P1 (13554 noeuds).

Nous faisons la comparaison des résultats avec la solution de référence sur une estimation de l'erreur :

$$e = \left(\int_{\Omega} (\sigma_{ref} - \sigma) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ref} - \sigma) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.1})$$

où σ_{ref} représente le champ de contrainte de référence et σ le champ de contrainte issu de la solution évaluée. Nous évaluons numériquement l'erreur par l'approximation :

$$e^* = \left(\sum_p (\sigma_{ref}(p) - \sigma(p)) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ref}(p) - \sigma(p)) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.2})$$

où p représente l'ensemble des points de Gauss du maillage de référence.

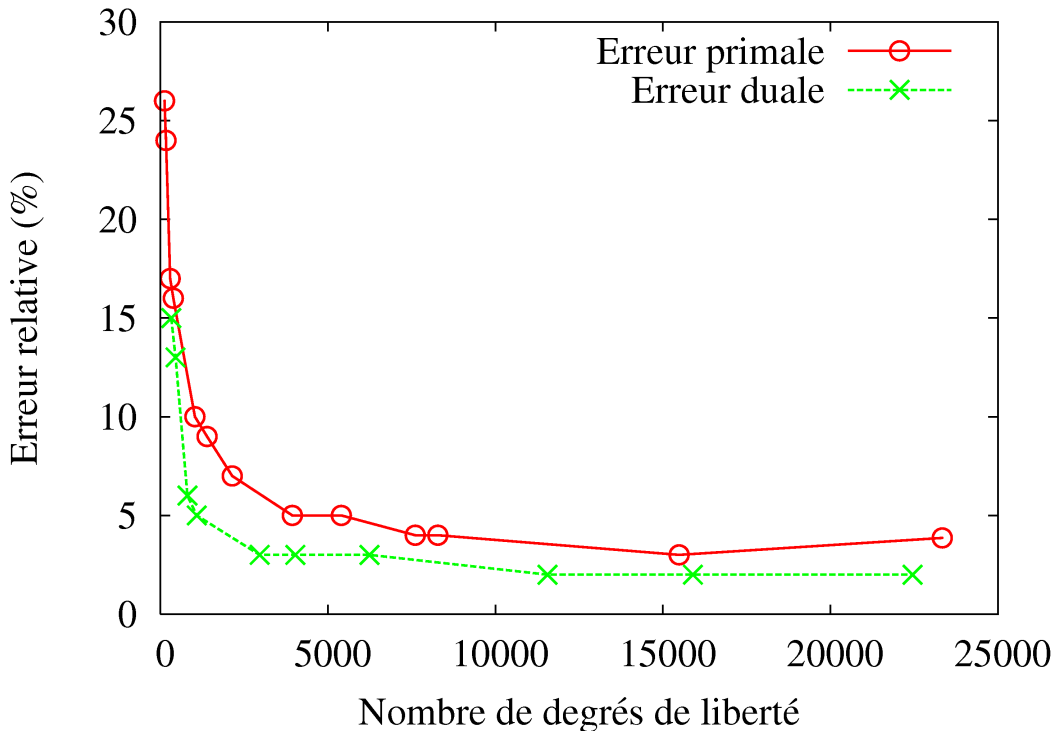


FIG. VI.2 – Evolution de l'erreur relative en fonction du raffinement

L'erreur relative est alors évaluée par :

$$Re^* = 100 \left(\frac{\sum_p (\sigma_{ref}(p) - \sigma(p)) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ref}(p) - \sigma(p))}{\sum_p (\sigma_{ref}(p)) \mathbb{K}^{-1} (\sigma_{ref}(p))} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (VI.3)$$

$\sigma_{ref}(p)$ et $\sigma(p)$ représentent alors respectivement les valeurs du champ de contrainte de référence et évalué prises aux points de Gauss du maillage de référence. Notons que dans le cas d'une modélisation par éléments finis équilibre, la valeur de σ aux points de Gauss est directement accessible. Dans le cas d'une modélisation par éléments finis en déplacement P1, les valeurs de σ ne sont connues qu'aux points de Gauss du maillage évalué, c'est cette valeur qui est alors prise en compte pour le calcul de l'erreur.

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté est présentée sur la figure VI.2 dans le cas de l'utilisation des méthodes d'éléments finis en déplacements P1 (primal) et en contraintes HCT (dual).

Comme attendu, à nombre de degrés de liberté égal, la méthode d'éléments finis équilibre fournit une meilleure approximation du champ de contrainte que la méthode d'éléments finis en déplacements. Ceci est principalement dû au fait que les conditions aux limites de type efforts, auxquelles les conditions de surfaces libres appartiennent, sont vérifiées exactement dans le cas dual et dépendent du maillage dans le cas primal.

VI.2 Validation des résultats de contact

On s'intéresse ici à la validation des résultats de contact et de frottement sur le benchmark d'écrasement d'un lopin, présenté sur la figure VI.3. Ce benchmark fut défini par [RCL88] et très largement adopté pour la validation d'algorithmes de résolution de problèmes de contact. Principalement car il permet l'obtention aisée de nombreuses configurations de contact (division de la zone de contact en zones d'adhérence, de glissement et de décollement).

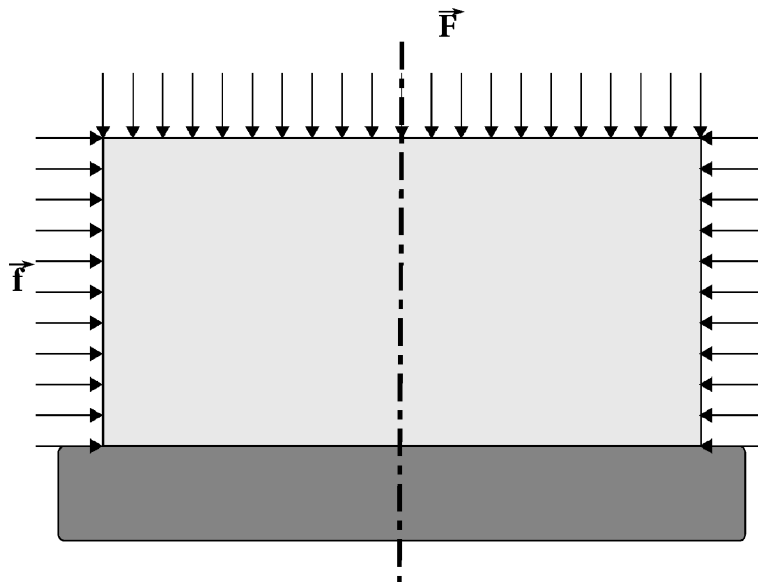


FIG. VI.3 – Benchmark de compression d'un lopin

Les caractéristiques du matériau sont $E = 130 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.2$. Les résultats obtenus permettent de définir plusieurs zones de contact pouvant être : zone de décollement pour $\sigma_N = 0$, zone de glissement pour $|\sigma_T| = \mu|\sigma_N|$ et zone d'adhérence pour $|\sigma_T| < \mu|\sigma_N|$. Le problème est traité par symétrie et sous l'hypothèse des déformations planes. Ce benchmark présente l'avantage de pouvoir faire apparaître aisément ces différentes zones selon les valeurs des efforts f et F et du coefficient de frottement.

Nous comparons les résultats obtenus par les méthodes primale et duale sur un maillage homogène non structuré identique présentant 31 points de contact pour différentes valeurs de f , F et μ .

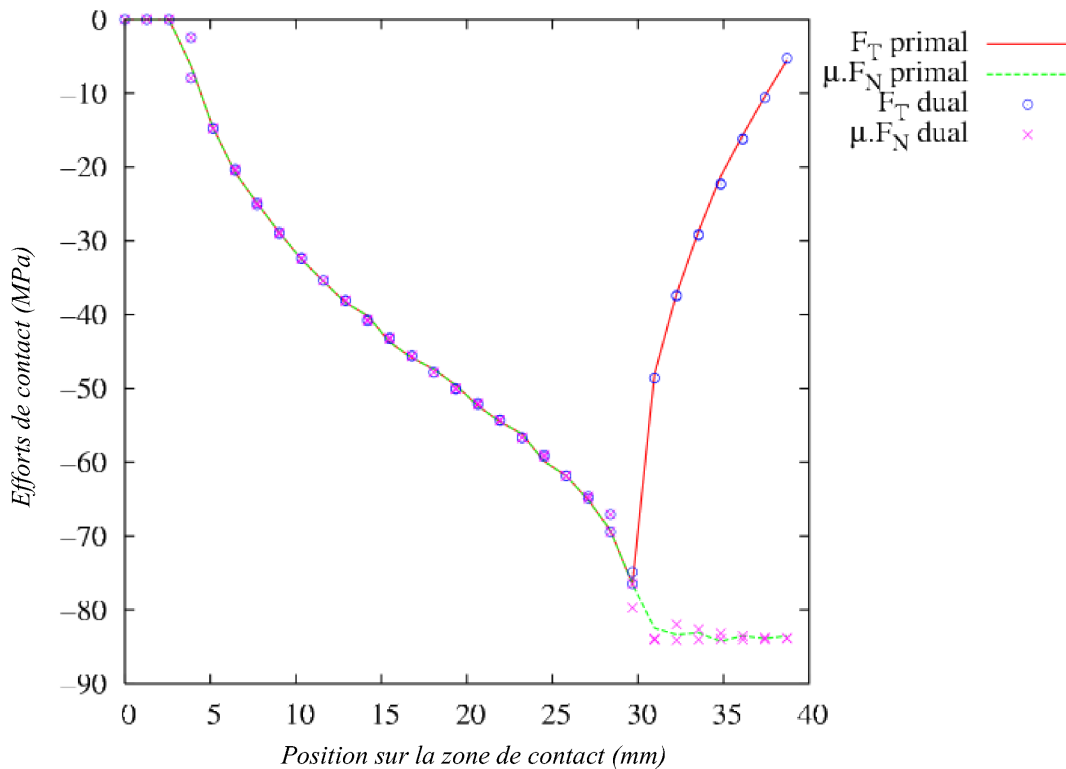


FIG. VI.4 – Efforts de contact obtenus par les méthodes primale et duale avec $F = 50MPa$, $f = 150MPa$ et $\mu = 1$. (éléments triangulaires)

Nous comparons sur la figure VI.4 les efforts de contact obtenus par les deux méthodes pour le jeu de paramètres $F = 50MPa$, $f = 150MPa$ et $\mu = 1$. Cette figure met en évidence les possibilités de discontinuités du champ de contrainte issu de la formulation duale. Pour d'autres jeux de paramètres, les dimensions des différentes zones de statut de contact sont présentées sur le tableau VI.1.

μ	F	f	décollement	glissement	adhérence
1	50	150	2.58	27.09	9.03
1	50	100	2.58	19.35	16.77
0.2	50	100	0	38.70	0
0.2	250	100	0	2.58	36.12
0.2	150	100	0	21.93	16.77

TAB. VI.1 – Taille des différentes zones de statut de contact

Les résultats issus des deux méthodes sont en excellent accord. Notons que ces résultats correspondent bien aux résultats obtenus dans [RCL88] aux choix de discrétisation effectués près, et que comme présenté sur la figure VI.5, les mêmes accords avaient été obtenus en comparant l'utilisation de l'élément dual BFS avec celle d'élément primal quadrilatère.

