

# Influence des conditions de bord dans les réseaux d'automates booléens à seuil et application à la biologie

Sylvain Sené

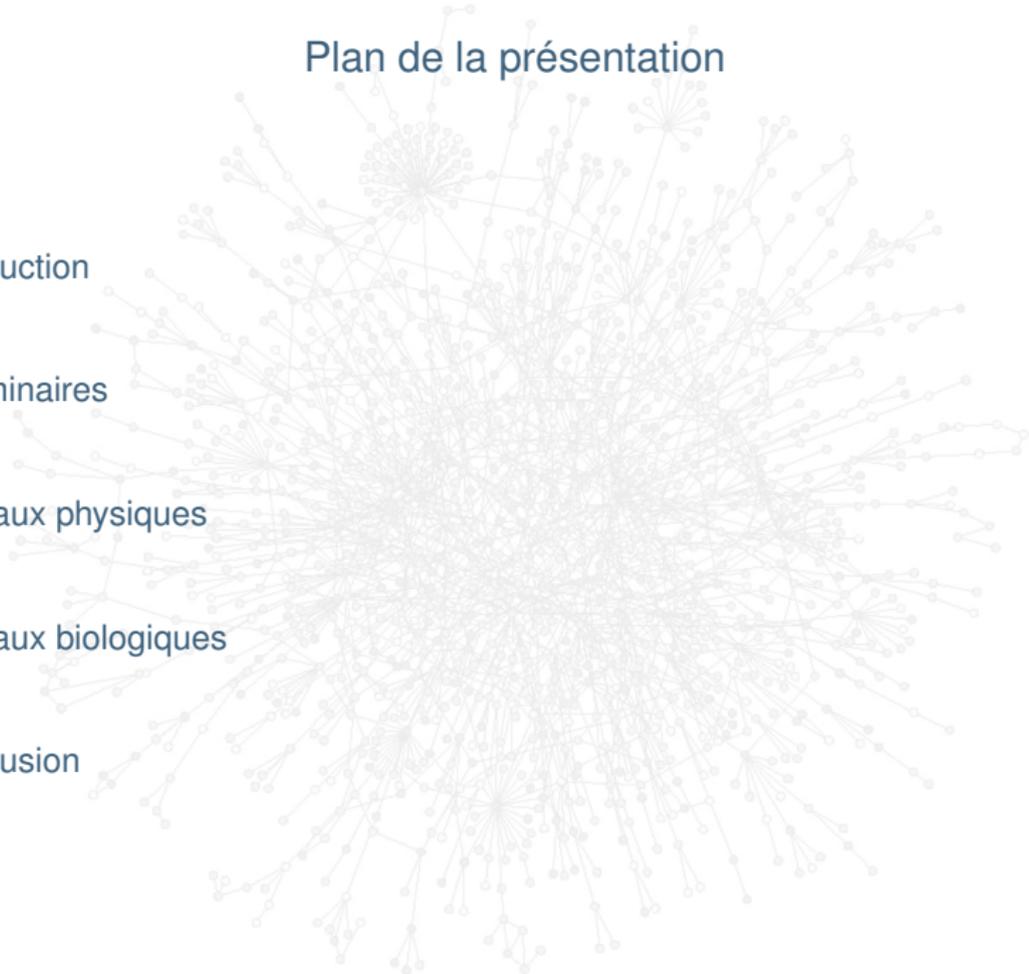
Directeurs de thèse  
Jacques Demongeot et Michel Morvan

15 octobre 2008



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires
- 3 Réseaux physiques
- 4 Réseaux biologiques
- 5 Conclusion

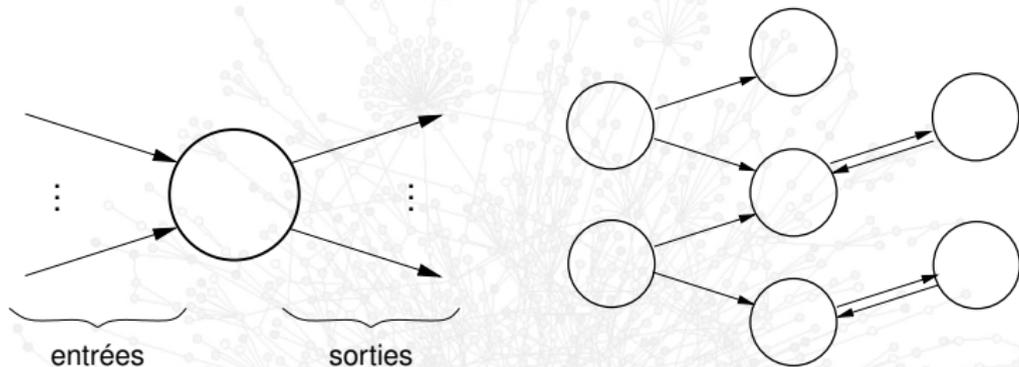


# Plan de la présentation

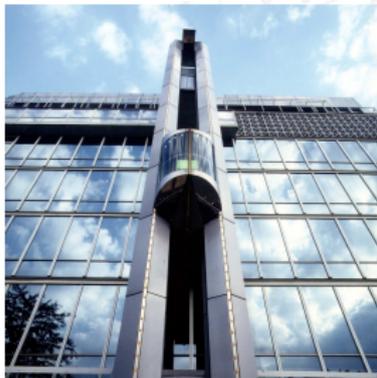
- 1 Introduction
- 2 Préliminaires
- 3 Réseaux physiques
- 4 Réseaux biologiques
- 5 Conclusion



# Automates et réseaux d'automates



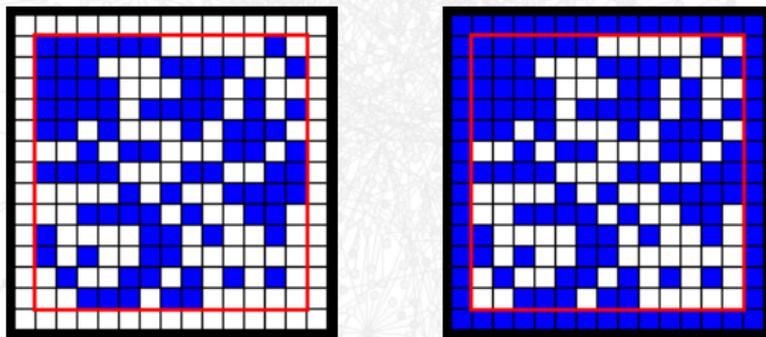
Quelques exemples d'automates dans la vie quotidienne



# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

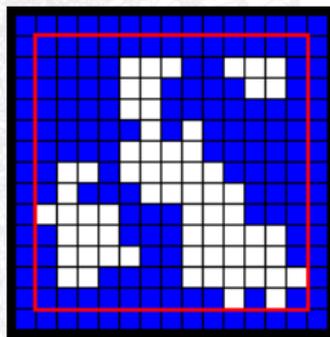
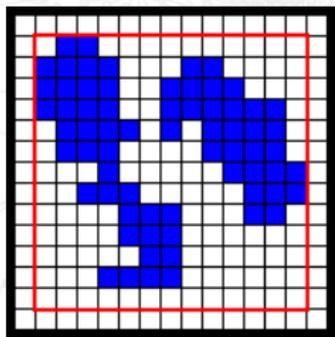


$t = 0$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

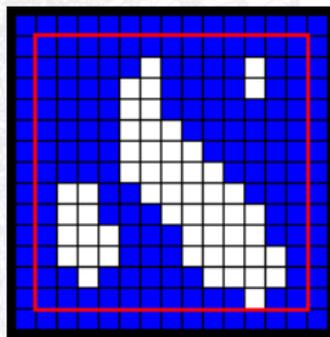
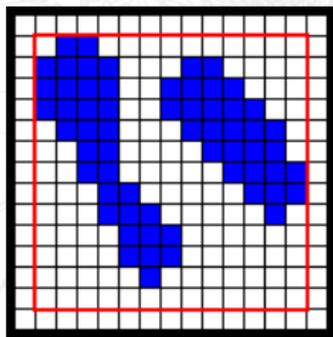


$t = 1$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

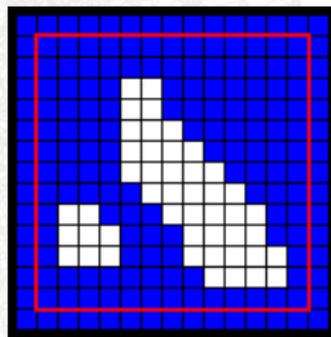
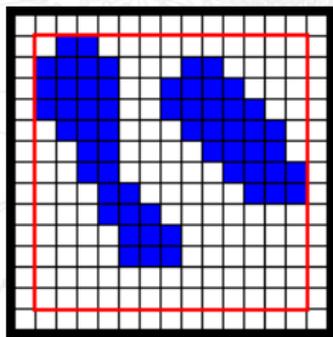


$t = 2$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

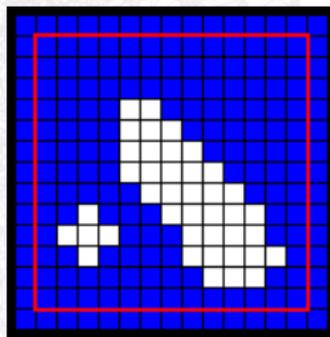
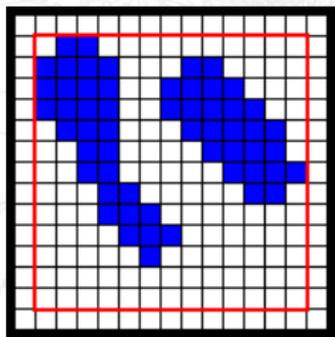


$t = 3$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

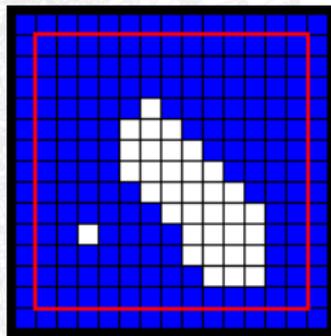
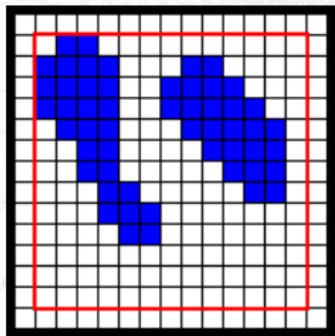


$t = 4$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

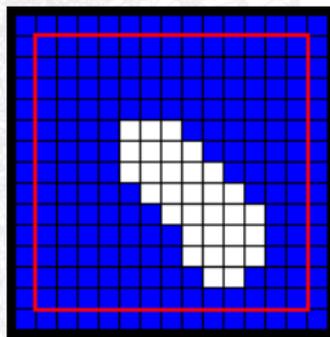
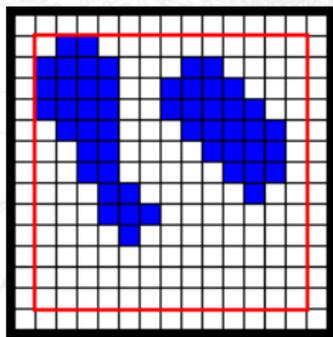


