



**HAL**  
open science

## Algèbres Amassées Affines

Grégoire Dupont

► **To cite this version:**

Grégoire Dupont. Algèbres Amassées Affines. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT: . tel-00338684

**HAL Id: tel-00338684**

**<https://theses.hal.science/tel-00338684>**

Submitted on 14 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 188-2008

Année 2008

Thèse

présentée devant  
l'Université de Lyon  
Université Lyon 1  
Ecole doctorale MathIF  
Institut Camille Jordan

pour l'obtention du  
Diplôme de Doctorat  
(Arrêté du 7 Août 2006)

présentée et soutenue publiquement le  
6 novembre 2008

par  
M. DUPONT Grégoire

## ALGÈBRES AMASSÉES AFFINES

Directeur de thèse :  
M. CALDERO PHILIPPE

Jury :

M. CALDERO Philippe	Maître de Conférences	Université Lyon 1, France
M. IOHARA Kenji	Professeur des universités	Université Lyon 1, France
M. KELLER Bernhard	Professeur des universités	Université Paris 7, France
M. MARSH Robert	Professeur	Université de Leeds, Royaume-Uni
M. SCHRÖER Jan	Professeur	Université de Bonn, Allemagne

## Algèbres Amassées Affines

**Résumé :** Nous introduisons les variables génériques dans une algèbre amassée acyclique  $\mathcal{A}(Q)$ . Nous explicitons ces variables en termes de théorie AR de l'algèbre des chemins  $kQ$  et montrons qu'elles forment une  $\mathbb{Z}$ -base pour une certaine classe d'algèbres amassées comprenant les algèbres amassées affines de type  $\hat{A}$ .

Nous introduisons des polynômes de Chebyshev généralisés grâce auxquels nous pouvons montrer des formules de multiplications de type Caldero-Keller pour les variables associées aux  $kQ$ -modules réguliers.

Nous donnons une démonstration simplifiée d'un résultat de Buan, Marsh et Reiten interprétant les dénominateurs des variables d'amas en termes de théorie de basculement dans la catégorie amassée. Nous étudions aussi la compatibilité entre application Caldero-Chapoton et foncteurs BGP étendus.

Enfin, nous réalisons les algèbres amassées non simplement lacées comme sous-algèbres de quotients d'algèbres simplement lacées munies d'un groupe d'automorphismes.

---

## Affine Cluster Algebras

**Abstract :** We introduce generic variables in acyclic cluster algebras  $\mathcal{A}(Q)$ . We give an explicit description of these variables in terms of AR-theory of the path algebra  $kQ$  and prove that they form a  $\mathbb{Z}$ -basis in a certain class of cluster algebras, including affine type  $\hat{A}$ .

We introduce generalized Chebyshev polynomials in order to study variables associated to regular modules. In particular, this allows to prove cluster multiplication formulas for regular modules over the path algebra  $kQ$ .

We give a simplified proof to a theorem of Buan, Marsh and Reiten interpreting the denominators of cluster variables in terms of tilting theory in the cluster category. We also study compatibility between the Caldero-Chapoton map and extended BGP functors.

Finally, we realize non simply laced cluster algebras as subalgebras of certain quotients of simply laced cluster algebras endowed with a group of automorphisms.

---

## DISCIPLINE

Mathématiques

## MOTS-CLÉS

Algèbres amassées, algèbres affines, représentations de carquois, catégories amassées, base semi-canonique, polynômes de Chebyshev, carquois avec automorphismes.

## INTITULÉ ET ADRESSE DE L'U.F.R.

Université de Lyon,  
Université Lyon 1,  
Institut Camille Jordan,  
42, Boulevard du 11 novembre 1918,  
69622 Villeurbanne cedex 02, FRANCE.

# Remerciements

Je remercie Philippe Caldero, dont la connaissance n'a d'égale que sa volonté de la partager, pour son enthousiasme et son soutien tout au long de ces années. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour toute la confiance qu'il a bien voulu m'accorder.

Je remercie Bernhard Keller pour avoir pris le temps de répondre avec limpidité, précision et sympathie à toutes les questions que j'ai pu lui poser. Merci d'avoir accepté de lire si attentivement mon manuscrit et de participer à mon jury.

Je remercie Robert Marsh pour sa lecture détaillée et ses nombreuses remarques. Merci d'avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie Jan Schröer et Kenji Iohara d'avoir accepté de lire mes travaux et de venir participer au jury.

Je remercie Idun Reiten pour le temps précieux qu'elle m'a concédé et pour tous les conseils qu'elle a pu me prodiguer. Je tiens aussi à remercier Sverre Smalø et tout le groupe d'algèbre de Trondheim pour l'accueil chaleureux qui m'a été réservé lors de mon séjour en Norvège.

Je remercie Frédéric Chapoton, pour sa patience et sa grande clarté dans la communication de son omniscience.

Je remercie aussi Claus Michael Ringel, Michel Brion et Andrew Hubery pour les nombreuses remarques qui m'ont été très utiles dans mes travaux.

Je tiens tout particulièrement à remercier Camille, sans qui cette thèse n'aurait probablement jamais été menée à bien. Merci de m'avoir supporté pendant ces trois années.

Je remercie ma famille; ma mère pour m'avoir donné le goût des mathématiques, mon père pour avoir éveillé ma curiosité scientifique et mon frère pour l'inégalable soutien dont il a toujours fait preuve.

Enfin, je remercie tous mes amis pour m'avoir donné la possibilité de trouver quelques moments de sérénité pendant la préparation de ce doctorat.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Algèbres amassées et catégories amassées</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Les algèbres amassées</b>	<b>15</b>
1.1	Mutations de Fomin-Zelevinsky . . . . .	16
1.2	L'algèbre amassée $\mathcal{A}(B)$ . . . . .	17
1.3	Algèbres amassées et graphes valués orientés . . . . .	19
1.4	Algèbres amassées de type fini . . . . .	23
<b>2</b>	<b>La catégorie amassée</b>	<b>26</b>
2.1	Rappels sur les représentations de carquois . . . . .	27
2.2	La catégorie amassée . . . . .	32
2.3	Basculements dans la catégorie amassée . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Application Caldero-Chapoton</b>	<b>40</b>
3.1	L'application Caldero-Chapoton . . . . .	41
3.2	Caractères d'amas . . . . .	48
3.3	Un théorème de dénominateurs . . . . .	53
<b>II</b>	<b>Polynômes de Chebyshev généralisés</b>	<b>59</b>
<b>4</b>	<b>Polynômes de Chebyshev généralisés</b>	<b>61</b>
4.1	Les relations en diamants . . . . .	62
4.2	Polynômes de Chebyshev généralisés . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Composantes régulières</b>	<b>71</b>
5.1	Carquois à translation . . . . .	72
5.2	Structure des tubes . . . . .	74
5.3	Structures des composantes régulières en général . . . . .	75
5.4	Caractères et polynômes de Chebyshev généralisés . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Caractères et formules de multiplication</b>	<b>79</b>
6.1	Un caractère sur la catégorie $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . . . . .	80
6.2	Revêtements et formules de multiplication dans les tubes . . . . .	87
<b>III</b>	<b>Structure des algèbres amassées affines</b>	<b>94</b>
<b>7</b>	<b>Algèbres et catégories affines</b>	<b>96</b>
7.1	Représentations de carquois affines . . . . .	97

7.2	La catégorie amassée d'un carquois affine . . . . .	103
7.3	Algèbres amassées affines . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Variables génériques</b>	<b>112</b>
8.1	Construction des variables génériques . . . . .	113
8.2	Propriétés multiplicatives des variables génériques . . . . .	117
8.3	Variables génériques pour un carquois affine . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Le type <math>\tilde{A}</math></b>	<b>127</b>
9.1	La propriété de différence pour le type $\tilde{A}$ . . . . .	128
9.2	Les variables génériques comme générateurs . . . . .	141
9.3	Indépendance linéaire des variables génériques . . . . .	146
9.4	Bases pour le carquois de Kronecker . . . . .	159
9.5	Bases semi-canoniques pour les carquois affines de rang 3 et 4 . . . . .	165
9.6	Approche combinatoire des variables généralisées régulières . . . . .	169
<b>10</b>	<b>Les types <math>\tilde{D}</math> et <math>\tilde{E}</math></b>	<b>179</b>
10.1	Vers la propriété de différence . . . . .	180
10.2	Le cas $\tilde{D}_4$ . . . . .	181
<b>IV</b>	<b>Algèbres amassées non simplement lacées</b>	<b>184</b>
<b>11</b>	<b>Mutations orbitales</b>	<b>187</b>
11.1	Automorphismes et quotients de matrices . . . . .	188
11.2	Algèbres amassées et automorphismes . . . . .	191
<b>12</b>	<b>Interprétation catégorique</b>	<b>204</b>
12.1	$G$ -action sur la catégorie amassée . . . . .	205
12.2	Un théorème de dénominateurs . . . . .	208
12.3	Le type fini . . . . .	210
12.4	Le type affine . . . . .	214
<b>13</b>	<b>Algèbres amassées de rang 2</b>	<b>216</b>
13.1	Algèbres amassées de rang 2 . . . . .	217
13.2	Réalisations des algèbres amassées de rang deux . . . . .	218
<b>14</b>	<b>Mutation-finitude</b>	<b>223</b>
14.1	Classes de mutations des graphes affines . . . . .	224
14.2	Un programme pour dénombrer les classes de mutation finies . . . . .	226
<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>237</b>
<b>A</b>	<b>Taille des classes de mutation</b>	<b>238</b>
A.1	Les types finis . . . . .	239
A.2	Les types affines . . . . .	240
A.3	Les types elliptiques . . . . .	241
A.4	Des types géométriques . . . . .	242
A.5	Des types sporadiques . . . . .	243

# Introduction

En 2001, Fomin et Zelevinsky ont défini la notion d'algèbre amassée afin de donner un cadre général pour l'étude des problèmes de positivité totale et de bases canoniques dans les groupes algébriques [44]. Bien qu'initialement introduites dans ce but précis, les algèbres amassées sont depuis apparues dans des domaines mathématiques très divers. Il serait bien difficile de donner une liste complète des interconnexions qui existent entre les algèbres amassées et les différents domaines mathématiques et encore plus difficile d'écrire une bibliographie exhaustive à ce sujet. Parmi les champs de développement principaux ces dernières années, se trouvent la combinatoire [25, 46, 86, 87], les groupes algébriques [5], la géométrie de Poisson [42, 41, 43], les algèbres de Kac-Moody [45, 66, 48] et la théorie des représentations [74, 10, 16, 20, 19, 54].

Etant donné un ensemble d'indéterminées  $\{u_1, \dots, u_q\}$  et une matrice antisymétrisable  $B \in M_q(\mathbb{Z})$ , l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est la  $\mathbb{Z}$ -algèbre engendrée par un ensemble de variables appelées *variables d'amas*. Ces variables d'amas sont définies récursivement à partir de  $\{u_1, \dots, u_q\}$  à l'aide d'un procédé appelé *mutation*. Elles sont naturellement regroupées en ensembles, appelés *amas*, de même cardinalité  $q$ . Fomin et Zelevinsky ont montré que les variables d'amas de  $\mathcal{A}(B)$  sont toujours des polynômes de Laurent en les variables de l'amas initial  $\{u_1, \dots, u_q\}$ . Si la matrice considérée  $B$  est antisymétrique, on dit que l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est *simplement lacée*. En voyant les matrices antisymétriques comme des matrices d'incidences de carquois, il est possible d'associer une algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  à un carquois  $Q$ . Dans le cas où  $Q$  est un carquois sans cycles orientés, l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  est dite *acyclique*.

La catégorification des algèbres amassées acycliques simplement lacées à l'aide de la théorie des représentations a été particulièrement fertile. Dans ce cas, Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov ont défini une catégorie triangulée  $\mathcal{C}_Q$ , appelée *catégorie amassée* dont la théorie de basculement encode la combinatoire de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  [10]. Dans [16], Caldero et Chapoton ont complété cette catégorification en introduisant une réalisation explicite des éléments de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  à partir des objets de  $\mathcal{C}_Q$ . Cette réalisation se fait à l'aide de l'application Caldero-Chapoton

$$X^Q : \begin{cases} \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_q^{\pm 1}] \\ M & \longmapsto & X_M^Q \end{cases}$$

invariante sous isomorphismes, qui à un objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$  associe un polynôme de Laurent  $X_M^Q$  appelé *variable généralisée associée à  $M$* . Elle réalise la catégorification au sens où

$$\text{Cl}(Q) = \left\{ X_M^Q : M \text{ est indécomposable rigide dans } \mathcal{C}_Q \right\}$$

où  $\text{Cl}(Q)$  désigne l'ensemble des variables d'amas dans  $\mathcal{A}(Q)$ . Dans le cas particulier où  $Q$  est un carquois de type Dynkin, tout indécomposable étant rigide, on a alors l'égalité

$$\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)]$$

et  $X_{?}^Q$  induit une bijection

$$\{ \text{isoclasses d'objets indécomposables dans } \mathcal{C}_Q \} \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(Q).$$

En particulier, si  $M$  et  $N$  sont deux  $kQ$ -modules indécomposables ayant le même vecteur de dimension, les variables généralisées  $X_M^Q$  et  $X_N^Q$  sont nécessairement égales.

Si  $Q$  n'est pas un carquois de type Dynkin, on n'a a priori qu'une inclusion

$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)]$$

et il ne subsiste pas de résultat d'injectivité de l'application Caldero-Chapoton sur l'ensemble des isoclasses d'objets indécomposables dans  $\mathcal{C}_Q$ . En outre, nous verrons qu'il existe des modules indécomposables  $M, N$  ayant le même vecteur de dimension tels que les variables généralisées  $X_M^Q$  et  $X_N^Q$  sont distinctes. Dans la suite, nous nous intéresserons particulièrement aux différences entre de telles variables généralisées dans le cas où  $Q$  est un carquois affine.

Grâce à l'application Caldero-Chapoton, Caldero et Keller ont étudié des formules de multiplication pour les variables  $X_M^Q$  en termes d'extensions dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  [20, 19]. Ces travaux ont montré qu'en un certain sens, l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  peut être vue comme une algèbre de Hall de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  (voir aussi [16, 19, 95, 38]). Pour une présentation générale des résultats actuels concernant la catégorification des algèbres amassées acycliques, on pourra se référer à [69].

Dans le cas où  $Q$  est un carquois de type Dynkin, l'algèbre des chemins  $kQ$  est une algèbre héréditaire de dimension finie et de représentation finie. Alors, la théorie des représentations de  $kQ$  permet d'obtenir une description précise de  $\mathcal{A}(Q)$  [45, 20]. Si en revanche  $Q$  est un carquois acyclique quelconque,  $kQ$  est une algèbre de dimension finie héréditaire arbitraire et il ne subsiste souvent que des résultats partiels [19]. En théorie des représentations, d'après le théorème de classification docile-sauvage [35, 26], une algèbre de dimension finie héréditaire est de représentation finie, affine ou sauvage. Les algèbres héréditaires de représentation docile sont les algèbres minimales de représentation infinie, leur théorie des représentations est en général une étape intermédiaire importante avant de pouvoir aborder celle des algèbres sauvages. Cela suggère que si l'on veut avoir une bonne compréhension des algèbres amassées associées à des carquois acycliques arbitraires, l'investigation de celles qui sont associées à des carquois affines est une étape cruciale.

La recherche de bases dans les algèbres amassées est l'un des points centraux pour la compréhension des bases canoniques dans les groupes algébriques semi-simples. Dans une algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ , nous disposons d'une famille privilégiée d'éléments appelés *monômes d'amas*, qui sont les monômes pris en les variables d'un même amas. Il a été conjecturé par Zelevinsky que les monômes d'amas formaient un ensemble linéairement indépendant dans une algèbre amassée quelconque [98]. Si l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  est *simplement lacée de type fini*, il a été montré que les monômes d'amas forment une base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$



[88, 20]. Dans le cas où  $Q$  n'est plus de type fini, il apparaît que les monômes d'amas ne suffisent plus à engendrer  $\mathcal{A}(Q)$ . Il s'agit alors de déterminer une bonne généralisation de la notion de monômes d'amas pour définir à nouveau une base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .

Dans le cas d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  de rang deux de type fini ou affine, Sherman et Zelevinsky ont introduit et construit une base, appelée *base canonique*, caractérisée par une propriété de positivité [88]. Cette base est la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas et d'une famille de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires de l'algèbre de Lie-Kac-Moody associée à  $B$ . Dans le cas de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(K)$  où  $K$  est le carquois de Kronecker, Caldero et Zelevinsky ont introduit une autre base, appelée *base semi-canonique*, naturelle d'un point de vue de la catégorification à l'aide de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_K$ . Il est apparu que cette base était aussi la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas et d'une famille de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires.

Dans [23, 24], l'auteur a calculé une  $\mathbb{Z}$ -base canonique dans le cas d'une algèbre amassée associée à un carquois affine de type  $\tilde{A}_{2,1}$ . Il a notamment établi que cette base canonique était la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas et d'un ensemble de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires et aux racines réelles qui ne sont pas des racines de Schur.

Geiss, Leclerc et Schröer ont développé une catégorification indépendante à l'aide de l'algèbre préprojective d'un carquois acyclique  $Q$ . Ils ont ainsi pu réaliser certaines algèbres amassées  $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M)$  (non acycliques en général) comme des sous-algèbres du dual gradué  $U(\mathfrak{n})_{\text{gr}}^*$  de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{n})$  où  $\mathfrak{n}$  est la sous-algèbre nilpotente maximale de l'algèbre de Lie-Kac-Moody associée au carquois  $Q$ . Ils ont alors étudié le dual  $\mathcal{S}^*$  de la base semi-canonique de Lusztig de  $U(\mathfrak{n})$  et montré que  $\mathcal{S}^* \cap \mathcal{A}(\mathcal{C}_M)$  forme une base dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M)$ . Par un procédé de spécialisation de coefficients, ils ont alors pu définir une base dans l'algèbre amassée acyclique  $\mathcal{A}(Q)$  appelée *base semi-canonique duale* [54]. Si ces résultats s'avèrent beaucoup plus généraux que ceux obtenus jusqu'ici à l'aide de la catégorie amassée, ils sont cependant à un niveau théorique bien moins explicite.

Afin d'obtenir des résultats aussi explicites que possibles, nous avons cherché à généraliser les méthodes de Caldero et Keller au cas des algèbres amassées simplement lacées qui ne sont pas de type fini. L'idée sous-jacente à notre construction est la suivante. Pour tout carquois acyclique, les monômes d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  sont les variables généralisées  $X_M^Q$  où  $M$  est un objet rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ . D'autre part, on sait que si un  $kQ$ -module  $M$  est rigide, alors l'orbite  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans la variété  $\text{rep}(Q, \mathbf{dim} M)$  des représentations de  $Q$  de dimension  $\mathbf{dim} M$  est un ouvert dense. Il s'ensuit que  $X_M^Q$  est une valeur générique de l'application induite par l'application Caldero-Chapoton sur la variété  $\text{rep}(Q, \mathbf{dim} M)$ . C'est cette propriété que nous allons utiliser pour généraliser les monômes d'amas.

Etant donné une représentation  $M$  de  $Q$  et un vecteur de dimension  $\mathbf{e}$ , la *grassmannienne de sous-modules de  $M$  de dimension  $\mathbf{e}$*  est la variété projective

$$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \{N \in \text{rep}(Q, \mathbf{e}) : N \text{ est une sous-représentation de } M\}.$$

La valeur  $X_M^Q$  de l'application Caldero-Chapoton en  $M$  est essentiellement une série génératrice pour les caractéristiques d'Euler de grassmanniennes de sous-modules de  $M$ . Nous allons ainsi montrer l'existence de variables génériques en

montrant celle de valeurs génériques pour ces caractéristiques. En particulier, on démontre la proposition suivante :

**Proposition.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors il existe un ouvert dense  $U_{\mathbf{d}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que l'application Caldero-Chapoton est constante sur  $U_{\mathbf{d}}$ . De plus, si  $U'_{\mathbf{d}}$  est un autre tel sous-ensemble, les valeurs de l'application Caldero-Chapoton coïncident sur  $U_{\mathbf{d}}$  et  $U'_{\mathbf{d}}$ .*

Pour un élément  $\mathbf{d} = (d_i) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on note  $[\mathbf{d}]_+ = (\max(d_i, 0))_{i \in Q_0}$ . Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on note  $X_{\mathbf{d}}^Q$  la valeur de  $X_{\mathbf{d}}^Q$  sur l'ouvert  $U_{\mathbf{d}}$ . Pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on pose ensuite

$$X_{\mathbf{d}}^Q = X_{[\mathbf{d}]_+}^Q \prod_{d_i < 0} u_i^{-d_i}$$

où  $\mathbf{u} = (u_i, i \in Q_0)$  est l'amas de la graine initiale de  $\mathcal{A}(Q)$ . L'élément  $X_{\mathbf{d}}^Q$  est appelé *variable générique de dimension  $\mathbf{d}$*  de  $\mathcal{A}(Q)$ . On note

$$\mathcal{B}'(Q) = \left\{ X_{\mathbf{d}}^Q : \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0} \right\}$$

l'ensemble des variables génériques de  $\mathcal{A}(Q)$ . Il apparaîtra au lemme 8.2.5 que les monômes d'amas d'une algèbre amassée acyclique  $\mathcal{A}(Q)$  sont toujours des variables génériques.

Nous établissons à la proposition 8.2.4 des propriétés de multiplicativité pour les variables génériques analogues à celles de la base semi-canonique duale montrées dans [51]. Il en découle en particulier que la multiplication des variables génériques est compatible avec la décomposition canonique de Kac au sens suivant :

**Proposition.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension dont la décomposition canonique est  $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}_n$ . Alors*

$$X_{\mathbf{d}}^Q = \prod_{i=1}^n X_{\mathbf{e}_i}^Q.$$

La base semi-canonique duale  $\mathcal{S}^*$  de  $U(\mathfrak{n})_{\text{gr}}^*$  est constituée d'un ensemble de fonctions constructibles génériques  $\rho_Z$  indexées par les composantes irréductibles  $Z$  des variétés nilpotentes de modules sur l'algèbre préprojective de  $Q$ . C'est à partir de ces fonctions génériques que Geiss, Leclerc et Schröer ont pu construire la base semi-canonique duale dans les algèbres amassées. En outre, les monômes d'amas apparaissent naturellement comme des éléments de cette base semi-canonique duale. Par analogie avec ces travaux, il semble raisonnable de chercher à montrer que les variables génériques données par l'application Caldero-Chapoton ont des propriétés similaires dans l'algèbre amassée acyclique  $\mathcal{A}(Q)$ .

Si  $\mathbf{d}$  est une racine réelle d'un carquois acyclique  $Q$ , il existe une unique représentation indécomposable  $M$  de dimension  $\mathbf{d}$  à isomorphisme près. En revanche, si  $\mathbf{d}$  est une racine imaginaire, il existe une infinité non-dénombrable de représentations indécomposables non-isomorphes de dimension  $\mathbf{d}$ . Ainsi, l'application induite par  $X_{\mathbf{d}}^Q$  n'est pas injective sur l'ensemble des isoclasses d'indécomposables dans  $kQ$ -mod si  $Q$  n'est pas de type Dynkin. Dans le cas où  $Q$  est un carquois affine de racine imaginaire minimale  $\delta$ , nous nous intéressons

particulièrement au comportement de l'application  $X_{\delta}^Q$  sur les isoclasses de modules indécomposables de dimension  $\delta$ . Nous montrons notamment au lemme 8.3.3 que l'application Caldero-Chapoton est constante sur les modules quasi-simples des tubes homogènes du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(kQ)$ . Nous nous intéressons ensuite à la différence entre les variables généralisées associées aux modules indécomposables de dimension  $\delta$  respectivement dans un tube homogène et dans un tube exceptionnel. Ceci va être un point central dans notre étude. Etant donné un module indécomposable  $M$  dans un tube  $\mathcal{T}$  de  $\Gamma(kQ)$ , on note  $\text{q.soc}M$  son quasi-socle et  $\text{q.rad}M$  son quasi-radical. On dira qu'un carquois affine  $Q$  satisfait la *propriété de différence* si pour tous modules indécomposables  $M, M_{\lambda} \in \text{rep}(Q, \delta)$  dans des tubes respectivement exceptionnels et homogènes, on a

$$X_M = X_{M_{\lambda}} + X_{\text{q.rad}M/\text{q.soc}M}.$$

Si  $Q$  est un carquois satisfaisant la propriété de différence, nous pouvons ainsi donner des relations explicites entre les variables généralisées associées aux modules dans différentes composantes régulières. Ceci permet en particulier de montrer que dans ce cas, on a l'égalité

$$\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)].$$

Nous montrons alors :

**Théorème.** *Tout carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  satisfait la propriété de différence.*

Nous conjecturons en outre que la propriété de différence est satisfaite pour tout carquois affine (voir chapitre 10). L'étude de la propriété de différence repose essentiellement sur la description précise des grassmanniennes de sous-modules des représentations indécomposables de dimension  $\delta$ . Dans le cas  $\tilde{\mathbb{A}}$ , cette étude a été rendue possible du fait qu'il n'y a pas de multiplicité dans les caractéristiques d'Euler de ces variétés.

La propriété de différence va s'avérer être l'un des points centraux dans la preuve du fait que les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans une algèbre amassée affine. Nous montrons en effet au chapitre 9 que si tous les carquois d'un certain sous-ensemble de la classe de réflexion d'un carquois affine  $Q$  satisfont la propriété de différence, alors les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ . En particulier, nous montrons ainsi :

**Théorème.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .*

Ce théorème généralise en particulier les travaux de Caldero et Zelevinsky à propos du carquois de Kronecker [22].

Pour démontrer ces résultats, nous allons étudier le comportement des valeurs de l'application Caldero-Chapoton sur les composantes régulières de  $\Gamma(kQ)$ . Cette étude a été initiée dans [38], la partie II lui est dédiée. Nous y introduisons une certaine famille de polynômes appelés *polynômes de Chebyshev généralisés* caractérisés par des relations de récurrence d'ordre deux. Au théorème 5.4.3, nous montrons que ces polynômes apparaissent naturellement dans le cadre de l'étude des variables généralisées associées aux modules réguliers sur l'algèbre des chemins d'un carquois acyclique. Si on note  $E^{(n)}$  l'unique  $kQ$ -module régulier indécomposable de quasi-socle  $E$  et de quasi-longueur  $n$ , on montre alors le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{R} \simeq \overrightarrow{\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty}/(p)$  une composante régulière de  $\Gamma(kQ)$  avec  $p \geq 0$ . Soient  $R_i, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  les quasi-simples de  $\mathcal{R}$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$X_{R_i}^{Q(n)} = P_{n,\infty}(X_{R_i}^Q, \dots, X_{R_{i+n-1}}^Q)$$

où  $P_{n,\infty}$  désigne le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev généralisé de rang infini. De plus, si  $p > 0$ , alors

$$X_{R_i}^{Q(n)} = P_{n,p}(X_{R_i}^Q, \dots, X_{R_{i+p-1}}^Q)$$

où  $P_{n,p}$  désigne le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev généralisé de rang  $p$ .

Le dernier chapitre de la partie I est dédié à une preuve simplifiée d'un théorème de dénominateurs de Buan, Marsh et Reiten [12] à l'aide des caractères d'amas de Palu [76]. Plus précisément, il donne une interprétation des dénominateurs des variables d'amas exprimés dans différents amas d'une algèbre amassée acyclique  $\mathcal{A}(Q)$  en fonction de la théorie de basculement de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$ . La notion de compatibilité sous échange, introduite dans [12], est essentielle dans cette interprétation. On dira qu'un objet indécomposable  $N$  est *compatible sous échange* si pour toute paire d'échange  $(U, U^*)$  dans  $\mathcal{C}_Q$  dont les triangles associés sont

$$U \longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1] \text{ et } U^* \longrightarrow B \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1],$$

on a

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, U) + \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, U^*) = \max(\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B), \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B')).$$

Soit  $T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  l'objet amas basculant de  $\mathcal{C}_Q$  correspondant à l'amas  $\mathbf{x}$  et  $X_T^T$  le caractère d'amas associé à  $T$ . Pour tout  $i \in Q_0$ , on note  $\alpha_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  et pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on note

$$\mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) = \sum_{i \in Q_0} \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i, M) \alpha_i.$$

Enfin, pour tout polynôme de Laurent  $L$  de  $\mathbb{Z}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ , on note  $\delta_T(L)$  le vecteur de dénominateur de  $L$ . On montre alors :

**Théorème 3.3.8.** Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée,  $T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Supposons que pour tout  $i \in Q_0$ ,  $T_i$  est compatible sous échange, alors pour tout objet indécomposable rigide  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a

$$\delta_T(X_M^T) = \begin{cases} -\alpha_i & \text{si } M \simeq T_i[1], \\ \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La preuve que nous donnons est celle que nous avons présentée dans [36].

Dans la partie IV, nous nous sommes aussi intéressés à l'étude des algèbres amassées non simplement lacées. Une très grande partie des développements dans l'étude des algèbres amassées s'est faite à l'aide des catégorification par la catégorie amassée ou par l'algèbre préprojective. Dans ces deux cas, les articles se sont concentrés sur le cas simplement lacé, laissant de côté le cas non simplement lacé. Certains auteurs ont alors commencé à adapter les preuves du cas

simplement lacé au cas non simplement lacé [102, 100, 103, 60] en remplaçant l'algèbre  $kQ$  sous-jacente à la catégorie amassée par des *species*. En théorie des représentations, une autre méthode pour aborder les graphes non simplement lacés consiste à les réaliser comme des quotients de graphes avec automorphismes [73, 61, 65]. En suivant cette idée, nous avons montré que l'on pouvait réaliser les algèbres non simplement lacées comme des sous-algèbres de certains quotients d'algèbres munies d'un groupe d'automorphismes admissibles [37]. Indépendamment, Demonet a appliqué des méthodes similaires dans le cadre de l'algèbre préprojective [29]. Plus précisément, on montre au corollaire 11.2.14 l'existence d'un morphisme d'algèbres  $\pi$ , appelé *projection* tel que :

**Théorème.** *Soit  $A$  une matrice antisymétrisable munie d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$  tel que  $(A, G)$  est une paire admissible stable. Alors toute graine dans  $\mathcal{A}(A/G)$  est la projection d'une graine de  $\mathcal{A}(A)$ . En particulier, tout amas dans  $\mathcal{A}(A/G)$  est la projection d'un amas dans  $\mathcal{A}(A)$  et toute variable d'amas de  $\mathcal{A}(A/G)$  est la projection d'une variable d'amas de  $\mathcal{A}(A)$ . Ainsi,  $\mathcal{A}(A/G)$  est une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de l'algèbre  $\pi(\mathcal{A}(Q))$ .*

Ceci donne en particulier un moyen de transposer aux algèbres non-simplement lacées les résultats connus au niveau des algèbres simplement lacées.

Enfin, nous avons étudié certains problèmes de recherche de carquois dont la classe de mutation est finie et, le cas échéant, de calcul de la cardinalité de la classe de mutation. En utilisant nos méthodes, nous donnons notamment une preuve simple du fait qu'un graphe valué non simplement lacé affine a une classe de mutation finie. Dans cette optique, nous avons participé au développement du programme QUIVER MUTATION EXPLORER [40] pour calculer les tailles de classes de mutations d'un carquois donné qui vient compléter le programme déjà développé par Keller [67]. Les résultats obtenus avec ce programme sont présentés dans l'annexe A.

En introduisant les algèbres amassées, Fomin et Zelevinsky ont ouvert la voie à de nouveaux liens entre combinatoire, géométrie algébrique et théorie des représentations. Nous avons cherché, autant que possible, à inscrire nos travaux dans cette logique de transversalité. Les méthodes développées dans la partie I sont essentiellement axées sur l'utilisation de théorie des représentations à l'aide de catégories triangulées. La partie II développe principalement un outillage combinatoire qui sera mis en oeuvre aux côtés de l'étude de la structure des catégories amassées affines et de la géométrie sous-jacente à la théorie des représentations dans la partie III. La partie IV se fonde sur des méthodes combinatoires et sur leur interprétation catégorique. Enfin, l'annexe A est dédiée à la présentation de résultats purement combinatoires obtenus de manière algorithmique. En ce sens, nos travaux illustrent certaines des nombreuses interconnexions entre les différents domaines mathématiques que les algèbres amassées ont permis de mettre à jour.

Première partie

Algèbres amassées et  
catégories amassées

Bien qu'impliquées dans des théories avancées, les algèbres amassées peuvent être définies de manière élémentaire. Ce sont des  $\mathbb{Z}$ -algèbres engendrées par un ensemble de variables appelées *variables d'amas*. Ces variables sont obtenues à l'aide d'un procédé récursif appelé *mutation* appliqué à un ensemble initial de variables, appelé *amas initial*.

En général, une algèbre amassée a un nombre infini de variables d'amas. Dans le cas où ce nombre est fini, l'algèbre amassée est dite de *type fini*. Les algèbres amassées de type fini ont été classifiées par Fomin et Zelevinsky dans [45]. De manière étonnante, cette classification correspond à la classification des diagrammes de Dynkin. C'est en grande partie ce résultat qui a ouvert la voie à l'étude des liens entre algèbres amassées (acycliques) et représentations de carquois.

La première tentative de catégorification à l'aide des représentations de carquois est apparue en 2003 dans [74] avec la notion de *représentation décorée*. Peu après, la notion de *catégorie amassée* a été introduite indépendamment dans les travaux de Caldero, Chapoton et Schiffler pour les algèbres de type fini  $\mathbb{A}$  [18] et dans ceux de Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov pour le type fini en général [10]. Par ailleurs, Geiss, Leclerc et Schröer ont aussi donné une catégorification des algèbres amassées à l'aide de l'algèbre préprojective [55]. Ces deux catégorifications permettent de réaliser de nombreuses algèbres amassées et se sont avérées être des champs très fertiles de développement ces dernières années. Très récemment, Leclerc a développé une nouvelle catégorification des algèbres amassées à l'aide des algèbres affines quantiques qui apporte un nouvel éclairage sur le sujet [72].

La catégorie amassée est une catégorie triangulée [68] dont la théorie de basculement est très intimement liée à la structure d'algèbre amassée associée [10, 13, 62]. Il y a essentiellement deux points de vue à propos de la catégorification des algèbres amassées à l'aide de la catégorie amassée. Le premier point de vue, développé par Buan, Marsh, Reiten et Todorov, consiste à chercher à réaliser des objets dans la catégorie amassée à partir des variables d'amas [14]. Le second point de vue, développé par Caldero, Chapoton et Keller, consiste à réaliser les éléments de l'algèbre amassée à partir des objets dans la catégorie amassée à l'aide d'une application explicite appelée *application Caldero-Chapoton* [16]. Il a été montré que ces deux points de vue sont duaux [8]. Dans nos travaux, nous avons privilégié la seconde approche, mais comme l'illustrent par exemple [12] et [36], ces points de vue sont essentiellement équivalents.

Dans cette partie, nous réintroduisons d'abord les définitions essentielles concernant les algèbres amassées au chapitre 1 et rappellerons la classification des algèbres amassées de type fini. Au chapitre 2, nous donnerons les définitions et résultats principaux concernant la catégorification des algèbres amassées acycliques à l'aide de la catégorie amassée. Nous détaillerons l'approche Caldero-Chapoton-Keller à l'aide de l'application Caldero-Chapoton et des caractères d'amas de Palu au chapitre 3. Les caractères d'amas de Palu sont des outils utiles pour exprimer les variables d'amas dans des amas autres que l'amas initial à partir des objets dans la catégorie amassée. Nous démontrerons notamment un théorème de dénominateurs pour ces caractères d'amas, donnant une preuve simplifiée d'un théorème de Buan, Marsh et Reiten [12].

# Chapitre 1

## Les algèbres amassées



Dans ce chapitre, nous réintroduisons les objets élémentaires de la théorie des algèbres amassées. Nous nous restreignons au cas sans coefficients. Pour les généralités concernant les algèbres amassées, on pourra se référer à la série d'articles originaux de Fomin et Zelevinsky [44, 45, 5, 47].

## 1.1 Mutations de Fomin-Zelevinsky

Les algèbres amassées sont définies de manière récursive à l'aide d'un procédé appelé *mutation* introduit dans [44].

### 1.1.1 Mutation de matrices

Soit  $q \geq 1$  un entier. Une matrice  $B \in M_q(\mathbb{Z})$  est dite *anti-symétrisable* si il existe une matrice diagonale  $D$  à coefficients entiers non-nuls telle que  $DB$  est anti-symétrique. Etant donné une matrice anti-symétrisable  $B = (b_{ij}) \in M_q(\mathbb{Z})$  et un indice  $k \in \{1, \dots, q\}$ , la *mutation de  $B$  dans la direction  $k$*  est la matrice  $\mu_k(B) = (b'_{ij})$  définie par :

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k, \\ b_{ij} + \frac{1}{2} (b_{ik}|b_{kj}| + |b_{ik}|b_{kj}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice  $\mu_k(B)$  obtenue est encore une matrice anti-symétrisable. Si en outre  $B$  est anti-symétrique, alors  $\mu_k(B)$  est antisymétrique. On peut à nouveau définir la mutation de  $\mu_k(B)$  et on remarque alors que le procédé de mutation est involutif au sens où pour tout  $k \in \{1, \dots, q\}$ , on a

$$\mu_k(\mu_k(B)) = B.$$

Etant donnée une matrice anti-symétrisable  $B \in M_q(\mathbb{Z})$ , on dira qu'une matrice  $B'$  est *mutation-équivalente* à  $B$  si il existe une suite d'indices  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, q\}$  telle que

$$B' = \mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(B).$$

On note alors  $B \sim_{\text{mut}} B'$ . La relation  $\sim_{\text{mut}}$  définit une relation d'équivalence sur  $M_q(\mathbb{Z})$  dont les classes d'équivalence sont appelées *classes de mutation*. On note  $\text{Mut}(B)$  la classe de mutation d'une matrice  $B$ .

### 1.1.2 Mutations de graines

Une *graine* est un couple  $(\mathbf{x}, B)$  où  $B \in M_q(\mathbb{Z})$  est une matrice anti-symétrisable et où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$  est un  $q$ -tuple de variables algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . Etant donnée une graine  $(\mathbf{x}, B)$  et  $k \in \{1, \dots, q\}$ , on définit la *mutation de la graine dans la direction  $k$*  par  $\mu_k((\mathbf{x}, B)) = (\mathbf{x}', \mu_k(B))$  où  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_q)$  est donné par  $x'_i = x_i$  si  $i \neq k$  et

$$x_k x'_k = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}. \quad (1.1)$$

La relation (1.1) est appelée *relation d'échange*. Le couple  $(\mathbf{x}', \mu_k(B))$  est encore une graine et les  $x'_i$  pour  $i \in \{1, \dots, q\}$  forment un système de générateurs algébriquement indépendants du corps  $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_q)$ . En particulier, on

peut à nouveau définir la mutation de  $\mu_k((\mathbf{x}, B))$  et le procédé de mutation est toujours involutif au sens où pour tout  $k \in \{1, \dots, q\}$ , on a

$$\mu_k(\mu_k((\mathbf{x}, B))) = (\mathbf{x}, B).$$

Etant donnée une graine  $(\mathbf{x}, B)$ , on dira qu'une autre graine  $(\mathbf{x}', B')$  est *mutation-équivalente* à  $(\mathbf{x}, B)$  si il existe une suite d'indices  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, q\}$  telle que

$$(\mathbf{x}', B') = \mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(\mathbf{x}, B).$$

Dans ce cas, on note  $(\mathbf{x}, B) \sim_{\text{mut}} (\mathbf{x}', B')$ . Alors  $\sim_{\text{mut}}$  est une relation d'équivalence et l'ensemble des graines mutation-équivalentes à une graine  $(\mathbf{x}, B)$  donnée est appelé *classe de mutation* de  $(\mathbf{x}, B)$ .

Etant donnée une graine  $(\mathbf{x}, B)$ , l'ensemble sous-jacent au  $q$ -tuple  $\mathbf{x}$  est appelé *amas* (ou *cluster*) de la graine  $(\mathbf{x}, B)$  on note  $\chi(\mathbf{x}, B) = \{x_1, \dots, x_q\}$ .

## 1.2 L'algèbre amassée $\mathcal{A}(B)$

### 1.2.1 Généralités

On se fixe maintenant une graine  $(\mathbf{u}, B)$  avec  $B \in M_q(\mathbb{Z})$ . On appelle *corps ambiant* le corps  $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_q)$  des fractions rationnelles en les  $u_i$ . On note

$$\text{Cl}(\mathbf{u}, B) = \bigcup_{(\mathbf{x}, B') \sim_{\text{mut}} (\mathbf{u}, B)} \chi(\mathbf{x}, B').$$

On remarquera que d'après la relation d'échange (1.1),  $\text{Cl}(\mathbf{u}, B) \subset \mathcal{F}(\mathbf{u})$ .

**Définition 1.2.1.** L'*algèbre amassée* (ou *algèbre cluster*) de graine initiale  $(\mathbf{u}, B)$  est la sous  $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$  engendrée par  $\text{Cl}(\mathbf{u}, B)$ . On la note

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, B) = \mathbb{Z}[\text{Cl}(\mathbf{u}, B)] \subset \mathcal{F}(\mathbf{u}).$$

Si  $B$  est anti-symétrique, on dira que  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  est une *algèbre amassée simplement lacée*. Si  $B$  est anti-symétrisable mais non anti-symétrique, on dira que  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  est une *algèbre amassée non simplement lacée*.

**Remarque 1.2.2.** Pour être tout à fait précis vis à vis de la terminologie initiale de Fomin et Zelevinsky, nous devrions préciser que  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  définie ci-dessus est une algèbre amassée *sans coefficient*. Comme c'est le cas dans de nombreux travaux, nous avons restreint notre étude à ce cas là. Pour des détails sur les algèbres cluster avec coefficients, nous renvoyons par exemple à [47].

**Définition 1.2.3.** Soit  $(\mathbf{u}, B)$  une graine.

1. Les *graines* de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  sont les graines mutation-équivalentes à  $(\mathbf{u}, B)$ .
2. Les *amas* (ou *clusters*) de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  sont les  $\chi(\mathbf{x}, B')$  où  $(\mathbf{x}, B')$  parcourt l'ensemble des graines mutation-équivalentes à  $(\mathbf{u}, B)$ . On note  $\mathcal{X}(\mathbf{u}, B)$  l'ensemble des amas dans  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ .
3. Les *variables d'amas* (ou *variables cluster*) de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  sont les éléments de l'ensemble  $\text{Cl}(\mathbf{u}, B)$ .

Par définition, l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  est une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre du corps  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$  des fractions rationnelles en les  $u_i$ . Fomin et Zelevinsky ont montré qu'une algèbre amassée est en fait un sous-anneau de l'anneau  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[u_i^{\pm 1}, i \in \{1, \dots, q\}]$  des polynômes de Laurent en les  $u_i$ , ce résultat est connu sous le nom de *phénomène Laurent*.

**Théorème 1.2.4** ([44]). *Soit  $(\mathbf{u}, B)$  une graine avec  $B \in M_q(\mathbb{Z})$ . Alors*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, B) \subset \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}].$$

Parmi les éléments de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ , une famille naturelle de variables va s'avérer particulièrement importante, notamment dans le cadre de la recherche de bases pour le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ , ces éléments sont les *monômes d'amas* :

**Définition 1.2.5.** Soit  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  une algèbre amassée. Un *monôme d'amas* (ou *monôme cluster*) est un monôme  $\prod_{i=1}^q x_i^{n_i}$  où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$  est un amas de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  et  $n_i \in \mathbb{N}$  pour tout  $i = 1, \dots, q$ . Autrement dit, c'est un monôme pris en les variables d'un seul amas de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ .

A isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres près,  $\text{Cl}(\mathbf{u}, B)$  (et donc  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ ) ne dépendent pas du  $q$ -tuple d'indéterminées  $\mathbf{u}$  choisi. Si cela ne prête pas à confusion, on omettra parfois la référence à l'amas  $\mathbf{u}$  de la graine initiale. On notera alors  $\mathcal{A}(B)$  pour  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ ,  $\mathcal{X}(B)$  pour  $\mathcal{X}(\mathbf{u}, B)$  et  $\text{Cl}(B)$  pour  $\text{Cl}(\mathbf{u}, B)$ .

Si  $(\mathbf{u}, B)$  est une graine et  $(\mathbf{x}, C)$  est une graine de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ , le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres  $\Phi_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} : \mathbb{Z}[\mathbf{x}^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  qui envoie  $x_i$  sur son expression dans  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$  induit un isomorphisme

$$\Phi_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} : \mathcal{A}(\mathbf{x}, C) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$$

appelé *isomorphisme canonique d'algèbres amassées* entre de  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, C)$  vers  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ . De plus,  $\Phi_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}$  induit une bijection des amas de  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, C)$  vers les amas de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ . En particulier, il induit une bijection des variables d'amas (resp. des monômes d'amas) de  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, C)$  vers les variables d'amas (resp. les monômes d'amas) de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$ .

Une conjecture fondamentale dans la théorie des algèbres amassées est la *conjecture de positivité* :

**Conjecture 1.2.6.** *Soit  $(\mathbf{u}, B)$  une graine avec  $B \in M_q(\mathbb{Z})$ . Alors pour toute graine  $(\mathbf{x}, B')$*

$$\Phi_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}(\text{Cl}(\mathbf{u}, B)) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathbf{x}^{\pm 1}].$$

Nous verrons dans la suite que la catégorification des algèbres amassées à l'aide de la catégorie amassée et des travaux de Caldero, Chapoton, Keller et Reineke a permis d'obtenir des avancées sérieuses vers cette conjecture (voir [19, 21]).

Etant donné un élément  $x \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$ , on peut écrire

$$x = \frac{P(u_1, \dots, u_q)}{u_1^{n_1} \cdots u_q^{n_q}}$$

où  $P$  est un polynôme divisible par aucun des  $u_i$  et où les  $n_i$  sont des entiers relatifs. On définit alors le *vecteur de dénominateur* de  $x$  par

$$\delta(x) = (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{Z}^q.$$

**Exemple 1.2.7.** Considérons la matrice  $B$  de type Dynkin  $A_3$  définie par :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors

$$\text{Cl}(B) = \left\{ u_1, u_2, u_3, \frac{1+u_2}{u_1}, \frac{1+u_2}{u_3}, \frac{1+u_1u_3}{u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_1u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_3u_2}, \frac{1+2u_2+u_2^2+u_1u_3}{u_1u_2u_3} \right\}$$

En particulier,  $\text{Cl}(B)$  est un ensemble fini.

**Exemple 1.2.8.** Considérons la matrice  $B$  de type affine Kronecker définie par :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

On vérifie alors que l'application vecteur de dénominateur induit une bijection

$$\text{Cl}(B) \xrightarrow{\sim} \{(n, n+1), n \geq -1\} \sqcup \{(n+1, n), n \geq -1\}$$

Le *graphe de mutation* est un invariant combinatoire important que l'on peut attacher à une algèbre amassée :

**Définition 1.2.9.** Le *graphe de mutation* de  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  est le graphe non-orienté dont les sommets sont les graines mutation-équivalentes à  $(\mathbf{u}, B)$  et, étant donné deux sommets  $(\mathbf{x}, A)$  et  $(\mathbf{y}, C)$ , il existe une arête entre  $(\mathbf{x}, A)$  et  $(\mathbf{y}, C)$  si et seulement si il existe un indice  $k$  tel que  $(\mathbf{y}, C) = \mu_k(\mathbf{x}, A)$ .

La combinatoire des algèbres amassées donne une grande rigidité à la structure des graphes de mutations. En particulier, si le graphe de mutation de  $\mathcal{A}(B)$  est un graphe fini, alors il s'agit d'un polytope de Stasheff généralisé appelé *associahèdre généralisé*. Pour plus de détails à ce sujet, on pourra se référer par exemple à [25, 46].

### 1.3 Algèbres amassées et graphes valués orientés

Un graphe valué  $\Delta$  peut être vu comme un diagramme de Coxeter d'un système de racines d'une algèbre de Lie-Kac-Moody  $\mathfrak{g}$ . A cette algèbre de Lie-Kac-Moody on peut associer une certaine matrice de Cartan généralisée  $C$ . Dans le cas où la matrice de Cartan généralisée  $C$  est symétrisable, une orientation de  $\Delta$  correspond au d'une certaine matrice antisymétrisable  $B$  dont la matrice de Cartan associée est la matrice  $C$  (voir [45]). Ceci permet de définir une algèbre amassée à partir de graphes valués orientés. Sans apporter en soi de réelles informations sur les algèbres amassées, cette vision définit un cadre confortable pour visualiser et exprimer de nombreux résultats. Nous détaillons ci-dessous cette construction.

### 1.3.1 Matrices anti-symétrisables et graphes valués

L'ingrédient principal dans la définition d'une algèbre amassée est une matrice anti-symétrisable  $B$ . A une telle matrice anti-symétrisable  $B = (b_{ij})$ , on peut toujours associer une matrice de Cartan généralisée  $C(B) = (c_{ij})$  en posant  $c_{ii} = 2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$  et  $c_{ij} = -|b_{ij}|$  si  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, q\}$ . On sait alors que l'on peut toujours associer à  $C(B)$  un diagramme valué  $\Delta(B)$  (voir par exemple [65]). Si de plus on oriente ce graphe de sorte qu'une arête reliant  $i$  et  $j$  est orientée  $i \rightarrow j$  si et seulement si  $b_{ij} > 0$ , une matrice anti-symétrisable définit un unique graphe valué orienté noté  $\Gamma(B)$ .

**Définition 1.3.1.** Soit  $\Gamma(B)$  le graphe valué associée à une matrice anti-symétrisable  $B$ . Alors l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\Gamma(B))$  associée à  $\Gamma(B)$  est l'algèbre  $\mathcal{A}(B)$ .

Ainsi, on peut transposer à une algèbre amassée associée au graphe valué d'une matrice  $B$  toutes les notions relatives à l'algèbre amassée associée à  $B$ .

Si  $B$  est une matrice symétrique, alors  $\Gamma(B)$  est muni d'une valuation triviale, on parle alors de carquois et on le note en général  $Q_B$ . Ainsi, la donnée d'un carquois  $Q = (Q_0, Q_1)$  est la donnée d'un graphe orienté où  $Q_0$  représente l'ensemble des sommets et  $Q_1$  représente l'ensemble des flèches. Pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$ , on note  $s(\alpha) = i$  la *source* de  $\alpha$  et  $t(\alpha) = j$  la *tête* de  $\alpha$ . Un carquois est dit *fini* si  $Q_0$  et  $Q_1$  sont des ensembles finis. Un sommet  $i \in Q_0$  est appelé un *puits* si

$$\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = i\} = \emptyset$$

et une *source* si

$$\{\alpha \in Q_1 : t(\alpha) = i\} = \emptyset.$$

Il est dit *connexe* si le graphe non-orienté sous-jacent est connexe. Un *chemin*  $c$  dans un carquois  $Q$  est une suite de flèches notée  $c = (\alpha_1 | \dots | \alpha_n)$  telles que  $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$  pour tout  $i = 2, \dots, n$ . Un *cycle* dans  $Q$  est un chemin  $c = (\alpha_1 | \dots | \alpha_n)$  tel que  $s(\alpha_1) = t(\alpha_n)$ ,  $n$  est alors appelé la *longueur* de  $c$  et  $c$  est appelé *n-cycle*. Un carquois est dit *acyclique* si il ne contient aucun cycle. Un carquois acyclique fini contient toujours au moins un puits et un source. Un carquois dont le graphe non-orienté sous-jacent est acyclique est appelé un *arbre*. Si  $Q$  est un carquois, on notera parfois  $i \xrightarrow{n} j$  pour indiquer que le nombre de flèches  $i \rightarrow j$  dans  $Q_1$  est égal à  $n$ . Un *sous-carquois*  $R = (R_0, R_1)$  d'un carquois  $Q = (Q_0, Q_1)$  est un carquois tel que  $R_0 \subset Q_0$  et  $R_1 \subset Q_1$ . Un sous-carquois  $R$  d'un carquois  $Q$  est dit *plein* si pour tous  $i, j \in R_0$ , on a

$$\{\alpha \in R_1 : s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\} = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\}.$$

Dans le cas où  $B \in M_q(\mathbb{Z})$  est antisymétrique,  $Q_B$  peut être défini de la manière suivante :  $(Q_B)_0 = \{1, \dots, q\}$  et pour tous  $i, j \in (Q_B)_0$  on a exactement  $b_{ij}$  flèches  $i \rightarrow j$  dans  $(Q_B)_1$  si  $b_{ij} > 0$ . En particulier  $Q_B$  est un carquois fini sans  $p$ -cycle pour  $p \leq 2$ . Réciproquement, étant donné un carquois fini  $Q$  sans  $p$ -cycle pour  $p \leq 2$ , on peut lui associer une matrice antisymétrique  $B_Q = (b_{ij})$  en posant :

$$b_{ij} = |\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = i \text{ et } t(\alpha) = j\}| - |\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = j \text{ et } t(\alpha) = i\}|.$$

Alors  $B \mapsto Q_B$  et  $Q \mapsto B_Q$  sont des bijections inverses l'une de l'autre :

$$\{\text{matrices antisymétriques}\} \leftrightarrow \{\text{carquois finis sans } p\text{-cycle pour } p \leq 2\}.$$

**Tout au long de cette thèse, à moins que l'on spécifie le contraire, un carquois sera toujours supposé fini, connexe et sans  $p$ -cycle pour  $p \leq 2$ .**

**Remarque 1.3.2.** Ainsi, si  $Q$  est un carquois, on peut écrire d'une unique façon  $Q = Q_B$  avec  $B$  une matrice symétrique. Alors, par définition, l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  associée au carquois  $Q$  est l'algèbre  $\mathcal{A}(B)$ .

**Définition 1.3.3.** Une graine  $(\mathbf{x}, Q)$  est dite *acyclique* si  $Q$  est un carquois acyclique. Une algèbre amassée est dite *acyclique* si elle contient une graine acyclique.

### 1.3.2 Mutations de graphes

**Définition 1.3.4.** 1. Soit  $B \in M_q(\mathbb{Z})$  une matrice antisymétrique,  $\Gamma(B)$  son graphe valué associé et  $i \in \{1, \dots, q\}$  un sommet de  $\Gamma(B)$ . Alors la *mutation de  $\Gamma(B)$  dans la direction  $i$*  est le graphe valué  $\Gamma(\mu_i(B))$ .

2. Deux graphes valués  $\Gamma, \Gamma'$  sont dits *mutation-équivalents* si  $\Gamma = \Gamma(B)$  et  $\Gamma' = \Gamma(B')$  où  $B$  et  $B'$  sont des matrices anti-symétrisables mutation-équivalentes.

La relation  $\sim_{\text{mut}}$  sur les graphes est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées *classes de mutation de graphes*. On note  $\text{Mut}(\Gamma)$  la classe de mutation d'un graphe  $\Gamma$ . Le problème de la finitude de la classe de mutation d'un graphe et, le cas échéant, du calcul de la cardinalité de cette classe modulo isomorphismes est une question que nous développerons dans le chapitre 14 et l'annexe A.

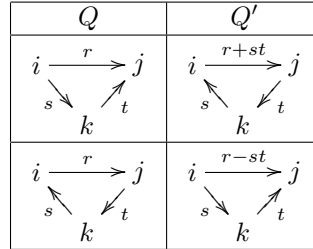
Le *graphe de mutation* de  $\Gamma$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est l'ensemble des graphes de la classe de mutation de  $\Gamma$  et il existe une arête entre deux graphes  $\Delta$  et  $\Delta'$  dans le graphe de mutation de  $\Gamma$  si et seulement si il existe  $k \in Q_0$  tel que  $\Delta' = \mu_k(\Delta)$ .

Nous avons déjà mentionné que la mutation d'une matrice symétrique était encore une matrice symétrique. Ainsi, si  $Q = Q_B$  est un carquois, alors  $\mu_i(Q) = Q_{\mu_i(B)}$  est encore un carquois. On parle alors de *mutation de carquois*. En particulier, la classe de mutation d'un carquois ne contient que des carquois et donc  $\sim_{\text{mut}}$  induit une relation d'équivalence sur les carquois dont les classes d'équivalence sont appelées *classes de mutation de carquois*.

Graphiquement, on peut avoir une interprétation très agréable de la mutation de carquois. Si  $Q$  est un carquois et  $k$  est un sommet dans  $Q_0$ , alors  $Q' = \mu_k(Q)$  est le carquois construit à partir de  $Q$  de la manière suivante :

1. On inverse toutes les flèches incidentes à  $k$  ;
2. Si  $i \neq j$  sont deux sommets distincts de  $k$ , le nombre de flèches entre  $i$  et  $j$  dans  $Q'$  est déterminé en fonction du nombre de flèches entre  $i$  et  $j$  dans

$Q$  de la manière suivante :



où  $r, s, t \geq 0$  et où une flèche  $i \xrightarrow{l} j$  avec  $l \leq 0$  signifie que l'on a  $-l$  flèches  $j \rightarrow i$ .

Nous rappelons qu'étant donné un carquois  $Q$ , si  $k$  est un puits ou une source dans  $Q$ , on définit la *réflexion de  $Q$  en  $k$*  comme le carquois  $\sigma_k(Q)$  obtenu à partir de  $Q$  en inversant toutes les flèches incidentes à  $k$ . Un carquois  $Q'$  est dit *réflexion-équivalent* à  $Q$  si il existe une suite de réflexions faisant passer de  $Q$  à  $Q'$  et on le note  $Q \sim_{\text{ref}} Q'$ . L'ensemble des carquois réflexion-équivalents à  $Q$  est appelé *classe de réflexion*.

La mutation peut ainsi être vue comme une généralisation de la notion de réflexion qui permet d'effectuer des opérations en de sommets qui ne sont ni des puits ni des sources. En effet, si  $k$  est un puits ou une source dans un carquois  $Q$ , alors

$$\sigma_k(Q) = \mu_k(Q).$$

**Remarque 1.3.5.** En particulier, on obtient que si  $Q$  et  $Q'$  sont deux carquois, alors

$$Q' \sim_{\text{ref}} Q \Rightarrow Q' \sim_{\text{mut}} Q.$$

La réciproque est fausse. En effet, si on considère le carquois

$$Q : \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

$$\begin{array}{ccc}
 & 2 & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 1 & \longrightarrow & 3.
 \end{array}$$

Alors  $Q' = \mu_2(Q)$  donc  $Q' \sim_{\text{mut}} Q$  mais la classe de réflexion de  $Q$  ne contient que des arbres, elle ne contient donc pas  $Q'$ . En général, les mutations ne préservent pas le graphe non-orienté sous-jacent à  $Q$  alors que les réflexions le préservent.

Nous verrons dans la suite (section 2.3) que la vision de la mutation comme généralisation de la réflexion a aussi une justification catégorique au sens où les foncteurs basculants impliqués dans la catégorification des mutations de Fomin et Zelevinsky vont être des généralisations des foncteurs de réflexion introduits par Bernstein, Gelfand et Ponomarev dans [6].

### 1.4 Algèbres amassées de type fini

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 1.2.7, une algèbre amassée peut parfois n'avoir qu'un nombre fini de variables d'amas. Dans [45], Fomin et Zelevinsky ont donné une classification et une description complète de ces algèbres amassées. Cette classification fait une fois encore apparaître les diagrammes de Dynkin qui sont des objets déjà connus pour leur rôle dans la classification des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie (voir [61, 65] par exemple).

- Définition 1.4.1.** 1. Un graphe orienté valué est dit *de type fini* ou *Dynkin* si son graphe non-orienté sous-jacent est l'un des diagrammes listés dans la figure 1.1 ou dans la figure 1.2.
2. Une matrice anti-symétrisable  $B$  sera dite *de type fini* ou *Dynkin* si  $\Gamma(B)$  est Dynkin.

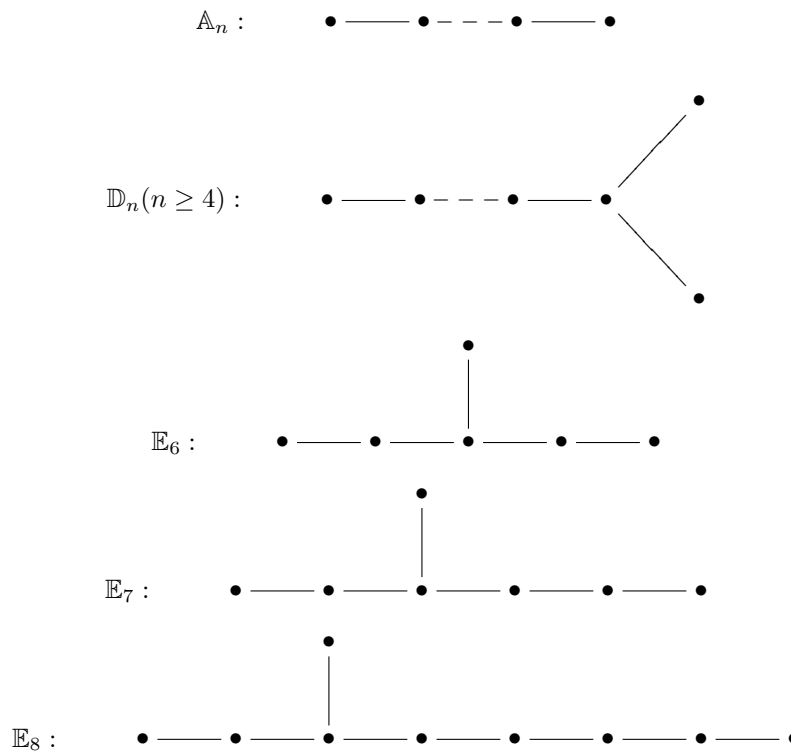


FIG. 1.1 – Diagrammes de Dynkin simplement lacés

- Définition 1.4.2.** Une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est dite *de type fini* si  $\text{Cl}(B)$  est un ensemble fini.

Les algèbres amassées de type fini ont été classifiées par Fomin et Zelevinsky dans [45], la classification est compatible avec celle des diagrammes de Dynkin au sens suivant :



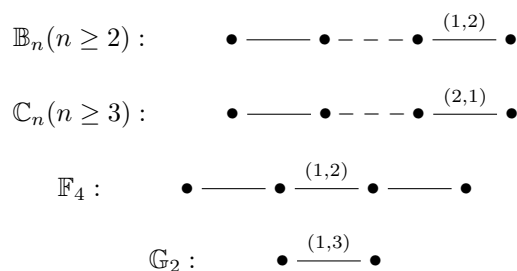


FIG. 1.2 – Diagrammes de Dynkin non simplement lacés

**Théorème 1.4.3** ([45]). *Une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est de type fini si et seulement si  $B$  est mutation-équivalente à une matrice Dynkin. En outre dans ce cas, toutes les matrices Dynkin mutation-équivalentes à  $B$  ont le même type Dynkin.*

Le lien entre algèbres de Lie et algèbres amassées de type fini peut aussi être précisé au niveau des systèmes de racines. Soit  $\Delta$  un diagramme valué associé à une matrice antisymétrisable et soit  $\mathfrak{g}(\Delta)$  l’algèbre de Kac-Moody associée à  $\Delta$ . On note  $\Phi(\Delta)$  (resp.  $\Phi_{\geq 0}(\Delta)$ ,  $\Pi(\Delta)$ ) le système de racines (resp. racines positives, racines simples) de  $\mathfrak{g}(\Delta)$ . L’ensemble des *racines presque positives* de  $\mathfrak{g}(\Delta)$  est l’ensemble :

$$\Phi_{\geq -1}(\Delta) = \Phi_{\geq 0}(\Delta) \sqcup (-\Pi(\Delta)).$$

Si  $\Delta_0$  est l’ensemble des sommets de  $\Delta$ , on identifiera toujours le réseau  $\mathbb{Z}\Pi(\Delta)$  avec  $\mathbb{Z}^{\Delta_0}$  en identifiant la racine simple  $\alpha_i$  avec le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{\Delta_0}$ .

Le théorème suivant a été démontré par Fomin et Zelevinsky dans certains cas particulier dans [45], il a ensuite été généralisé par Caldero et Keller dans [19] comme nous le verrons au corollaire 3.1.9.

**Théorème 1.4.4** ([45]). *Soit  $B$  une matrice associée à un diagramme de Dynkin  $\Delta$  et  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, B)$  l’algèbre amassée associée à  $B$ . Alors le vecteur de dénominateur  $\delta : \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}$  induit une bijection*

$$\text{Cl}(\mathbf{u}, B) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\geq -1}(\Delta).$$

**Exemple 1.4.5.** Si nous reprenons l’exemple 1.2.7, la matrice  $B$  correspond au carquois  $Q$  de type Dynkin  $\mathbb{A}_3$

$$Q : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3$$

donc les racines presque positives sont

$$\Phi_{\geq -1}(Q) = \{-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

D’autre part, on a vu que

$$\text{Cl}(Q) = \left\{ u_1, u_2, u_3, \frac{1+u_2}{u_1}, \frac{1+u_2}{u_3}, \frac{1+u_1u_3}{u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_1u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_2u_3}, \frac{1+2u_2+u_2^2+u_1u_3}{u_1u_2u_3} \right\}$$

et ainsi,  $\delta$  induit une bijection  $\text{Cl}(Q) \rightarrow \Phi_{\geq -1}(Q)$ .

**Exemple 1.4.6.** Dans l'exemple 1.2.8, la matrice considérée n'est plus de type fini, cependant un résultat du même type subsiste. Le carquois correspondant est le carquois de Kronecker

$$K : 1 \rightrightarrows 2$$

Alors,  $\Phi_{\geq 0}(Q) = \Phi_{\geq 0}^{\text{re}}(K) \sqcup \Phi_{\geq 0}^{\text{im}}(K)$  (voir la section 7.1 pour les détails et la terminologie). En outre, on sait que

$$\Phi_{\geq 0}^{\text{re}}(K) = \{n\alpha_1 + (n+1)\alpha_2, n \geq 0\} \sqcup \{(n+1)\alpha_1 + n\alpha_2, n \geq 0\}$$

et

$$\Phi_{\geq 0}^{\text{im}}(K) = \{n\alpha_1 + n\alpha_2, n \geq 1\}.$$

Il s'ensuit que  $\delta$  induit une bijection de  $\text{Cl}(K)$  vers  $\Phi_{\geq 0}^{\text{re}}(K) \sqcup (-\Pi(K))$  mais pas de bijection de  $\text{Cl}(K)$  vers  $\Phi_{\geq -1}(K)$ . Nous verrons au corollaire 3.1.9 le résultat général dont cela relève.

Dans une algèbre de type fini simplement lacée, Caldero et Keller ont démontré que les monômes d'amas forment une  $\mathbb{Z}$ -base. Cette démonstration repose sur la catégorification des algèbres amassées à l'aide de la catégorie amassée et de l'application Caldero-Chapoton qui seront introduites aux chapitres 2 et 3 respectivement. Cependant, nous pouvons d'ores et déjà l'énoncer.

**Théorème 1.4.7** ([20]). *Soit  $Q$  un carquois de type fini. Alors l'ensemble des monômes d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$ .*

L'un des buts de nos travaux sera de chercher à généraliser ce résultat dans le cas où  $Q$  n'est pas de type fini. Il est déjà apparu dans les premiers exemples qui ne sont pas de types finis qu'en général les monômes d'amas ne suffisent pas pour engendrer l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  [88, 22]. Il s'agit donc de trouver une « bonne » généralisation de la notion de monôme d'amas pour trouver une base dans les algèbres amassées en général. Ce sera l'objet de la partie III qui se concentrera particulièrement sur le cas des algèbres amassées affines.

## Chapitre 2

# La catégorie amassée d'un carquois acyclique

Le théorème 1.4.4 donne un lien entre les racines presque positives d'un carquois de type fini  $Q$  et les variables d'amas dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ . D'après le théorème de Gabriel, les racines positives de  $Q$  sont en bijection avec les représentations indécomposables de  $Q$ . Forts de cette remarque, il est naturel de chercher à catégorifier les algèbres amassées à l'aide des représentations d'un carquois. En 2003, Marsh, Reineke et Zelevinsky ont cherché à définir une catégorification de  $\mathcal{A}(Q)$  à l'aide de la catégorie des représentations de  $Q$ . Afin de trouver un objet correspondant aux racines simples négatives dans la catégorification, ils ont introduit une catégorie de « représentations décorées » de  $Q$  dans [74]. Si ce cadre s'est avéré assez probant, l'artificialité de ces « décorations » n'était pas satisfaisante et il restait à trouver une catégorification naturelle pour les algèbres amassées.

Deux tentatives indépendantes – Caldero, Chapoton, Schiffler d'un côté [18] et Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov de l'autre [10] – ont trouvé une catégorie, appelée *catégorie amassée*, qui donnait un cadre naturel à l'étude des algèbres amassées. La catégorie trouvée dans [18] était définie de façon géométrique en utilisant les triangulations d'un polygone régulier. De l'autre côté, la catégorie définie dans [10] offrait une définition parfaitement générale et applicable à tous les carquois acycliques. Il s'est avéré (voir [17]) que ces catégories étaient en fait équivalentes dans le cas où le carquois considéré était de type  $\mathbb{A}$  (voir [83] pour le type  $\mathbb{D}$  et [43, 71] en général). En outre, la définition proposée dans [10] fait naturellement apparaître les représentations de  $Q$  comme partie intégrante de la catégorie amassée tout en prenant en compte les racines simples négatives. Depuis, la catégorie amassée telle qu'elle est définie dans [10] est devenue l'un des outils centraux dans l'étude des algèbres amassées. Elle se limite cependant à l'étude des algèbres amassées acycliques.

Une autre catégorification a été développée indépendamment par Geiss, Leclerc et Schröer à l'aide de l'algèbre préprojective [51, 53, 52, 54]. Cette seconde catégorification permet d'obtenir une classe plus large d'algèbres amassées, parmi lesquelles certaines ne contiennent aucune graine acyclique. Cette catégorification s'impose elle aussi comme l'un des outils incontournables de l'étude des algèbres amassées.

Dans notre étude, nous nous concentrerons uniquement sur l'approche à l'aide de la catégorie amassée mais il apparaîtra néanmoins certains liens avec les travaux de Geiss, Leclerc et Schröer.

La section 2.1 présente des rappels sur les représentations de carquois acycliques. Dans la section 2.2, nous réintroduisons la catégorie amassée d'un carquois acyclique. Enfin, dans la section 2.3, nous rappelons des résultats sur la théorie de basculement dans les catégories amassées.

## 2.1 Rappels sur les représentations de carquois

On se fixe un corps algébriquement clos  $k$ . A moins que l'on spécifie le contraire, on travaillera toujours sur  $k = \mathbb{C}$  le corps des nombres complexes.

### 2.1.1 Généralités sur les catégories

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie additive, on notera  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  la collection des objets de  $\mathcal{C}$  et pour tous objets  $X, Y$  dans  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , on notera  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  l'ensemble des

morphismes de  $X$  vers  $Y$  dans  $\mathcal{C}$ . Parfois, afin d'alléger les notations, on écrira  $X \in \mathcal{C}$  pour signifier que  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ . On notera  $\text{ind}(\mathcal{C})$  la sous-catégorie pleine des objets indécomposables de  $\mathcal{C}$ . Si cela ne prête pas à confusion, on utilisera la même notation pour signifier la collection des objets indécomposables dans  $\mathcal{C}$ . On notera toujours  $\Gamma(\mathcal{C})$  le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Etant donné une catégorie  $\mathcal{C}$  et un ensemble d'objets  $\mathcal{D}$ , on note  $\text{add}\mathcal{D}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par sommes de facteurs directs d'objets de  $\mathcal{D}$ .

Etant donnée deux sous-catégories  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , on notera  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}'$  la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  engendrée par les sommes directes d'objets de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{D}'$ .

Un objet  $M$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est dit *rigide* dans  $\mathcal{C}$  si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M) = 0$ . On notera  $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$  la sous-catégorie pleine formée des objets rigides dans  $\mathcal{C}$ .

### 2.1.2 Représentations de carquois et algèbres héréditaires

Soit  $Q = (Q_0, Q_1)$  un carquois. Une *représentation* (de dimension finie) de  $Q$  est la donnée d'une famille de  $k$ -espaces vectoriels  $(X(i))_{i \in Q_0}$  de dimension finie sur  $k$  et d'une famille d'applications linéaires  $(X(\beta))_{\beta \in Q_1}$  telles que pour tout  $\beta \in Q_1$ , on a

$$X(\beta) \in \text{Hom}_k(X(s(\beta)), X(t(\beta))).$$

On note alors  $X = ((X(i))_{i \in Q_0}, X(\beta)_{\beta \in Q_1})$ . Un morphisme de représentation  $f : X \rightarrow Y$  est la donnée d'une famille de morphismes

$$f_i : X(i) \rightarrow Y(i)$$

pour tout  $i \in Q_0$  tels que pour tout  $\beta \in Q_1$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(s(\beta)) & \xrightarrow{X(\beta)} & X(t(\beta)) \\ f_{s(\beta)} \downarrow & & \downarrow f_{t(\beta)} \\ Y(s(\beta)) & \xrightarrow{Y(\beta)} & Y(t(\beta)) \end{array}$$

commute. On note  $\text{rep}(Q)$  la catégorie des représentations de  $Q$ .

Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre de dimension finie héréditaire. Soit  $\Lambda\text{-mod}$  la catégorie des  $\Lambda$ -modules à gauche de type fini. Alors il existe un unique carquois acyclique  $Q$ , noté  $\mathcal{Q}(\Lambda)$  tel que  $\Lambda\text{-mod}$  est équivalente à la catégorie  $kQ\text{-mod}$  où  $kQ$  est l'algèbre des chemins sur  $Q$  (voir [1] par exemple). De plus, la catégorie  $kQ\text{-mod}$  est équivalente à la catégorie  $\text{rep}(Q)$  des représentations de  $Q$  de dimension finie sur  $k$ . On utilisera donc indistinctement les termes «  $kQ$ -modules » et « représentations de  $Q$  » désigner un objet de  $kQ\text{-mod}$  ou de  $\text{rep}(Q)$ .

Pour tout  $i \in Q_0$ , on note  $S_i$  le module simple associé à  $i$ ,  $P_i$  sa couverture projective et  $I_i$  son enveloppe injective. On note  $K_0(kQ)$  le *groupe de Grothendieck* de  $kQ\text{-mod}$ , c'est à dire le groupe abélien libre sur les isoclasses de  $kQ$ -modules quotienté par les relations  $X + Y = E$  pour toute suite exacte  $0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow 0$ .

Etant donnée une représentation  $M$  dans  $\text{rep}(Q)$ , on définit son *vecteur de dimension* :

$$\mathbf{dim}(M) = (\dim_k M(i))_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}.$$

En termes de  $kQ$ -modules, on a

$$\dim M(i) = \dim \operatorname{Hom}_{kQ}(P_i, M).$$

L'application **dim** induit un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\mathbf{dim} : K_0(kQ) \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}$$

qui à  $S_i$  associe  $\alpha_i = \mathbf{dim} S_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ . On identifiera donc généralement  $K_0(kQ)$  et  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ .

Pour tout vecteur  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on note  $\operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$  l'ensemble des représentations  $M$  de  $Q$  telles que  $\mathbf{dim} M = \mathbf{d}$ . Alors  $\operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$  s'identifie avec la variété

$$\prod_{\alpha \in Q_1} k^{d_s(\alpha)} \times k^{d_t(\alpha)}$$

qui est une variété irréductible appelée *variété de représentation de dimension  $\mathbf{d}$*  et

$$\operatorname{rep}(Q) \simeq \bigsqcup_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \operatorname{rep}(Q, \mathbf{d}).$$

Le groupe  $G_{\mathbf{d}} = \prod_{i \in Q_0} GL(d_i, k)$  agit fidèlement sur  $\operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Pour toute représentation  $M \in \operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$ , on note  $\mathcal{O}_M$  la  $G_{\mathbf{d}}$ -orbite de  $M$  dans  $\operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$ . En particulier, deux représentations  $M, M'$  sont dans une même  $G_{\mathbf{d}}$ -orbite si et seulement si  $M$  et  $M'$  sont isomorphes comme modules.

On note  $\langle -, - \rangle$  la *forme d'Euler* sur  $kQ$ -mod, elle est définie par :

$$\begin{aligned} \langle M, N \rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k \operatorname{Ext}_{kQ}^i(M, N) \\ &= \dim \operatorname{Hom}_{kQ}(M, N) - \dim \operatorname{Ext}_{kQ}^1(M, N) \end{aligned}$$

Elle passe au groupe de Grothendieck et définit une forme bilinéaire sur  $K_0(kQ)$ .

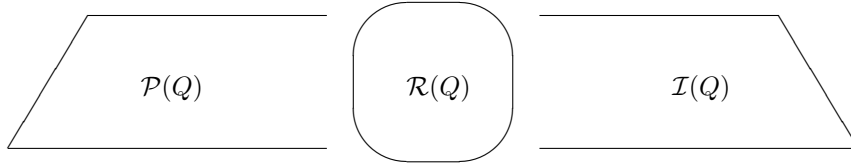
On note  $\tau = D\operatorname{Tr}$  la translation d'Auslander-Reiten sur  $kQ$ -mod où  $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$  est la dualité standard et  $\operatorname{Tr}$  est la transposition, par abus de notation on notera  $\tau^{-1} = \operatorname{Tr}D$ . On rappelle qu'un  $kQ$ -module indécomposable  $M$  est projectif (resp. injectif) si et seulement si  $\tau M = 0$  (resp.  $\tau^{-1}M = 0$ ). De plus, si  $M$  est un module indécomposable non-projectif (resp. non-injectif), on a  $\tau^{-1}\tau M \simeq M$  (resp.  $\tau\tau^{-1}M \simeq M$ ). Pour les détails concernant la translation d'Auslander-Reiten, on pourra se référer à [3].

### 2.1.3 Le carquois d'Auslander-Reiten de $kQ$ -mod

**Définition 2.1.1.** Un module indécomposable est dit *préprojectif* (resp. *préinjectif*) si il est dans la  $\tau$ -orbite d'un module projectif (resp. injectif). Il est dit *régulier* si il n'est ni préprojectif ni préinjectif.

Un module arbitraire est dit préprojectif (resp. préinjectif, régulier) si tous ses facteurs directs sont préprojectifs (resp. préinjectifs, réguliers).

On note  $\mathcal{P}(Q)$  (resp.  $\mathcal{I}(Q)$ ,  $\mathcal{R}(Q)$ ) la sous-catégorie pleine des  $kQ$ -modules préprojectifs (resp. préinjectifs, réguliers). La catégorie  $\mathcal{R}(Q)$  contient des objets si et seulement si  $Q$  n'est pas de type fini. Dans ce cas, on a alors un résultat d'unidirectionnalité des morphismes (voir par exemple [1]) :


 FIG. 2.1 – Le carquois d'Auslander-Reiten de  $kQ\text{-mod}$ 

**Théorème 2.1.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique qui n'est pas de type fini. Alors pour tous modules  $P \in \mathcal{P}(Q)$ ,  $I \in \mathcal{I}(Q)$  et  $R \in \mathcal{R}(Q)$ , on a*

$$\text{Hom}_{kQ}(I, R) = \text{Hom}_{kQ}(I, P) = \text{Hom}_{kQ}(R, P) = 0.$$

#### 2.1.4 Systèmes de racines et théorème de Kac

Si  $Q$  est un carquois, une *racine* (resp. *racine positive*) de  $Q$  est un élément  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  (resp.  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ ) tel que  $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \leq 1$ . Une racine  $\mathbf{d}$  est dite *réelle* si  $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 1$  et *imaginaire* si  $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \leq 0$ . Une racine positive est dite *de Schur* si il existe  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que  $\text{End}_{kQ}(M) \simeq k$ , une telle représentation est appelée *représentation de Schur*. On note alors

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= \{\text{racines de } Q\}, \\ \Phi_{>0}(Q) &= \{\text{racines positives de } Q\}, \\ \Phi^{\text{re}}(Q) &= \{\text{racines réelles de } Q\}, \\ \Phi_{>0}^{\text{re}}(Q) &= \{\text{racines positives réelles de } Q\}, \\ \Phi^{\text{im}}(Q) &= \{\text{racines imaginaires de } Q\}, \\ \Phi_{>0}^{\text{im}}(Q) &= \{\text{racines positives imaginaires de } Q\}, \\ \Pi(Q) &= \{\text{racines simples de } Q\}, \\ \Phi^{\text{Sc}}(Q) &= \{\text{racines de Schur de } Q\}, \\ \Phi^{\text{re, Sc}}(Q) &= \Phi_{>0}^{\text{re}}(Q) \cap \Phi^{\text{Sc}}(Q), \\ \Phi^{\text{im, Sc}}(Q) &= \Phi_{>0}^{\text{im}}(Q) \cap \Phi^{\text{Sc}}(Q). \end{aligned}$$

On a alors

$$\Phi(Q) = \Phi_{>0}(Q) \sqcup (-\Phi_{>0}(Q))$$

et

$$\Phi_{>0}(Q) = \Phi_{>0}^{\text{re}}(Q) \sqcup \Phi_{>0}^{\text{im}}(Q).$$

On notera que ces définitions coïncident avec les définitions pour les racines de l'algèbre de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(Q)$  associée à  $Q$  que l'on peut trouver dans la littérature (voir par exemple [65]).

Dans le cas où  $Q$  est un carquois de type fini, alors

$$\Phi_{>0}(Q) = \Phi^{\text{re,Sc}}(Q).$$

On rappelle le théorème de Kac, aussi connu sous le nom de théorème de Gabriel dans le cas où le carquois  $Q$  considéré est de type fini.

**Théorème 2.1.3** (Kac). *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors il existe une représentation indécomposable de  $Q$  de dimension  $\mathbf{d}$  si et seulement si  $\mathbf{d}$  est une racine de  $Q$ . De plus,*

1. *si  $\mathbf{d}$  est une racine réelle, alors il existe une unique représentation indécomposable de dimension  $\mathbf{d}$  (à isomorphismes près);*
2. *si  $\mathbf{d}$  est une racine imaginaire, alors il existe une infinité de représentations indécomposables non-isomorphes de dimension  $\mathbf{d}$ .*

### 2.1.5 La décomposition canonique de Kac

Si  $Q$  est un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  est un vecteur de dimension, Kac a associé une façon canonique d'écrire  $\mathbf{d}$  comme somme de racines positives de  $\Phi(Q)$ . Cette décomposition, introduite dans [63] et approfondie dans [64], est appelée *décomposition canonique*. Elle se définit comme suit. Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , alors il existe un ouvert dense  $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  et une famille de racines de Schur  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dans  $\mathbb{N}^{Q_0}$  tels que pour toute représentation  $M \in \mathfrak{M}_{\mathbf{d}}$ , il existe une famille  $M_1, \dots, M_n$  de représentations de Schur de dimensions respectives  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  telles que

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i.$$

En particulier  $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  et la famille  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  est entièrement déterminée. Cette décomposition de  $\mathbf{d}$  est appelée *décomposition canonique de  $\mathbf{d}$*  et elle est notée

$$\mathbf{d} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{e}_i.$$

On peut alors caractériser la décomposition canonique de la manière suivante :

**Proposition 2.1.4** ([64]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors  $\mathbf{d} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  si et seulement si il existe des représentations de Schur  $M_i \in \text{rep}(Q, \mathbf{e}_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  telles que  $\text{Ext}_{k^Q}^1(M_i, M_j) = 0$  pour  $i \neq j$ .*

On remarquera que la décomposition canonique n'impose pas aux facteurs  $M_i$  d'être rigides. Nous donnerons dans la partie III une description plus précise de la décomposition canonique pour un carquois affine. Pour des résultats généraux à propos de la décomposition canonique, on pourra se référer à [63, 64, 85, 33].



## 2.2 La catégorie amassée

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de la catégorie amassée d'un carquois acyclique  $Q$ . Pour cette section, nous renvoyons le lecteur à [10].

### 2.2.1 La catégorie dérivée bornée d'une catégorie de modules

Soit  $Q$  un carquois acyclique, on note  $D^b(kQ)$  la catégorie dérivée bornée de  $kQ$ -mod, c'est à dire la catégorie d'homotopie des complexes de  $kQ$ -modules localisée en les quasi-isomorphismes. On note  $[1]$  le foncteur de shift dans  $D^b(kQ)$ . A tout  $kQ$ -module  $M$ , on peut associer un complexe de  $kQ$ -module  $M^\bullet$  concentré en degré zéro en posant  $M^0 = M$ ,  $M^i = 0$  si  $i \neq 0$  et toutes les différentielles égales à zéro. Pour simplifier les notations, on note encore  $M$  ce complexe et on dit que  $M$  est un *module dans  $D^b(kQ)$* . On sait alors (voir [56, 93] par exemple) que  $D^b(kQ)$  est une catégorie Krull-Schmidt dont les indécomposables sont donnés par :

$$\text{ind}(D^b(kQ)) = \{M[i] : M \in \text{ind}(kQ\text{-mod}), i \in \mathbb{Z}\}.$$

De plus,  $D^b(kQ)$  est muni d'une structure triangulée. En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont des modules indécomposables, pour toute suite exacte non-scindée de  $kQ$ -modules

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

on a un triangle non-scindé dans  $D^b(kQ)$

$$X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{f} X[1]$$

et pour tout morphisme non-nul  $f \in \text{Hom}_{kQ}(X, Y)$ , on a un triangle non-scindé

$$Y[-1] \longrightarrow \ker f \oplus \text{coker } f[-1] \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

dans  $D^b(kQ)$ .

