



Modélisation et optimisation numérique pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée

Hamid Zouaki

► To cite this version:

Hamid Zouaki. Modélisation et optimisation numérique pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1991. Français. NNT: . tel-00339815

HAL Id: tel-00339815

<https://theses.hal.science/tel-00339815>

Submitted on 19 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

Hamid ZOUAKI

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I
(Arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Modélisation et optimisation numérique pour
la reconstruction d'un polyèdre à partir de son
image gaussienne généralisée**

Date de soutenance : 4 juillet 1991

Composition du jury :

P.J. LAURENT

Président

J. LEMORDANT

NGUYEN VAN HIEN

J.P. CROUZEIX

Ph. MAHEY

PHAM DINH TAO

B. LACOLLE

Examineurs

Invité

Thèse préparée au sein du laboratoire L.M.C

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire L.M.C (modélisation et calcul) de l'institut de mathématiques appliquées de Grenoble.

Je veux exprimer mes remerciements très sincères à Monsieur Pham Dinh Tao, mon directeur de recherche, pour son soutien et sa confiance. Ses encouragements constants ont contribué énormément à l'élaboration de cette thèse.

Monsieur Pierre Jean Laurent, Professeur à l'université de Grenoble me fait un grand honneur, en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Jacques Lemordant responsable de l'équipe visualisation et synthèse d'image du laboratoire ARTEMIS pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Son suivi personnel et ses suggestions m'ont permis de mener à bien cette thèse. Je le remercie d'en être rapporteur.

Monsieur Nguyen Van Hien, professeur à l'université de Namur a eu l'amabilité de se déplacer pour juger cette thèse, qu'il en soit vivement remercié.

Je remercie Monsieur J.P. Crouzeix professeur à l'université Blaise Pascal, Monsieur Philippe Mahey de l'université de Grenoble et Monsieur Bernard Lacolle responsable de l'équipe de géométrie algorithmique, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je n'oublierai pas de remercier mes collègues des équipes de modélisation & optimisation et de géométrie algorithmique, avec qui j'ai partagé une ambiance des plus sympathiques.

Je remercie toute l'équipe du service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail.

Table des matières

Introduction	5
1. Image gaussienne généralisée	9
1.1 Modes de représentation	9
1.2 Image gaussienne généralisée	14
1.2.1 Cas de surfaces régulières	14
1.2.2 Cas discret	21
2. Problème de reconstruction	27
2.1 Définitions et propriétés	27
2.2 Théorème de Minkowski	29
2.3 Reconstruction dans le cas du tétraèdre	30
2.4 Reconstruction dans le cas d'un polyèdre général	32
2.4.1 Fonction support	32
2.4.2 Somme de Minkowski	32
2.4.3 Volume d'un polyèdre	33
2.4.4 Volume mixte	33
2.5 Nature du problème (P)	37
2.5.1 Propriétés de la fonction $V(l)$	37
2.5.2 Etude de la dérivabilité de $V^{1/d}(l)$	40
2.5.3 Transformation du problème d'optimisation	41

3. Construction du polyèdre $P(l)$	45
3.1 Calcul de l'enveloppe convexe en dimension trois	45
3.2 Polarité des polyèdres convexes	50
3.3 Construction de $P(l)$	53
4. Calcul du volume d'un polyèdre	57
4.1 Calcul direct	57
4.2 Calcul du volume d'un polyèdre en dimension d	58
5. Méthodes numériques d'optimisation	65
5.1 Principe de la méthode du gradient réduit	65
5.1.1 Calcul du pas de déplacement	67
5.1.2 Vitesse de convergence	68
5.2 Calcul du Hessien de V	69
5.3 Principe de la méthode de Newton	71
6. Algorithme de reconstruction	75
6.1 Schémas de reconstruction	75
6.2 Traitements numériques	76
Exemples	81
Bibliographie	91

Introduction

La représentation d'un objet à partir de la donnée de son image gaussienne généralisée (extended gaussian image) notée E.G.I, apparaît dans plusieurs problèmes de vision par ordinateur. Cette représentation est intéressante, vu la souplesse qu'elle offre au niveau de la rentrée des données et la manipulation de l'objet, puisqu'elle ignore les relations d'adjacences liant les différents éléments. L'E.G.I d'un objet n'est pas affectée par translation ni par rotation, ce qui permet de s'affranchir de tout système de coordonnées.

Le principe d'une telle représentation est de définir, sur la sphère unité, une fonction densité qui permet de rendre compte de la variation de l'aire sur la surface de l'objet, en fonction de la variation de son orientation (la direction de la normale en chaque point de la surface).

Dans le cas d'un polyèdre, son image gaussienne généralisée est définie par la donnée des normales et des aires de ses faces.

Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de retrouver la représentation surfacique d'un polyèdre (la donnée de ses sommets , faces et arêtes, ainsi que les relations d'adjacences liant ces éléments) à partir de la donnée de son image gaussienne généralisée.

Les travaux de Minkowski, à la fin des années 1890, ont montré qu'un polyèdre convexe est complètement déterminé par la donnée de l'aire et l'orientation de ses faces. Ce résultat est un cas particulier du problème, communément appelé problème de Minkowski, concernant les surfaces convexes. Plusieurs démonstrations de ce résultat existent, sans toutefois donner un moyen explicite pour la construction effective du convexe en question.

En 1983, J.J.Little [20] présenta un algorithme astucieux, inspiré de la preuve de Minkowski, qui consiste à résoudre un problème d'optimisation pour reconstruire un polyèdre à partir de son E.G.I. L'algorithme repose sur la propriété suivante : Soit $(N_i, S_i)_{i=1, \dots, k}$ l'E.G.I d'un polyèdre P , dont on cherche la représentation surfacique. A tout $l \in \mathbb{R}^k$, on peut associer le polyèdre $P(l) = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle N_i, x \rangle \leq l_i \quad i=1, \dots, k\}$. On note $V(l)$ le volume du polyèdre $P(l)$. Le vecteur des distances de l'origine aux faces du polyèdre cherché est la solution du problème (P) : $\text{Min} \sum_{i=1}^k l_i S_i$ sous la contrainte $V(l) \geq 1$ et $l \geq 0$

Notre travail complète celui de Little, et notre souci est de donner un moyen performant pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son E.G.I.

Dans le premier chapitre on présente la définition de l'E.G.I d'un objet et les propriétés importantes qu'elle possède. On montre que l'E.G.I peut être un mode de représentation très souple, et un moyen intuitif pour simuler des techniques de sculpture par ordinateur.

Dans le second chapitre, quelques résultats concernant la combinaison de convexes et leur volume sont présentés. On étudie les propriétés que possède la fonction $V(l)$ et on donne un moyen pour le calcul, dans le cas non différentiable, d'un sous-gradient de V . On montre que le problème (P) peut être transformé en un problème équivalent (P') plus facile à traiter numériquement.

Au chapitre trois on présente une méthode pour la construction, en dimension trois, du polyèdre $P(l)$, c'est à dire la détermination de sa topologie et les coordonnées de ses sommets. Cette construction se fera via la dualité et en utilisant un algorithme de calcul de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points en dimension trois.

L'efficacité de l'algorithme de reconstruction, repose sur le choix d'un bon algorithme pour le calcul du volume d'un polyèdre. Ainsi au chapitre

quatre, deux méthodes pour le calcul du volume sont présentées, avec une étude de leurs spécificités respectives.

Le chapitre cinq est consacré aux méthodes numériques d'optimisation utilisées pour résoudre (P'). Afin de pouvoir utiliser des méthodes du second ordre, on fournit un moyen pour le calcul du Hessien de V suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des algorithmes de calcul du volume. Cette détermination se fera sans calculs supplémentaires.

Au chapitre six, l'algorithme général pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son E.G.I est présenté, ainsi que le traitement numérique. Quelques suggestions sont formulées dans le sens d'améliorer la méthode. Enfin, au dernier chapitre on introduit une opération entre polyèdres convexes, en fusionnant leurs E.G.I. On présente des exemples de polyèdres générés à l'aide du programme mettant en oeuvre l'algorithme de reconstruction.

Chapitre I

Image Gaussienne Généralisée

Une bonne partie des objets fabriqués dans l'industrie ont comme structure de base des polyèdres.

Le dessin assisté par ordinateur des polyèdres peut être une première étape dans la conception d'un objet au design plus complexe, et plusieurs systèmes de C.A.O exploitent cette propriété.

Les opérations effectuées sur ces objets reposent sur la représentation de ces derniers dans l'ordinateur.

§1.1 Modes de représentation

Un procédé pour la représentation d'un solide doit être :

1) Complet et univoque :

La propriété de complétude exige qu'il n'y ait pas de représentation correspondant à deux solides, tandis que l'unicité consiste en ce que chaque solide n'ait qu'une seule représentation. Cette dernière propriété est rarement présente dans un système de modélisation.

2) Adapté au milieu d'application.

3) Facile à utiliser :

Proche des représentations intuitives.

Il n'y a en fait que deux modèles solides qui répondent suffisamment aux trois critères. Ce sont les modèles surfaciques (ou à enveloppes) et les modèles booléens (géométrie constructive)

- L'idée des modèles booléens est de définir un objet complexe

comme un assemblage de plusieurs objets simples.

On s'assure que le résultat constitue bien un solide en commençant par des objets qui sont eux-mêmes des solides, et en utilisant des méthodes de construction qui garantissent que la propriété de solide est transférée jusqu'à l'objet résultat.

- L'information géométrique la plus complète concernant un objet 3D réside dans les formes des surfaces le composant.

Le modèle surfacique représente un solide par l'ensemble des composantes (faces) qui constituent sa frontière.

Bien que ces deux représentations soient différentes, elles sont compatibles et souvent complémentaires, et il n'est pas rare de trouver un modéleur solide qui utilise les deux représentations.

Dans la description d'un objet solide on peut distinguer deux types d'informations :

- Données géométriques :

C'est la description physique de l'objet par la donnée de la position des composantes qui le constituent :

Coordonnées des sommets, équations des courbes et des surfaces qu'il contient.

- Données topologiques :

Connexité de l'objet, ensemble des relations d'adjacence et d'appartenance liant les différentes composantes de l'objet :

Sommets, arêtes, faces... etc.

On ne peut pas dissocier complètement la topologie et la géométrie.

Un critère important dans le choix d'un système de dessin informatisé est la facilité avec laquelle on peut introduire et modifier les données.

Les logiciels complexes ont tendance à exiger plus d'effort dans la préparation des données.

De meilleures techniques d'introduction de ces données rendront la tâche plus facile au concepteur qui veut innover.

L'entrée des polyèdres simples se fait face par face, en donnant la liste des sommets, c'est à dire leur numéro et leurs coordonnées euclidiennes.

Reste le délicat problème de la mesure de ces coordonnées si l'on travaille à partir d'une maquette ou de l'estimation de ces valeurs lorsque le concepteur crée son objet ab nihilo.

Une méthode pour s'affranchir de tout système de coordonnées serait d'utiliser **l'Image Gaussienne Généralisée du Polyèdre**

Cette représentation d'un polyèdre est parfaitement souple au niveau de l'entrée des données, seules l'orientation et l'aire des faces étant à fournir.

On verra plus loin que ces données caractérisent un polyèdre convexe et permettent de calculer sa topologie ainsi que les coordonnées de ses sommets.

Des opérations booléennes entre polyèdres convexes et des coupes

par des demi espaces, permettent ensuite de créer des polyèdres complexes.

L'orientation et l'aire des faces peuvent se mesurer dans le cas d'une maquette à l'aide d'une caméra vidéo, en mesurant la réflectance des faces dans des conditions d'éclairage précises.

Cette méthode est utilisée dans des systèmes de vision industrielle.

En vision artificielle, un ensemble d'images perçues par une ou plusieurs caméras constitue la source d'information visuelle.

Du fait des lois photométriques qui régissent la formation de l'image, les niveaux de gris (c'est à dire l'intensité lumineuse) perçues dans le plan image dépendent non seulement de l'éclairement de la surface 3D mais aussi de la forme et de la nature de cette surface.

On présente ci-dessous, de manière succincte, le principe de la stéréo photométrie, une méthode utilisée en vision :

Le but d'une telle approche consiste à calculer les normales locales d'une surface 3D à partir de son image en niveaux de gris.

Principe de la méthode :

On place une sphère, revêtue d'une peinture mate de telle sorte que la réflexion de la lumière soit Lambertienne, dans le champ de vision d'une caméra électronique. On éclaire, dans des conditions précises, la sphère à l'aide de trois sources lumineuses.

La quantité de lumière reçue puis réfléchi par un élément de surface ne dépend que de l'inclinaison de cet élément de surface par rapport à la direction de la lumière incidente.

On peut établir, à partir des trois mesures de luminosité, un système de trois équations à trois inconnues, qui sont la latitude et la longitude d'un

point de la sphère ainsi que la quantité de lumière réfléchie (l'albedo de la surface) en ce point.

On établit ainsi une correspondance univoque ou une table indiquant l'orientation d'un point de la sphère en fonction des luminosités à la surface de la sphère.

Quand on remplace la sphère par un objet quelconque, alors à l'aide des trois mesures de luminosités effectuées en un point de la surface de l'objet et par simple consultation de la table, on peut déterminer la normale du point en question, qui n'est autre que le point de la sphère associé aux mesures effectuées.

Dans le cas de création interactive, l'orientation et l'aire sont des paramètres très intuitifs qui permettent de simuler les techniques de sculpture.

En effet, un sculpteur ne pense pas à la topologie lorsqu'il crée une nouvelle face, mais à l'orientation et à l'aire de la face qu'il va créer.

§1.2 Image Gaussienne Généralisée

L'orientation d'une surface est définie en chaque point par la direction de la normale, c'est à dire la droite perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point.

A chaque point d'une surface quelconque, on fait correspondre un point de la sphère unité où l'orientation est parallèle à celle de la normale de la surface au point considéré.

Cette correspondance est intéressante, car tous les points d'une sphère ont une orientation différente.

On peut faire correspondre à toute orientation d'une surface la latitude et la longitude d'un point situé sur une surface sphérique que l'on appelle " Sphère de Gauss ".

L'image gaussienne généralisée d'un objet (en anglais extended gaussian image) notée E.G.I, est la donnée sur la sphère de Gauss laquelle d'une fonction poids, qui n'est autre que le rapport entre un élément de surface de l'objet et l'élément de surface qui lui correspond sur la sphère de Gauss.

1.2.1 Cas de surfaces régulières

Représentation d'une surface

Une représentation paramétrique de classe C^k d'un carreau de surface est la donnée d'une injection de classe C^k $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Une représentation paramétrique de classe C^k d'une surface est la donnée d'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

où U est une partie admettant un recouvrement ouvert $U = \bigcup_{k \in K} U_k$,
tel que f restreinte à chaque U_k soit une représentation paramétrique d'un
carreau de surface.

Surface régulière

Une représentation paramétrique d'une surface $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite
régulière, si elle est de classe C^1 et si en tout point $(u,v) \in U$
 $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ sont linéairement indépendants.

Plan tangent

En un point d'une surface régulière, le plan porté les deux dérivées
partielles premières d'une représentation paramétrique est indépendant
du choix de cette paramétrisation.

Ce plan est par définition, le plan tangent à la surface au point considéré.
Il contient toutes les tangentes à toutes les courbes régulières tracées sur
la surface et passant par ce point.

Vecteur normal

Le vecteur normal à une surface régulière est par définition le

$$\text{vecteur normé } \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right|}$$

Son orientation dépend de la représentation paramétrique choisie.

Courbure d'une surface

On définit la courbure d'une surface en un point comme une fonction
dépendant de la direction considérée sur la surface.

Courbure normale

Soit C une courbe régulière tracée sur la surface et passant par le point P , k étant la courbure de C en P et $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ où n est le vecteur normal de C en P , et N la normale à la surface en P .

Le scalaire $k_n = k \cdot \cos \theta$ est appelé la courbure normale de C en P .

Toutes les courbes tracées sur la surface et ayant même tangente en un point, ont même courbure normale en ce point.

Si la courbure n'est pas la même dans toutes les directions, alors il existe une seule direction de courbure maximale et une direction de courbure minimale, et ces deux directions sont perpendiculaires.

Les courbures extrémales sont aussi appelées courbures principales.

Soit k_1 (resp. k_2) la courbure maximale (resp. minimale) en un point de la surface.

La courbure totale (ou courbure gaussienne) K en ce point est définie comme le produit des courbures principales : $K = k_1 \cdot k_2$.

Un point de la surface est dit :

- _ Elliptique si $K > 0$.
- _ Hyperbolique si $K < 0$.
- _ Parabolique si $K=0$ et l'une des deux courbures est non nulle
- _ Planaire si $k_1=k_2=0$.
- _ Ombilical si $k_1=k_2$, en particulier un point planaire est ombilical.

Aire des surfaces convexes

Pour trouver le volume $(d-1)$ -dimensionnel (appelé aire) de la frontière d'un ensemble convexe, on l'approche par des polyèdres et on

prend comme aire de la frontière la limite de l'aire des polyèdres.

Soit F une surface convexe, et soit (P_k) une suite de polyèdres convergeant vers F , au sens de Hausdorff (cf. chap. 2). Une telle suite existe toujours (cf. Berger [4], p.140).

Soit V une partie de F , on projette V sur le polyèdre P_k et on note $S_{k\alpha}$ l'aire de la projection de V sur la face α de P_k .

Alors la quantité $S_k = \sum_{\alpha} S_{k\alpha}$ converge vers une limite $S(V)$ qui ne dépend pas du choix de la suite (P_k) .

Cette limite $S(V)$ est appelée l'aire de la partie V sur la surface F .

Image Gaussienne

Gauss aborda le problème de la courbure différemment.

Il s'agit de reporter sur une sphère fixée, les variations de la normale au voisinage d'un point fixé.

La mesure de cette variation conduit à la définition de la courbure totale de la surface en ce point.

A chaque point d'une surface régulière, on fait correspondre un point de la sphère unité où l'orientation est parallèle à celle de la normale de la surface au point considéré.

On définit ainsi une correspondance appelée application de Gauss

$$\begin{aligned} N : \quad F &\rightarrow \Omega \\ f(u,v) &\rightarrow \vec{n}(u,v) \end{aligned}$$

entre F le carreau de surface régulière représenté par f , et Ω La sphère unité que l'on appelle aussi " Sphère de Gauss ".

$N(F)$ est par définition l'image gaussienne de F .

Dans cette représentation, un point de la sphère correspond à plusieurs points de la surface, si et seulement si, il existe des normales

parallèles ayant le même sens.

Cette situation n'est pas possible au voisinage d'un point elliptique ou hyperbolique.

Au voisinage de tels points, la correspondance est biunivoque.

Soit V une partie de la surface F , et soit $V'=N(V)$ l'image gaussienne de V . L'aire de V' sur la sphère Ω est appelée courbure de la partie V et notée $\omega(V)$.