$t = 5$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

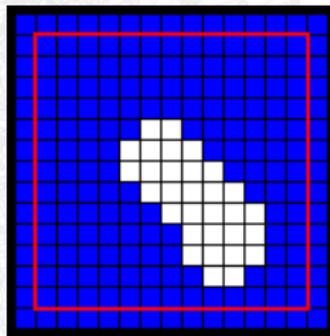
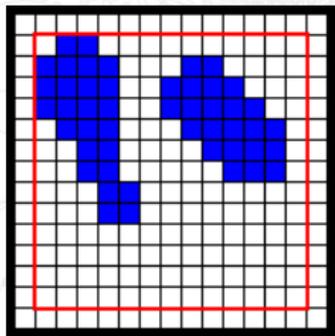


$t = 6$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

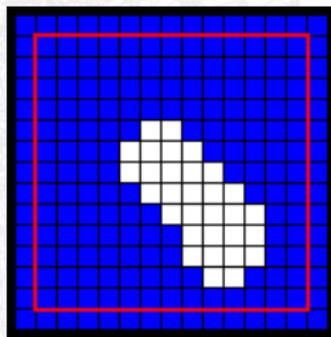
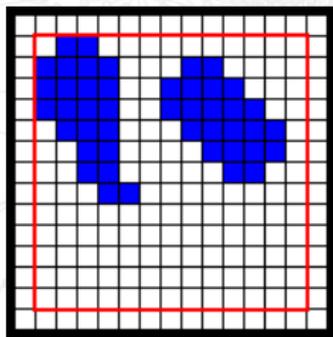


$t = 7$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

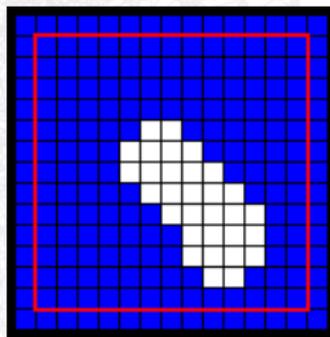
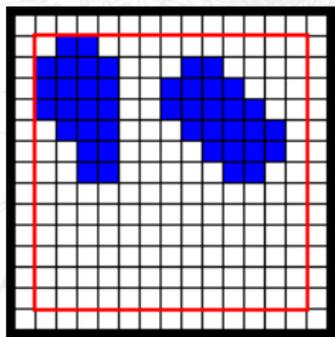


$t = 8$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

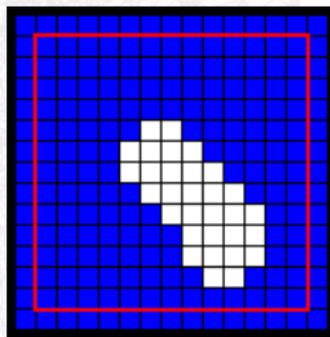
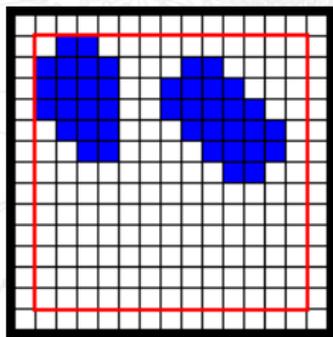


$t = 9$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

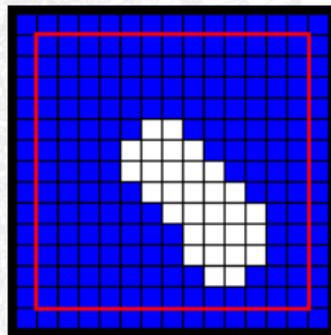
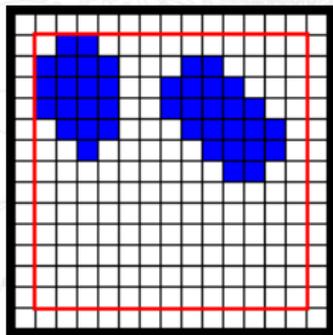


$t = 10$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

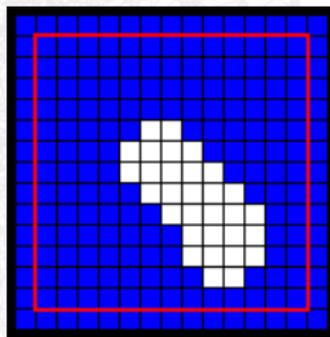
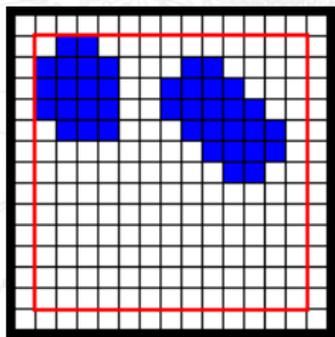


$t = 11$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

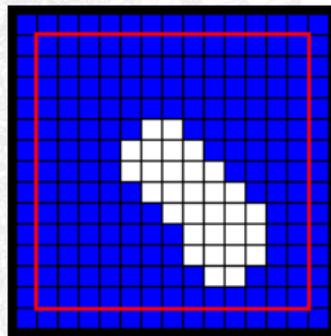
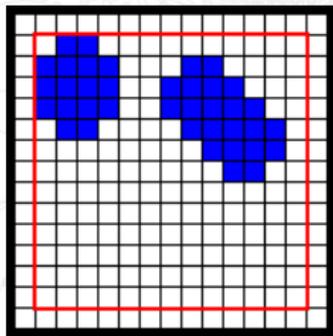


$t = 12$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"

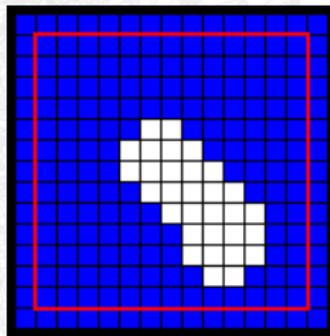
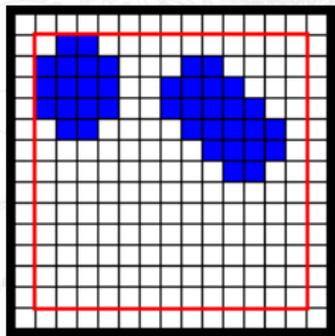


$t = 13$

# Bords dans les automates cellulaires

Automates en interaction placés sur une grille régulière mettant à jour leur état au cours du temps en fonction d'une règle commune

Exemple  
L'automate cellulaire 2D "MAJORITÉ"



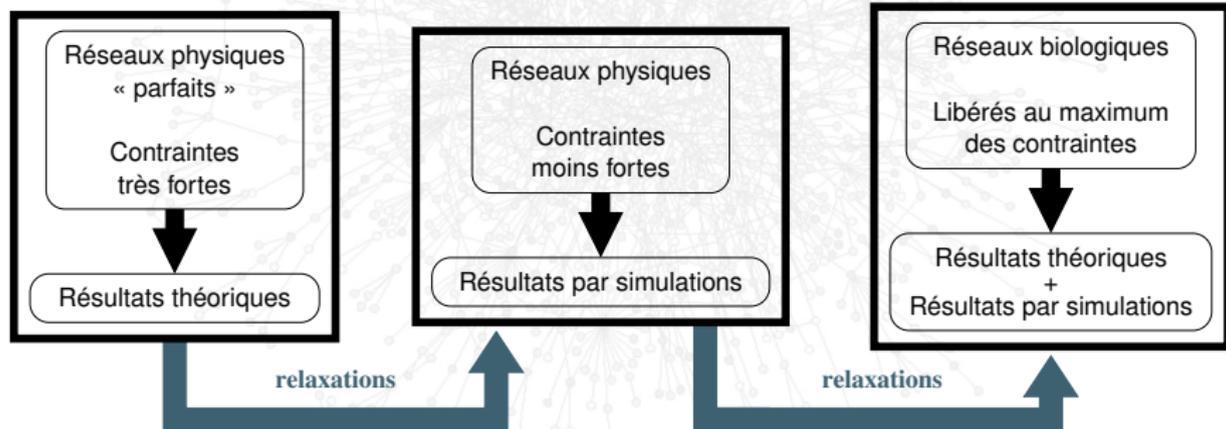
$t = 14$

# Objectif : avancer vers la réalité biologique

## Idée générale

➔ Réseaux d'automates booléens : candidats pertinents à la modélisation de certains mécanismes de régulation biologique

Comprendre l'influence des conditions de bord dans des réseaux d'automates de plus en plus proches de la réalité biologique



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires**
- 3 Réseaux physiques
- 4 Réseaux biologiques
- 5 Conclusion



# Systèmes dynamiques

## Définition

Un système dynamique est un système régi par des interactions entre éléments ayant lieu au cours du temps. Formellement, il s'agit d'un triplet  $(\mathbb{X}, T, f)$  où :

- $\mathbb{X}$  est l'espace des configurations,
- $T$  est l'espace du temps,
- $F$  est une fonction  $F : \mathbb{X} \times T \mapsto \mathbb{X}$ , appelée fonction de transition globale, qui satisfait
  - $\forall x \in \mathbb{X}, F(x, 0) = x$
  - $\forall x \in \mathbb{X}, \forall t_1, t_2 \in T, F(F(x, t_1), t_2) = F(x, t_1 + t_2)$

# Attracteurs et bassins d'attraction

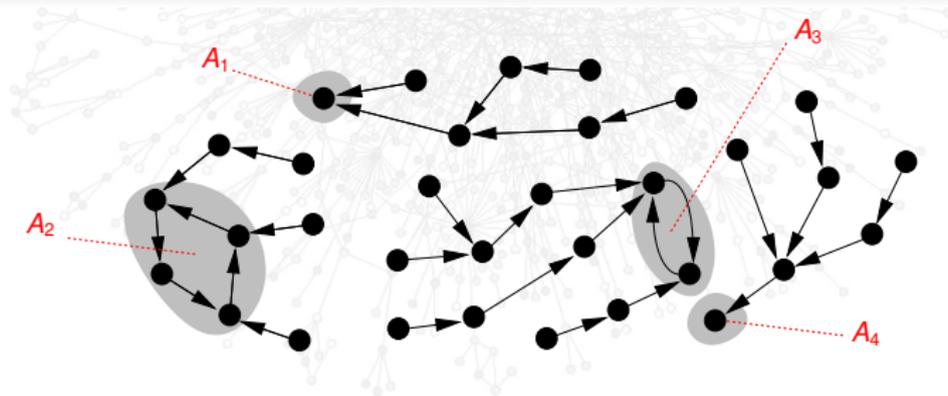
## Contexte : Systèmes dynamiques discrets

### Définition

*L'ensemble des points fixes et des cycles limites d'un système est appelé l'ensemble de ses attracteurs.*

### Définition

*L'ensemble des configurations dont l'évolution amène à un même attracteur  $A$  est appelé le bassin d'attraction de  $A$ .*



