

# Algèbres amassées affines

G. Dupont

Université Lyon 1

6 novembre 2008

- **Introduction** : S. Fomin et A. Zelevinsky (*Cluster Algebras I : Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 2001)
- **Motivation** : Cadre pour une étude *combinatoire* de
  - la positivité totale dans les groupes algébriques réductifs,
  - les bases canoniques dans les groupes quantiques.
- **Liens** :
  - Combinatoire,
  - Théorie de Lie,
  - Géométrie de Poisson,
  - Théorie des représentations...

- **Problème** : *Trouver et calculer* des bases dans les algèbres amassées.
- **Bases canoniques** :
  - Sherman-Zelevinsky ( $\mathbb{A}_2, \tilde{\mathbb{A}}_{1,1}$ ),
  - Cerulli Irelli ( $\tilde{\mathbb{A}}_{2,1}$ ).
- **Bases** :
  - Caldero-Keller (fini),
  - Geiss-Leclerc-Schröer.
- **Stratégie** : Donner une définition unifiée à l'aide de la théorie des représentations.

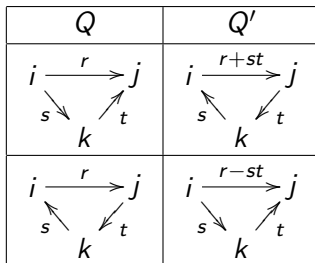
- 1 Algèbres amassées et catégories amassées
- 2 Algèbres amassées affines
- 3 Polynômes de Chebyshev généralisés
- 4 Variables génériques
- 5 Directions futures

Une *graine* est un couple  $(Q, \mathbf{x})$  où :

- $Q = (Q_0, Q_1)$  est un carquois sans boucles ni 2-cycles ;
- $\mathbf{x} = (x_i : i \in Q_0)$  est un  $Q_0$ -tuple d'indéterminées sur  $\mathbb{Z}$ , appelé *amas de la graine*  $(Q, \mathbf{x})$ .

# Mutation de graines

Pour tout  $k \in Q_0$ ,  $\mu_k(Q, \mathbf{x}) = (Q', \mathbf{x}')$  est la nouvelle graine donnée par :



et

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \sqcup \{x'_k\}$$

où

$$x_k x'_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q_1} x_i + \prod_{k \rightarrow i \in Q_1} x_i.$$

On note  $(Q, \mathbf{x}) \sim_{\text{mut}} (R, \mathbf{y})$  la relation d'équivalence engendrée.

Soit  $(Q, \mathbf{u})$  une graine avec  $Q$  acyclique.

## Définition

L'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  de graine initiale  $(Q, \mathbf{u})$  est

$$\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[x \mid x \in \mathbf{c} \text{ où } (R, \mathbf{c}) \sim_{\text{mut}} (Q, \mathbf{u})] \subset \mathbb{Q}(\mathbf{u})$$

Les  $\mathbf{c}$  apparaissant sont appelés les *amas* de  $\mathcal{A}(Q)$ ,

Les  $x \in \mathbf{c}$  sont appelés les *variables d'amas* de  $\mathcal{A}(Q)$ .

$$\text{Cl}(Q) = \{\text{variables d'amas}\}.$$

## Théorème, Fomin-Zelevinsky, 2001

$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}].$$

Si  $x \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$ , le *vecteur de dénominateur*  $\text{den}(x) \in \mathbb{Z}^{\mathcal{Q}_0}$  de  $x$  est donné par

$$x = \frac{P(\mathbf{u})}{\mathbf{u}^{\text{den}(x)}}$$

sous la forme irréductible.



## Définition

Un *monôme d'amas* est un monôme en des variables d'amas appartenant à un même amas.

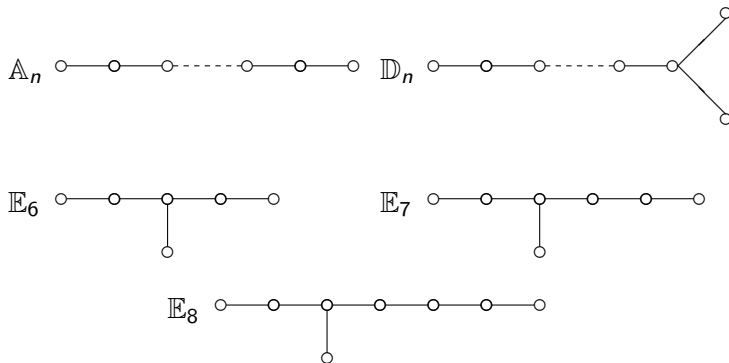
On pose

$$\mathcal{M}(Q) = \{\text{monômes d'amas dans } \mathcal{A}(Q)\}.$$

## Définition

Une algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  est dite de *type fini* si  $|\text{Cl}(Q)| < \infty$ .