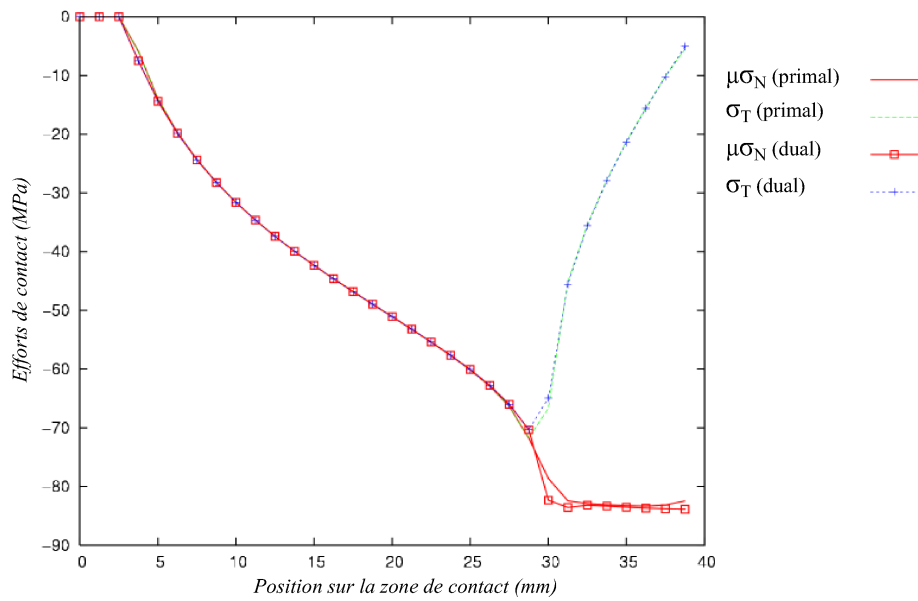


FIG. VI.5 – Efforts de contact obtenus par les méthodes primale et duale avec $F = 50MPa$, $f = 150MPa$ et $\mu = 1$. (éléments quadrangles)

D'autre part, la comparaison des erreurs relatives calculées par VI.3 sur le problème de contact d'une dent présenté dans le chapitre V montre qu'à nombre de degrés de liberté égal, la méthode duale donne de meilleurs résultats en termes de contraintes. Ces résultats sont présentés sur la figure VI.6.

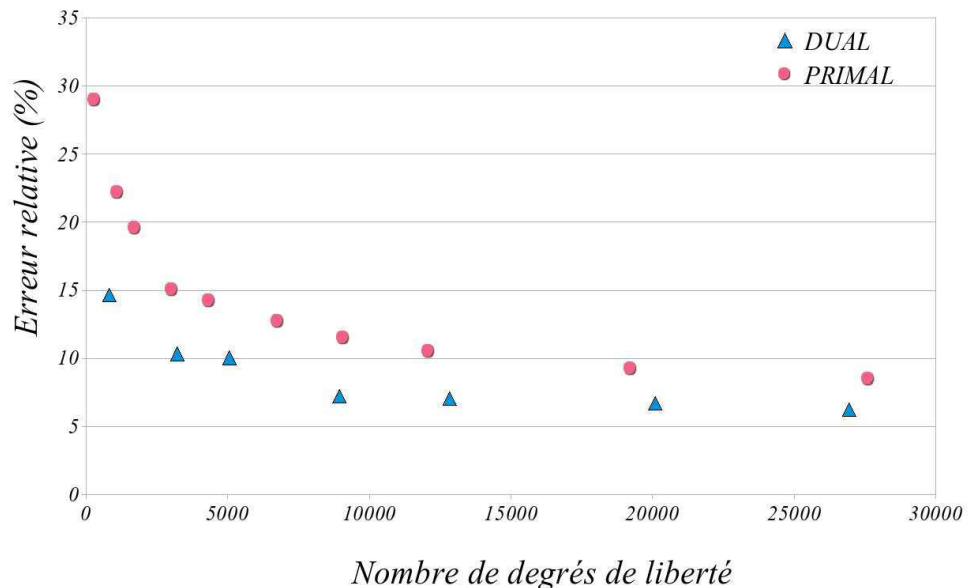


FIG. VI.6 – Evolution des erreurs relatives. Problème de contact d'une dent.

VI.3 Influence des résultats de contact sur le champ de contrainte

Comme vu précédemment, de part le lien direct entre les conditions limites de type efforts et le champ de contraintes, l'utilisation de la méthode duale permet d'obtenir une meilleure approximation du champ de contrainte qu'avec la méthode primale. Il en va de même pour les résultats de contact, comme présenté sur la figure VI.7 dans le cas primal, les efforts de contact sont obtenus par utilisation de multiplicateurs ou des résidus d'équilibre, il existe donc un écart entre ces efforts et les contraintes, dépendant du maillage. Dans le cas dual, les conditions de contact et de frottement sont directement appliquées au champ de contrainte.

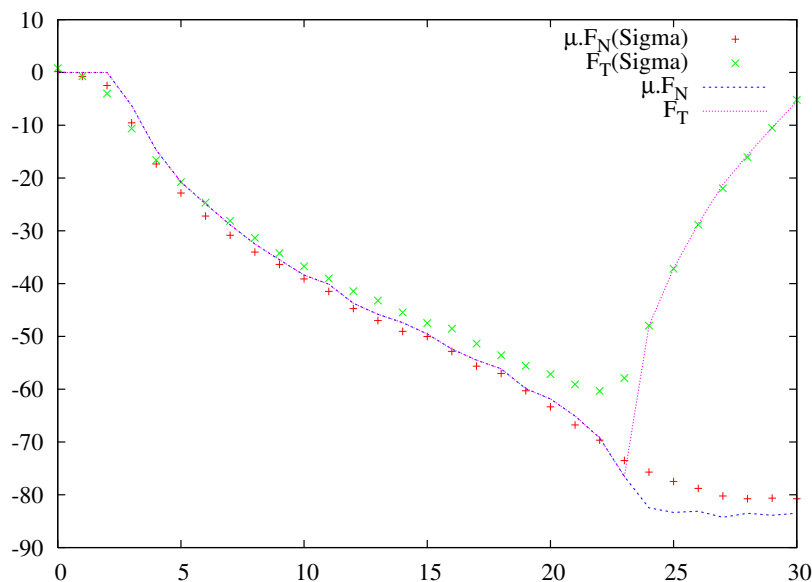


FIG. VI.7 – Ecart entre contraintes projetées et efforts de contact sur la solution primale, cas $F = 50\text{MPa}$, $f = 150\text{MPa}$ et $\mu = 1$. (éléments triangulaires)

Les cartes de contraintes de la composante σ_{xy} du champ de contrainte sont représentées sur la figure VI.8 pour les solutions duale et primale et pour différents niveaux de raffinement homogènes (3 par 3 signifie que chaque bord du carré est découpé en trois parties). Ces cartes montrent qu'à discrétisation égale, grâce au lien direct entre le champ de contrainte et les efforts de contact, on approche plus rapidement la solution "exacte" à l'aide de la méthode duale qu'à l'aide la méthode primale.

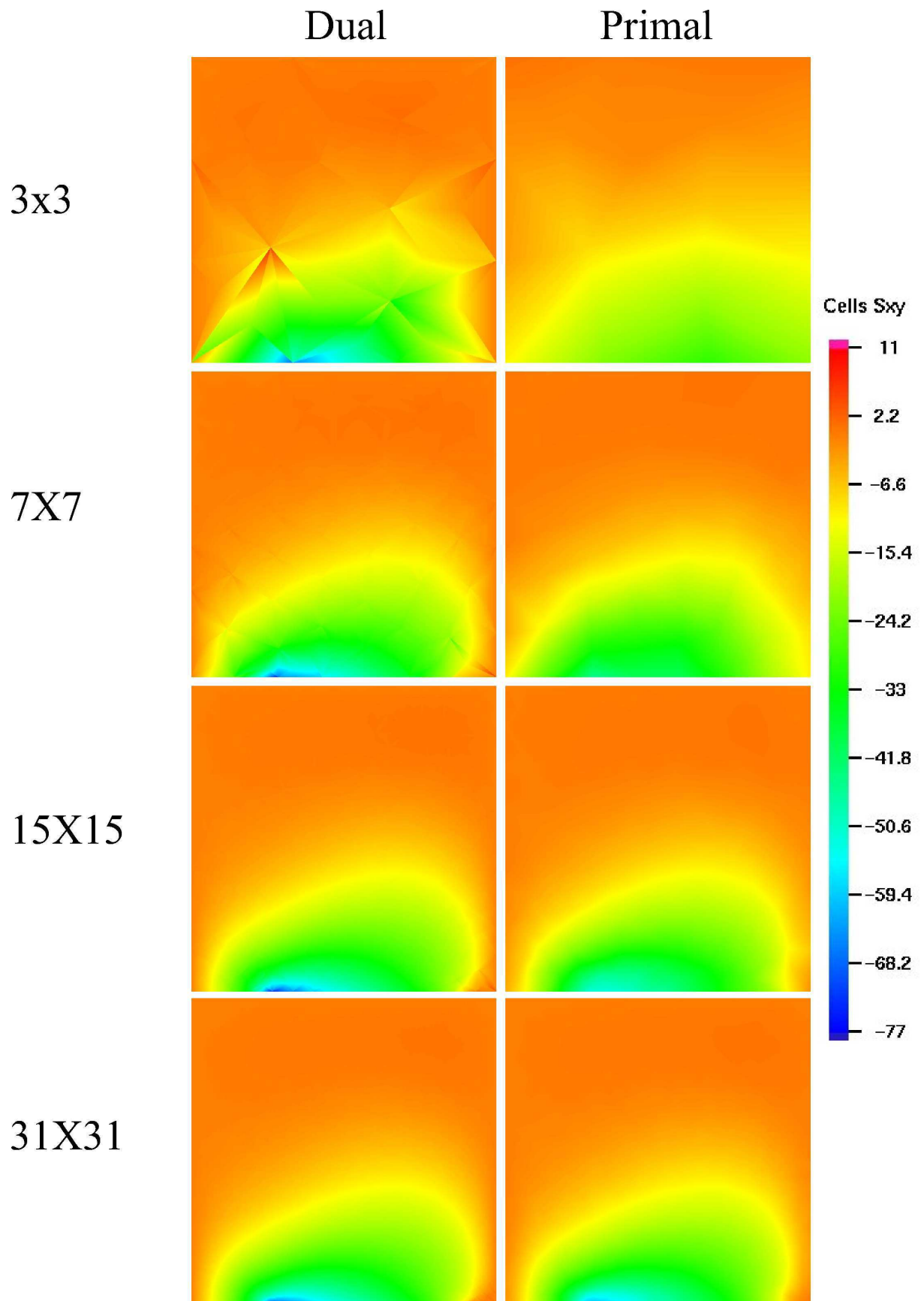


FIG. VI.8 – évolution de la composante σ_{xy} en fonction du raffinement du maillage

VI.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes primale et duale ont été comparées sur différents exemples. Dans les cas sans contact, il a été montré que la formulation duale fournit une meilleur approximation du champ de contrainte que la méthode primale, ceci à nombre de degrés de liberté équivalent.

Dans les cas avec contact et frottement, un excellent accord des résultats issus des deux méthodes a été observé sur la zone de contact. La comparaison des deux méthodes sur le volume a ici aussi démontré la qualité des résultats issus de la méthode duale.

Pour finir, nous avons noté que la méthode duale présente l'avantage de voir les conditions de contact et de frottement directement appliquées sur le champ de contrainte, ce qui peut contribuer à la qualité des résultats obtenus.

Chapitre VII

VALIDATION DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR

RÉSUMÉ

Nous nous attachons dans ce chapitre à l'évaluation de l'efficacité de l'estimateur présenté dans le chapitre II. Pour cela, l'estimateur d'erreur est comparé à une approximation de l'erreur réelle dont la construction est présentée dans la première partie. Les problèmes de contact d'un lopin et d'une dent sont à nouveau utilisés dans ce chapitre. L'efficacité de l'estimateur d'erreur est évaluée dans la seconde partie sur des maillages homogènes de ces deux exemples et montre un très bon accord de l'estimateur d'erreur avec l'approximation de l'erreur réelle. L'estimateur d'erreur est ensuite appliqué aux procédures de raffinement de maillage et de remaillage présentées dans la section II.5.