# Attracteurs et bassins d'attraction

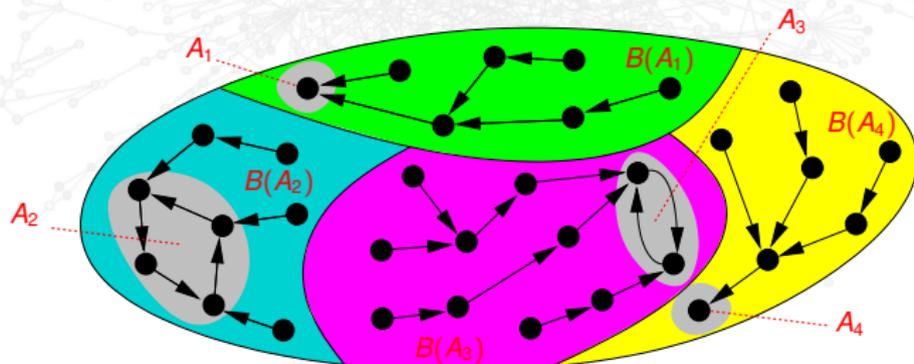
## Contexte : Systèmes dynamiques discrets

### Définition

*L'ensemble des points fixes et des cycles limites d'un système est appelé l'ensemble de ses attracteurs.*

### Définition

*L'ensemble des configurations dont l'évolution amène à un même attracteur  $A$  est appelé le bassin d'attraction de  $A$ .*



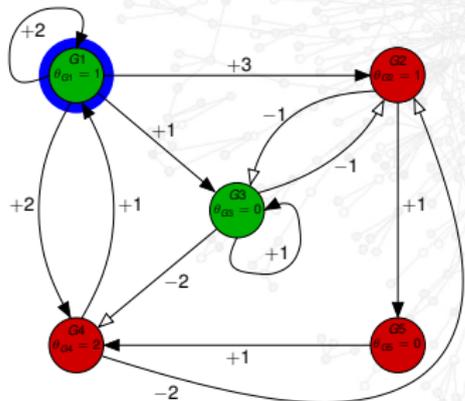
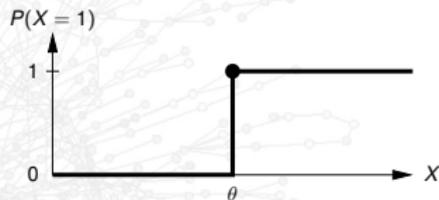
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

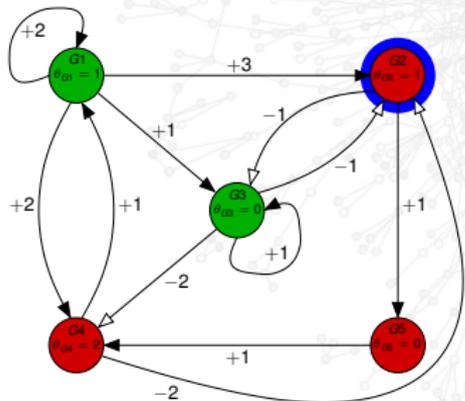
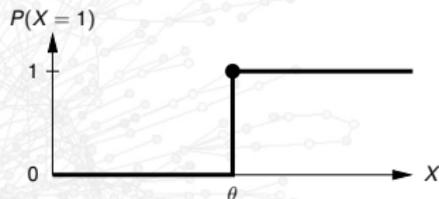
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

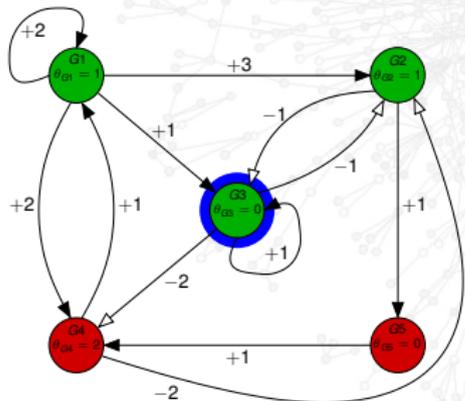
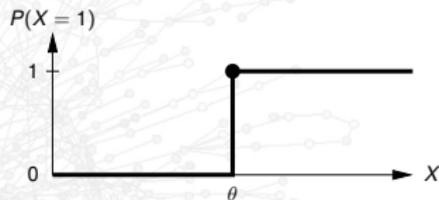
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

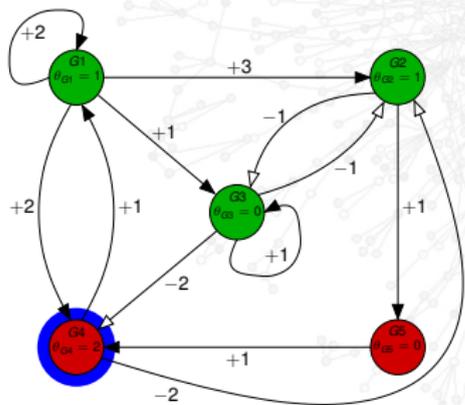
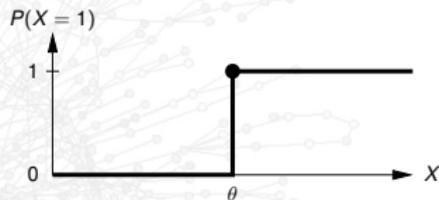
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

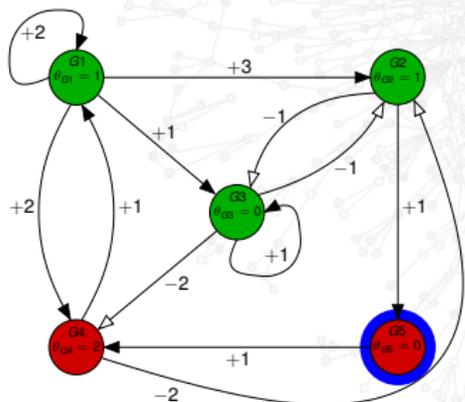
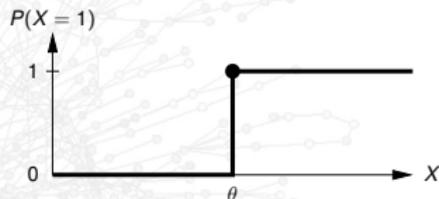
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

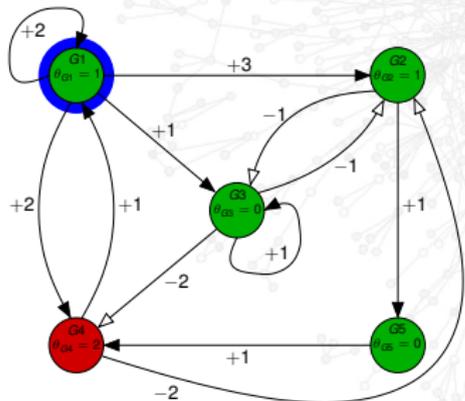
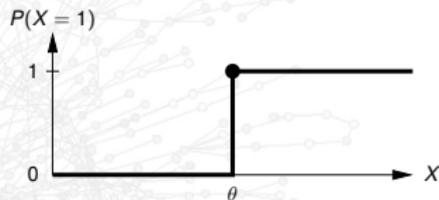
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$W = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

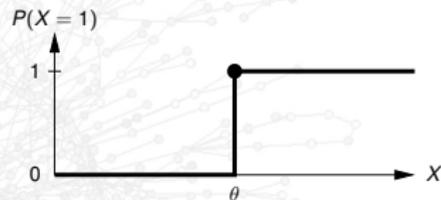
# Réseaux d'automates booléens à seuil

McCulloch & Pitts, Journal of Mathematical Biology, 1943

Hopfield, PNAS, 1982

## Fonction de transition locale déterministe

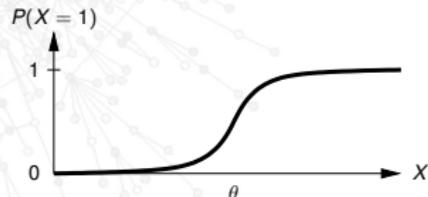
$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



## Fonction de transition locale stochastique

$$P(x_i(t+1) = \alpha \mid x_j(t), \forall j \in \mathcal{V}_i)$$

$$\frac{e^{(\alpha \cdot \sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i) / T}}{1 + e^{(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} w_{ij} \cdot x_j(t) - \theta_i) / T}}$$



# Centre et bord d'un réseau

## Définition

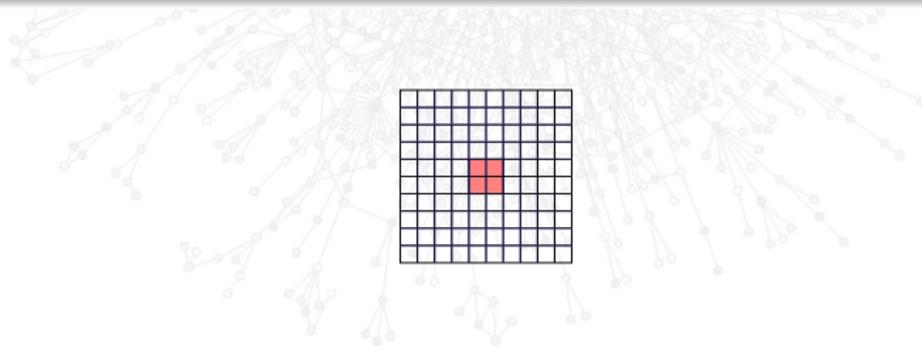
L'excentricité  $\epsilon(v)$  d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est la distance maximale entre  $v$  et tous les autres sommets de  $G$ .

## Définition

Le centre d'un réseau d'automates est l'ensemble des sommets d'excentricité minimale de son graphe d'interaction.

## Définition

Le bord d'un réseau d'automates est l'ensemble des sommets source de son graphe d'interaction.



# Centre et bord d'un réseau

## Définition

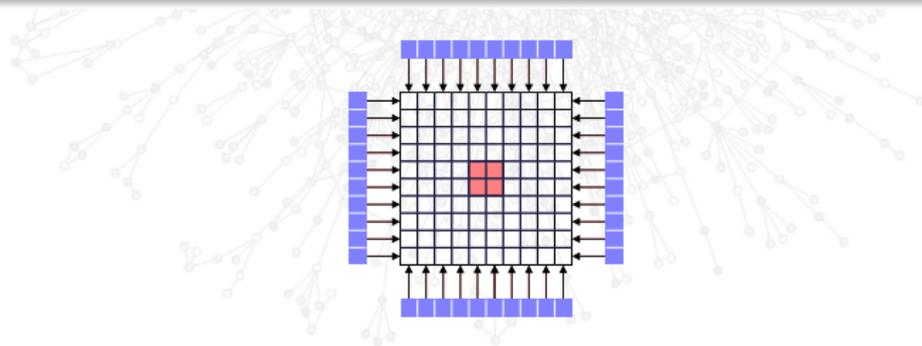
L'excentricité  $\epsilon(v)$  d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est la distance maximale entre  $v$  et tous les autres sommets de  $G$ .

## Définition

Le centre d'un réseau d'automates est l'ensemble des sommets d'excentricité minimale de son graphe d'interaction.