# Diagrammes de Dynkin simplement lacés



## Théorème, F.Z., 2002

$\mathcal{A}(Q)$  est de type fini si et seulement si  $Q$  est un carquois de type Dynkin.  
Dans ce cas,  $\text{den}$  induit une bijection

$$\text{den} : \text{Cl}(Q) \longrightarrow \Phi_{>0}(Q) \sqcup (-\Pi(Q)).$$

# Une base pour le type fini

## Théorème, Caldero-Keller, 2005

Si  $\mathcal{A}(Q)$  est de type fini, alors  $\mathcal{M}(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(Q)$ .

## Fait, Sherman-Zelevinsky

En général,  $\mathcal{M}(Q)$  n'engendre pas  $\mathcal{A}(Q)$ .

## Conjecture, Zelevinsky

En général,  $\mathcal{M}(Q)$  est linéairement indépendant au-dessus de  $\mathbb{Z}$ .

# La catégorie amassée

Soit  $k = \mathbb{C}$ ,  $Q$  un carquois acyclique.

$$kQ\text{-mod} \simeq \text{rep}(Q).$$

## Définition, BMRRT, 2004

La *catégorie amassée* de  $Q$  est la catégorie d'orbites de l'auto-foncteur  $F = \tau^{-1}[1]$  dans la catégorie dérivée bornée  $D^b(kQ)$  de  $kQ\text{-mod}$ .

$$\mathcal{C}_Q = D^b(kQ)/F.$$

## Théorème, K, BMRRT, 2004

- $\mathcal{C}_Q$  est une catégorie triangulée ;
- $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) \simeq D\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(Y, X)$  (2-Calabi-Yau) ;
- $\text{ind}(\mathcal{C}_Q) = \text{ind}(kQ\text{-mod}) \sqcup \{P_i[1] : i \in Q_0\}$ .

- Soit  $M$  un  $kQ$ -module et  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ . On note

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M) = \{N \subset M : \mathbf{dim} N = \mathbf{e}\}$$

*la grassmannienne de sous-modules.*

- On note  $\chi$  la caractéristique d'Euler-Poincaré.

## Définition, Caldero-Chapoton

L'application *Caldero-Chapoton* est l'application  $X_{\cdot} : \text{Ob}(\mathcal{C}_Q) \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbf{u}^{\pm 1}]$  :

- Si  $M, N$  sont dans  $\text{Ob}(\mathcal{C}_Q)$ , alors  $X_{M \oplus N} = X_M X_N$ ;
- Si  $M \simeq P_i[1]$ , alors  $X_{P_i[1]} = u_i$ ;
- Si  $M$  est un module indécomposable, alors

$$X_M = \sum_{\mathbf{e}} \chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M)) \prod_{i \in Q_0} u_i^{-\langle \mathbf{e}, \dim S_i \rangle - \langle \dim S_i, \dim M - \mathbf{e} \rangle}. \quad (1)$$

L'égalité (1) est vraie pour tout  $kQ$ -module  $M$ .



## Théorème, Caldero-Keller

$X_?$  induit une bijection

$$\{\text{rigides indécomposables dans } \mathcal{C}_Q\} \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(Q).$$

De plus, l'application

$$\begin{cases} \{\text{objets rigides maximaux dans } \mathcal{C}_Q\} & \xrightarrow{\sim} \{\text{amas dans } \mathcal{A}(Q)\} \\ T = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i & \mapsto \{X_{T_i} : i \in Q_0\} \end{cases}$$

est une bijection.