VII.1 Comparaison à une solution de référence

De manière à évaluer l'efficacité de l'estimateur d'erreur construit précédemment, nous calculons dans un premier temps, une erreur de référence basée sur la comparaisons des champs cinématiquement et statiquement admissibles u_h et σ_h à une solution de référence cinématiquement admissible, calculée sur un maillage suffisamment raffiné pour être considérée proche de la solution exacte du problème. L'approximation de l'erreur de référence est alors calculée par :

$$e_{ref} = \sqrt{\|\Delta u\|_{ref}^2 + \|\Delta \sigma\|_{ref}^2} \quad (\text{VII.1})$$

avec

$$\|\Delta u\|_{ref}^2 = \sum_{i=1}^{NPG_{ref}} A_{ref}^{(i)} \left[\left(\mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}^{(i)}) - \mathbb{K}\varepsilon(u_h^{(i)}) \right) \mathbb{S} \left(\mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}^{(i)}) - \mathbb{K}\varepsilon(u_h^{(i)}) \right) \right] \quad (\text{VII.2})$$

et

$$\|\Delta \sigma\|_{ref}^2 = \sum_{i=1}^{NPG_{ref}} A_{ref}^{(i)} \left[\left(\mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}^{(i)}) - \sigma_h^{(i)} \right) \mathbb{S} \left(\mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}^{(i)}) - \sigma_h^{(i)} \right) \right] \quad (\text{VII.3})$$

où NPG_{ref} désigne le nombre de points de Gauss du maillage de référence, $A_{ref}^{(i)}$ désigne la surface de l'élément du maillage de référence associé au $i^{\text{ème}}$ point de Gauss et $\mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}^{(i)})$ désigne le champ de contrainte de référence calculé en ce même point de Gauss.

Dans le calcul de $\|\Delta u\|_{ref}^2$, $\mathbb{K}\varepsilon(u_h^{(i)})$ désigne le champ de contrainte calculé à partir de la solution évaluée u_h , au point de Gauss de l'élément du maillage évalué contenant le $i^{\text{ème}}$ point de Gauss du maillage de référence. Dans le calcul de $\|\Delta \sigma\|_{ref}^2$, $\sigma_h^{(i)}$ est la valeur du champ de contrainte statiquement admissible σ_h , calculée au $i^{\text{ème}}$ point de Gauss du maillage de référence.

Notons que cette approximation du calcul de l'erreur revient à considérer les champs de contraintes issus des solutions primale et duale constants sur un élément de référence.

Dans cette comparaison, les différentes mesures de l'erreur sont exprimées relativement à l'énergie de déformation de la solution de référence, définie par :

$$U_{ref} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ref}} \varepsilon(u_{ref}) \mathbb{K}\varepsilon(u_{ref}) d\Omega_{ref} \quad (\text{VII.4})$$

Les erreurs relatives en déplacement et en contrainte s'expriment alors par :

$$\|\tilde{\Delta} u\|_{ref} = \frac{\|\Delta u\|_{ref}}{\sqrt{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.5})$$

$$\|\tilde{\Delta} \sigma\|_{ref} = \frac{\|\Delta \sigma\|_{ref}}{\sqrt{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.6})$$

de manière à ce que ces erreurs valent 1 lorsque elles sont totales (u_h et σ_h nuls). L'erreur relative globale de référence s'exprime alors par :

$$\tilde{e}_{ref} = \frac{e_{ref}}{\sqrt{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.7})$$

Dans cette section, l'estimateur d'erreur relative s'exprime par :

$$\tilde{e}_{estim} = \frac{e_{estim}}{\sqrt{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.8})$$

Nous comparons également les valeurs relatives de l'erreur sur la zone de contact, l'erreur relative de référence sur le contact étant définie à partir de II.4.1.6 par :

$$\tilde{e}_{Cref} = \sqrt{\frac{2 \int_{\Gamma_C} (\Delta\sigma_{ref}n)\Delta u_{ref} d\Gamma}{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.9})$$

L'erreur relative de contact estimée est définie à partir de II.4.3.2 par :

$$\tilde{e}_{Cestim} = \sqrt{\frac{2 \int_{\Gamma_C} (I(w) + I_{\Sigma}(r) + \mu|r_N||w_T| + r_T w_T + r_N w_N) d\Gamma}{2U_{ref}}} \quad (\text{VII.10})$$

VII.1.1 Exemples traités

VII.1.1.1 Contact d'un lopin

Nous comparons les valeurs d'erreur estimées aux valeurs de référence obtenues sur l'exemple de compression d'un lopin présenté dans la section VI.2 pour les valeurs $F = 50 \text{ MPa}$, $f = 150 \text{ MPa}$ et $\mu = 1.$. Ces comparaisons sont effectuées sur différents maillages homogènes du demi-lopin présentés sur la figure VII.1. Les noms "Lopin X" attribués aux maillages signifient que chaque bord du maillage comporte X noeuds. Le maillage de référence, noté "Lopin ref" est construit à l'aide de GMSH en imposant une longueur caractéristique de 0.4 mm sur chaque bord et une longueur caractéristique de 0.12 mm sur le bord de contact (le demi-lopin étant un carré de 40 mm de coté).

Les valeurs de l'erreur sont présentées sur le tableau VII.1, ces résultats montrent que l'erreur en contrainte est inférieure à l'erreur en déplacement, car les calculs sont effectués pour des maillages primal et dual identiques, le maillage dual comportant alors plus de degrés de liberté que le maillage primal. D'autre part, l'estimation d'erreur est très proche de l'erreur calculée par rapport à la solution de référence. La partie de l'estimateur d'erreur calculée sur la zone de contact, est ici supérieure à l'erreur de référence de contact qui est sur ces exemples presque toujours négative.

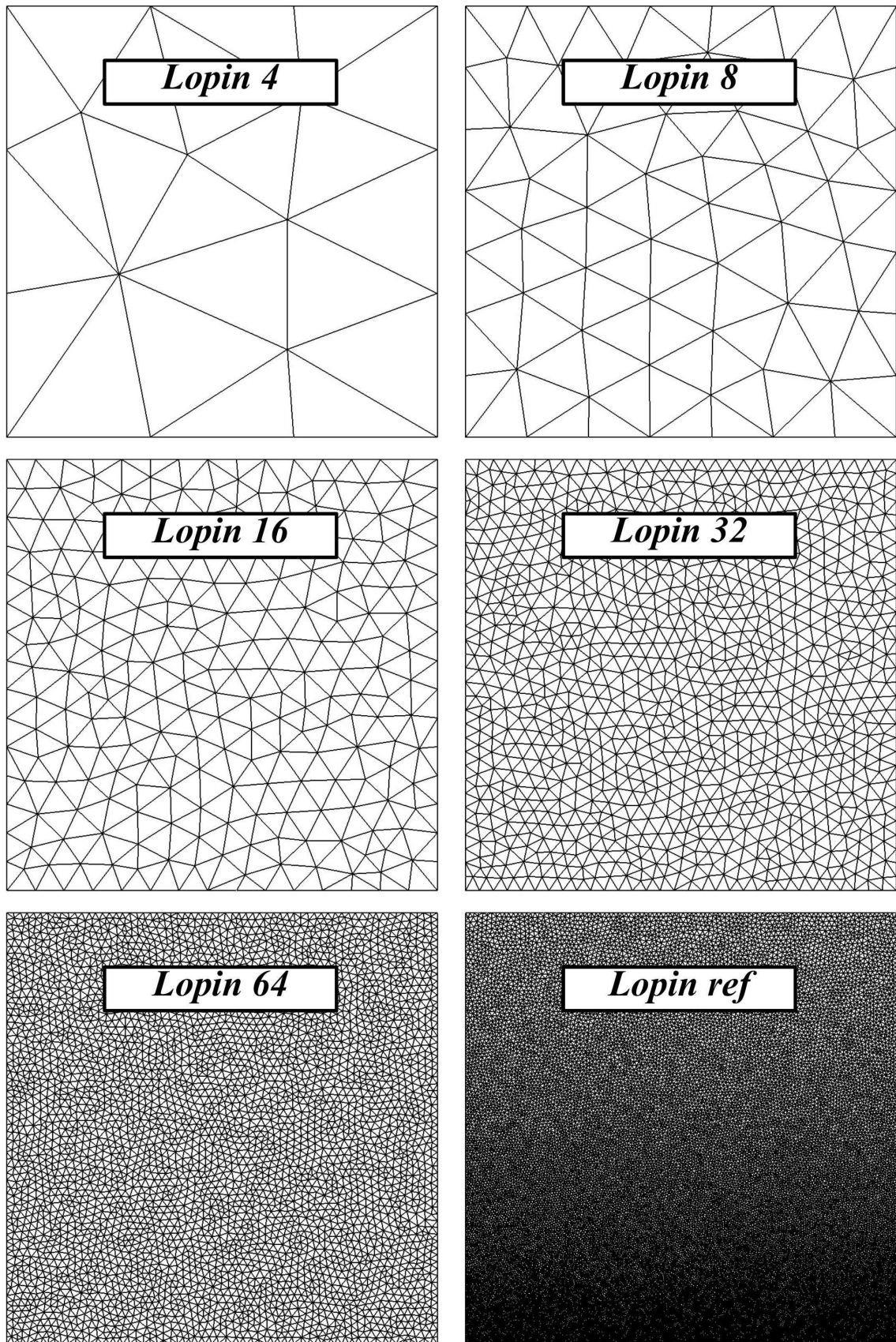


FIG. VII.1 – Maillages du demi-lopin utilisés pour la validation de l'estimateur d'erreur

Maillage	$\ \tilde{\Delta}u\ _{ref}$	$\ \tilde{\Delta}\sigma\ _{ref}$	\tilde{e}_{ref}	\tilde{e}_{estim}	$\tilde{e}_{C_{ref}}$	$\tilde{e}_{C_{estim}}$	noeuds	éléments
Lopin4	14.12	3.75	14.61	16.16	2.26	7.27	18	22
Lopin8	6.63	1.09	6.72	6.95	0.95	2.03	65	100
Lopin16	3.1	0.37	3.12	3.18	0.24	0.65	256	450
Lopin32	1.54	0.19	1.55	1.54	0.21	0.14	1010	1896
Lopin64	0.79	0.16	0.81	0.78	0.21	0.08	4021	7788

TAB. VII.1 – Problème de contact du lopin : Comparaison des valeurs de l’erreur estimée à une erreur de référence (Valeurs exprimées en %)

On trace, sur la figure VII.2 et pour l’exemple noté “Lopin 16”, d’une part la contribution sur chaque segment de contact du maillage évalué à $\tilde{e}_{C_{estim}}$ divisée par la longueur du segment, de l’autre, la contribution sur chaque segment de contact du maillage de référence à $\tilde{e}_{C_{ref}}$ divisée par la longueur du segment.

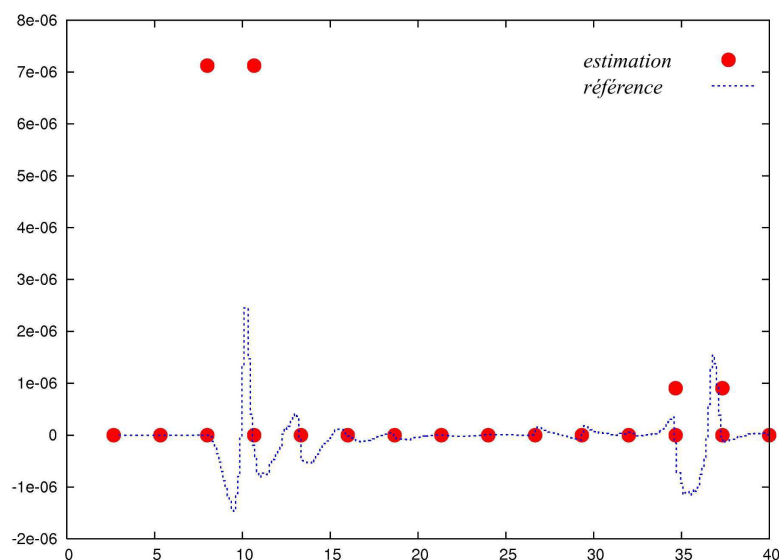


FIG. VII.2 – Contributions aux erreurs de contact (Lopin 16)

Sur cette exemple, bien qu’éloigné de la valeur de référence, l’estimateur d’erreur permet de clairement localiser les zones de transition de statut de contact.

VII.1.1.2 Contact d’une dent

Le second exemple est similaire à un des exemples traités dans la section V, il est présenté sur la figure VII.3 et traite du problème de contact d’une dent en acier sur un obstacle rigide. Le contact s’effectue sur Γ_C et un déplacement vertical est imposé sur Γ_D . Le coefficient de frottement est pris égal à 0,2. Notons que la géométrie est uniquement constituée de droites dans le but d’obtenir une surface maillée équivalente quel que soit le niveau de raffinement du maillage.