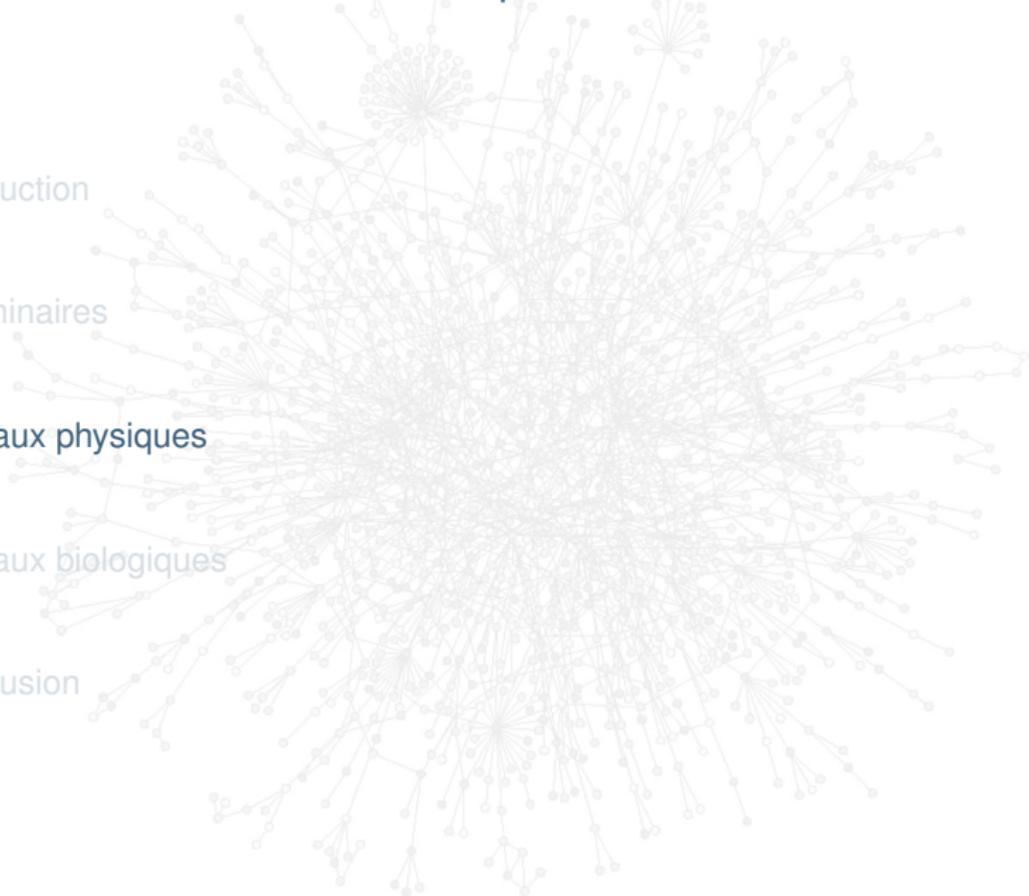
## Définition

Le bord d'un réseau d'automates est l'ensemble des sommets source de son graphe d'interaction.



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires
- 3 Réseaux physiques**
- 4 Réseaux biologiques
- 5 Conclusion



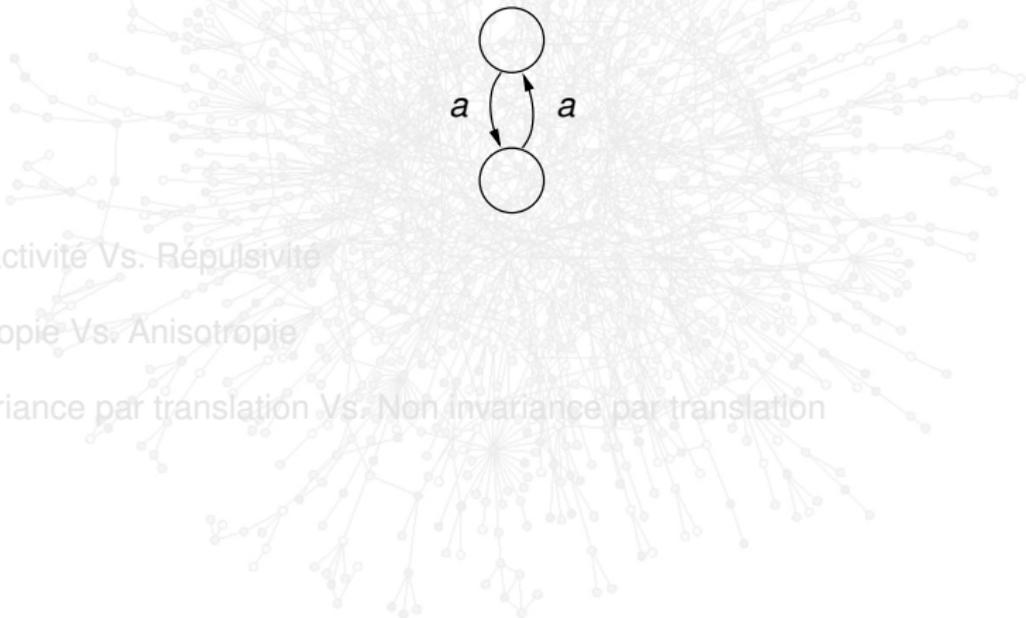
# Quelques définitions

- Voisinage d'un automate : ses plus proches voisins (N, S, E, O) + lui-même
- Symétrie
- Attractivité Vs. Répulsivité
- Isotropie Vs. Anisotropie
- Invariance par translation Vs. Non invariance par translation



# Quelques définitions

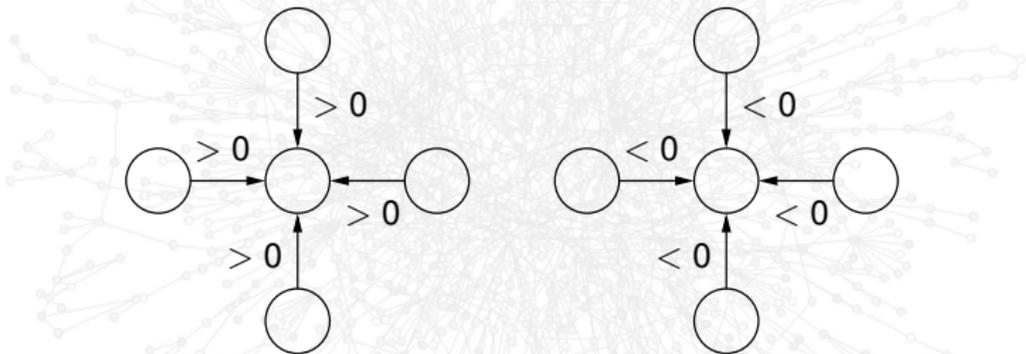
- Voisinage d'un automate : ses plus proches voisins (N, S, E, O) + lui-même
- Symétrie



- Attractivité Vs. Répulsivité
- Isotropie Vs. Anisotropie
- Invariance par translation Vs. Non invariance par translation

## Quelques définitions

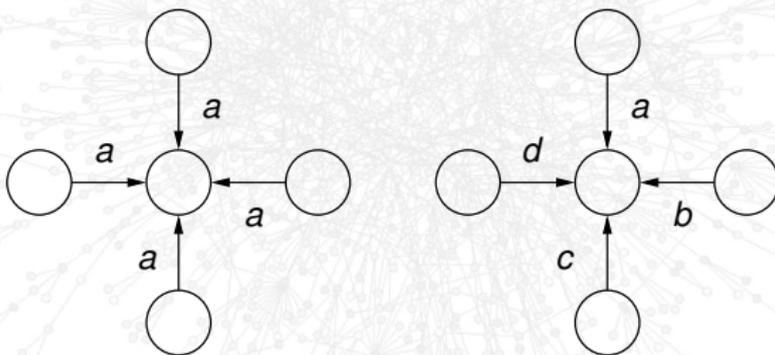
- Voisinage d'un automate : ses plus proches voisins (N, S, E, O) + lui-même
- Symétrie
- Attractivité Vs. Répulsivité



- Isotropie Vs. Anisotropie
- Invariance par translation Vs. Non invariance par translation

## Quelques définitions

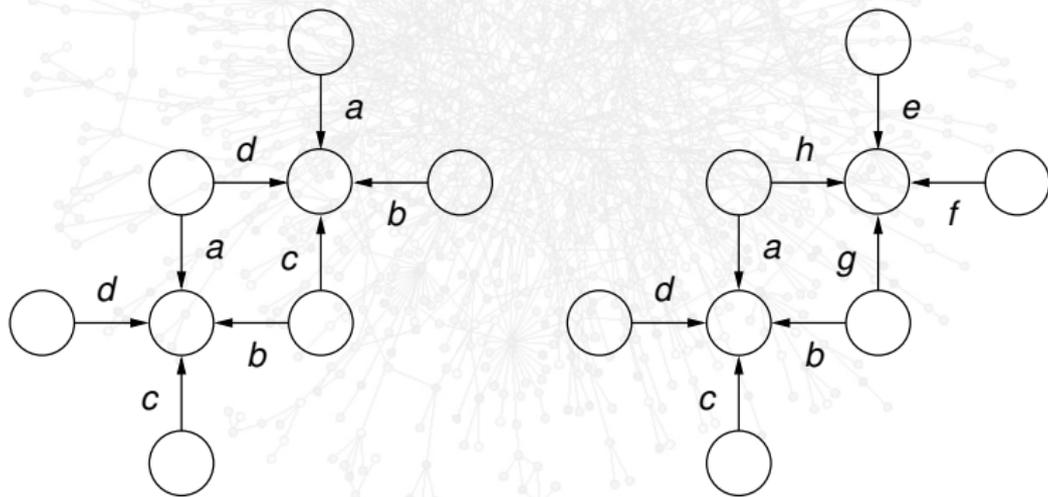
- Voisinage d'un automate : ses plus proches voisins (N, S, E, O) + lui-même
- Symétrie
- Attractivité Vs. Répulsivité
- Isotropie Vs. Anisotropie



- Invariance par translation Vs. Non invariance par translation

## Quelques définitions

- Voisinage d'un automate : ses plus proches voisins (N, S, E, O) + lui-même
- Symétrie
- Attractivité Vs. Répulsivité
- Isotropie Vs. Anisotropie
- Invariance par translation Vs. Non invariance par translation





# Mesure invariante



## Objectif

*Proposer une expression générale de la mesure invariante d'un réseau d'automates booléens à seuil en dynamique bloc-séquentielle*

Restriction au cas des réseaux *feed-forward*



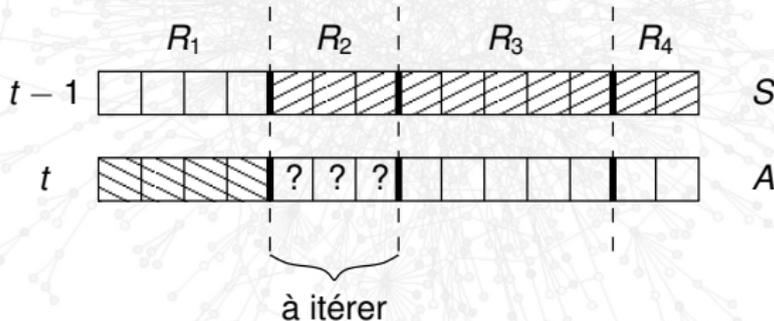
# Mesure invariante

## Objectif

Proposer une expression générale de la mesure invariante d'un réseau d'automates booléens à seuil en dynamique bloc-séquentielle

