HAL
open science

Caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie

Gwendoline Pajot

To cite this version:

Gwendoline Pajot. Caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut de physique du globe de paris - IPGP, 2007. Français. NNT : . tel-00341117

HAL Id: tel-00341117

https://theses.hal.science/tel-00341117v1

Submitted on 24 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris
École doctorale des sciences de la Terre

SPÉCIALITÉ : GÉOPHYSIQUE INTERNE

Caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie

sous la direction de Michel Diament et Marie-Françoise Lequentrec-Lalancette
présentée par

Gwendoline Pajot

le 27 Septembre 2007, devant le jury composé de :

Marianne Greff-Lefftz ..... *Présidente du Jury*
Richard Biancale ..... *Rapporteur*
Michel Van Camp ..... *Rapporteur*
Michel Diament ..... *Examinateur*
Armand Galdeano ..... *Examinateur*
Marie-Françoise Lequentrec-Lalancette ..... *Examinateur*

Institut de Physique du Globe de Paris
Géophysique Spatiale et Planétaire
Case 89 – 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05

à M. A. Epstein et Y. Barr

Remerciements

Tout d'abord, un grand merci aux membres de mon jury pour avoir bien voulu participer à la clôture de cette grande aventure. Merci à Michel D. et Marie-Françoise pour votre immense patience, votre compréhension, votre constance. J'adresse un merci un peu spécial à Richard : certes je te suis très reconnaissante d'avoir bien voulu faire partie de ce jury, mais après tout... c'est toi qui m'a mise dans cette galère aussi ! À Marianne, Armand et Michel V. : merci d'avoir accepté, tout simplement. Merci bien sûr à mes deux rapporteurs d'avoir rapporté (positivement).

Cinq ans c'est long... pour une grève de la faim. Alors merci aux contributeurs financiers de ce projet : qu'il s'agisse de la DGA, pour la bourse de thèse, ou bien de l'IPGP qui m'a alloué un contrat d'ATER. Mais merci aussi à l'Équipe de Gravimétrie et Géodynamique - Géodésie et Gravimétrie - Études Spatiales et Planétologie - Géophysique Spatiale et Planétaire pour avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires pour travailler. Et merci à Michel pour m'avoir envoyée en congrès quand je ne voulais pas y aller.

Il me faut également remercier deux personnes qui ont bien voulu travailler avec moi et me faire profiter de leurs lumières. Merci à Valentin, donc : je pense qu'après notre collaboration, je suis capable de venir à bout d'à peu près n'importe quel reviewer récalcitrant, et merci à Monsieur le brillant et bruyant baron de Viron, qui a aussi consacré un temps certain à mon sauvetage.

À Shan, merci de ne pas m'avoir facturé ton consulting, ça m'aurait coûté bien trop cher. À Setareh, merci pour ton aide, ton soutien, tes conseils et ton optimisme, ta patience pour m'expliquer que non, un granite et un gneiss c'est pas juste deux cailloux, et merci à ton mari de tolérer que nous passions tant d'heures au téléphone. À Valérie, merci pour le rhum. À Christine et Hendra, merci pour avoir partagé mes repas nocturnes. Normalement, ceux parmi mes amis, ma famille, ma belle-famille que je n'ai pas déjà cités, ne devraient jamais lire ceci mais au cas où : merci pour tout. Certains collègues amis ne liront que cette page : qu'ils sachent que je ne les oublie pas mais j'aurais trop peur d'oublier un nom pour dresser une liste ici. Et ceux qui liront ceci doivent savoir qu'il existe deux personnes formidables à qui je dois beaucoup : ma grand-mère et Hélène Robic. Quant à mon chéri... ça ne regarde que nous !

Liste des acronymes

CHAMP	CHAllenging Minisatellite Payload
CACTUS	Capteur Accélérométrique Capacitif Triaxial Ultra Sensible
CNES	Centre National d'Études spatiales
DGA	Délégation Générale pour l'Armement
DLR	Deutsches Zentrum für Luft – und Raumfahrt
ESA	European Space Agency
FTG	Full Tensor gravity Gradiometry
GGI	Gravity Gradiometer Instrument
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
IPGP	Institut de Physique du Globe de Paris
LAGEOS	LAser GEOdynamics Satellites
NASA	National Aeronautics and Space Administration
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques
SHOM	Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

Résumé : caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie.

La mesure des dérivées spatiales du champ de pesanteur, ou gradiométrie en gravimétrie, est née au début du XXe siècle avec la balance de torsion d'Eötvös, premier gradiomètre. Utilisée avec succès pour la prospection géophysique, cette technique fut cependant délaissée pour un temps au profit de la gravimétrie, plus facile et moins coûteuse. Cependant, les développements instrumentaux en gradiométrie ont continué, et les gradiomètres actuels permettent la mesure simultanée des gradients de pesanteur dans trois directions indépendantes de l'espace. La gradiométrie en gravimétrie connaît ainsi une renaissance, et l'Agence Spatiale Européenne lancera en 2008 le satellite GOCE, avec à son bord le premier gradiomètre spatial, permettant la cartographie globale de la pesanteur avec une résolution spatiale sans précédent. Cette étude est consacrée au signal de gradiométrie en gravimétrie, de l'acquisition des données à leur interprétation. Plus spécifiquement, dérivant d'un même potentiel, l'accélération de la pesanteur et ses dérivées peuvent être considérées comme des mesures interdépendantes d'une même quantité. Nous avons élaboré une méthode permettant, en exploitant cette redondance, de réduire le bruit dans les données de gradiométrie et, plus efficacement, dans celles de gravimétrie. Nous utilisons également une propriété spécifique des gradients de pesanteur, l'existence d'invariants scalaires combinant les différents gradients, que nous relions à la géométrie des sources à l'origine des anomalies de pesanteur. Nous avons ainsi développé une méthode, complémentaire à la déconvolution d'Euler des données de gravimétrie, qui améliore la localisation de ces sources.

Abstract : characterization, analysis and interpretation of gravity gradiometry data.

Gravity gradiometry was born at the beginning of the twentieth century, with Eötvös' torsion balance, first instrument allowing the measurement of some spatial derivatives of gravity. After quite a success, gravity gradiometry was however left behind in favour of gravimetry, easier and cheaper for geophysical prospecting. Meanwhile, gradiometers were still being developed. Unlike former ones, the latest instruments allow the measurement of the whole set of gravity spatial derivatives. This has led to the recent rebirth of gravity gradiometry. In particular, the data collected by the first space gradiometer, onboard the satellite GOCE (European Space Agency, 2008), will be used to compute a global gravity field model with unprecedented spatial resolution. This study is dedicated to gravity gradiometry data, from their measurement to their interpretation. In particular, the acceleration of gravity and its derivatives are related to the same potential function ; hence we can consider them as being measurements of one same quantity. We established formulae to relate them to each other and we built a method that uses this redundancy to diminish the noise in gravity gradiometry data, and, more efficiently, in simultaneous measurements of gravity. We also focused on a specific property of the gravity gradient tensor. Relating its scalar invariants to a structural index reflecting the geometrical properties of the sources originating gravity anomalies, we developed a method than can be used complementarily to the Euler deconvolution method, in order to better localize the anomalous bodies.

Sommaire

Liste des acronymes **5**

Résumés **7**

Introduction **11**

1 Cadre de l'étude **13**

1.1 Évolution des mesures : apport de la gradiométrie 14

1.2 Enjeux 21

2 Données de gradiométrie en gravimétrie **23**

2.1 Tenseur gradient de gravitation 23

2.2 Données 44

3 Réduction du bruit **51**

3.1 Séparation des accélérations 51

3.2 Le bruit : causes et remèdes 57

3.3 Profondeur des sources 60

3.4 Réduction du bruit basée sur des considérations physiques 66

Article 1 : Noise reduction through a joint processing of gravity and gravity gradient data 75

4 Interprétation des mesures **135**

4.1 Localisation des sources et détermination des contours 136

4.2 Perspective : inversion en densité 147

Article 2 : Tensor deconvolution : a method to locate equivalent sources from full tensor gravity data 151

Conclusions, perspectives **161**

Références **163**

Table des matières **173**

Table des figures **177**

Introduction

Just as the musician can coax entrancing melodies from his instrument, so the physicist, with equal delight, can measure the finest variation in gravity. In this way we can examine the Earth's crust at depths that the eye cannot penetrate and the rig cannot reach.

Loràn d Eötvös (1848-1919).

La gradiométrie en gravimétrie, héritière des travaux d'Eötvös, connaît une renaissance en prospection depuis la fin des années 1990. Aujourd'hui, on mesure simultanément, lors de campagnes en mer ou aéroportées, les dérivées spatiales de l'accélération de la pesanteur dans trois directions indépendantes de l'espace. En 2008, le satellite GOCE de l'Agence Spatiale Européenne sera lancé, avec à son bord un gradiomètre. Pourtant, peu de méthodes ont été à ce jour développées pour le traitement spécifique et l'interprétation de ces données.

Dans cette étude, nous avons exploré les différentes étapes du traitement des données de gradiométrie en gravimétrie. Ainsi nous présentons dans le premier chapitre l'évolution générale des différents dispositifs de mesure des gradients de gravité depuis la balance de torsion d'Eötvös jusqu'au gradiomètre de GOCE. Puis, dans le deuxième chapitre, nous décrivons le tenseur gradient de gravité, représentation mathématique des mesures d'un gradiomètre, et quelques-unes de ses propriétés. Nous présentons également un jeu de données de gradiométrie en gravimétrie acquises en mer par Bell Geospace, qui, dans les chapitres suivants, sont utilisées pour illustrer l'application des méthodes développées. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au bruit dans les données. Nous décrivons les problèmes spécifiques de l'acquisition des gradients de la pesanteur, et proposons une nouvelle méthode de réduction du bruit affectant ces données et de la composante verticale du champ de pesanteur. Dans le dernier chapitre, consacré à l'interprétation des données, nous proposons une méthode de localisation des sources, basée sur l'utilisation des invariants du tenseur gradient de gravité, avec en perspective l'utilisation des gradients pour améliorer l'inversion en densité des données de gravimétrie.

Chapitre 1
Cadre de l'étude

Un point massique à la surface de la Terre est soumis à la somme des attractions gravitationnelles dues aux masses dans son environnement. Comme cette attraction est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant ce point des masses qui l'entourent, un point à la surface de la Terre sera particulièrement sensible à l'attraction des masses proches, autrement dit la Terre elle-même, ou des corps dont la masse est suffisamment grande par rapport à leur distance pour que l'attraction qu'ils engendrent ne soit pas négligeable (le Soleil, la Lune). A la surface de la Terre, un point subit en outre une accélération centrifuge, due à la rotation de la Terre. La somme des accélérations gravitationnelles et centrifuge constitue ce que l'on appelle la *pesanteur*.

Les différences (*anomalies*) entre la pesanteur que l'on mesure (aussi bien les variations d'intensité que de direction du vecteur accélération) et celle que l'on associe à un modèle de Terre pour lequel on peut la calculer, traduisent l'écart entre le modèle et la Terre réelle (en négligeant les effets des autres corps du système solaire, et en mettant de côté l'accélération centrifuge), autrement dit entre une distribution de masses supposée et une distribution de masses réelle. Ainsi, les anomalies de la pesanteur renseignent à la fois sur la forme de la Terre et sur sa structure [1].

Les différentes « longueurs d'onde » spatiales du champ de pesanteur (et d'une de ses surfaces équipotentielles, référence des altitudes, appelée le *géoïde*) sont associées à l'étude de phénomènes distincts. La longueur d'onde spatiale caractéristique d'une anomalie de pesanteur est en effet fonction, non seulement de l'extension latérale de l'hétérogénéité de masse qui la crée, mais également de sa profondeur. Ainsi, une anomalie de grande longueur d'onde spatiale pourra être le reflet d'une structure superficielle de large extension latérale, comme

[1] Un système physique non contraint tend à adopter un état d'énergie minimal (équilibre). Une mesure instantanée de la pesanteur va donc permettre également, en rendant compte d'un écart à une figure d'équilibre, d'apporter des informations sur la dynamique du système Terre

d'une structure profonde de moindre extension. Pour étudier la plus grande gamme possible de phénomènes contraints par la distribution ou les mouvements des masses internes, nous voudrions idéalement connaître le champ de pesanteur de façon homogène sur tout le globe, avec les plus grandes résolution et précision possibles. La couverture homogène ne peut être obtenue que par les mesures satellite. Nous allons voir dans ce qui suit que les hautes résolution et précision peuvent être atteintes par la mesure, non pas de l'intensité de la pesanteur, mais des dérivées spatiales du vecteur accélération de la pesanteur dans trois directions indépendantes de l'espace : c'est ce que l'on appelle la *gradiométrie en gravimétrie*. Ainsi, notre travail a pour contexte le lancement de la première mission de gradiométrie en gravimétrie spatiale (le satellite GOCE de l'Agence Spatiale Européenne), prévu début 2008. Mais avant d'expliquer les enjeux spécifiques de notre étude, considérons les événements qui ont conduit au choix de GOCE pour la mesure du champ de pesanteur.

1.1 Évolution des mesures : apport de la gradiométrie

Depuis l'utilisation des pendules il y a plus de trois cents ans, l'instrumentation pour la mesure de la pesanteur a beaucoup évolué. Le besoin grandissant de mesures précises à haute résolution a bien sûr conduit à améliorer les mesures de l'intensité de la pesanteur elle-même, mais également à redécouvrir la mesure d'autres quantités : les dérivées spatiales du champ de pesanteur. L'instrumentation pour des mesures de haute précision de ces dérivées naquit, à la fin du XVIIIème siècle, des travaux de Cavendish (à l'aide de l'instrument mis au point par Michell, voir *Cavendish*, 1798) sur la constante de la gravitation universelle $\mathcal{G}$. La balance de torsion mise au point pour ces expériences permettait de mesurer une dérivée horizontale d'une composante horizontale du champ de pesanteur. Cet instrument fut donc le premier appareil de gradiométrie en gravimétrie, c'est à dire de mesure des dérivées spatiales des composantes du vecteur accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g}$. Cependant, cette quantité seule n'avait que peu d'intérêt pour les géologues. À la même période, Coulomb développa un instrument similaire pour la mesure de la courbure des équipotentielles du champ de pesanteur. Mais tout comme la balance de torsion de Michell et Cavendish, l'instrument n'était pas transportable hors du laboratoire (*Bell and Hansen*, 1998). Il fallut donc attendre les travaux du physicien hongrois Lóràn̂d Eötvös, un siècle plus tard, pour voir apparaître les premiers instruments transportables, avec lesquels il était possible de mesurer des quantités dérivées du champ de pesanteur, de surcroît interprétables par les géologues. En effet, les premiers instruments mis au point par Eötvös[2] appelés *variomètres*, ne permettaient la mesure que de deux dérivées horizontales indépendantes (composantes du *tenseur gradient de gravité*, défini plus loin). Il en

[2]Eötvös mit au point ses instruments pour des expériences de physique fondamentale (*Szabó*, 1998) visant, entre autres, à améliorer la valeur de $\mathcal{G}$ obtenue par Cavendish, ou tester le principe d'Équivalence (e.g. *Weinberg*, 1972). Mais les travaux d'Eötvös s'étendent bien au-delà de la seule théorie de la gravitation. Par exemple ses travaux sur la capillarité permettent d'étudier la forme des bulles dans les capillaires (*Jolly*, 2004).

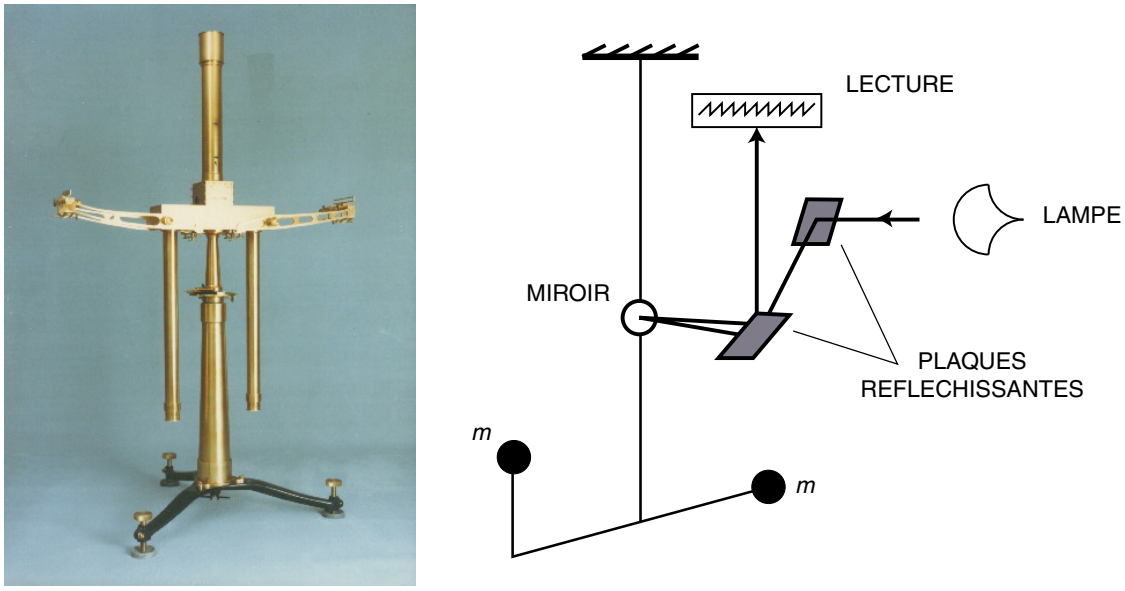


Figure 1.1: *Photographie (*source : http ://eotvos.dm.unipi.it*) et schéma de la balance de torsion d'Eötvös.*

alla différemment des instruments suivants, appelés, comme pour l'expérience de Cavendish, balances de torsion.