Pour cet exemple, le maillage de référence à été obtenu par remaillage afin de présenter une erreur globale estimée de moins de 5%, il est présenté sur la figure VII.4. Les différents maillages évalués sont présentés sur la figure VII.5, chacun d'entre eux à été obtenu à l'aide de GMSH en imposant les longueurs caractéristiques h notées sur la figure.

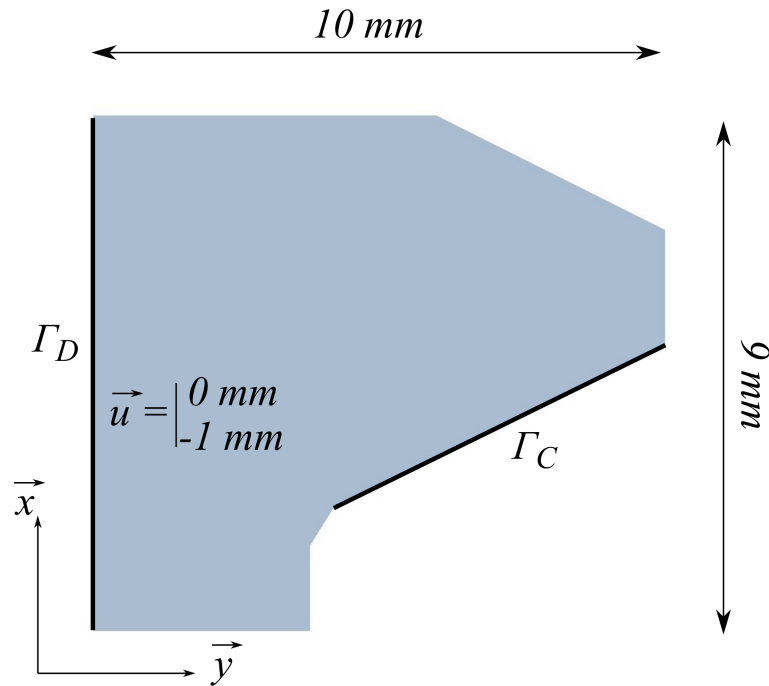


FIG. VII.3 – Problème de contact d'une dent sur un obstacle rigide

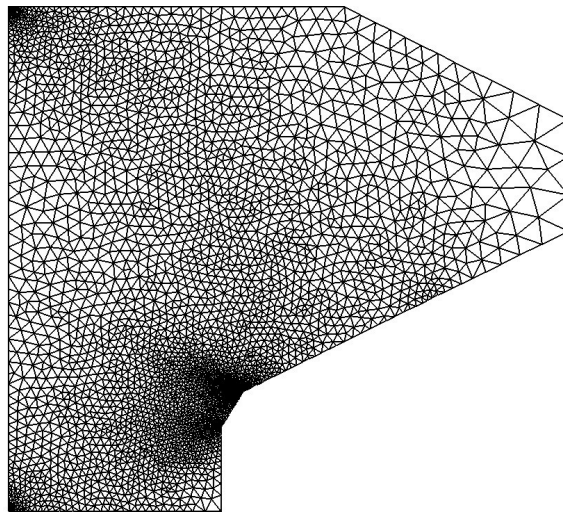


FIG. VII.4 – Maillage de la dent utilisé comme maillage de référence pour la validation de l'estimateur d'erreur

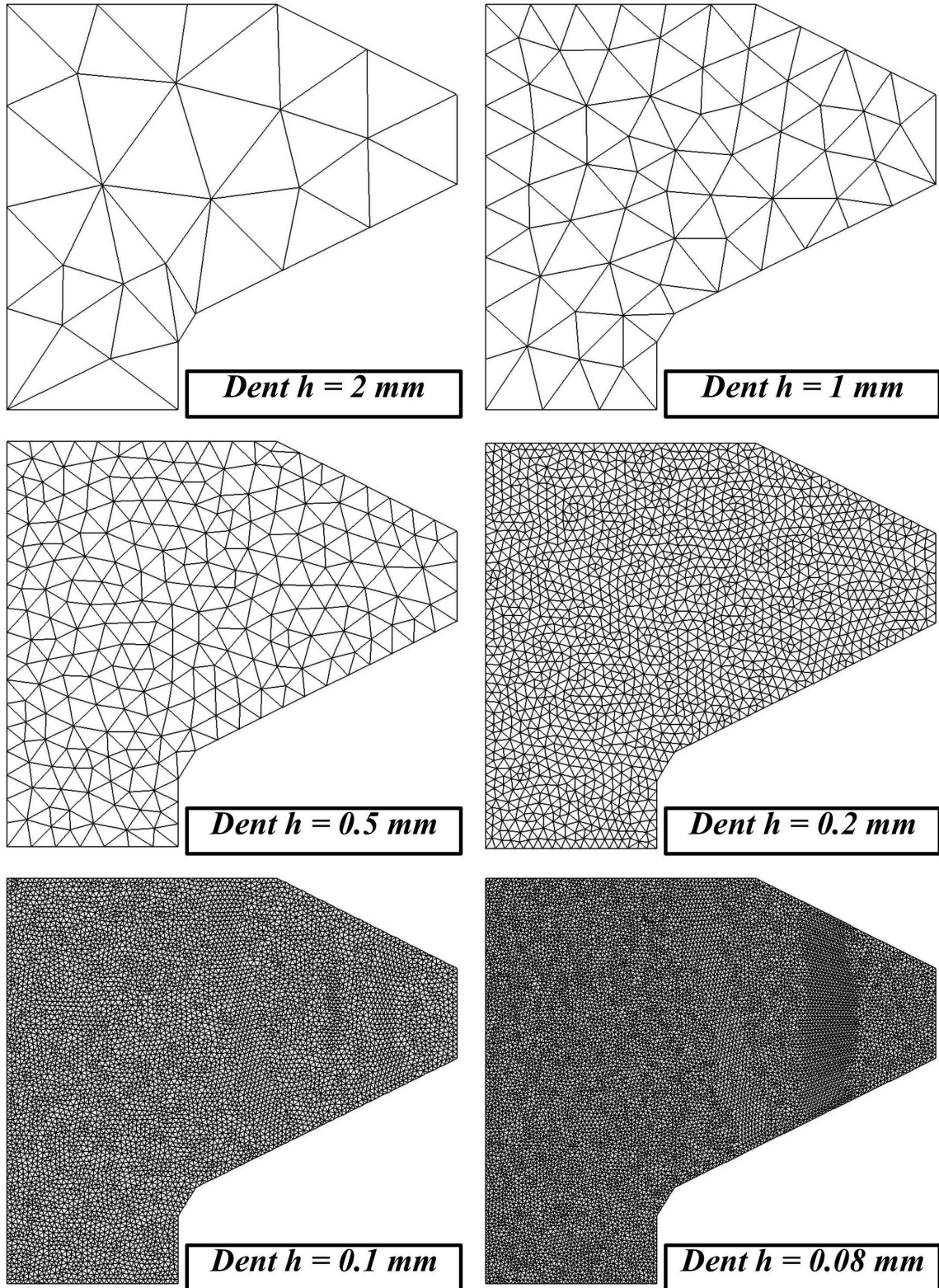


FIG. VII.5 – Maillages de la dent utilisés pour la validation de l'estimateur d'erreur

h	$\ \tilde{\Delta}u\ _{ref}$	$\ \tilde{\Delta}\sigma\ _{ref}$	\tilde{e}_{ref}	\tilde{e}_{estim}	$\tilde{e}C_{ref}$	$\tilde{e}C_{estim}$	noeuds	éléments
2	44.07	22.91	49.67	49.79	3.5	4.93	28	38
1	37.82	20.74	43.14	43.28	6.43	7.29	72	112
0.5	25.36	12.78	28.4	28.43	1.83	2.18	267	469
0.2	15.88	7.55	17.58	17.52	1.52	0.4	2025	3069
0.1	11.63	5.55	12.89	12.81	1.45	0.12	6410	12483
0.08	9.86	5.18	11.14	11.03	1.56	0.05	10186	19949

TAB. VII.2 – Problème de contact d'une dent : Comparaison des valeurs de l'erreur estimée à une erreur de référence (Valeurs exprimées en %)

Les résultats présentés dans le tableau VII.2 montrent que, pour cet exemple également, la valeur de l'erreur en contrainte est inférieure à celle de l'erreur en déplacement. La valeur de l'estimateur d'erreur est ici aussi très proche de celle de l'erreur de référence, mais comme nous pouvions nous y attendre n'y est pas systématiquement supérieure.

Afin d'illustrer l'apport de la méthode duale à l'estimation d'erreur, nous avons sur cet exemple utilisé les efforts de contact issus de la méthode primale afin de résoudre le système dual : les efforts de contact issus de la résolution du système dual condensé ont été remplacés par les efforts de contact issus de la méthode primale afin de calculer les valeurs des contraintes sur le maillage dual. Nous avons ensuite appliqué la même démarche d'évaluation de l'estimateur d'erreur que précédemment. Cette évaluation est présentée dans le tableau VII.3.

h	$\ \tilde{\Delta}u\ _{ref}$	$\ \tilde{\Delta}\sigma\ _{ref}$	\tilde{e}_{ref}	\tilde{e}_{estim}	$\tilde{e}C_{ref}$	$\tilde{e}C_{estim}$
2	44,07	33,6	55,42	55,35	3,99	2,89
1	37,82	28,86	47,57	47,57	2,8	2,67
0.5	25,36	22,67	34,02	33,99	1,52	0,73
0.2	15,88	16,15	22,65	22,61	1,46	0,25
0.1	11,63	15,22	19,15	19,74	-4,77	0,1
0.08	9,86	11,61	15,23	15,15	1,6	0,07

TAB. VII.3 – Problème de contact d'une dent : Comparaison des valeurs de l'erreur estimée à une erreur de référence (Valeurs exprimées en %) valeurs efforts primal

Ces résultats montrent, qu'ici aussi, la valeur de l'estimateur d'erreur est proche de la valeur de référence. La discrétisation adoptée est la même que celle adoptée pour produire les résultats présentés sur le tableau VII.2, on voit donc, en se basant sur la valeur de l'erreur en contrainte sur ces deux tableaux, que la qualité des résultats issus de la méthode duale

ne provient pas uniquement de la discrétisation mais également de la méthode elle même.

Un avantage est, qu'à discrétisation identique des problèmes primal et dual, la méthode duale est certes plus coûteuse, mais également plus précise que la méthode primale. La valeur de l'erreur estimée est donc proche de l'erreur en déplacement, qui peut être l'erreur que l'on souhaite diminuer.

VII.2 Raffinement de maillage

Nous présentons dans cette section l'application des procédures de raffinement de maillage et de remaillage présentées précédemment. Tout d'abord sur l'exemple de contact d'un lopin, dans la configuration $f = 150 \text{ MPa}$, $F = 50 \text{ MPa}$ et $\mu = 1$, en prenant comme maillage initial, le maillage numéro 1 de la figure VII.6.

La procédure de raffinement de maillage a d'abord été appliquée en raffinant, à chaque étape, tous les éléments dont l'erreur élémentaire était supérieure à 10% de l'erreur élémentaire maximale. Sur l'exemple proposé, on arrive en trois étapes à atteindre une erreur globale de 2.6%. Les détails de raffinement de chaque étape sont présentés dans le tableau VII.4 et sur la figure VII.6. Pour l'exemple traité, on arrive à atteindre un niveau d'erreur acceptable en un nombre limité d'opérations.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur
1	22	45	16.29
2	69	150	8.91
3	264	377	4.69
4	688	1213	2.6

TAB. VII.4 – Evolution de l'erreur au cours du raffinement de maillages : exemple de compression d'un lopin.