### 2.2.2 Définition de la catégorie amassée

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $k$ -linéaire et  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  une auto-équivalence de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 2.2.1.** La *catégorie d'orbites  $\mathcal{C}/F$*  est la catégorie définie par

$$\text{Ob}(\mathcal{C}/F) = \text{Ob}(\mathcal{C})$$

et pour tous objets  $X, Y$  de  $\text{Ob}(\mathcal{C}/F)$ , on pose

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/F}(X, Y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F^i Y).$$

La catégorie  $D^b(kQ)$  est munie du foncteur de translation d'Auslander-Reiten noté  $\tau$  qui est une auto-équivalence de  $D^b(kQ)$ . La composition  $\tau^{-1}[1]$  est une auto-équivalence de  $D^b(kQ)$  et on peut ainsi former la catégorie d'orbites de  $\tau^{-1}[1]$  dans  $D^b(kQ)$ .

**Définition 2.2.2** ([10]). La *catégorie amassée* (ou *catégorie cluster*) de  $Q$  est la catégorie d'orbites

$$\mathcal{C}_Q = D^b(kQ)/\tau^{-1}[1].$$

Si il n'y a pas de confusion possible, on omettra parfois la référence à  $Q$ .

L'image d'un objet  $M$  dans  $D^b(kQ)$  sous le foncteur canonique

$$\pi : D^b(kQ) \longrightarrow \mathcal{C}_Q$$

sera encore notée  $M$ . Si  $M$  est un module dans  $D^b(kQ)$  alors l'image de  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  est encore appelée un *module*.

**Proposition 2.2.3** ([10]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors  $\mathcal{C}_Q$  est une catégorie  $k$ -linéaire Krull-Schmidt et*

$$\text{ind}(\mathcal{C}_Q) = \text{ind}(kQ\text{-mod}) \sqcup \{P_i[1] : i \in Q_0\}.$$

Etant donné un objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on peut ainsi l'écrire de manière unique

$$M = M_0 \oplus P_M[1]$$

où  $M_0$  est un  $kQ$ -module et où  $P_M$  est un  $kQ$ -module projectif. Le foncteur

$$H^0 = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(kQ, -) : \mathcal{C}_Q \longrightarrow kQ\text{-mod}$$

permet de retrouver la « partie module » de  $M$  au sens où

$$H^0(M_0 \oplus P_M[1]) = M_0.$$

De plus  $H^0$  est un foncteur homologique, c'est à dire qu'il envoie un triangle

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

sur une suite exacte longue de modules

$$\cdots \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z) \longrightarrow H^0(X[1]) \longrightarrow H^0(Y[1]) \longrightarrow \cdots.$$

De manière générale, une catégorie d'orbites dans une catégorie triangulée n'est pas nécessairement munie d'une structure triangulée. Cependant, si l'auto-équivalence considérée possède certaines propriétés particulières, Keller a montré dans [68] que la catégorie d'orbites correspondante est munie d'une structure triangulée. Le foncteur  $\tau^{-1}[1]$  vérifie ces propriétés et on a donc le théorème suivant :

**Théorème 2.2.4** ([68]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q = D^b(kQ)/\tau^{-1}[1]$  est une catégorie triangulée et le foncteur canonique  $\pi : D^b(kQ) \longrightarrow \mathcal{C}_Q$  est un foncteur triangulé.*

La seconde assertion signifie que tout triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans  $D^b(kQ)$  induit un triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$ . En particulier toute suite exacte non-scindée de  $kQ$ -modules

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

induit un triangle non-scindé dans  $\mathcal{C}_Q$

$$X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{f} X[1]$$

et pour tout morphisme non-nul  $f \in \text{Hom}_{kQ}(X, Y)$ , on a un triangle non-scindé

$$Y[-1] \longrightarrow \ker f \oplus \text{coker } f[-1] \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

dans  $\mathcal{C}_Q$ . Cependant, il existe toujours des triangles dans  $\mathcal{C}_Q$  qui ne sont pas des images sous le foncteur canonique de triangles dans  $D^b(kQ)$ .

Puisque  $\mathcal{C}_Q$  est une catégorie triangulée, tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  dans  $\mathcal{C}_Q$  se complète de manière unique en un triangle

$$Y[-1] \longrightarrow C_f \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

ce qui induit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y[1]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y)$$

pour tous  $X, Y$  objets dans  $\mathcal{C}_Q$ .

La structure de la catégorie  $\mathcal{C}_Q$  peut-être décrite plus précisément :

**Proposition 2.2.5** ([10]). *Soient  $X, Y$  des objets dans  $\mathcal{C}_Q$ , alors*

1.  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) \simeq D\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(Y, X)$  où  $D = \text{Hom}_k(-, k)$  est le foncteur de dualité,
2. Si  $X$  et  $Y$  sont des  $kQ$ -modules indécomposables, alors

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) &\simeq \text{Ext}_{kQ}^1(X, Y) \oplus D\text{Ext}_{kQ}^1(Y, X) \\ &\simeq \text{Ext}_{kQ}^1(X, Y) \oplus \text{Hom}_{kQ}(X, \tau Y). \end{aligned}$$

En particulier, le premier point signifie que la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  d'un carquois acyclique est une catégorie 2-Calabi-Yau.

### 2.2.3 Le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée

**Définition 2.2.6.** Un objet indécomposable  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$  est dit *transjectif* si il existe un entier  $s \in \mathbb{Z}$  tel que  $M[s] \simeq P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$ . Un objet arbitraire est dit *transjectif* si tous ses facteurs directs indécomposables le sont.

**Lemme 2.2.7.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors ou bien  $M$  est transjectif ou bien  $M$  est un  $kQ$ -module régulier.*

*Démonstration.* Soit  $M$  un objet indécomposable. Si  $M \simeq P_i[1]$ , alors  $M$  est transjectif. Si  $M$  est un  $kQ$ -module préprojectif, alors il existe  $s \geq 0$  et  $i \in Q_0$  tel que  $\tau^s M \simeq P_i$  et alors  $\tau^{s+1} M \simeq \tau^s M[1] \simeq P_i[1]$  et donc  $M$  est transjectif. Si  $M$  est un  $kQ$ -module préinjectif, alors il existe  $s \geq 0$  et  $i \in Q_0$  tel que  $\tau^{-s} M \simeq I_i$  mais alors  $M[-s-1] \simeq \tau^{-s} M[-1] \simeq I_i[-1] \simeq P_i[1]$  et donc  $M$  est transjectif. Enfin, si  $M$  est un  $kQ$ -module régulier, supposons qu'il existe un entier  $s$  et un sommet  $i$  tel que  $M[s] \simeq P_i[1]$ , alors  $M[s-1] \simeq P_i$  mais  $M[s-1] \simeq \tau^{s-1} M$  et donc  $\tau^{s-1} M \simeq P_i$ , ce qui contredit le fait que  $M$  est régulier.  $\square$

On note  $\mathcal{PI}(Q)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_Q$  formée des objets transjectifs. Alors le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{PI}(Q))$  de  $\mathcal{PI}(Q)$  est une composante connexe du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$  appelée *composante transjective*.

Ainsi, si  $Q$  n'est pas un carquois de type fini, on peut schématiser le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$  de  $\mathcal{C}_Q$  dans la figure 2.2

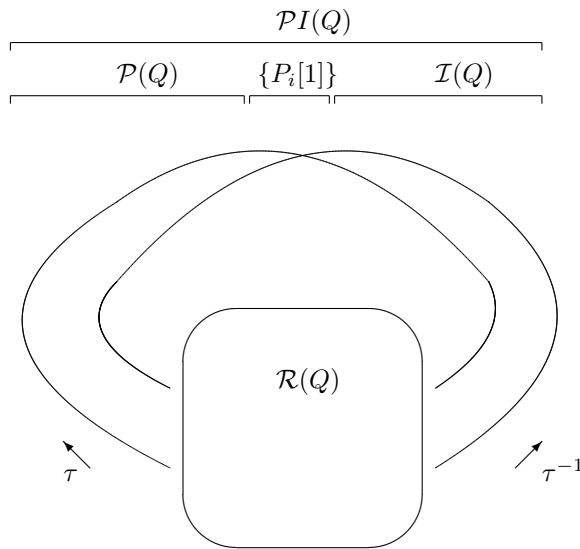


FIG. 2.2 – La catégorie amassée d'un carquois acyclique

### 2.2.4 Objets amas-basculants

Une classe importante d'objets dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  est la classe des objets amas-basculants qui sont des objets rigides maximaux dans  $\mathcal{C}_Q$ . Il est apparu que la théorie de basculements dans une catégorie amassée est une généralisation importante de la théorie de basculement dans une catégorie de modules. On pourra par exemple se référer à [81] pour une excellente introduction à ce sujet.

**Définition 2.2.8.** Un objet *amas-basculant* (ou *cluster-tilting*) dans  $\mathcal{C}_Q$  est un objet  $T$  dans  $\text{Ob}(\mathcal{C}_Q)$  tel que :

1.  $T$  est rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ ,
2. les facteurs directs de  $T$  sont deux à deux non-isomorphes,
3. Si  $M$  est un objet dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, T) = 0$ , alors  $M \in \text{add}T$ .

On peut aussi caractériser les objets amas-basculants de la manière suivante :

**Lemme 2.2.9** ([10]). *Un objet  $T$  dans  $\mathcal{C}_Q$  est un objet amas-basculant si et seulement si*

1.  $T$  est rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ ,
2. les facteurs directs de  $T$  sont non-isomorphes deux à deux,
3. Le nombre de facteurs directs de  $T$  est égal au nombre de  $kQ$ -modules simples.

**Définition 2.2.10.** Un objet  $\bar{T}$  est dit *presque amas-basculant* si il existe un objet indécomposable  $U$  tel que  $T = \bar{T} \oplus U$  est un objet amas-basculant.

**Proposition 2.2.11** ([10]). *Soit  $\bar{T}$  un objet presque amas-basculant. Alors il existe exactement deux objets non-isomorphes  $U$  et  $U^*$  dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\bar{T} \oplus U$  et  $\bar{T} \oplus U^*$  sont des objets amas-basculants. Dans ce cas  $(U, U^*)$  est appelée une paire d'échange.*

**Définition 2.2.12.** Deux objets amas-basculants  $T$  et  $T^*$  sont dits *voisins* ou *en échange* si il existe un objet presque amas-basculant  $\bar{T}$  et une paire d'échange  $(U, U^*)$  tels que  $T \simeq \bar{T} \oplus U$ ,  $T^* \simeq \bar{T} \oplus U^*$ .

Le *graphe de basculement* de  $\mathcal{C}_Q$  est le graphe non-orienté dont les sommets sont les objets amas-basculants de  $\mathcal{C}_Q$  et tels qu'il existe une arête entre  $T$  et  $T'$  dans le graphe de basculement si et seulement si  $T$  et  $T'$  sont des objets amas-basculants voisins. Dans [57], les auteurs montrent que le graphe de basculement des modules basculants sur une algèbre héréditaire est toujours connexe. En se fondant sur ces travaux, Buan, Marsh, Reiten, Reineke et Todorov ont généralisé ce résultat au cas de la catégorie amassée :

**Théorème 2.2.13** ([10]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors le graphe de basculement de  $\mathcal{C}_Q$  est connexe.*

Les paires d'échanges sont des objets essentiels qui apparaissent dans les relations d'échanges de l'algèbre amassée associée à la catégorie amassée. Elles ont notamment été l'objet central d'étude dans la suite d'articles [10, 11, 13, 12, 9]. Nous rappelons quelques résultats et définitions qui seront utiles dans la suite.

**Proposition 2.2.14** ([10]). *Soit  $\bar{T}$  un objet presque amas-basculant et soit  $(U, U^*)$  la paire d'échange telle que  $T = \bar{T} \oplus U$  et  $T^* = \bar{T} \oplus U^*$  sont des objets amas basculants. Alors  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(U, U^*) = 1$ . En particulier, il existe uniquement deux objets  $B$  et  $B^*$  tels que l'on ait des triangles non-scindés*

$$U \longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1] \quad \text{et} \quad U^* \longrightarrow B \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1]$$

et de plus  $B$  et  $B^*$  sont des objets de  $\text{add}(\bar{T})$  sans facteur direct commun.

### 2.2.5 Mutations de carquois et catégories amassées

La catégorie  $\mathcal{C}_Q$  amassée dépend bien évidemment du carquois  $Q$  considéré. La question qui se pose alors est de trouver un invariant qui caractérise des catégories amassées équivalentes. Puisque  $\mathcal{C}_Q$  est définie comme la catégorie

d'orbites de  $D^b(kQ)$  par l'auto-équivalence  $\tau^{-1}[1]$ , on sait déjà que si  $Q$  et  $Q'$  sont des carquois acycliques tels que  $D^b(kQ) \simeq D^b(kQ')$ , les catégories amassées correspondantes sont équivalentes. Le théorème suivant permet de classifier les carquois acycliques qui donnent des catégories amassées équivalentes.

**Théorème 2.2.15** ([70]). *Soient  $Q$  et  $Q'$  deux carquois acycliques, alors il existe une équivalence de catégories triangulées  $\mathcal{C}_Q \simeq \mathcal{C}_{Q'}$  si et seulement si  $Q \sim_{\text{mut}} Q'$ .*

Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors  $\Lambda[1] = \bigoplus_{i \in Q_0} P_i[1]$  est un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  et le carquois de l'algèbre  $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(\Lambda[1])^{op}$  est alors isomorphe à  $Q$ . Soit alors  $T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  et soit  $k \in Q_0$ , alors  $\bar{T} = \bigoplus_{i \neq k} T_i$  est un objet presque amas-basculant et on note  $T^* = \bar{T} \oplus T_k^*$  où  $(T_k, T_k^*)$  est la paire d'échange associée. Le lien entre mutation de carquois et théorie de basculement dans la catégorie amassée est alors le suivant.

**Théorème 2.2.16** ([13]). *Avec les notations précédentes,*

$$\mathcal{Q}(\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T^*)^{op}) = \mu_k(\mathcal{Q}(\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T)^{op}))$$

Ce théorème permet alors d'identifier le graphe de mutation d'un carquois et le graphe de basculement d'une catégorie amassée :

**Corollaire 2.2.17.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors le graphe de mutation de  $Q$  est isomorphe au graphe de basculement de  $\mathcal{C}_Q$ .*

On parlera ainsi parfois du *graphe de mutation* de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  pour désigner son graphe de basculement.

## 2.3 Basculements dans la catégorie amassée

Nous avons déjà mentionné le fait que la mutation pouvait être vue comme une généralisation de la réflexion à des sommets qui ne sont ni des puits ni des sources. D'un point de vue fonctoriel, cela va se traduire par le fait qu'à une mutation dans  $\mathcal{A}(Q)$ , on va pouvoir associer un foncteur défini sur  $\mathcal{C}_Q$  qui va généraliser les foncteurs BGP de réflexion. Pour ce faire, l'idée est d'utiliser la version Auslander-Platzek-Reiten des foncteurs de réflexions [2]. Dans le cas où  $i$  est une source ou un puits, Zhu a introduit un foncteur appelé *foncteur BGP étendu* qui généralise la définition des foncteurs BGP aux catégories amassées [101].

### 2.3.1 Mutations sans diagrammes

Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ , on note  $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T)^{op}$  l'algèbre *amas-basculée* (ou *cluster-tilted*) associée à  $T$ . On note

$$F = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -) : \mathcal{C}_Q \longrightarrow B\text{-mod}$$

le *foncteur de basculement* associé à  $T$ .

**Théorème 2.3.1** ([11]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors le foncteur  $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$  induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{C}_Q/\text{add}T[1] \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T)^{op}\text{-mod.}$$

Dans  $\mathcal{C}_Q$ , on possède un objet amas-basculant privilégié qui est  $\Lambda[1] = \bigoplus_{i \in Q_0} P_i[1]$  qui correspond à la graine initiale de  $\mathcal{A}(Q)$  au sens où le carquois  $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(\Lambda[1])^{op} \simeq \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(\Lambda)^{op}$  est isomorphe à  $Q$  et où l'application Caldero-Chapoton envoie l'ensemble amas-basculant sous-jacent à  $\Lambda[1]$  sur l'amas initial  $\mathbf{u}$  (voir chapitre 3).

Soit  $k \in Q_0$ , l'objet  $\bigoplus_{i \neq k} P_i[1]$  est un objet presque amas-basculant, il existe donc un unique objet indécomposable  $T_k \not\simeq P_k[1]$  tel que  $\bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  est un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  où on a noté  $T_i = P_i[1]$  pour  $i \neq k$ . Cet objet est appelé *objet APR-amas-basculant* et est noté  $\text{APR}(k)$ . Si  $i$  est un puits ou une source, on retrouve, au shift près, le module APR-basculant de [2].

### 2.3.2 Foncteurs BGP étendus

On suppose toujours que  $Q$  est un carquois acyclique et on se donne  $k$  un puits dans  $Q$ . On note  $S_k^+$  le foncteur de réflexion BGP défini sur  $kQ\text{-mod}$ . Dans [101], Zhu introduit le foncteur BGP étendu comme étant le foncteur induit sur la catégorie d'orbites  $\mathcal{C}_Q$  par le foncteur dérivé droit  $\mathbb{R}S_k^+$  sur  $D^b(kQ)$ . Ceci définit alors un foncteur au niveau des catégories amassées  $R_k^+ : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{\sigma_k Q}$  qui est appelé *foncteur BGP-étendu*. De même si  $i$  est une source, on définit le foncteur  $R_k^- : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{\sigma_k Q}$  comme le foncteur induit sur les catégories amassées par le foncteur dérivé droit  $\mathbb{R}S_k^- : D^b(kQ) \rightarrow D^b(k\sigma_k Q)$  où  $S_k^-$  est le foncteur BGP de réflexion usuel.

Dans la suite, on suppose que  $k$  est puits, tous les résultats peuvent être montrés de la même manière si  $k$  est une source. On rappelle que le foncteur de réflexion BGP induit une équivalence de catégories

$$S_k^+ : kQ\text{-mod}/S_k \rightarrow k\sigma_k Q\text{-mod}/S_k.$$

De fait, le foncteur BGP usuel ne permet pas d'obtenir une équivalence de catégories entre les catégories de départ considérées. Le foncteur BGP-étendu va permettre de corriger ceci de la manière suivante :

**Théorème 2.3.2** ([101]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $k$  un puits dans  $Q$ . Alors*

$$R_k^+ : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{\sigma_k Q}$$

*est une équivalence de catégories triangulées. De plus, l'action de  $R_k^+$  sur les objets de  $\mathcal{C}_Q$  est la suivante :*

$$R_k^+(M) = \begin{cases} P_k[1] & \text{si } M \simeq S_k, \\ S_k & \text{si } M \simeq P_k[1], \\ P_i[1] & \text{si } M \simeq P_i[1] \text{ pour } i \neq k, \\ S_k^+(M) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut effectuer un lien entre l'approche APR-amas-basculant et la vision BGP-étendu de la manière suivante :

**Lemme 2.3.3** ([101]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $k$  un puits dans  $Q$ . Alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q/\text{APR}(k)$ , on a  $R_k^+(M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\text{APR}(k), M)$ .*

**Foncteurs BGP étendus et vecteurs de dimension** Dans [74], les auteurs ont introduit des applications linéaires par morceaux qui vont correspondre à l'action induite par les foncteurs BGP étendus sur le système de racines de  $Q$ . Soit donc  $i \in Q_0$ , on note  $s_i$  la réflexion standard du groupe de Weyl de  $\Phi(Q)$ . L'application linéaire par morceaux  $\sigma_i$  est alors l'application définie sur  $\Phi_{\geq -1}(Q)$  par

$$\sigma_i(\mathbf{d}) = \begin{cases} \mathbf{d} & \text{si } \mathbf{d} = -\alpha_j \text{ et } j \neq i, \\ s_i(\mathbf{d}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans [101], l'auteur montre que les applications linéaires par morceaux sont les applications induites au niveau du système de racines presque positives par l'action des foncteurs de réflexion BGP étendus sur les objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$ .

**Proposition 2.3.4** ([101]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $k$  un puits dans  $Q$ . Alors pour tout objet indécomposable  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$\mathbf{dim} R_k^+(M) = \sigma_k(\mathbf{dim} M).$$

De manière équivalente, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathit{ind}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{R_k^+} & \mathit{ind}(\mathcal{C}_{\sigma_k Q}) \\ \mathbf{dim} \downarrow & & \downarrow \mathbf{dim} \\ \Phi_{\geq -1}(Q) & \xrightarrow{\sigma_k} & \Phi_{\geq -1}(\sigma_k Q). \end{array}$$



## Chapitre 3

### Application Caldero-Chapoton et caractères d'amas

Dans [16], les auteurs ont introduit une application explicite, appelée depuis *application Caldero-Chapoton*, qui à un objet de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  d'un carquois acyclique  $Q$  associe un élément de l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$ . Cela a notamment permis de donner une formule explicite pour les variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$ . Donnant des résultats essentiellement équivalents à ceux obtenus en utilisant uniquement la catégorie amassée, l'introduction de l'application Caldero-Chapoton a cependant ouvert la voie à de nouveaux résultats dans certaines directions.

Un sujet de recherche fertile a notamment été la démonstration de *formules de multiplications* qui montrent que l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  peut, en un certain sens, être vue comme une algèbre de Hall de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  [20, 19, 95, 96]. Aussi, la formule explicite donnée par Caldero et Chapoton à l'aide de caractéristiques d'Euler de grassmanniennes a permis d'obtenir des partiels forts en direction de la conjecture de positivité [21].

Dans ce chapitre, nous réintroduisons la définition de l'application Caldero-Chapoton ainsi que ses principales propriétés. Nous réintroduisons ensuite les caractères d'amas de Palu, qui sont une généralisation de l'application Caldero-Chapoton permettant d'exprimer les variables d'amas dans des amas autres que ceux de la graine initiale. Ils donnent une formule explicite analogue à celle de Caldero-Chapoton, qui à un objet de la catégorie amassée associe un polynôme de Laurent en les variables de n'importe quel amas. Nous donnons une interprétation des dénominateurs des variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  exprimés dans n'importe quel amas en fonction de la théorie de basculement de  $\mathcal{C}_Q$ .

## 3.1 L'application Caldero-Chapoton

### 3.1.1 Définition

L'approche de Caldero, Chapoton et Keller se fonde en grande partie sur l'utilisation de l'*application Caldero-Chapoton* introduite dans [16]. L'objet central dans la définition de cette application est la *grassmannienne de sous-modules*.

**Définition 3.1.1.** Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M$  une représentation de  $Q$  et  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension. Alors la *grassmannienne de sous-modules de dimension  $\mathbf{e}$*  de  $M$  est l'ensemble

$$\{N \in \text{rep}(Q, \mathbf{e}) : N \text{ est une sous-représentation de } M\}$$

C'est un sous-ensemble fermé de la grassmannienne usuelle de  $k$ -espaces vectoriels de  $M$ . C'est donc une variété projective sur  $k$ .

Si  $X$  un sous-ensemble constructible d'une variété algébrique, on définit la *caractéristique d'Euler* de  $X$  relativement à la cohomologie étale à support compact par :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

L'application Caldero-Chapoton peut-être vue comme une série génératrice des caractéristiques d'Euler de grassmanniennes de sous-modules.

**Définition 3.1.2.** L'application *Caldero-Chapoton* d'un carquois acyclique  $Q$  est l'application  $X_?^Q$  définie de l'ensemble des objets de  $\mathcal{C}_Q$  à valeurs dans l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  en  $\mathbf{u} = \{u_i, i \in Q_0\}$  définie comme suit :

1. si  $M$  est un  $kQ$ -module indécomposable, alors

$$X_M^Q = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_{i \in Q_0} u_i^{-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle}; \quad (3.1)$$

2. pour tout  $i \in Q_0$ , on pose

$$X_{P_i[1]}^Q = u_i;$$

3. pour tous objets  $M, N$  de  $\mathcal{C}_Q$ ,

$$X_{M \oplus N}^Q = X_M^Q X_N^Q.$$

Pour tout objet  $M$  dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$ ,  $X_M^Q$  est appelée *variable d'amas généralisée* ou simplement *variable généralisée* associée à  $M$ . Si il n'y a pas de confusion possible, on omettra la référence à  $Q$ .

On remarquera que l'égalité (3.1) est vérifiée pour tout  $kQ$ -module  $M$  (voir [16]). En outre, on remarquera aussi que l'application Caldero-Chapoton est invariante sous isomorphismes, c'est à dire que si  $M \simeq N$ , alors  $X_M^Q = X_N^Q$ .

### 3.1.2 De la catégorie amassée à l'algèbre amassée

Nous montrons maintenant dans quel sens précis l'application Caldero-Chapoton intervient dans la catégorification des algèbres amassées acycliques à l'aide de la catégorie amassée.

**Définition 3.1.3.** Etant donné un objet amas-basculant  $T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on appelle *ensemble amas-basculant* l'ensemble  $\{T_i, i \in Q_0\}$  des facteurs directs indécomposables de  $T$ .

L'un des intérêts de l'application Caldero-Chapoton est qu'elle réalise les variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  comme les variables généralisées associées aux objets indécomposables rigides dans  $\mathcal{C}_Q$  et que de plus, les ensembles amas-basculants dans  $\mathcal{C}_Q$  s'envoient précisément sur les amas dans  $\mathcal{A}(Q)$  :

**Théorème 3.1.4** ([19]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors l'application  $X_?^Q$  induit une bijection :*

$$\begin{aligned} \{\text{ensembles amas-basculant dans } \mathcal{C}_Q\} &\longrightarrow \{\text{amas dans } \mathcal{A}(\mathbf{u}, Q)\} \\ \{T_i, i \in Q_0\} &\mapsto \{X_{T_i}^Q, i \in Q_0\} \end{aligned}$$

En particulier,  $X_?^Q$  induit une bijection :

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q}) &\longrightarrow \mathrm{Cl}(Q) \\ M &\mapsto X_M^Q \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.5.** On peut en particulier définir une application réciproque  $\alpha : \mathrm{Cl}(Q) \rightarrow \mathrm{ind}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q})$  qui à une variable d'amas  $x$ , associe l'unique objet indécomposable rigide  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $\mathbf{dim} M = \delta(x)$ . Cette application est l'application introduite dans l'approche Buan, Marsh, Reiten et Todorov (voir [14]).

**Remarque 3.1.6.** Il suit du théorème 3.1.4 que l'algèbre engendrée par les variables généralisées contient l'algèbre amassée. On a une inclusion de  $\mathbb{Z}$ -algèbres

$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)] \subset \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}].$$

Cependant, il n'est pas clair a priori que l'on a l'égalité

$$\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)].$$

Nous verrons que cette égalité est vérifiée si  $Q$  est de type Dynkin ou de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}$  (corollaire 9.1.13). Nous conjecturons qu'elle l'est dans le type affine en général mais la question reste ouverte si  $Q$  est un carquois sauvage.

Si d'un certain point de vue, le fait d'obtenir des variables généralisées qui ne sont pas dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  peut sembler être une source de complications, cette possibilité d'obtenir une réalisation d'éléments qui ne sont pas trivialement dans  $\mathcal{A}(Q)$  va s'avérer très utile dans la suite, notamment dans partie III pour la recherche d'une  $\mathbb{Z}$ -base pour les algèbres amassées affines. C'est là une différence essentielle entre les approches Caldero-Chapoton-Keller et Buan-Marsh-Reiten-Todorov puisque dans cette dernière approche, seules les variables d'amas sont impliquées dans la catégorification.

**Remarque 3.1.7.** Dans [21], Caldero et Reineke ont montré que si  $Q$  est un carquois acyclique, alors pour tout  $kQ$ -module  $M$  et tout vecteur de dimension  $\mathbf{e}$ ,  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \geq 0$ . Il suit alors du théorème 3.1.4 que toute variable d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  est un polynôme de Laurent à coefficients positifs dans  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$ . C'est à ce jour le résultat le plus général à propos de conjecture de positivité de Fomin et Zelevinsky (conjecture 1.2.6).

### 3.1.3 Dénominateurs des variables généralisées

L'application Caldero-Chapoton permet d'obtenir une interprétation des vecteurs de dénominateurs des variables généralisées en termes de vecteurs de dimension des objets dans la catégorie amassée. Ceci permettra notamment de généraliser le théorème 1.4.3.

Etant donné un objet  $M$  indécomposable dans  $\mathcal{C}_Q$ , on définit le vecteur de dimension  $\mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q}(M)$  de  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  par :

1.  $\mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q}(M) = \mathbf{dim} M$  si  $M$  est un module indécomposable ;
2.  $\mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q}(P_i[1]) = -\mathbf{dim} S_i = -\alpha_i$  pour tout  $i \in Q_0$  ;
3. si  $M$  est un objet décomposable, on écrit  $M = \bigoplus_i M_i$  sa décomposition en objets indécomposables et on pose

$$\mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q} M = \sum_i \mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q}(M_i).$$

Puisque  $\mathbf{dim} M$  et  $\mathbf{dim}_{\mathcal{C}_Q}(M)$  coïncident si  $M$  est un module, on notera simplement  $\mathbf{dim} M$  le vecteur de dimension d'un objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ .

**Théorème 3.1.8** ([19]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M$  un objet de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors*

$$\delta(X_M^Q) = \mathbf{dim} M.$$

Dans la section 3.2, nous montrerons une généralisation de ce théorème pour l'expression des variables d'amas dans n'importe quelle graine d'un carquois acyclique.

Nous pouvons ainsi donner une généralisation du théorème 1.4.4 :

**Corollaire 3.1.9.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors le vecteur de dénominateur  $\delta$  induit une bijection*

$$\mathrm{Cl}(Q) \longrightarrow \Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q) \sqcup (-\Pi(Q)).$$

*Démonstration.* On montre d'abord que  $\delta(\mathrm{Cl}(Q)) \subset \Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q) \sqcup (-\Pi(Q))$ . Si  $x \in \mathrm{Cl}(Q)$ , alors d'après le théorème 3.1.4,  $x = X_M$  pour un objet indécomposable rigide  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $\delta(X_M) = \mathbf{dim} M$  d'après le théorème 3.1.8. Si  $M \simeq P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$ , alors  $\mathbf{dim} M = -\alpha_i \in (-\Pi(Q))$ . Sinon  $M$  est un  $kQ$ -module indécomposable rigide. D'après le théorème de Kac (théorème 2.1.3)  $\mathbf{dim} M$  est une racine positive de  $Q$ . D'autre part, toute représentation indécomposable rigide de  $Q$  est une représentation de Schur. Il s'ensuit que si  $M$  est un  $kQ$ -module indécomposable rigide, alors  $\mathbf{dim} M$  est une racine de Schur et donc  $\delta(X_M) \in \Phi^{\mathrm{Sc}}(Q)$ . Il reste à montrer que  $\mathbf{dim} M$  est une racine réelle. Si  $\mathbf{dim} M$  est une racine imaginaire, alors

$$0 \geq \langle \mathbf{dim} M, \mathbf{dim} M \rangle = \langle M, M \rangle = \dim \mathrm{End}_{kQ}(M) - \dim \mathrm{Ext}_{kQ}^1(M, M)$$

mais puisque  $\dim \mathrm{End}_{kQ}(M) = 1$ , il s'ensuit que  $\dim \mathrm{Ext}_{kQ}^1(M, M) > 0$ , ce qui contredit l'hypothèse, il s'ensuit que  $\mathbf{dim} M \in \Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q)$  et donc l'application induite par  $\delta$  est bien à valeurs dans  $\Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q)$ .

Montrons la surjectivité. Si  $\mathbf{d} \in \Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q)$ , alors il existe une représentation de Schur  $M \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Puisque  $\langle M, M \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 1$  et  $\dim \mathrm{End}_{kQ}(M) = 1$ , on a  $\dim \mathrm{Ext}_{kQ}^1(M, M) = 0$  et donc  $M$  est rigide. D'autre part, puisque  $\mathrm{End}_{kQ}(M) \simeq k$ ,  $M$  est nécessairement indécomposable et donc  $M$  est un module indécomposable rigide et  $X_M \in \mathrm{Cl}(Q)$ . D'après le théorème des dénominateurs (théorème 3.1.8), on a alors  $\mathbf{d} = \delta(X_M) \in \delta(\mathrm{Cl}(Q))$ .

Montrons l'injectivité. Soient  $x, y$  deux variables d'amas telles que  $\delta(x) = \delta(y)$ , alors il existe  $M, N$  indécomposables rigides tels que  $x = X_M$  et  $y = X_N$ . D'après le théorème des dénominateurs, on a alors  $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim} N$ . Si  $\mathbf{dim} M \in (-\Pi(Q))$ , alors  $M \simeq P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$  et donc  $N \simeq P_i[1] \simeq M$  et  $x = y$ . Sinon  $\mathbf{dim} M \in \Phi^{\mathrm{re}, \mathrm{Sc}}(Q)$  mais alors d'après le théorème de Kac, il existe une unique représentation indécomposable (à isomorphisme près) dans  $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{dim} M)$  et donc  $N \simeq M$  et  $x = y$ .  $\square$

### 3.1.4 Formules de multiplication

L'une des spécificités de l'approche de Caldero-Chapoton-Keller est qu'elle donne à l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  d'un carquois acyclique  $Q$  une structure d'algèbre de Hall sur la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$ . Ceci est d'autant plus intéressant qu'il n'est en général pas évident de poser une structure d'algèbre de Hall sur une catégorie triangulée (voir par exemple [94, 90, 84]).

**La formule multiplication presque scindée** La première formule de multiplication a été démontrée dans [16]. C'est notamment cette formule qui nous permettra d'introduire les polynômes de Chebyshev généralisés dans la partie II. Cette formule est appelée *formule de multiplication presque scindée*.

**Proposition 3.1.10** ([16]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M$  un  $kQ$ -module non-projectif. Alors*

$$X_M X_{\tau M} = X_B + 1$$

où  $B$  est l'unique module tel qu'il existe une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

**La formule de multiplication pour le type fini** Etant donnés des objets  $M, N, Z$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on note  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)_Z$  l'ensemble des triangles

$$N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $E \simeq Z$ . Si  $Q$  est un carquois de type fini, alors le projectivisé  $\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)_Z$  est un sous-ensemble constructible de la variété  $\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)$ .

La formule de multiplication de type fini est la suivante

**Théorème 3.1.11** ([20]). *Soit  $Q$  un carquois de type fini. Alors pour tous objets  $M, N$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$\chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)) X_M X_N = \sum_E \left( \chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)_E) + \chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M)_E) \right) X_E$$

où  $E$  parcourt l'ensemble des isoclasses de  $\mathcal{C}_Q$ .

**La formule de multiplication unidimensionnelle** Dans [19], les auteurs ont généralisé le théorème 3.1.11 au cas où  $Q$  était acyclique sous la condition que l'espace d'extension soit de dimension 1. Cette formule de multiplication est appelée *formule de multiplication unidimensionnelle*.

**Théorème 3.1.12** ([19]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M, N$  des objets dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \simeq k$ . Alors*

$$X_M X_N = X_B + X_{B'}$$

où  $B$  et  $B'$  sont les uniques termes centraux de triangles non-scindés

$$M \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow M[1] \text{ et } N \longrightarrow B' \longrightarrow M \longrightarrow N[1].$$

L'hypothèse que l'espace d'extension est de dimension 1 peut sembler relativement contraignante. Il s'avère cependant qu'elle est d'une très grande utilité dans l'étude des algèbres amassées. En effet, de nombreux résultats se démontrent par récurrence sur le graphe des amas-basculants. La proposition 2.2.14 impliquant pour une paire d'échange  $(U, U^*)$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(U, U^*) \simeq k$ , le théorème 3.1.12 est souvent suffisant. Nous verrons notamment de nombreux exemples d'applications de formules de multiplications unidimensionnelles dans la section 3.2.

Dans le cas où  $M$  et  $N$  sont des modules indécomposables, on peut préciser la formule de multiplication :

**Corollaire 3.1.13.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M, N$  deux modules indécomposables tels que  $\text{Ext}_{kQ}^1(M, N) \simeq k$  et  $\text{Ext}_{kQ}^1(N, M) = 0$ . Alors*

$$X_M X_N = X_B + X_E$$

où  $E$  est l'unique module tel qu'il existe une suite non-scindée

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et où  $B \simeq \ker f \oplus \operatorname{coker} f[-1]$  pour tout morphisme non-nul  $f \in \operatorname{Hom}_{kQ}(N, \tau M)$ .

*Démonstration.* La formule d'Auslander-Reiten donne

$$k \simeq \operatorname{Ext}_{kQ}^1(M, N) \simeq D\operatorname{Hom}_{kQ}(N, \tau M)$$

D'autre part, d'après la proposition 2.2.5, on a

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \simeq \operatorname{Ext}_{kQ}^1(M, N) \simeq k$$

et

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M) \simeq \operatorname{Hom}_{kQ}(N, \tau M) \simeq k.$$

On rappelle qu'une suite exacte non-scindée dans  $kQ\text{-mod}$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

induit un triangle non-scindé dans  $\mathcal{C}_Q$

$$N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N[1]$$

et qu'un morphisme non-nul  $f : N \longrightarrow \tau M$  induit un triangle non-scindé dans  $D^b(kQ)$  et donc dans  $\mathcal{C}_Q$  :

$$M \longrightarrow C_f \longrightarrow N \xrightarrow{f} M[1] \simeq \tau M$$

où  $C_f \simeq \ker f \oplus \operatorname{coker} f[-1]$ . Puisque  $\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)$  et  $\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M)$  sont de dimension 1, il s'ensuit que tous les triangles impliquant  $M$  et  $N$  sont de cette forme. Le résultat suit alors du théorème 3.1.12.  $\square$

**La formule de multiplication de Xiao et Xu** Plus récemment, dans [95], puis dans [96], le théorème 3.1.11 a été généralisée au cas acyclique, généralisant par la même occasion le théorème 3.1.12. La formule de multiplication de Xiao-Xu est une version intégrale de la formule de multiplication de Caldero-Keller inspirée par les travaux de Geiss, Leclerc et Schröer sur la base semi-canonique duale de  $U(\mathfrak{n})$  [54]. L'énoncé précis de ce théorème demande un certain nombre de prérequis supplémentaires qui ne nous seront pas utiles dans la suite. Pour nos propos, nous pourrions nous contenter du résultat corollaire ci-dessous

**Théorème 3.1.14** ([95]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M, N$  deux  $kQ$ -modules indécomposables. Alors  $X_M X_N$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Y$  où  $Y$  parcourt l'ensemble des termes centraux de triangles non-scindés dans  $\operatorname{Ext}_{D^b(kQ)}^1(M, N)$ .*

Nous obtiendrons dans la suite des formules de multiplication qui se retrouveront comme cas particulier de du théorème 3.1.14.

### 3.1.5 Indépendance linéaire de variables généralisées

Dans [20], une condition a été introduite sur le carquois  $Q$  de manière à obtenir un cadre pratique pour étudier des problèmes d'indépendance linéaire des variables généralisées.

**Définition 3.1.15.** Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $B = B_Q$  sa matrice associée. Alors  $Q$  est dit *gradué* si il existe une forme linéaire  $\epsilon$  sur  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  telle que  $\epsilon(B\alpha_i) < 0$  pour tout  $i \in Q_0$  où  $\alpha_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ .

Une orientation de  $Q$  telle que tout sommet  $i \in Q_0$  est ou bien une source ou bien un puits est dite *alternée*. Comme cela a été remarqué dans [20] tout carquois muni d'une orientation alternée est gradué. En effet si  $B = B_Q$ , pour tout  $j \in Q_0$ , on a  $b_{ij} > 0$  si  $i$  est une source et  $b_{ij} < 0$  si  $i$  est un puits. On peut alors construire une forme  $\epsilon$  sur  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  en prenant ses coordonnées dans la base duale de sorte que  $\epsilon_i < 0$  si  $i$  est une source et  $\epsilon_i > 0$  si  $i$  est un puits.

Si  $Q$  est un carquois gradué, alors en suivant les idées de [20], on peut munir l'algèbre  $\mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)]$  d'une graduation. Pour cela, nous rappelons quelques résultats d'ordre général sur les variables généralisées.

Soit  $L(\mathbf{u}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  un polynôme de Laurent en  $\mathbf{u}$ . Alors  $L(\mathbf{u})$  s'écrit de manière unique

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^{Q_0}} c_\lambda \prod_{i \in Q_0} u_i^{\lambda_i}.$$

Etant donné  $\lambda \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , le coefficient  $c_\lambda$  est appelé  $\lambda$ -composante de  $L$ . Le *support*  $\text{supp}(L)$  de  $L$  est l'ensemble des points  $\lambda = (\lambda_i, i \in Q_0)$  de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  tels que la  $\lambda$ -composante de  $L$  est non-nulle. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on note  $C_\lambda$  le cône convexe de sommet  $\lambda$  et dont les bords sont engendré par les vecteurs  $B\alpha_i$  pour  $i \in Q_0$ .

**Proposition 3.1.16** ([20]). Soit  $Q$  un carquois acyclique sans arêtes multiples. Soit  $M$  un objet indécomposable dans  $\mathcal{C}_Q$  que l'on écrit  $M = H^0(M) \oplus P_M[1]$ . Alors  $\text{supp}(X_M)$  est dans le cône  $C_{\lambda_M}$  où

$$\lambda_M := (-\langle \alpha_i, \mathbf{dim} H^0(M) \rangle + \langle \mathbf{dim} P_M, \alpha_i \rangle)_{i \in Q_0}.$$

De plus, la  $\lambda_M$ -composante de  $X_M$  est 1.

**Proposition 3.1.17** ([20]). Soit  $Q$  un carquois acyclique gradué sans arêtes multiples. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$F_n = \left( \bigoplus_{\epsilon(\nu) \leq n} \mathbb{Z} \prod_{i \in Q_0} u_i^{\nu_i} \right) \cap \mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)].$$

Alors  $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définit une  $\mathbb{Z}$ -filtration de  $\mathbb{Z}[X_M^Q : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)]$ .

Les propositions 3.1.17 et 3.1.16 impliquent alors le lemme suivant :

**Lemme 3.1.18** ([20]). Soit  $Q$  un carquois gradué sans arête multiple. Soit  $\{M_1, \dots, M_r\}$  une famille d'objets dans  $\mathcal{C}_Q$  telle que  $\mathbf{dim} M_i \neq \mathbf{dim} M_j$  si  $i \neq j$ , alors la famille  $\{X_{M_1}^Q, \dots, X_{M_r}^Q\}$  est linéairement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .



**Lemme 3.1.19.** *Soit  $n \geq 1$ . Alors le carquois  $\vec{\mathbb{A}}_{2n}$  de type Dynkin  $\mathbb{A}_{2n}$  muni de l'orientation linéaire*

$$2n - 1 \longrightarrow 2n - 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

*est un carquois gradué.*

*Démonstration.* Une récurrence immédiate montre que

$$\det(B_{\vec{\mathbb{A}}_n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, les colonnes de  $\vec{\mathbb{A}}_{2n}$  sont linéairement indépendantes et  $\vec{\mathbb{A}}_{2n}$  est donc gradué.  $\square$

**Corollaire 3.1.20.** *Soit  $Q$  un carquois de la forme  $\vec{\mathbb{A}}_{2n}$ . Alors la famille*

$$\left\{ X_{S_i}^Q : i \in Q_0 \right\}$$

*est une famille algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Soit  $P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{Q_0}} a_\nu \mathbf{t}^\nu \in \mathbb{Z}[t_i, i \in Q_0]$  où  $\mathbf{t}^\nu = \prod_{i \in Q_0} t_i^{\nu_i}$  tel que  $P(X_{S_0}^Q, \dots, X_{S_{2n-1}}^Q) = 0$ . Pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on a

$$\prod_{i \in Q_0} (X_{S_i}^Q)^{\nu_i} = X_{\bigoplus_{i \in Q_0} S_i^{\oplus \nu_i}}^Q$$

mais  $\dim \bigoplus_{i \in Q_0} S_i^{\oplus \nu_i} = \nu$  pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . D'après le lemme 3.1.18, il suit que la famille

$$\left\{ X_{\bigoplus_{i \in Q_0} S_i^{\oplus \nu_i}}^Q : a_\nu \neq 0 \right\}$$

est linéairement indépendante et donc  $P = 0$ .  $\square$

## 3.2 Caractères d'amas

Dans toute cette section  $Q$  désignera un carquois acyclique. Si on considère une variable d'amas  $z \in \mathcal{A}(Q)$ , il existe un unique objet indécomposable rigide  $\alpha(z)$  dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $z = X_{\alpha(z)}^Q$ . Si nous considérons maintenant un amas  $\mathbf{x}$  dans  $\mathcal{A}(Q)$ , on sait que l'on peut écrire  $z$  comme un polynôme de Laurent en  $\mathbf{x}$  mais nous ne disposons a priori plus d'application explicite pour écrire  $z$  en fonction de  $\mathbf{x}$ . Dans [20], les auteurs ont conjecturé l'expression d'une application explicite qui, à un objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  associe l'écriture explicite de  $X_M^Q$  en fonction de  $\mathbf{x}$  quel que soit l'amas  $\mathbf{x}$  considéré. Palu a démontré cette conjecture dans [76]. En suivant sa terminologie, nous appellerons *caractère d'amas* une telle application.

Dans cette section, nous rappelons les résultats de Palu sur les caractères d'amas afin d'étudier l'interaction des foncteurs de réflexion BGP-étendus et de l'application Caldero-Chapoton. Ceci généralise les travaux de Zhu [100]. Nous utilisons aussi les caractères d'amas pour donner une démonstration alternative à un théorème de dénominateurs de Buan, Marsh et Reiten [12].

### 3.2.1 Généralités

**Définition des caractères d'amas** Soit  $T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$  un objet amas-basculant, on note  $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T)^{op}$  et  $Q_T = \mathcal{Q}(B)$  le carquois de  $B$ . On note  $\mathcal{A}(Q_T)$  l'algèbre amassée de graine initiale  $(Q_T, \mathbf{x})$  et  $\Phi_T = \Phi_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}$  l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées

$$\Phi_T : \mathcal{A}(\mathbf{x}, Q_T) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{u}, Q).$$

Soit  $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, ?) : \mathcal{C}_Q \longrightarrow B\text{-mod}$  le foncteur de basculement. Pour tous objets  $M, N$  dans  $B\text{-mod}$ , on note

$$\langle M, N \rangle = \dim \text{Hom}_B(M, N) - \dim \text{Ext}_B^1(M, N)$$

$$\langle M, N \rangle_a = \langle M, N \rangle - \langle N, M \rangle$$

On sait que si  $B$  est héréditaire alors  $\langle -, - \rangle$  passe au groupe de Grothendieck  $K_0(B)$ . Néanmoins, en général la dimension globale d'une algèbre basculée  $B$  est supérieure à 1 et la forme  $\langle -, - \rangle$  ne passe pas au groupe de Grothendieck  $K_0(B)$ . Cependant, Palu a montré dans [76] que la forme antisymétrisée  $\langle -, - \rangle_a$  définit bien une application bilinéaire sur le groupe de Grothendieck  $K_0(B)$ .

**Définition 3.2.1.** Le *caractère d'amas* associée à  $T$  est l'application définie sur  $\text{Ob}(\mathcal{C}_Q)$  à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{Z}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent en  $\mathbf{x}$  définie par :

$$X_M^T = \begin{cases} x_i & \text{si } M \simeq T_i[1] \text{ pour un } i \in Q_0; \\ \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(FM)) \prod_i x_i^{\langle S_i, \mathbf{e} \rangle_a - \langle S_i, FM \rangle} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\mathbf{e}$  parcourt les vecteurs de dimension de  $B$ -modules.

Cette application vérifie en outre

$$X_{M \oplus N}^T = X_M^T X_N^T$$

pour tous objets  $M, N$  de  $\mathcal{C}_Q$ .

L'une des motivations pour l'introduction des caractères d'amas est leur utilité pour comprendre le changement de graines :

**Théorème 3.2.2** ([76]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & \text{ind}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q}) & \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ X_?^Q \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow \\ X_?^T \end{array} \\ \mathcal{A}(Q) & \xleftarrow{\Phi_T} & \mathcal{A}(Q_T) \end{array}$$

En particulier,  $X_?^T$  induit une bijection de  $\text{ind}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q})$  vers  $\text{Cl}(Q_T)$ .

**Multiplication pour les caractères d'amas** Les caractères d'amas vont vérifier une propriété de multiplication analogue à la formule de multiplication unidimensionnelle pour l'application Caldero-Chapoton.

**Théorème 3.2.3** ([76]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Soient  $U, V$  deux objets dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(U, V) \simeq k$ . Alors*

$$X_U^T X_V^T = X_B^T + X_{B'}^T$$

où  $B$  et  $B'$  sont les uniques objets tels qu'il existe des triangles non-scindés

$$U \longrightarrow B \longrightarrow V \longrightarrow U[1],$$

$$V \longrightarrow B \longrightarrow U \longrightarrow V[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$ .

Dans la suite, nous appliquerons essentiellement ce théorème dans le cas où  $(U, V)$  est une paire d'échange. La proposition 2.2.14 implique alors :

**Corollaire 3.2.4.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $(U, U^*)$  une paire d'échange dans  $\mathcal{C}_Q$  dont les triangles associés sont*

$$U \longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1]$$

$$U^* \longrightarrow B' \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1].$$

Alors

$$X_U^T X_{U^*}^T = X_B^T + X_{B'}^T$$

### 3.2.2 Réflexions et variables d'amas

Le lemme suivant montre que le caractère d'amas associé à un objet APR-amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  n'est autre que l'application Caldero-Chapoton associée à la graine voisine composée avec l'isomorphisme canonique d'algèbres amassés :

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $i$  un puits dans  $Q$  et  $T = \text{APR}(i)$ . Alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$X_M^T = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$$

De manière équivalente le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{R_i^+} & \text{Ob}(\mathcal{C}_{\sigma_i Q}) \\ & \searrow X_{?}^T & \downarrow X_{?}^{\sigma_i Q} \\ & & \mathbb{Z}[\mathbf{x}^{\pm 1}] \end{array}$$

*Démonstration.* Comme  $X_{M \oplus N}^T = X_M^T X_N^T$  et  $X_{R_i^+(M \oplus N)}^{\sigma_i Q} = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q} X_{R_i^+ N}^{\sigma_i Q}$ , il suffit de montrer le résultat pour  $M$  indécomposable. Si  $M = T_i[1]$ , alors  $R_i^+ M = P_i[1]$  et donc  $X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q} = X_{P_i[1]}^{\sigma_i Q} = v_i$  mais par définition  $X_M^T = X_{T_i[1]}^T = v_i$ .

Supposons maintenant que  $M$  est un objet indécomposable isomorphe à aucun  $T_i[1]$ . D'après le lemme 2.3.3, on a  $R_i^+(M) = FM$  et alors

$$\begin{aligned}
 X_M^T &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(FM)) \prod_i v_i^{\langle S_i, \mathbf{e} \rangle_a - \langle S_i, FM \rangle} \\
 &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(FM)) \prod_i v_i^{\langle S_i, \mathbf{e} \rangle - \langle \mathbf{e}, S_i \rangle - \langle S_i, FM \rangle} \\
 &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(FM)) \prod_i v_i^{-\langle S_i, FM - \mathbf{e} \rangle - \langle \mathbf{e}, S_i \rangle} \\
 &= X_{FM}^{\sigma_i Q} \\
 &= X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}
 \end{aligned}$$

□

Soit donc  $Q$  acyclique,  $i$  un puits dans  $Q_0$ . On note  $\mathcal{A}(\sigma_i Q)$  l'algèbre amassée de graine initiale  $(\mathbf{v}, \sigma_i Q) = \mu_i(\mathbf{u}, Q)$ . Soit  $\Phi_i : \mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(\sigma_i Q)$  l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées et  $\Phi'_i : \mathcal{A}(\sigma_i Q) \rightarrow \mathcal{A}(Q)$  l'isomorphisme réciproque. On a alors

$$\Phi_i(X_{T_j[1]}^Q) = X_{R_i^+ T_j[1]}^{\sigma_i Q} = X_{P_j[1]}^{\sigma_i Q} = v_j$$

pour tout  $j \in Q_0$ . Comme  $T[1]$  est un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ , il suit du théorème 3.1.4 que  $\{X_{T_j[1]}^Q, j \in Q_0\}$  est un amas dans  $\mathcal{A}(Q)$  et

$$\{\Phi_i(X_{T_j[1]}^Q), j \in Q_0\} = \{X_{P_j[1]}^{\sigma_i Q}, j \in Q_0\}$$

est un amas dans  $\mathcal{A}(\sigma_i Q)$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \{T_j[1], j \in Q_0\} & \xrightarrow{R_i^+} & \{P_j[1], j \in Q_0\} \\
 X_i^Q \downarrow & & \downarrow X_i^{\sigma_i Q} \\
 \{X_{T_j[1]}, j \in Q_0\} & \xrightarrow{\Phi_i} & \{v_j, j \in Q_0\}
 \end{array}$$

L'interprétation des foncteurs BGP-étendus au niveau de l'algèbre amassée est alors la suivante :

**Proposition 3.2.6.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $i$  un puits dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors*

$$\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$$

pour tout objet rigide  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ .

*Démonstration.* On le montre par récurrence sur le graphe de basculement. Supposons que  $R$  est un objet amas-basculant tel que pour tout facteur direct  $M$  de  $R$ , on ait  $\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$ . Si  $R'$  est un objet amas-basculant de  $\mathcal{C}_Q$  voisin

de  $R$  dans le graphe de basculement de  $\mathcal{C}_Q$ , alors il existe une paire d'échange  $(U, U^*)$  telle que  $R = U \oplus \bar{U}$  et  $R' = U^* \oplus \bar{U}$ . On note

$$U \longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1] \text{ et } U^* \longrightarrow B' \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1]$$

les triangles correspondants. D'après la formule de multiplication unidimensionnelle, on a

$$X_U^Q X_{U^*}^Q = X_B^Q + X_{B'}^Q$$

et donc en appliquant  $\Phi_i$ , on obtient

$$\Phi_i(X_U^Q) \Phi_i(X_{U^*}^Q) = \Phi_i(X_B^Q) + \Phi_i(X_{B'}^Q).$$

Puisque  $B$  et  $B'$  sont dans  $\text{add} \bar{U}$ , l'hypothèse de récurrence donne

$$\Phi_i(X_{U^*}^Q) = \frac{X_{R_i^+ B}^Q + X_{R_i^+ B'}^Q}{X_{R_i^+ U}^Q}.$$

D'autre part d'après le théorème 2.3.2  $R_i^+$  est une équivalence de catégorie triangulée et donc  $(R_i^+ U, R_i^+ U^*)$  est une paire d'échange dont les triangles correspondants sont

$$R_i^+ U \longrightarrow R_i^+ B \longrightarrow R_i^+ U^* \longrightarrow R_i^+ U[1] \text{ et } R_i^+ U^* \longrightarrow R_i^+ B' \longrightarrow R_i^+ U \longrightarrow R_i^+ U^*[1]$$

La formule de multiplication unidimensionnelle dans  $\mathcal{C}_{\sigma_i Q}$  donne alors :

$$X_{R_i^+ U^*}^{\sigma_i Q} = \frac{X_{R_i^+ B}^{\sigma_i Q} + X_{R_i^+ B'}^{\sigma_i Q}}{X_{R_i^+ U}^{\sigma_i Q}}$$

et donc

$$X_{R_i^+ U^*}^{\sigma_i Q} = \Phi_i(X_{U^*}^Q).$$

D'après le lemme 3.2.5, la proposition est vraie pour l'objet amas-basculant  $T[1]$ . Ainsi, par connexité du graphe de basculement de  $\mathcal{C}_Q$  (théorème 2.2.13), pour tout facteur direct  $M$  d'un objet amas-basculant, on a  $\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$ . Comme tout objet indécomposable rigide peut être complété en un objet amas-basculant, il s'ensuit que

$$\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$$

pour tout objet indécomposable rigide  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

Dans le cas où  $Q$  est Dynkin, on retrouve alors un résultat de Zhu [100, Théorème 4.7] :

**Proposition 3.2.7.** *Soit  $Q$  un carquois de type fini et  $i \in Q_0$  un puits. Alors pour tout objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+(M)}^{\sigma_i Q}$$

En particulier, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{R_i^+} & \text{ind}(\mathcal{C}_{\sigma_i Q}) \\ X_i^Q \downarrow & & \downarrow X_i^{\sigma_i Q} \\ \text{Cl}(Q) & \xrightarrow{\Phi_i} & \text{Cl}(\sigma_i(Q)) \end{array}$$

Nous conjecturons que la propriété de la proposition 3.2.6 est vraie pour tout objet  $M$  dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$ .

**Conjecture 3.2.8.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $i$  un puits dans  $Q$ . Alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}.$$

Nous établirons la conjecture dans le cas où  $Q$  est un carquois affine satisfaisant une certaine propriété de différence (voir proposition 9.3.5).

### 3.3 Un théorème de dénominateurs

On se fixe un carquois acyclique  $Q$  et on note toujours  $(\alpha_i)_{i \in Q_0}$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ . D'après le théorème de dénominateurs 3.1.8, pour tout objet indécomposable  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  isomorphe à aucun  $P_i[1]$ , le vecteur de dénominateurs de  $X_M$  est

$$\delta(X_M) = \mathbf{dim} M = \sum_{i \in Q_0} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_i, M) \alpha_i.$$

Fixons alors une graine  $(\mathbf{x}, Q_T)$  dans  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, Q)$  correspondant à un certain objet amas-basculant  $T$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on note  $\mathcal{A}(Q_T) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, Q_T)$  et

$$\Phi_T : \mathcal{A}(\mathbf{x}, Q_T) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{u}, Q)$$

l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées correspondant. Il est alors naturel de chercher à savoir si on peut interpréter le vecteur de dénominateur d'une variable d'amas dans  $\mathcal{A}(Q_T)$  à l'aide du foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$  comme c'est le cas pour l'objet amas-basculant privilégié  $T = kQ = \bigoplus_i P_i$ .

Buan, Marsh et Reiten ont prouvé que sous certaines conditions sur l'objet amas-basculant  $T$  considéré, appelées *compatibilité sous échange* (voir la section 3.3.2 pour une définition), on pouvait donner une telle interprétation [12]. Ceci généralisait donc le théorème 3.1.8 ainsi que le théorème correspondant de [14]. Du point de vue de l'approche Caldero-Chapoton-Keller, l'outil central pour le changement de graine est le caractère d'amas introduit dans la section 3.2. Il est apparu que l'on pouvait utiliser la partie de [12] dédiée à l'étude de la condition de compatibilité sous échange pour proposer une preuve simplifiée en adaptant les méthodes de Caldero et Keller au cadre des caractères d'amas.

On rappelle que  $\alpha : \mathrm{Cl}(Q) \longrightarrow \mathrm{ind}(\mathcal{E}(\mathcal{C}_Q))$  désigne l'application qui à une variable d'amas  $x$  de  $\mathcal{A}(Q)$  associe l'unique objet indécomposable rigide  $M$  tel que  $\mathbf{dim} M = \delta(x)$  (voir remarque 3.1.5). Suivant [12], on pose la définition suivante :

**Définition 3.3.1.** On dit qu'une variable d'amas  $x$  dans  $\mathcal{A}(Q_T)$  a un  $T$ -dénominateur si elle vérifie

$$\delta_T(x) = \sum_{i \in Q_0} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, \alpha(\Phi_T(x))) \alpha_i$$

si  $x \notin \{x_1, \dots, x_q\}$  et  $\alpha(\Phi_T(x_i)) = T_i[1]$  pour tout  $i \in Q_0$ .

La condition sur  $T$  sous laquelle on peut obtenir un théorème de dénominateurs est la *compatibilité sous échange* :

**Définition 3.3.2.** Soit  $(U, U^*)$  une paire d'échange dans  $\mathcal{C}_Q$  et

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1], \\ U^* &\longrightarrow B' \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1] \end{aligned}$$

les triangles correspondants..

Un objet indécomposable rigide  $N$  dans  $\mathcal{C}_Q$  est dit *compatible avec la paire d'échange*  $(U, U^*)$  si pour  $U \not\cong \tau N \not\cong U^*$  on a

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, U) + \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, U^*) = \max(\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B), \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B'))$$

$N$  est dit *compatible sous échange* si il est compatible avec toutes les paires d'échanges dans  $\mathcal{C}_Q$ .

Le théorème de dénominateurs de [12] est alors :

**Théorème 3.3.3** ([12]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique, soit  $T = \bigoplus_{i=1}^q T_i$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que chaque  $T_i$  est compatible sous échange. Alors toute variable d'amas dans  $\mathcal{A}(Q_T)$  a un  $T$ -dénominateur.*

### 3.3.1 Polynômes de Laurent faiblement positifs

Une notion centrale dans le comportement des dénominateurs des polynômes de Laurent sous somme et multiplication est la *condition de positivité*, introduite dans [14]. Suivant [19], on appellera cette propriété la *positivité faible*.

**Définition 3.3.4.** Un polynôme de Laurent  $F = P(\mathbf{x})/\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$  dans sa forme irréductible est dit *faiblement positif* si  $P(\mathbf{z}) > 0$  pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  avec au plus une composante nulle.

Etant donnés deux vecteurs  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on écrit

$$\max(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = (\max(d_i, e_i))_{i \in Q_0}$$

Cette condition de positivité est déjà apparue comme utile dans les techniques développées dans [14, 12, 19]. Le lemme suivant est l'une des motivations principales pour l'introduction de cette notion :

**Lemme 3.3.5** ([19]). *Soit  $R$  un anneau de polynômes de Laurent. Pour tout élément  $L \in R$ , on note  $\delta_R$  le vecteur de dénominateur de  $L$ .*

1. *Si  $L_1$  et  $L_2$  sont faiblement positifs, alors  $L_1 + L_2$  est aussi faiblement positif. De plus,*

$$\delta_R(L_1 + L_2) = \max(\delta_R(L_1), \delta_R(L_2))$$

2. *Si  $L_1$  et  $L_2$  sont des polynômes de Laurent tel que  $L_1$  est faiblement positif, alors  $L_2$  est faiblement positif si et seulement si  $L_1 L_2$  est faiblement positif. De plus,*

$$\delta_R(L_1 L_2) = \delta_R(L_1) + \delta_R(L_2)$$

Dans [19], les auteurs ont montré que pour tout objet indécomposable rigide  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ ,  $X_M^Q$  est un polynôme de Laurent faiblement positif. On montre de la même manière que  $X_M^T$  est faiblement positif :

**Lemme 3.3.6.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors  $X_M^T$  est un polynôme de Laurent faiblement positif en  $\mathbf{x}$ .*

*Démonstration.* Soit  $M$  un objet indécomposable rigide. Alors il peut être complété en un objet amas-basculant de  $\mathcal{C}_Q$ . Le graphe de basculement étant connexe, il suffit de montrer par récurrence sur le graphe de basculement que si  $X_U^T$  est faiblement positif pour tout facteur direct  $U$  d'un objet amas-basculant  $R$ , alors  $X_V^T$  est faiblement positif pour tout facteur direct  $V$  d'un objet amas-basculant  $R'$  voisin de  $R$ .

On initialise la récurrence avec l'objet amas-basculant  $T[1] = \bigoplus_{i=1}^q T_i[1]$ . Pour tout  $i \in Q_0$ , on a  $X_{T_i[1]}^T = x_i = 1/x_i^{-1}$  et donc  $X_{T_i[1]}^T$  est faiblement positif.

Soit maintenant  $R$  et  $R'$  deux objets amas-basculants voisins dans le graphe de basculement. Soit  $R = U \oplus \bar{U}$  et  $R' = U^* \oplus \bar{U}$  où  $(U, U^*)$  est une paire d'échange. On suppose que  $X_V^T$  est faiblement positif pour tout facteur direct  $V$  de  $R$ . On note

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & B & \longrightarrow & U^* & \longrightarrow & U[1], \\ U^* & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & U & \longrightarrow & U^*[1] \end{array}$$

les triangles associés à la paire d'échange  $(U, U^*)$ . D'après le corollaire 3.2.4, on a alors

$$X_U^T X_{U^*}^T = X_B^T + X_{B'}^T.$$

D'après le lemme 3.3.5, si  $X_B^T, X_{B'}^T$  et  $X_U^T$  sont faiblement positifs, alors  $X_{U^*}^T$  l'est aussi. Comme  $B, B' \in \text{add}(\bar{U})$ ,  $X_B^T, X_{B'}^T$  et  $X_U^T$  sont faiblement positifs et donc  $X_{U^*}^T$  est aussi faiblement positif, ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Corollaire 3.3.7.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $M$  un objet rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors  $X_M^T$  est un polynôme de Laurent faiblement positif en  $\mathbf{x}$ .*

*Démonstration.* Soit  $M = \bigoplus_i M_i$  la décomposition de  $M$  en indécomposables. Alors  $X_M^T = \prod_i X_{M_i}^T$  est un produit de polynômes de Laurent faiblement positifs, il est donc lui-même faiblement positif.  $\square$

### 3.3.2 Le théorème de dénominateurs

Comme nous allons le voir, la condition de compatibilité sous échange introduite dans [12] apparaît naturellement dans le cadre des caractères d'amas pour que les variables d'amas aient un  $T$ -dénominateur.

Pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on note

$$\mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) = \sum_{i \in Q_0} \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M) \alpha_i$$

**Théorème 3.3.8** ([36]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée,  $T$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Supposons que pour tout  $i \in Q_0$ ,  $T_i$  est compatible sous échange, alors pour tout objet indécomposable rigide  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$\delta_T(X_M^T) = \begin{cases} -\alpha_i & \text{si } M \simeq T_i[1], \\ \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) & \text{sinon.} \end{cases}$$



*Démonstration.* Soit  $i \in Q_0$ . Il est équivalent de montrer que pour tout objet indécomposable rigide  $M$ , on a

$$\delta_T(X_M^T)_i = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M) - m_i(M) =: h_i(M)$$

où  $m_i(M)$  est la multiplicité de  $T_i[1]$  comme facteur direct de  $M$  et  $\delta_T(X_M^T)_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur  $\delta_T(X_M^T)$ .

Soit  $M$  un objet indécomposable rigide, on peut le compléter en un objet amas-basculant. Le graphe de basculement étant connexe, il suffit de montrer par récurrence sur le graphe de basculement que si la propriété est vraie pour tous les facteurs directs d'un objet amas-basculant  $R$ , elle reste vraie pour tous les facteurs directs d'un objet amas-basculant  $R'$  voisin de  $R$  dans le graphe de basculement. On initialise la récurrence avec l'objet amas-basculant  $\bigoplus_{i=1}^g T_i[1]$  pour lequel le résultat est clairement vérifié.

Soient  $R$  et  $R'$  deux objets amas-basculants voisins dans le graphe de basculement. On peut écrire  $R = U \oplus \bar{U}$  et  $R' = U^* \oplus \bar{U}$  où  $(U, U^*)$  est une paire d'échange dont les triangles associés sont

$$U \longrightarrow B \longrightarrow U^* \longrightarrow U[1],$$

$$U^* \longrightarrow B' \longrightarrow U \longrightarrow U^*[1].$$

D'après le corollaire 3.2.4, on a alors

$$X_U^T X_{U^*}^T = X_B^T + X_{B'}^T$$

et d'après le corollaire 3.3.7 et le lemme 3.3.5, il s'ensuit que

$$\delta_T(X_U^T) + \delta_T(X_{U^*}^T) = \max(\delta_T(X_B^T), \delta_T(X_{B'}^T)).$$

Si  $U \not\cong T_i[1] \not\cong U^*$ , comme  $T_i$  est compatible avec la paire d'échange  $(U, U^*)$ , on a

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, U) + \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, U^*) = \max(\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B), \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B')).$$

Comme  $U$  et  $U^*$  sont indécomposables, on a  $m_i(U) = m_i(U^*) = 0$  et donc

$$h_i(M) = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M).$$

Alors, l'égalité ci-dessus devient

$$h_i(U) + h_i(U^*) = \max(\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B), \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B'))$$

Par récurrence,  $\delta_T(X_U^T) = h_i(U)$ ,  $\delta_T(X_B^T) = h_i(B)$  et  $\delta_T(X_{B'}^T) = h_i(B')$ . Ainsi

$$\delta_T(X_{U^*}^T) + h_i(U) = \max(h_i(B), h_i(B'))$$

et donc il suffit de montrer que

$$\max(\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B), \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B')) = \max(h_i(B), h_i(B')). \quad (3.2)$$

Supposons que  $T_i[1]$  n'est pas un facteur direct de  $\bar{U}$ , il s'ensuit que  $m_i(B) = m_i(B') = 0$  et l'égalité est vraie. Sinon,  $T_i[1]$  est un facteur direct de  $\bar{U}$ , il s'ensuit que  $\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T_i[1], B) = 0$  et donc  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B) = 0$  et  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B') = 0$ . Alors,

l'égalité (3.2) est vérifiée si et seulement si  $m_i(B) = 0$  ou  $m_i(B') = 0$ . Mais, d'après [13]  $B$  et  $B'$  sont sans facteurs communs directs, et donc  $m_i(B) = 0$  ou  $m_i(B') = 0$ , ce qui montre l'hérédité de la proposition.

Maintenant, si  $U \simeq T_i[1]$ , alors  $\delta_T(X_U^T)_i = -1$ . Comme  $U \simeq T_i[1]$  et  $B, B' \in \text{add } \bar{U}$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(B, T_i[1]) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(B', T_i[1])$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T_i[1], U^*) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, U^*) \simeq k$ . De plus,  $m_i(B) = 0 = m_i(B')$  et donc  $h_i(B) = h_i(B') = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \delta_T(X_{U^*}^T)_i &= \max(\delta_T(X_B^T)_i, \delta_T(X_{B'}^T)_i) - \delta_T(X_U^T)_i \\ &= 1 \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, U^*). \end{aligned}$$

Comme  $U^*$  est indécomposable et non-isomorphe à  $U$ , il s'ensuit que  $m_i(U^*) = 0$  et donc

$$\delta_T(X_{U^*}^T)_i = h_i(U^*).$$

Maintenant, si  $U^* \simeq T_i[1]$ , alors il est clair que  $\delta_T(X_{U^*}^T)_i = \delta_T(x_i) = -1 = h_i(U^*)$ , ce qui prouve le théorème.  $\square$

On remarque que les théorèmes 3.3.8 et 3.3.3 sont équivalents. En effet, soit  $x$  une variable d'amas dans  $\mathcal{A}(Q_T)$ . Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q}) & \xleftarrow{\alpha} & \text{Cl}(Q) \\ & \searrow^{X_M^T} & \uparrow^{\Phi_T} \\ & & \text{Cl}(Q_T) \xrightarrow{\delta_T} \mathbb{Z}^{Q_0} \end{array}$$

Il s'ensuit que  $\alpha(\Phi_T(x)) = M$  pour un certain objet indécomposable  $M$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_Q}$  tel que  $X_M^T = x$ . Si  $x \neq x_i$  pour tout  $i \in Q_0$ , il s'ensuit que  $x$  a un  $T$ -dénominateur si et seulement si

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) &= \delta_T(x) \\ &= \delta_T(X_M^T). \end{aligned}$$

D'autre part, si  $x = x_i$ , alors  $M = T_i[1]$  et  $x$  a un  $T$ -dénominateur, ce qui prouve l'équivalence des théorèmes.

### 3.3.3 A propos de la compatibilité sous échange

Le théorème 3.3.10 issu de [12, Théorème 1.5] donne une condition nécessaire sur l'objet amas-basculant  $T$  pour que les variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q_T)$  aient un  $T$ -dénominateur. Dans [12], ce résultat a été montré en utilisant l'approche Buan-Marsh-Reiten. Nous proposons une preuve alternative en utilisant l'approche Caldero-Keller. Néanmoins, nous allons avoir besoin d'une partie des travaux présentés dans [12] à propos des propriétés des objets compatibles sous échange.

**Proposition 3.3.9** ([12]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amasée,  $N$  un objet indécomposable rigide dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(N) \not\simeq k$ . Alors il existe un objet indécomposable rigide  $N^*$  tel que  $(N, N^*)$  est une paire d'échange et  $N$  n'est pas compatible avec cette paire d'échange.*

Nous donnons une preuve du théorème 3.3.10 qui est une preuve alternative à celle du point (b) de [12, Théorème 1.5] :

**Théorème 3.3.10.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée. Soit  $T = \bigoplus_{i=1}^q T_i$  un objet amas-basculant dans  $\mathcal{C}_Q$ . Si toute variable d'amas dans  $\mathcal{A}(Q_T)$  a un  $T$ -dénominateur, alors  $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T_i) \simeq k$  pour tout  $i \in Q_0$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T_i) \not\simeq k$  pour un certain  $T_i$ . Il suit de la proposition 3.3.9 qu'il existe un objet indécomposable rigide  $T_i^*$  tel que  $(T_i, T_i^*)$  est une paire d'échange et  $T_i$  n'est pas compatible avec cette paire d'échange. Soit  $\bar{T}$  un objet rigide tel que  $T_i \oplus \bar{T}$  et  $T_i^* \oplus \bar{T}$  sont des objet amas-basculant, on note

$$\begin{array}{ccccccc} T_i & \longrightarrow & B & \longrightarrow & T_i^* & \longrightarrow & T_i[1] \\ T_i^* & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & T_i & \longrightarrow & T_i^*[1] \end{array}$$

les triangles correspondants à la paire d'échange  $(T_i, T_i^*)$ .

Le corollaire 3.2.4 implique que

$$X_{T_i}^T X_{T_i^*}^T = X_B^T + X_{B'}^T.$$

D'autre part le corollaire 3.3.7 et le lemme 3.3.5 impliquent que

$$\delta_T(X_{T_i}^T) + \delta_T(X_{T_i^*}^T) = \max(\delta_T(X_B^T), \delta_T(X_{B'}^T))$$

Comme  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T_i, T_i[1]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i) \neq 0$ ,  $T_i[1]$  n'est pas un facteur direct de  $T_i \oplus \bar{T}$ . On peut donc supposer que  $\delta_T(X_M^T)_i = \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M)$  pour tout facteur direct  $M$  de  $\bar{T}$  et où  $\delta_T(X_M^T)_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur de dénominateur  $\delta_T(X_M^T)$ . Alors  $B$  et  $B'$  sont dans  $\text{add} \bar{T}$ , et en particulier  $\delta_T(X_B^T)_i = \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B)$  et  $\delta_T(X_{B'}^T)_i = \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B')$ .

Mais  $T_i$  n'est pas compatible avec la paire d'échange  $(T_i, T_i^*)$  et de plus  $\tau T_i \not\simeq T_i$  (sinon  $T_i$  a une auto-extension) et  $\tau T_i \not\simeq T_i^*$  (car  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T_i, T_i^*) \simeq k$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T_i, \tau T_i) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i[1], T_i[1]) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T_i) \neq k$ ). Il s'ensuit que

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i) + \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i^*) \neq \max(\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B), \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B'))$$

Alors,

$$\begin{aligned} \delta_T(X_{T_i^*}^T) &= \max(\delta_T(X_B^T), \delta_T(X_{B'}^T)) - \delta_T(X_{T_i}^T) \\ &= \max(\mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B), \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B')) - \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i) \\ &\neq \mathbf{dim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i^*) \end{aligned}$$

Mais  $T_i^*$  est indécomposable rigide donc  $X_{T_i^*}^T$  est une variable d'amas dans  $\mathcal{C}_Q$  qui n'a pas de  $T$ -dénominateur.  $\square$

**Remarque 3.3.11.** Cette section illustre la dualité qui existe entre les deux approches des algèbres amassées développées par Buan, Marsh, Reiten et Todorov et par Caldero, Chapoton et Keller. Cependant, de manière générale, la première approche considère un corps algébriquement clos quelconque alors que la seconde marche uniquement pour  $k = \mathbb{C}$ . Ainsi, dans [12], les auteurs montrent les théorèmes 3.3.3 et 3.3.10 pour  $k$  un corps algébriquement clos quelconque.

**Remarque 3.3.12.** Buan et Marsh ont récemment complété ces résultats dans le cas où  $Q$  est un carquois affine. Ils ont pu donner dans ce cas une interprétation des vecteurs de dénominateurs des variables d'amas quel que soit l'amas considéré [9].

Deuxième partie

Polynômes de Chebyshev  
généralisés

Les travaux de Caldero, Sherman et Zelevinsky sur les algèbres amassées de rang deux ont montré que des bases de ces algèbres étaient constituées de monômes d'amas et, dans le cas où l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  n'est pas de type fini, d'une famille de variables correspondant aux racines imaginaires de l'algèbre de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  associée à  $B$ . Dans l'étude de la base canonique de Sherman et Zelevinsky [88], ces variables font intervenir une famille de polynômes appelés *polynômes de Chebyshev normalisés de première espèce*. Dans celle de la base semi-canonique de Caldero et Zelevinsky [22], ces variables font intervenir la famille des *polynômes de Chebyshev normalisés de seconde espèce*.

Les polynômes de Chebyshev normalisés de seconde espèce sont apparus dans les formules de multiplication presque scindées dans les tubes homogènes du carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre de Kronecker. Ces polynômes peuvent être caractérisés par la relation de récurrence d'ordre deux

$$C_n(t)^2 = C_{n-1}(t)C_{n+1}(t) + 1 \quad (3.3)$$

ou par la relation algébrique

$$P_n(t + t^{-1}) = \sum_{k=0}^n t^{n-2k}. \quad (3.4)$$

L'approche développée par Caldero et Zelevinsky peut être étendue aux variables généralisées associées aux modules réguliers sur l'algèbre des chemins d'un carquois acyclique  $Q$  arbitraire. Cette généralisation repose sur l'observation du fait que la relation de récurrence (3.3) apparaissant dans les tubes homogènes du carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre des chemins sur le carquois de Kronecker peut être naturellement généralisée à des tubes de rangs  $p > 1$ . En trouvant le cadre adéquat dont relève cette relation, nous avons introduit une généralisation des polynômes de Chebyshev généralisés de seconde espèce dans [38]. Ces polynômes apparaissent comme des objets essentiels dans l'étude des variables généralisées associées aux  $kQ$ -modules réguliers.

Le plan de cette partie est le suivant. Dans la section 4.1, nous introduisons les relations de récurrence d'ordre deux qui permettent de définir les polynômes de Chebyshev généralisés à la section 4.2. Au chapitre 5 nous rappelons des résultats concernant la structure des composantes régulières du carquois AR d'une algèbre de dimension finie héréditaire et montrons que les polynômes de Chebyshev généralisés sont liés à ces composantes. Dans le chapitre 6, nous introduisons une généralisation de l'application Caldero-Chapoton associée aux algèbres amassées de type Dynkin  $\mathbb{A}$  et montrons des propriétés analogues à celles de l'application Caldero-Chapoton. Nous en déduisons des formules de multiplication pour les variables généralisées associées aux modules réguliers sur l'algèbre des chemins d'un carquois affine.

## Chapitre 4

# Relations en diamant et polynômes de Chebyshev généralisés

La formule de multiplication presque scindée pour l'application Caldero-Chapoton a motivé l'étude systématique de certaines suites de fractions rationnelles définies par récurrence dans [38]. Ces suites avaient déjà été étudiées dans le cas particulier du carquois de Kronecker dans [22]. Dans ce chapitre, nous présentons cette étude systématique et montrons notamment la polynomialité des suites considérées en les données initiales. Les polynômes apparaissant sont appelés *polynômes de Chebyshev généralisés* et sont des objets récurrents dans la structure des algèbres amassées associées à des carquois acycliques de représentations infinies.

### 4.1 Les relations en diamants

Dans cette section, nous étudions une famille de fraction rationnelles sur  $\mathbb{Q}$  définies par des relations de récurrence appelées *relations en diamants*. Ces relations en diamants ont été introduites dans [38] à partir de la formule de multiplication presque scindée pour les modules réguliers sur l'algèbre des chemins d'un carquois affine. Nous pouvons cependant les définir de façon tout à fait élémentaire.

On se donne  $\{x_{i,1} : i \in \mathbb{Z}\}$  une famille d'éléments algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on pose  $x_{i,0} = 1$ . On définit alors la famille  $\{x_{i,n} : i \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$  d'éléments de  $\mathbb{Q}(x_{i,1} : i \in \mathbb{Z})$  en posant pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$x_{i,n}x_{i+1,n} = x_{i,n+1}x_{i+1,n-1} + 1 \tag{4.1}$$

La relation (4.1) est appelée *relation en diamant*.

Soit  $\vec{\mathbb{A}}_\infty$  le carquois (infini)

$$\vec{\mathbb{A}}_\infty : \quad 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

dont les sommets sont indexés par  $\mathbb{N}$ . On construit alors le carquois  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$  comme suit :

**Définition 4.1.1.** Soit  $Q$  un carquois. Alors le carquois  $\mathbb{Z}Q$  est le carquois défini par :

$$(\mathbb{Z}Q)_0 = \mathbb{Z} \times Q_0$$

et pour tous  $n, i \in \mathbb{Z} \times Q_0$ , on a une flèche  $(n, i) \longrightarrow (n, j)$  et une flèche  $(n, j) \longrightarrow (n+1, i)$  dans  $\mathbb{Z}Q$  si et seulement si  $i \longrightarrow j$  dans  $Q$ .

Pour tout sous-ensemble  $J \subset \mathbb{Z}$ , on note  $JQ$  le sous-carquois plein de  $\mathbb{Z}Q$  dont les sommets sont indexés par  $J \times Q_0$ .

Les sommets de  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$  sont indexés par  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . A chaque sommet  $(i, n)$ , on associe la variable  $x_{i,n}$ . La situation peut alors se voir sur la figure 4.1, justifiant la terminologie « relations en diamants ».

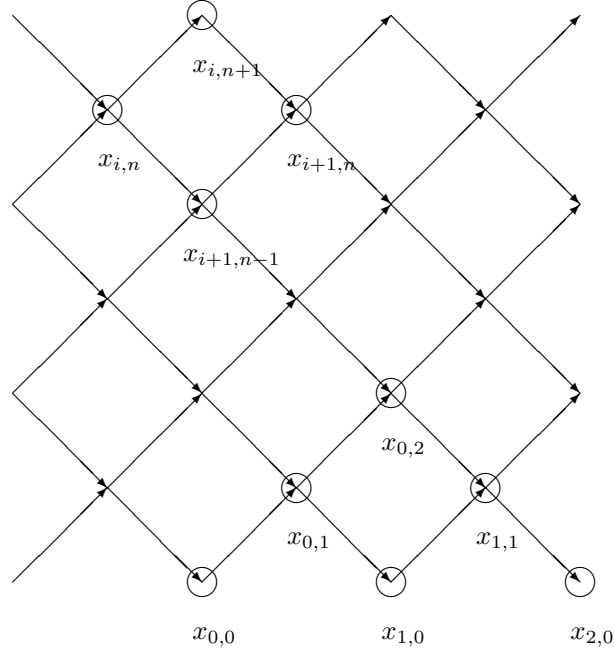
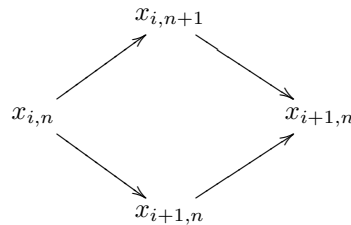


FIG. 4.1 – Relations en diamant

Chaque maille dans  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$  est de la forme



et la relation (4.1) peut donc s'interpréter comme une relation dans cette maille.

Le lemme suivant est obtenu par récurrence immédiate :

**Lemme 4.1.2.** *Pour tout  $n \geq 1$ , il existe une fraction rationnelle  $P_{n,\infty} \in \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

$$x_{i,n} = P_{n,\infty}(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1}).$$

**Exemple 4.1.3.** Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on calcule ainsi

$$x_{i,2} = x_{i,1}x_{i+1,1} - 1$$



$$\begin{aligned}
 x_{i,3} &= \frac{x_{i,2}x_{i+1,2} - 1}{x_{i+1,1}} \\
 &= \frac{(x_{i,1}x_{i+1,1} - 1)(x_{i+1,1}x_{i+2,1} - 1) - 1}{x_{i+1,1}} \\
 &= x_{i,1}x_{i+1,1}x_{i+2,1} - x_{i,1} - x_{i+2,1}
 \end{aligned}$$

En particulier, on remarque que  $x_{i,2} \in \mathbb{Z}[x_{i,1}, x_{i+1,1}]$  et  $x_{i,3} \in \mathbb{Z}[x_{i,1}, x_{i+1,1}, x_{i+2,1}]$ . Ce résultat sera démontré de manière générale au théorème 4.2.4.

## 4.2 Polynômes de Chebyshev généralisés

Dans cette section nous prouvons la polynomialité des  $P_{n,\infty}$  et définissons la notion de polynôme de Chebyshev généralisé.

Soit  $r \geq 1$  un entier, on considère le carquois  $\overrightarrow{\mathbb{A}}_r$  muni de la numérotation suivante :

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \quad \cdots \longleftarrow r - 1$$

et on note  $\Lambda_r = k\overrightarrow{\mathbb{A}}_r$ .