## Corollaire

$X_?$  induit une bijection

$$\{\text{objets rigides dans } \mathcal{C}_Q\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Q).$$

## Corollaire

den induit une bijection

$$\text{Cl}(Q) \xrightarrow{\sim} \Phi_{>0}^{\text{re,Sc}}(Q) \sqcup (-\Pi(Q))$$

## Théorème, CK

Soient  $M, N$  des objets indécomposables dans  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) = 1$ . Alors

$$X_M X_N = X_B + X_{B'}$$

où  $B$  et  $B'$  sont les uniques objets tels qu'il existe des triangles non-scindés

$$M \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow M[1],$$

$$N \longrightarrow B' \longrightarrow M \longrightarrow N[1]$$

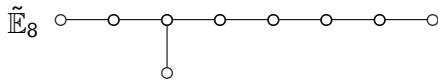
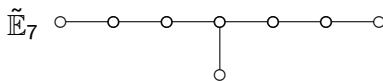
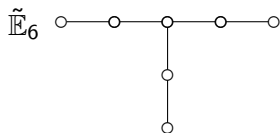
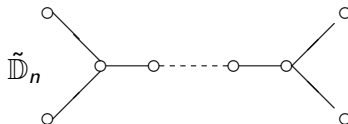
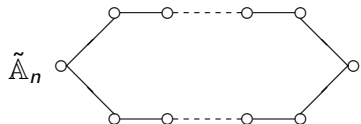
dans  $\mathcal{C}_Q$ .

# Plan

- 1 Algèbres amassées et catégories amassées
- 2 Algèbres amassées affines**
- 3 Polynômes de Chebyshev généralisés
- 4 Variables génériques
- 5 Directions futures

- Théorème de classification fini-docile-sauvage,
- les carquois affines sont minimaux parmi les carquois de représentation infinie,
- leur théorie des représentations est bien connue.

# Diagrammes affines simplement lacés



## Définition

Un carquois  $Q$  est dit affine si il est acyclique et si son graphe non-orienté sous-jacent est dans la liste précédente.

## Définition

Une algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  est dit *affine* si  $Q$  est un carquois affine.

$$\Phi_{>0}(Q) = \Phi_{>0}^{\text{re}}(Q) \sqcup \mathbb{N}^* \delta$$

$$\Phi_{>0}^{\text{Sc}}(Q) = \Phi_{>0}^{\text{re,Sc}}(Q) \sqcup \{\delta\}$$

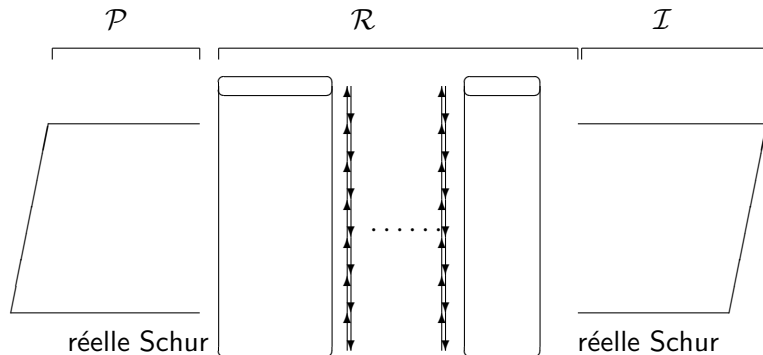
## Théorème de Kac

Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors

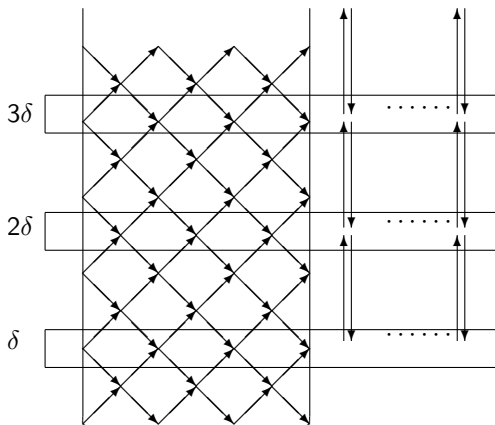
- $\exists M$  indécomposable dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  ssi  $\mathbf{d} \in \Phi_{>0}(Q)$  ;
- $\exists ! M$  indécomposable dans  $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$  ssi  $\mathbf{d} \in \Phi_{>0}^{\text{re}}(Q)$  ;
- Il existe une famille à un paramètre de représentations indécomposables dans  $\text{rep}(Q, n\delta)$  pour tout  $n \geq 1$ .