Les balances de torsion (voir Figure 1.1) mesurent les variations spatiales du champ de pesanteur selon le principe suivant : un bras suspendu par une fibre de torsion est muni de deux masses identiques à ses extrémités, décalées à la fois horizontalement et verticalement [3] l'une par rapport à l'autre. Le champ de pesanteur n'étant pas uniforme, les deux masses subissent des forces gravitationnelles de directions légèrement différentes, engendrant un couple qui tend à faire tourner le bras suspendu autour de l'axe de torsion. Une série de mesures de l'angle de rotation pour différentes positions du bras permet alors de calculer, au point de mesure, la valeur de quatre quantités indépendantes mettant en jeu les dérivées horizontales des composantes de $\overrightarrow{g}$ (voir, pour le détail des équations, *Shaw and Lancaster-Jones*, 1922; *Nettleton*, 1940).

Très vite (Eötvös avait annoncé son invention en 1886), Eötvös démontra les excellentes performances de la balance de torsion en conditions de terrain. En effet, un premier levé dans les collines transdanubiennes en 1891 (Photographie 1.2) lui permit de déceler des erreurs dans les résultats d'un levé précédent de gravimétrie relative, qui avait été réalisé à l'aide d'un pendule (nous verrons plus loin (§2.1.6) que les mesures réalisées à l'aide de la balance de torsion permettent d'obtenir des cartes similaires à celles obtenues par des mesures de gravi-

[3] Outre la réalisation d'un appareil transportable, c'est l'idée de décaler les deux masses verticalement qui constitue l'apport majeur d'Eötvös à la technique des balances de torsion. En effet, c'est ce décalage vertical qui permet d'évaluer les dérivées horizontales de g_z, ce qui était impossible avec les instruments précédents (*Bell and Hansen*, 1998).

Figure 1.2: *Première utilisation de la balance de torsion d'Eötvös en extérieur : Transdanubie, 1891 (*source : http ://www.gfy.ku.dk).

métrie relative). En 1908, Eötvös publia ses travaux sur la sensibilité de la balance de torsion aux structures géologiques, ouvrant ainsi la voie à de nombreuses campagnes de prospection utilisant cet instrument dans les deux décennies qui suivirent (*Szabó*, 1998).

Cependant, si la balance de torsion fournissait de très bons résultats, permettant la réalisation de cartes d'anomalies gravimétriques à une résolution bien supérieure à celle possible en utilisant les mesures de la pesanteur effectuées au moyen d'un pendule, elle était compliquée à mettre en œuvre. Les mesures étaient longues à réaliser, et leur qualité très dépendante des variations de température : il fallait donc les répéter de nombreuses fois. De plus, l'instrument, conçu pour mesurer les variations horizontales de l'accélération de la pesanteur, était très sensible à la topographie environnante, et les corrections afférentes difficiles à calculer (*Nettleton*, 1940). Le terrain devait parfois être aplani sur une centaine de mètres autour de l'instrument préalablement à la mesure pour obtenir des résultats utilisables (*Bell and Hansen*, 1998). Or les années 1920 virent les débuts de la sismique réfraction, suivie de peu par la sismique réflexion, puis au milieu des années 1930, apparurent les gravimètres relatifs à ressort. Ces derniers permettaient des mesures rapides et plus faciles à interpréter et supplantèrent rapidement les balances de torsion dans la prospection géophysique (*Domenico*, 1994), qui, dès lors, ne furent plus utilisées.

L'avantage principal des gravimètres était certes la rapidité des mesures, mais la résolution des cartes obtenues restait bien inférieure à celle accessible grâce à la balance de torsion (*Heiland*, 1943). Aussi, si la balance de torsion avait été abandonnée, l'intérêt pour la mesure des dérivées spatiales du champ de pesanteur pour améliorer les cartes gravimétriques ne disparut pas pour autant. Ainsi, dès l'arrivée des gravimètres, on s'employa, en parallèle à la mesure de g_z, à déterminer à l'aide de ces nouveaux instruments une quantité jusqu'alors inaccessible

par la mesure : le gradient vertical de pesanteur. En effet, il avait été remarqué que le gradient normal (0.3086 mGal.m^{-1}) pouvait connaître des fluctuations significatives en présence de certaines structures géologiques. Connaître ces fluctuations permettait d'améliorer localement le calcul de l'anomalie de Bouguer (*Evjen*, 1936; *Thyssen-Bornemisza and Stackler*, 1956). De plus la mesure du gradient vertical consistait à effectuer des mesures de g_z à deux hauteurs différentes, et faire leur différence, ce qui permettait de s'affranchir, par différence, des corrections de terrain, nécessaires pour g_z (*Thyssen-Bornemisza*, 1958). Ces mesures de la dérivée verticale de g_z, qui utilisaient l'approximation de la dérivée par une différence (divisée par la distance entre les capteurs des instruments) préludaient à la gradiométrie en gravimétrie actuelle.

Mais il fallut attendre les années 1970 pour voir à nouveau mesurées les dérivées horizontales du vecteur accélération de pesanteur. Dans ces années-là, l'U.S. Navy dépensa des centaines de millions de dollars pour la construction de systèmes de navigation passifs, c'est à dire n'émettant pas d'onde susceptible d'être détectée (voir par exemple *Sumner et al.*, 1999). Cet effort aboutit au développement de systèmes de navigation inertielle basés sur l'utilisation de *gradiomètres*. La navigation inertielle consistant à déduire, par intégration de la seule mesure des accélérations d'un véhicule, sa vitesse et sa position en temps réel, il était nécessaire, pour connaître complètement le vecteur vitesse, de développer des instruments capables de mesurer des accélérations simultanément dans trois directions indépendantes de l'espace. Ces appareils cependant mesuraient en même temps les accélérations à intégrer et les accélérations de type gravitationnel. Pour séparer ces deux types d'accélération il fallait utiliser un modèle préenregistré du vecteur accélération de la pesanteur, ou bien mesurer les variations des composantes de ce vecteur en temps réel (*Metzger and Jircitano*, 1975). Ainsi naquirent les premiers gradiomètres mesurant toutes les composantes du tenseur gradient de gravité (défini au chapitre suivant). Dans les années 1980 la compagnie Bell Aerospace Textron (Bell) démontra qu'il était possible de construire un tel instrument. Ce système équipa immédiatement les sous-marins de la Navy, mais la technologie ne devint accessible pour les applications civiles qu'au début des années 1990.

Depuis lors, ces gradiomètres (voir Figure 1.3) sont utilisés pour la prospection pétrolière et minière, marine et aéroportée (*Bell et al.*, 1997; *Dransfield and Lee*, 2004). Leur intérêt principal, en comparaison avec la traditionnelle mesure de la composante verticale du champ de pesanteur, vient du haut rapport signal-sur-bruit des mesures, et donc d'une haute résolution, en comparaison avec les mesures gravimétriques. En effet, les composantes du tenseur sont déduites de différences d'accélérations mesurées par des paires d'accéléromètres ultra-sensibles (voir par exemple *van Leeuwen et al.*, 2005, pour le détail du fonctionnement de l'instrument). Ainsi, les effets de la plupart des mouvements erratiques du véhicule, susceptibles d'affecter la qualité des mesures, sont éliminés par différence, étant ressentis de la même façon par les deux accéléromètres d'une même paire. Ces instruments étaient donc tous désignés pour être

Figure 1.3: *Gradiomètre Bell (*source http ://www.bellgeo.com*)*

utilisés dans les levés cinématiques de mesure de la pesanteur.

Depuis l'abandon des balances de torsion et l'avènement de la sismique, la gravimétrie a surtout servi, en prospection, à des levés exploratoires préparant l'utilisation des méthodes sismiques. Avec le retour de la gradiométrie, la mesure de l'accélération de la pesanteur redevient une technique de prospection haute résolution, qui ne sert plus de préliminaire à la sismique, mais de complément pour en améliorer les résultats. Ainsi, des méthodes d'interprétation combinant les deux types de mesures sont développées, par exemple pour l'imagerie les structures présentes sous le basalte, ou pour caractériser la géométrie de la base des dômes de sel, ces deux configurations mettant parfois les méthodes sismiques en défaut (en effet, la réflectance très élevée du basalte ou du toit des dômes de sel peut empêcher la pénétration des ondes sismiques et donc l'imagerie en profondeur. Voir par exemple *Mumaw*, 2004; *Biegert*, 2007).

Ainsi, la gradiométrie en gravimétrie, qui avait connu ses heures de gloire au début du XXème siècle, avec deux décennies de campagnes de prospection géophysique à succès, a non seulement été remise au goût du jour dans les années 1990, mais fait l'objet aujourd'hui d'une attention toute particulière, en raison de sa capacité à améliorer l'imagerie dans les zones où la sismique échoue. Mais l'intérêt pour les mesures des dérivées spatiales du champ de pesanteur ne se limite pas aujourd'hui à la prospection ou aux applications militaires. En effet, la résolution des modèles du potentiel et du champ de pesanteur terrestre nécessaire pour les études géodynamiques régionales, voire globales, va croissant. Et, comme c'est le cas pour la prospection, cette haute résolution ne peut être atteinte par la seule mesure de l'intensité de la pesanteur. Dès les années 1980, on commença à s'interroger sur la possibilité d'une mission de gradiométrie en gravimétrie spatiale. À l'époque, les seules mesures spatiales du champ de pesanteur, qu'elles proviennent d'inversion de perturbations de l'orbite

de satellites, ou des premières expériences d'altimétrie spatiale, ne permettaient de caractériser que les grandes longueurs d'onde du champ de pesanteur (les imprécisions sur les plus petites longueurs d'onde, 500km, atteignaient 30mGal, au mieux 10 mGal pour les mesures issues de l'altimétrie : d'après *Lerch et al.*, 1979; *Reigber et al.*, 1983, 1985). Pour atteindre les petites longueurs d'onde, le projet GRADIO/ARISTOTELES (*Balmino et al.*, 1984) prévoyait le lancement d'un satellite dit « satellite gradiométrique », premier satellite à embarquer un gradiomètre dédié à la mesure de la pesanteur. L'intérêt du projet était double. Non seulement la mesure des dérivées permettait d'obtenir un champ et un géoïde à plus haute résolution que ne l'aurait permis la mesure directe de l'intensité du champ de pesanteur, l'altimétrie satellitaire ou les inversions de perturbations d'orbites de satellites, mais aussi les mesures depuis l'espace offraient une couverture (quasi) globale, permettant de déterminer le champ de pesanteur dans des régions inaccessibles par voie terrestre, et d'obtenir une qualité homogène des données sur tout le globe. Le champ de pesanteur global, déduit des mesures de GRADIO, devait avoir une résolution de 100 km, pour une précision de 5 mGal. Cependant le projet fut abandonné en 1995, pour des projets considérés comme moins coûteux.

L'année 1995, pour autant, ne marqua pas la fin des projets de mesure du champ de pesanteur depuis l'espace. En effet, c'est cette année-là que fut décidé par l'Agence Spatiale Allemande (DLR) le lancement du satellite CHAMP (CHAllenging Minisatellite Payload for geoscience and application), qui fut lancé en 2000. Le satellite était certes équipé d'un accéléromètre, mais cet accéléromètre était dédié à la caractérisation des accélérations non gravitationnelles subies par le satellite. Le champ de pesanteur lui-même fut déduit de l'analyse des perturbations de l'orbite du satellite, connue précisément grâce au système GPS et à des réflecteurs laser. À ce jour, le meilleur modèle de champ de pesanteur issu des seules données spatiales de CHAMP, Eigen-Champ-03S, a une précision de 0.4 mGal (en termes d'anomalies du champ de pesanteur) pour une résolution de 400km (R. Biancale, *communication personnelle*). Dans la foulée du satellite CHAMP, les deux satellites de la mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment, projet commun NASA/DLR) furent lancés en 2002, et sont toujours en orbite. Les variations spatiales du champ de pesanteur sont calculées à partir de la mesure des variations de la distance entre les deux satellites. Outre le concept, différent de celui de CHAMP, l'originalité de la mission GRACE tient à l'obtention de modèles mensuels du champ de pesanteur terrestre, permettant d'étudier ses variations temporelles. Bien sûr, il ne s'agit pas de monitorer les variations du champ de pesanteur en temps réel (les mesures sont moyennées), néanmoins, les variations mensuelles du champ permettent d'étudier de nombreux phénomènes liés à l'hydrologie, la fonte des glaces, ... (e.g. *Wahr et al.*, 1998; *Tapley et al.*, 2004) et de façon plus générale, les modifications du champ de pesanteur et du géoïde dues à des événements assez importants pour avoir modifié durablement la distribution des masses à l'intérieur de la Terre. Par exemple, la signature gravimétrique du séisme de Sumatra, en 2004, a ainsi pu être observée dans les données de GRACE (*Han et al.*, 2006; *Panet et al.*, 2007).

Mais la véritable révolution en matière de résolution des modèles globaux devrait venir, dans les prochaines années, du satellite GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer *ESA*, 1999) de l'Agence Spatiale Européenne. GOCE (figure 1.4) est l'héritier direct du projet GRADIO. À l'aide des mesures des dérivées spatiales du vecteur accélération de la pesanteur, réalisées au moyen d'un gradiomètre développé par l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques (ONERA), GOCE devrait fournir des modèles de champ de pesanteur et géoïde avec une précision et une résolution dépassant de loin celles des précédents modèles globaux. (Nominalement, pour le champ de pesanteur : moins d'un milliGal pour toutes les longueurs d'onde cumulées jusqu'à une résolution de 100km). Lorsque la mission GRADIO était à l'étude, les concepteurs du projet achoppaient sur le problème suivant. Les dérivées du champ de pesanteur s'atténuent en raison de l'inverse du cube de la distance à la Terre. Compte tenu des amplitudes minimales des signaux que les instruments pouvaient détecter, aussi bien que l'amplitude du signal gradiométrique à mesurer, le satellite devait être positionné sur une orbite basse ($\approx 250\,\mathrm{km}$) et le gradiomètre avoir une précision de $10^{-11}\,\mathrm{s}^{-2}$. Quelques années auparavant, l'ONERA avait développé l'accéléromètre CACTUS (qui constituait la charge utile du satellite CASTOR, *Barlier*, 1981), dont les performances permettait d'envisager la construction du gradiomètre respectant ces spécifications. Mais en orbite basse, le satellite serait exposé à des forces de frottement atmosphérique qui viendraient inévitablement perturber la mesure (avec des ordres de grandeurs pour les accélérations parasites comparables aux accélérations gravitationnelles, voir *Balmino et al.*, 1984). La technologie pour contrer ces effets apparaissait tout juste. En effet, afin d'améliorer la précision du premier système de navigation par satellite mis au point par les États-Unis, TRANSIT (*Kennedy and Crawford*, 1998), les satellites NOVA (*Eisner and Yionoulis*, 1982) furent équipés, au début des années quatre-vingts, du premier système dit de « compensation de traînée », qui permettait d'atténuer l'effet du frottement atmosphérique. Pour la mission GOCE, un tel système a été développé, basé sur l'utilisation de propulseurs ioniques (*Canuto et al.*, 2003). Ce système permettra de compenser en temps réel, à l'aide de propulseurs, les effets du frottement : non seulement les accélérations parasites seront atténuées, mais encore la chute du satellite sera ralentie, lui permettant de rester en orbite la durée nécessaire à l'obtention d'une couverture globale homogène. Combinées avec des données issues d'inversions d'orbite GPS (pour les grandes longueurs d'onde) les données de gradiométrie permettront alors d'obtenir un champ global à haute résolution (pour des procédures de calcul du champ, voir par exemple *Klees et al.*, 2000).