Soit  $i$  un sommet de  $\overrightarrow{\mathbb{A}}_r$ , on note  $S_i$  le module simple associé à  $i$ . Pour tout  $n \in [0, r - i]$ , il existe un unique  $\Lambda_r$ -module indécomposable de longueur  $n$  et de socle  $S_i$ , ce module est noté  $S_i^{(n)}$ . Par convention  $S_i^{(0)}$  désignera le module nul pour tout  $i = 0, \dots, r - 1$ . Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\Lambda_r)$  est alors décrit dans la figure 4.2.

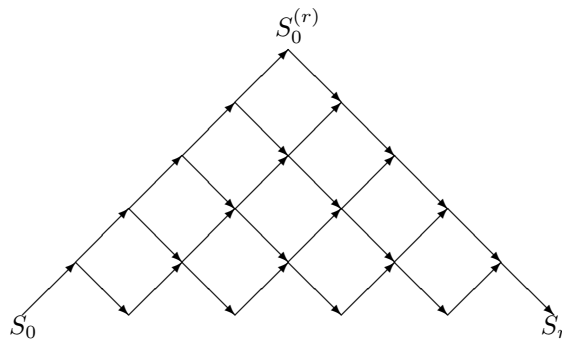


FIG. 4.2 – Carquois d'Auslander-Reiten de  $\Lambda_r$

On note  $\mathcal{C}_r$  la catégorie amassée de  $\overrightarrow{\mathbb{A}}_r$  et  $X_r^{\Lambda_r}$  l'application Caldero-Chapotot associée. Le lemme suivant fait apparaître un analogue de la relation en diamant :

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $r \geq 2$ . Alors pour tout  $i \in [0, r-2]$  et pour tout  $n \in [0, r-i]$ , on a*

$$X_{S_i^{(n)}}^{\Lambda_r} X_{S_{i+1}^{(n)}}^{\Lambda_r} = X_{S_i^{(n+1)}}^{\Lambda_r} X_{S_{i+1}^{(n-1)}}^{\Lambda_r} + 1.$$

*Démonstration.* Soit  $r \geq 2$ . Alors pour tout  $i \in [0, r-2]$  et pour tout  $n \in [0, r-i]$ , on a une suite exacte presque scindée

$$0 \longrightarrow S_i^{(n)} \longrightarrow S_i^{(n+1)} \oplus S_{i+1}^{(n-1)} \longrightarrow S_{i+1}^{(n)} \longrightarrow 0$$

et la formule de multiplication presque scindée donne

$$X_{S_i^{(n)}}^{\Lambda_r} X_{S_{i+1}^{(n)}}^{\Lambda_r} = X_{S_i^{(n+1)}}^{\Lambda_r} X_{S_{i+1}^{(n-1)}}^{\Lambda_r} + 1.$$

□

Nous donnons par ailleurs une autre formule de multiplication qui sera très utile pour établir la polynomialité des  $P_{n,\infty}$  :

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $r \geq 2$ . Alors pour tout  $2 \leq n \leq r$*

$$X_{S_0^{(n-1)}}^{\Lambda_r} X_{S_{n-1}}^{\Lambda_r} = X_{S_0^{(n)}}^{\Lambda_r} + X_{S_0^{(n-2)}}^{\Lambda_r}.$$

*Démonstration.* Pour tout  $2 \leq n \leq r$ , on a un isomorphisme de  $\Lambda_r$ -modules  $S_0^{(n)} \simeq P_{n-1}$ . De plus, on a

$$\text{Ext}_{kQ}^1(P_{n-2}, S_{n-1}) = 0 \text{ et } \text{Ext}_{kQ}^1(S_{n-1}, P_{n-2}) \simeq k$$

et une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow 0.$$

D'autre part,  $\text{Hom}_{kQ}(P_{n-2}, \tau S_{n-1}) = kf$  où  $f$  est la projection de  $P_{n-2}$  sur son top  $S_{n-2} \simeq \tau S_{n-1}$ . Ainsi,  $\ker f = \text{rad}(P_{n-2})$  et  $\text{coker } f = 0$ . Il suit alors du corollaire 3.1.13 que

$$X_{P_{n-2}}^{\Lambda_r} X_{S_{n-1}}^{\Lambda_r} = X_{P_{n-1}}^{\Lambda_r} + X_{\text{rad}(P_{n-2})}^{\Lambda_r}$$

mais  $P_{n-2} \simeq S_0^{(n-1)}$ ,  $P_{n-1} \simeq S_0^{(n)}$  et  $\text{rad}(P_{n-2}) \simeq S_0^{(n-2)}$ , ce qui prouve le lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer une relation de récurrence d'ordre 2 pour les variables  $x_{i,n}$  définies à la section 4.1

**Proposition 4.2.3.** *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$x_{i,n} = x_{i,n-1}x_{i+n-1,1} - x_{i,n-2}$$

*Démonstration.* Soit  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 1$ , on se fixe  $r \in 2\mathbb{Z}$  tel que  $r \geq n$ . D'après le corollaire 3.1.20, la famille  $\{X_{S_i}^{\Lambda_r} : i \in [0, r-1]\}$  est une famille algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ . On considère alors le morphisme de  $\mathbb{Q}$ -algèbres :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{Q}(X_{S_l}^{\Lambda_r} : l \in [0, n-1]) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(x_{l,1} : l \in [i, i+n-1]) \\ X_{S_i}^{\Lambda_r} & \longmapsto & x_{i+i,1} \end{cases}$$

D'après le lemme 4.2.1, on a alors

$$\Phi(X_{S_l^{(k)}}^{\Lambda_r}) = x_{i+l,k}$$

pour tout  $n \in [0, k - i]$ . D'après le lemme 4.2.2, on

$$X_{S_0^{(n-1)}}^{\Lambda_r} X_{S_{n-1}}^{\Lambda_r} = X_{S_0^{(n)}}^{\Lambda_r} + X_{S_0^{(n-2)}}^{\Lambda_r}$$

et donc en appliquant  $\Phi$ , on obtient

$$x_{i,n-1} x_{i+n-1,1} = x_{i,n} + x_{i,n-2}$$

et la proposition est démontrée.  $\square$

### 4.2.1 Polynômes de Chebyshev généralisés de rang infini

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la polynomialité annoncée des applications  $P_{n,\infty}$  définies dans le lemme 4.1.2 :

**Théorème 4.2.4.** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$P_{n,\infty} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n].$$

*Démonstration.* Soit  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 1$ . Alors d'après le lemme 4.1.2 il existe une fraction rationnelle  $P_{n,\infty} \in \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$  telle que  $x_{i,n} = P_{n,\infty}(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1})$ . D'autre part, il suit de la proposition 4.2.3 qu'il existe un polynôme  $Q_n \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  tel que  $x_{i,n} = Q_n(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1})$ . Les  $x_{i,1}$  pour  $i \in \mathbb{Z}$  étant algébriquement indépendants, on a  $P_{n,\infty} = Q_n$  et le théorème est démontré.  $\square$

**Remarque 4.2.5.** On remarquera qu'il suit de la relation de récurrence de la proposition 4.2.3 que  $P_{n,\infty}(t_i, \dots, t_{i+n-1})$  est un polynôme unitaire dont le terme dominant est  $\prod_{k=0}^{n-1} t_{i+k}$ .

**Définition 4.2.6.** Pour tout  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_{n,\infty} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  défini dans le lemme 4.1.2 est appelé *n-ème polynôme de Chebyshev généralisé de rang infini*. Par convention, on pose  $P_{0,\infty} = 1$ .

**Exemple 4.2.7.** Les cinq premiers polynômes Chebyshev généralisés de rang infini sont :

$P_{1,\infty}(t_0)$	$t_0$
$P_{2,\infty}(t_0, t_1)$	$t_0 t_1 - 1$
$P_{3,\infty}(t_0, t_1, t_2)$	$t_0 t_1 t_2 - t_0 - t_2$
$P_{4,\infty}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0 t_1 t_2 t_3 - t_0 t_1 - t_2 t_3 - t_0 t_3 + 1$
$P_{5,\infty}(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$	$t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - t_0 t_1 t_2 - t_0 t_1 t_4 - t_2 t_3 t_4 + t_2 - t_0 t_3 t_4 + t_0 + t_4$

On en déduit alors une nouvelle famille de générateurs de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_r)$ .

**Proposition 4.2.8.** *Soit  $r \geq 1$ ,  $Q$  un carquois de type  $\overrightarrow{\mathbb{A}}_r$ . On note  $X_i^\Lambda$  l'application Caldero-Chapoton sur  $\mathcal{C}_Q$ . Alors  $\mathcal{A}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_r)$  est engendrée en tant que  $\mathbb{Z}$ -algèbre par  $\{X_{S_i}^\Lambda, X_{P_i[1]}^\Lambda : i \in Q_0\}$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.1.4,  $\mathcal{A}(\vec{\mathbb{A}}_r)$  est engendré en tant qu'algèbre par les  $X_M^\Lambda$  pour  $M$  indécomposable. Soit  $M$  un objet indécomposable. Si  $M \simeq P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$ , alors il n'y a rien à montrer. Sinon  $M$  est un  $kQ$ -module indécomposable et il existe alors  $i \in Q_0$  et  $n \geq 1$  tel que  $M \simeq S_i^{(n)}$ . Ainsi,

$$X_M^\Lambda = P_{n,\infty}(X_{S_i}^\Lambda, \dots, X_{S_{i+n-1}}^\Lambda) \in \mathbb{Z}[X_{S_i}^\Lambda : i \in Q_0].$$

□

**Remarque 4.2.9.** De manière générale, si  $Q$  est un carquois de type  $\vec{\mathbb{A}}_r$ , le nombre de variables d'amas dans  $\mathcal{A}(\vec{\mathbb{A}}_r)$  est égal au nombre de racines presque positives de  $\vec{\mathbb{A}}_r$ , c'est à dire à  $\frac{r(r+3)}{2}$ . Ainsi, la définition usuelle de  $\vec{\mathbb{A}}_r$  par toutes les variables d'amas nécessite  $\frac{r(r+3)}{2}$  générateurs. Nous avons obtenu un système de  $2r$  générateurs pour  $\mathcal{A}(\vec{\mathbb{A}}_r)$  et  $2r < \frac{r(r+3)}{2}$  pour tout  $r > 1$ .

**Remarque 4.2.10.** La proposition 4.2.8 est en fait un cas particulier de [5, Corollaire 1.21]. En effet, soit  $Q$  un carquois de type  $\vec{\mathbb{A}}_r$ , on note  $(\mathbf{u}, Q)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(Q)$ . Pour tout  $i \in Q_0$ , on note  $u'_i$  la variable d'amas telle que  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} \setminus \{u_i\} \cup \{u'_i\}$  où  $\mathbf{u}'$  est l'amas de la graine  $\mu_i(\mathbf{u}, Q)$ . Pour tout  $i \in Q_0$ , l'objet

$$T_i = S_i \oplus \bigoplus_{j \neq i} P_j[1]$$

est un objet amas-basculant. Puisque pour tout  $i \in Q_0$ ,  $u_i = X_{P_i[1]}$ , il suit du théorème 3.1.4 que  $X_{S_i}^{\vec{\mathbb{A}}_r} = u'_i$ . Ainsi, la proposition 4.2.8 montre que  $\mathcal{A}(Q)$  est engendrée en tant que  $\mathbb{Z}$ -algèbre par  $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_r$ . On a ainsi retrouvé le premier point de [5, Corollaire 1.21] avec en outre la possibilité de préciser les polynômes intervenant dans les écritures.

On remarquera aussi que les polynômes de Chebyshev et le théorème 1.4.7 permettent de retrouver le second point du corollaire [5, Corollaire 1.21]. On rappelle qu'un monôme en  $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_r$  est dit *standard* s'il ne contient pas de produit de la forme  $u_i u'_i$  pour tout  $i \in Q_0$ . On sait, d'après les théorèmes 3.1.4 et 1.4.7 que les  $X_M^{\vec{\mathbb{A}}_r}$  pour  $M$  rigide dans  $\mathcal{C}_Q$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ . D'autre part, il suit du second point de [5, Corollaire 1.21] que les monômes standards en  $x_1, \dots, x_r, x'_1, \dots, x'_r$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(Q)$ . Montrons alors que ces deux bases coïncident. Soit  $M$  un objet rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ , on écrit alors  $M = P_M[1] \oplus H^0(M)$  où  $P_M$  est un module projectif. Nous verrons alors au lemme 8.1.11 que si  $\dim(H^0(M)(i)) \neq 0$ ,  $P_i[1]$  n'est pas un facteur direct de  $M$ . Soit  $U$  un facteur indécomposable de  $H^0(M)$ , on a  $\dim(U(i)) \neq 0$  si et seulement si  $S_i$  est un facteur de composition de  $U$ . Mais

$$X_U^{\vec{\mathbb{A}}_r} = P_{l(U),\infty}(X_{S_{k_U}}^{\vec{\mathbb{A}}_r}, \dots, X_{S_{k_U+l(U)-1}}^{\vec{\mathbb{A}}_r})$$

où  $l(U)$  est la longueur du module  $U$ . On a alors  $i \in [k_U, k_U + l(U) - 1]$  si et seulement si  $S_i$  est un facteur de composition de  $U$ . Ainsi, si  $M$  est rigide, on écrit  $M = \bigoplus_k M_k$  la décomposition de  $M$  en facteurs indécomposables. On a alors  $X_M = \prod_k X_{M_k}$ . Supposons que  $P_i[1]$  soit un facteur direct de  $M$ , alors pour tout module  $M_k$ , facteur direct indécomposable de  $M$ , on a

$$X_{M_k}^{\vec{\mathbb{A}}_r} = P_{l(M_k),\infty}(X_{S_{k_{M_k}}}^{\vec{\mathbb{A}}_r}, \dots, X_{S_{k_{M_k}+l(M_k)-1}}^{\vec{\mathbb{A}}_r})$$

où  $i \notin [k_{M_k}, k_{M_k} + l(M_k) - 1]$ . Il s'ensuit donc que  $X_{S_i}^{\vec{A}_r} X_{P_i[1]}$  n'apparaît pas dans l'écriture de  $X_M$ . Ainsi,  $X_M$  est un monôme standard en  $x_1, \dots, x_r, x'_1, \dots, x'_r$  et les deux bases coïncident.

### 4.2.2 Polynômes de Chebyshev généralisés de rang $p$

L'idée sous-jacente à cette définition est que les polynômes de Chebyshev généralisés de rang infini vont apparaître dans des relations en diamants dans des carquois de la forme  $\mathbb{Z}\vec{A}_\infty$  alors que les polynômes généralisés de rang  $p \geq 1$  vont apparaître dans les relations en diamants des tubes de la forme  $\mathbb{Z}\vec{A}_\infty/(p)$ . On les construit comme suit.

Soit  $p \geq 1$ , on considère le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres :

$$\pi_p : \begin{cases} \mathbb{Z}[x_{i,1} : i \in \mathbb{Z}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x_{i,1} : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \\ x_{i,1} & \longmapsto & x_{i[p],1} \end{cases}$$

où  $i[p]$  désigne le reste de  $i$  modulo  $p$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe un unique polynôme  $P_{n,p} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_p]$  tel que

$$P_{n,p}(x_{i,1}, \dots, x_{i+p-1,1}) = \pi_p(P_{n,\infty}(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1}))$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . On pose  $P_{0,p} = \pi_p(P_{0,\infty}) = 1$  pour tout  $p \geq 1$ .

**Définition 4.2.11.** Soit  $p \geq 1$  et  $n \geq 0$ . Alors le polynôme  $P_{n,p} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_p]$  est appelé  *$n$ -ème polynôme de Chebyshev généralisé de rang  $p$* .

**Exemple 4.2.12.** Les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang 1 sont

$P_{1,1}(t_0)$	$t_0$
$P_{2,1}(t_0)$	$t_0^2 - 1$
$P_{3,1}(t_0)$	$t_0^3 - 2t_0$
$P_{4,1}(t_0)$	$t_0^4 - 3t_0^2 + 1$
$P_{5,1}(t_0)$	$t_0^5 - 4t_0^3 + 3t_0$

Les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang 2 sont

$P_{1,2}(t_0, t_1)$	$t_0$
$P_{2,2}(t_0, t_1)$	$t_0 t_1 - 1$
$P_{3,2}(t_0, t_1)$	$t_0^2 t_1 - 2t_0$
$P_{4,2}(t_0, t_1)$	$t_0^2 t_1^2 - 3t_0 t_1 + 1$
$P_{5,2}(t_0, t_1)$	$t_0^3 t_1^2 - 4t_0^2 t_1 + 3t_0$

Les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang 3 sont

$P_{1,3}(t_0, t_1, t_2)$	$t_0$
$P_{2,3}(t_0, t_1, t_2)$	$t_0 t_1 - 1$
$P_{3,3}(t_0, t_1, t_2)$	$t_0 t_1 t_2 - t_0 - t_2$
$P_{4,3}(t_0, t_1, t_2)$	$t_2 t_0^2 t_1 - t_0 t_1 - t_2 t_0 - t_0^2 + 1$
$P_{5,3}(t_0, t_1, t_2)$	$t_0^2 t_1^2 t_2 - t_0^2 t_1 - t_0 t_1^2 - 2t_0 t_1 t_2 + t_0 + t_1 + t_2$

Les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang 4 sont

$P_{1,4}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0$
$P_{2,4}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0 t_1 - 1$
$P_{3,4}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0 t_1 t_2 - t_0 - t_2$
$P_{4,4}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0 t_1 t_2 t_3 - t_0 t_1 - t_2 t_3 - t_0 t_3 + 1$
$P_{5,4}(t_0, t_1, t_2, t_3)$	$t_0^2 t_1 t_2 t_3 - t_0 t_1 t_2 - t_0^2 t_1 - t_0 t_2 t_3 + t_2 - t_0^2 t_3 + 2t_0$

Les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang  $p \geq 5$  coïncident avec les cinq premiers polynômes de Chebyshev généralisés de rang infini.

Comme pour les polynômes de Chebyshev généralisés de rang infini, on peut faire apparaître les polynômes de Chebyshev généralisés de rang  $p$  à partir des relations en diamant.

**Lemme 4.2.13.** Soit  $\{v_{i,n} : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n \geq 1\}$  une famille d'indéterminées sur  $\mathbb{Q}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$v_{i,n} v_{i+1,n} = v_{i,n+1} v_{i+1,n-1} + 1$$

où  $v_{i,0} = 1$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$v_{i,n} = P_{n,p}(v_{i,1}, \dots, v_{i,p}).$$

### 4.2.3 Polynômes de Chebyshev généralisés et normalisés

Nous allons maintenant justifier la terminologie « polynôme de Chebyshev généralisé » en montrant dans quelle mesure ces polynômes sont une généralisation des polynômes de Chebyshev usuels.

**Polynômes de Chebyshev normalisés de première espèce** Les polynômes de Chebyshev normalisés de première espèce sont apparus dans [88] lors de l'étude de la base canonique pour certaines algèbres amassées de rang 2.

**Définition 4.2.14.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev normalisé de première espèce est l'unique polynôme  $F_n \in \mathbb{Z}[t]$  tel que

$$F_n(t + t^{-1}) = t^n + t^{-n}.$$

Par convention, on pose  $F_0 = 1$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,  $F_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  dans  $\mathbb{Z}[t]$ .

**Polynômes de Chebyshev normalisés de seconde espèce** Les polynômes de Chebyshev normalisés de seconde espèce sont apparus dans [22] pour étudier la base semi-canonique de l'algèbre amassée associée au carquois de Kronecker. Initialement, ces polynômes sont issus des formules de multiplications presque scindées dans les tubes homogènes. C'est en ce sens que les polynômes de Chebyshev généralisés vont généraliser les polynômes de Chebyshev normalisés de seconde espèce.

**Définition 4.2.15.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev normalisé de seconde espèce est l'unique polynôme  $C_n \in \mathbb{Z}[t]$  tel que

$$C_n(t + t^{-1}) = \sum_{k=0}^n t^{n-2k}$$

Par convention, on pose  $C_0 = 1$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,  $C_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  dans  $\mathbb{Z}[t]$ .

Pour tout  $n \geq 2$ , les polynômes de seconde espèce sont reliés aux polynômes de première espèce par la relation suivante :

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} F_{n-2k}(t)$$

$$F_n(t) = C_n(t) - C_{n-2}(t)$$

On sait que les polynômes de seconde espèce sont caractérisés par la relation en diamant suivante :

**Lemme 4.2.16.** *Soit  $(P_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[t]$ , une famille de polynômes tels que  $P_0 = 1$ ,  $P_1(t) = t$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$P_n(t)^2 = P_{n-1}(t)P_{n+1}(t) + 1.$$

Alors  $P_n(t) = C_n(t)$  pour tout  $n \geq 0$ .

La terminologie « polynômes de Chebyshev généralisés » introduite se justifie donc par :

**Lemme 4.2.17.** *Pour tout  $n \geq 1$ , le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev généralisé de rang 1 est égal au  $n$ -ème polynôme de Chebyshev normalisé de seconde espèce.*

*Démonstration.* Soit  $t$  une indéterminée sur  $\mathbb{Q}$ , d'après le lemme 4.2.13 au rang  $p = 1$ , on a la relation

$$P_{n,1}(t)^2 = P_{n+1,1}(t)P_{n-1,1}(t) + 1$$

et donc d'après le lemme 4.2.16, on a  $P_{n,1} = C_n$ . □

## Chapitre 5

# Caractères et composantes régulières d'un carquois d'Auslander Reiten



Dans ce chapitre, nous étudions la structure des composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten d'une  $k$ -algèbre de dimension finie héréditaire. Nous introduisons la notion de caractère sur une catégorie de modules qui vient généraliser l'application induite par l'application Caldero-Chapoton sur un carquois de modules sur une algèbre de type  $\mathbb{A}$  linéairement orienté. Nous montrons que les polynômes de Chebyshev généralisés apparaissent alors naturellement pour les valeurs de ces caractères sur les composantes régulières d'un carquois d'Auslander-Reiten d'une  $k$ -algèbre de dimension finie héréditaire.

## 5.1 Carquois à translation

La structure des composantes régulières du carquois AR d'une algèbre héréditaire est parfaitement connue (voir [3] par exemple). Nous rappelons les résultats essentiels à ce propos ainsi que la terminologie utile par la suite.

Un carquois non nécessairement fini  $\Gamma$  est dit *localement fini* si pour tout sommet  $i \in \Gamma_0$ , le nombre de flèches  $\alpha \in \Gamma_1$  telles que  $s(\alpha) = i$  où  $t(\alpha) = i$  est fini.

En reprenant la définition de [78], un *carquois à translation stable* est un couple  $(\Gamma, \tau)$  où  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  est un carquois localement fini sans 1-cycles et  $\tau : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$  est une bijection appelée *translation* telle que pour tous  $x, y \in \Gamma_0$ , il existe une bijection de l'ensemble des flèches  $y \rightarrow x$  vers l'ensemble des flèches  $\tau x \rightarrow y$ . Si la translation est implicitement définie, on dit simplement que  $\Gamma$  est un carquois à translation stable.

Etant donné un carquois à translation stable  $(\Gamma, \tau)$ , une *polarisation* de  $\Gamma$  est une bijection  $\sigma : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$  telle que  $\sigma(\alpha) : \tau x \rightarrow y$  pour tout  $\alpha : y \rightarrow x$ . Si  $Q$  est sans flèches multiples, alors il existe une unique polarisation de  $\Gamma$ .

**Exemple 5.1.1.** Soit

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ (i, n) & \longmapsto & (i - 1, n) \end{cases}$$

Alors  $(\overrightarrow{\mathbb{Z}\mathbb{A}}_\infty, \tau)$  est un carquois à translation.

**Définition 5.1.2.** Soit  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  un carquois localement fini et  $G$  un groupe, on dit que  $G$  agit par *automorphismes* sur  $\Gamma$  si  $G$  agit sur  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  de sorte que pour toute flèche  $\alpha : x \rightarrow y \in \Gamma_1$ , on ait  $g\alpha : gx \rightarrow gy$ . En particulier, on a toujours un isomorphisme de carquois  $g\Gamma \simeq \Gamma$ .

Si  $(\Gamma, \tau)$  est un carquois à translation stable et que  $G$  agit par automorphismes sur  $\Gamma$ , alors  $G$  est appelé *automorphisme de carquois à translation stables* si l'action de  $G$  commute à la translation.

On dit que  $G$  agit par *automorphismes admissibles* sur un carquois localement fini  $\Gamma$  si il n'y a pas de flèches entre deux sommets  $\Gamma_0$  d'une même  $G$ -orbite.

**Définition 5.1.3.** Soit  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  un carquois localement fini et  $G$  un groupe d'automorphismes admissibles de  $\Gamma$  tel que l'action induite sur  $\Gamma_0$  est libre. Le *carquois quotient*  $\Gamma/G$  est le carquois localement fini dont les sommets sont indexés par les  $G$ -orbites de sommets dans  $\Gamma_0$ . Si  $\tilde{x}, \tilde{y}$  sont deux sommets dans

$\Gamma/G$  correspondant aux orbites de sommets  $x$  et  $y$  de  $\Gamma_0$ , alors l'ensemble des flèches  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$  dans  $\Gamma/G$  est en bijection avec l'ensemble des flèches  $x \rightarrow gy$  dans  $\Gamma_1$  où  $g$  parcourt  $G$ .

**Lemme 5.1.4.** *Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation et  $G$  un groupe agissant sur  $\Gamma$  par automorphismes admissibles de carquois à translation stables. Alors la translation de  $\Gamma$  induit sur  $\Gamma/G$  une structure de carquois à translation.*

*Démonstration.* Montrons que  $(\Gamma/G, \tau)$  est un carquois à translation pour la translation définie par  $\tau\tilde{x} = \widetilde{\tau x}$  pour toute  $G$ -orbite  $\tilde{x}$  d'un sommet  $x \in \Gamma_0$ .

Montrons d'abord que  $\Gamma/G$  est un carquois localement fini. Soit  $\tilde{x} \in (\Gamma/G)_0$  et soit  $x$  un relèvement de  $\tilde{x}$  dans  $\Gamma_0$ . Soit  $\tilde{y} \in (\Gamma/G)_0$  tel que  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$  dans  $\Gamma/G$ . Par définition de  $\Gamma/G$ , il existe alors un relèvement  $y$  de  $\tilde{y}$  dans  $\Gamma_0$  et un  $g \in G$  tel que  $x \rightarrow gy$ . Le nombre de sommets  $z \in \Gamma_0$  tels que  $x \rightarrow z$  dans  $\Gamma$  étant fini, il existe uniquement un nombre fini de  $\tilde{y}$  dans  $(\Gamma/G)_0$  tels que  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$ . Soit maintenant un sommet  $\tilde{y} \in (\Gamma/G)_0$  tel que  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$  dans  $\Gamma/G$ . Alors le nombre de flèches  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$  dans  $\Gamma/G$  est égal au nombre de flèches  $x \rightarrow gy$  où  $y$  est un relèvement fixé de  $\tilde{y}$  et où  $g$  parcourt  $G$ . Le carquois  $\Gamma$  étant localement fini, ce nombre est fini. Ainsi, pour tout  $\tilde{x} \in (\Gamma/G)_0$ , le nombre de flèches  $\alpha \in (\Gamma/G)_1$  telles que  $s(\alpha) = \tilde{x}$  est fini. On montre de même que le nombre de flèches  $\alpha \in (\Gamma/G)_1$  telles que  $t(\alpha) = \tilde{x}$  est fini et donc que  $\Gamma/G$  est localement fini.

Soit  $\tilde{x}$  un sommet de  $\Gamma/G$ , comme  $G$  agit par automorphismes admissibles, il n'y a pas de flèches de  $x$  vers  $gx$  pour tout  $g \in G$  et donc il n'y a pas de flèches  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}$  dans  $\Gamma/G$ . Ainsi,  $\Gamma/G$  ne contient pas de 1-cycle.

Soit maintenant une flèche  $\tilde{y} \rightarrow \tilde{x}$  dans  $\Gamma/G$ , il lui correspond une unique flèche  $y \rightarrow gx$  pour un certain  $g \in G$  et donc une unique flèche  $\tau(gx) \rightarrow y$ . Comme  $G$  agit par automorphismes de carquois à translations, on a  $\tau(gx) = g\tau x$  et donc il lui correspond une unique flèche  $\tau x \rightarrow g^{-1}y$  et ainsi une unique flèche  $\tau\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$ .  $\square$

**La catégorie de mailles** Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation, la *catégorie des chemins*  $\mathcal{P}(\Gamma, \tau)$  de  $\Gamma$  est la catégorie dont les objets sont les sommets de  $\Gamma$ . Pour tous  $x, y \in \Gamma_0$ , les morphismes de  $x$  vers  $y$  dans  $\mathcal{P}(\Gamma, \tau)$  sont les éléments du  $k$ -espace vectoriel dont une base est donnée par les chemins de  $x$  vers  $y$  dans  $\Gamma$ .

L'*idéal des mailles* de la catégorie de chemins de  $(\Gamma, \tau)$  est l'idéal engendré par les *relations de mailles*

$$m_x = \sum_{\alpha: y \rightarrow x} \sigma(\alpha)\alpha$$

pour tout  $x \in \Gamma_0$ .

**Définition 5.1.5.** La *catégorie de mailles*  $\mathcal{M}(\Gamma, \tau)$  est par définition la catégorie des chemins de  $(\Gamma, \tau)$  quotientée par l'idéal des mailles.

Une catégorie  $k$ -linéaire  $\mathcal{K}$  est dite *standard* si son carquois d'Auslander-Reiten est un carquois à translation et si elle est isomorphe à la catégorie de mailles sur son carquois d'Auslander-Reiten.

## 5.2 Structure des tubes

### 5.2.1 Les tubes comme carquois à translation

Considérons le carquois à translation  $(\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty, \tau)$  de l'exemple 5.1.1. Alors  $\tau$  agit sur  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$  par automorphisme de carquois à translation. Soit  $p \geq 0$  un entier. Alors le sous-groupe  $\langle \tau^p \rangle$  du groupe cyclique  $\langle \tau \rangle$  agit par automorphisme de carquois à translation. On définit alors le carquois  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty / \langle \tau^p \rangle$  comme le carquois quotient  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty / \langle \tau^p \rangle$  qui est naturellement muni d'une structure de carquois à translation d'après le lemme 5.1.4.

**Définition 5.2.1.** Soit  $p \geq 1$  un entier. Un carquois à translation stable  $\mathcal{T}$  isomorphe à  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty / \langle \tau^p \rangle$  est appelé un *tube*. L'entier  $p$  est appelé le *rang* de  $\mathcal{T}$  et on note  $p = \text{rg}(\mathcal{T})$ .

Un tube de rang 1 est dit *homogène*. Un tube de rang  $p > 1$  est dit *exceptionnel*.

Les tubes et les composantes  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$  sont les seules structures possibles pour les composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten d'une  $k$ -algèbre de dimension finie héréditaire. Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème 5.2.2** ([3]). *Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie de représentation infinie, et soit  $\mathcal{R}$  une composante régulière de  $\Gamma(\mathcal{R}(\Lambda))$ . Alors en tant que carquois à translation  $\mathcal{R}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty / \langle \tau^p \rangle$  pour un certain entier  $p \geq 0$ .*

On remarquera que dans le cas où  $p = 0$ , le carquois obtenu est simplement  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$ . Nous verrons en outre que pour tout  $p \geq 1$ , il existe une algèbre héréditaire de dimension finie  $\Lambda$  telle que  $\Gamma(\Lambda)$  contient un tube de rang  $p$ .

### 5.2.2 Les tubes comme catégories quotients

Soit donc  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie. Soit  $\mathcal{T}$  un tube de rang  $p \geq 1$  dans  $\Gamma(\Lambda)$ . On note  $\text{add}\mathcal{T}$  la sous-catégorie pleine de  $\Lambda$ -mod engendrée par les objets dans  $\mathcal{T}$ . Par abus de terminologie, une catégorie de la forme  $\text{add}\mathcal{T}$  pour  $\mathcal{T}$  un tube est aussi appelée *tube*. On sait que si  $\Gamma(\Lambda)$  contient un tube, alors  $\Lambda$  est une algèbre de représentation affine et  $\text{add}\mathcal{T}$  est une catégorie standard (voir [79, 80, 89] par exemple). On a ainsi une équivalence de catégories

$$\text{add}\mathcal{T} \simeq \mathcal{M}\left(\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty / \langle \tau^p \rangle\right).$$

Nous voulons maintenant donner une autre description des tubes.

Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation stable sans flèches multiples et  $G$  un groupe agissant sur  $\Gamma$  par automorphismes admissibles de carquois à translation. Alors l'action de  $G$  sur  $\Gamma$  induit naturellement une action de  $G$  sur la catégorie des chemins  $\mathcal{P}(\Gamma, \tau)$ . De plus, comme  $\Gamma$  n'a pas d'arêtes multiples, il existe une unique polarisation  $\sigma$ . Ainsi, puisque  $G$  commute avec la translation, pour tout  $x \in \Gamma_0$ , on a

$$gm_x = g. \sum_{\alpha: y \rightarrow x} \sigma(\alpha)\alpha = \sum_{\alpha: y \rightarrow x} \sigma(g\alpha)g\alpha = \sum_{\alpha: gy \rightarrow gx} \sigma(\alpha)\alpha = m_{gx}.$$

Il s'ensuit que  $G$  conserve l'idéal des mailles et induit donc une action par automorphismes sur la catégorie de mailles  $\mathcal{M}(\Gamma, \tau)$ .

**Proposition 5.2.3.** *Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation stable sans flèches multiples et  $G$  un groupe agissant par automorphismes admissibles de carquois à translation stables sur  $\Gamma$ . Alors*

$$\mathcal{M}(\Gamma, \tau)/G \simeq \mathcal{M}(\Gamma/G, \tau)$$

*Démonstration.* On définit le foncteur  $\Phi : \mathcal{M}(\Gamma, \tau)/G \rightarrow \mathcal{M}(\Gamma/G, \tau)$  comme suit. Par définition de la catégorie d'orbites et de la catégorie de mailles, un objet dans  $\mathcal{M}(\Gamma, \tau)/G$  est un sommet dans  $\Gamma$ . Soit donc  $x$  un tel objet, on lui associe alors  $\Phi(x) = \tilde{x}$  la  $G$ -orbite de  $x$ , par définition du carquois quotient, c'est un objet dans  $\mathcal{M}(\Gamma/G, \tau)$ . Une base pour les morphismes  $x \rightarrow y$  dans  $\mathcal{M}(\Gamma, \tau)/G$  est donnée par les chemins  $x \rightarrow gy$  pour  $g \in G$ . Ainsi,  $\Phi$  est l'identification naturelle

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{M}(\Gamma, \tau)/G}(x, y) &= \bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_{\mathcal{M}(\Gamma, \tau)}(x, gy) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}(\Gamma/G, \tau)}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

et alors  $\Phi$  est une équivalence de catégories.  $\square$

**Corollaire 5.2.4.** *Soit  $\mathcal{T}$  un tube de rang  $p > 0$ . Alors*

$$\text{add}\mathcal{T} \simeq \mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty, \tau)/(\tau^p)$$

*Démonstration.* On considère le groupe cyclique  $G$  engendré par  $\tau^p$  sur  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$ . Par définition,  $G$  agit par translation sur  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$  et l'action induite par  $\tau$  sur  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty, \tau)$  est aussi la translation. Alors, d'après la proposition 5.2.3, on a

$$\mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty/(p), \tau) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty, \tau)/(\tau^p)$$

mais par définition  $\text{add}\mathcal{T} \simeq \mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty/(p), \tau)$  ce qui prouve le corollaire.  $\square$

### 5.3 Structures des composantes régulières en général

Nous revenons maintenant à l'étude des composantes régulières en général présentée dans [3, 79]. Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre de dimension finie héréditaire de représentation infinie. Comme dans la section 2.1, on note  $\mathcal{R}(\Lambda)$  la sous-catégorie pleine des  $\Lambda$ -modules réguliers et  $\Gamma(\mathcal{R}(\Lambda))$  son carquois d'Auslander-Reiten. Par définition, une *composante régulière* de  $\Gamma(\Lambda)$  est une composante connexe de  $\Gamma(\mathcal{R}(\Lambda))$ . Soit  $\mathcal{R}$  un composante régulière de  $\Gamma(\Lambda)$ . Un  $\Lambda$ -module dans  $\mathcal{R}$  est dit *quasi-simple* si il n'existe pas de sous-module propre  $N \subset M$  dans  $\mathcal{R}$ . Soit  $M$  un objet dans  $\mathcal{R}$ . Alors il existe une suite

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M$$

appelée *suite de quasi-composition* de  $M$  telle que  $M_i/M_{i-1}$  est un module quasi-simple de  $\mathcal{R}$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ . L'entier  $r$  est uniquement défini et

est appelé *quasi-longueur* de  $M$ ,  $M_0$  est appelé *quasi-socle* de  $M$  et  $M_{r-1}$  est appelé *quasi-radical* de  $M$ .

Si  $\mathcal{R}$  contient un nombre fini  $p$  de modules quasi-simples, alors  $\mathcal{R}$  est un tube de rang  $p$  et  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre de représentation affine. Sinon,  $\mathcal{R}$  est une composante de la forme  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$  et  $\Lambda$  est une algèbre de représentation sauvage. D'après le théorème 5.2.2, on a  $\mathcal{R} \simeq \mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty/(p)$  pour un certain entier  $p \geq 0$ . On note alors  $\{R_i : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  les quasi-simples de  $\mathcal{R}$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i = R_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $R_i^{(n)}$  l'unique objet indécomposable de  $\mathcal{R}$  de quasi-socle  $R_i$  et de quasi-longueur  $n$ . En particulier, on a  $R_i^{(1)} = R_i$ . Par convention, on pose  $R_i^{(0)} = 0$ . Le carquois d'Auslander-Reiten est alors décrit dans la figure 5.1.

En particulier, pour tout entier  $n \geq 1$  et  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow R_i^{(n)} \longrightarrow R_i^{(n+1)} \oplus R_{i+1}^{(n-1)} \longrightarrow R_{i+1}^{(n)} \longrightarrow 0.$$

## 5.4 Caractères et polynômes de Chebyshev généralisés

Dans cette section nous introduisons la notion de *caractère sur une catégorie abélienne*. Cette notion sera a priori distincte de la notion de *caractère cluster* introduite à la section 3.2.

**Définition 5.4.1.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Un *caractère sur  $\mathcal{A}$*  est la donnée d'une application  $X_?$  définie sur les objets de  $\mathcal{A}$  et à valeurs dans un anneau unitaire  $A$  tel que :

1. si  $M \simeq N$ , alors  $X_M = X_N$  ;
2. pour tous objets  $M, N$  de  $\mathcal{A}$ , on a

$$X_{M \oplus N} = X_M X_N ;$$

3. pour toute suite presque scindée  $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{A}$ , on a

$$X_M X_N = X_B + 1.$$

**Exemple 5.4.2.** Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie, on sait qu'il existe un carquois acyclique  $Q$  tel que  $kQ$ -mod est équivalente à  $\Lambda$ -mod (voir [1] par exemple). En identifiant ces deux catégories, l'application induite sur la catégorie de modules  $kQ$ -mod par l'application Caldero-Chapoton  $X_?^Q$  est un caractère sur  $\Lambda$ -mod en vertu de la formule de multiplication presque-scindée (proposition 3.1.10).

Nous montrons maintenant que les polynômes de Chebyshev généralisés apparaissent naturellement dans les composantes régulières des carquois d'Auslander-Reiten d'algèbres héréditaires de dimension finie.

**Théorème 5.4.3.** Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie et de représentation infinie, soit  $X_?$  un caractère sur  $\Lambda$ -mod à valeurs dans un anneau unitaire  $A$ . Soit  $\mathcal{R} \simeq \mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty/(p)$  une composante régulière de  $\Gamma(\Lambda)$  pour un

certain entier  $p \geq 0$ . Soient  $\{R_i, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  les quasi-simples de  $\mathcal{R}$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$X_{R_i^{(n)}} = P_{n,\infty}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+n-1}}).$$

De plus, si  $p > 0$ , alors

$$X_{R_i^{(n)}} = P_{n,p}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+p-1}}).$$

*Démonstration.* On considère le morphisme surjectif d'algèbres

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z}[x_{i,1}, i \in \mathbb{Z}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X_{R_i}, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \\ x_{i,1} & \longmapsto & X_{R_i} \end{cases}$$

Puisque pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow R_i^{(n)} \longrightarrow R_i^{(n+1)} \oplus R_{i+1}^{(n-1)} \longrightarrow R_{i+1}^{(n)} \longrightarrow 0$$

et que  $X_{\mathcal{?}}$  est un caractère, on a

$$X_{R_i^{(n)}} X_{R_{i+1}^{(n)}} = X_{R_i^{(n+1)}} X_{R_{i+1}^{(n-1)}} + 1.$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\phi(x_{i,n}) = X_{R_i}$$

mais

$$x_{i,n} = P_{n,\infty}(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1})$$

donc finalement

$$\begin{aligned} \phi(x_{i,n}) &= \phi(P_{n,\infty}(x_{i,1}, \dots, x_{i+n-1,1})) \\ &= P_{n,\infty}(\phi(x_{i,1}), \dots, \phi(x_{i+n-1,1})) \\ &= P_{n,\infty}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+n-1}}) \end{aligned}$$

Si  $p > 0$ , alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  on a  $R_{i+p} \simeq R_i$  et donc  $X_{R_{i+p}} = X_{R_i}$ . Il s'ensuit que

$$P_{n,\infty}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+n-1}}) = P_{n,p}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+p-1}}).$$

□

**Exemple 5.4.4.** Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie telle que  $\Gamma(\Lambda)$  contienne un tube homogène  $\mathcal{T}$ . Soit  $M$  l'unique quasi-simple de  $\mathcal{T}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on note toujours  $M^{(n)}$  l'unique indécomposable dans  $\mathcal{T}$  de quasi-socle  $M$  et de quasi-longueur  $n$ . Pour tout caractère  $X_{\mathcal{?}}$  sur  $\Lambda\text{-mod}$ , on a alors

$$X_{M^{(n)}} = P_{n,1}(X_M) = C_n(X_M).$$

Soit  $Q$  un carquois acyclique tel que  $kQ\text{-mod}$  est équivalente à  $\Lambda\text{-mod}$ . Considérons alors  $X_{\mathcal{?}}^Q$  l'application Caldero-Chapoton sur la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  associée à  $Q$ . On a alors

$$X_{M^{(n)}}^Q = C_n(X_M^Q)$$

comme cela a été remarqué dans [22] pour le cas du carquois de Kronecker.

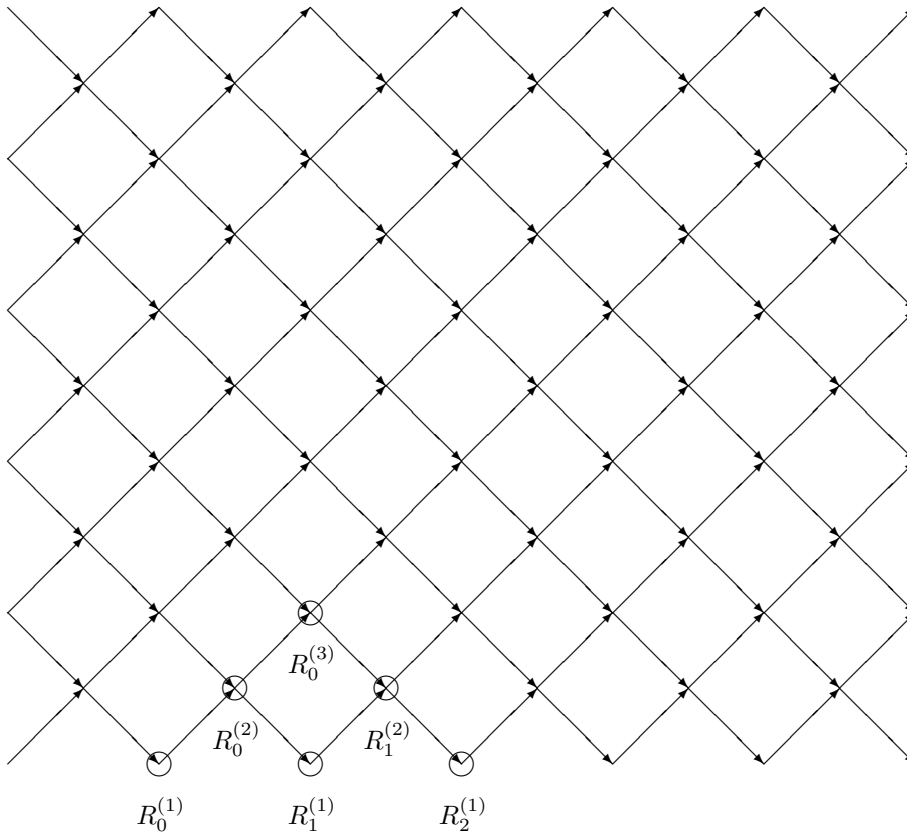


FIG. 5.1 – Une composante régulière du carquois AR d’une algèbre héréditaire

## Chapitre 6

# Caractères et formules de multiplication



Dans ce chapitre, nous utilisons les méthodes introduites dans [16] pour définir un caractère  $X_?^{\mathbb{A}_\infty}$  sur la catégorie  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  des représentations de dimension finie du carquois infini de type  $\mathbb{A}$  linéairement orienté. Nous montrons que ce caractère coïncide localement avec l'application induite par l'application Caldero-Chapoton sur les catégories de représentations de dimensions finies d'un carquois de type  $\vec{\mathbb{A}}_r$ . Nous en déduisons des formules de multiplication pour le caractère sur  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . Dans un second temps, nous rappelons la description des composantes régulières du carquois AR d'une algèbre héréditaire pour pouvoir appliquer les résultats obtenus sur le caractère  $X_?^{\mathbb{A}_\infty}$  à l'application induite par l'application Caldero-Chapoton  $X_?^Q$  sur les composantes régulières de  $\Gamma(kQ)$  où  $Q$  est un carquois acyclique. En particulier nous démontrons des formules de multiplication pour l'application Caldero-Chapoton. Ces travaux sont adaptés de [38].

## 6.1 Un caractère sur la catégorie $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$

Nous commençons par décrire brièvement la catégorie  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  des représentations de dimension finie du carquois  $\mathbb{A}_\infty$  afin de pouvoir définir un caractère sur la catégorie  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

### 6.1.1 La catégorie de représentations de $\mathbb{A}_\infty$

Considérons le carquois infini  $\mathbb{A}_\infty$  dont l'ensemble des sommets est  $\mathbb{Z}$  et pour tous  $i, j$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a une flèche  $i \rightarrow j$  si et seulement si  $j = i - 1$ .

$$\mathbb{A}_\infty : \quad \dots 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -1 \longrightarrow -2 \longrightarrow \dots$$

On considère alors la catégorie  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  des représentations de dimension finie de  $\mathbb{A}_\infty$ . Etant donnée une représentation  $M$  de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on appelle *support de  $M$*  et on note  $\text{supp}(M)$  l'ensemble des sommets  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $M(i) \neq 0$ . Si  $J \subset \mathbb{Z}$ , on note

$$\text{rep}_J(\mathbb{A}_\infty) = \left\{ M \in \text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_\infty) : \text{supp}(M) \subset J \right\}.$$

Pour tout intervalle fini  $J$  de  $\mathbb{Z}$ , on note  $\vec{\mathbb{A}}_J$  le carquois isomorphe à  $\vec{\mathbb{A}}_{|J|}$  dont les sommets sont numérotés de  $\max(J)$  à  $\max(J) - |J| + 1$ , c'est à dire

$$\vec{\mathbb{A}}_J : \quad \max(J) \longrightarrow \max(J) - 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \max(J) - |J| + 1$$

Alors l'application  $F_J : \text{rep}_J(\mathbb{A}_\infty) \rightarrow \text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_J)$  définie par

$$\begin{aligned} (F_J M)(i) &\simeq M(i) \\ (F_J M)(i \rightarrow j) &= M(i \rightarrow j) \end{aligned}$$

pour tous  $i, j \in J$  est fonctorielle et induit une équivalence de catégories

$$F_J : \text{rep}_J(\mathbb{A}_\infty) \xrightarrow{\sim} \text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_J).$$

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on pose  $S_i$  la représentation définie par

$$\begin{cases} S_i(i) \simeq k \\ S_i(j) = 0 & \text{si } j \neq i \\ S_i(\alpha) = 0 & \text{pour toute flèche } \alpha. \end{cases}$$

Alors  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est un ensemble complet de représentants des isoclasses de représentations simples de  $\mathbb{A}_\infty$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on note  $S_i^{(n)}$  la représentation de  $\mathbb{A}_\infty$  définie par

$$\begin{cases} S_i(j) \simeq k & \text{si } i - n + 1 \leq j \leq i \\ S_i(j) = 0 & \text{sinon} \\ S_i(j \rightarrow l) = \text{id}_k & \text{si } i - n + 2 \leq j \leq i \text{ et } l = j - 1 \\ S_i(j \rightarrow l) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier,  $S_i^{(1)} = S_i$ . Alors l'ensemble  $\{S_i^{(n)}, i \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$  est un ensemble complet de représentants des isoclasses de représentations indécomposables. Par convention on pose  $S_i^{(0)} = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a une suite infinie de monomorphismes irréductibles

$$S_i \longrightarrow S_i^{(2)} \longrightarrow S_i^{(3)} \longrightarrow \dots$$

et on peut de plus donner une description complète des suites presque scindées dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  :

**Lemme 6.1.1.** *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , on a une suite presque scindée*

$$0 \longrightarrow S_i^{(n)} \longrightarrow S_i^{(n+1)} \oplus S_{i+1}^{(n-1)} \longrightarrow S_{i+1}^{(n)} \longrightarrow 0$$

dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

En particulier, on peut définir la translation comme le foncteur additif défini par

$$\tau S_i^{(n)} \simeq S_{i-1}^{(n)}$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ .

Le carquois d'Auslander-Reiten de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  est décrit à la figure 6.1. Il est isomorphe à  $\mathbb{Z}\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$ .

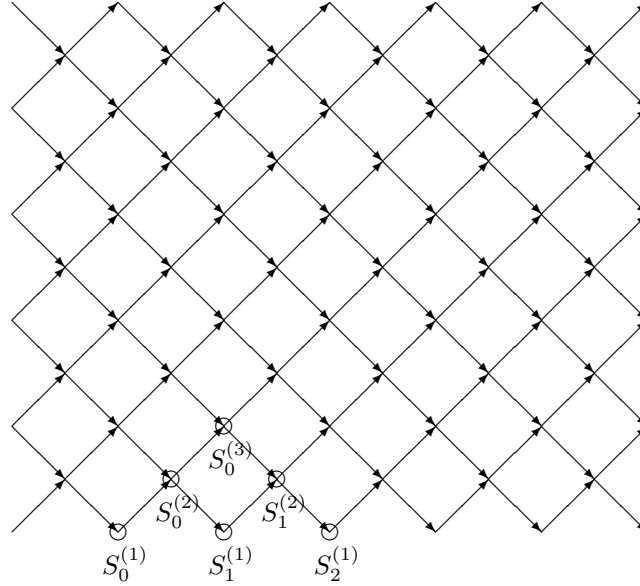


FIG. 6.1 – Carquois d’Auslander-Reiten de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$

Puisque  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  est localement équivalente à des catégories de la forme  $\text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_J)$ , il s’ensuit que  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  est une catégorie standard et donc

$$\text{rep}(\mathbb{A}_\infty) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{Z} \vec{\mathbb{A}}_\infty).$$

Soit  $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  l’ensemble des suites presque nulles d’entiers naturels indexées sur  $\mathbb{Z}$ . Etant donnée une représentation  $M \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on définit son *vecteur de dimension* par

$$\mathbf{dim} M = (\dim M(i))_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}.$$

On note  $K_0(\mathbb{A}_\infty)$  le groupe de Grothendieck de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , alors  $\mathbf{dim}$  induit un isomorphisme de groupes abéliens  $K_0(\mathbb{A}_\infty) \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$  où  $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$  est l’ensemble des suites presque nulles d’entiers relatifs indexées sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $i \in \mathbb{Z}$ , on note  $\alpha_i$  la suite  $(\delta_{ij})_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ . Alors on a

$$\mathbf{dim} S_i = \alpha_i.$$

Etant donné un vecteur de dimension  $\mathbf{e} = (e_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ , on appelle *support* de  $\mathbf{e}$  et on note  $\text{supp}(\mathbf{e})$  l’ensemble des  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $e_i \neq 0$ . On note

$$\text{rep}(\mathbb{A}_\infty, \mathbf{e}) = \{M \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty) : \mathbf{dim} M = \mathbf{e}\}$$

que l’on peut identifier à la variété irréductible

$$\prod_{i, j \in \text{supp}(\mathbf{e}), i \rightarrow j} k^{e_i} \times k^{e_j}.$$

Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  contenant  $\text{supp}(\mathbf{e})$ . Alors l’application  $F_J$  induit un isomorphisme de variétés

$$\text{rep}(\mathbb{A}_\infty, \mathbf{e}) \simeq \text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_J, \mathbf{e}).$$

**Lemme 6.1.2.** Soient  $M, N \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$ . Alors

$$\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty^\infty}^i(M, N) = 0$$

pour tout  $i \neq 0, 1$ .

*Démonstration.* Soit une suite exacte dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  contenant  $\text{supp}(N) \cup \text{supp}(M) \cup \bigcup_{k=0}^{i-1} \text{supp}(E_k)$ . On obtient alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

dans  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$ -mod qui correspond à un élément de  $\text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^i(M, N)$ . Mais puisque  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$  est une catégorie héréditaire, on a  $\text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^i(M, N) = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . Ainsi, si  $i \geq 2$ , la suite

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

correspond à l'extension triviale et donc  $\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty^\infty}^i(M, N) = 0$ .  $\square$

On note alors  $\langle -, - \rangle$  la forme d'Euler sur  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$  définie par :

$$\langle M, N \rangle = \dim \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty^\infty}(M, N) - \dim \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty^\infty}^1(M, N)$$

pour tous objets  $M, N$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$ . Alors,  $\langle -, - \rangle$  est bien définie sur le groupe de Grothendieck.

### 6.1.2 Un caractère pour $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$

Nous définissons maintenant un caractère au sens de Caldero et Chapoton pour la catégorie des représentations de dimension finie de  $\mathbb{A}_\infty^\infty$ .

Soit  $M \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$  et  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  un vecteur de dimension, on note

$$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \{N \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty, \mathbf{e}) : N \text{ est une sous-représentation de } M\}.$$

Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  contenant  $\text{supp}(M)$ . Alors l'application  $F_J$  induit un isomorphisme de variétés de  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$  vers la grassmannienne  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(F_J M)$  dans  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$ .

On se fixe  $\mathbf{u} = \{u_i : i \in \mathbb{Z}\}$  une famille d'indéterminées sur  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 6.1.3.** On définit l'application  $X_?^{\mathbb{A}_\infty^\infty}$  définie de l'ensemble des objets de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$  à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent en  $\mathbf{v}$  par

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty^\infty} = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle}$$

Il est clair que  $X_?^{\mathbb{A}_\infty^\infty}$  est invariante sous isomorphismes.

Soit  $A, B \subset \mathbb{Z}$ , on notera  $A \Subset B$  si

$$\{\min(A) - 1\} \cup A \cup \{\max(A) + 1\} \subset B.$$

Pour tout intervalle fini  $J$  de  $\mathbb{Z}$  tel que  $|J| = r$  et  $\max(J) = i$ , on note  $X_?^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}$  l'application Caldero-Chapoton sur  $\mathcal{C}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}[u_i^{\pm 1}, \dots, u_{i-r}^{\pm 1}]$ . Le lemme suivant montre que localement, ce caractère coïncide avec l'application Caldero-Chapoton.

**Lemme 6.1.4.** Soit  $M \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  et soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  tel que  $\text{supp}(M) \subseteq J$ . Alors

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty} = X_{F_J M}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $\text{supp}(\mathbf{e}) \subseteq J$ . Alors l'application  $F_J$  induit un isomorphisme de variétés

$$F_J : \text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) \longrightarrow \text{Gr}_{\mathbf{e}}(F_J M).$$

Si  $\text{supp}(\mathbf{e}) \not\subseteq J$ , alors  $\text{supp}(\mathbf{e}) \not\subseteq \text{supp}(M)$  et donc  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \emptyset$ . Soit alors  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) \neq \emptyset$ . Alors  $\text{supp}(\mathbf{e}) \subseteq J$  et donc pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a

$$-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle = 0$$

si  $i \notin J$  et

$$-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle = -\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim}(F_J M) - \mathbf{e} \rangle$$

pour  $i \in J$  où le membre de gauche est calculé dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  et celui de droite dans  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} X_M^{\mathbb{A}_\infty} &= \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(F_J M)) \prod_{i \in J} u_i^{-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} F_J M - \mathbf{e} \rangle} \\ &= X_{F_J M}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 6.1.5.** Pour avoir l'égalité des formes d'Euler, il est nécessaire de prendre  $J$  tel que  $\text{supp}(M) \subseteq J$ . Ainsi, si on prend  $J$  tel que  $\text{supp}(M) \subset J$  mais  $\text{supp}(M) \not\subseteq J$ , alors  $X_M^{\mathbb{A}_\infty} \neq X_{F_J M}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}$ .

En particulier,  $X_{\cdot}^{\mathbb{A}_\infty}$  possède les propriétés suivantes :

**Corollaire 6.1.6.** 1. Soit  $M, N$  deux objets dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . Alors

$$X_{M \oplus N}^{\mathbb{A}_\infty} = X_M^{\mathbb{A}_\infty} X_N^{\mathbb{A}_\infty}$$

2. Pour tout suite presque scindée  $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow 0$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on a

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty} X_N^{\mathbb{A}_\infty} = X_B^{\mathbb{A}_\infty} + 1.$$

En particulier, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$X_{S_i^{(n)}}^{\mathbb{A}_\infty} X_{S_{i+1}^{(n)}}^{\mathbb{A}_\infty} = X_{S_i^{(n+1)}}^{\mathbb{A}_\infty} X_{S_{i+1}^{(n-1)}}^{\mathbb{A}_\infty} + 1.$$

*Démonstration.* On ne montre que le second point, le premier point se montre de la même manière. Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  tel que  $\text{supp}(N) \cup \text{supp}(M) \subseteq J$ . Puisque  $F_J$  induit une équivalence de catégories, on a une suite exacte presque scindée

$$0 \longrightarrow F_J M \longrightarrow F_J B \longrightarrow F_J N \longrightarrow 0$$

dans  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$  et donc d'après la formule de multiplication presque scindée dans  $\text{rep}(\overrightarrow{\mathbb{A}}_J)$ , on a

$$X_{F_J M}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} X_{F_J N}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} = X_{F_J B}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} + 1.$$

D'autre part, puisque  $\mathbf{dim} B = \mathbf{dim} M + \mathbf{dim} N$ , on a

$$\text{supp}(B) \subset \text{supp}(M) \cup \text{supp}(N) \Subset J$$

et donc d'après le lemme 6.1.4, on a

$$X_{F_J M}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} = X_M^{\mathbb{A}_\infty}, X_{F_J N}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} = X_N^{\mathbb{A}_\infty} \text{ et } X_{F_J B}^{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J} = X_B^{\mathbb{A}_\infty}$$

et donc

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty} X_N^{\mathbb{A}_\infty} = X_B^{\mathbb{A}_\infty} + 1.$$

La dernière assertion suit du lemme 6.1.1.  $\square$

On déduit alors de la relation en diamant dans le corollaire 6.1.6 que :

**Corollaire 6.1.7.** *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$X_{S_i^{(n)}}^{\mathbb{A}_\infty} = P_{n,\infty}(X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty}, \dots, X_{S_{i+n-1}}^{\mathbb{A}_\infty}).$$

Nous pouvons aussi déduire du lemme 6.1.4 une formule de multiplication pour les  $X_M^{\mathbb{A}_\infty}$ . Etant donnés des objets indécomposables  $M, N, Z$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on note  $\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)_Z$  l'ensemble des suites exactes de  $\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)$  dont le terme central est isomorphe à  $Z$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)_Z$  l'ensemble des morphismes  $f : M \rightarrow \tau N$  tels que  $\ker f \oplus \tau^{-1} \text{coker} f \simeq Z$ .

**Proposition 6.1.8.** *Soient  $M, N$  deux représentations indécomposables telles que  $\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \neq 0$ . Alors*

$$\chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)) X_M X_N = \sum_Z \left( \chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)_Z) + \chi(\mathbb{P}\text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)_Z) \right) X_Z^{\mathbb{A}_\infty}$$

où  $Z$  parcourt l'ensemble des isoclasses de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

*Démonstration.* Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  tel que

$$\text{supp}(M) \cup \text{supp}(N) \cup \text{supp}(\tau N) \Subset J$$

alors pour toute suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow Z \rightarrow N \rightarrow 0$ , on a  $\text{supp}(Z) \Subset J$  et pour tout morphisme  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(N, M)$ , on a  $\text{supp}(\ker f \oplus \tau^{-1} \text{coker} f) \Subset J$ . D'autre part, pour tout  $Z \in \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ ,  $F_J$  induit des isomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)_Z \simeq \text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M)_{F_J Z},$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)_Z \simeq \text{Hom}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}(F_J M, F_J \tau N)_{F_J Z} \simeq \text{Hom}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}(F_J M, \tau F_J N)_{F_J Z}.$$

Puisque  $\text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M) \neq 0$ , on a nécessairement  $\text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J M, F_J N) = 0$  et donc

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M) &\simeq \text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M) \\ &\simeq \text{Hom}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}(F_J M, \tau F_J N) \\ &\simeq \text{Ext}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_J}^1(F_J M, F_J N) \end{aligned}$$

D'après la formule de multiplication dans le cas fini (théorème 3.1.11), on a alors

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}\mathrm{Ext}_{\overline{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M)) X_{F_J M}^{\overline{\mathbb{A}}_J} X_{F_J N}^{\overline{\mathbb{A}}_J} &= \sum_{F_J Z} \chi(\mathbb{P}\mathrm{Ext}_{\overline{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M)_{F_J Z}) X_{F_J Z}^{\overline{\mathbb{A}}_J} \\ &\quad + \chi(\mathbb{P}\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{A}}_J}^{\rightarrow}(F_J M, \tau F_J N)_{F_J Z}) X_{F_J Z}^{\overline{\mathbb{A}}_J} \end{aligned}$$

Il suit alors du lemme 6.1.4 que

$$\chi(\mathbb{P}\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)) X_M X_N = \sum_Z \left( \chi(\mathbb{P}\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M)_Z) + \chi(\mathbb{P}\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)_Z) \right) X_Z^{\mathbb{A}_\infty}.$$

□

En particulier, on a

**Corollaire 6.1.9.** *Soient  $M, N$  des représentations indécomposables dans  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  tels que  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \neq 0$ . Alors  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \simeq k$  et*

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty} X_N^{\mathbb{A}_\infty} = X_E^{\mathbb{A}_\infty} + X_B^{\mathbb{A}_\infty}$$

où  $E$  est l'unique objet de  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  tel qu'il existe une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

et où  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)$ .

*Démonstration.* Soit  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  tel que  $J \ni \mathrm{supp}(M) \cup \mathrm{supp}(N) \cup \mathrm{supp}(\tau N)$ . Alors  $F_J M$  et  $F_J N$  sont des représentations indécomposables de  $\overline{\mathbb{A}}_J$  telles que  $\mathrm{Ext}_{\overline{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M) \neq 0$ . Il s'ensuit que  $\mathrm{Ext}_{\overline{\mathbb{A}}_J}^1(F_J N, F_J M) \simeq k$  et donc  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \simeq k$ . De plus il suit de la formule de multiplication unidimensionnelle (théorème 3.1.12) que

$$X_{F_J M}^{\overline{\mathbb{A}}_J} X_{F_J N}^{\overline{\mathbb{A}}_J} = X_{F_J E}^{\overline{\mathbb{A}}_J} + X_{F_J B}^{\overline{\mathbb{A}}_J}$$

avec  $F_J E$  l'unique objet tel qu'il existe une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow F_J M \longrightarrow F_J E \longrightarrow F_J N \longrightarrow 0$$

et  $F_J B = \ker(F_J f) \oplus \tau^{-1} \mathrm{coker}(F_J f)$  où  $0 \neq F_J f \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{A}}_J}(F_J M, \tau F_J N)$ . Le corollaire vient alors du fait que  $F_J$  est une équivalence de catégories de  $\mathrm{rep}_J(\mathbb{A}_\infty) \simeq \mathrm{rep}(\overline{\mathbb{A}}_J)$  et du lemme 6.1.4. □

Nous pouvons déduire du lemme 6.1.4 un résultat d'indépendance linéaire pour les valeurs du caractère sur la catégorie  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

**Corollaire 6.1.10.** *La famille*

$$\left\{ X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty} : i \in \mathbb{Z} \right\}$$

*est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{t} = (t_i, i \in \mathbb{Z})$  une famille d'indéterminées sur  $\mathbb{Q}$ , pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ , on note  $\mathbf{t}^\nu = \prod_{i \in \mathbb{Z}} t_i^{\nu_i}$ . Soit  $P(\mathbf{t}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}} a_\nu \mathbf{t}^\nu$  un polynôme tel que  $P(X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty}, i \in \mathbb{Z}) = 0$ . Soit alors  $J$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  tel que  $|J| \in 2\mathbb{Z}$  et

$$\{\text{supp}(\nu) : a_\nu \neq 0\} \subseteq J,$$

alors, d'après le lemme 6.1.4, on a

$$0 = P(X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty}, i \in \mathbb{Z}) = P(X_{F_J S_i}^{\vec{\mathbb{A}}_J}, i \in J)$$

mais pour tout  $i \in J$ ,  $F_J S_i$  est une représentation simple dans  $\text{rep}(\vec{\mathbb{A}}_J)$ , il suit alors du corollaire 3.1.20 que la famille  $\{X_{F_J S_i}^{\vec{\mathbb{A}}_J}; i \in J\}$  est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$  et donc que  $P$  est le polynôme nul.  $\square$

## 6.2 Revêtements et formules de multiplication dans les tubes

Nous montrons maintenant des formules de multiplication pour les variables généralisées associées à des modules contenus dans un tube. Pour cela, nous utilisons les revêtements des tubes par des composantes de type  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty$  décrits à la section 5.2 et utilisons les formules de multiplication pour les caractères associés à ces composantes infinies introduits à la section 6.1.

On se fixe  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathcal{T}$  une composante régulière de  $\Gamma(kQ)$  telle que  $\mathcal{T} \simeq \mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty/(p)$  pour un entier  $p \geq 1$ . En particulier,  $Q$  est un carquois affine (voir définition 7.1.1). On note  $\text{add}\mathcal{T}$  la sous-catégorie pleine de  $kQ$ -mod engendrée par les objets indécomposables dans  $\mathcal{T}$ . D'après le corollaire 5.2.4, on a alors

$$\text{add}\mathcal{T} \simeq \mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty)/(\tau^p).$$

Pour simplifier les notations, on notera  $\mathcal{T}$  pour  $\text{add}\mathcal{T}$  si cela ne prête pas à confusion. Soit  $\{R_i, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  une famille complète de représentants des isoclasses d'objets quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$ .

On se fixe une équivalence de catégories  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_\infty) \simeq \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on a alors une équivalence de catégories

$$\mathcal{T} \simeq \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)/(\tau^p).$$

Tout objet  $M$  dans  $\mathcal{T}$  peut être vu comme la  $\tau^p$ -orbite d'un objet de  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . On notera donc en général  $\widetilde{M}$  les objets de  $\mathcal{T}$  et les relèvements de  $\widetilde{M}$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  sont les  $\tau^{kp}M$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Quitte à composer avec la translation, on peut supposer que l'équivalence  $\mathcal{T} \simeq \text{rep}(\mathbb{A}_\infty)/(\tau^p)$  est choisie telle que

$$\widetilde{S}_i \simeq R_{i[p]}$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

Etant donnés deux objets  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  dans  $\mathcal{T}$  et  $M, N$  des relèvements dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on a alors

$$\text{Hom}_{kQ}(\widetilde{N}, \widetilde{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(N, \tau^{kp}M),$$



$$\mathrm{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{T}}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, \tau^{kp} M).$$

On note  $X_{\mathcal{T}}^Q$  l'application Caldero-Chapoton sur  $\mathcal{C}_Q$ . Soit alors le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty} : i \in \mathbb{Z}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X_{R_i}^Q : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \\ X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty} & \longmapsto & X_{R_{i[p]}}^Q. \end{cases}$$

D'après le corollaire 6.1.10, les  $X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty}$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Z}$  et d'après le corollaire 6.1.7 et la section 5.3, on a alors

$$\phi(X_{S_i^{(n)}}^{\mathbb{A}_\infty}) = X_{R_{i[p]}^{(n)}}^Q$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout entier  $n \geq 1$ . Puisque  $\widetilde{S}_i \simeq R_{i[p]}$ , on a alors

$$\phi(X_M^{\mathbb{A}_\infty}) = X_{\widetilde{M}}^Q$$

pour tout objet  $M$  de  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine et  $\mathcal{T}$  un tube dans  $\mathcal{R}(Q)$ . Soient  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  des  $kQ$ -modules indécomposables dans  $\mathcal{T}$  tels que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{T}}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \neq 0$ . Alors il existe une suite exacte non-scindée*

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

et un morphisme  $0 \neq \tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{kQ}(\widetilde{M}, \tau \widetilde{N})$  tel que

$$X_{\widetilde{M}}^Q X_{\widetilde{N}}^Q = X_{\widetilde{E}}^Q + X_B^Q$$

où  $\widetilde{B} = \ker \tilde{f} \oplus \tau^{-1} \mathrm{coker} \tilde{f}$ .

*Démonstration.* Soient  $M$  et  $N$  des relèvements respectifs de  $\widetilde{M}$  et  $\widetilde{N}$  dans  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . On a

$$\mathrm{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, \tau^{kp} M).$$

Quitte à prendre un autre représentant de  $N$ , on peut supposer que  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \neq 0$ . Il suit alors du corollaire 6.1.9 que

$$X_M^{\mathbb{A}_\infty} X_N^{\mathbb{A}_\infty} = X_E^{\mathbb{A}_\infty} + X_B^{\mathbb{A}_\infty} \quad (6.1)$$

où  $E$  est le terme central d'une suite exacte non-scindée

$$\epsilon : 0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

dans  $\mathrm{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  et où  $B = \ker f \oplus \tau^{-1} \mathrm{coker} f$  avec  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N)$ . Soit alors les injections canoniques

$$i : \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau N) \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau^{kp+1} N)$$

et

$$j : \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, M) \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(N, \tau^{kp} M).$$

Alors on a une suite exacte non-scindée

$$i(\epsilon) : 0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

dans  $\text{rep}(Q)$  et un morphisme non-nul  $\tilde{f} := j(f) : \widetilde{M} \longrightarrow \tau \widetilde{N}$ . De plus  $\widetilde{B} = \ker \tilde{f} \oplus \tau^{-1} \text{coker } \tilde{f}$ . En appliquant le morphisme  $\phi$  à l'égalité 6.1, on obtient

$$X_{\widetilde{M}}^Q X_{\widetilde{N}}^Q = X_{\widetilde{E}}^Q + X_{\widetilde{B}}^Q$$

et la proposition est démontrée.  $\square$

En corollaire, on retrouve la formule de multiplication unidimensionnelle du théorème 3.1.12 :

**Corollaire 6.2.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M, N$  deux objets indécomposables dans un tube  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{R}(Q)$  tels que  $\text{Ext}_{kQ}^1(N, M) \simeq k$ . Alors*

$$X_M^Q X_N^Q = X_E^Q + X_B^Q$$

où  $E$  est l'unique objet tel qu'il existe une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

et où  $B = \ker \oplus \tau^{-1} \text{coker } f$  pour un morphisme  $0 \neq f \in \text{Hom}_{kQ}(M, \tau N)$ .

**Une formule de multiplication générale** Nous établissons maintenant un analogue de la formule de multiplication présentée dans [38].  $Q$  désigne toujours un carquois acyclique,  $\mathcal{T}$  un tube de rang  $p \geq 1$  dans  $\mathcal{R}(Q)$  et  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  deux objets indécomposables dans  $\mathcal{T}$  tels que  $\text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \neq 0$ . On se fixe des relèvements  $M, N$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . Puisque  $\text{Ext}_{kQ}^1(N, M)$  est de dimension finie et que

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau^{kp+1} N) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\widetilde{M}, \tau \widetilde{N}) \\ &\simeq \text{Hom}_{kQ}(\widetilde{M}, \tau \widetilde{N}) \\ &\simeq \text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \\ &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{T}}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) \\ &\simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(\tau^{kp} N, M), \end{aligned}$$

l'ensemble

$$I_{N,M} = \{k \in \mathbb{Z} : \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau^{kp+1} N) \neq 0\} = \{k \in \mathbb{Z} : \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(\tau^{kp} N, M) \neq 0\}$$

est un ensemble fini.

**Théorème 6.2.3.** *Soit  $Q$  un carquois affine et  $\mathcal{T}$  un tube de rang  $p \geq 1$  dans  $\mathcal{R}(Q)$ . Soient  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  deux indécomposables dans  $\mathcal{T}$  et  $M, N$  des relèvements dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . Alors*

$$\chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}))X_{\widetilde{M}}^Q X_{\widetilde{N}}^Q = \sum_{i \in I_{N,M}} X_{E_i}^Q + X_{B_i}^Q$$

où pour tout  $i \in I_{M,N}$ ,  $E_i$  est le terme central d'une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow \tau^{ip}N \longrightarrow E_i \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  et  $B_i = \ker f_i \oplus \tau^{-1}\text{coker } f_i$  où  $0 \neq f_i \in \text{Hom}_{\mathbb{A}_\infty}(M, \tau^{ip+1}N)$ .

*Démonstration.* Comme dans la démonstration du théorème 6.2.1, on a pour tout  $i \in I_{M,N}$ ,

$$X_{\widetilde{M}}^Q X_{\widetilde{N}}^Q = X_{E_i}^Q + X_{B_i}^Q$$

En outre, pour tout  $i \in I_{N,M}$ , on a  $\dim \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(\tau^{ip}N, M) = 1$  et donc

$$\dim \text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M}) = \sum_{i \in I_{M,N}} \dim \text{Ext}_{\mathbb{A}_\infty}^1(\tau^{ip}N, M).$$

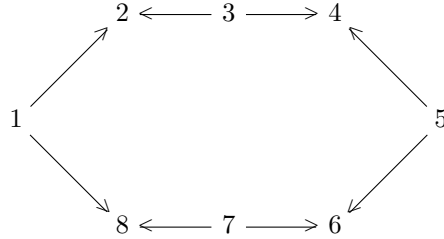
En sommant alors sur  $I_{N,M}$ , on obtient alors

$$\dim \text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N})X_{\widetilde{M}}^Q X_{\widetilde{N}}^Q = \sum_{i \in I_{N,M}} X_{E_i}^Q + X_{B_i}^Q.$$

Il ne reste alors plus qu'à remarquer que  $\dim \text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{kQ}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}))$ .  $\square$

**Remarque 6.2.4.** Il n'est pas clair a priori que la formule de multiplication du théorème 6.2.3 coïncide avec le théorème de multiplication démontré par Xiao et Xu dans [95].

**Exemple 6.2.5.** Considérons le carquois  $Q$  de type  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,4}$  :



Pour tout  $i \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ , on note  $E_{i,i+1}$  le quasi-simple dont les facteurs de composition sont  $S_i$  et  $S_{i+1}$ . Alors  $\tau E_{i,i+1} = E_{i+2,i+3}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . Comme d'habitude, on notera  $E_{ij}^{(n)}$  l'indécomposable régulier de quasi-longueur  $n$  et de quasi-socle  $E_{ij}$ .

Le carquois AR de  $Q$  contient deux tubes exceptionnels de rang  $p = 4$ . On considère alors le tube :

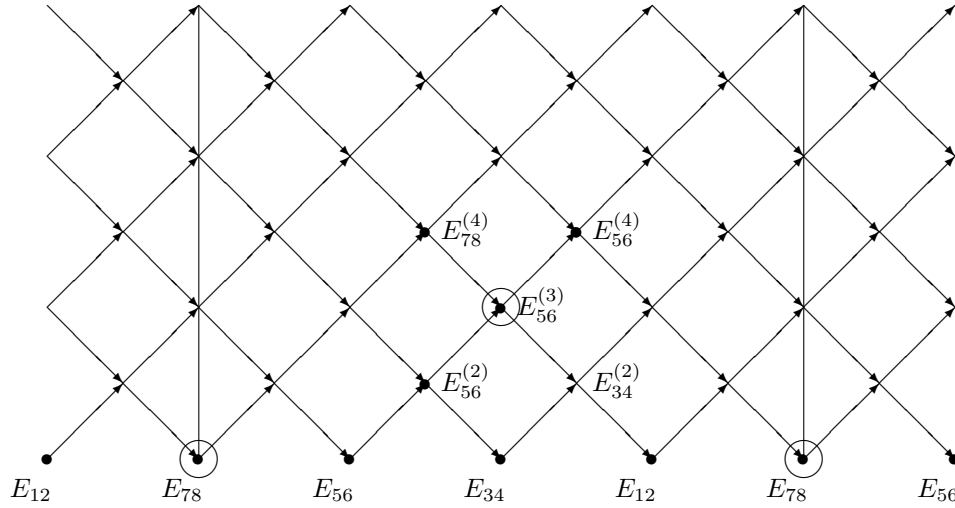


FIG. 6.2 – Un tube exceptionnel de  $\tilde{A}_{4,4}$

On s'intéresse alors à la multiplication  $X_{E_{56}^{(3)}}^Q X_{E_{78}}^Q$ . On note  $M = E_{56}^{(3)}$  et  $N = E_{78}$ . On a  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{T}}^1(M, N) = 1$  et  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{T}}^1(N, M) = 1$  ainsi  $\chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M)) = 2$ .

On note  $\Lambda_5$  l'algèbre des chemins du carquois  $\overrightarrow{A}_5$ . En plongeant  $\Lambda_5\text{-mod}$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , on peut choisir un relèvement de  $M$  et  $N$  de sorte que  $M$  correspond à la  $\tau^4$ -orbite du  $\Lambda_5$ -module  $P_2$  et que  $N$  correspond à la  $\tau^4$ -orbite du  $\Lambda_5$ -module  $S_3$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ . Localement, dans  $\mathcal{T}$  et  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ , les situations sont celles des figures 6.3 et 6.4

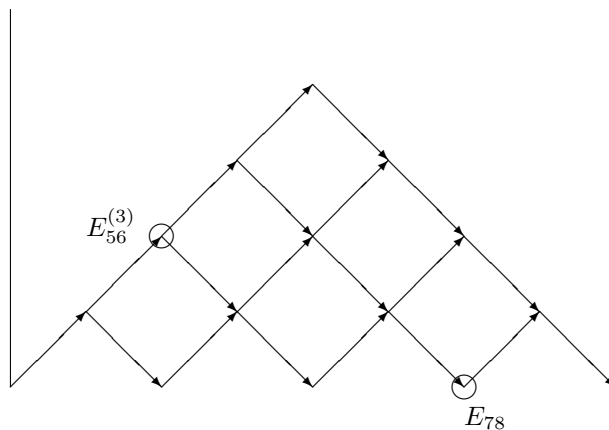


FIG. 6.3 – Localement dans  $\mathcal{T}$

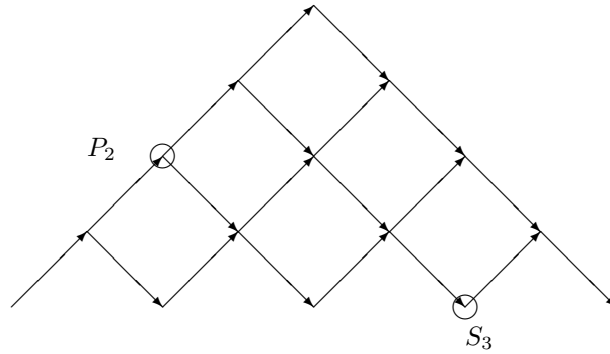


FIG. 6.4 – Localement dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$

La formule de multiplication dans  $\Lambda_5\text{-mod}$  appliquée à  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$  donne alors

$$X_{P_2}^{\mathbb{A}_\infty} X_{S_3}^{\mathbb{A}_\infty} = X_{P_3}^{\mathbb{A}_\infty} + X_{P_1}^{\mathbb{A}_\infty}$$

En appliquant le morphisme d'algèbres  $\phi : \mathbb{Z}[X_{S_i}^{\mathbb{A}_\infty}, i \in \mathbb{Z}] \longrightarrow \mathbb{Z}[X_{R_i}^Q, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}]$  à cette équation, on obtient

$$X_{E_{56}^{(3)}}^Q X_{E_{78}}^Q = X_{E_{56}^{(4)}}^Q + X_{E_{56}^{(2)}}^Q$$

puisque  $P_1$  correspond à  $E_{56}^{(2)}$  et  $P_3$  à  $E_{56}^{(4)}$ .

On choisit maintenant un autre relèvement, de sorte que  $E_{78}$  corresponde à la  $\tau^4$ -orbite de  $P_0 \simeq S_0^{(1)}$  et que  $E_{56}^{(3)}$  corresponde à la  $\tau^4$ -orbite de  $P_3/P_0 \simeq S_1^{(3)}$  dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$ .

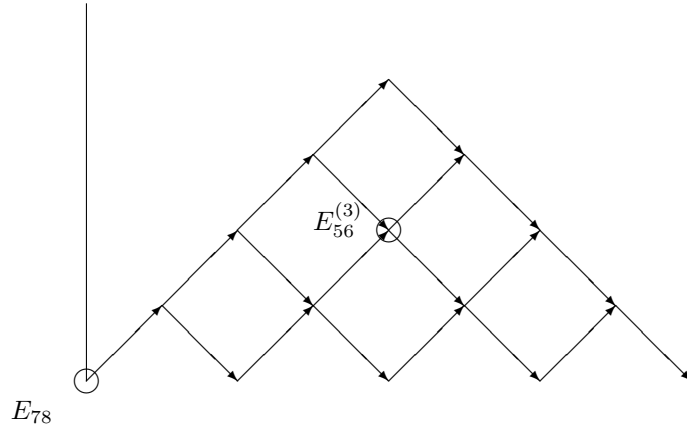


FIG. 6.5 – Localement dans  $\mathcal{T}$

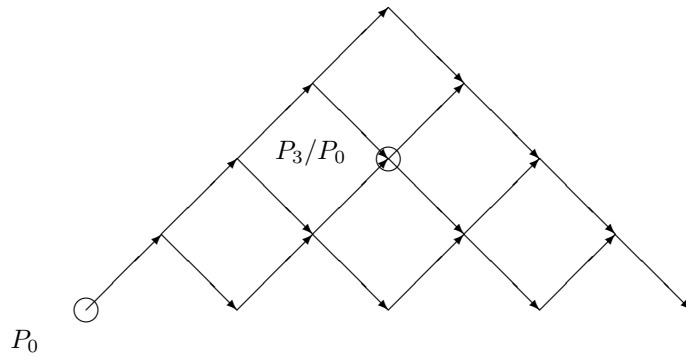


FIG. 6.6 – Localement dans  $\text{rep}(\mathbb{A}_\infty)$

Il suit alors de la formule de multiplication entre  $X_{P_0}^{\mathbb{A}_\infty}$  et  $X_{P_3/P_0}^{\mathbb{A}_\infty}$  que

$$X_{E_{78}}^Q X_{E_{56}^{(3)}}^Q = X_{E_{78}^{(4)}}^Q + X_{E_{34}^{(2)}}^Q$$

En sommant les deux formules, on obtient ainsi

$$\chi(\mathbb{P}\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_{78}, E_{56}^{(3)})) X_{E_{78}}^Q X_{E_{56}^{(3)}}^Q = X_{E_{56}^{(4)}}^Q + X_{E_{56}^{(2)}}^Q + X_{E_{78}^{(4)}}^Q + X_{E_{34}^{(2)}}^Q.$$

Troisième partie

Structure des algèbres  
amassées affines

Une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est naturellement munie d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -module et on appelle  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(B)$  une famille libre et génératrice dans  $\mathcal{A}(B)$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$ . La recherche de  $\mathbb{Z}$ -bases dans les algèbres amassées était un point central dans l'introduction de ces algèbres.

Cette recherche a d'abord été développée par Sherman et Zelevinsky dans [88] pour les algèbres amassées de types finis et affines de rang 2. Leurs travaux ont montré que les monômes d'amas apparaissaient naturellement dans les  $\mathbb{Z}$ -bases trouvées. Caldero et Keller ont montré dans [20] que si l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  est simplement lacée de type fini, alors les monômes d'amas forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(B)$ . Si une algèbre de rang 2 n'est pas de type fini, il est apparu dans [88] que les monômes d'amas ne suffisent plus à engendrer  $\mathcal{A}(B)$ , il faut alors leur adjoindre une famille de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires de l'algèbre de Kac-Moody associée à  $B$ .