Restriction au cas des réseaux *feed-forward*

Cas général



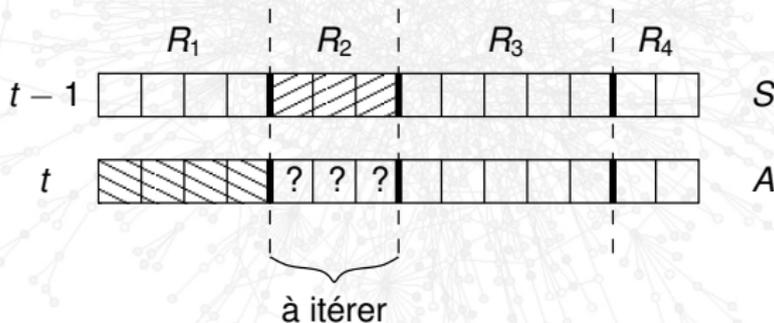
# Mesure invariante

## Objectif

Proposer une expression générale de la mesure invariante d'un réseau d'automates booléens à seuil en dynamique bloc-séquentielle

Restriction au cas des réseaux *feed-forward*

Cas *feed-forward*

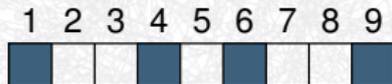


# Mesure invariante

## Objectif

*Proposer une expression générale de la mesure invariante d'un réseau d'automates booléens à seuil en dynamique bloc-séquentielle*

Notation ensembliste des configurations



Notation classique

$$x = (100101001)$$

Notation ensembliste

$$x = \{1, 4, 6, 9\}$$

# Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -eme bloc

$$\mu_i(A) \equiv \sum_{D \subset B} \mu_i(A \cup D \cup A^{*1}) \cdot \mathcal{M}_i(A \cup D \cup A^{*1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A \cup D \cup A^{*1})$
- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie
- Obtention de  $\mu_i(A) = \prod_{j=1}^m \mu_j(A) = \sum_{S \subset A} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

# Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -eme bloc

$$\mu_i(A) = \sum_{D \subset B} \mu_i(A \cup D \cup A^{*1}) \cdot \mathcal{M}_i(A \cup D \cup A^{*1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A \cup D \cup A^{*1})$
- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie
- Obtention de  $\mu_i(A) = \prod_{j=1}^m \mu_j(A) = \sum_{S \subset A} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

# Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -ème bloc

$$\mu_i(A) = \sum_{D \subset R_i} \mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}) \cdot \mathcal{M}_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1})$
- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie
- Obtention de  $\mu_i(A) = \prod_{i=1}^m \mu_i(A) = \sum_{S \subset A} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

# Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -ème bloc

$$\mu_i(A) = \sum_{D \subset R_i} \mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}) \cdot \mathcal{M}_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1})$

- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie

- Obtention de  $\mu_i(A) = \prod_{j=1}^m \mu_j(A) = \sum_{S \subset A} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

## Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -ème bloc

$$\mu_i(A) = \sum_{D \subset R_i} \mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}) \cdot \mathcal{M}_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1})$
- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie
- Obtention de  $\mu_i(A) = \prod_{i=1}^m \mu_i(A) = \sum_{S \subset A} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

## Idée générale

- Hypothèse : dynamique bloc-séquentielle dans un réseau symétrique  $R$  *feed-forward*



Invariance pour la markovienne globale et pour toutes les markoviennes locales aux blocs

- Recherche de  $\mu(A)$  pour une configuration quelconque  $A$
- Focalisation au niveau des blocs et écriture de la formule de définition générale de la mesure invariante locale au  $i$ -ème bloc

$$\mu_i(A) = \sum_{D \subset R_i} \mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}) \cdot \mathcal{M}_i(A_i \cup D \cup A^{i+1}, A)$$

- Proposition d'une formule pour  $\mu_i(A_i \cup D \cup A^{i+1})$
- Simplification grâce à l'hypothèse de symétrie
- Obtention de  $\mu(A) = \prod_{i=1}^m \mu_i(A) = \sum_{S \subset R} \mu(S) \cdot \mathcal{M}(S, A)$

# Modes d'itération et transitions de phase (1)

## Principe de transition de phase

 Soit  $R$  un réseau. On calcule 2 mesures invariantes : l'une,  $\mu_{B0}$ , quand on ajoute à  $R$  un bord  $B0$ , l'autre,  $\mu_{B1}$ , quand on affecte à  $R$  un bord  $B1$ .

## Définition

*Il y a transition de phase si les deux mesures invariantes  $\mu_{B0}$  et  $\mu_{B1}$  sont différentes.*

## Théorème

*Si une transition de phase due à l'influence des conditions de bord émerge du comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléens à seuil  $R$ , elle est observable en dynamique parallèle, séquentielle, et dans toutes les dynamiques blocs-séquentielles équivalentes à des dynamiques blocs-parallèles issues de subdivisions successives de  $R$  en blocs creux.*

## Modes d'itération et transitions de phase (1)

### Principe de transition de phase

 Soit  $R$  un réseau. On calcule 2 mesures invariantes : l'une,  $\mu_{B0}$ , quand on ajoute à  $R$  un bord  $B0$ , l'autre,  $\mu_{B1}$ , quand on affecte à  $R$  un bord  $B1$ .

### Définition

*Il y a transition de phase si les deux mesures invariantes  $\mu_{B0}$  et  $\mu_{B1}$  sont différentes.*

### Théorème

*Si une transition de phase due à l'influence des conditions de bord émerge du comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléens à seuil  $R$ , elle est observable en dynamique parallèle, séquentielle, et dans toutes les dynamiques blocs-séquentielles équivalentes à des dynamiques blocs-parallèles issues de subdivisions successives de  $R$  en blocs creux.*

## Modes d'itération et transitions de phase (2)

La probabilité stationnaire d'une configuration  $x$  peut s'exprimer comme :

$$\mu(x) = \frac{e^{E(x)}}{\sum_{y \in \mathcal{X}} e^{E(y)}} = \frac{e^{E(x)}}{Z}$$

### Définition

L'énergie libre de  $R$ , notée  $\psi(R)$ , est le logarithme de la fonction de partition.

### Idee générale de la preuve

➔ Trouver une relation de proportionalité entre  $\psi_{par}(R)$  et  $\psi_{seq}(R)$  telle que :

$$\psi_{par}(R) = \gamma \cdot \psi_{seq}(R)$$



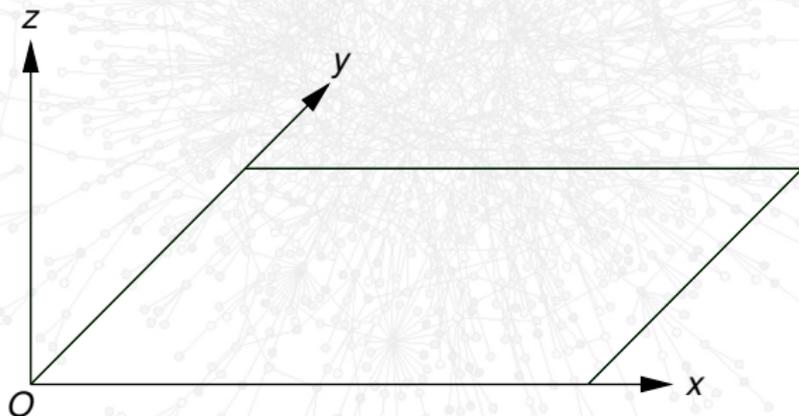
On ne change pas la relation d'égalité ou d'inégalité entre les mesures invariantes quand on passe d'un mode d'itération à un autre

# Vers l'observation de transitions de phase

## Objectif

*Contourner les difficultés d'obtenir des résultats théoriques sur des réseaux plus complexes*

- Représenter graphiquement les transitions de phase dues à l'influence des conditions de bords si elles existent



# Exploration des phénomènes de transition de phase en 2D

## Objectif

*Trouver comment mesurer concrètement des transitions de phase*

## Idée

- ➔ Une mesure invariante donne une indication sur la fréquence d'apparition des configurations à l'asymptotique.
- ➔ Elle donne donc une indication sur la fréquence d'activation des automates.

## Définition

*L'activité d'un automate d'un réseau  $R$  est le nombre de fois où cet automate est à l'état actif au cours de l'évolution de  $R$ .*

- ➔ On a une transition de phase si l'activité centrale d'un réseau soumis à des conditions de bord  $B0$  est différente de son activité centrale lorsqu'il est soumis à des conditions différentes  $B1$ .

# Réseaux attractifs homogènes

## Réseaux physiques "parfaits"

Diagramme de phase

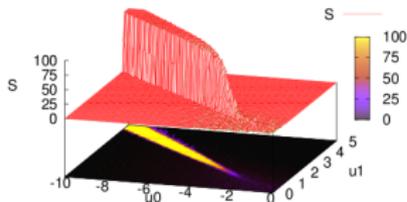

 $11 \times 11$ 

Diagramme de phase

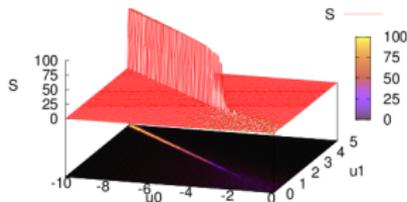
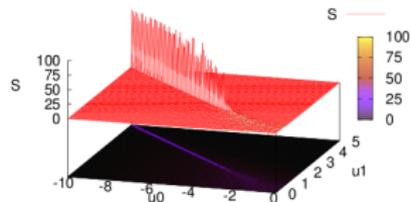

 $37 \times 37$ 

Diagramme de phase


 $131 \times 131$ 

## Réseaux physiques avec contrainte d'auto-interaction relâchée

Diagramme de phase

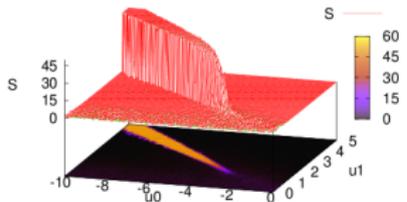

 $11 \times 11$ 

Diagramme de phase

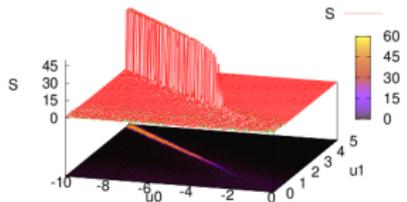
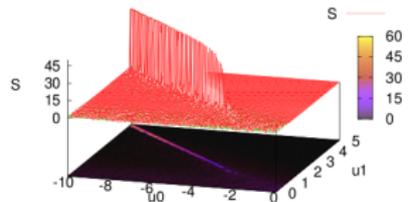

