



**HAL**  
open science

# Outils de traitement d'images adaptés au traitement d'images omnidirectionnelles

Stéphanie Bigot-Marchand

► **To cite this version:**

Stéphanie Bigot-Marchand. Outils de traitement d'images adaptés au traitement d'images omnidirectionnelles. Mathématiques [math]. Université de Picardie Jules Verne, 2008. Français. NNT : . tel-00339785

**HAL Id: tel-00339785**

**<https://theses.hal.science/tel-00339785>**

Submitted on 18 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## **THESE**

présentée à l'Université de Picardie Jules Verne  
Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne**  
Spécialité : Mathématiques

---

# **OUTILS DE TRAITEMENT D'IMAGES ADAPTES AU TRAITEMENT D'IMAGES OMNIDIRECTIONNELLES**

---

par :

**Stéphanie BIGOT-MARCHAND**

Thèse soutenue le 15 octobre 2008 à Amiens

Jury :

M. Sylvain DURAND, Professeur, Université Paris Descartes, Directeur de thèse  
M. Jacques FROMENT, Professeur, Université de Bretagne Sud, Rapporteur  
M. Jérôme GILLES, Expert en traitement d'images, DGA, Examineur  
M. Olivier GOUBET, Professeur, Université de Picardie, Directeur de thèse  
Mme Djemaa KACHI, Maître de Conférences, Université de Picardie, Directrice de thèse  
M. El Mustapha MOUADDIB, Professeur, Université de Picardie, Président du jury  
M. Olivier STRAUSS, Maître de Conférences, Université Montpellier II, Rapporteur



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Sylvain Durand, Olivier Goubet et Djemaa Kachi pour m'avoir fait confiance en acceptant de m'encadrer. Ils ont su me soutenir et m'encourager durant ces 3 années.

Bien évidemment, je remercie également El Mustapha Mouaddib, qui a toujours été présent depuis le début de ce projet. La thèse s'étant effectuée entre deux laboratoires, le LAMFA (Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentale et Appliquée) et le CREA, devenu laboratoire MIS (Modélisation, Information et Systèmes), les échanges ont permis à deux approches du sujet de se confronter et d'enrichir les discussions.

Je suis très reconnaissante à Jacques Froment et Olivier Strauss d'avoir accepté de rapporter ma thèse, d'autant que les délais étaient très courts. Mes remerciements vont également vers Jérôme Gilles, qui a accepté de faire partie du jury. Sa présence me permet de rappeler que sans la DGA, nous ne serions pas là, puisque c'est une bourse DGA-CNRS qui a financé ces recherches.

Le travail de recherche est l'activité principale d'un doctorant, mais il ne saurait se réaliser sans de bonnes conditions. Je tiens donc à remercier les équipes qui m'ont accueillie et aidée que ce soit pour mon activité de recherche ou d'enseignement. Il est agréable de constater qu'ici un doctorant est considéré comme un membre à part entière du laboratoire et est écouté en tant que tel.

Tout naturellement, je remercie mes collègues doctorants, notamment les analystes et ergodiciens, qui ont su faire en sorte que le bureau des doctorants soit un lieu d'échange et de discussions. Je souhaite bon courage à ceux qui soutiendront bientôt (et enfin, peut-on dire pour certains).

Pour finir, je ne saurais exprimer à quel point je remercie ma famille pour son soutien et ses encouragements depuis toujours. Ce sont mes parents qui m'ont appris à donner le meilleur et c'est cette exigence de soi qui m'a aidée tout au long de mes études.

Mes amis sont également à remercier, pour leur soutien inconditionnel, alors que pour la plupart, les maths ne sont qu'un animal étrange.

Je n'oublie pas mon mari, qui a su comprendre l'importance de mon travail pour moi, m'a encouragée et a toujours été là dans les moments forts.

Je dédie cette thèse à ma famille, qu'elle soit de sang ou de coeur.



# Table des matières

Table des matières	5
Introduction	8
<b>1 Vision omnidirectionnelle</b>	<b>10</b>
1.1 Capteurs omnidirectionnels . . . . .	10
1.1.1 Images multiples . . . . .	11
1.1.2 Lentilles spéciales . . . . .	12
1.1.3 Utilisations de miroirs . . . . .	12
1.2 Modélisation du capteur . . . . .	14
1.2.1 Caméra classique . . . . .	14
1.2.2 Capteur catadioptrique . . . . .	16
1.2.3 La recherche dans le traitement d'images omnidirectionnelles .	19
1.2.4 Calibrage . . . . .	20
<b>2 Outils mathématiques sur la sphère équivalente</b>	<b>22</b>
2.1 Projection stéréographique . . . . .	22
2.2 Outils existants sur le plan . . . . .	24
2.3 Action de groupe sur la sphère . . . . .	25
2.4 Harmoniques sphériques . . . . .	28
2.5 Convolution sur la sphère . . . . .	31
<b>3 Traitement des images définies sur la sphère</b>	<b>36</b>
3.1 Généralités . . . . .	36
3.1.1 Rappel du filtrage d'images perspectives . . . . .	36
3.1.2 Opérateur de filtrage sur la sphère . . . . .	37
3.1.3 Gaussiennes sphériques . . . . .	38
3.2 Lissage . . . . .	40
3.2.1 Généralités . . . . .	40
3.2.2 Filtre de Wiener . . . . .	41

3.2.3	Régularisation de Tikhonov . . . . .	43
3.3	Détection de contours . . . . .	45
3.3.1	Méthode du Gradient . . . . .	46
3.3.2	Détermination des filtres . . . . .	47
3.3.3	Méthode du Laplacien . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Filtre de Canny</b>	<b>52</b>
4.1	Filtre de Canny classique . . . . .	52
4.1.1	Critère de détection . . . . .	52
4.1.2	Critère de localisation . . . . .	54
4.2	Filtre de Canny sphérique . . . . .	55
4.2.1	Critère de détection . . . . .	55
4.2.2	Critère de localisation . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Tests comparatifs</b>	<b>66</b>
5.1	Généralités . . . . .	66
5.2	Lissage . . . . .	69
5.3	Détection de contours . . . . .	77
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Equation du point de vue unique</b>	<b>90</b>
A.1	Obtention de l'équation du point de vue unique . . . . .	91
A.2	Résolution de l'équation . . . . .	92
A.3	Solutions particulières . . . . .	94
<b>B</b>	<b>Projection stéréographique inverse</b>	<b>96</b>
<b>C</b>	<b>Publications et communications</b>	<b>98</b>
	Liste des figures	100
	Glossaire	102
	Bibliographie	104





Lorsque l'on parle de traitements d'images aux non-spécialistes, la plupart pense tout de suite à leurs photos de vacances ou leurs photos de famille et aux logiciels grand public qui leur permettent de les améliorer. S'il est très réducteur de penser que l'analyse d'images se restreint à ce type d'usage, il a néanmoins été plus facile pour moi d'expliquer par ces applications que les mathématiques que j'étudiais, sont utiles, contrairement à ce que pensaient certains sceptiques.

Aujourd'hui, grâce aux technologies toujours en progression, les images ont envahi notre vie, que ce soit dans les loisirs (cadres photos numériques, jeux vidéos avec une caméra détectant les mouvements...) ou dans un cadre plus utilitaire. Citons par exemple l'utilisation croissante de la vision dans des domaines variés comme la médecine (IRM), la vidéosurveillance (sécurité, analyse routière...), la robotique (figure 1) (déplacement de robots...), la défense (missiles, détection, véhicules autonomes...), l'astronomie... .

Tout naturellement, l'idée d'augmenter le champ de vision s'est donc imposée avec comme espoir d'obtenir une vision omnidirectionnelle, c'est-à-dire un champ de vision à  $360^\circ$ .

Dans ce but, plusieurs systèmes ont été développés et ce sont les capteurs catadioptriques qui sont les plus utilisés. Ce capteur comporte un miroir dans lequel une caméra observe le reflet de la scène.

La première utilisation d'un tel système date de 1970, quand Rees [34] déposa un brevet industriel pour un miroir hyperboloïdal couplé avec une caméra pour un opérateur assis dans une tourelle de tir.

Depuis, les recherches sur la conception de tels capteurs ont continué et se sont accrues avec le développement de la robotique mobile et l'utilisation en 1990 d'un miroir conique dans le système COPIS [46] proposé par Yagi.

L'avantage de l'omnidirectionnalité pour la navigation de robots mobiles est évidente puisqu'elle offre un champ de vision à  $360^\circ$  avec seulement une caméra.

Par la suite, beaucoup de travaux ont été réalisés sur la modélisation ou le calibrage des capteurs omnidirectionnels. Cependant, les recherches sur le traitement des images omnidirectionnelles ont commencé plus tardivement puisqu'au départ on traitait ces images comme des images perspectives sans prendre en considération les distorsions introduites par les miroirs.

La méthode que nous allons présenter ici consiste à utiliser un espace intermédiaire pour effectuer les traitements. Cet espace, appelé "sphère d'équivalence", permet un traitement uniforme quelque soit l'emplacement de l'opérateur de traitement sur la sphère.

Dans un premier temps, nous allons décrire les différents capteurs produisant des images omnidirectionnelles et justifier le passage par cette sphère virtuelle. Nous donnerons brièvement quelques éléments sur l'état de la recherche dans le traitement des images omnidirectionnelles.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons différents outils mathématiques qui nous seront nécessaires par la suite pour construire des filtres sur la sphère.

Nous nous attacherons ensuite à expliquer les traitements bas-niveaux que nous avons adaptés sur la sphère. Nous avons en effet travaillé par analogie avec les méthodes qui existent pour les images planes et nous nous sommes intéressés à deux types de traitements en particulier : le lissage et la détection de contours. Pour chacun de ces traitements, nous proposons plusieurs outils construits sur la sphère.

Dans le quatrième chapitre, nous développons plus particulièrement un détecteur de contours, que l'on appelle "filtre de Canny sphérique" par analogie avec le cas plan. Précisément, nous donnons les critères que doit vérifier ce filtre pour optimiser la détection.

Dans le chapitre suivant, nous présentons différents tests pour comparer, dans un premier temps, nos différents filtres de lissage sphérique entre eux, puis dans un second temps, les méthodes de détection qui utilisent la sphère par rapport aux méthodes planes. Les différentes expériences mettent en évidence les avantages qu'offre le passage par la "sphère d'équivalence" dans le traitement bas-niveau des images omnidirectionnelles.

Notons que ce travail a été effectué dans le cadre d'une bourse DGA-CNRS, entre le Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées (LAMFA UMR 6140 CNRS-UPJV) et le Centre de Robotique, d'Electronique et d'Automatique (CREA) devenu le laboratoire MIS (Modélisation, Information et Systèmes).



FIG. 1 – Utilisation d'un capteur omnidirectionnel pour un robot koala



FIG. 2 – Utilisation d'un capteur omnidirectionnel pour un drone

# Chapitre 1

## Vision omnidirectionnelle

### 1.1 Capteurs omnidirectionnels

La vision omnidirectionnelle (figure (1.2)) correspond à un champ de vue couvrant toute une sphère dont le centre correspondrait à la place de l'observateur. La vision panoramique (figure (1.1), Crédit photo : US National Oceanic and Atmospheric Administration), quant à elle, fournit un champ de vue réduit à une bande. Dans ce qui va suivre, nous emploierons à la fois les termes omnidirectionnelle et panoramique pour caractériser une vision couvrant  $360^\circ$  autour d'un axe. Cette non-distinction est habituelle dans ce domaine.



FIG. 1.1 – Image Panoramique

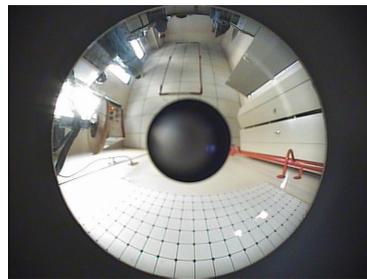


FIG. 1.2 – Image Omnidirectionnelle

Pour obtenir des images omnidirectionnelles, on distingue 3 classes de systèmes possibles :

- l'utilisation d'images multiples
- l'utilisation de lentilles spéciales
- l'utilisation de miroirs convexes.

### 1.1.1 Images multiples

Alors que dans la nature, on trouve facilement des animaux possédant un champ de vue presque omnidirectionnel (le lapin a un champ de vue approchant les  $360^\circ$ , la mouche avec ses 3000 lentilles possède au final une vision de  $360^\circ$ ...), pour un être humain normal, le champ visuel (l'espace visuel périphérique vu par l'oeil) s'étend de  $60^\circ$  en haut,  $70^\circ$  en bas et  $90^\circ$  environ de façon latérale soit l'équivalent d'un objectif photo "grand angle" de  $180^\circ$ .

Intuitivement, une première approche pour l'omnidirectionnalité est à l'image de la vision humaine de faire effectuer à la caméra une rotation afin de balayer toute la scène. Il faut alors construire l'image omnidirectionnelle à partir des différentes images prises successivement par la caméra. Cette technique de reconstruction est appelé mosaïque d'images (voir [42] pour plus de détails).

Au-delà de la difficulté de synchronisation, cette méthode présente l'inconvénient de ne pas pouvoir fournir une vue omnidirectionnelle à un instant donné, à cause de la successivité des prises. Par conséquent cette méthode ne peut pas être utilisée pour des scènes de mouvement. En effet si une personne change de place lors de prises de vue consécutives, elle risque d'apparaître plusieurs fois sur l'image omnidirectionnelle, aux places qu'elle a occupées successivement.

Une autre approche consiste à utiliser simultanément plusieurs caméras ( par exemple 5 pour la caméra RingCam de Microsoft<sup>R</sup> [11] (figure (1.3), Image provenant du site recherche de Microsoft<sup>R</sup>) filmant des directions différentes. Pour pouvoir arriver à reconstruire parfaitement l'image omnidirectionnelle, il faut s'assurer de l'alignement des centres optiques des caméras ce qui implique des difficultés dans la fabrication du système.

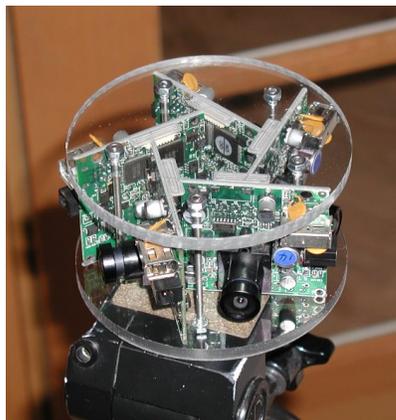


FIG. 1.3 – Caméra RingCam de Microsoft<sup>R</sup>

### 1.1.2 Lentilles spéciales

Un choix bien connu des photographes est l'utilisation d'objectifs "grand angle", appelés fish-eye (figure(1.4), Crédit photo : NASA), utilisés par le grand public depuis les années 60. Facile à utiliser puisqu'ils s'adaptent comme tout autre objectif sur les caméras, ils présentent l'avantage de ne pas occulter une partie du champ visuel par la caméra (comme nous allons le voir pour d'autres capteurs).

Cependant, il existe plusieurs inconvénients à cette méthode. Non seulement ces optiques sont coûteuses, mais en plus, avec cette lentille, la résolution de l'image est mauvaise à sa périphérie, ce qui correspond par exemple à la zone filmée au sol. Par conséquent, son utilisation pour la détection d'obstacles reste limitée.

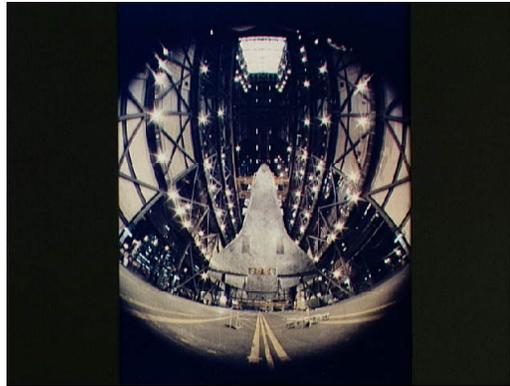


FIG. 1.4 – Exemple d'image fisheye

### 1.1.3 Utilisations de miroirs

Le dernier procédé que nous décrivons ici est le capteur catadioptrique : dioptrique pour la réfraction (lentilles) et catoptrique pour la réflexion (miroirs). Ce capteur se compose d'un miroir de révolution (dans lequel se reflète une scène) qui est filmé par une caméra (1.6). C'est ce dernier système, a priori plus simple à mettre en oeuvre et avec des propriétés intéressantes, que nous allons utiliser dans ce qui va suivre. Nous n'allons décrire ici que les caméras catadioptriques centrales, c'est-à-dire celles qui possèdent un centre de projection unique, car elles présentent des propriétés intéressantes dont nous parlerons par la suite.

Cette théorie du point de vue unique, publiée par Nayar et Baker dans [3] signifie que chaque rayon lumineux de la scène passe dans une seule direction à travers ce point de vue ou de façon équivalente, le système associe à chaque point de l'espace 3D un unique point projeté sur l'image.

A partir de la formation d'une image sur un miroir ponctuel et en respectant les lois de la réflexion, les auteurs ont établi une équation du point de vue unique. La résolution de cette équation a ensuite fourni deux solutions générales (voir en annexe). En prenant des cas particuliers de ces solutions, on obtient des conditions à respecter pour obtenir des capteurs possédant un point de vue unique. Nous détaillons ici les différentes solutions obtenues.

Un miroir ellipsoïdal (qui est concave), utilisé avec une caméra perspective possède un centre de projection unique, situé sur le premier foyer du miroir, à l'intérieur. Ce montage est peu utilisé car son champ de vision est très occulté par la caméra.

Un miroir hyperboloïdal, couplé avec une caméra perspective forme une caméra hypercatadioptrique. Le miroir est convexe. La difficulté pratique consiste à faire parfaitement coïncider le centre optique de la caméra et le deuxième foyer de l'hyperboloïde. La première utilisation d'un tel système date des années 70 avec Rees ([34]). Depuis, la vision hyperomni a fait ses preuves et est souvent utilisée.

Un miroir plan observé par une caméra perspective possède un point de vue unique. Cependant le champ de vision n'est pas augmenté.

Pour respecter la contrainte du point de vue unique pour un miroir sphérique ou un miroir conique, il faut positionner la caméra respectivement sur la surface de la sphère ou sur le sommet du cône ce qui rend inutilisable ces capteurs. En pratique, on éloigne les caméras des miroirs et ces capteurs sont utilisés pour certaines applications de robotique et de télésurveillance (exemple : le capteur COPIS, Conic Projection Image Sensor [46] ).

De plus, sous certaines conditions, Lin et Bajcsy, dans [27], ont montré que l'on pouvait obtenir une caméra vérifiant la propriété du point de vue unique avec un miroir conique mais le champ visuel n'est pas très important.

Avec un miroir parabolöide, dont le second foyer est situé à l'infini, il est nécessaire de prendre une caméra réalisant une projection orthographique grâce à une optique télécentrique. La contrainte du point de vue unique est alors vérifiée. De plus, le capteur est facile à réaliser car il suffit que l'axe de visée de la caméra soit parallèle avec l'axe du parabolöide. En effet, on peut effectuer une translation de la caméra car "il y a invariance des images par translation du miroir par rapport au système" [32]. Par conséquent la contrainte du point de vue unique sera toujours vérifiée, mais le champ de vision sera modifié.

L'inconvénient de ce capteur paracatadioptrique réside dans le prix et la taille de l'objectif télécentrique. La lentille télécentrique peut donc être remplacée par un

miroir sphérique concave.

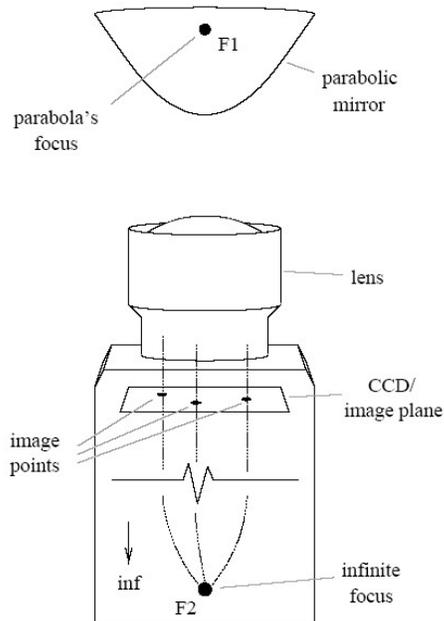


FIG. 1.5 – Schéma d'un capteur catadioptrique[13]



FIG. 1.6 – Exemple de capteur catadioptrique

## 1.2 Modélisation du capteur

A partir de maintenant, nous n'allons plus considérer que des images omnidirectionnelles issues de capteurs catadioptriques. Dans un premier temps, il s'agit de modéliser le processus de formation de l'image par un capteur catadioptrique. On obtient alors les relations qui existent entre les points 3D réels et leurs projections sur l'image.

### 1.2.1 Caméra classique

Commençons par rappeler le modèle le plus simple d'une caméra 2D : le modèle "trou d'épingle" ou pinhole.

Ce qu'on appelle trou d'épingle correspond au centre de la caméra par lequel passe tout rayon lumineux de façon rectiligne. Le modèle dépend de deux types de paramètres : intrinsèques et extrinsèques.

Les paramètres intrinsèques correspondent aux propriétés physiques du capteur, sans tenir compte du point de vue. Ces paramètres englobent les paramètres de l'objectif, du capteur CCD et ceux de la carte de numérisation du signal vidéo.

On note  $K$  la matrice de projection qui contient ces paramètres. Ils expriment le lien entre les points de l'image et les points exprimés dans un repère  $\omega_C$ . Si on note,  $u$  et  $v$  respectivement les vecteurs unitaires des lignes et les axes des colonnes du plan image,  $\omega_C$  correspond à un repère placé au centre optique de la caméra et dont les axes  $x$  et  $y$  sont colinéaires à  $u$  et  $v$  respectivement et de même direction. Si  $u$  et  $v$  sont orthogonaux, alors  $K$  est exprimée en fonction de  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  les paramètres de focales. On notera  $p_u$  et  $p_v$  les coordonnées de la projection orthogonale du centre optique de la caméra sur le plan image.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & p_u \\ 0 & \alpha_v & p_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les paramètres extrinsèques, quant à eux, sont représentés par une matrice de transformation rigide (ou transformation euclidienne)  $M$ . Notons que cette transformation associe à un point  $P$  la fonction  $RP + t$  où  $R$  est une matrice de rotation et  $t$  un vecteur de translation. Ces paramètres extrinsèques permettent de relier les coordonnées des points exprimés dans un repère  $\omega_T$  lié à la scène aux coordonnées dans le repère de la caméra  $\omega_C$ .

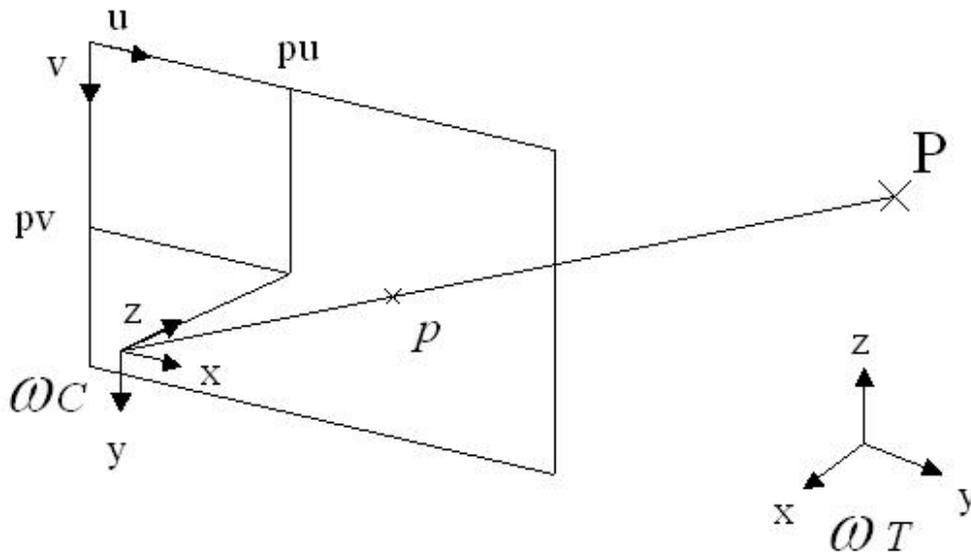


FIG. 1.7 – Projection d'un point  $P$  avec une caméra type "trou d'épingle"

### 1.2.2 Capteur catadioptrique

Lors du choix du modèle représentant le capteur, un compromis doit être fait pour choisir un modèle qui reflète bien la vérité physique, mais qui ne soit pas trop complexe pour être utilisable et que les paramètres puissent arriver à être estimés. Par conséquent, le choix du modèle doit être fait en tenant compte de l'application qui suivra. L'objet de cette thèse est le développement d'outils de traitement bas-niveaux pour les images omnidirectionnelles. Cependant un problème se pose : celui de la distortion introduite par le miroir. Avec ce système, l'image omnidirectionnelle obtenue est sous la forme d'un disque, avec au centre un petit disque noir correspondant à la caméra et donc à une zone perdue. Le problème tient dans la résolution angulaire, qui varie beaucoup dans une image omnidirectionnelle. En effet, alors que la résolution est élevée à l'extérieur du disque, elle est faible au centre de l'image. Cette déformation est beaucoup plus importante que dans les images perspectives classiques. Par conséquent, si on utilise pour les images omnidirectionnelles, les outils classiques développés pour les images perspectives, on introduit une erreur en ne tenant pas compte de la géométrie du miroir.

L'idée est donc de trouver un espace de substitution à celui des images omnidirectionnelles, où l'on pourra développer des outils de traitement adaptés, proches des outils utilisés pour les images perspectives.

Geyer et Daniilidis ([18]) ont établi que pour des systèmes catadioptriques vérifiant la propriété du point de vue unique, cet espace virtuel est une sphère unité, appelé sphère équivalente. La modélisation se décompose donc en deux étapes, tout d'abord une projection sur cette sphère, suivie d'une projection sur un plan.

Dans tout ce qui va suivre, nous considérons des systèmes catadioptriques comprenant des miroirs paraboliques.

En pratique, un rayon de lumière incident vers le foyer de la parabole est reflété par le miroir en un rayon de lumière parallèle à l'axe du miroir (1.8).

Rappelons la preuve de Geyer et Daniilidis du lien existant entre une projection parabolique et une projection stéréographique d'une image sphérique.