Soit P un point parcourant V . La variation de P dans V peut se mesurer par l'aire de V .

La variation de $\vec{n}$ dans V peut, elle, se mesurer par l'aire de $N(V)$, c'est à dire la courbure de V .

Gauss définit la courbure totale de la surface en un point $P \in F$ comme la limite :

$$K(P) = \lim_{\substack{P \in V \subset F \\ \text{aire}(V) \rightarrow 0}} \pm \frac{\text{Aire } N(v)}{\text{Aire } v}$$

où le signe $\pm$ est choisi selon que N préserve ou non l'orientation.

Au voisinage d'un point elliptique N préserve l'orientation, alors qu'elle l'inverse au voisinage d'un point hyperbolique.

Gauss prouva que la courbure totale ainsi définie est égale au produit des deux courbures principales.

Une propriété importante de la courbure gaussienne est qu'elle reste invariante par isométrie, c'est à dire toute transformation respectant la longueur des arcs de courbes et l'angle entre les arcs de courbes.

Cependant, deux surfaces régulières ayant la même fonction courbure ne

sont pas forcément isométriques.

Définition de L'image gaussienne généralisée (E.G.I)

Soient u et v les paramètres permettant de décrire la surface de l'objet , ξ et η sont respectivement la longitude et la latitude d'un point de la sphère.

On définit sur la sphère l'image gaussienne généralisée par :

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{K(u,v)} .$$

(ξ,η) est le point sur la sphère ayant la même normale que le point (u,v) de la surface de l'objet, $K(u,v)$ étant la courbure gaussienne au point (u,v) .

Cette définition n'est valable que pour les surfaces convexes où deux points ne peuvent avoir la même normale (courbure positive).

Néanmoins, la définition peut être étendue au cas d'objets non convexes (**Horn 1984**).

Soit maintenant W une partie de la sphère Ω , et soit V une partie de la surface F telle que $N(V)=W$. L'aire de V est bien définie et sera notée $\sigma(W)$.

On définit ainsi, comme pour la courbure, une mesure sur Ω .

Si (F_n) est une suite de surfaces convexes convergeant vers la surface F , alors la suite (σ_n) , où σ_n est la mesure définie sur Ω à partir de F_n converge faiblement vers σ (cf. Pogorelov [28]).

En d'autres termes, pour toute fonction f définie et continue sur Ω la sphère unité, on a :

$$\lim \int_{\Omega} f d\sigma_n = \int_{\Omega} f d\sigma$$

Propriétés de l'E.G.I

Parmi les propriétés les plus remarquables de l'image gaussienne généralisée on peut citer :

1) La masse totale de l'E.G.I d'un objet est égale à l'aire de la surface de cet objet :

Soit V une partie de surface, et soit V' son image gaussienne.

$$\sigma(V') = \int_{V'} \frac{1}{K(n)} d\omega(n) = \int_{V'} G(n) d\omega = \text{aire}(V)$$

On peut voir G comme une densité de la mesure σ :

$$\sigma = \int G d\omega .$$

2) Le centre de masse de l'E.G.I d'un objet dont la surface est régulière est confondu avec l'origine :

$$\int_{\Omega} n G(n) d\omega = 0 .$$

Cela revient à montrer que pour une surface convexe régulière :

$$\int_{\Omega} n d\sigma = 0 \quad (*) \quad (d\sigma = G d\omega)$$

Soit F une surface convexe, il existe une suite (P_k) de polyèdres qui converge vers F .

La propriété $(*)$ est vérifiée pour tout polyèdre P_k (cf. §1.2.3) :

$$\int_{\Omega} n d\sigma_k = \sum_{\alpha} n_{k,\alpha} S_{k,\alpha} = 0$$

où $S_{k,\alpha}$ est l'aire de la face α de P_k , $n_{k,\alpha}$ étant la normale de cette face.

La fonction qui à un point de F associe sa normale n étant continue, on obtient donc d'après la propriété, citée plus haut, de convergence faible

de σ_k vers σ :
$$\int_{\Omega} n \, d\sigma = \lim \int n \, d\sigma_k = 0 \quad .$$

3) A un objet convexe, on associe et de manière unique son image gaussienne généralisée :

Deux objets convexes ne peuvent avoir la même E.G.I (cf. chap. 2).

Remarque

Là où la surface de l'objet est relativement plane, l'aire de la portion de surface correspondante sur la sphère de Gauss est relativement réduite au contraire là où la surface de l'objet est fortement incurvée l'aire de la surface correspondante est plus importante.

On peut imaginer que l'objet est recouvert d'une couche de matière d'épaisseur constante. Pour construire l'image gaussienne généralisée de cet objet il faut comprimer ou étirer la matière recouvrant chaque portion de surface, de façon qu'elle recouvre exactement la surface correspondante sur la sphère de Gauss.

1.2.2 Cas discret

Dans le cas d'un polyèdre, L'image gaussienne est définie par un nombre fini de points correspondants aux normales des différentes facettes du polyèdre.

L'image gaussienne généralisée est obtenue en plaçant en chacun des points de l'image gaussienne, des masses correspondant aux aires des différentes facettes.

Soit P un polyèdre convexe borné, et soient $F_1, \dots, F_k$ ses k facettes.

N_i, S_i désigneront respectivement la normale (orientée vers l'extérieur et de norme 1) à la facette F_i ainsi que son aire.

Pour $i \in \{1, \dots, k\}$ on définit $U_i = S_i \cdot N_i$.

Ces vecteurs vérifient l'équation :

$$\sum_{i=1}^k u_i = 0 \quad (1)$$

En effet, on peut supposer que 0 est dans l'intérieur de P.

Soit h_i la distance de l'origine à la $i^{\text{ème}}$ facette de P.

Le volume de P est donné par : $V_n(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k h_i S_i$

Soit $x \in \text{int } P$; comme $V_n(P)$ est indépendant du point à partir duquel on effectue la décomposition , on a :

$$V_n(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (h_i - \langle x, N_i \rangle) \cdot S_i$$

Donc, pour tout $x \in \text{int } P$ $\langle x, \sum_{i=1}^k S_i N_i \rangle = 0$.

D'où $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$.

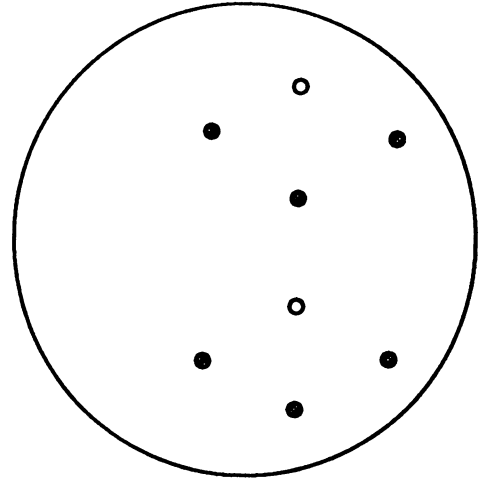
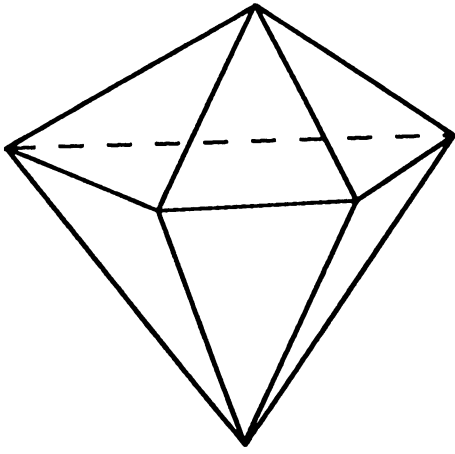
Le système de vecteurs $(U_i)_{i=1, \dots, k}$ ainsi défini est appelé image gaussienne généralisée du polyèdre P et noté E.G.I

La condition (1) exprime le fait que le centre de masse de l'image gaussienne généralisée est confondu avec l'origine.

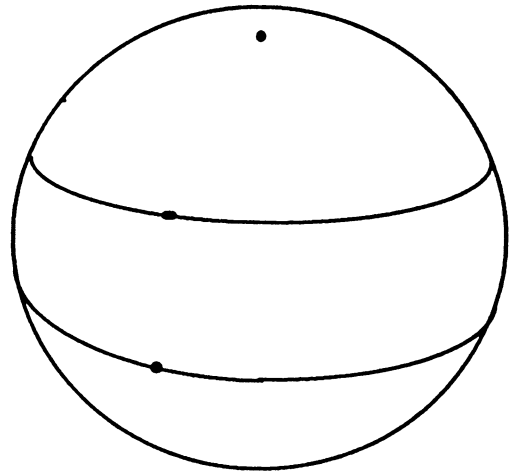
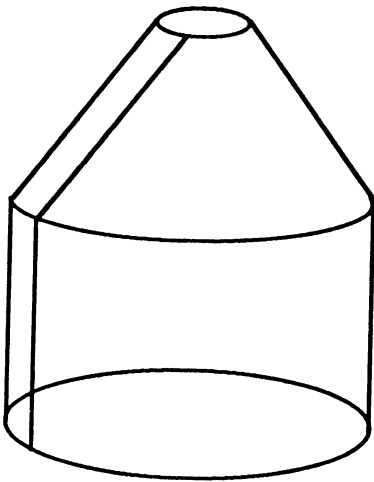
Inversement cette représentation détermine de façon unique un polyèdre convexe borné.

Ce résultat est dû à Minkowski [12,25,28].

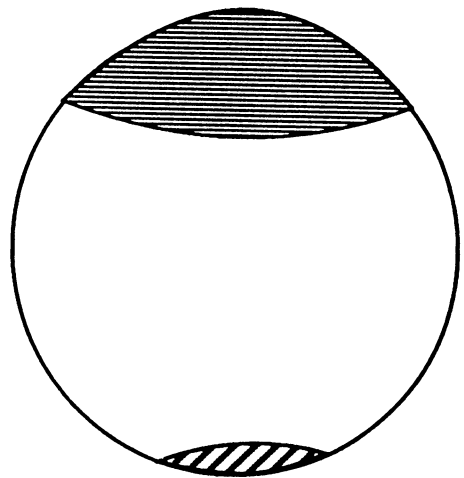
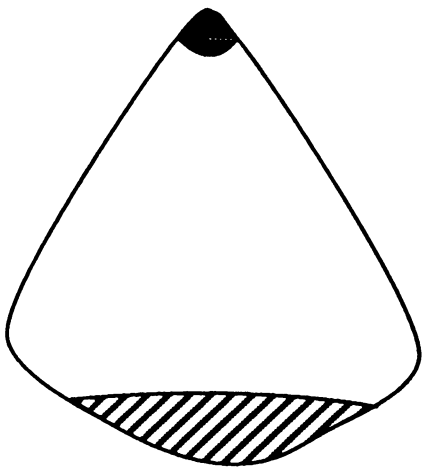
Exemples d'images gaussiennes:



Les points d'une même face d'un polyèdre ont tous la même orientation , toute l'aire de cette face est concentrée en un seul point de la sphère de Gauss .

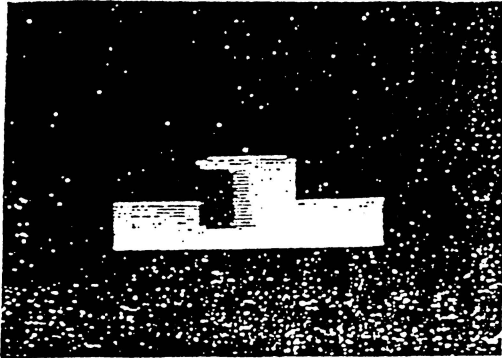


Les surfaces du cône et du cylindre sont représentées par des cercles sur la sphère .

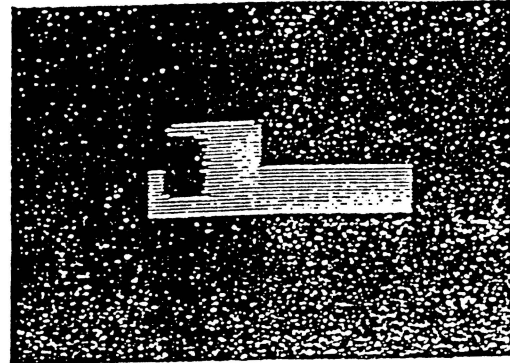


Là où la surface de l'objet est relativement plane ,l'aire de la surface correspondante sur la sphère est relativement réduite .
Là où la surface de l'objet est fortement incurvée , l'aire de la surface associée est plus importante .

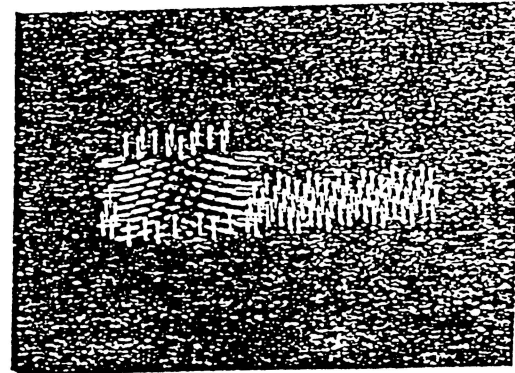
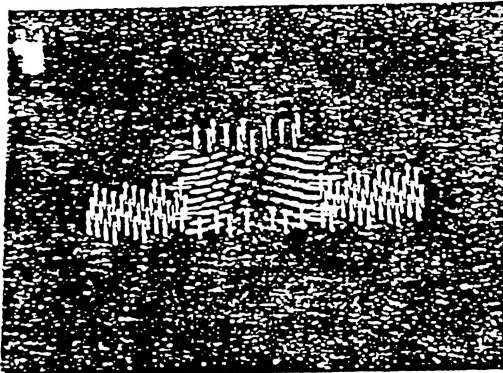
L'E.G.I ne détermine pas de façon unique un objet non convexe .
 Nous avons emprunté l'exemple suivant à (Bajcsy 1980) , où
 on voit deux objets non convexes différents mais ayant la
 même image gaussienne généralisée :



Objet 1



Objet 2



Images Gaussiennes

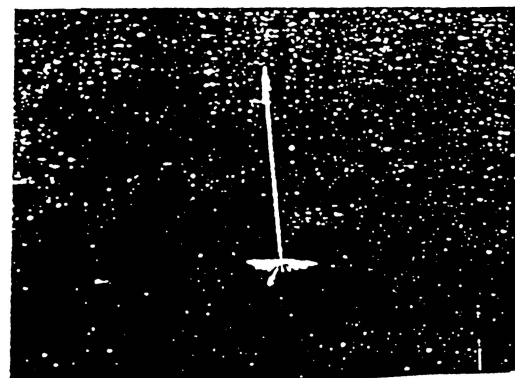
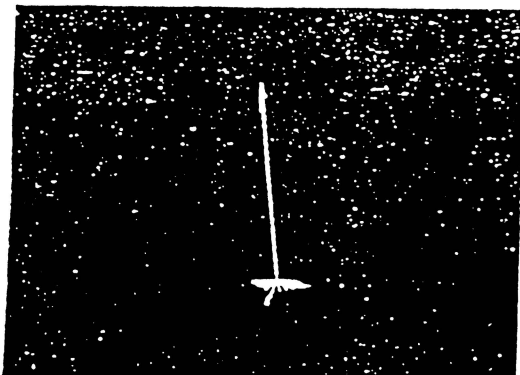


Image Gaussienne Généralisée

Un objet convexe est représenté et de façon unique par son image gaussienne généralisée .

Cette représentation est intéressante, vu la souplesse qu'elle offre au niveau de la rentrée des données et la manipulation de l'objet, puisqu'elle ignore les relations d'adjacences liant les différents éléments .

Dans le cas d'un polyèdre, la connaissance du type combinatoire ainsi que les coordonnées des sommets , permet et de façon directe de calculer les normales ainsi que l'aire des différentes faces , c'est à dire l'E.G.I du polyèdre .

Dans la suite de cet exposé , on s'intéresse au problème inverse, c'est à dire comment retrouver un polyèdre (sa topologie et les coordonnées de ses sommets) à partir de la donnée de son image gaussienne généralisée .

Chapitre II

Problème de reconstruction

La reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée, consiste dans un premier temps à localiser toutes ses facettes, en d'autres termes à calculer les distances de ces dernières à l'origine.

Donc ayant pour information le système $(N_i, S_i)_{i=1, \dots, k}$

Où N_i est un vecteur unitaire

S_i est un nombre positif

avec $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$

on se propose d'évaluer la représentation surfacique du polyèdre P , dont chaque facette a pour normale le vecteur N_i et pour aire S_i .

On aura besoin pour la suite des définitions suivantes :

§ 2.1 Définitions et propriétés

- Un ensemble C de $\mathbb{R}^d$, est convexe si pour tous points x, y dans C le segment $\{\alpha x + (1-\alpha)y / \alpha \in [0,1]\}$ est dans C .

- Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. L'enveloppe convexe de A notée $co(A)$ est l'ensemble des points x combinaisons convexes des points de A :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \quad x_i \in A, \quad I \text{ étant un ensemble fini.}$$

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A

- On dit que l'hyperplan H borne la partie A , si tous les points de A se trouvent soit sur H soit sur l'un des demi espaces déterminés par H .
- H est dit hyperplan d'appui de A si H borne A et au moins un élément de A se trouve sur H .
- On appelle polyèdre convexe, toute intersection finie de demi espaces.
- Un polytope est un polyèdre convexe borné.
- P est un polytope si et seulement si P est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.
- Une face d'un polytope P est l'intersection de P avec un hyperplan d'appui.
- On définit la dimension d'un convexe F comme la dimension de la plus petite variété affine contenant F
- Soit P un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^d$.
 P est dit non dégénéré si sa dimension est égale à celle de l'espace entier.
- On appelle k -face de P une face de P de dimension k .
- Il conviendra d'appeler facette, une face de dimension $d-1$
- Un sommet est une face de dimension 0.
- On dit que les vecteurs $N_1, \dots, N_k$ engendrent positivement l'espace $\mathbb{R}^d$ si tout point de $\mathbb{R}^d$ s'écrit comme combinaison linéaire positive des N_i $i=1, \dots, k$

§ 2.2 Théorème 1 (théorème de Minkowski [28])

Soient $N_1, \dots, N_k$ k vecteurs unitaires qui engendrent positivement l'espace $\mathbb{R}^d$ et soient $S_1, \dots, S_k$ des nombres positifs tels que :

$$\sum_{i=1}^k S_i \cdot N_i = 0$$

Alors il existe un polyèdre convexe fermé borné P , unique à une translation près, dont les facettes ont pour vecteurs normaux les N_i et pour aires les S_i .

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du problème de Minkowski concernant les surfaces convexes fermées, et qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Soit $K(n)$ une fonction définie sur Ω la sphère unité, positive continue et vérifiant
$$\int_{\Omega} \frac{n}{K(n)} d\omega = 0$$

alors il existe une surface convexe, unique à une translation près, dont la courbure gaussienne en un point ayant pour normale n n'est autre que $K(n)$.