 $37 \times 37$ 

Diagramme de phase


 $131 \times 131$

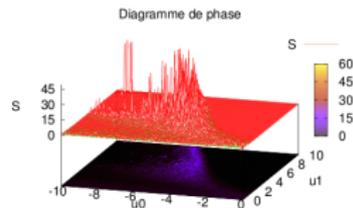
# Réseaux plus complexes

- Réseaux attractifs

Forme triangulaire des domaines de transition de phase



Influence plus importante des conditions de bord

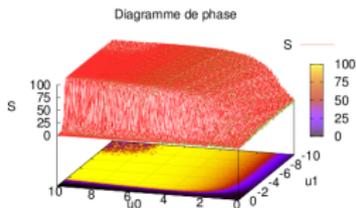


- Réseaux répulsifs

Forme “parabolique” des domaines de transition de phase  
 Variations de l’emplacement du domaine dans les réseaux physiques avec auto-interaction forcée

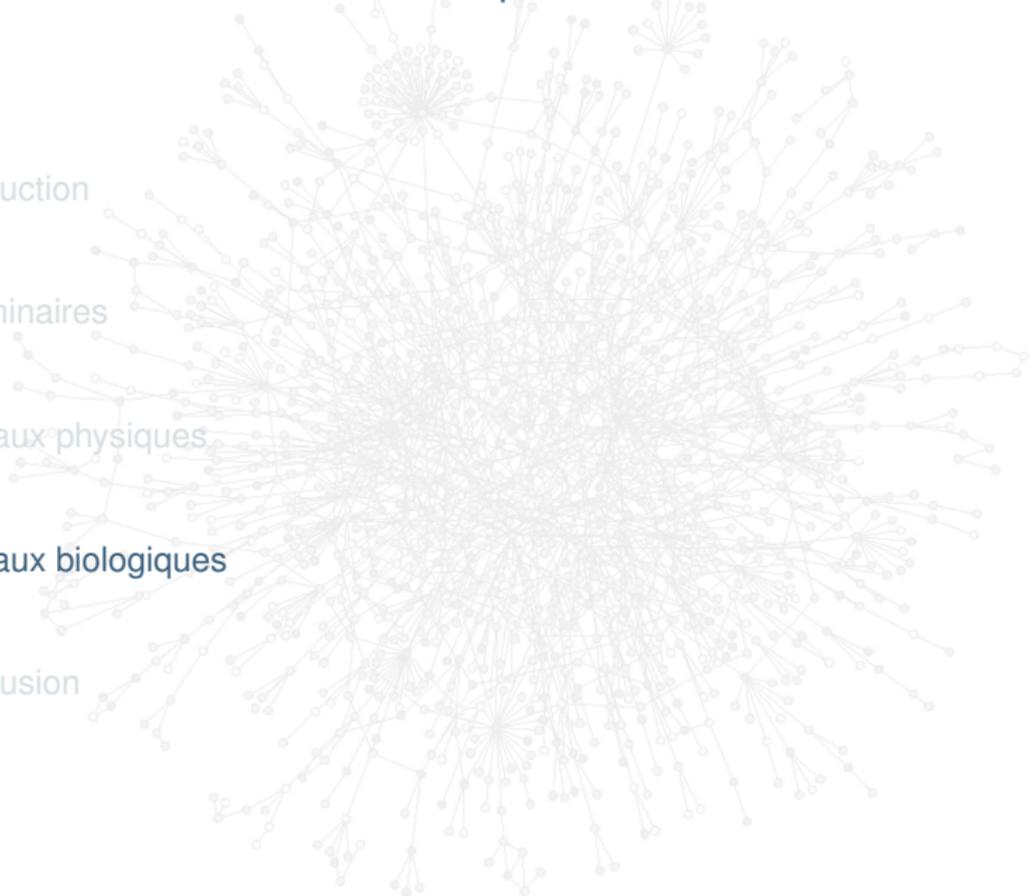


Réseaux avec condition d’auto-interaction relaxée plus sensibles à l’influence des conditions de bord mais moins sensibles à la relaxation des contraintes

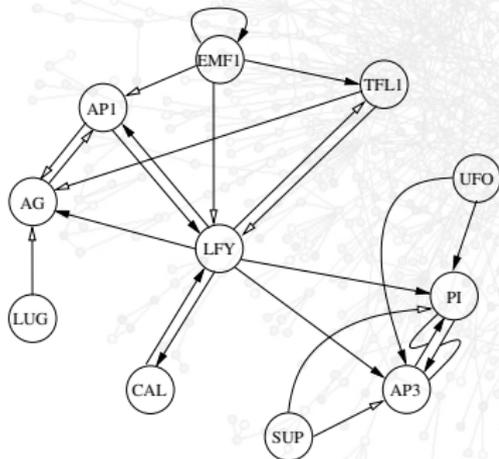
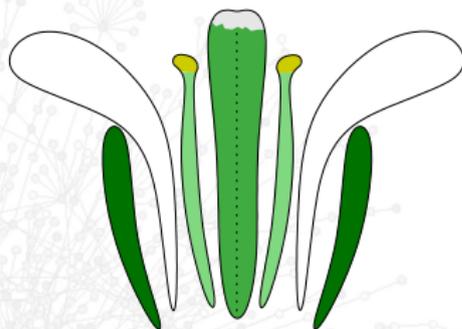


# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires
- 3 Réseaux physiques
- 4 Réseaux biologiques**
- 5 Conclusion



# Morphogenèse florale d'*Arabidopsis thaliana*



Attracteurs	Tissus cellulaires
Point fixe 1	Sépales
Point fixe 2	Pétales
Point fixe 3	Étamines
Point fixe 4	Carpelles
Point fixe 5	Inflorescence
Point fixe 6	Mutant
Cycle limite 1	—
⋮	⋮
Cycle limite 7	—

Mendoza & Alvarez-Buylla, Journal of Theoretical Biology, 1998

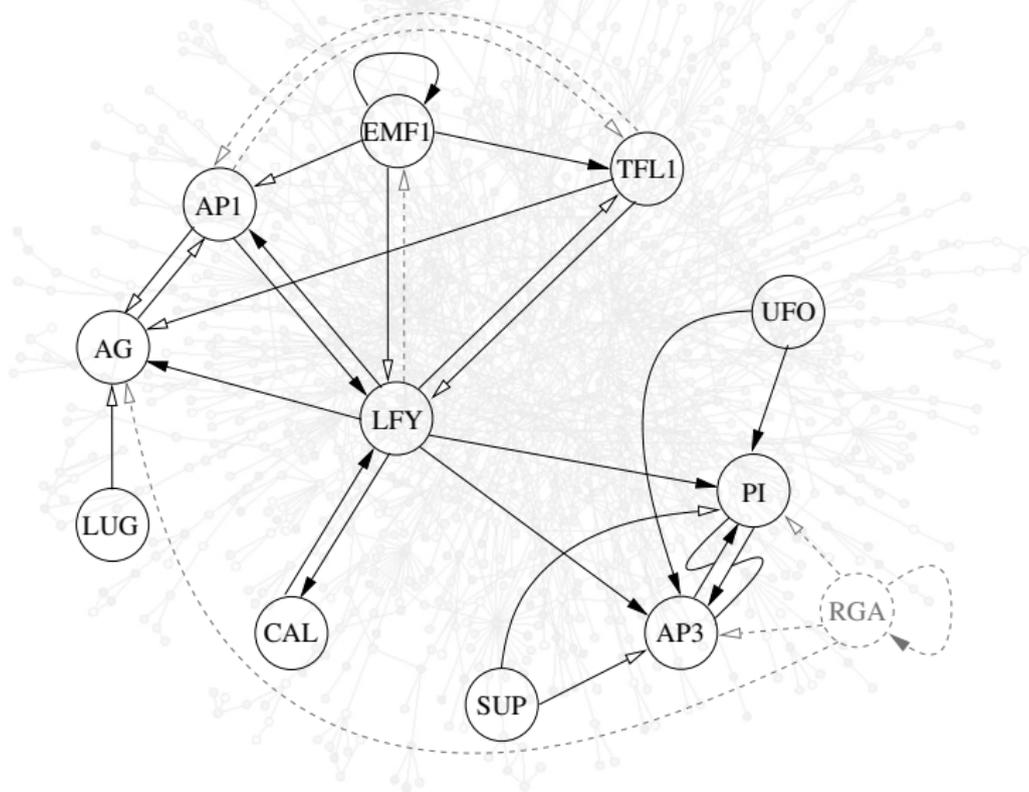
# Résultats expérimentaux sur l'influence de la gibbérelline

Goto & Pharis, Canadian Journal of Botany, 1999

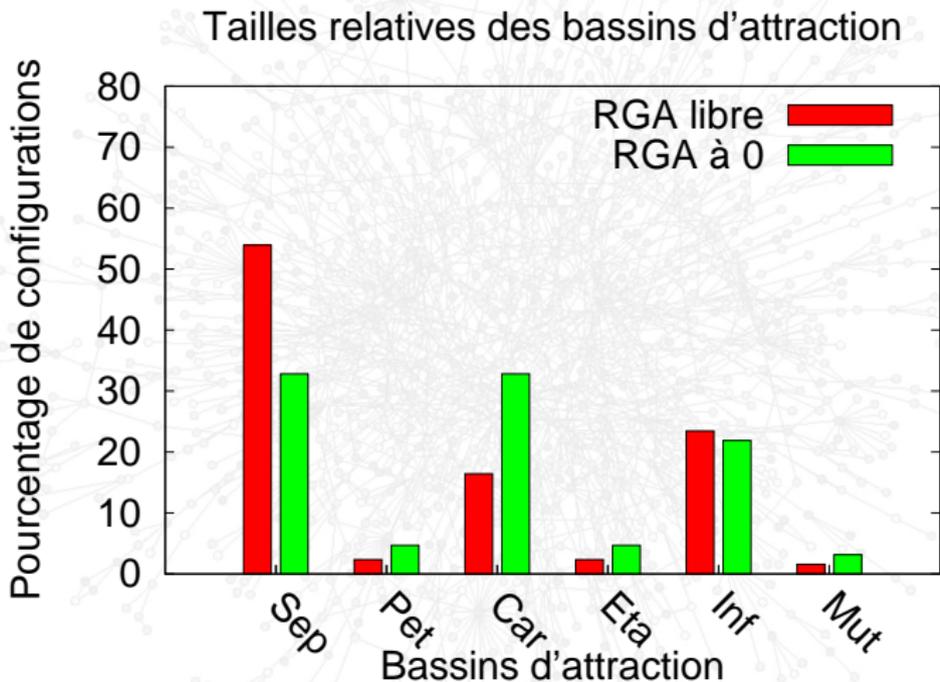


## Variations autour du réseau de Mendoza

Modèle déterministe et dynamique séquentielle



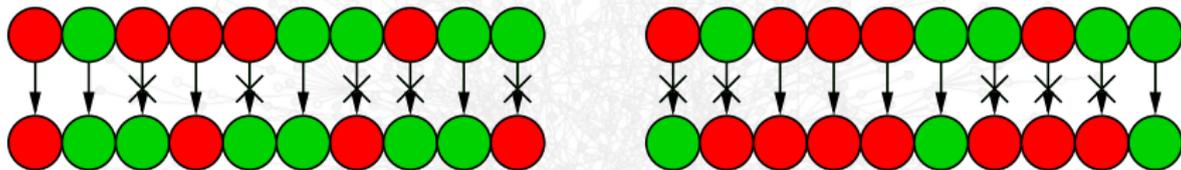
# Tailles relatives des bassins d'attraction