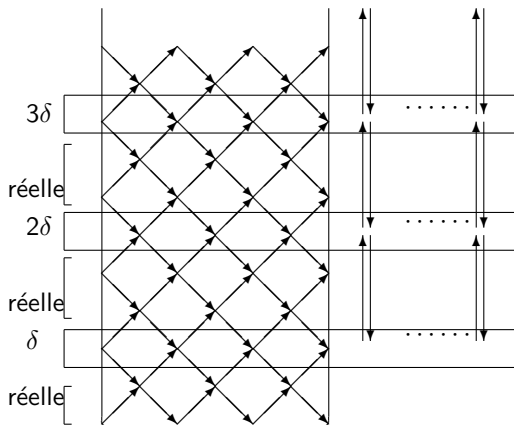
# Le carquois d'Auslander-Reiten de $kQ$ -mod



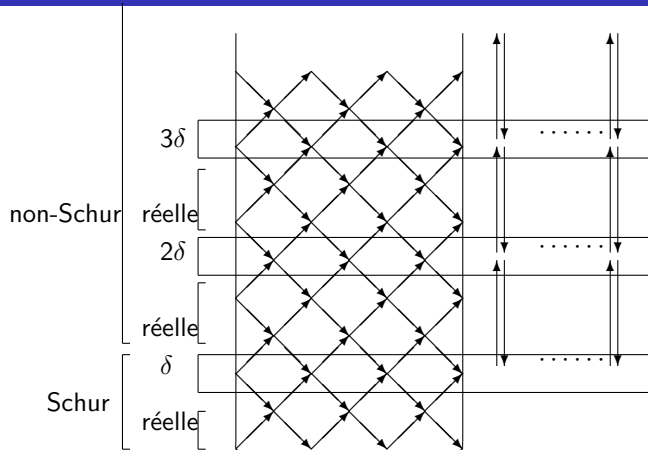
# Tubes dans $\Gamma(kQ)$



# Tubes dans $\Gamma(kQ)$



# Tubes dans $\Gamma(kQ)$



- 1 Algèbres amassées et catégories amassées
- 2 Algèbres amassées affines
- 3 Polynômes de Chebyshev généralisés
- 4 Variables génériques
- 5 Directions futures

- **Problème** : Comprendre  $X_7$  sur les composantes régulières.
- **Stratégie** : Utiliser la structure combinatoire de ces composantes pour obtenir une description *combinatoire* du comportement de  $X_7$ .

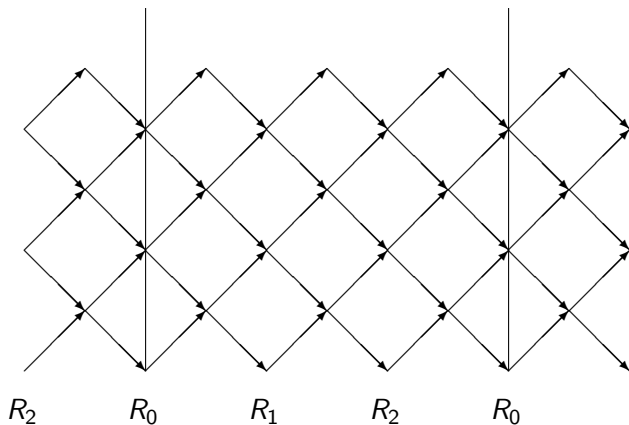
Soit  $x_i, i \geq 1$  des indéterminées sur  $\mathbb{Z}$ .

## Définition

Le  $n$ -ème polynôme de Chebyshev généralisé  $P_n$  est donné par

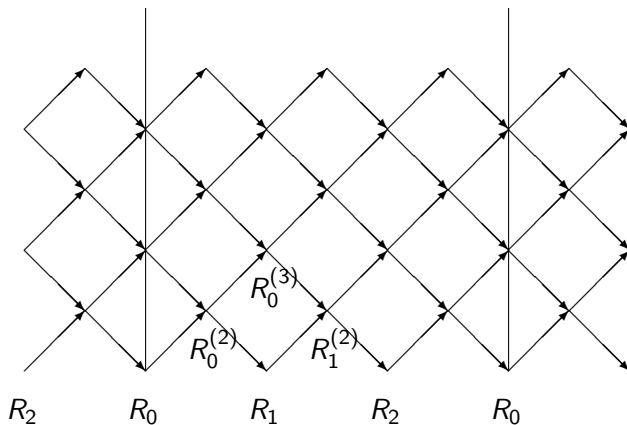
$$P_n(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{bmatrix} x_n & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