On trouve dans la littérature plusieurs démonstrations de ce théorème. Toutefois, ces démonstrations ne donnent pas, notamment dans le cas discret, un moyen explicite pour la construction effective du convexe en question.

Dans le cas particulier d'un tétraèdre, où les relations d'adjacence sont connues d'avance, il est possible d'obtenir et de façon explicite les distances à l'origine des différentes facettes en fonction des normales à ces dernières ainsi que leurs aires.

§ 2.3 Reconstruction dans le cas d'un tétraèdre (HORN [14])

La forme d'un tétraèdre est complètement déterminée par la donnée des normales à ses faces; chaque face est adjacente aux trois autres.

On veut, à partir de la donnée des normales aux quatre faces du tétraèdre ainsi que leurs aires, déterminer complètement le tétraèdre, c'est à dire la distance de l'origine à ses faces.

Notons N_a, N_b, N_c, N_d les normales aux quatre faces du tétraèdre. S_a, S_b, S_c, S_d étant les aires de ces faces.

d_A : distance du centre de gravité à la face opposée au sommet A.

Peut-on avoir une expression analytique de d_A en fonction des normales et les aires des faces ?

Remarque 1

La distance du centre de gravité à une face, est égale au quart de la distance de cette face au sommet qui lui est opposé.

Pour simplifier les expressions, on suppose que l'origine est confondu avec un des sommets du tétraèdre, soit D par exemple.

Exprimons d'abord les normales en fonction des sommets du tétraèdre :

$$N_a = - \frac{B \wedge C}{\|B \wedge C\|} \quad N_b = - \frac{C \wedge A}{\|C \wedge A\|} \quad N_c = - \frac{A \wedge B}{\|A \wedge B\|}$$

$$N_d = \frac{(A-C) \wedge (B-A)}{\|(A-C) \wedge (B-A)\|}.$$

La distance du sommet D à sa face opposée est :

$$4 d_D = N_D \cdot A = N_D \cdot B = N_D \cdot C = \frac{[A B C]}{\|A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A\|}.$$

où $[A B C] = (A \wedge B) \cdot C$ produit mixte.

D'autre part l'aire de la face opposée à D est donnée par :

$$S_d = \frac{1}{2} \| (A-C) \wedge (B-A) \| = \frac{1}{2} \| A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A \| .$$

Remarque 2

$$[(X \wedge Y) (Y \wedge Z) (Z \wedge X)] = [XYZ]^2 \quad (*) .$$

En combinant les différents produits mixtes et en utilisant (*) on trouve :

$$\frac{[N_a N_b N_c] [N_b N_c N_d] [N_c N_a N_d]}{[N_a N_b N_c]^2} = \frac{(4 d_D)^2}{2 S_d} .$$

Finalement

$4 d_D = \frac{(2 S_d \cdot [N_a N_b N_c] [N_b N_c N_d] [N_c N_a N_d])^{1/2}}{[N_a N_b N_c]}$

On obtient les autres formules, en permutant les variables .

§ 2.4 Reconstruction dans le cas d'un polyèdre général

Dans le cas général, le problème de reconstruction devient plus difficile, puisque les relations d'adjacence liant les éléments du polyèdre P cherché sont inconnues et doivent faire partie de la solution.

2.4.1 Fonction support

Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$.

Alors, on définit pour tout $w \in \mathbb{R}^d$ la fonction support de C par :

$$H(w) = \sup_{x \in C} \langle x, w \rangle$$

La fonction $H(w)$ est positivement homogène et convexe; ce qui signifie, pour tous $\lambda, \mu \geq 0$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$H(\lambda x + \mu y) \leq \lambda H(x) + \mu H(y).$$

Inversement, toute fonction convexe H positivement homogène est la fonction support d'un certain convexe C .

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y \rangle \leq H(y) \quad \forall y\}.$$

2.4.2 Somme de Minkowski

Soient P et Q deux polytopes de $\mathbb{R}^d$.

On peut définir la somme $P+Q$ des trois façons équivalentes suivantes :

i) $P+Q = \{x+y / x \in P, y \in Q\}.$

ii) Si H_P (resp. H_Q) est la fonction support de P (resp. de Q) alors $P+Q$ est défini comme l'ensemble convexe dont la fonction support est

$$H_{P+Q}(u) = H_P(u) + H_Q(u).$$

iii) Si x_i ($i=1, \dots, n$) sont les sommets de P , et y_j ($j=1, \dots, m$) sont les sommets de Q , on définit $P+Q = \text{co}(x_i+y_j / i=1, \dots, n \text{ et } j=1, \dots, m)$.

De même on définit la multiplication, de façons équivalentes, du polytope P par un scalaire positif λ comme suit :

- i) $\lambda P = \{ \lambda x / x \in P \}$.
- ii) $H_{\lambda P}(u) = \lambda H_P(u)$.
- iii) $\lambda P = \text{co}\{ \lambda x_i / x_i \text{ sommet de } P \}$.

2.4.3 Volume d'un polyèdre

Le volume d'une partie A est sa mesure de Lebesgue.

Si A est de dimension n , on note $V_n(A)$ sa mesure dans $\mathbb{R}^n$.

Soit P un polytope non dégénéré de $\mathbb{R}^d$.

Si $F_1, \dots, F_k$ sont les facettes de P et si 0 est dans son intérieur, alors en décomposant P en pyramides à partir de 0 , on obtient l'expression suivante de son volume :

$$V_d(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k l_i V_{d-1}(F_i) \quad (1)$$

où $l_i = H_P(N_i)$ est la distance de 0 à F_i , N_i étant la normale à F_i .

2.4.4 Volume mixte

Soient $X_1, \dots, X_n$ n polytopes de $\mathbb{R}^d$, à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs on associe l'ensemble $X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$.

X est un polytope et les sommets de X s'expriment comme combinaisons linéaires des sommets des X_i .

On peut exprimer le volume de X en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2 (Eggleston [10])

Le volume de X est un polynôme homogène de degré d en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$V(X) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_d=1}^n V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_d} \quad (2)$$

Les coefficients $V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})$ sont invariants par permutation de leurs arguments .

Ce théorème est valable si on remplace les polytopes X_i par des convexes.

Les coefficients $V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})$ sont appelés "volumes mixtes" de X et sont positifs.

On s'intéresse dans ce qui suit à la combinaison de deux ensembles.

Théorème 3 (théorème de Brunn-Minkowski)

Soient K_0, K_1 deux compacts de $\mathbb{R}^d$, à $\lambda \in [0,1]$ on associe l'ensemble $K_\lambda = \lambda K_0 + (1-\lambda)K_1 = \{ \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 / x_0 \in K_0, x_1 \in K_1 \}$.

Alors la fonction $[0,1] \mapsto \mathbb{R}$

$$\lambda \mapsto V_d(K_\lambda)^{1/d}$$

est concave, c'est à dire :

$$V_d(K_\lambda)^{1/d} \geq \lambda V_d(K_0)^{1/d} + (1-\lambda)V_d(K_1)^{1/d} \quad (3)$$

On a égalité si et seulement si K_0 et K_1 sont de dimension d et homothétiques, ou se trouvent dans des hyperplans parallèles .

Considérons maintenant K_0, K_1 deux convexes compacts de $\mathbb{R}^d$, et soit ε réel positif.

D'après le théorème de Brunn-Minkowski on a :

$$V(K_0 + \varepsilon K_1) \geq (V^{1/d}(K_0) + \varepsilon V^{1/d}(K_1))^d$$

$$\Rightarrow V(K_0 + \varepsilon K_1) \geq V(K_0) + V^{d-1/d}(K_0) \varepsilon V^{1/d}(K_1)$$

$$\text{d'où } \frac{V(K_0 + \varepsilon K_1) - V(K_0)}{\varepsilon} \geq d \cdot V^{d-1/d}(K_0) V^{1/d}(K_1) .$$

Or par définition du volume mixte (2), on peut écrire :

$$d \cdot V(K_0, \dots, K_0, K_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(K_0 + \varepsilon K_1) - V(K_0)}{\varepsilon}$$

où K_0 apparait $d-1$ fois.

On en déduit l' **inégalité de Minkowski** :

$$V^d(K_0, \dots, K_0, K_1) \geq V^{d-1}(K_0) \cdot V(K_1) \quad (4)$$

L'égalité a lieu si et seulement si K_0 et K_1 sont homothétiques.

Comme conséquence directe de l'inégalité de Minkowski on a :

Corollaire :

Le volume mixte $V(K_0, \dots, K_0, K_1)$ est minimal si K_0 et K_1 sont homothétiques .

" Parmi la classe des convexes K , dont le volume est égale à 1, celui qui réalise le minimum de $V(K_0, \dots, K_0, K)$ est nécessairement homothétique à K_0 "

Le théorème qui suit fournit l'expression de $V(K_0, \dots, K_0, K)$, dans le cas où K_0 est un polytope de $\mathbb{R}^d$ et K un convexe compact de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4

Soit K un convexe de $\mathbb{R}^d$, et soit P un polytope dont les facettes F_i ont pour normales N_i ($i=1, \dots, k$).

Si H_K est la fonction support de K , alors:

$$V(P, \dots, P, K) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k H_K(N_i) V_{d-1}(F_i) \quad (5) \quad .$$

Cas particulier (d=3)

Soient K_0, K_1 deux polytopes de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in [0,1]$.

$K_\lambda = \lambda K_0 + (1-\lambda)K_1$, alors

$$V(K_\lambda) = V(K_0, K_0, K_0)\lambda^3 + V(K_0, K_0, K_1)\lambda^2(1-\lambda) + V(K_0, K_1, K_1)\lambda(1-\lambda)^2 + V(K_1, K_1, K_1)(1-\lambda)^3$$

or $V(K_i, K_i, K_i) = V(K_i)$.

$$V(K_\lambda) = V(K_0)\lambda^3 + V(K_0, K_0, K_1)\lambda^2(1-\lambda) + V(K_0, K_1, K_1)\lambda(1-\lambda)^2 + V(K_1)(1-\lambda)^3 .$$

En remplaçant $V(K_\lambda)$ par son expression dans (3) on retrouve l'inégalité:

$$V^3(K_0, K_0, K_1) \geq V^2(K_0) \cdot V(K_1)$$

Remarque : $V(K_0, K_0, K_1) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{k_0} H_{K_1}(N_i) \cdot S_i = \frac{1}{3} \langle H_{K_1}, S_{K_0} \rangle .$

où $(N_i)_{i=1, \dots, k_0}$ sont les normales aux facettes de K_0

$(S_i)_{i=1, \dots, k_0}$ sont les aires des facettes de K_0 .

Tout ce qui précède, nous permet maintenant d'introduire une méthode pratique, basée sur la minimisation du volume mixte pour reconstruire un polyèdre à partir de la donnée de son E.G.I.

Soit d la dimension de l'espace, et soit $l = (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{R}^k$.

On associe à l le polyèdre $P(l)$ défini par :

$P(l) = \{ x \in \mathbb{R}^d / \langle N_i, x \rangle \leq l_i \quad i=1, \dots, k \}$. On note par $V(l)$ le volume du polyèdre $P(l)$.

l^* le vecteur des distances de l'origine aux facettes du polyèdre P cherché est celui qui réalise le minimum de la fonction $\sum_{i=1}^k l_i S_i$, qui n'est autre que le volume mixte de $P(l)$ avec le polyèdre P (les S_i étant les aires des facettes de P), sous la contrainte $V(l) \geq 1$.

A notre connaissance, cette approche de reconstruction d'un polyèdre à partir de son E.G.I, par la résolution du problème d'optimisation :

$$\begin{array}{c}
 \text{Min } \sum_{i=1}^k l_i S_i \\
 \text{(P) : } V(l) \geq 1 \\
 l \geq 0
 \end{array}$$

a été étudiée pour la première fois par (J.J.Little [20]).

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à la nature du problème (P) aux choix des méthodes pour le résoudre et les problèmes liés à cette résolution.

§ 2.5 Nature du problème (P)

On désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^d$.

Soient F, G deux parties de $\mathbb{R}^d$, et soient r un réel positif.

On notera par :

$$B(F, r) = \{ x \in \mathbb{R}^d / d(x, F) \leq r \} \text{ où } d(x, F) = \inf \{ d(x, y) : y \in F \}.$$

$$\delta(F, G) = \inf \{ r > 0 / F \subset B(G, r) \text{ et } G \subset B(F, r) \} : \text{distance de Hausdorff}$$

$(\mathcal{K}, \delta)$ est un espace métrique.

2.5.1 Propriétés de la fonction $V(l)$

(P1) V est positivement homogène

Soit r un réel positif et $l \in \mathbb{R}^k$ alors :

$$V(r.l) = V_d(P(r.l)) = V_d(r.P(l)) = r^d V(l).$$

(P2) Continuité de V

Soient f, g_i $i=1, \dots, k$ des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}^d$

On définit sur $\mathbb{R}^k$, la multi-application S par :

$$l \mapsto S_l = \{x \in \mathbb{R}^d / g_i(x) \leq l_i \quad i=1, \dots, k\}.$$

Notons $B = \{l \in \mathbb{R}^k / S_l \neq \emptyset\}$.

On définit $I_l = \{x \in \mathbb{R}^d / g_i(x) < l_i \quad i=1, \dots, k\}$

On suppose que S_l est compact pour tout l dans B .

Théorème 5 (cf. [11])

Soit $\bar{l} \in B$, alors sous la condition $I_{\bar{l}} \neq \emptyset$,

S est continue, au sens de Hausdorff, en $\bar{l}$ si et seulement si

i) $\exists l' > \bar{l} \quad (l'_i > \bar{l}_i \quad i=1, \dots, k)$ tel que $S_{l'}$ est compact.

ii) $\text{cl}(I_{\bar{l}}) = S_{\bar{l}}$.

$$P(l) = \{x \in \mathbb{R}^k / \langle N_i, x \rangle \leq l_i \quad i=1, \dots, k\}.$$

les vecteurs $(N_i)_{i=1, \dots, k}$ engendrant positivement l'espace $\mathbb{R}^d$, il s'ensuit que pour tout $l \geq 0$ le polyèdre $P(l)$ est non vide et borné. D'autre part, $\text{cl}(\{x \in \mathbb{R}^k / \langle N_i, x \rangle < l_i \quad i=1, \dots, k\}) = P(l)$ pour tout l tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^k / \langle N_i, x \rangle < l_i \quad i=1, \dots, k\}$ est non vide.

On voit donc, à l'aide du théorème ci dessus, que $l \mapsto P(l)$ est continue en tout $l \geq 0$ tel que $\text{int}(P(l)) \neq \emptyset$.

La fonction volume étant continue sur l'ensemble des convexes compacts muni de la métrique de Hausdorff (cf. Eggleston [10]), on en déduit :

La fonction V est continue sur l'ensemble $\{l \in \mathbb{R}^k_+ / V(l) > 0\}$.

Proposition 1

Soient $D_1, \dots, D_k$ k demi espaces ouverts d'équations :

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle N_i, x \rangle < c_i\} \quad i=1, \dots, k.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bigcap_{i=1}^k D_i = \emptyset$ est qu'il existe des constantes positives ou nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (non toutes nulles) telles que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i N_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \leq 0 \quad .$$

A partir de cette proposition, on peut donner une caractérisation des points l pour lesquels $V(l) = 0$.

$V(l) = 0 \Leftrightarrow P(l)$ est d'intérieur vide.

$V(l) = 0 \Leftrightarrow \{ x \in \mathbb{R}^k / \langle N_i, x \rangle < l_i \quad i=1, \dots, k \} = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^k \{ x \in \mathbb{R}^k / \langle N_i, x \rangle < l_i \} = \emptyset$$

Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que $V(l)=0$ est qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels positifs (non tous nuls) tels que :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i N_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i l_i \leq 0 \quad .$$

Remarque : A partir de cette caractérisation, on voit que :

si $l_i > 0 \quad i=1, \dots, k$ alors $V(l) > 0$.

(P3) La fonction $V^{1/d}(l)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^k$

Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+^k$ et soit $\lambda \in [0, 1]$.

On a $\lambda P(l_1) + (1-\lambda) P(l_2) \subset P(\lambda l_1 + (1-\lambda) l_2)$

Donc $V_d(\lambda P(l_1) + (1-\lambda) P(l_2)) \leq V_d(P(\lambda l_1 + (1-\lambda) l_2))$

ou $V_d^{1/d}(\lambda P(l_1) + (1-\lambda) P(l_2)) \leq V_d^{1/d}(P(\lambda l_1 + (1-\lambda) l_2))$

Or d'après le théorème de Brunn-Minkowski ($P(l_1)$ et $P(l_2)$ étant non vides) :

$$V_d^{1/d}(\lambda P(l_1) + (1-\lambda) P(l_2)) \geq \lambda V_d^{1/d}(P(l_1)) + (1-\lambda) V_d^{1/d}(P(l_2))$$

ce qui montre la concavité de $V^{1/d}(l)$.

Il s'ensuit de manière directe que l'ensemble $\{l \in \mathbb{R}_+^k / V(l) \geq 1\}$ est convexe.

$$V^{1/d}(\lambda l_1 + (1-\lambda) l_2) \geq \lambda V^{1/d}(l_1) + (1-\lambda) V^{1/d}(l_2).$$

L'égalité a lieu si $l_1 = m l_2$ avec m réel positif.

2.5.2 Etude de la dérivabilité de $V^{1/d}(l)$

On définit sur $\mathbb{R}^k$ la fonction f de la manière suivante :

$$f(l) = \begin{cases} -V^{1/d}(l) & \text{si } l \in \mathbb{R}_+^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition $\text{dom } f = \{l \in \mathbb{R}^k / f(l) < \infty\}$.

f est convexe, propre et semi continue inférieurement.

Il en découle, d'après un résultat classique (cf. Rockafellar [30]) que :

f est deux fois presque partout différentiable, au sens d'Alexandroff, sur l'intérieur de $\text{dom } f$, autrement dit sur l'ensemble $\{l \in \mathbb{R}_+^k / l_i > 0 \text{ } i=1, \dots, k\}$

La $i^{\text{ème}}$ facette du polyèdre $P(l)$ est définie par le système :

$$N_i \cdot x = l_i$$

$$N_j \cdot x \leq l_j \quad j \neq i.$$

Notons par $S_i(l)$ l'aire de la $i^{\text{ème}}$ facette de $P(l)$.

Proposition 2 (Lasserre [17])

Sous les hypothèses :

i) $V(l) \neq 0$

ii) $S_i(l) \neq 0 \quad i=1, \dots, k.$

Alors $V(l)$ est différentiable en l et

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(l) = \frac{1}{|N_i|} S_i(l) \quad .$$

Remarque: Au voisinage de la solution du problème (P), où les facettes du polyèdre associé existent effectivement, la fonction V est différentiable.