Ainsi, comme cela a été le cas pour la prospection géophysique, la gradiométrie en gravimétrie est apparue très tôt parmi les techniques possibles pour la mesure du champ de pesanteur depuis l'espace, mais a dû, un temps, céder le pas à des projets moins coûteux. Mais aujourd'hui, les exigences en matière de résolution des champs globaux, comme en prospection, font de la gradiométrie en gravimétrie un enjeu majeur pour la mesure du champ de pesanteur.

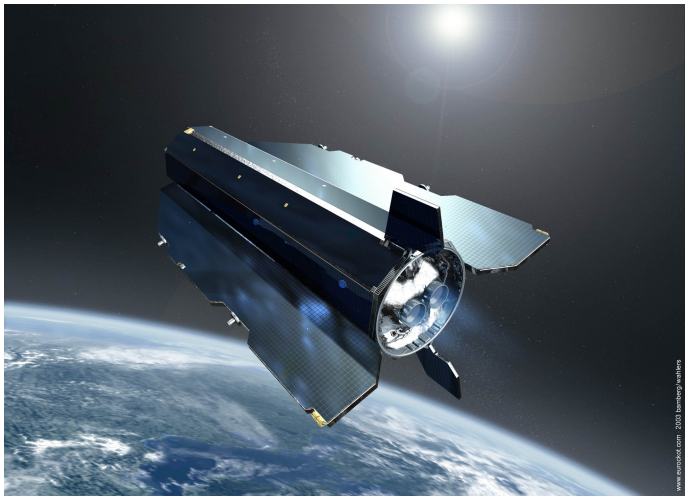


Figure 1.4: *Le satellite GOCE (vue d'artiste).*

1.2 Enjeux

La gradiométrie en gravimétrie constitue donc l'actualité de la mesure du champ de pesanteur, aussi bien dans le domaine spatial que pour les mesures en mer ou aéroportées. La mission GOCE est un véritable défi technologique et, outre le gradiomètre lui-même, les différents instruments embarqués à bord sont, pour certains, les premiers du genre. Cette mission a jusqu'à présent connu de nombreux contretemps, et les données qui seront bientôt acquises n'en seront que plus précieuses. Il conviendra donc d'en tirer le meilleur profit.

Or, si la mesure de quelques dérivées spatiales de l'accélération de la pesanteur est ancienne, la mesure simultanée de toutes les dérivées au même point (« Full Tensor gravity Gradiometry », ou « FTG »), qui est réalisée actuellement par le gradiomètre Bell, et sera réalisée dès l'année prochaine par le satellite GOCE, est récente et appelle au développement de méthodes dédiées pour traiter ces données d'un type nouveau.

Nous avons choisi, dans cette étude, de nous concentrer sur la simultanéité des mesures de l'ensemble des dérivées. Le problème inverse en gravimétrie, consistant à déterminer, à partir du signal gravimétrique mesuré, les sources qui en sont à l'origine, est notoirement (par exemple, *Brillouin*, 1938; *Nettleton*, 1940; *Telford et al.*, 1990; *Blakely*, 1996, ...) sous-déterminé (*Hadamard*, 1938). Il n'est pas possible, à partir de la seule information gravimétrique, de déterminer à la fois la position, la géométrie et la masse des sources (une infinité de distributions peuvent être associées à un même potentiel). Aussi toute information aidant à préciser l'un ou l'autre de ces paramètres est utile. Comme les dérivées de tous ordres de l'accélération de la pesanteur sont des dérivées d'un même potentiel, les mesures de cinq dérivées indépendantes du champ de pesanteur peuvent être utilisées comme cinq mesures redondantes d'une même quantité et nous allons exploiter cette redondance. Après avoir introduit la notion de tenseur gradient de gravité et quelques propriétés utiles, nous démontrerons qu'il est

possible de mettre en équations cette propriété et, de là, développer des méthodes ciblant les gradients eux-mêmes, mais également permettant d'améliorer l'information extraite des données de gravimétrie classique (la mesure de la composante verticale du champ de pesanteur) par l'utilisation des dérivées mesurées et non calculées. En particulier, nous montrerons que l'utilisation des gradients permet, en déterminant une quantité caractéristique de la géométrie des sources, d'améliorer leur localisation, avec, en perspective, l'utilisation des données de gradiométrie en gravimétrie pour améliorer l'inversion en densité des mesures gravimétriques.

Chapitre 2
Données de gradiométrie en gravimétrie

Dans ce chapitre, nous définissons les quantités traditionnellement utilisées en gradiométrie gravimétrique et en gravimétrie. Après avoir rappelé quelques notions relatives à l'attraction gravitationnelle, nous définissons le tenseur gradient de gravité, et considérons quelques-unes de ses propriétés. Nous abordons le calcul direct des composantes du tenseur pour une géométrie connue des sources, puis, après avoir donné les ordres de grandeurs des dérivées que l'on peut mesurer sur Terre, nous présentons des données de gradiométrie en gravimétrie marine faisant l'objet d'un contrat entre l'Institut de physique du globe de Paris et la société Bell Geospace (Houston).

2.1 Tenseur gradient de gravitation

2.1.1 Attraction gravitationnelle

Une conséquence de la loi de l'Attraction Universelle de Newton (1687) peut s'énoncer comme suit : une source ponctuelle de masse m_0 située en un point M_0 crée, en tout point P de l'espace, un champ de vecteurs $\overrightarrow{\gamma_0}(P)$ tel que toute masse ponctuelle m placée au point P subit une force définie par :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma_0(P)} = m\left(-\mathcal{G}\frac{m_0}{\|\overrightarrow{r(P)}\|^2}\,\overrightarrow{u(P)}\right), \tag{2.1}$$

où $\overrightarrow{r(P)}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{M_0P}$, $\overrightarrow{u(P)}$ le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{r(P)}}{\|\overrightarrow{r(P)}\|}$ (voir figure 2.1), et $\mathcal{G}$ est une constante, appelée *constante gravitationnelle* dont la valeur est, en unités du Système

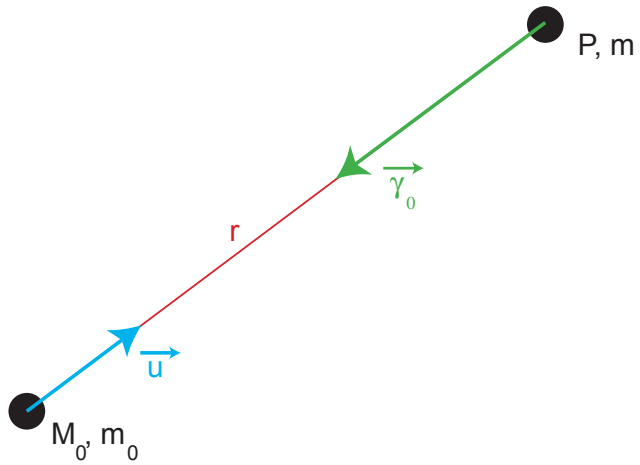


Figure 2.1: *Attraction gravitationnelle entre deux points massiques. Sur ce dessin, n'est représentée que l'attraction exercée par m_0 sur m (en vert). L'opposé de ce vecteur, figurant l'attraction exercée par m sur m_0, n'est pas représenté pour alléger la figure.*

International (*Mohr and Taylor*, 2005) :

$$\mathcal{G} = 6,674 \,.\, 10^{-11}\,\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-2}.$$

Le module du vecteur $\overrightarrow{\gamma_0(P)}$ a la dimension d'une accélération. On appelle $\overrightarrow{\gamma_0(P)}$ l'*accélération gravitationnelle* subie par P. On peut montrer que le rotationnel de ce champ est partout nul, ce qui implique, d'après le théorème d'Helmholtz (*Jackson*, 1998), qu'il est conservatif et dérive d'un potentiel scalaire U, soit :

$$\overrightarrow{\gamma_0} = \overrightarrow{\nabla} U, \tag{2.2}$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ désigne le gradient. On appelle U le *potentiel newtonien* ou *potentiel gravitationnel*. Le potentiel (resp. l'accélération et l'attraction) gravitationnel associé à un système de points massiques se définit comme la somme (définie par une intégrale dans le cas d'une distribution continue des masses) des potentiels (resp. accélérations et attractions) associés à chaque point. En particulier, un corps de masse non nulle placé en un point quelconque de l'Univers est soumis à l'attraction gravitationnelle de tous les astres qui le composent, et au voisinage de la Terre, le potentiel de gravitation est dominé par les termes associés à la Terre, à la Lune, et au Soleil.

2.1.2 Champ et potentiel de pesanteur

La *pesanteur* qui s'exerce sur un point matériel se définit comme l'opposée de la force qui le maintient en équilibre dans un *référentiel terrestre* $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ (référentiel lié à la Terre, en rotation

par rapport à un référentiel galiléen donné, dont le vecteur de rotation instantanée est le vecteur de rotation instantanée de la Terre sur elle-même). Autrement dit, c'est la somme des forces gravitationnelles et de la pseudo-force d'inertie d'entraînement due au mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel galiléen, la force de Coriolis étant nulle pour un point à l'équilibre. On démontre que si l'on néglige les variations de la vitesse de rotation de la Terre, alors le rotationnel de la pseudo-force d'inertie d'entraînement (dite *force centrifuge*) est nul, ce qui comme précédemment, implique qu'elle dérive d'un potentiel scalaire noté U_{ie}. Alors, si l'on désigne par U le potentiel de gravitation, on définit le *potentiel de pesanteur* V comme :

$$V = U + U_{ie}. \tag{2.3}$$

L'*accélération de la pesanteur* $\overrightarrow{g}$ en un point P s'écrit :

$$\overrightarrow{g(P)} = \overrightarrow{\nabla} V(P). \tag{2.4}$$

2.1.3 Dérivées successives du potentiel

L'accélération de la pesanteur est donc un champ de vecteurs dont les composantes sont les dérivées du premier ordre d'un potentiel scalaire dans trois directions indépendantes (orthogonales dans tout ce qui suit) de l'espace. Les dérivées du premier ordre de ces composantes dans les mêmes trois directions, égales aux dérivées secondes du potentiel, sont appelées *gradients de pesanteur*. On peut les définir grâce à l'opérateur gradient vectoriel $\overrightarrow{\nabla}$ et l'opérateur bigradient $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}$ (cf. *Dahlen and Tromp* 1998) : ce sont les composantes d'un tenseur du deuxième ordre [1] noté $\mathbf{T}$ défini par :

$$\mathbf{T} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla} V. \tag{2.5}$$

Par exemple, dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z), $\mathbf{T} = [T_{ij}]_{(i,j)\subset\{x,y,z\}}$ s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Quel que soit le système de coordonnées orthogonales dans lequel on l'exprime, l'opérateur bigradient $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}$ est symétrique. Par conséquent, dans tout système de coordonnées orthogonales (x_1, x_2, x_3), $\mathbf{T} = [T_{ij}]_{(i,j)\subset\{1,2,3\}}$ est symétrique, c'est à dire :

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \forall (i,j) \subset \{1,2,3\}. \tag{2.7}$$

[1] L'objet $\mathbf{T}$, en tant que tenseur d'ordre 2, peut être vu comme la matrice d'une application linéaire qui à un vecteur de $\mathbb{R}^3$ fait correspondre un vecteur du même espace, ou comme une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ qui à un couple de vecteurs fait correspondre un scalaire.

Dans le Système d'unités International, les accélérations s'expriment en $\mathrm{m.s^{-2}}$ et leurs dérivées spatiales du premier ordre en $\mathrm{s^{-2}}$. Néanmoins, compte tenu des ordres de grandeurs des variations d'accélérations et des variations de leurs dérivées du premier ordre mesurées à la surface de la Terre, on préfère aux unités du Système International les sous-multiples :

- pour l'accélération de la pesanteur, le milliGal, noté mGal, avec $1\,\mathrm{mGal} = 10^{-5}\,\mathrm{m.s^{-2}}$,
- pour ses dérivées l'Eötvös, noté E, avec $1\,\mathrm{E} = 10^{-9}\,\mathrm{s^{-2}}$.

2.1.3.1 Conséquence de l'équation de Laplace

Le potentiel de gravitation U vérifie, en dehors des sources, l'équation de Laplace (voir par exemple *Blakely* 1996) :

$$\Delta U = 0. \tag{2.8}$$

Le laplacien du potentiel de pesanteur est donc égal, en dehors des sources, au laplacien du potentiel de rotation axifuge U_{ie}. À partir de l'expression de U_{ie} :

$$U_{ie} = \frac{1}{2}\Omega^2 \|\widetilde{\overrightarrow{r}}\|^2, \tag{2.9}$$

où $\widetilde{\overrightarrow{r}}$ désigne la projection du vecteur position dans le plan équatorial, orthogonal à l'axe de rotation de la Terre (voir la figure 2.2), et Ω la vitesse de rotation de la Terre sur son axe, supposée constante ici, on obtient :

$$\Delta V = \Delta U_{ie} = 2\Omega^2. \tag{2.10}$$

On en déduit la *trace* (somme des composantes sur la diagonale) du tenseur gradient de pesanteur en dehors des sources :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = \Delta V = 2\Omega^2 \approx 10\,\mathrm{E}. \tag{2.11}$$

Dans cette étude, la mesure de la composante verticale du champ de pesanteur et de ses dérivées a pour but la détermination des hétérogénéités de densité qui peuvent expliquer les variations de la pesanteur et de ses dérivées par rapport à un modèle. On ne s'intéresse donc qu'à la partie gravitationnelle du champ de pesanteur, et non à la partie centrifuge. On se concentre donc sur la partie gravitationnelle du tenseur gradient de pesanteur, appelée, par abus de langage, *tenseur gradient de gravité*, et toujours notée $\mathbf{T}$. Avec cette définition, la trace de $\mathbf{T}$ dans tout système de coordonnées orthogonales (x_1, x_2, x_3) devient :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = \Delta U = 0. \tag{2.12}$$

Des équations (2.7) et (2.12), on déduit que le tenseur gradient de gravité possède au plus cinq composantes indépendantes. Il suffira donc de mesurer cinq quantités indépendantes pour connaître le tenseur complet.

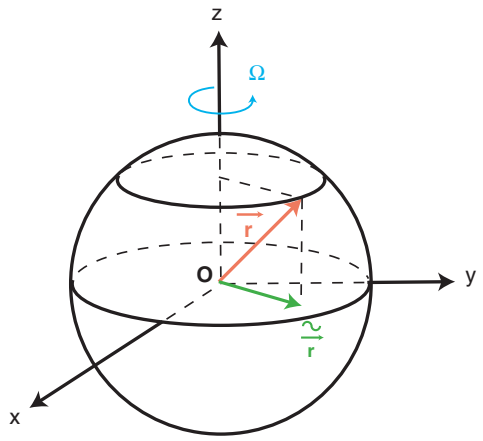


Figure 2.2: *Projection du vecteur position dans le plan équatorial.*

2.1.4 Interprétation physique des composantes

Une explication simple de ce que représentent physiquement les composantes du tenseur est donnée par *Rummel* (1986). Nous la lui empruntons ici. En première approximation, la Terre peut être considérée comme une boule de densité homogène, dont les caractéristiques ne varient pas dans le temps. Sous ces hypothèses, le champ gravitationnel engendré dans tout l'espace est alors un champ de force central. En particulier, son amplitude ne dépend que de la distance au centre O de la Terre, et son action en un point P extérieur à la Terre est dirigée selon une droite contenant O et P (« ligne de champ »). D'après, l'équation (2.1), cette action s'exerce de P vers O. L'expérience proposée par *Rummel* consiste à considérer dans ce champ un couple de masses en chute libre, initialement au repos. Les masses sont supposées suffisamment petites devant celle de la Terre pour que les attractions gravitationnelles qu'elles exercent l'une sur l'autre ou sur la Terre soient considérées comme négligeables devant l'intensité du champ de gravitation terrestre. Deux géométries du système sont alors considérées :

(1) les masses sont initialement sur deux lignes de champ distinctes, sur la même surface équipotentielle (sphérique, en conséquence des hypothèses sur la planète) du champ de pesanteur (figure 2.3(a)) ;

(2) les masses sont initialement sur la même ligne de champ (figure 2.3(b)).