# Robustesse du système face à des perturbations d'états

## Objectif

*Calculer les probabilités de changement de bassins d'attraction en fonction d'un paramètre stochastique de perturbation d'état.*



Obtention des formules explicites des polynômes caractéristiques  
des probabilités de changement de bassins d'attraction  
en fonction du taux de perturbation d'état  $\alpha$

## Algorithme

$$P(c \rightarrow c' | p_k) = 0 \text{ ou } 1$$

$$P(c \rightarrow c' | k) = \frac{\sum_{p_k \in P_k} P(c \rightarrow c' | p_k)}{\binom{n}{k}}$$

$$P_\alpha(k) = \binom{n}{k} \cdot \alpha^k \cdot (1 - \alpha)^{n-k}$$

$$P_\alpha(c \rightarrow c') = \sum_{k=0}^n (P(c \rightarrow c' | k) \cdot P_\alpha(k))$$

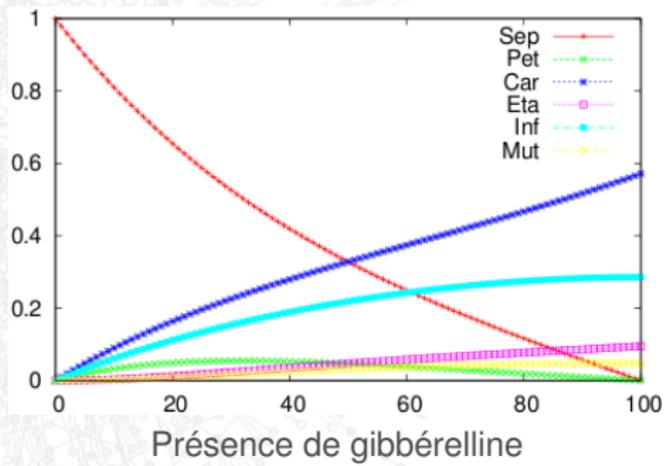
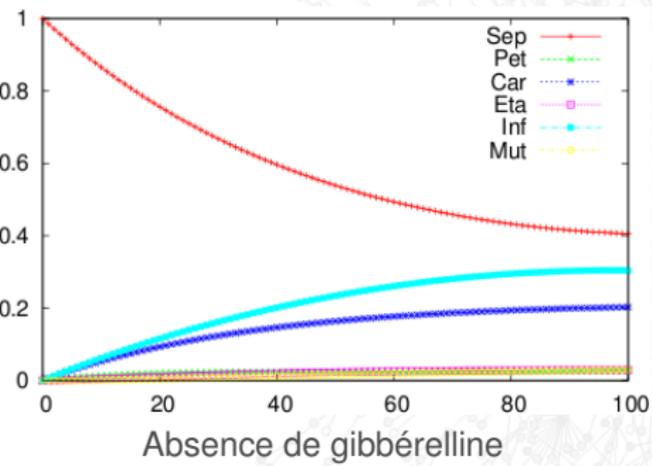
$$P_\alpha(c \rightarrow B_j) = \sum_{c' \in B_j} P_\alpha(c \rightarrow c')$$

$$P_\alpha(B_i \rightarrow B_j) = \frac{\sum_{c \in B_i} P_\alpha(c \rightarrow B_j)}{|B_i|}$$



$$P_\alpha(B_i \rightarrow B_j) = z_n \cdot \alpha^n + z_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} \cdot (1 - \alpha) + \dots + z_1 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-1} + z_0 \cdot (1 - \alpha)^n$$

## Bassin d'origine — Sépales

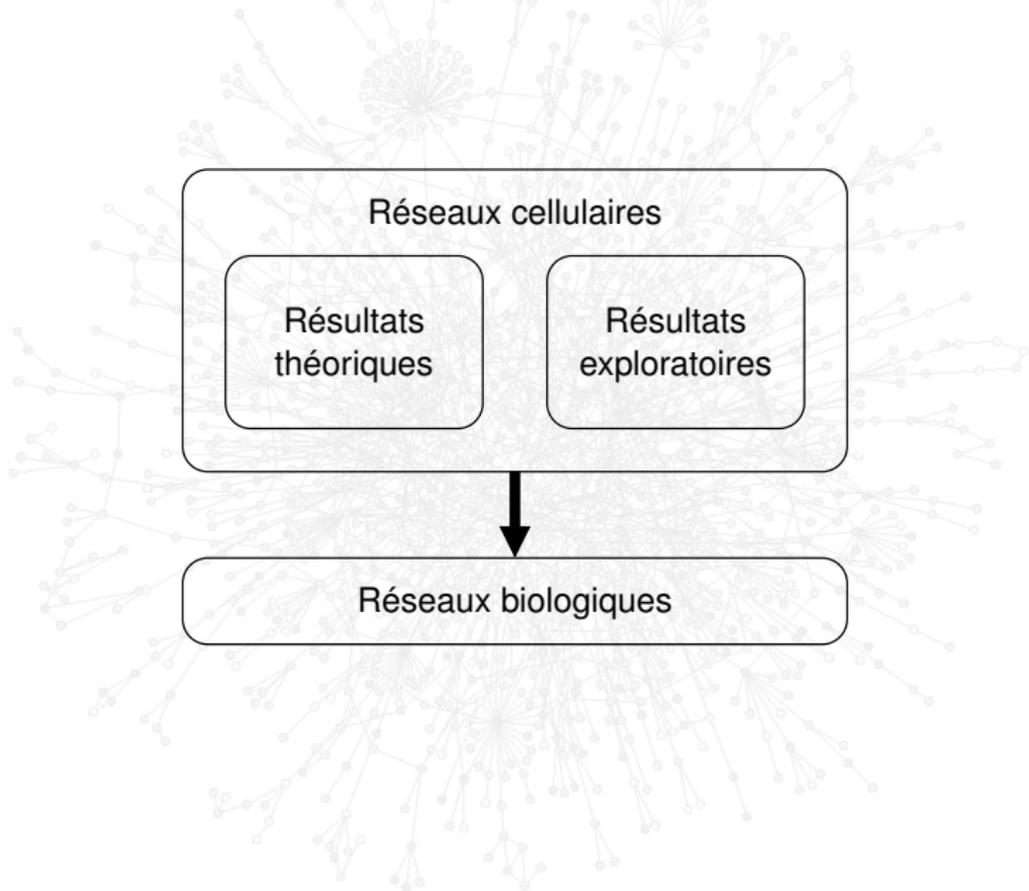


# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires
- 3 Réseaux physiques
- 4 Réseaux biologiques
- 5 Conclusion

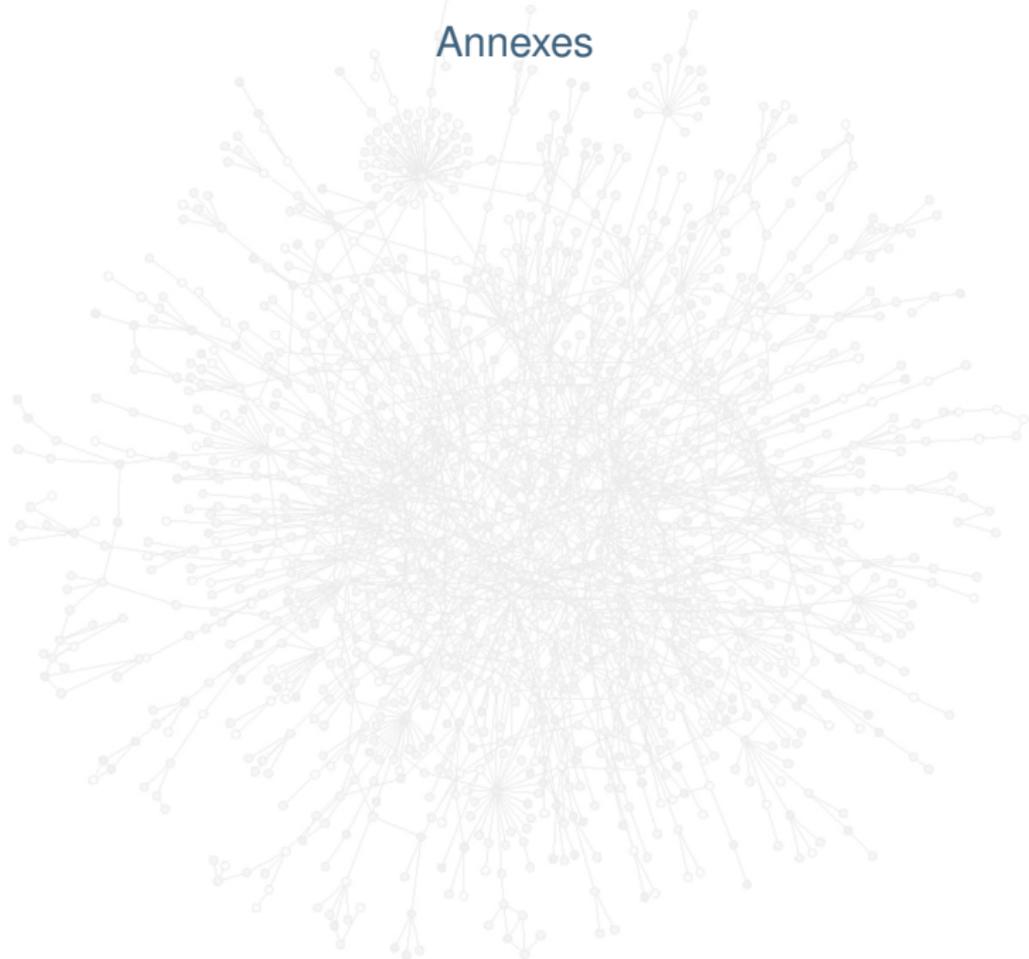


# Bilan du travail réalisé



# Perspectives

- Perte de linéarité : potentiels de couples Vs. potentiels de triplets
- Lien entre le modèle stochastique et le modèle déterministe
- Observabilité des transitions de phase en fonction des modes d'itérations
- Améliorations du réseau de Mendoza
- Complexité de l'algorithme d'étude de la robustesse face aux perturbations d'état
- Donner un sens aux cycles limites



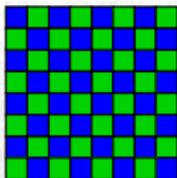
# Transitions de phase et modes d'itération

## Cheminement de la preuve

### Définition

Un bloc  $B$  d'un réseau  $R$  est creux si :

$$\forall i, j \in S, i \neq j, w_{ij} = 0$$



- Soit un réseau  $R$  divisé en 2 blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Première étape : montrer que l'énergie parallèle d'une configuration peut s'exprimer comme la somme des énergies séquentielles des deux configurations locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Deuxième étape : montrer que la fonction de partition parallèle est égale au produit des fonctions de partition séquentielles locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Ce résultat reste vrai si l'on subdivise les blocs en blocs de plus en plus petits, jusqu'à atteindre le mode d'itération séquentiel.