Calcul d'un sous gradient dans le cas non différentiable

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}^k$.

y est dit sous gradient de f en l_0 si :

$$f(l) \geq f(l_0) + \langle l - l_0, y \rangle \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{R}^k.$$

Proposition 3

Soit $l_0 \in \mathbb{R}^k_+$, et soit $y^0 = \frac{1-d}{d} S(l_0) \vee^{\frac{1-d}{d}}(l_0)$, où $S(l_0)$ est le vecteur des aires des facettes du polyèdre $P(l_0)$.

Alors, le vecteur y^0 ainsi défini est un sous-gradient de f en l_0 .

Preuve:

Cela revient à montrer que pour tout $l \in \mathbb{R}^k_+$ on a :

$$-V^{1/d}(l) \geq -V^{1/d}(l_0) + \langle l - l_0, y^0 \rangle$$

$$-V^{1/d}(l) \geq -V^{1/d}(l_0) + \langle l, y^0 \rangle + \frac{1}{d} \langle S(l_0), l_0 \rangle V^{1-d/d}(l_0)$$

or $V(l_0) = \frac{1}{d} \langle S(l_0), l_0 \rangle$ donc, en remplaçant y^0 par son expression,

montrer que y^0 est un sous gradient de f en l_0 est équivalent à montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{d} \langle S(l_0), l \rangle \geq V^{1/d}(l) V^{d-1/d}(l_0)$$

qui n'est autre que l'inégalité de Minkowski (cf. § 2.4.4).

En effet, d'après le théorème 4 de ce chapitre, le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus n'est autre que le volume mixte

$$V(P(l_0), \dots, P(l_0), P(l)).$$

2.5.3 Transformation du problème d'optimisation

Proposition 4

Considérons les deux problèmes d'optimisation :

$$(1) : \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2) : \begin{cases} \text{Max } g(x) \\ f(x) = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avec les hypothèses :

f, g homogènes, pour $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$;

en plus $(x \geq 0 \text{ } f(x)=0) \Leftrightarrow x = 0$.

Alors les programmes (1) et (2) sont équivalents .

En effet, désignons par $A = \{ x / g(x) = 1 \text{ } x \geq 0 \}$

$B = \{ x / f(x)=1 \text{ } x \geq 0 \}$ et soit x^* solution de (1).

$\forall x \in A \text{ } f(x) \geq f(x^*)$.

Soit $x \geq 0$ avec $g(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{g(x)} \in A$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{g(x)}\right) \geq f\left(\frac{x^*}{g(x^*)}\right)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x}{f(x)}\right) \leq g\left(\frac{x^*}{f(x^*)}\right)$$

Donc pour $x \in B$ si $g(x) \neq 0$ $g(x) \leq g\left(\frac{x^*}{f(x^*)}\right)$

$$\text{si } g(x)=0 \quad 0 \leq g\left(\frac{x^*}{f(x^*)}\right)$$

Donc $\forall x \in B \text{ } g(x) \leq g\left(\frac{x^*}{f(x^*)}\right)$ et $\frac{x^*}{f(x^*)} \in B$.

De la même façon on montre que $(2) \Rightarrow (1)$.

En appliquant ce qui précède aux fonctions :

$f(x) = \langle x, S \rangle$ avec $S > 0$ et $g(x) = V(x)^{1/d}$, on voit que le problème :

$$(P) : \begin{cases} \text{Min } \langle l, S \rangle \\ V(l) \geq 1 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

est équivalent au problème (P') :

$$(P') : \begin{cases} \text{Max } V^{1/d}(l) \\ \langle l, S \rangle = 1 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

On est donc en présence d'un problème d'optimisation convexe avec contraintes linéaires.

Toutes ces propriétés de la fonction V , nous permettent d'utiliser des méthodes numériques de type gradient pour résoudre notre problème d'optimisation.

En plus, nous avons montré qu'on peut transformer le problème (P) en un problème équivalent (P'), dans le sens que la solution de (P) est obtenue à partir de la solution de (P') et vice versa.

Le problème (P') est plus facile à traiter numériquement, puisqu'il s'agit de maximiser une fonction concave sous contraintes linéaires.

Chapitre III

Construction du polyèdre $P(l)$

Dans ce chapitre on présente un algorithme rapide de construction du polyèdre $P(l)$. Cette construction se fera via la dualité et par utilisation d'un algorithme performant de calcul de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points en dimension trois.

§ 3.1 Calcul de l'enveloppe convexe en dimension trois

Trouver l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est l'un des premiers sujets d'investigation dans le domaine de la géométrie algorithmique.

Chand & Kapur [7] furent parmi les premiers à proposer un algorithme de calcul d'enveloppe convexe, basé non pas sur la formulation algébrique d'un polyèdre convexe, mais plutôt sur sa géométrie. Depuis, plusieurs algorithmes ont été élaborés, et on trouve dans la littérature un certain nombre d'algorithmes de calcul de l'enveloppe convexe en dimension d avec $d \geq 2$ avec une analyse de leur complexité

Nous avons choisi d'utiliser, la méthode point par point (Beneath-Beyond method [9]) qui consiste à calculer l'enveloppe convexe en ajoutant à chaque étape un point supplémentaire au polytope existant. Nous présentons dans ce paragraphe le principe théorique d'un tel algorithme, ainsi que la structure de données utilisées pour son implémentation.

Algorithme point par point

A chaque étape on calcule l'enveloppe convexe du polyèdre courant avec un point supplémentaire.

Soit P un polytope, et soit s un point de $\mathbb{R}^3$.

On veut construire le polytope $P' = \text{co}(P \cup \{s\})$. Pour cela, on aura d'abord besoin de la classification des faces de P suivant leur position par rapport au point s .

Soit F une facette de P , et soit H l'hyperplan supportant F .

La facette F sera dite :

- Cachée : Si le point s et le polytope P se trouvent dans le même demi-espace défini par H .
- Vue : Si H sépare le point s du polytope P .
- Coplanaire : Si s appartient à l'hyperplan H .

Le théorème suivant donne une caractérisation du graphe d'incidence du polytope $P' = \text{co}(P \cup \{s\})$ en fonction du graphe d'incidence du polytope P .

Théorème (cf. [24])

Soit P un polytope non dégénéré, et soit s un point de $\mathbb{R}^d$.

Si $P' = \text{co}(P \cup \{s\})$ alors :

- 1) Une face f de P est une face de P' si et seulement si il existe une facette cachée F de P telle que $f \subset F$.
- 2) Si f est une face de P , et si f' désigne l'enveloppe convexe de f avec le point s alors f' est une face de P' , si et seulement si, on a l'un des deux cas :

a) f est l'intersection de deux facettes de P , l'une vue l'autre cachée.

b) Le point s est dans la variété affine contenant f .

En plus toute face de P' prend une et une seule des formes citées ci-dessus.

Etapes de l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe

Etant donnés N points $p_1, \dots, p_N$ de $\mathbb{R}^3$, l'algorithme consiste à calculer l'enveloppe convexe comme suit :

$$\text{co}(p_1, \dots, p_i) = \text{co}(\text{co}(p_1, \dots, p_{i-1}), \{p_i\}) .$$

a) Initialisation :

A partir de quatre points ne se trouvant pas dans le même plan, on crée l'enveloppe convexe initiale (tétraèdre de départ).

On initialise ainsi la liste des pointeurs pour une large structure de données.

b) Etant donné un polytope P et un point s , on classifie les facettes de P suivant leur position par rapport au point s .

c) Si aucune face de P n'est vue de s , alors s est un point du polytope P , sinon on supprime les faces vues et on insère le point s en le reliant aux arêtes appropriées, créant ainsi de nouvelles faces.

L'enveloppe convexe est terminée lorsque tous les points sont examinés.

Une fois le polyèdre construit, on le met sous forme standard c'est à dire on détecte les facettes coplanaires et on élimine les arêtes

colinéaires.

L'efficacité de l'algorithme dépend beaucoup de la structure de données utilisée pour décrire les relations d'adjacence.

Structure de données

Il est nécessaire de pouvoir retrouver à partir de la structure de données utilisée les relations d'adjacence et d'appartenance liant les différents éléments du polyèdre.

Le polyèdre est décrit comme une liste de triangles. Chaque triangle est l'enregistrement de ses trois sommets, des trois triangles qui lui sont adjacents et l'équation du plan qui le contient.

Un point est donné par ses coordonnées cartésiennes et par la liste des triangles qui le contiennent si c'est un point de la surface.

Une arête est donnée par ses deux sommets et par un triangle adjacent.

La liste d'arêtes va servir à réactualiser les adjacences et créer de nouveaux triangles en reliant ces arêtes au nouveau point.

Codage de la structure de données (en Pascal)

ptptr = ^point ;

triptr = ^triangle;

areteptr = ^arete;

trilistptr= ^trilist;

Point = Record

 x , y , z : real;

 next : ptptr;

 case indic of

 new : () ;

 surface : (trilist : trilistptr) ;

 end;

```

triangle = Record
    P1, P2, P3           : ptptr;
    adjtri1,adjtri2,adjtri3 : triptr;
    a , b ,c , d           : real;
    marq                    : boolean;
end;

trilist   = Record
    acttri    :triptr;
    nexttri   :trilistptr;
end;

Arete     = Record
    P1,P2       : ptptr;
    adjtri     : triptr;
    next       : areteptr;
end;

```

Soit P le polyèdre actuel, et soit s un point de $\mathbb{R}^3$. On veut calculer $\text{co}(P \cup \{s\})$. P est décrit par une liste de triangles composant sa surface. On parcourt cette liste jusqu'à trouver un triangle vu par le point s (si aucun triangle n'est vu de s , alors s est un point de P et ne peut être un sommet). Soit tri ce triangle. Avant d'éliminer tri de la surface et de toute référence de l'enveloppe convexe, on examine un à un ses triangles adjacents : $\text{tri}^{\wedge}.\text{adjtri1}$, $\text{tri}^{\wedge}.\text{adjtri2}$, $\text{tri}^{\wedge}.\text{adjtri3}$.

Si un des triangles adjacents n'est pas vu de s , alors son arête commune avec tri va servir par la suite à créer un nouveau triangle ayant s comme sommet. Si le triangle en question est vu par s , alors on le met dans une liste, afin d'examiner (comme pour tri) la position de ses adjacents par

rapport à s et l'éliminer par la suite.

Une fois les nouveaux triangles créés, on réactualise les adjacences.
Le calcul de l'enveloppe convexe est terminé lorsque tous les points sont examinés.

On trouve dans (Edelsbrunner[6], p.156), une analyse de la complexité de l'algorithme point par point.

Un tel algorithme, permet la construction de l'enveloppe convexe de n points dans $\mathbb{R}^3$ en $O(n^2)$.

§ 3.2 Polarité des polyèdres convexes

Nous présentons d'abord quelques définitions et propriétés concernant la polarité de polyèdres convexes. Ces propriétés vont nous permettre par la suite d'introduire notre méthode de construction, en dimension trois, d'un polyèdre écrit sous sa forme analytique.

Soit P un polyèdre de $\mathbb{R}^d$, on définit son polaire et on le note P° l'ensemble : $P^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^d / \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in P \}$.

A toute face F de P , on associe sa face duale $F^\wedge$ définie par :

$$F^\wedge = \{ y \in P^\circ / \langle x, y \rangle = 1 \ \forall x \in F \}.$$

Proposition 1

Si $P = \bigcap_{i=1}^k \{ x / \langle a_i, x \rangle \leq \alpha_i \} \cap \bigcap_{i=k+1}^n \{ x / \langle a_i, x \rangle \leq 0 \}$ ($\alpha_i > 0$ pour $i=1, \dots, k$)

est un polyèdre convexe, le polaire de P est donné par :

$$P^\circ = \text{Co} \left\{ 0, \frac{a_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{a_k}{\alpha_k} \right\} + \sum_{i=k+1}^n [0 : a_i]$$

où $[0 : a_i]$ est la demi-droite d'origine 0 et passant par a_i .

Proposition 2

Soit $P = \bigcap_{i=1}^n \{ x : \langle a_i, x \rangle \leq 1 \}$ un polyèdre convexe.

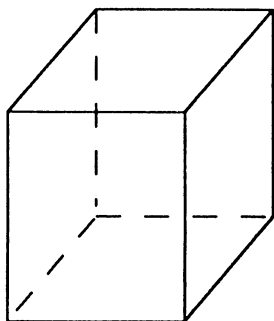
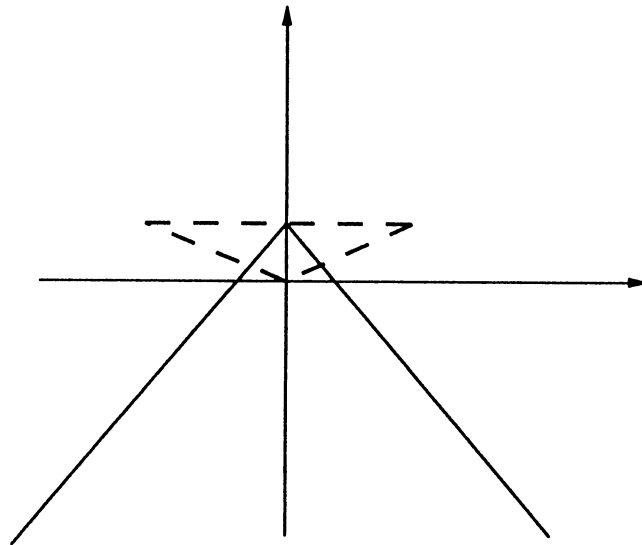
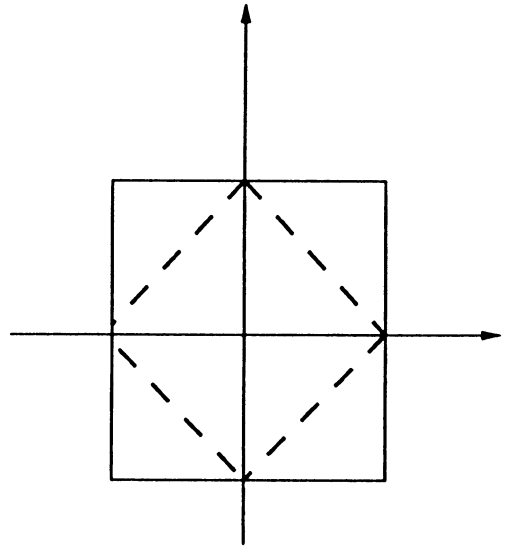
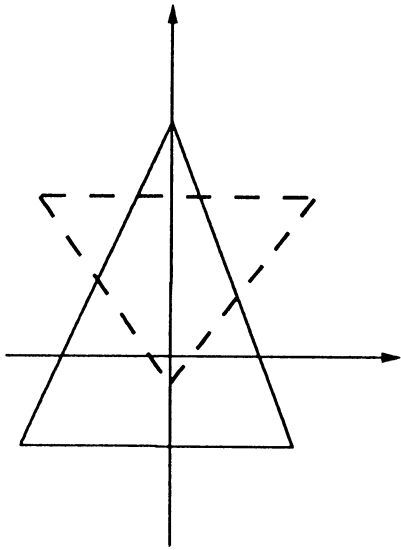
Si F est une face propre de P , intersection des facettes F_j

$F_j = \{ x \in P : \langle a_j, x \rangle = 1 \}$ où j parcourt $I \subset \{ 1, \dots, n \}$. Alors

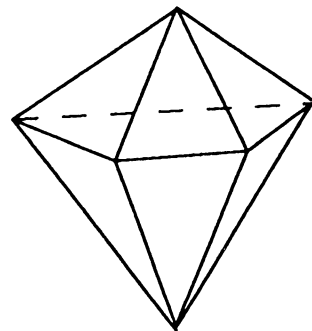
$$F^\wedge = \text{co} \{ a_j : j \in I \}.$$

Cette proposition donne une caractérisation des faces duales $F^\wedge$, pour tout polyèdre convexe contenant 0 dans son intérieur (il peut toujours s'écrire sous la forme ci-dessus).

Exemples de polaires :



CUBE : 8 sommets , 12 arêtes et 6 faces



OCTAEDRE : 6 sommets , 12 arêtes et 8 faces

Soit maintenant P un polytope de $\mathbb{R}^d$, on suppose que 0 est dans l'intérieur de P .

Il existe une correspondance biunivoque inversant le sens de l'inclusion entre l'ensemble des faces de P et l'ensemble des faces de son polaire P°

On a les propriétés importantes suivantes :

- P° est un polytope et 0 est dans son intérieur.
- Soient P_1, P_2 deux polytopes de $\mathbb{R}^d$ tels que $P_1 \subset P_2$ alors $P_2^\circ \subset P_1^\circ$.
- $F^\wedge$ est une face de P° .
- $P^{\circ\circ} = P$ et $F^{\wedge\wedge} = F$.
- Si d est la dimension de P , et F une face de P alors :
 $\dim F + \dim F^\wedge = d-1$.

Proposition 3

Soit F une face d'un polytope P de $\mathbb{R}^d$, et soit x_0 appartenant à l'intérieur relatif de F , alors sa face duale s'écrit :

$$F^\wedge = \{ y \in P^\circ / \langle x_0, y \rangle = 1 \} \text{ elle sera notée } F^\wedge(P, x_0).$$

Proposition 4

Soit P un polytope convexe dans $\mathbb{R}^d$ contenant 0 .

Si l'ensemble des sommets de P est $S = \{x_1, \dots, x_n\}$,

alors $P^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^d / \langle x_i, y \rangle \leq 1 \quad i=1, \dots, n \}$.

Remarque

Soit F une facette de P° , et soit G un point de l'intérieur relatif de F .
Il correspond à F un sommet $\bar{x}$ de $P^{\circ\circ} = P$.

D'après la proposition 3 :

$$\{ \bar{x} \} = \{ x \in P \mid \langle x, G \rangle = 1 \}.$$

$$G \in P^\circ \Leftrightarrow \forall x \in P \quad \langle x, G \rangle \leq 1.$$

Donc $\bar{x}$ est la solution unique du problème de programmation linéaire :

$$\begin{array}{ll} \text{Max } \langle G, x \rangle \\ x \in P \end{array}$$

Dans ce qui suit, on présente un algorithme pour la construction du polyèdre $P(l)$. $P(l)$ s'écrit comme le polaire d'une enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

§ 3.3 Construction de $P(l)$

$$P(l) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle N_i, x \rangle \leq l_i \quad i=1, \dots, k \} \quad (l_i > 0 \quad i=1, \dots, k).$$

En normalisant les vecteurs N_i , c'est à dire en introduisant les vecteurs

$$N'_i = \frac{1}{l_i} N_i \quad \text{on peut écrire :}$$

$$P(l) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle N'_i, x \rangle \leq 1 \quad i=1, \dots, k \}.$$

On voit d'après la proposition 4, que $P(l)$ est le polaire de l'ensemble D , où D est l'enveloppe convexe des N'_i .

$$D = \text{co} \{ N'_1, \dots, N'_k \}.$$

On construit le polyèdre D (ses sommets, arêtes et faces) en utilisant l'algorithme point par point présenté au paragraphe 1 de ce chapitre, pour le calcul de l'enveloppe convexe en dimension trois.