Dans le premier cas, au cours de la chute, les masses se rapprochent l'une de l'autre, leurs trajectoires suivant les lignes de force. Dans le second, la distance entre les deux augmente, à cause de la différence de distance des deux masses au corps attractif (la Terre). Supposons que les deux masses soient reliées par une tige rigide munie de ressorts identiques aux extrémités (figure 2.4(a)). Dans le premier cas les ressorts subiront une compression, dans le second une dilatation. Notons S le centre de masse du système {tige+ressorts+masses}. Notons $\overrightarrow{r(S)}$ le vecteur $\overrightarrow{OS}$ dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, dont l'orientation des axes est donnée par la figure 2.3. Si l'on suppose que le système est soumis à la seule action du champ de gravité terrestre, alors, d'après l'équation (2.4) :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r(S)}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{\nabla} V(S). \tag{2.13}$$

De même, si P et Q désignent les lieux des deux masses d'épreuve :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r(P)}}{\mathrm{d}t^2} & = & \overrightarrow{\nabla} V(P) \\ \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r(Q)}}{\mathrm{d}t^2} & = & \overrightarrow{\nabla} V(Q) \end{array} \right. . \tag{2.14}$$

Nous supposons la distance entre les deux masses d'épreuve très petite par rapport à leur distance à la Terre. Alors les distances SP et SQ peuvent être considérées comme des variations infinitésimales notées respectivement $\mathrm{d}\overrightarrow{r}(P,S)$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{r}(P,Q)$. Notant (r_x, r_y, r_z) (resp. $(\mathrm{d}r_x, \mathrm{d}r_y, \mathrm{d}r_z)$) les composantes du vecteur $\overrightarrow{r}$ (resp. $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$) et (g_x, g_y, g_z) les composantes de $\overrightarrow{\nabla} V$, nous pouvons écrire les développements de Taylor en S tronqués au premier ordre :

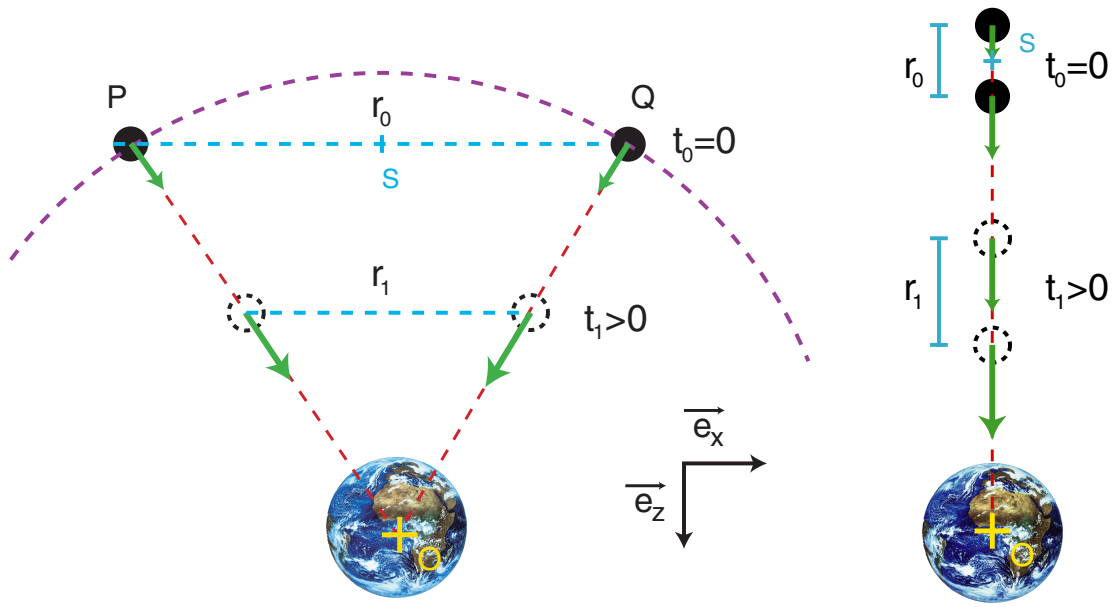
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}^2 r_i(P)}{\mathrm{d}t^2} & = & g_i(S) + \sum_{j\in(x,y,z)} T_{ij}\mathrm{d}r_j(P,S) \\ \\ \frac{\mathrm{d}^2 r_i(Q)}{\mathrm{d}t^2} & = & g_i(S) + \sum_{j\in(x,y,z)} T_{ij}\mathrm{d}r_j(Q,S) \end{array} \right. \qquad \forall i \in \{x,y,z\}. \tag{2.15}$$

Le vecteur différence $\overrightarrow{\nabla} V(P) - \overrightarrow{\nabla} V(Q)$ noté $D\overrightarrow{\nabla} V$ a alors pour composantes :

$$\left(D\overrightarrow{\nabla} V\right)_i = \sum_{j\in(x,y,z)} T_{ij}\left(\mathrm{d}r_j(P,S) - \mathrm{d}r_j(Q,S)\right) \tag{2.16}$$

$$= \sum_{j\in(x,y,z)} T_{ij}\mathrm{d}r_j(P,Q). \tag{2.17}$$

Le vecteur $D\overrightarrow{\nabla} V$ est la différence des accélérations aux extrémités du ressort ; autrement dit, c'est la différence des quantités mesurées par deux accéléromètres. Ainsi trois composantes T_{ij} peuvent se déduire des accélérations mesurées par deux accéléromètres si l'on connaît la distance entre les masses d'épreuve. Six accéléromètres placés dans la configuration décrite par la figure 2.4(b) permettent de connaître tout le tenseur. Cette configuration est celle des accéléromètres composant le gradiomètre embarqué sur GOCE. Les composantes du tenseur



(a) Lignes de champ distinctes

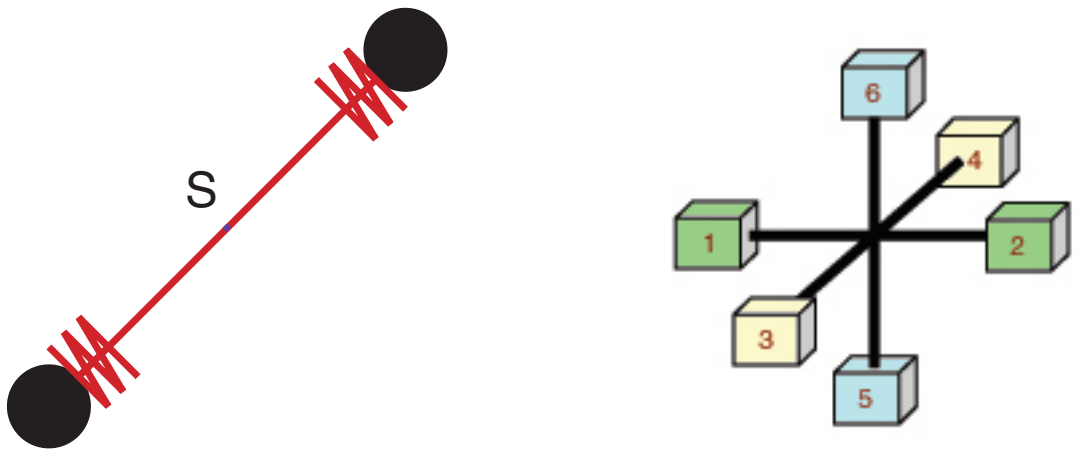
(b) Lignes de champ identiques

Figure 2.3: *Modèle simple pour expliquer la mesure des variations spatiales du champ de pesanteur.*

représentent alors la limite des taux de variation des composantes du vecteur accélération gravitationnelle lorsque la distance entre les masses tend vers 0, ce qui correspond bien à la notion de dérivée spatiale. Nous verrons au chapitre suivant comment les composantes sont déduites individuellement des mesures des différents accéléromètres. Cette présentation simplifiée du fonctionnement d'un type de gradiomètre donné nous permet de souligner un point important. Les mesures effectuées sont reliées aux composantes du tenseur dans le repère du gradiomètre (un repère centré en S lié à la tige). Pour connaître les composantes du tenseur dans un repère terrestre, il faut pouvoir changer de repère. Outre le fait que cela nécessite de connaître parfaitement la position et l'attitude du véhicule qui transporte le gradiomètre, en supposant ce dernier fixe par rapport au véhicule, il faut connaître le comportement des composantes du tenseur par changement de repère orthogonal, ce que nous expliquons dans ce qui suit.

2.1.5 Changement de repère orthonormal

Jusqu'ici, nous avons fait peu de cas du caractère tensoriel de $\mathbf{T}$. Pourtant, le fait que $\mathbf{T}$ soit un tenseur est essentiel. En effet les tenseurs ont été introduits en physique car leurs propriétés mathématiques impliquent que, lorsque des équations les mettant en jeu traduisent une loi physique, ces équations, comme les lois qu'elles traduisent, sont indépendantes du système de



(a) (b)

Figure 2.4: *Schéma simplifié d'un gradiomètre. À gauche, une tige rigide munie de deux masses d'épreuve reliées à ses extrémités par des ressorts (accéléromètres) figure un bras du gradiomètre. À droite, trois dispositifs similaires à celui décrit sur la figure de gauche, montés orthogonalement, sont représentés. La configuration obtenue est un schéma simplifié du gradiomètre embarqué sur GOCE.*

coordonnées orthogonales dans lequel on les exprime (voir par exemple *Weinberg*, 1972; *Jackson*, 1998, pour des exemples relevant de la théorie de la relativité générale ou de l'électromagnétisme). Pour assurer cette invariance, les tenseurs eux-mêmes doivent se transformer d'une certaine façon lorsque l'on change de repère orthogonal. Notons $\mathcal{R}^1 = (O^{(1)}, x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ un système de coordonnées orthogonales, et $\mathcal{R}^2 = (O^{(2)}, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$ son transformé. Alors un vecteur $\overrightarrow{v}$, ou tenseur d'ordre 1, doit se transformer selon ce changement de repère de telle sorte que les coordonnées (v_x^1, v_y^1, v_z^1) de $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{R}^1$ soient liées à ses coordonnées (v_x^2, v_y^2, v_z^2) dans $\mathcal{R}^2$ par la relation :

$$v_i^2 = \sum_{\alpha \in \{x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial i} v_\alpha^1 \right) \quad \forall i \in \{x^{(2)},\ y^{(2)},\ z^{(2)}\}. \tag{2.18}$$

De même, un tenseur $\mathbf{A}$ d'ordre 2 se transforme, utilisant des notations similaires aux précédentes, selon :

$$A_{ij}^2 = \sum_\alpha \sum_\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial i} \frac{\partial \beta}{\partial j} A_{\alpha\beta}^1 \right) \quad \forall i, j \in \{x^{(2)},\ y^{(2)},\ z^{(2)}\}. \tag{2.19}$$

On trouvera les détails, par exemple, dans *Spiegel* (1973). Considérons, à titre d'exemple, que $\mathcal{R}^1$ se transforme en $\mathcal{R}^2$ par une rotation d'angle ϕ dans le plan $(x^{(1)},\ y^{(1)})$ antihoraire autour

de l'axe $z^{(1)}$). Alors la transformation de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(2)} &= x^{(1)}\cos(\phi) & +y^{(1)}\sin(\phi) \\ y^{(2)} &= -x^{(1)}\sin(\phi) & +y^{(1)}\cos(\phi) \\ z^{(2)} &= z^{(1)} \end{cases}, \tag{2.20}$$

et de la relation (2.19) nous déduisons la transformation de cinq composantes indépendantes de $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} A^{(2)}_{xx} &= \cos^2\phi\, A^{(1)}_{xx} & + & \sin 2\phi\, A^{(1)}_{xy} & + & \sin^2\phi\, A^{(1)}_{yy}, \\ A^{(2)}_{xy} &= -\frac{1}{2}\sin 2\phi\, A^{(1)}_{xx} & + & \cos 2\phi\, A^{(1)}_{xy} & + & \frac{1}{2}\sin 2\phi\, A^{(1)}_{yy}, \\ A^{(2)}_{yy} &= \sin^2\phi\, A^{(1)}_{xx} & - & \sin 2\phi\, A^{(1)}_{xy} & + & \cos^2\phi\, A^{(1)}_{yy}, \\ A^{(2)}_{xz} &= & \cos\phi\, A^{(1)}_{xz} & + & \sin\phi\, A^{(1)}_{yz}, & \\ A^{(2)}_{yz} &= & -\sin\phi\, A^{(1)}_{xz} & + & \cos\phi\, A^{(1)}_{yz}. & \end{cases} \tag{2.21}$$

Ainsi, les rotations doivent être considérées avec beaucoup d'attention lorsque l'on exprime les composantes du tenseur $\mathbf{T}$ dans un autre repère que le repère de mesure.

2.1.6 Quantités invariantes par rotation

Si les angles de rotation du repère du véhicule par rapport au repère terrestre ne sont pas parfaitement connus (autrement dit : en pratique), l'étape consistant à exprimer les données dans un repère terrestre est donc susceptible d'introduire des erreurs, en plus du bruit de mesure. Il est donc naturel de se demander s'il n'est pas possible, à partir des composantes du tenseur, de construire des quantités qui le caractérisent et soient invariantes par rotation. Nous proposons quelques exemples de telles quantités.

2.1.6.1 Invariants du tenseur

Comme pour tout tenseur d'ordre 2 (voir, pour le cas général, *Spiegel*, 1973, et, pour l'application au tenseur gradient de gravité, *Pedersen and Rasmussen*, 1990) il existe pour $\mathbf{T}$ trois quantités construites à partir de ses composantes qui sont invariantes par changement de coordonnées orthogonales (en particulier par rotation). Ces quantités, appelées *invariants du tenseur* et notées I_0, I_1, et I_2 sont définies par :

$$\begin{cases} I_0 &= \mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, \\ I_1 &= T_{xx}T_{yy} + T_{yy}T_{zz} + T_{zz}T_{xx} - T^2_{xy} - T^2_{yz} - T^2_{zx}, \\ I_2 &= \det(\mathbf{T}) = T_{xx}(T_{yy}T_{zz} - T^2_{yz}) + T_{xy}(T_{yz}T_{xz} - T_{xy}T_{zz}) + T_{xz}(T_{xy}T_{yz} - T_{xz}T_{yy}). \end{cases} \tag{2.22}$$

Nous avons ainsi établi que la trace I_0 de $\mathbf{T}$ est, d'après l'équation de Laplace, tout le temps nulle en dehors des sources. En particulier, elle reste nulle par changement de repère orthogonal. De même, I_1 et le déterminant I_2 de $\mathbf{T}$ ne changent pas de valeur par transformation

orthogonale. Les invariants I_0, I_1, et I_2 sont en fait les coefficients du polynôme caractéristique de $\mathbf{T}$. Ainsi les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de $\mathbf{T}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X) = X^3 - I_0 X^2 + I_1 X - I_2. \tag{2.23}$$

Le tenseur $\mathbf{T}$ étant réel et symétrique, sa matrice est diagonalisable. En particulier, il existe une transformation orthogonale qui transforme $\mathbf{T}$ en :

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Les quantités I_0, I_1, et I_2 étant invariantes par changement de base orthogonale, leurs valeurs ne changent pas lorsque nous passons de $\mathbf{T}$ à $\mathbf{T}'$. Nous en déduisons les valeurs des invariants en fonction des valeurs propres du tenseur :

$$\begin{cases} I_0 &= \mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ I_2 &= \det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases} . \tag{2.25}$$

Les expressions (2.25) des invariants du tenseur à partir de ses valeurs propres sont simples. Cependant, tout comme les expressions de I_1 et I_2 à partir des composantes dans les équations (2.22), elles ne sont pas linéaires dans leurs variables (seulement multilinéaires). Ceci est un facteur limitant dans l'élaboration de méthodes d'interprétation utilisant les invariants du tenseur. Nous y reviendrons dans le dernier chapitre.

2.1.6.2 Autres invariants par rotation

Il existe d'autres quantités invariantes par rotation que l'on peut construire à partir des composantes du tenseur. Ces quantités ne sont cependant pas invariantes par tout changement de coordonnées orthogonales. Néanmoins, compte tenu des problèmes évoqués plus haut, la seule invariance par rotation les rend dignes d'intérêt. Aussi les présentons-nous ici.