La démonstration sera faite dans le cas 2D, mais peut être étendue à trois dimensions (en utilisant la symétrie de révolution du miroir).

Soit  $F$  le foyer et  $(d)$  la directrice de la parabole. Soit  $(l)$  une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole (axe focal) et passant par  $F$ .

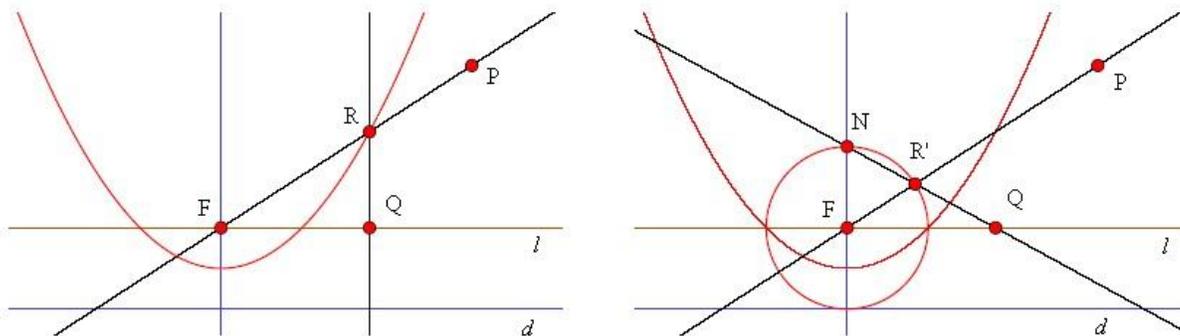


FIG. 1.8 – Schéma d'équivalence pour le miroir parabolique

Soit  $P$  un point.  $P$  se reflète sur la parabole en un point  $R$  (intersection de la parabole et du rayon lumineux  $(FP)$ ).

On note  $Q$  la projection de  $R$  sur la droite  $(l)$ .

Considérons maintenant un cercle de centre  $F$  et de rayon égal à deux fois la distance focale de la parabole (la distance focale étant la distance entre le foyer et le "fond" de la parabole). La directrice de la parabole est donc tangente au cercle. Soit  $N$  le pôle Nord du cercle. Soit  $R'$  l'intersection entre le cercle et le rayon lumineux  $(FP)$ . On note  $Q'$  la projection stéréographique de  $R'$  à partir du pôle Nord sur le plan équatorial  $(l)$ .

Soit  $Y$  l'intersection de  $(NF)$  et du cercle (c'est-à-dire le pôle Sud),  $C$  l'intersection de  $(RQ)$  et  $(NQ')$  et  $X$  l'intersection de  $(RQ)$  et  $(d)$ .

Pour montrer l'équivalence des deux systèmes que l'on vient de présenter, il suffit de montrer que  $Q$  égal  $Q'$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons donc que  $Q$  n'est pas égal à  $Q'$  et que  $Q$  n'est pas égal à  $C$ .

Par définition, tous les points de la parabole sont équidistants de la directrice  $(d)$  et du foyer  $F$ . Par conséquent, le triangle  $FRX$  est isocèle en  $F$ . De plus  $N$  et  $R'$  appartiennent au cercle donc le triangle  $NFR'$  est également isocèle en  $F$ . Les droites  $(NF)$  et  $(RX)$  sont parallèles donc les triangles  $NFR'$  et  $R'RC$  sont homothétiques. Les triangles  $R'RC$  et  $FRX$  sont isocèles donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites  $(R'C)$  et  $(FX)$  sont parallèles et les distances  $CX$  et  $R'F$  sont égales. Comme  $Y$  appartient aussi au cercle, on a aussi les distances  $CX$  et  $FY$  qui

sont égales. Or par construction, les distances  $FY$  et  $QX$  sont égales car  $(l)$  et  $(d)$  sont parallèles. Donc les distances  $CX$  et  $QX$  sont égales et  $C$  et  $Q$  appartiennent à la même droite et sont au-dessus de  $(d)$ . Par conséquent  $C$  est confondu avec  $Q$ , ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ. On peut donc conclure que les points  $Q$  et  $Q'$  sont égaux, ce qui prouve l'équivalence des schémas (??).

Nous donnons ici le théorème plus général d'équivalence projective de Geyer et Daniilidis, dont on pourra retrouver la démonstration détaillée dans [18], ainsi que la démonstration dans le cas des autres capteurs catadioptriques centraux.

**Théorème 1** *La projection parabolique  $q$  est équivalente à la composition d'une normalisation de la sphère unité suivie d'une projection stéréographique.*

$$q(c, F_1, F_2, p) = s_{1,2r-1}$$

avec  $c$  une parabole de latus rectum  $4r$  et de foyers  $F_1 = (0, 0, 0, 1)$  et  $F_2 = (0, 0, 1, 0)$  et  $p = [0, 0, 1, 0]$ .  $s_{l,m}$  signifie que la projection stéréographique est faite à partir d'un point situé sur l'axe de la sphère, à une distance  $l$  du centre de la sphère vers un plan perpendiculaire à l'axe à une distance  $m$  derrière le centre.

Notons que le latus rectum est une corde passant par le foyer de la parabole perpendiculairement à son axe.

Pour plus de compréhension, rappelons la définition des coordonnées homogènes (ou projectives), qui sont utilisées dans le théorème précédent.

Soit  $P$  un point de l'espace de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ . On appelle coordonnées homogènes de  $P$  tout quadruplet  $(X, Y, Z, T)$  tel que  $x = \frac{X}{T}$ ,  $y = \frac{Y}{T}$ ,  $z = \frac{Z}{T}$ . Les coordonnées homogènes ne sont pas uniques et sont définies à une constante multiplicative près. Notons qu'un point  $P$  pour lequel  $T = 0$  est un point à l'infini. L'ensemble de tous ces points s'appelle la droite à l'infini. On définit ainsi le plan projectif, pour lequel deux droites parallèles se coupent en un point à l'infini. Bien entendu, un point de l'espace peut être désigné par ses coordonnées homogènes  $(x, y, z, 1)$ .

Les coordonnées projectives servent également à appliquer des transformations à des

points 3D. Ainsi une translation de vecteur  $(t_x, t_y, t_z)$  sera exprimée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour revenir au théorème d'équivalence projective, le foyer  $F_1$  a donc pour coordonnées cartésiennes  $(0, 0, 0)$ , le foyer  $F_2$  est donc à l'infini sur l'axe des  $z$ . De plus  $p$  est une droite perpendiculaire à l'axe focal et passant par  $F_1$ .  $s_{1,2r-1}$  implique par conséquent que la projection stéréographique est faite à partir du pôle nord de la sphère vers un plan perpendiculaire à l'axe et situé à une distance  $2r - 1$  derrière la sphère.

Il existe donc une équivalence entre la projection parabolique et une projection par la sphère unité, ce qui va nous permettre d'utiliser cette sphère pour les traitements que nous voulons effectuer.

L'espace de substitution étant choisi, le schéma de traitement des images omnidirectionnelles (figure (1.9)) est alors le suivant : l'image omnidirectionnelle est projetée sur une sphère virtuelle par une projection stéréographique inverse, le traitement est effectué sur la sphère unité. Pour finir l'image subit une projection stéréographique pour que l'on obtienne de nouveau une image omnidirectionnelle.

Remarquons que compte-tenu des récents travaux dans le traitement des images omnidirectionnelles, la dernière étape de projection stéréographique devient inutile. En effet, plusieurs auteurs ont développés des traitements haut-niveau sur les images sphériques. Ainsi avec les traitements bas-niveaux que nous allons proposer sur la sphère, toute une chaîne de traitement pourra donc être appliquée sur les images sphériques obtenues à partir des images omnidirectionnelles.

### 1.2.3 La recherche dans le traitement d'images omnidirectionnelles

Comme nous l'avons vu précédemment, appliquer de manière abrupte les outils classiques sur des images omnidirectionnelles introduit des erreurs. Diverses méthodes ont été proposées afin de remédier à ce problème. Citons-en quelques-unes.

Dans [38], les auteurs proposent de calculer le voisinage en projetant un voisinage conçu sur un cylindre, puis utilisent des opérateurs morphologiques flous à noyaux variables pour images omnidirectionnelles. Cette idée a été utilisée dans [24] pour

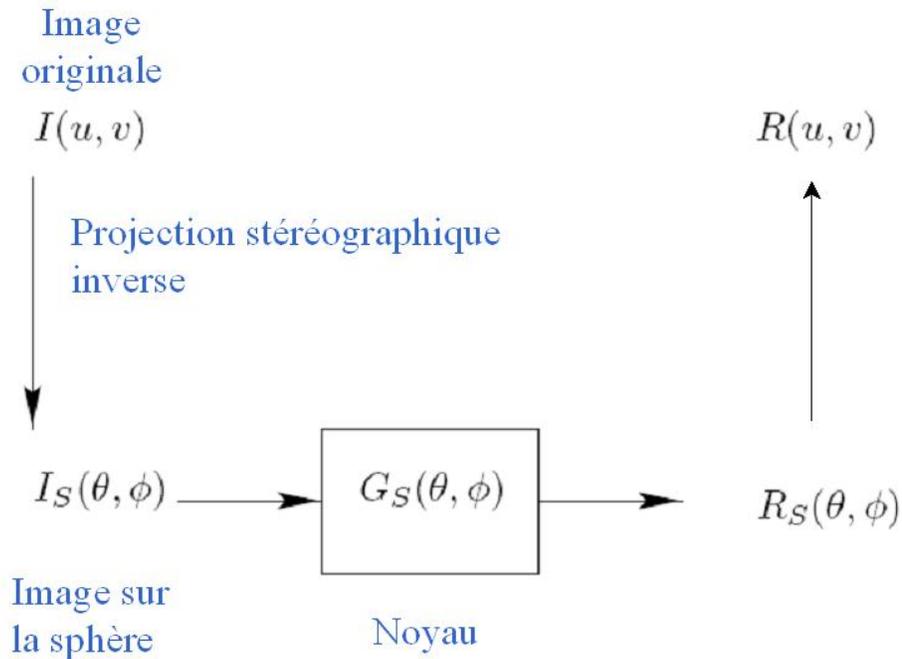


FIG. 1.9 – Schéma de traitement des images omnidirectionnelles

calculer le gradient.

Bogdanova et al., dans [5], ont proposé de corriger le gradient classique en fonction du miroir utilisé dans le capteur catadioptrique.

D'autres auteurs ont également choisi d'utiliser la sphère d'équivalence, par exemple, dans [15], pour la détection de droites et pour la détection de rectangles dans le travail de Bazin et al. [4]. Cependant, ces traitements haut-niveau nécessitent une étape de détection de contours qui est effectuée sur l'image omnidirectionnelle avant d'être projetée sur la sphère pour que le traitement haut-niveau soit réalisé. L'apport de notre travail, comme nous l'avons déjà précisé, est donc évident puisqu'il permettra d'effectuer traitement bas-niveau et haut-niveau dans le même espace.

Nous finissons cette présentation de la vision omnidirectionnelle par un des aspects les plus aboutis : la calibration.

#### 1.2.4 Calibration

Le calibration consiste à estimer les paramètres intrinsèques du capteur. Dans le cadre de caméras catadioptriques, ces paramètres sont les paramètres de la caméra à proprement dit, mais aussi les paramètres du miroir utilisé. Le calibration étant un domaine très étudié en vision omnidirectionnelle, nous proposons au lecteur qui vou-

dra avoir un descriptif plus poussé des différentes méthodes de se référer à [31], [42]. Bien que cela ne soit pas le sujet de ce travail, nous présentons ici les différents types de calibrage possibles pour des capteurs catadioptriques.

Le calibrage intrinsèque estime les paramètres intrinsèques de la caméra en utilisant l'image du miroir et les données du fabricant du miroir.

D'autres méthodes utilisent pour calibrer le capteur des mires externes, qui sont totalement connues ou dont seulement certains éléments (droites, points...) sont connus. Les mires représentent des motifs connus que l'on observe pour déterminer les paramètres. La figure (1.10) présente un exemple d'image omnidirectionnelle obtenue quand le capteur catadioptrique observe une mire externe. Cette image fera partie de nos images de référence dans les différents tests que nous proposerons pour tester les traitements que nous détaillerons dans la suite.

Pour finir, l'autocalibrage, qui n'utilise pas de mire, nécessite deux images et leur mise en correspondance.

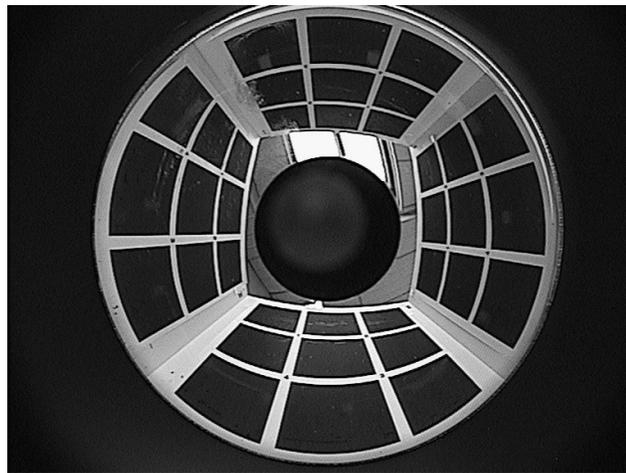


FIG. 1.10 – Image omnidirectionnelle d'une mire

Nous supposons dans la suite que notre système est parfaitement calibré.

Nous avons choisi un schéma de traitement des images omnidirectionnelles qui utilise la sphère équivalente. Dans ce qui va suivre, nous nous attacherons donc à présenter les différents traitements que l'on peut effectuer sur la sphère. Cet espace n'étant pas l'espace usuel de traitement d'images, il nous faut repenser tous les outils qui existent dans le cas d'images planes. Nous nous proposons par conséquent de développer des outils mathématiques adaptés dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Outils mathématiques sur la sphère équivalente

Le traitement d'images planes implique dans la plupart des cas une étape de filtrage avec un opérateur adapté. Dans le plan, on dispose de multiples outils pour exprimer mathématiquement ces opérations de filtrage.

La question que l'on peut alors se poser est de savoir si l'on peut construire de tels outils sur la sphère.

### 2.1 Projection stéréographique

Avant de parler plus précisément des outils de filtrage définis sur la sphère, rappelons brièvement la définition de la projection stéréographique.

On paramètre la sphère unité, plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , en utilisant les coordonnées sphériques (figure(2.1)) : soit  $P \in S^2$

$$P(\theta, \varphi) = (\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))$$

avec  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , angle de longitude et  $\theta \in [0, \pi]$ , angle de colatitude (latitude +  $\pi/2$ ).

La définition de la projection stéréographique à partir du pôle Nord vers le plan équatorial est la suivante (figure (2.2)) :

A tout point  $P$  de la sphère autre que le pôle Nord  $P_N$ , on associe le point  $P'$  intersection du plan équatorial et de la droite  $(P_N P)$ . Dans notre cas, les points de la demi-sphère supérieure se projettent à l'extérieur du cercle équatorial et les points de la demi-sphère inférieure se projettent à l'intérieur.

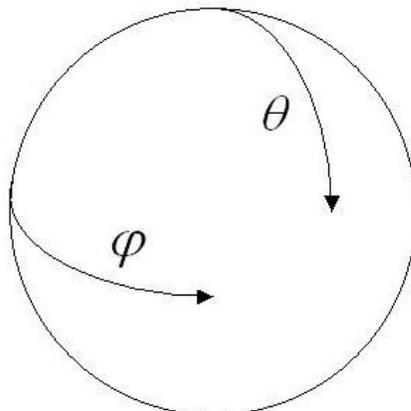


FIG. 2.1 – Angles de paramétrisation de la sphère

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes du point  $P$  sur la sphère et  $(\theta, \varphi)$  les coordonnées équivalentes sphériques.

Soient  $(X, Y)$  les coordonnées de  $P'$  dans le plan équatorial de la sphère unité.

En utilisant le théorème de Thalès, on montre que

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}.$$

D'où avec les coordonnées sphériques

$$X = \frac{\sin(\theta) \cos(\varphi)}{1 - \cos(\theta)}, \quad Y = \frac{\sin(\theta) \sin(\varphi)}{1 - \cos(\theta)}.$$

On peut aussi chercher  $P'$  en fonction des ses coordonnées polaires  $P'(R, \gamma)$ .

$$R = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}, \quad \gamma = \varphi.$$

Cette dernière relation nous rappelle que la projection stéréographique est une application conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles.

Pour la projection stéréographique inverse, qui à un point  $P'(X, Y)$  du plan équatorial associe le point  $P(x, y, z)$  (ou  $P(\theta, \varphi)$  en coordonnées sphériques) de la sphère unité, les formules sont les suivantes :

$$(x, y, z) = \left( \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{-1 + X^2 + Y^2}{1 + X^2 + Y^2} \right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-1 + X^2 + Y^2}{1 + X^2 + Y^2}\right) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Notons que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  puisque  $P$  appartient à la sphère unité.

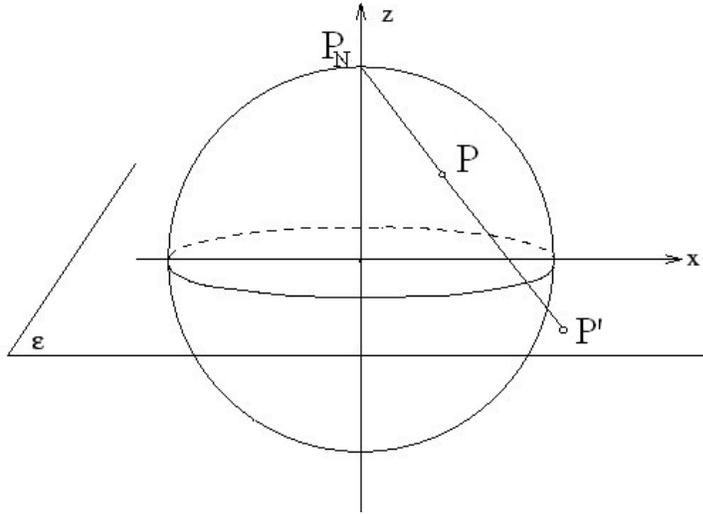


FIG. 2.2 – Projection stéréographique

La projection stéréographique est une application bijective de la sphère privée du pôle Nord vers le plan équatorial, donc en considérant le schéma de traitement que l'on a proposé précédemment, si aucun traitement n'est effectué sur l'image sphérique, on retrouvera l'image omnidirectionnelle originale.

Après avoir décrit la projection stéréographique et son application inverse, l'étape qui reste à étudier, selon notre schéma précédent, est l'étape de traitement de l'image sphérique.

Pour construire nos opérateurs sur la sphère, on se propose de travailler par analogie avec ce qui existe pour le plan. Commençons par redonner les outils nécessaires au traitement d'images planes.

## 2.2 Outils existants sur le plan

Comme nous l'avons déjà rappelé précédemment, le traitement d'images classiques nécessite généralement d'effectuer des filtrages. Ces opérations s'effectuent mathématiquement par un produit de convolution entre l'image et un opérateur, et se calculent plus facilement avec la transformée de Fourier. Etant donné que nous

implémentons la plupart des filtres dans le domaine de Fourier, nous allons tout d'abord rappeler la transformée de Fourier pour des images planes.

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . On définit la transformée de Fourier de  $f$  par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Notons que la transformée de Fourier de  $f$  est encore une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

Etant donnée la formule de convolution sur le plan :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x - y) g(y) dy$$

(avec  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$ ), il est facile de montrer que  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ . Cette propriété est essentielle pour une implémentation rapide des opérateurs de filtrage.

De plus, la convolution sur le plan est commutative et associative.

Cependant, derrière ces formules simples se cache un problème géométrique. Le plan est un objet géométrique invariant par translation affine, les translations affines étant intimement liées à la définition de la convolution. Mais pour la sphère, le problème est autre.

## 2.3 Action de groupe sur la sphère

Un objet géométrique peut être défini comme un objet invariant par l'action d'un groupe.

Nous allons donc commencer par rappeler brièvement quelques notions générales sur la théorie des groupes, avant de nous concentrer sur le cas qui nous intéresse : la sphère unité.

On dit qu'un groupe  $G$  agit sur l'ensemble  $X$  si à tout  $g \in G$  correspond une action de  $G \times X$  vers  $X$  qui au couple  $(g, x)$  associe l'élément  $g(x)$  dans  $X$  et qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1) pour tout  $x$  de  $X$ , on doit avoir  $Id(x) = x$  où  $Id$  est l'élément neutre de  $G$
- 2) pour tout couple  $(g, g')$  d'éléments de  $G$  et pour tout  $x$  de  $X$ , il faut que  $(gg')x = g(g'x)$

Par exemple, le groupe des isométries affines (rotations, translations) agit sur le plan  $\mathbb{R}^2$ .

Si pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $X$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $gx = y$ , alors on dit que l'action de  $G$  est transitive. Par exemple, il y a toujours une rotation qui envoie un point de la sphère sur un autre point donné.

Un espace  $X$  sur lequel agit un groupe de Lie transitif est appelé espace homogène. (Rappelons qu'un groupe de Lie est une variété différentielle réelle ou complexe munie d'une structure de groupe, où les applications de multiplication et d'inversion sont différentiables.)

Considérons tous les éléments  $h$  de  $G$  qui laissent  $a$  (un point fixé de  $X$ ) invariant :  $ha = a$ . Ces éléments  $h$  constituent un sous-groupe  $H$  de  $G$  que l'on appelle stabilisateur ou sous-groupe stationnaire du point  $a$ . Quand  $G$  agit transitivement sur  $X$ , tous les sous-groupes stationnaires des points de  $X$  sont conjugués les uns aux autres. Le sous-groupe  $H$  devient le sous-groupe stationnaire de la classe  $eH = H$ . Dans ce cas, on note  $X$  par  $G/H$ .

Dans le cas de la sphère qui nous intéresse ici,  $G$  est  $SO(3)$  le groupe des rotations autour du centre de la sphère. Ce groupe est isomorphe au groupe des matrices orthogonales d'ordre 3 et de déterminant 1.

$SO(3)$  agit transitivement sur la sphère  $S^2$ , donc  $S^2$  est un espace homogène pour  $SO(3)$ .

Soit  $n_0 = (0, 0, 1)$  le pôle Nord de la sphère, le stabilisateur associé à ce point est le groupe  $SO(2)$ .

Par conséquent, on peut écrire  $S^2 = SO(3)/SO(2)$ .

De plus, nous avons les propositions suivantes :

**Proposition 1**  $SO(n)$  est compact.

Preuve :  $SO(n)$  est un sous-ensemble de  $M_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$ , qui est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Par conséquent,  $SO(n)$  est compact si et seulement si c'est un fermé borné.

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n)$$

avec  $O(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de taille  $n$  et  $SL(n)$  le groupe spécial linéaire, c'est-à-dire, l'ensemble des matrices de déterminant 1.

## 28 CHAPITRE 2. OUTILS MATHÉMATIQUES SUR LA SPHÈRE ÉQUIVALENTE

Les applications, définies sur  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $\Phi_1 : M \mapsto MM^t - Id$  et  $\Phi_2 : M \mapsto \det M$  sont continues.

$$SO(n) = \Phi_1^{-1}(I_n) \cap \Phi_2^{-1}(\{1\})$$

où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$ .

Donc  $SO(n)$  est fermé.

D'autre part, en notant  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\|M\| = \sup_{Mx \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = 1$$

car  $M$  est une isométrie.

$SO(n)$  est donc borné, ce qui conclut la démonstration. ■

**Proposition 2** *Tout groupe topologique localement compact  $G$  possède une mesure invariante à gauche ( $\mu(gB) = \mu(B)$  pour toute partie borélienne  $B$  de  $G$  et pour tout  $g \in G$ ), qui prend des valeurs finies et que l'on appelle mesure de Haar.*

Nous ne donnerons pas ici la preuve de la proposition précédente sur l'existence de la mesure de Haar, mais signalons que c'est Haar [22] qui le premier a montré l'existence sous des hypothèses plus restrictives et von Neumann [33] a montré l'unicité à un scalaire près de cette mesure.

Dans le cas qui nous intéresse, nous en déduisons donc qu'il existe une mesure de Haar sur  $SO(3)$ .

De plus, comme le rappelle Vilenkin [44], on peut également définir une mesure de Haar sur  $S^2$ .

En effet, si  $H$  est un sous-groupe localement compact d'un groupe compact  $G$ , alors par l'invariance à gauche de la mesure  $dg$  sur  $G$ , on peut définir une mesure  $dx$  sur l'espace homogène  $X = G/H$  en posant  $\int_X f(x)dx = \int_G f(\phi(g))dg$  où  $\phi : g \mapsto gH$  est une application définie de  $G$  vers  $X$ . La mesure  $dx$  ainsi définie est également invariante.

Rappelons la définition suivante :

**Définition 1** *Une mesure  $\mu$  sur  $X$  est dite invariante à gauche par rapport au groupe  $G$ , qui agit sur  $X$  si  $\mu(x) = \mu(gx)$  pour tout  $x \in X$  et pour tout  $g \in G$ . Cela implique que  $\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f(gx)d\mu(x)$  pour tout  $g \in G$  et pour toute fonction  $f$  continue à support compact sur  $X$ .*

Pour ce qui nous concerne,  $H = SO(2)$  et  $G = SO(3)$  qui sont tous les 2 des groupes compacts d'après la proposition vue précédemment, donc l'existence d'une mesure de Haar sur  $S^2$  est bien justifiée.

D'un point de vue pratique, pour le groupe  $G = SO(3)$  que nous considérons, nous allons paramétrer les rotations par les angles d'Euler.

Soient  $R \in SO(3)$ , et  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles d'Euler avec  $\alpha$  et  $\gamma \in [0, 2\pi[$  et  $\beta \in [0, \pi[$ .

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

où  $R_z$  et  $R_y$  sont les rotations par rapport aux axes z et y respectivement.

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$dR = \sin \beta d\gamma d\beta d\alpha$  représente alors la mesure de Haar sur  $SO(3)$  que nous utiliserons par la suite. On vérifie aisément que c'est une mesure invariante par rotation.

Etant donné les résultats que nous venons de rappeler, nous pouvons maintenant étudier plus précisément ce qui se passe sur la sphère unité.