Dans nos travaux, nous donnons une généralisation de la notion de monôme d'amas qui fait apparaître de manière naturelle ces variables supplémentaires pour un carquois acyclique quelconque. Nous définissons la notion de *variable générique* pour un carquois acyclique  $Q$  arbitraire. L'idée sous-jacente est la suivante : il suit du théorème 3.1.4 que tout monôme d'amas dans  $\mathcal{A}(Q)$  peut s'écrire  $X_M$  où  $M$  est un objet rigide. Si  $M$  est un module, on sait alors que l'orbite  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans la variété de représentation de dimension  $\mathbf{dim} M$  est un ouvert dense. En ce sens,  $X_M$  est une valeur générique de l'application Caldero-Chapoton sur la variété de représentation. En partant de cette observation, nous montrons l'existence d'une valeur générique pour chaque élément  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  et ces valeurs sont appelées *variables génériques* de l'algèbre amassée. Nous montrons alors que si  $Q$  est un carquois affine, les variables génériques sont précisément la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas et d'une famille de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines dont la décomposition canonique contient des racines imaginaires. En particulier, dans le cas où  $Q$  est un carquois affine vérifiant certaines propriétés dites *propriétés de différences*, nous montrons que les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ , appelée *base semi-canonique* de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ . Cela implique en particulier que les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans les algèbres amassées associées aux carquois affines de type  $\tilde{A}$ .

Cette approche des  $\mathbb{Z}$ -bases à l'aide de l'application Caldero-Chapoton a été motivée par les travaux de Caldero et Zelevinsky sur la base semi-canonique de l'algèbre amassée associée au carquois de Kronecker [22]. Bien que la terminologie soit identique, le lecteur prendra garde au fait que la base semi-canonique définie dans nos travaux ne coïncide pas avec la base définie par Caldero et Zelevinsky. La terminologie a été motivée par l'approche de Geiss, Leclerc et Schröer dans le cadre de la catégorification des algèbres amassées à l'aide des variétés nilpotentes sur l'algèbre préprojective associée à  $Q$ . Dans leurs travaux, ils construisent des bases dans les algèbres amassées, appelées *bases semi-canoniques duales* à l'aide de la base duale  $\mathcal{S}^*$  de la base semi-canonique de Lusztig de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{n})$  où  $\mathfrak{n}$  est l'algèbre nilpotente maximale de l'algèbre de Lie-Kac-Moody associée à  $Q$  [54]. Les éléments de cette base semi-canonique duale sont des fonctions constructibles génériques sur les composantes irréductibles des variétés nilpotentes. En ce sens, nos travaux sont un analogue dans le cadre de la catégorie amassée et il semblait donc cohérent d'utiliser la terminologie *base semi-canonique*.



## Chapitre 7

# Algèbres et catégorie amassées d'un carquois affine

Afin d'étudier les variables généralisées dans les algèbres amassées affines, nous allons avoir besoin de bien connaître la structure de la catégorie amassée associée à un carquois affine. Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement un ensemble de résultats classiques sur la catégorie des représentations d'un carquois affine. Pour des détails à ce sujet, on pourra par exemple se référer à [80, 27, 50, 49, 89]. Nous utilisons ensuite cette connaissance de la catégorie de modules pour décrire en détail la catégorie amassée associée à un carquois affine. Enfin, nous complétons le résultat de classification de Fomin et Zelevinsky pour les algèbres amassées de type fini en montrant que cela a un sens de parler d'algèbre amassée affine et que le *type affine* d'une algèbre amassée est une notion bien définie.

## 7.1 Représentations de carquois affines

**Définition 7.1.1.** Un *carquois affine* est un carquois acyclique dont le graphe non-orienté sous-jacent figure dans la figure 7.1. Un carquois acyclique qui n'est ni affine, ni Dynkin est dit *sauvage*.

On notera qu'un graphe de type  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n$  ou  $\tilde{E}_n$  contient toujours  $n+1$  sommet. Dans cette section, à moins que le contraire ne soit précisé,  $Q$  désignera toujours un carquois affine.

**Système de racines** Si  $Q$  est un carquois affine, il existe une unique racine positive  $\delta \in \Phi_{>0}(Q)$ , appelée *racine positive imaginaire minimale* de  $Q$ , telle que

$$\Phi^{\text{im}}(Q) = \mathbb{Z}\delta.$$

En particulier, on a la décomposition

$$\Phi_{>0}(Q) = \Phi_{>0}(Q)^{\text{re}} \sqcup \mathbb{Z}_{>0}\delta.$$

En outre, on sait que  $\delta$  est une racine *sincère*, c'est à dire que  $\delta_i > 0$  pour tout  $i \in Q_0$  et qu'il existe toujours un sommet  $i \in Q_0$  tel que  $\delta_i = 1$ .

La racine positive imaginaire minimale permet de définir une forme linéaire sur  $\mathbb{Z}\Phi(Q)$  appelée *forme de défaut* :

$$\partial : \begin{cases} \mathbb{Z}\Phi(Q) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \mathbf{d} & \longmapsto & \partial_{\mathbf{d}} = \langle \delta, \mathbf{d} \rangle \end{cases}$$

Une racine  $\mathbf{d} \in \Phi(Q)$  est dite *régulière* si  $\partial_{\mathbf{d}} = 0$  et *irrégulière* sinon. On note  $\Phi^{\text{reg}}(Q)$  (resp.  $\Phi_{>0}^{\text{reg}}(Q)$ ) l'ensemble des racines régulières (resp. positives régulières) de  $Q$  et  $\Phi^{\text{irr}}(Q)$  (resp.  $\Phi_{>0}^{\text{irr}}(Q)$ ) l'ensemble des racines irrégulières (resp. positives irrégulières) de  $Q$ . En particulier, une racine imaginaire est toujours régulière.

Etant données deux éléments  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{Z}\Phi(Q)$ , on note

$$\mathbf{d} \leq \mathbf{e} \Leftrightarrow d_i \leq e_i \text{ pour tout } i \in Q_0;$$

$$\mathbf{d} \not\leq \mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{d} \leq \mathbf{e} \text{ et } \mathbf{d} \neq \mathbf{e}.$$

Si  $X \subset \mathbb{Z}\Phi(Q)$ , une racine  $\mathbf{d} \in X$  est dite *minimale* dans  $X$  si  $\mathbf{d} \leq \mathbf{e}$  pour tout élément  $\mathbf{e} \in X$ . En particulier, la racine positive imaginaire minimale  $\delta$  est minimale parmi les racines imaginaires positives.

On a une description complète des racines de Schur de  $Q$  :

$$\Phi^{\text{Sc}}(Q) = \Phi_{>0}^{\text{irr}}(Q) \sqcup \{\mathbf{d} \in \Phi_{>0}^{\text{reg}}(Q) : \mathbf{d} \text{ est minimale dans } \mathbf{d} + \mathbb{Z}\delta\}.$$

Dans [64], la décomposition canonique des racines positives d'un carquois affine est précisément décrite. Si  $\mathbf{d}$  est une racine positive irrégulière, alors la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  est  $\mathbf{d}$ . Si  $\mathbf{d}$  est une racine positive régulière, on note  $k$  l'entier tel que  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d} - k\delta$  est minimale dans  $\Phi_{>0}(Q) \cap (\mathbf{d} + \mathbb{Z}\delta)$ . Alors la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  est  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \oplus \delta \oplus \cdots \oplus \delta$  que l'on note aussi

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \oplus \delta^{\oplus k}.$$

En particulier, la décomposition canonique de  $k\delta$  est  $\delta^{\oplus k}$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

**Racines et représentations** D'après le théorème de Kac, pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}\Phi(Q)$ , il existe une représentation indécomposable  $M$  telle que  $\mathbf{dim} M = \mathbf{d}$  si et seulement si  $\mathbf{d} \in \Phi_{>0}(Q)$ . Si  $\mathbf{d}$  est une racine positive réelle, alors il existe une unique représentation indécomposable  $M$  de dimension  $\mathbf{d}$  (à isomorphisme près). En outre, une racine réelle  $\mathbf{d}$  est une racine de Schur si et seulement si il existe une représentation indécomposable rigide  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ .

Si  $\mathbf{d}$  est une racine imaginaire, alors  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  contient une infinité de représentations indécomposables non-isomorphes.

Etant donnée une représentation  $M$  de  $Q$ , on définit le *défaut de  $M$*  par

$$\partial_M = \partial_{\mathbf{dim} M}.$$

La forme de défaut permet de déterminer si une représentation indécomposable est préprojective, préinjective ou régulière. Plus précisément, si  $M$  est une représentation indécomposable de  $Q$ , alors

$$\begin{aligned} M \text{ est préprojective} &\Leftrightarrow \partial_M < 0 \\ M \text{ est préinjective} &\Leftrightarrow \partial_M > 0 \\ M \text{ est régulière} &\Leftrightarrow \partial_M = 0 \end{aligned}$$

On note  $c$  la transformation de Coxeter induite sur  $K_0(kQ)$  par la translation d'Auslander-Reiten. Alors pour tous  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on a

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{e} \rangle = -\langle \mathbf{e}, c(\mathbf{d}) \rangle.$$

De plus la racine positive imaginaire minimale est invariante sous la transformation de Coxeter et donc

$$\langle \mathbf{d}, \delta \rangle = -\langle \delta, \mathbf{d} \rangle$$

pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ .

**Composantes régulières** Les composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten de  $kQ$ -mod sont des tubes paramétrés par  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(k)$ . Plus précisément, à tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$ , on peut faire correspondre un unique tube  $\mathcal{T}_\lambda(Q)$  dans  $\mathcal{R}(Q)$  et l'ensemble  $\{\mathcal{T}_\lambda : \lambda \in \mathbb{P}^1\}$  est l'ensemble des composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(kQ)$ . On trouvera des constructions explicites de ces tubes de façon algébrique dans [50, 80] et de façon homologique dans [27]. Nous détaillerons la construction homologique de Crawley-Boevey dans la preuve du lemme 8.3.3.

On note

$$\mathbb{P}_0^1(Q) = \{\lambda \in \mathbb{P}^1 : \text{rg}(\mathcal{T}_\lambda(Q)) = 1\}$$

Alors on sait que

$$|\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1(Q)| \leq 3.$$

Par définition, pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ ,  $\mathcal{T}_\lambda(Q)$  est un tube homogène et pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1(Q)$ ,  $\mathcal{T}_\lambda(Q)$  est un tube exceptionnel.

**Définition 7.1.2.** Soit  $Q$  un carquois affine. Alors le *type tubulaire*  $\mathfrak{t}_Q$  de  $Q$  est l'ensemble des rangs des tubes exceptionnels de  $\Gamma(kQ)$ , c'est à dire

$$\mathfrak{t}_Q = \{\text{rg}(\mathcal{T}_\lambda(Q)) : \lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1\}.$$

On donnera au théorème 7.3.3 une description du type tubulaire de  $Q$  en fonction de son type affine.

Si il n'y a pas de confusion possible, on omettra la référence à  $Q$  dans les notations précédentes.

Comme précédemment, si  $\mathcal{T}$  est un tube dans  $\Gamma(kQ)$ , on notera toujours  $\mathcal{T}$  la sous-catégorie pleine de  $kQ\text{-mod}$  engendrée par les modules indécomposables appartenant à  $\mathcal{T}$ . Chaque tube est une catégorie standard fermée sous noyaux, conoyaux et extensions. De plus, il suit de l'étude menée à la section 5.3 que  $\mathcal{T}$  est une catégorie unisérielle.

Soit  $\lambda \in \mathbb{P}^1$  et  $\mathcal{T}_\lambda$  le tube correspondant. On note  $p = \text{rg}(\mathcal{T}_\lambda)$  son rang et  $R_1, \dots, R_p$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}_\lambda$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$ . Comme dans la section 5.3, pour tout  $n \geq 1$ , on note  $R_i^{(n)}$  l'unique module indécomposable de quasi-socle  $R_i$  et de quasi-longueur  $n$ . En particulier, on a  $R_i^{(1)} \simeq R_i$ . Par convention, on pose  $R_i^{(0)} = 0$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$\mathbf{dim} R_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{dim} R_{i+k}.$$

D'autre part, on sait que pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a

$$\mathbf{dim} R_i^{(p)} = \delta$$

et donc il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^p \mathbf{dim} R_{i+k} = \delta.$$

De plus, on sait que pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{dim} R_i^{(n)}$  est une racine positive régulière. Plus précisément,  $\mathbf{dim} R_i^{(kp)} = k\delta$  est une racine imaginaire pour tout  $k \geq 1$  et  $\mathbf{dim} R_i^{(n)}$  est une racine réelle pour tout  $n$  non-divisible par  $p$ . En outre,  $\mathbf{dim} R_i^{(n)}$  est une racine de Schur si et seulement si  $n \leq p$ . Il s'ensuit notamment que  $\mathbf{dim} R_i^{(n)}$  est une racine réelle de Schur si et seulement si  $n < p$ . En particulier, un tube homogène ne contient aucune représentation indécomposable dont la dimension est une racine réelle de Schur. Etant donné un tube  $\mathcal{T}$  et un entier  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{T}_{<n}$  l'ensemble des représentations indécomposables de  $\mathcal{T}$  de quasi-longueur strictement inférieure à  $n$ .

Ainsi, une racine positive réelle  $\mathbf{d}$  est une racine de Schur si et seulement si  $\mathbf{d}$  est une racine irrégulière ou  $\mathbf{d}$  est une racine régulière telle que  $\mathbf{d} \not\leq \delta$ . Alors,  $\mathbf{dim}$  induit des bijections

$$\begin{aligned} \{\text{indécomposables préprojectifs ou préinjectifs}\} &\longrightarrow \Phi^{\text{irr}}, \\ \{\text{M indécomposable dans } \mathcal{T}_{<\text{rg}(\mathcal{T})} \text{ pour } \mathcal{T} \text{ exceptionnel}\} &\longrightarrow \Phi^{\text{Sc}} \cap \Phi^{\text{reg}}. \end{aligned}$$

**Morphismes entre composantes** Nous savons déjà que pour tous objets  $P \in \text{Ob}(\mathcal{P}(Q))$ ,  $I \in \text{Ob}(\mathcal{I}(Q))$  et  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R}(Q))$ , on a

$$\text{Hom}_{kQ}(R, P) \simeq \text{Hom}_{kQ}(I, R) \simeq \text{Hom}_{kQ}(I, P) = 0,$$

et

$$\text{Ext}_{kQ}^1(P, R) \simeq \text{Ext}_{kQ}^1(R, I) \simeq \text{Ext}_{kQ}^1(P, I) = 0.$$

Dans le cas affine, ce résultat se complète par le fait qu'il n'existe pas non plus de morphismes ni d'extensions entre des composantes régulières distinctes. Plus précisément, si  $M$  et  $N$  sont des modules indécomposables appartenant à des tubes distincts, alors

$$\text{Hom}_{kQ}(M, N) = 0 \text{ et } \text{Ext}_{kQ}^1(M, N) = 0.$$

En particulier, un module quasi-simple dans un tube  $\mathcal{T}$  ne contient aucun sous-objet régulier. Pour cette raison, les modules quasi-simples sont parfois appelés *modules simples réguliers* dans la littérature.

On sait de plus que les carquois  $\Gamma(\mathcal{P}(Q))$  et  $\Gamma(\mathcal{I}(Q))$  sont tous deux isomorphes à  $\mathbb{N}Q$ . En particulier, la  $\tau$ -orbite (resp.  $\tau^{-1}$ -orbite) d'un élément de  $\mathcal{I}(Q)$  (resp.  $\mathcal{P}(Q)$ ) est infinie. La situation est décrite dans la figure 7.2.

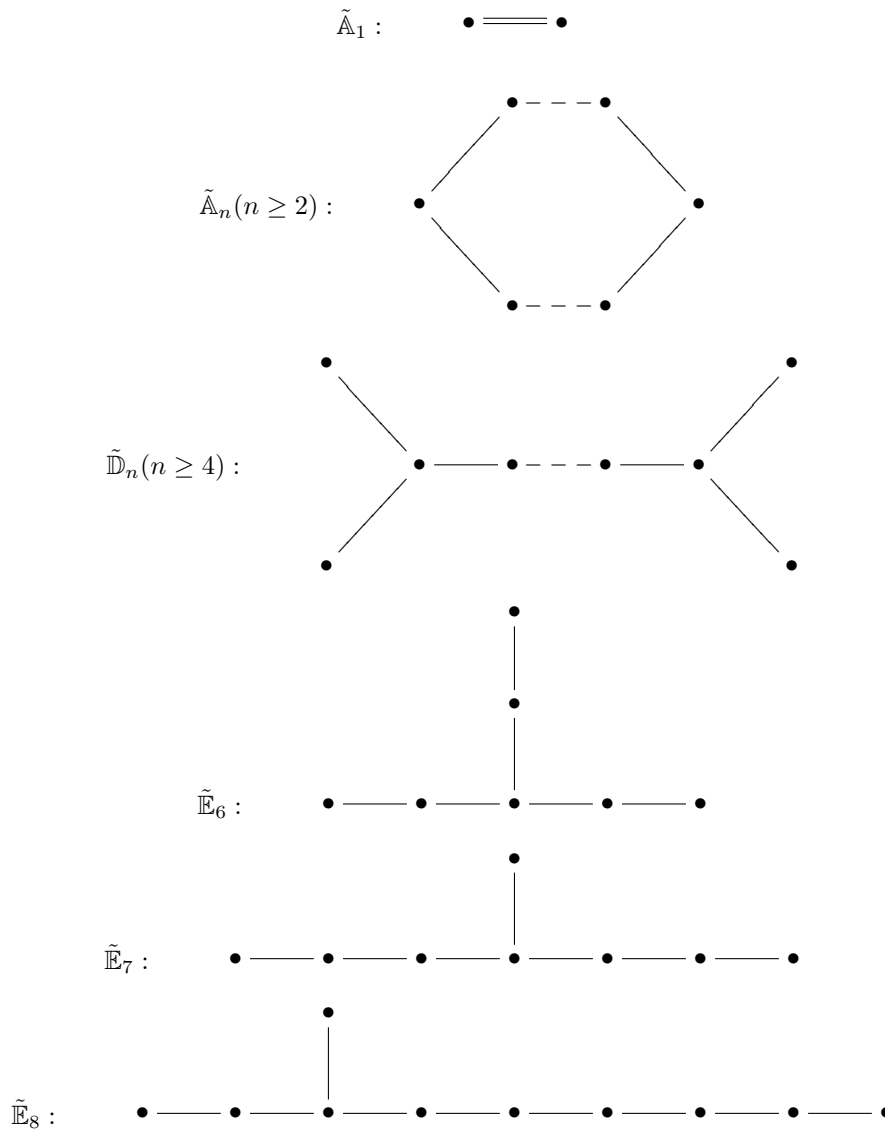


FIG. 7.1 – Graphes affines

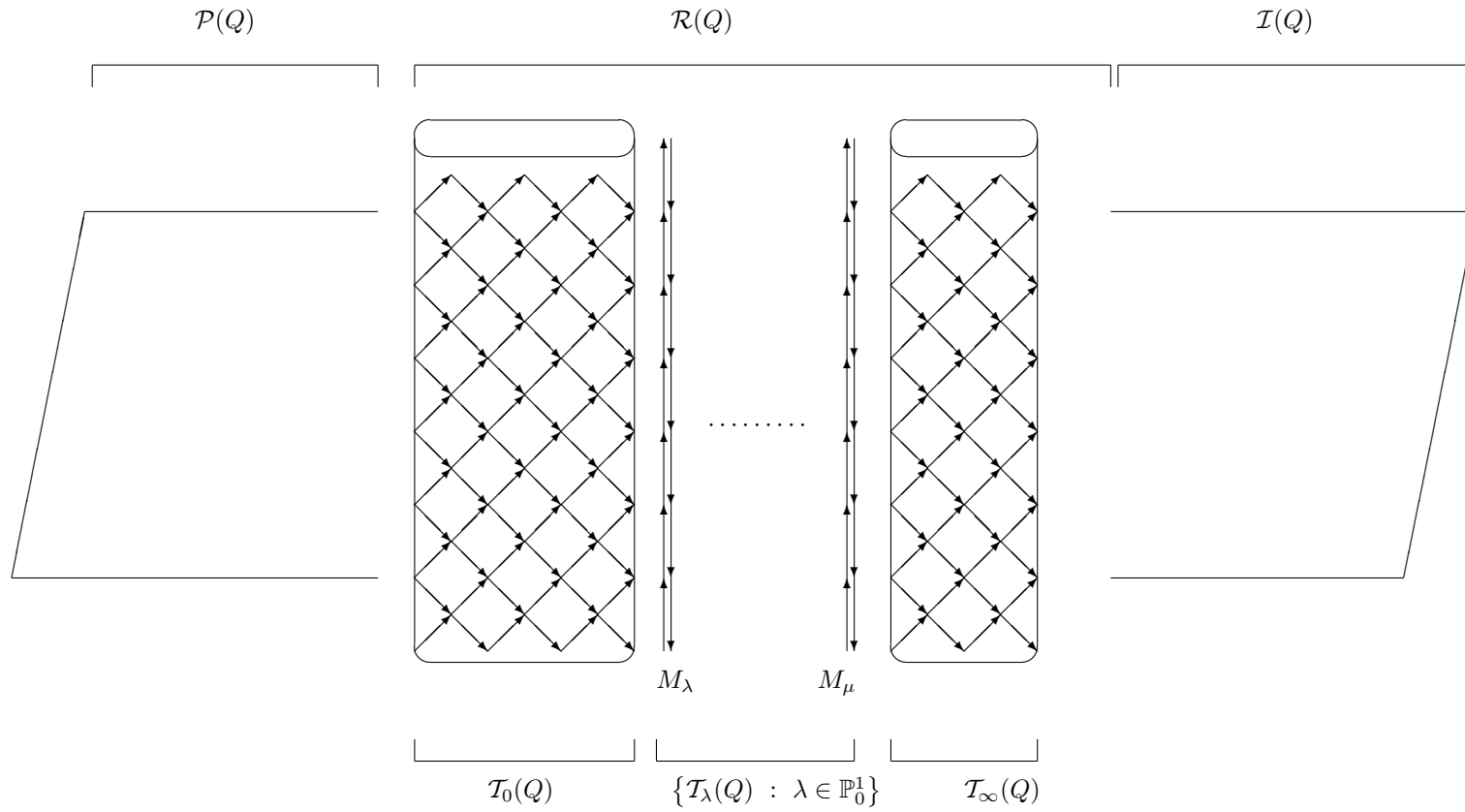


FIG. 7.2 – Exemple de carquois d’Auslander-Reiten de la catégorie de représentations d’un carquois affine

## 7.2 La catégorie amassée d'un carquois affine

### 7.2.1 Objets dans une catégorie amassée affine

Nous commençons par caractériser les modules réguliers dans une catégorie amassée affine. Nous rappelons que pour tout carquois acyclique  $Q$ , on a

$$\text{ind}(\mathcal{C}_Q) = \text{ind}(kQ\text{-mod}) \sqcup \{P_i[1] : i \in Q_0\}$$

**Lemme 7.2.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine. Alors pour tout objet indécomposable  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , il existe  $0 \neq s \in \mathbb{Z}$  tel que  $M[s] \simeq M$  si et seulement si  $M$  est un  $kQ$ -module régulier.*

*Démonstration.* Si  $M$  est un  $kQ$ -module régulier, alors  $M$  appartient à un tube  $\mathcal{T}$  de rang  $p \geq 1$ , il s'ensuit que  $\tau^p M \simeq M$  et donc  $M[p] \simeq M$ . Réciproquement, si  $M$  n'est pas un module régulier, alors il existe  $s \in \mathbb{Z}$  tel que  $\tau^s M$  est ou bien un projectif  $P_i$  ou bien un injectif  $I_i$ , dans le premier cas on a  $M[s+1] \simeq P_i[1]$  et dans le second cas  $M[s-1] \simeq P_i[1]$ . On peut donc se ramener au cas  $M = P_i[1]$ . Mais alors pour tout  $s \geq 2$ , on a  $M[s] \simeq \tau^{s-1} I_i$  mais la  $\tau$ -orbite de  $I_i$  est infinie donc  $M[s] \not\simeq M$  pour tout  $s \geq 1$ . De même, pour  $s \leq -1$ ,  $M[s] \not\simeq M$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 7.2.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique de représentation infinie. Si il existe un objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $M[s] \simeq M$  pour un certain entier  $s \neq 0$ , alors  $Q$  est affine et  $M$  est un  $kQ$ -module régulier.*

*Démonstration.* Supposons que  $M$  est indécomposable. Si  $M$  est un objet dans la composante transjective, quitte à appliquer [1], on peut supposer que  $M = P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $P_i[1-n] \simeq \tau^{-n-1} P_i$  et  $P_i[1+n] \simeq \tau^{n-1} I_i$ . Puisque  $Q$  est de représentation infinie, la  $\tau$ -orbite (resp. la  $\tau^-$ -orbite) d'un module injectif (resp. projectif) est infinie et donc pour tout  $0 \neq s \in \mathbb{Z}$ , on a  $M[s] \not\simeq M$ . Supposons maintenant que  $M$  est un module régulier, alors  $M[s] \simeq \tau^s M$  est un module régulier pour tout  $s \in \mathbb{Z}$ . Mais si  $\tau^s M \simeq M$  pour un certain entier  $s \geq 1$ , alors il suit de [79] que  $Q$  est affine et du lemme 7.2.1 que  $M$  est un module régulier.  $\square$

Si  $Q$  est un carquois acyclique, on sait que

$$\text{ind}(kQ\text{-mod}) = \text{ind}(\mathcal{P}(Q)) \sqcup \text{ind}(\mathcal{R}(Q)) \sqcup \text{ind}(\mathcal{I}(Q)).$$

Ainsi, puisque  $P_i[2] \simeq I_i$  pour tout  $i \in Q_0$ , on peut réécrire

$$\text{ind}(\mathcal{C}_Q) = \text{ind}(\mathcal{PI}(Q)) \sqcup \text{ind}(\mathcal{R}(Q))$$

Un intérêt de l'infinité de la composante transjective est que, quitte à appliquer le foncteur de shift qui est une auto-équivalence de  $\mathcal{C}_Q$ , on peut toujours se ramener à des modules au sens suivant :

**Lemme 7.2.3.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique, soit  $M_1, \dots, M_n$  des objets dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors il existe un entier  $s \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $M_i[s]$  est un  $kQ$ -module.*



*Démonstration.* Quitte à prendre  $n$  plus grand, on peut supposer que tous les  $M_i$  sont indécomposables. Soit  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Si  $M_i$  est un module régulier, alors pour tout  $s \in \mathbb{Z}$ ,  $M_i[s] \simeq \tau^s M_i$  est un module régulier. Sinon  $M_i$  est dans la composante transjective et il existe un entier  $s_i$  tel que  $M_i[s_i]$  est projectif. Soit  $s > \max\{s_i : M_i \text{ est transjectif}\} + 1$ . Alors pour tout  $i = 1, \dots, n$ , si  $M_i$  est un module transjectif  $M_i[s]$  est un module préinjectif, ce qui prouve le lemme.  $\square$

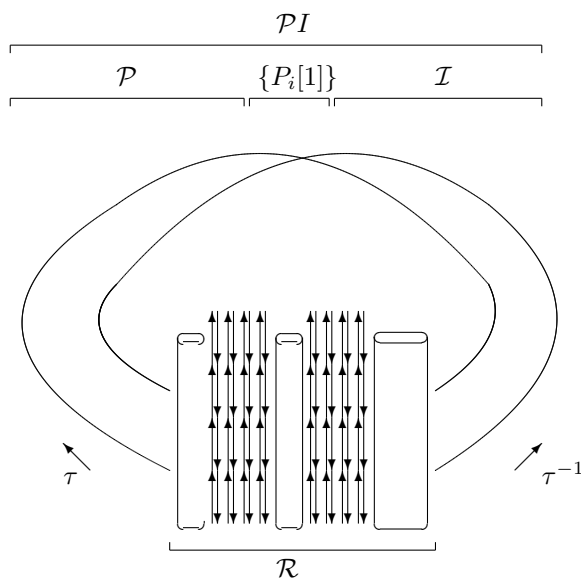


FIG. 7.3 – La catégorie amassée d’un carquois affine

### 7.2.2 Triangles dans une catégorie amassée affine

Nous nous intéressons aux triangles dans catégories amassées associées aux carquois affines. Nous savons que si  $Q$  est un carquois de type Dynkin et  $M, N$  sont deux objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$ , alors ou bien  $\text{Ext}_{kQ}^1(M, N) = 0$  et alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \simeq \text{Hom}_{kQ}(M, \tau N),$$

ou bien  $\text{Ext}_{kQ}^1(N, M) = 0$  et alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \simeq \text{Ext}_{kQ}^1(M, N).$$

Ainsi, dans ce cas, tout triangle résulte ou bien d’une suite exacte de  $kQ$ -modules, ou bien d’un morphisme de  $kQ$ -modules. Dans le cas acyclique, l’alternative ci-dessus n’est en général plus vraie si on considère des modules indécomposables dans une même composante régulière. Nous allons donc étudier plus avant les triangles dans les catégories amassées associées aux carquois acycliques. Autant que possible, nous essaierons de montrer ces résultats de structure pour

un carquois acyclique quelconque mais à plusieurs reprises, nous aurons réellement besoin de la structure affine sous-jacente.

**Lemme 7.2.4.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M, N$  deux objets dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors pour tout triangle*

$$M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow M[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a  $\mathbf{dim} H^0(E) \leq \mathbf{dim} H^0(M \oplus N)$ .

*Démonstration.* En appliquant le foncteur  $H^0$  au triangle  $M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow M[1]$ , on obtient la suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{H^0(\alpha)} H^0(E) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(N) \longrightarrow \dots \quad (7.1)$$

On note

$$K_\alpha = \ker H^0(\alpha), \quad C_\alpha = \operatorname{coker} H^0(\alpha),$$

$$K_\beta = \ker H^0(\beta), \quad C_\beta = \operatorname{coker} H^0(\beta).$$

On a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{H^0(\alpha)} H^0(E) \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_\beta \longrightarrow H^0(E) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(N) \longrightarrow C_\beta \longrightarrow 0.$$

Dans le groupe de Grothendieck  $K_0(kQ)$ , on a ainsi les égalités

$$H^0(E) = H^0(M) + C_\alpha - K_\alpha$$

$$H^0(E) = H^0(N) + K_\beta - C_\beta$$

et donc

$$2H^0(E) = H^0(M) + H^0(N) + (C_\alpha - C_\beta) + (K_\beta - K_\alpha)$$

Comme la suite (7.1) est exacte, on obtient  $K_\beta = \operatorname{im}(H^0(\alpha))$  et donc  $H^0(E) - K_\beta = C_\alpha$ . Il s'ensuit que

$$H^0(E) = H^0(M) + H^0(N) - (K_\alpha + C_\beta)$$

et donc en identifiant  $K_0(kQ)$  et  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  avec le vecteur de dimension, on obtient

$$\mathbf{dim} H^0(E) \leq \mathbf{dim} H^0(M \oplus N).$$

□

Nous montrons maintenant que les tubes dans  $\mathcal{C}_Q$  sont des sous-catégories stables par extension :

**Lemme 7.2.5.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $\mathcal{T}$  un tube du carquois AR de  $Q$  et  $M, N$  deux modules indécomposables réguliers dans  $\mathcal{T}$ . Alors pour tout triangle*

$$M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow M[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$ ,  $E$  est un module régulier dans  $\operatorname{add}\mathcal{T}$ .

*Démonstration.* Soit un triangle  $M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\phi} M[1]$  dans  $\mathcal{C}_Q$ . Avec les notations du lemme 7.2.4, on a

$$H^0(E) = H^0(M) + H^0(N) - (K_\alpha + C_\beta).$$

Ainsi,  $\partial_{H^0(E)} = \partial_{H^0(M)} + \partial_{H^0(N)} - \partial_{K_\alpha} - \partial_{C_\beta} = -\partial_{K_\alpha} - \partial_{C_\beta}$ . Les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{H^0(\alpha)} H^0(E) \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow K_\beta \longrightarrow H^0(E) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(N) \longrightarrow C_\beta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{cases} \partial_{H^0(E)} &= \partial_{C_\alpha} - \partial_{K_\alpha} \\ \partial_{H^0(E)} &= \partial_{K_\beta} - \partial_{C_\beta} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \partial_{C_\beta} &= -\partial_{C_\alpha} \\ \partial_{K_\beta} &= -\partial_{K_\alpha}. \end{cases}$$

Mais  $f = H^0(\phi) : N \rightarrow \tau M$  est un morphisme entre modules réguliers, il s'ensuit que  $\partial_{\ker f} = 0 = \partial_{\text{coker } f}$ . Mais d'après la suite exacte longue (7.1), on a  $\text{im}(H^0(\beta)) = \ker f$  et alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{im}(H^0(\beta)) \longrightarrow H^0(N) \simeq N \longrightarrow C_\beta \longrightarrow 0$$

implique que  $\partial_{C_\beta} = 0$  et donc  $\partial_{H^0(E)} = \partial_{K_\beta}$ . D'autre part,  $K_\alpha = \ker H^0(\alpha) = \text{im}(H^0(f[-1])) \simeq \text{im}(H^0(\tau f))$  mais  $\tau f$  est un morphisme entre modules réguliers et donc  $\text{im}(\tau f)$  est un module régulier et  $\partial_{K_\alpha} = 0$ . Comme  $\partial_{K_\alpha} = -\partial_{K_\beta} = -\partial_{H^0(E)}$ , il s'ensuit que  $\partial_{H^0(E)} = 0$ .

On décompose alors  $E$  sous la forme  $E = P_E[1] \oplus P \oplus R \oplus I$  où  $P_E$  est un module projectif,  $P$  est un module préprojectif,  $R$  est un module régulier et  $I$  est un module préinjectif. Supposons que  $I$  est non-nul, alors puisque  $H^0(E) = P \oplus R \oplus I$  est de défaut nul et que  $\partial_R = 0$  et  $\partial_I > 0$  on a nécessairement  $\partial_P < 0$  et donc  $P$  est aussi non-nul. Soit  $p = \text{rg}(T)$ , il existe  $k \in p\mathbb{Z}$  tel que  $\tau^{-k}I = 0$ . Puisque la composante préprojective est infinie,  $P[-k]$  est un module non-nul. Soit alors le triangle associé au morphisme  $\phi[-k]$ , il est donné par

$$M[-k] \simeq M \xrightarrow{\alpha[-k]} E[-k] \xrightarrow{\beta[-k]} N[-k] \simeq N \xrightarrow{\phi[-k]} M[-k+1] \simeq M[1].$$

Il suit de la discussion précédente que  $\partial_{H^0(E[-k])} = 0$  mais

$$E[-k] = P_E[1-k] \oplus P[-k] \oplus R[-k] \oplus I[-k].$$

Puisque  $\tau^{-k}I = 0$ , il s'ensuit que  $I[-k]$  est une somme directe de modules préprojectifs et de shifts de modules projectifs. Ainsi  $P_E[1-k] \oplus P[-k] \oplus I[-k] = 0$  et donc  $P_E = P = I = 0$ , ce qui est une contradiction. Il s'ensuit que  $E = R$  est un module régulier. De plus, puisqu'il n'y a pas de morphismes ni d'extensions entre les tubes, on a nécessairement  $E \in \text{add}T$ .  $\square$

Nous donnons maintenant un résultat sur la dimension de l'auto-extension du terme central d'un triangle. Ce résultat est directement adapté de [20]. Pour simplifier les notations, étant donné un objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on notera

$$[M, M]^1 = \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, M).$$

On note  $K_0^{\text{split}}(\mathcal{C}_Q)$  le *groupe de Grothendieck scindé* de  $\mathcal{C}_Q$ , c'est à dire le groupe abélien libre sur les isoclasses d'objets de  $\mathcal{C}_Q$  quotienté par la relation  $X + Y = E$  pour tout triangle scindé  $X \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow X[1]$ .

Pour tous objets  $M, N, Z$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on note  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)_Z$  l'ensemble des triangles

$$N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow N[1]$$

dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $E \simeq Z$ .

**Lemme 7.2.6.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M, N$  deux objets dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M) \neq 0$ . Soit  $Z \neq M \oplus N$  un objet tel qu'il existe un triangle non-scindé*

$$N \rightarrow Z \rightarrow M \rightarrow N[1]$$

alors

$$[Z, Z]^1 < [M \oplus N, M \oplus N]^1$$

*Démonstration.* Soit un triangle non-scindé

$$M \rightarrow Z \rightarrow N \xrightarrow{\epsilon} M[1].$$

$[-, -]^1$  induit une forme bilinéaire sur  $K_0^{\text{split}}(\mathcal{C}_Q)$ . Pour tout objet  $R$ , le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(-, R[1])$  appliqué au triangle  $M \rightarrow Z \rightarrow N \xrightarrow{\epsilon} M[1]$  induit la suite exacte

$$0 \rightarrow K_R \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, R[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Z, R[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, R[1]) \rightarrow C_R \rightarrow 0$$

où  $K_R$  est le noyau de l'application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, R[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Z, R[1])$  et  $C_R$  le conoyau de l'application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Z, R[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, R[1])$ .

En particulier, pour tout objet  $R$ , on a

$$\dim K_R + \dim C_R + \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Z, R[1]) = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, R[1]) + \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, R[1]),$$

c'est à dire

$$\dim K_R + \dim C_R + [Z, R]^1 = [N, R]^1 + [M, R]^1.$$

On a alors

$$[Z, N]^1 \leq [N, N]^1 + [M, N]^1 \text{ and } [Z, Z]^1 \leq [N, Z]^1 + [M, Z]^1.$$

De plus,  $\epsilon$  est dans le noyau  $K_M$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Z, M[1])$ , et donc  $\dim K_M > 0$  et

$$[Z, M]^1 < [N, M]^1 + [M, M]^1.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} [M + N, M + N]^1 &= [M, M]^1 + [N, N]^1 + [M, N]^1 + [N, M]^1 \\ &> [Z, N]^1 + [Z, M]^1 \\ &= [N, Z]^1 + [M, Z]^1 \\ &\geq [Z, Z]^1, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Le résultat suivant est une conséquence du théorème du multiplication de Xiao et Xu (théorème 3.1.14) :

**Corollaire 7.2.7.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et soient  $M, N$  deux objets dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \neq 0$ . Alors  $X_M X_N$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Y$  où  $Y$  est le terme central d'un triangle non-scindé dans  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M)$  ou dans  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N)$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 7.2.3, on peut supposer que  $M$  et  $N$  sont des modules. Supposons que  $M, N \neq 0$ . On démontre le résultat par récurrence sur le nombre  $n$  de facteurs directs indécomposables de  $M \oplus N$ . Si  $n = 2$ , alors  $M$  et  $N$  sont décomposables et le résultat découle du théorème 3.1.14. Si  $n > 2$ , alors on écrit  $M \oplus N = M_1 \oplus M_2 \oplus N_1 \oplus N_2$  avec  $M_1, N_1$  indécomposables. Alors

$$\begin{aligned} X_M X_N &= X_{M \oplus N} \\ &= X_{M_1 \oplus M_2 \oplus N_1 \oplus N_2} \\ &= X_{M_2 \oplus N_2} (X_{M_1} X_{N_1}) \\ &= X_{M_2 \oplus N_2} \sum_Y n_Y X_Y \end{aligned}$$

où les  $n_Y$  sont des nombres rationnels et où  $Y$  parcourt les termes centraux de triangles non-scindés

$$M_1 \longrightarrow Y \longrightarrow N_1 \longrightarrow M_1[1] \text{ or } N_1 \longrightarrow Y \longrightarrow M_1 \longrightarrow N_1[1].$$

Mais si  $M_1 \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} N_1 \xrightarrow{\epsilon} M_1[1]$  est un triangle non-scindé, alors on a un triangle non-scindé

$$M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} Y \oplus M_2 \oplus N_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} M_1[1] \oplus M_2[1].$$

et donc

$$X_M X_N = \sum_Y n_Y X_{Y \oplus M_2 \oplus N_2}$$

où les  $n_Y$  sont des nombres rationnels et où  $Y \oplus M_2 \oplus N_2$  parcourt un ensemble de termes centraux de triangles non-scindés

$$M \longrightarrow Y \oplus M_2 \oplus N_2 \longrightarrow N \longrightarrow M[1] \text{ or } N \longrightarrow Y \oplus M_2 \oplus N_2 \longrightarrow M \longrightarrow N[1],$$

ce qui prouve le corollaire.  $\square$

Il vient alors :

**Corollaire 7.2.8.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M, N$  deux objets dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(N, M) \neq 0$ . Alors,  $X_M X_N$  s'écrit comme une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire finie de  $X_Y$  où  $Y$  parcourt un ensemble d'objets de  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $[Y, Y]^1 < [M \oplus N, M \oplus N]^1$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 7.2.3, on peut supposer que  $M$  et  $N$  sont des modules. Alors, chaque  $Y$  apparaissant dans l'écriture du corollaire 7.2.7 est le terme central d'un triangle non-scindé dans  $\mathcal{C}_Q$ . Le résultat suit alors du lemme 7.2.6.  $\square$

On en déduit un résultat de décomposition des variables généralisées :

**Proposition 7.2.9.** *Soit  $Q$  un carquois affine et  $M$  un objet de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors*

1.  $X_M$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Y$  où  $Y$  est un objet tel que  $\mathbf{dim} H^0(Y) \leq \mathbf{dim} H^0(M)$  et  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(Y_i, Y_j) = 0$  pour tous facteurs directs indécomposables non-isomorphes de  $Y$ .
2. Si de plus  $M$  est pris dans  $\mathrm{add}\mathcal{T}$  pour un tube  $\mathcal{T}$  du carquois AR de  $Q$ , alors les  $Y$  peuvent être pris dans  $\mathrm{add}\mathcal{T}$ .

*Démonstration.* On montre le résultat par récurrence sur la dimension de l'auto-extension. Si  $M$  est rigide, alors le résultat est vrai. Supposons que  $M$  n'est pas rigide. Si  $M$  est indécomposable, le résultat est vrai et on peut donc supposer que  $M = M_1 \oplus M_2$  avec  $[M_1, M_2]^1 \neq 0$ . D'après le corollaire 7.2.8,  $X_M = X_{M_1} X_{M_2}$  s'écrit comme combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Y$  tels que  $[Y, Y]^1 < [M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2] = [M, M]^1$ . Alors, par hypothèse de récurrence, chaque  $X_Y$  est une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Z$  où  $Z$  est tel que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(Z_i, Z_j) = 0$  pour tous facteurs directs indécomposables non-isomorphes de  $Z$ . Le fait que  $\mathbf{dim} H^0(Y) \leq \mathbf{dim} H^0(M)$  provient directement du lemme 7.2.4, ce qui prouve le premier point. Le second point suit du lemme 7.2.5.  $\square$

### 7.3 Algèbres amassées affines

Fomin et Zelevinsky ont montré que si  $Q$  est un carquois d'un type Dynkin donné  $\mathbb{X}$ , alors tout carquois acyclique mutation-équivalent à  $Q$  est aussi de type Dynkin  $\mathbb{X}$  (Théorème 1.4.3). Dans cette section, nous montrons que ce résultat est aussi vrai pour un carquois  $Q$  de type affine donné. Nous commençons par préciser ce que nous entendons précisément par *type affine* d'un carquois.

**Définition 7.3.1.** Soient  $r, s$  des entiers positifs. Un carquois  $Q$  est dit de *type affine*  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  si il est isomorphe à un carquois  $Q'$  dont le graphe non-orienté sous-jacent est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+s-1}$  et contenant exactement  $r$  flèches allant dans le sens des aiguilles d'une montre et exactement  $s$  flèches allant dans le sens contraire. Il est dit de *type affine*  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  (resp.  $\tilde{\mathbb{E}}_n$ ) si le graphe non-orienté sous-jacent est de type  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  (resp.  $\tilde{\mathbb{E}}_n$ ) pour un certain entier  $n \geq 4$  (resp.  $n = 6, 7, 8$ ).

**Remarque 7.3.2.** On remarquera qu'un carquois  $Q$  est de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  si et seulement si il est de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{s,r}$ . On remarquera aussi que le graphe non-orienté sous-jacent à un carquois affine de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+s-1}$ .

On a alors la proposition suivante :

**Théorème 7.3.3** ([80]). *Le type tubulaire d'un carquois affine  $Q$  ne dépend que du type affine de  $Q$ , plus précisément, on a :*

Type affine de $Q$	$t_Q$
$\tilde{A}_{1,1}$	$\emptyset$
$\tilde{A}_{1,s}, s \geq 2$	$\{s\}$
$\tilde{A}_{r,s}, r, s \geq 2$	$\{r, s\}$
$\tilde{D}_n, n \geq 4$	$\{2, 2, n-2\}$
$\tilde{E}_6, n \geq 4$	$\{2, 3, 3\}$
$\tilde{E}_7, n \geq 4$	$\{2, 3, 4\}$
$\tilde{E}_8, n \geq 4$	$\{2, 3, 5\}$

**Proposition 7.3.4.** *Soit  $Q$  un carquois de type affine  $\mathbb{X}$ . Alors tout carquois acyclique mutation-équivalent à  $Q$  est de type affine  $\mathbb{X}$ . De plus, si  $Q'$  est un carquois de type affine  $\mathbb{X}$ , alors  $Q'$  est isomorphe à un carquois mutation-équivalent à  $Q$ .*

*Démonstration.* Soient  $Q$  et  $Q'$  deux carquois acycliques mutation-équivalents. Il suit du théorème 2.2.16 que  $Q'$  est le carquois de l'algèbre d'endomorphismes opposée d'un objet amas-basculant  $T'$  dans  $\mathcal{C}_Q$ . Il suit alors de [70] que  $\mathcal{C}_Q$  est équivalente à  $\mathcal{C}_{Q'}$  en tant que catégories triangulées. Si  $Q$  est affine, il existe un objet  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  qui est [1]-périodique. Il s'ensuit donc qu'il existe un objet [1]-périodique dans  $\mathcal{C}_{Q'}$ . D'autre part,  $\mathcal{C}_Q$  contenant une infinité d'indécomposables,  $\mathcal{C}_{Q'}$  contient aussi une infinité d'indécomposables et donc  $Q'$  est de représentation infinie. Alors, il suit du lemme 7.2.2 que  $Q'$  est nécessairement affine. De plus, puisque les types tubulaires correspondent aux périodes des modules des tubes exceptionnels pour le shift, il suit du lemme 7.2.1 que nécessairement les types tubulaires  $t_Q$  et  $t_{Q'}$  sont égaux. Mais d'après le théorème 7.3.3, le type tubulaire détermine entièrement le type affine, ce qui prouve la première assertion.

Pour la seconde assertion, supposons d'abord que  $Q$  est un carquois de type affine  $\tilde{A}_{r,s}$ . Si  $Q'$  est un autre carquois de type  $\tilde{A}_{r,s}$ , alors on sait que  $Q'$  est réflexion-équivalent à un carquois isomorphe à  $Q$  et donc en particulier mutation-équivalent à un carquois isomorphe à  $Q$  (voir [1] ou [56] par exemple). Supposons maintenant que  $Q$  et  $Q'$  sont d'un même type affine  $\tilde{D}$  ou  $\tilde{E}$ , alors  $Q$  et  $Q'$  sont deux orientations différentes d'un même arbre mais on sait que deux orientations différentes d'un même arbre sont toujours réflexion-équivalentes (voir aussi [1] ou [56] par exemple). Il s'ensuit que  $Q$  et  $Q'$  sont mutation-équivalents.  $\square$

**Remarque 7.3.5.** La proposition 7.3.4 est en fait un cas particulier de [19, Corollaire 4] où les auteurs ont montré que si  $Q$  et  $Q'$  sont deux carquois acycliques mutation-équivalents, alors  $Q$  et  $Q'$  sont réflexion-équivalents.

La proposition 7.3.4 permet ainsi de parler de l'algèbre amassée associée à un type affine donné. Plus précisément, on pose la définition suivante :

**Définition 7.3.6.** Une algèbre amassée  $\mathcal{A}$  est dite *de type affine  $\mathbb{X}$*  où  $\mathbb{X} = \tilde{A}_{r,s}, \tilde{D}_t$ , ou  $\tilde{E}_n$  pour des entiers  $r, s \geq 1, t \geq 4$  ou  $n = 6, 7, 8$  si elle contient une graine  $(\mathbf{x}, Q)$  où  $Q$  est un carquois affine de type affine  $\mathbb{X}$ .

On dit que  $\mathcal{A}$  est *de type affine  $\tilde{A}$*  (resp.  $\tilde{D}, \tilde{E}$ ) si  $\mathcal{A}$  est de type affine  $\tilde{A}_{r,s}$  (resp.  $\tilde{D}_t, \tilde{E}_n$ ) pour certains entiers  $r, s > 0$  (resp.  $t \geq 4, n = 6, 7, 8$ ).

**Remarque 7.3.7.** On remarquera que l'on exclut les carquois cycliques, c'est à dire les carquois de la forme  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,0}$  pour un certain entier  $r > 0$ , de la définition des carquois affines. En effet, on sait que dans ce cas, l'algèbre amassée associée est de type fini  $\mathbb{D}_r$ .



## Chapitre 8

# Variables génériques

Dans [88], Sherman et Zelevinsky ont montré que les monômes d'amas formaient une  $\mathbb{Z}$ -base dans une algèbre amassée de type fini de rang 2. Ce résultat a été généralisé par la suite pour une algèbre amassée associée à un carquois Dynkin quelconque dans [20]. Dans l'étude de la base canonique pour les algèbres amassées de type infini de rang deux de [88], il est apparu que les monômes d'amas n'étaient plus suffisants pour engendrer l'algèbre amassée toute entière, il a donc fallu introduire une nouvelle famille de variables dont les dénominateurs correspondaient à la droite imaginaire du système de racines correspondant. Les variables supplémentaires apparaissant dans la base canonique pour les algèbres amassées affines de rang 2 n'admettent cependant pas d'interprétation claire dans la catégorification avec la catégorie amassée. Dans [22], les auteurs ont introduit une famille différente de nouvelles variables dans le cas où  $Q$  est le carquois de Kronecker, leur permettant d'obtenir une nouvelle  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ . Ces nouvelles variables ont une interprétation naturelle en termes de catégorification mais leur définition n'ouvre cependant pas une voie claire pour leur généralisation au cas affine en général.

L'idée qui a été développée dans ces travaux est de généraliser la notion de monôme d'amas de la manière suivante. D'après le théorème 3.1.4, un monôme d'amas dans  $\mathcal{A}(Q)$  est une variable généralisée  $X_M$  pour un objet rigide dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$ . D'autre part, un  $kQ$ -module rigide  $M$  a une orbite ouverte dans la variété de représentation  $\text{rep}(Q, \mathbf{dim} M)$ . Il s'ensuit que le monôme d'amas  $X_M$  est une valeur prise par l'application Caldero-Chapoton sur un ouvert dense de  $\text{rep}(Q, \mathbf{dim} M)$ . Nous allons montrer que pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on peut ainsi définir une « valeur générique »  $X_{\mathbf{d}}$  pour l'application Caldero-Chapoton telle que  $\delta(X_{\mathbf{d}}) = \mathbf{d}$ . Nous étudierons ensuite les propriétés de ces variables génériques dans le cas acyclique et démontrerons notamment une propriété multiplicative analogue à celle de la base semi-canonique duale de  $U(\mathfrak{n})$ . Nous expliciterons aussi ces variables en termes de théorie d'Auslander-Reiten de  $kQ$ . Ces résultats sont adaptés de ceux présentés dans [39].

## 8.1 Construction des variables génériques

Dans cette section, nous construisons les variables génériques pour une algèbre amassée associée à un carquois acyclique. Pour définir ces variables génériques, nous allons regarder l'application Caldero-Chapoton comme une certaine fonction génératrice associée des caractéristiques d'Euler de grassmanniennes de sous-modules.

**Définition 8.1.1.** Soit  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Alors le *type de filtration*  $\mathcal{F}_M$  de  $M$  est la famille presque nulle d'entiers indexée sur  $\mathbb{N}^{Q_0}$  :

$$\mathcal{F}_M = (\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)))_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}}$$

On note  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des types de filtration de représentations de  $Q$ .

Pour tout  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ , on note

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{M \in \text{rep}(Q) : \mathcal{F}_M = \mathcal{F}\}.$$

Le *support* d'un type de filtration  $\text{supp}(\mathcal{F}_M)$  de  $\mathcal{F}_M$  est l'ensemble

$$\{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^{Q_0} : \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \neq 0\}.$$

Alors  $\mathbf{dim} M$  est l'unique élément maximal de  $\text{supp}(\mathcal{F}_M)$  pour l'ordre partiel  $\leq$  sur  $\mathbb{N}^{Q_0}$ . En particulier, si  $M$  et  $N$  sont deux modules tels que  $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_N$ , on a  $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim} N$ .

**Lemme 8.1.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $M, N \in \text{rep}(Q)$  tels que  $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_N$ . Alors  $X_M = X_N$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_N$ , alors  $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim} N$  et

$$\begin{aligned} X_M &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_i u_i^{\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} M - \mathbf{e} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(N)) \prod_i u_i^{\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{dim} N - \mathbf{e} \rangle} \\ &= X_N. \end{aligned}$$

□

Nous verrons au lemme 8.3.7 que la réciproque de ce lemme est fausse.

En regardant l'application Caldero-Chapoton comme une série génératrice pour les caractéristiques d'Euler de grassmanniennes de sous-modules, nous allons montrer l'existence de variables génériques en montrant celle de valeurs génériques pour ces caractéristiques. Nous remercions Michel Brion pour nous avoir indiqué la preuve du lemme 8.1.3 qui assure cette existence.

**Lemme 8.1.3.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension. Pour tout vecteur de dimension  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , il existe un ouvert dense  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que l'application*

$$M \mapsto \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M))$$

*est constante sur  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ . De plus, si  $U'_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$  est un autre ouvert dense, alors les valeurs coïncident sur  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$  et  $U'_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ .*

*Démonstration.* Considérons la variété algébrique

$$V_{\mathbf{e}} = \{(M, N) \in \text{rep}(Q, \mathbf{d}) \times \text{rep}(Q, \mathbf{e}) : N \text{ est une sous représentation de } M\}$$

Soit  $\pi_{\mathbf{e}} : V_{\mathbf{e}} \rightarrow \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  la première projection. Pour tout  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ , la grassmannienne  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$  est la fibre de  $M$  sous le morphisme  $\pi_{\mathbf{e}}$ . D'après [92, Corollaire 5.1], si le morphisme  $\pi_{\mathbf{e}}$  est dominant, il existe alors un ouvert de Zariski  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ , dense par irréductibilité de  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que les fibres de  $\pi_{\mathbf{e}}$  sont isomorphes sur  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ . En particulier, elles ont les mêmes caractéristiques d'Euler. Si  $\pi_{\mathbf{e}}$  n'est pas dominant, on pose alors  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} = \text{rep}(Q, \mathbf{d}) \setminus \overline{\text{im}(\pi_{\mathbf{e}})}$ . Alors  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$  est un ouvert dense tel que pour tout  $x \in U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ , on a  $\chi(\pi_{\mathbf{e}}^{-1}(x)) = 0$ .

Supposons maintenant que  $U'_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$  est un autre tel ouvert, par irréductibilité, on a  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \cap U'_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \neq \emptyset$  et donc les valeurs coïncident nécessairement. □

On en déduit l'existence de valeurs génériques pour les types de filtrations et donc en particulier pour l'application Caldero-Chapoton

**Corollaire 8.1.4.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors il existe un ouvert dense  $U_{\mathbf{d}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que l'application Caldero-Chapoton est constante sur  $U_{\mathbf{d}}$ . De plus, si  $U'_{\mathbf{d}}$  est un autre tel sous-ensemble, les valeurs de l'application Caldero-Chapoton coïncident sur  $U_{\mathbf{d}}$  et  $U'_{\mathbf{d}}$ .*

*Démonstration.* Considérons l'ensemble

$$U_{\mathbf{d}} = \bigcap_{\mathbf{e} \leq \mathbf{d}} U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}.$$

C'est une intersection finie d'ouverts denses dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ , il s'agit donc encore d'un ouvert dense dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Soient  $M, N \in U_{\mathbf{d}}$ . Alors

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_N$$

et donc d'après le lemme 8.1.2, on a

$$X_M = X_N$$

et donc  $X_{\mathcal{?}}$  est constante sur  $U_{\mathbf{d}}$ .

Si  $U'_{\mathbf{d}}$  est un autre tel sous-ensemble, alors  $U_{\mathbf{d}} \cap U'_{\mathbf{d}} \neq \emptyset$  et les valeurs coïncident.  $\square$

On remarquera que pour tout  $\mathbf{d}$ , on peut supposer que l'ensemble  $U_{\mathbf{d}}$  est un sous-ensemble  $G_{\mathbf{d}}$ -invariant de  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ .

- Définition 8.1.5.** 1. Soit  $V$  une variété algébrique, un sous-ensemble  $X \subset V$  est dit *localement fermé* si il s'écrit comme l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de  $V$ . Un sous-ensemble  $X \subset V$  est dit *constructible* si il s'écrit comme réunion finie d'ensembles localement fermés.
2. Soit  $V$  une variété algébrique,  $X$  un ensemble et  $f : V \rightarrow X$  une application.  $f$  est dite *constructible* si les fibres de  $f$  sont des sous-ensembles constructibles de  $V$ .

**Corollaire 8.1.6.** Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{rep}(Q, \mathbf{d}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ M & \longmapsto & \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \end{array}$$

est constructible.

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , d'après le lemme 8.1.3 il existe un ouvert dense  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$  dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(-))$  est constant sur  $U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ . De plus, comme variétés,  $\dim(\text{rep}(Q, \mathbf{d}) \setminus U_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}) < \dim \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ , ainsi, par récurrence sur la dimension (topologique), on peut construire une stratification finie  $(U_i)_{i \in I}$  de  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  par des ensembles localement fermés tels que  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(-))$  est constante sur chaque  $U_i$ . Les fibres de  $M \mapsto \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M))$  sont ainsi des réunions finies de  $U_i$  et sont donc constructibles.  $\square$

**Corollaire 8.1.7.** Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension. Alors l'ensemble

$$\{\mathcal{F}_M : M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})\}$$

est fini.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{d}$ . Alors  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = 0$  pour tout  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Soit maintenant  $\mathbf{e} \leq \mathbf{d}$ , il existe alors une stratification finie  $(U_{i, \mathbf{e}})_{i \in I}$  de  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  par des ensembles localement fermés tels que  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(-))$  est constante sur chaque

$U_{i,\mathbf{e}}$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{e}$ ,  $\chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(-))$  prend ses valeurs dans un ensemble fini  $V(\mathbf{e})$ . Alors pour tout  $M \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ ,

$$\mathcal{F}_M \in \prod_{\mathbf{e} \leq \mathbf{d}} V(\mathbf{e})$$

ce qui prouve le corollaire.  $\square$

**Corollaire 8.1.8.** *Pour tout  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ , il existe un  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  tel que  $\langle \mathcal{F} \rangle$  est un sous-ensemble constructible  $G_{\mathbf{d}}$ -invariant de  $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ .*

*Démonstration.* On pose

$$C_n = \{M \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d}) : \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = n)\}.$$

$C_n$  est une réunion finie de  $U_{i,\mathbf{e}}$  et est donc constructible. Si on note  $\mathcal{F} = (n_{\mathbf{e}})_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}}$ , on a alors

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \bigcap_{\mathbf{e} \leq \mathbf{d}} C_{n_{\mathbf{e}}}$$

et donc  $\langle \mathcal{F} \rangle$  est constructible.  $\square$

On peut ainsi montrer la constructibilité de l'application induite par l'application Caldero-Chapoton sur la catégorie de représentations de  $Q$ , retrouvant ainsi un résultat de [95].

**Corollaire 8.1.9.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , la restriction de l'application  $X_{\mathbf{d}}$  à  $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$  est constructible.*

*Démonstration.* Soient  $M, N \in \mathrm{rep}(Q)$  tels que  $X_M = X_N$ . Alors  $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim} N$  d'après le théorème 3.1.8, on note  $\mathbf{d}$  ce vecteur de dimension commun. Soit alors  $x \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  tel que  $\delta(x) = \mathbf{d}$ . D'après le lemme 8.1.2, la fibre au-dessus de  $x$  est une réunion de  $\langle \mathcal{F} \rangle$  où  $\mathcal{F}$  parcourt  $\mathfrak{F}$  tel que  $\langle \mathcal{F} \rangle \subset \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Il suit du corollaire 8.1.7 que cette réunion est finie et du corollaire 8.1.8 que cette réunion est constructible.  $\square$

**Notation 8.1.10.** Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on note

$$[\mathbf{d}]_+ = (\max(d_i, 0))_{i \in Q_0}$$

$$[\mathbf{d}]_- = (\min(d_i, 0))_{i \in Q_0}$$

En particulier, on a toujours

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}]_+ + [\mathbf{d}]_-.$$

**Lemme 8.1.11.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $M = H^0(M) \oplus P_M[1]$  un objet dans  $\mathcal{C}_Q$ . On suppose que pour tout  $i \in Q_0$ , si  $P_i[1]$  est facteur direct de  $M$ , alors  $\dim(H^0(M)(i)) = 0$ . Alors*

$$[\mathbf{dim} M]_+ = \mathbf{dim} H^0(M) \text{ et } [\mathbf{dim} M]_- = \mathbf{dim} P_M[1]$$

En particulier, si  $M$  est un objet rigide de  $\mathcal{C}_Q$  on a

$$[\mathbf{dim} M]_+ = \mathbf{dim} H^0(M) \text{ et } [\mathbf{dim} M]_- = \mathbf{dim} P_M[1]$$

*Démonstration.* Soit  $M$  un objet de  $\mathcal{C}_Q$ , on a donc  $M \simeq H^0(M) \oplus P_M[1]$  où  $P_M = \bigoplus_{i \in Q_0} P_i^{\oplus n_i}$ . Pour tout  $i$  tel que  $n_i \neq 0$ , on a  $\dim(H^0(M)(i)) = 0$  par hypothèse, il s'ensuit que  $\mathbf{dim} H^0(M) = [\mathbf{dim} M]_+$  et  $\mathbf{dim} P_M[1] = [\mathbf{dim} M]_-$ . Soit  $M$  est rigide dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $P_i[1]$  est un facteur direct de  $M$ . Alors

$$\dim H^0(M)(i) = \dim \operatorname{Hom}_{kQ}(P_i, H^0(M)) \leq \dim \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(H^0(M), P_i) = 0$$

et le résultat suit de la première assertion.  $\square$

Nous pouvons maintenant définir l'objet central de notre étude.

**Définition 8.1.12.** Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on note  $X_{\mathbf{d}}$  la valeur de  $X_{\mathcal{?}}$  sur l'ouvert  $U_{\mathbf{d}}$ . Soit maintenant  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on pose

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{d}} &= X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} u_i^{-d_i} \\ &= X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} X_{P_i[1]}^{-d_i} \\ &= X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} X_{P_i[1]^{\oplus(-d_i)}} \end{aligned}$$

et  $X_{\mathbf{d}}$  est appelée *variable générique de dimension  $\mathbf{d}$* .

On note

$$\mathcal{B}'(Q) = \{X_{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}\}$$

l'ensemble des variables génériques de  $\mathcal{C}_Q$ .

## 8.2 Propriétés multiplicatives des variables génériques

La décomposition canonique va jouer un rôle essentiel dans le calcul de variables génériques. On rappelle qu'étant donné un vecteur de dimension  $\mathbf{d}$ , on note  $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}$  l'ouvert de décomposition canonique de Kac. Puisque la variété  $\operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$  est irréductible, il s'ensuit que  $U_{\mathbf{d}} \cap \mathfrak{M}_{\mathbf{d}} \neq \emptyset$ . Ainsi,  $X_{\mathbf{d}}$  est égal à un  $X_M$  pour une certaine représentation  $M \in \mathfrak{M}_{\mathbf{d}}$ .

En accord avec la terminologie introduite par Schofield dans [85], on pose la définition suivante :

**Définition 8.2.1.** Pour tous vecteurs de dimension  $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on dit que  $\operatorname{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$  s'annule généralement si il existe  $M \in \operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$ ,  $M' \in \operatorname{rep}(Q, \mathbf{d}')$  tels que

$$\operatorname{Ext}_{kQ}^1(M, M') = 0$$

Dans ce cas, on note  $\operatorname{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$ .

**Proposition 8.2.2.** Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension dont la décomposition canonique est  $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}_n$ . Alors

$$X_{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^n X_{\mathbf{e}_i}.$$

*Démonstration.* On considère le morphisme de variétés injectif :

$$\phi : \begin{cases} \text{rep}(Q, \mathbf{e}_1) \times \cdots \times \text{rep}(Q, \mathbf{e}_n) & \longrightarrow & \text{rep}(Q, \mathbf{d}) \\ (M_1, \dots, M_n) & \longmapsto & \bigoplus_{i=1}^n M_i \end{cases}$$

D'après 2.1.4, comme  $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}_n$  est la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$ , on a  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$  pour tous  $i \neq j$ . Il suit de [28] que  $\phi$  est un morphisme dominant.

On pose

$$\mathcal{U} = (\mathfrak{M}_{\mathbf{e}_1} \cap U_{\mathbf{e}_1}) \times \cdots \times (\mathfrak{M}_{\mathbf{e}_n} \cap U_{\mathbf{e}_n}),$$

c'est un ouvert dense dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{e}_1) \times \cdots \times \text{rep}(Q, \mathbf{e}_n)$  et donc  $\phi(\mathcal{U})$  est un ouvert dense dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ . En particulier, il s'ensuit que  $\phi(\mathcal{U}) \cap U_{\mathbf{d}} \neq \emptyset$  et on peut donc choisir  $M \in \phi(\mathcal{U}) \cap U_{\mathbf{d}}$ . On a ainsi  $X_{\mathbf{d}} = X_M$  et  $M$  se décompose en une somme directe

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

avec  $M_i \in \mathfrak{M}_{\mathbf{e}_i} \cap U_{\mathbf{e}_i}$  et alors

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{d}} &= X_M \\ &= X_{\bigoplus_{i=1}^n M_i} \\ &= \prod_{i=1}^n X_{M_i} \\ &= \prod_{i=1}^n X_{\mathbf{e}_i}. \end{aligned}$$

□

La proposition suivante généralise la proposition 8.2.2 en donnant une propriété multiplicative pour les variables génériques sur la catégorie amassée en général analogue à celles démontrées dans [51] pour la base semi-canonique duale de  $U(\mathfrak{n})$ . On étend la notion d'annulation générale de l'extension à la catégorie amassée :

**Définition 8.2.3.** Soient  $\mathbf{d}, \mathbf{d}'$  des éléments de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ , on dit que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$  s'annule généralement si il existe  $M \in \text{rep}(Q, [\mathbf{d}]_+)$ ,  $M' \in \text{rep}(Q, [\mathbf{d}']_+)$  tels que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1 \left( M \oplus \bigoplus_{d_i < 0} P_i[1]^{\oplus(-d_i)}, M' \oplus \bigoplus_{d'_i < 0} P_i[1]^{\oplus(-d'_i)} \right) = 0.$$

Dans ce cas, on note  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$ .

On remarquera en particulier que si  $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbb{N}^{Q_0}$  sont des vecteurs de dimension tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$  alors  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$  et  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}', \mathbf{d}) = 0$ .

**Proposition 8.2.4.** Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$ . Alors

$$X_{\mathbf{d}} X_{\mathbf{d}'} = X_{\mathbf{d} + \mathbf{d}'}$$

*Démonstration.* Si il existe  $i \in Q_0$  tel que  $d_i < 0$  et  $d'_i > 0$ , alors pour tout  $M' \in \text{rep}(Q, \mathbf{d}')$ ,  $0 < d'_i = \dim \text{Hom}_{kQ}(P_i, M') = \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M', P_i[1])$  et donc  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$  ne s'annule pas généralement. Ainsi, on peut supposer que  $d_i$  et  $d'_i$  sont du même signe pour tout  $i \in Q_0$ . En particulier,  $[\mathbf{d} + \mathbf{d}']_+ = [\mathbf{d}]_+ + [\mathbf{d}']_+$ . Comme  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$ , on a  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$  et  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}', \mathbf{d}) = 0$ , il suit alors de [28] que le morphisme

$$\phi : \begin{cases} \text{rep}(Q, [\mathbf{d}]_+) \times \text{rep}(Q, [\mathbf{d}']_+) & \longrightarrow & \text{rep}(Q, [\mathbf{d} + \mathbf{d}']_+) \\ (U, V) & \longmapsto & U \oplus V \end{cases}$$

est dominant. Comme  $U_{[\mathbf{d}]}$  (resp.  $U_{[\mathbf{d}']_+}$ ) est ouvert dans  $\text{rep}(Q, [\mathbf{d}]_+)$  (resp. dans  $\text{rep}(Q, [\mathbf{d}']_+)$ ), il s'ensuit que  $U_{[\mathbf{d}]} \oplus U_{[\mathbf{d}']_+}$  est ouvert et dense dans  $\text{rep}(Q, [\mathbf{d} + \mathbf{d}']_+)$ . Ainsi,  $X_{[\mathbf{d} + \mathbf{d}']_+} = X_{[\mathbf{d}]_+} X_{[\mathbf{d}']_+}$  et donc

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{d}} X_{\mathbf{d}'} &= X_{[\mathbf{d}]_+} \left( \prod_{d_i < 0} X_{P_i[1]^{\oplus(-d_i)}} \right) X_{[\mathbf{d}']_+} \left( \prod_{d'_i < 0} X_{P_i[1]^{\oplus(-d'_i)}} \right) \\ &= X_{[\mathbf{d} + \mathbf{d}']_+} \prod_{d_i + d'_i < 0} X_{P_i[1]^{\oplus(-(d_i + d'_i))}} \\ &= X_{\mathbf{d} + \mathbf{d}'} \end{aligned}$$

□

Nous montrons maintenant que les monômes d'amas apparaissent naturellement comme des variables génériques.

**Lemme 8.2.5.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique, soit  $x$  un monôme d'amas dans  $A(Q)$  de vecteur de dénominateur  $\delta(x)$ . Alors*

$$x = X_{\delta(x)}.$$

*De manière équivalente, si  $M$  est un objet rigide dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a*

$$X_M = X_{\mathbf{dim} M}.$$

*Démonstration.* D'après le théorème 3.1.4, si  $x$  est un monôme d'amas, on peut l'écrire  $X_M$  pour un certain objet rigide  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  et d'après le théorème des dénominateurs 3.1.8, on a  $\delta(X_M) = \mathbf{dim} M$ . De plus, si  $M$  est rigide, on a  $[\mathbf{dim} M]_+ = \mathbf{dim} H^0(M)$  et  $[\mathbf{dim} M]_- = \mathbf{dim} P_M[1]$  d'après le lemme 8.1.11.  $H^0(M)$  étant un module rigide dans  $\text{rep}(Q, [\mathbf{dim} M]_+)$ , son orbite  $\mathcal{O}_{H^0(M)}$  est dense dans  $\text{rep}(Q, [\mathbf{dim} M]_+)$  et donc  $\mathcal{O}_{H^0(M)} \cap U_{[\mathbf{dim} M]_+} \neq \emptyset$ . Cela implique que  $X_{H^0(M)} = X_{[\mathbf{dim} M]_+}$ . Mais, on a toujours  $X_{P_M[1]} = X_{[\mathbf{dim} M]_-}$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x &= X_M \\ &= X_{H^0(M) \oplus P_M[1]} \\ &= X_{H^0(M)} X_{P_M[1]} \\ &= X_{[\mathbf{dim} M]_+} X_{[\mathbf{dim} M]_-} \end{aligned}$$



mais  $\text{Ext}_{C_Q}^1([\mathbf{dim} M]_+, [\mathbf{dim} M]_-)$  s'annule généralement car  $M$  est rigide et donc la proposition 8.2.4 implique que

$$\begin{aligned} X_{[\mathbf{dim} M]_+} X_{[\mathbf{dim} M]_-} &= X_{[\mathbf{dim} M]_+ + [\mathbf{dim} M]_-} \\ &= X_{\mathbf{dim} M} \\ &= X_{\delta(x)} \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.  $\square$

### 8.3 Variables génériques pour un carquois affine

Nous voulons maintenant obtenir une description explicite de  $X_{\mathbf{d}}$  lorsque  $Q$  est un carquois affine. A moins que l'on précise le contraire, on supposera toujours que le carquois  $Q$  considéré dans cette section est un carquois affine. Pour décrire les éléments  $X_{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , il suffit en vertu de la proposition 8.2.2 de savoir décrire les éléments  $X_{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc}}(Q)$ .

#### 8.3.1 Variables génériques pour les racines réelles de Schur

**Lemme 8.3.1.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique, soit  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc}, \text{re}}(Q)$ . Alors il existe une unique représentation indécomposable rigide  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  et*

$$X_{\mathbf{d}} = X_M.$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{re}}(Q)$ , il existe une unique représentation indécomposable de dimension  $\mathbf{d}$ . D'autre part puisque  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc}}(Q)$ , il existe une représentation de Schur de  $Q$  qui est nécessairement indécomposable et donc  $M$  est une représentation indécomposable de Schur. De plus

$$1 = \langle M, M \rangle = \dim \text{End}_{kQ}(M) - \dim \text{Ext}_{kQ}^1(M, M) = 1 - \dim \text{Ext}_{kQ}^1(M, M)$$

donc  $\dim \text{Ext}_{kQ}^1(M, M) = 0$  et  $M$  est rigide. Il suit alors du lemme 8.2.5 que  $X_M = X_{\mathbf{dim} M} = X_{\mathbf{d}}$ .  $\square$

#### 8.3.2 Variables génériques pour les racines imaginaires

Puisque  $Q$  est un carquois affine, la seule racine de Schur imaginaire est  $\delta$ . Nous montrons d'abord que  $X_{\delta}$  est la valeur prise par  $X_{\gamma}$  sur les quasi-simples des tubes homogènes.

**Notation 8.3.2.** Soit  $Q$  un carquois affine. Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1(Q)$ , on notera  $M_{\lambda}$  le quasi-simple du tube  $\mathcal{T}_{\lambda}(Q)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $M_{\lambda}^{(n)}$  l'unique indécomposable de quasi-socle  $M_{\lambda}$  et de quasi-longueur  $n$ .

Si  $E$  est un quasi-simple dans un tube exceptionnel  $\mathcal{T}$  de rang  $p \geq 2$ , on notera  $M_E = E^{(p)}$  l'unique indécomposable de quasi-longueur  $p$  et de quasi-socle  $E$ .

Ainsi, les représentations indécomposables de dimension  $\delta$  sont :

$$\{M_{\lambda} : \lambda \in \mathbb{P}_0^1(Q)\} \sqcup \{M_E : E \text{ quasi-simple dans un tube exceptionnel}\}.$$

**Lemme 8.3.3.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $\lambda, \mu \in \mathbb{P}_0^1(Q)$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  on a*

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = X_{M_\mu^{(n)}}.$$

*Démonstration.* Soit  $n \geq 1$ , il suit du théorème 5.4.3 que pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ , on a

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = P_{n,1}(X_{M_\lambda}).$$

Il suffit donc de montrer le lemme pour  $n = 1$ .

Nous allons utiliser la construction des modules réguliers de Crawley-Boevey [27]. Soit  $e$  un *sommet d'extension* de  $Q$ , c'est à dire un sommet tel que  $\delta_e = 1$  et que le carquois  $Q$  privé du sommet  $e$  est de type Dynkin. On note  $P = P_e$  le module projectif associé au sommet  $e$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{dim} P$  son vecteur de dimension. On a  $\partial_P = -1$ . Soit  $L$  l'unique représentation indécomposable de dimension  $\delta + \mathbf{p}$ . Alors  $L$  est une représentation indécomposable préprojective de défaut  $-1$ . Crawley-Boevey a montré que  $\mathrm{Hom}_{kQ}(P, L) \simeq k^2$  et que pour tout  $0 \neq \lambda \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, L)$ , le module  $\mathrm{coker} \lambda$  est un module régulier indécomposable de dimension  $\delta$ . En outre,  $\mathrm{coker} \lambda \simeq \mathrm{coker} \lambda'$  si et seulement si  $\lambda = x\lambda'$  pour un certain  $x \in k$ . Alors l'application  $\lambda \rightarrow \mathrm{coker} \lambda$  induit une bijection de  $\mathbb{P}\mathrm{Hom}_{kQ}(P, L)$  vers l'ensemble des tubes en associant à chaque  $\lambda \in \mathbb{P}\mathrm{Hom}_{kQ}(P, L)$  un module régulier indécomposable de dimension  $\delta$ . On identifie ainsi  $\mathbb{P}\mathrm{Hom}_{kQ}(P, L)$  et  $\mathbb{P}^1(k)$  et on dira que  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  pour signifier que  $\mathrm{coker} \lambda \simeq M_\lambda$  est un quasi-simple dans un tube homogène.

Soit ainsi  $\lambda \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, L)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{C_Q}^1(P, \mathrm{coker} \lambda) &\simeq \mathrm{Ext}_{kQ}^1(P, \mathrm{coker} \lambda) \oplus \mathrm{Ext}_{kQ}^1(\mathrm{coker} \lambda, P) \\ &\simeq \mathrm{Ext}_{kQ}^1(\mathrm{coker} \lambda, P) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \mathrm{coker} \lambda) \\ &\simeq k \end{aligned}$$

car  $P = P_e$  et  $e$  est un sommet d'extension. Il suit alors de la formule de multiplication unidimensionnelle que

$$X_P X_{\mathrm{coker} \lambda} = X_L + X_B$$

où  $B \simeq \ker f \oplus \mathrm{coker} f[-1]$  pour un morphisme  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$ .

Fixons maintenant  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ . Si  $f$  n'est pas surjective, alors  $\mathrm{im} f$  est préprojectif et on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow P \xrightarrow{f} \mathrm{im} f \rightarrow 0$$

et donc  $\partial_{\ker f} + \partial_{\mathrm{im} f} = \partial_P = -1$  mais  $\ker f$  et  $\mathrm{im} f$  sont préprojectifs et donc nécessairement  $\partial_{\ker f} = 0$  et  $\ker f = 0$ . Il s'ensuit donc que  $B \simeq \tau^{-1} \mathrm{coker} f$ . Mais

$$\partial_{\mathrm{coker} f} = \partial_{(\tau \mathrm{coker} \lambda)/P} = -\partial_P = 1$$

et  $\tau \mathrm{coker} \lambda \simeq \mathrm{coker} \lambda$  est un module quasi-simple dans un tube homogène, il s'ensuit que  $\mathrm{coker} f$  est préinjectif et alors par défaut, il est indécomposable. D'autre part,  $\mathbf{dim} \mathrm{coker} f = \delta - \mathbf{p}$ . Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et tout  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  non-surjectif,  $\mathrm{coker} f$  est l'unique représentation  $V$  indécomposable de dimension  $\delta - \mathbf{p}$ . D'autre part, puisque si  $f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$

est non-surjective,  $f$  est injective, il s'ensuit que  $\mathbf{dim} P \leq \delta$  et donc que pour tout  $g \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  et tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ ,  $g$  n'est pas surjective. Ainsi,

$$X_P X_{\mathrm{coker} \lambda} = X_L + X_V[-1]$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ . En particulier,  $X_{M_\lambda}$  est indépendant du représentant  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

Supposons maintenant que  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  est surjective, alors  $\ker f$  est un module préprojectif de dimension  $\mathbf{p} - \delta$ . Ainsi  $\ker f$  est de défaut  $-1$ , il est donc nécessairement indécomposable mais il existe une unique représentation indécomposable  $U$  telle que  $\mathbf{dim} U = \mathbf{p} - \delta$  donc  $\ker f \simeq U$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et tout  $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  surjective. Mais il suit de la discussion précédente que si l'une des  $f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  est surjective, alors toutes les  $f \in \mathrm{Hom}_{kQ}(P, \tau \mathrm{coker} \lambda)$  sont surjectives quel que soit le  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ . Dans ce cas, on a alors

$$X_P X_{\mathrm{coker} \lambda} = X_L + X_U$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ . En particulier  $X_{M_\lambda}$  est indépendant du représentant  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .  $\square$

**Remarque 8.3.4.** Nous donnerons au lemme 9.1.4 une démonstration alternative du lemme 8.3.3 dans le cas d'un carquois de type affine  $\hat{A}$ .

**Lemme 8.3.5.** Soit  $Q$  un carquois affine de racine positive imaginaire minimale  $\delta$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$X_{n\delta} = X_{M_\lambda}^n$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

*Démonstration.* On montre d'abord le résultat pour  $n = 1$ . On rappelle que la décomposition canonique de  $\delta$  est  $\delta$  elle-même. Ainsi,  $X_\delta = X_M$  pour une certaine représentation indécomposable  $M \in \mathrm{rep}(Q, \delta)$ . On sait par ailleurs qu'un module indécomposable de dimension  $\delta$  est ou bien isomorphe à  $M_\lambda$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ , ou bien isomorphe à  $M_E$  pour  $E$  quasi-simple dans un tube exceptionnel. Soit  $E$  quasi-simple dans un tube exceptionnel, on affirme alors que  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim} E}(M) = \emptyset$  pour tout module indécomposable  $M$  de dimension  $\delta$  non-isomorphe à  $M_E$ . En effet, soit  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $U \subset M_\lambda$  un sous-module tel que  $\mathbf{dim} U = \mathbf{dim} E$ . Comme  $M_\lambda$  est quasi-simple,  $U$  est préprojectif et  $\partial_U < 0$  mais  $\partial_U = \partial_E = 0$ , ce qui est une contradiction et donc  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim} E}(M_\lambda) = \emptyset$ . Soit alors  $F$  un quasi-simple tel que  $U \subset M_F$  est un sous-module tel que  $\mathbf{dim} U = \mathbf{dim} E$ . Alors on peut décomposer  $U = U_P \oplus U_R$  avec  $U_P$  préprojectif et  $U_R$  régulier. Comme  $\partial_U = \partial_E = 0$ , on a  $U_P = 0$  et donc  $U \simeq U_R$  est régulier. D'autre part  $U_R$  est un sous-module du module indécomposable  $M_F$ , par uniserialité des tubes,  $U_R$  est donc lui-même indécomposable. Comme  $\mathbf{dim} E = \mathbf{dim} U_R$  est une racine réelle, il s'ensuit que  $E \simeq U_R \subset M_F$  et donc  $F = E$ . Comme la  $G_\delta$ -orbite de  $M_E$  n'est pas ouverte, il s'ensuit que la valeur de  $\chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim} E}(-))$  est nulle sur  $U_{\delta, \mathbf{dim} E}$  et donc  $U_\delta \cap \mathcal{O}_{M_E} = \emptyset$  pour tout  $E$  dans un tube exceptionnel. Il s'ensuit que

$$U_\delta \cap \mathfrak{m}_\delta \subset \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{P}_0^1} \mathcal{O}_{M_\lambda}.$$

D'après le lemme 8.3.3, on a donc  $X_\delta = X_{M_\lambda}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

Supposons maintenant que  $n > 1$ . La décomposition canonique de  $n\delta$  est  $\delta \oplus \cdots \oplus \delta$ . Alors d'après la proposition 8.2.2, on a

$$X_{n\delta} = X_{\delta}^n = X_{M_{\lambda}}^n.$$

□

Contrairement au cas Dynkin, nous n'avons pas de résultat d'injectivité de l'application Caldero-Chapoton sur l'ensemble des objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$  dans le cas où  $Q$  est un carquois affine.

**Corollaire 8.3.6.** *Soit  $Q$  un carquois affine. Alors il existe  $M \not\cong N$  indécomposables tels que  $X_M = X_N$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 8.3.5, pour tous  $\lambda \neq \mu \in \mathbb{P}_0^1$ , on a  $X_{M_{\lambda}} = X_{M_{\mu}}$ . Mais d'autre part, puisque  $\lambda \neq \mu$ , on a  $M_{\lambda} \not\cong M_{\mu}$ . □

Nous pouvons en outre donner un exemple de modules avec des types de filtration distincts tels que les variables généralisées correspondantes sont égales.

**Lemme 8.3.7.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $\mathcal{T}$  un tube dans  $\Gamma(kQ)$  tel que  $\text{rg}(\mathcal{T}) = 2$ . Soient  $E_1, E_2$ , les quasi-simples de  $\mathcal{T}$ . Alors*

$$\mathcal{F}_{E_1^{(2)}} \neq \mathcal{F}_{E_2^{(2)}} \text{ et } X_{E_1^{(2)}} = X_{E_2^{(2)}}.$$

*Démonstration.* On a montré dans la preuve de 8.3.5 que pour tous  $i, j = 1, 2$ , on a  $\chi(\text{Gr}_{\dim E_i}(E_j^{(2)})) = \delta_{ij}$ , ainsi  $\mathcal{F}_{E_1^{(2)}} \neq \mathcal{F}_{E_2^{(2)}}$ . D'autre part, on a deux suites presque scindées

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_1^{(2)} \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_2^{(2)} \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc par formule de multiplication presque scindée, on a

$$X_{E_1^{(2)}} = X_{E_1} X_{E_2} - 1 = X_{E_1^{(2)}}.$$

□

**Remarque 8.3.8.** D'après la démonstration du lemme 8.3.5, on sait que  $\mathcal{F}_{M_E} \neq \mathcal{F}_{M_{\lambda}}$  si  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $E$  est un quasi-simple dans un tube exceptionnel. Il n'est cependant pas clair que  $X_{M_E} \neq X_{M_{\lambda}}$ . Il apparaîtra dans le théorème 9.1.9 que ces valeurs sont effectivement différentes dans une algèbre amassée affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  (ce résultat est conjecturé dans le cas affine général).