On montrera ci-dessous comment à partir de la connaissance de la structure faciale de D , on peut construire son polaire $P(l)$.

Soient $F_1, \dots, F_m$ les facettes de D , chaque facette est définie comme enveloppe convexe de ses sommets :

$$F_i = \text{co}\{y_1^i, \dots, y_{m_i}^i\}.$$

A chacune de ces facettes correspond un sommet du primal $P(l)$.

Plus précisément si g_i est un point de l'intérieur relatif de F_i on aura

$$F_i^\wedge = F_i^\wedge(P, g_i) = \{x \in P / \langle x, g_i \rangle = 1\} = \{x_i\} \text{ sommet de } P.$$

De même à chaque sommet y de D correspond et d'une façon unique une facette de P que l'on notera $F(P, y)$.

$$F(P, y) = \{x \in P / \langle x, y \rangle = 1\}.$$

Lorsque y parcourt tous les sommets de D , $F(P, y)$ décrit toutes les facettes de son dual P .

Pour la détermination explicite de tous les sommets de $F(P, y)$ il nous suffit de connaître toutes les facettes de D contenant le sommet y .

On peut schématiser ceci de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} y & \longleftrightarrow & F(P, y) \\ \text{sommet de } D & & \text{facette de } P \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [F_1, \dots, F_p] & \longleftrightarrow & [x_1, \dots, x_p] \\ \text{facettes de } D \text{ contenant } y & & \text{sommets de } F(P, y) : (F_i \text{-----} x_i) \end{array}$$

On dispose de la liste des facettes du polyèdre D, c'est à dire de l'enveloppe convexe des vecteurs N'_i , ainsi que la liste de ses sommets.

Chaque sommet est donné par ses coordonnées ainsi que les facettes qui le contiennent.

On en déduit les composantes du polyèdre P.

* Pour y sommet de D, sa face duale F a pour normale $N_F = \frac{y}{\|y\|}$.

* A chaque facette F_i de D de normale N_i correspond le sommet X_i de P tel que :

$$X_i = \frac{N_i}{\langle N_i, S_i \rangle} \quad \text{où } S_i \text{ est un sommet de } F_i .$$

* A chaque arête de D correspond une arête de P.

Soit E une arête de D donnée par ses deux sommets y_1 et y_2 .

Alors son arête duale $E^\wedge$ est obtenue comme intersection de deux facettes F_1 et F_2 de P.

$$E^\wedge = F_1 \cap F_2 \quad \text{où } F_1 = F(P, y_1) \text{ et } F_2 = F(P, y_2) .$$

La connaissance de la structure faciale de $P(l)$, nous permet d'avoir l'aire des différentes facettes connaissant la liste et les coordonnées de leurs sommets.

Le calcul du volume du polyèdre $P(l)$ s'effectue alors de façon directe.

Chapitre IV

Calcul du volume d'un polyèdre

La résolution de façon efficace du problème (P'), passe d'abord par le choix d'un algorithme performant pour le calcul du volume d'un polyèdre.

Nous présentons dans ce chapitre deux moyens pour le calcul du volume. Le premier est direct et s'appuie sur la connaissance de la structure faciale du polyèdre. Le second plus général, considère un polyèdre écrit sous sa forme analytique.

§ 4.1 Calcul direct

Soit P un polytope non dégénéré.

Si $F_1, \dots, F_k$ sont les facettes de P et d sa dimension, alors :

$$V_d(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k l_i V_{d-1}(F_i)$$

où $l_i = H_p(N_i)$, N_i étant la normale à F_i .

Lorsque la dimension $d = 3$, on voit qu'un moyen direct pour le calcul du volume de P serait la connaissance de sa structure faciale.

Aire d'un polygone

Soient $P_1, \dots, P_n$ les points extrémaux d'un polygone convexe.

Pour pouvoir calculer son aire on le met d'abord sous forme standard, c'est à dire on ordonne les points P_i suivant le sens trigonométrique.

Une fois les points $P_i = (x_i, y_i)$ ordonnés, l'aire est donnée par :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (1) \quad (\text{formule de Green}).$$

avec comme convention $P_{n+1} = P_1$ et $P_{-1} = P_n$.

Aire d'une facette

On peut calculer l'aire de deux manières différentes .

a) En utilisant un système de coordonnées locales ayant pour axe (x,y) le plan de la facette, les deux premières coordonnées des sommets permettent alors, d'après la formule de Green, de calculer l'aire.

b) En considérant les différents produits vectoriels :

Si $S_{i,j}$ $j=1,...,n$ sont les sommets de F_i et N_i sa normale , alors son aire est donnée par :

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n N_i \cdot (S_{i,j} \wedge S_{i,j+1}) \quad (2) \quad .$$

avec $S_{i,n+1} = S_{i,1}$.

§4.2 Calcul du volume d'un polyèdre en dimension d

On présente ci-dessous un algorithme récursif dû à (J.B.Lasserre [17]) pour le calcul du volume d'un polyèdre défini par un système d'inégalités en dimension d ($d \geq 2$) .

Cet algorithme ne nécessite pas la connaissance des sommets du polyèdre ni son partitionnement en éléments simpliciaux.

En plus, il nous offre la possibilité d'avoir une expression analytique du volume d'un polyèdre en fonction de son second membre par utilisation d'outils de calcul formel.

Ceci peut être intéressant dans notre cas et permettrait d'économiser et de façon considérable les calculs.

Remarque : Dans notre problème d'optimisation seul le second membre l du polyèdre varie .

Notations et définitions

On considère le polyèdre convexe $P(l)$ défini par le système

d'inégalités : $N.x \leq l$.

où N est une matrice (m,d)

l vecteur à m composantes.

x vecteur à d composantes.

La $i^{\text{ème}}$ facette du polyèdre est définie par le système :

$$\langle N_i, x \rangle = l_i$$

$$\langle N_j, x \rangle \leq l_j \quad j \neq i.$$

où N_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice N .

l_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur l .

On notera $V(d,N,l)$ le volume dans un espace de dimension d de $P(l)$,

On notera $V_i(d-1,N,l)$ le volume en dimension $d-1$ de la facette i de $P(l)$.

Hypothèse:

On suppose qu'une contrainte n'apparaît qu'une fois dans la définition de $P(l)$.

On sait que :

$$V(d,N,l) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{\|N_i\|} V_i(d-1,N,l) \quad (3)$$

C'est l'expression du volume du polyèdre à partir du volume de ses facettes.

Mais une facette n'est pas définie par un système d'inégalités.

Supposons $N_{ik(i)} \neq 0$, alors en considérant l'équation $\langle N_i, x \rangle = l_i$,

on peut éliminer $x_{k(i)}$ et on obtient le système d'inégalités :

$$\sum_{k \neq k(i)} \left(N_{jk} - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} N_{ik} \right) x_k \leq l_j - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \quad j=1, \dots, m \quad j \neq i. \quad (4)$$

qui définit un polyèdre convexe dans $\mathbb{R}^{d-1}$; ce n'est autre que la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^{d-1}$ de la facette i .

Le système ci-dessus peut s'écrire : $N(i).x \leq l(i)$.

où $N(i)$ est la matrice $(m-1, d-1)$ des contraintes
 $l(i)$ le second membre.

On notera $V(d-1, N(i), l(i))$ le volume du polyèdre ainsi défini.

On a la propriété importante suivante [17] :

$$V_i(d-1, N, l) = \frac{\|N_i\|}{|N_{ik(i)}|} V(d-1, N(i), l(i)) .$$

Donc l'identité (3) s'écrit :

$$V(d, N, l) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{|N_{ik(i)}|} V(d-1, N(i), l(i)) \quad (5)$$

où $N_{ik(i)}$ est le coefficient dans l'équation $\langle N_i, x \rangle = l_i$ de la variable que l'on élimine pour définir la projection de la facette i .

Si $N_{ij}=0$ pour tout j , alors si $l_i < 0$ $P(l)$ est vide et $V(d, N, l) = 0$, si $l_i \geq 0$ on a une contrainte redondante et la facette i n'existe pas.

A l'aide de l'écriture (4) on peut exprimer de façon récursive le volume d'un polyèdre défini par un système d'inégalités dans un espace de dimension d , à l'aide de volumes de polyèdres définis par des systèmes d'inégalités dans un espace de dimension $d-1$.

En réutilisant (5) pour chaque $V(d-1, N(i), l(i))$ et en répétant l'opération, on obtient $V(d, N, l)$ à partir de volumes de polyèdres dans $\mathbb{R}$ c'est à dire à partir de volumes d'intervalles triviaux à calculer.

Cet algorithme est très simple à implémenter.

Néanmoins, les calculs croissent de façon exponentielle avec la dimension de l'espace. Dans notre cas où la dimension $d=3$ l'algorithme est efficace.

Remarque 1

On a supposé, lors de cet algorithme qu'une contrainte n'apparaît qu'une fois. Cependant, il peut arriver qu'après projection des faces , on ait une même contrainte qui apparaît deux fois.

Pour remédier à cela, on pourrait envisager de perturber systématiquement le second membre chaque fois qu'on appelle la procédure de calcul du volume.

La fonction $l \rightarrow V(d, N, l)$ étant continue, une petite perturbation du second membre l induira une petite erreur dans le calcul du volume du polyèdre (le programme pourra alors détecter la contrainte redondante), mais permettra d'éviter, au cas où une contrainte apparaît deux fois à une certaine étape de l'algorithme, que l'aire d'une même face intervienne deux fois dans le calcul du volume du polyèdre.

Remarque 2

Les algorithmes d'optimisation, comme on le verra plus loin, sont basés sur un schéma itératif. On construit une suite de points $l^1, l^2, \dots, l^k$ qui doit converger vers la solution, et à chaque étape k de l'algorithme , on fait appel, un certain nombre de fois, à la fonction $V(l)$. Où $V(l)$, on le rappelle, est le volume du polyèdre $P(l)$.

Dans cette définition, seul le second membre l varie, la matrice N (matrices des normales) est une donnée du problème.

Dans le but d'économiser les calculs, nous avons essayé de voir s'il était possible d'obtenir $V(l)$ comme une sorte de formule, où l apparaît de manière explicite.

En utilisant des outils de calcul formel et à l'aide de l'algorithme de Lasserre, on peut obtenir une forme analytique du volume de $P(l)$ en fonction du second membre l .

On présente ci-dessous un exemple, une procédure Pascal, généré à l'aide d'un programme écrit en langage reduce :

```

procedure volume(b:mvect);

function volume1(b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10:real):real;

var vol:real;
    i:integer;
    ta,tb,tc,blocal:mvect;
begin
    vol:=0;
    for i:=1 to m do grad[i]:=0;
    tc[1]:=b1+b2;
    tc[2]:=min(-b1+b3,b10)+min(b1+b4,b9);
    tb[1]:=min(-b1+b3,b10)+b1-b5;
    ta[1]:=min(-b1+b3,b10)+b1+b6;
    ta[2]:=b7;
    tb[2]:=-b8;
    grad[1]:=grad[1]+(min(-b1+b3,b10)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tc[2]:=min(-b1+b3,b10)+min(b1+b4,b9);
    tb[1]:=-min(b1+b4,b9)+b1-b5;
    ta[1]:=-min(b1+b4,b9)+b1+b6;
    ta[2]:=b7;
    tb[2]:=-b8;
    grad[1]:=grad[1]+(min(b1+b4,b9)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tb[1]:=-min(-b1+b3,b10);
    ta[1]:=min(b1+b4,b9);
    tc[2]:=b5+b6;
    tb[2]:=b1-b5-b7;
    ta[2]:=b1-b5+b8;
    grad[1]:=grad[1]+((-b1+b5)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tb[1]:=-min(-b1+b3,b10);
    ta[1]:=min(b1+b4,b9);
    tc[2]:=b5+b6;
    tb[2]:=b1+b6-b7;
    ta[2]:=b1+b6+b8;
    grad[1]:=grad[1]+((b1+b6)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tb[1]:=-min(-b1+b3,b10);
    ta[1]:=min(b1+b4,b9);
    tb[2]:=b1-b5-b7;
    ta[2]:=b1+b6-b7;
    tc[2]:=b7+b8;
    grad[1]:=grad[1]+(b7/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tb[1]:=-min(-b1+b3,b10);
    ta[1]:=min(b1+b4,b9);
    tb[2]:=b1-b5+b8;
    ta[2]:=b1+b6+b8;
    tc[2]:=b7+b8;
    grad[1]:=grad[1]+(b8/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

    tc[1]:=b1+b2;
    tc[2]:=min(-b2+b4,b9)+min(b2+b3,b10);

```

```

tb[1]:=min(b2+b3,b10)-b2-b5;
ta[1]:=min(b2+b3,b10)-b2+b6;
ta[2]:=b7;
tb[2]:=-b8;
grad[2]:=grad[2]+(min(b2+b3,b10)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=b1+b2;
tc[2]:=min(-b2+b4,b9)+min(b2+b3,b10);
tb[1]:=-min(-b2+b4,b9)-b2-b5;
ta[1]:=-min(-b2+b4,b9)-b2+b6;
ta[2]:=b7;
tb[2]:=-b8;
grad[2]:=grad[2]+(min(-b2+b4,b9)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=b1+b2;
tb[1]:=-min(b2+b3,b10);
ta[1]:=min(-b2+b4,b9);
tc[2]:=b5+b6;
tb[2]:=-b2-b5-b7;
ta[2]:=-b2-b5+b8;
grad[2]:=grad[2]+((b2+b5)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=b1+b2;
tb[1]:=-min(b2+b3,b10);
ta[1]:=min(-b2+b4,b9);
tc[2]:=b5+b6;
tb[2]:=-b2+b6-b7;
ta[2]:=-b2+b6+b8;
grad[2]:=grad[2]+((-b2+b6)/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=b1+b2;
tb[1]:=-min(b2+b3,b10);
ta[1]:=min(-b2+b4,b9);
tb[2]:=-b2-b5-b7;
ta[2]:=-b2+b6-b7;
tc[2]:=b7+b8;
grad[2]:=grad[2]+(b7/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=b1+b2;
tb[1]:=-min(b2+b3,b10);
ta[1]:=min(-b2+b4,b9);
tb[2]:=-b2-b5+b8;
ta[2]:=-b2+b6+b8;
tc[2]:=b7+b8;
grad[2]:=grad[2]+(b8/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

tc[1]:=min(b1-b3,b9)+min(b2+b3,b10);
tc[2]:=b3+b4;
tb[1]:=-min(-b3+b5,b8);
ta[1]:=min(b3+b6,b7);
grad[3]:=grad[3]+(min(b1-b3,b9)/2)*voldim1(ta,tb,tc,1,1,2);

tc[1]:=min(b1-b3,b9)+min(b2+b3,b10);
tc[2]:=b3+b4;
tb[1]:=-min(-b3+b5,b8);
ta[1]:=min(b3+b6,b7);
grad[3]:=grad[3]+(min(b2+b3,b10)/2)*voldim1(ta,tb,tc,1,1,2);

ta[1]:=min(b1-b3,b9);
tb[1]:=-min(b2+b3,b10);

```

```

tc[1]:=b5+b6;
ta[2]:=b7;
tb[2]:=-b8;
tc[2]:=b9+b10;
grad[10]:=grad[10]+(b6/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

ta[1]:=min(b1+b10,b3)-b7;
tb[1]:=-min(b2-b10,b4)-b7;
ta[2]:=b5;
tb[2]:=-b6;
tc[1]:=b7+b8;
tc[2]:=b9+b10;
grad[10]:=grad[10]+(b7/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

ta[1]:=min(b1+b10,b3)+b8;
tb[1]:=-min(b2-b10,b4)+b8;
ta[2]:=b5;
tb[2]:=-b6;
tc[1]:=b7+b8;
tc[2]:=b9+b10;
grad[10]:=grad[10]+(b8/2)*voldim1(ta,tb,tc,2,2,2);

blocal[1]:=b1/3;
blocal[2]:=b2/3;
blocal[3]:=b3/3;
blocal[4]:=b4/3;
blocal[5]:=b5/3;
blocal[6]:=b6/3;
blocal[7]:=b7/3;
blocal[8]:=b8/3;
blocal[9]:=b9/3;
blocal[10]:=b10/3;
for i:=1 to 10 do vol:=vol+grad[i]*blocal[i];
volume1:=vol;
end;

begin
FX:=volume1(b[1],b[2],b[3],b[4],b[5],b[6],b[7],b[8],b[9],b[10]);
end;

```

Chapitre V

Méthodes numériques d'optimisation

Nous avons vu au travers des chapitres précédents, que la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée se ramène à la résolution d'un problème d'optimisation où il s'agit de maximiser une fonction concave sous des contraintes linéaires. Pour ce deux méthodes numériques sont proposées.

§ 5.1 Principe de la méthode du gradient réduit

Soit à résoudre le problème :

$$\begin{array}{ll} \text{Max } f(x) \\ \text{(P)} \quad A.x = b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array}$$

où f est une fonction continûment différentiable

A une matrice de type $m \times n$ de rang m

b vecteur à m composantes.

Soit B une base, c'est à dire une sous matrice carrée (m,m) de A non singulière.

En posant $A = [B, N]$, le vecteur x peut alors se partitionner en $x = [x_B, x_N]$

x_B : variables de base.

x_N : variables hors base.

Soit x^0 un point réalisable de départ.

On cherche à partir de x^0 une direction de déplacement permettant

d'augmenter f tout en respectant les contraintes.

1) Soit le vecteur :

$$d_N = \frac{\partial f}{\partial x_N} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_B} \right) B^{-1} N.$$

2) On définit la direction y_N relative aux variables hors base par :

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j < 0 \text{ et } x_j = 0 \\ d_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Si $y_N = 0$ on arrête (conditions d'optimalité vérifiées).

4) On calcule La direction y_B suivant les variables de base :

$$y_B = -B^{-1}.N. y_N \quad (Ay = By_B + Ny_N = 0)$$

5) On effectue une recherche linéaire dans la direction y :

On cherche t^* qui maximise $h(t)=f(x+t.y)$.

On doit avoir $x_j+t.y_j \geq 0 \quad \forall j$, ce qui impose $t \leq t_{\max}$ où

$$t_{\max} = \min \left\{ \frac{x_j}{d_j} : d_j < 0 \right\}.$$

t^* maximise $h(t)$ sur l'intervalle $[0, t_{\max}]$.

Deux situations peuvent alors se présenter :

a) $t^* < t_{\max}$

Dans ce cas aucune variable ne s'annule ; la procédure se poursuit à partir du nouveau point $x' = x + t^*.y$, on recalculera d_N en utilisant B .

b) $t^* = t_{\max}$

Dans ce cas une variable de base s'annule ; on effectue

alors un changement de base, la procédure va se poursuivre avec cette nouvelle base.