## 2.4 Harmoniques sphériques

Rappelons que l'on paramètre la sphère unité, plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , en utilisant les coordonnées sphériques : soit  $\eta \in S^2$

$$\eta(\theta, \varphi) = (\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta)),$$

avec  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , angle de longitude et  $\theta \in [0, \pi]$ , angle de colatitude (latitude +  $\pi/2$ ).

Par conséquent, l'intégration d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  (l'espace de Lebesgue sur la sphère) est définie par :

$$\int_{\eta \in S^2} f(\eta) d\eta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

A partir du paramétrage des rotations avec les angles d'Euler, on obtient facilement l'égalité suivante :

$$\int_{SO(3)} f(Rn_0) dR = 2\pi \int_{S^2} f(\eta) d\eta,$$

où  $n_0 = (0, 0, 1)$  représente le pôle Nord de la sphère unité.

Nous avons rappelé dans ce qui précède les outils existants pour le traitement d'images perspectives, par exemple la transformée de Fourier. Dans ce qui suit, nous allons procéder comme pour le plan pour définir une transformée de Fourier sphérique.

Les harmoniques sphériques  $Y_{lm} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  sont les fonctions propres de l'opérateur de Laplace sphérique (ou opérateur de Laplace-Beltrami)  $\Delta_{S^2}$  :

$$\text{avec } \Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\Delta_{S^2} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}.$$

Soit  $Y_{lm}$  l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$  :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi} \quad \text{pour } m \geq 0,$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \overline{Y_{l,-m}(\theta, \varphi)} \quad \text{pour } m < 0,$$

où les  $P_l^m(x)$  sont les polynômes de Legendre associés de degré  $l$  et d'ordre  $m$ .

Les fonctions  $P_l^m(x)$  se construisent à partir des polynômes de Legendre  $P_l$  qui vérifient la formule de Rodrigues suivante :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Par conséquent, on définit les polynômes de Legendre associés par :

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Soit de façon plus explicite,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2 - 1)^l.$$

En pratique, il suffit de calculer  $P_l^m(x)$  pour  $m \geq 0$  étant donné que l'on a :

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

On peut remarquer que les harmoniques sphériques de degré  $l$  forment un sous-espace de  $L^2(S^2)$  de dimension  $2l + 1$  qui est invariant sous l'action des rotations (autour de l'axe  $z$ ) de la sphère.

Remarquons que :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'm'}}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

où  $\delta_{l,l'}$  vaut 1 si  $l = l'$  et 0 sinon.

Etant donné que les harmoniques sphériques forment une base orthonormale pour  $L^2(S^2)$ , chaque fonction  $f \in L^2(S^2)$  s'écrit à l'aide des harmoniques sphériques sous la forme suivante :

$$f = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \widehat{f}_{lm} Y_{lm},$$

avec

$$\widehat{f}_{lm} = \widehat{f}(l, m) = \langle f, Y_{lm} \rangle,$$

où le produit scalaire sur la sphère est défini par

$$\langle f, h \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \overline{h(\theta, \varphi)} \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

L'ensemble des coefficients  $\widehat{f}_{lm}$  est appelé transformée de Fourier sphérique ou spectre de  $f$ .

Le théorème de Parseval se généralise de la façon suivante :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^2(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \widehat{f}_{lm}^2,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \widehat{f}_{lm} \widehat{g}_{lm}.$$

Définissons maintenant les fonctions à bande-limitée (ou à spectre borné).

On dit qu'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  est à bande-limitée de largeur de bande  $B \geq 0$  si  $\widehat{f}_{lm} = 0 \quad \forall l \geq B$  :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{m=-l}^l \widehat{f}_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Notons une propriété intéressante de ces fonctions : la rotation d'une fonction à bande-limitée est aussi une fonction à bande-limitée avec la même largeur de bande.

Driscoll et Healy ([14]) ont établi le théorème d'échantillonnage suivant

**Théorème 2** Soit  $f \in L^2(S^2)$  de largeur de bande  $B$ .

Alors pour chaque  $|m| \leq l < B$ ,

$$\hat{f}_{lm} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \sum_{j=0}^{2B-1} \sum_{k=0}^{2B-1} a_j^{(B)} f(\theta_j, \varphi_k) \overline{Y_{lm}(\theta_j, \varphi_k)},$$

où les points d'échantillonnage sont choisis sur la grille équiangulaire (appelée aussi grille lat-lon pour latitude-longitude) avec  $\theta_j = \frac{\pi(2j+1)}{4B}$  et  $\varphi_k = \frac{\pi k}{B}$ .

Les  $a_j^{(B)}$  sont des poids déterministes destinés à compenser le sur-échantillonnage aux pôles.

Cependant, ce théorème d'échantillonnage n'est valable que pour les fonctions à bande-limitée. Pour cette raison, on peut être amené à projeter notre fonction  $f \in L^2(S^2)$  sur l'espace des fonctions à bande-limitée à une certaine largeur de bande  $N$ . Cette projection orthogonale est appelée *filtre sphérique* avec une largeur de bande  $N$ . Cette opération est aussi désignée parfois par *troncature triangulaire*.

Nous venons d'introduire la notion de transformée de Fourier sphérique, définie comme dans le cas du plan à l'aide des solutions de l'équation de Laplace. Dans la partie qui va suivre, nous allons présenter un autre outil mathématique sphérique indispensable au traitement d'images, le produit de convolution.

## 2.5 Convolution sur la sphère

Nous présentons ici deux définitions qui ont été implémentées pour effectuer un produit de convolution sur la sphère : celle proposée par Driscoll et Healy et celle utilisée, entre autres par Daniilidis et Wandelt.

Commençons par quelques notations.

On représente la sphère  $S^2$  comme le quotient  $SO(3)/SO(2)$  où  $SO(3)$  est le groupe des rotations qui agit sur la sphère.

La rotation d'une fonction  $f$  définie sur la sphère par un élément  $g \in SO(3)$  est alors

définie avec l'opérateur  $\Lambda_g$  tel que :

$$\Lambda_g f(\eta) = f(g^{-1}\eta) \forall \eta \in \mathbb{S}^2.$$

Soit  $L^2(SO(3)) \equiv L^2(SO(3), dR)$  l'espace de Lebesgue sur  $SO(3)$  où  $dR$  est la mesure de Haar sur  $SO(3)$  vue précédemment.

**Définition 2** Soit  $f \in L^2(S^2)$  et  $g \in L^1(S^2)$ , la convolution entre  $f$  et  $g$  est la fonction sur  $SO(3)$  définie par :

$$(f \tilde{*} g)(R) = \int_{S^2} f(R^{-1}\eta)g(\eta)d\eta.$$

On a :

$$f \tilde{*} g \in L^2(SO(3)),$$

et

$$\|f \tilde{*} g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1.$$

Un problème important se pose : alors que les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur la sphère, le produit de convolution est défini sur le groupe des rotations, par conséquent, il est évident que le produit de convolution n'est pas associatif. De plus  $f \tilde{*} \delta_0(R) = f(R^{-1}n_0)$ , où  $\delta_0$  est défini de la façon suivante

$$f(n_0) = \int_{S^2} f(\eta)\delta_0(\eta)d\eta.$$

D'où un problème de symétrie dans cette définition du produit de convolution.

Voyons maintenant une autre définition de la convolution, introduite par Driscoll et Healy.

**Définition 3** Soit  $f, h \in L^2(S^2)$ , on a :

$$(f * h)(\eta) = \int_{SO(3)} f(Rn_0)h(R^{-1}\eta)dR,$$

où  $\eta \in S^2$ ,  $n_0 = (0, 0, 1)$  représente le pôle Nord de la sphère unité.

Pour arriver à cette définition, on peut suivre le raisonnement suivant :

considérons la convolution de deux fonctions  $f$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  comme

$$(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x')h(x - x')dx'.$$

Introduisons l'opérateur de translation  $T_{x'}$  tel que  $T_{x'}(x) = x - x'$ , alors

$$(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(T_{x'}(0))h(T_{x'}^{-1}(x))dx'.$$

Sur la sphère, ce sont les rotations qui agissent alors que ce sont les translations qui opèrent sur la droite réelle.

On identifie aussi le pôle Nord dans le cas sphérique avec l'origine dans le cas linéaire. On retrouve ainsi une analogie entre la convolution sur la droite réelle et la convolution définie sur la sphère par Driscoll et Healy.

L'efficacité de cette deuxième définition devient évidente grâce au théorème de convolution, démontré par Driscoll et Healy.

**Théorème 3** Soient  $f, h \in L^2(S^2)$ , en utilisant la définition 2, on a

$$(\widehat{f * h})_{lm} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \widehat{f}_{lm} \widehat{h}_{l0}.$$

On peut remarquer que seuls les coefficients  $\widehat{h}_{lm}$  avec  $m = 0$  interviennent dans le théorème.

Ces coefficients correspondent aux harmoniques zonales  $Y_{l0}$  et représentent donc la partie invariante par rotation autour de l'axe  $(0z)$  du filtre  $h$ .

$$Y_{l0}(\eta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos(\theta)); \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Notons également que ce théorème prouve que le produit de convolution défini par Driscoll et Healy n'est pas commutatif, ce qui est logique étant donné que  $SO(3)$  n'est pas un groupe commutatif.

Cependant, en utilisant la définition même de la convolution et par un simple changement de variable, on peut montrer que cette convolution est associative. Cette propriété interviendra par exemple dans la construction de filtre, puisque convoler

une image bruitée revient à additionner la convolée de l'image originale et la convolée du bruit.

Une autre différence avec la convolution sur la droite réelle est que l'on a ici

$$f * \delta_0(\eta) = 2\pi f(\eta)$$

Avec la définition de convolution de Driscoll-Healy, on peut aussi démontrer l'inégalité suivante :

$$\|f * g\|_{L^1(S^2)} \leq 2\pi \|f\|_{L^1(S^2)} \|g\|_{L^1(S^2)}.$$

En vue des applications, nous avons choisi la deuxième définition du produit de convolution. Elle nous permet une construction théorique des filtres plus simple et une implémentation rapide grâce au théorème de convolution. Dorénavant et sauf mention explicite du contraire, le produit de convolution sphérique désignera par défaut le produit de convolution de Driscoll-Healy.



# Chapitre 3

## Traitement des images définies sur la sphère

A partir de la définition vue précédemment du produit de convolution de Driscoll-Healy, nous allons définir un opérateur de filtrage qui agira sur des images sphériques. Dans un premier temps, nous présentons des généralités sur les opérateurs de filtrage, puis nous construisons des filtres sphériques adaptés dans un premier temps au débruitage d'images sphériques, puis à la détection de contours dans ces mêmes images.

### 3.1 Généralités

Comme nous l'avons fait auparavant pour les outils mathématiques de base, nous allons travailler par analogie pour construire un opérateur de filtrage sphérique. Commençons donc par rappeler ce qui se passe pour les images planes.

#### 3.1.1 Rappel du filtrage d'images perspectives

On définit un filtre de convolution  $L$  comme étant une application linéaire, continue et stationnaire, c'est-à-dire commutant avec les translations, i.e.  $L \circ \tau_y = \tau_y \circ L \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$  où  $\tau_y$  est une application telle que  $\tau_y(f(x)) = f(x - y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$  avec  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

Le filtre est donc invariant sous les actions des translations.

On note  $h = L(\delta_0)$  la réponse impulsionnelle du filtre.

Il en découle la définition de l'opérateur de filtrage :  $L(f) = f * h$  où  $*$  représente le produit de convolution classique pour des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

Remarquons que par les propriétés du produit de convolution sur le plan (commutativité, élément neutre...), cette formule est cohérente et facile à implémenter par des transformées de Fourier rapides puisque  $\widehat{L(f)} = \hat{f}\hat{h}$ .

### 3.1.2 Opérateur de filtrage sur la sphère

Dans ce qui suit, nous noterons comme pour les images planes,  $L$  l'opérateur de filtrage et  $h$  la réponse impulsionnelle du filtre sphérique.

Comme il a été vu précédemment, le groupe des rotations  $SO(3)$  agit sur la sphère  $S^2$ .

De plus, avec le produit de convolution choisi,  $\forall R \in SO(3)$ , on a

$$(f \circ R) * g = (f * g) \circ R.$$

En effet par un changement de variable, on montre que

$$(f \circ R) * g(\eta) = \int_{SO(3)} f \circ R(\rho n_0) g(\rho^{-1} \eta) d\rho = \int_{SO(3)} f(\gamma n_0) g(\gamma^{-1} R \eta) d\gamma = ((f * g) \circ R)(\eta).$$

Par conséquent, si on définit notre opérateur de filtrage sphérique par

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} f * h,$$

et si on note  $\gamma_R(f)(\eta) = f(R^{-1}\eta)$ , l'opérateur de rotation, on a

$$\begin{aligned} L \circ \gamma_R(f)(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \gamma_R(f) * h(\eta) = \frac{1}{2\pi} (f \circ R^{-1}) * h(\eta) \\ &= \frac{1}{2\pi} (f * h) \circ R^{-1}(\eta) = \gamma_R(L(f))(\eta). \end{aligned}$$

Donc l'opérateur de filtrage est invariant sous les actions des rotations.

Une différence est à noter cependant. Etant donné qu'ici le produit de convolution n'est plus commutatif, on n'a plus  $h = L(\delta_0)$  comme dans le cas plan. On obtient alors  $h$  par  $L'(\delta_0)$  où  $L'(f) = \frac{1}{2\pi} h * f$ . En effet,  $L'(\delta_0) = \frac{1}{2\pi} h * \delta_0 = \frac{1}{2\pi} (2\pi h) = h$ .

A partir du théorème vu précédemment, on a donc

$$\widehat{L(f)}(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{f}(l, m) \hat{h}(l, 0).$$

On pourra donc implémenter de façon efficace le filtrage en utilisant par exemple le théorème d'échantillonnage et les algorithmes de FFT pour la sphère développés par Healy, Rockmore, Kostelec et Moore [23].

### 3.1.3 Gaussiennes sphériques

Dans le cadre du traitement d'images perspectives, que ce soit pour lisser des images ou faire de la détection de contours, une technique simple de convolution avec la fonction gaussienne est souvent utilisée. Cette fonction est en effet l'approximation du détecteur de contours optimal proposé par Canny [8].

On se propose donc de trouver l'équivalent de la gaussienne sur la sphère. Plusieurs constructions sont disponibles dans la littérature. Commençons par celle que nous allons privilégier dans la suite.

#### Fonction de Green

Thomas Bülow ([7]) a proposé de déterminer la fonction de Green, en tant que solution de l'équation de diffusion sphérique, puis de considérer cette fonction comme l'extension de la gaussienne sur la sphère.

Cette construction est intuitive puisque sur le plan, la gaussienne est solution de l'équation de diffusion.

L'équation de diffusion sphérique est

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} u(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} u(\theta, \varphi, t),$$

avec  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  l'opérateur de Laplace-Beltrami vu précédemment,  $(\theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques,  $k$  le coefficient de diffusion et  $t$  représentera un paramètre d'échelle.

Rappelons que les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur de Laplace sphérique :

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_{l,m} = -l(l+1)Y_{l,m}.$$

Par conséquent, on vérifie facilement que les fonctions

$$u_{l,m}(\theta, \varphi, t) = Y_{l,m}(\theta, \varphi) \exp(-l(l+1)kt)$$

sont solutions de l'équation de diffusion sphérique.

Pour obtenir la fonction de Green  $G$ , on impose comme condition initiale :

$$u(\theta, \varphi, 0) = G(\theta, \varphi, 0) := \delta_0(\theta, \varphi).$$

En utilisant la décomposition du Dirac sphérique dans la base des harmoniques sphériques, on obtient :

$$G(\cdot, 0) = \delta_0 = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l,0} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} u_{l,0}(\cdot, 0).$$

D'où finalement pour la fonction de Green

$$\begin{aligned}
 G(\theta, \varphi, t) &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} u_{l,0}(\theta, \varphi, t) \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l,0}(\theta, \varphi) e^{-l(l+1)kt} \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos(\theta)) e^{-l(l+1)kt}.
 \end{aligned}$$

On effectue ensuite la transformée de Fourier sphérique pour trouver :

$$\widehat{G(\cdot, t)}(l, m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} e^{-l(l+1)kt} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour être complet, on donne la définition d'autres noyaux possibles pour le filtre sphérique.

### Gaussienne sphérique

En partant de la définition de la gaussienne sur le plan, on peut obtenir la gaussienne sphérique en opérant une projection stéréographique inverse

$$G_s(\theta, \varphi, t) = e^{-(\tan^2(\theta/2))/t}.$$

La gaussienne sphérique a été entre autres utilisée par Daniilidis dans ([13]).

### Noyau de Poisson

Le noyau de Poisson est donné par la fonction

$$\begin{aligned}
 P(\theta, \varphi, h) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1) h^n P_n(\cos(\theta)) \\
 &= \frac{1-h^2}{(1-2h \cos(\theta) + h^2)^{3/2}} \quad \text{pour } h \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Cette fonction est solution de l'équation

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} P(\theta, \varphi, h) = -h \frac{\partial^2}{\partial h^2} (h P(\theta, \varphi, h)).$$

Calculons la transformée de Fourier de cette fonction.

$$\widehat{P(\cdot, h)}(l, m) = \begin{cases} \sqrt{(2l+1)4\pi} & h^l & \text{if } m = 0, \\ 0 & & \text{sinon .} \end{cases}$$

Ces fonctions servent à obtenir des identités approchées, qui ont été utilisées entre autres pour la construction d'ondelettes sphériques dans ([41]) et ([43]).

## 3.2 Lissage

### 3.2.1 Généralités

L'opération de lissage peut intervenir dans plusieurs cas. Tout d'abord pour débruiter l'image. Ce traitement a alors pour but d'éliminer le bruit présent dans l'image. Rappelons qu'un bruit représente par exemple une dégradation ponctuelle aléatoire qui peut se produire lors de l'acquisition ou la transmission de l'image. On essaie d'améliorer la qualité de l'image et de retrouver l'image originale à partir de l'image bruitée.

La deuxième utilisation importante du lissage d'images sert à les simplifier en enlevant par exemple des détails insignifiants. Cette opération intervient souvent comme prétraitement pour d'autres techniques comme la détection de contours que nous verrons par la suite.

Dans la partie précédente, nous avons proposés plusieurs approches permettant d'étendre la notion de gaussiennes à la sphère. Pour les images planes, la gaussienne est une fonction très connue pour le lissage d'images. Elle intervient notamment comme prétraitement dans le filtre de Canny. Nous allons développer ici d'autres outils, plus spécifiquement dédiés au débruitage d'images sphériques.

Le bruit possède des propriétés différentes suivant sa nature. On peut citer par exemple : bruit gaussien, bruit poissonien, bruit poivre et sel.

En pratique, on considère souvent un bruit blanc gaussien additif.

Rappelons que si l'on note  $n_t$  le processus d'un bruit blanc, le bruit, qui est donc une variable aléatoire, aura les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(n_t) &= 0, \\ \mathbb{E}((n_t)^2) &= \sigma^2, \quad \text{où } \sigma \text{ est l'écart-type du bruit} \\ \mathbb{E}(n_t n_\tau) &= 0 \quad \text{pour } t \neq \tau. \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}$  est l'espérance mathématique.

Notons que nous supposons ici que le bruit est défini sur la sphère car nous nous plaçons ici dans le cadre du traitement d'images sphériques. Mais, dans le cadre d'images omnidirectionnelles à proprement parler, le bruit est défini sur les images omnidirectionnelles puisque par exemple c'est un bruit provenant du capteur.

Dans le cas d'images planes, le filtre de Wiener est un outil classique de lissage. Nous nous proposons donc de commencer par construire un filtre de Wiener adapté aux images sphériques afin de tester ses performances pour le débruitage de ces images.

### 3.2.2 Filtre de Wiener

On considère notre image originale  $f \in L^2(S^2)$ , bruitée par un bruit additif  $n$ . On supposera dans la suite de cette partie que  $n$  est un bruit blanc gaussien, tout comme dans la construction du filtre de Wiener classique ([45]).

On notera  $d = f + n$ , la donnée, c'est-à-dire l'image bruitée.

On cherche à obtenir la meilleure estimation possible  $g$  de  $f$  à partir de notre donnée  $d$ .

Pour cela on va essayer d'obtenir le maximum du SNR (Signal to Noise Ratio, c'est-à-dire rapport signal à bruit) :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\mathbb{E}(\|f\|^2)}{\mathbb{E}(\|f - g\|^2)},$$

ce qui revient à minimiser l'erreur quadratique moyenne

$$e = \mathbb{E}(\|f - g\|^2)$$

où  $\|\cdot\|$  représentera à partir de maintenant la norme de  $L^2(S^2)$ .

L'image  $f$  et l'estimateur  $g$  sont des fonctions de  $L^2(S^2)$ , dont les harmoniques sphériques forment une base orthonormée. Par conséquent, on peut utiliser le théorème de Riesz-Fisher

$$e = \mathbb{E} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \left| \hat{f}(l, m) - \hat{g}(l, m) \right|^2 \right).$$

On se propose de chercher  $g$  comme le résultat d'un filtre (de réponse impulsionnelle  $h$ ) appliqué à la donnée  $d$ , ce qui équivaut à écrire  $g$  sous la forme :  $g = \frac{1}{2\pi} d * h$ .

Par conséquent, en appliquant le théorème de convolution de Driscoll-Healy, on obtient :

$$e = \mathbb{E} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \left| \hat{f}(l, m) - \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{d}(l, m) \hat{h}(l, 0) \right|^2 \right).$$

On doit donc trouver le filtre  $h$  qui minimise  $e$ .

Afin qu'il agisse de la même façon quelque soit son emplacement sur la sphère, on souhaite que ce filtre soit invariant par rotation par rapport à l'axe  $(0z)$ , c'est-à-dire de la forme

$$h(\eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{h}(k, 0) Y_{k,0}(\eta).$$

Cela revient donc à déterminer les  $\hat{h}(k, 0)$  qui minimisent  $e$ .

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{h}(k, 0)} = \mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \hat{h}(k, 0)} \left[ \sum_{|m| \leq k} \left| \hat{f}(k, m) - \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{d}(k, m) \hat{h}(k, 0) \right|^2 \right] \right)$$

En utilisant le fait que  $|z|^2 = z\bar{z}$  avec  $\bar{z}$  le conjugué de  $z$  et le fait que  $\hat{h}(k, 0)$  est réel, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \hat{h}(k, 0)} &= \mathbb{E} \left( \sum_{|m| \leq k} (\hat{f}(k, m) - \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{d}(k, m) \hat{h}(k, 0)) \overline{(-\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{d}(k, m))} \right) \\ &+ \mathbb{E} \left( \sum_{|m| \leq k} (\hat{f}(k, m) - \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{d}(k, m) \hat{h}(k, 0)) \overline{(-\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{d}(k, m))} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \hat{h}(k, 0)} = 0 &\Leftrightarrow \mathbb{E} \sum_{|m| \leq k} \left( \hat{f}(k, m) \overline{\hat{d}(k, m)} + \overline{\hat{f}(k, m)} \hat{d}(k, m) \right) \\ &= 2\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \hat{h}(k, 0) \mathbb{E} \left( \sum_{|m| \leq k} \hat{d}(k, m) \overline{\hat{d}(k, m)} \right) \\ &\Leftrightarrow \hat{h}(k, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{\mathbb{E} \sum_{|m| \leq k} \left( \hat{f}(k, m) \overline{\hat{d}(k, m)} + \overline{\hat{f}(k, m)} \hat{d}(k, m) \right)}{\mathbb{E} \left( \sum_{|m| \leq k} \hat{d}(k, m) \overline{\hat{d}(k, m)} \right)} \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut intervertir somme finie et espérance mathématique.

Observons également que :

$$\overline{\mathbb{E} \hat{f}(k, m) \hat{d}(k, m)} = \mathbb{E} \overline{\hat{f}(k, m) \hat{d}(k, m)} = \mathbb{E} \overline{\hat{f}(k, m)} \overline{\hat{d}(k, m)} = \mathbb{E} |\hat{f}(k, m)|^2 + \mathbb{E} \overline{\hat{f}(k, m)} \hat{h}(k, 0)$$

L'image  $f$  et le bruit  $n$  sont, par hypothèse, indépendants, donc  $\forall(k, m)$  on a  $\mathbb{E}\hat{f}(k, m)\hat{n}(k, m) = 0$ .

De plus, en considérant que l'on a un bruit blanc d'écart-type  $\sigma$ , on a :  $\mathbb{E}|\hat{n}(k, m)|^2 = \sigma^2$ .

Comme pour le cas plan, on suppose que l'on a  $\mathbb{E}|\hat{f}(k, m)|^2 = \frac{c}{k^2}$  où  $c$  est une constante à déterminer, on obtient au final

$$\hat{h}(k, 0) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 k^2}{c}}.$$

On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 4** *La meilleure estimation linéaire, au sens des moindres carrés, sous l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien additif, est donnée par le filtre de Wiener :*

$$h(\eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 k^2}{c}} Y_{k,0}(\eta),$$

où les  $Y_{k,0}$  représentent les harmoniques zonales.

Nous allons maintenant construire l'analogie d'une autre méthode "classique" de débruitage : la méthode de régularisation de Tikhonov.

### 3.2.3 Régularisation de Tikhonov

Le débruitage est un exemple type de problème inverse, puisqu'il s'agit de retrouver l'image originale à partir de l'observation de l'image bruitée. Une méthode très utilisée pour les problèmes inverses est la régularisation de Tikhonov.

En 1977, Arsenin et Tikhonov ([39]) ont proposé une formulation que nous avons adaptée dans le cas de fonctions définies sur la sphère.

Il s'agit de déterminer  $f$  minimisant la fonctionnelle  $J$  :

$$\min_{f \in H^1(S^2)} J(f) = \min_{f \in H^1(S^2)} \int_{S^2} |\nabla f|^2 + \lambda \|f - d\|^2,$$

où comme précédemment,  $\|\cdot\|$  représente la norme de  $L^2(S^2)$ .

$\lambda$  est un paramètre devant le terme d'attache aux données et l'autre terme est un terme de régularisation.