# Un tube

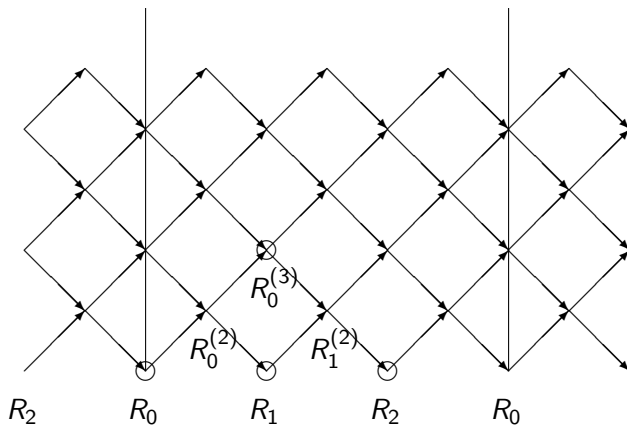




# Un tube

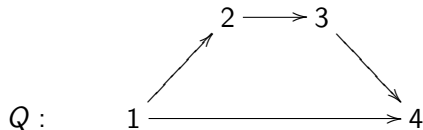


# Un tube



# Exemple dans le cas $\tilde{A}_{3,1}$

Soit  $Q$  le carquois affine de type  $\tilde{A}_{3,1}$ .



$\Gamma(kQ)$  contient un unique tube exceptionnel  $\mathcal{T}_0$  et  $\text{rg}(\mathcal{T}_0) = 3$ .

On note  $E_0, E_1, E_2$  les quasi-simples de  $\mathcal{T}_0$ .

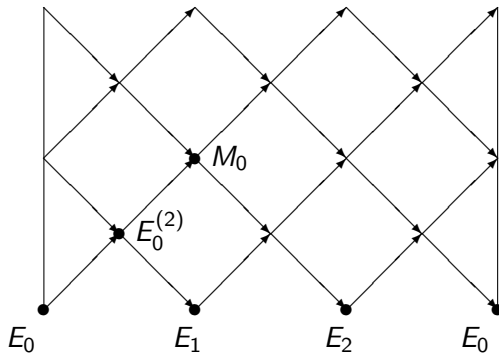
# Exemple : Quasi-simples du tube exceptionnel de $\tilde{A}_{3,1}$

$$E_0 : \begin{array}{ccccc} & & 0 & \longrightarrow & k \\ & \nearrow & & & \searrow 0 \\ 0 & & & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$E_1 : \begin{array}{ccccc} & & k & \xrightarrow{0} & 0 \\ & \nearrow & & & \searrow \\ 0 & & & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$E_2 : \begin{array}{ccccc} & & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & \nearrow 0 & & & \searrow \\ k & & & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

# Le tube exceptionnel de $\tilde{A}_{3,1}$



$$x_0 = X_{E_0} = \frac{u_2 + u_4}{u_3}, \quad x_1 = X_{E_1} = \frac{u_1 + u_3}{u_2},$$
$$x_2 = X_{E_2} = \frac{1 + u_1 u_3 + u_2 u_4}{u_1 u_4}.$$

$$x_0 = X_{E_0} = \frac{u_2 + u_4}{u_3}, \quad x_1 = X_{E_1} = \frac{u_1 + u_3}{u_2},$$

$$x_2 = X_{E_2} = \frac{1 + u_1 u_3 + u_2 u_4}{u_1 u_4}.$$

$$X_{E_0^{(2)}} = \frac{u_1 u_2 + u_1 u_4 + u_3 u_4}{u_2 u_3}$$

# Variables dans le tube exceptionnel de $\tilde{A}_{3,1}$

$$x_0 = X_{E_0} = \frac{u_2 + u_4}{u_3}, \quad x_1 = X_{E_1} = \frac{u_1 + u_3}{u_2},$$

$$x_2 = X_{E_2} = \frac{1 + u_1 u_3 + u_2 u_4}{u_1 u_4}.$$

$$X_{E_0^{(2)}} = \frac{u_1 u_2 + u_1 u_4 + u_3 u_4}{u_2 u_3}$$

$$X_{M_0} = \frac{u_1^2 u_3 u_4 + u_1^2 u_2 u_3 + u_1 u_3^2 u_4 + u_1 u_4 + u_1 u_2 + u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}$$



- 1 Algèbres amassées et catégories amassées
- 2 Algèbres amassées affines
- 3 Polynômes de Chebyshev généralisés
- 4 Variables génériques
- 5 Directions futures

- « **Généralisation** » des monômes d'amas,
- **Analogue** à la base semi-canonique duale.