5.1.1 Calcul du pas de déplacement

Le choix optimal du pas de déplacement serait de trouver t_k tel que

$$h(t_k) = \max_{t \in [0,1]} h(t) .$$

Mais ceci coûte cher.

Néanmoins, on peut utiliser des méthodes dites " recherche économique " moins restrictives et qui permettent de donner une bonne approximation de l'optimum de h dans l'intervalle $[0, t_{\max}]$ avec un nombre très limité d'évaluations de la fonction.

Nous avons choisi d'utiliser la méthode de Wolfe, qui semble actuellement très performante.

Méthode de Wolfe

On choisit $0 < m_1 < 1/2 < m_2 < 1$.

Etape 0 :

$t_{\max} > 0$ et t initial dans $]0, t_{\max}]$ sont donnés.

$$t_g = 0 \text{ et } t_d = t_{\max} .$$

Etape 1 :

si $h(t) < h(0) + m_1 \cdot h'(0) \cdot t$ alors $t_d = t$ et aller en 3.

Etape 2 :

si $h'(t) \leq m_2 \cdot h'(0)$ ou si $t = t_{\max}$ alors terminé.

sinon $t_g = t$ aller en 3.

Etape 3 :

Recalculer t par interpolation entre t_g et t_d , aller en 1.

Il arrive que $t_{\max}$ soit très grand, et il est maladroit d'initialiser t_d à

$t_{\max} \cdot t_d$ est trouvé à partir d'extrapolations.

Remarque: L'utilisation de la méthode de Wolfe est motivée par le fait qu'on dispose du gradient en même temps que la fonction V et sans calculs supplémentaires.

5.1.2 Vitesse de convergence

Soit (x^k) une suite qui converge vers x^* :

$$\text{Si } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = \alpha < 1$$

on dit que la convergence est linéaire et α est le taux de convergence associé.

$$\text{Si } \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

on dit que la convergence est superlinéaire.

$$\text{En particulier, } \exists \delta > 1 \text{ tq } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^\delta} < \infty .$$

Si $\delta = 2$, la convergence est dite quadratique.

La vitesse de convergence d'un algorithme permet d'évaluer son efficacité et de le comparer aux autres algorithmes.

La vitesse de convergence de la méthode du gradient réduit est linéaire (méthode du premier ordre).

Lors de l'utilisation de la méthode du gradient réduit pour résoudre le problème (P'), on constate que la convergence de l'algorithme devient lente à l'approche de l'optimum, d'où l'idée d'utiliser des techniques d'accélération de convergence.

Après un certain nombre de tests, nous avons opté pour une méthode de diagonalisation.

L'idée simple est de court-circuiter les zig-zags, en substituant à la

direction du gradient la moyenne des zig-zags.

Par exemple, après avoir trouvé une séquence de points $x^k, \dots, x^{k+p}$ on peut, pour trouver l'itéré suivant, remplacer la direction y^{k+p} par $(x^{k+p} - x^k)$. Il est à noter l'influence du choix de l'indice de base dans la vitesse de convergence de la méthode (Remarquer que dans (P') on a une seule contrainte et il n'y a pratiquement pas de changement de base).

Ces tests d'accélération de convergence n'ont pas été probants.

On a pu pour un certain nombre d'exemples améliorer la vitesse de convergence, sans toutefois atteindre l'efficacité espérée.

D'où l'idée d'utiliser une méthode d'optimisation du second ordre.

On donne dans le paragraphe suivant un moyen pour le calcul du Hessien de $V(l)$. Ce calcul se fera suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des algorithmes pour le calcul de V .

§ 5.2 Calcul du Hessien de V

La fonction $V(l)$ est deux fois presque partout différentiable.

On se propose dans ce qui suit de donner l'expression des dérivées secondes partielles de V .

Les expressions seront considérées suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des deux algorithmes de calcul du volume d'un polyèdre.

Dans le cas général où $V(l) = V_d(P(l))$ avec $d \geq 3$, on va donner, à travers l'utilisation de l'algorithme de Lasserre (cf. chap. 4) un moyen pour le calcul du Hessien de V . Le polyèdre $P(l)$ étant considéré sous sa forme analytique ($N.x \leq 1$).

Dans le cas tridimensionnel, où le calcul du volume du polyèdre passe par la construction de ce dernier, un raisonnement géométrique direct permet le calcul du Hessien de V .

a) Cas général

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$; on a en vertu de la proposition 2 du second chapitre

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(d, N, l) = \frac{1}{\|N_i\|} V_i(d-1, N, l) .$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(d, N, l) = \frac{1}{\|N_{ik(i)}\|} V(d-1, N(i), l(i)) .$$

où $V(d-1, N(i), l(i))$ désigne le volume en dimension $d-1$ du polyèdre :

$N(i).x \leq l(i)$ défini explicitement par :

$$\sum_{k \neq k(i)} \left(N_{jk} - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} N_{ik} \right) x_k \leq l_j - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \quad j=1, \dots, m \quad j \neq i .$$

Pour le calcul de la dérivée seconde il suffit de connaître la dérivée de la fonction : $1 - V(d-1, N(i), l(i))$.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l_j \partial l_i} = \frac{1}{\|N_{ik(i)}\|} \frac{\partial}{\partial l_j} V(d-1, N(i), l(i)) .$$

$$\frac{\partial}{\partial l_j} V(d-1, N(i), l) = \langle \nabla V(d-1, N(i), l(i)) , \frac{\partial l(i)}{\partial l_j} \rangle .$$

$$\text{où } l(i) = \left(l_k - \frac{N_{kk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \right)_{k=1, \dots, m \quad k \neq i}^t$$

On dispose, par utilisation de l'algorithme récursif et sans calcul supplémentaire du vecteur $\nabla V(d-1, N(i), l(i))$.

b) Cas de la dimension 3.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l_j \partial l_i} = \frac{1}{\|N_i\|} \frac{\partial S_i}{\partial l_j} \quad \text{où } S_i \text{ est l'aire de la facette } F_i$$

Pour $j \neq i$ et à une variation dl_j de $l=(l_1, \dots, l_m)$ dans la direction de la normale N_j , il correspond un déplacement $\frac{dl_j}{\|N_j\|^2} N_j$ et une variation dS_i de l'aire de F_i égale à $dS_i = h_i \cdot S_{ij}$.où S_{ij} est la longueur de l'arête F_{ij} intersection de F_i et de F_j , et h_j le déplacement dans F_i de F_{ij} .

Si α est l'angle entre h_j et N_j on a :

$$\frac{dl_j}{\|N_j\|} = h_j \cdot \sin \alpha = h_j \left(1 - \frac{\langle N_i, N_j \rangle}{\|N_i\| \|N_j\|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit finalement que :

$$\text{Pour } j \neq i \quad \frac{\partial^2 V}{\partial l_j \partial l_i} = \frac{S_{ij}}{\|N_i\| \|N_j\|} \left(1 - \frac{\langle N_i, N_j \rangle^2}{\|N_i\|^2 \|N_j\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour le calcul du terme diagonal on utilise l'homogénéité de la fonction $V(l)$ (formule d'Euler) :

$$V(l) = \frac{1}{3} \sum_j l_j \frac{\partial V}{\partial l_j}(l).$$

$$\text{donc} \quad l_i \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) = 3 \cdot V(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial V}{\partial l_j}(l).$$

En dérivant les deux membres par rapport à l_i , on trouve :

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(l) + l_i \frac{\partial^2 V}{\partial l_i^2}(l) = 3 \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial^2 V}{\partial l_i \partial l_j}(l)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial l_i^2}(l) = \frac{1}{l_i} \left[2 \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial^2 V}{\partial l_i \partial l_j}(l) \right].$$

Remarque

Dans le cas où V n'est pas deux fois différentiable les deux expressions a) et b) seront considérées.

§ 5.3 Principe de la méthode de Newton

La fonction f est supposée deux fois différentiable.

On résout le problème d'optimisation (P) moyennant le schéma itératif :

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$$

où la direction de déplacement $d^k = \bar{x}^k - x^k$.

$\bar{x}^k$ est solution du problème d'optimisation quadratique :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \langle \nabla f(x_k), (x - x^k) \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k) \cdot (x - x^k), (x - x^k) \rangle \\ (P_k) \quad & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(P_k) admet une solution si $\nabla^2 f(x_k)$ est définie négative .

Le pas t_k est le résultat d'une recherche linéaire économique dans la direction d^k , sur l'intervalle $[0,1]$.

Comme test d'arrêt $\|d^k\| < \varepsilon$.

Dans des conditions de convergence bien connues(cf. Pchenitchny [27]) la méthode de Newton est soit superlineaire soit quadratique.

En pratique, on a choisi la direction d^k comme solution du programme quadratique (P'_k) :

$$\begin{aligned} (P'_k) \quad & \text{Max } \langle \nabla f(x_k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k) \cdot d, d \rangle \\ & A \cdot d = 0 \end{aligned}$$

Les contraintes de positivité n'interviennent que lors de la recherche du pas de déplacement.

(P'_k) est résolu de façon efficace par utilisation de la méthode du gradient conjugué [27] .

On recherche t_k sur l'intervalle $[0, t_{\max}]$ où $t_{\max} = \min \{ \frac{x_j}{d_j} : d_j < 0 \} ..$

Remarque

Il arrive en pratique que $\nabla^2 f(x_k)$ n'est pas définie négative et il n'est plus possible alors de trouver la direction d^k à travers la résolution de

(P'_k). Pour remédier à cela, il est suggéré (Luenberger [22]) de perturber le Hessien.

L'idée est de remplacer $\nabla^2 f(x_k)$ par la matrice H_k :

$$H_k = \nabla^2 f(x_k) - \lambda_k I \quad \text{où } I \text{ est la matrice identité et } \lambda_k > 0.$$

λ_k est choisi, pour assurer la convergence, le plus petit possible et tel que toutes les valeurs propres de H_k soient négatives.

Chapitre VI

Algorithme de reconstruction

§ 6.1 Schémas de reconstruction

On présente dans ce paragraphe, l'algorithme général pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée. Deux schémas de reconstruction sont considérés, suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des algorithmes de calcul du volume.

Schéma 1

Données : les normales N_i $i=1, \dots, k$; les aires S_i $i=1, \dots, k$

avec $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$

(1) on résout :

$$(P') : \begin{cases} \text{Max } V(l) \\ \langle l, S \rangle = 1 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

par la méthode du gradient réduit ou Newton, Soit l^* sa solution.

A chaque itération k du processus d'optimisation $V(l^k)$ est calculé en utilisant l'algorithme de calcul du volume (cf. chap.4 § 2.).

On n'a pas à construire $P(l^k)$.

(2) Construction de $P(l^*)$:

a) On transforme les vecteurs normaux :

$$N'_i = \frac{1}{l_i} \cdot N_i \quad i=1, \dots, k .$$

b) On calcule le polytope dual $D = \text{co}\{N'_1, \dots, N'_k\}$:
utilisation de l'algorithme point par point (cf. chap.3, § 1).

c) Passage par dualité (cf. chap.3, § 3) et construction du polytope $P(l^*)$ cherché : $P(l^*) = D^\circ$.

d) Calcul de G le centre de gravité de $P(l^*)$.

Translation de G à l'origine (pour avoir l'unicité de la solution)

Schéma 2

Le schéma ci dessus est modifié si le calcul de $V(l)$ se fait via la construction de $P(l)$.

L'étape 2 du schéma précédant intervient alors à chaque appel de la fonction V.

A chaque itération principal k du programme d'optimisation, l'appel de la fonction V intervient une fois pour le calcul de la direction d^k et plusieurs fois dans la recherche linéaire pour le calcul du pas de déplacement.

§ 6.2. Traitements numériques

6.2.1 Lors de l'utilisation de la méthode du premier ordre, pour résoudre (P'), on remarque que la convergence devient lente à l'approche de l'optimum.

On a essayé d'accélérer la convergence, mais sans beaucoup de succès. Par contre, avec la méthode de Newton, les résultats sont satisfaisants et

pour un grand nombre d'exemples la convergence est effectivement quadratique.

6.2.2 La méthode est très sensible à la réalisation de la condition :

$$\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0 \quad (1).$$

Le calcul des normales N_i et les aires S_i , peut être entaché d'erreurs et la condition (1) ne serait pas vérifiée de façon précise. Dans ce cas la convergence de l'algorithme d'optimisation n'est plus assurée.

Pour remédier à cela, on peut envisager de régulariser les données avant d'entamer le processus de reconstruction :

Soit N la matrice des normales, et soit $\hat{S}$ le vecteur des aires des différentes facettes. On cherche S proche de $\hat{S}$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$.

S peut être calculé comme solution du problème d'optimisation :

$$\text{Min} \frac{1}{2} \| S - \hat{S} \|^2$$

$$N^t \cdot S = 0$$

$$S > 0$$

ou de façon équivalente, comme solution du problème de régularisation :

$$\text{Min} \frac{1}{2} \| N^t \cdot S \|^2 + \frac{1}{2} \| S - \hat{S} \|^2$$

$$S > 0$$

6.2.3 Lorsque la dimension du problème (nombre de facettes) augmente, le schéma 1 est plus lent que le schéma 2 avec toutefois une meilleure stabilité numérique.

6.2.4 On remarque, à travers le programme de reconstruction, que la

topologie du polyèdre se stabilise après un certain nombre d'itérations.

C'est dans le but d'exploiter cette propriété qu'on propose ci-dessous la variante :

a) On pense qu'en choisissant un pas de Newton fixe ($x^{k+1} = x^k + t.d^k$ pour $k \geq k_0$) qui préserverait la convergence, on n'aura plus besoin, dans le schéma 2, de construire la topologie de polyèdres intermédiaires lors de la recherche linéaire, ce qui permettrait d'accélérer et de façon notable la convergence de la méthode.

b) On suppose qu'à partir d'un certain rang k_0 , la topologie de $P(l^k)$ pour $k \geq k_0$ est la même.

On va essayer ci dessous, de donner un moyen pratique pour le calcul du volume de $P(l^k)$ en fonction des normales et du type combinatoire qui correspond à celui de $P(l^{k_0})$, ce qui évitera de passer par la construction effective de $P(l^k)$ à chaque itération :

L'aire d'une facette du polyèdre $P(l)$, peut être calculée à partir des coordonnées de ses sommets, c'est une fonction non explicite de l .

Connaissant le type combinatoire associé au polyèdre $P(l)$, on va essayer d'exprimer les sommets de la facette F_i , en fonction de l ainsi que des normales des facettes qui lui sont adjacentes.

Pour simplifier les expressions, on peut supposer, après rotation, que la facette F_i est contenue dans le plan $z = l_i$.

(Remarque : en fait, on fait une rotation de toutes les facettes adjacentes à F_i).

Soit X un sommet de F_i , il appartient au moins à deux autres facettes, soient F_j et F_k .

Les équations des plans contenant les deux facettes sont respectivement:

$$\langle N_j, X \rangle = l_j \quad \text{et} \quad \langle N_k, X \rangle = l_k \quad .$$

Si $X = (x, y, z)^t$ et $N = (a, b, c)^t$ alors X est solution du système :

$$\begin{aligned} a_k x + b_k y + c_k z &= l_k \\ a_j x + b_j y + c_j z &= l_j \\ z &= l_i \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a_k x + b_k y &= l_k - c_k l_i \\ a_j x + b_j y &= l_j - c_j l_i \\ z &= l_i \end{aligned}$$

Si $\Delta_{jk} = a_k b_j - a_j b_k$ alors :

$$x = \frac{1}{\Delta_{jk}} [b_j l_k + (b_k c_j - b_j c_k) l_i - b_k l_j]$$

$$y = - \frac{1}{\Delta_{jk}} [a_j l_k + (a_k c_j - a_j c_k) l_i - a_k l_j]$$

Soient $X_1, \dots, X_{n_i}$ les sommets de la facette F_i .

Les X_i étant ordonnés dans le sens trigonométrique.

L'aire de F_i est donnée par la formule :

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} x_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \quad .$$

Avec comme convention : $X_{n_i+1} = X_1$ et $X_{-1} = X_{n_i}$.

6.2.5 On espérait, en utilisant des outils de calcul formel, et à l'aide de l'algorithme de Lasserre (cf. chap.4, § 2) obtenir une forme analytique (une formule) du volume du polyèdre $P(l)$ en fonction de son second membre l , ce qui permettrait d'économiser beaucoup de calculs.

On a utilisé le système Reduce.

Les fichiers résultats qu'on obtient sont grands, et le programme sous sa forme actuelle est long. Néanmoins, l'idée nous paraît très intéressante et pourrait être exploitée dans d'autres contextes.

6.2.6 Il nous a été possible d'obtenir des polyèdres non triviaux à partir de polyèdres de base très simples.

Il est envisagé d'incorporer cette méthode dans un système de sculpture par ordinateur.

Exemples d'illustration

On présente dans ce paragraphe quelques exemples de polyèdres générés à l'aide du programme qui met en oeuvre l'algorithme de reconstruction.

Au cours des tests effectués, on remarque :

i) La topologie du polyèdre se stabilise après un certain nombre d'itérations (la topologie du polyèdre varie peu au cours des dernières itérations) .

ii) L'existence de petites faces ralentit, de façon notable, la vitesse de convergence de l'algorithme .

iii) Le choix d'un bon point de départ permettrait de diminuer le nombre d'itérations. Donc l'utilisateur qui a une idée sur la forme de l'objet qu'il veut reconstituer peut choisir un point de départ l^0 (vérifiant $\langle S, l^0 \rangle = c$) de manière à favoriser l'algorithme d'optimisation.

iv) L'algorithme est très sensible à la réalisation de la condition $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$. De même des erreurs dans le calcul du volume ou de son gradient peuvent être des sources de non convergence de la méthode .