On rappelle que pour une fonction  $f$  lisse à support compact, on a

$$\int |\nabla f|^2 = - \int f \Delta f.$$

D'où :

$$\int_{S^2} |\nabla f|^2 + \lambda \|f - d\|^2 = - \int_{S^2} f \Delta f + \lambda \|f - d\|^2.$$

Or les harmoniques sphériques, qui forment une base orthonormée de  $L^2(S^2)$ , sont les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$\Delta Y_{l,m} = -l(l+1)Y_{l,m}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{S^2} |\nabla f|^2 + \lambda \|f - d\|^2 &= - \int_{S^2} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}(l, m) Y_{lm} \right) \Delta \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{|q| \leq p} \hat{f}(p, q) Y_{pq} \right) + \lambda \|f - d\|^2 \\ &= - \int_{S^2} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}(l, m) Y_{lm} \right) \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{|q| \leq p} \hat{f}(p, q) \Delta Y_{pq} \right) + \lambda \|f - d\|^2 \\ &= \int_{S^2} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}(l, m) Y_{lm} \right) \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{|q| \leq p} \hat{f}(p, q) p(p+1) Y_{pq} \right) + \lambda \|f - d\|^2 \\ &= \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}(l, m) \right) \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{|q| \leq p} \hat{f}(p, q) p(p+1) \right) \int_{S^2} Y_{lm} Y_{pq} + \lambda \|f - d\|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} (\hat{f}^2(l, m) l(l+1)) + \lambda \|f - d\|^2. \end{aligned}$$

Puis en utilisant le théorème de Riesz-Fisher, on a

$$J(f) = \int_{S^2} |\nabla f|^2 + \lambda \|f - d\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}^2(l, m) l(l+1) + \lambda \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \left| \hat{f}(l, m) - \hat{d}(l, m) \right|^2.$$

Le but de la méthode de Tikhonov est de trouver la fonction  $f$  minimisant la fonctionnelle  $J(f)$ .

Or si l'on décompose  $f$  dans la base des harmoniques sphériques,

$$f(\eta) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{|m| \leq l} \hat{f}(l, m) Y_{l,m}(\eta) \quad \forall \eta \in S^2,$$

il suffit de trouver le minimum de la fonction  $J$  suivant les  $\hat{f}(l, m)$ .

$$\frac{\partial J(f)}{\partial \hat{f}(k, p)} = 2k(k+1)\hat{f}(k, p) + 2\lambda(\hat{f}(k, p) - \hat{d}(k, p)),$$

d'où

$$\frac{\partial J(f)}{\partial \hat{f}(k, p)} = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(k, p) = \frac{\lambda}{\lambda + k(k+1)}\hat{d}(k, p).$$

Soit  $g$  l'estimateur que l'on vient de trouver qui minimise notre fonction de départ. D'après ce qui précède,  $g$  vérifie

$$\hat{g}(k, p) = \frac{\lambda}{\lambda + k(k+1)}\hat{d}(k, p).$$

Comme pour le filtre de Wiener, l'estimateur est le résultat d'un filtrage de la donnée, c'est-à-dire,  $g = \frac{1}{2\pi}d * h$  avec  $h$  la réponse impulsionnelle du filtre de restauration.

On trouve donc

$$\hat{h}(k, 0) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{1}{1 + \frac{k(k+1)}{\lambda}},$$

où  $\lambda$  est un paramètre que l'on fera varier pour modifier l'intensité du lissage.

Remarquons que l'on retrouve un filtre de restauration de forme similaire au filtre de Wiener, ce qui est un résultat classique dans le cadre du débruitage d'images planes.

### 3.3 Détection de contours

La détection de contours est un problème important dans le traitement d'images puisque c'est une étape préalable à la reconstruction 3D et à la localisation par exemple.

Tout comme nous l'avons fait pour les outils de débruitage, nous allons ici travailler par analogie avec les traitements pour images planes, pour développer des détecteurs de contours pour des images sphériques.

Dans une image en niveau de gris, un contour est caractérisé par une discontinuité de la fonction d'intensité de l'image.

Aussi lorsque l'on représente graphiquement en fonction des pixels, la variation de l'intensité, un contour net peut être vu comme une "marche d'escalier".

La détection de contours est un traitement qui réduit la quantité d'informations en ne conservant que des propriétés structurelles essentielles.

Soit  $I$  une image sphérique (en niveaux de gris), c'est-à-dire une fonction de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $I : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\forall \eta \in \mathbb{S}^2, I(\eta)$  : niveaux de gris par exemple. On se propose tout d'abord de développer une méthode basée sur le gradient sphérique, pour détecter les contours de  $I$  (c'est-à-dire les grandes variations d'intensités de  $I$ ).

### 3.3.1 Méthode du Gradient

Soit  $a$  et  $b$ , deux points de la sphère telle que la différence  $I(b) - I(a)$  soit grande, et  $\gamma(t)$  une courbe paramétrée à valeurs dans la sphère telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(\epsilon) = b$ . Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , on a :  $I(b) - I(a) \approx DI(a)(\dot{\gamma}(0))$ , avec  $DI$  la différentielle et  $\dot{\gamma}$  la dérivée de  $\gamma$ .

Par hypothèse,  $I(b) - I(a)$  est grand, donc il existe  $\dot{\gamma}(0)$  tel que  $DI(a)(\dot{\gamma}(0))$  soit grand. Par conséquent, par définition de l'opérateur gradient,  $|\nabla I(a)|$  est grand.

Dans le but de détecter les contours de  $I$ , il suffit de trouver les points de  $I$ , où le module de gradient est maximum.

C'est la même méthode que pour des images classiques, mais en pratique, il y a une différence importante.

Dans la plupart des cas, pour détecter les contours, on doit au préalable filtrer l'image pour en retirer le bruit et les textures, avant de calculer le gradient de l'image lissée. Par le lien entre le gradient et le produit de convolution dans le plan, on peut cependant directement convoluer l'image avec le gradient de la réponse impulsionnelle du filtre.

$$\frac{\partial}{\partial x}(I *_{\mathbb{R}^2} f) = I *_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x} *_{\mathbb{R}^2} f$$

où  $*_{\mathbb{R}^2}$  est le produit de convolution sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ce lien gradient-produit de convolution est possible car le plan tangent de  $\mathbb{R}^2$  est  $\mathbb{R}^2$  lui-même et par conséquent, pour un filtre  $f$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ , son gradient se trouve également dans  $\mathbb{R}^2$ .

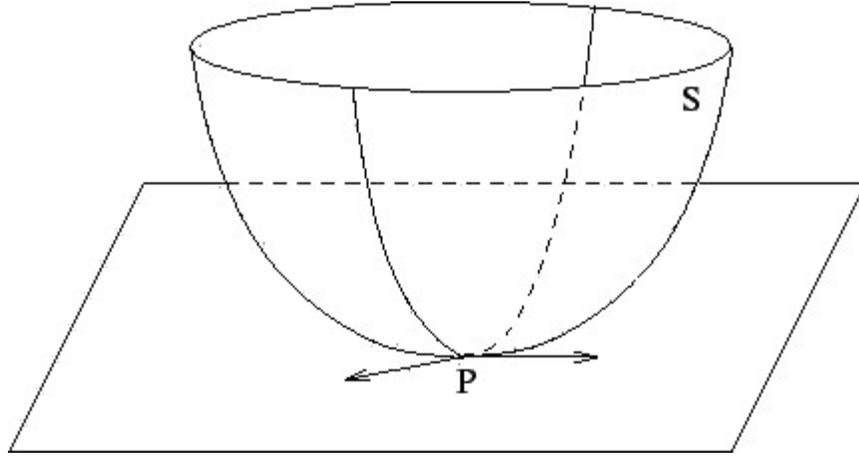


FIG. 3.1 – Exemple de plan tangent à la sphère

Pour des images sphériques, le gradient se trouve sur le plan tangent de la sphère (figure (3.1)), qui est différent de la sphère. On ne peut donc pas convoluer une image sphérique avec les composantes du gradient sphérique, car ils ne sont pas dans le même espace.

Néanmoins, on peut lisser notre image  $I$  avec un filtre sphérique  $f$ , puis calculer la norme du gradient sur cette image lissée, c'est-à-dire  $|\nabla_{\mathbb{S}^2}(I * f)|$ .

Rappelons la définition du gradient en coordonnées sphériques, dans le cadre de la sphère équivalente

$$\nabla_{\mathbb{S}^2} I(\theta, \varphi) = \frac{\partial I}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial I}{\partial \varphi} e_\varphi,$$

avec  $e_\theta$  et  $e_\varphi$  les vecteurs des coordonnées sphériques.

### 3.3.2 Détermination des filtres

#### Filtre de Roberts

En pratique, pour calculer la norme du gradient sphérique, plusieurs schémas de discrétisation sont possibles. Pour cela on suppose que la fonction d'intensité est différentiable afin de pouvoir calculer ses dérivées partielles.

On notera  $(\theta_i, \varphi_j)$  les points de la grille latitude-longitude.

Le filtre de Roberts, développé en 1965, est une approche par différences finies d'ordre 1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \theta} &= I(\theta_{i+1}, \varphi_j) - I(\theta_i, \varphi_j) \\ \frac{\partial I}{\partial \varphi} &= I(\theta_i, \varphi_{j+1}) - I(\theta_i, \varphi_j)\end{aligned}$$

Nous travaillerons avec la norme euclidienne.

$$\|\nabla_{\mathbb{S}^2} I(\theta_i, \varphi_j)\|^2 = \left| I(\theta_{i+1}, \varphi_j) - I(\theta_i, \varphi_j) \right|^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta_i)} \left| I(\theta_i, \varphi_{j+1}) - I(\theta_i, \varphi_j) \right|^2.$$

On peut remarquer qu'avec ce schéma, les contours type "marche" seront bien détectés. Cependant, en présence de bruit, qui correspond aussi à une brusque déviation des niveaux de gris, le filtre sera sûrement moins efficace, comme c'est le cas pour le filtre de Roberts pour les images planes.

Pour contrer cette sensibilité au bruit, d'autres filtres ont été développés.

### Filtre de Sobel et Prewitt

Dans le cas d'images planes, le filtre de Roberts fournit en général des contours fins et bien localisés, avec une implémentation facile et un coût de calcul très faible. Pour améliorer la robustesse du détecteur de contours au bruit, Sobel, dans une conférence de 1968 [36], puis Prewitt en 1970 ont proposé des filtres dérivatifs qui reposent toujours sur le principe de calcul de gradient avec des approximations plus fines.

L'approximation de  $\frac{\partial I}{\partial \theta}$  au point  $(\theta_i, \varphi_j)$  est donnée par le filtre :

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

appliqué à la matrice  $I(\theta_i, \varphi_j)$ .

L'approximation de  $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial I}{\partial \varphi}$  au point  $(\theta_i, \varphi_j)$  est donnée par le filtre :

$$\frac{1}{\sin(\theta_i)} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appliqué à la matrice  $I(\theta_i, \varphi_j)$ .

En pratique, l'approximation de  $\frac{\partial I}{\partial \theta}$  au point  $(\theta_i, \varphi_j)$  est donc donnée par :

$$A = \frac{1}{8} \left( -I(\theta_{i-1}, \varphi_{j-1}) - 2I(\theta_{i-1}, \varphi_j) - I(\theta_{i-1}, \varphi_{j+1}) + I(\theta_{i+1}, \varphi_{j-1}) + 2I(\theta_{i+1}, \varphi_j) + I(\theta_{i+1}, \varphi_{j+1}) \right)$$

Cette approximation se démontre facilement. En effet, si on suppose  $I$  2-fois différentiable en  $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times [0, \pi]$ , on a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la formule de Taylor suivante :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= I(\theta, \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} I(\theta, \varphi)(x - \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} I(\theta, \varphi)(y - \varphi) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} I(\theta, \varphi)(x - \theta)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} I(\theta, \varphi)(y - \varphi)^2 \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} I(\theta, \varphi)(x - \theta)(y - \varphi) + o(x - \theta, y - \varphi)^2 \end{aligned}$$

En posant  $x = \theta + s$  et  $y = \varphi + k$ , où  $s$  et  $k$  sont nos pas d'échantillonnage, on trouve :

$$\begin{aligned} I(\theta + s, \varphi + k) &= I(\theta, \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} I(\theta, \varphi)s + \frac{\partial}{\partial \varphi} I(\theta, \varphi)k \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} I(\theta, \varphi)s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} I(\theta, \varphi)k^2 \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} I(\theta, \varphi)sk + o(|(s, k)|^2) \end{aligned}$$

D'où si  $\theta_{i+1} = \theta_i + s$  et  $\varphi_{j+1} = \varphi_j + k$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I(\theta_{i+1}, \varphi_{j+1}) &= I(\theta_i + s, \varphi_j + k) \\ &\simeq I(\theta_i, \varphi_j) + \frac{\partial}{\partial \theta} I(\theta_i, \varphi_j)s + \frac{\partial}{\partial \varphi} I(\theta_i, \varphi_j)k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} I(\theta_i, \varphi_j)s^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} I(\theta_i, \varphi_j)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} I(\theta_i, \varphi_j)sk \end{aligned}$$

Par conséquent, en, utilisant la formule de Taylor rappelée précédemment, on trouve :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \left( -I(\theta_i - s, \varphi_j - k) - 2I(\theta_i - s, \varphi_j) - I(\theta_i - s, \varphi_j + k) \right. \\ &\quad \left. + I(\theta_i + s, \varphi_j - s) + 2I(\theta_i + s, \varphi_j) + I(\theta_i + s, \varphi_j + k) \right) \\ &= \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_i, \varphi_j) \end{aligned}$$

La démonstration est la même pour l'approximation de  $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial I}{\partial \varphi}$  au point  $(\theta_i, \varphi_j)$ .

Pour le filtre de Prewitt, les matrices d'approximation de  $\frac{\partial I}{\partial \theta}$  et de  $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial I}{\partial \varphi}$  au point  $(\theta_i, \varphi_j)$  sont respectivement :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sin(\theta_i)} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appliquées à la matrice  $I(\theta_i, \varphi_j)$ .

Les démonstrations pour arriver à ce filtre sont bien évidemment les mêmes que précédemment.

Précisons que pour les calculs, on périodisera l'image. En d'autres termes, les coordonnées horizontales et verticales des pixels de l'image seront considérées comme circulaires, au-delà du bord droit on revient sur le bord gauche (et vice versa), au-delà du bord haut on revient sur le bord bas (et vice versa).

On peut remarquer que pour le filtre de Sobel, aussi bien que pour celui de Prewitt, seul un voisinage de taille 3\*3 autour du point intervient dans le calcul. Les implémentations de ces filtres sont donc faciles.

### 3.3.3 Méthode du Laplacien

Une autre méthode utilisée pour la détection de contours pour les images planes est la méthode de laplacien. On se propose de construire une méthode analogue sur la sphère.

Ce que nous appelons Laplacien sphérique, est rappelons-le l'opérateur de Laplace-Beltrami sphérique,

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Nous savons que les harmoniques sphériques sont les vecteurs propres de cet opérateur. Ainsi, pour une fonction  $f$  définie sur la sphère et avec  $*$  le produit de convolution

sur la sphère, nous avons les relations

$$\widehat{\Delta_{S^2} f}(l, m) = -l(l+1)\Delta_{S^2}\hat{f}(l, m),$$

$$\Delta_{S^2}(I * f) = I * \Delta_{S^2}(f).$$

Les relations entre produit de convolution sphérique et laplacien sphérique sont les mêmes que dans le cas d'images planes. On peut donc utiliser la même méthode pour la détection de contours que dans le cas d'images perspectives.

On vient de construire, par analogie avec les méthodes réelles, des détecteurs de contours pour les méthodes sphériques. Un détecteur souvent utilisé dans le cas d'images planes est le filtre de Canny, qui revient à utiliser la dérivée de la gaussienne plane.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de construire l'analogie sphérique du filtre de Canny.

# Chapitre 4

## Filtre de Canny

Le filtre de Canny a été proposé par Canny en 1986 [8], afin de fournir un détecteur de contours optimal.

Nous allons présenter ici le début de sa démarche de construction de filtre, puis nous proposerons une méthode analogue pour les images sphériques.

### 4.1 Filtre de Canny classique

#### 4.1.1 Critère de détection

Canny a tout d'abord proposé la construction du filtre idéal dans le cas 1D. Nous allons rappeler maintenant les grandes idées de sa démarche.

On se place donc dans le cas 1D. Le problème est de détecter un contour, alors que celui-ci est bruité par un bruit blanc gaussien additif.

Pour construire le filtre qui servira à détecter le contour, Canny se fixe 3 critères à respecter :

- une bonne détection : une faible probabilité de rater les vrais points de contour et une faible probabilité de marquer des points de contour qui sont faux. Ce critère correspond à maximiser le rapport signal à bruit (SNR).
- une bonne localisation : les points détectés comme points de contour doivent être le plus près possible du vrai contour.
- éviter les réponses multiples : à un seul contour doit correspondre une unique réponse du détecteur.

Soit  $G$  le signal et  $n$  le bruit blanc additif gaussien.

Soit  $G_R$  la réponse impulsionnelle du filtre que l'on applique au signal.

On suppose que  $G$  possède un contour au point  $x = 0$ .

Ceci veut dire que le gradient de  $G * G_R$  est maximum en  $x = 0$ .

Etant donné que l'on travaille ici en une dimension, le gradient correspond à une simple dérivée, et l'on peut utiliser la commutativité du produit de convolution 1D avec l'opérateur de dérivation.

Notons  $H_G = \nabla_{\mathbb{R}}(G * G_R) = (G * G_R)' = G * G'_R$  et  $H_n = n * G'_R$ .

Par hypothèse, on a donc :  $H'_G(0) = 0$ .

Le critère de bonne détection correspond à maximiser le rapport signal à bruit :

$$SNR = \frac{|H_G(0)|}{\sqrt{\mathbb{E}(|H_n(0)|^2)}}.$$

Ceci équivaut à ce que la contribution du signal  $G$  soit plus forte que celle du bruit  $n$ .

Canny suppose que le filtre  $G_R$  est à support compact sur  $[-W, W]$ , ce qui donne :

$$H_G(x) = \int_{-W}^W G(x-y)G'_R(y)dy.$$

De même

$$\begin{aligned} H_n(0) &= \int_{-W}^W n(-y)G'_R(y)dy, \\ (H_n(0))^2 &= \int_{-W}^W \int_{-W}^W n(-y)G'_R(y)n(-z)G'_R(z)dydz \\ \mathbb{E}(|H_n(0)|^2) &= \int_{-W}^W \int_{-W}^W \mathbb{E}[n(-y)n(-z)]G'_R(y)G'_R(z)dydz \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}[n(-y)n(-z)] = n_0^2\delta(y, z)$  car  $n$  est un bruit blanc gaussien, d'où :

$$SNR = \frac{|\int_{-W}^W G(-y)G'_R(y)dy|}{n_0 \sqrt{\int_{-W}^W (G'_R(y))^2 dy}}.$$

### 4.1.2 Critère de localisation

Supposons que la réponse totale du filtre, c'est-à-dire la réponse à {signal+bruit} possède un maximum local au point  $x = x_0$ .

On a alors :

$$(H_n + H_G)'(x_0) = 0.$$

D'où :

$$H'_G(x_0) = -H'_n(x_0).$$

La formule de Taylor de  $H'_G$  donne :

$$H'_G(x_0) = H'_G(0) + H''_G(0)x_0 + o(x_0).$$

Comme  $H'_G(0) = 0$ , on trouve :

$$H''_G(0)x_0 \approx -H'_n(x_0),$$

puis

$$\mathbb{E}[(H''_G(0)x_0)^2] \approx \mathbb{E}[(H'_n(x_0))^2].$$

Or  $H''_G(0)$  ne dépend pas de variables aléatoires, d'où :

$$(H''_G(0))^2 \mathbb{E}[x_0^2] \approx \mathbb{E}[(H'_n(x_0))^2]. \quad (4.1)$$

Calculons maintenant  $\mathbb{E}[(H'_n(x_0))^2]$ .

$$(H'_n(x_0))^2 = \int \int n(y)G''_R(x_0 - y)n(z)G''_R(x_0 - z)dydz$$

Par définition  $x_0$  dépend du bruit, donc pour calculer l'espérance de l'égalité précédente, on effectue un développement limité de  $G''_R$  :

$$G''_R(x_0 - x) = G''_R(-x) + G_R^{(3)}(-x)x_0 + o(x_0)$$

On néglige les termes en  $n(y)n(z)x_0$  et les termes d'ordre supérieur ou égal à  $x_0^2$ , pour obtenir :

$$(H'_n(x_0))^2 \approx \int \int n(y)n(z)G''_R(-y)G''_R(-z)dydz.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(H'_n(x_0))^2] &\approx \int \int \mathbb{E}[n(y)n(z)]G''_R(-y)G''_R(-z)dydz \\ &\approx \int \int n_0^2 \delta(y, z)G''_R(-y)G''_R(-z)dydz \\ &\approx n_0^2 \int (G''_R(-y))^2 dy \\ &\approx n_0^2 \int (G''_R(y))^2 dy \end{aligned}$$

Par conséquent, en réinjectant ceci dans (4.1), on obtient :

$$\mathbb{E}[x_0^2] \approx \frac{n_0^2 \int (G_R''(y))^2 dy}{\left[ \int G(-x) G_R^{(3)}(x) dx \right]^2} \approx \delta_{x_0}^2$$

$\delta_{x_0}$  est une approximation de l'écart type de  $x_0$ , d'où :

$$\text{Localisation} = \frac{1}{\delta_{x_0}} = \frac{\left| \int G(-x) G_R^{(3)}(x) dx \right|}{n_0 \sqrt{\int (G_R''(y))^2 dy}}$$

Canny doit maximiser le rapport de signal à bruit pour la bonne détection et en même temps le rapport précédent pour la bonne localisation. Il propose de maximiser le produit des 2 termes.

En faisant cela, et en ajoutant le critère de non-réponse multiple, Canny obtient plusieurs conditions numériques que le filtre  $G_R$  doit vérifier.

Après différents essais, Canny a conclu que le filtre gaussien approche le mieux les conditions à vérifier. La dérivée de la gaussienne fournit donc la meilleure approximation du détecteur de contour optimal suivant les critères imposés par Canny.

## 4.2 Filtre de Canny sphérique

La question que l'on se pose est de savoir si pour les images sphériques, la gaussienne sphérique représente aussi le détecteur de contours optimal.

Nous allons chercher ici à obtenir des conditions analogues à ce qui précède afin d'obtenir un filtre optimal pour la détection de contours d'images sphériques.

### 4.2.1 Critère de détection

Soit  $G$  l'image sphérique.

Soit  $G_s$  le filtre que l'on applique à l'image :

$$G_s : \quad \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, \phi) \mapsto G_s(\theta, \phi).$$

Un point de contour est un point où la norme du gradient est maximum, c'est-à-dire  $\|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_s)\|$  est maximum.

Par analogie avec le 0 de la droite réelle dans le cas précédent, supposons que le Pôle Nord, noté  $P_N$ , est un point de contour. On a alors :

$$\nabla_{\mathbb{S}^2}(\|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_s)\|)(P_N) = 0.$$

Etant donné que l'on veut construire un détecteur de contour qui agisse partout de la même façon sur la sphère, le point de vrai contour que nous venons de choisir aurait pu être pris n'importe où sur la sphère.

Nous allons maintenant établir le critère de détection, c'est-à-dire le critère qu'il faudra maximiser pour que le point de contour soit bien détecté.

$\forall f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit le gradient sphérique par :

$$\nabla_{\mathbb{S}^2} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} f \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_s)\|)(P_N) = 0$$

et

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_s)\|)(P_N) = 0.$$

Soit  $H_G = \nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_s)$ , on a :  $H_G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Soit  $H_n$  la réponse du filtre au bruit  $n$  seulement :

$$H_n(\theta, \varphi) = (\nabla_{\mathbb{S}^2}(n * G_s))(\theta, \varphi).$$

Rappelons que l'opérateur de gradient sphérique ne commute pas avec le produit de convolution sphérique.

Le première critère, celui de bonne détection, correspond à maximiser le SNR :

$$SNR = \frac{\|H_G(P_N)\|}{\sqrt{\mathbb{E}(\|H_n(P_N)\|^2)}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|H_n(P)\|^2) &= \mathbb{E}(\|\nabla_{S^2}(n * G_S)(P)\|^2) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(n * G_S)(P)\right)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(n * G_S)(P)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \int_{SO(3)} n(RP_N)G_s(R^{-1}P)dR\right)^2\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \int_{SO(3)} n(RP_N)G_s(R^{-1}P)dR\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Comme la sphère est plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , le point  $P$  de coordonnées  $(\theta, \varphi)$  sur la sphère a pour coordonnées  $(\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Notons  $g_R(\theta, \varphi) = G_s(R^{-1}P(\theta, \varphi))$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|H_n(P)\|^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_{SO(3)} n(RP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)dR\right)^2\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\int_{SO(3)} n(RP_N)\frac{\partial}{\partial\varphi}g_R(\theta, \varphi)dR\right)^2\right) \\
&= n_0^2 \int_{SO(3)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)\right)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}g_R(\theta, \varphi)\right)^2\right] dR \\
&= n_0^2 \int_{SO(3)} \|\nabla g_R(\theta, \varphi)\|^2 dR.
\end{aligned}$$

En effet, comme le bruit  $n$  est un bruit blanc gaussien, on a :

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}\left(\left(\int_{SO(3)} n(RP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)dR\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_{SO(3)} n(RP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)dR\right)\left(\int_{SO(3)} n(QP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_Q(\theta, \varphi)dQ\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{SO(3)} \int_{SO(3)} n(RP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)n(QP_N)\frac{\partial}{\partial\theta}g_Q(\theta, \varphi)dRdQ\right) \\
&= \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} \mathbb{E}[n(RP_N)n(QP_N)]\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}g_Q(\theta, \varphi)dRdQ \\
&= n_0^2 \int_{SO(3)} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R(\theta, \varphi)\right)^2 dR
\end{aligned}$$

Le première critère consiste donc à maximiser le SNR suivant :

$$SNR = \frac{\|\nabla_{S^2}(G * G_S)(P_N)\|}{n_0 \left(\int_{SO(3)} \|\nabla_{S^2}g_R(P_N)\|^2 dR\right)^{1/2}}$$

### 4.2.2 Critère de localisation

On suppose que la réponse totale du filtre, c'est-à-dire la réponse à {image+bruit} possède un maximum local au point  $P = P_0$ , qui a pour coordonnées sphériques  $(\theta_0, \varphi_0)$ . On a donc :

$$\nabla_{\mathbb{S}^2}(\|\nabla_{\mathbb{S}^2}((G + n) * G_S)\|)(P_0) = 0.$$

On cherche une bonne localisation du filtre, c'est-à-dire que le point de contour trouvé soit aussi près que possible du vrai point de contour. On veut donc minimiser  $\|P_0 - P_N\|$ . Rappelons la définition de la norme choisie : pour  $P = (\theta, \varphi)$ , on a :  $\|P\| = \sqrt{\theta^2 + \varphi^2}$ .