Gradient horizontal Considérons la composante verticale $g_z(x, y, z)$ du champ de pesanteur. Nous appelons *gradient horizontal du champ de pesanteur* le vecteur $\overrightarrow{H}$ (lorsqu'il est défini), contenu dans le plan (x, y), de module H et de direction l'angle φ par rapport à l'axe des x, avec :

$$\begin{cases} H = \sqrt{\left(\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)^2}, \\ \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\partial g_z}{\partial y}}{\frac{\partial g_z}{\partial x}}\right). \end{cases} \tag{2.26}$$

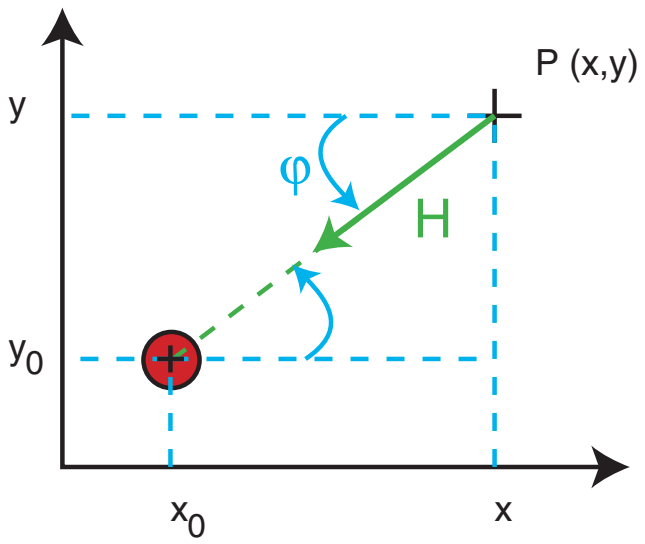


Figure 2.5: *Orientation du vecteur gradient horizontal pour une source ponctuelle.*

Ainsi défini, le vecteur $\overrightarrow{H}$ est un vecteur dont la direction et le sens permettent de localiser les sources. Par exemple, supposons un point source de masse M de coordonnées $(x-x_0, y-y_0, h > 0)$, le repère étant choisi avec l'axe des z pointant vers le bas. Alors la composante verticale g_z de l'attraction gravitationnelle engendrée par le point source en un point $(x, y, 0)$ est :

$$g_z = \mathcal{G}M \frac{h}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{2.27}$$

Les dérivées par rapport à x et y de g_z sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x} g_z & = & \mathcal{G}M \frac{-3(x-x_0)h}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial}{\partial y} g_z & = & \mathcal{G}M \frac{-3(y-y_0)h}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right. . \tag{2.28}$$

L'angle φ vaut donc :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) . \tag{2.29}$$

Le vecteur gradient horizontal $\overrightarrow{H}$ pointe donc bien vers la projection, dans le plan (x, y), de la source (voir figure 2.5). D'après sa définition, le gradient horizontal peut s'écrire en fonction des composantes T_{xz} et T_{yz} du tenseur :

$$\left\{ \begin{array}{r} H = \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{T_{yz}}{T_{xz}}\right) . \end{array} \right. \tag{2.30}$$

Reprenons l'exemple de la rotation d'angle ϕ définie par les équations (2.20). Alors d'après (2.21), T_{xz} et T_{yz} se transforment respectivement en $T_{xz}^{(2)}$ et $T_{yz}^{(2)}$ selon :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} T_{xz}^{(2)} & = & \cos\phi\, T_{xz} & + & \sin\phi\, T_{yz} \\ T_{yz}^{(2)} & = & -\sin\phi\, T_{xz} & + & \cos\phi\, T_{yz} \end{array} \right. . \tag{2.31}$$

Alors, en développant les expressions des carrés de $T_{xz}^{(2)}$ et $T_{yz}^{(2)}$, nous déduisons facilement, de la définition du module H de $\overrightarrow{H}$, que H devient $H^{(2)}$ selon :

$$H = H^{(2)}. \tag{2.32}$$

Ainsi, le scalaire H est bien invariant par rotation du repère dans le plan horizontal.

Courbure différentielle Si la Terre était sphérique et homogène, alors les surfaces équipotentielles du champ de pesanteur seraient des sphères, c'est à dire des surfaces à deux dimensions, de courbure constante égale à l'inverse de leur rayon. Ainsi, les variations de la courbure des surfaces équipotentielles du champ de pesanteur reflètent l'écart à une forme à symétrie sphérique, mais aussi les hétérogénéités de masse. Nous allons voir que la courbure des équipotentielles du champ de pesanteur est une quantité accessible par la gradiométrie en gravimétrie.

L'intersection d'une surface non plane avec un plan, dans un espace en trois dimensions, est une courbe, cette courbe possédant en tout point une courbure. Pour un point P donné sur la surface, on appelle *plans de courbures principales* (figure 2.6) les deux plans orthogonaux dont l'intersection avec la surface a, pour l'un, le plus petit rayon de courbure $\gamma_{\min}$ possible et, pour l'autre, le plus grand rayon de courbure $\gamma_{\max}$ possible. Les courbures principales $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont alors définies par :

$$r_{\max} = \frac{1}{\gamma_{\min}} \qquad \text{et} \qquad r_{\min} = \frac{1}{\gamma_{\max}}. \tag{2.33}$$

On peut montrer (*Nettleton*, 1940) qu'en tout point, si g désigne l'intensité de l'accélération de la pesanteur, alors la *courbure différentielle* de la surface, définie par :

$$R = g(r_{\max} - r_{\min}), \tag{2.34}$$

est reliée aux composantes du tenseur gradient de gravité selon :

$$R = \sqrt{(T_{xx} - T_{yy})^2 + 4T_{xy}^2}. \tag{2.35}$$

La courbure différentielle ainsi définie est invariante par rotation du repère dans le plan horizontal (*Nettleton*, 1940; *Talwani*, 2001). Un exposé plus détaillé de la relation des composantes

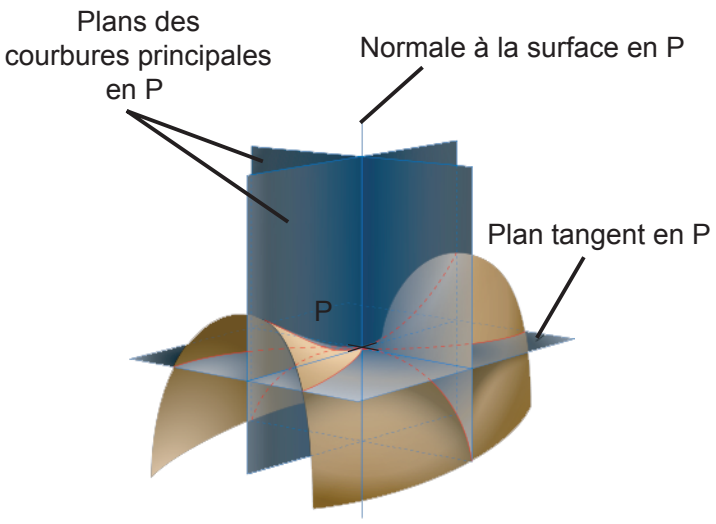


Figure 2.6: *Courbures principales en un point P.*

du tenseur à des quantités matérialisant des courbures est donné par *Rummel* (1986). Remarquons que pour une sphère, les courbures maximale et minimale sont égales, et la courbure différentielle nulle.

Le gradient horizontal s'exprime donc en fonction de T_{xz} et T_{yz}, et la courbure différentielle en fonction de T_{xx} - T_{yy} et T_{xy}. Les quatre quantités T_{xz}, T_{yz}, T_{xx} - T_{yy} et T_{xy} sont les quatre quantités accessibles par les mesures effectuées avec une balance de torsion (*Shaw and Lancaster-Jones*, 1922). Tel qu'il est défini, le gradient horizontal permet de tracer les isocontours de g_z. En effet, les relations (2.30) impliquent que le vecteur gradient horizontal est partout perpendiculaire à un isocontour de g_z (ces isolignes n'ayant pas d'intersection entre elles, voir par exemple *Blakely*, 1996), et son amplitude peut être reliée à l'écart entre deux isocontours de g_z. Dès l'apparition des instruments mis au point par Eötvös (*Szabó*, 1998), au début du XXème siècle, des cartes de gradient horizontal ont été réalisées avec des balances de torsion (voir figure 2.7) et ces cartes peuvent être interprétées de la même façon que les cartes similaires que l'on peut réaliser à l'aide d'un gravimètre. En revanche les mesures de la courbure différentielle ne peuvent pas être aussi facilement interprétées (*Heiland*, 1943; *Helbig*, 2001).

Ainsi, si les valeurs des composantes du tenseur gradient dépendent du repère dans lequel on les exprime, il est possible de construire des quantités, combinant plusieurs de ces composantes, qui ne dépendent pas du repère, ou, à défaut, sont invariantes par rotation. La possibilité de construire de telles quantités à partir des composantes du tenseur est importante car, qu'il s'agisse de gradiométrie en gravimétrie spatiale, aéroportée ou marine, les appareils de mesures sont embarqués dans des mobiles dont l'attitude ne peut être parfaitement contrainte. Les quantités invariantes doivent permettre d'élaborer des méthodes d'interprétation des don-

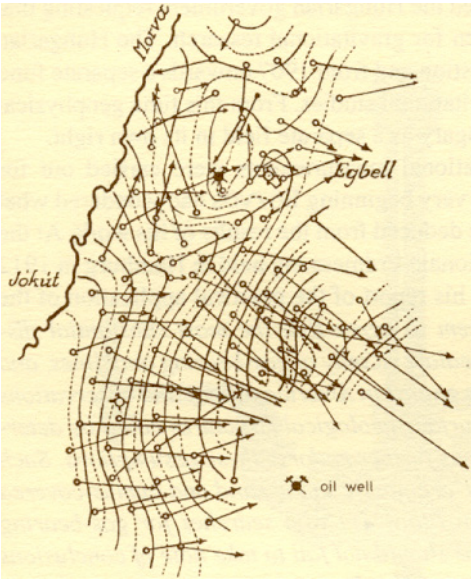


Figure 2.7: *Première carte de gradients de gravité pour la prospection pétrolière, réalisée à l'aide de la balance de torsion d'Eötvös en 1916 : région d'Egbell (Slovaquie).*

nées qui s'affranchissent des erreurs dues à l'orientation des dispositifs de mesure. Néanmoins, les combinaisons invariantes, en dehors de la trace partout nulle, ne sont pas linéaires dans les composantes, ce qui est susceptible de rendre difficile leur utilisation dans certaines applications. Remarquons qu'il est heureux que les quantités accessibles par les mesures effectuées à l'aide de balances de torsion aient été insensibles aux problèmes d'orientation dans le plan horizontal de l'instrument, compte tenu des difficultés inhérentes à la mise en œuvre de ces instruments sur le terrain (avec les premiers instruments, la plupart des mesures étaient réalisées de nuit, pour minimiser l'effet des fluctuations de température auxquelles l'instrument était très sensible - *Nettleton*, 1940; *Szabó*, 1998). Cela contribua probablement aux succès rapides qui furent remportés par la balance de torsion en prospection, dès qu'Eötvös eut réalisé les premiers instruments transportables (*Shaw and Lancaster-Jones*, 1922).

2.1.7 Calcul des gradients

Nous avons vu que les composantes du tenseur gradient de gravité sont par définition les dérivées premières de la pesanteur, ou, de manière équivalente, les dérivées secondes du potentiel de pesanteur dans trois directions indépendantes (orthogonales) de l'espace. Par conséquent, la possibilité de calculer les gradients de gravité associés à la présence d'un corps anomalique de forme arbitraire est liée à la possibilité de calculer le potentiel de pesanteur associé à ce même corps. En principe, si nous pouvons établir une formule analytique du potentiel de pesanteur (ou de l'anomalie de pesanteur) associé à une distribution de masse donnée, alors nous pouvons calculer ses dérivées de tous ordres. En pratique, de telles formules

existent pour un petit nombre de distributions de masses typiques seulement. Les formules pour calculer l'anomalie gravimétrique associée à certaines distributions de masses simples (point source, faille, dyke, plan semi-infini ...) foisonnent dans la littérature (voir par exemple *Nettleton*, 1940; *Telford et al.*, 1990; *Blakely*, 1996). Pour calculer le potentiel de pesanteur associé à un corps de forme arbitraire, il faut donc, soit trouver une forme géométrique simple qui l'approche au mieux (*Hammer*, 1974), soit le décomposer en petits corps arbitraires pour lesquels le potentiel est connu analytiquement, et sommer leurs contributions. Nous nous limiterons ici au calcul des gradients de pesanteur associé à deux structures élémentaires : la source ponctuelle et le prisme.

2.1.7.1 Sources ponctuelles

Les sources ponctuelles sont à la base de nombreuses méthodes d'interprétation, dites « de sources équivalentes ». Nous avons mentionné (p.14) le fait qu'un même potentiel pouvait être expliqué par plusieurs distributions de sources distinctes (en fait, une infinité de distributions de sources expliquent un potentiel donné ; voir *Blakely*, 1996). Parmi toutes ces distributions, il est néanmoins possible de déterminer un système de sources ponctuelles, situées sur un plan à une profondeur arbitrairement choisie, qui soit associé au potentiel ou à l'anomalie gravimétrique mesurés (la sous-détermination des problèmes inverses en gravimétrie et la possibilité de déterminer une distribution de sources si la profondeur est donnée sont très bien discutées dans *Skeels*, 1947, entre autres). Déterminer ces distributions de sources permet, même si le système obtenu ne peut pas être interprété en termes de distribution de masse réaliste, de nombreuses applications. Par exemple, le potentiel étant alors analytiquement connu en tout point, il est possible de le projeter sur une grille plane régulière, alors que les données utilisées pour le déterminer sont distribuées irrégulièrement en trois dimensions (voir par exemple *Dampney*, 1969). *Li* (2001) utilise la technique des sources équivalentes pour réduire le bruit dans les données de gradiométrie en gravimétrie. Un système de sources équivalentes est déterminé de telle sorte qu'il explique au mieux tous les gradients mesurés. Partant de l'hypothèse que le bruit ne dérive pas d'un potentiel, le bruit est alors absent des gradients reconstruits (c'est à dire les dérivées secondes du potentiel de pesanteur associé au système de sources équivalentes). Ainsi, il est intéressant de connaître les gradients de gravité associés à un point source. Nous rappelons leur expression ici. Désignant par M la masse du point source, le potentiel associé s'écrit (*Blakely*, 1996, par exemple) :

$$V = \frac{\mathcal{G}M}{r}, \tag{2.36}$$

où r désigne la distance du point source au point auquel est calculé le potentiel. Supposons pour simplifier le point source situé à l'origine du repère. Alors, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, les

dérivées premières de V (composantes du vecteur accélération gravitationnelle) s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lllll} g_x & = & \frac{\partial V}{\partial x} & = & -\mathcal{G}M\frac{x}{r^3} \\ g_y & = & \frac{\partial V}{\partial y} & = & -\mathcal{G}M\frac{y}{r^3} \\ g_z & = & \frac{\partial V}{\partial z} & = & -\mathcal{G}M\frac{z}{r^3} \end{array}\right. , \tag{2.37}$$

et ses dérivées secondes :

$$\left\{\begin{array}{lllll} T_{xx} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & = & \mathcal{G}M\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right) \\ T_{yy} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & = & \mathcal{G}M\left(\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right) \\ T_{zz} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & = & \mathcal{G}M\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lllll} T_{xy} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} & = & \mathcal{G}M\frac{3xy}{r^5} \\ T_{xz} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} & = & \mathcal{G}M\frac{3xz}{r^5} \\ T_{yz} & = & \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} & = & \mathcal{G}M\frac{3yz}{r^5} \end{array}\right. . \tag{2.38}$$

Nous utiliserons les expressions 2.38 dans le chapitre suivant pour caractériser physiquement les longueurs d'ondes spatiales du signal de gradiométrie.

2.1.7.2 Prismes droits

Certaines méthodes d'interprétation gravimétrique utilisent la possibilité d'approcher la géométrie d'un corps de forme arbitraire par un assemblage de prismes droits (*Camacho et al.*, 2000, entre autres). Les plus petits détails des contours du corps peuvent être approchés aussi près que l'on veut par un assemblage de prismes droits d'arêtes de plus en plus petites. Plusieurs méthodes d'inversion en trois dimensions de données gravimétriques (des exemples seront donnés au dernier chapitre) supposent un maillage tridimensionnel orthogonal de la zone dans laquelle les sources sont supposées se trouver, et l'on cherche à déterminer la densité dans chacune des cellules du maillage, les cellules étant supposées avoir chacune une densité constante. Comment le soulignent *Holstein and Ketteridge* (1996), il existe de nombreuses publications consacrées au potentiel associé à un prisme droit de densité homogène (parmi celles-ci, *Nagy*, 1966; *Barnett*, 1976; *Okabe*, 1979; *Singh and Guptasarma*, 2001, ...). Les formules établies par chacun des auteurs, si elles sont analytiquement exactes, sont plus ou moins pratiques à implémenter, et associées à une erreur numérique variable. Les travaux comparant les mérites des différentes méthodes (*Holstein and Ketteridge*, 1996; *Holstein et al.*, 1999) se limitent à l'erreur commise pour le calcul des dérivées premières du potentiel, ou au mieux du gradient vertical de pesanteur (*Li and Chouteau*, 1998). Pour ce qui concerne cette étude, nous avons choisi *Okabe* (1979) pour le calcul des gradients synthétiques, encouragés par les performances établies pour les dérivées premières (*Holstein et al.*, 1999) et les résultats obtenus par *Bodet* (2000). Les formules sont détaillées dans l'article d'Okabe, et la figure 2.8 donne un aperçu de l'allure des composantes du tenseur pour une anomalie définie par un prisme droit, calculées à l'aide des formules d'Okabe.