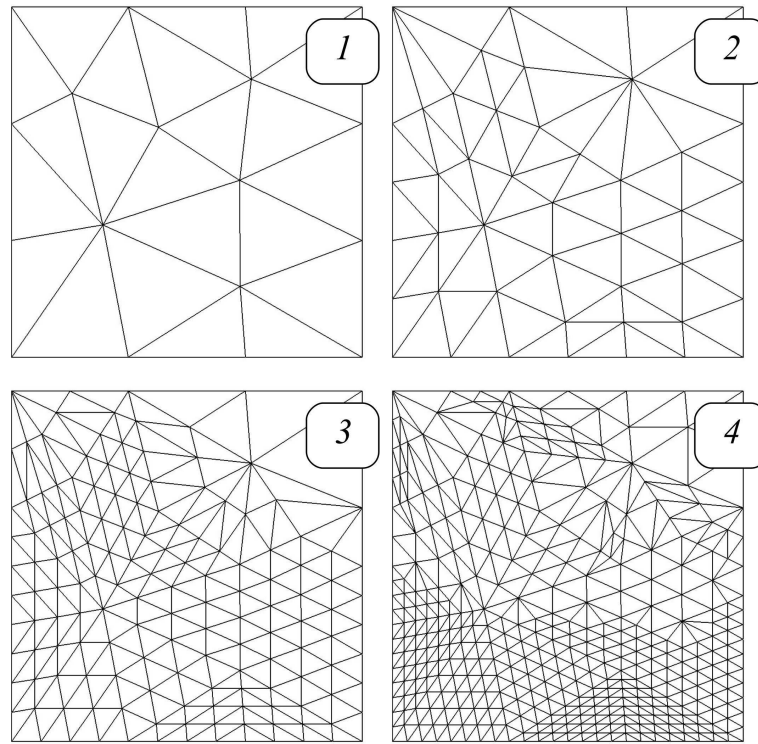


FIG. VII.6 – Maillages générés successivement lors du raffinement de maillage : exemple de compression d'un lopin.

Si l'on s'intéresse maintenant au problème de contact d'une dent présenté dans la section précédente, avec comme maillage initial le maillage numéro 1 de la figure VII.7, la stratégie de raffinement de maillage est alors moins efficace. D'une part car l'erreur sur la solution initiale est beaucoup plus élevée que précédemment, de l'autre car le champ de contrainte présente une singularité à l'extrémité gauche de la zone de contact, due au passage direct d'une zone de contact avec un obstacle rigide à une zone libre d'efforts.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur
1	38	88	49.62
2	145	219	34.08
3	392	348	24.54
4	631	472	18.63
5	862	664	14.77
6	1229	926	11.98
7	1734	1414	9.89
8	2682	1784	7.97
9	3395	2432	6.91

TAB. VII.5 – Evolution de l'erreur au cours du raffinement de maillages : exemple de contact d'une dent.

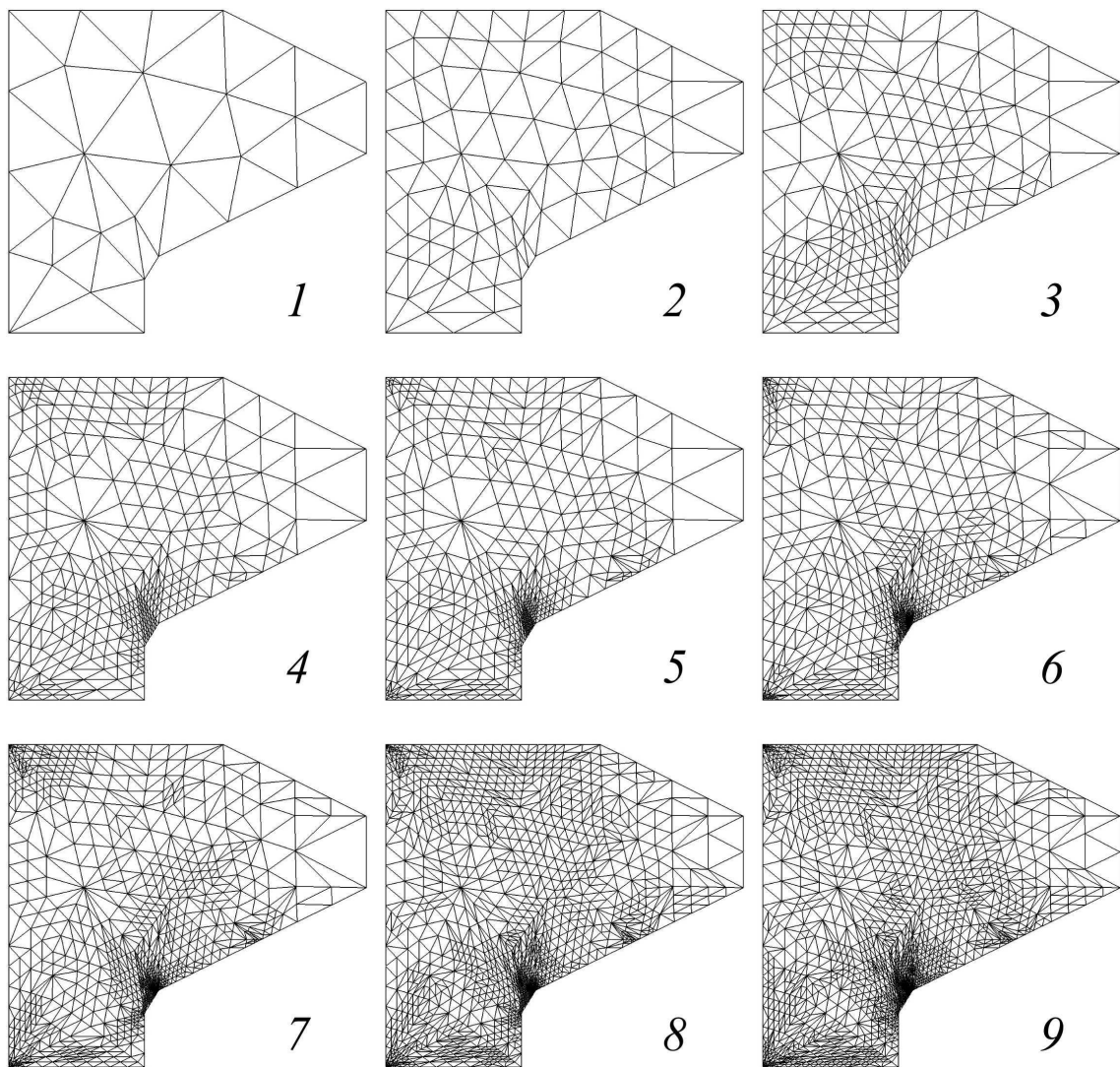


FIG. VII.7 – Maillages générés successivement lors du raffinement de maillage : exemple de contact d’une dent.

Comme le montrent les résultats présentés dans le tableau VII.5 et sur la figure VII.7, l’erreur diminue fortement au cours des deux premières itérations de raffinement, puis diminue plus lentement du fait de la localisation des erreurs élémentaires les plus importantes.

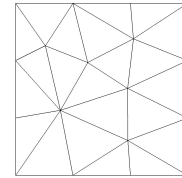
L’utilisation d’une stratégie de raffinement de maillages, telle que proposée ici, est alors envisageable mais peut rapidement devenir coûteuse du fait des nombreuses itérations nécessaires sur certains problèmes.

VII.2.1 Remaillage

Nous nous intéressons dans cette section à l’application de la procédure de remaillage. Tout d’abord sur l’exemple du contact d’un lopin pris dans les mêmes conditions que précédemment, en imposant une erreur cible égale à 2,6% correspondant à l’erreur obtenue à l’issue de la dernière étape de raffinement de maillage.

Le tableau VII.6 montre que l'on obtient une erreur assez proche de l'erreur cible à l'issue d'une première étape de remaillage. Si l'on effectue une étape supplémentaire, l'erreur tend à se rapprocher de l'erreur cible.

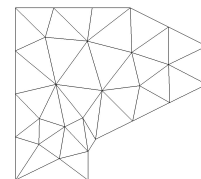
Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	22	45	16.28
1	296	174	3.04
2	324	190	2.68
3	349	203	2.57



TAB. VII.6 – Diminution de l'erreur par remaillage, problème de contact d'un lopin (coefficient de convergence considéré **homogène**, erreur cible : 2,6%). Maillage initial à droite.

On s'intéresse maintenant au problème de contact d'une dent traité dans la section précédente, en imposant une erreur cible de 6,91%, correspondant ici également à l'erreur obtenue à l'issue de la dernière étape de raffinement de maillage. Le tableau VII.7 montre qu'il est nécessaire d'effectuer plusieurs étapes de remaillage afin d'atteindre une erreur proche de l'erreur cible.

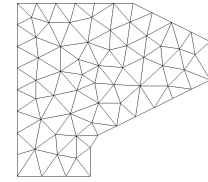
Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	38	28	49.61
1	928	508	19.36
2	2204	1173	11.10
3	2239	1199	7.63
4	2304	1228	7.16
5	2286	1219	6.96



TAB. VII.7 – Diminution de l'erreur par remaillage, problème de contact d'une dent (coefficient de convergence considéré **homogène**, erreur cible : 6.91%). Maillage initial à droite.

Comme le montre le tableau VII.8 et comme nous pouvions nous y attendre, le fait d'initialiser la procédure avec un maillage légèrement plus raffiné permet de réduire le nombre d'étapes de remaillage nécessaires à l'obtention d'une erreur acceptable.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	112	72	43.25
1	1908	1016	13.80
2	2316	1230	8.35
3	2263	1221	7.24
4	2208	1180	7.51
5	2199	1177	7.25



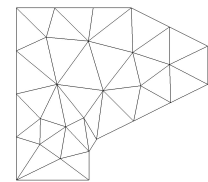
TAB. VII.8 – Diminution de l’erreur par remaillage, problème de contact d’une dent (coefficient de convergence considéré **homogène**, erreur cible : 6.91%). Maillage initial à droite.

Le problème traité présente une singularité en contraintes à l’extrémité gauche de la zone de contact. La procédure de remaillage étant construite en considérant le coefficient de convergence des éléments uniforme et égal à 1 sur l’ensemble du maillage, l’erreur cible ne peut être atteinte rapidement.

Nous considérons maintenant le coefficient de convergence hétérogène, c’est à dire que l’on tient compte des éventuelles singularités du problème lors de la procédure de remaillage. En première approche, nous fixerons le coefficient de convergence égal à 0,5 sur les éléments sur lesquels la solution à été déterminée singulière.

Le tableau VII.9 montre que l’on s’approche de l’erreur cible beaucoup plus rapidement, l’erreur obtenue à l’issue de la première étape de remaillage restant toutefois assez éloignée de l’erreur cible.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	38	28	49.61
1	2091	1110	13.75
2	3755	1975	6.51
3	2407	1282	7.36
4	2579	1369	6.67



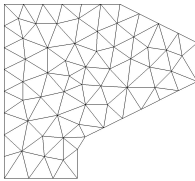
TAB. VII.9 – Diminution de l’erreur par remaillage, problème de contact d’une dent (coefficient de convergence considéré **hétérogène**, erreur cible : 6.91%). Maillage initial à droite.

Comme le montre le tableau VII.10, cet écart diminue lorsque le maillage initial est plus fin. Ces résultats montrent également que suivant la topologie initiale du maillage, le remaillage peut conduire à la construction d’un maillage trop raffiné. Ceci provenant d’une part du manque d’informations du au choix du maillage initial, de l’autre de la détermination des zones de singularités et des valeurs des coefficients de convergence pouvant être trop

pénalisante.

La figure VII.8 montre la répartition des valeurs du coefficient de convergence sur les maillages initiaux à 38 et 112 éléments (à gauche) ainsi que cette même répartition sur les maillages générés lors de la première étape de remaillage (à droite). On remarque que ces zones sont semblables dans le cas de maillages adaptés et que cette répartition est plus large sur le maillage comptant 112 éléments, impliquant un remaillage plus précis dans cette zone.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	112	72	43.25
1	10076	5184	8.48
2	2919	1544	6.93
3	2549	2549	6.67



TAB. VII.10 – Diminution de l'erreur par remaillage, problème de contact d'une dent (coefficient de convergence considéré **hétérogène**, erreur cible : 6.91%). Maillage initial à droite.