Le Pôle Nord  $P_N$  correspond au point de coordonnées sphériques  $\theta = 0, \varphi$  quelconque. On pose  $P_N = (0, 0)$  en coordonnées sphériques. Cela revient donc à minimiser  $\|P_0\|$ . Soit  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a la formule de Taylor suivante :

$$f(P_0) = f(P_N) + \nabla_{\mathbb{S}^2} f(P_N) \cdot P_0 + o(\|P_0\|).$$

On pose  $f(P) = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 \right](P)$ .

On a :

$$f(P) = 2 \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| (P) \times \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| (P).$$

Etant donné que  $P_N$  est un vrai point de contour, on voit que :

$$f(P_N) = 0.$$

D'où  $f(P_0) \approx \nabla_{\mathbb{S}^2} f(P_N) \cdot P_0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 (P_0) \approx \nabla_{\mathbb{S}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 \right] (P_N) \cdot P_0$$

De façon plus générale, on obtient :

$$\nabla_{\mathbb{S}^2} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 (P_0) \approx \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbb{S}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 \right] (P_N) \cdot P_0 \\ \nabla_{\mathbb{S}^2} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\| \right)^2 \right] (P_N) \cdot P_0 \end{pmatrix}$$

On peut le réécrire de la façon suivante :

$$\nabla_{\mathbb{S}^2} \left( \|\nabla_{\mathbb{S}^2}(G * G_S)\|^2 \right) (P_0) \approx M \cdot P_0$$

où la matrice  $M$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\| (P_N) & \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\| \right) (P_N) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\| \right) (P_N) & \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\| \right) (P_N) \end{pmatrix}$$

Remarquons que la matrice  $M$  est entièrement déterministe. Elle ne dépend que de  $P_N, G$  et  $G_S$ .

Par conséquent, on obtient :

$$M^{-1} \left( \nabla_{S^2} \left( \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2 \right) (P_0) \right) \approx P_0.$$

$P_0$  dépend par définition du bruit  $n$ , qui est une variable aléatoire.  $P_0$  est donc également une variable aléatoire. Il faut donc minimiser  $\mathbb{E} \|P_0\|$ .

Précisément, nous allons chercher à minimiser ici  $\mathbb{E} |\theta_0|$ .

Comme  $\theta \in [0, 2\pi[$ , il suffit de minimiser  $\mathbb{E} \theta_0$ .

Pour faciliter les calculs, nous allons utiliser la notation suivante :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E} \theta_0 \approx a \times \mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2 (P_0) \right) + b \times \mathbb{E} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2 (P_0) \right). \quad (4.2)$$

Nous obtenons ce résultat car  $a$  et  $b$  sont déterministes, puisque la matrice  $M$  l'est, comme nous l'avons remarqué précédemment.

Commençons par calculer  $\mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2 (P_0) \right)$ .

Rappelons que par définition de  $P_0$  :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}((G + n) * G_S)\| (P_0) = 0.$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}((G + n) * G_S)\|^2 (P_0) = 0, \quad (4.3)$$

Or, par définition du produit scalaire, on a :

$$\|\nabla_{S^2}((G+n)*G_S)\|^2 = \|\nabla_{S^2}(G*G_S)\|^2 + \|\nabla_{S^2}(n*G_S)\|^2 + 2(\nabla_{S^2}(G*G_S), \nabla_{S^2}(n*G_S))$$

On dérive ensuite l'égalité précédente par rapport à  $\theta$  et on considère l'égalité obtenue au point  $P_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}((G+n)*G_S)\|^2(P_0) &= \frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(G*G_S)\|^2(P_0) + \frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(n*G_S)\|^2(P_0) \\ &\quad + 2\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla_{S^2}(G*G_S), \nabla_{S^2}(n*G_S))(P_0) \end{aligned}$$

Compte-tenu de 4.3, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(G*G_S)\|^2(P_0) = -\frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(n*G_S)\|^2(P_0) - 2\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla_{S^2}(G*G_S), \nabla_{S^2}(n*G_S))(P_0).$$

Regardons maintenant  $\frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(n*G_S)\|^2(P_0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta} \|\nabla_{S^2}(n*G_S)\|^2(P_0) &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \left( \frac{\partial}{\partial\theta}(n*G_S) \right)^2(P_0) + \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial\varphi}(n*G_S) \right)^2(P_0) \right) \\ &= 2 \times \frac{\partial}{\partial\theta}(n*G_S)(P_0) \times \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(n*G_S)(P_0) \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial\varphi}(n*G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial\varphi}(n*G_S)(P_0) \\ &= 2 \times A + 2 \times C \end{aligned}$$

Les dernières notations vont nous servir par la suite à alléger la lecture.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial\theta}(n*G_S)(P_0) \times \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(n*G_S)(P_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \int_{SO(3)} n(RP_N)G_S(R^{-1}P_0)dR \right) \times \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \int_{SO(3)} n(RP_N)G_S(R^{-1}P_0)dR \right) \end{aligned}$$

Posons  $g_R(P) = G_S(R^{-1}P)$ .

Par la formule de Taylor :

$$\left( \frac{\partial}{\partial\theta} g_R \right)(P_0) = \left( \frac{\partial}{\partial\theta} g_R \right)(P_N) + (P_0 - P_N) \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial\theta} g_R \right)(P_N) + o(P_0 - P_N).$$

Rappelons que  $P_0 - P_N = P_0$ , puisque les coordonnées sphériques de  $P_N$  sont  $(0, 0)$ . On simplifie donc l'égalité précédente et on l'intègre ensuite dans l'égalité  $A$ .

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R\right)(P_0) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R\right)(P_N) + (P_0) \cdot \nabla\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R\right)(P_N) + \circ(P_0).$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_0)dR\right) \times \left(\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_R(P_0)dR\right)(P_0) \\ &= \left[\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N)dR + \int_{SO(3)} n(RP_N)(P_0) \cdot \nabla\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g_R\right)(P_N)dR\right] \\ &\times \left[\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_R(P_N)dR + \int_{SO(3)} n(RP_N)(P_0) \cdot \nabla\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_R\right)(P_N)dR\right] + \circ(P_0) \end{aligned}$$

En effectuant les différents produits des termes précédents, on obtient des termes en  $P_0^2$  et en  $n^2(RP_N)P_0$  que l'on va négliger. On trouve alors l'approximation suivante :

$$A \approx \left(\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N)dR\right) \times \left(\int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_R(P_N)dR\right).$$

On calcule ensuite l'espérance de  $A$  en utilisant le fait que  $n$  soit un bruit blanc gaussien.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}A &\approx \mathbb{E} \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} n(RP_N)n(QP_N) \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_Q(P_N)dRdQ \\ &\approx \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} \mathbb{E}\left[n(RP_N)n(QP_N)\right] \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_Q(P_N)dRdQ \\ &\approx \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} n_0^2 \delta_{R,Q} \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_Q(P_N)dRdQ \\ &\approx n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{\partial}{\partial\theta}g_R(P_N) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g_R(P_N)dR \end{aligned}$$

En appliquant la même méthode que précédemment, on calcule  $C$ .

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n * G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n * G_S)(P_0) \\
&= \left[ \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR + \int_{SO(3)} n(RP_N)(P_0) \cdot \nabla \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R \right) (P_N) dR \right] \\
&\times \left[ \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR \right. \\
&+ \left. \int_{SO(3)} n(RP_N)(P_0) \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R \right) (P_N) dR \right] + o(P_0)
\end{aligned}$$

D'où :

$$C \approx \left( \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR \right) \times \left( \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR \right).$$

On calcule ensuite l'espérance de  $C$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}C &\approx \mathbb{E} \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} n(RP_N) n(QP_N) \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_Q(P_N) dR dQ \\
&\approx n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR.
\end{aligned}$$

On va maintenant regarder :  $\frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla_{S^2}(G * G_S), \nabla_{S^2}(n * G_S))(P_0)$ .

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla_{S^2}(G * G_S), \nabla_{S^2}(n * G_S))(P_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (n * G_S) \times \frac{\partial}{\partial \theta} (G * G_S) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n * G_S) \times \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (G * G_S) \right] (P_0) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (n * G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial \theta} (G * G_S)(P_0) + \frac{\partial}{\partial \theta} (n * G_S)(P_0) \times \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (G * G_S)(P_0) \\
&+ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n * G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (G * G_S) \right) (P_0) \\
&+ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (G * G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n * G_S) \right) (P_0) \\
&= E + F + G + H
\end{aligned}$$

Regardons maintenant les termes E, F, G et H séparément de la même façon que

précédemment.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (n * G_S)(P_0) \times \frac{\partial}{\partial \theta} (G * G_S)(P_0) \\
&= \left( \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_0) dR \right) \times \left( \int_{SO(3)} G(RP_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_0) dR \right) \\
&= \left[ \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_N) dR + \int_{SO(3)} n(RP_N)(P_0) \cdot \nabla \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R \right) (P_N) dR \right] \\
&\times \left[ \int_{SO(3)} G(RP_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_N) dR + \int_{SO(3)} G(RP_N)(P_0) \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial \theta} g_R \right) (P_N) dR \right] + o(P_0) \\
&\approx \left( \int_{SO(3)} n(RP_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_N) dR \right) \times \left( \int_{SO(3)} G(RP_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_N) dR \right).
\end{aligned}$$

D'où, quand on calcule l'espérance de  $E$ , étant donné que  $n$  est un bruit blanc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}E &\approx \mathbb{E} \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} n(RP_N) G(QP_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_Q(P_N) dR dQ \\
&\approx \int_{SO(3)} \int_{SO(3)} \mathbb{E} \left[ n(RP_N) \right] G(QP_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_Q(P_N) dR dQ \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

$$\text{car } \mathbb{E} \left[ n(RP_N) \right] = 0.$$

De la même manière, on montre que  $\mathbb{E}F \approx 0$ ,  $\mathbb{E}G \approx 0$  et  $\mathbb{E}H \approx 0$ .

Au final, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2(P_0) \right) &\approx -2 \times n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_N) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_R(P_N) dR \\
&\quad -2 \times n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR.
\end{aligned}$$

Reste à calculer la deuxième partie de (4.2) :

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2(P_0) \right).$$

On applique les mêmes méthodes qu'auparavant, en utilisant les hypothèses sur le bruit  $n$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \|\nabla_{S^2}(G * G_S)\|^2(P_0) \right) &\approx -2 \times n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_N) \frac{\partial}{\partial \theta} g_R(P_N) dR \\
&\quad -2n_0^2 \int_{SO(3)} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_R(P_N) dR.
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu un critère de bonne détection à maximiser et un critère de bonne localisation à minimiser pour détecter de façon optimale les contours dans des images sphériques.

Dans un travail futur, nous nous proposons d'implémenter ces conditions pour voir quel filtre remplit le mieux les critères.



# Chapitre 5

## Tests comparatifs

Dans ce qui suit, nous allons présenter différents tests effectués avec Matlab<sup>R</sup> pour comparer les méthodes sphériques proposées auparavant avec les méthodes classiques. Commençons tout d'abord par expliquer notre démarche d'expérimentation.

### 5.1 Généralités

L'objet de cette thèse étant le traitement bas-niveau d'images omnidirectionnelles, plusieurs images ont été choisies pour vérifier l'efficacité des méthodes proposées par rapport aux méthodes classiques.

Deux types d'images omnidirectionnelles sont étudiées : des images réelles (figures 5.1, 5.2, 5.7 et 5.4) et des images de synthèse (figures 5.3, 5.5 et 5.6). L'image Bureau est une image prise à l'intérieur du laboratoire MIS. Les images Mire et Droites, quant à elles, représentent des mires de calibrage. L'image aérienne est une image d'extérieur prise depuis un drone. En ce qui concerne les images Texture 11 et Texture 14, elles ont été obtenues en utilisant un simulateur de vision omnidirectionnelle (créé par M.Meunier et M.Decagny sous la direction de M.Mouaddib) qui repose sur le logiciel POV-Ray (Persistence Of Vision RAYtracer, <http://www.povray.org/>). Evidemment, le miroir utilisé dans le capteur omnidirectionnel est parabolique, comme nous l'avons supposé précédemment.

Comme nous l'avons déjà précisé, nous projetons l'image omnidirectionnelle sur la sphère d'équivalence, puis nous effectuons les différents traitements bas-niveaux (lissage, détection de contours) sur les images sphériques. Etant donné les récents travaux de traitements haut-niveau des images omnidirectionnelles qui utilisent également la sphère d'équivalence, notre travail permet alors d'effectuer toute la chaîne de trai-

tements sur les images sphériques. On peut également penser que pour certaines applications, comme la navigation de robots mobiles, le passage de projection de l'image sphérique traitée sur le plan, pour retrouver une image omnidirectionnelle, est inutile.

Par conséquent, pour comparer l'efficacité de nos méthodes avec la sphère d'équivalence, aux méthodes dites classiques (c'est-à-dire les méthodes utilisées habituellement pour les images planes), nous comparerons les images sphériques.

Précisément, d'un côté on considère l'image sphérique traitée par les méthodes que l'on a proposé : c'est ce qu'on appellera la méthode sphérique. De l'autre côté, on regarde l'image sphérique obtenue par projection stéréographique inverse de l'image omnidirectionnelle traitée comme s'il s'agissait d'une image plane habituelle, sans distorsion : c'est ce qu'on appellera la méthode classique ou méthode réelle (puisque les outils de traitements sont développés dans  $\mathbb{R}^2$ ).

D'un point de vue pratique, rappelons que nous projetons l'image sur la sphère sur la grille d'échantillonnage latitude-longitude, dont nous avons parlé précédemment dans le théorème d'échantillonnage de Driscoll-Healy. La projection nécessite une étape d'interpolation qui est faite avec des splines cubiques (voir en annexe). De plus, pour l'implémentation des harmoniques sphériques et de la transformée Fourier sphérique, nous utilisons la toolbox YAWTB (<http://rhea.tele.ucl.ac.be/yawtb/>), développé entre autres par P.Vandergheynst.

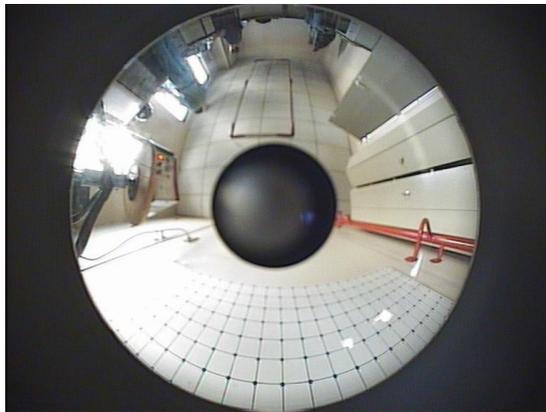


FIG. 5.1 – Image Bureau

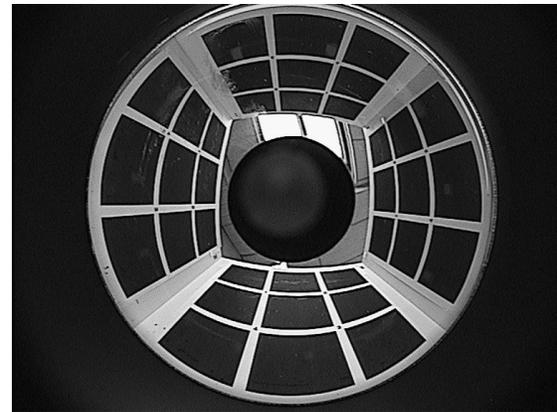


FIG. 5.2 – Image Mire

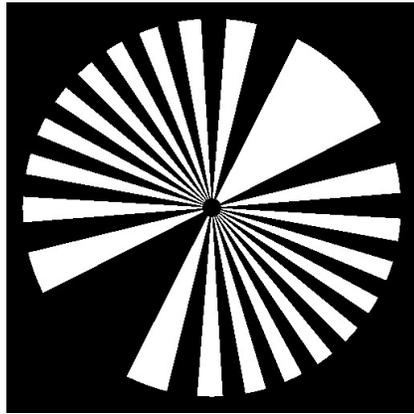


FIG. 5.3 – Image Radiales

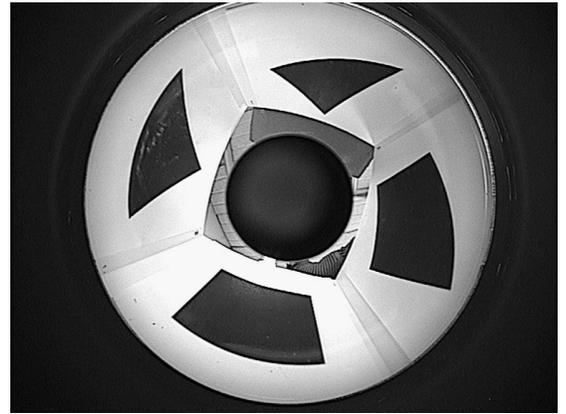


FIG. 5.4 – Image Droites

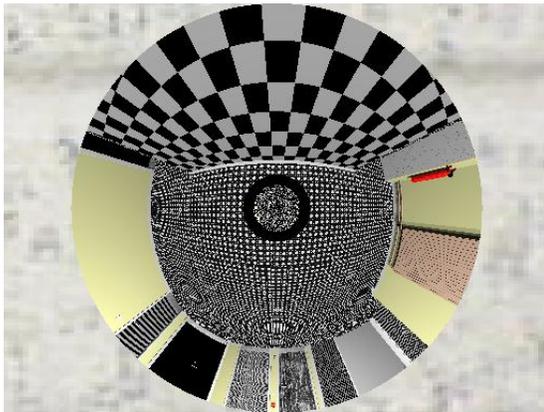


FIG. 5.5 – Image Texture 11

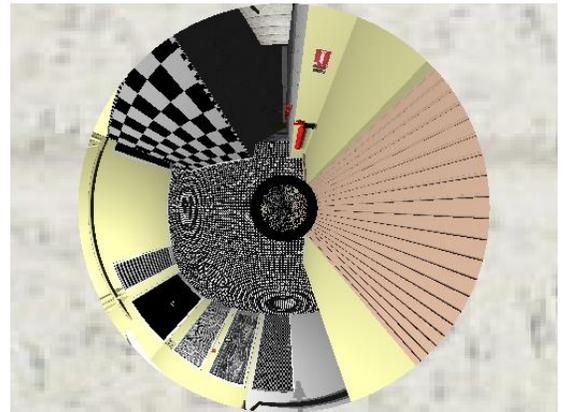


FIG. 5.6 – Image Texture 14



FIG. 5.7 – Image aérienne

## 5.2 Lissage

Dans un premier temps, nous allons comparer les différents opérateurs de lissage que nous avons développés sur la sphère. Pour ce faire, nous ajoutons un bruit blanc gaussien additif sur l'image sphérique et nous cherchons le filtre qui débruitera le mieux l'image. Etant donné que les différentes méthodes dépendent chacune d'un paramètre de lissage, on cherche à obtenir le paramètre qui optimise le débruitage, c'est-à-dire celui qui fournit le meilleur rapport signal à bruit (SNR).

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\mathbb{E}(\|f\|^2)}{\mathbb{E}(\|f - g\|^2)},$$

où  $f$  est l'image originale et  $g$  son estimation.

Dans ce qui suit, on fournit quelques exemples de ces tests, sur différentes images. Sur les différentes courbes de SNR, on voit la présence d'un paramètre qui maximise le rapport signal à bruit et on présente le résultat de lissage pour ce paramètre.

Les diverses images que nous avons testées nous permettent de conclure sur plusieurs points.

Tout d'abord on peut vérifier que ces filtres possèdent une propriété de lissage uniforme sur la sphère, ce qui était l'intérêt recherché initialement lors de leur construction. En effet, comme on peut le voir sur les figures (5.15) à (5.23), les filtres débruitent de la même façon quelque soit leur position sur la sphère, que ce soit près du pôle ou près de l'équateur.

De plus, en ce qui concerne précisément la comparaison des différents filtres, on peut constater qu'il n'y a pas de grandes différences de résultat entre les méthodes, puisque les SNR ne varient qu'à quelques dixièmes de point. Cependant, globalement, on remarque que le noyau de Green et la gaussienne sphérique donnent en général des SNR légèrement supérieurs globalement, comme c'est le cas pour la Mire et l'image aérienne par exemple. Néanmoins, sur certains zooms comme les figures (5.15) à (5.19), la méthode de Tikhonov donne un SNR local plus élevé que le noyau de Green. On remarque également que sur ces zooms, le filtre de Wiener et la méthode de Tikhonov fournissent des contours plus nets que les autres méthodes.

Pour finir, ajoutons que le noyau de Poisson donne globalement des résultats moins bons que les autres méthodes.

Pour être plus complet, notons que nous avons effectués d'autres tests que des images bruitées par d'autres bruits, comme un bruit exponentiel par exemple, et les résultats obtenus sont similaires. Ces résultats ne sont pas reproduits dans ce document.

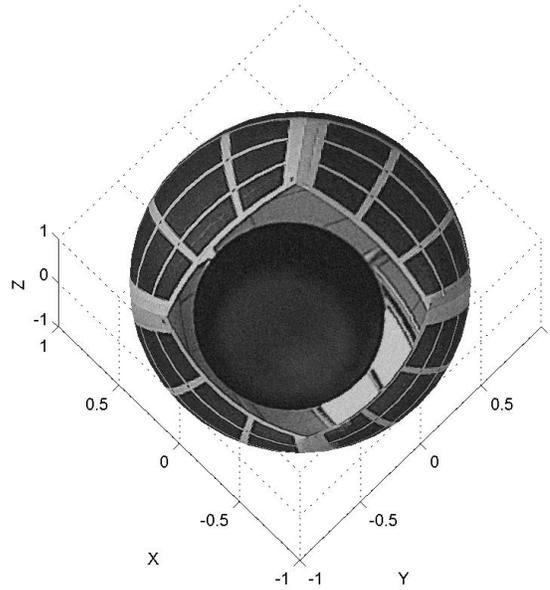


FIG. 5.8 – Mire bruitée (sigma=10)

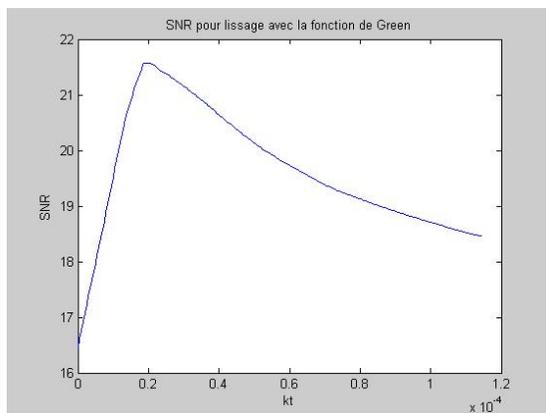
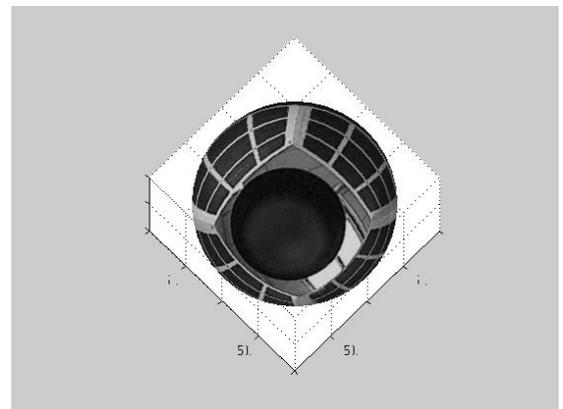


FIG. 5.9 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour le filtre de Green

FIG. 5.10 – Résultat du lissage avec le filtre de Green pour le paramètre  $t = 2.10^{-5}$

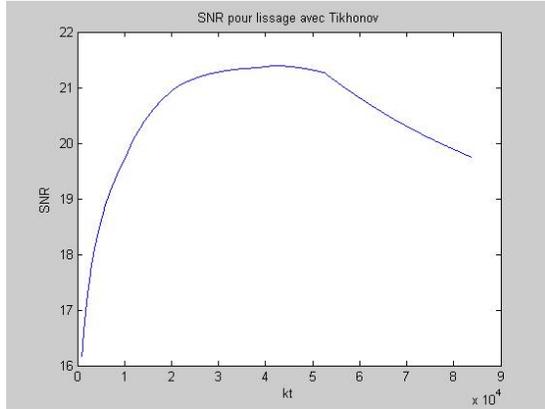


FIG. 5.11 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour la méthode de Tikhonov

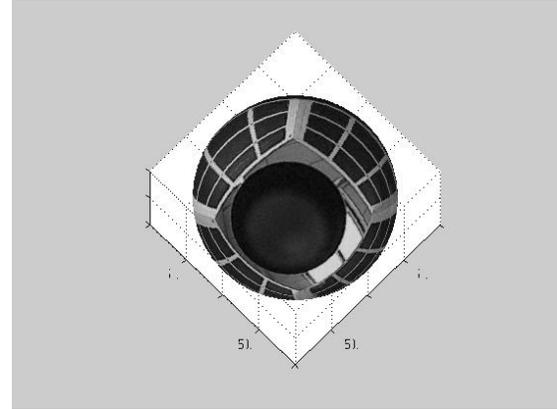


FIG. 5.12 – Résultat du lissage avec le filtre de Tikhonov pour le paramètre  $k = 42500$

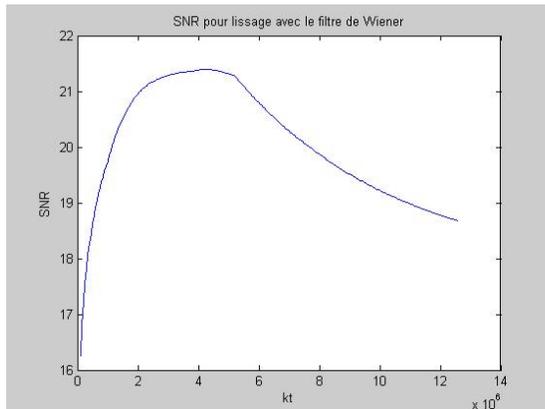


FIG. 5.13 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour le filtre de Wiener