## Lemme, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ . Alors il existe un ouvert dense  $U_{\mathbf{d}} \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$  tel que  $X_{\gamma}$  est constante sur  $U_{\mathbf{d}}$ .  
On note  $X_{\mathbf{d}}$  la valeur de  $X_{\gamma}$  sur cet ouvert.

## Definition

Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ . On pose

$$X_{\mathbf{d}} = X_{[\mathbf{d}]_+} \prod_{d_i < 0} u_i^{-d_i}$$

la *variable générique de dimension  $\mathbf{d}$* .

$$\mathcal{B}'(Q) = \left\{ X_{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0} \right\}$$

## Proposition, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois acyclique. Alors

$$\mathcal{M}(Q) \subset \mathcal{B}'(Q).$$

De plus, si  $Q$  est Dynkin, alors

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{B}'(Q).$$

## Proposition, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{d}_n$  sa décomposition canonique. Alors

$$X_{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^n X_{\mathbf{d}_i}.$$

Il suffit donc de calculer  $X_{\mathbf{d}}$  pour  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc}}$ .

## Proposition, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine et  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc}}(Q)$ .

- Si  $\mathbf{d} \in \Phi^{\text{Sc, re}}(Q)$ , alors  $X_{\mathbf{d}} \in \mathcal{M}(Q)$ ;
- Sinon,  $\mathbf{d} = \delta$  et  $X_{\delta} = X_{M_{\lambda}}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_0^1$ .

## Corollaire

Soit  $Q$  un carquois affine. Alors

$$B'(Q) = \mathcal{M}(Q) \sqcup \{X_{\delta}^n X_E : n \geq 1, E \in \mathcal{E}_R\}$$

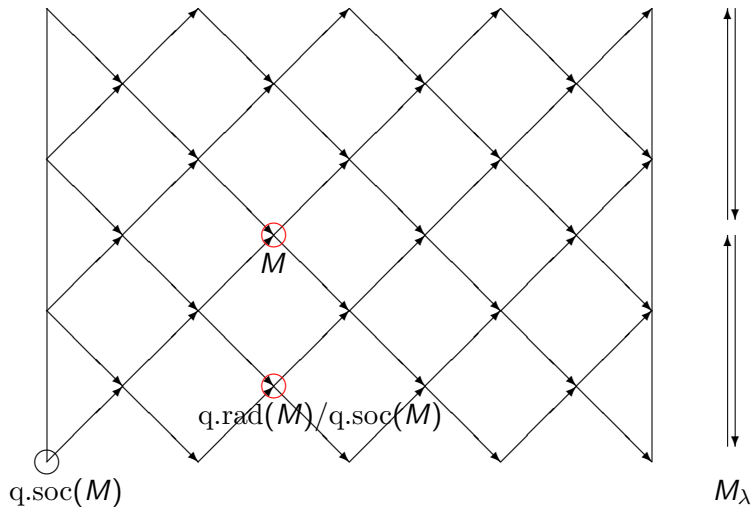
## Définition

Soit  $Q$  un carquois affine, on dit que  $Q$  *satisfait la propriété de différence* si pour tous  $M, M_\lambda$  indécomposables dans  $\text{rep}(Q, \delta)$  appartenant respectivement à un tube exceptionnel et à un tube homogène, on a :

$$X_{M_\lambda} = X_M - X_{\text{q.rad}M/\text{q.soc}M}.$$



# La propriété de différence



## Théorème, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors  $Q$  satisfait la propriété de différence.

## Conjecture

Tout carquois affine satisfait la propriété de différence.

## Lemme, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence. Alors

$$\mathbb{Z}[X_M : M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_Q)] = \mathcal{A}(Q).$$

## Corollaire, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine satisfaisant la propriété de différence. Alors

$$\mathcal{B}'(Q) \subset \mathcal{A}(Q).$$

## Théorème, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine tel que tous les carquois équivalents sous réflexion à  $Q$  satisfont la propriété de différence. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .

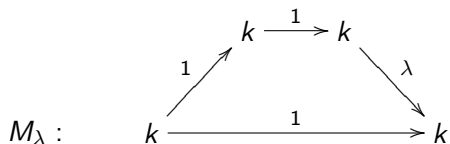
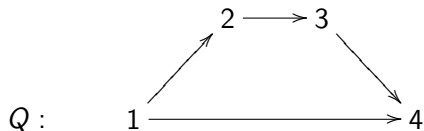
## Corollaire, D. 2008

Soit  $Q$  un carquois affine de type  $\tilde{A}$ . Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .

## Conjecture

Soit  $Q$  un carquois affine. Alors  $\mathcal{B}'(Q)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base dans  $\mathcal{A}(Q)$ .

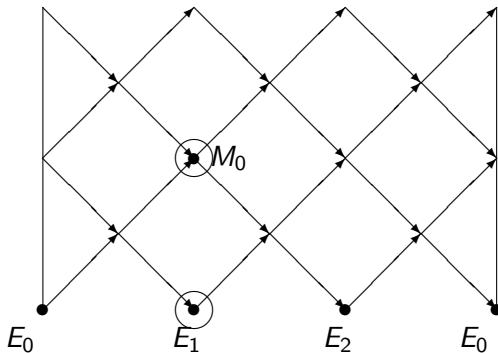
# Représentations de $\text{rep}(Q, \delta)$ pour $\tilde{\mathbb{A}}_{3,1}$



Si  $\lambda \neq 0$ ,  $M_\lambda$  est quasi-simple dans un tube homogène.  
 $M_0$  est dans  $\mathcal{T}_0$  et

$$\text{q.soc}M_0 \simeq E_0, \quad \text{q.rad}M_0 \simeq E_0^{(2)}.$$

# Le tube exceptionnel de $\tilde{A}_{3,1}$



# La propriété de différence pour $\tilde{A}_{3,1}$

<b>e</b>	0	[0001]	[0010]	[0110]	[0011]	[0111]	[1111]
$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_0)$	0	$S_4$	$E_0$	$E_0^{(2)}$	$E_0 \oplus S_4$	$E_0^{(2)} \oplus S_4$	$M_0$
$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_0))$	1	1	1	1	1	1	1
$\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda)$	0	$S_4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$P_3$	$P_2$	$M_\lambda$
$\chi(\text{Gr}_{\mathbf{e}}(M_\lambda))$	1	1	0	0	1	1	1

# La propriété de différence pour $\tilde{A}_{3,1}$

<b>e</b>	0	[0001]	[0010]	[0110]	[0011]	[0111]	[1111]
$\text{Gr}_e(M_0)$	0	$S_4$	$E_0$	$E_0^{(2)}$	$E_0 \oplus S_4$	$E_0^{(2)} \oplus S_4$	$M_0$
$\chi(\text{Gr}_e(M_0))$	1	1	1	1	1	1	1
$\text{Gr}_e(M_\lambda)$	0	$S_4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$P_3$	$P_2$	$M_\lambda$
$\chi(\text{Gr}_e(M_\lambda))$	1	1	0	0	1	1	1

$$X_{M_0} = \frac{u_1^2 u_3 u_4 + u_1^2 u_2 u_3 + u_1 u_3^2 u_4 + u_1 u_4 + u_1 u_2 + u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}$$

$$X_{M_\lambda} = \frac{u_1^2 u_2 u_3 + u_1 u_2 + u_1 u_4 + u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4^2}{u_1 u_2 u_3 u_4}$$

$$X_{M_0} = X_{M_\lambda} + X_{E_1}$$



# La base semi-canonique de $\mathcal{A}(\tilde{\mathbb{A}}_{3,1})$

$$\begin{aligned}x_0 &= X_{E_0}, x_1 = X_{E_1}, x_2 = X_{E_2}, \\y_0 &= X_{E_0^{(2)}}, \quad y_1 = X_{E_1^{(2)}}, \quad y_2 = X_{E_2^{(2)}}, \\z &= X_{M_\lambda}\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathcal{B}'(Q) = \mathcal{M}(Q) \sqcup \{z^n x_i^r y_i^s : n > 0, r, s \geq 0, i = 0, 1, 2\}$$

est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}(Q)$ .

- 1 Algèbres amassées et catégories amassées
- 2 Algèbres amassées affines
- 3 Polynômes de Chebyshev généralisés
- 4 Variables génériques
- 5 Directions futures

- Bases canoniques pour les carquois affines,
- Adaption aux coefficients principaux,
- Bases génériques pour les carquois sauvages,
- Liens avec la base semi-canonique duale.