### 8.3.3 Variables génériques pour les racines réelles

On sait maintenant expliciter  $X_{\mathbf{d}}$  lorsque  $\mathbf{d}$  est une racine de Schur ou une racine imaginaire. Il reste alors à expliciter  $X_{\mathbf{d}}$  lorsque  $\mathbf{d}$  est une racine réelle qui n'est pas une racine de Schur. On rappelle que si  $\mathbf{d}$  est une racine réelle qui n'est pas une racine de Schur alors la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  est

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \delta^{\oplus k}$$

où  $k$  est tel que  $\mathbf{d} - k\delta$  est minimale dans  $(\mathbf{d} + \mathbb{Z}\delta) \cap \Phi_{>0}(Q)$ .

**Proposition 8.3.9.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $\mathbf{d}$  une racine réelle qui n'est pas une racine de Schur et soit  $\mathbf{d} = \delta^{\oplus k} \oplus \mathbf{d}_0$  sa décomposition canonique. Alors*

$$X_{\mathbf{d}} = X_{M_\lambda}^k X_{M_0}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  où  $M_0$  désigne l'unique module indécomposable de dimension  $\mathbf{d}_0$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 8.3.1,  $X_{\mathbf{d}_0} = X_{M_0}$  où  $M_0$  est l'unique représentation indécomposable dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d}_0)$  et d'après le lemme 8.3.5,  $X_{k\delta} = X_\delta^k = X_{M_\lambda}^k$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ . La proposition 8.2.2 implique alors que

$$X_{\mathbf{d}} = X_{k\delta} X_{\mathbf{d}_0} = X_{M_\lambda}^k X_{M_0}.$$

□

On peut alors donner une description complète de l'ensemble des variables génériques d'un carquois affine.

**Proposition 8.3.10.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$  un ensemble de représentants des isoclasses de représentations régulières rigides. Alors*

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \left\{ X_{M_\lambda^{\oplus n} \oplus E} : n \geq 1, E \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \right\}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

*Démonstration.* On fixe  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ . On écrit  $[\mathbf{d}]_+ = \delta^k \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  la décomposition canonique de  $[\mathbf{d}]_+$  où chaque  $\mathbf{e}_i$  est une racine réelle de Schur.

Si  $k \neq 0$ , comme  $\delta$  est sincère, on a  $[\mathbf{d}]_+ = \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . D'après la proposition 2.1.4 et le lemme 8.3.5, il existe  $M$  dans  $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}} \cap U_{\mathbf{d}}$  tel que

$$M = \bigoplus_{j=1}^k M_{\lambda_j} \oplus \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

où pour tous facteurs indécomposables distincts  $U, V$  de  $M$ , on a  $\text{Ext}_{kQ}^1(U, V) = 0$ .

Si l'un des  $M_i$  est préprojectif, alors il existe un sommet  $v \in Q_0$  et un entier  $s \geq 0$  tel que  $M_i \simeq \tau^{-s} P_v$  et alors

$$\text{Ext}_{C_Q}^1(M_i, M_{\lambda_1}) = \text{Hom}_{C_Q}(P_v, M_{\lambda_1}) = \dim M_{\lambda_1}(v) = \delta_v > 0$$

d'où une contradiction. De la même manière, aucun des  $M_i$  ne peut être pré-injectif. Il s'ensuit que chaque  $M_i$  est régulier et donc les  $M_i$  sont des modules indécomposables réguliers dans des tubes exceptionnels tels que  $\dim M_i \leq \delta$ . Comme  $\text{Ext}_{kQ}^1(M_i, M_l) = 0$  pour  $i \neq l$ , il s'ensuit que  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  est rigide.

Si  $k = 0$ , alors  $M \in \mathfrak{M}_{\mathbf{d}} \cap U_{\mathbf{d}}$  est rigide et donc  $M \oplus \bigoplus_{d_i < 0} P_i[1]^{\oplus -d_i}$  est un objet rigide. Ainsi,  $X_{\mathbf{d}}$  est un monôme d'amas.

Ceci prouve l'inclusion

$$\mathcal{B}'(Q) \subset \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \left\{ X_{M_\lambda^{\oplus n} \oplus E} : n \geq 1, E \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \right\}.$$

On démontre maintenant l'inclusion inverse. D'après le lemme 8.2.5, il suffit de montrer que  $\left\{ X_{M_\lambda^{\oplus n} \oplus E} : n \geq 1, E \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \right\} \subset \mathcal{B}'(Q)$ . Supposons que  $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ ,

alors  $X_{\dim E} = X_E$  d'après le lemme 8.2.5. D'autre part,  $X_{M_\lambda^{\oplus n}} = X_{n\delta}$  d'après le lemme 8.3.5. Soient maintenant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments distincts de  $\mathbb{P}_0^1$ , comme il n'y a pas d'extensions entre les tubes, on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E, M_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_n}) = 0$$

et donc  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\mathbf{dim} E, n\delta)$  s'annule généralement. D'après la proposition 8.2.4, on a alors

$$X_{\mathbf{dim} E + n\delta} = X_{\mathbf{dim} E} X_{n\delta} = X_{E \oplus M_\lambda^{\oplus n}}$$

ce qui prouve l'égalité recherchée.

Il reste finalement à montrer que la réunion est disjointe. Soit  $X_{\mathbf{d}} = X_{M_\lambda^{\oplus n} \oplus E}$  avec  $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$  et  $n \geq 1$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments deux à deux distincts de  $\mathbb{P}_0^1$ , et  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$  la décomposition de  $E$  en facteurs indécomposables. Alors

$$M_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_n} \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_m$$

est somme directe de représentations de Schur telles que  $\mathrm{Ext}_{kQ}^1(U, V) = 0$  pour tous facteurs directs indécomposables  $U, V$ . Il s'ensuit que

$$\mathbf{d} = \delta^{\oplus n} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{dim} E_i$$

est la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$ . Comme  $\dim \mathrm{Ext}_{kQ}^1(M, M) \neq 0$  pour toute représentation dans  $\mathrm{rep}(Q, n\delta)$  pour  $n \geq 1$ , il n'y a pas de module rigide dans  $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ . Le théorème de dénominateurs 3.1.8 assure alors qu'il n'existe pas d'objet rigide  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $X_M = X_{\mathbf{d}}$ .  $\square$

**Remarque 8.3.11.** Comme remarqué dans [88, 22], les monômes d'amas ne suffisent pas à engendrer une algèbre amassée qui n'est pas de type fini. Dans le cas du carquois de Kronecker (voir section 9.4), il apparaît qu'il faut rajouter un ensemble de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires du carquois. La proposition 8.3.10 montre que de manière générale, cette partie supplémentaire ne correspond pas simplement aux racines imaginaires mais plus précisément à tous les éléments de  $\mathbb{N}^{Q_0}$  dont la décomposition canonique contient une racine imaginaire. Dans le cas du Kronecker, cet ensemble se réduit aux racines imaginaires et dans le cas d'un carquois Dynkin, cet ensemble est simplement vide.

Nous montrons maintenant que la base semi-canonique généralise la base de Caldero-Keller pour le type fini.

**Proposition 8.3.12.** *Soit  $Q$  un carquois Dynkin. Alors*

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas dans } \mathcal{A}(Q)\}.$$

*En particulier,  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{M}(Q) = \{\text{monômes d'amas de } \mathcal{A}(Q)\}$  l'ensemble des monômes d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$ . Il suit du lemme 8.2.5 que  $\mathcal{M}(Q) \subset \mathcal{B}'(Q)$ . Soit maintenant un élément  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  de décomposition canonique  $\mathbf{d} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ . Alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe une représentation de Schur  $M_i \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{e}_i)$

telle que  $\text{Ext}_{kQ}^1(M_i, M_j) = 0$  si  $i \neq j$ . Comme  $Q$  est Dynkin, chaque  $\mathbf{e}_i$  est une racine de Schur réelle et donc  $M_i$  est rigide. Il s'ensuit que  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$  est rigide dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  et donc  $X_{\mathbf{d}} = X_M$  est un monôme d'amas.

Supposons maintenant que  $\mathbf{d}$  est un élément arbitraire de  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ , alors

$$X_{\mathbf{d}} = X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} u_i^{-d_i}.$$

et d'après la discussion précédente il existe une représentation rigide  $M \in \text{rep}(Q, [\mathbf{d}]_+)$  telle que  $X_M = X_{[\mathbf{d}]_+}$ . De plus, pour tout  $i \in Q_0$  tel que  $d_i < 0$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, P_i[1]) = 0$  et donc  $N = M \oplus \bigoplus_{d_i < 0} P_i[1]^{\oplus(-d_i)}$  est rigide dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $X_{\mathbf{d}} = X_N$  est un monôme d'amas. On a donc  $\mathcal{B}'(Q) = \mathcal{M}(Q)$ . D'après le théorème 1.4.7,  $\mathcal{M}(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

## Chapitre 9

# Structure des algèbres amassées affines de type $\tilde{A}$



Let but de ce chapitre est de montrer que les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans une algèbre amassée associée à un carquois affine de type  $\tilde{A}$ . Les méthodes utilisées sont une généralisation de celles de Caldero et Keller pour le type fini [20]. Les méthodes développées ne vont en fait pas reposer sur le fait que l'on soit dans le type  $\tilde{A}$  mais plus précisément sur le fait que le carquois affine considéré satisfait une certaine propriété de différence, dont on montrera qu'elle est vérifiée pour les algèbres amassées de type  $\tilde{A}$ .

La stratégie est la suivante. Nous montrons d'abord que toutes les variables généralisées peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de variables génériques. Pour ce faire, nous étudions les variables généralisées associées aux modules indécomposables et montrons un certain nombre de relations entre ces variables. Dans le cas affine  $\tilde{A}$ , cette étude fait apparaître à la section 9.1 une relation essentielle entre les variables associées à des indécomposables de dimension  $\delta$  d'un tube homogène et d'une tube exceptionnel. Si cette relation est vérifiée, on dit que le carquois  $Q$  vérifie la *propriété de différence*. Nous conjecturons que cette relation est aussi vérifiée pour les carquois de types  $\tilde{D}$  et  $\tilde{E}$  (voir chapitre 10). Nous montrons à la section 9.2 que lorsque la propriété de différence est vérifiée, les variables généralisées associées aux objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$  s'écrivent comme combinaisons linéaires de variables génériques. Ensuite, nous utilisons les formules de multiplications pour montrer que les variables génériques associées aux objets décomposables sont aussi engendrées par ces variables génériques.

Dans la section 9.3, nous étudions la possibilité de définir une graduation sur une algèbre amassée associée à un carquois affine. Ceci permet de montrer que si les carquois d'un certain sous-ensemble de la classe de réflexion de  $Q$  vérifient la propriété de différence, les variables génériques sont linéairement indépendantes au-dessus de  $\mathbb{Q}$  et forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(Q)$ . Dans la section 9.5, nous donnons alors les valeurs explicites des éléments de la base dans le cas d'un carquois affine de type  $\tilde{A}$  de moins de 4 sommets. Dans le cas du carquois de Kronecker, nous comparons de plus la base obtenue aux bases déjà connues.

Enfin, nous complétons ce chapitre par l'introduction à la section 9.6 d'une formule combinatoire explicite pour les variables d'amas régulières dans une algèbre amassée de type  $\tilde{A}$ .

## 9.1 La propriété de différence pour le type $\tilde{A}$

### 9.1.1 Compléments sur le type $\tilde{A}$

Si  $Q$  est un carquois affine de type  $\tilde{A}$ , sa racine positive imaginaire minimale est

$$\delta = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{Q_0}.$$

En conséquence, tous les modules indécomposables préprojectifs (resp. préinjectifs, réguliers) ont le même défaut :

**Lemme 9.1.1.** *Soit  $Q$  un carquois de type affine  $\tilde{A}$  et soit  $M$  un  $kQ$ -module indécomposable. Alors*

1.  $M$  est préprojectif si et seulement si  $\partial_M = -1$  ;
2.  $M$  est préinjectif si et seulement si  $\partial_M = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $M$  préprojectif. Alors il existe  $s \in \mathbb{N}$  et  $v \in Q_0$  tel que  $\tau^{-s}M \simeq P_v$ . Soit alors  $M_\lambda$  un quasi-simple d'un tube homogène. Alors  $\mathbf{dim} M_\lambda = \delta$  et donc on a  $M_\lambda(i) \simeq k$  pour tout  $i \in Q_0$ .

$$\begin{aligned} \partial_M &= \langle M_\lambda, M \rangle \\ &= -\dim \operatorname{Ext}_{kQ}^1(M_\lambda, \tau^{-s}M) \\ &= -\dim \operatorname{Hom}_{kQ}(\tau^{-s}M, M_\lambda) \\ &= -\dim \operatorname{Hom}_{kQ}(P_v, M_\lambda) \\ &= -\dim M_\lambda(v) \\ &= -1. \end{aligned}$$

On montre de la même manière le second point.  $\square$

Dans l'étude des variables généralisées, la connaissance de la grassmannienne de sous-modules est essentielle. Le fait que l'on soit en type  $\tilde{\mathbb{A}}$  simplifie l'étude du fait que l'on est dans un cas « sans multiplicité » au sens suivant :

**Lemme 9.1.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  un vecteur de dimension tel que  $d_i \leq 1$  pour tout  $i \in Q_0$ . Soit  $M \in \operatorname{rep}(Q, \mathbf{d})$  et  $\mathbf{e} \leq \mathbf{d}$  un autre vecteur de dimension. Alors ou bien  $\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \emptyset$ , ou bien  $\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$  contient un seul élément et alors  $\chi(\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) = 1$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M) \neq \emptyset$  et soit  $N \in \operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ . Pour tout  $i$  tel que  $e_i \neq 0$ ,  $N(i)$  est un sous-espace vectoriel non-nul de la droite  $M(i)$  et donc  $N(i) = M(i)$ . Ainsi,  $N$  est la représentation donnée par

$$N(i) = \begin{cases} M(i) & \text{si } e_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $N(i \rightarrow j) = M(i \rightarrow j)|_{N(i)}$ . Ainsi,  $\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \{N\}$  est un point.  $\square$

Le *théorème de Schofield* donne un outil efficace pour vérifier qu'une grassmannienne de sous-modules n'est pas vide. Ce théorème sera d'un grand intérêt dans le cas  $\tilde{\mathbb{A}}$  en vertu du lemme 9.1.2.

**Théorème 9.1.3** ([85]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$  des vecteurs de dimension tels que  $\operatorname{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = 0$ . Alors toute représentation de dimension  $\mathbf{d} + \mathbf{e}$  contient une sous-représentation de dimension  $\mathbf{d}$ .*

Le théorème de Schofield permet en particulier de donner une preuve alternative au lemme 8.3.3 dans le cas d'un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ .

**Lemme 9.1.4.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{P}_0^1$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = X_{M_\mu^{(n)}}$$

*Démonstration.* Si  $n = 1$ , on montre que  $\chi(\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda)) = \chi(\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\mu))$  pour tout vecteur de dimension  $\mathbf{e} \leq \delta$ . Soit  $U \subset M_\lambda$  un sous-module propre. Alors  $\chi(\operatorname{Gr}_{\mathbf{dim} U}(M_\lambda)) = 1$  d'après le lemme 9.1.2. Comme  $M_\lambda$  est quasi-simple,  $U$  est préprojectif. Soit  $M_\lambda/U = \bigoplus_i V_i$  sa décomposition en objets indécomposables. Pour tout  $i$ , il existe une application surjective  $M_\lambda \rightarrow V_i$  et donc

chaque  $V_i$  est régulier ou préinjectif. En particulier,  $\text{Ext}_{kQ}^1(U, M_\lambda/U) = 0$  et donc  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{dim} U, \delta - \mathbf{dim} U) = 0$ . Il suit du théorème de Schofield que  $\text{Gr}_{\mathbf{dim} U}(M_\mu) \neq \emptyset$  et alors le lemme 9.1.2 implique que  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{dim} U}(M_\mu)) = 1 = \chi(\text{Gr}_{\mathbf{dim} U}(M_\lambda))$ . En particulier,  $X_{M_\mu} = X_{M_\lambda}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{P}_0^1$ .

Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ , il suit du théorème 5.4.3 que

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = P_{n,1}(M_\lambda)$$

Comme  $X_{M_\mu} = X_{M_\lambda}$ , il suit que  $X_{M_\mu^{(n)}} = X_{M_\lambda^{(n)}}$  pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

**Remarque 9.1.5.** On remarquera que le théorème de Schofield montre en fait un résultat un peu plus fort que le lemme 8.3.3. En effet, on a montré que pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{P}_0^1$ , on a

$$\mathcal{F}_{M_\lambda} = \mathcal{F}_{M_\mu}.$$

### 9.1.2 Variables généralisées des tubes exceptionnels

Dorénavant, on suppose que  $Q$  n'est pas le carquois de Kronecker et on fixe un module quasi-simple  $E$  dans un tube exceptionnel de rang  $p > 1$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $M_E^{(n)} = E^{(kp)}$  l'unique indécomposable de vecteur de dimension  $n\delta$  et de quasi-socle  $E$ . Si  $M \simeq E^{(n)}$  est un module indécomposable dans un tube, on note toujours  $\text{q.rad} M = E^{(n-1)}$  son quasi-radical. Le but de cette section est de montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_{M_E^{(n)}} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ . Pour cela, nous allons montrer une relation fondamentale dans notre étude, à savoir :

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + X_{\text{q.rad} M_E/E}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

**Lemme 9.1.6.** *Soit  $Q$  un carquois de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}$ ,  $E$  un module quasi-simple dans un tube exceptionnel,  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $\mathbf{v}$  un vecteur de dimension. Si  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$ , alors  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{v}, \delta - \mathbf{v})$  s'annule généralement et  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda)) = \chi(\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E))$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathbf{v} = \delta$ , alors  $\text{Gr}_\delta(M_\lambda) = \{M_\lambda\}$  et  $\text{Gr}_\delta(M_E) = \{M_E\}$  ainsi

$$\chi(\text{Gr}_\delta(M_E)) = \text{Gr}_\delta(M_\lambda) = 1.$$

Supposons alors que  $\mathbf{v} \neq \delta$  est tel que  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$  et soit un sous-module  $V \subset M_\lambda$  de dimension  $\mathbf{v}$ . Alors  $V$  est préprojectif et  $M_\lambda/V$  est somme directe de préinjectifs et de réguliers. Il s'ensuit que  $\text{Ext}_{kQ}^1(V, M_\lambda/V) = 0$  et donc  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{v}, \delta - \mathbf{v}) = 0$ . D'après le théorème de Schofield (9.1.3) toute représentation de dimension  $\delta$  contient alors une sous-représentation de dimension  $\mathbf{v}$ . En particulier,  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E) \neq \emptyset$ . Alors le lemme 9.1.2 implique que  $\chi(\text{Gr}_\delta(M_E)) = \text{Gr}_\delta(M_\lambda) = 1$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

La proposition suivante étudie les grassmanniennes de sous-modules de  $M_E$  relativement à celle de  $M_\lambda$ .

**Proposition 9.1.7.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ ,  $E$  un module quasi-simple dans un tube exceptionnel,  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $V \subset M_E$  un sous-module propre de dimension  $\mathbf{v}$ . Alors on a :*

1. Si  $E \not\subset V$ , alors  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$ ,

2. Si  $E \subset V \subset \text{q.rad}M_E$ , alors  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) = \emptyset$ ,
3. Si  $E \subset V \not\subset \text{q.rad}M_E$ , alors  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* On remarque d'abord que si  $V \subset M_E$ ,  $V$  est nécessairement sans facteur préinjectif. On écrit ainsi  $V = V_P \oplus V_R$  avec  $V_P$  préprojectif et  $V_R$  régulier. De plus, par uniserialité des tubes, si  $V_R$  est non-nul, alors c'est un module indécomposable qui contient  $E$ .

Si  $E \not\subset V$ , alors  $V_R = 0$  et  $V = V_P$  est préprojectif.  $M_E/V$  étant une somme directe de modules réguliers et préinjectifs, il s'ensuit que  $\text{Ext}_{kQ}^1(V, M_E/V) = 0$  et alors le théorème 9.1.3 implique que  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$ , ce qui prouve le premier point.

Si  $E \subset V$ , alors  $V$  n'est pas préprojectif. D'autre part  $M_E/V$  est somme directe de modules réguliers et préinjectifs. Il vient

$$\text{Ext}_{kQ}^1(V, M_E/V) \simeq \text{Hom}_{kQ}(M_E/V, \tau V) = \text{Hom}_{kQ}(M_E/V, \tau V_R).$$

Comme  $E \subset V \subset \text{q.rad}M_E$ , on a

$$M_E/\text{q.rad}M_E \simeq (M_E/V)/(\text{q.rad}M_E/V)$$

et donc  $\tau E \simeq M_E/\text{q.rad}M_E$  est un quotient de  $M_E/V$ . En particulier

$$\text{Hom}_{kQ}(M_E/V, \tau E) \neq 0.$$

Comme  $\tau E \subset \tau V_R$ , on a

$$\text{Hom}_{kQ}(M_E/V, \tau V_R) \neq 0$$

et donc

$$\text{Ext}_{kQ}^1(V, M_E/V) \neq 0.$$

Comme  $\delta_i = 1$  pour tout  $i \in Q_0$ , il vient  $\text{Hom}_{kQ}(V, M_E/V) = 0$  et donc

$$\langle \mathbf{v}, \delta - \mathbf{v} \rangle < 0.$$

En particulier, pour toutes représentations  $X$  et  $Y$  de dimensions respectives  $\mathbf{v}$  et  $\delta - \mathbf{v}$ , on a  $\text{Ext}_{kQ}^1(X, Y) \neq 0$  et donc  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{v}, \delta - \mathbf{v})$  ne s'annule pas généralement. Il suit alors du lemme 9.1.6 que  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) = \emptyset$ , ce qui prouve le second point.

Supposons maintenant que  $E \subset V \not\subset \text{q.rad}M_E$ . Comme  $E \subset V$ , on a  $V_R \neq 0$ . Si  $V_P = 0$ , alors  $V = V_R$  est un sous-module régulier propre de  $M_E$ , il est donc contenu dans le quasi-radical  $\text{q.rad}M_E$ , ce qui est une contradiction. Ainsi la décomposition  $V = V_P \oplus V_R$  est non-triviale. On démontre maintenant que  $\text{Ext}_{kQ}^1(V_R, V_P) \neq 0$ . Soit

$$\pi : M_E \longrightarrow M_E/\text{q.rad}M_E \simeq \tau E$$

la projection canonique. Comme  $V \not\subset \text{q.rad}M_E$ ,  $\pi(V) \neq 0$  et donc  $\pi|_V : V \longrightarrow \tau E$  est un morphisme non-nul  $V \longrightarrow \tau E$ , ainsi

$$\text{Hom}_{kQ}(V, \tau E) \simeq \text{Hom}_{kQ}(V_P, \tau E) \oplus \text{Hom}_{kQ}(V_R, \tau E) \neq 0.$$

Comme  $E \subset V_R \subset \text{q.rad}M_E$ , la structure des tubes donne alors

$$\text{Hom}_{kQ}(V_R, \tau E) = 0$$

et ainsi  $\text{Hom}_{kQ}(V_P, \tau E) \neq 0$ . Puisque  $\tau E \subset \tau V_R$ , il s'ensuit que  $\text{Hom}_{kQ}(V_P, \tau V_R) \neq 0$  et donc  $\text{Ext}_{kQ}^1(V_R, V_P) \neq 0$ .

Soit alors une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow V_P \xrightarrow{t} X \xrightarrow{p} V_R \longrightarrow 0, \quad (9.1)$$

on montre que nécessairement  $X$  est préprojectif. En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{kQ}(-, M_\lambda)$  à la suite (9.1), on obtient une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_{kQ}(V_R, M_\lambda) \longrightarrow \text{Hom}_{kQ}(X, M_\lambda) \longrightarrow \text{Hom}_{kQ}(V_P, M_\lambda) \\ \longrightarrow \text{Ext}_{kQ}^1(V_R, M_\lambda) \longrightarrow \text{Ext}_{kQ}^1(X, M_\lambda) \longrightarrow \text{Ext}_{kQ}^1(V_P, M_\lambda) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de morphismes ni d'extensions entre les tubes, on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{kQ}(X, M_\lambda) \simeq \text{Hom}_{kQ}(V_P, M_\lambda).$$

Plus précisément, tout morphisme  $V_P \rightarrow M_\lambda$  se factorise en  $V_P \xrightarrow{t} X \rightarrow M_\lambda$ . On décompose alors  $X = X_P \oplus X_R \oplus X_I$  en facteurs préprojectifs, réguliers et préinjectifs. Comme  $\mathbb{P}_0^1$  est infini, on peut supposer que  $\lambda$  est choisi de sorte que  $V_R \notin \mathcal{T}_\lambda$  et ainsi  $\text{Hom}_{kQ}(X_R, M_\lambda) = 0$ . Soit l'inclusion  $f : V_P \rightarrow M_\lambda$ . Alors il existe une factorisation

$$V_P \xrightarrow{[i_1, i_2, i_3]^t} X_P \oplus X_R \oplus X_I \xrightarrow{[g_1, 0, 0]} M_\lambda$$

et donc  $f = g_1 i_1$  factorise à travers  $i_1$ . En particulier,  $i_1$  est injective et donc  $V_P \subset X_P$ . Par ailleurs, on a  $\mathbf{dim} X = \mathbf{dim} V \leq \delta$  et donc  $\dim X(i) \leq 1$  pour tout  $i$ . Il s'ensuit que  $\text{Hom}_{kQ}(V_P, X_R) = \text{Hom}_{kQ}(V_P, X_I) = 0$ . Ainsi,  $i_2 = i_3 = 0$  et alors la suite (9.1) donne

$$V_R \simeq X/V_P \simeq X_P/V_P \oplus X_R \oplus X_I.$$

Comme  $V_R$  est régulier, on a  $X_I = 0$ . Il s'ensuit que  $\delta_{X_P} = \delta_X = \delta_V = \delta_{V_P}$  et donc  $X_P/V_P$  est un module régulier. par uniserialité,  $V_R$  est indécomposable et donc ou bien  $X_P/V_P$  est nul, ou bien  $X_R$  est nul. Si  $X_P/V_P$  est nul, la suite (9.1) est scindée, ce qui est une contradiction. Il s'ensuit que  $X_R = 0$  et donc  $X = X_P$  est préprojectif.

Comme  $M_E/V$  est somme directe de modules réguliers et préinjectifs, on a alors

$$\text{Ext}_{kQ}^1(X, M_E/V) = 0$$

et donc  $\text{Ext}_{kQ}^1(\mathbf{v}, \delta - \mathbf{v})$  s'annule généralement. D'après le théorème 9.1.3, on a alors  $\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda) \neq \emptyset$ , ce qui prouve le dernier point.  $\square$

Nous posons alors la définition suivante :

**Définition 9.1.8.** On dit qu'un carquois affine  $Q$  satisfait la *propriété de différence* si pour tout module quasi-simple  $E$  dans un tube exceptionnel et pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ , on a

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + X_{\mathbf{q}, \text{rad} M_E/E}.$$

L'introduction de la définition 9.1.8 a été motivée par le théorème suivant :

**Théorème 9.1.9.** *Tout carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  satisfait la propriété de différence.*

*Démonstration.* Pour tout vecteur de dimension  $\mathbf{v}$ , la proposition 9.1.7 et le lemme 9.1.2 implique que

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E) = \emptyset$$

où on a noté  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E)$  l'ensemble des  $M \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(\mathrm{q.rad}M_E)$  telles que  $E \subset M$ . De plus, si  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E) \neq \emptyset$  et  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E) = \emptyset$ , on a  $\chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda})) = \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) = 1$  et si  $\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E) \neq \emptyset$ , on a  $\chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E)) = \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) = 1$ .

Soit alors  $\mathbf{e} = \dim E$ , il suit

$$\begin{aligned} X_{M_E} &= \sum_{\mathbf{v}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &= \sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) \neq \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &\quad + \sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) = \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{v}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda})) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &\quad + \sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) = \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &= X_{M_{\lambda}} + \sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) = \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) = \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} = \sum_{\mathbf{v}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle}$$

Comme

$$\begin{cases} \mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}^E(\mathrm{q.rad}M_E) & \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathbf{v}-\mathbf{e}}(\mathrm{q.rad}M_E/E) \\ U & \longmapsto U/E \end{cases}$$

est un isomorphisme de variétés, il vient

$$\sum_{\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_{\lambda}) = \emptyset} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} = \sum_{\mathbf{v}} \chi(\mathrm{Gr}_{\mathbf{v}-\mathbf{e}}(\mathrm{q.rad}M_E/E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle}$$

Mais si on écrit  $\mathbf{n} = \dim \mathrm{q.rad}(M_E/E) = \delta - c(\mathbf{e}) - \mathbf{e}$  où  $c$  est la transformation de Coxeter induite sur  $K_0(kQ)$  par la translation d'Auslander-Reiten, on a

$$\begin{aligned} -\langle (\mathbf{v} - \mathbf{e}), \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{n} - (\mathbf{v} - \mathbf{e}) \rangle &= -\langle \mathbf{v} - \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{e} - c(\mathbf{e}) - \mathbf{v} + \mathbf{e} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle + \langle \alpha_i, c(\mathbf{e}) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} X_{\text{q.rad}M_E/E} &= \sum_{\mathbf{v}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{v}-\mathbf{e}}(\text{q.rad}M_E/E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}-\mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{n} - (\mathbf{v}-\mathbf{e}) \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{v}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{v}-\mathbf{e}}(\text{q.rad}M_E/E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \\ &= \sum_{\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_\lambda)=\emptyset} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{v}}(M_E)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{v}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \delta - \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + X_{\text{q.rad}M_E/E},$$

et le théorème est démontré.  $\square$

Dans la démonstration précédente, on voit que le fait de considérer  $\text{q.rad}M_E/E$  semble très naturel dans les calculs des exposants des variables généralisées. Nous verrons au chapitre 10 que l'on peut espérer généraliser ce résultat aux types  $\tilde{D}$  et  $\tilde{E}$  (conjecture 10.0.17).

**Exemple 9.1.10.** Les cas les plus simples de carquois affines après le carquois de Kronecker sont les carquois de types affines  $\tilde{A}_{2,1}$ . Ils sont tous isomorphes à

$$Q : \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Le carquois AR de  $kQ$ -mod contient exactement un tube exceptionnel qui est de rang deux. Les quasi-simples de ce tube sont donnés par

$$E_0 : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \nearrow 0 & & \searrow \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

et

$$E_1 \simeq S_2 : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow & & \searrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

vérifiant  $\tau E_1 \simeq E_0$  et  $\tau E_0 \simeq E_1$ . Les représentations de dimension  $\delta$  correspondantes sont :

$$M_{E_0} : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow 0 & & \searrow 1 \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

et

$$M_{E_1} : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow 1 & & \searrow 0 \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

On a  $\tau M_{E_1} \simeq M_{E_0}$  et  $\tau M_{E_0} \simeq M_{E_1}$ .  
 Pour tout  $0 \neq \lambda \in k$ , on pose

$$M_\lambda : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow 1 & & \searrow \lambda \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

et on pose

$$M_\infty : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow 1 & & \searrow 1 \\ k & \xrightarrow{0} & k \end{array}$$

En identifiant  $\mathbb{P}^1$  et  $k \sqcup \{\infty\}$ , les  $M_\lambda$  pour  $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$  sont les représentations quasi-simples des tubes homogènes et donc  $\mathbb{P}_0^1(Q) = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ .

Le tableau suivant résume la situation où  $\lambda$  désigne un élément arbitraire de  $\mathbb{P}_0^1(Q)$  :

e	[000]	[001]	[010]	[100]	[011]	[101]	[110]	[111]
$\text{Gr}_e(M_\lambda)$	0	$S_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$P_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$M_\lambda$
$\chi(\text{Gr}_e(M_\lambda))$	1	1	0	0	1	0	0	1
$\text{Gr}_e(M_{E_0})$	0	$S_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$P_2$	$E_0$	$\emptyset$	$M_{E_0}$
$\chi(\text{Gr}_e(M_{E_0}))$	1	1	0	0	1	1	0	1
$\text{Gr}_e(M_{E_1})$	0	$S_3$	$E_1$	$\emptyset$	$S_2 \oplus S_3$	$\emptyset$	$E_1$	$M_{E_1}$
$\chi(\text{Gr}_e(M_{E_1}))$	1	1	1	0	1	0	0	1

On remarquera que même si les grassmanniennes de dimension [011] ont les mêmes caractéristiques d'Euler, elles contiennent des éléments non-isomorphes. Plus précisément,

$$\text{Gr}_{[011]}(M_{E_1}) = \{S_2 \oplus S_3\}$$

alors que

$$\text{Gr}_{[011]}(M_\lambda) = \text{Gr}_{[011]}(M_{E_0}) = \{P_2\}.$$

Avec les notations de la proposition 9.1.7, si  $V = S_2 \oplus S_3$ , on a  $V_P = S_3$ ,  $V_R = S_2$  et on a une extension non-triviale

$$0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0,$$

illustrant le second point de la proposition 9.1.7.

Maintenant, si on calcule les variables généralisées correspondant à ces modules, on trouve :

$$X_{M_{E_0}} = X_{M_{E_1}} = \frac{u_2 u_1^2 + u_3 u_1 u_2 + u_1 + u_3 + u_2 u_3^2}{u_1 u_2 u_3}$$

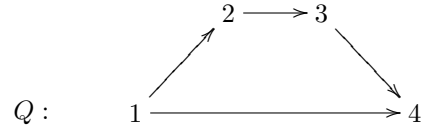
et

$$X_{M_\lambda} = \frac{u_2 u_1^2 + u_1 + u_3 + u_2 u_3^2}{u_1 u_2 u_3} = X_{M_{E_1}} - 1.$$

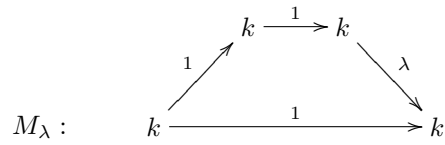
Comme  $\text{q.rad} M_{E_i} = E_i$  pour  $i = 1, 2$ , il suit que  $\text{q.rad} M_{E_i} / E_i = 0$ , ce qui illustre le théorème 9.1.9.



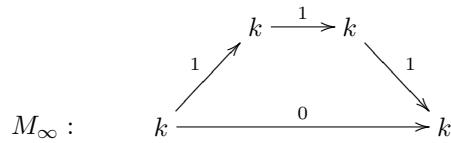
**Exemple 9.1.11.** Soit le carquois de type  $\tilde{A}_{3,1}$  :



Pour tout  $\lambda \in k$ , on pose

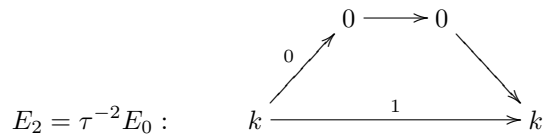
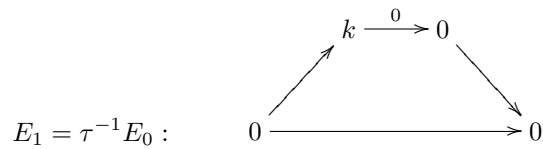
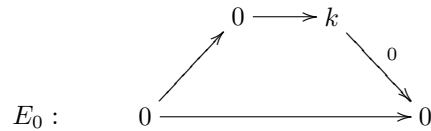


et



On identifie  $\mathbb{P}^1$  et  $k \sqcup \{\infty\}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$ ,  $M_\lambda$  est une représentation indécomposable de dimension  $\delta$  et de plus, si  $\lambda \neq 0$ , alors  $M_\lambda$  appartient à un tube homogène et  $\mathbb{P}_0^1(Q) = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ .

Les représentations quasi-simples sont



et  $\tau^{-3}E_0 = E_0$ . Ainsi,  $E_0$  est contenu dans un tube exceptionnel de rang trois et on a  $M_0 = M_{E_0}$ .

Le tube est ainsi

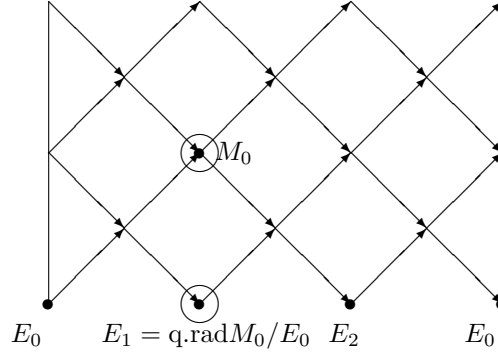


FIG. 9.1 – Le tube exceptionnel de  $\tilde{A}_{3,1}$

On remarquera que  $\text{q.rad}M_0 = E_0^{(2)}$  et  $\text{q.rad}M_0/E_0 = E_1$ . En calculant les variables généralisées, on obtient

$$X_{E_1} = \frac{u_1 + u_3}{u_2}$$

On calcule maintenant les grassmannienne où  $\lambda$  désigne un élément arbitraire de  $\mathbb{P}_0^1$ . On n'écrit que les vecteurs de dimension pour lesquels l'une des grassmanniennes considérées est non-vidé :

$\mathbf{e}$	[0000]	[0001]	[0010]	[0110]	[0011]	[0111]	[1111]
$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda)$	0	$S_4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$P_3$	$P_2$	$M_\lambda$
$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda))$	1	1	0	0	1	1	1
$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_0)$	0	$S_4$	$E_0$	$E_0^{(2)}$	$E_0 \oplus S_4$	$E_0^{(2)} \oplus S_4$	$M_0$
$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_{E_0}))$	1	1	1	1	1	1	1

Un calcul direct donne

$$X_{M_0} = \frac{u_1 u_4 u_3^2 + u_3 u_1^2 u_4 + u_3 u_2 u_4^2 + u_4 u_3 + u_3 u_2 u_1^2 + u_1 u_4 + u_2 u_1}{u_1 u_2 u_3 u_4}$$

et

$$X_{M_\lambda} = \frac{u_3 u_2 u_1^2 + u_2 u_1 + u_1 u_4 + u_4 u_3 + u_3 u_2 u_4^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}.$$

En calculant la différence, on obtient

$$X_{M_0} - X_{M_\lambda} = \frac{u_1 + u_3}{u_2} = X_{E_1},$$

qui illustre le théorème 9.1.9.

Il est intéressant de noter que pour  $\mathbf{e} = [0011]$ ,  $V \in \text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_0)$  est la représentation  $E_0 \oplus S_4$ . Avec les notations de la proposition 9.1.7,  $V_R = E_0$ ,  $V_P = S_4$  et  $P_3 \in \text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda)$  est effectivement le terme central d'une suite non-scindée

$$0 \longrightarrow S_4 \longrightarrow P_3 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0,$$

ce qui illustre la proposition 9.1.7.

**Remarque 9.1.12.** Dans toute la suite, nous n'utiliserons plus explicitement le fait que l'on soit dans le cas  $\tilde{\mathbb{A}}$  mais simplement la propriété de différence vérifiée par les carquois de types  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Ainsi, pour appliquer nos méthodes au cas affine en général, il suffira alors de démontrer que tout carquois affine vérifie la propriété de différence (conjecture 10.0.17).

Nous avons mentionné précédemment qu'il n'était pas clair a priori que l'algèbre  $\mathbb{Z}[X_M, M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)]$  coïncide avec l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ . Le théorème 9.1.9 permet alors de l'affirmer pour le type  $\tilde{\mathbb{A}}$  :

**Corollaire 9.1.13.** *Soit  $Q$  un carquois affine vérifiant la propriété de différence. Alors*

$$\mathbb{Z}[X_M, M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)] = \mathcal{A}(Q).$$

En particulier,

$$\mathcal{B}'(Q) \subset \mathcal{A}(Q).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $Q$  n'est pas le carquois de Kronecker. Il suffit de montrer que pour tout objet indécomposable  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a  $X_M \in \mathcal{A}(Q)$ . Si  $M$  est transjectif, alors il est rigide et donc  $X_M \in \text{Cl}(Q)$ . Si  $M$  est régulier. Supposons d'abord que  $M$  est contenu dans un tube exceptionnel  $\mathcal{T}$  de rang  $p \geq 2$ . Soient  $R_1, \dots, R_p$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $R_i$  est une représentation rigide de  $Q$  et donc d'après le théorème 3.1.4, on a  $X_{R_i} \in \text{Cl}(Q)$ . Il existe alors  $n \geq 1$  et  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  tel que  $M \simeq R_i^{(n)}$  mais alors d'après le théorème 5.4.3, on a

$$X_M = P_{n,p}(X_{R_i}, \dots, X_{R_{i+p-1}}) \in \mathcal{A}(Q).$$

Supposons maintenant que  $M$  est contenu dans un tube homogène  $\mathcal{T}_\lambda$ . Alors  $M \simeq M_\lambda^{(n)}$  pour un certain  $n \geq 1$ . Soit alors  $E$  n'importe quel quasi-simple dans un tube exceptionnel. D'après la propriété de différence, on a

$$X_{M_\lambda} = X_{M_E} - X_{\text{q.rad}M_E/E}$$

mais  $X_{M_E} \in \mathcal{A}(Q)$  et  $X_{\text{q.rad}M_E/E} \in \mathcal{A}(Q)$  donc  $X_{M_\lambda} \in \mathcal{A}(Q)$ . Mais alors, il suit du théorème 5.4.3 que

$$X_M = X_{M_\lambda^{(n)}} = P_{n,1}(X_{M_\lambda}) \in \mathcal{A}(Q).$$

Pour le carquois de Kronecker,

$$K : \quad 1 \rightrightarrows 2$$

on vérifie que

$$X_{M_\lambda} = X_{P_2}X_{I_1} - X_{P_1[1]}X_{P_2[1]} \in \mathcal{A}(Q).$$

On pourra aussi se référer à [22]. □

On peut aussi déduire du théorème 9.1.9 que les variables généralisées associées à des modules indécomposables de dimension  $\delta$  diffèrent dans certains cas.

**Corollaire 9.1.14.** *Soit  $Q$  un carquois affine vérifiant la propriété de différence. Soit  $E$  un  $kQ$ -module quasi-simple contenu dans un tube exceptionnel. Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ , on a*

$$X_{M_\lambda} \neq X_{M_E}.$$

**Corollaire 9.1.15.** *Soit  $Q$  un carquois affine vérifiant la propriété de différence. Si  $E$  est un module quasi-simple contenu dans un tube de rang  $p > 2$ . Alors  $X_{E^{(p)}} \neq X_{F^{(q)}}$  pour tout module quasi-simple  $F \neq E$  contenu dans un tube de rang  $q \geq 1$ .*

*Démonstration.* Comme  $E$  est contenu dans un tube de rang  $p > 2$ , il s'ensuit que  $\text{q.rad}M_E$  est de quasi-longueur  $l > 1$  et donc  $\text{q.rad}M_E/E$  est un module indécomposable rigide non-nul. Soit  $F$  un quasi-simple non-isomorphe à  $E$  contenu dans un tube  $\mathcal{T}$ . On note  $q = \text{rg}(\mathcal{T})$  et  $M_F = F^{(q)}$ . Si  $q = 1$ , d'après le théorème 9.1.9

$$X_{E^{(p)}} = X_{F^{(q)}} + X_{\text{q.rad}M_E/E} \neq X_{F^{(q)}} = X_F.$$

Si  $q = 2$ , alors  $\text{q.rad}M_F/F$  est nul et donc d'après le théorème 9.1.9, on a

$$X_{F^{(q)}} - 1 = X_{M_\lambda} = X_{E^{(p)}} - X_{\text{q.rad}M_E/E}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  mais puisque  $\text{q.rad}M_E/E \neq 0$ , il s'ensuit que  $X_{\text{q.rad}M_E/E} \neq 1$  et donc  $X_{E^{(p)}} \neq X_{F^{(q)}}$ . Si  $q > 2$ ,  $\text{q.rad}M_F/F$  est un module indécomposable rigide non-nul qui n'est pas isomorphe à  $\text{q.rad}M_E/E$ . En particulier,

$$\delta(X_{\text{q.rad}M_E/E}) = \mathbf{dim} \text{q.rad}M_E/E \neq \mathbf{dim} \text{q.rad}M_F/F = \delta(X_{\text{q.rad}M_F/F})$$

et donc

$$X_{E^{(p)}} = X_{M_\lambda} + X_{\text{q.rad}M_E/E} \neq X_{M_\lambda} + X_{\text{q.rad}M_F/F} = X_{F^{(q)}}.$$

□

Ce théorème permet aussi de démontrer une propriété non-triviale des polynômes de Chebyshev généralisés. Nous rappelons d'abord un résultat général sur les carquois affines :

**Lemme 9.1.16.** *Soit  $Q$  un carquois affine et  $\mathcal{T}$  un tube dans  $\Gamma(Q)$ . Alors les vecteurs de dimension des modules quasi-simples de  $\mathcal{T}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Soient  $E_0, \dots, E_{p-1}$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau E_i = E_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a

$$\dim \text{Ext}_{kQ}^1(E_i, E_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\dim \text{Hom}_{kQ}(E_i, E_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit alors une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire nulle  $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \mathbf{dim} E_j = 0$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , la forme linéaire  $\langle -, \mathbf{dim} E_i \rangle$  appliquée à cette égalité donne

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} = 0.$$

Ainsi  $\lambda_i = \lambda_j$  pour tout  $i \neq j$  et on note  $\lambda$  cette valeur commune. Alors

$$0 = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \mathbf{dim} E_j = \lambda \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{dim} E_j$$

et  $\lambda = 0$ . □

**Lemme 9.1.17.** *Soit  $Q$  un carquois affine gradué  $\mathcal{T}$  un tube de rang  $p \geq 1$  dans  $\Gamma(Q)$ . Soient  $E_0, \dots, E_{p-1}$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}$ . alors la famille  $\{X_{E_0}^Q, \dots, X_{E_{p-1}}^Q\}$  est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Soit un polynôme non-nul  $P = \sum_{\nu \in J} a_\nu \mathbf{t}^\nu \in \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_p]$ . On considère

$$P(X_{E_0}^Q, \dots, X_{E_{p-1}}^Q) = \sum_{\nu \in J} a_\nu X_{E_0^{\oplus \nu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \nu_{p-1}}}^Q = \sum_{\nu} a_\nu X_{E_0^{\oplus \nu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \nu_{p-1}}}^Q$$

Pour tout  $\nu \in J$ ,

$$\dim \left( E_0^{\oplus \nu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \nu_{p-1}} \right) = \sum_{i=0}^{p-1} \nu_i \dim E_i,$$

et ainsi, d'après le lemme 9.1.16, on a

$$\dim \left( E_0^{\oplus \nu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \nu_{p-1}} \right) \neq \dim \left( E_0^{\oplus \mu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \mu_{p-1}} \right)$$

si  $\nu \neq \mu$ . D'après le lemme 3.1.18, les  $X_{E_0^{\oplus \nu_0} \oplus \dots \oplus E_{p-1}^{\oplus \nu_{p-1}}}^Q$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  et donc  $P(X_{E_0}^Q, \dots, X_{E_{p-1}}^Q) \neq 0$ .  $\square$

Soit  $p > 1$ ,  $\{x_{i,1} : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  une famille d'éléments algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , on pose

$$\Delta_p(x_{i,1}, \dots, x_{i+p-1,1}) = P_{p,p}(x_{i,1}, \dots, x_{i+p-1,1}) - P_{p-2,p}(x_{i+1,1}, \dots, x_{i+p-2,1}).$$

**Proposition 9.1.18.** *Soit  $p > 1$ . Alors  $\Delta_p(x_{i,1}, \dots, x_{i+p-1,1})$  ne dépend pas de  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Soit  $A$  le carquois de type  $\tilde{A}_{p,p}$  muni d'une orientation alternée. Soit  $X_{\tilde{\tau}}^A$  l'application Caldero-Chapoton sur  $\mathcal{C}_A$ . On se fixe  $\mathcal{T}(A)$  un tube exceptionnel de  $\Gamma(A)$ , alors  $\text{rg}(\mathcal{T}(A)) = p$  et on note  $R_1, \dots, R_p$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}(A)$  ordonnés de sorte que  $\tau R_i \simeq R_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Le carquois  $A$  étant muni d'une orientation alternée, il est gradué. Il suit alors du lemme 9.1.17 que la famille  $\{X_{R_i}^A, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .

On pose alors le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X_{R_i}^A : i \in \mathbb{Z}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x_{i,1} : i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \\ X_{R_i}^A & \longmapsto & x_{i,1} \end{cases}$$

D'après le théorème 5.4.3, pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  on a

$$X_{M_{R_i}}^A = P_{p,p}(X_{R_i}^A, \dots, X_{R_{i+p-1}}^A)$$

$$X_{\text{q.rad}M_{R_i}/R_i}^A = P_{p-2,p}(X_{R_{i+1}}^A, \dots, X_{R_{i+p-1}}^A)$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1(A)$ , on note  $A_\lambda$  le module quasi-simple du tube  $\mathcal{T}_\lambda(A)$ , il suit de la propriété de différence que

$$X_{M_{R_i}}^A - X_{\text{q.rad}M_{R_i}/R_i}^A = X_{A_\lambda}^A$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que

$$X_{M_{R_i}}^A - X_{\text{q.rad}M_{R_i}/R_i}^A = \Delta_p(X_{R_i}^A, \dots, X_{R_{i+p-1}}^A)$$

est indépendant de  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . En appliquant  $\pi$ , on voit alors que la différence  $\Delta_p(x_{i,1}, \dots, x_{i+p-1,1})$  est indépendante de  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  $\square$

## 9.2 Les variables génériques comme générateurs

Nous voulons maintenant démontrer que pour un carquois satisfaisant la propriété de différence, les variables génériques engendrent  $\mathcal{A}(Q)$  sur  $\mathbb{Q}$ . Pour cela, nous montrons que pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ ,  $X_M$  est dans l'ensemble  $\mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$  des combinaisons  $\mathbb{Q}$ -linéaires d'éléments  $\mathcal{B}'(Q)$ .

### 9.2.1 Le cas indécomposable

**Corollaire 9.2.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence,  $E$  un module quasi-simple dans un tube exceptionnel. Alors  $X_{M_E} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .*

*Démonstration.* Soit  $p$  le rang du tube contenant  $E$ ,  $\text{q.rad}M_E/E$  est un module indécomposable régulier de quasi-longueur  $p - 2$ . Si  $p = 2$ , alors  $\text{q.rad}M_E/E$  est nul et d'après la propriété de différence, on a alors

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + 1 \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q).$$

Si  $p > 2$ , il s'ensuit que  $\mathbf{dim}(\text{q.rad}M_E/E)$  est une racine de Schur réelle et donc  $X_{\text{q.rad}M_E/E} = X_{\mathbf{dim} \text{q.rad}M_E/E} \in \mathcal{B}'(Q)$ . Maintenant, on sait que  $X_{M_\lambda} = X_\delta \in \mathcal{B}'(Q)$  et donc d'après le théorème 9.1.9, on a  $X_{M_E} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .  $\square$

On montre maintenant que pour tout  $n \geq 2$  et tout quasi-simple  $E$  dans un tube exceptionnel,  $X_{M_E^{(n)}}$  est engendré par  $\mathcal{B}'(Q)$  sur  $\mathbb{Z}$ .

**Proposition 9.2.2.** *Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence. Soit  $\mathcal{T}$  un tube exceptionnel du carquois  $AR$  de  $Q$ . Alors  $X_M \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$  pour tout module  $M$  dans  $\text{add}\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* On le montre par récurrence sur le vecteur de dimension de  $M$ . Si  $M$  est quasi-simple, alors  $\mathbf{dim} M$  est une racine de Schur réelle et  $X_M \in \mathcal{B}'(Q)$ . Supposons maintenant que  $M$  n'est pas quasi-simple et que pour tout  $N$  dans  $\mathcal{T}$  tel que  $\mathbf{dim} N \leq \mathbf{dim} M$ , on a  $X_N \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ . Soit  $p = \text{rg}(\mathcal{T})$  et  $E_0, \dots, E_{p-1}$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau E_i = E_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Supposons d'abord que  $M$  est indécomposable de la forme  $M = M_E^{(n)}$  pour un quasi-simple  $E$  de  $\mathcal{T}$  et un entier  $n \geq 1$ . D'après la propriété de différence, on a

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + X_{\text{q.rad}M_E/E}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence,

$$X_{M_E}^n - X_{M_\lambda}^n \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$$

mais  $X_{M_\lambda}^n = X_{n\delta} \in \mathcal{B}'(Q)$  donc  $X_{M_E}^n \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .

D'autre part, d'après le théorème 5.4.3, on a

$$X_{M_E^{(n)}} = P_{np,p}(X_{E_0}, \dots, X_{E_{p-1}})$$

En particulier

$$X_{M_E^{(n)}} = X_{E_0 \oplus \dots \oplus E_{p-1}}^n + \sum_Y s_{Y,n} X_Y$$

où les  $s_{Y,n}$  sont des entiers et où  $Y$  parcourt les modules de la forme  $\bigoplus_{i=0}^{p-1} E_i^{\oplus n_i}$  avec  $\sum n_i \mathbf{dim} E_i \leq n\delta$ . En particulier,

$$X_{M_E} \in X_{E_0 \oplus \dots \oplus E_{p-1}} + \sum_Y s_{Y,1} X_Y$$

et donc

$$X_{M_E}^n \in X_{E_0 \oplus \dots \oplus E_{p-1}}^n + \sum_Y t_Y X_Y$$

où les  $t_Y$  sont des entiers et où  $Y$  parcourt les modules de la forme  $\bigoplus_{i=0}^{p-1} E_i^{\oplus n_i}$  avec  $\sum n_i \mathbf{dim} E_i \leq n\delta$ . Il s'ensuit que

$$X_{M_E^{(n)}} = X_{M_E}^n + \sum_Y k_Y X_Y$$

où les  $k_Y$  sont des entiers et où  $Y$  parcourt les modules de la forme  $\bigoplus_{i=0}^{p-1} E_i^{\oplus n_i}$  avec  $\sum n_i \mathbf{dim} E_i \leq n\delta$ . Comme  $X_{M_E^{(n)}} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$  et que tous les  $X_Y$  sont  $\mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$  par hypothèse de récurrence, on obtient  $X_{M_E^{(n)}} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$  pour tout  $n \geq 1$ .

Supposons maintenant que  $M$  est indécomposable mais pas de la forme  $M_E^{(n)}$ . Alors  $\mathbf{dim} M \notin \mathbb{Z}\delta$  est une racine réelle. Si  $\mathbf{dim} M \leq \delta$ , alors  $\mathbf{dim} M$  est une racine réelle de Schur et  $X_M \in \mathcal{B}'(Q)$ . On peut donc supposer que  $\delta \leq \mathbf{dim} M$ . Plus précisément, on écrit la décomposition canonique  $\mathbf{dim} M = \delta^{\oplus n} \oplus \mathbf{d}_0$  où  $\mathbf{d}_0$  est une racine de Schur. Soit  $N$  l'unique indécomposable de dimension  $\mathbf{d}_0$ , il appartient à  $\mathcal{T}$  et il existe une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M_E^{(n)} \longrightarrow 0$$

pour un quasi-simple  $E$  de  $\mathcal{T}$  et un certain entier  $n \geq 1$ . De plus, on a

$$\dim \mathrm{Ext}_{kQ}^1(N, M_E^{(n)}) = \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(M_E^{(n)}, \tau N) = 1,$$

ainsi il suit du théorème 6.2.1 que

$$X_{M_E^{(n)}} X_N = X_M + X_B$$

où  $B \simeq \ker f \oplus \mathrm{coker} f[-1]$  pour un morphisme non-nul  $f : M_E^{(n)} \longrightarrow \tau N$ . En particulier  $\mathbf{dim} B \leq \mathbf{dim} N + n\delta = \mathbf{dim} M$  et donc, par hypothèse de récurrence  $X_B \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ . D'autre part, on a vu que

$$X_{M_E^{(n)}} = X_{M_\lambda}^n + \sum_Y r_Y X_Y$$

où les  $r_Y$  sont des entiers et où  $Y$  parcourt les modules dans  $\mathrm{add}\mathcal{T}$  tels que  $\mathbf{dim} Y \leq n\delta$ . En particulier,

$$\begin{aligned} X_{M_E^{(n)}} X_N &= X_{M_\lambda}^n X_N + \sum_Y r_Y X_{Y \oplus N} \\ &\in X_{n\delta} X_{\mathbf{d}_0} + \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q) \\ &\in X_{n\delta + \mathbf{d}_0} + \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q) \\ &\in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q) \end{aligned}$$

et donc  $X_M = X_{M_E^{(n)}} X_N - X_B \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .

Supposons maintenant que  $M$  est décomposable. Alors s'écrit  $M = M_1 \oplus M_2$  pour des modules réguliers  $M_1, M_2$ . En appliquant récursivement le théorème 6.2.1 et le lemme 7.2.6, on montre comme dans la proposition 7.2.9 que  $X_M = X_{M_1} X_{M_2}$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $X_Y$  où  $Y = \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  (décomposition en indécomposables) est un module de  $\text{add}\mathcal{T}$  tel que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(Y_i, Y_j) = 0$  pour tous  $i \neq j$ . On montre alors par récurrence sur le vecteur de dimension que  $X_M$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $X_V$  où  $V$  est de la forme  $M_\lambda^k X_R$  avec  $R \in \text{add}\mathcal{T}$  rigide,  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $k \geq 0$ . En particulier, chaque  $X_V$  sera dans  $\mathcal{B}'(Q)$  et donc  $X_M \in \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$ .

Soient des entiers  $1 \leq i \leq n$ . Le facteur indécomposable  $Y_i$  est de la forme  $E_i^{(n_i)}$  pour  $n_i \geq 0$  et un certain module quasi-simple  $E_i$  de  $\mathcal{T}$ . Soit  $p$  le rang de  $\mathcal{T}$ , écrivons  $n_i = k_i p + r_i$  avec  $0 \leq r_i < p$  la division euclidienne de  $n_i$  par  $p$ . D'après le théorème 6.2.1, on peut écrire

$$X_{Y_i} = X_{E_i^{(r_i)}} X_{M_{F_i}^{(k_i)}} + X_B$$

avec  $\mathbf{dim} B \prec \mathbf{dim} Y_i$  et  $F_i$  un module quasi-simple de  $\mathcal{T}$ . Puisque  $Q$  vérifie la propriété de différence,  $X_{M_{F_i}^{(k_i)}}$  peut s'écrire

$$X_{M_{F_i}^{(k_i)}} = X_{M_\lambda^{k_i}} + \sum_{\mathbf{dim} Z_i \prec k_i \delta} r_{Z_i} X_{Z_i}$$

où  $Z_i \in \text{add}(\mathcal{T})$ .

Alors

$$X_Y = \prod_{i=1}^n X_{E_i^{(r_i)}} X_{M_\lambda^{k_i}} + \sum_{\mathbf{dim} U \prec \mathbf{dim} Y} s_U X_U$$

avec  $U \in \text{add}(\mathcal{T})$ . Par récurrence sur le vecteur de dimension, chaque  $X_U$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $X_V$  où  $V$  est de la forme  $M_\lambda^k X_R$  avec  $R \in \text{add}\mathcal{T}$  rigide,  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et  $k \geq 0$ .

Maintenant,

$$\prod_{i=1}^n X_{E_i^{(r_i)}} X_{M_\lambda^{k_i}} = X_{M_\lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}} X_{\bigoplus_{j=1}^n E_j^{(r_j)}}.$$

Si  $k_j = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ , alors chaque  $Y_j$  est rigide et donc  $Y$  est rigide et il n'y a rien à montrer. Sinon,  $\mathbf{dim} \bigoplus_{j=1}^n E_j^{(r_j)} \prec \mathbf{dim} Y$  et ainsi, par récurrence,  $X_{\bigoplus_{j=1}^n E_j^{(r_j)}}$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $X_{M_\lambda^k} X_R$  avec  $R$  rigide dans  $\text{add}\mathcal{T}$  et ainsi  $\prod_{i=1}^n X_{E_i^{(r_i)}} X_{M_\lambda^{k_i}}$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $X_{M_\lambda^{k+\sum_{j=1}^n k_j}} X_R$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

A ce stade, nous avons en particulier montré que pour un carquois affine satisfaisant la propriété de différence, la variable généralisée  $X_M$  est dans le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$  engendré par les variables génériques pour tout objet indécomposable  $M$ .

**Corollaire 9.2.3.** *Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence. Alors pour tout objet indécomposable  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a  $X_M \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .*



### 9.2.2 Le cas décomposable

**Lemme 9.2.4.** *Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence et  $Y = \bigoplus_i Y_i$  un objet tel que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y_i, Y_j) = 0$  pour tous  $i \neq j$ . Alors  $X_Y \in \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$ .*

*Démonstration.* Si les facteurs directs de  $Y$  sont rigides, alors  $Y$  est aussi rigide et donc  $X_Y \in \mathcal{B}'(Q)$ . On suppose maintenant que  $Y$  n'est pas rigide. On note

$$Y = Y_P \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{P}^1} Y_\lambda$$

où  $Y_P$  a ses facteurs directs dans la composante transjective et où  $Y_\lambda$  est un module de  $\text{add}\mathcal{T}_\lambda$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{P}^1$  (on notera que  $\mathcal{T}_\lambda$  peut être exceptionnel).

Si  $Y_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$ , alors  $Y = Y_P$  est rigide. On peut donc supposer que  $Y_\lambda \neq 0$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}^1$  et que  $Y_\lambda$  a un facteur indécomposable  $M$  tel que  $\text{Ext}_{kQ}^1(M, M) \neq 0$ .

Supposons que  $Y_P \neq 0$  et fixons un facteur direct indécomposable  $N$  de  $Y_P$ . Alors  $N = P_i[s]$  pour un certain  $i \in Q_0$  et un certain  $s \in \mathbb{Z}$ . Comme  $M$  est un module régulier non-rigide, il suit que nécessairement  $\mathbf{dim} M \geq \delta$  est sincère et de même pour  $\mathbf{dim} \tau^{1-s}M \simeq M[1-s]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &\neq \dim \tau^{1-s}M(i) \\ &= \dim \text{Hom}_{kQ}(P_i, \tau^{1-s}M) \\ &\leq \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i, M[1-s]) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i[s], M[1]) \\ &= \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, P_i[s]). \end{aligned}$$

et donc  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, Y_P) \neq 0$  ce qui est une contradiction. Ainsi,  $Y_P = 0$  et

$$Y = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{P}^1} Y_\lambda.$$

On montre maintenant par récurrence sur le vecteur de dimension de  $Y$  que  $X_Y \in \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$ . Si  $Y$  est un module quasi-simple, alors où bien  $Y = M_\mu$  pour un certain  $\mu \in \mathbb{P}_0^1$ , ou bien  $Y$  est quasi-simple dans un tube exceptionnel et donc rigide. Dans les deux cas, on a  $X_Y \in \mathcal{B}'(Q)$ . Sinon, on écrit  $Y = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{P}^1} Y_\lambda$ . Si  $Y_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1$ , alors  $X_{Y_\lambda}$  est un polynôme en les  $X_\delta$ . Ainsi,  $X_Y$  est un polynôme en  $X_\delta$  et comme  $X_{n\delta} = X_\delta^n$  pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_Y$  est dans le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$ .

On suppose maintenant que  $Y_\lambda \neq 0$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1$ . On affirme alors que

$$X_{Y_\lambda} = X_\delta^{n_\lambda} X_{R_\lambda} + \sum_{\mathbf{dim} Z \geq \mathbf{dim} Y_\lambda} r_Z X_Z$$

pour un certain entier  $n_\lambda \geq 0$ , un certain module rigide  $R_\lambda \in \text{add}\mathcal{T}_\lambda$  et des nombres rationnels  $r_Z$  indexés par les modules  $Z \in \text{add}\mathcal{T}_\lambda$ . On le montre par récurrence sur le vecteur de dimension de  $Y_\lambda$ .

Si  $Y_\lambda$  est quasi-simple, alors  $R_\lambda = Y_\lambda$  donne le résultat. Supposons maintenant que  $Y_\lambda$  est n'importe quel module indécomposable de  $\mathcal{T}_\lambda$ . Alors, il suit de preuve la proposition 9.2.2 que l'on peut écrire

$$X_Y = X_{M_E^{(n)}} X_N - X_B$$

pour un certain module quasi-simple  $E$  dans  $\mathcal{T}_\lambda$ , un entier  $n \geq 1$  et un module régulier  $B$  tel que  $\mathbf{dim} B \leq \mathbf{dim} Y$ . En particulier,

$$X_Y = X_{M_\lambda}^n X_N + \sum r_z X_Z$$

où  $Z$  parcourt un ensemble d'objets de  $\mathcal{T}_\lambda$  tels que  $\mathbf{dim} Z \leq \mathbf{dim} Y$ . Ceci prouve l'affirmation pour  $Y_\lambda$  indécomposable.

Si  $Y_\lambda$  est décomposable, alors tout facteur direct indécomposable de  $Y_\lambda$  satisfait l'affirmation. Comme pour chaque  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ ,  $X_{Y_\lambda}$  est un polynôme en  $X_\delta$ , il suffit de montrer que

$$X_\delta^n \prod_{\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1} X_{Y_\lambda} \in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q)$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et tout  $n \leq n_0$  où  $n_0\delta = \mathbf{dim} \bigoplus_{\mu \in \mathbb{P}_0^1} Y_\mu$ . On a

$$\begin{aligned} X_\delta^n \prod_{\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1} X_{Y_\lambda} &= X_\delta^n \prod_{\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1} \left( X_\delta^{n_\lambda} X_{R_\lambda} + \sum_{\mathbf{dim} Z \leq \mathbf{dim} Y_\lambda} r_Z X_Z \right) \\ &= X_\delta^{n + \sum_\lambda n_\lambda} X_{\bigoplus_\lambda R_\lambda} + \sum_{\mathbf{dim} Z \leq n\delta + \sum_\lambda Y_\lambda} r_Z X_Z \end{aligned}$$

où les  $\lambda$  parcourent  $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1$ . Pour tout  $n \leq n_0$ , on a

$$\mathbf{dim} Z \leq n\delta + \sum_\lambda Y_\lambda \leq \mathbf{dim} Z \leq n_0\delta + \sum_\lambda Y_\lambda = \mathbf{dim} Y.$$

Par récurrence sur la proposition 7.2.9, on peut de plus supposer que tous les  $X_Z$  satisfont les hypothèses du lemme. Ainsi, par récurrence, il suit que les  $X_Z$  apparaissant dans la dernière somme sont dans  $\mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$ .

Comme il n'y a pas d'extensions entre les tubes,  $\bigoplus_\lambda R_\lambda$  est rigide et il suit alors de la proposition 8.3.10 que

$$X_\delta^{n + \sum_\lambda n_\lambda} X_{\bigoplus_\lambda R_\lambda} \in \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q).$$

□

En corollaire, on peut alors montrer que les éléments de  $\mathcal{A}(Q)$  s'écrivent comme combinaisons  $\mathbb{Q}$ -linéaires d'éléments de  $\mathcal{B}'(Q)$ .

**Proposition 9.2.5.** *Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence. Alors*

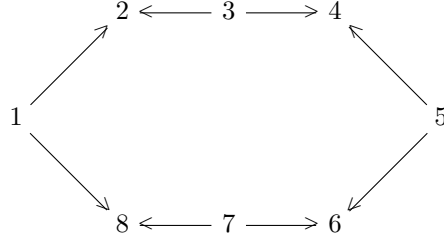
$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q).$$

*Démonstration.* Soit  $M$  un objet de  $\mathcal{C}_Q$ . D'après la proposition 7.2.9,  $X_M$  peut s'écrire comme combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $X_Y$  où  $Y = \bigoplus_i Y_i$  est tel que pour tous  $i \neq j$ , on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y_i, Y_j) = 0.$$

Il suit alors du lemme 9.2.4 que tout  $X_Y$  est dans  $\mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$  et donc  $X_M \in \mathbb{Q}\mathcal{B}'(Q)$ . □

**Exemple 9.2.6.** Considérons le carquois de type  $\tilde{A}_{4,4}$  de l'exemple 6.2.5.



En reprenant les notations de l'exemple 6.2.5, on considère le module  $M = E_{56}^{(3)} \oplus E_{78}$ . Alors

$$X_M = X_{E_{56}^{(4)}} + X_{E_{56}^{(2)}}$$

mais d'après le théorème 9.1.9, on a

$$X_{E_{56}^{(4)}} = X_{M_\lambda} + X_{E_{34}^{(2)}}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1(Q)$ . Mais  $E_{34}^{(2)}$  et  $E_{56}^{(2)}$  sont indécomposables rigides et donc sont dans  $\mathcal{B}'(Q)$ .

$$\begin{aligned} X_M &= X_{M_\lambda} + X_{E_{34}^{(2)}} + X_{E_{56}^{(2)}} \\ &= X_\delta + X_{\dim E_{34}^{(2)}} + X_{\dim E_{56}^{(2)}} \\ &\in \mathbb{Z}\mathcal{B}'(Q). \end{aligned}$$

## 9.3 Indépendance linéaire des variables génériques

### 9.3.1 Réflexions pour les carquois affines

Nous revenons à l'étude de l'interaction des foncteurs de réflexion et des variables généralisées. Nous précisons les résultats de la sous-section 3.2.2 dans le cas où  $Q$  est un carquois affine. On se fixe  $i$  un puits dans  $Q_0$  et on note  $Q' = \sigma_i Q$  le carquois réfléchi.

**Lemme 9.3.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine et  $i \in Q_0$  un puits. Alors*

1. *Un  $kQ$ -module  $M$  est un  $kQ$ -module régulier si et seulement si  $R_i^+(M)$  est un  $k\sigma_i Q$ -module régulier.*
2. *Soit  $M$  un  $kQ$ -module régulier indécomposable. Alors  $R_i^+$  induit une équivalence de catégories du tube contenant  $M$  dans  $kQ$ -mod vers le tube contenant  $R_i^+ M$  dans  $k\sigma_i Q$ -mod.*

*Démonstration.* Puisque  $i$  est un puits, le foncteur  $R_i^+$  coïncide avec le foncteur  $S_i^+$  sur la sous-catégorie pleine de  $kQ$ -mod engendrée par les  $kQ$ -modules réguliers. D'autre part, on sait que le foncteur de réflexion  $S_i^+$  induit une équivalence de catégories  $kQ$ -mod/ $S_i \rightarrow k\sigma_i Q$ -mod/ $S_i$ . Comme  $i$  est un puits, le  $kQ$ -module  $S_i$  est projectif et que le  $k\sigma_i Q$ -module  $S_i$  est injectif. Soit  $\pi : kQ$ -mod  $\rightarrow kQ$ -mod/ $S_i$  le foncteur canonique. Alors pour toute composante régulière  $\mathcal{T}$ , la restriction du foncteur  $\pi$  à  $\mathcal{T}$  est isomorphe à l'identité de  $\mathcal{T}$ . Ainsi, si  $M$  est un module régulier, il appartient à un tube  $\mathcal{T}$  et  $S_i^+ M \simeq S_i^+(\pi(M))$

appartient à  $S_i^+(\pi(\mathcal{T}))$ . Mais  $S_i^+(\pi(\mathcal{T})) \simeq \pi(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{T}$  et donc  $S_i^+(M)$  appartient à un tube de  $k\sigma_i Q\text{-mod}/S_i$ , il est donc régulier et de plus  $S_i^+$  induit une équivalence de catégories entre du tube contenant  $M$  vers le tube contenant  $S_i^+(M)$ .  $\square$

**Corollaire 9.3.2.** *Soit  $Q$  un carquois affine,  $i$  un puits dans  $Q_0$  et  $M$  un  $kQ$ -module régulier indécomposable de suite de quasi-composition*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$

alors  $R_i^+ M$  est  $k\sigma_i Q$ -module régulier de suite de quasi-composition

$$0 = R_i^+ M_0 \subset R_i^+ M_1 \subset \cdots \subset R_i^+ M_r = R_i^+ M.$$

**Proposition 9.3.3.** *Soit  $Q$  un carquois affine ayant au moins trois sommets et  $i$  un puits dans  $Q_0$ . Supposons que  $Q$  et  $\sigma_i Q$  satisfont la propriété de différence. On note  $\Phi_i : \mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(\sigma_i Q)$  l'isomorphisme canonique et  $R_i^+ : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{\sigma_i Q}$  le foncteur BGP étendu. Alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a  $\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le prouver pour  $M$  indécomposable. Si  $M$  est rigide, alors le résultat suit de la proposition 3.2.6. Si  $M$  n'est pas rigide, alors  $M$  est régulier.

Si  $M$  est dans un tube exceptionnel  $\mathcal{T}$  de rang  $p > 1$ . Soient  $E_0, \dots, E_{p-1}$  les modules quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau E_i = E_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Soit  $l$  la quasi-longueur de  $M$  et supposons que les  $E_i$  sont indexés de sorte que  $E_0 = \text{q.soc} M$ . Alors il suit du théorème 5.4.3 que

$$X_M^Q = P_{l,p}(X_{E_0}^Q, \dots, X_{E_{p-1}}^Q).$$

D'après le lemme 9.3.1,  $R_i^+ M$  est régulier et appartient à un tube  $\mathcal{T}'$  de rang  $p$ . De plus, le corollaire 9.3.2 implique que les quasi-simples de  $\mathcal{T}'$  sont les  $R_i^+ E_i$  pour  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $R_i^+ E_0 = \text{q.soc} R_i^+ M$ . En outre,  $\text{q.l}(R_i^+ M) = \text{q.l}(M) = l$  et donc

$$X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q} = P_{l,p}(X_{R_i^+ E_0}^{\sigma_i Q}, \dots, X_{R_i^+ E_{p-1}}^{\sigma_i Q}).$$

Comme chaque quasi-simple dans un tube exceptionnel est rigide, il suit que

$$X_{R_i^+ E_i}^{\sigma_i Q} = \Phi_i(X_{E_i}^Q) \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

et donc

$$\begin{aligned} X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q} &= P_{l,p}(X_{R_i^+ E_0}^{\sigma_i Q}, \dots, X_{R_i^+ E_{p-1}}^{\sigma_i Q}) \\ &= P_{l,p}(\Phi_i(X_{E_0}^Q), \dots, \Phi_i(X_{E_{p-1}}^Q)) \\ &= \Phi_i(P_{l,p}(X_{E_0}^Q, \dots, X_{E_{p-1}}^Q)) \\ &= \Phi_i(X_M^Q) \end{aligned}$$

Il reste alors à montrer le résultat pour  $M$  indécomposable dans un tube homogène. Le foncteur  $R_i^+$  envoie les tubes homogènes de  $\mathcal{C}_Q$  sur les tubes homogènes de  $\mathcal{C}_{\sigma_i Q}$ . Quitte à réindexer les tubes, on peut supposer que  $R_i^+ \mathcal{T}_\lambda(Q) = \mathcal{T}_\lambda(\sigma_i Q)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$  et alors d'après le lemme 9.3.1 on a  $\mathbb{P}_0^1(\sigma_i Q) = \mathbb{P}_0^1(Q)$ .

L'ensemble  $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}_0^1}$  est un ensemble de représentants des isoclasses de modules quasi-simples dans les tubes homogènes de  $\mathcal{C}_Q$  et  $\{R_i^+ M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}_0^1}$  est un ensemble de représentants des isoclasses de modules quasi-simples dans les tubes homogènes de  $\mathcal{C}_{\sigma_i Q}$ . En outre, il suit du lemme 9.1.4 et du théorème 5.4.3 que

$$X_{M_\lambda^{(n)}}^Q = X_{M_\mu^{(n)}}^Q = C_n(X_{M_\lambda}^Q) \text{ et } X_{R_i^+ M_\lambda^{(n)}}^{\sigma_i Q} = X_{R_i^+ M_\mu^{(n)}}^{\sigma_i Q} = C_n(X_{R_i^+ M_\lambda}^{\sigma_i Q})$$

pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{P}_0^1(Q)$ . Il suffit alors de montrer que

$$\Phi_i(X_{M_\lambda}^Q) = X_{R_i^+ M_\lambda}^{\sigma_i Q}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1(Q)$ .

D'après la propriété de différence pour  $Q$ , pour tout  $kQ$ -module quasi-simple  $E$  dans un tube exceptionnel, on a

$$X_{M_\lambda}^Q = X_{M_E}^Q - X_{\text{q.rad}M_E/E}^Q$$

et d'après la propriété de différence pour  $\sigma_i Q$ , on a

$$X_{R_i^+ M_\lambda}^{\sigma_i Q} = X_{R_i^+ M_E}^{\sigma_i Q} - X_{\text{q.rad}R_i^+ M_E/\text{q.soc}R_i^+ M_E}^{\sigma_i Q}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \Phi_i(X_{M_\lambda}^Q) &= \Phi_i(X_{M_E}^Q) - \Phi_i(X_{\text{q.rad}M_E/E}^Q) \\ &= X_{R_i^+ M_E}^{\sigma_i Q} - X_{R_i^+ (\text{q.rad}(M_E/E))}^{\sigma_i Q} \end{aligned}$$

Il suit du lemme 9.3.1 que  $R_i^+(M_E) = M_{R_i^+(E)}$  et  $\text{q.rad}R_i^+ M_E/\text{q.soc}R_i^+ M_E = \text{q.rad}M_{R_i^+(E)}/R_i^+(E)$  et donc

$$\begin{aligned} \Phi_i(X_{M_\lambda}^Q) &= X_{M_{R_i^+(E)}}^{\sigma_i Q} - X_{\text{q.rad}M_{R_i^+(E)}/R_i^+(E)}^{\sigma_i Q} \\ &= X_{R_i^+ M_\lambda}^{\sigma_i Q}. \end{aligned}$$

□

**Définition 9.3.4.** Soit  $Q$  un carquois acyclique, une suite de sommets  $(i_1, \dots, i_n)$  de  $Q$  est dite *suite admissible de puits* (resp. *suite admissible de sources*) si  $i_1$  est un puits (resp. une source) dans  $Q$  et si pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $i_k$  est un puits (resp. une source) dans  $\sigma_{i_{k-1}} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$ .

Une récurrence sur la proposition 9.3.3 donne alors :

**Proposition 9.3.5.** Soit  $Q$  un carquois affine ayant au moins trois sommets satisfaisant la propriété de différence. Soit  $Q'$  un carquois réflexion-équivalent à  $Q$  et  $(i_1, \dots, i_n)$  une suite admissible de puits telle que  $Q' = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  telle que pour tout  $1 \leq k \leq n$ , le carquois  $\sigma_{i_k} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  satisfait la propriété de différence. On note  $\Phi$  l'isomorphisme canonique  $\mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(Q')$  et

$$R^+ = R_{i_n}^+ \dots R_{i_1}^+ : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{Q'}$$

Alors

$$\Phi(X_M^Q) = X_{R^+ M}^{Q'}$$

pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ .

### 9.3.2 Réflexions et variables génériques

Nous montrons maintenant que l'ensemble des variables génériques est stable sous réflexion.

**Théorème 9.3.6.** *Soit  $Q$  un carquois affine ayant au moins trois sommets satisfaisant la propriété de différence. Soit  $Q'$  un carquois réflexion-équivalent à  $Q$ . On écrit  $Q' = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  et on suppose que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $\sigma_{i_k} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  vérifie la propriété de différence. Soit  $\Phi : \mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(Q')$  l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées. Alors*

$$\Phi(\mathcal{B}'(Q)) = \mathcal{B}'(Q').$$

*Démonstration.* Soit  $(i_1, \dots, i_n)$  une suite admissible de puits telle que  $Q' = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$ . On note  $R^+$  la composition

$$R^+ = R_{i_n}^+ \cdots R_{i_1}^+ : \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathcal{C}_{Q'},$$

c'est une équivalence de catégories triangulées. D'après la proposition 9.3.5, on a  $\Phi(X_M^Q) = X_{R^+M}^{Q'}$  pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ .

Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0} \setminus \mathbb{N}^{Q_0}$ , tel que

$$X_{\mathbf{d}} = X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} X_{P_i[1]^{\oplus(-d_i)}}$$

Puisque  $[\mathbf{d}]_+$  n'est pas sincère, il existe  $M_+ \in \text{rep}(Q, [\mathbf{d}]_+)$  qui est rigide. Il s'ensuit que  $M = M_+ \oplus \bigoplus_{d_i < 0} P_i[1]^{-d_i}$  est aussi rigide et donc  $R^+M$  l'est.

Alors,  $\Phi(X_M^Q) = X_{R^+M}^{Q'}$  est dans  $\mathcal{B}'(Q')$ .

Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , supposons qu'il existe un module rigide  $M \in U_{\mathbf{d}}$ , alors  $R^+M$  est rigide et donc  $\Phi(X_M^Q) = X_{R^+M}^{Q'}$  est dans  $\mathcal{B}'(Q')$ . Sinon, d'après la décomposition canonique de  $[\mathbf{d}]_+$ ,  $M \in U_{[\mathbf{d}]_+} \cap \mathfrak{M}_{[\mathbf{d}]_+}$  se décompose en

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{j \in J} N_j$$

où  $I$  est un ensemble non-vide et où les  $N_j$  sont des représentations de Schur rigides pour tout  $j \in J$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(U, V) = 0$  pour tous facteurs directs indécomposables distincts de  $M$ . Il s'ensuit que

$$R^+M = \bigoplus_{i \in I} R^+M_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{j \in J} R^+N_j$$

où les  $R^+N_j$  sont des représentations de Schur rigides telles que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(U, V) = 0$  pour tous facteurs directs distincts de  $R^+M$ . Supposons que  $R^+N_j \simeq P_k[1]$  pour un certain  $kQ'$ -module  $P_k$ . Alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_{Q'}}^1(R^+N_j, M_{\lambda_i}) = \text{Ext}_{\mathcal{C}_{Q'}}^1(P_k[1], M_{\lambda_i}) = \dim M_{\lambda_i}(k) > 0,$$

ce qui est une contradiction et donc  $R^+M$  est un  $kQ'$ -module. Il suit alors de la section 8.3 que

$$X_{R^+M}^{Q'} = X_{\dim R^+M}^{Q'}$$

et donc  $\Phi(\mathcal{B}'(Q)) \subset \mathcal{B}'(Q')$ .

Réciproquement,  $Q$  peut être obtenu de  $Q'$  par une suite de réflexions le long de sources et la même démonstration donne l'inclusion inverse.  $\square$

Nous étendons ici la notion d'applications linéaires par morceaux introduites dans [74] à tout le réseau des racines. Si  $i \in Q_0$ , on note  $s_i$  la réflexion standard du groupe de Weyl de  $\Phi(Q)$  associée au sommet  $i$ . On note alors  $\sigma_i$  l'application linéaire par morceaux définie sur  $\mathbb{Z}\Phi(Q)$  comme suit. Si  $\mathbf{d} \in \Phi_{\geq -1}(Q)$ , on pose

$$\sigma_i(\mathbf{d}) = \begin{cases} \mathbf{d} & \text{si } \mathbf{d} = -\alpha_j \text{ pour } j \neq i, \\ s_i(\mathbf{d}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on écrit  $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}_n$  la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  et on pose

$$\sigma_i(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\mathbf{e}_i).$$

Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on pose

$$\sigma_i(\mathbf{d}) = \sigma_i([\mathbf{d}]_+) + [\mathbf{d}]_- + 2d_i\alpha_i.$$

Alors  $\sigma_i$  définit une involution sur  $\mathbb{Z}\Phi(Q) \simeq \mathbb{Z}^{Q_0}$ .