Notons que nous n'avons parlé que du calcul des gradients en coordonnées cartésiennes, car les méthodes que nous présentons ensuite sont développées pour des études locales. Pour

le calcul des dérivées dans le domaine de Fourier, on pourra par exemple se reporter à *Blakely* (1996) et pour l'expression des gradients sur une base d'harmoniques sphériques à *Rummel* (1993), *ESA* (1999), ou *Ditmar et al.* (2003).

2.1.8 Ordres de grandeur

La valeur du gradient vertical moyen du champ de pesanteur à l'air libre (voir par exemple *Telford et al.*, 1990) peut s'exprimer sous la forme :

$$\Gamma = 0.3086\,\mathrm{mGal/m}. \tag{2.39}$$

Nous avons vu que l'unité usuelle de la gradiométrie en gravimétrie était l'Eötvös (E), avec :

$$1\,E = 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2} = 10^{-4}\,\mathrm{mGal/m}. \tag{2.40}$$

La valeur de Γ à la surface est donc de l'ordre de 3000 E. Sur les cartes des données Bell présentées en fin de chapitre, l'ordre de grandeur des gradients mesurés est une vingtaine d'Eötvös. Ces valeurs correspondent donc à des anomalies et non à la valeur du gradient lui-même. Comme c'est le cas pour les mesures gravimétriques, on devra en particulier retirer aux données de gradiométrie l'effet d'un modèle moyen, en particulier un modèle de terrain ou de bathymétrie (voir par exemple *Jekeli and Zhu*, 2001) pour isoler le signal anomalique.

Nous donnons (*L. Métivier, communication personnelle*) sur les figures 2.9 et 2.10 un aperçu du signal de gradiométrie global au niveau du géoïde et à 250 km d'altitude (altitude de vol de GOCE), calculé par dérivations successives, sur une base d'harmoniques sphériques, pour le modèle EIGEN-GL04C (données GRACE et LAGEOS, de gravimétrie au sol et d'altimétrie spatiale, complet jusqu'au degré 360, traitement CNES). L'amplitude du signal anomalique global de gradiométrie est de l'ordre de la dizaine d'Eötvös au niveau du géoïde et de l'Eötvös à l'altitude du satellite. Notons que les effets associés aux coefficients de degré 0 (gravité moyenne), de degré 1 (déplacements du centre de masse, nuls dans le repère du centre de masse) et de degré 2 et d'ordre 0 (ellipticité) du développement en harmoniques sphériques du potentiel sont nuls ou ne sont pas représentés. Avec l'atténuation du signal en raison de l'inverse du cube de la distance à la source, l'amplitude des anomalies du gradient de gravité est divisée par un facteur 30 lorsque l'on passe du sol à 250 km d'altitude. La figure 2.11 est un agrandissement de la composante T_{rr} de la figure 2.9 (gradient « vertical » à l'altitude zéro).

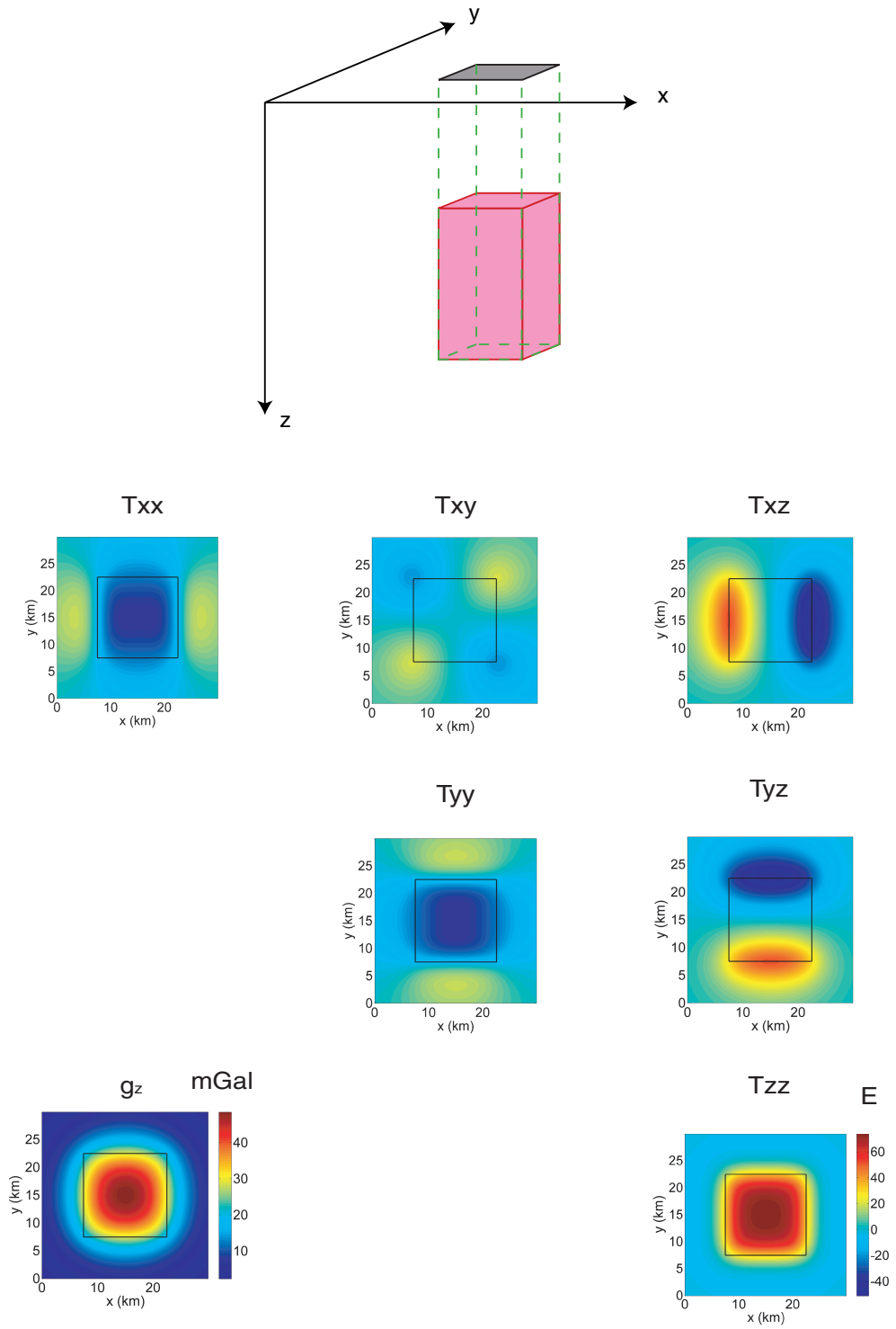


Figure 2.8: *Signal gradiométrique associé à un prisme droit. L'échelle de couleurs des unités (Eötvös) est la même pour toutes les composantes du tenseur. En bas à gauche, la composante verticale de l'accélération de la pesanteur.*

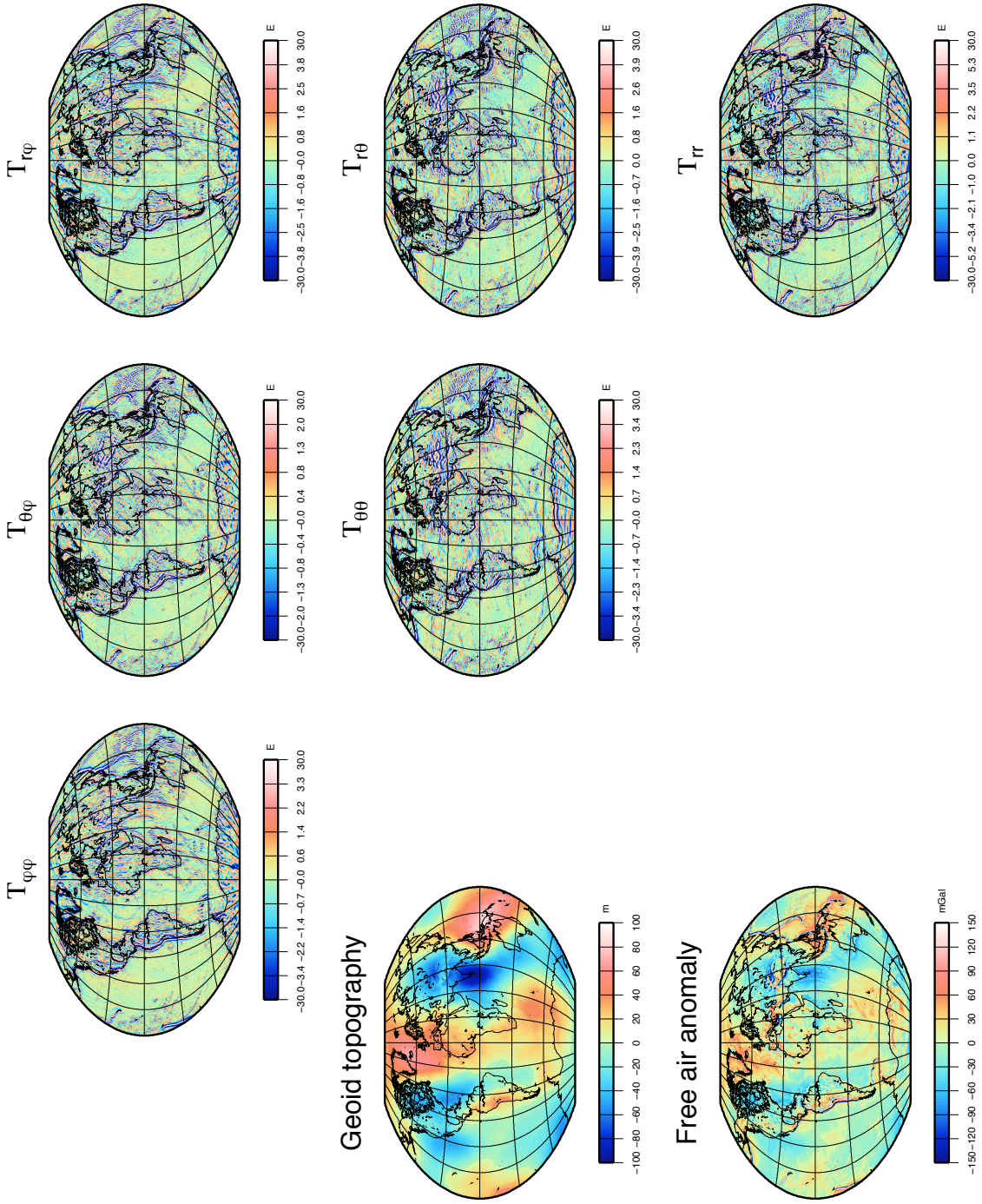


Figure 2.9: *Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à l'altitude 0, dérivée du modèle EIGEN-GL04C. L'échelle de couleur est identique pour tous les gradients, et a été tronquée à 30 Eötvös, mais l'anomalie du gradient peut atteindre très localement des valeurs allant jusquà 140 Eötvös, dans les zones à forte topographie. De même l'échelle de couleur de l'anomalie à l'air libre a été tronquée.*

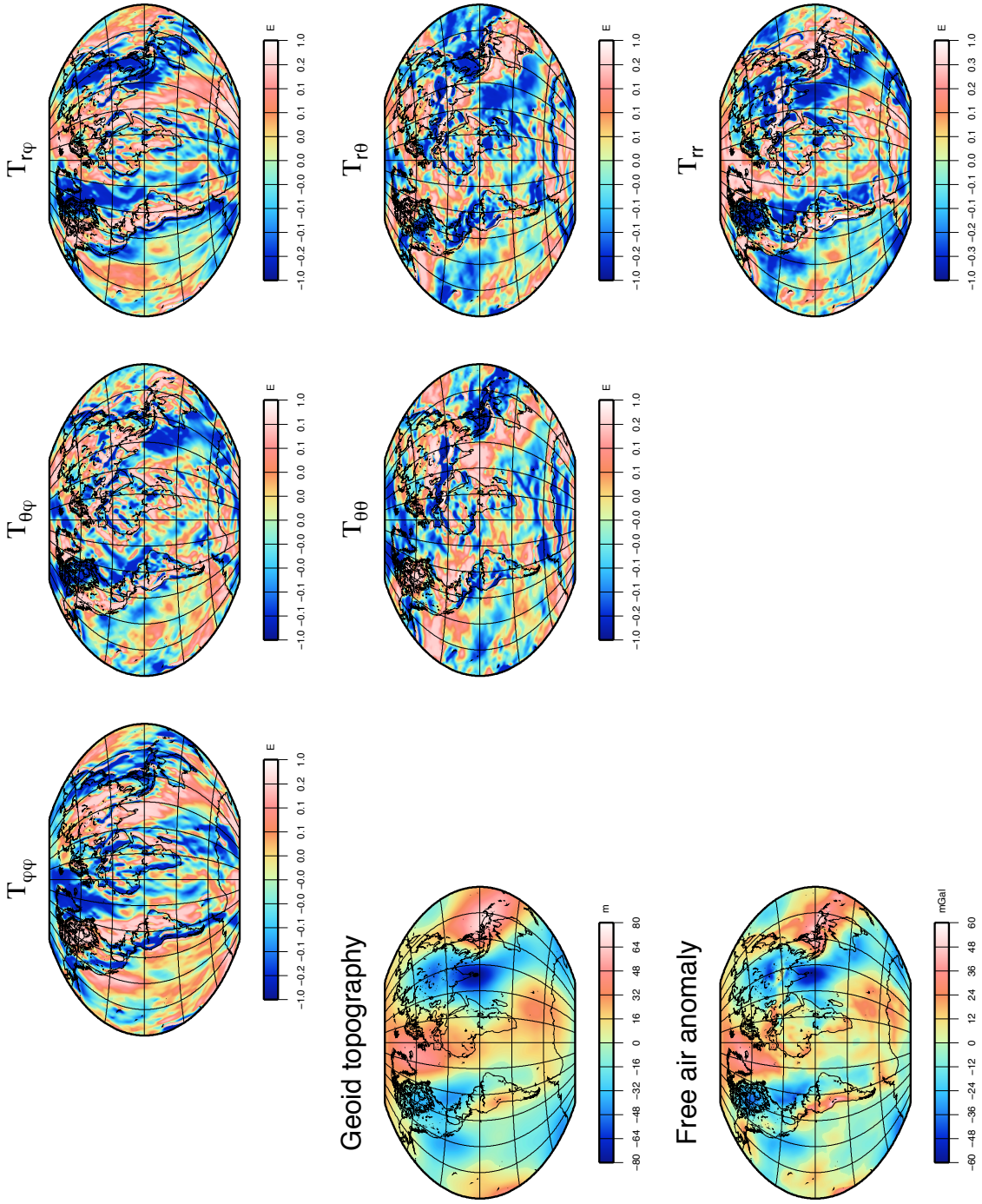


Figure 2.10: *Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à 250 km d'altitude, dérivée du modèle EIGEN-GL04C. L'échelle de couleur est identique pour tous les gradients, et a été tronquée à 1 Eötvös, mais l'anomalie du gradient peut atteindre très localement des valeurs allant jusquà 1.5 Eötvös, dans les zones à forte topographie. De même l'échelle de couleur de l'anomalie à l'air libre a été tronquée.*