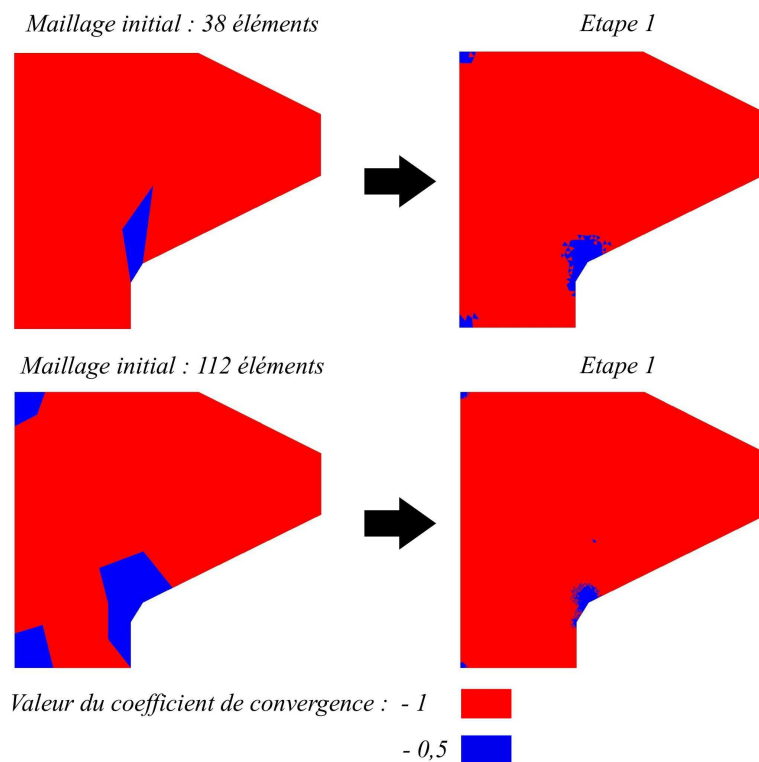
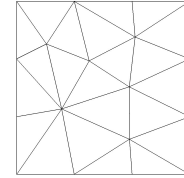


FIG. VII.8 – Contact d'une dent : répartition des zones de singularités, cas de deux maillages initiaux différents.

Ce phénomène se produit également lorsque l'on traite le problème contact du lopin. Les tableaux VII.11 et VII.12 montrent également que le fait de fixer le coefficient de conver-

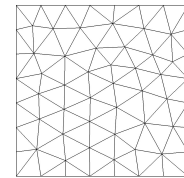
gence égal à 0,5 dans les zones de singularités est trop contraignant lors de la première étape.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	22	45	16.28
1	2098	1121	1.09
2	288	169	3.06
3	331	193	2.65



TAB. VII.11 – Diminution de l’erreur par remaillage, problème de contact d’un lopin (coefficient de convergence considéré **hétérogène**, erreur cible : 2,6%). Maillage initial à droite.

Etape	Nb éléments	Nb noeuds	Erreur (%)
Maillage initial	100	65	6.96
1	839	465	1.69
2	299	176	2.80
3	331	196	2.66



TAB. VII.12 – Diminution de l’erreur par remaillage, problème de contact d’un lopin (coefficient de convergence considéré **hétérogène**, erreur cible : 2,6%). Maillage initial à droite.

Ceci montre la nécessité de déterminer la valeur du coefficient de convergence plus précisément sur chaque élément appartenant à une zone de singularité comme proposé dans [BC05]. A défaut, il est envisageable de fixer un critère de détection des zones de singularités moins contraignant ou d’effectuer un premier remaillage en fixant une erreur cible moins importante que l’erreur souhaitée ou en considérant le coefficient de convergence homogène et égal à 1 sur tout le maillage.

VII.3 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre l’efficacité de l’estimateur d’erreur sur deux exemples de contact avec frottement. Comme attendu, l’estimateur d’erreur proposé n’est pas systématiquement un majorant de l’erreur réelle, ici approchée via une solution de référence. Cependant, la valeur de l’estimateur d’erreur est très proche de la valeur de l’erreur de référence dans tous les cas traités ici. Une stratégie de raffinement de maillages a ensuite été testée mais ne s’est pas montrée très efficace lors de présence de singularités du champ de contraintes. La stratégie de remaillage a ensuite été testée. Il a été montré que la construction d’un maillage initial suffisamment fin et la détermination correcte des valeurs des coefficients de convergence des éléments doivent permettre d’obtenir une excellente efficacité de cette stratégie.

Conclusion et perspectives

Nous avons montré au cours de cette thèse la possibilité d'application des méthodes basées sur une formulation en contraintes aux problèmes de contact avec frottement. Elle passe par l'utilisation d'éléments finis "équilibre" qui peuvent être construits en utilisant des éléments finis initialement destinés à résoudre les problèmes de plaques et de coques. Deux de ces éléments ont été choisis au cours de cette thèse. Le premier a été choisi afin d'évaluer les possibilités d'application de la méthode. Le second a été choisi car il convient particulièrement bien à la résolution des problèmes de contact avec frottement.

Comme attendu, l'interpolation d'un champ de contrainte statiquement admissible et l'introduction des conditions de contact et de frottement compliquent la tâche de résolution du système matriciel global. Toutefois, plusieurs méthodes de résolution, tirant partie de la structure matricielle du système à résoudre, ont été proposées. Deux méthodes se sont révélées particulièrement efficaces : La méthode du Lagrangien Augmenté et la méthode de condensation en trois étapes. La première est la moins coûteuse en termes de temps de calcul et de consommation mémoire, mais elle nécessite des développements plus poussés, notamment afin de pouvoir déterminer les paramètres de résolution optimaux. La seconde utilise des méthodes de résolution de systèmes linéaires directs, elle ne présente donc aucun paramètre à déterminer.

La comparaison des résultats issus de la méthode duale proposée aux résultats issus d'une méthode primale a montré que pour un nombre de degrés de liberté équivalent, la méthode duale fournit une meilleure approximation du champ de contraintes que la méthode primale. Ceci dans les cas avec ou sans contact et frottement, ce qui a mis en évidence la précision et la robustesse de la méthode proposée.

La méthode duale a ensuite été utilisée afin d'évaluer l'erreur liée à la discrétisation de problèmes de contact avec frottement. Sur les exemples proposés, la valeur de l'erreur estimée par cette méthode présente un excellent accord avec la valeur de l'erreur "réelle", approchée par l'intermédiaire d'une solution de référence.

Plusieurs stratégies d'amélioration de maillages ont alors été testées, les résultats obtenus nous ont semblé très prometteurs en ce qui concerne les méthodes de remaillage adaptatif et

doivent permettre l'obtention d'une solution à erreur imposée en un temps raisonnable.

L'ensemble de ce travail ainsi que de nombreuses routines de mise en données, d'exploitation et de visualisation de données ont été implémentés au code de calcul LMGC90 et devraient prochainement être mis à disposition de la communauté de ses utilisateurs. Ce travail a fait l'objet d'une présentation au congrès "Fifth International Conference on Engineering Computational Technology" [KL06], d'une publication dans la "Revue Européenne de Mécanique Numérique" [KL07] et d'un article en cours de révision dans le journal "Advances in Engineering Software" [KL08].

Les perspectives d'élargissement de ce travail sont multiples. A court terme, quelques améliorations des routines développées doivent être apportées afin de pouvoir prendre en compte des cas de charges plus complexes, permettant par exemple de traiter certains problèmes de contact exemples de non-unicité de la solution. Le contact entre plusieurs corps déformables ainsi que la résolution des problèmes quasi-statiques peuvent également être envisagés. La comparaison de l'estimateur proposé aux estimateurs cités dans cette thèse serait également importante, notamment afin d'évaluer l'importance de l'information apportée par le caractère, "statiquement admissible" au sens strict, de la méthode.

A plus long terme, l'extension de la méthode au cas tridimensionnel de contact entre plusieurs solides déformables serait une évolution importante, impliquant évidemment certaines modifications à la méthode mise en place, mais nous semble indispensable afin de pouvoir traiter des problèmes de type industriel. Remarquons finalement que l'utilisation d'éléments finis "équilibre" n'a pas été aussi contraignante qu'il n'y paraissait et qu'il pourrait être envisageable de considérer d'autres types de comportements, tant dans le volume tels que plasticité, visco-plasticité, endommagement, que sur la frontière de contact tels qu'adhésion, usure, cicatrisation ...

Bibliographie

- [Ala97] P. Alart. Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 76 :83–108, 1997.
- [Amo99] G. Amontons. De la résistance causée dans les machines, tant par les frottements des parties qui les composent, que par la raideur des cordes qu'on emploie, et la manière de calculer l'un et l'autre. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris*, 1699.
- [Bar76] J. Barlow. Optimal stresses locations in finite element models. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 10 :243–251, 1976.
- [BC05] E. Bellenger and P. Coorevits. Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :1413–1440, 2005.
- [BH80] M. Bernadou and K. Hassan. Basis functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, complete or reduced, 1980. Rapport De Recherche Inria.
- [BLM01] P. Bisegna, F. Lebon, and F. Maceri. D-PANA : a convergent block-relaxation solution method for the discretized dual formulation of the Signorini-Coulomb contact problem. *Comptes-Rendus Mathématiques Académie des Sciences Paris*, 333 :1053–1058, 2001.
- [BLM04] P. Bisegna, F. Lebon, and F. Maceri. Relaxation procedures for solving Signorini-Coulomb contact problems. *Advances in Engineering Software*, 35 :595–600, 2004.
- [BR78] I. Babuska and W. C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 12 :1597–1615, 1978.
- [BSUGC94] I. Babuska, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj, and K. Copps. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 37 :1073–1123, 1994.

-
- [CC91] A. Capatina and M. Cocu. Internal approximation of quasi-variational inequalities. *Numerische Mathematik*, 59 :385–398, 1991.
- [CDM80] I. Capuzzo-Dolcetta and M. Matzeu. Duality for implicit variational problems and numerical applications. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2 :231–265, 1980.
- [CGTR06] C. Corral, I. Giménez, M. Tur, and J.J. Ródenas. Iterative Preconditioned Methods for the Solution of Contact Problems by the Finite Element Method. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Engineering Computational Technology*, pages 189–190. B.H.V. Topping and G. Montero and R. Montenegro, Civil-Comp Press, 2006.
- [CHH01] P. Coorevits, P. Hild, and M. Hjjaj. A posteriori error control for finite element approximations of Coulomb frictional contact. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23 :976–999, 2001.
- [CHP00] P. Coorevits, P. Hild, and J.P. Pelle. A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186 :65–83, 2000.
- [Cia79] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland publishing company, 1979.
- [CL05] A. Capatina and F. Lebon. Remarks on the equilibrium finite element method for frictional contact problems. In *New Trends in Continuum Mechanics*, pages 25–33. M. Mihailescu-Suliciu, Theta, 2005.
- [Coc84] M. Cocu. Existence of solutions of Signorini problems with friction. *International Journal of Engineering Science*, 22 :567–575, 1984.
- [Cou85] C.A. Coulomb. Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la raideur des cordages. *Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie Royale, Paris*, pages 161–342, 1785.
- [CR00] M. Cocu and R. Rocca. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34 :981–1001, 2000.
- [DJ03] F. Dubois and M. Jean. LMGC90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d'interaction. *Actes du VIeme Colloque national en calcul des structures*, 1 :111–118, 2003.