**Lemme 9.3.7.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $i$  un puits dans  $Q$ . Soit  $M$  un objet dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que*

$$M \simeq M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

*où les  $M_k$  sont des objets indécomposables tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M_k, M_j) = 0$  pour  $k \neq j$ . Alors*

$$\mathbf{dim} R_i^+(M) = \sigma_i(\mathbf{dim} M).$$

*Démonstration.* Si  $n = 1$ , alors  $M = M_1$  est indécomposable et  $\mathbf{dim} M \in \Phi_{\geq 1}(Q)$ , le résultat suit alors de [101, Théorème 3.4]. Si  $n > 1$ , comme  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M_k, M_j) = 0$  pour  $k \neq j$ , l'un des  $M_j$  est isomorphe à un  $P_k[1]$ , alors  $(\mathbf{dim} M_l)_k \leq 0$  pour tout  $l = 1, \dots, n$ . Il s'ensuit que

$$[\mathbf{dim} M]_+ = \mathbf{dim} H^0(M).$$

On écrit alors

$$M = H^0(M) \oplus \bigoplus_{k \in Q_0} P_k[1]^{\oplus p_k}.$$

En particulier, pour tout  $k \in Q_0$ , on a  $p_k = -(\mathbf{dim} M)_k$ . Ainsi,

$$R_i^+(M) = S_i^+(H^0(M)) \oplus S_i^{\oplus p_i} \oplus \bigoplus_{k \neq i} P_k[1]^{\oplus p_k}$$

où  $S_i^+$  est le foncteur de réflexion BGP standard. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{dim} R_i^+ M &= s_i(\mathbf{dim} H^0(M)) + p_i\alpha_i - p_k\alpha_k \\ &= s_i([\mathbf{dim} M]_+) + [\mathbf{dim} M]_- + 2p_i\alpha_i \\ &= \sigma_i([\mathbf{dim} M]_+) + [\mathbf{dim} M]_- + 2p_i\alpha_i \\ &= \sigma_i(\mathbf{dim} M). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 9.3.8.** *Soit  $Q$  un carquois affine ayant au moins trois sommets,  $i$  un puits dans  $Q_0$ . On suppose que  $Q$  et  $\sigma_i Q$  satisfont la propriété de différence. On note  $\Phi_i : \mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(\sigma_i Q)$  l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées. Alors pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on a*

$$\Phi_i(X_{\mathbf{d}}^Q) = X_{\sigma_i(\mathbf{d})}^{\sigma_i Q}.$$

*Démonstration.* D'après le théorème de dénominateurs 3.1.8, pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ , on a

$$\mathbf{dim} R_i^+(M) = \delta(X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}).$$

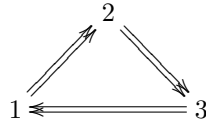
Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  et  $M$  tel que  $X_M = X_{\mathbf{d}}$ , on peut choisir  $M$  de sorte qu'il vérifie les hypothèses du lemme 9.3.7, dans ce cas, on a  $\mathbf{dim} R_i^+(M) = \sigma_i(\mathbf{dim} M)$ . D'autre part, d'après la proposition 9.3.3, on a  $\Phi_i(X_M^Q) = X_{R_i^+ M}^{\sigma_i Q}$  et alors il suit du théorème 9.3.6 que

$$\Phi_i(X_{\mathbf{d}}^Q) = X_{\sigma_i(\mathbf{d})}^{\sigma_i Q}.$$

□

**Définition 9.3.9.** Soit  $Q$  un carquois, on dit que  $Q$  est *réflexion-gradué* si il existe  $Q'$  réflexion-équivalent à  $Q$  tel que  $Q'$  est un carquois gradué.

**Remarque 9.3.10.** Tous les carquois ne sont pas réflexion-gradués. En effet, considérons le 3-cycle  $Q$  avec double flèches



Soit  $c_i$  la  $i$ -ème colonne de la matrice  $B$  associée à  $Q$ . Alors  $c_3 = -c_1 - c_2$  et  $Q$  n'est pas gradué. D'autre part,  $Q$  est le seul carquois de sa classe de mutation et donc a fortiori de sa classe de réflexion.

L'intérêt de la notion de carquois réflexion-gradués dans notre étude est la suivante :

**Corollaire 9.3.11.** *Soit  $Q$  un carquois tel qu'il existe un carquois  $Q' = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  gradué. Supposons que  $Q$  satisfait la propriété de différence et que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $\sigma_{i_k} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  satisfait la propriété de différence. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est linéairement indépendante sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Phi : \mathcal{A}(Q) \rightarrow \mathcal{A}(Q')$  l'isomorphisme canonique d'algèbres amassées. Alors d'après le théorème 9.3.6, on a  $\Phi(\mathcal{B}'(Q)) = \mathcal{B}'(Q')$ . D'autre part,  $Q'$  est gradué et les éléments de  $\mathcal{B}'(Q')$  ont des vecteurs de dénominateurs distincts par définition, il suit alors du lemme 3.1.18 que  $\mathcal{B}'(Q')$  est linéairement indépendante sur  $\mathbb{Z}$  et donc  $\mathcal{B}'(Q)$  aussi. □

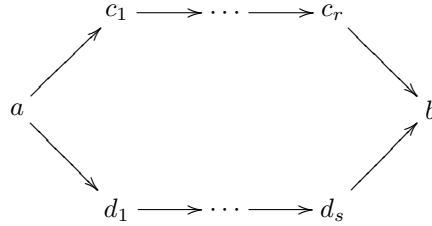
### 9.3.3 Réflexion-graduation pour le type $\tilde{\mathbb{A}}$

Dans cette section, on montre que tout carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  est réflexion-gradué. Pour ce faire, nous allons effectuer une vérification au cas par cas en fonction du couple  $\{r, s\}$  du type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  de  $Q$ .



**Lemme 9.3.12.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors  $Q$  est réflexion-gradué.*

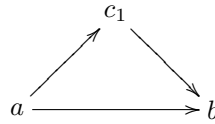
*Démonstration.* Soient  $r, s \in \mathbb{N}$  deux entiers et  $Q$  un carquois de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+1, s+1}$ . On rappelle que deux carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+1, s+1}$  sont toujours réflexion-équivalents. On supposera donc toujours qu'un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+1, s+1}$  est muni de l'orientation :



On rappelle qu'un carquois est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r+1, s+1}$  si et seulement si il est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{s+1, r+1}$ . Dans chaque cas, nous allons construire une forme  $\epsilon$  telle que  $Q$  satisfait la condition de graduation pour cet  $\epsilon$ , c'est à dire telle que  $\epsilon$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  telle que  $\epsilon(B\alpha_i) < 0$  pour tout  $i \in Q_0$  où  $B = B_Q$ . En général, on notera  $C_i = B\alpha_i$  la  $i$ -ème colonne de  $B$ . Si  $\epsilon$  est une telle forme sur  $B$ , on dira que  $\epsilon$  convient à  $Q$ .

Supposons d'abord que  $s = r = 0$ , alors  $Q$  est le carquois de Kronecker  $a \rightrightarrows b$ , il est muni d'une orientation alternée et donc gradué.

Supposons maintenant que  $\{r, s\} = \{0, 1\}$ . On suppose que  $r = 1$  et  $s = 0$ , alors  $Q$  est le carquois

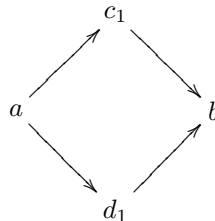


la matrice associée dans la numérotation  $(a, c_1, b)$  est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

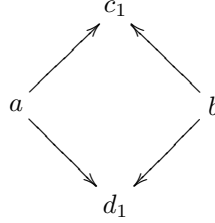
Les colonnes  $C_a$  et  $C_{c_1}$  sont linéairement indépendantes et  $C_b = C_{c_1} - C_a$ . On pose alors  $\epsilon(C_a) = -1$ ,  $\epsilon(C_{c_1}) = -2$  et alors  $\epsilon(C_b) = -1 < 0$ . Ainsi  $\epsilon$  convient.

Supposons  $r = s = 1$ . Alors  $Q$  est le carquois



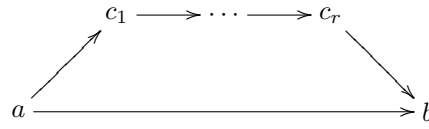
Dans la matrice associée  $B$ , on a  $C_b = -C_a$ , on ne pourra donc pas trouver de

forme  $\epsilon$  convenant à  $Q$ . Soit alors le carquois  $Q' = \mu_b(Q) = \sigma_b(Q)$  donné par



$Q'$  est alterné donc gradué et alors  $Q$  est réflexion-gradué.

Supposons maintenant que  $s = 0$  et  $r \geq 2$ . Alors  $Q$  est le carquois



la matrice associée dans la numérotation  $(a, c_1, \dots, c_r, b)$  est alors

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \hline & & & & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & & -1 & 0 \end{array} \right]$$

et on a

$$\sum \lambda_j C_j = \begin{bmatrix} \lambda_b + \lambda_{c_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \vdots \\ \lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ -\lambda_{c_r} - \lambda_a \end{bmatrix}$$

Si  $r \in 2\mathbb{Z}$ , alors

$$\sum \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = -\lambda_b \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \cdots = \lambda_{c_r} \\ \lambda_b = \lambda_{c_{r-1}} = \cdots = \lambda_{c_1} \\ \lambda_a = -\lambda_{c_r} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_j = 0 \text{ pour tout } j \in Q_0$$

Ainsi,  $B$  est de rang plein et  $Q$  est gradué.

Si  $r \in 2\mathbb{Z} + 1$ , alors

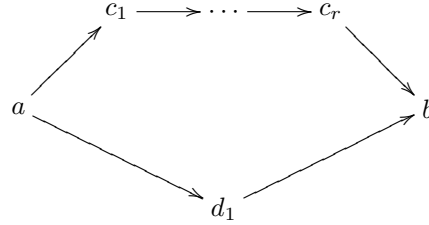
$$\sum_{j \neq b} \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = 0 \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \cdots = \lambda_{c_{r-1}} \\ \lambda_{c_{r-1}} = \lambda_{c_{r-3}} = \cdots = \lambda_{c_2} = 0 \\ \lambda_{c_r} = \cdots = \lambda_{c_{r-2}} = \cdots = \lambda_{c_1} \\ \lambda_a = -\lambda_{c_r} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_j = 0 \text{ pour tout } j$$

Ainsi, les colonnes  $(C_a, C_{c_1}, \dots, C_{c_r})$  sont linéairement indépendantes et

$$C_b = -C_a + C_{c_1} - C_{c_2} + C_{c_3} - \cdots - C_{c_{r-1}} + C_{c_r}$$

On pose alors,  $\epsilon(C_i) = -1$  pour tout  $i \neq c_1, b$  et  $\epsilon(C_{c_1}) = -2$  et  $\epsilon(C_b) < 0$  et  $\epsilon$  convient.

Supposons maintenant que  $s = 1$  et  $r \geq 2$ , alors  $Q$  est le carquois



dont la matrice associée dans la numérotation  $(a, c_1, \dots, c_r, b, d_1)$  est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & -1 & 0 & -1 \\ -1 & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = \begin{bmatrix} \lambda_{c_1} + \lambda_{d_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \lambda_{c_3} - \lambda_{c_1} \\ \vdots \\ \lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ -\lambda_{d_1} - \lambda_{c_r} \\ \lambda_b - \lambda_a \end{bmatrix}$$

Si  $r \in 2\mathbb{Z}$ ,

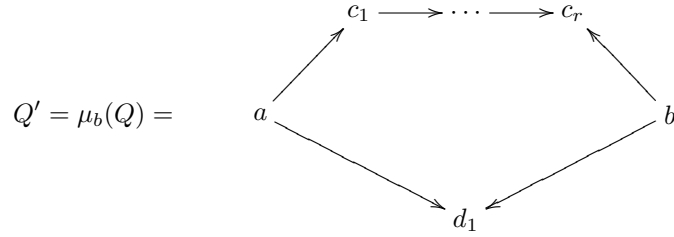
$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_a = \lambda_b = \lambda_{c_1} = \lambda_{c_2} = \dots = \lambda_{c_r} = -\lambda_{d_1}$$

Alors  $\sum_{j \neq d_1} \lambda_j C_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$  pour tout  $j$  et alors les colonnes  $(C_a, C_{c_1}, \dots, C_{c_r}, C_b)$  sont linéairement indépendantes et  $C_{d_1}$  est combinaison linéaire des autres colonnes. Plus précisément,

$$\sum_{j \neq d_1} \lambda_j C_j = \begin{bmatrix} \lambda_{c_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \lambda_{c_3} - \lambda_{c_1} \\ \vdots \\ \lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ -\lambda_{c_r} \\ \lambda_b - \lambda_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_{c_1} = \lambda_{c_2} = \dots = \lambda_{c_r} = \lambda_b = \lambda_a = 1$$

Ainsi,  $C_{d_1} = \sum_{j \neq d_1} C_j$  et donc il suffit de poser  $\epsilon(C_j) = -1$  pour tout  $j \neq d_1$  et  $Q$  est gradué.

Si  $r \in 2\mathbb{Z} + 1$ ,  $Q$  n'est pas gradué. Soit alors le carquois



dont la matrice associée dans la numérotation  $(a, c_1, \dots, c_r, b, d_1)$  est

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline 0 & -1 & 0 & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 0 & -1 & \\ \hline & & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & & & -1 & 0 \end{array} \right]$$

On a

$$\sum_{j \neq d_1} \lambda_j C_j = \begin{bmatrix} \lambda_{c_1} + \lambda_{d_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \vdots \\ \lambda_{c_r} - \lambda_{c_{r-2}} \\ -\lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ \lambda_{c_r} + \lambda_{d_1} \\ -\lambda_b - \lambda_a \end{bmatrix}.$$

et donc

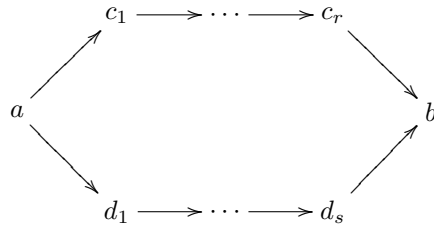
$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = \lambda_{c_3} = \cdots = \lambda_{c_r} = -\lambda_{d_1} \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \cdots = \lambda_{c_{r-1}} = -\lambda_b \end{cases}$$

Ainsi, les colonnes  $(C_a, C_{c_1}, \dots, C_{c_r})$  sont linéairement indépendantes et  $C_b$  et  $C_{d_1}$  sont dans l'espace qu'elles engendrent. Plus précisément, on a

$$C_b = C_a + C_{c_2} + \cdots + C_{c_{r-1}} \text{ et } C_{d_1} = C_{c_1} + C_{c_3} + \cdots + C_{c_r}$$

On pose alors  $\epsilon(C_i) = -1$  pour tout  $i \neq b, d_1$  et ainsi  $\epsilon$  convient. Ainsi  $Q'$  est gradué et  $Q$  est réflexion-gradué.

Supposons maintenant que  $r, s \geq 2$ ,  $Q$  est alors le carquois



dont la matrice  $B$  associée dans la numérotation  $(a, c_1, \dots, c_r, b, d_1, \dots, d_s)$  est

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & -1 & 0 & & & & -1 \\ -1 & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & & 1 & & -1 & 0 \end{array} \right]$$

On a

$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = \begin{bmatrix} \lambda_{c_1} + \lambda_{d_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \lambda_{c_3} - \lambda_{c_1} \\ \vdots \\ \lambda_{c_r} - \lambda_{c_{r-2}} \\ \lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ -\lambda_{d_s} - \lambda_{c_r} \\ \lambda_{d_2} - \lambda_a \\ \lambda_{d_3} - \lambda_{d_1} \\ \vdots \\ \lambda_{d_s} - \lambda_{d_{s-2}} \\ \lambda_b - \lambda_{d_{s-1}} \end{bmatrix}$$

Si  $r, s \in 2\mathbb{Z}$ , alors

$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = -\lambda_{d_1} \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \dots = \lambda_{c_r} \\ \lambda_b = \lambda_{c_{r-1}} = \dots = \lambda_{c_1} \\ \lambda_{c_r} = -\lambda_{d_s} \\ \lambda_a = \lambda_{d_2} = \dots = \lambda_{d_s} \\ \lambda_b = \lambda_{d_{s-1}} = \dots = \lambda_{d_1} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i$$

et les colonnes sont linéairement indépendantes.  $B$  est alors de rang plein et  $Q$  est gradué.

Si  $r \in 2\mathbb{Z}$  et  $s \in 2\mathbb{Z} + 1$ , alors

$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = -\lambda_{d_1} \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \dots = \lambda_{c_{r-1}} \\ \lambda_b = \lambda_{c_{r-1}} = \dots = \lambda_{c_1} \\ \lambda_{c_r} = -\lambda_{d_s} \\ \lambda_a = \lambda_{d_2} = \dots = \lambda_{d_s} = \lambda_b \\ \lambda_b = \lambda_{d_{s-1}} = \dots = \lambda_{d_1} \end{cases}$$

Ainsi,  $\sum_{j \neq d_s} \lambda_j C_j = 0$  si et seulement si  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j$ . Les colonnes  $C_a, C_{c_1}, \dots, C_{c_r}, C_b, C_{d_1}, \dots, C_{d_{s-1}}$  sont ainsi linéairement indépendantes et

$$C_{d_s} = C_a + C_{c_2} + \dots + C_{c_r} + C_{d_2} + \dots + C_{d_{s-1}} - C_{d_1} - \dots - C_{d_{s-2}}$$

On pose  $\epsilon(C_i) = -1$  pour tout  $i \neq a, d_s$  et  $\epsilon(C_a) = \min(0, r-1) - 1$ . On a alors  $\epsilon(C_i) < 0$  pour tout  $i \in Q_0$  et  $Q$  est gradué.

Si  $r, s \in 2\mathbb{Z}+1$ ,  $Q$  n'est pas gradué. On considère alors le carquois  $Q' = \mu_b(Q)$  dont la matrice associée dans la numérotation  $(a, c_1, \dots, c_r, b, d_1, \dots, d_s)$  est

$$B' = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & -1 & 0 & -1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & & & & 1 \\ -1 & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & -1 & & & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Si  $C'_i$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $B'$  pour tout  $i$ , on a

$$\sum_{j \in Q_0} \lambda_j C'_j = \begin{bmatrix} \lambda_{c_1} + \lambda_{d_1} \\ \lambda_{c_2} - \lambda_a \\ \lambda_{c_3} - \lambda_{c_1} \\ \vdots \\ \lambda_{c_r} - \lambda_{c_{r-2}} \\ -\lambda_b - \lambda_{c_{r-1}} \\ -\lambda_{d_s} - \lambda_{c_r} \\ \lambda_{d_2} - \lambda_a \\ \lambda_{d_3} - \lambda_{d_1} \\ \vdots \\ \lambda_{d_s} - \lambda_{d_{s-2}} \\ -\lambda_b - \lambda_{d_{s-1}} \end{bmatrix}$$

et

$$\sum \lambda_j C'_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{c_1} = -\lambda_{d_1} \\ \lambda_a = \lambda_{c_2} = \cdots = \lambda_{c_{r-1}} = -\lambda_b \\ \lambda_{c_1} = \cdots = \lambda_{c_r} \\ \lambda_{c_r} = -\lambda_{d_s} \\ \lambda_a = \lambda_{d_2} = \cdots = \lambda_{d_{s-1}} = -\lambda_b \\ \lambda_{d_1} = \cdots = \lambda_{d_r} \end{cases}$$

Ainsi,  $\sum_{j \neq b, d_s} \lambda_j C'_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = 0$  pour tout  $j$ . Les colonnes  $C'_a, C'_{c_1}, \dots, C'_{c_r}, C'_{d_1}, \dots, C'_{d_{s-1}}$  sont ainsi linéairement indépendantes. De plus

$$C'_b = C'_a + C'_{c_2} + \cdots + C'_{c_{r-1}} + C'_{d_2} + \cdots + C'_{d_{s-1}}$$

et

$$C'_{d_s} = C'_{c_1} + C'_{c_3} + \cdots + C'_{c_r} - C'_{d_1} - \cdots - C'_{d_{s-2}}$$

On pose alors  $\epsilon(C'_i) = -1$  pour tout  $i \neq b, d_s, c_1$  et  $\epsilon(C'_{c_1}) = \min(0, \frac{r+1}{2} - \frac{s-1}{2}) - 1$ . Alors,  $\epsilon(C'_b) < 0$  et  $\epsilon(C'_{d_s}) < 0$ .  $Q'$  est ainsi gradué et  $Q$  est réflexion-gradué.

Dans tous les cas, on a montré qu'un carquois  $Q$  de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}$  est réflexion-gradué.  $\square$

**Corollaire 9.3.13.** *Tout carquois affine est réflexion-gradué.*

*Démonstration.* D'après le lemme 9.3.12, il suffit de le montrer pour les cas où  $Q$  est de type affine  $\tilde{\mathbb{D}}$  et  $\tilde{\mathbb{E}}$ . Dans chacun de ces cas, le graphe sous-jacent à  $Q$  est un arbre. Il admet donc une orientation alternée et de plus, toutes les orientations d'un arbre sont réflexion-équivalentes. En particulier,  $Q$  est réflexion-gradué.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$  pour un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ .

**Théorème 9.3.14.** *Soit  $Q$  un carquois affine réflexion-gradué. Soit  $Q' = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  un carquois gradué tel que pour tous  $1 \leq k \leq n$ ,  $\sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(Q)$  vérifie la propriété de différence. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(Q)$  appelée base semi-canonique de  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 9.3.11,  $\mathcal{B}'(Q)$  est linéairement indépendante sur  $\mathbb{Z}$ . D'après le corollaire 9.3.13 et le théorème 9.3.6, on peut supposer que  $Q$  est un carquois gradué. Il suit de la proposition 9.2.5 que tout élément  $X_M$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{B}'(Q)$ . Pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ , on note

$$\lambda_{\mathbf{d}} = (-\langle \alpha_i, [\mathbf{d}]_+ \rangle + \langle [\mathbf{d}]_-, \alpha_i \rangle)_{i \in Q_0},$$

Si  $M$  est tel que  $X_M = X_{\mathbf{d}}$ , alors il suit de la définition de  $X_{\mathbf{d}}$  que  $\mathbf{dim} H^0(M) = [\mathbf{d}]_+$  et  $\mathbf{dim} P_M[1] = [\mathbf{d}]_-$ . Alors, il suit de la proposition 3.1.16 que  $\text{supp}(X_{\mathbf{d}}) \in C_{\lambda_{\mathbf{d}}}$  et la  $\lambda_{\mathbf{d}}$ -composante de  $X_{\mathbf{d}}$  est 1.

Comme  $Q$  est graduée, en utilisant la filtration de la proposition 3.1.17, on obtient

$$X_M = X_{\mathbf{dim} M} + \sum_{\epsilon(\mathbf{d}) < \epsilon(\mathbf{dim} M)} n_{\mathbf{d}} X_{\mathbf{d}}$$

où les  $n_{\mathbf{d}}$  sont des nombres rationnels. Par récurrence, puisque les caractéristiques d'Euler de grassmanniennes  $\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M))$  sont des entiers, on obtient  $n_{\mathbf{d}} \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  et donc  $\mathcal{A}(Q)$  est engendré par  $\mathcal{B}'(Q)$  en tant que  $\mathbb{Z}$ -module.  $\square$

En particulier, on a établi le théorème suivant :

**Théorème 9.3.15.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.* Il suit du théorème 9.1.9 que tout carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  vérifie la propriété de différence. Puisque tout carquois réflexion-équivalent à un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  est aussi de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ , les hypothèses du théorème 9.3.14 sont vérifiées et le résultat suit.  $\square$

**Remarque 9.3.16.** Comme nous l'avons déjà mentionné, il conviendra de faire attention au fait que la terminologie *base semi-canonique* introduite dans [22] ne coïncide pas avec celle présentée dans nos travaux. En effet, dans leur étude de la base semi-canonique de l'algèbre amassée associée au carquois de Kronecker, Caldero et Zelevinsky prennent  $X_{M_{\lambda}^{(n)}}$  là où nous prenons  $X_{M_{\lambda}}^n$  pour les variables qui ne sont pas des monômes d'amas. Comme nous le verrons dans la section

9.4, ces deux bases ne diffèrent que par un changement de base localement unipotent. En ce sens, l'utilisation de la terminologie *base semi-canonique* peut confondre quelque peu au premier abord mais d'un point de vue géométrique notre terminologie semble se justifier naturellement.

La terminologie a été motivée par l'analogie entre les travaux de Geiss, Leclerc et Schröer sur la catégorification des algèbres amassées à l'aide de l'algèbre préprojective [54]. Dans leurs travaux, ils définissent des bases dans les algèbres amassées à l'aide de la base semi-canonique duale  $\mathcal{S}^*$  du dual gradué  $U(\mathfrak{n})_{\text{gr}}^*$  de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{n}$  où  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$  est la sous-algèbre nilpotente maximale de l'algèbre de Lie-Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  associée à  $Q$ . Les éléments de cette base semi-canonique duale sont des fonctions génériques  $\rho_Z$  associées aux composantes irréductibles  $Z$  des variétés nilpotentes sur l'algèbre préprojective  $\Lambda$  associée à  $Q$ . En ce sens, notre base semi-canonique est l'analogie dans le cas de la catégorie amassée à la base semi-canonique duale.

Il serait intéressant d'étudier plus avant le lien réel qui existe entre ces deux approches. En effet, si on note  $\Lambda$  l'algèbre préprojective sur  $Q$  et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , la variété  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  se plonge dans une composante irréductible  $Z$  de la variété nilpotente  $\Lambda_{\mathbf{d}}$  des  $\Lambda$ -modules de dimension  $\mathbf{d}$ . Il serait alors intéressant de comprendre quel lien existe entre la fonction générique  $\rho_Z$  sur  $Z$  et la variable générique  $X_{\mathbf{d}}^Q$  sur  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ . A notre connaissance, aucune recherche n'a encore été effectuée dans cette direction à l'heure actuelle.

## 9.4 Bases pour le carquois de Kronecker

Le cas du carquois de Kronecker a déjà fait l'objet d'une étude dans [88] et dans [22]. Dans le premier article, les auteurs étudient la *base canonique* de l'algèbre amassée associée au carquois de Kronecker alors que dans le second, les auteurs étudient une *base semi-canonique* dans un sens légèrement différent de celui introduit dans nos travaux. Dans cette section, nous comparons ces bases avec la base semi-canonique que nous avons introduite. Dans la mesure du possible, nous avons essayé de donner des preuves simplifiées des résultats précédents pour le cas du carquois de Kronecker.

Soit  $K$  le carquois de Kronecker :

$$K : 1 \rightleftarrows 2 .$$

On écrit  $\delta = (1, 1)$  la racine imaginaire de  $K$  et  $\mathcal{A}(K)$  l'algèbre amassée de graine initiale  $(K, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ .

On note toujours  $F_n$  le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev normalisé de première espèce et  $C_n = P_{n,1}$  le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev normalisé de seconde espèce.

### 9.4.1 La base canonique pour le carquois de Kronecker

On rappelle des résultats et la terminologie de [88].

**Définition 9.4.1.** Un élément  $y \in \mathcal{A}(K)$  est dit *positif* si pour tout amas  $\mathbf{x} = (x, x')$ , les coefficients de l'écriture irréductible de  $y$  comme un polynôme de Laurent en  $x$  et  $x'$  sont positifs.



**Théorème 9.4.2** ([88]). *Il existe une unique  $\mathbb{Z}$ -base  $\mathcal{B}(K)$  de  $\mathcal{A}(K)$  telle que le semi-anneau des éléments positifs dans  $\mathcal{A}(K)$  soit précisément constitué des combinaisons linéaires positives entières d'éléments de  $\mathcal{B}(K)$ .*

L'ensemble  $\mathcal{B}(K)$  est appelé *base canonique* de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(K)$ . Les éléments de la base canonique sont explicités dans [88] et sont données par

$$\mathcal{B}(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{P_n(z) : n \geq 1\}$$

où

$$z = \frac{1 + u_1^2 + u_2^2}{u_1 u_2}.$$

De plus, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\delta(P_n(z)) = n\delta$$

Ainsi, la base canonique est la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas et d'un ensemble de variables dont les dénominateurs correspondent aux racines imaginaires positives de  $K$ .

### 9.4.2 La base semi-canonique pour le carquois de Kronecker

On note toujours  $\mathcal{B}'(K)$  la base semi-canonique (au sens présenté dans ces travaux) de l'algèbre amassée associée à  $K$ . Elle est donc donnée par

$$\mathcal{B}'(K) = \{X_{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}\}$$

La description explicite est donnée à la proposition 8.3.10 mais nous donnons une construction indépendante des  $X_{\mathbf{d}}$  qui se fonde sur le fait que l'on connaît explicitement la décomposition canonique des éléments du réseau des racines du carquois de Kronecker [33].

**Proposition 9.4.3.**

$$\mathcal{B}'(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n : n \geq 1\}$$

*Démonstration.* Il suit du lemme 8.2.5 que les monômes d'amas sont des éléments de la base semi-canonique. D'autre part, un calcul direct montre que

$$X_{M_\lambda} = z$$

pour tout quasi-simple  $M_\lambda$  d'un tube. Puisque la décomposition canonique de  $\delta$  est  $\delta$ , il suit que  $X_\delta = X_M$  pour une certaine représentation indécomposable  $M \in \text{rep}(Q, \delta)$ . L'ensemble  $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$  étant un ensemble complet de représentants des isoclasses de représentations indécomposables de dimension  $\delta$ , il s'ensuit que

$$X_\delta = X_{M_\lambda}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$ . La décomposition canonique de  $n\delta$  étant  $\delta^{\oplus n}$ , il suit de la proposition 8.2.2 que  $X_{n\delta} = X_\delta^n = z^n$ . On affirme maintenant que la réunion est disjointe. En effet, considérons un élément  $z^n$  et un monôme d'amas  $x$ . Alors, il existe un  $M$  rigide tel que  $X_M = x$ . Ainsi,  $\dim M \notin \mathbb{N}\delta$  car il n'y a aucune

représentation rigide dans  $\text{rep}(Q, n\delta)$  quel que soit  $n \geq 1$ . Ainsi,  $\delta(x) \neq \delta(z^n)$  pour tout  $n$  et la réunion est disjointe.

On montre maintenant que tout  $X_{\mathbf{d}}$  est ou bien un monôme d'amas ou bien un  $z^n$  pour  $n > 0$ . Supposons d'abord que  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors on sait que  $X_{\mathbf{d}} = X_M$  pour une certaine représentation  $M$  dans l'ouvert  $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}$  de décomposition canonique de Kac. On écrit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ , alors il suit de [33, Section 3] que la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  dépend du quotient  $a = d_1/d_2$ . Plus précisément, si  $a > 1$ , alors la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  est de la forme  $\lambda p_m + \mu p_{m+1}$  où  $p_{2k+1} = \mathbf{dim} P_{2k+1} = \mathbf{dim} \tau^{-k} P_1$  et  $p_{2(k+1)} = \mathbf{dim} P_{2(k+1)} = \mathbf{dim} \tau^{-k} P_2$ . Ainsi,

$$X_{\mathbf{d}} = X_{P_m^\lambda \oplus P_{m+1}^\mu}$$

mais  $\text{Ext}_{kQ}^1(P_m, P_{m+1}) = \text{Ext}_{kQ}^1(P_{m+1}, P_m) = 0$  et donc  $X_{\mathbf{d}}$  est un monôme d'amas. De même, si  $a < 1$ ,  $X_{\mathbf{d}}$  est un monôme d'amas. Enfin, si  $a = 1$ ,  $\mathbf{d} = n\delta$  pour un certain  $n$  et alors

$$X_{\mathbf{d}} = X_{n\delta} = X_\delta^n = X_{M_\lambda}^n = z^n$$

Soit maintenant  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  tel que  $d_i < 0$  pour un certain  $i$ . Si  $d_1 < 0$  et  $d_2 < 0$ , alors

$$X_{\mathbf{d}} = X_{P_1[1]^{\oplus(-d_1)} \oplus P_2[1]^{\oplus(-d_2)}}$$

est un monôme d'amas car  $P_1[1]^{\oplus(-d_1)} \oplus P_2[1]^{\oplus(-d_2)}$  est rigide.

Si  $d_1 < 0$  et  $d_2 \geq 0$ , alors

$$X_{\mathbf{d}} = X_{P_1[1]^{\oplus(-d_1)} \oplus I_2^{\oplus d_2}}$$

est un monôme d'amas car  $P_1[1]^{\oplus(-d_1)} \oplus I_2^{\oplus d_2}$  est rigide.

Enfin, si  $d_1 \geq 0$  et  $d_2 < 0$ , alors

$$X_{\mathbf{d}} = X_{P_1^{\oplus d_1} \oplus P_2[1]^{\oplus(-d_2)}}$$

est un monôme d'amas car  $P_1^{\oplus d_1} \oplus P_2[1]^{\oplus(-d_2)}$  est rigide.

Ainsi, on a montré que

$$\mathcal{B}'(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n : n \geq 1\}.$$

□

On remarquera que  $P_n(z) \neq z^n$  pour tout  $n > 1$ , il s'ensuit donc que la base semi-canonique et la base canonique ne coïncident pas pour le carquois de Kronecker. En particulier, la base semi-canonique ne vérifie pas la propriété de positivité du théorème 9.4.2. Cependant, pour tout  $n \geq 1$ , le vecteur de dénominateur  $\delta(z^n)$  de  $z^n$  est  $n\delta(z) = n\delta$ . Ainsi, comme pour la base canonique, la base semi-canonique est la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas de d'un ensemble de variables dont les vecteurs de dénominateurs correspondent aux racines imaginaires positives de  $K$ .

### 9.4.3 Base de Caldero-Zelevinsky pour le carquois de Kroecker

Dans [22], les auteurs ont déterminé une autre  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(K)$ , cette base est donnée par

$$\mathcal{B}''(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \left\{ X_{M_\lambda^{(n)}} : n \geq 1 \right\}$$

où  $\lambda \in \mathbb{P}^1$  est un élément arbitraire.

D'après le théorème 5.4.3, on sait que  $X_{M_\lambda^{(n)}} = C_n(z)$ . Comme remarqué précédemment, le théorème de dénominateurs 3.1.8 implique que

$$\delta(C_n(z)) = \delta(X_{M_\lambda^{(n)}}) = n\delta.$$

Ainsi,  $\mathcal{B}''(K)$  est aussi la réunion disjointe de l'ensemble des monômes d'amas de d'un ensemble de variables dont les vecteurs de dénominateurs correspondent aux racines imagines positives.

### 9.4.4 Changement de bases entre $\mathcal{B}(K)$ et $\mathcal{B}'(K)$

Nous nous intéressons maintenant aux changements de base entre ces différentes bases. Plus précisément, on montre que chacune de ces bases peut-être obtenue à partir d'un changement de base localement unipotent positif à partir de la base canonique.

**Définition 9.4.4.** Soit  $\mathbf{a} = \{a_n, n \geq 0\}$  et  $\mathbf{b} = \{b_n, n \geq 0\}$  deux bases du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{A}(K)$ . On dit qu'il existe un *changement de base localement unipotent* de  $\mathbf{a}$  vers  $\mathbf{b}$  si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les  $\mathbb{Z}$ -modules engendrés par  $\{a_k, 0 \leq k \leq n\}$  et  $\{b_k, 0 \leq k \leq n\}$  coïncident et si la matrice de passage  $P$  de  $(a_k, 0 \leq k \leq n)$  vers  $(b_k, 0 \leq k \leq n)$  est unipotente dans  $M_n(\mathbb{Z})$ . Si de plus  $P$  a des entrées positives, le changement de base est dit *positif*.

**Proposition 9.4.5.** *Il existe un changement de base localement unipotent positif de  $\mathcal{B}(K)$  vers  $\mathcal{B}'(K)$ .*

*Démonstration.* Comme

$$\mathcal{B}(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{F_n(z), n \in \mathbb{N}\}$$

et

$$\mathcal{B}'(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n, n \in \mathbb{N}\},$$

il suffit de montrer qu'il existe un changement de base localement unipotent de  $\{F_n(z), n \in \mathbb{N}\}$  vers  $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Comme  $\mathcal{B}(K)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(K)$  et  $z^n \in \mathcal{A}(K)$  pour tout  $n$ , il s'ensuit que chaque  $z^n$  peut s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire positive de  $F_k(z)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Chaque  $F_k(z)$  étant un polynôme unitaire de degré  $k$ , il s'ensuit que  $z^n$  peut être écrit comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $F_k(z)$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Ainsi, il existe un changement de base localement unipotent de  $\mathcal{B}(K)$  vers  $\mathcal{B}'(K)$ .

D'après [88],  $z = X_{M_\lambda}$  est un élément positif dans  $\mathcal{A}(K)$ . Ainsi, comme les éléments positifs forment un semi-anneau dans  $\mathcal{A}(K)$ , chaque  $X_{M_\lambda}^n$  est un élément positif dans  $\mathcal{A}(K)$  et peut donc s'écrire comme une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire positive d'éléments de la base canonique  $\mathcal{B}(K)$ . Le changement de base est donc positif et la proposition est prouvée.  $\square$

**Exemple 9.4.6.** Si on regarde la matrice de changement de base de  $(z^n, 0 \leq n \leq 10) \subset \mathcal{B}'(K)$  vers les éléments de la base canonique  $(F_n(z), 0 \leq n \leq 10)$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 20 & 0 & 70 & 0 & 252 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 & 35 & 0 & 126 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 15 & 0 & 56 & 0 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 21 & 0 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 28 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est positive unipotente. La matrice inverse est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 & -7 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 9 & 0 & -16 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 14 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 20 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 9.4.5 Changement de base entre $\mathcal{B}'(K)$ et $\mathcal{B}''(K)$

Pour tout  $n \geq 0$ , on écrit  $F_n = F_n(z)$  et

$$z^n = \sum_{i \leq n} \lambda_{i,n} F_i$$

l'écriture de  $z^n$  dans la base  $F_n$ . Il suit de la proposition 9.4.5 que chaque  $\lambda_{i,n}$  est positif.

**Lemme 9.4.7.** Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

1.  $\lambda_{i,n} = 0$  si  $i \not\equiv n[2]$ ,
2.  $\lambda_{i,n} < \lambda_{i-2,n}$  pour tout  $i \geq 2$  tel que  $i \equiv n[2]$ .

*Démonstration.* On le montre par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , alors  $z^n = F_1$  et donc  $\lambda_{1,1} = 1$  et  $\lambda_{i,1} = 0$  pour tout  $i \neq 1$ , ce qui prouve le lemme. Soit maintenant  $n \geq 1$ , on a

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = F_1 \cdot \left( \sum_{i \leq n} \lambda_{i,n} F_i \right)$$

D'autre part, d'après [88, proposition. 5.4 (1)], on a

$$F_1 F_i = \begin{cases} F_{i-1} + F_{i+1} & \text{si } n > 1 \\ 2 + F_2 & \text{si } i = 1 \\ F_1 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= \lambda_{0,n} F_1 F_0 + \lambda_{1,n} F_1 F_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \lambda_{i,n} F_1 F_i \\ &= \lambda_{0,n} F_1 + \lambda_{1,n} (2 + F_2) + \sum_{2 \leq i \leq n} \lambda_{i,n} (F_{i-1} + F_{i+1}) \\ &= 2\lambda_{1,n} F_0 + (\lambda_{0,n} + \lambda_{2,n}) F_1 + \sum_{i \geq 2} (\lambda_{i-1,n} + \lambda_{i+1,n}) F_i \end{aligned}$$

on vérifie alors le résultat par hypothèse de récurrence.  $\square$

**Proposition 9.4.8.** *Il existe un changement de base localement unipotent positif de  $\mathcal{B}''(K)$  vers  $\mathcal{B}'(K)$ .*

*Démonstration.* Comme

$$\mathcal{B}'(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n, n \geq 0\}$$

et

$$\mathcal{B}''(K) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{C_n(z), n \geq 0\},$$

il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 0$ , les coefficients de l'écriture de  $z^n$  comme combinaison linéaire des  $C_n(z)$  sont positifs.

On écrit  $C_n = C_n(z)$  et on rappelle que  $F_n = C_n - C_{n-2}$ . On écrit

$$z^n = \sum_{i \leq n} \lambda_{i,n} F_n$$

l'écriture de  $z^n$  comme combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire des  $F_n$ , alors

$$\begin{aligned} z^n &= \sum_i \lambda_{i,n} (C_n - C_{n-2}) \\ &= \sum_i (\lambda_{i,n} - \lambda_{i+2,n}) C_n \end{aligned}$$

mais d'après le lemme 9.4.7, la différence  $(\lambda_{i,n} - \lambda_{i+2,n})$  est positive et donc  $z^n$  s'écrit comme combinaison linéaire positive des  $C_n$ .  $\square$

**Exemple 9.4.9.** Si on regarde le changement de base de  $(C_n(z), 0 \leq n \leq 10) \subset$

$\mathcal{B}''(K)$  vers  $(z^n, 0 \leq n \leq 10) \subset \mathcal{B}'(K)$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 14 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 14 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 28 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 14 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 20 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est unipotente positive. La matrice inverse est alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 10 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 15 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 9.5 Bases semi-canoniques pour les carquois affines de rang 3 et 4

Dans cette section, nous explicitons la base semi-canonique d'une algèbre amassée affine (simplement lacée) de rang 3 ou 4.

### 9.5.1 La base semi-canonique pour le type $\tilde{A}_{2,1}$

Nous nous intéressons au cas d'une algèbre amassée de type  $\tilde{A}_{2,1}$ , qui est le seul exemple d'algèbre amassée affine de rang 3. Un carquois de type  $\tilde{A}_{2,1}$  est toujours isomorphe à

$$Q : \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 3. \end{array}$$

Pour tout  $\lambda \in k$ , on définit la représentation  $M_\lambda$  par

$$M_\lambda : \begin{array}{ccc} & k & \\ \nearrow 1 & & \searrow \lambda \\ k & \longrightarrow & k \end{array}$$

et on pose

$$M_\infty : \begin{array}{ccc} & k & \\ 1 \nearrow & & \searrow 1 \\ k & \xrightarrow{0} & k. \end{array}$$

On identifie  $\mathbb{P}^1$  et  $k \sqcup \{\infty\}$ . Pour tout  $\in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ ,  $M_\lambda$  est un module quasi-simple dans un tube exceptionnel et  $\mathbb{P}_0^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ . Le seul tube exceptionnel  $\mathcal{T}_0$  est de rang 2 et ses quasi-simples sont

$$E_0 : \begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow & \searrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

et

$$E_1 : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 \nearrow & & \searrow \\ k & \xrightarrow{1} & k. \end{array}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} x_0 &= X_{E_0} = \frac{u_1 + u_3}{u_2} \\ x_1 &= X_{E_1} = \frac{1 + u_1 u_2 + u_2 u_3}{u_1 u_3} \\ z &= X_{M_\lambda} = \frac{u_1^2 u_2 + u_1 + u_3 + u_2 u_3^2}{u_1 u_2 u_3 u_4} \end{aligned}$$

Puisque pour tout  $i \neq j$ , on a

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_i, E_j) \neq 0,$$

les seuls objets de  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$  sont les  $E_i^{\oplus r}$   $i \in \{0, 1\}$  et  $r \geq 1$ .

Il suit alors de la proposition 8.3.10 que

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n x_i^r : n > 0, r \geq 0, i = 0, 1\}.$$

**Remarque 9.5.1.** Dans [23], l'auteur a explicité la base canonique (au sens de Sherman et Zelevinsky)  $\mathcal{B}(\tilde{A}_{2,1})$  dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(\tilde{A}_{2,1})$  avec coefficients avec n'importe quels coefficients. Dans le cas sans coefficients (c'est à dire dans le cas où ces coefficients sont spécialisés à la valeur 1), l'auteur a montré que

$$\mathcal{B}(\tilde{A}_{2,1}) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{P_n(z) x_i^r : n > 0, r \geq 0, i = 0, 1\}$$

où  $P_n$  désigne toujours les polynômes de Chebyshev de première espèce.

Il suit alors de la section 9.4 qu'il existe un changement de base localement unipotent positif de  $\mathcal{B}(\tilde{A}_{2,1})$  vers  $\mathcal{B}'(\tilde{A}_{2,1})$  et que ce changement de base est le même que celui explicité pour le carquois de Kronecker.

Nous conjecturons que ce changement de base permet de déterminer de manière générale la base canonique d'une algèbre amassée affine :

**Conjecture 9.5.2.** *Soit  $Q$  un carquois affine. Alors la base canonique (au sens de Sherman et Zelevinsky) de  $\mathcal{A}(Q)$  est donnée par :*

$$\mathcal{B}(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{P_n(X_\delta)X_R : R \in \mathcal{E}_R\}.$$

On remarquera que dans le cas affine  $\tilde{\mathbb{A}}$ , le fait que  $\mathcal{B}(Q)$  ainsi définie est une  $\mathbb{Z}$ -base découle immédiatement du fait que  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base, la véritable difficulté est de démontrer la propriété de positivité de  $\mathcal{B}(Q)$ . A l'heure actuelle, les méthodes utilisées dans [23] ne semblent pas pouvoir s'appliquer au cas  $\tilde{\mathbb{A}}$  en général.

### 9.5.2 La base semi-canonique pour le type $\tilde{\mathbb{A}}_{3,1}$

On s'intéresse à l'exemple d'algèbre amassée affine de rang 4 déjà apparu dans l'exemple 9.1.11. Soit  $Q$  un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{3,1}$ . Alors  $Q$  est nécessairement isomorphe à

$$Q : \begin{array}{ccccc} & & 2 & \longrightarrow & 3 \\ & \nearrow & & & \searrow \\ 1 & & & \longrightarrow & 4. \end{array}$$

On garde les notations de l'exemple 9.1.11. On calcule

$$\begin{aligned} x_0 &= X_{E_0} = \frac{u_2 + u_4}{u_3} \\ x_1 &= X_{E_1} = \frac{u_1 + u_3}{u_2} \\ x_2 &= X_{E_2} = \frac{1 + u_1u_3 + u_2u_4}{u_1u_4} \\ y_0 &= X_{E_0^{(2)}} = \frac{u_2u_1 + u_1u_4 + u_4u_3}{u_2u_3} \\ y_1 &= X_{E_1^{(2)}} = \frac{u_3u_1^2 + u_1 + u_3^2u_1 + u_3 + u_3u_2u_4}{u_1u_2u_4} \\ y_2 &= X_{E_2^{(2)}} = \frac{u_2u_3u_1 + u_2 + u_2^2u_4 + u_4 + u_2u_4^2}{u_1u_3u_4} \\ z &= X_{M_\lambda} = \frac{u_3u_2u_1^2 + u_2u_1 + u_1u_4 + u_4u_3 + u_3u_2u_4^2}{u_1u_2u_3u_4} \end{aligned}$$

Pour tous  $i \neq j$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_i, E_j) &\neq 0, \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_i^{(2)}, E_j^{(2)}) &\neq 0, \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_i, E_j^{(2)}) &\neq 0, \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $i = 0, 1, 2$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(E_i, E_i^{(2)}) = 0$ . Ainsi,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}} = \left\{ E_i^{\oplus r} \oplus (E_i^{(2)})^{\oplus s} : r, s \geq 0, i = 0, 1, 2 \right\}.$$

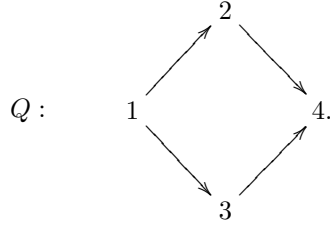
Il suit alors de la proposition 8.3.10 que

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n x_i^r y_i^s : n > 0, r, s \geq 0, i = 0, 1, 2\}.$$



### 9.5.3 La base semi-canonique pour le type $\tilde{A}_{2,2}$

Un carquois affine de rang 4 est ou bien de type  $\tilde{A}_{3,1}$  ou de type  $\tilde{A}_{2,2}$ . Nous explicitons donc maintenant la base semi-canonique d'une algèbre amassée de type  $\tilde{A}_{2,2}$ . Quitte à faire une réflexion en 4, on peut supposer que  $Q$  est le carquois



Le carquois AR de  $kQ$  contient deux tubes exceptionnels qui sont de rang 2. On les note  $\mathcal{T}_0$  et  $\mathcal{T}_\infty$ . Les quasi-simples de  $\mathcal{T}_0$  sont notés  $E_0$  et  $E_1$  et les quasi-simples de  $\mathcal{T}_\infty$  sont notés  $F_0$  et  $F_1$ .

Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
 x_0 &= X_{E_0} = \frac{u_1 + u_4}{u_2} \\
 x_1 &= X_{E_1} = \frac{u_1 + u_4 + u_1 u_2 u_3 + u_2 u_3 u_4}{u_1 u_3 u_4} \\
 y_0 &= X_{F_0} = \frac{u_1 + u_4}{u_3} \\
 y_1 &= X_{F_2} = \frac{u_1 + u_4 + u_1 u_2 u_3 + u_2 u_3 u_4}{u_1 u_2 u_4} \\
 z &= X_{M_\lambda} = \frac{u_1^2 + u_4^2 + 2u_1 u_4 + u_1^2 u_2 u_3 + u_2 u_3 u_4^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\text{Ext}_{C_Q}^1(E_0, E_1) \simeq k^2 \simeq \text{Ext}_{C_Q}^1(F_0, F_1),$$

$$\text{Ext}_{C_Q}^1(E_i, F_j) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Ainsi

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}} = \{E_i^{\oplus r} \oplus F_j^{\oplus s} : r, s \geq 0, i, j = 0, 1\}.$$

Il suit alors de la proposition 8.3.10 que

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^n x_i^r y_j^s : n > 0, r, s \geq 0, i, j = 0, 1\}.$$

## 9.6 Approche combinatoire des variables généralisées régulières

Dans cette section, nous donnons une formule combinatoire indépendante de la théorie des représentations pour calculer les variables généralisées associées aux modules contenus dans les composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Cette formule s'avère être en fait une réécriture combinatoire de l'application Caldero-Chapoton basée sur la description combinatoire des quasi-simples des tubes pour une algèbre de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Ceci permettra aussi de donner une expression combinatoire pour les variables génériques d'une catégorie amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  qui ne sont pas des monômes d'amas.

### 9.6.1 Réalisation combinatoire des quasi-simples

Nous commençons par construire les simples des tubes d'un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  de manière combinatoire. Cette méthode est succinctement présentée dans [50]. Nous donnons des preuves par souci de complétude.

Soit  $Q$  un carquois de type affine  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r, s \geq 1$ . Pour toute flèche  $\beta \in Q_1$ , on note  $n_\beta$  le nombre de flèches de  $Q_1$  allant dans la même direction que  $\beta$ . On définit le carquois

$$Q \setminus \{\beta\} = (Q_0, Q_1 \setminus \{\beta\})$$

et on écrit

$$\mathcal{C}_\beta = \{c \text{ chemin dans } Q \setminus \{\beta\} \text{ tel que } s(c) = s(\beta)\}.$$

Si  $\mathcal{C}_\beta$  est non-vide, il existe un unique chemin  $c_\beta$  de longueur maximale dans  $\mathcal{C}_\beta$  et on le note  $c_\beta$ . Sinon, on pose  $c_\beta = e_{s(\beta)}$  comme étant le chemin trivial formel de source et de tête  $s(\beta)$ .  $\mathcal{C}_\beta$  est appelé *ensemble des chemins contraires à  $\beta$*  et  $c_\beta$  est appelé *chemin contraire maximal*.

Pour fixer les notations, un chemin  $c$  dans  $Q$  sera noté  $c = (\beta_1 | \dots | \beta_n)$  où les  $\beta_i$  sont des flèches de  $Q_1$  telles que  $t(\beta_i) = s(\beta_{i+1})$ . De plus, on notera  $\beta \subset c$  pour signifier qu'il existe un  $i = 1, \dots, n$  tel que  $\beta = \beta_i$ . Etant donné un chemin  $c = (\beta_1 | \dots | \beta_n)$ , on appelle *support* de  $c$  le sous-ensemble de  $Q_0$  :

$$\text{supp}(c) = \{s(\beta_i) \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{t(\beta_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Pour toute flèche  $\beta \in Q_1$ , on définit une représentation  $M_\beta$  de  $Q$  par :

$$\begin{cases} M_\beta(i) \simeq k & \text{pour tout sommet } i \in \text{supp}(c_\beta) \\ M_\beta(i) = 0 & \text{pour tout sommet } i \notin \text{supp}(c_\beta) \\ M_\beta(\beta) = \text{id}_k & \text{pour toute flèche } \beta \subset c_\beta \\ M_\beta(\beta) = 0 & \text{pour toute flèche } \beta \not\subset c_\beta \end{cases}$$

On peut paramétriser les quasi-simples des tubes exceptionnels par les flèches  $\beta \in Q_1$  telles que  $n_\beta > 1$ . Plus précisément :

**Proposition 9.6.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$ . Alors l'ensemble*

$$\{M_\beta \mid \beta \in Q_1 \text{ tel que } n_\beta > 1\}$$

*est un ensemble complet de représentants des isoclasses de modules quasi-simples dans les tubes exceptionnels.*

*Démonstration.* Par construction,  $M_\beta$  ainsi défini est une représentation indécomposable. On montre que  $M_\beta$  est un module régulier quasi-simple. On rappelle que la forme d'Euler se calcule de la manière suivante :

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \longrightarrow j \text{ dans } Q_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\langle \mathbf{dim} M_\beta, \delta \rangle = \sum_{i \in \text{supp}(c_\beta)} 1 - \sum_{i \longrightarrow j, i \in \text{supp}(c_\beta)} 1.$$

Si  $c_\beta = e_\beta$ , alors  $\beta$  est la seule flèche de  $i$  vers  $j$  dans  $Q_1$  et donc  $\langle \mathbf{dim} M_\beta, \delta \rangle = 0$ . Sinon, soit  $i \in \text{supp}(c_\beta)$ , si  $i = t(c_\beta)$ , alors par maximalité de  $c_\beta$  il n'y a pas de flèche  $i \longrightarrow j$  pour chaque  $j \in Q_0$ . Si  $i = s(\beta)$ , il y a exactement deux flèches de source  $i$  qui sont  $\beta$  et la première flèche de  $c_\beta$ . Pour tout  $i \in \text{supp}(c_\beta)$  différent de  $s(\beta), t(\beta)$ , il existe une unique flèche de source  $i$  qui appartient à  $c_\beta$ . Finalement,

$$|\{i \longrightarrow j \in Q_1 : i \in \text{supp}(c_\beta)\}| = |\text{supp}(c_\beta)|.$$

Il s'ensuit que  $\langle \mathbf{dim} M_\beta, \delta \rangle = 0$  et donc  $M_\beta$  est un module régulier indécomposable. De plus, la même discussion montre que si  $U \subsetneq M_\beta$  est un sous-module non-nul, alors  $\langle \mathbf{dim} U, \delta \rangle > 0$  et donc  $U$  n'est pas régulier. Ainsi,  $M_\beta$  est régulier et quasi-simple pour tout  $\beta \in Q_1$ .

D'autre part, on sait que le nombre de quasi-simples dans les tubes exceptionnel est égal à  $|\{\beta \in Q_1 : n_\beta > 1\}|$  (voir [34] par exemple). Les  $M_\beta$  étant deux à deux non-isomorphes, ceci démontre la proposition.  $\square$

On remarquera que  $n_\beta = 1$  si et seulement si  $\mathbf{dim} M_\beta = \delta$ . Ainsi, la démonstration de la proposition 9.6.1 montre que  $M_\beta$  est quasi-simple dans un tube homogène si et seulement si  $n_\beta = 1$ .

On donne maintenant une interprétation de la translation d'Auslander-Reiten au niveau des flèches dans  $Q_1$ .

**Définition 9.6.2.** Soient  $\gamma, \beta$  des flèches dans  $Q_1$ , on dit que  $\gamma$  précède  $\beta$  et on le note  $\beta = \tau(\gamma)$  ou  $\gamma = \tau^{-1}(\beta)$  si et seulement si  $t(c_\gamma) = t(\beta)$ .

Le lemme technique suivant sera utile dans la suite :

**Lemme 9.6.3.** Soit  $Q$  un carquois affine,  $E, M$  des modules quasi-simples dans des tubes exceptionnels. Alors

$$M \simeq \tau E \Leftrightarrow \langle E, M \rangle < 0.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\langle E, M \rangle < 0 \Rightarrow M \simeq \tau E$ . Comme  $\langle E, M \rangle < 0$ ,  $\text{Ext}_k^1(E, M) \neq 0$  et donc  $E$  et  $M$  appartiennent au même tube. Soit une suite exacte non-scindée

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Alors  $X/M \simeq E$  est un module quasi-simple et donc  $M$  est un module régulier quasi-simple de suite de quasi-composition  $0 \subset M \subset X$ . Il s'ensuit que les morphismes  $M \longrightarrow X$  et  $X \longrightarrow E$  sont irréductibles et donc la suite est presque scindée et  $M \simeq \tau E$ .  $\square$

**Proposition 9.6.4.** Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{A}_{r,s}$ . Soient  $\gamma, \beta \in Q_1$ . Alors

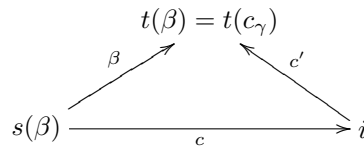
$$\beta = \tau(\gamma) \Leftrightarrow M_\beta \simeq \tau M_\gamma.$$

*Démonstration.* Si  $n_\beta = 1$ , alors  $t(c_\beta) = t(\beta)$  et donc  $\beta = \tau(\beta)$ . Comme  $M_\beta$  est quasi-simple dans un tube homogène, le résultat suit.

Sinon, supposons que  $n_\beta > 1$  et que  $\beta = \tau(\gamma)$ , alors d'après le lemme 9.6.3, il suffit de montrer que  $\langle M_\beta, M_\gamma \rangle < 0$ . On a

$$\langle \beta, \gamma \rangle = |\{\text{supp}(c_\beta) \cap \text{supp}(c_\gamma)\}| - |\{i \rightarrow j : i \in \text{supp}(c_\beta), j \in \text{supp}(c_\gamma)\}|$$

Montrons que  $\text{supp}(c_\beta) \cap \text{supp}(c_\gamma) = 0$ . Si  $i \in \text{supp}(c_\beta) \cap \text{supp}(c_\gamma)$ , alors il existe des chemins  $c : s(\beta) \rightarrow i$  et  $c' : i \rightarrow t(c_\gamma)$  dans  $Q$  et donc



En particulier, on a  $n_\beta = 1$  d'où une contradiction.

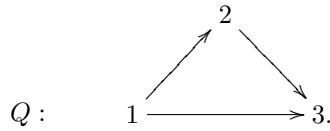
Comme  $s(\beta) \in \text{supp}(c_\beta)$  et  $t(\beta) = t(c_\gamma) \in \text{supp}(c_\gamma)$ , on a

$$\beta \in \{i \rightarrow j : i \in \text{supp}(c_\beta), j \in \text{supp}(c_\gamma)\}.$$

Il s'ensuit que  $\langle \beta, \gamma \rangle < 0$ , ce qui prouve la proposition. □

En particulier, deux modules  $M_\beta, M_\gamma$  sont dans le même tube si et seulement si  $\beta$  et  $\gamma$  vont dans le même sens.

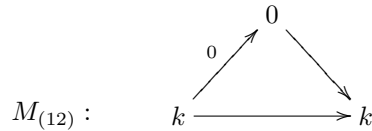
**Exemple 9.6.5.** Soit  $Q$  le carquois de type  $\tilde{A}_{2,1}$



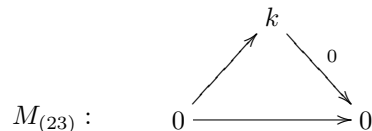
Pour simplifier les notations, on note  $(ij)$  une flèche  $i \rightarrow j$ . On a alors

$$n_{(13)} = 1 \text{ et } n_{(12)} = n_{(23)} = 2.$$

De plus,  $c_{(12)} = (13)$  et  $t(13) = t(23)$  donc  $\tau(12) = (23)$  et de même  $\tau(23) = (12)$ . Il s'ensuit que



et



sont les modules quasi-simples d'un tube exceptionnel de rang 2 et  $M_{(13)}$  est un quasi-simple d'un tube homogène.

### 9.6.2 Variables d'amas associées aux modules quasi-simples

La proposition 9.6.4 permet d'obtenir une réalisation explicite des modules quasi-simples des tubes exceptionnels en terme de combinatoire des flèches dans  $Q$ . Nous donnons maintenant une réécriture de la formule de Caldero-Chapoton en termes de cette combinatoire.

Pour tout chemin  $c = (\beta_1 | \cdots | \beta_n)$  dans  $Q$ , on note  $K_c$  la représentation de  $Q$  définie par

$$\begin{cases} K_c(i) \simeq k & \text{si } k \in \text{supp}(c) \\ K_c(i) = 0 & \text{si } k \notin \text{supp}(c) \\ K_c(\gamma) = \text{id}_k & \text{si } \gamma = \beta_i \text{ pour un certain } i \\ K_c(\gamma) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, pour tout  $\beta \in Q_1$ , on a  $M_\beta \simeq K_{c_\beta}$ .

**Notation 9.6.6.** Etant donnés deux chemins  $c, c'$ , on note

$$c \leq c' \Leftrightarrow \begin{cases} t(c') = t(c) \\ \text{supp}(c') \subset \text{supp}(c) \end{cases}$$

et on note  $c < c'$  si  $c \leq c'$  et  $c \neq c'$ . Par convention, on pose  $\emptyset \leq c$  pour tout chemin  $c$ .

Pour toute flèche  $\beta \in Q_1$ , on a alors la description suivante de  $\text{Gr}(M_\beta)$  en termes de sous-chemins de  $c_\beta$  :

**Lemme 9.6.7.** Soit  $\beta \in Q_1$ . Alors

$$\text{Gr}(M_\beta) = \{K_c : c \text{ chemin dans } Q \text{ tel que } c \leq c_\beta\}$$

**Notation 9.6.8.** Soit  $\beta \in Q_1$  et  $c$  un chemin dans  $Q$  tel que  $c < c_\beta$ . Alors, il existe un unique sommet  $i \in \text{supp}(c_\beta)$  tel qu'il existe une flèche  $i \rightarrow s(c)$ . Ce sommet est noté  $t(c_\beta \setminus c)$ .

Il existe un unique  $i \in Q_0 \setminus \text{supp}(c_\beta)$  tel que  $i \rightarrow t(c_\beta)$  et on note  $t^-(c_\beta)$  ce sommet.

**Théorème 9.6.9.** Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  et soit  $\beta \in Q_1$ . Alors

$$X_{M_\beta} = \frac{u_{t^-(c_\beta)}}{u_{t(c_\beta)}} + \frac{u_{t(\beta)}}{u_{s(\beta)}} + \sum_{\emptyset < c < c_\beta} \frac{1}{u_{s(c)} u_{t(c_\beta \setminus c)}}$$

*Démonstration.* D'après le lemme 9.6.7, l'application Caldero-Chapoton évaluée au module  $M_\beta$  est égale à

$$X_{M_\beta} = \sum_{c \leq c_\beta} \prod_{i \in Q_0} u_i^{-\langle \dim K_c, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \dim M_\beta - \dim K_c \rangle}.$$

Pour tout sous-chemin  $c \leq c_\beta$ , nous calculons le monôme

$$\mathbf{u}_c = u_i^{-\langle \dim K_c, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \dim M_\beta - \dim K_c \rangle}.$$

Soit un sous-chemin  $c \leq c_\beta$ , on a

$$\dim K_c = \sum_{j \in \text{supp}(c)} \alpha_j,$$

$$\dim M_\beta - \dim K_c = \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta) \setminus \text{supp}(c)} \alpha_j.$$

Supposons d'abord que  $c = \emptyset$ . Alors il suffit de calculer  $\langle \alpha_i, \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta)} \alpha_j \rangle$  pour tout  $i \in Q_0$ . Soit  $i \in Q_0$ . Alors le nombre de sommets  $j \in \text{supp}(c_\beta)$  tel qu'il existe une flèche  $i \rightarrow j$  dans  $Q_1$  est égal à :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq t(c_\beta), \\ 0 & \text{si } i = t(c_\beta) \\ 1 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i = t^-(c_\beta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left\langle \alpha_i, \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta)} \alpha_j \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq t(c_\beta), \\ 1 & \text{si } i = t(c_\beta), \\ -1 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i = t^-(c_\beta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\mathbf{u}_\emptyset = \frac{u_{t^-(c_\beta)}}{u_{t(c_\beta)}}$$

Si  $c = c_\beta$ , alors il suffit de calculer  $\langle \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta)} \alpha_j, \alpha_i \rangle$  pour tout  $i \in Q_0$ . Soit  $i \in Q_0$ , le nombre de sommets  $j \in \text{supp}(c_\beta)$  tel qu'il existe une flèche  $j \rightarrow i$  dans  $Q_1$  est égal à :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq s(c_\beta), \\ 0 & \text{si } i = s(c_\beta) \\ 0 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq t(\beta), \\ 1 & \text{si } i = t(\beta) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left\langle \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta)} \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq s(c_\beta), \\ 1 & \text{si } i = s(c_\beta), \\ 0 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta) \text{ et } i \neq t(\beta), \\ 1 & \text{si } i = t(\beta). \end{cases}$$

et

$$\mathbf{u}_{c_\beta} = \frac{u_{t(\beta)}}{u_{s(c_\beta)}} = \frac{u_{t(\beta)}}{u_{s(\beta)}}.$$

Soit maintenant  $c$  un chemin tel que  $\emptyset \neq \text{supp}(c) \subsetneq \text{supp}(c_\beta)$ . Soit  $i \in Q_0$ . Alors le nombre de sommets  $j \in \text{supp}(c)$  tel qu'il existe une flèche  $j \rightarrow i$  dans  $Q_1$  est égal à :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \text{supp}(c) \text{ et } i \neq s(c), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left\langle \sum_{j \in \text{supp}(c)} \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c), \\ 1 & \text{si } i = s(c), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, le nombre de sommets  $j \in \text{supp}(c_\beta) \setminus \text{supp}(c)$  tel qu'il existe une flèche  $i \rightarrow j$  dans  $Q_1$  est égal à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c), \\ 0 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta), \\ 0 & \text{si } i = t(c_\beta \setminus c), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left\langle \alpha_i, \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta) \setminus \text{supp}(c)} \alpha_j \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c), \\ 0 & \text{si } i \notin \text{supp}(c_\beta), \\ 1 & \text{si } i = t(c_\beta \setminus c), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et donc, si on note

$$n(i, c, c_\beta) = - \left\langle \sum_{j \in \text{supp}(c)} \alpha_j, \alpha_i \right\rangle - \left\langle \alpha_i, \sum_{j \in \text{supp}(c_\beta) \setminus \text{supp}(c)} \alpha_j \right\rangle,$$

on a

$$n(i, c, c_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \text{supp}(c) \text{ et } i \neq s(c), \\ -1 & \text{si } i = s(c) \\ 0 & \text{si } i \notin \text{supp}(c) \text{ et } i \notin \text{supp}(c_\beta) \\ -1 & \text{si } i = t(c_\beta \setminus c) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

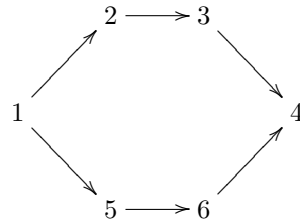
$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{u_{s(c)} u_{t(c_\beta \setminus c)}}.$$

Finalement,

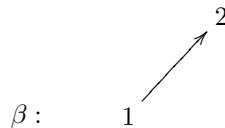
$$\begin{aligned} X_{M_\beta} &= \sum_{c \leq c_\beta} \mathbf{u}_c \\ &= \frac{u_{t^-(c_\beta)}}{u_{t(c_\beta)}} + \frac{u_{t(\beta)}}{u_{s(\beta)}} + \sum_{\emptyset < c < c_\beta} \frac{1}{u_{s(c)} u_{t(c_\beta \setminus c)}}. \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. □

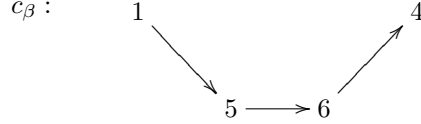
**Exemple 9.6.10.** Considérons le carquois de type  $\tilde{A}_{3,3}$



et soit la flèche  $\beta \in Q_1$  :



Le chemin contraire maximal  $c_\beta$  est alors



et on a  $t(\beta) = 2$ ,  $s(\beta) = s(c_\beta) = 1$ ,  $t(c_\beta) = 4$  et  $t^-(c_\beta) = 3$ .

Pour simplifier les notations, on désignera les chemins par leur support, écrivant par exemple  $c_\beta : (1564)$ .

Si  $c = \emptyset$ , alors  $\mathbf{u}_\emptyset = \frac{u_3}{u_4}$ .

Si  $c = (4)$ , alors  $s(c) = 4$  et  $t(c_\beta \setminus c) = 6$ , ainsi  $\mathbf{u}_{(4)} = \frac{1}{u_4 u_6}$ .

Si  $c = (64)$ , alors  $s(c) = 6$  et  $t(c_\beta \setminus c) = 5$ , ainsi  $\mathbf{u}_{(64)} = \frac{1}{u_5 u_6}$ .

Si  $c = (564)$ , alors  $s(c) = 5$  et  $t(c_\beta \setminus c) = 1$ , ainsi  $\mathbf{u}_{(564)} = \frac{1}{u_1 u_5}$ .

Finalement, si  $c = c_\beta$ , alors  $\mathbf{u}_{c_\beta} = \frac{u_2}{u_1}$ .

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} X_{M_\beta} &= \frac{u_3}{u_4} + \frac{1}{u_4 u_6} + \frac{1}{u_5 u_6} + \frac{1}{u_1 u_5} + \frac{u_2}{u_1} \\ &= \frac{u_3 u_6 u_5 u_1 + u_1 u_5 + u_1 u_4 + u_4 u_6 + u_2 u_4 u_6 u_5}{u_1 u_4 u_5 u_6}. \end{aligned}$$

### 9.6.3 Variables d'amas régulières

D'après le théorème 3.1.4, on sait que pour toute variable d'amas  $x$  dans  $\mathcal{A}(Q)$ , il existe un unique objet indécomposable  $M$  (à isomorphisme près) dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $x = X_M$ . Si  $M$  est transjectif, alors  $x$  est appelée *variable d'amas transjective*, sinon  $x$  est appelée *variable d'amas régulière*.

La description des variables d'amas transjective peut se faire par récurrence à l'aide du foncteur de shift à partir des variables d'amas de la graine initiale. En revanche, la description des variables d'amas régulières est souvent plus ardue. En vertu du théorème 5.4.3, une variable généralisée associée à un module régulier peut s'écrire polynomialement en les variables généralisées associées aux modules quasi-simples (voir partie II). Pour décrire les variables régulières, il suffit donc de savoir décrire les variables généralisées associées aux modules quasi-simples des composantes régulières. D'après les propositions 9.6.1 et 9.6.4, nous avons une description combinatoire des quasi-simples des tubes exceptionnels si  $Q$  est un carquois de type  $\tilde{A}$ . De plus, le théorème 9.6.9 donne une expression combinatoire des variables généralisées associées aux modules quasi-simples dans les tubes exceptionnels.

Soit  $\beta$  une flèche dans  $Q_1$  et soit  $\mathcal{T}_\beta$  le tube contenant  $M_\beta$ . On rappelle que  $\text{rg}(\mathcal{T}_\beta) = n_\beta$ . Comme précédemment, pour tout quasi-simple  $E$  dans  $\mathcal{T}_\beta$ ,  $E^{(n)}$  désigne l'unique indécomposable dans  $\mathcal{T}_\beta$  de quasi-socle  $E$  et de quasi-longueur  $n$ .

**Proposition 9.6.11.** *Soit  $\beta \in Q_1$ . Alors*

$$X_{M_\beta^{(n)}} = P_{n,\infty}(X_{M_\beta}, X_{M_{\tau^{-1}(\beta)}}, \dots, X_{M_{\tau^{-n+1}(\beta)}}).$$

Plus précisément,

$$X_{M_\beta^{(n)}} = P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta+1}(\beta)}}).$$



*Démonstration.* Soit  $\beta \in Q_1$ . Alors  $M_\beta$  est un module quasi-simple dans un tube de rang  $n_\beta$  et  $M_{\tau^k\beta} = \tau^k M_\beta$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que les  $M_{\tau^k\beta}$  pour  $-n_\beta + 1 \leq k \leq 0$  sont tous les quasi-simples de  $\mathcal{T}_\beta$ . Alors le théorème 5.4.3 implique que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} X_{M_\beta^{(n)}} &= P_{n,\infty}(X_{M_\beta}, X_{M_{\tau^{-1}(\beta)}}, \dots, X_{M_{\tau^{-n+1}(\beta)}}) \\ &= P_{n,\infty}(X_{M_\beta}, X_{M_{\tau^{-1}(\beta)}}, \dots, X_{M_{\tau^{-n+1}(\beta)}}). \end{aligned}$$

et comme  $\mathcal{T}_\beta$  a un rang  $n_\beta$ ,  $X_{M_{\tau^{-n_\beta}(\beta)}} = X_{M_\beta}$  et donc

$$P_{n,\infty}(X_{M_\beta}, X_{M_{\tau^{-1}(\beta)}}, \dots, X_{M_{\tau^{-n+1}(\beta)}}) = P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta+1}(\beta)}}).$$

□

Nous montrons maintenant que si  $Q$  est un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r = 1$  ou  $s = 1$ , alors les variables généralisées calculées dans la proposition 9.6.11 sont toutes les variables généralisées associées à des modules indécomposables réguliers.

**Lemme 9.6.12.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  tel que  $r = 1$  ou  $s = 1$ . Alors*

$$\{X_M : M \in \text{ind}(\mathcal{R}(Q))\} = \left\{ P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta+1}(\beta)}}) : \beta \in Q_1, n \geq 1 \right\}$$

*Démonstration.* D'après la proposition 9.6.11, il suffit de montrer l'inclusion "C". Soit  $M$  un module indécomposable régulier. Alors  $M$  appartient à un tube  $\mathcal{T}$ . Si  $\mathcal{T}$  est exceptionnel, alors  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\beta$  pour une flèche  $\beta \in Q_1$  et  $M \simeq M_\beta^{(n)}$  pour un certain entier  $n \geq 1$ . Il suit alors de la proposition 9.6.11 que

$$X_M = P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta+1}(\beta)}}).$$

Supposons maintenant que  $\mathcal{T}$  est homogène. Puisque  $Q$  est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r = 1$  ou  $s = 1$ , il existe une flèche  $\beta \in Q_1$  telle que  $n_\beta = 1$ . Soit  $M_\lambda$  le module quasi-simple de  $\mathcal{T}$ . Alors il suit du lemme 9.1.4 que

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = X_{M_\beta^{(n)}}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Comme  $M$  est indécomposable dans  $\mathcal{T}$ , on peut écrire  $M \simeq M_\lambda^{(n)}$  pour un certain entier  $n \geq 1$  et alors

$$\begin{aligned} X_M &= X_{M_\lambda^{(n)}} \\ &= X_{M_\beta^{(n)}} \\ &= P_{n,1}(X_{M_\beta}), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

On s'intéresse maintenant au cas où  $r, s > 1$ , c'est à dire le cas où le carquois d'Auslander-Reiten de  $Q$  contient exactement deux tubes exceptionnels. Pour toute flèche  $\beta_0 \in Q_1$ , on note

$$\Delta_\beta = P_{n_\beta, n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta+1}(\beta)}}) - P_{n_\beta-2, n_\beta}(X_{M_{\tau^{-1}(\beta)}}, \dots, X_{M_{\tau^{-n_\beta}(\beta)}})$$

qui correspond à la différence apparaissant dans la propriété de différence dans le cas où le quasi-simple considéré est  $M_\beta$ .

**Lemme 9.6.13.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  tel que  $r, s > 1$ . Alors pour toute flèche  $\beta_0 \in Q_1$ , l'ensemble  $\{X_M : M \in \text{ind}(\mathcal{R}(Q))\}$  est égal à la réunion*

$$\left\{ P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau-n_\beta+1}(\beta)}) : \beta \in Q_1, n \geq 1 \right\} \cup \{P_{n,1}(\Delta_{\beta_0}), n \geq 1\}$$

*Démonstration.* Soit  $M$  un module régulier indécomposable. Si  $M$  appartient à un tube exceptionnel, alors  $M \simeq M_\beta^{(n)}$  pour une flèche  $\beta \in Q_1$  et un entier  $n \geq 1$ . Il s'ensuit que

$$X_M = P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, \dots, X_{M_{\tau-n_\beta+1}(\beta)}).$$

Supposons maintenant que  $M$  est dans un tube homogène  $\mathcal{T}$  et soit  $M_\lambda$  le quasi-simple de  $\mathcal{T}$ . Alors, d'après le théorème 9.1.9, on a

$$X_{M_\lambda} = \Delta_\beta$$

pour toute flèche  $\beta \in Q_1$  telle que  $n_\beta > 1$ . Comme  $Q$  est de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r, s > 1$ , il s'ensuit que  $n_\beta > 1$  pour toute flèche  $\beta \in Q_1$ . En outre, il suit du théorème 5.4.3 que

$$X_{M_\lambda^{(n)}} = P_{n,1}(X_{M_\lambda}).$$

Comme  $M$  appartient à  $\mathcal{T}$ , alors  $M \simeq M_\lambda^{(n)}$  pour un certain entier  $n \geq 1$  et donc

$$X_M = P_{n,1}(\Delta_{\beta_0})$$

pour toute flèche  $\beta \in Q_1$ . □

Nous voulons maintenant extraire les variables d'amas de l'ensemble des variables généralisées obtenues dans la proposition 9.6.11. D'après le théorème 3.1.4, il suffit de donc de déterminer les flèches  $\beta$  et les entiers  $n$  tels que  $M_\beta^{(n)}$  est rigide. On sait que dans un tube  $\mathcal{T}$  de rang  $p$ , les modules indécomposables rigides sont les  $E^{(n)}$  où  $E$  est quasi-simple dans  $\mathcal{T}$  et où  $0 < n < \text{rg}(\mathcal{T})$ . En particulier, si  $Q$  est affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ , alors l'ensemble

$$\left\{ M_\beta^{(n)} : \beta \in Q_1, 0 < n < n_\beta \right\}$$

est un ensemble complet de représentants des isoclasses de modules réguliers indécomposables rigides.

**Corollaire 9.6.14.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$ . Alors les variables d'amas régulières de  $\mathcal{A}(Q)$  sont les*

$$X_{M_\beta^{(n)}} = P_{n,n_\beta}(X_{M_\beta}, X_{M_{\tau-1}(\beta)}, \dots, X_{M_{\tau-n_\beta+1}(\beta)})$$

où  $\beta$  parcourt l'ensemble des flèches telles que  $n_\beta > 1$  et où  $n < n_\beta$ .

### 9.6.4 Variables génériques régulières

Nous donnons maintenant une expression des variables génériques associées aux racines régulières d'un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ .

**Proposition 9.6.15.** *Soit  $Q$  un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r, s > 1$  alors*

$$\{X_{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \Phi_{>0}^{reg}\} = \left\{ \Delta_{\beta}^k X_{M_{\beta}^{(n)}} : 0 \leq n < n_{\beta}, k \geq 0, n+k > 0 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{d} \in \Phi_{>0}^{reg}$ . Alors la décomposition canonique de  $\mathbf{d}$  est  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \oplus \delta^k$  où  $\mathbf{d}_0$  est une racine réelle régulière de Schur et  $k \geq 0$ . De plus, il suit de la proposition 8.2.2 que

$$X_{\mathbf{d}} = X_{\mathbf{d}_0} X_{\delta}^k.$$

Puisque  $\mathbf{d}_0$  est une racine réelle régulière de Schur, il existe une unique représentation indécomposable  $M \in \text{rep}(Q, \mathbf{d}_0)$  et cette représentation est alors contenue dans un tube exceptionnel  $\mathcal{T}$  et elle est de quasi-longueur  $< \text{rg}(\mathcal{T})$ . Il s'ensuit donc que  $M = M_{\beta}^{(n)}$  pour une flèche  $\beta \in Q_1$  telle que  $n_{\beta} > 1$  et  $n < n_{\beta}$  et donc

$$X_{\mathbf{d}_0} = X_{M_{\beta}^{(n)}}.$$

D'autre part,  $X_{\delta^k} = X_{\delta}^k = X_{M_{\lambda}^k}$  où  $M_{\lambda}$  est n'importe quel quasi-simple dans un tube homogène. D'autre part, il suit du théorème 9.1.9 que

$$X_{\delta} = \Delta_{\beta}$$

pour toute flèche  $\beta$  telle que  $n_{\beta} > 1$ . □

**Proposition 9.6.16.** *Soit  $Q$  un carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  avec  $r = 1$  ou  $s = 1$  alors*

$$\{X_{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \Phi_{>0}^{reg}\} = \left\{ X_{M_{\beta_0}^k} X_{M_{\beta}^{(n)}} : 0 \leq n < n_{\beta}, k \geq 0 \right\}.$$

où  $\beta_0 \in Q_1$  est tel que  $n_{\beta_0} = 1$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $X_{\delta} = X_{M_{\beta_0}}$  pour toute flèche  $\beta_0 \in Q_1$  telle que  $n_{\beta_0} = 1$ . □

## Chapitre 10

### A propos des types $\tilde{\mathbb{D}}$ et $\tilde{\mathbb{E}}$

Au chapitre 9, nous avons montré que, sous une hypothèse de vérification de la propriété de différence sur certains éléments de la classe de réflexion de  $Q$ , les variables génériques forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$ . Puisque tous les carquois affines de type  $\tilde{\mathbb{A}}$  vérifient cette propriété de différence, il s'en est suivi que les variables génériques formaient une  $\mathbb{Z}$ -base dans une algèbre amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Nous conjecturons que la propriété de différence est aussi vérifiée par les carquois affines de types  $\tilde{\mathbb{D}}$  et  $\tilde{\mathbb{E}}$ . Plus précisément notre conjecture est la suivante :

**Conjecture 10.0.17.** *Tout carquois affine vérifie la propriété de différence.*

La difficulté rencontrée pour démontrer cette conjecture provient essentiellement du fait que dans les cas  $\tilde{\mathbb{D}}$  et  $\tilde{\mathbb{E}}$ , il y a des multiplicités dans les grassmanniennes de sous-modules  $\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M)$  pour  $M \in \text{rep}(Q, \delta)$ .

Une conséquence immédiate de la conjecture 10.0.17 et du théorème 9.3.14 est alors :

**Conjecture 10.0.18.** *Soit  $Q$  un carquois affine. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .*

Dans ce court chapitre, nous commençons par montrer que pour démontrer la propriété de différence, il suffit de savoir la démontrer pour un unique module par tube exceptionnel. Nous étudions ensuite l'exemple du cas  $\tilde{\mathbb{D}}_4$ , nous montrons que les variables génériques dans une orientation bien choisie forment une  $\mathbb{Z}$ -base dans l'algèbre amassée associée et nous explicitons cette base.

## 10.1 Vers la propriété de différence

La construction des représentations régulières décrite dans la démonstration du lemme 8.3.3 à l'aide des extensions par un point permet de réaliser un module régulier de dimension  $\delta$  par tube, ces descriptions sont détaillées dans [27, 50]. Ainsi, dans chaque tube exceptionnel  $\mathcal{T}_i$  où  $i\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1$ , nous disposons d'un module privilégié  $M_i$  pour lequel il peut être plus simple de montrer que la propriété de différence est vérifiée. Nous montrons maintenant que pour démontrer la conjecture 10.0.17 dans les cas affines  $\tilde{\mathbb{D}}$  et  $\tilde{\mathbb{E}}$ , il suffit de le montrer pour une représentation par tube exceptionnel.

Comme d'habitude, si  $E$  est un quasi-simple dans un tube  $\mathcal{T}$ , nous notons  $M_E$  l'unique représentation indécomposable de  $\mathcal{T}$  de quasi-socle  $E$  et de dimension  $\delta$ .

**Proposition 10.1.1.** *Soit  $Q$  un carquois affine, soit  $\mathcal{T}$  un tube exceptionnel dans  $\Gamma(Q)$  et  $E, F$  des modules quasi-simples dans  $\mathcal{T}$ . Alors*

$$X_{M_E} - X_{\text{q.rad}M_E/E} = X_{M_F} - X_{\text{q.rad}M_F/F}.$$

*Démonstration.* Soit  $p = \text{rg}(\mathcal{T})$ , on note  $E_1, \dots, E_p$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}$  ordonnés de sorte que  $\tau E_i \simeq E_{i-1}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , il suit du théorème 5.4.3 que

$$\begin{aligned} X_{M_{E_i}}^Q &= P_{p,p}(X_{E_i}^Q, \dots, X_{E_{i+p-1}}^Q) \\ X_{\text{q.rad}M_{E_i}/E_i}^Q &= P_{p-2,p}(X_{E_{i+1}}^Q, \dots, X_{E_{i+p-1}}^Q). \end{aligned}$$

Alors, en reprenant les notations de la proposition 9.1.18, on a

$$X_{M_{E_i}} - X_{q.\text{rad}M_{E_i}/E_i} = \Delta_p(X_{E_{i+1}}^Q, \dots, X_{E_{i+p-1}}^Q)$$

qui est indépendant de l'indice  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  choisi. □

Ainsi pour prouver la conjecture 10.0.17, il suffit de démontrer la conjecture suivante :

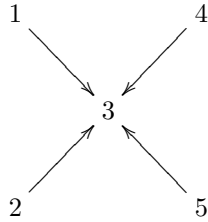
**Conjecture 10.1.2.** *Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{D}}$  ou  $\tilde{\mathbb{E}}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_0^1$  il existe un module  $M_i$  indécomposable de dimension  $\delta$  dans  $\mathcal{T}_i$  tel que*

$$X_{M_i} = X_\delta + X_{q.\text{rad}M_i/q.\text{soc}M_i}.$$

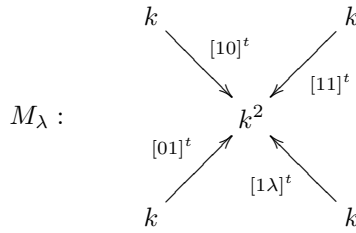
## 10.2 Le cas $\tilde{\mathbb{D}}_4$

Nous étudions l'exemple  $\tilde{\mathbb{D}}_4$  muni d'une orientation donnée et montrons que dans ce cas, les conjectures ci-dessus sont vérifiées.