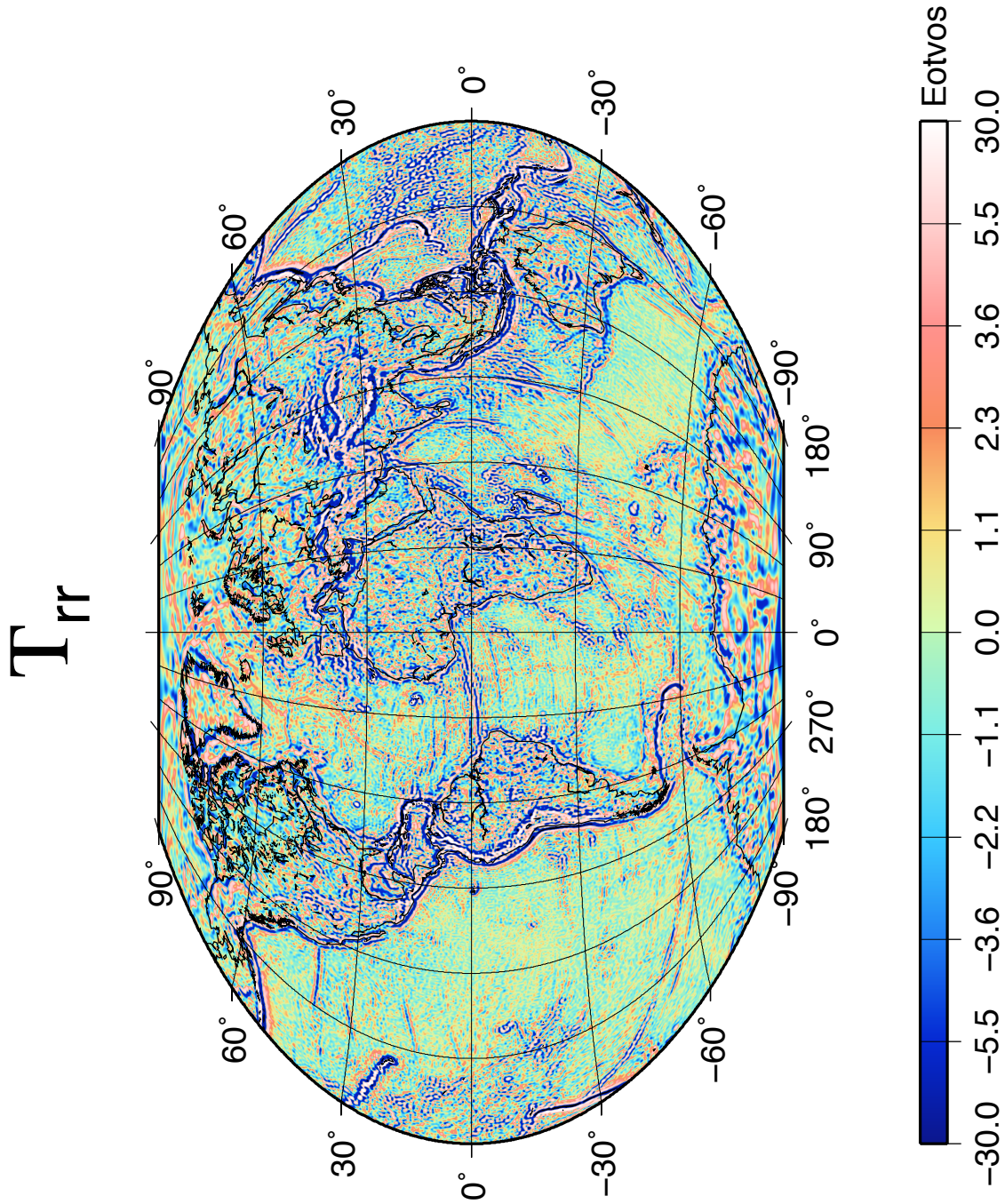


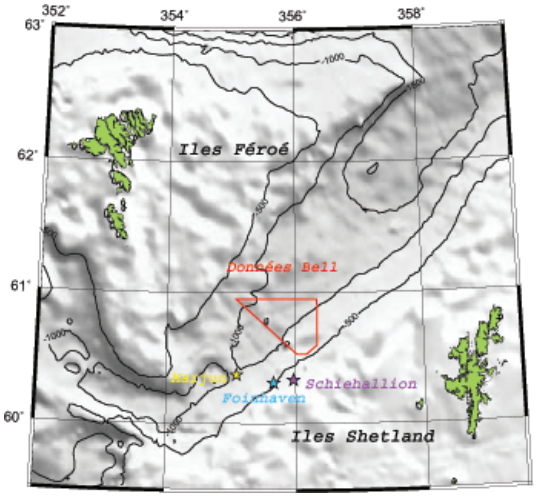
Figure 2.11: *Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à l'altitude 0, pour la dérivée radiale seconde, dérivée du modèle EIGEN-GL04C.*

2.2 Données

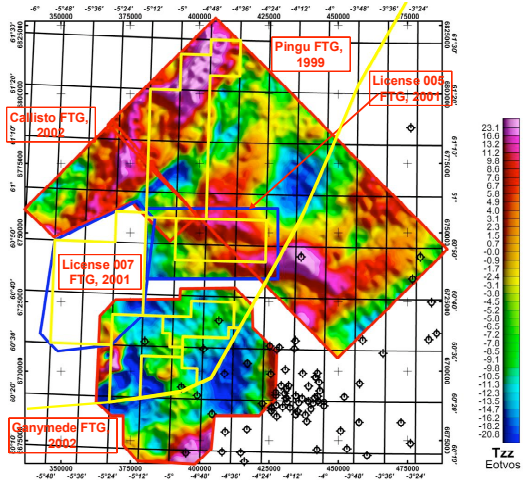
Le satellite GOCE n'étant pas encore lancé, les seules données de gradiométrie en gravimétrie existant à l'heure actuelle sont celles issues de la prospection pétrolière. La société Bell Geospace nous a cédé sous contrat un jeu de données marines pour notre étude. Nous décrivons ici ces données, dont nous ferons usage dans le chapitre suivant.

2.2.1 Zone d'étude

Le levé a été réalisé au nord-ouest des îles Shetland et au sud-est des îles Ferøe, soit en limite de la Mer du Nord et de l'Océan Atlantique Nord. Le bassin Shetland-Ferøe a fait l'objet de cinq levés successifs (*Mumaw*, 2004) par Bell Geospace (2.12(b)). Les données dont nous disposons sont issues d'un levé effectué en 1999 (levé « Pingu »), année où a été définie la frontière maritime entre la Grande-Bretagne et les îles Ferøe. La zone concernée est partiellement propriété de la Grande-Bretagne et du Danemark (*FPA*, 2004).



(a) Localisation de la zone où le levé a été effectué. (En fond : bathymétrie issue de Sandwell 9.1)



(b) Couverture (Tzz) du bassin Shetland-Ferøe par Bell Geospace (d'après *Mumaw* (2004))

Figure 2.12: *Description du levé Bell.*

Deux gisements pétroliers importants (Foinhaven et Schiehallion, voir Figure 2.12(a)) ont été découverts à proximité en 1992 et 1993 par BP dans les eaux de la Grande-Bretagne, et depuis, l'intérêt des compagnies pétrolières pour cette zone n'a cessé d'augmenter. Le bassin sédimentaire de Judd (levé Ganymède sur la figure) a été dès 2000 le lieu de forages effectués par plusieurs compagnies pétrolières, dont un au moins (par Amerada Hess, 2001) a conduit à la découverte d'un gisement de pétrole exploitable (Marjun). Depuis, la prospection a été étendue au nord et à l'ouest pour caractériser des structures sous le basalte susceptibles de piéger des hydrocarbures. Mais en dehors du bassin de Judd où elle est quasi inexistante, la couverture

basaltique dans le bassin est d'épaisseur variable (jusqu'à 6 km) et l'alternance de basalte et de sédiments est très hétérogène en trois dimensions, ce qui complique l'interprétation des données d'imagerie sismique, voire empêche la pénétration des rais. L'exploration de la zone requiert donc des méthodes d'exploration complémentaires à l'imagerie sismique conventionnelle (voir par exemple la sismique basse fréquence, développée par *Ziolkowski et al.*, 2003; *White et al.*, 2005). En particulier, les données issues de l'application de méthodes potentielles (gravité, magnétisme) sont acquises pendant les levés sismiques pour aider à l'interprétation, mais aussi, des levés spécifiques (aéromagnétisme et gradiométrie en gravimétrie) ont été réalisés en dehors des campagnes de prospection sismique. Ainsi, c'est la complexité géologique de la zone et la difficulté induite à interpréter les données de sismique pour localiser les réservoirs pétroliers qui ont motivé l'intervention de Bell Geospace dans cette région du globe.

2.2.2 Levé

Le levé (voir Figure 2.13) est constitué de 72 lignes « L » parallèles orientées approximativement NO-SE et 33 lignes « T » perpendiculaires aux lignes L. Les lignes parallèles sont régulièrement espacées (environ 750 m entre deux lignes L, environ 2250 m entre deux lignes T). Sur chaque ligne L ou T, un point de mesure est pris tous les 23 m environ. Les lignes L35, L39, L48 et L51 sont incomplètes. Les lignes L48 et L51 sont en fait deux parties d'une même ligne, probablement parcourues des jours différents.

2.2.3 Données

Les données comprennent les composantes $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz}$ et T_{zz} du tenseur gradient dans un repère terrestre (projection UTM 7 zone 30N), ainsi que l'anomalie à l'air libre déduite de mesures effectuées à l'aide d'un gravimètre Bell GM7 indépendant du gradiomètre, et la bathymétrie multifaisceaux sur la zone du levé. De plus, pour chaque composante du tenseur gradient, nous disposons de données auxquelles Bell Geospace a appliqué une méthode de réduction du bruit, sur laquelle nous n'avons que peu d'information (voir *Murphy et al.*, 2006). Les composantes du tenseur gradient brutes et à bruit réduit sont représentées sur les figures 2.14(a) à 2.14(f) et 2.15(a) à 2.15(f), l'anomalie à l'air libre et la bathymétrie sur les figures 2.16(a) et 2.16(b).

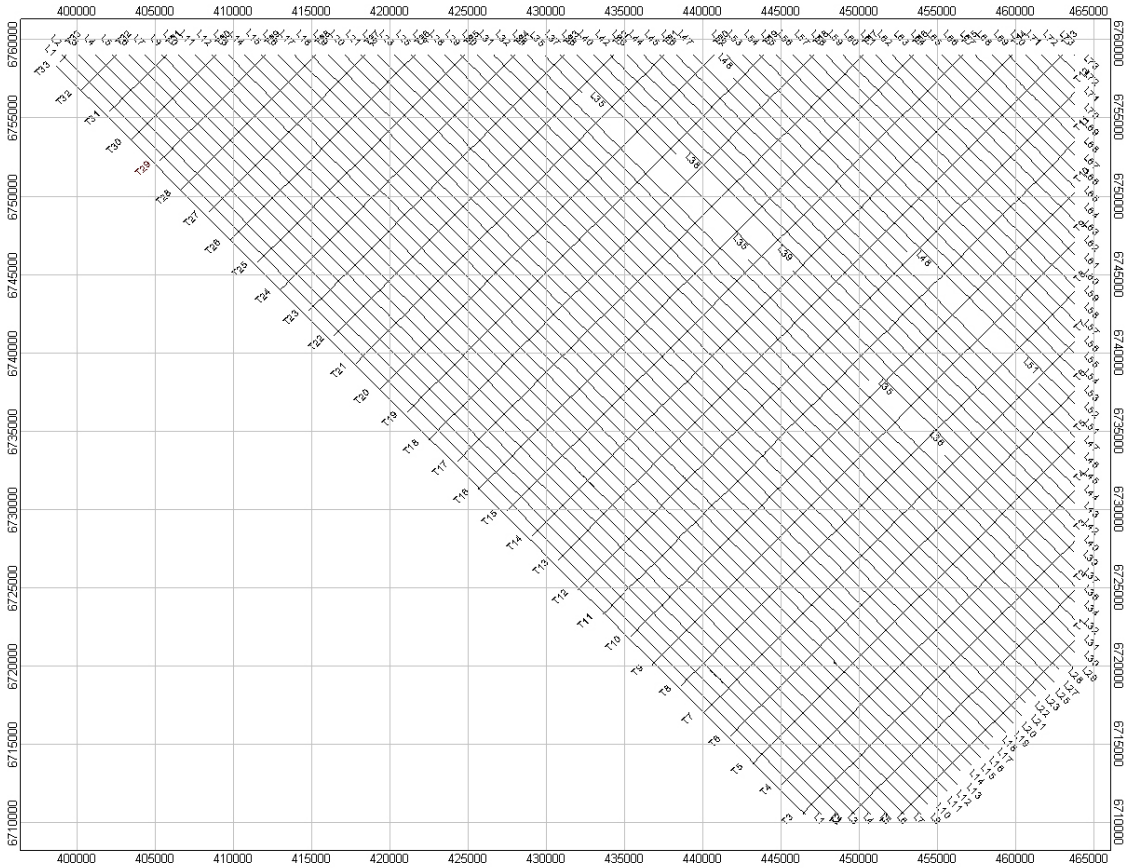
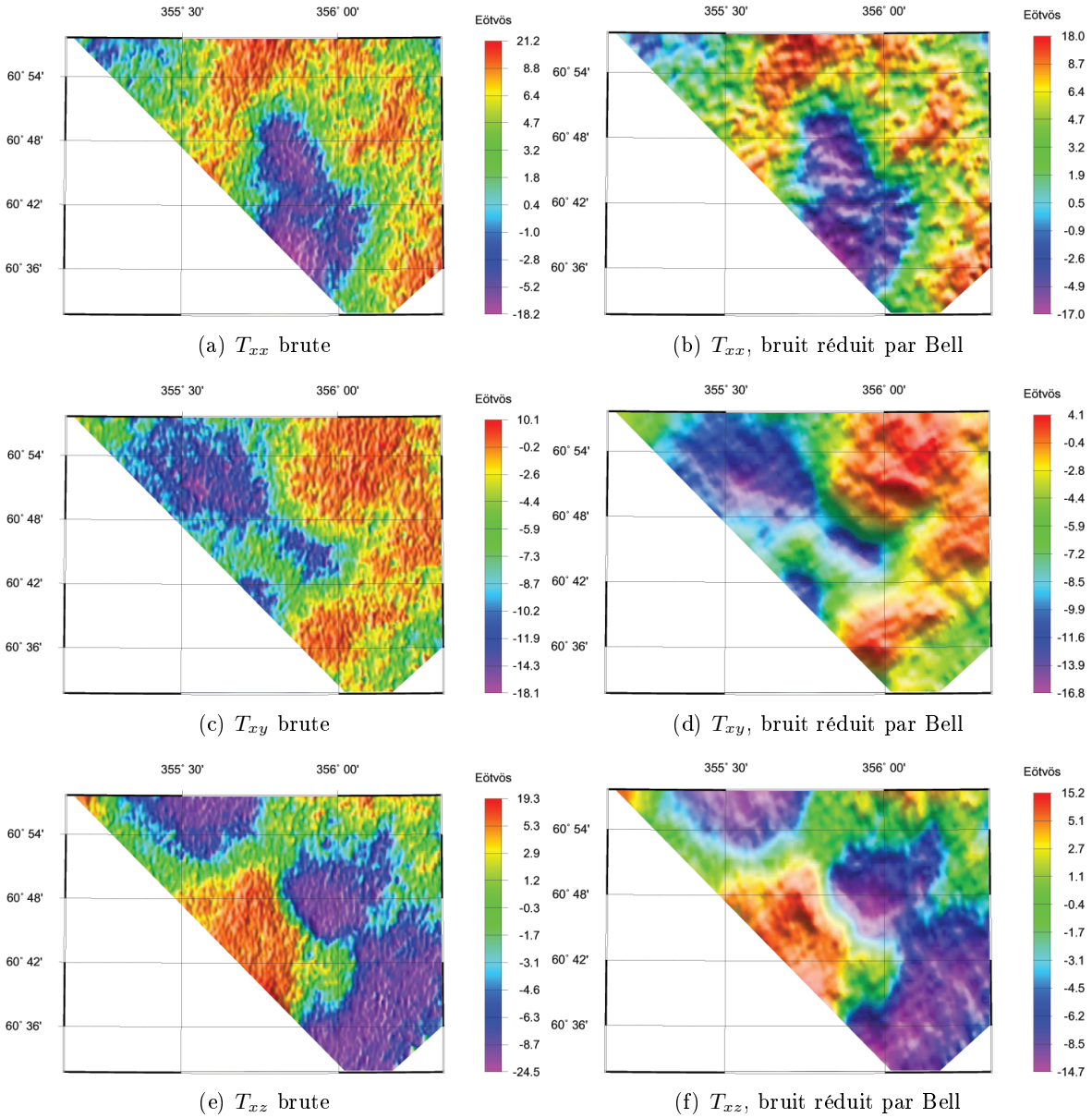


Figure 2.13: *Lignes du levé*

Donnés	Minimum (Eötvös)	Maximum (Eötvös)	Moyenne (Eötvös)	Écart-type (Eötvös)
brutes	-3,31	3,32	0,00	0,06
bruit réduit par Bell	-0,05	0,10	0,00	0,01

Tab. 2.1: *Amplitudes, moyennes et écarts-types des traces des tenseurs associés aux données brutes et aux données dont le bruit a été réduit par Bell.*