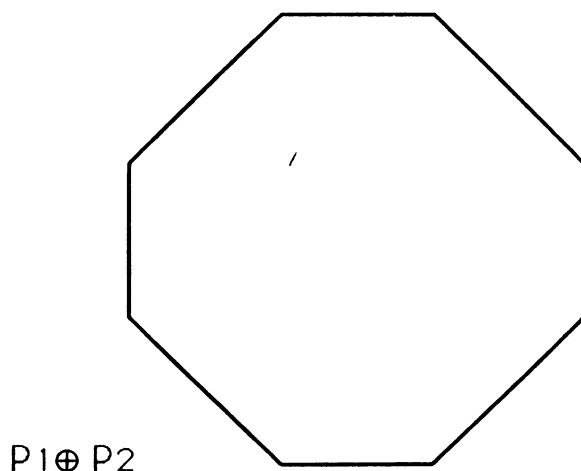
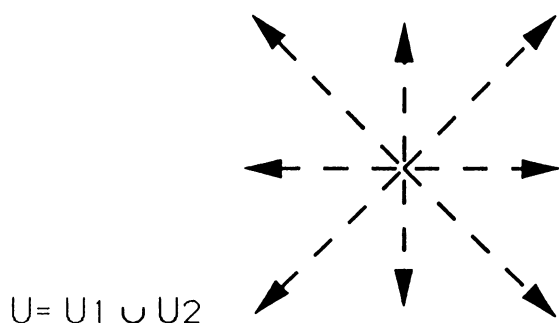
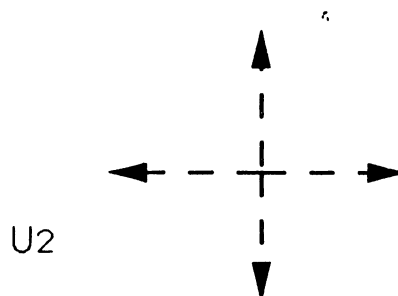
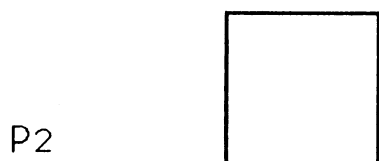
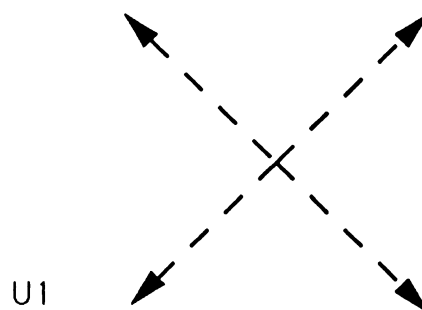
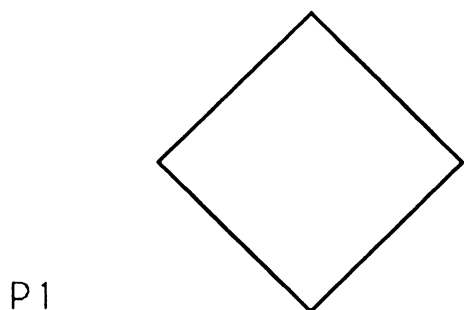
Fusion de deux E.G.I :

Le fait de fusionner les images gaussiennes généralisées de deux polyèdres convexes permet d'établir une opération entre polyèdres.

Si $U_1 = (N_i, S_i)_{i=1, \dots, n_1}$ (resp. $U_2 = (N_j, S_j)_{j=1, \dots, n_2}$) est l'image gaussienne généralisée du polyèdre P_1 (resp. P_2 , on suppose $N_i \neq N_j$) ; alors le système $U_1 \cup U_2 = (N_i, S_i)_{i=1, \dots, n_1+n_2}$ correspond à l'image gaussienne généralisée

d'un polyèdre P dont les n_1+n_2 faces F_i ont pour normales les N_i et pour aires les S_i . P sera noté $P_1 \oplus P_2$.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$:

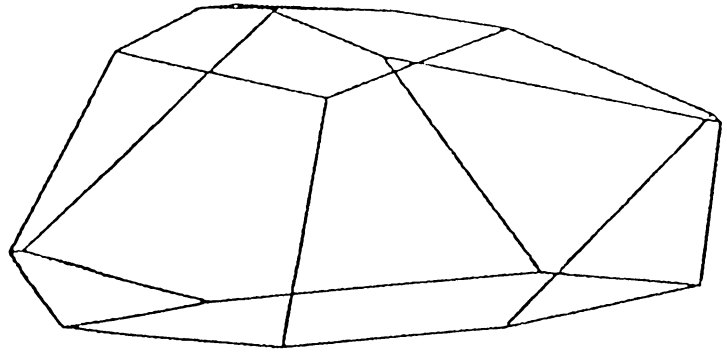


Cette opération permet d'obtenir des polyèdres non évidents à partir de la fusion de polyèdres simples. Elle permet aussi d'effectuer des coupes sur un polyèdre en contrôlant l'aire de ces coupes.

Exemple 1 : Polyèdre à 25 faces
Convergence après 11 itérations

Polyèdre de départ :

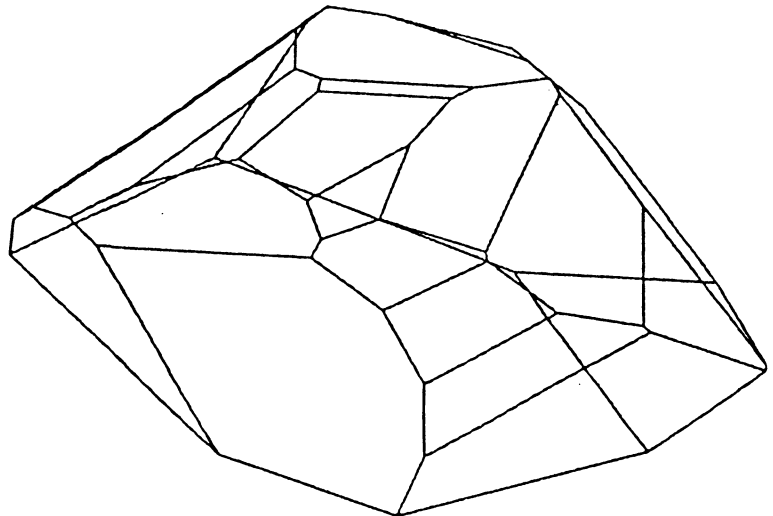
16 15 14 13
18 17 16 13 12
14 15 9
15 16 17 19 20 10 9
8 11 12 13 14 9 10 7
5 20 19 6
4 7 10 20 5
3 8 7 4
2 11 8 3
1 2 3 4 5 6
6 19 17 18 1
18 12 11 2 1



(Adjacence : Faces comme listes de leurs sommets)

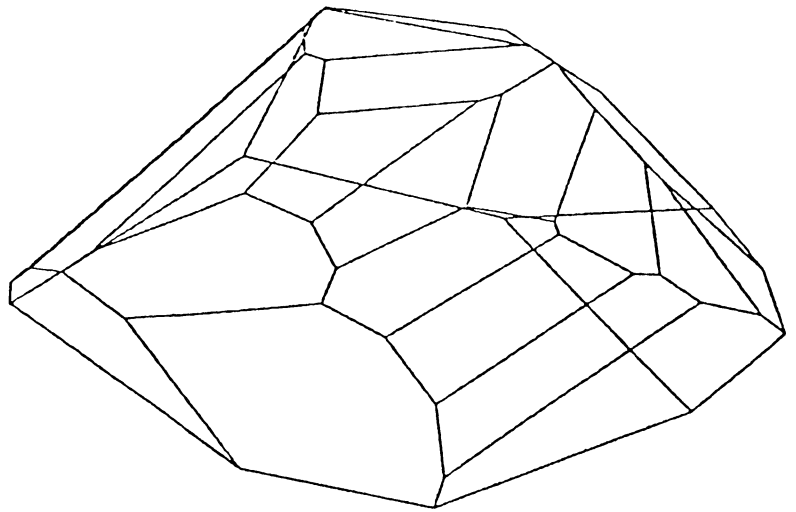
Polyèdre à la 4^{ème} itération :

36 37 34
41 42 32 30 29
40 41 29 28
30 32 33 31 27
38 39 40 28 26 25
35 36 34 23 22
26 28 29 30 27 21
27 31 43 35 22 21
25 26 21 22 23 24 20 19
38 25 19 18
20 24 17 16
18 19 20 16 15
44 39 38 18 15 14 13
14 15 16 17 12
7 8 9 10 11
11 13 14 12 7
12 17 24 23 34 37 8 7
33 32 42 6 5
4 43 31 33 5
3 9 8 37 36 35 43 4
2 10 9 3
1 2 3 4 5 6
6 42 41 40 39 44 1
1 44 13 11 10 2



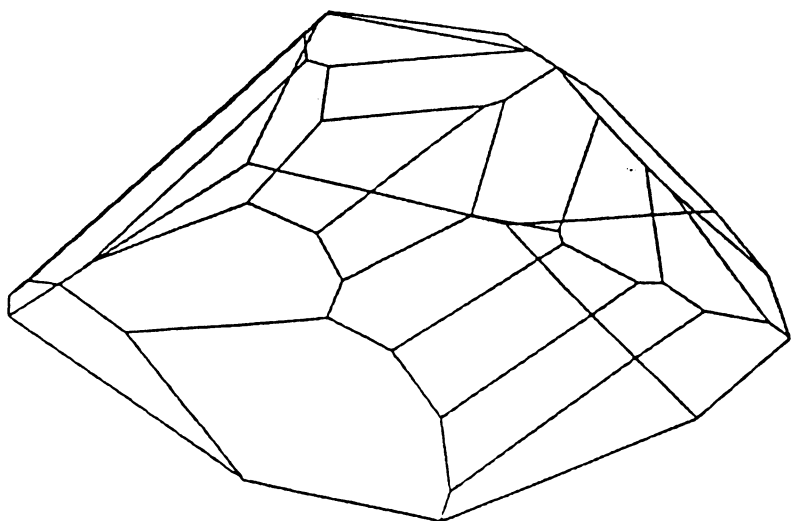
Polyèdre à la 7^{ème} itération

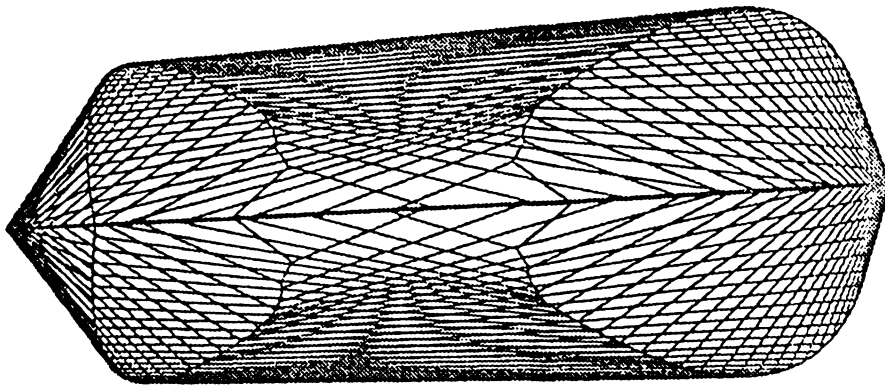
32 34 33 30
 42 43 31 29 28
 41 42 28 27
 29 31 32 30 26
 39 40 41 27 25 24
 36 37 35 22
 22 23 24 25 21
 25 27 28 29 26 21
 26 30 33 44 36 22 21
 39 24 23 20 19
 20 23 22 35 38 18 17
 19 20 17 16
 16 17 18 15 14
 45 40 39 19 16 14 13
 38 35 37 12 11
 15 18 38 11 10
 13 14 15 10 9
 7 8 9 10 11 12
 34 32 31 43 6 5
 4 44 33 34 5
 3 7 12 37 36 44 4
 2 8 7 3
 1 2 3 4 5 6
 6 43 42 41 40 45 1
 1 45 13 9 8 2



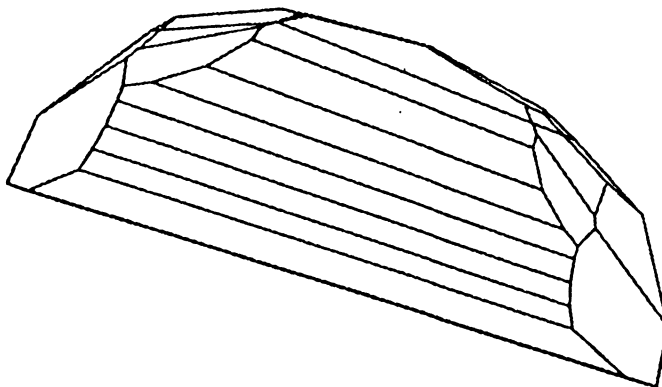
Polyèdre final (après 11 itérations)

37 38 35 36
 32 34 33 30
 29 28 43 44 31
 43 28 27 42
 29 31 32 30 26
 25 24 40 41 42 27
 22 23 24 25 21
 21 25 27 28 29 26
 22 21 26 30 33 45 37 36
 20 19 40 24 23
 35 39 18 17 20 23 22 36
 19 20 17 16
 15 14 16 17 18
 19 16 14 13 46 41 40
 12 11 39 35 38
 15 18 39 11 10
 9 13 14 15 10
 7 8 9 10 11 12
 34 32 31 44 6 5
 5 4 45 33 34
 4 3 7 12 38 37 45
 3 2 8 7
 1 2 3 4 5 6
 44 43 42 41 46 1 6
 8 2 1 46 13 9

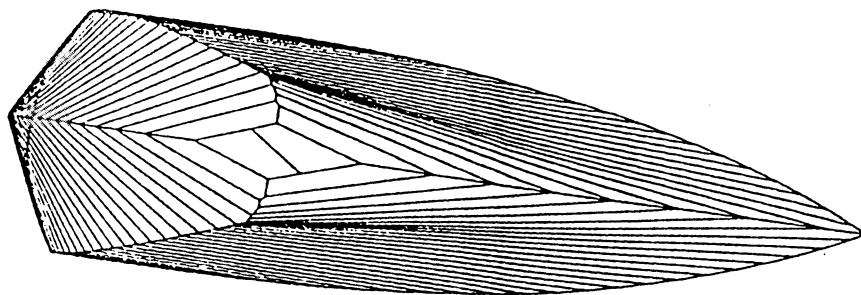




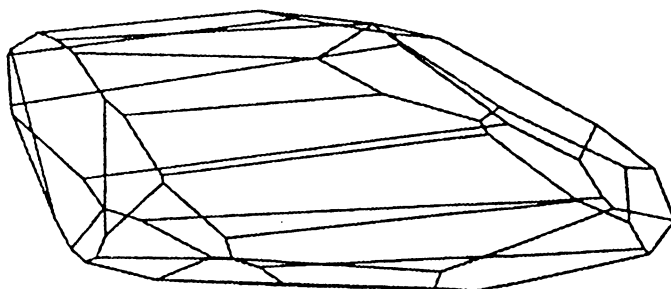
Polyèdre ayant 200 faces et 393 sommets et présentant une bonne symétrie . Obtenu après 9 itérations .



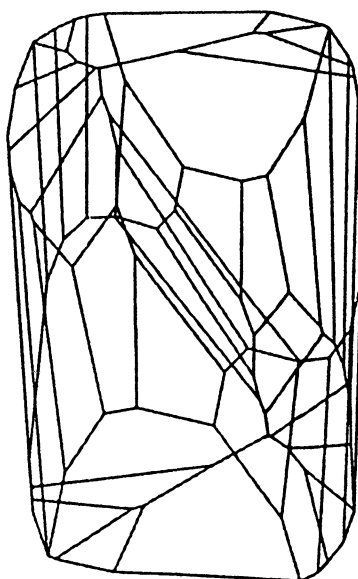
Polyèdre à 23 faces et 42 sommets , obtenu en choisissant des normales inscrites sur une partie d'ellipse et en y ajoutant des normales qui correspondent à des coupes par des demi espaces. Convergence après 10 itérations. Le même exemple, mais en choisissant deux faces petites par rapport aux autres et en ne prenant aucune précaution pour le choix du point de départ, converge après 45 itérations.

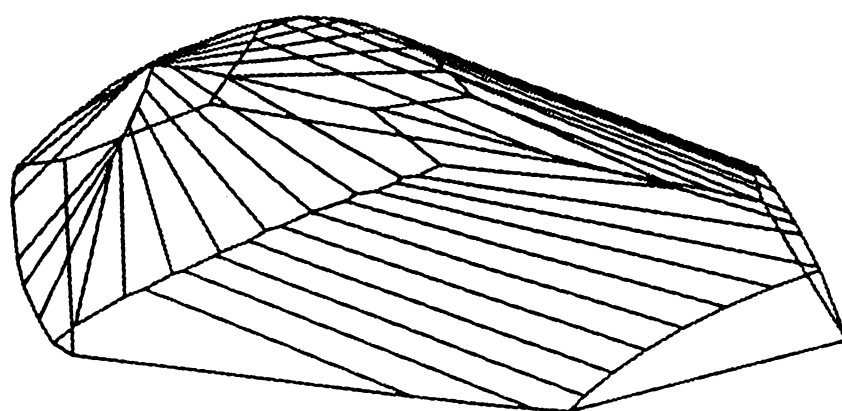
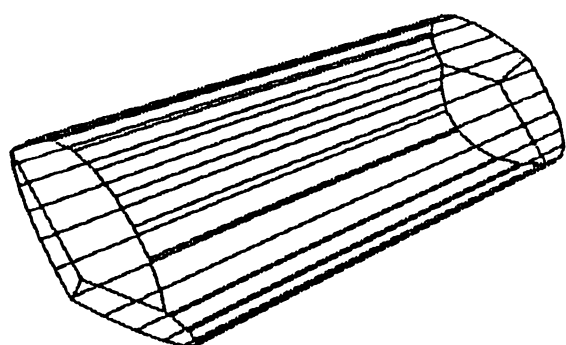
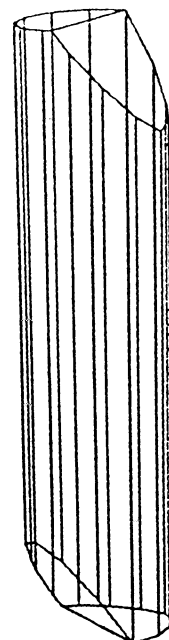
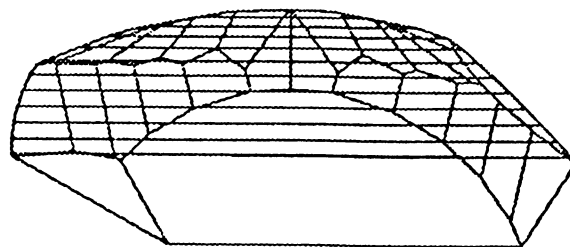


Polyèdre à 120 faces et 208 sommets obtenu en prenant des normales sur une moitié d'ellipse.