-
- [DJ04] F. Dubois and M. Jean. LMG90 End User Guide, 2004.
- [DL72] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [Duv80] G. Duvaut. Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 290A :263–265, 1980.
- [DZB95] J.-F. Debonnie, H.-G. Zhong, and P. Beckers. Dual analysis for general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122 :183–192, 1995.
- [FG83] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian Methods. Applications to the numerical solution of boundary value problems*. North Holland, 1983.
- [Fra01] B. Fraeijns de Veubeke. Displacement and equilibrium Models in the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :287–342, 2001.
- [Geo00] J.M. Georges. *Frottement, usure et lubrification : La Tribologie ou science des surfaces*. CNRS Editions, 2000.
- [GLT81] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Tremolières. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, 1981.
- [GMSH] C. Geuzaine and J.F. Remacle. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. <http://www.geuz.org/gmsh/>.
- [Hil03] P. Hild. An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with Coulomb friction. *Comptes Rendus Mathématique*, 337(10) :685–688, 2003.
- [Jea99] M. Jean. The Non Smooth Contact Dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [JM78] C. Johnson and B. Mercier. Some equilibrium finite element methods for two dimensional elasticity problems. *Numerische Mathematik*, 30 :103–116, 1978.
- [JP95] M.T. Jones and P.E. Plassmann. An improved incomplete Cholesky factorization. *ACM transactions on mathematical software*, 21 :5–17, 1995.
-

-
- [KBMA03] M. Kempeneers, P. Beckers, J.P. Moitinho de Almeida, and O.J.B. Almeida Pereira. Modèles équilibre pour l'analyse duale. *Revue européenne des éléments finis*, 12 :737–760, 2003.
- [Kem06] M. Kempeneers. *Éléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale*. PhD thesis, Dir P. Beckers, Université de Liège, 2006.
- [KL06] F. Kuss and F. Lebon. Dual methods for unilateral contact problems. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Engineering Computational Technology*. B.H.V. Topping and G. Montero and R. Montenegro, Civil-Comp Press, 2006, paper 106.
- [KL07] F. Kuss and F. Lebon. Méthodes duales pour le contact frottant. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 16 :33–51, 2007.
- [KL08] F. Kuss and F. Lebon. Stress based finite element methods for solving contact problems : comparisons between various methods (en révision). *Advances in Engineering Software*, 2008.
- [Kla86] A. Klarbring. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problem with friction. *Computer Methods in Applied Mathematics and Engineering*, 58 :175–200, 1986.
- [KO88] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1988.
- [Lad75] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [LAPACK] Linear Algebra PACKage. <http://www.netlib.org/lapack/>.
- [LCP86] P. Ladevèze, G. Coffignal, and J.P. Pelle. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. Wiley, 1986.
- [LMGC90] F. Dubois and M. Jean. Logiciel de Mécanique Gérant le Contact. <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMGC90/>.
- [LP01] P. Ladevèze and J.P. Pelle. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non-linéaire*. Hermès - Lavoisier, 2001.
- [LPR91a] P. Ladevèze, J.P. Pelle, and P. Rougeot. Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8 :69–80, 1991.

-
- [LPR91b] C. Licht, E. Pratt, and M. Raous. Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction. *Unilateral Problems in Structural Analysis*, pages 129–144, 1991.
- [LS93] T.A. Laursen and J.C. Simo. Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108 :133–146, 1993.
- [LT04] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 et 2*. Dunod, 2004.
- [MMAR96] E.A.W. Maunder, J.P. Moitinho de Almeida, and A.C.A. Ramsay. A General Formulation of Equilibrium Macro-Elements with Control of Spurious Kinematic Modes : The Exorcism of an Old Curse. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3175–3194, 1996.
- [MO87] J.A.C. Martins and J.T. Oden. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal friction and interface laws. *Nonlinear Anal*, 11 :407–428, 1987.
- [Mos76] U. Mosco. *Implicit variational problems and quasivariational inequalities*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 1976.
- [OpenMP] Open Multi-Processing. <http://www.openmp.org/drupal/>.
- [PS75] C.C Paige and M.A. Saunders. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 12 :617–629, 1975.
- [QV99] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. University Press, Oxford, 1999.
- [RCL88] M. Raous, P. Chabrand, and F. Lebon. Numerical methods for solving unilateral contact problem with friction. *numéro spécial Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7 :111–128, 1988.
- [Riv84] M.C. Rivara. Mesh refinement processes based on the generalized fixation of simplices. *SIAM journal on numerical analysis*, 21 :604–613, 1984.
- [SG89] N. Sarigul and R.H. Gallagher. Assumed stress function finite element method : two-dimensional elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :1577–1598, 1989.
-

-
- [Sig33] A. Signorini. Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 2 :231–251, 1933.
- [Tel91] J.J. Telega. Quasi-static Signorini’s contact problem with friction and duality. *International Series on Numerical Mathematics*, 101 :199–214, 1991.
- [VA81] C.V. Girija Vallabhan and M. Azene. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :291–309, 1981.
- [WH68] V.B. Watwood and B.J. Hartz. An equilibrium stress field model for finite element solutions of two dimensional elastoplastic problems. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :857–873, 1968.
- [WP00] P. Wriggers and P.D. Panagiotopoulos. *New Developments in Contact Problems*. Springer, 2000.
- [Wri02] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002.
- [WYM99] Z. Wieckowski, S.K. Youn, and B.S. Moon. Stress based finite element analysis of plane plasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :1505–1525, 1999.
- [ZR01] A. Zavelani-Rossi. An equilibrium approach to plane problems. *Computers and Structures*, 79 :1877–1895, 2001.
- [ZZ87] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :337 – 357, 1987.
- [ZZ92] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, parties 1 et 2. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331 – 1382, 1992.

Annexes

A Comparaison des stratégies de condensation

Dans cette partie, nous comparons les deux stratégies de condensation en plusieurs étapes. Nous présentons tout d'abord les étapes de résolutions relatives à chaque stratégie. Nous choisissons de comparer les stratégies dans le cadre d'utilisation de méthodes de résolution de systèmes linéaires directes uniquement, les coûts de résolution sont alors entièrement prédictibles.

Nous comparons alors les deux méthodes proposées ainsi que la méthode de condensation "brute", ne tirant pas partie des caractéristiques des matrices.

A.1 Condensation en deux étapes

Le système à condenser est partitionné comme suit :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ \hline C_F & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_C & 0 & 0 & -I \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

On le réécrit en regroupant les matrices contenues dans les mêmes partitions :

$$\begin{bmatrix} S & C^T & 0 \\ C & 0 & E^T \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda^* \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ f^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Les étapes de la résolution sont :

1. A partir de la première ligne du système, on détermine l'expression de ϕ

$$\phi = S^{-1}U - S^{-1}C^T\lambda^* \quad (13)$$

qui demande $(n_f + n_c + 1)$ résolutions d'un système symétrique bande de taille n_ϕ . La solution $S^{-1}U$ est stockée dans U et $S^{-1}C^T$ dans C^T (qui n'est donc plus la transposée de C). On obtient donc

$$\phi = U - C^T\lambda^* \quad (14)$$

2. On intègre l'expression de ϕ dans la seconde équation, on obtient

$$CC^T \lambda^* + E^T f_C = f^* - CU \quad (15)$$

On détermine l'expression de λ^* qui sera intégrée dans la troisième équation du système

$$\lambda^* = S_\lambda^{-1}(f^* - CU) - S_\lambda^{-1}E^T f_C \quad (16)$$

avec

$$S_\lambda = -CC^T \quad (17)$$

qui demande $(n_C + 1)$ résolutions d'un système symétrique de taille $n_f + n_C$.

A.2 Condensation en trois étapes

Le système à condenser est partitionné comme suit :

$$\begin{bmatrix} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

1. Comme précédemment, les $(n_f + n_c + 1)$ résolutions d'un système symétrique bande de taille n_ϕ nous donnent l'expression de ϕ :

$$\phi = S^{-1}U - S^{-1}C_F^T \lambda - S^{-1}C_C^T \lambda' \quad (19)$$

On stocke $S^{-1}U$ dans U , $S^{-1}C_F^T$ dans D_F^T et $S^{-1}C_C^T$ dans D_C^T (pas directement dans C_F et C_T car ils serviront plus tard).

2. On intègre l'expression de ϕ dans la seconde équation :

$$C_F U - C_F D_F^T \lambda - C_F D_C^T \lambda' = f \quad (20)$$

On détermine alors l'expression de λ

$$\lambda = S_\lambda^{-1}(f - C_F U) + S_\lambda^{-1}C_F D_C^T \lambda' \quad (21)$$

avec

$$S_\lambda = -C_F D_F^T \quad (22)$$

qui demande $(n_C + 1)$ résolutions d'un système symétrique de taille n_f . On stocke $S_\lambda^{-1}(f - C_F U)$ dans f et $S_\lambda^{-1}C_F D_C^T$ dans une matrice $S_{\lambda\lambda'}$.

3. On intègre l'expression de ϕ dans la troisième ligne

$$C_C U - C_C C_F^T \lambda - C_C C_C^T \lambda' = I f_C \quad (23)$$

puis on intègre l'expression de λ précédemment calculée

$$C_C U - C_C C_F^T f - (C_C C_F^T S_{\lambda\lambda'} + C_C C_C^T) \lambda' = I f_C \quad (24)$$

On pose

$$S_{\lambda\lambda'} = -C_C C_F^T S_{\lambda\lambda'} + C_C C_C^T \quad (25)$$

et

$$U_C = C_C U - C_C C_F^T f \quad (26)$$

pour obtenir l'expression de λ'

$$\lambda' = S_{\lambda\lambda'}^{-1} I f_C - S_{\lambda\lambda'}^{-1} U_C \quad (27)$$

qui demande $(n_C + 1)$ résolutions d'un système symétrique de taille n_C .

A.3 Evaluation des coûts de condensation

A partir de la description des opérations de condensation, donnée précédemment pour chaque technique, on dresse le tableau 13 recensant les nombres de résolutions de systèmes nécessaires pour chaque technique.

Méthode	nb de systèmes à résoudre	taille du système à résoudre	stockage de la matrice
Brut	$n_C + 1$	$n_\phi + n_f + n_C$	symétrique
2 étapes	$n_f + n_C + 1$	n_ϕ	symétrique bande
	$n_C + 1$	$n_f + n_C$	symétrique
3 étapes	$n_f + n_C + 1$	n_ϕ	symétrique bande
	$n_C + 1$	n_f	symétrique
	$n_C + 1$	n_C	symétrique

TAB. 13 – Résolutions nécessaires à chaque condensation

Les différentes notations utilisées sont :

- n_ϕ : nombre de degrés de liberté de la structure.
- n_f : nombre d'efforts généralisés.
- n_C : nombre d'efforts de contact.

Pour évaluer le coût de chaque technique, nous avons compté le nombre d'opérations (additions, soustractions, multiplications et divisions) nécessaires à la factorisation LDL^T et à la descente et montée pour une matrice symétrique puis pour une matrice symétrique avec stockage bande.

Ces données sont synthétisées dans le tableau 14. Les notations utilisées sont :

- n : dimension d'une matrice quelconque.
- C_b : coefficient de largeur de bande, tel que $bw = C_b n - 1$.

- bw : largeur de bande.
- M : nombre de multiplications.
- A : nombre d'additions ou soustractions.
- D : nombre de divisions.

type de matrice	nombre d'opérations		
	factorisation	descente	montée
symétrique	$\frac{1}{6}(n^3 - n)(M + A) + \frac{1}{2}n(n - 1)D$	$\frac{1}{2}n(n - 1)(M + A)$	$\frac{1}{2}n(n - 1)(M + A) + nD$
symétrique bande	$-\frac{1}{6}c_b n(c_b n - 1)(2c_b n - 3n - 1)(M + A) - \frac{1}{2}n(c_b - 2)(c_b n - 1)D$	$\frac{n}{2}(c_b - 2)(1 - c_b n)(M + A)$	$\frac{n}{2}(c_b - 2)(1 - c_b n)(M + A) + nD$

TAB. 14 – Factorisation LDL^T - nombre d'opérations élémentaires

Sur les ordinateurs modernes, on peut considérer les opérations additions, soustractions, multiplications et divisions comme équivalentes. On en déduit le nombre d'opérations nécessaires à chaque condensation, en introduisant les facteur $k_f = n_f/n_\phi$ et $k_c = n_C/n_\phi$:

$$\begin{aligned}
 nbop_{brut} &= \left(-\frac{11}{6} - \frac{11k_c}{6} - \frac{11k_f}{6} \right) n_\phi \\
 &+ \left(\frac{5}{2} + 4k_c + \frac{3k_c^2}{2} + 5k_f + 4k_c k_f + \frac{5k_f^2}{2} \right) n_\phi^2 \\
 &+ \left(\frac{1}{3} + 3k_c + 5k_c^2 + \frac{7k_c^3}{3} + k_f + 6k_c k_f + 5k_c^2 k_f + k_f^2 + 3k_c k_f^2 + \frac{k_f^3}{3} \right) n_\phi^3 \\
 nbop_{2\text{étapes}} &= \left(-4 + \frac{13cb}{6} - \frac{11k_c}{6} - \frac{11k_f}{6} \right) n_\phi \\
 &+ \left(4cb - \frac{3cb^2}{2} - 3k_c + 2cbk_c + \frac{3k_c^2}{2} - 3k_f + 2cbk_f + 4k_c k_f + \frac{5k_f^2}{2} \right) n_\phi^2 \\
 &+ \left(cb^2 - \frac{2cb^3}{3} + 4cbk_c - 2cb^2 k_c + \frac{7k_c^3}{3} + 4cbk_f - 2cb^2 k_f + 5k_c^2 k_f \right. \\
 &\quad \left. + 3k_c k_f^2 + \frac{k_f^3}{3} \right) n_\phi^3 \\
 nbop_{3\text{étapes}} &= \left(-4 + \frac{13cb}{6} - \frac{11k_c}{6} - \frac{11k_f}{6} \right) n_\phi \\
 &+ \left(4cb - \frac{3cb^2}{2} - 3k_c + 2cbk_c + \frac{3k_c^2}{2} - 3k_f + 2cbk_f - k_c k_f + \frac{5k_f^2}{2} \right) n_\phi^2 \\
 &+ \left(cb^2 - \frac{2cb^3}{3} + 4cbk_c - 2cb^2 k_c + \frac{7k_c^3}{3} + 4cbk_f - 2cb^2 k_f + 2k_c k_f^2 + \frac{k_f^3}{3} \right) n_\phi^3
 \end{aligned}$$

A.4 Comparaison des différentes techniques

Les ordres de grandeur des différents paramètres sont :

- $n_\phi \gg (n_f, n_C)$
- $k_c, k_f \in [0.01; 0.2]$ suivant le raffinement du maillage sur les bords.
- $c_b \in [0.05; 0.2]$ suivant l'optimisation de la numérotation des noeuds, 0.2 pour un maillage grossier et 0.05 pour un maillage raffiné.