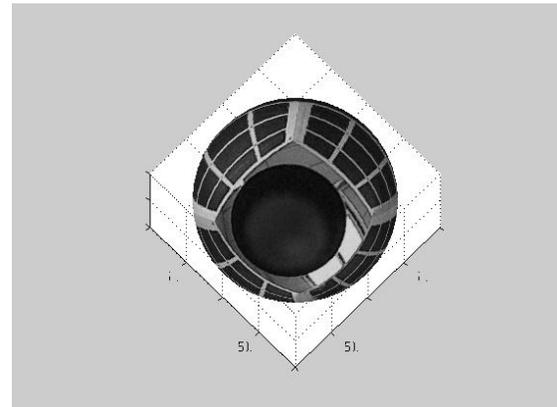


FIG. 5.14 – Résultat du lissage avec le filtre de Wiener pour le paramètre  $k = 4203000$



FIG. 5.15 – Zooms sur l'image Mire sphérique

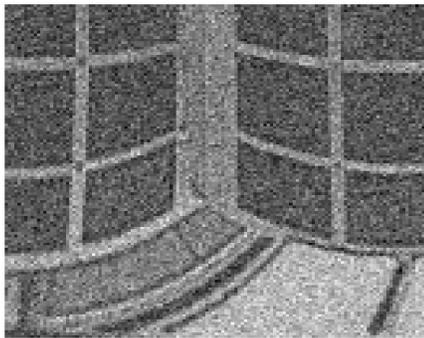


FIG. 5.16 – Zoom près du pôle sur l'image Mire bruitée (sigma=40)

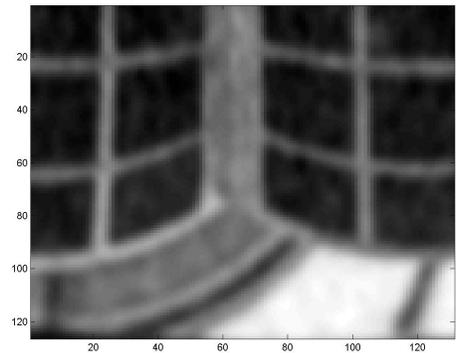


FIG. 5.17 – Résultat du filtrage par Green, SNR=9,8385

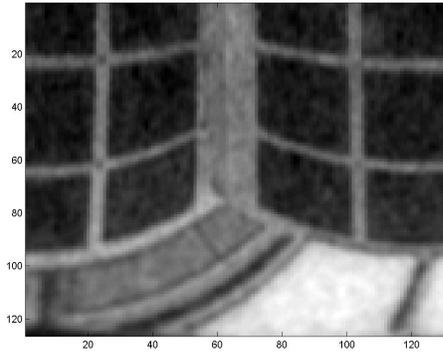


FIG. 5.18 – Résultat du filtrage par Poisson, SNR=10,1110

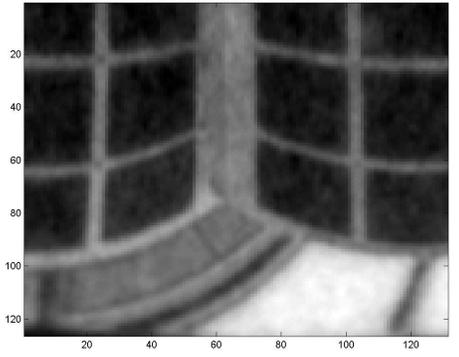


FIG. 5.19 – Résultat du filtrage par Tikhonov, SNR=10,0101

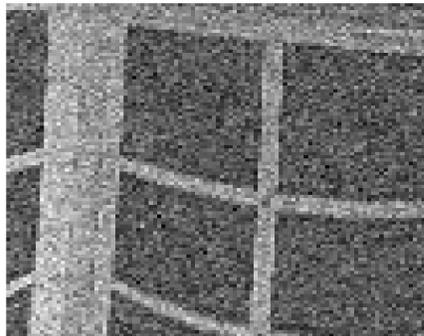


FIG. 5.20 – Zoom loin du pôle sur l'image Mire bruitée (sigma=40)

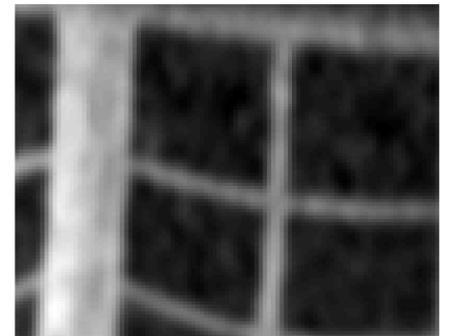


FIG. 5.21 – Résultat du filtrage par Green, SNR=11,2535

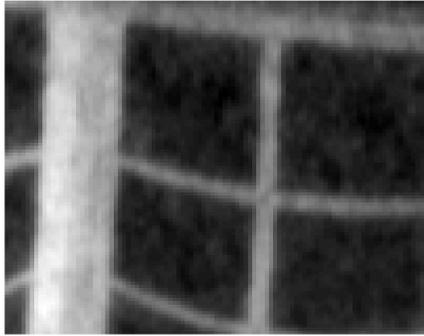


FIG. 5.22 – Résultat du filtrage par Tikhonov, SNR=10,7965

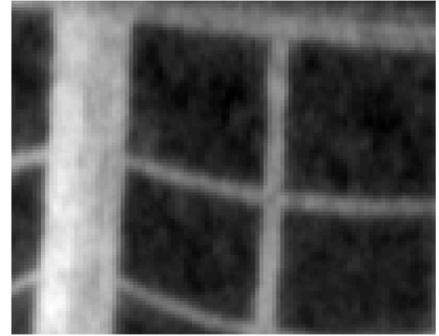


FIG. 5.23 – Résultat du filtrage par Wiener, SNR=10,8076

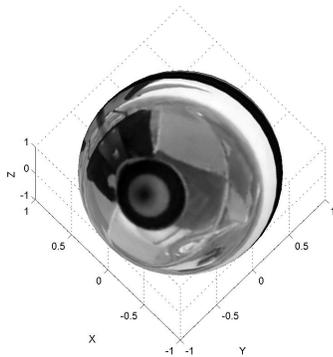


FIG. 5.24 – Image aérienne projetée sur la sphère d'équivalence

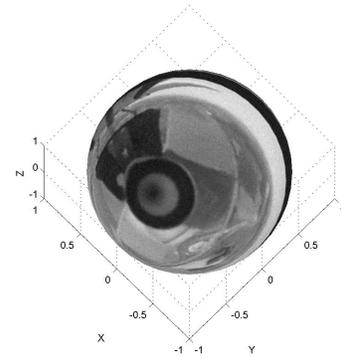


FIG. 5.25 – Image aérienne sphérique bruitée (sigma=10)

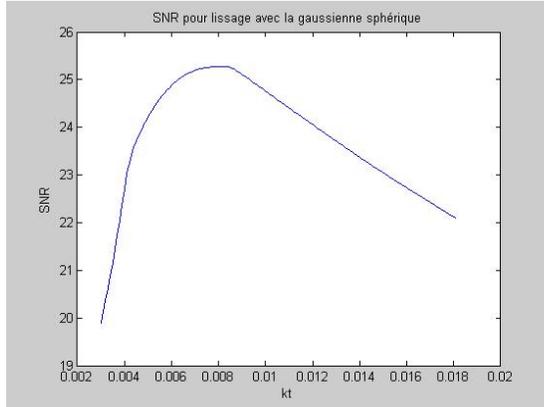


FIG. 5.26 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour le lissage avec la gaussienne sphérique

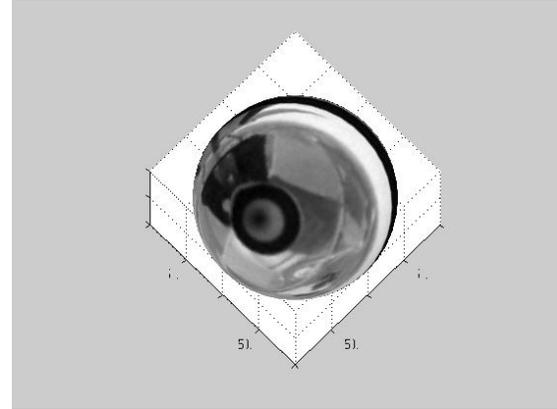


FIG. 5.27 – Résultat du lissage avec la gaussienne sphérique pour le paramètre  $k = 0.0081$

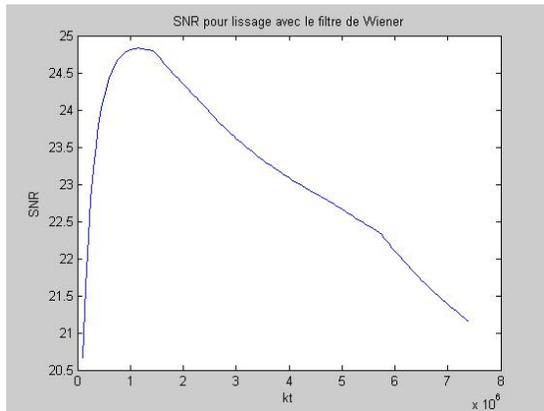


FIG. 5.28 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour le filtre de Wiener

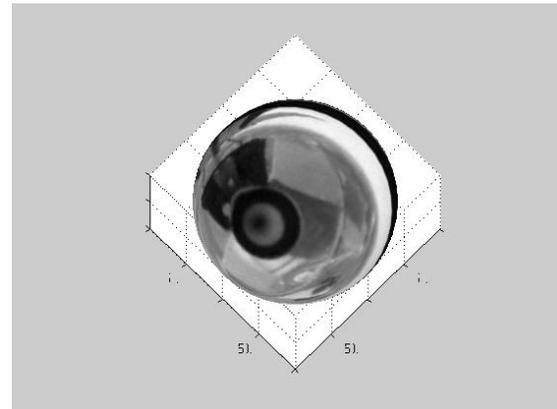


FIG. 5.29 – Résultat du lissage avec le filtre de Wiener pour le paramètre  $k = 1153000$

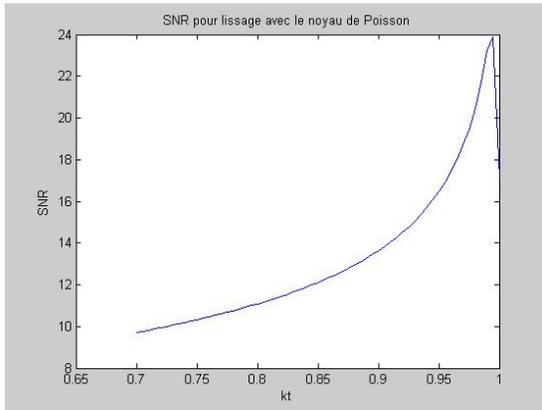


FIG. 5.30 – Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour un lissage avec le noyau de Poisson

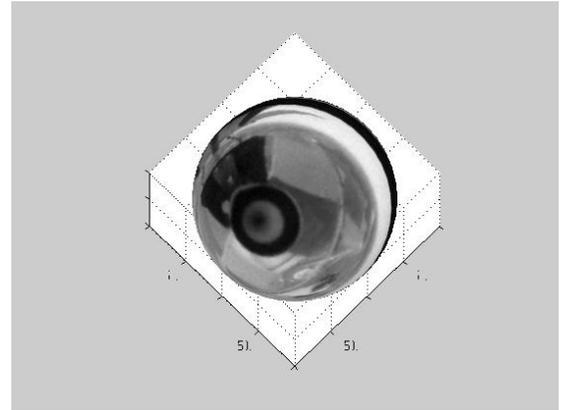


FIG. 5.31 – Résultat du lissage avec le noyau de Poisson pour le paramètre  $k = 0.995$

Cette comparaison des différentes méthodes sphériques de lissage nous permet de conclure que celles-ci sont assez équivalentes dans les résultats qu'elles fournissent. A priori, on peut donc choisir le noyau de Green, la gaussienne sphérique, le filtre de Wiener sphérique ou la méthode de Tikhonov sphérique pour lisser une image définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

Dans ce qui va suivre, nous allons essayer de répondre à la question à l'origine de ce travail : le passage par la sphère d'équivalence apporte-il quelque chose au traitement des images omnidirectionnelles, précisément ici, à la détection de contours ?

Précédemment, nous avons vu que nos filtres de lissage agissaient de façon uniforme sur la sphère. Nous allons maintenant voir ce qu'il en est pour les détecteurs de contours. Dans certains cas, une étape préliminaire de lissage a été effectuée à l'image du filtre de Canny réel. Le noyau de Green a été choisi, puisque nous avons choisi de travailler par analogie avec ce qui se passe pour le traitement d'images réelles.

### 5.3 Détection de contours

Nous allons ici présenter sur différentes images les résultats des détecteurs de contours sphériques que nous avons vu précédemment : le filtre de Roberts, le filtre de Sobel et le filtre de Prewitt sphériques.

Rappelons que nous allons comparer nos méthodes de traitement des images omnidirectionnelles avec les méthodes de traitement "à l'aveugle" qui appliquent les méthodes "classiques" ou "réelles" aux images omnidirectionnelles. Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous comparons donc nos méthodes sur la sphère, en vue d'un éventuel traitement haut-niveau basé sur des images sphériques.

Ces comparaisons sont faites visuellement, mais à l'avenir un travail pourrait être réalisé pour développer des critères quantitatifs. Par exemple, un travail analogue à celui de Fram et Deutsch pourrait être fait pour construire des critères sur la sphère.

Dans ce qui suit, les images présentées sous 2 colonnes représenteront à gauche la méthode dite "classique" ou "réelle" (puisque les opérations de traitements sont effectués sur  $\mathbb{R}^2$ ) et à droite la méthode dite "sphérique", qui correspond donc au travail apporté par cette thèse.

Pour commencer, nous allons présenter les résultats d'une détection de contours par la méthode de Roberts.

La première image que nous considérons est l'image de synthèse Radiales qui montre des rayons convergeant vers le centre de l'image omnidirectionnelle. Ce genre d'image met en lumière les problèmes de résolution que possède une image omnidirectionnelle. Afin de pouvoir mieux approcher le problème qui résulte de la méthode classique, on choisit de zoomer à plusieurs reprises sur le pôle de la sphère, qui correspond à la convergence des rayons présents dans l'image. Les différents niveaux de zooms dans l'image mettent en avant un problème évident au traitement classique d'images omnidirectionnelles : les rayons finissent par fusionner au fur et à mesure que l'on se rapproche du centre de l'image. Cependant l'apport de la méthode sphérique est évident puisque les contours détectés restent bien distincts jusqu'au centre.

Regardons ensuite ce qu'il se passe pour deux images réelles, l'image Droites et l'image Mire.

Sur l'image Droites, les différences entre les méthodes ne sont pas aussi flagrantes que précédemment, mais néanmoins, on peut remarquer que la méthode sphérique détecte mieux les petits détails présents dans la zone correspondant au centre de l'image omnidirectionnelle.

En ce qui concerne l'image Mire, nous présentons une vue large de l'image sphérique, puis un zoom correspondant à la zone près de l'équateur de la sphère, qui montre

que les contours sont bien détectés tout leur long avec la méthode sphérique contrairement à la méthode classique.

Des derniers tests sur des images de synthèse montrent encore l'efficacité de la méthode sphérique par rapport à la méthode classique. En effet, la texture mis en évidence dans les images Texture 11 et Texture 14 correspond à un damier. Le détecteur de contour devrait donc détecter des droites bien rectilignes tout le long du damier. Cependant, le damier sur l'image omnidirectionnelle va de l'extérieur du disque vers l'intérieur de l'image. Par conséquent, lorsque l'on applique les méthodes réelles, on constate que les contours sont mal détectés lorsque l'on s'approche du centre de l'image. En effet ils sont obliques, voir inexistants au lieu d'être bien rectilignes comme avec la méthode sphérique. Notons qu'ici un filtrage a été opéré préalablement par analogie avec ce qui est fait pour les images planes, pour débruiter si besoin l'image et pour en simplifier l'extraction de contours.

Nous présentons également des tests effectués avec les filtres de Sobel et Prewitt qui présentent les mêmes résultats et mettent en avant l'intérêt du passage par la sphère d'équivalence.

Un autre exemple avec l'image Bureau, montre également l'efficacité de la méthode sphérique par rapport à la méthode classique qui fait fusionner les contours, que ce soit avec le filtre de Prewitt ou le filtre de Sobel réels.

Les derniers tests montrent quant à eux la robustesse de nos détecteurs de contours sphériques en présence de bruit.

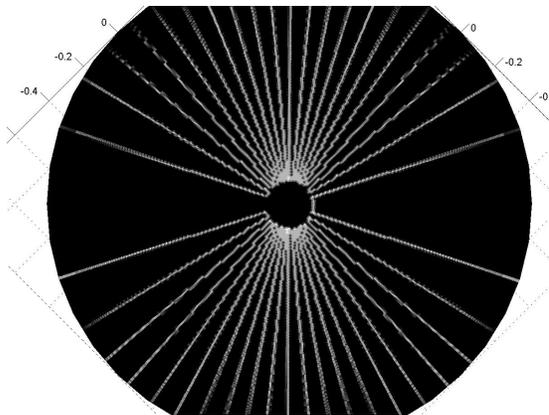


FIG. 5.32 – Image Radiales,  
Méthode de Roberts réelle

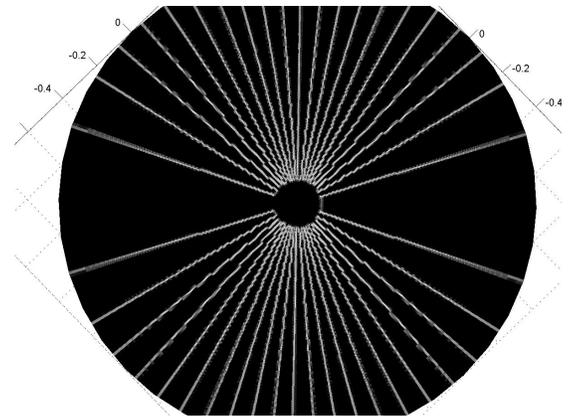


FIG. 5.33 – Image Radiales,  
Méthode de Roberts sphérique

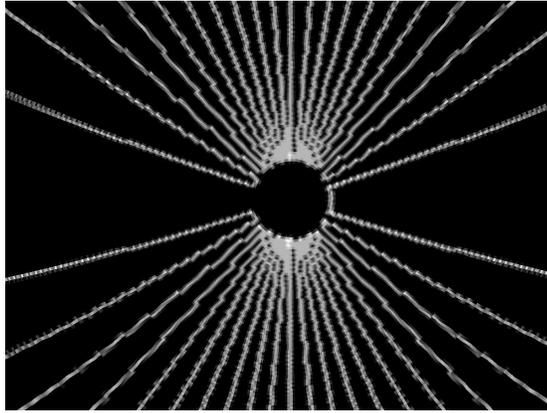


FIG. 5.34 – Image Radiales, Méthode de Roberts réelle, zoom

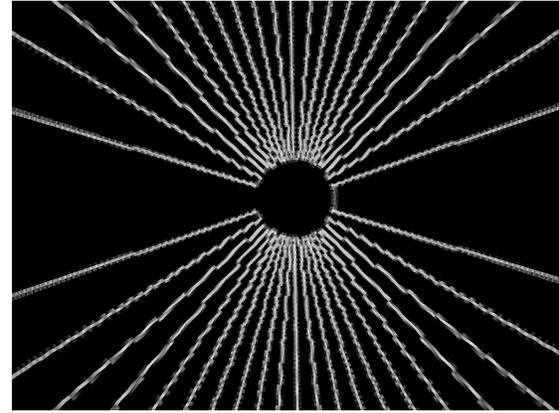


FIG. 5.35 – Image Radiales, Méthode de Roberts sphérique, zoom

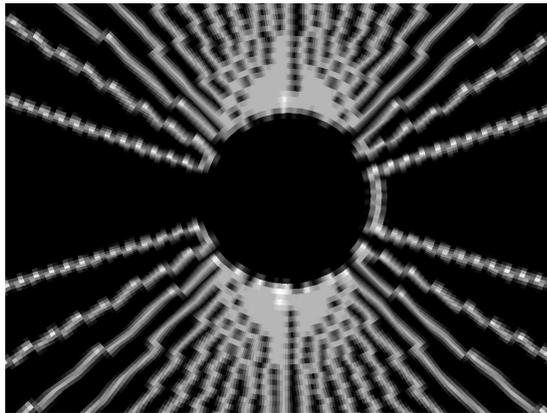


FIG. 5.36 – Image Radiales, Méthode de Roberts réelle, zoom plus précis

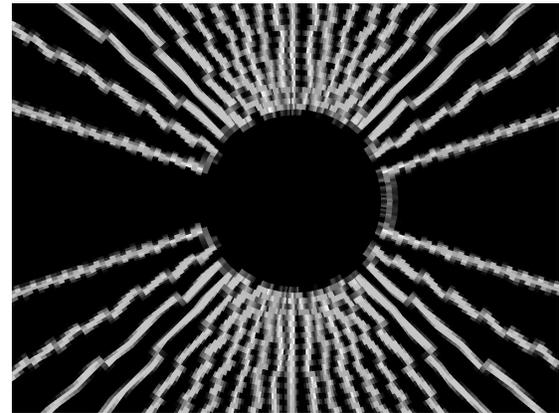


FIG. 5.37 – Image Radiales, Méthode de Roberts sphérique, zoom plus précis

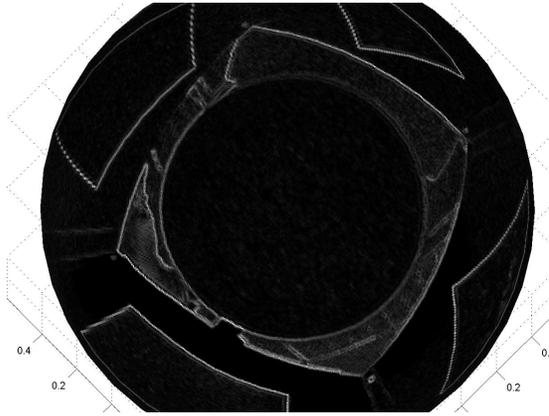


FIG. 5.38 – Image Droites, Méthode de Roberts réelle

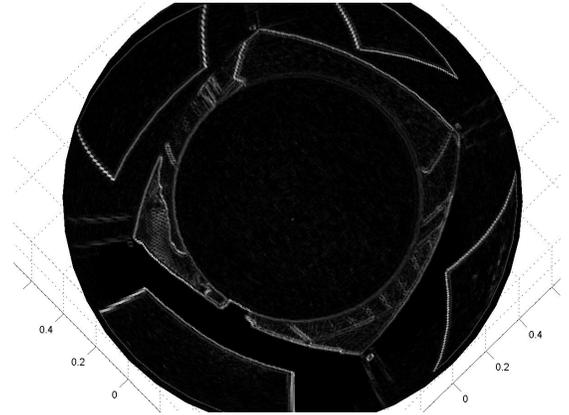


FIG. 5.39 – Image Droites, Méthode de Roberts sphérique

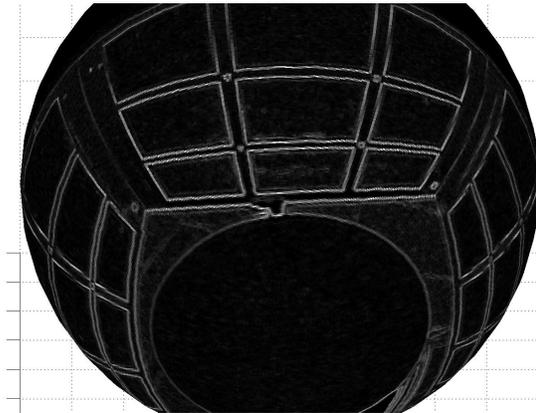


FIG. 5.40 – Image Mire, Méthode de Roberts réelle, zoom

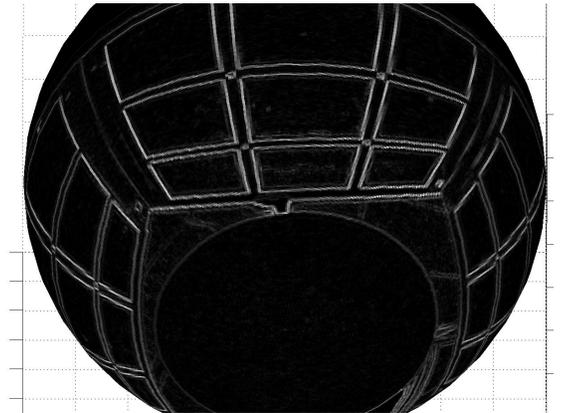


FIG. 5.41 – Image Mire, Méthode de Roberts sphérique, zoom

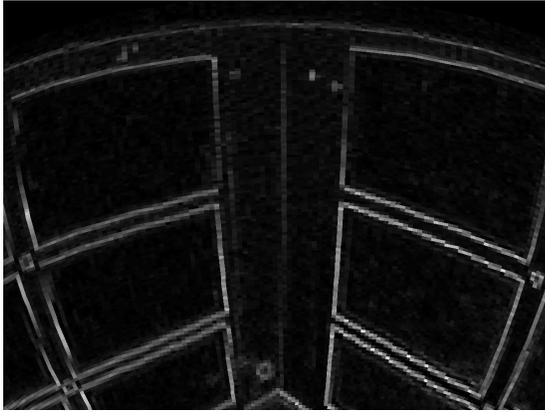


FIG. 5.42 – Image Mire,  
Méthode de Roberts réelle, autre zoom



FIG. 5.43 – Image Mire,  
Méthode de Roberts sphérique, autre zoom

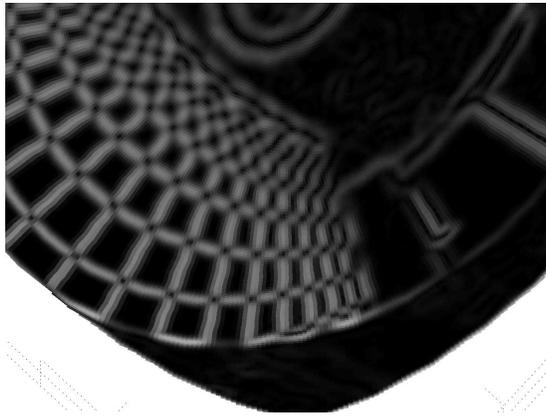


FIG. 5.44 – Texture 11, Méthode  
de Roberts réelle, après lissage  
par la gaussienne réelle ( $k = 3$ )