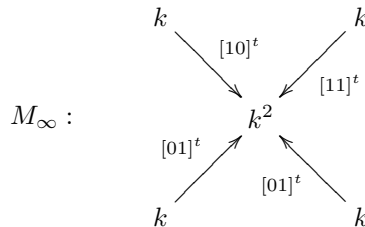
Soit  $Q$  le carquois de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$  muni de l'orientation suivante :



Sa racine imaginaire minimale est  $\delta = [11211]$ . On identifie  $\mathbb{P}^1(k)$  avec  $k \cup \{\infty\}$  et pour tout  $\lambda \in k$ , on considère la représentation



et on pose



Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}^1$ ,  $M_\lambda$  est une représentation indécomposable de dimension  $\delta$ . De plus,  $M_\lambda$  est un quasi-simple dans un tube homogène si et seulement si  $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}_0^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ .

Le but de cette section est alors de calculer

$$X_{M_i} - X_{M_\lambda}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$  et tout  $i \in \{0, 1, \infty\}$ .

Pour simplifier les notations dans le tableau suivant, étant donnée une racine réelle  $\mathbf{d}$ , on notera aussi  $\mathbf{d}$  l'unique représentation indécomposable de dimension  $\mathbf{d}$ .

En ne considérant que les  $\mathbf{u}$  tels que  $\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_\lambda) \neq \emptyset$  ou  $\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_0) \neq \emptyset$ , on a

$\mathbf{u}$	$\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_\lambda)$	$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_\lambda))$	$\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_0)$	$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{u}}(M_0))$
[00000]	{0}	1	{0}	1
[00100]	$\mathbb{P}^1 \times \{S_3\}$	2	$\mathbb{P}^1 \times \{S_3\}$	2
[00200]	$\{S_3 \oplus S_3\}$	1	$\{S_3 \oplus S_3\}$	1
[10100]	$\{P_1\}$	1	$\{P_1\}$	1
[01100]	$\{P_2\}$	1	$\{P_2\}$	1
[00110]	$\{P_4\}$	1	$\{P_4\}$	1
[00101]	$\{P_5\}$	1	$\{P_5\}$	1
[10200]	$\{P_1 \oplus S_3\}$	1	$\{P_1 \oplus S_3\}$	1
[01200]	$\{P_2 \oplus S_3\}$	1	$\{P_2 \oplus S_3\}$	1
[00210]	$\{P_4 \oplus S_3\}$	1	$\{P_4 \oplus S_3\}$	1
[00201]	$\{P_5 \oplus S_3\}$	1	$\{P_5 \oplus S_3\}$	1
[10101]	$\emptyset$	0	$\{\text{q.soc}(M_0)\}$	1
[10201]	$\{P_1 \oplus P_5\}$	1	$\{\text{q.soc}(M_0) \oplus S_3\}$	1
[11201]	$\{[11201]\}$	1	$\{\text{q.rad}(M_0) \oplus P_2\}$	1
[10211]	$\{[10211]\}$	1	$\{\text{q.rad}(M_0) \oplus P_4\}$	1
[01211]	$\{[01211]\}$	1	$\{[01211]\}$	1
[11210]	$\{[11210]\}$	1	$\{[11210]\}$	1
[11211]	$\{M_\lambda\}$	1	$\{M_0\}$	1

D'autre part, un calcul direct montre que

$$X_{M_\lambda} = \frac{u_2^2 u_4^2 u_1^2 u_5^2 + 2u_2 u_4 u_1 u_5 + 4u_2 u_4 u_1 u_5 u_3 + 1 + 4u_3 + 6u_3^2 + 4u_3^3 + u_3^4}{u_1 u_2 u_3^2 u_4 u_5}$$

et

$$X_{M_0} = \frac{u_2^2 u_4^2 u_1^2 u_5^2 + 2u_2 u_4 u_1 u_5 + 4u_2 u_4 u_1 u_5 u_3 + u_1 u_3^2 u_4 u_2 u_5 + 1 + 4u_3 + 6u_3^2 + 4u_3^3 + u_3^4}{u_1 u_2 u_3^2 u_4 u_5}$$

et donc

$$X_{M_0} = X_{M_\lambda} + 1 \quad (10.1)$$

or  $\text{q.l}(M_0) = 2$  donc  $\text{q.rad}(M_0) = \text{q.soc}(M_0)$  et l'égalité (10.1) est celle de la conjecture 10.1.2.

De la même manière, on montre que  $X_{M_1} = X_{M_\lambda} + 1$  et  $X_{M_\infty} = X_{M_\lambda} + 1$ . Ainsi, en vertu de la proposition 10.1.1, on a démontré :

**Lemme 10.2.1.** *Soit  $Q$  le carquois de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$  muni de l'orientation précédente. Alors pour tout quasi-simple  $E$  dans un tube exceptionnel  $\mathcal{T}$  de  $\Gamma(Q)$ , on a*

$$X_{M_E} = X_{M_\lambda} + 1.$$

Et alors

**Théorème 10.2.2.** *Soit  $Q$  le carquois de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$  muni de l'orientation précédente. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.*  $Q$  est un carquois gradué, il s'ensuit que  $\mathcal{B}'(Q)$  est un ensemble linéairement indépendant sur  $\mathbb{Q}$ . D'autre part, il suit de la proposition 9.2.5 que  $\mathcal{B}'(Q)$  engendre  $\mathcal{A}(Q)$  au-dessus de  $\mathbb{Q}$ . En appliquant les mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème 9.3.14, on montre que  $\mathcal{B}'(Q)$  engendre  $\mathcal{A}(Q)$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

### 10.2.1 La base semi-canonique de $\mathcal{A}(\tilde{\mathbb{D}}_4)$

Nous donnons une description explicite de la base semi-canonique de l'algèbre amassée associée au carquois  $Q$  de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$ . On note  $E_0 = \text{q.soc}(M_0)$ ,  $E_1 = \tau E_0$ ,  $F_0 = \text{q.soc}(M_1)$ ,  $F_1 = \tau F_0$ ,  $G_0 = \text{q.soc}(M_\infty)$ ,  $G_1 = \tau G_0$ . Nous calculons alors

$$z = X_{M_\lambda} = \frac{u_2^2 u_4^2 u_1^2 u_5^2 + 2u_2 u_4 u_1 u_5 + 4u_2 u_4 u_1 u_5 u_3 + 1 + 4u_3 + 6u_3^2 + 4u_3^3 + u_3^4}{u_1 u_2 u_3^2 u_4 u_5}$$

$$x_1 = X_{E_0} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_1 u_3 u_5}$$

$$x_2 = X_{E_1} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_2 u_3 u_4}$$

$$y_1 = X_{F_0} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_3 u_4 u_5}$$

$$y_2 = X_{F_1} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_1 u_2 u_3}$$

$$t_1 = X_{G_0} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_2 u_3 u_5}$$

$$t_2 = X_{G_1} = \frac{u_2 u_4 u_1 u_5 + 1 + 2u_3 + u_3^2}{u_1 u_3 u_4}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}(Q)} = \{E_i^{\oplus n} \oplus F_j^{\oplus p} \oplus E_k^{\oplus q} : i, j, k = 0, 1, n, p, q \geq 0\}$$

Il suit alors de la proposition 8.3.10 que

$$\mathcal{B}'(Q) = \{\text{monômes d'amas}\} \sqcup \{z^a x_i^n y_j^p t_k^q : a > 0, i, j, k = 0, 1, n, p, q \geq 0\}.$$



Quatrième partie

Algèbres amassées non  
simplement lacées

La définition d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  permet à la matrice  $B$  d'être antisymétrisable sans être antisymétrique. Cependant, l'essentiel des travaux effectués à ce jour se concentre sur les algèbres amassées simplement lacées. C'est en particulier le cas pour les catégorifications à l'aide de la catégorie amassée et à l'aide de l'algèbre préprojective.

En théorie des représentations, les objets correspondant aux graphes non simplement lacés sont les *species* (voir [34] par exemple). Pour étudier les algèbres amassées non simplement lacées, une première méthode consiste ainsi à essayer de généraliser les résultats à propos de la catégorie amassée en utilisant les *species* [102, 100, 103, 60]. Si cette approche semble parfaitement fonctionner, elle nécessite néanmoins de réadapter la très grande majorité des preuves et ne fait pas réellement appel aux résultats déjà obtenus sur les algèbres simplement lacées.

Dans la théorie des algèbres de Lie, les algèbres associées à des graphes non simplement lacés sont en général étudiées comme un certain quotient d'une algèbre de Kac-Moody simplement lacée par un groupe d'automorphismes [61]. De manière générale, l'étude des graphes valués non-simplement lacés à l'aide des graphes simplement lacés avec automorphismes a été développée par Lusztig [73] et Kac [65]. Hubery a alors montré que ce lien entre graphes valués et graphes avec automorphismes était fertile au niveau des théories des représentations associées [59]. L'avantage de cette approche est qu'elle permet alors d'utiliser au niveau non-simplement lacé des résultats obtenus pour le type simplement lacé.

Dans [37], nous avons adopté cette vision de la situation pour tenter d'obtenir des liens entre les algèbres amassées non simplement lacées et les algèbres amassées simplement lacées associés à des carquois avec automorphismes. Ainsi, si  $Q$  est un carquois muni d'un groupe d'automorphismes admissibles vérifiant une condition de stabilité, nous avons montré que l'algèbre associée au *carquois quotient*  $Q/G$  était une sous-algèbre du quotient de  $\mathcal{A}(Q)$  par le groupe d'automorphisme  $G$  en un sens à défini plus loin. Une autre approche, à l'aide des morphismes de Frobenius sur les *species* sur les corps finis a été développée dans [97]. Il suit des travaux de Deng et Du, que cette méthode est similaire à celle que nous développons ici [30, 31]. On notera par ailleurs que l'approche des algèbres amassées non simplement lacées à l'aide des carquois avec automorphismes a aussi été développée par Demonet dans le cadre de l'algèbre préprojective [29].

La figure 10.1 schématise la situation.

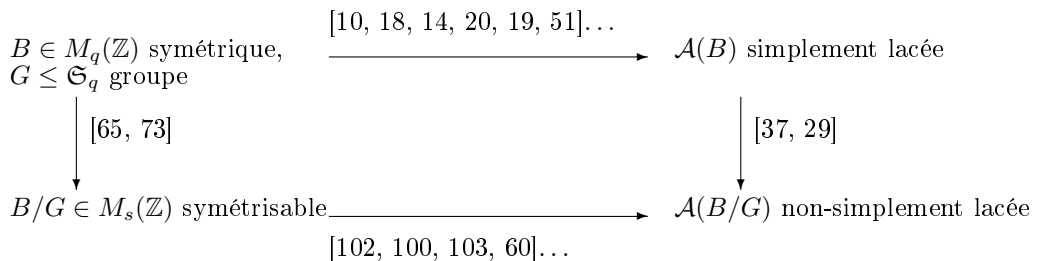


FIG. 10.1 – Approches des algèbres amassées non-simplement lacées

Le chapitre 11 est dédié à l'étude théorique des algèbres non simplement

lacées à l'aide d'algèbres associées à des graphes munis d'automorphismes. Le chapitre 12 donne, lorsque cela est possible, une interprétation de ces résultats en termes d'objets invariants dans la catégorie amassée pour l'action induite par le groupe d'automorphismes. Dans la section 13, nous donnons un exemple d'application pour l'étude des algèbres amassées de rang deux. Enfin, dans le chapitre 14, nous utilisons ces méthodes pour obtenir des résultats sur les classes de mutations des graphes quotients.

## Chapitre 11

# Mutations orbitales et carquois quotients

Dans ce chapitre, nous utilisons l'approche de Lusztig des graphes non-simplement lacés comme quotients de graphes simplement lacés munis d'un automorphisme [73]. Nous montrons qu'une algèbre amassée non-simplement lacée peut être réalisée comme une sous-algèbre d'un certain quotient d'une algèbre amassée simplement lacée. En outre, nos méthodes permettent d'établir des liens entre certaines algèbres simplement lacées de types distincts. Ces résultats synthétisent et complètent ceux présentés dans [37].

### 11.1 Automorphismes et quotients de matrices

Soit  $Q$  un graphe valué sans  $p$ -cycles pour  $p \leq 2$ . Soit  $B_Q = (b_{ij}) \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  la matrice anti-symétrisable correspondante.

**Définition 11.1.1.** Un élément  $g \in \mathfrak{S}_{Q_0}$  est appelé *automorphisme de  $Q$*  ou *automorphisme de  $B_Q$*  si

$$b_{g^i, g^j} = b_{ij}$$

pour tous  $i, j \in Q_0$ .

Un sous groupe  $G \leq \mathfrak{S}_{Q_0}$  est appelé *groupe d'automorphismes de  $B_Q$*  si tout élément  $g \in G$  est un automorphisme de  $B_Q$ .

Un groupe d'automorphismes  $G$  de  $B_Q$  est dit *admissible* si pour tous  $i, j$  dans une même  $G$ -orbite, il n'existe pas de chemin de  $i$  vers  $j$  de longueur  $l \leq 2$ . Le couple  $(B_Q, G)$  est alors appelé *paire admissible*.

Etant donné une matrice  $B \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  et un groupe  $G$  d'automorphismes de  $B$ , on notera en général  $\mathbf{i}$  la  $G$ -orbite d'un élément  $i \in Q_0$  et  $\overline{Q_0}$  l'ensemble

$$\overline{Q_0} = \{\mathbf{i} : i \in Q_0\}.$$

des  $G$ -orbites dans  $Q_0$ .

**Exemple 11.1.2.** Soit le carquois de type  $\mathbb{A}_3$

$$Q : 1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \text{---} \\ \longrightarrow \end{array} 2 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \text{---} \\ \longleftarrow \end{array} 3$$

de matrice associée

$$B = B_Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit  $G = \langle (1, 3) \rangle$  le groupe engendré par la transposition  $(1, 3)$ . Alors  $(B, G)$  est une paire admissible. En général, on notera par des pointillés l'action du groupe d'automorphismes sur les sommets du carquois.

Etant donnée une paire admissible  $(B, G)$ , nous pouvons définir une nouvelle matrice antisymétrisable  $B/G$  appelée *matrice quotient* :

**Définition 11.1.3.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible avec  $A = (a_{i,j}) \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$ , la *matrice quotient*  $A/G = (b_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}) \in M_{\overline{Q_0}}(\mathbb{Z})$  définie par

$$b_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \sum_{k \in \mathbf{i}} a_{k, j}$$

pour tous  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \overline{Q_0}$ .

La matrice  $A/G$  est bien définie. En effet,  $b_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$  ne dépend pas du choix de  $j \in \mathbf{j}$  car  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $A$ . Une façon alternative de décrire les coefficients de la matrice quotient est la suivante :

**Lemme 11.1.4.** *Soit  $(A, G)$  une paire admissible et  $\bar{B} = A/G$ . Alors pour tous  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \bar{Q}_0$ , on a*

$$\bar{b}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \frac{1}{|\text{stab}_G(i)|} \sum_{g \in G} a_{gi,j}$$

où  $\text{stab}_G(i)$  est le stabilisateur de  $i$  pour l'action de  $G$  sur  $Q_0$ .

*Démonstration.* Pour tout  $g \in \text{stab}(i)$ ,  $gi = i$  et donc  $a_{gi,j} = a_{i,j}$ .

$$\sum_{g \in G} a_{gi,j} = \sum_{g \in G/\text{stab}(i)} |\text{stab}(gi)| b_{gi,j}$$

Mais  $g \rightarrow gi$  induit une bijection entre  $G/\text{stab}(i)$  et  $\mathbf{i}$ . De plus,  $\text{stab}(i) \simeq \text{stab}(gi)$  et donc

$$\sum_{g \in G} a_{gi,j} = |\text{stab}(i)| \sum_{k \in \mathbf{i}} a_{k,j}$$

□

Nous montrons maintenant qu'une matrice quotient est anti-symétrisable :

**Lemme 11.1.5.** *Soit  $(A, G)$  une paire admissible. Alors  $B = A/G$  est anti-symétrisable.*

*Démonstration.* Supposons  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$ . Nous devons trouver une matrice diagonale  $\Delta \in M_{\bar{Q}_0}(\mathbb{Z})$  à coefficients positifs telle que  $\Delta \bar{B}$  est symétrique.

Comme  $A$  est symétrisable, il existe des entiers  $(d_i)_{i \in Q_0}$  tels que pour tous  $i, j$ ,  $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ . De plus,  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $A$ , on peut donc supposer que  $d_{gi} = d_i$  pour tout  $i \in Q_0$  et on écrit donc  $d_{\mathbf{i}} = d_i$  si  $\mathbf{i}$  est la  $G$ -orbite de  $i$ .

Pour tout  $\mathbf{i} \in \bar{Q}_0$ , on pose alors  $\delta_{\mathbf{i}} = d_{\mathbf{i}} |\text{stab}_G(i)|$  pour un sommet  $i \in \mathbf{i}$  arbitraire. Soit alors  $\Delta$  la matrice diagonale  $\text{diag}(\delta_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \bar{Q}_0)$ . On montre alors que  $\Delta B$  est symétrique.

$$\begin{aligned} [\Delta B]_{\mathbf{i},\mathbf{j}} &= \delta_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \\ &= d_{\mathbf{i}} |\text{stab}(i)| \frac{1}{|\text{stab}(i)|} \sum_{g \in G} a_{gi,j} \\ &= \sum_{g \in G} d_{gi} a_{gi,j} \\ &= \sum_{g \in G} d_j a_{j,gi} \\ &= \sum_{g \in G} d_{gj} a_{gj,i} \\ &= |\text{stab}(j)| \frac{1}{|\text{stab}(j)|} d_j \sum_{g \in G} a_{gj,i} \\ &= \delta_{\mathbf{j}} b_{\mathbf{j},\mathbf{i}} \\ &= [\Delta B]_{\mathbf{j},\mathbf{i}} \end{aligned}$$

□

**Définition 11.1.6.** Soit  $Q$  un graphe valué muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Alors le *graphe quotient*  $Q/G$  est le graphe associé à la matrice quotient  $B_Q/G$ . Si  $Q$  est un carquois, on parle alors de *carquois quotient*.

**Exemple 11.1.7.** Soit à nouveau

$$Q : 1 \xleftarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 3$$

de matrice associée

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $G = \langle (1, 3) \rangle$ . On note  $\bar{1} = \{1, 3\}$  et  $\bar{2} = \{2\}$  les  $G$ -orbites. Alors

$$A/G = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

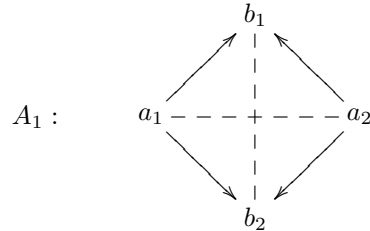
de graphe associé

$$\Delta(A/G) : \quad \bar{1} \xleftarrow{(2,1)} \bar{2}$$

qui est de type  $\mathbb{B}_2$ .

On remarquera que si  $A$  est symétrique et  $\text{stab}_G(i)$  a le même cardinal pour tout  $i \in Q_0$ , alors  $A/G$  est symétrique.

**Exemple 11.1.8.** On considère le carquois



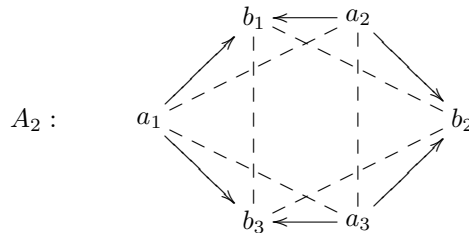
muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G_1 = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$ . On note  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$  et  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ , alors

$$A_1/G_1 : \quad \mathbf{a} \rightrightarrows \mathbf{b}$$

est le carquois de Kronecker.

On remarquera aussi que l'on n'a pas unicité de la présentation d'un graphe valué sous forme de graphe quotient.

**Exemple 11.1.9.** On considère le carquois



muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G_2 = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ . On note  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ , alors

$$A_2/G_2 : \quad \mathbf{a} \rightrightarrows \mathbf{b}$$

est le carquois de Kronecker.

## 11.2 Algèbres amassées et automorphismes

On étudie maintenant l'interaction entre les automorphismes d'une matrice antisymétrisable et l'algèbre amassée associée à cette matrice. On se fixe donc une paire admissible  $(A, G)$  où  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  est une matrice antisymétrisable arbitraire. On se fixe  $\mathbf{u} = \{u_i : i \in Q_0\}$  et  $\mathbf{v} = \{v_i : i \in Q_0\}$  des ensembles d'indéterminées sur  $\mathbb{Q}$ . On note alors

$$\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(\mathbf{u}, A),$$

$$\mathcal{A}(A/G) = \mathcal{A}(\mathbf{v}, A/G).$$

On définit alors le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres, appelé *projection* :

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathbf{v}^{\pm 1}] \\ u_i & \longmapsto & v_i. \end{cases}$$

On définit une action de  $G$  sur  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  en posant

$$g.u_i = u_{gi}$$

pour tous  $g \in G$  et  $i \in Q_0$ . Il n'est pas a priori pas clair que l'action de  $G$  stabilise l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(A)$ . Nous verrons par la suite (lemme 12.1.2) que c'est le cas si  $A$  est une matrice associée à un carquois acyclique.

**Définition 11.2.1.** Une graine  $(\mathbf{x}, S)$  dans  $\mathcal{A}(A)$  est dite *G-invariante* si :

1.  $gx_i = x_{gi}$  pour tout  $i \in Q_0$ ,
2.  $(S, G)$  est une paire admissible.

Le but de cette section est d'étudier l'interaction entre les algèbres  $\mathcal{A}(A/G)$  et  $\pi(\mathcal{A}(A))$ . Pour cela, nous allons étudier une certaine classe de mutations qui va permettre d'établir le lien entre ces deux objets.

### 11.2.1 Mutations orbitales de matrices

**Lemme 11.2.2.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible. Soit  $\Omega = \{i_1, \dots, i_n\}$  une  $G$ -orbite dans  $Q_0$ . Alors les coefficients  $a_{ij}^{(n)}$  de  $A^{(n)} = \mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(A)$  sont donnés par

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \text{ ou } j \in \Omega \\ a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_{i, i_k}| a_{i_k, j} + a_{i, i_k} |a_{i_k, j}|) & \text{sinon} \end{cases}$$



*Démonstration.* Soit  $A = A^{(0)}$  et  $A^{(p)} = \mu_{i_p} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(A)$  pour tout  $1 \leq p \leq n$ . En mutant on  $i_p$ , on a

$$a_{ij}^{(p)} = \begin{cases} -a_{ij}^{(p-1)} & \text{si } i = i_p \text{ or } j = i_p \\ a_{ij}^{(p-1)} + \frac{1}{2} \left( |a_{i,i_p}^{(p-1)}| a_{i_p,j}^{(p-1)} + a_{i,i_p}^{(p-1)} |a_{i_p,j}^{(p-1)}| \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Par récurrence, si  $i = i_k$  ou  $j = i_k$  pour un  $k \leq p-1$ , alors  $a_{ij}^{(p-1)} = -a_{ij}$ , ainsi  $a_{ij}^{(p)} = -a_{ij}$  si  $i = i_k$  ou  $j = i_k$  pour un certain  $k \leq p$ .

Sinon,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(p)} &= a_{ij}^{(p-1)} + \frac{1}{2} \left( |a_{i,i_p}^{(p-1)}| a_{i_p,j}^{(p-1)} + a_{i,i_p}^{(p-1)} |a_{i_p,j}^{(p-1)}| \right) \\ &= a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (|a_{i,i_k}^{(p-1)}| a_{i_k,j}^{(p-1)} + a_{i,i_k}^{(p-1)} |a_{i_k,j}^{(p-1)}|) + \frac{1}{2} \left( |a_{i,i_p}^{(p-1)}| a_{i_p,j}^{(p-1)} + a_{i,i_p}^{(p-1)} |a_{i_p,j}^{(p-1)}| \right) \end{aligned}$$

Comme  $a_{i_k,i_l} = 0$  pour tout  $k, l$ , on a

$$a_{i,i_p}^{(p-1)} = a_{i,i_p} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (|a_{i,i_k}^{(p-1)}| a_{i_k,i_p}^{(p-1)} + a_{i,i_k}^{(p-1)} |a_{i_k,i_p}^{(p-1)}|) = a_{i,i_p}$$

et

$$a_{i_p,j}^{(p-1)} = a_{i_p,j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (|a_{i_p,i_k}^{(p-1)}| a_{i_k,j}^{(p-1)} + a_{i_p,i_k}^{(p-1)} |a_{i_k,j}^{(p-1)}|) = a_{i_p,j}$$

alors

$$a_{ij}^{(p)} = a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (|a_{i,i_k}^{(p-1)}| a_{i_k,j}^{(p-1)} + a_{i,i_k}^{(p-1)} |a_{i_k,j}^{(p-1)}|)$$

□

**Corollaire 11.2.3.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible. Soit  $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_n\}$  une  $G$ -orbite dans  $Q_0$ . Alors pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(A) = \mu_{i_{\sigma(n)}} \circ \dots \circ \mu_{i_{\sigma(1)}}(A)$$

On peut alors poser :

**Définition 11.2.4.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible,  $\mathbf{i} \in \overline{Q}_0$  une  $G$ -orbite. Alors

$$\mu_{\mathbf{i}}^G(A) = \left( \prod_{j \in \mathbf{i}} \mu_j \right) (A)$$

est appelée *mutation orbitale de  $A$  dans la direction  $\mathbf{i}$* .

On note  $\text{Mut}^G(A)$  la *classe de mutation orbitale de  $A$* , c'est à dire l'ensemble des matrices  $B$  telle qu'il existe une suite finie d'orbites  $(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n)$  telles que

$$B = \mu_{\mathbf{i}_n}^G \circ \dots \circ \mu_{\mathbf{i}_1}^G(A).$$

En particulier, on a  $\text{Mut}^G(A) \subset \text{Mut}(A)$ .

### 11.2.2 Mutations orbitales de graines

**Lemme 11.2.5.** Soit  $B \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  et  $G \subset \mathfrak{S}_{Q_0}$  un groupe. Soit  $(\mathbf{x}, A)$  une graine  $G$ -invariante dans  $\mathcal{A}(B)$  avec  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$ . Soit  $\Omega = \{i_1, \dots, i_n\}$  une  $G$ -orbite et soit  $(A^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) = \mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(\mathbf{x}, A)$ . Alors, pour tout  $i \in Q_0$ , on a

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} x_i & \text{si } i \notin \Omega \\ \frac{\prod_{a_{i,i_k} > 0} x_i^{a_{i,i_k}} + \prod_{a_{i,i_k} < 0} x_i^{-a_{i,i_k}}}{x_{i_k}} & \text{si } i = i_k \text{ pour un certain } k \end{cases}$$

*Démonstration.* Pour tout  $p = 1, \dots, n$ , on écrit  $(\mathbf{x}^{(p)}, A^{(p)}) = \mu_{i_p} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(\mathbf{x}, A)$  et  $(\mathbf{x}^{(p)}, A^{(p)}) = (\mathbf{x}, A)$ . Si  $i \notin \Omega$ , pour tout  $p > 0$ , on a  $x_i^{(p)} = x_i^{(p-1)}$  et donc  $x_i^{(p)} = x_i$ . Si  $i = i_k$  pour un certain  $k > 0$ , alors  $x_i^{(j)} = x_i$  pour tout  $j < k$  et  $x_i^{(l)} = x_i^{(k)}$  pour tout  $l > k$ . Les relations d'échange donnent alors

$$x_i^{(k)} = \frac{\prod_{a_{j,i_k}^{(k-1)} > 0} (x_j^{(k-1)})^{a_{j,i_k}^{(k-1)}} + \prod_{a_{j,i_k}^{(k-1)} < 0} (x_j^{(k-1)})^{-a_{j,i_k}^{(k-1)}}}{x_i^{(k-1)}}$$

Mais  $x_i^{(k-1)} = x_i$ ,  $a_{j,i_k}^{(k-1)} = a_{j,i_k}$  d'après le lemme 11.2.2. En outre,  $a_{j,i_k} = 0$  si  $j \in \Omega$ , ainsi si  $a_{j,i_k} \neq 0$ , on a  $x_j^{(k-1)} = x_j$ . Il s'ensuit que

$$x_i^{(n)} = x_i^{(k)} = \frac{\prod_{a_{j,i_k} > 0} x_j^{a_{j,i_k}} + \prod_{a_{j,i_k} < 0} x_j^{-a_{j,i_k}}}{x_i}$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

En particulier, on voit que  $(A^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)})$  ne dépend pas de l'ordre des mutations dans  $\Omega$ , on peut alors poser la définition suivante :

**Définition 11.2.6.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible avec  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  et soit  $(\mathbf{x}, S)$  une graine  $G$ -invariante dans  $\mathcal{A}(A)$ . Pour toute  $G$ -orbite  $\mathbf{i}$  dans  $\overline{Q_0}$ , on pose

$$\mu_{\mathbf{i}}^G(\mathbf{x}, S) = \left( \prod_{j \in \mathbf{i}} \mu_j \right) (\mathbf{x}, S)$$

la mutation orbitale de la graine  $(\mathbf{x}, S)$  dans la direction  $\mathbf{i}$ .

**Corollaire 11.2.7.** Soit  $(B, G)$  une paire admissible,  $(\mathbf{x}, A)$  une graine  $G$ -invariante dans  $\mathcal{A}(B)$  et soit  $\Omega \in \overline{Q_0}$ . Soit  $(\mathbf{x}^{(n)}, A^{(n)}) = \mu_{\Omega}^G((\mathbf{x}, A))$ . Alors  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $A^{(n)}$ . En outre, si on note  $a_{ij}^{(n)}$  les coefficients de  $A^{(n)}$  et  $\mathbf{x}^{(n)} = (x_i^{(n)}, i \in Q_0)$ , on a, pour tous  $i \in Q_0$  et  $g \in G$

$$a_{i,gi}^{(n)} = 0 \text{ et } x_{gi}^{(n)} = gx_i^{(n)}.$$

*Démonstration.* On suppose  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  et  $\mathbf{x} = \{x_i : i \in Q_0\}$ . On écrit maintenant  $\Omega = \{i_1, \dots, i_n\}$  et on garde les notations du lemme 11.2.2. Soient  $i, j \in Q_0$ . Alors on a

$$g.a_{ij}^{(n)} = a_{g^{-1}i, g^{-1}j}^{(n)} = \begin{cases} -a_{g^{-1}i, g^{-1}j} & \text{si } g^{-1}i \text{ ou } g^{-1}j \in \Omega \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (|a_{g^{-1}i, i_k}| a_{i_k, g^{-1}j} + a_{g^{-1}i, i_k} |a_{i_k, g^{-1}j}|) & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais  $g^{-1}i \in \Omega$  si et seulement si  $i \in \Omega$  et dans ce cas  $a_{ij}^{(n)} = -a_{ij} = -a_{g^{-1}i, g^{-1}j} = a_{g^{-1}i, g^{-1}j}^{(n)}$ . Mais si  $i, j \notin \Omega$ , alors

$$\begin{aligned} a_{g^{-1}i, g^{-1}j}^{(n)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (|a_{g^{-1}i, i_k} a_{i_k, g^{-1}j} + a_{g^{-1}i, i_k} a_{i_k, g^{-1}j}|) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (|a_{i, gi_k} a_{gi_k, j} + a_{i, gi_k} a_{gi_k, j}|) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (|a_{i, i_k} a_{i_k, j} + a_{i, i_k} a_{i_k, j}|) \\ &= a_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

et donc  $G$  est un groupe d'automorphisme pour  $A^{(n)}$ . Montrons alors que  $G$  est admissible pour  $A$ . Soient  $i, j$  dans une même  $G$ -orbite, on écrit  $i = gj$  pour un certain  $g \in G$ . Alors d'après le lemme 11.2.2, on a

$$a_{i,j}^{(n)} = a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_{i, i_k} a_{i_k, j} + a_{i, i_k} a_{i_k, j}|).$$

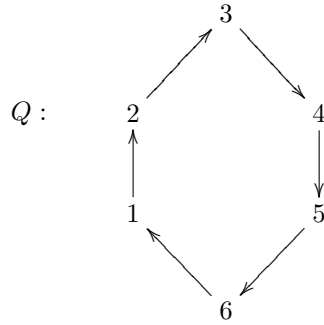
Puisque  $(A, G)$  est une paire admissible, on a  $a_{i,j} = 0$ . D'autre part, pour tout  $k = 1, \dots, n$ , si  $a_{i, i_k} > 0$ , on a nécessairement  $a_{i_k, j} \leq 0$ . En effet, sinon on a un chemin de longueur 2 de  $i$  vers  $j$  dans le graphe associé à  $A$ , ce qui contredit le fait que  $(A, G)$  est admissible. Il s'ensuit que  $a_{i,j}^{(n)} = 0$ .

Montrons maintenant que  $gx_i^{(n)} = x_{gi}^{(n)}$  pour tout  $i \in Q_0$ . Si  $i \notin \Omega$ ,  $x_i^{(n)} = x_i$ . Comme  $gi \notin \Omega$ ,  $x_{gi}^{(n)} = x_{gi}$ . Par hypothèse,  $(\mathbf{x}, A)$  est  $G$ -invariante donc  $gx_i = x_{gi}$  et ainsi  $gx_i^{(n)} = x_{gi}^{(n)}$ . Maintenant, si  $i = i_k$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, n\}$ , alors

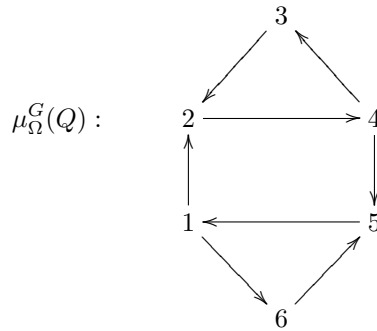
$$\begin{aligned} gx_i^{(n)} &= \frac{\prod_{a_{j, i_k} > 0} g.x_j^{a_{j, i_k}} + \prod_{a_{j, i_k} < 0} g.x_j^{-a_{j, i_k}}}{g.x_i} \\ &= \frac{\prod_{a_{j, i_k} > 0} x_{gj}^{a_{j, i_k}} + \prod_{a_{j, i_k} < 0} x_{gj}^{-a_{j, i_k}}}{x_{gi}} \\ &= \frac{\prod_{a_{j, i_k} > 0} x_{gj}^{a_{j, i_k}} + \prod_{a_{j, i_k} < 0} x_{gj}^{-a_{j, i_k}}}{x_{gi}} \\ &= \frac{\prod_{a_{g^{-1}j, i_k} > 0} x_j^{a_{g^{-1}j, i_k}} + \prod_{a_{g^{-1}j, i_k} < 0} x_j^{-a_{g^{-1}j, i_k}}}{x_{gi}} \\ &= \frac{\prod_{a_{j, gi_k} > 0} x_j^{a_{j, gi_k}} + \prod_{a_{j, gi_k} < 0} x_j^{-a_{j, gi_k}}}{x_{gi}} \\ &= x_{gi}^{(n)} \end{aligned}$$

□

**Remarque 11.2.8.** En général, si  $(A, G)$  est une paire admissible avec  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$  et si  $\Omega \in \overline{Q_0}$ , il n'y a pas de raison pour que  $\mu_{\Omega}^G(\mathbf{x}, A)$  soit une graine  $G$ -invariante. En effet, considérons le carquois



muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G = \langle (1, 4)(2, 5)(3, 6) \rangle$ . Alors  $\Omega = \{3, 6\}$  est une  $G$ -orbite et



contient un chemin de longueur deux entre 1 et 4 qui sont dans une même  $G$ -orbite.

Nous introduisons alors la notion de paire admissible stable.

**Définition 11.2.9.** Une paire admissible  $(A, G)$  est dite *stable* si  $(B, G)$  est une paire admissible pour tout  $B \in \text{Mut}^G(A)$ .

**Lemme 11.2.10.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible telle que  $G$  a au plus une orbite non triviale. Alors  $(A, G)$  est une paire admissible stable.

*Démonstration.* Soit  $B \in \text{Mut}^G(A)$ , on note  $b_{ij}$  les coefficients de  $B$ . Soient  $i, j$  dans une même  $G$ -orbite. D'après 11.2.7, il suffit de montrer que pour tout  $k$ ,  $b_{i,k}$  et  $b_{j,k}$  sont du même signe. Si  $k$  est dans la  $G$ -orbite de  $i$ , alors  $b_{i,k} = 0 = b_{j,k}$ . Sinon,  $k$  est fixé par  $G$  par hypothèse. Il suit du corollaire 11.2.7 que  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $B$  et donc  $b_{i,k} = b_{gi,k}$  pour tout  $g \in G$ . En particulier,  $b_{i,k}$  et  $b_{j,k}$  sont du même signe et  $(B, G)$  est une paire admissible. Par récurrence,  $(A, G)$  est une paire admissible stable.  $\square$

**Lemme 11.2.11.** Soit  $(A, G)$  une paire admissible telle que  $G$  a exactement deux orbites. Alors  $(A, G)$  est une paire admissible stable.

*Démonstration.* On note  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_b\}$  et  $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_c\}$  les deux orbites de  $G$  et  $A = (a_{ij})$ . Puisque  $(A, G)$  est admissible, on a  $a_{v_i, v_j} = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, b\}$  et  $a_{w_i, w_j} = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, c\}$ . De plus, pour tous  $v \in \mathbf{v}$  et  $w \in \mathbf{w}$ ,  $a_{v, w}$  est du même signe. Il s'ensuit alors du lemme 11.2.2 que  $\mu_{\mathbf{v}}^G(A) = -A$  et  $\mu_{\mathbf{w}}^G(A) = -A$ . En particulier puisque  $(A, G)$  est une paire admissible,  $(\mu_{\mathbf{v}}^G(A), G)$  et  $(\mu_{\mathbf{w}}^G(A), G)$  sont des paires admissibles. Par récurrence,  $(A, G)$  est donc une paire admissible stable.  $\square$

**Proposition 11.2.12.** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Alors  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.*

*Démonstration.* Soit  $(Q, G)$  une paire admissible avec  $Q$  Dynkin et soit  $R \in \text{Mut}^G(Q)$ . Il suit de 11.2.7 que  $R$  est un carquois  $G$ -invariant et que pour tous  $i, j$  dans une même  $G$ -orbite, il n'existe pas de flèche  $i \rightarrow j$  dans  $R$ . Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de chemin de longueur 2 entre  $i$  et  $j$  dans  $R$ .

Soit  $i \in R_0$  et  $g \in G$ . Supposons qu'il existe un chemin de longueur 2 entre  $i$  et  $gi$ , montrons qu'alors  $R$  contient un cycle de longueur paire. Supposons qu'il existe un sommet  $k \in R_0$  tel que  $i \rightarrow k \rightarrow gi$ . Comme  $G$  est un groupe admissible d'automorphismes de  $R$ , on sait déjà que  $k \notin Gi$ . Soit

$$p = \min \{n \geq 1 : g^n i = i\} - 1,$$

on a alors un chemin cyclique

$$i \rightarrow k \rightarrow gi \rightarrow gk \rightarrow \dots \rightarrow g^p i \rightarrow g^p k \rightarrow i$$

dans  $R$  qui passe par un nombre pair de sommets.

Si tous les sommets apparaissant dans ce chemin sont distincts, on a bien un cycle de longueur paire. Sinon, supposons qu'il existe deux sommets  $v, w$  identiques parmi  $\{g^n i, g^n k, : 0 \leq n \leq p\}$ . Si  $v = g^n i$  et  $w = g^m i$  pour certains  $0 \leq m < n \leq p$ , on obtient  $i = g^{n-m} i$ , ce qui contredit la minimalité de  $p$ . Si  $v = g^n i$  et  $w = g^m k$  pour certains  $0 \leq m, n \leq p$ , on obtient une contradiction car  $k \notin Gi$ . Ainsi, on voit que  $v = g^n k$  et  $w = g^m k$  pour certains entiers  $0 \leq m, n \leq p$ . Supposons que  $n \leq m$ , on obtient ainsi un nouveau chemin cyclique :

$$i \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow g^n i \rightarrow g^n k = g^m k \rightarrow g^{m+1} i \rightarrow \dots \rightarrow g^p i \rightarrow g^p k \rightarrow i$$

qui passe par un nombre pair de sommets. En réitérant ce procédé, on montre que  $R$  contient un cycle de longueur paire.

Supposons que  $Q$  est un carquois de type  $A_n$ . D'après [18], on sait que si  $S$  est un carquois dans  $\text{Mut}(Q)$  alors les seuls cycles dans  $S$  sont des 3-cycles. En particulier,  $R$  ne contient pas de  $2p$ -cycles pour  $p \geq 1$  et  $(Q, G)$  est donc stable.

Supposons que  $Q$  est un carquois de type  $D_n$  pour  $n \geq 4$ . Alors tous les groupes d'automorphismes de  $Q$  ont au plus une orbite non triviale. Il suit alors du lemme 11.2.10 que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.

Supposons que  $Q$  est un carquois de type  $E_6$ . Une vérification au cas par cas sur la classe de mutation de  $Q$  montre que  $\text{Mut}(Q)$  ne contient pas de carquois  $G$ -invariant tel qu'il existe un chemin de longueur 2 entre deux sommets d'une même orbite. En particulier, toutes les paires  $(R, G)$  avec  $R \in \text{Mut}^G(Q)$  sont admissibles et  $(Q, G)$  est stable.

Si  $Q$  est de type  $E_7$  ou  $E_8$ , alors les seuls groupes d'automorphismes de  $Q$  sont triviaux et alors il suit du lemme 11.2.10 que  $(Q, G)$  est une paire admissible.  $\square$

### 11.2.3 Mutations orbitales et mutations du quotient

Soit  $(A, G)$  une paire admissible et soit  $(\mathbf{x}, S)$  une graine  $G$ -invariante dans  $\mathcal{A}(A)$ , on pose alors

$$\pi(\mathbf{x}, S) = (\mathbf{y}, S/G)$$

où  $\mathbf{y}$  est le  $\overline{Q}_0$ -tuple défini par

$$y_i = \pi(x_i)$$

pour tout  $\mathbf{i} \in \overline{Q}_0$ . Alors  $\pi(\mathbf{x}, S)$  est appelée *projection de la graine*  $(\mathbf{x}, S)$ , elle est bien définie car  $(\mathbf{x}, S)$  est  $G$ -invariante.

**Théorème 11.2.13.** *Soit  $(A, G)$  une paire admissible stable avec  $A \in M_{Q_0}(\mathbb{Z})$ . Alors pour toutes  $G$ -orbites  $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n$  dans  $\overline{Q}_0$ , on a*

$$\mu_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ \mu_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{v}, A/G) = \pi(\mu_{\mathbf{i}_n}^G \circ \dots \circ \mu_{\mathbf{i}_1}^G(\mathbf{u}, A)).$$

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de le montrer pour  $n = 1$ . Si  $X = (x_{ij})$  est une matrice  $G$ -invariante, on notera  $X/G = (\overline{x_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}})$  la matrice quotient.

On se fixe une orbite  $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_n\}$  et on note  $A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})_{i, j \in Q_0} = \prod_{l \in \mathbf{k}} \mu_l(A)$ , d'après le lemme 11.2.2, on a

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \text{ ou } j \in \mathbf{k}, \\ a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (|a_{i, k_s}| a_{k_s, j} + a_{i, k_s} |a_{k_s, j}|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{(n)}} = \sum_{l \in \mathbf{i}} a_{l, \mathbf{j}}^{(n)}$$

Si  $\mathbf{i} = \mathbf{k}$  ou  $\mathbf{j} = \mathbf{k}$ , on a

$$\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{(n)}} = - \sum_{l \in \mathbf{i}} a_{l, \mathbf{j}}$$

Sinon, si  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \neq \mathbf{k}$ , alors pour tout  $m \in \mathbf{i}$ ,

$$a_{mj}^{(n)} = a_{mj} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (|a_{m, k_s}| a_{k_s, j} + a_{m, k_s} |a_{k_s, j}|)$$

et donc

$$\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{(n)}} = \sum_{m \in \mathbf{i}} \left( a_{mj} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (|a_{m, k_s}| a_{k_s, j} + a_{m, k_s} |a_{k_s, j}|) \right)$$

ou de manière équivalente

$$\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{(n)}} = \sum_{m \in \mathbf{i}} \left( a_{mj} + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbf{k}} (|a_{m, l}| a_{l, j} + a_{m, l} |a_{l, j}|) \right)$$

On calcule maintenant les coefficients  $(\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}})'$  de  $(\overline{A})' = \mu_{\mathbf{k}}(A/G)$ . Par définition de la mutation, on a

$$(\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}})' = \begin{cases} -\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{k} \text{ ou } \mathbf{j} = \mathbf{k}, \\ \overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}} + \frac{1}{2} (|\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{k}}}| \overline{a_{\mathbf{k}, \mathbf{j}}} + \overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{k}}} |\overline{a_{\mathbf{k}, \mathbf{j}}}|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si  $\mathbf{i} = \mathbf{k}$  ou  $\mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,

$$(\overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}})' = -\overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}} = -\sum_{l \in \mathbf{i}} a_{l,j} = \overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{(n)}}$$

Maintenant, si  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \neq \mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} (\overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}})' &= \overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}} + \frac{1}{2} (|\overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{k}}}| \overline{a_{\mathbf{k},\mathbf{j}}} + \overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{k}}}| \overline{a_{\mathbf{k},\mathbf{j}}}|) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,j} + \frac{1}{2} \left( \left| \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,k} \right| \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{l,j} + \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,k} \left| \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{l,j} \right| \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,j} + \frac{1}{2} \left( \sum_{m \in \mathbf{i}} |a_{m,k}| \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{l,j} + \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,k} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{l,j}| \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,j} + \sum_{m \in \mathbf{i}} \frac{1}{2} \left( |a_{m,k}| \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{l,j} + a_{m,k} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{l,j}| \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{i}} \left[ a_{m,j} + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbf{k}} (|a_{m,k}| a_{l,j} + a_{m,k} |a_{l,j}|) \right] \end{aligned}$$

et donc

$$(\overline{a_{\mathbf{i},\mathbf{j}}})' = \sum_{m \in \mathbf{i}} a_{m,j} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} (|a_{m,k}| a_{l,j} + a_{m,k} |a_{l,j}|)$$

Il suffit alors de prouver que

$$\sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{m,k}| a_{l,j} + a_{m,k} |a_{l,j}| = \sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{m,l}| a_{l,j} + a_{m,l} |a_{l,j}|$$

et donc de montrer que

$$\sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{m,k}| a_{l,j} = \sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} |a_{m,l}| a_{l,j} \quad (11.1)$$

et

$$\sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{m,k} |a_{l,j}| = \sum_{m \in \mathbf{i}} \sum_{l \in \mathbf{k}} a_{m,l} |a_{l,j}|$$

Dans l'équation (11.1), on considère les coefficients de  $a_{l,j}$  : Soit  $l_0 \in \mathbf{k}$ , dans la première somme, le coefficient de  $a_{l_0,j}$  est ainsi

$$\sum_{m \in \mathbf{i}} |a_{m,k}|$$

Dans la seconde somme, ce coefficient est

$$\sum_{m \in \mathbf{i}} |a_{m,l_0}|$$

On écrit  $l_0 = gk$  pour un certain  $g \in G$ . Comme  $a_{m,gk} = a_{g^{-1}m,k}$  et  $g^{-1}G = G$ , les deux sommes sont égales. On identifie de la même manière les coefficients de

$|a_{l_0, j}|$  dans la seconde somme et l'égalité (11.1) est démontrée. Ainsi, pour tous  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \overline{Q}_0$ , on a

$$\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{(n)}} = (\overline{a_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}})'$$

, c'est à dire

$$\mu_{\mathbf{k}}^G(A)/G = \mu_{\mathbf{k}}(A/G).$$

On s'intéresse maintenant aux variables. Si  $j \notin \{k_1, \dots, k_p\}$ ,  $x_j^{(n)} = x_j$  et il n'y a rien à montrer. D'après le lemme 11.2.5,  $gx_k^{(n)} = x_{gk}^{(n)}$ , ainsi  $\pi(x_{k_j}^{(n)}) = \pi(x_{k_s}^{(n)})$  pour tout  $j, s = 1, \dots, n$ . Quitte à réordonner, on suppose que  $k = k_1$  et donc  $x_k^{(n)} = x_k^{(1)} = x'_k$ . On écrit alors la relation d'échange entre  $x_k$  et  $x'_k$  dans  $\mathcal{A}(A)$ .

$$x_k x'_k = \prod_{j \in Q_0 : b_{jk} > 0} x_j^{b_{jk}} + \prod_{j \in Q_0 : b_{jk} < 0} x_j^{-b_{jk}}$$

On applique alors  $\pi$  à cette égalité et on obtient

$$\pi(x_k) \pi(x'_k) = \prod_{j \in Q_0 : b_{jk} > 0} \pi(x_j)^{b_{jk}} + \prod_{j \in Q_0 : b_{jk} < 0} \pi(x_j)^{-b_{jk}}$$

Comme  $(A, G)$  est une paire admissible  $b_{jk}$  et  $b_{sk}$  sont du même signe si  $j$  et  $s$  appartiennent à la même orbite. On peut donc regrouper les termes par signes et on obtient

$$\pi(x_k) \pi(x'_k) = \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : b_{jk} > 0} \prod_{l \in \mathbf{j}} \pi(x_l)^{b_{lk}} + \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : b_{jk} < 0} \prod_{l \in \mathbf{j}} \pi(x_l)^{-b_{lk}}$$

Comme  $\pi(x_l) = \pi(x_j)$  pour tout  $l \in \mathbf{j}$ , on a

$$\pi(x_k) \pi(x'_k) = \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : b_{jk} > 0} \pi(x_j)^{\sum_{l \in \mathbf{j}} b_{lk}} + \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : b_{jk} < 0} \pi(x_j)^{-\sum_{l \in \mathbf{j}} b_{lk}}$$

et donc

$$\pi(x_k) \pi(x'_k) = \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : \overline{b_{jk}} > 0} \pi(x_j)^{\overline{b_{jk}}} + \prod_{\mathbf{j} \in \overline{Q}_0 : \overline{b_{jk}} < 0} \pi(x_j)^{-\overline{b_{jk}}}$$

qui est la relation d'échange dans  $\mathcal{A}(A/G)$  dans la direction  $\mathbf{k}$  avec  $\pi(x_k)$ . Si on écrit  $\pi(x_k)'$  la variable d'amas en échange avec  $\pi(x_k)$  dans  $\mathcal{A}(A/G)$ , on a ainsi

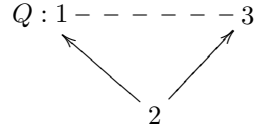
$$\pi(x_{k_j}^{(n)}) = \pi(x_k^{(n)}) = \pi(x'_k) = \pi(x_k)'$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Corollaire 11.2.14.** *Soit  $(A, G)$  une paire admissible stable. Alors toute graine dans  $\mathcal{A}(A/G)$  est la projection d'une graine  $G$ -invariante de  $\mathcal{A}(A)$ . En particulier, toute variable d'amas de  $\mathcal{A}(A/G)$  est la projection d'une variable d'amas de  $\mathcal{A}(A)$  et donc  $\mathcal{A}(A/G)$  s'identifie à une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\pi(\mathcal{A}(A))$ .*



**Exemple 11.2.15.** Considérons à nouveau l'exemple du carquois de type  $\mathbb{A}_3$



muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G = \langle (1, 3) \rangle$ . Alors  $(Q, G)$  est une paire admissible stable. Le graphe quotient correspondant est le graphe de type  $\mathbb{B}_2$  :

$$Q/G : \quad \bar{2} \xrightarrow{(1,2)} \bar{1}$$

où  $\bar{1} = \{1, 3\}$  et  $\bar{2} = \{2\}$ . Les mutations orbitales sont donc  $\mu_{\bar{1}}^G = \mu_1\mu_3$  et  $\mu_{\bar{2}}^G = \mu_2$ . La projection est donnée par

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[v_{\bar{1}}, v_{\bar{2}}] \\ & u_1 & \mapsto & v_{\bar{1}} \\ & u_2 & \mapsto & v_{\bar{2}} \\ & u_3 & \mapsto & v_{\bar{1}} \end{cases}$$

La figure 11.1 représente les graphes de mutations de  $\mathcal{A}(A)$  et  $\mathcal{A}(A/G)$  au voisinage des graines initiales (ou l'on a noté  $v_{\bar{i}} = v_i$ ). Les sommets marqués d'un double cerclage correspondent aux graines obtenues par mutations orbitales à partir de la graine initiale.

Les variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$  sont données par

$$\text{Cl}(Q) = \left\{ u_1, u_2, u_3, \frac{1+u_2}{u_1}, \frac{1+u_2}{u_3}, \frac{1+u_1u_3}{u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_1u_2}, \frac{1+u_2+u_1u_3}{u_3u_2}, \frac{1+2u_2+u_2^2+u_1u_3}{u_1u_2u_3} \right\}$$

et donc

$$\pi(\text{Cl}(Q)) = \left\{ u_{\bar{1}}, u_{\bar{2}}, \frac{1+u_{\bar{2}}}{u_{\bar{1}}}, \frac{1+u_{\bar{1}}^2}{u_{\bar{2}}}, \frac{1+u_{\bar{2}}+u_{\bar{1}}^2}{u_{\bar{1}}u_{\bar{2}}}, \frac{1+2u_{\bar{2}}+u_{\bar{2}}^2+u_{\bar{1}}^2}{u_{\bar{1}}^2u_{\bar{2}}} \right\} = \text{Cl}(Q/G)$$

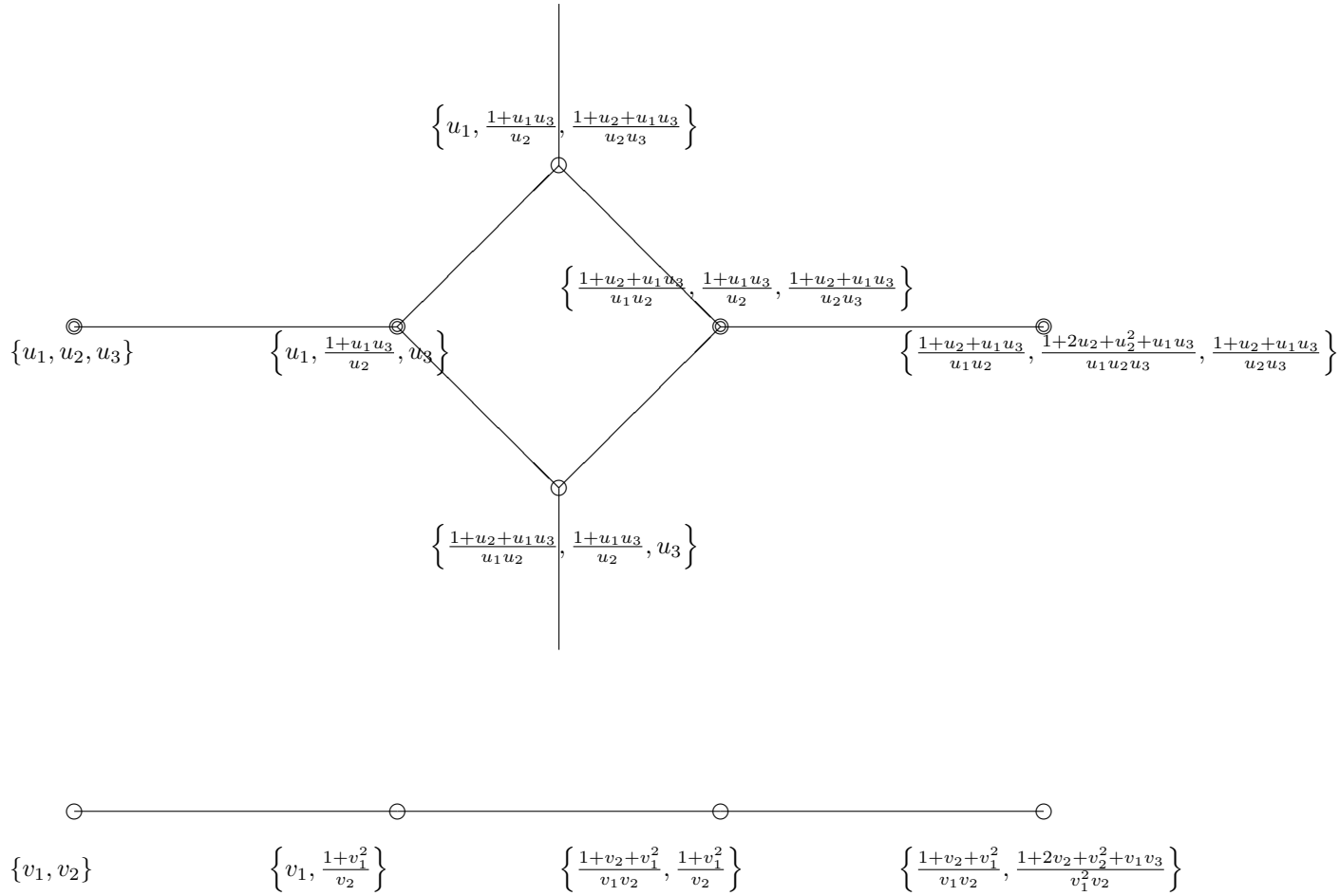
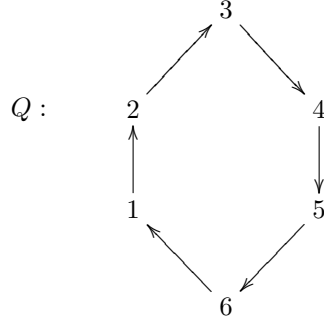


FIG. 11.1 – Graphes de mutations de  $\mathbb{A}_3$  et  $\mathbb{B}_2$  aux voisinages des graines initiales

**Exemple 11.2.16.** L'hypothèse de stabilité est essentielle dans le théorème 11.2.13. En effet, considérons le carquois



muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G = \langle \prod_{i=1}^3 (i; i+3) \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Nous avons vu à la remarque 11.2.8 que  $(A, G)$  est une paire admissible non-stable. On note  $\bar{i}$  la  $G$ -orbite d'un sommet  $i$  dans  $Q_0$ . Soit  $B = B_Q$  la matrice correspondant à  $Q$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_6)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(B)$  et  $\mathbf{v} = (v_{\bar{1}}, v_{\bar{2}}, v_{\bar{3}})$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(B/G)$ . On a alors

$$\mu_{\bar{1}}^G \circ \mu_{\bar{2}}^G(\mathbf{u}, B) = (\mathbf{u}', B')$$

où

$$\mathbf{u}' = \left( \frac{u_1 u_6 + u_3 u_6 + u_3 u_2}{u_1 u_2}, \frac{u_1 + u_3}{u_2}, u_3, \frac{u_3 u_4 + u_3 u_6 + u_6 u_5}{u_4 u_5}, \frac{u_4 + u_6}{u_5}, u_6 \right)$$

et

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\pi(\mu_{\bar{1}}^G \circ \mu_{\bar{2}}^G(\mathbf{u}, B)) = \left( \left( \frac{v_{\bar{1}} v_{\bar{3}} + v_{\bar{3}}^2 + v_{\bar{2}} v_{\bar{3}}}{v_{\bar{1}} v_{\bar{2}}}, \frac{v_{\bar{1}} + v_{\bar{3}}}{v_{\bar{2}}}, v_{\bar{3}} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

mais d'autre part,

$$\mu_{\bar{1}} \circ \mu_{\bar{2}}(\mathbf{v}, B/G) = \left( \left( \frac{v_{\bar{1}} + v_{\bar{3}} + v_{\bar{2}}}{v_{\bar{1}}/v_{\bar{2}}}, \frac{v_{\bar{1}} + v_{\bar{3}}}{v_{\bar{2}}}, v_{\bar{3}} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

et donc

$$\mu_{\bar{1}} \circ \mu_{\bar{2}}(\mathbf{v}, B/G) \neq \pi(\mu_{\bar{1}}^G \circ \mu_{\bar{2}}^G(\mathbf{u}, B)).$$

Ainsi, si  $(A, G)$  est une paire admissible stable, les graines de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(A/G)$  correspondent aux graines que l'on peut trouver sur les branches  $G$ -invariantes du graphe de mutation de  $\mathcal{A}(A)$  contenant la graine initiale. On sait que de telles graines sont nécessairement des graines  $G$ -invariantes dans  $\mathcal{A}(A)$ . Cependant, à l'heure actuelle, nous ne sommes pas en mesure de dire si toutes les graines  $G$ -invariantes peuvent se trouver sur l'une de ces branches.

**Proposition 11.2.17.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$  tel que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable. Alors toute variable d'amas dans  $\mathcal{A}(\mathbf{v}, Q/G)$  s'écrit comme polynôme de Laurent à coefficients positifs en  $\mathbf{v}$ .*

*Démonstration.* Soit  $x$  une variable d'amas dans  $\mathcal{A}(\mathbf{v}, Q/G)$ . Alors  $x = \pi(X)$  où  $X$  est une variable d'amas dans  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, Q)$  et où  $\pi : \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbf{v}^{\pm 1}]$  est le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres qui envoie  $u_i$  sur  $v_i$  pour toute  $G$ -orbite  $\mathbf{i}$  dans  $\overline{Q}_0$ . Il suit de la remarque 3.1.7 que sous la forme irréductible de  $X$  est

$$X = \frac{1}{\mathbf{u}^{\delta(X)}} \sum_{\nu} a_{\nu} \mathbf{u}^{\nu}$$

où les  $a_{\nu}$  sont des entiers positifs. Alors

$$x = \pi(X) = \frac{1}{\pi(\mathbf{u}^{\delta(X)})} \sum_{\nu} a_{\nu} \pi(\mathbf{u}^{\nu})$$

mais pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^{Q_0}$ ,  $\pi(\mathbf{u}^{\nu})$  est un certain produit  $\prod_{\mathbf{i} \in \overline{Q}_0} v_i^{\mu_i}$ . En particulier,  $x$  est un polynôme de Laurent à coefficients positifs en les  $v_i$   $\square$

## Chapitre 12

# Interprétation catégorique

Dorénavant, on suppose que  $(A, G)$  est une paire admissible telle que  $Q = Q_A$  est un carquois acyclique. Nous nous intéressons alors à l'interprétation catégorique que l'on peut donner de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(A/G)$  en termes d'objets  $G$ -invariants dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  pour une certaine action de  $G$  dans le cas où  $(A, G)$  est une paire admissible stable.

## 12.1 $G$ -action sur la catégorie amassée

Nous nous intéressons d'abord à la catégorie des représentations d'un carquois muni d'un groupe d'automorphismes admissibles. Le bon cadre théorique pour l'étude de cette situation est celui de la théorie des représentations des *skew group algebras* développée par Riedtmann et Reiten [77]. Dans nos travaux, nous pourrions cependant nous contenter du cadre plus élémentaire des représentations de carquois muni d'un automorphisme. Pour des résultats généraux concernant ce cadre, on pourra par exemple se référer aux travaux de Hubery [59, 58].

### 12.1.1 $G$ -action sur $\text{rep}(Q)$

On se fixe un carquois acyclique  $Q$  muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . On définit une action de  $G$  sur la catégorie  $\text{rep}(Q)$  de la manière suivante. Soit  $V \in \text{rep}(Q)$  et  $g \in G$ . Alors on définit  $W = gV$  comme étant la représentation définie par :

$$\begin{cases} W(i) &= V(g^{-1}i) & \text{pour tout } i \in Q_0 \\ W(\alpha) &= V(g^{-1}\alpha) & \text{pour tout } \alpha \in Q_1 \end{cases}$$

Etant données  $M, N$  sont deux représentations de  $Q$  et  $f \in \text{Hom}_{kQ}(M, N)$ , on écrit  $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ . Alors pour tout  $i \in Q_0$ ,  $f_{g^{-1}i} \in \text{Hom}_k(gM(i), gN(i))$  et on pose

$$gf = (f_{g^{-1}i})_{i \in Q_0} \in \text{Hom}_{kQ}(gM, gN).$$

Ainsi, chaque  $g \in G$  agit de manière fonctorielle sur  $\text{rep}(Q)$  et de plus,  $g^{-1}$  induit un foncteur quasi-inverse à  $g$ . En particulier, chaque  $g \in G$  définit une auto-équivalence de catégories de  $\text{rep}(Q)$ . De plus, pour tout  $i \in Q_0$ , on a alors  $gP_i = P_{gi}$ ,  $gI_i = I_{gi}$  et  $gS_i = S_{gi}$ .

L'action de  $G$  sur  $\text{rep}(Q)$  induit une action de  $G$  au niveau du groupe de Grothendieck  $K_0(kQ)$ . En identifiant  $K_0(kQ)$  et  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  par le vecteur de dimension, pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  et tout  $g \in G$ , on a

$$g\mathbf{d} = (d_{g^{-1}i})_{i \in Q_0}$$

et pour toute représentation  $M$  de  $\text{rep}(Q)$ , on a ainsi

$$\mathbf{dim}(gM) = g\mathbf{dim} M.$$

Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 12.1.1.** *Soient  $M, N \in \text{rep}(Q)$ ,  $e \in \mathbb{N}^{Q_0}$  et  $g \in G$ . Alors*

1.  $\langle gM, gN \rangle = \langle M, N \rangle$ ,
2. La variété  $\text{Gr}_{ge}(gM)$  est isomorphe à la variété  $\text{Gr}_e(M)$ .

### 12.1.2 Action sur la catégorie amassée

L'action de  $G$  sur  $\text{rep}(Q)$  induit une action par auto-équivalences sur la catégorie dérivée bornée  $D^b(kQ)$  qui commute au shift et à la translation. Il s'ensuit que  $G$  induit aussi une action par auto-équivalences sur  $\mathcal{C}_Q$ . Cette action est additive et elle est donnée sur les shifts de projectifs par

$$gP_i[1] \simeq P_{gi}[1].$$

Ainsi définie, l'action de  $G$  commute à l'application Caldero-Chapoton, plus précisément :

**Lemme 12.1.2.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$  et tout  $g \in G$ , on a*

$$X_{gM} = gX_M$$

De manière équivalente, le diagramme suivant commute pour tout  $g \in G$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{X_\gamma} & \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{X_\gamma} & \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}] \end{array}$$

*Démonstration.* Si  $M$  se décompose  $M = \bigoplus_i M_i$ , on a

$$X_{gM} = X_{g(\bigoplus_i M_i)} = X_{\bigoplus_i gM_i} = \prod_i X_{gM_i}$$

et l'action de  $G$  sur  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  étant un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres, on peut donc se restreindre au cas où  $M$  est indécomposable.

Comme  $X_{gP_i[1]} = gu_i = u_{gi} = X_{P_{gi}[1]}$ , il suffit de montrer le résultat pour les  $kQ$ -modules indécomposables. Pour tous modules  $M, N$  et tout vecteur de dimension  $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , on a

$$\langle gM, gN \rangle = \langle M, N \rangle$$

et un isomorphisme de variétés  $\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M) \simeq \text{Gr}_{g\mathbf{e}}(gM)$ .

Soit  $\mathbf{m} = \mathbf{dim} M$ . La linéarité de l'action de  $G$  sur  $\mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  donne

$$\begin{aligned} gX_M &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_i u_{gi}^{-\langle \mathbf{m}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{m} - \mathbf{e} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{m}, \alpha_{g^{-1}i} \rangle - \langle \alpha_{g^{-1}i}, \mathbf{m} - \mathbf{e} \rangle} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_{gM} &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(gM)) \prod_i u_i^{-\langle g\mathbf{m}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, g\mathbf{m} - \mathbf{e} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{g^{-1}\mathbf{e}}(M)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{m}, \alpha_{g^{-1}i} \rangle - \langle \alpha_{g^{-1}i}, \mathbf{m} - g^{-1}\mathbf{e} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{m}, \alpha_{g^{-1}i} \rangle - \langle \alpha_{g^{-1}i}, \mathbf{m} - \mathbf{e} \rangle} \\ &= gX_M \end{aligned}$$

□

**Corollaire 12.1.3.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Alors  $G$  agit sur  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.1.4, on a

$$\text{Cl}(Q) = \{X_M : M \text{ indécomposable rigide dans } \mathcal{C}_Q\}.$$

Soit donc  $x \in \text{Cl}(Q)$  et soit  $M$  un objet indécomposable rigide dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $x = X_M$ . Alors pour tout  $g \in G$ , on a  $gx = gX_M = X_{gM}$ . Mais puisque  $g$  agit par auto-équivalence sur  $\mathcal{C}_Q$ ,  $gM$  est aussi un objet indécomposable rigide et donc  $X_{gM} \in \text{Cl}(Q)$ . Puisque  $\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[\text{Cl}(Q)]$ , il s'ensuit que  $G$  stabilise  $\mathcal{A}(Q)$ .  $\square$

### 12.1.3 La sous-catégorie des objets $G$ -invariants

Nous avons vu que les graines de  $\mathcal{A}(Q/G)$  correspondent à des graines  $G$ -invariantes dans  $\mathcal{A}(Q)$ . Les graines dans  $\mathcal{A}(Q)$  correspondant aux objets rigides dans  $\mathcal{C}_Q$ , il est naturel de chercher à interpréter les graines  $G$ -invariantes comme des objets  $G$ -invariants rigides dans  $\mathcal{C}_Q$ .

**Définition 12.1.4.** Un objet  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$  est dit  *$G$ -invariant* si pour tout  $g \in G$ , on a  $gM \simeq M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ . Il sera dit  *$G$ -indécomposable* si il ne peut se décomposer sous la forme  $M = U \oplus V$  avec  $U, V$  des objets  $G$ -invariants non-nuls.

**Lemme 12.1.5.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Soient  $m$  et  $n$  deux objets indécomposables dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors  $m$  et  $n$  sont dans la même  $G$ -orbite si et seulement si  $\bigoplus_{U \in Gm} U = \bigoplus_{V \in Gn} V$ .*

*Démonstration.* Si  $m$  est indécomposable, alors  $gm$  est indécomposable pour tout  $g \in G$ . Ainsi, les facteurs apparaissant dans chaque somme directe sont indécomposables. Si on suppose que les deux sommes sont isomorphes, comme  $\mathcal{C}_Q$  est une catégorie Krull-Schmidt,  $n$  apparaît comme facteur indécomposable de chacune des sommes et donc  $n \in Gm$ . La réciproque est claire.  $\square$

**Proposition 12.1.6.** *Soit  $M$  un objet  $G$ -indécomposable dans  $\mathcal{C}_Q$ . Alors il existe une unique  $G$ -orbite dans  $\mathcal{C}_Q$  contenant un objet indécomposable  $m$  tel que  $M = \bigoplus_{U \in Gm} U$ . Réciproquement, pour chaque objet indécomposable  $m$ , la somme directe  $\bigoplus_{U \in Gm} U$  est  $G$ -indécomposable.*

*Démonstration.* Soit  $m$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}_Q$ , on pose  $M = \bigoplus_{U \in Gm} U$ . Alors  $M$  est  $G$ -invariant. Si  $M = N \oplus P$  avec  $N$  un  $G$ -indécomposable et  $P \neq 0$ , on décompose  $N = \bigoplus_i N_i$  en objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$ . L'unicité de la décomposition de  $M$  implique que chaque  $N_i$  est dans  $Gm$ . Mais si  $N$  est  $G$ -invariant, alors  $N$  contient tous les  $gN_i$  pour  $g \in G$  comme facteurs directs et donc  $N = M$ .

Réciproquement, si  $M$  est  $G$ -indécomposable, on décompose  $M = \bigoplus_i M_i$  en objets indécomposables de  $\mathcal{C}_Q$ . Chaque  $E_i = \bigoplus_{U \in GM_i} U$  est  $G$ -indécomposable. Si  $I$  est un ensemble d'indices tel que  $(M_i)_{i \in I}$  est un ensemble de représentants des  $G$ -orbites des  $M_i$ , alors  $M = \bigoplus_{i \in I} E_i$  est la décomposition en objets  $G$ -indécomposables. Ainsi, par hypothèse,  $I$  est nécessairement un singleton et tous les  $M_i$  sont dans la même orbite. Finalement,  $M = \bigoplus_{U \in GM_1} U$  où  $M_1$  est un objet indécomposable de  $\mathcal{C}_Q$ . Le lemme 12.1.5 assure l'unicité de cette décomposition.  $\square$



**Corollaire 12.1.7.** *Tout objet  $G$ -invariant  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  s'écrit de manière unique (à l'ordre de la décomposition et à isomorphisme près) comme somme directe d'objets  $G$ -indécomposables.*

Ainsi, nous pouvons montrer l'analogie  $G$ -invariant du théorème 3.1.4.

**Corollaire 12.1.8.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ . Alors  $X_\gamma$  induit une bijection de l'ensemble des objets amas-basculants  $G$ -invariants dans  $\mathcal{C}_Q$  vers l'ensemble des amas  $G$ -invariants dans  $\mathcal{A}(Q)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$  un amas dans  $\mathcal{A}(Q)$ . D'après le théorème 3.1.4, pour tout  $i = 1, \dots, q$ , il existe un unique objet indécomposable rigide  $T_i$  tel que  $x_i = X_{T_i}$ . De plus, il suit du lemme 12.1.2 que

$$\mathbf{x} = g\mathbf{x} = \{X_{gT_1}, \dots, X_{gT_q}\}.$$

Puisque les  $T_i$  sont uniquement déterminés, il s'ensuit que

$$g \bigoplus_{i=1}^q T_i = \bigoplus_{i=1}^q T_{g_i} = \bigoplus_{i=1}^q T_i$$

et donc  $T = \bigoplus_{i=1}^q T_i$  est un objet amas-basculant  $G$ -invariant.

Réciproquement, si  $T = \bigoplus_{i=1}^q T_i$  est un objet amas-basculant  $G$ -invariant, alors  $gT = \bigoplus_{i=1}^q gT_i = T$ . Il suit alors du lemme 12.1.2 que  $\{X_{T_1}, \dots, X_{T_q}\}$  est un amas  $G$ -invariant.  $\square$

## 12.2 Un théorème de dénominateurs

Nous donnons maintenant une interprétation du dénominateurs des variables d'amas dans le cas non simplement lacé. Si  $Q$  est un carquois acyclique muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$ , nous définissons une notion de projection au niveau du groupe de Grothendieck en posant

$$\pi((d_i)_{i \in Q_0}) = \left( \sum_{j \in i} d_j \right)_{i \in \overline{Q}_0}.$$

La preuve du théorème suivant est une adaptation  $G$ -invariante de celle du théorème 3.1.8 donnée dans [19].

**Théorème 12.2.1.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique muni d'un groupe  $G$  d'automorphismes admissibles. Soit  $m$  un objet de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors*

$$\delta(\pi(X_m)) = \pi(\mathbf{dim} m).$$

*De manière équivalente, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) & \xrightarrow{X_\gamma} & \mathbb{Z}[u_i^{\pm 1} : i \in Q_0] \\ & \searrow \pi \circ \mathbf{dim} & \downarrow \delta \circ \pi \\ & & \mathbb{Z}^{\overline{Q}_0} \end{array}$$

Avant de démontrer les théorème, nous prouvons le lemme technique suivant :

**Lemme 12.2.2.** *Soit  $M$  un  $kQ$ -module  $G$ -invariant. Alors*

1. *Pour tout  $l \in Q_0$  et tout sous-module  $N \subset M$ ,*

$$(\mathbf{dim} M)_l \leq \langle N, S_l \rangle + \langle S_l, M/N \rangle$$

2. *Pour tout  $l \in Q_0$ , il existe un sous-module  $N \subset M$  tel que pour tout  $k \in l$ , on a*

$$(\mathbf{dim} M)_k = \langle N, S_k \rangle + \langle S_k, M/N \rangle$$

*Démonstration.* Le premier point est montré dans [19]. Pour le second point, on écrit  $\mathbf{d} = \mathbf{dim} M$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{dim} N$  où  $N$  est un sous-module de  $M$ . Soit  $n_k = -\langle N, S_k \rangle - \langle S_k, M/N \rangle$ , pour tout  $k \in G.l$ , on a

$$n_k = -d_k + \sum_{i \rightarrow k} e_i + \sum_{k \rightarrow j} (d_j - e_j).$$

Soit  $N$  le sous-module de  $M$  engendré par la somme des  $M_j$  tels qu'il existe  $k \in G.l$  tel que  $k \rightarrow j$ . Il suffit de montrer que pour tout  $k \in G.l$ , on a  $n_k = -d_k$ . Pour cela, il suffit de montrer que les deux sommes sont nulles.

Soit donc  $k \in G.l$ . Supposons que la première somme n'est pas nulle, alors il existe un  $i$  tel que  $i \rightarrow k$  et  $e_i \neq 0$ . Mais si  $e_i \neq 0$ , alors par définition de  $N$ , il existe  $j \in \bar{l}$  et un chemin dans  $Q$  de  $j$  vers  $i$  et alors  $j \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow k$  dans  $Q$ . Comme  $j$  et  $k$  sont dans la même  $G$ -orbite et que tout élément de  $G$  a un ordre fini, il s'ensuit qu'il existe un cycle dans  $Q$ , ce qui est une contradiction. La seconde somme est nulle par construction.  $\square$

Nous prouvons maintenant le théorème 12.2.1.

*Démonstration.* (du théorème 12.2.1) On remarque d'abord que pour tous objets  $m, n$  dans  $\mathcal{C}_Q$ , on a

$$\begin{aligned} \delta(\pi(X_{m \oplus n})) &= \delta(\pi(X_m)\pi(X_n)) \\ &= \delta(\pi(X_m)) + \delta(\pi(X_n)) \end{aligned}$$

on peut donc supposer que  $m$  est indécomposable. D'autre part, si  $m = P_i[1]$  pour un certain  $i \in Q_0$ , le résultat est vérifié. Il suffit donc de considérer le cas où  $m$  est un module.

Soit  $M = \bigoplus_{U \in Gm} U$ , on a

$$X_M = \prod_{U \in Gm} X_U$$

D'après le lemme 12.1.2,  $X_{gm} = gX_m$  pour tout  $g \in G$  et donc

$$\pi(X_M) = \pi(X_m)^{|Gm|}$$

et ainsi  $\delta(\pi(X_M)) = |Gm|\delta(\pi(X_m))$ .

La variable généralisée  $X_M$  s'écrit comme somme de monômes  $\prod x_k^{n_k}$  où  $n_k = -\langle N, S_k \rangle - \langle S_k, M/N \rangle$  pour un certain sous-module  $N$  de  $M$ . Soit  $i \in Q_0$ , le lemme 12.2.2 montre qu'il existe un terme dans l'écriture de  $X_M$  tel que l'exposant de  $u_j$  dans le dénominateur de ce facteur est maximal et

égal à  $\dim M(j)$  pour tout  $j \in \mathbf{i}$ . Alors, sous projection, l'exposant de  $v_i$  dans  $\pi(X_M) = \pi(X_m)^{|G_m|}$  est  $\sum_{j \in \mathbf{i}} \dim M(j)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \delta(\pi(X_M)) &= \left( \sum_{j \in \bar{\mathbf{i}}} \dim M(j) \right)_{\bar{\mathbf{i}} \in \bar{Q}_0} \\ &= \pi(\mathbf{dim} M) \\ &= \pi \left( \mathbf{dim} \bigoplus_{U \in G_m} U \right) \\ &= \pi \left( \sum_{U \in G_m} \mathbf{dim} U \right) \\ &= \sum_{U \in G_m} \pi(\mathbf{dim} U) \\ &= |G_m| \pi(\mathbf{dim} m) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\delta(\pi(X_m)) = \pi(\mathbf{dim} m)$ , ce qui démontre le théorème. □

### 12.3 Le type fini

Nous nous intéressons maintenant au cas où  $Q$  est un carquois de type Dynkin. Nous montrons en particulier que si  $Q$  est un carquois de type Dynkin muni d'un groupe d'automorphismes  $G$ , alors  $\mathcal{A}(Q/G) = \pi(\mathcal{A}(Q))$ . En outre, nous montrons que le vecteur de dénominateurs induit une bijection de l'ensemble des variables d'amas de  $\mathcal{A}(Q/G)$  vers l'ensemble des racines presque positives de  $Q/G$ .

Si  $Q$  est un carquois de type Dynkin, nous rappelons que les quotients  $Q/G$  possibles sont aussi de type Dynkin. Nous listons dans les figures 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 ci-dessous tous les quotient non-triviaux (voir [73]).

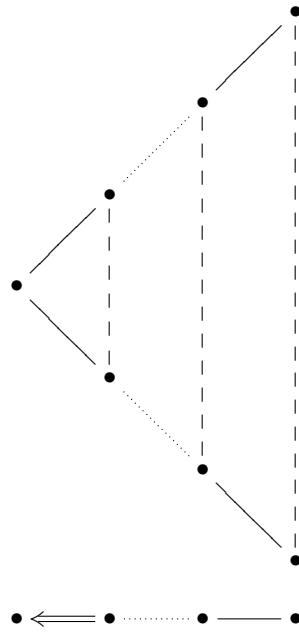


FIG. 12.1 – Quotient de  $A_{2n-1}$  vers  $B_n$

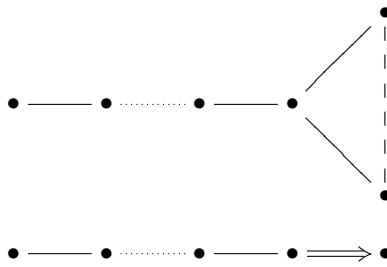


FIG. 12.2 – Quotient de  $D_{n+1}$  vers  $C_n$

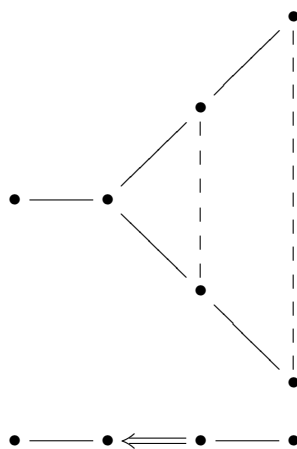


FIG. 12.3 – Quotient de  $E_6$  vers  $F_4$

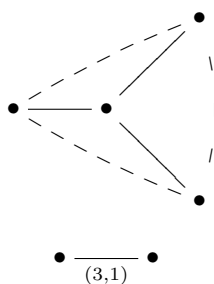


FIG. 12.4 – Quotient de  $D_4$  vers  $G_2$

Le lemme suivant s'obtient par une vérification calculatoire directe.

**Lemme 12.3.1.** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$  et soit  $Q/G$  le graphe quotient. Alors*

$$\pi(\Phi_{\geq -1}(Q)) = \Phi_{\geq -1}(Q/G).$$

**Remarque 12.3.2.** D'après les travaux de Hubery [59], on peut montrer que  $\Phi_{\geq -1}^{\text{re}}(Q/G) \subset \pi(\Phi_{\geq -1}^{\text{re}}(Q))$  pour tout carquois  $Q$ . Les méthodes utilisées sont similaires à celles de cette partie, où les mutations orbitales sont remplacées par des « réflexions orbitales » dans le groupe de Weyl. Plus précisément, si  $\{\alpha_i : i \in Q_0\} = \Pi(Q)$ , pour toute  $G$ -orbite  $\mathbf{i}$ , on pose  $\beta_{\bar{i}} = \pi(\alpha_i) = \sum_{j \in \mathbf{i}} \alpha_j$ . On note  $s_i$  les réflexions du groupe de Weyl de  $Q$  et  $s_{\bar{i}}$  les réflexions du groupe de Weyl de  $Q/G$ . Comme  $G$  est admissible pour  $Q$ , les réflexions correspondant à des sommets dans une même  $G$ -orbite commutent et on peut définir la *réflexion orbitale*  $r_{\mathbf{i}} = \prod_{j \in \mathbf{i}} s_j$ . Il suit alors de [59] que  $\pi \circ r_{\bar{i}} = s_{\bar{i}} \circ \pi$  pour toute  $G$ -orbite  $\mathbf{i}$ . Ainsi, par récurrence à partir des racines simples, on montre que les racines réelles de  $Q/G$  peuvent être obtenues comme projection de certaines racines réelles de  $Q$ .