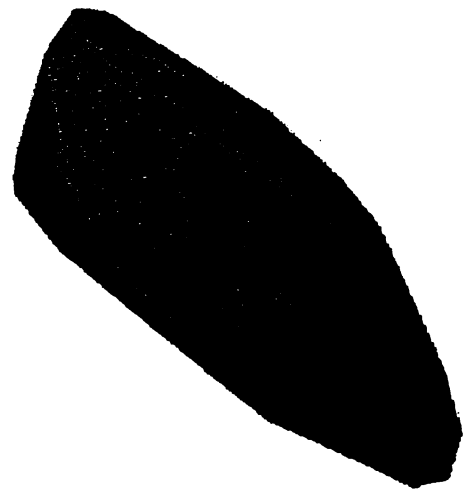
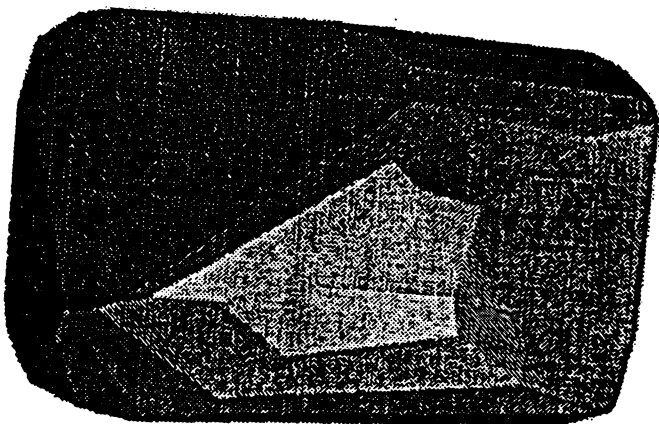
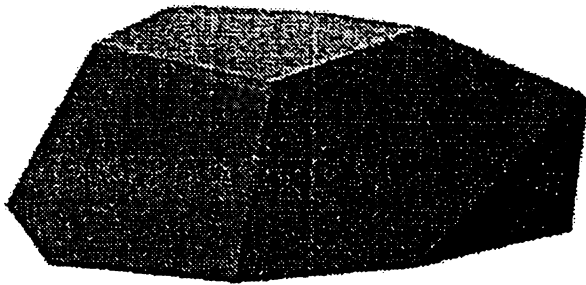
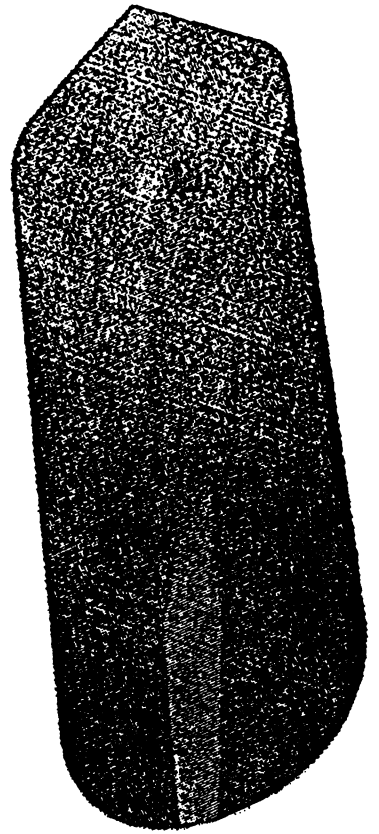
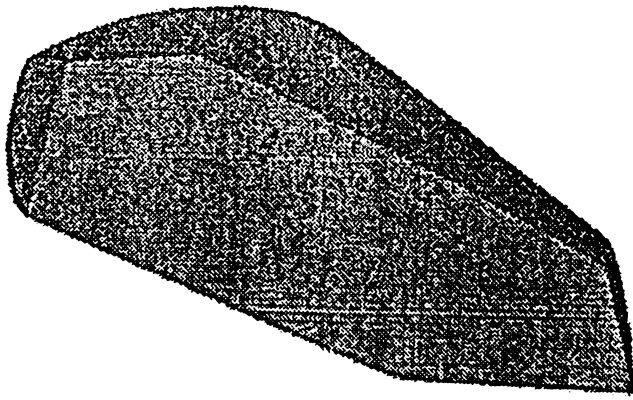


Polyèdre à 29 faces et 54 sommets.



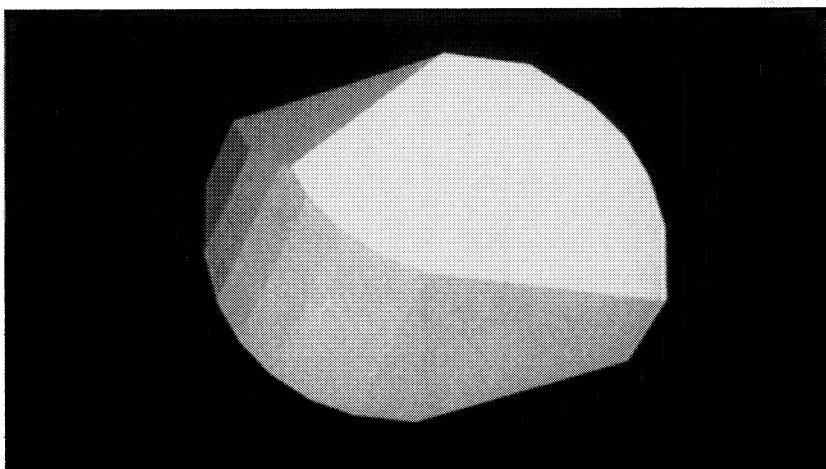
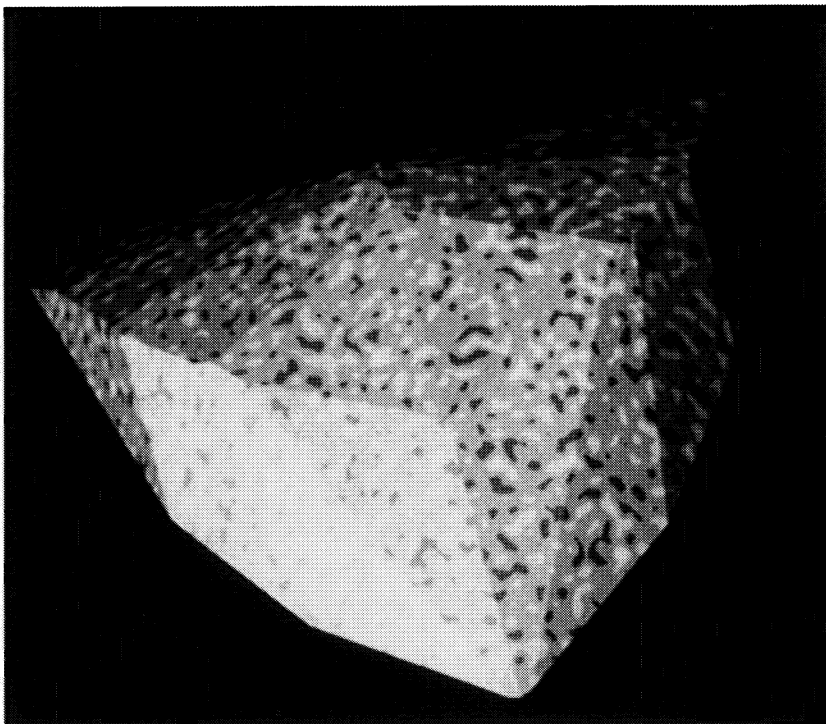
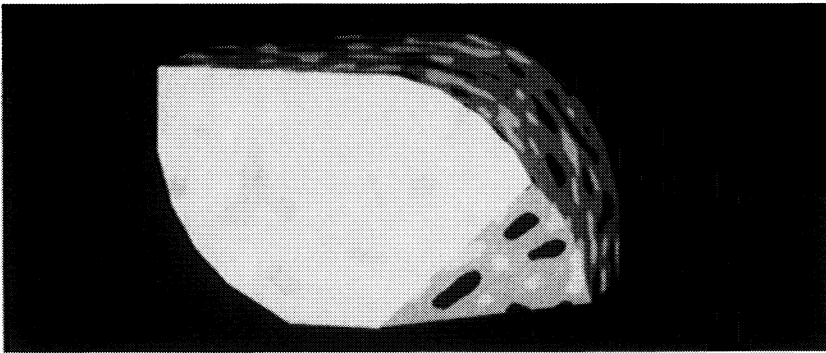


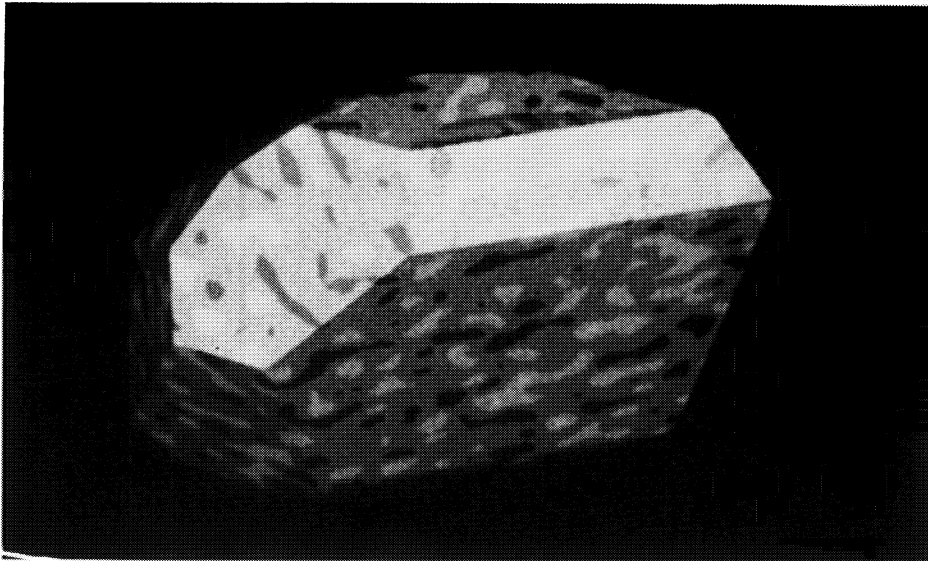
Exemples en fil de fer



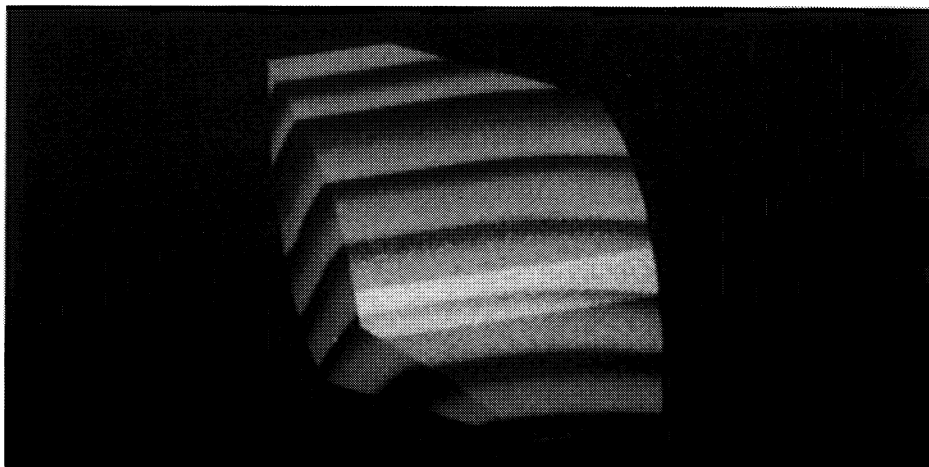
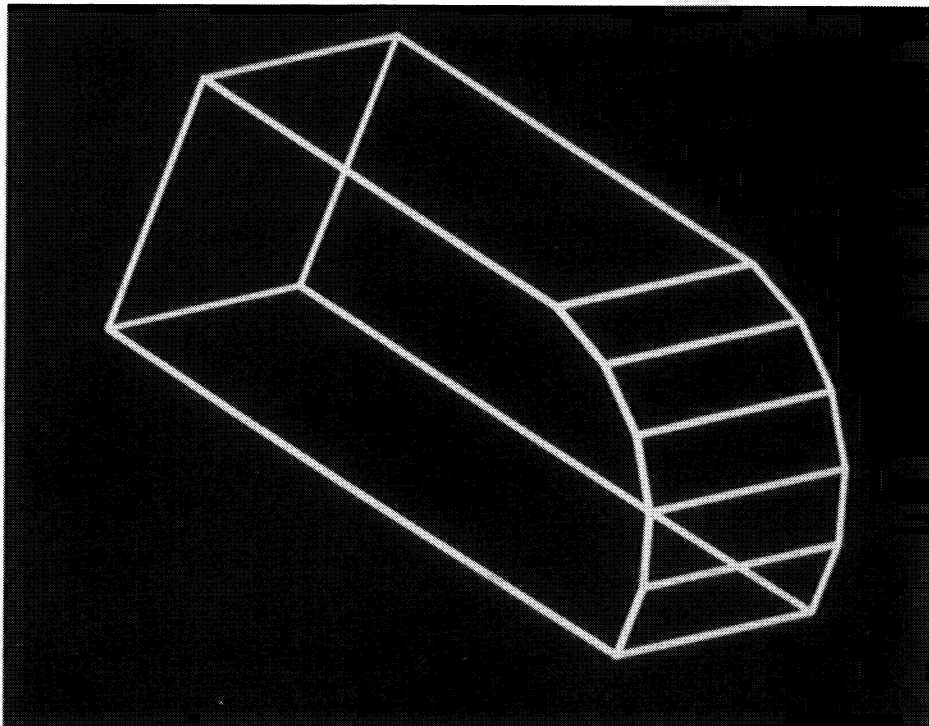
Ombrages de polyèdres

*Rendu de polyèdres, avec une texture de marbre, obtenu à l'aide
du logiciel **Renderman***





Texture de
marbre



Texture de
bois.

Bibliographie

- [1] **Jacques Bair & René Fourneau** " Etude géométrique des espaces vectoriels II, polyèdres et polytopes convexes "
Springer Verlag 1980 .
- [2] **R. Bajcsy** " Three dimensional scene analysis "
Proc. of 5th. int. conf. on pattern recognition, pp.1064-1074
Miami Beach, dec. 1980 .
- [3] **R.V. Benson** " Euclidean geometry and convexity "
MacGraw-Hill book company 1966 .
- [4] **Marcel Berger** " Géométrie volume 3, convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes " .
Nathan, Paris France 1978 .
- [5] **F. Borceaux** " Invitation à la géométrie " CIACO, 1986 .
- [6] **P.Broux** " Using the gaussian image to find the orientation of objects "
The international journal of robotics research, vol. 3 n°4 1984 .
- [7] **D.R. Chand & S.S. Kapur** " An algorithm for convex polytopes "
JACM, vol.17 N°1 january 1970, pp. 78-86 .
- [8] **M.P. do Carmo** " Differential geometry of curves and surfaces "
Prentice Hall, New Jersey 1976 .
- [9] **H. Edelsbrunner** " Algorithms in combinatorial geometry "
EATCS, Monographs on theoretical computer science, vol.10
Springer Verlag 1987 .
- [10] **H.G Eggleston** " Convexity "
Cambridge university press 1958 .

- [11] **J.P. Evans & F.J. Gould** " Stability in nonlinear programming "
Operation Research, 18 1969 .
- [12] **B. Grûnbaum** " Convex polytopes "
John Wiley and Sons ltd, London and New york 1967 .
- [13] **D.Hilbert & S.Cohn-Vossen** " Geometry and the imagination "
Chelsa publishing company, New York .
- [14] **B.K.P Horn** " Extended gaussian images "
Proceeding of IEEE, pp.1671-1686 december 1984 .
- [15] **B.K.P Horn & K.I. Ikeuchi** " The Mechanical manipulation of
randomly oriented parts " .
Scientific American, august 1984 .
- [16] **K.I. Ikeuchi** " Recognition of 3D objects using the extended gaussian
image " Proceedings of the seventh I.J.C.A.I., pp. 595-600 1981 .
- [17] **J.B. Lasserre** " An analytical expression and an algorithm for the
volume of a convex polyedron in $\mathbb{R}^n$ "
J.O.T.A., vol. 39 N°3 march 1983 .
- [18] **P.J. Laurent** " Approximation et optimisation "
Hermann, Paris 1972.
- [19] **J. Lemordant, P.D. Tao & H. Zouaki** "Reconstruction d'un
polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée "
Journée de géométrie algorithmique, INRIA Sophia-Antipolis 18-20 juin 1990
- [20] **J.J Little** " An iterative method for reconstructing convex polyedra
from extended gaussian image "
Proceedings of A.A.A.I. 83, pp. 247-250 1983 .
- [21] **J.J Little** " Recovering shape and determinig attitude from extended
gaussian images "
Technical report TN 85-2 April 1985. University of British Columbia

Vancouver

- [22] **D.G Luenberger** " Introduction to linear and non linear programming " Addison-Wesley 1973 .
- [23] **L.A Lyusternik** " Convex figures and polyedra " Dover publications, New York 1963 .
- [24] **P. McMullen & G.C Shepard** " Convex polytopes and the upper bound conjecture " Cambridge at the University press 1971 .
- [25] **H.Minkowski** " Volumen und oberfläch " Math. Ann., 57 1903 .
- [26] **M. Minoux** "Programmation mathématiques tome I " Dunod, Paris 1983 .
- [27] **B.Pchenitchny & Y.Daniline** " Méthodes numériques dans les problèmes d'extremum " Mir 1977 .
- [28] **A.V Pogorelov** " The Minkowski multidimensional problem " Winston and Sons, 1978 .
- [29] **F.P Preparata & S.J Hong** " Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions " C.A.C.M., vol. 20 pp. 87-93 1977 .
- [30] **R.T. Rockafellar** "The theory of subgradients and its applications to problems of optimization . Convex and nonconvex functions " Heldermann Verlag Berlin .
- [31] **J.Stoer & C.Witzgal** " Convexity and optimization in finite dimension I " 1970 .
- [32] **S. Uselton** " Surface reconstruction from limited information " U.M.I Dissertation information service 1981.

[33] ***K.Weiler*** " Edge-based data structure for solid modeling in curved surface environments "

IEEE computer graphics and applications, january 1985 pp.21-24 .

[34] ***P.Faure & P.Huard*** " Résolution de programmes mathématiques avec la méthode du gradient réduit "

R.F.R.O, N°36 1965 p. 167-206 .

Résumé

On présente un algorithme, pour retrouver la représentation surfacique d'un polyèdre convexe à partir de la donnée de son image gaussienne généralisée, notée E.G.I. Cet algorithme est basé sur un théorème de Minkowski. Cette reconstruction du polyèdre à partir de son E.G.I, se fera via la résolution d'un problème d'optimisation convexe.

Après avoir défini l'E.G.I comme mode de représentation d'objets convexes, ainsi que les propriétés qu'elle possède, nous détaillons la méthode de reconstruction. Des améliorations sont introduites, permettant de rendre l'algorithme suffisamment efficace.

Le schéma général de l'algorithme est présenté, avec des commentaires sur le traitement numérique.

Enfin, quelques exemples sont fournis, pour illustrer la méthode de reconstruction et l'utilisation de l'E.G.I comme moyen de sculpture par ordinateur.

Abstract

We present an algorithm to reconstruct the surface shape of a convex polyhedron from its extended gaussian image which we write E.G.I.

This algorithm is based on a Minkowski's theorem. This reconstruction is done by solving a convex optimization problem.

The E.G.I is defined as representation of convex objects. Next we investigate some of its interesting properties. We study the method of reconstruction and give some improvements which make the algorithm more efficient. The general scheme of the algorithm is given along with some comments on numerical aspects. Finally, we illustrate this method by some examples and we show that the E.G.I can be used as a way to sculpt objects.

Mots clés

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| - Polyèdre | - Volume |
| - Image gaussienne | - Optimisation |
| - Enveloppe convexe | - Représentation d'objets |