FIG. 5.45 – Texture 11, Méthode  
de Roberts sphérique, après lissage  
par le noyau de Green ( $k = 0.0001$ )

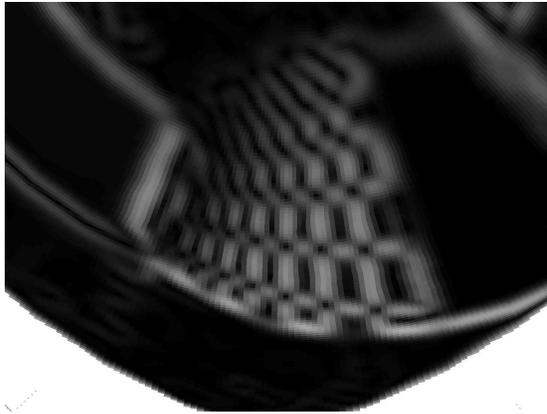


FIG. 5.46 – Texture 14,  
Méthode de Roberts réelle,  
après lissage par la gaussienne réelle ( $k = 4$ )

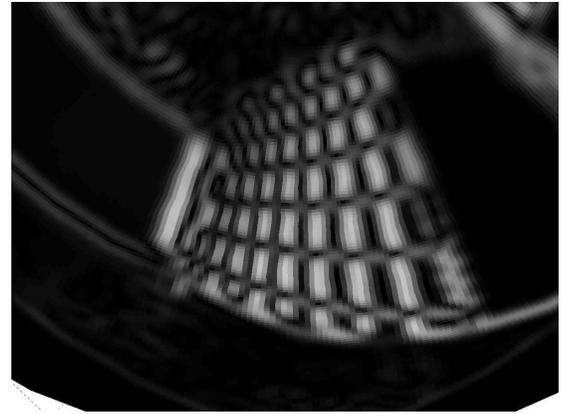


FIG. 5.47 – Texture 14,  
Méthode de Roberts sphérique,  
après lissage par le noyau de Green ( $k = 0.0001$ )

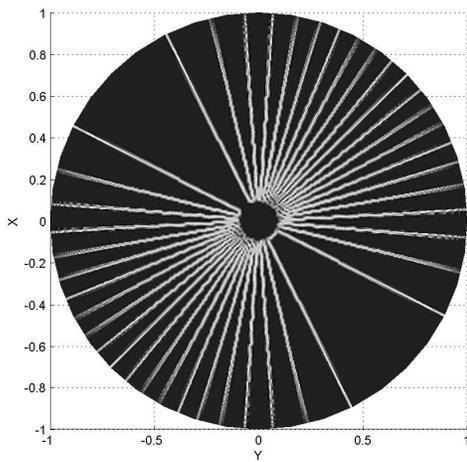


FIG. 5.48 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel réelle

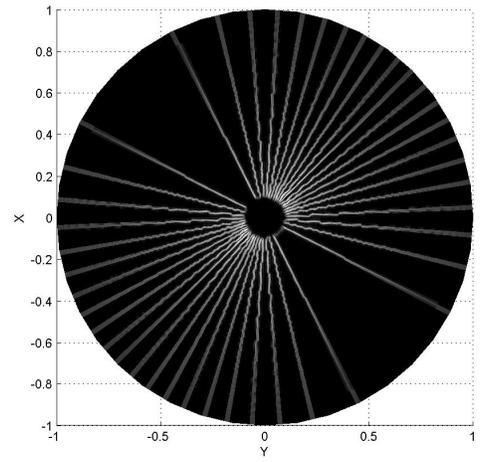


FIG. 5.49 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel sphérique

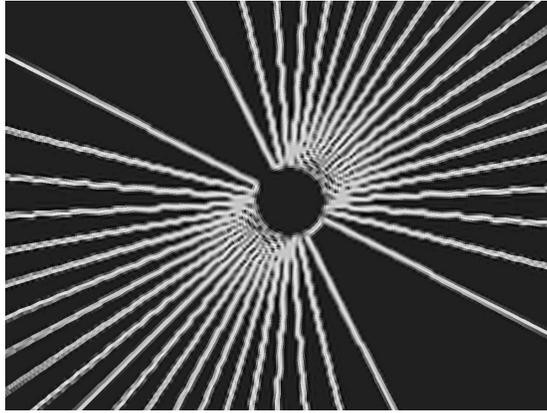


FIG. 5.50 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel réelle, zoom

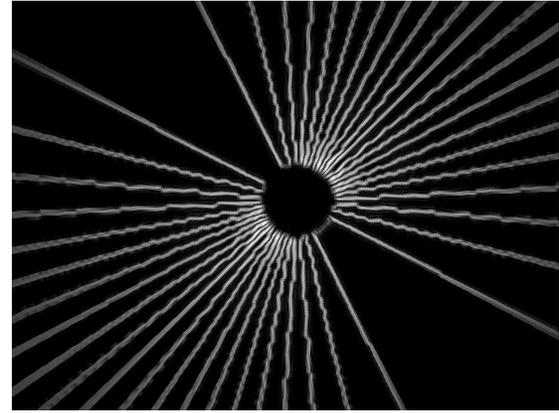


FIG. 5.51 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel sphérique, zoom

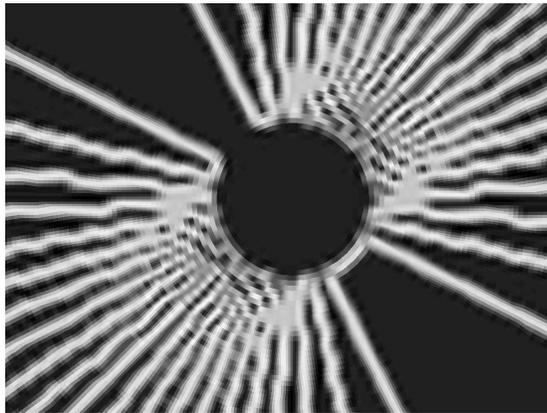


FIG. 5.52 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel réelle, zoom plus précis

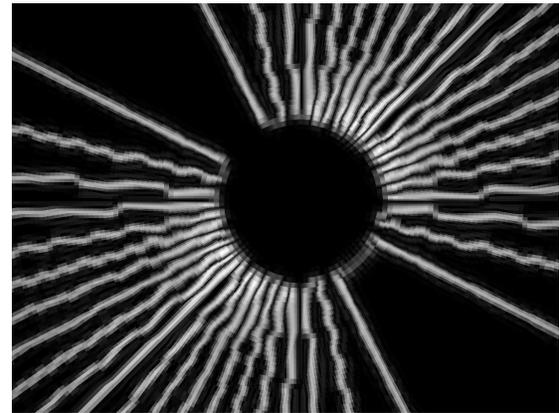


FIG. 5.53 – Image Radiales,  
Méthode de Sobel sphérique, zoom plus précis

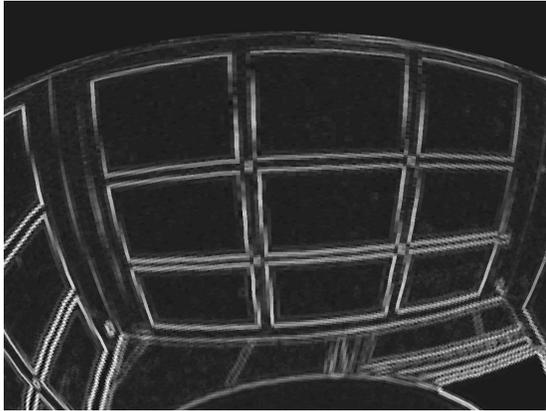


FIG. 5.54 – Image Mire,  
Méthode de Sobel réelle, zoom

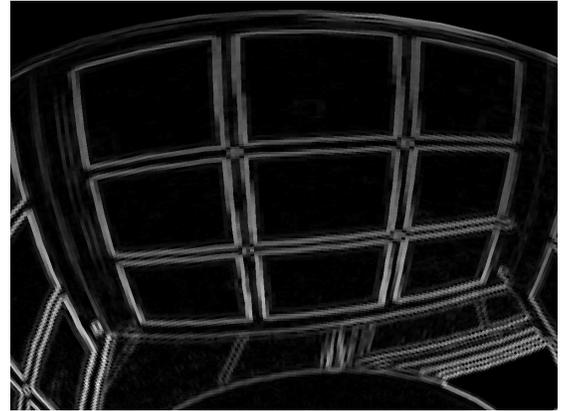


FIG. 5.55 – Image Mire,  
Méthode de Sobel sphérique, zoom



FIG. 5.56 – Image Mire,  
Méthode de Sobel réelle, autre zoom



FIG. 5.57 – Image Mire,  
Méthode de Sobel sphérique, autre zoom

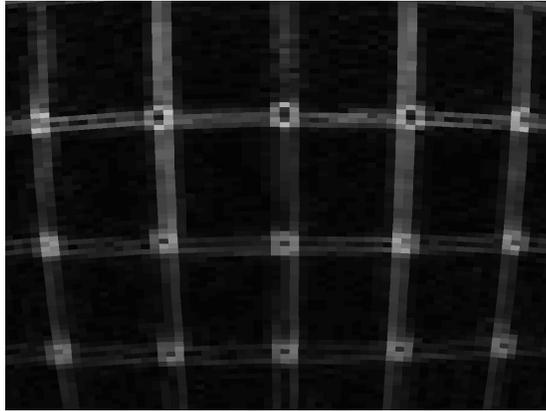


FIG. 5.58 – Image Bureau,  
Méthode de Sobel réelle, zoom

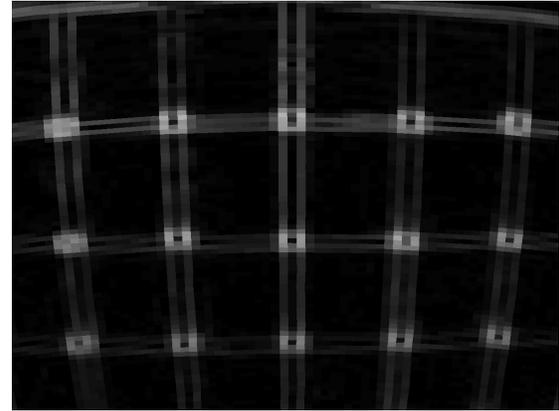


FIG. 5.59 – Image Bureau,  
Méthode de Sobel sphérique, zoom

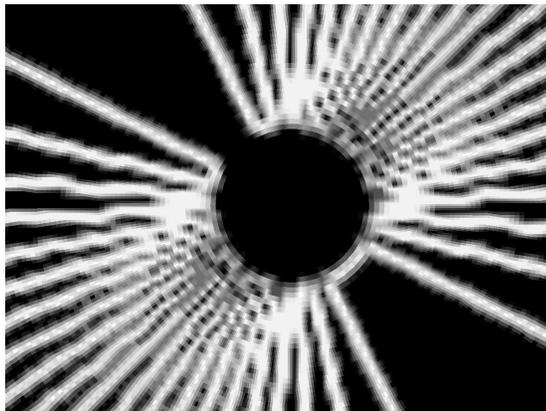


FIG. 5.60 – Image Radiales,  
Méthode de Prewitt réelle

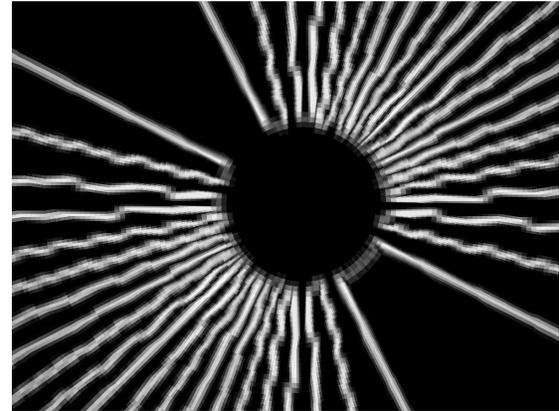


FIG. 5.61 – Image Radiales,  
Méthode de Prewitt sphérique

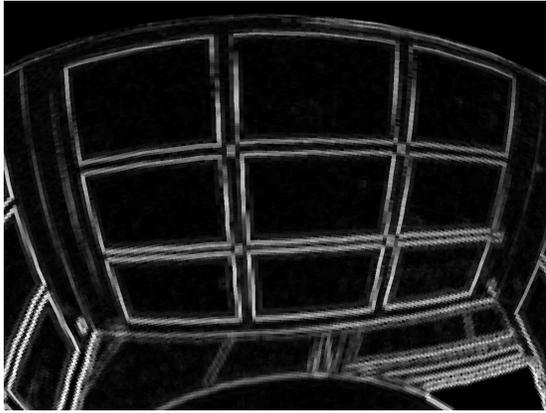


FIG. 5.62 – Image Mire,  
Méthode de Prewitt réelle, zoom

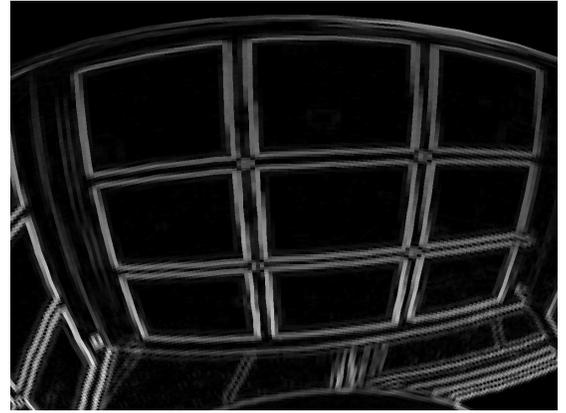


FIG. 5.63 – Image Mire,  
Méthode de Prewitt sphérique, zoom

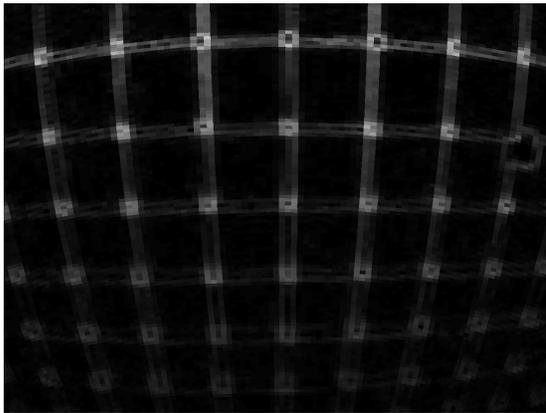


FIG. 5.64 – Image Bureau,  
Méthode de Prewitt réelle, zoom

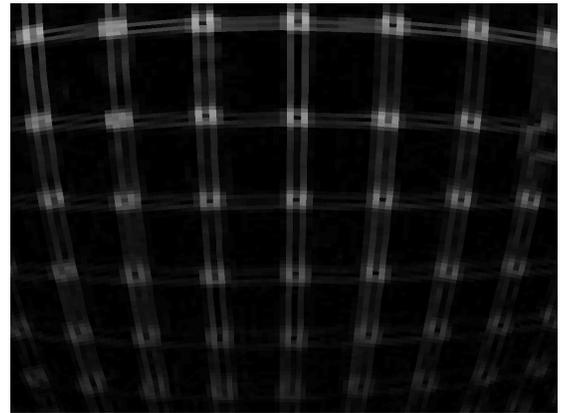
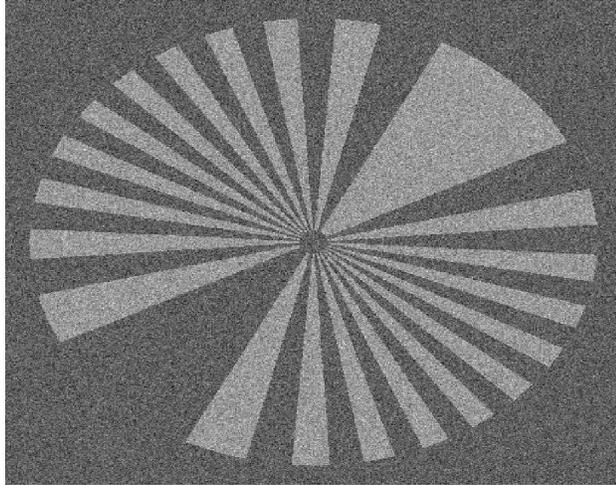
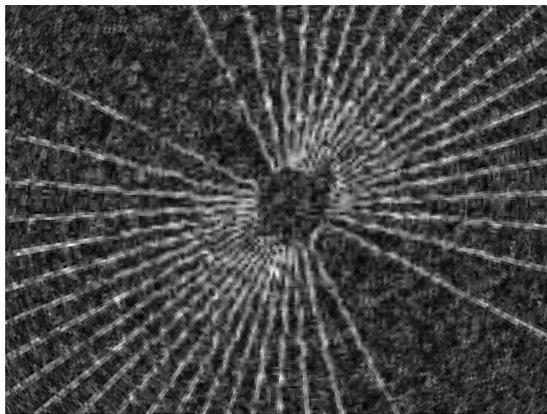
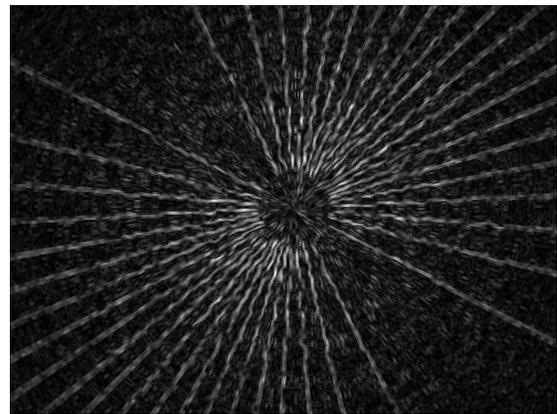


FIG. 5.65 – Image Bureau,  
Méthode de Prewitt sphérique, zoom

FIG. 5.66 – Image Radiales bruitée,  $\sigma = 10$ FIG. 5.67 – Image Radiales bruitée,  
Méthode de Prewitt réelle, zoomFIG. 5.68 – Image Radiales bruitée,  
Méthode de Prewitt sphérique, zoom

# Conclusions et perspectives

A l'origine de ce travail se trouve un simple constat : traiter les images omnidirectionnelles comme des images planes classiques aboutit à des erreurs puisque la géométrie du capteur n'est pas prise en compte. En effet, une image omnidirectionnelle présente une résolution plus faible au centre de l'image qu'à la périphérie. Nous proposons dans ce travail de projeter l'image omnidirectionnelle sur un espace homogène, une sphère, et de procéder aux traitements de l'image obtenue par des outils adaptés.

Ce travail s'inscrit dans un contexte de développement de traitement haut-niveau sur la sphère, dont les traitements bas-niveau sont effectués par des outils classiques (c'est-à-dire appropriés aux images planes).

C'est donc de traitement bas-niveau sur la sphère dont traite ce mémoire, afin de fournir une chaîne de traitement complète sur la sphère.

Une image omnidirectionnelle peut être obtenue de différentes façons. Nous nous sommes concentrés sur les images fournies par des capteurs catadioptriques composés de caméras et de miroirs paraboliques.

Ce capteur présente l'avantage d'être équivalent à la projection stéréographique inverse sur une "sphère équivalente" suivie d'une projection stéréographique sur la sphère. Notre travail s'est donc accentué sur l'étude des images sphériques ainsi obtenues.

Nous avons étudié les différents outils mathématiques nécessaires au traitement d'images sphériques, entre autres l'analyse harmonique et le produit de convolution sphériques.

Nous avons ensuite pu développer des méthodes de traitement bas-niveau adaptés. Nous avons choisi de construire des méthodes analogues à ce qui existe pour les images planes. Par exemple, nous avons adapté le filtre de Wiener et la méthode de régularisation de Tikhonov pour fournir des outils de lissage sur la sphère.

Le deuxième aspect sur lequel nous avons travaillé est la détection de contours avec l'élaboration des filtres de Roberts, Prewitt et Sobel sphériques. Ces méthodes ont fait l'objet de tests comparatifs qui ont montré l'avantage des "méthodes sphériques"

par rapport aux “méthodes classiques” pour la détection de contours. En effet, par sa construction le filtre sphérique est invariant par rotation autour de l’axe ( $Oz$ ). Son action est donc aussi efficace que ce soit dans la zone correspondant au centre de l’image omnidirectionnelle que dans la zone correspondant à la périphérie.

Ces travaux pourront dans l’avenir être complétés par des tests quantitatifs grâce à des critères qu’il nous conviendra de construire sur la sphère.

Une autre méthode de détection de contours, souvent utilisée pour les images planes, est le filtre de Canny, dont la construction repose sur plusieurs critères à vérifier. Nous avons ici développé des critères analogues dans le cas des images sphériques afin de définir un détecteur de contours optimal. Précisément, nous avons obtenu des critères à optimiser pour la bonne détection et la bonne localisation des contours. Nous espérons que ce travail se complétera prochainement par des essais numériques pour obtenir le meilleur détecteur possible pour des images sphériques.

Ce qui pourrait être reproché aux “méthodes sphériques” est le passage image omnidirectionnelle-image sphérique par la projection stéréographique inverse. En effet, une étape d’interpolation est nécessaire dans cet algorithme, pour passer d’une grille irrégulière sur le plan à la grille régulière, latitude-longitude, sur la sphère. Une réflexion sur cet aspect du traitement semble donc nécessaire pour l’améliorer. Néanmoins les “méthodes sphériques” présentent des résultats plus intéressants que les “méthodes classiques” et ce, malgré d’éventuelles erreurs d’interpolations.

# Annexe A

## Equation du point de vue unique

Nous présentons ici de façon détaillée la démarche de Baker et Nayar dans [3] pour obtenir l'équation de la contrainte du point de vue unique. La résolution de cette équation aboutit à différents types de miroirs, réalisables ou non, pour la construction de capteurs catadioptriques vérifiant la contrainte du point de vue unique.

Nous considérerons un capteur composé d'une unique caméra classique et d'un unique miroir. Nous supposons que la caméra peut se modéliser par le modèle idéal du "trou d'épingle" (pinhole) où le trou d'épingle correspond au centre de la caméra par lequel passent les rayons lumineux.

La contrainte du point de vue unique implique que chaque rayon lumineux qui passe par le pinhole de la caméra aurait dû passer par le point de vue unique s'il n'avait pas été réfléchi par le miroir.

On travaille avec les coordonnées cartésiennes du système. Le point de vue unique du capteur catadioptrique appelé aussi "effective viewpoint" est noté  $V$ , de coordonnées  $(0, 0)$ . Il constitue donc l'origine de notre repère. Le pinhole se situe au point  $P$ , de coordonnées  $(0, c)$ . L'axe vertical  $Vz$  a donc la même direction que  $\vec{VP}$ .

Etant donné que l'on peut supposer que le miroir est une surface de révolution autour de l'axe  $Vz$ , on peut se contenter de travailler dans l'espace 2D, de repère  $(V, \vec{r}, \vec{z})$  où  $\vec{r}$  est le vecteur unité orthogonal à  $\vec{z}$  et tel que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  avec  $(x, y)$  les coordonnées cartésiennes.

## A.1 Obtention de l'équation du point de vue unique

Dans ce qui suit, tous les angles sont pris dans le sens trigonométrique.

Soit  $\theta$  l'angle entre le rayon incident provenant de l'objet et l'axe  $Vr$ . Ce rayon intersecte le miroir en un point de coordonnées  $(r, z)$ .

D'après la contrainte du point de vue unique, si le rayon n'avait pas été réfléchi par le miroir, il serait passé par le point  $V = (0, 0)$ . D'où :

$$\tan(\theta) = \frac{z}{r}.$$

On note  $\alpha$  l'angle entre le rayon réfléchi et l'axe  $Vr$ . Le rayon réfléchi passe par le pinhole  $P$ . On a donc :

$$\tan(\alpha) = \frac{c - z}{r}.$$

Soit  $\beta$  l'angle entre l'axe des  $z$  et la normale au miroir au point d'incidence de coordonnées  $(r, z)$ . On a alors la relation suivante :

$$\frac{dz}{dr} = -\tan(\beta).$$

D'après la loi de Snelle-Descartes, le rayon réfléchi et le rayon incident forment avec la normale le même angle (pris dans le sens trigonométrique). Donc l'angle entre la normale et le rayon incident est égal à  $\gamma + \beta$ , où  $\gamma$  représente l'angle entre le rayon incident et la normale, c'est-à-dire  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ .

Par conséquent, en faisant la somme des angles, on obtient :

$$\theta + (\gamma + \beta) + \beta + \gamma + \alpha = 180^\circ.$$

En remplaçant  $\gamma$ , on obtient donc :

$$2\beta = \alpha - \theta.$$

Nous avons les relations suivantes sur la fonction tangente :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},$$

$$\tan(-a) = -\tan(a).$$

Par conséquent, en appliquant la fonction tangente à l'égalité précédente, on trouve :

$$\frac{2 \tan(\beta)}{1 - (\tan(\beta))^2} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\theta)}.$$

En remplaçant les valeurs de  $\tan(\alpha)$  et  $\tan(\beta)$ , on a :

$$\frac{-2\frac{dz}{dr}}{1 - \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} = \frac{(c - 2z)r}{r^2 + cz - z^2},$$

que l'on peut simplifier en l'équation suivante :

$$r(c - 2z)\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 - 2r(r^2 + cz - z^2)\frac{dz}{dr} + r(2z - c) = 0.$$

## A.2 Résolution de l'équation

Baker et Nayar ont proposé dans un premier temps de résoudre cette équation comme une équation ordinaire du deuxième ordre d'inconnue  $\frac{dz}{dr}$ . Après calcul du discriminant, on trouve :

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(z^2 - r^2 - cz) \pm \sqrt{(rc)^2 + (z^2 + r^2 - cz)^2}}{r(2z - c)}.$$

Ensuite, on pose  $t = z - \frac{c}{2}$  et  $b = \frac{c}{2}$ , on en déduit :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{(t^2 - r^2 - b^2) \pm \sqrt{4r^2b^2 + (t^2 + r^2 - b^2)^2}}{2rt}.$$

On effectue encore un changement de variables en posant  $2rs = t^2 - r^2 - b^2$ .

On différencie  $2rs$ , ce qui donne  $2t\frac{dt}{dr} = 2s + 2r\frac{ds}{dr} - 2r$ .