La figure 9 représente le nombre d'opérations à effectuer, pour chaque technique de condensation, dans le cas d'un maillage raffiné sur le volume ; on voit clairement l'intérêt de diviser la condensation en plusieurs étapes. On remarque aussi que les techniques de condensations en deux et trois étapes (notées 2niveaux et 3niveaux sur les courbes qui suivent) donnent des résultats identiques.

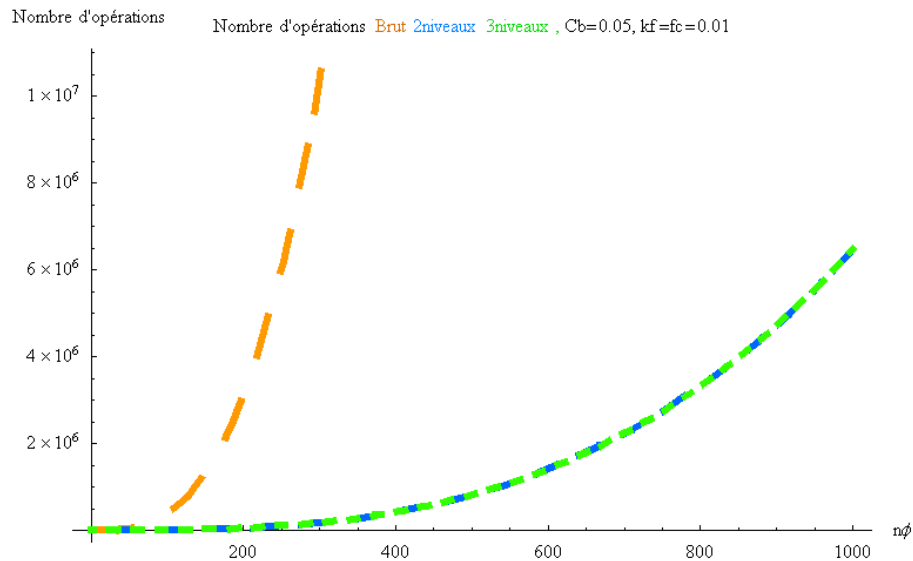


FIG. 9 – Coût de chaque condensation - maillage raffiné dans le volume

La figure 10 correspond à un maillage raffiné dans le volume et sur les bords. Il présente donc un nombre plus important d'efforts généralisés et d'efforts de contact que précédemment. L'écart entre la condensation en deux étapes et la condensation en trois étapes est ici augmenté.

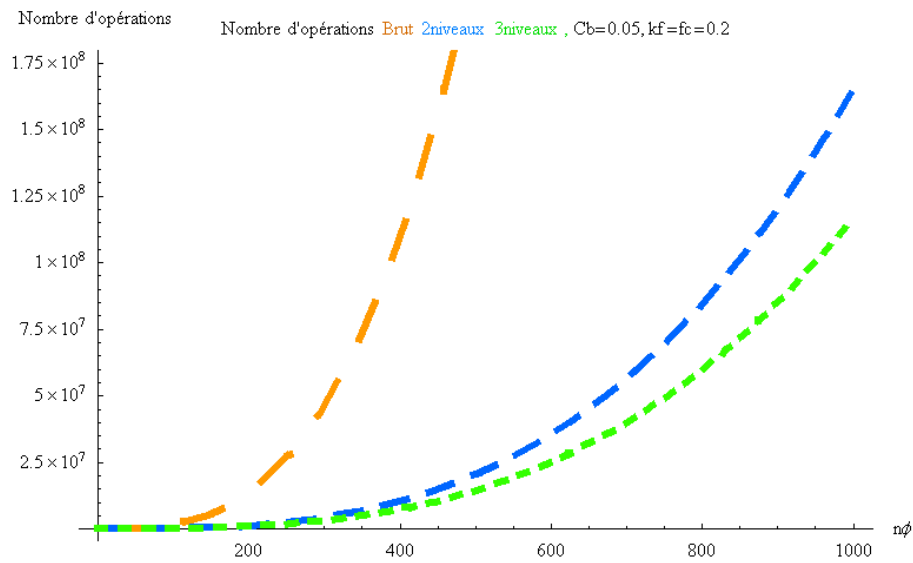


FIG. 10 – Coût de chaque condensation - maillage raffiné dans le volume et sur les bords

Les deux techniques de condensation se montrent tout aussi avantageuses dans le cas d'un maillage grossier (Figure 11) et tendent à se rapprocher de la technique de condensation brute lorsque la largeur de bande devient grande (Figure 12), comme dans le cas d'une numérotation de maillage non optimisée.

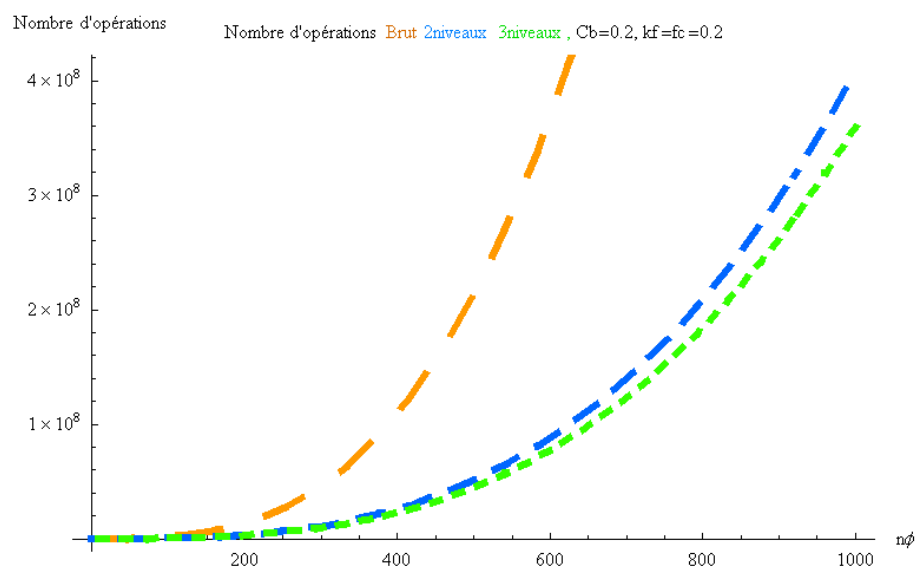


FIG. 11 – Coût de chaque condensation - maillage grossier ou à numérotation non optimisée

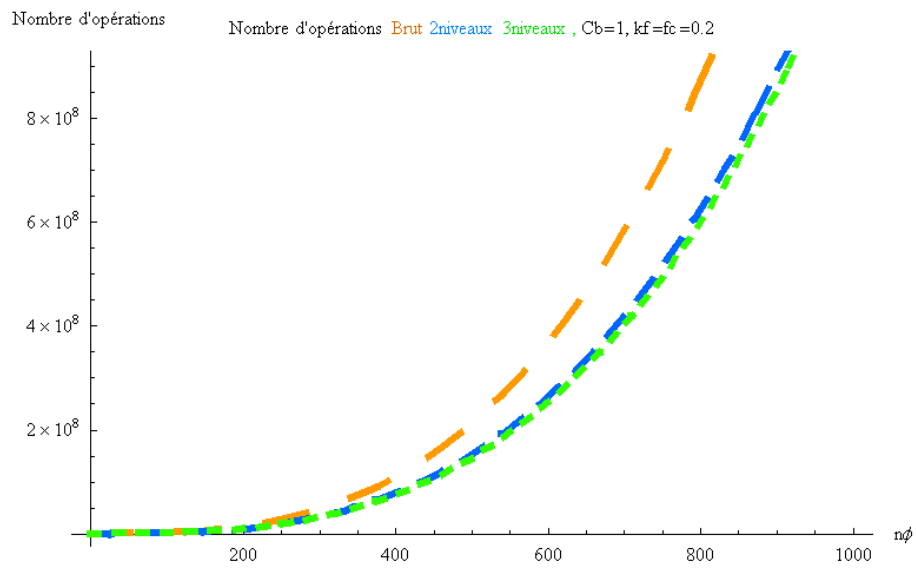


FIG. 12 – Coût de chaque condensation - influence de la largeur de bande

B Continuité du vecteur contrainte

Nous montrons dans cette partie que l'utilisation de fonctions d'interpolation de continuité C^1 permet d'assurer la continuité du vecteur contrainte entre deux éléments.

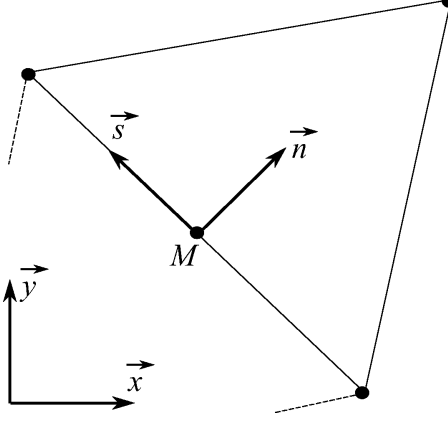


FIG. 13 – Définition du repère lié à la frontière commune à deux éléments

Le saut de champ de contrainte en un M de la frontière séparant deux éléments peut être représenté, dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) présenté sur la figure 13 par :

$$\Delta\sigma(M) = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx}(M) & \Delta\sigma_{xy}(M) \\ \Delta\sigma_{xy}(M) & \Delta\sigma_{yy}(M) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Le saut de vecteur contrainte au point M s'exprime alors par :

$$\Delta T(M) = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx}(M) & \Delta\sigma_{xy}(M) \\ \Delta\sigma_{xy}(M) & \Delta\sigma_{yy}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \quad (29)$$

où l et m sont les coordonnées du vecteur normale \vec{n} dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) .

Ce saut de vecteur contrainte peut alors être exprimé en fonction du saut de fonction de Airy $\Delta\phi(M)$ par :

$$\Delta T(M) = \begin{bmatrix} l \frac{\partial^2 \Delta\phi(M)}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \Delta\phi(M)}{\partial x \partial y} \\ -l \frac{\partial^2 \Delta\phi(M)}{\partial x \partial y} + m \frac{\partial^2 \Delta\phi(M)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

qui se factorise par :

$$\Delta T(M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \Delta\phi(M)}{\partial y} - m \frac{\partial \Delta\phi(M)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-l \frac{\partial \Delta\phi(M)}{\partial y} + m \frac{\partial \Delta\phi(M)}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (31)$$

en utilisant les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial n} - m \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial n} + l \frac{\partial}{\partial s} \quad (32)$$

L'expression du saut de vecteur contrainte devient :

$$\Delta T(M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Delta \phi(M)}{\partial s} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta \phi(M)}{\partial s} \right) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Par définition $\frac{\partial \Delta \phi(M)}{\partial s} = 0$, l'utilisation de fonctions C^1 assure donc bien la continuité du vecteur contrainte à l'interface entre deux éléments.