Pour montrer que dans le cas d'un carquois de type fini  $Q$ , on a égalité entre  $\pi(\mathcal{A}(Q))$  et  $\mathcal{A}(Q/G)$ , nous allons avoir besoin du lemme suivant :

**Lemme 12.3.3.** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin muni d'un groupe d'automorphismes admissibles. Soient  $\gamma, \beta \in \Phi(Q)$  des racines telles que  $\pi(\gamma) = \pi(\beta)$ . Alors il existe  $g \in G$  tel que  $\gamma = g.\beta$ .*

*Démonstration.* On note  $\Pi(Q) = \{\alpha_i, i \in Q_0\}$  l'ensemble des racines simples de  $Q$  et  $\Pi(Q/G) = \{\alpha_i, i \in \overline{Q}_0\}$  l'ensemble des racines simples de  $Q/G$ . Soient  $\gamma, \beta$  des racines de  $\Phi(Q)$ . On écrit  $\gamma = \sum_{i \in Q_0} \gamma_i \alpha_i$  et  $\beta = \sum_{i \in Q_0} \beta_i \alpha_i$ . Par hypothèse, pour tout  $\mathbf{i} \in \overline{Q}_0$ , on a  $\sum_{k \in \mathbf{i}} \beta_k = \sum_{k \in \mathbf{i}} \gamma_k$ . Si  $\gamma$  est une racine simple, alors  $\beta$  est aussi une racine simple et alors il existe  $g \in G$  tel que  $\gamma = g.\beta$ . Sinon, d'après le lemme 12.3.1  $\pi(\beta)$  est un élément de  $\Phi(Q/G)$ . En reprenant les notations de la remarque 12.3.2, il existe une suite de sommets  $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n$  dans  $\overline{Q}_0$  tels que  $\sigma_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ \sigma_{\mathbf{i}_1}(\pi(\beta))$  est une racine simple de  $Q/G$ . Alors il suit de la remarque 12.3.2 que

$$\begin{aligned} \pi(r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(\beta)) &= \sigma_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ \sigma_{\mathbf{i}_1}(\pi(\beta)) \\ &= \sigma_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ \sigma_{\mathbf{i}_1}(\pi(\gamma)) \\ &= \pi(r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(\gamma)). \end{aligned}$$

D'après l'étude dans le cas des racines simples, il existe alors un élément  $g \in G$  tel que

$$g.r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(\beta) = r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(\gamma).$$

Mais il suit de [58] que l'action de  $g$  commute avec les  $r_i$  et donc

$$r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(g.\beta) = r_{\mathbf{i}_n} \circ \dots \circ r_{\mathbf{i}_1}(\gamma)$$

et  $\gamma = g.\beta$ . □

**Théorème 12.3.4.** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$  et soit  $Q/G$  le graphe quotient. Alors*

$$\pi(\text{Cl}(Q)) = \text{Cl}(Q/G).$$

*En particulier,*

$$\pi(\mathcal{A}(Q)) = \mathcal{A}(Q/G).$$

*Démonstration.* D'après la proposition 11.2.12 et le corollaire 11.2.14, on sait que l'on a une inclusion  $\iota : \text{Cl}(Q/G) \rightarrow \pi(\text{Cl}(Q))$ . Par ailleurs, il suit du théorème 1.4.4 que les vecteurs de dénominateurs induisent des bijections

$$\delta_1 : \text{Cl}(Q/G) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\geq -1}(Q/G),$$

$$\delta_3 : \text{Cl}(Q) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\geq -1}(Q).$$

Nous avons ainsi le diagramme :

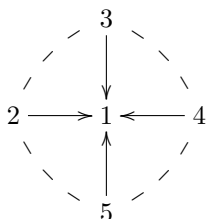
$$\begin{array}{ccccc} \text{Cl}(Q/G) & \xrightarrow{\iota} & \pi(\text{Cl}(Q)) & \longleftarrow & \text{Cl}(Q) \\ \delta_1 \downarrow \sim & & \delta_2 \downarrow & & \delta_3 \downarrow \sim \\ \Phi_{\geq -1}(Q/G) & \xlongequal{\quad} & \pi(\Phi_{\geq -1}(Q)) & \longleftarrow & \Phi_{\geq -1}(Q) \end{array}$$

où le carré de gauche commute clairement et où le carré de droite commute d'après le théorème 12.2.1. Puisque,  $\delta_2 \circ \iota = \delta_1$  est une bijection,  $\delta_2$  est surjective. Montrons maintenant que  $\delta_2$  est injective. Soient  $x, y \in \text{Cl}(Q)$  tels que  $\delta_2(\pi(x)) = \delta_2(\pi(y))$ . Il suit du théorème 12.2.1 que  $\pi(\delta_3(x)) = \pi(\delta_3(y))$ . D'après le lemme 12.3.3, il existe alors  $g \in G$  tel que  $\delta_3(y) = g.\delta_3(x)$ . Comme  $\delta_3(y)$  est un élément de  $\Phi_{\geq -1}(Q)$ , il existe un unique élément dans  $\text{Cl}(Q)$  de vecteur de dénominateur  $\delta_3(y)$  et alors d'après le lemme 12.1.2, cet élément est  $g.x$ . Ainsi,  $y = g.x$  et  $\pi(y) = \pi(x)$ . Il s'ensuit que,  $\delta_2 : \pi(\text{Cl}(Q)) \rightarrow \pi(\Phi_{\geq -1}(Q))$  est une bijection et donc  $\iota$  aussi. Alors, on a  $\pi(\text{Cl}(Q)) = \text{Cl}(Q/G)$ , ce qui prouve le théorème.  $\square$

### 12.4 Le type affine

Nous avons montré que  $\pi(\text{Cl}(Q)) = \text{Cl}(Q/G)$  si  $Q$  est un carquois de type Dynkin muni d'un groupe admissible d'automorphismes  $G$ . Nous allons montrer que si  $Q$  est de représentation infinie, alors il est possible que l'on ait une inclusion stricte de  $\text{Cl}(Q/G)$  dans  $\pi(\text{Cl}(Q))$ .

Soit  $Q$  le carquois de type affine  $\mathbb{D}_4$



muni du groupe d'automorphismes admissibles  $\langle g \rangle$  où  $g$  est le 4-cycle  $g = (2345) \in \mathfrak{S}_5$ . Il suit du lemme 11.2.11 que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.

Le graphe quotient  $Q/G$  est le graphe valué de type  $\mathbb{A}_2^{(2)}$  (voir la figure 14.1 pour les notations) donné par

$$\bar{1} \xleftarrow{(4,1)} \bar{2}$$

$Q$  et  $Q/G$  sont de types affines. Les racines positives imaginaires minimales sont respectivement  $\delta_Q = (21111)$  et  $\delta_{Q/G} = (1, 2)$ .

Pour tout  $i \neq j$  dans  $\{2, 3, 4, 5\}$ , on note  $M_{ij}$  l'unique (à isomorphisme près) représentation indécomposable de vecteur de dimension  $\alpha_1 + \alpha_i + \alpha_j$ . Alors les  $M_{ij}$  sont les modules quasi-simples des tubes exceptionnels et  $\tau M_{ij} = M_{rs}$  où  $\{r, s\} = \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{i, j\}$ . En particulier, on a  $\text{Ext}^1(M_{ij}, M_{rs}) \neq 0$ .

Pour tout  $i \neq j \in \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathbf{dim} M_{ij}$  est une racine réelle de Schur et donc  $\text{Ext}_k^1(M_{ij}, M_{ij}) = 0$ . Le théorème 3.1.4 implique que  $X_{M_{ij}}$  est une variable d'amas de  $\mathcal{A}(Q)$ .

On considère maintenant la représentation

$$M_{45} = \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ & 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow k \\ & & & \uparrow & \\ & & & 1 & \\ & & & k & \end{array}$$

Si  $\pi(X_{M_{45}})$  est une variable d'amas dans  $\mathcal{A}(Q/G)$ , alors d'après le corollaire 11.2.14, il existe un amas  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_5\}$  obtenu après une suite de mutations orbitales tel que  $\pi(X_{M_{45}}) = \pi(x_{i_0})$  pour un certain  $i_0 \in \{1, \dots, 5\}$ . D'après le théorème 3.1.4, il existe alors un objet indécomposable rigide  $N$  tel que  $x_{i_0} = X_N$ . Mais d'après le théorème 12.2.1,  $\pi(\mathbf{dim} N) = \pi(\mathbf{dim} M_{45}) = (1, 2)$ , donc  $N$  est nécessairement l'un des  $M_{ij}$ . D'après le lemme 11.2.5, on sait en outre que  $\mathbf{x}$  doit être un amas  $G$ -invariant et donc il suit du corollaire 12.1.8 que  $M_{ij}$  est un facteur direct d'un objet amas-basculant  $G$ -invariant. Mais  $\text{Ext}_{kQ}^1(g^2 M_{ij}, M_{ij}) \neq 0$ , d'où une contradiction. Ainsi,  $\pi(X_{M_{45}}) \in \pi(\text{Cl}(Q)) \setminus \text{Cl}(Q/G)$  et

$$\text{Cl}(Q/G) \subsetneq \pi(\text{Cl}(Q)).$$

On remarquera que cela ne montre pas pour autant que  $\pi(\mathcal{A}(Q))$  est une sous-algèbre propre de  $\mathcal{A}(Q/G)$ . En effet, on peut avoir des relations entre les variables d'amas. Dans ce cas, on vérifie que

$$X_{P_4} X_{S_5} = X_{M_{45}} + X_{P_2[1]} X_{P_3[1]}.$$

Si on applique  $\pi$ , on obtient alors

$$\pi(X_{M_{45}}) = \pi(X_{P_4})\pi(X_{S_5}) - \pi(X_{P_2[1]}X_{P_3[1]})$$

Comme  $P_4$  et  $S_5$  sont des modules préprojectifs indécomposables,  $\pi(X_{P_4})$  et  $\pi(X_{S_5})$  sont dans  $\text{Cl}(Q/G)$ . De même  $\pi(X_{P_2[1]}X_{P_3[1]}) = v_2^2 \in \text{Cl}(Q/G)$ . Ainsi,  $\pi(X_{M_{45}}) \in \mathcal{A}(Q/G)$ .



## Chapitre 13

# Algèbres amassées de rang 2

Les algèbres amassées de rang deux sont des exemples simples à aborder mais d'une complexité suffisante pour donner une bonne compréhension de la théorie générale [99]. Elles ont déjà fait l'objet de plusieurs études, que ce soit pour la recherche d'une base [88] ou pour la recherche d'une formule close d'expression des variables d'amas [22]. Cependant, la première approche se restreignait essentiellement aux cas affines et finis et la seconde se restreignait au cas symétrique. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode pour étudier toutes les algèbres amassées de rang deux à partir de catégories amassées de certains carquois acycliques.

### 13.1 Algèbres amassées de rang 2

Une algèbre amassée de rang deux est une algèbre amassée  $\mathcal{A}(B)$  où  $B$  est une matrice antisymétrisable quelconque de  $M_2(\mathbb{Z})$ . Dans ce cas particulier, nous pouvons avoir une description plus élémentaire de  $\mathcal{A}(B)$  comme présentée dans [99].

Soient  $b, c \geq 1$  des entiers,  $x_1, x_2$  des indéterminées sur  $\mathbb{Q}$ . On note  $\mathcal{A}(b, c)$  l'algèbre amassée de graine initiale

$$\left( (x_1, x_2), \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Les variables d'amas dans  $\mathcal{A}(b, c)$  sont les  $x_m$  où  $m \in \mathbb{Z}$  définies par :

$$x_{m+1} = \begin{cases} \frac{x_m^b + 1}{x_{m-1}} & \text{si } m \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ \frac{x_m^c + 1}{x_{m-1}} & \text{si } m \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

et les amas dans  $\mathcal{A}(b, c)$  sont alors les couples  $(x_m, x_{m+1})$  où  $m \in \mathbb{Z}$ .

Ces algèbres de rang deux ont déjà fait l'objet de nombreuses études. Dans [88], les auteurs se sont particulièrement intéressés au cas où  $bc \leq 4$ . Dans [22], les auteurs ont étudié le cas où  $b = c \geq 1$ . La figure 13.1 liste les algèbres amassées de rang deux en fonction de leur type.

$(b, c)$	type de $\mathcal{A}(b, c)$
(1, 1)	Dynkin $\mathbb{A}_2$
(1, 2)	Dynkin $\mathbb{B}_2$
(1, 3)	Dynkin $\mathbb{G}_2$
(1, 4)	affine $\mathbb{G}_1$
(2, 2)	affine $\hat{\mathbb{A}}_{1,1}$ (Kronecker)
$(m, m), m \geq 3$	sauvage $m$ -Kronecker
$(b, c), bc > 4$	sauvage

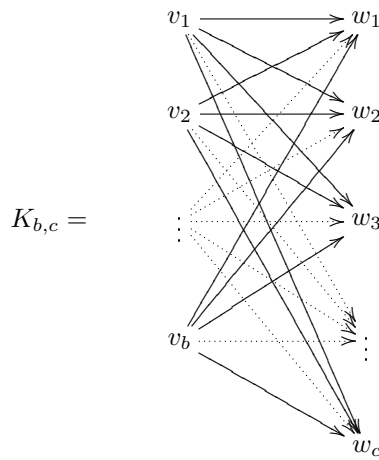
FIG. 13.1 – Types des algèbres amassées de rang deux

### 13.2 Réalisations des algèbres amassées de rang deux

Dans un premier temps, nous réalisons un graphe valué à deux sommets quelconque comme quotient d'un carquois acyclique. On se fixe  $b, c \geq 1$  deux entiers, soient  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_b\}$  et  $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_c\}$  deux ensembles. Soit  $K_{b,c}$  le carquois défini par

$$(K_{b,c})_0 = \mathbf{v} \sqcup \mathbf{w}$$

et pour tous  $i \in \{1, \dots, b\}, j \in \{1, \dots, c\}$ , on a exactement une flèche  $v_i \rightarrow w_j$ . Le carquois peut se représenter comme suit :



Alors  $K_{b,c}$  est muni du groupe d'automorphismes admissibles

$$G = \mathfrak{S}_{\mathbf{v}} \times \mathfrak{S}_{\mathbf{w}}$$

et il suit du lemme 11.2.11 que  $(K_{b,c}, G)$  est une paire admissible stable.

On considère alors le graphe valué  $\Delta_{b,c}$  associé à la matrice antisymétrisable

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}, \text{ ie}$$

$$\Delta_{b,c} : \quad \mathbf{v} \xrightarrow{(b,c)} \mathbf{w}$$

**Proposition 13.2.1.** *Soient  $b, c \geq 1$  des entiers. Alors*

$$K_{b,c}/G = \Delta_{b,c}.$$

*Démonstration.* La matrice correspondant à  $K_{b,c}$  est la matrice symétrique  $B = (b_{ij})$  définie par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \mathbf{v}, j \in \mathbf{v} \\ 0 & \text{si } i \in \mathbf{w}, j \in \mathbf{w} \\ 1 & \text{si } i \in \mathbf{v}, j \in \mathbf{w} \\ -1 & \text{si } i \in \mathbf{w}, j \in \mathbf{v} \end{cases}$$

Si on note  $B/G = (c_{ij})$ , alors on a

$$d_{\mathbf{v},\mathbf{v}} = 0$$

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{w},\mathbf{w}} &= 0 \\ d_{\mathbf{v},\mathbf{w}} &= \sum_{i=1}^b v_i w_1 = b \\ d_{\mathbf{w},\mathbf{v}} &= \sum_{i=1}^c w_i v_1 = -c \end{aligned}$$

et donc  $B/G = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$  et

$$K_{b,c}/G = \Delta_{b,c}.$$

□

Nous sommes dans le cadre d'application du théorème 11.2.13 pour étudier les variables d'amas de  $\mathcal{A}(b, c)$ . Cependant, dans ce cas particulier, nous pouvons obtenir cette description d'une manière beaucoup plus directe à l'aide de la catégorie amassée et de l'application Caldero-Chapoton.

Pour simplifier les notations, on note  $Q = K_{b,c}$ . On note toujours  $\mathcal{A}(Q)$  l'algèbre amassée de graine initiale  $(\mathbf{u}, Q)$ . On pose

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[u_i^{\pm 1} : i \in Q_0] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}] \\ u_{v_i} & \mapsto & x_1 & \text{pour tout } i = 1, \dots, b \\ u_{w_i} & \mapsto & x_2 & \text{pour tout } i = 1, \dots, c \end{cases}$$

Pour tout  $i \in \mathbf{v} \sqcup \mathbf{w}$ , on note  $P_i$  le  $kQ$ -module projectif associé à  $i$ . On notera  $P_{\mathbf{v}}$  (respectivement  $P_{\mathbf{w}}$ ) un représentant de l'ensemble  $\{P_{v_1}, \dots, P_{v_b}\}$  (resp.  $\{P_{w_1}, \dots, P_{w_c}\}$ ).

On note  $X_{\mathbf{v}}$  l'application Caldero-Chapoton sur  $\mathcal{C}_Q$ . Pour tout  $g \in G$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a  $gP_{\mathbf{v}}[i] \in \{P_{v_1}[i], \dots, P_{v_b}[i]\}$  et  $gP_{\mathbf{w}}[i] \in \{P_{w_1}[i], \dots, P_{w_c}[i]\}$ . Il suit alors du lemme 12.1.2 que  $\pi(P_{\mathbf{v}}[i])$  et  $\pi(P_{\mathbf{w}}[i])$  sont des éléments bien définis de  $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$ .

On peut alors décrire les variables d'amas de  $\mathcal{A}(b, c)$  de la manière suivante :

**Théorème 13.2.2.** *Soient  $b, c \geq 1$ . Alors pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\begin{aligned} x_{2m+1} &= \pi(X_{P_{\mathbf{v}}[m+1]}) \\ x_{2m+2} &= \pi(X_{P_{\mathbf{w}}[m+1]}) \end{aligned}$$

*Démonstration.* On le montre par récurrence sur  $m$ . On a  $x_1 = \pi(u_{v_i}) = \pi(X_{P_{v_i}[1]})$  pour tout  $i = 1, \dots, b$  et  $x_2 = \pi(u_{w_i}) = \pi(X_{P_{w_i}[1]})$  pour tout  $i = 1, \dots, c$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, c\}$  et  $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} k &\simeq \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(P_{w_i}[m+1]) \\ &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(P_{w_i}[m+1], P_{w_i}[m]) \\ &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(P_{w_i}[m], P_{w_i}[m+1]) \end{aligned}$$

et les triangles correspondant sont

$$P_{w_i}[m] \longrightarrow 0 \longrightarrow P_{w_i}[m+1] \longrightarrow P_{w_i}[m+1],$$

$$P_{w_i}[m+1] \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^c P_{v_j}[m] \longrightarrow P_{w_i}[m] \longrightarrow P_{w_i}[m+2]$$

Il suit alors de la formule de multiplication unidimensionnelle que

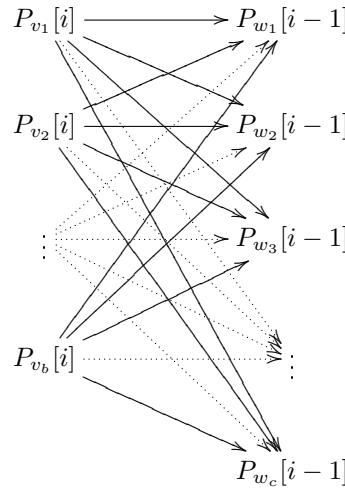
$$X_{P_{w_i}[m]} X_{P_{w_i}[m+1]} = \prod_{i=1}^c X_{P_{v_j}[m]} + 1$$

mais  $\pi(X_{P_{w_i}[m]}) = x_{2m}$  et  $\pi(X_{P_{v_j}[m]}) = x_{2m-1}$  pour tout  $j = 1, \dots, b$  donc finalement

$$\pi(X_{P_{w_i}[m+1]}) = \frac{x_{2m-1}^b + 1}{x_{2m}} = x_{2m+2}.$$

Les autres cas se montrent de la même manière. □

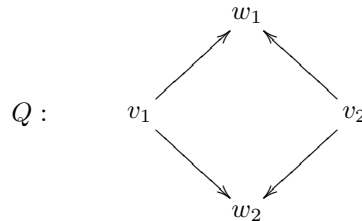
La figure 13.2 schématise la situation où dans le carquois d'Auslander-Reiten de  $kQ$ , on a regroupé les modules dans une même  $G$ -orbite et les flèches entre ces orbites. Localement, le carquois est en fait de la forme



**Exemple 13.2.3.** Considérons le carquois de Kronecker

$$K : \quad \mathbf{v} \rightrightarrows \mathbf{w}$$

et le carquois  $Q$  de type affine  $\tilde{A}_{2,2}$



On note  $((u_{v_1}, u_{v_2}, u_{w_1}, u_{w_2}), Q)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(Q)$ ,  $((u_{\mathbf{v}}, u_{\mathbf{w}}), K)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(K)$  et

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[u_{v_1}^{\pm 1}, u_{v_2}^{\pm 1}, u_{w_1}^{\pm 1}, u_{w_2}^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[u_{\mathbf{v}}^{\pm 1}, u_{\mathbf{w}}^{\pm 1}] \\ u_{v_i} & \mapsto & u_{\mathbf{v}} \\ u_{w_i} & \mapsto & u_{\mathbf{w}} \end{cases}$$

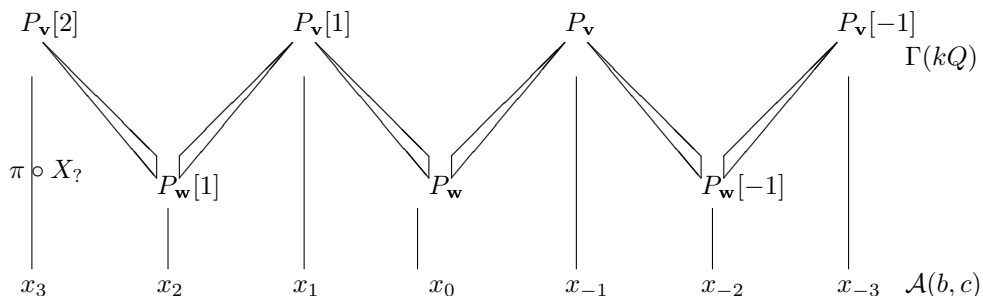
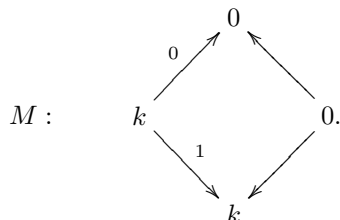


FIG. 13.2 – Réalisation des variables d’amas en rang 2

la projection.

Alors les variables d’amas de  $\mathcal{A}(K)$  sont les images sous  $\pi$  des variables d’amas transjectives de  $\mathcal{A}(Q)$ .

On remarquera en particulier que les variables d’amas régulières de  $\mathcal{A}(Q)$  ne se projettent pas sur des variables d’amas de  $\mathcal{A}(K)$ . Soit en effet  $x$  une variable d’amas régulière de  $\mathcal{A}(Q)$ . Alors,  $x = X_M^Q$  pour un quasi-simple d’un tube exceptionnel. Par symétrie, on peut supposer que  $M$  est la représentation



En appliquant le théorème 9.6.9, on calcule alors directement

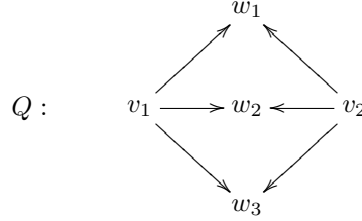
$$\begin{aligned} x &= X_M^Q \\ &= \frac{u_{v_2}}{u_{w_2}} + \frac{u_{w_1}}{u_{v_1}} + \frac{1}{u_{v_1}u_{w_2}} \\ &= \frac{1 + u_{v_1}u_{v_2} + u_{w_1}u_{w_2}}{u_{v_1}u_{w_2}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{1 + u_{\mathbf{v}}^2 + u_{\mathbf{w}}^2}{u_{\mathbf{v}}u_{\mathbf{w}}} \\ &= X_{M_\lambda}^K \end{aligned}$$

où  $M_\lambda$  désigne n’importe quelle représentation quasi-simple régulière de  $K$ . Or on sait que  $X_{M_\lambda}^K \notin \text{Cl}(K)$  et donc  $\pi(x) \notin \text{Cl}(K)$ .

**Exemple 13.2.4.** Considérons l'algèbre de type  $\mathcal{A}(2, 3)$  et le carquois sauvage  $K_{2,3}$  :



On note  $((u_{v_1}, u_{v_2}, u_{w_1}, u_{w_2}, u_{w_3}), Q)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(Q)$ ,  $((u_{\mathbf{v}}, u_{\mathbf{w}}), K)$  la graine initiale de  $\mathcal{A}(K)$  et

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[u_{v_1}^{\pm 1}, u_{v_2}^{\pm 1}, u_{w_1}^{\pm 1}, u_{w_2}^{\pm 1}, u_{w_3}^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[u_{\mathbf{v}}^{\pm 1}, u_{\mathbf{w}}^{\pm 1}] \\ u_{v_i} & \mapsto & u_{\mathbf{v}} \\ u_{w_i} & \mapsto & u_{\mathbf{w}} \end{cases}$$

la projection.

Alors les variables d'amas de  $\mathcal{A}(2, 3)$  sont les images sous  $\pi$  des variables d'amas transjectives de  $\mathcal{A}(Q)$ . Le problème de calculer les variables d'amas dans  $\mathcal{A}(2, 3)$  se ramène donc à chercher une expression explicite de l'application Caldero-Chapoton pour les objets transjectifs de  $\mathcal{C}_Q$ .

Nous pouvons déjà calculer les dénominateurs des variables d'amas de  $\mathcal{A}(2, 3)$  en vertu du théorème 12.2.1. La transformation de Coxeter dans la base

$$(\mathbf{dim} S_{v_1}, \mathbf{dim} S_{w_1}, \mathbf{dim} S_{w_2}, \mathbf{dim} S_{w_3}, \mathbf{dim} S_{v_2})$$

est

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On note

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Alors l'ensemble des vecteurs de dénominateurs des variables d'amas de  $\mathcal{A}(2, 3)$  est

$$\{(-1, 0), (0, -1)\} \cup \pi(\{\Phi^n(P) : n \leq 0\}) \cup \pi(\{\Phi^n(I), n \geq 0\}).$$

## Chapitre 14

# Mutation-finitude pour les graphes quotients



Un graphe (ou de manière équivalente une matrice) sera dit de *mutation finie* si sa classe de mutation est un ensemble fini. La question de la classification des graphes de mutation finie est un problème ouvert, il existe cependant un certain nombre de résultats partiels dans l'étude de ce problème (voir [45, 43, 4, 87, 15, 32] par exemple).

### 14.1 Classes de mutations des graphes affines

Il suit de du théorème de classification des algèbres amassées de type fini que si le graphe considéré est de type Dynkin, alors il est nécessairement de mutation finie (théorème 1.4.3). On sait par ailleurs que la réciproque de ce résultat est fausse. Buan et Reiten ont obtenu donné un résultat partiel de classification :

**Théorème 14.1.1** ([15]). *Soit  $Q$  un carquois acyclique ayant plus de trois sommets. Alors  $Q$  est de mutation finie si et seulement si  $Q$  est de type Dynkin ou affine.*

Cependant, leur approche utilise la catégorie amassée et ne traite pas le cas où le graphe considéré de départ est un graphe valué et non un carquois. En construisant les graphes valués affines comme quotients de carquois affines, nous pourrions montrer que tout graphe valué affine est de mutation finie à l'aide du théorème 11.2.13.

Nous rappelons que les *graphes affines non simplement lacés* sont les graphes dont le graphe non-orienté sous-jacent est listé dans la figure 14.1.

Lusztig a remarqué que tout graphe affine non-simplement lacé peut être réalisé comme quotient d'un graphe affine simplement lacé muni d'un groupe d'automorphismes. Plus précisément,

**Lemme 14.1.2** ([73]). *Soit  $\Delta$  un graphe valué affine non-simplement lacé. Alors il existe un carquois affine  $Q$  muni d'un groupe d'automorphismes admissibles  $G$  tel que  $\Delta = Q/G$ .*

On donne des quotients possibles dans les figures 14.2-14.11 où on aura pris le soin de prendre une orientation adéquate.

Un corollaire du théorème 11.2.13 dans le cadre de l'étude des graphes de mutation finie est :

**Lemme 14.1.3.** *Soit  $\Delta$  un graphe valué orienté muni d'un groupe d'automorphismes  $G$  tel que  $(\Delta, G)$  est une paire admissible stable. Si  $\Delta$  est de mutation finie. Alors  $\Delta/G$  est aussi de mutation finie.*

*Démonstration.* Il suit du théorème 11.2.13 que l'application  $B \rightarrow B/G$  induit une application surjective

$$\text{Mut}^G(\Delta) \rightarrow \text{Mut}(\Delta/G).$$

Puisque  $\text{Mut}^G(\Delta) \subset \text{Mut}(\Delta)$ , il s'ensuit que

$$|\text{Mut}(\Delta/G)| \leq |\text{Mut}^G(\Delta)| \leq |\text{Mut}(\Delta)| < \infty.$$

□

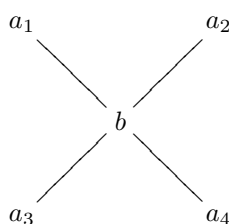
**Remarque 14.1.4.** On remarquera que la réciproque du lemme 14.1.3 est fausse. En effet, si  $b, c \geq 3$  sont des entiers, le graphe valué  $\Delta_{b,c}$  est de mutation finie alors que le carquois  $K_{b,c}$  est de mutation infinie.

Nous utilisons maintenant ces méthodes pour démontrer que certains graphes valués affines sont de mutation finie, retrouvant ainsi des résultats de Seven [87].

On commence par démontrer le lemme trivial suivant.

**Lemme 14.1.5.** *Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\mathbb{A}_1^{(2)}$ . Alors  $\Delta$  est de mutation finie.*

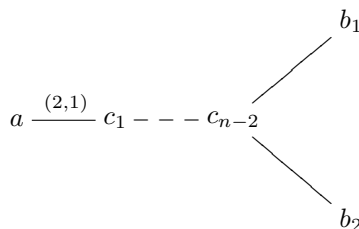
*Démonstration.* Un graphe valué orienté  $\Delta$  de type  $\mathbb{A}_1^{(2)}$  se réalise comme quotient du carquois  $Q$  de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$



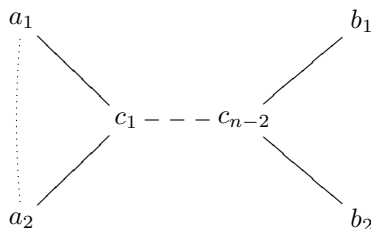
par le groupe  $G = \mathfrak{S}_{a_1, a_2, a_3, a_4}$  où on a pris une orientation adéquate. Il suit du lemme 11.2.11 que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.  $Q$  étant de type affine, il suit du théorème 14.1.1 et du lemme 14.1.3 que  $\Delta$  est de mutation finie.  $\square$

**Lemme 14.1.6.** *Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\tilde{\mathbb{C}}\mathbb{D}_n$ . Alors  $\Delta$  est de mutation finie.*

*Démonstration.* On considère un graphe valué orienté  $\Delta$  de type  $\tilde{\mathbb{C}}\mathbb{D}_n$  :



muni d'une orientation quelconque. On considère alors le carquois  $Q$  de type  $\tilde{\mathbb{D}}_{n+1}$  muni



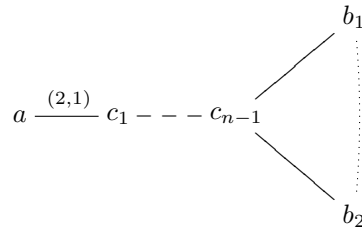
muni du groupe d'automorphismes admissibles  $G = \mathfrak{S}_{a_1, a_2}$  et d'une orientation adéquate. Alors  $G$  n'a qu'une seule orbite non triviale et donc il suit du lemme 11.2.10 que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.  $Q$  étant de type affine, il suit du théorème 14.1.1 et du lemme 14.1.3 que  $\Delta$  est de mutation finie.  $\square$

**Lemme 14.1.7.** *Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\tilde{\mathbb{C}}_n$ . Alors  $\Delta$  est de mutation finie.*

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\mathbb{C}_n$

$$a \xrightarrow{(2,1)} c_1 - - - c_{n-1} \text{ --- } b$$

muni d'une orientation quelconque. Considérons le graphe valué orienté  $\Gamma$  de type  $\tilde{\mathbb{D}}_{n+1}$



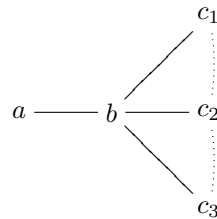
muni d'une orientation adéquate et du groupe d'automorphismes  $G = \mathfrak{S}_{b_1, b_2}$ . Alors  $G$  n'a qu'une seule orbite non triviale et donc il suit du lemme 11.2.10 que  $(\Gamma, G)$  est une paire admissible stable.  $\Gamma$  étant de mutation finie par le lemme 14.1.6, il suit du lemme 14.1.3 que  $\Delta$  est de mutation finie.  $\square$

**Lemme 14.1.8.** *Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\tilde{\mathbb{G}}_2^{(1)}$ . Alors  $\Delta$  est de mutation finie.*

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  un graphe valué de type  $\mathbb{G}_2^{(1)}$

$$a \text{ --- } b \xrightarrow{(1,3)} c$$

muni d'une orientation quelconque. Considérons le carquois  $Q$  de type  $\tilde{\mathbb{D}}_4$



muni d'une orientation adéquate et du groupe d'automorphismes  $G = \mathfrak{S}_{c_1, c_2, c_3}$ . Alors  $G$  n'a qu'une seule orbite non triviale et donc il suit du lemme 11.2.10 que  $(Q, G)$  est une paire admissible stable.  $Q$  étant de type affine, il est de mutation finie par le théorème 14.1.1 et il suit du lemme 14.1.3 que  $\Delta$  est de mutation finie.  $\square$

## 14.2 Un programme pour dénombrer les classes de mutation finies

Si  $\Delta$  est un graphe valué tel que  $\text{Mut}(\Delta)$  est fini, une question qui se pose naturellement est alors de connaître le cardinal de  $\text{Mut}(\Delta)$ . Plus exactement,

le nombre qui nous a intéressé est le nombre  $\mu(\Delta)$  de graphes valués non-isomorphes contenus dans  $\text{Mut}(\Delta)$ . Par abus de terminologie,  $\mu(\Delta)$  est appelé *taille de la classe de mutation* de  $\Delta$ . Keller a développé un programme nommé `QUIVER MUTATION IN JAVA` qui permet, entre autres nombreuses fonctionnalités, de calculer la taille de la classe de mutation d'un graphe  $\Delta$  à condition que celle-ci ne soit pas trop grande. Cependant, il s'avère que la complexité des calculs d'isomorphismes de graphes ne permet pas de calculer des tailles de mutations pour des carquois avec beaucoup de sommets.

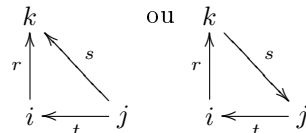
Nous avons donc développé avec M. Pérotin (Laboratoire d'Informatique de l'Université de Tours) et l'aide de J. Calabrese (Ecole Polytechnique de Tours) le programme `QUIVER MUTATION EXPLORER (QME)` pour calculer les tailles des classes de mutation de carquois modulo isomorphismes [40]. Ce programme a notamment permis de calculer les tailles de classes de mutation pour de nombreux carquois de mutation finie (voir l'annexe A). Les deux points essentiels ont consisté à utiliser l'algorithme d'isomorphismes de graphes de Mc Kay [75] et à proposer une possibilité de parallélisation des calculs.

### 14.2.1 Quelques résultats utiles pour l'implémentation

Afin de ne pas lancer le programme dans le calcul d'une classe de mutation infinie, nous avons besoin d'un critère de reconnaissance des graphes de mutation finie.

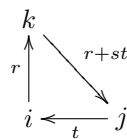
**Lemme 14.2.1.** *Soit  $Q$  un carquois connexe ayant au moins trois sommets. Si il existe deux sommets  $i$  et  $j$  reliés par au moins trois flèches. Alors  $Q$  n'est pas de mutation finie.*

*Démonstration.* On considère trois points  $i, j, k$  dans  $Q$ , la configuration locale est alors donnée par



avec  $r, s, t \geq 0$  correspondant au nombre de flèches allant d'un point à un autre.

Dans le premier cas, on effectue une mutation en  $i$ , on obtient alors



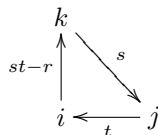
on est donc ramenés à l'étude du second cas.

Par symétrie, on peut supposer  $r = \min \{r, s, t\}$ . De plus, on a  $\max \{s, t\} \geq 3$  et  $s, t \neq 0$  par hypothèse. On a alors

$$st > 2r$$

En particulier,  $r - st < 0$ . Ainsi, si on effectue alors la mutation de  $Q$  en  $j$ ,

on obtient alors la configuration locale



mais on a

$$st - r + s + t > r + s + t \Leftrightarrow st > 2r$$

Ainsi, on a obtenu une configuration analogue avec un nombre total de flèches strictement supérieur. En répétant ce procédé on obtient donc une suite infinie de carquois mutation-équivalents non-isomorphes, la classe est donc infinie.  $\square$

**Corollaire 14.2.2.** *Soit  $Q$  un carquois connexe ayant au moins trois sommets. Alors  $Q$  est de mutation infinie si et seulement si il existe un carquois  $Q'$  mutation-équivalent à  $Q$  ayant au moins trois flèches reliant deux points.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que le nombre de carquois à  $n = |Q_0|$  sommets ayant au plus deux flèches entre deux points est fini.  $\square$

Ainsi, le corollaire 14.2.2 donne un critère décisionnel facile à implémenter pour savoir si l'on doit interrompre le calcul de la taille de la classe de mutation.

Nous donnons maintenant une méthode permettant de construire de nouveaux carquois de mutation finie à partir d'un carquois dont on sait qu'il est de mutation finie. On rappelle la définition d'un sous-carquois plein :

**Définition 14.2.3.** Soit  $Q$  un carquois, un *sous-carquois plein*  $R$  de  $Q$  est un carquois tel que  $R_0 \subset Q_0$  et tel que pour tous  $i, j \in R_0$ , on a

$$\{\alpha \in R_1 : s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\} = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\}.$$

On peut caractériser les sous-carquois pleins de la manière suivante :

**Lemme 14.2.4.** *Soient  $Q$  un carquois,  $R$  un sous-carquois de  $Q$ , soient  $B$  et  $C$  les matrices antisymétriques associées respectivement à  $Q$  et  $R$ . Alors  $R$  est un sous-carquois plein de  $Q$  si et seulement si pour tous  $i, j \in R_0$ , on a  $b_{ij} = c_{ij}$ .*

**Proposition 14.2.5.** *Soit  $Q$  un carquois,  $R$  un sous-carquois plein de  $Q$  et  $k \in R_0$ . Alors  $\mu_k(R)$  est un sous-carquois plein de  $\mu_k(Q)$ .*

*Démonstration.* On note  $B$  (resp.  $C$ ) la matrice antisymétrique associée à  $Q$  (resp.  $R$ ). On note  $B'$  (resp.  $C'$ ) la matrice antisymétrique associée à  $\mu_k(Q)$  (resp.  $\mu_k(R)$ ). On a alors pour tous  $i, j \in Q_0$

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + \frac{1}{2} (|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, pour tous  $i, j \in R_0$ , on a

$$c'_{ij} = \begin{cases} -c_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ c_{ij} + \frac{1}{2} (|c_{ik}|c_{kj} + c_{ik}|c_{kj}|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

mais pour tous  $r, s \in R_0$ , d'après le lemme 14.2.4 on a  $c_{rs} = b_{rs}$ , on a donc

$$c'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + \frac{1}{2} (|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

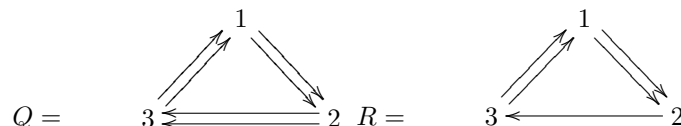
car  $i, j, k \in R_0$ .

Ainsi, d'après le lemme 14.2.4,  $\mu_k(R)$  est un sous-carquois plein de  $\mu_k(Q)$ . □

**Corollaire 14.2.6.** *Soit  $Q$  un carquois,  $R$  un sous-carquois plein de  $Q$ . Alors tout carquois mutation-équivalent à  $R$  est un sous-carquois plein d'un carquois mutation-équivalent à  $Q$ .*

*En particulier, tout sous-carquois plein d'un carquois de mutation finie est de mutation finie.*

**Remarque 14.2.7.** Ce résultat est faux sans l'hypothèse de plénitude comme le montrent les carquois



En effet,  $Q$  est de mutation finie (sa classe est réduite à lui-même) et  $R$  est de mutation infinie.

**Remarque 14.2.8.** Le résultat 14.2.6 n'implique pas que si  $R$  est un sous-carquois plein de  $Q$ , alors  $\mu(R) \leq \mu(Q)$ . En effet, puisque l'on compte modulo isomorphismes, il se peut que les carquois dans  $\text{Mut}(Q)$  aient des symétries alors que ce n'est pas le cas de ceux de  $\text{Mut}(R)$ . L'exemple des carquois de types  $\mathbb{X}_6$  et  $\mathbb{X}_7$  dans l'annexe A le montre puisque  $\mathbb{X}_6$  est un sous-carquois plein  $\mathbb{X}_7$  et que  $\mu(\mathbb{X}_6) = 5$  et  $\mu(\mathbb{X}_7) = 2$ .

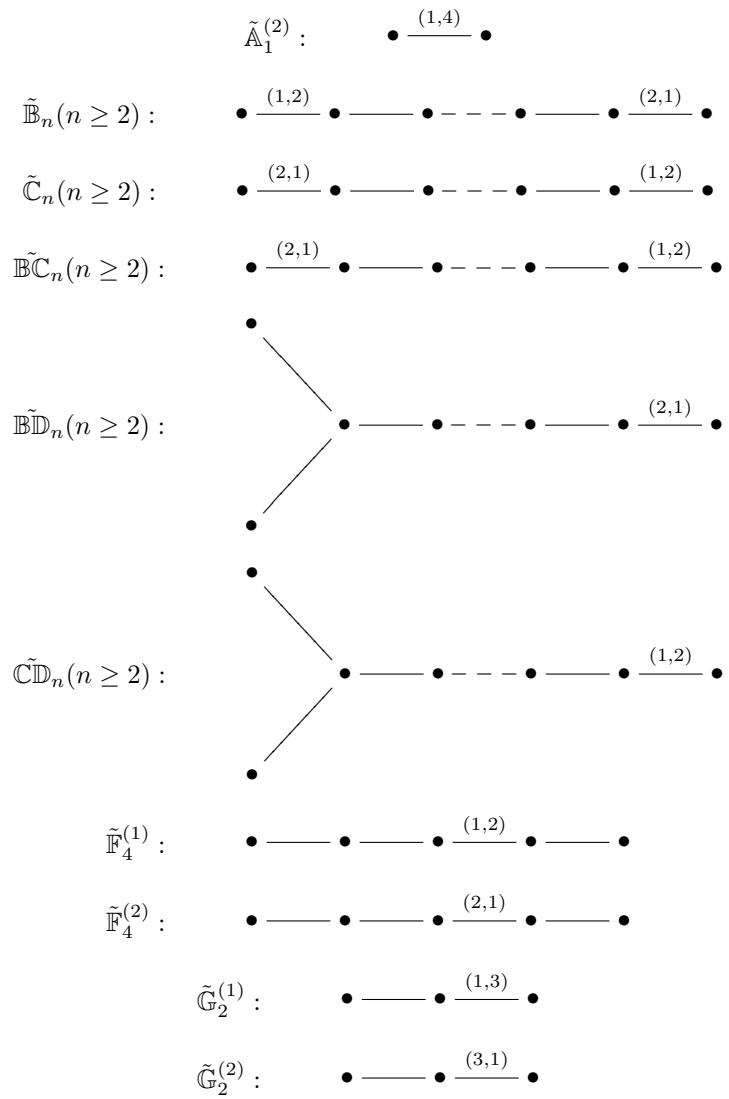
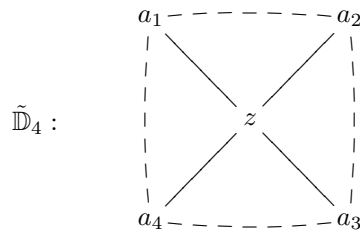


FIG. 14.1 – Graphes affines non simplement lacés

Le graphe affine

$$\tilde{\mathbb{A}}_1^{(2)} : \bullet \xrightarrow{(1,4)} \bullet$$

s'obtient comme quotient de



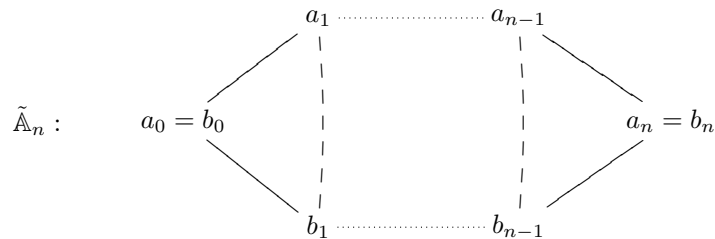
par le groupe d'automorphismes  $G = \mathfrak{S}_{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}}$ .

FIG. 14.2 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{A}}_1^{(2)}$

Le graphe affine

$$\tilde{\mathbb{B}}_n (n \geq 2) : \bullet \xrightarrow{(1,2)} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{(2,1)} \bullet$$

s'obtient comme quotient de



par le groupe  $G = \langle \prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i) \rangle$ .

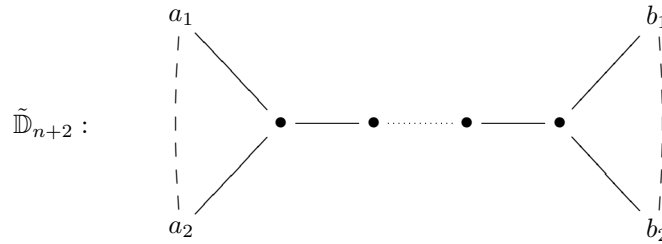
FIG. 14.3 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{B}}_n$



Le graphe affine

$$\tilde{\mathbb{C}}_n (n \geq 2) : \quad 0 \xrightarrow{(2,1)} 1 \text{ --- } 2 \text{ ..... } n-2 \text{ --- } n-1 \xrightarrow{(1,2)} n$$

s'obtient comme quotient de



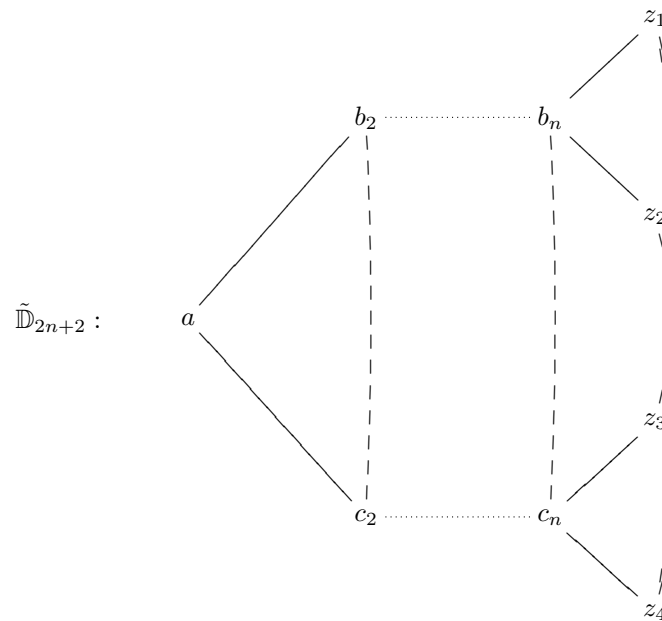
par le groupe d'automorphismes  $G = \mathfrak{S}_{a_1, a_2} \times \mathfrak{S}_{b_1, b_2}$ .

FIG. 14.4 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{C}}_n$

Le graphe affine

$$\tilde{\mathbb{B}}\mathbb{C}_n (n \geq 2) : \quad \bullet \xrightarrow{(1,2)} \bullet \text{ --- } \bullet \text{ ..... } \bullet \text{ --- } \bullet \xrightarrow{(1,2)} \bullet$$

s'obtient comme quotient de



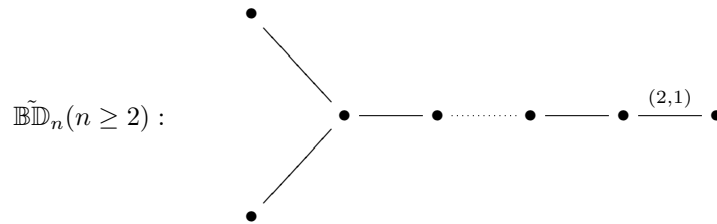
par le groupe

$$G = \langle \sigma(z_1, z_3)(z_2, z_4), \sigma(z_1, z_4)(z_2, z_3) \rangle$$

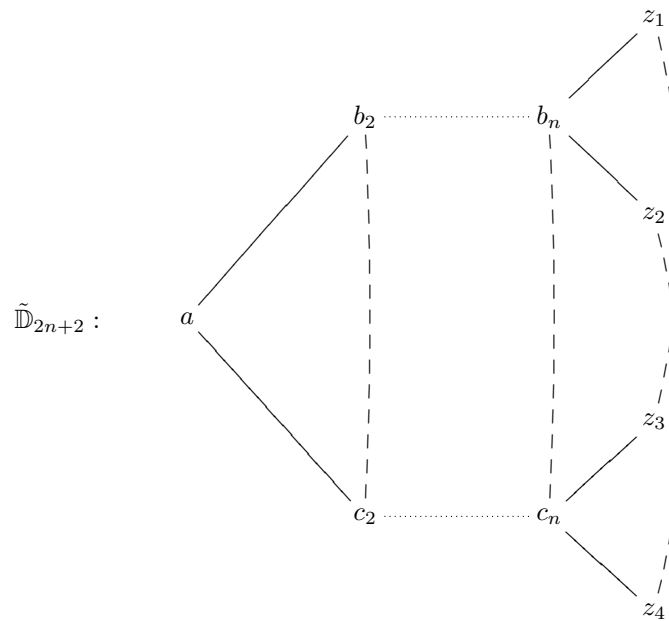
où  $\sigma = \prod_{i=2}^n (b_i, c_i)$ .

FIG. 14.5 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{B}}\mathbb{C}_n$

Le graphe affine



s'obtient comme quotient de



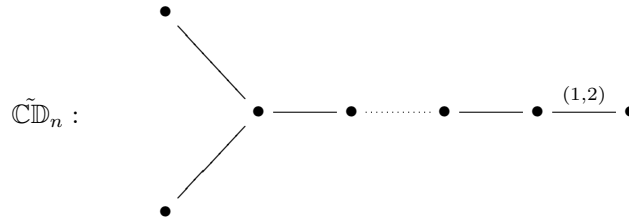
par le groupe

$$G = \langle \sigma(z_1, z_3)(z_2, z_4) \rangle$$

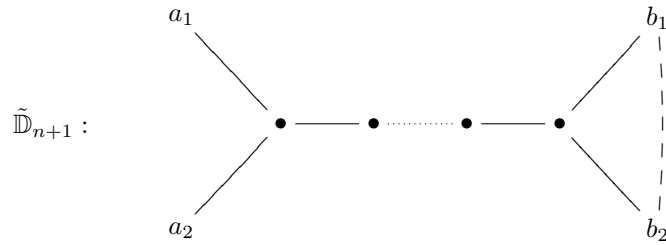
où  $\sigma = \prod_{i=2}^n (b_i, c_i)$ .

FIG. 14.6 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{B}\mathbb{D}}_n$

Le graphe affine



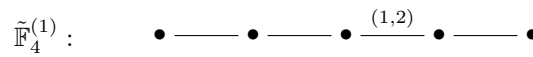
s'obtient comme quotient de



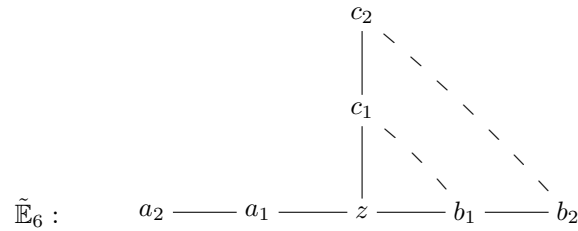
par le groupe  $G = \langle (b_1, b_2) \rangle$ .

FIG. 14.7 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{C}}\mathbb{D}_n$

Le graphe affine



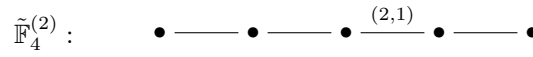
s'obtient comme quotient de



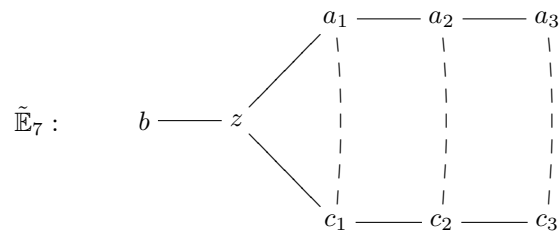
par le groupe  $G = \langle (c_1, b_1)(c_2, b_2) \rangle$ .

FIG. 14.8 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{F}}_4^{(1)}$

Le graphe



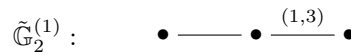
s'obtient comme quotient de



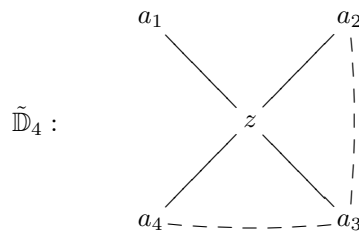
par le groupe  $G = \langle \prod_{i=1}^3 (a_i, c_i) \rangle$ .

FIG. 14.9 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{F}}_4^{(2)}$

Le graphe



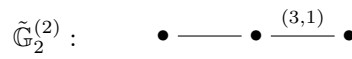
s'obtient comme quotient de



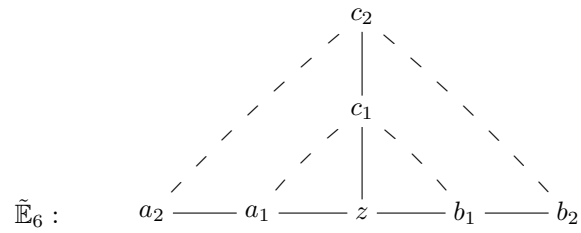
par le groupe  $G = \mathfrak{S}_{\{a_1, a_2, a_3\}}$ .

FIG. 14.10 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{G}}_2^{(1)}$

Le graphe



s'obtient comme quotient de



par le groupe  $G = \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle$ .

FIG. 14.11 – Réalisation de  $\tilde{\mathbb{G}}_2^{(2)}$

## Cinquième partie

### Annexes

## Annexe A

# Dénombrement des classes de mutation finies

Dans cette annexe, nous listons les tailles de classes de mutation de différents carquois de mutation finie. Les calculs ont été effectués à l'aide du programme `QUIVER MUTATION EXPLORER (QME)`, développé conjointement avec Pérotin [40], et de l'applet de Keller `QUIVER MUTATION IN JAVA` [67].

## A.1 Les types finis

### A.1.1 Le type Dynkin $\mathbb{A}$

Type	Taille
$\mathbb{A}_4$	6
$\mathbb{A}_5$	19
$\mathbb{A}_6$	49
$\mathbb{A}_7$	150
$\mathbb{A}_8$	442
$\mathbb{A}_9$	1424
$\mathbb{A}_{10}$	4522
$\mathbb{A}_{11}$	14924
$\mathbb{A}_{12}$	49536
$\mathbb{A}_{13}$	167367

On peut reconnaître les termes de la suite de Brown qui correspond à un dénombrement de triangulations [7]. D'après [18], le nombre  $\mu(\mathbb{A}_n)$  est égal au nombre de triangulations d'un  $n + 3$ -gone. D'autre part, il suit de la section 2.3 que  $\mu(\mathbb{A}_n)$  est aussi égal au nombre d'isoclasses d'algèbres amas-basculées de type  $\mathbb{A}_n$ . En faisant ces observations et en utilisant la formule explicite de Brown, Torildsen a montré que

$$\mu(\mathbb{A}_n) = C(n+1)/(n+3) + C((n+1)/2)/2 + (2/3)C(n/3),$$

où  $C(i)$  est le  $i$ -ème nombre de Catalan

$$C(i) = \frac{(2i)!}{(i+1)!i!}$$

et où le second terme est omis si  $\frac{n+1}{2}$  n'est pas un entier et où le troisième terme est omis si  $\frac{n}{3}$  n'est pas un entier [91].



### A.1.2 Le type Dynkin $\mathbb{D}$

Type	Taille
$\mathbb{D}_4$	6
$\mathbb{D}_5$	26
$\mathbb{D}_6$	80
$\mathbb{D}_7$	246
$\mathbb{D}_8$	810
$\mathbb{D}_9$	2704
$\mathbb{D}_{10}$	9252
$\mathbb{D}_{11}$	32066
$\mathbb{D}_{12}$	112720
$\mathbb{D}_{13}$	400024

### A.1.3 Le type Dynkin $\mathbb{E}$

Type	Taille
$\mathbb{E}_6$	67
$\mathbb{E}_7$	416
$\mathbb{E}_8$	1574

## A.2 Les types affines

### A.2.1 Le type affine $\tilde{\mathbb{A}}$

Le tableau suivant contient les tailles des classes de mutations des carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}$  pour les premiers entiers  $r, s \geq 0$ . Puisque  $\mu(\tilde{\mathbb{A}}_{r,s}) = \mu(\tilde{\mathbb{A}}_{s,r})$ , on ne liste que les cas où  $r \leq s$

	$r = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s = 1$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012
2		4	12	36	108	349	1144	3868	13260	46210	162792	
3			22	100	315	1028	3432	11700	40520	142120		
4				172	980	3240	10920	37556	130900			
5					1651	10584	36036	124740				
6						18028	121968					

On remarque que la suite  $\mu(\tilde{\mathbb{A}}_{1,n})$  coïncide avec la suite  $C(n)$  des nombres de Catalan pour  $n \leq 12$ , nous conjecturons ainsi :

**Conjecture A.2.1.** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\mu(\tilde{\mathbb{A}}_{1,n}) = C(n).$$

**A.2.2 Le type affine  $\tilde{\mathbb{D}}$**

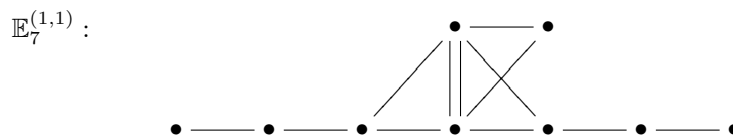
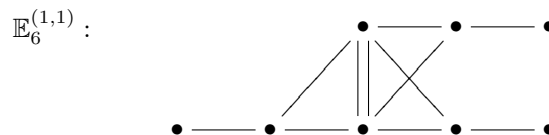
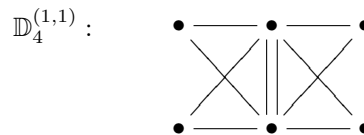
Type	Taille
$\tilde{\mathbb{D}}_4$	10
$\tilde{\mathbb{D}}_5$	40
$\tilde{\mathbb{D}}_6$	146
$\tilde{\mathbb{D}}_7$	504
$\tilde{\mathbb{D}}_8$	1868
$\tilde{\mathbb{D}}_9$	6864
$\tilde{\mathbb{D}}_{10}$	25810
$\tilde{\mathbb{D}}_{11}$	97240
$\tilde{\mathbb{D}}_{12}$	369764

**A.2.3 Le type affine  $\tilde{\mathbb{E}}$**

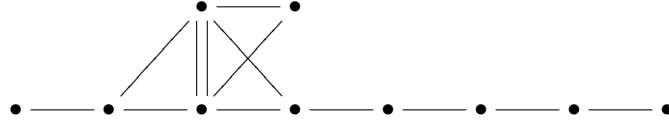
Type	Taille
$\tilde{\mathbb{E}}_6$	132
$\tilde{\mathbb{E}}_7$	1080
$\tilde{\mathbb{E}}_8$	7560

**A.3 Les types elliptiques**

Les *diagrammes elliptiques* ont été introduits par Saito dans [82]. On vérifie que les carquois suivants sont les seuls carquois elliptiques dont la classe de mutation est finie. Les arêtes peuvent être orientées de manière arbitraire de sorte que tous les cycles soient orientés.



$\mathbb{E}_8^{(1,1)}$  :

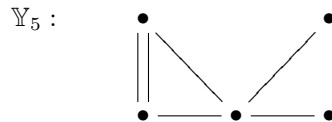
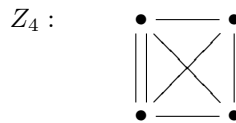
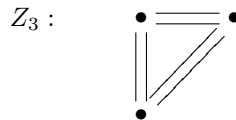


On vérifie alors que tous ces graphes sont de mutation finie et les classes de mutations ont les tailles suivantes :

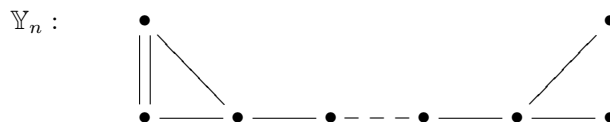
Type	Taille
$\mathbb{D}_4^{(1,1)}$	4
$\mathbb{E}_6^{(1,1)}$	49
$\mathbb{E}_7^{(1,1)}$	506
$\mathbb{E}_8^{(1,1)}$	5739

### A.4 Des types géométriques

Certaines algèbres amassées peuvent être construites à partir de triangulations de surfaces [18, 83, 43]. Les matrices anti-symétrisables apparaissant dans ce cadre sont dites de *types géométriques*. Dans [43], les auteurs ont montré que les matrices de types géométriques étaient nécessairement de mutation finie. Nous donnons des exemples de calculs de tailles de classes de mutations pour des carquois de types géométriques. Comme précédemment, les arêtes peuvent être orientées de manière arbitraire de sorte que tous les cycles sont orientés.



et pour  $n \geq 6$ , on considère



Les classes de mutations ont alors les tailles suivantes :

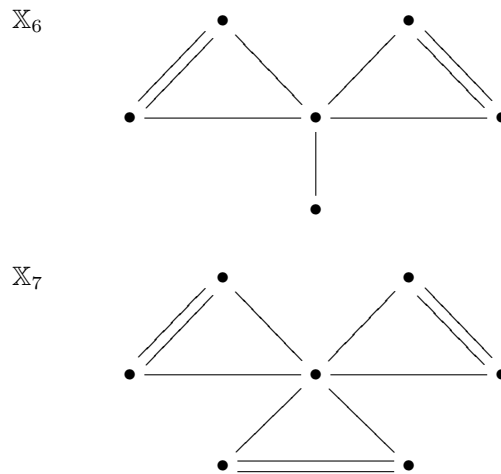
Type	Taille
$Z_3$	1
$Z_4$	1
$Y_5$	10
$Y_6$	48
$Y_7$	160
$Y_8$	560
$Y_9$	2016
$Y_{10}$	7832

### A.5 Des types sporadiques

Dans [43], Fomin, Shapiro et Thurston ont posé la question de savoir si les seuls carquois de classes de mutation finies sont :

- Les carquois de types géométriques,
- Les carquois à deux sommets,
- Les carquois de type  $E_n$ ,  $\tilde{E}_n$  et  $E_n^{(1,1)}$  pour  $n = 6, 7, 8$ .

Derksen et Owen ont répondu par la négative dans [32] en introduisant deux nouveaux carquois qui ne sont pas dans la liste ci-dessus. Ces carquois sont



où les arêtes sont orientées de manière arbitraire de sorte que les cycles sont orientés.

On calcule alors

Type	Taille
$X_6$	5
$X_7$	2

Derksen et Owen ont alors posé la question de savoir si  $X_6$  et  $X_7$  étaient les seuls carquois à ajouter à la liste de Fomin, Shapiro et Thurston [32]. A l'heure actuelle, cette question est à notre connaissance sans réponse.

**Remarque A.5.1.** Nous travaillons toujours à l'optimisation du programme QME, les dernières versions sont disponibles sur la page de l'auteur [40]. Outre la fonction de calcul des cardinalités de classes de mutations, le programme permet aussi de déterminer si deux carquois donnés sont mutation-équivalents. Nous travaillons actuellement à l'implémentation d'une fonction d'exhaustion de toutes les classes de mutation finies de carquois à  $n$  sommets où  $n$  est un entier fixé, ceci pourra s'avérer être un outil utile pour apporter une réponse à la question de Derksen et Owen.

# Bibliographie

- [1] I. Assem, D. Simson, et A. Skowroński. *Elements of representation theory of Associative Algebras, Volume 1 : Techniques of Representation Theory*, volume 65 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] M. Auslander, M. Platzeck, et I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans AMS*, 250 :1–46, 1979.
- [3] M. Auslander, I. Reiten, et S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] A. Beineke, T. Brüstle, et L. Hille. Cluster-cyclic quivers with three vertices and the markov equation. *arXiv :math/0612213v2 [math.RA]*, 2006.
- [5] A. Berenstein, S. Fomin, et A. Zelevinsky. Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126(1) :1–52, 2005.
- [6] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, et V.A. Ponomarev. Coxeter functors and Gabriel theorem. *Uspehi. Math. Nauk.*, 28(2) :19–33, 1973.
- [7] W. G. Brown. Enumeration of triangulations of the disk. *Proc. London Math. Soc.*, 14 :746–768, 1964.
- [8] A. Buan, P. Caldero, B. Keller, R. Marsh, I. Reiten, et G. Todorov. Appendix to Cluster and seeds in acyclic cluster algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(10) :3049–3060, 2007.
- [9] A. Buan et R. Marsh. Denominators in cluster algebras of affine type. *arXiv :0805.0439v1 [math.RT]*, 2008.
- [10] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, et G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in mathematics*, 204(2) :572–618, 2006.
- [11] A. Buan, R. Marsh, et I. Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans AMS*, 359(1) :323–332, 2007.
- [12] A. Buan, R. Marsh, et I. Reiten. Denominators for cluster variables. *arXiv :0710.4335v1 [math.RT]*, 2007.
- [13] A. Buan, R. Marsh, et I. Reiten. Cluster mutation via quiver representations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 83(1) :143–177, 2008.
- [14] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, et G. Todorov. Clusters and seeds in acyclic cluster algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(10) :3049–3060, 2007.
- [15] A. Buan et I. Reiten. Acyclic quivers of finite mutation type. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 12804, 10, 2006.

- [16] P. Caldero et F. Chapoton. Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 81 :596–616, 2006.
- [17] P. Caldero, F. Chapoton, et R. Schiffler. Quivers with relations and cluster tilted algebras. *Algebras and Representation Theory*, 9 :359–376, 2006.
- [18] P. Caldero, F. Chapoton, et R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters. *Transactions of the AMS*, 358 :1347–1354, 2006.
- [19] P. Caldero et B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras II. *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 39(4) :83–100, 2006.
- [20] P. Caldero et B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras. *Inventiones Mathematicae*, 172 :169–211, 2008.
- [21] P. Caldero et M. Reineke. On the quiver grassmannian in the acyclic case. *arXiv :math/0611074v2 [math.RT]*, 2006.
- [22] P. Caldero et A. Zelevinsky. Laurent expansions in cluster algebras via quiver representations. *Moscow Mathematical Journal*, 6 :411–429, 2006.
- [23] G. Cerulli Irelli. Canonical basis and quiver grassmannians in cluster algebras of type  $A_2^{(1)}$ . *preprint*, 2008.
- [24] G. Cerulli Irelli. *Structure theory for affine cluster algebras of rank 3*. PhD thesis, University of Padova, (in preparation) 2008.
- [25] F. Chapoton, S. Fomin, et A. Zelevinsky. Polytopal realizations of generalized associahedra. *Canad. Math. Bull.*, 45(4) :537–566, 2002.
- [26] W. Crawley-Boevey. On tame algebras and BOC’s. *Proc. London Math. Soc.*, 56 :451–483, 1988.
- [27] W. Crawley-Boevey. Lectures on representations of quivers. 1992.
- [28] W. Crawley-Boevey et J. Schröer. Irreducible components of varieties of modules. *J. Reine Angew. Math.*, 553 :201–220, 2002.
- [29] L. Demonet. Cluster algebras and preprojective algebras : the non simply-laced case. *arXiv :0711.4098v1 [math.RT]*, 2007.
- [30] B. Deng et J. Du. Frobenius morphisms and representations of algebras. *Trans. AMS*, 358(8) :3591–3622, 2006.
- [31] B. Deng et J. Du. Folding derived categories with Frobenius morphisms. *J. Pure Applied Alg.*, 208(3) :1023–1050, 2007.
- [32] H. Derksen et T. Owen. New graphs of finite mutation type. *arXiv :0804.0787v1 [math.CO]*, 2008.
- [33] H. Derksen et J. Weyman. On the canonical decomposition of quiver representations. *Compositio Mathematica*, 133 :245–265, 2002.
- [34] V. Dlab et C.M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Memoirs of the AMS*, 173 :1–57, 1976.
- [35] Y.A. Drozd. On tame and wild matrix problems. *Matrix problems*, pages 104–114, 1977.
- [36] G. Dupont. Caldero-Keller approach to the denominators of cluster variables. *arXiv :0711.4661v2 [math.RT]*, 2007.
- [37] G. Dupont. An approach to non simply laced cluster algebras. *Journal of Algebra*, 2008. to appear.

- [38] G. Dupont. Cluster multiplication in stable tubes via generalized Chebyshev polynomials. *arXiv :0801.3964v1 [math.RT]*, 2008.
- [39] G. Dupont. Generic variables in acyclic cluster algebras. *preprint*, 2008.
- [40] G. Dupont et M. Pérotin. Quiver Mutation Explorer. <http://math.univ-lyon1.fr/~dupont/QME>, 2008.
- [41] V.V. Fock et A.B. Goncharov. Cluster X-varieties, amalgamation, and Poisson-Lie groups. In *Algebraic geometry and number theory*. Birkhäuser Boston, 2006.
- [42] V.V. Fock et A.B. Goncharov. Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm. *arXiv :math/0311245v4 [math.AG]*, 2007.
- [43] S. Fomin, M. Shapiro, et D. Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. part I : cluster complexes. *Acta Mathematica*, 2007. to appear.
- [44] S. Fomin et A. Zelevinsky. Cluster algebras I : Foundation. *J. Amer. Math. Soc.*, 15 :497–529, 2002.
- [45] S. Fomin et A. Zelevinsky. Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154 :63–121, 2003.
- [46] S. Fomin et A. Zelevinsky. Y-systems and generalized associahedra. *Annals of Mathematics*, 158 :977–1018, 2003.
- [47] S. Fomin et A. Zelevinsky. Cluster algebras IV : Coefficients. *Composition Mathematica*, 143(1) :112–164, 2007.
- [48] P. Di Francesco et R. Kedem. Q-systems as cluster algebras II : Cartan matrix of finite type and the polynomial property. *arXiv :0803.0362v1 [math.RT]*, 2008.
- [49] I. Frenkel, A. Malkin, et M. Vybornov. Affine Lie algebras and tame quivers. *Selecta Mathematica*, 7(1) :1–56, september 2001.
- [50] P. Gabriel et A.V. Roiter. *Algebra VIII, Representations of Finite-Dimensional Algebras*, volume 73 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1992.
- [51] C. Geiss, B. Leclerc, et J. Schröer. Semicanonical basis and preprojective algebras. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 38 :193–253, 2005.
- [52] C. Geiss, B. Leclerc, et J. Schröer. Rigid modules over preprojective algebras. *Inventiones Mathematicae*, 165(3) :589–632, 2006.
- [53] C. Geiss, B. Leclerc, et J. Schröer. Semicanonical bases and preprojective algebras II : A multiplication formula. *Compos. Math.*, 143(5) :1313–1334, 2007.
- [54] C. Geiss, B. Leclerc, et J. Schröer. Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups. *arXiv :math/0703039v2 [math.RT]*, 2008.
- [55] C. Geiss, B. Leclerc, et J. Schröer. Preprojective algebras and cluster algebras. *arxiv : 0804.3168v1 [math.RT]*, 2008.
- [56] D. Happel. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 1988.



- [57] D. Happel et L. Unger. On the set of tilting objects in hereditary categories. *Fields Institute Communications*, 45 :141–159, 2005.
- [58] A. Hubery. *Representations of Quivers Respecting a Quiver Automorphism and a Theorem of Kac*. PhD thesis, University of Leeds, 2002.
- [59] A. Hubery. Quiver representations respecting a quiver automorphism : a generalization of a theorem of Kac. *J. London Math. Soc.*, 69(2) :79–96, 2004.
- [60] A. Hubery. Acyclic cluster algebras via Ringel-Hall algebras. *preprint*, 2006.
- [61] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer Verlag, 1972.
- [62] O. Iyama et I. Reiten. Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras. *Amer. J. Math.*, 2006.
- [63] V.G. Kac. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Inventiones Mathematicae*, 56 :57–92, 1980.
- [64] V.G. Kac. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II. *Journal of algebra*, 78 :163–180, 1982.
- [65] V.G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge Univeristy Press, 1983.
- [66] R. Kedem. Q-systems as cluster algebras. *arXiv :0712.2695v3 [math.RT]*, 2008.
- [67] B. Keller. Quiver mutation in Java. [http ://www.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/](http://www.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/).
- [68] B. Keller. On triangulated orbit categories. *Documenta Mathematica*, 10 :551–581, 2005.
- [69] B. Keller. Categorification of acyclic cluster algebras : an introduction. *arXiv :0801.3103v1 [math.RT]*, 2008.
- [70] B. Keller et I. Reiten. Acyclic calabi-yau categories. *arXiv :math/0610594v2 [math.RT]*, 2006.
- [71] D. Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces. *arXiv :0803.1328v2 [math.RT]*, 2008.
- [72] B. Leclerc. Algèbres affines quantiques et algèbres amassées. *preprint*, 2008.
- [73] G. Lusztig. *Introduction to quantum groups*. Birkhäuser, 1991.
- [74] R. Marsh, M. Reineke, et A. Zelevinsky. Generalized associahedra via quiver representations. *Trans. AMS*, 355(1) :4171–4186, 2003.
- [75] B.D. McKay. Practical graph isomorphism. *Congressus Numerantium*, 30 :45–87, 1981.
- [76] Y. Palu. Cluster characters for 2-Calabi-Yau triangulated categories. *Annales de l'Institut Fourier*, to appear, 2008.
- [77] I. Reiten et C. Riedtmann. Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras. *J. Algebra*, 92 :224–282, 1985.
- [78] C. Riedtmann. Algebren, darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 55 :199–224, 1980.

- [79] C.M. Ringel. Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type. *Mathematische Zeitschrift*, 161 :235–255, 1978.
- [80] C.M. Ringel. Tame algebras and integral quadratic forms. *Lecture Notes in Mathematics*, 1099 :1–376, 1984.
- [81] C.M. Ringel. Some remarks concerning tilting modules and tilted algebras. Origin. Relevance. Future. (An appendix to the Handbook of tilting theory). *arXiv :math/0605712v1 [math.RT]*, 2006.
- [82] K. Saito. Extended affine root systems. II. Flat invariants. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(1) :15–78, 1990.
- [83] R. Schiffler. A geometric model for cluster categories of type  $D_n$ . *J. Algebraic Combin.*, 27(1) :1–21, 2008.
- [84] O. Schiffmann. Lectures on Hall algebras. *arXiv :math/0611617v1 [math.RT]*, 2006.
- [85] A. Schofield. General representations of quivers. *Proc. London Math. Soc.*, 65(3) :46–64, 1992.
- [86] A. Seven. Recognizing cluster algebras of finite type. *arXiv :math/0406545v2 [math.CO]*, 2005.
- [87] A. Seven. Cluster algebras and semipositive symmetrizable matrices. *arXiv :0804.1456*, 2008.
- [88] P. Sherman et A. Zelevinsky. Positivity in rank 2 cluster algebras. *Mosc. Math. J.*, 4 :947–974, 2004.
- [89] D. Simson et A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 2 : Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type*, volume 71 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 2007.
- [90] B. Toën. Derived hall algebras. *Duke. Math. J.*, 2005.
- [91] H.A. Torkildsen. Counting cluster-tilted algebras of type  $A_n$ . *arXiv :0801.3762v2 [math.RT]*, 2008.
- [92] J.L. Verdier. Stratification de Whitney et théorème de Bertini-Sard. *Inventiones Mathematicae*, 36 :295–312, 1976.
- [93] C.A. Weibel. *Introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.
- [94] J. Xiao et F. Xu. Hall algebra in a triangulated category. *arXiv :math/0608144v3 [math.QA]*, 2006.
- [95] J. Xiao et F. Xu. Green’s formula with  $\mathbb{C}^*$ -action and Caldero-Keller’s formula for cluster algebras. *arXiv :0707.1175v2 [math.QA]*, 2007.
- [96] F. Xu. On the cluster multiplication theorem for acyclic cluster algebras. *arXiv :0711.3255v2 [math.RT]*, 2007.
- [97] D. Yang. Non-simply-laced clusters of finite type via Frobenius morphisms. *arXiv :math/0608114v2 [math.RT]*, 2006.
- [98] A. Zelevinsky. Cluster algebras : Notes for the CDM-03 conference. *arXiv :math/0311493v2 [math.RT]*, 2004.
- [99] A. Zelevinsky. What is a cluster algebra? *Notices of the AMS*, 54(11) :1494–1495, 2007.

- [100] B. Zhu. Applications of BGP-reflection functors : isomorphisms of cluster algebras. *Science in China. Series A. Mathematics*, 49(12) :1839–1854, 2006.
- [101] B. Zhu. Equivalence between cluster categories. *Journal of Algebra*, 304 :832–850, 2006.
- [102] B. Zhu. BGP-reflection functors and cluster combinatorics. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 209(2) :497–506, 2007.
- [103] B. Zhu. Preprojective cluster variables in acyclic cluster algebras. *Comm. Alg.*, 35(9) :2857–2871, 2007.

# Index

- $G$ -indécomposable
  - objet, 207
- $G$ -invariant
  - objet, 207
- $G$ -invariante
  - graine, 191
- $T$ -dénominateur, 53
- $\lambda$ -composante, 47
- $n$ -cycle, 20
  
- acyclique
  - algèbre amassée, 21
  - carquois, 20
  - graine, 21
- admissible
  - automorphisme, 188
  - paire, 188
- affine
  - carquois, 97
  - graphe valué, 224
- algèbre
  - amas-basculée, 37
  - amassée, 17
  - cluster, 17
  - cluster-tilted, 37
- algèbre amassée
  - acyclique, 21
  - de type fini, 23
  - non simplement lacée, 17
  - simplement lacée, 17
- alternée
  - orientation, 47
- amas, 17
  - caractère, 49
  - d'une algèbre amassée, 17
- amas-basculant
  - objet APR-, 38
  - ensemble, 42
  - objet, 35
- amas-basculée
  - algèbre, 37
- amassée
  - algèbre, 17
  - catégorie, 33
- annulation générale, 117, 118
- APR
  - objet amas-basculant, 38
- arbre, 20
- associahèdre généralisé, 19
- automorphisme
  - admissible, 72, 188
  - de carquois, 72
  - de carquois à translation, 72
  - de graphe, 188
  - de matrice, 188
  
- basculement
  - foncteur, 37
- base
  - semi-canonique, 158
  - canonique, 160
  - semi-canonique duale, 8
- BGP
  - foncteur, 38
  - foncteur étendu, 37
- BGP étendu
  - foncteur, 38
  
- Calabi-Yau
  - catégorie, 34
- canonique
  - base, 160
  - décomposition de Kac, 31
- caractère
  - d'amas, 49
  - sur une catégorie, 76
- caractéristique
  - d'Euler, 41
- carquois
  - de type géométrique, 242

- acyclique, 20
- affine, 97
- automorphisme de-, 72
- quotient, 72, 190
- à translation, 72
- catégorie
  - amassée, 33
  - cluster, 33
  - d'orbites, 32
  - de chemins, 73
  - de mailles, 73
  - standard, 73
- changement de base, 162
- localement unipotent, 162
- positif, 162
- Chebyshev
  - polynôme généralisé de rang  $p$ , 68
  - polynôme généralisé de rang infini, 66
- chemin, 20
- chemins
  - catégorie, 73
- classe de mutation
  - d'un carquois, 21
  - d'un graphe, 21
  - d'une graine, 17
  - d'une matrice, 16
  - orbitale, 192
- classe de réflexion
  - d'un carquois, 22
- cluster, 17
  - algèbre, 17
  - catégorie, 33
  - d'une algèbre amassée, 17
- cluster-tilted
  - algèbre, 37
- cluster-tilting
  - objet, 35
- compatible
  - avec une paire d'échange, 54
  - sous échange, 54
- composante
  - régulière, 75
- conjecture de positivité, 18
- connexe
  - carquois, 20
- constructible
  - application, 115
  - ensemble, 115
- corps ambiant, 17
- cycle, 20
- diagrammes
  - elliptiques, 241
- diamant
  - relation, 62
- différence
  - propriété de, 132
- Dynkin
  - graphe, 23
  - matrice, 23
- décomposition
  - canonique de Kac, 31
- défaut
  - d'une représentation, 98
  - forme de-, 97
- elliptiques
  - diagrammes, 241
- en échange
  - objets, 36
- ensemble
  - amas-basculant, 42
- Euler
  - caractéristique, 41
  - forme, 29
- exceptionnel
  - tube, 74
- fini
  - carquois, 20
- foncteur
  - BGP étendu, 37
  - de basculement, 37
- forme
  - d'Euler, 29
  - de défaut, 97
- formule de multiplication
  - presque scindée, 44
  - type fini, 45
  - unidimensionnelle, 45
- gradué
  - carquois, 47
- graine, 16
  - acyclique, 21
- graine initiale, 17
- graines
  - d'une algèbre amassée, 17

- mutation-équivalentes, 17
- graphe
  - affine, 224
  - de basculement, 36
  - quotient, 190
- graphe de mutation
  - d'un carquois, 21
  - d'une algèbre amassée, 19
  - d'une catégorie amassée, 37
- grassmannienne
  - de sous-modules, 41
- Grothendieck
  - groupe de-, 28
- groupe
  - de Grothendieck, 28
  - de Grothendieck scindé, 107
- générale
  - annulation, 117, 118
- générique
  - variable, 117
- homogène
  - tube, 74
- idéal
  - des mailles, 73
- imaginaire
  - racine minimale, 97
- irrégulière
  - racine, 97
- isomorphisme canonique
  - d'algèbres amassées, 18
- Laurent
  - phénomène, 18
- linéaire par morceaux
  - application, 39
- localement fermé
  - ensemble, 115
- localement fini
  - carquois, 72
- localement unipotent
  - changement de base, 162
- longueur
  - d'un cycle, 20
- mailles
  - catégorie de, 73
  - idéal des, 73
  - relation de, 73
- matrice
  - quotient, 188
- matrices
  - mutation-équivalentes, 16
- minimale
  - racine imaginaire, 97
- monôme
  - standard, 67
- monôme cluster, 18
- monôme d'amas, 18
- mutation
  - de carquois, 21
  - de graine, 16
  - de graphes, 21
  - de matrice, 16
- mutation orbitale
  - classe de, 192
  - d'une graine, 193
  - d'une matrice, 192
- non simplement lacée
  - algèbre amassée, 17
- objet
  - amas-basculant, 35
  - cluster-tilting, 35
- paire
  - admissible, 188
- paire admissible
  - stable, 195
- paire d'échange, 36
- phénomène Laurent, 18
- polarisation, 72
- polynôme de Chebyshev généralisé
  - de rang  $p$ , 68
  - de rang infini, 66
- positif
  - changement de base, 162
  - élément, 159
- positivité
  - condition, 54
  - conjecture, 18
  - faible, 54
- presque amas-basculant
  - objet, 36
- presque positive
  - racine, 24
- presque scindée
  - formule de multiplication, 44

- projection, 191
  - d'une graine, 197
- propriété de différence, 132
- préinjectif
  - module, 29
- préprojectif
  - module, 29
- puits, 20
  - suite admissible, 148
- quasi-composition
  - suite, 75
- quasi-longueur, 76
- quasi-radical, 76
- quasi-simple
  - module, 75
- quasi-socle, 76
- quotient
  - carquois, 72, 190
  - graphe, 190
  - matrice, 188
- racine
  - d'un carquois, 30
  - imaginaire minimale, 97
  - irrégulière, 97
  - presque positive, 24
  - régulière, 97
  - sincère, 97
- racine positive
  - d'un carquois, 30
- rang
  - d'un tube, 74
- relation
  - de mailles, 73
  - diamant, 62
- relation d'échange, 16
- représentation
  - de carquois, 28
  - de Schur, 30
- rigide
  - objet, 28
- réelle
  - racine, 30
- réflexion
  - de carquois, 22
- réflexion-gradué
  - carquois, 151
- réflexion-équivalent
  - carquois, 22
- régulier
  - module, 29
- régulière
  - composante, 75
  - racine, 97
  - variable d'amas, 175
- sauvage
  - carquois, 97
- Schofield
  - théorème de, 129
- Schur
  - racine de, 30
  - représentation de, 30
- semi-canonique
  - base, 158
- simplement lacée
  - algèbre amassée, 17
- sincère
  - racine, 97
- sommet d'extension, 121
- source, 20
  - d'une flèche, 20
- sources
  - suite admissible, 148
- sous-carquois, 20
  - plein, 20, 228
- stable
  - paire admissible, 195
- standard
  - catégorie, 73
  - monôme, 67
- suite admissible
  - de puits, 148
  - de sources, 148
- support, 113
  - d'un chemin, 169
  - d'un polynôme de Laurent, 47
  - d'un vecteur de dimension, 82
  - d'une représentation, 80
- théorème
  - de Schofield, 129
- transjectif
  - objet, 34
- transjective
  - composante, 35
  - variable d'amas, 175
- translation
  - carquois, 72

- tube
  - carquois, 74
  - catégorie, 74
  - exceptionnel, 74
  - homogène, 74
- type affine
  - d'un carquois, 109
- type affine  $\tilde{A}_{r,s}$ , 109
- type fini
  - algèbre amassée, 23
  - formule de multiplication, 45
  - graphe, 23
  - matrice, 23
- type géométrique
  - carquois, 242
  - matrice, 242
- type tubulaire
  - d'un carquois, 99
- tête
  - d'une flèche, 20
- unidimensionnelle
  - formule de multiplication, 45
- variable
  - d'amas transjective, 175
  - cluster, 17
  - d'amas, 17
  - d'amas généralisée, 42
  - d'amas régulière, 175
  - généralisée, 42
  - générique, 117
- vecteur de dimension, 28
- vecteur de dénominateur, 18
- voisins
  - objets, 36