En remplaçant  $\frac{dt}{dr}$  par son expression trouvée précédemment, on obtient :

$$2s + 2r\frac{ds}{dr} - 2r = \frac{(2rs - 2r^2) \pm \sqrt{4r^2b^2 + 4r^2s^2}}{r}.$$

Après simplification, on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2 + s^2)}} \frac{ds}{dr} = \pm \frac{1}{r}.$$

Les auteurs intègrent alors l'égalité par rapport à la variable  $r$  pour aboutir à :

$$\ln(s + \sqrt{b^2 + s^2}) = \pm \ln(r) + K_1$$

où  $K_1$  est une constante d'intégration.

Par passage à l'exponentielle, on en déduit :

$$s + \sqrt{b^2 + s^2} = \frac{k}{2} r^{\pm 1}$$

avec  $K = 2 \exp(K_1)$  est une constante strictement positive.

Regardons ce qui se passe pour :

$$s + \sqrt{b^2 + s^2} = \frac{k}{2r}.$$

Par passage au carré de l'égalité, on a :

$$s^2 + b^2 = \left(\frac{k}{2r} - s\right)^2,$$

$$b^2 = \frac{k^2}{4r^2} - \frac{ks}{r},$$

$$b^2 = \frac{k^2}{4r^2} - \frac{kt}{2r^2} - \frac{k}{2} + \frac{kb^2}{2r^2},$$

$$t^2 = \frac{k}{2} - r^2 + \frac{2r^2 b^2}{k} \left(\frac{k}{2r^2} - 1\right),$$

$$t^2 + r^2 \left(1 + \frac{2b^2}{k}\right) = \frac{k}{2} + b^2.$$

En remplaçant  $t$  et  $b$  par leurs expressions, on trouve pour tout  $k > 0$ , la solution suivante :

$$\left(z - \frac{c}{2}\right)^2 + r^2 \left(\frac{c^2}{2k} + 1\right) = \frac{c^2 + 2k}{4}. \quad (\text{A.1})$$

De la même manière, on résoud :

$$s + \sqrt{b^2 + s^2} = \frac{kr}{2}$$

et on trouve pour tout  $k \geq 2$  la solution suivante :

$$\left(z - \frac{c}{2}\right)^2 - r^2 \left(\frac{k}{2} - 1\right) = \frac{c^2 k - 2}{4k}. \quad (\text{A.2})$$

### A.3 Solutions particulières

En faisant varier les constantes  $c$  et  $k$  dans les équations (A.1) et (A.2), on obtient l'ensemble des miroirs satisfaisant la contrainte du point de vue unique. Cependant, certaines de ses solutions sont dégénérées, dans le sens où elles n'aboutissent pas à fournir un capteur qui, à la fois, vérifie la propriété du point de vue unique, et qui, en même temps, fournit un large champ de vision. Cependant, certaines de ses solutions sont utilisées car elles fournissent un large champ de vision, mais pas de point de vue unique. Détaillons maintenant les différents miroirs obtenus.

On obtient un miroir planaire, en posant  $k = 2$  et  $c > 0$  dans l'équation (A.1). L'équation du miroir est alors :

$$z = \frac{c}{2}.$$

La solution est dégénérée car le miroir a la propriété du point de vue unique, mais seul, il n'augmente pas le champ de vision.

Le miroir conique est obtenu en posant  $c = 0$  et  $k \leq 2$  dans (A.1). L'équation devient :

$$z = \sqrt{\frac{(k-2)}{2}} r^2.$$

Comme  $c = 0$ , le pinhole est situé au sommet du miroir et coïncide avec le point de vue. La solution est donc également dégénérée car on ne peut avoir en même temps un large champ de vision et un point de vue unique.

En posant  $c = 0$  et  $k > 0$  dans (A.2), on retrouve l'équation d'un miroir sphérique :

$$z^2 + r^2 = \frac{k}{2}.$$

Comme précédemment, cette solution est dégénérée.

On obtient un miroir ellipsoïde, en posant  $k > 0$  et  $c > 0$  :

$$\frac{1}{a} \left( z - \frac{c}{2} \right)^2 + \frac{1}{b} r^2 = 1,$$

avec  $a = \sqrt{\frac{2k+c^2}{4}}$  et  $b = \sqrt{\frac{k}{2}}$ .

Le miroir hyperboloïde est obtenu en posant  $k > 2$  et  $c > 0$  :

$$\frac{1}{a^2} \left( z - \frac{c}{2} \right)^2 - \frac{1}{b^2} r^2 = 1$$

avec  $a = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{k-2}{k}}$  et  $b = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k}}$ .

Cette solution fournit les conditions demandées : point de vue unique et large champ de vision. Elle a d'ailleurs été très utilisée.

Pour finir, si dans (A.2), on fait tendre  $k$  et  $c$  vers  $+\infty$ , avec  $\frac{c}{k} = h$ , où  $h$  est une constante, l'équation obtenue est celui d'un paraboloïde :

$$z = \frac{h^2 - r^2}{2h}.$$

Ce cas correspond à une projection orthographique, ce qui simplifie la calibration du système. De plus, on peut effectuer une translation du miroir sur l'axe des  $z$ , sans ce que cela ne dégénère la solution.

# Annexe B

## Projection stéréographique inverse

La projection stéréographique inverse nous permet de transformer l'image omnidirectionnelle que l'on considère au départ en une image définie sur la sphère d'équivalence.

La grille de définition de l'image omnidirectionnelle est irrégulière, donc a fortiori par projection stéréographique, la grille sera irrégulière sur la sphère.

Nous avons choisi de travailler avec une grille régulière sur la sphère, la grille latitude-longitude. Pour cela, on effectue une étape d'interpolation sur le plan, ce qui peut entraîner des erreurs de précisions.

Pour montrer les effets de l'interpolation sur nos traitements, on affiche la norme du gradient sphérique de l'image Radiales après diverses interpolations. On voit que c'est l'interpolation par spline cubique qui donne de meilleurs résultats puisque les contours sont bien distincts et ne fusionnent pas. C'est donc l'interpolation que nous avons utilisée pour nos tests.

Nous allons rappeler brièvement la définition de spline cubique.

**Définition 4** Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$   $n$  nombres réels et  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$   $n$  autres nombres réels.

On appelle spline cubique associée à la famille  $(x_i, y_i)$  toute fonction  $S$  de classe  $C^2$ , polynomiale de degré au plus 3 sur chaque  $[x_i, x_{i+1}]$  et telle que  $S(x_i) = y_i$  pour tout  $i$ .

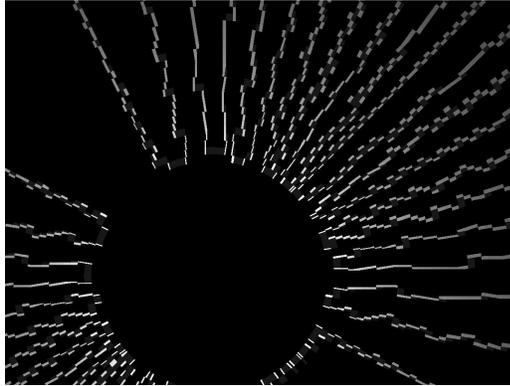


FIG. B.1 – Interpolation du plus proche voisin

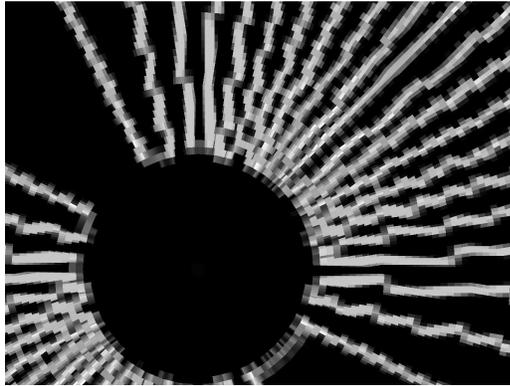


FIG. B.2 – Interpolation linéaire

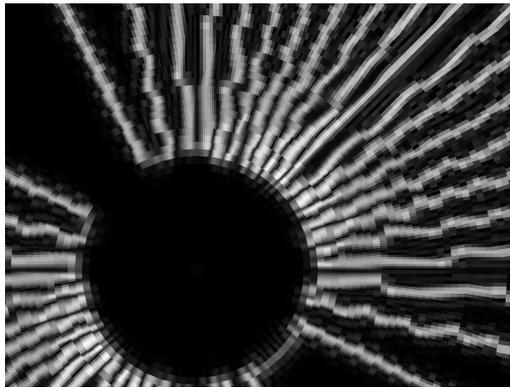


FIG. B.3 – Interpolation par spline cubique

# Annexe C

## Publications et communications

S. Bigot, D. Kachi, S. Durand, E.M. Mouaddib, Spherical image denoising and its application to omnidirectional imaging, proc. of VISAPP, 2007

Communication orale lors de la Journée Vision Omnidirectionnelle organisée par le GDR ISIS et le Club EEA à Amiens en mars 2007

Présentation au séminaire doctorants d'Amiens en novembre 2007

Communication murale (poster) lors de la journée Recherche de la DGA, en mars 2008

Communication murale (poster) lors du Canum 2008, en mai 2008

S. Bigot, D. Kachi, S. Durand, Spherical Edge Detector : Application to Omnidirectional Imaging, ACIVS 2008, (accepté pour une communication murale)



# Table des figures

1	Utilisation d'un capteur omnidirectionnel pour un robot koala . . . . .	9
2	Utilisation d'un capteur omnidirectionnel pour un drone . . . . .	9
1.1	Image Panoramique . . . . .	10
1.2	Image Omnidirectionnelle . . . . .	10
1.3	Caméra RingCam de Microsoft <sup>R</sup> . . . . .	11
1.4	Exemple d'image fisheye . . . . .	12
1.5	Schéma d'un capteur catadioptrique . . . . .	14
1.6	Exemple de capteur catadioptrique . . . . .	14
1.7	Projection d'un point P avec une caméra type "trou d'épingle" . . . . .	15
1.8	Schéma d'équivalence pour le miroir parabolique . . . . .	17
1.9	Schéma de traitement des images omnidirectionnelles . . . . .	20
1.10	Image omnidirectionnelle d'une mire . . . . .	21
2.1	Angles de paramétrisation de la sphère . . . . .	23
2.2	Projection stéréographique . . . . .	24
3.1	Exemple de plan tangent à la sphère . . . . .	47
5.1	Image Bureau . . . . .	67
5.2	Image Mire . . . . .	67
5.3	Image Radiales . . . . .	68
5.4	Image Droites . . . . .	68
5.5	Image Texture 11 . . . . .	68
5.6	Image Texture 14 . . . . .	68
5.7	Image aérienne . . . . .	68
5.8	Mire bruitée (sigma=10) . . . . .	70
5.9	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour le filtre de Green . . . . .	70
5.10	Résultat du lissage avec le filtre de Green pour le paramètre $t = 2 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	70
5.11	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour la méthode de Tikhonov . . . . .	71

5.12	Résultat du lissage avec le filtre de Tikhonov pour le paramètre $k = 42500$ . . . . .	71
5.13	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image Mire pour le filtre de Wiener . . . . .	71
5.14	Résultat du lissage avec le filtre de Wiener pour le paramètre $k = 4203000$ . . . . .	71
5.15	Zooms sur l'image Mire sphérique . . . . .	72
5.16	Zoom près du pôle sur l'image Mire bruitée ( $\sigma=40$ ) . . . . .	72
5.17	Résultat du filtrage par Green, SNR=9,8385 . . . . .	72
5.18	Résultat du filtrage par Poisson, SNR=10,1110 . . . . .	73
5.19	Résultat du filtrage par Tikhonov, SNR=10,0101 . . . . .	73
5.20	Zoom loin du pôle sur l'image Mire bruitée ( $\sigma=40$ ) . . . . .	73
5.21	Résultat du filtrage par Green, SNR=11,2535 . . . . .	73
5.22	Résultat du filtrage par Tikhonov, SNR=10,7965 . . . . .	74
5.23	Résultat du filtrage par Wiener, SNR=10,8076 . . . . .	74
5.24	Image aérienne projetée sur la sphère d'équivalence . . . . .	74
5.25	Image aérienne sphérique bruitée ( $\sigma=10$ ) . . . . .	74
5.26	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour le lissage avec la gaussienne sphérique . . . . .	75
5.27	Résultat du lissage avec la gaussienne sphérique pour le paramètre $k = 0.0081$ . . . . .	75
5.28	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour le filtre de Wiener . . . . .	75
5.29	Résultat du lissage avec le filtre de Wiener pour le paramètre $k = 1153000$ . . . . .	75
5.30	Evolution du SNR suivant le paramètre d'échelle pour l'image aérienne pour un lissage avec le noyau de Poisson . . . . .	76
5.31	Résultat du lissage avec le noyau de Poisson pour le paramètre $k = 0.995$ . . . . .	76
5.32	Image Radiales, Méthode de Roberts réelle . . . . .	78
5.33	Image Radiales, Méthode de Roberts sphérique . . . . .	78
5.34	Image Radiales, Méthode de Roberts réelle, zoom . . . . .	79
5.35	Image Radiales, Méthode de Roberts sphérique, zoom . . . . .	79
5.36	Image Radiales, Méthode de Roberts réelle, zoom plus précis . . . . .	79
5.37	Image Radiales, Méthode de Roberts sphérique, zoom plus précis . . . . .	79
5.38	Image Droites, Méthode de Roberts réelle . . . . .	80
5.39	Image Droites, Méthode de Roberts sphérique . . . . .	80
5.40	Image Mire, Méthode de Roberts réelle, zoom . . . . .	80
5.41	Image Mire, Méthode de Roberts sphérique, zoom . . . . .	80
5.42	Image Mire, Méthode de Roberts réelle, autre zoom . . . . .	81
5.43	Image Mire, Méthode de Roberts sphérique, autre zoom . . . . .	81

5.44	Texture 11, Méthode de Roberts réelle, après lissage par la gaussienne réelle ( $k = 3$ ) . . . . .	81
5.45	Texture 11, Méthode de Roberts sphérique, après lissage par le noyau de Green ( $k = 0.0001$ ) . . . . .	81
5.46	Texture 14, Méthode de Roberts réelle, après lissage par la gaussienne réelle ( $k = 4$ ) . . . . .	82
5.47	Texture 14, Méthode de Roberts sphérique, après lissage par le noyau de Green ( $k = 0.0001$ ) . . . . .	82
5.48	Image Radiales, Méthode de Sobel réelle . . . . .	82
5.49	Image Radiales, Méthode de Sobel sphérique . . . . .	82
5.50	Image Radiales, Méthode de Sobel réelle, zoom . . . . .	83
5.51	Image Radiales, Méthode de Sobel sphérique, zoom . . . . .	83
5.52	Image Radiales, Méthode de Sobel réelle, zoom plus précis . . . . .	83
5.53	Image Radiales, Méthode de Sobel sphérique, zoom plus précis . . . . .	83
5.54	Image Mire, Méthode de Sobel réelle, zoom . . . . .	84
5.55	Image Mire, Méthode de Sobel sphérique, zoom . . . . .	84
5.56	Image Mire, Méthode de Sobel réelle, autre zoom . . . . .	84
5.57	Image Mire, Méthode de Sobel sphérique, autre zoom . . . . .	84
5.58	Image Bureau, Méthode de Sobel réelle, zoom . . . . .	85
5.59	Image Bureau, Méthode de Sobel sphérique, zoom . . . . .	85
5.60	Image Radiales, Méthode de Prewitt réelle . . . . .	85
5.61	Image Radiales, Méthode de Prewitt sphérique . . . . .	85
5.62	Image Mire, Méthode de Prewitt réelle, zoom . . . . .	86
5.63	Image Mire, Méthode de Prewitt sphérique, zoom . . . . .	86
5.64	Image Bureau, Méthode de Prewitt réelle, zoom . . . . .	86
5.65	Image Bureau, Méthode de Prewitt sphérique, zoom . . . . .	86
5.66	Image Radiales bruitée, sigma =10 . . . . .	87
5.67	Image Radiales bruitée, Méthode de Prewitt réelle, zoom . . . . .	87
5.68	Image Radiales bruitée, Méthode de Prewitt sphérique, zoom . . . . .	87
B.1	Interpolation du plus proche voisin . . . . .	97
B.2	Interpolation linéaire . . . . .	97
B.3	Interpolation par spline cubique . . . . .	97



# Glossaire

**Capteur catadioptrique** : capteur composé d'une caméra observant un miroir de révolution et fournissant des images omnidirectionnelles

**Image omnidirectionnelle** : image résultant d'un champ de vue couvrant  $360^\circ$  par rapport à l'axe vertical

**Méthodes classiques ou réelles** : caractérise les méthodes créées pour des images planes et appliquées de manière directe sur des images omnidirectionnelles sans prendre en compte les spécificités géométriques de ces images

**Méthodes sphériques** : méthodes que nous avons développés pour traiter les images omnidirectionnelles en les projetant sur une sphère virtuelle pour y effectuer les traitements

**Propriété du point de vue unique** : chaque rayon lumineux de la scène passe dans une seule direction à travers ce point de vue unique

**SNR** : Signal to Noise Ratio, c'est-à-dire Rapport Signal à Bruit

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\mathbb{E}(\|f\|^2)}{\mathbb{E}(\|f - g\|^2)},$$

où  $f$  est l'image originale et  $g$  son estimation.

**Sphère équivalente** : la projection d'un rayon sur cette sphère virtuelle suivie d'une projection stéréographique sur le plan est équivalente à la projection du rayon à travers un capteur catadioptrique

**Traitement bas-niveau** : traitement qui partant des images, construit des descriptions de celles-ci. Cela inclut par exemple l'extraction de primitives d'images telles que contours/régions... C'est à opposer au traitement haut-niveau, qui fournit des descriptions intrinsèques des objets, donc indépendantes des yeux ou des capteurs.

# Bibliographie

- [1] Antoine J-P., Demanet L., Jacques L., Vandergheynst P., Wavelets on the Sphere : Implementation and Approximations, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **vol 13**, pp 177-200, 2001
- [2] Antoine J-P., Vandergheynst P., Wavelets on the 2-Sphere : a Group-Theoretical Approach, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **vol 7** pp 1-30, août 1999
- [3] Baker S., Nayar S.K., A theory of single viewpoint catadioptric image formation, *IJCV*, 35(2), 175-196, Novembre 1999
- [4] Bazin J.C., Kweon I.S., Démonceaux C., Vasseur P., Rectangle Extraction in Catadioptric Images. 7th Workshop on Omnidirectional Vision, Camera Networks, and Non-classical Cameras (OMNIVIS 07), volume 1, number 1, 1957-1967, 2007
- [5] Bogdanova I., Bresson X., Thiran J.P., Vandergheynst P., Scale Space Analysis and Active Contours for Omnidirectional Images. *IEEE Transactions on Image Processing* volume 16, number 7, 1888-1901, 2007
- [6] Böhme M., A Fast Algorithm for Filtering and Wavelet Decomposition on the Sphere, Thèse, Juin 2002
- [7] Bülow T., Spherical Diffusion for 3D Surface Smoothing, *3D Data Proc. Vis. and Transm.*, Juin 2002
- [8] Canny J., A Computational Approach to Edge Detection, *IEEE*, 1986
- [9] Canny J., Finding Edges and Lines in Images, Technical Report, MIT Artificial Intelligence Laboratory, juin 1983
- [10] Chambert-Loir A., Introduction aux groupes et algèbres de Lie, 2005
- [11] Cutler R., Rui Y., Gupta A., Cadiz J.J., Tashev I., He L., Colburn A., Zhang Z., Liu Z., Silverberg S., Distributed Meetings : A Meeting Capture and Broadcasting System, *ACM Multimedia*, 2002
- [12] Daniilidis K., Omnidirectional image processing, *ICCV* 2003
- [13] Daniilidis K., Makadia A., Bülow T., Image Processing in Catadioptric Planes : Spatiotemporal Derivatives and Optical Flow Computation, *OMNIVIS 2002*, pages 3-10, 2002

- [14] Driscoll J-R., Healy D.M., Computing Fourier Transform and Convolutions on the 2-Sphere, *Advances in Applied Mathematics* **vol 15** pp 202-4544, 1994
- [15] Fiala M., Basu Hough A., Transform for feature detection in panoramic images. *Pattern Recognition Letter*, volume 23, number 14, 1863-1874, 2002
- [16] Freedman W., Windheuser U., Spherical Wavelet Transform and its Discretization, 1995
- [17] Geyer C., Daniilidis K., A Unifying Theory for Central Panoramic Systems and Practical Implications, 2000
- [18] Geyer C., Daniilidis K., Catadioptric Projective Geometry, *International Journal of Computer Vision*, 2001
- [19] Gorski K.M., Wandelt B.D. and al., HEALPix - a Framework for High Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere, septembre 2004
- [20] Gorski K.M., Wandelt B.D. and al., The HEALPix Primer, août 2005
- [21] Greiner W., Mécanique quantique : une introduction, Springer, 1999
- [22] Haar A., Der Maassbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Annals of Mathematics (II)*, t.34, p 147, 1933
- [23] Healy D.H. Jr, Rockmore D., Kostelec P.J., Moore S.B., FFTs for the 2-Sphere - Improvements and Variations, Juin 1998
- [24] Jacquy F., Loquin K., Comby F., Strauss O., Non-Additive Approach for Gradient-Based Edge Detection. *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 3, III49-III52, 2007
- [25] Jakob-Chien R. and Alpert B.K., A Fast Spherical Filter with Uniform Resolution, *Journal of Computational Physics* **vol 136** pp 580-584, 1997
- [26] Kostelec P.J. and Rockmore D.N, FFTs on the Rotation Group, Décembre 2003
- [27] Lin S.S. and Bajcsy R., True single view point cone mirror omni-directional catadioptric system, in *ICCV01*, pages 102-107, 2001
- [28] Makadia A., Daniilidis K., Direct 3D-Rotation Estimation from Spherical Images via a Generalized Shift Theorem
- [29] Makadia A., Daniilidis K., Rotation Recovery from Spherical Images without Correspondences, 2005
- [30] Makadia A., Geyer C., Sastry S., Daniilidis K., Radon-based Structure from Motion without Correspondences
- [31] Mouaddib E.M., La Vision Omnidirectionnelle, Journées Nationale de la Recherche en Robotique, 2005

- [32] Nayar S.K., Catadioptric omnidirectional camera. In CVPR97, pages 482-488, 1997
- [33] Neumann J. von, The uniqueness of Haar's measure, Math. Sbornik, t 1/43, p 721, 1936
- [34] Rees D., Panoramic television viewing system. In United States Patent No. 3, 505, 465, 1970
- [35] Rudoy D., Integral Transforms and Signal Processing on the 2-Sphere, Novembre 2004
- [36] Sobel I., Feldman G., A 3\*3 isotropic gradient operator for image processing, Talk at the Stanford Artificial Project, 1968
- [37] Starck J-L., Moudden Y., Abrial P., Nguyen M., Wavelets, Ridgelets and Curvelets on the Sphere
- [38] Strauss O., Comby F., Variable structuring element based fuzzy morphological operations for single viewpoint omnidirectional images. Pattern Recognition, volume 40, number 12, 3578-3596, 2007
- [39] Tikhonov AN. and Arsenin VA., Solution of Ill-posed Problems, Winston and Sons, Washington, 1977
- [40] Thomas Yeo B.T., Computing Spherical Transform and Convolution on the 2-Sphere, Mai 2005
- [41] Torrésani B., Analyse Continue par Ondelettes, InterEditions/CNRS Editions, Paris, 1995
- [42] Vandeportaele B., Contributions à la vision omnidirectionnelle : Etude, Conception et Etalonnage de capteurs pour l'acquisition d'images et la modélisation 3D, Thèse, 2006
- [43] Vandergheynst P., Ondelettes bidimensionnelles et ondelettes sur la sphère, Thèse, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, 1998.
- [44] Vilenkin N.Ja., *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, 1969
- [45] Wiener N., Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, 1949
- [46] Yagi Y. and Kawato S., Panoramic scene analysis with conic projection. In IROS90, 1990.





## **Outils de traitement d'images adaptés aux images omnidirectionnelles**

### **Résumé**

Cette thèse est consacrée au développement d'outils de traitement adaptés aux images omnidirectionnelles grâce à la "sphère équivalente". En effet, l'utilisation directe de méthodes classiques (c'est-à-dire appropriées aux images réelles) sur des images omnidirectionnelles introduit des erreurs car elle ne prend pas en considération les distorsions introduites par le miroir. Projeter les images omnidirectionnelles sur cette sphère offre l'avantage de pouvoir effectuer les différents traitements sur un espace plus uniforme.

Dans un premier temps, nous rappelons le principe de la vision omnidirectionnelle, puis nous nous attardons sur un capteur en particulier, celui composé d'une caméra observant un miroir parabolique. Nous donnons ensuite les éléments de démonstration pour justifier l'existence de la "sphère équivalente".

Dans un second temps, nous présentons différents outils mathématiques (harmoniques sphériques, convolution sphérique...) nécessaires au développement de nos méthodes sphériques. Nous proposons ensuite la construction de plusieurs traitements bas-niveaux adaptés aux images sphériques : débruitage et détection de contours.

Ces différentes méthodes ont fait l'objet de tests afin de déterminer leurs avantages par rapport aux "méthodes classiques" de traitements d'images omnidirectionnelles. Ces comparaisons ont mis en évidence l'avantage de ces "méthodes sphériques" qui offrent un traitement uniforme sur toute l'image.

## **Image processing tools for omnidirectional vision**

### **Abstract**

In this thesis, we develop new image processing tools suited to omnidirectional vision. These new tools are based on the equivalent sphere, as defined by Geyer and Daniilidis.

This is motivated by the following facts : classical image processing tools, that are suited for planar images, provide us with errors, since these methods do not take into account the peculiar geometry of omnidirectional images. Our approach give efficient methods, with the same resolution quality in the periphery or in the center of the image.

This thesis is organized as follows : in a first section, we introduce what is omnidirectional image associated with a catadioptric sensor, and we recall what is the equivalent sphere.

In a second section, we introduce the mathematical tools which will be used in the sequel : Fourier analysis on the sphere, spherical harmonics, spherical convolution. We then construct edge detection operators and smoothing operators based on this approach.

We finally benchmark our methods on some omnidirectional images, and we discuss the advantages of our low-level processing tools against classical planar operators. These tests provide us with visual evidences of the advantages of our method, specially for a processing that is uniform on the image.