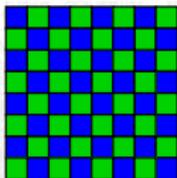
# Transitions de phase et modes d'itération

## Cheminement de la preuve

### Définition

Un bloc  $B$  d'un réseau  $R$  est creux si :

$$\forall i, j \in S, i \neq j, w_{ij} = 0$$



- Soit un réseau  $R$  divisé en 2 blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Première étape : montrer que l'énergie parallèle d'une configuration peut s'exprimer comme la somme des énergies séquentielles des deux configurations locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Deuxième étape : montrer que la fonction de partition parallèle est égale au produit des fonctions de partition séquentielles locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Ce résultat reste vrai si l'on subdivise les blocs en blocs de plus en plus petits, jusqu'à atteindre le mode d'itération séquentiel.

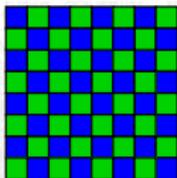
# Transitions de phase et modes d'itération

## Cheminement de la preuve

### Définition

Un bloc  $B$  d'un réseau  $R$  est creux si :

$$\forall i, j \in S, i \neq j, w_{ij} = 0$$



- Soit un réseau  $R$  divisé en 2 blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Première étape : montrer que l'énergie parallèle d'une configuration peut s'exprimer comme la somme des énergies séquentielles des deux configurations locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Deuxième étape : montrer que la fonction de partition parallèle est égale au produit des fonctions de partition séquentielles locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Ce résultat reste vrai si l'on subdivise les blocs en blocs de plus en plus petits, jusqu'à atteindre le mode d'itération séquentiel.

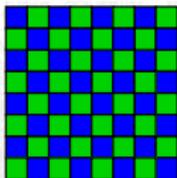
# Transitions de phase et modes d'itération

## Cheminement de la preuve

### Définition

Un bloc  $B$  d'un réseau  $R$  est creux si :

$$\forall i, j \in S, i \neq j, w_{ij} = 0$$



- Soit un réseau  $R$  divisé en 2 blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Première étape : montrer que l'énergie parallèle d'une configuration peut s'exprimer comme la somme des énergies séquentielles des deux configurations locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Deuxième étape : montrer que la fonction de partition parallèle est égale au produit des fonctions de partition séquentielles locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Ce résultat reste vrai si l'on subdivise les blocs en blocs de plus en plus petits, jusqu'à atteindre le mode d'itération séquentiel.

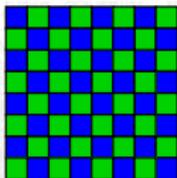
# Transitions de phase et modes d'itération

## Cheminement de la preuve

### Définition

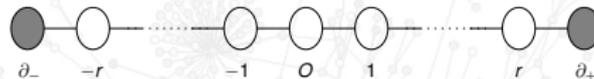
Un bloc  $B$  d'un réseau  $R$  est creux si :

$$\forall i, j \in S, i \neq j, w_{ij} = 0$$



- Soit un réseau  $R$  divisé en 2 blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Première étape : montrer que l'énergie parallèle d'une configuration peut s'exprimer comme la somme des énergies séquentielles des deux configurations locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Deuxième étape : montrer que la fonction de partition parallèle est égale au produit des fonctions de partition séquentielles locales aux blocs creux  $R_1$  et  $R_2$ .
- Ce résultat reste vrai si l'on subdivise les blocs en blocs de plus en plus petits, jusqu'à atteindre le mode d'itération séquentiel.

## Absence de transition de phase en 1D



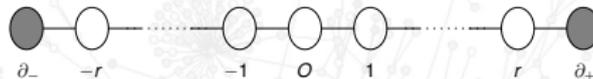
### Théorème

*Le comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléens à seuil symétrique soumis à l'influence de conditions de bord n'admet pas de transition de phase.*

Idee :

- Réduire le déterminant de la matrice de transfert à un produit de voisinage de l'automate entre conditions de bord, de la projectivité et de conditions de bord.
- Proposer une condition récursive pour le calcul du déterminant de la matrice de transfert.
- Prouver, dans les conditions de bord, que les mesures invariantes sont évaluable à 0 ou à 1.

## Absence de transition de phase en 1D



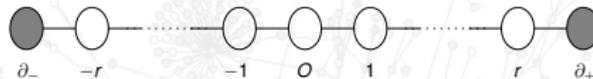
### Théorème

*Le comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléens à seuil symétrique soumis à l'influence de conditions de bord n'admet pas de transition de phase.*

### Idee :

- Réduire la markovienne à une matrice de transfert réduite au simple voisinage de l'automate central contenant les coefficients des équations de projectivité et de conditionnement.
- Proposer une condition possible de transition de phase : nullité du déterminant de la matrice de transfert.
- Prouver, dans les conditions de nullité et de non-nullité du déterminant, que les mesures invariantes sont égales que les conditions de bord soient fixées à 0 ou à 1.

## Absence de transition de phase en 1D



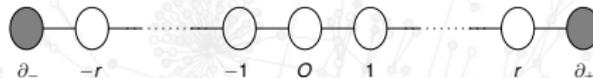
### Théorème

*Le comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléen à seuil symétrique soumis à l'influence de conditions de bord n'admet pas de transition de phase.*

### Idée :

- Réduire la markovienne à une matrice de transfert réduite au simple voisinage de l'automate central contenant les coefficients des équations de projectivité et de conditionnement.
- Proposer une condition possible de transition de phase : nullité du déterminant de la matrice de transfert.
- Prouver, dans les conditions de nullité et de non-nullité du déterminant, que les mesures invariantes sont égales que les conditions de bord soient fixées à 0 ou à 1.

## Absence de transition de phase en 1D



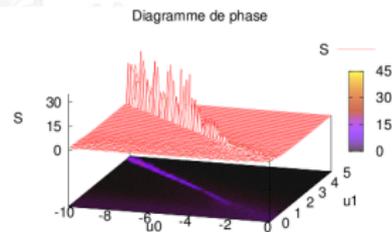
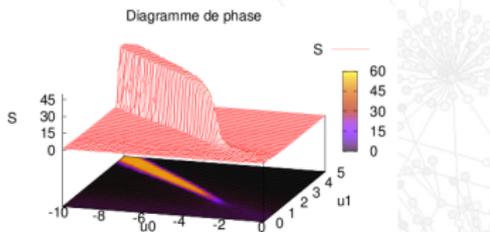
### Théorème

*Le comportement asymptotique d'un réseau d'automates booléen à seuil symétrique soumis à l'influence de conditions de bord n'admet pas de transition de phase.*

### Idée :

- Réduire la markovienne à une matrice de transfert réduite au simple voisinage de l'automate central contenant les coefficients des équations de projectivité et de conditionnement.
- Proposer une condition possible de transition de phase : nullité du déterminant de la matrice de transfert.
- Prouver, dans les conditions de nullité et de non-nullité du déterminant, que les mesures invariantes sont égales que les conditions de bord soient fixées à 0 ou à 1.

# Conditions de bord extrémales en attractif



Conditions de bord extrémales

$P_0^0$	$0,00 \pm 3 \cdot 10^{-5}$	$P_1^0$	$0,00 \pm 2 \cdot 10^{-5}$
$P_0^1$	$0,02 \pm 5 \cdot 10^{-4}$	$P_1^1$	$0,63 \pm 2 \cdot 10^{-3}$
$P_0^{01}$	$0,31 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	$P_1^{01}$	$0,00 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
$P_0^{10}$	$0,31 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	$P_1^{10}$	$0,00 \pm 2 \cdot 10^{-4}$

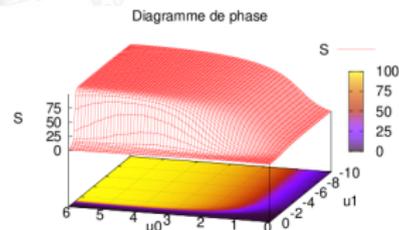
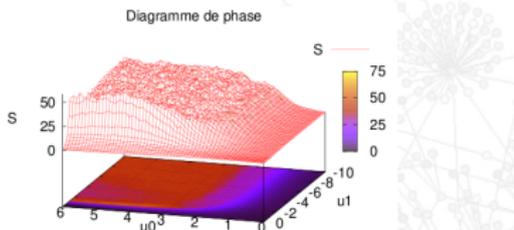
Conditions de bord en quinconce

$P_{01}^0$	$0,00 \pm 3 \cdot 10^{-5}$	$P_{10}^0$	$0,00 \pm 2 \cdot 10^{-5}$
$P_{01}^1$	$0,57 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	$P_{10}^1$	$0,55 \pm 2 \cdot 10^{-3}$
$P_{01}^{01}$	$0,02 \pm 6 \cdot 10^{-4}$	$P_{10}^{01}$	$0,03 \pm 7 \cdot 10^{-4}$
$P_{01}^{10}$	$0,03 \pm 6 \cdot 10^{-4}$	$P_{10}^{10}$	$0,03 \pm 7 \cdot 10^{-4}$

$$\begin{aligned}
 P_q &= 1 - [\min(P_{01}^0, P_{10}^0) + \min(P_{01}^1, P_{10}^1) + \min(P_{01}^{01}, P_{10}^{01}) + \min(P_{01}^{10}, P_{10}^{10})] \\
 &= 1 - (0,00 + 0,55 + 0,02 + 0,03) \\
 &= 0,40
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - [\min(P_0^0, P_1^0) + \min(P_0^1, P_1^1) + \min(P_0^{01}, P_1^{01}) + \min(P_0^{10}, P_1^{10})] \\
 &= 1 - (0,00 + 0,02 + 0,00 + 0,00) \\
 &= 0,98
 \end{aligned}$$

# Conditions de bord en quinconce en répulsif



Conditions de bord extrémales

$P_0^0$	$0,00 \pm 5 \cdot 10^{-6}$	$P_1^0$	$0,00 \pm 6 \cdot 10^{-6}$
$P_0^1$	$0,00 \pm 0,00$	$P_1^1$	$0,00 \pm 0,00$
$P_0^{01}$	$0,24 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$P_1^{01}$	$0,23 \pm 2 \cdot 10^{-4}$
$P_0^{10}$	$0,49 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$P_1^{10}$	$0,53 \pm 2 \cdot 10^{-4}$

Conditions de bord en quinconce

$P_{01}^0$	$0,00 \pm 8 \cdot 10^{-6}$	$P_{10}^0$	$0,00 \pm 3 \cdot 10^{-6}$
$P_{01}^1$	$0,00 \pm 0,00$	$P_{10}^1$	$0,00 \pm 0,00$
$P_{01}^{01}$	$0,80 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$P_{10}^{01}$	$0,00 \pm 7 \cdot 10^{-7}$
$P_{01}^{10}$	$0,00 \pm 0,00$	$P_{10}^{10}$	$0,76 \pm 2 \cdot 10^{-4}$

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - [\min(P_0^0, P_1^0) + \min(P_0^1, P_1^1) + \min(P_0^{01}, P_1^{01}) + \min(P_0^{10}, P_1^{10})] \\
 &= 1 - (0,00 + 0,00 + 0,23 + 0,49) \\
 &= 0,28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_q &= 1 - [\min(P_{01}^0, P_{10}^0) + \min(P_{01}^1, P_{10}^1) + \min(P_{01}^{01}, P_{10}^{01}) + \min(P_{01}^{10}, P_{10}^{10})] \\
 &= 1 - (0,00 + 0,00 + 0,00 + 0,00) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$