(a) T_{xx} brute

(b) T_{xx}, bruit réduit par Bell

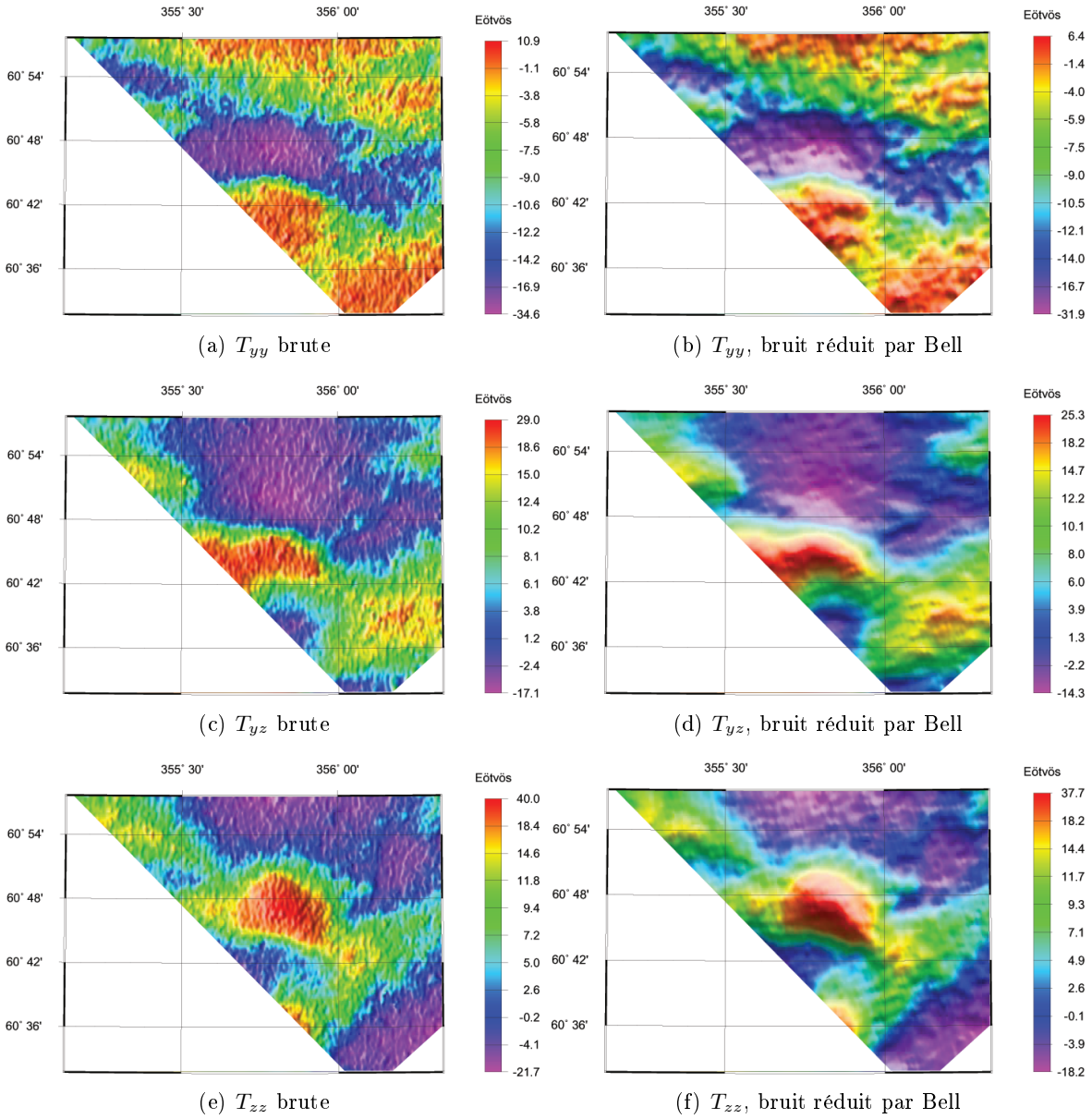
(c) T_{xy} brute

(d) T_{xy}, bruit réduit par Bell

(e) T_{xz} brute

(f) T_{xz}, bruit réduit par Bell

Figure 2.14: *Composantes T_{xx}, T_{xy} et T_{xz} du tenseur gradient mesurées par Bell Geospace. À gauche : brutes, à droite : bruit réduit par Bell.*



(a) T_{yy} brute

(b) T_{yy}, bruit réduit par Bell

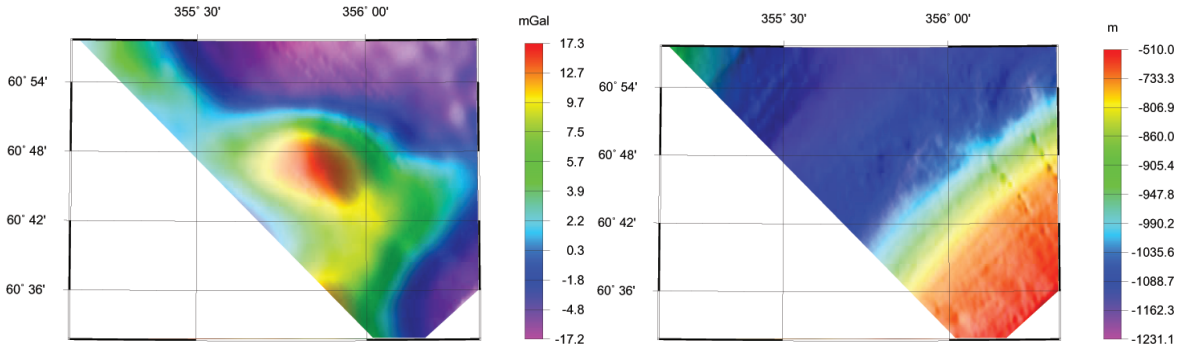
(c) T_{yz} brute

(d) T_{yz}, bruit réduit par Bell

(e) T_{zz} brute

(f) T_{zz}, bruit réduit par Bell

Figure 2.15: *Composantes T_{yy}, T_{yz} et T_{zz} du tenseur gradient mesurées par Bell Geospace. À gauche : brutes, à droite : bruit réduit par Bell.*



(a) Anomalie à l'air libre (b) Bathymétrie multifaisceaux acquise par Bell

Figure 2.16: *Anomalie à l'air libre et bathymétrie multifaisceaux acquises par Bell.*

2.2.4 Quelques remarques préliminaires sur les données

Durant l'acquisition, les données sont ajustées de telle sorte que la trace du tenseur soit nulle (*C. Murphy, communication personnelle*). Nous calculons la trace T_{xx} $+T_{yy}$ $+T_{zz}$ en chaque point pour les données brutes et à bruit réduit. Les résultats sont résumés dans le tableau 2.1. La trace est bien en moyenne nulle sur les données brutes et à bruit réduit par Bell. La méthode de réduction du bruit employée par Bell réduit la dispersion des valeurs autour de zéro. Nous verrons au chapitre suivant que cette méthode est basée sur le nécessaire respect par les composantes du tenseur de l'équation de Laplace (induisant la trace nulle, voir l'équation 2.12), ce qui explique cette réduction de la dispersion. Nous discuterons cependant les limites visibles de leur méthode, en l'absence, cependant, d'information sur l'algorithme employé.

Nous avons calculé les écarts aux points de croisement pour les composantes du tenseur brutes et à bruit réduit par Bell. Les résultats sont résumés dans le tableau 2.2. L'écart-type des écarts est inférieur à 2 Eötvös pour toutes les composantes brutes, et Bell garantit une précision de 2 Eötvös sur les mesures. Il est visible que la réduction de ces écarts est une étape de la méthode de réduction du bruit employée par Bell (moyenne et écart-type nuls à l'issue de l'application du procédé). Ainsi, même si nous ne connaissons pas l'algorithme utilisé par Bell pour la réduction du bruit nous pouvons déduire de l'analyse des données que la méthode employée comprend au minimum un ajustement de la trace du tenseur à zéro et une réduction des écarts aux points de croisement.

Composante	Minimum	Maximum	Moyenne	Écart-type
T_{xx} brute	0,00	8,73	1,28	1,03
T_{xy} brute	0,00	9,45	1,48	1,19
T_{xz} brute	0,00	7,23	1,17	0,92
T_{yy} brute	0,00	13,60	1,71	1,38
T_{yz} brute	0,00	5,69	1,18	0,87
T_{zz} brute	0,00	12,59	1,64	1,27
T_{xx}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00
T_{xy}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00
T_{xz}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00
T_{yy}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00
T_{yz}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00
T_{zz}, bruit réduit par Bell	0,00	0,01	0,00	0,00

TAB. 2.2: *Amplitudes, moyennes et écarts-types des valeurs aux points de croisement.*

Après nous être familiarisés avec les données de gradiométrie en gravimétrie, nous pouvons maintenant aborder leur traitement. La première étape à considérer est la réduction du bruit dans les données, que nous abordons dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3
Réduction du bruit

Les dispositifs dédiés à la mesure des gradients de gravité effectuent l'une ou l'autre des mesures suivantes :

- mesure d'une ou plusieurs composantes (ou de combinaisons des composantes) du tenseur gradient (balance de torsion, variomètre).
- mesure d'une différence d'accélérations (équation 2.17) en deux points suffisamment proches pour que la dérivée au point milieu puisse être approchée par le rapport entre la différence des accélérations mesurées et la distance entre les deux points de mesure (gradiomètre Bell, gradiomètre ONERA).

Bien que les appareils du premier type ont été très récemment remis au goût du jour, ils n'ont pour l'instant pas (ou peu) été utilisés en conditions de terrain (pour un état des lieux des différents types de gradiomètres disponibles ou en développement pour la prospection géophysique, voir *Difrancesco*, 2007). Nous nous concentrons donc ici sur ceux du second type, utilisés de manière routinière en prospection. Notons que ces dispositifs, qu'il s'agisse de ceux utilisés pour la prospection ou du gradiomètre qui équipera le satellite GOCE, sont embarqués dans des mobiles. Nous détaillerons les sources de bruit dans les mesures, puis, après avoir décrit les dispositifs mis en œuvre pour réduire le bruit au moment de l'acquisition, et expliqué les enjeux de la réduction du bruit dans les données issues de la mesure des gradients, nous proposerons une méthode adaptée pour la réduction du bruit aléatoire dans les mesures de gradiométrie en gravimétrie. Nous appliquerons enfin cette méthode aux données Bell et discuterons de son extension pour les données de GOCE.

3.1 Séparation des accélérations

Le Principe d'Équivalence sur lequel la théorie de la Relativité Générale est fondée (voir par exemple *Weinberg* 1972), suppose l'égalité entre la masse grave et la masse inerte d'un corps,

la masse dite grave étant celle à l'origine de l'attraction gravitationnelle, la masse inerte étant celle s'opposant à la mise en mouvement du corps. Même si notre étude se situe dans le cadre de la théorie newtonienne, et non relativiste, de la Gravitation, ce principe reste valable et a une conséquence importante pour la mesure des gradients de gravité. En effet, une autre façon de formuler le Principe d'Équivalence consiste à dire que, mesurant l'accélération d'un corps, il est impossible de déterminer par sa seule mesure si cette accélération a pour origine un phénomène gravitationnel ou non. Ainsi si un dispositif, tel un accéléromètre, est capable de mesurer une accélération gravitationnelle, alors la mesure intègrera tous les types d'accélérations auxquelles est soumis le corps à l'étude, y compris celles qui ne sont pas de nature gravitationnelle. Or, un appareil embarqué dans un véhicule est soumis à des accélérations dues aux changements de cap, d'attitude, ou aux vibrations du véhicule, et ces accélérations ne sont pas de nature gravitationnelle, mais dues au mouvement. Dans la mesure ou nous voulons déterminer les seules accélérations gravitationnelles, il nous faut donc un moyen de les séparer des autres, considérées comme parasites.

3.1.1 Cas du satellite GOCE

Les calculs qui suivent sont détaillés dans *ESA* (1999), ou *Jekeli* (2003). Néanmoins, comme le principe de séparation des accélérations est le même pour le gradiomètre Bell, à quelques détails près, dus à la conception un peu différente de l'instrument et que nous commentons dans le paragraphe suivant, nous reprenons ces calculs ici.

Considérons une des trois paires d'accéléromètres embarquées sur le satellite GOCE. Sur la figure 3.1 sont représentés les deux accéléromètres et leurs positions par rapport au centre de masse du satellite. Les bras accélérométriques sont supposés de longueur constante L, et leur position par rapport au satellite fixe. Les masses d'épreuve des deux accéléromètres sont supposées identiques. Le repère terrestre $\mathcal{R}$ est supposé galiléen. Notons P et Q les positions des deux masses d'épreuve, S la position du centre de masse du satellite, et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma}_P &= \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} \overrightarrow{SP}, \\ \overrightarrow{\gamma}_Q &= \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} \overrightarrow{SQ}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$ représente la dérivée seconde par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{R}_{sat}$ un repère positionné au centre de masse S du satellite, dont les axes sont liés au satellite. Soit $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur caractérisant la rotation instantanée de $\mathcal{R}_{sat}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Désignons par V la partie statique du potentiel gravitationnel engendré par :

- la Terre
- les autres planètes, le Soleil et la Lune.

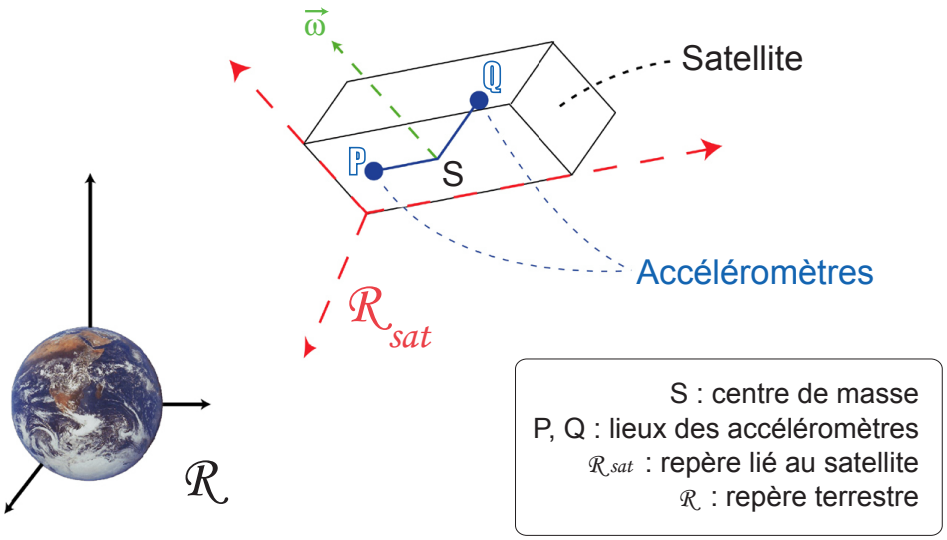


Figure 3.1: *Position des accéléromètres dans le satellite.*

Supposons le lieu des accéléromètres constant par rapport à la position du centre de masse du satellite (P immobile dans $\mathcal{R}_{sat}$). Alors, par composition des accélérations :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_P &= \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \overrightarrow{SP}}_{0} + 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \overrightarrow{SP}\right)}_{0} + \left(\left.\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \vec{\omega}\right) \wedge \overrightarrow{SP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{SP}\right) \\ &= \left(\left.\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \vec{\omega}\right) \wedge \overrightarrow{SP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{SP}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Or, d'après la relation fondamentale de la dynamique, nous avons, dans $\mathcal{R}$ (galiléen par hypothèse) :

$$\vec{\gamma}_P = \vec{\nabla}_P V - \vec{\nabla}_S V + \left\{\begin{array}{c}\text{attraction}\\ \text{gravitationnelle}\\ \text{exercée sur la}\\ \text{masse}\\ \text{d'épreuve en P}\\ \text{par le satellite}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{accélération}\\ \text{associée à la force}\\ \text{électrostatique}\\ \text{nécessaire pour}\\ \text{maintenir la masse}\\ \text{d'épreuve en P}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{autres (non gra-}\\ \text{vitationnelles)}\\ \text{subies par la}\\ \text{masse d'épreuve}\\ \text{en P}\end{array}\right\}, \tag{3.3}$$

où $\overrightarrow{\nabla_P}$ et $\overrightarrow{\nabla_Q}$ sont les vecteurs gradients calculés aux points P et Q, respectivement. Les équipements du satellite sont en nombre tel et répartis de telle façon (*Wilson*, 2001) que l'on peut considérer en première approche que l'attraction du satellite sur les différentes masses d'épreuve est la même (symétrie et distance entre les masses suffisamment petite), tout comme

les forces extérieures d'origine non gravitationnelle. Autrement dit :

$$\overrightarrow{\gamma}_P = \overrightarrow{\nabla}_P V - \overrightarrow{\nabla}_S V + \left\{ \begin{array}{c} \text{accélération} \\ \text{correspondant à la force} \\ \text{électrostatique nécessaire} \\ \text{pour maintenir la masse} \\ \text{d'épreuve en P} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{terme} \\ \text{d'accélération ne} \\ \text{dépendant pas de} \\ \text{la masse d'épreuve} \\ \text{considérée} \end{array} \right\}. \tag{3.4}$$

Notons $-\overrightarrow{w_P}$ l'accélération correspondant à la force électrostatique nécessaire pour maintenir la masse d'épreuve en P. La donnée gradiométrique est une différence du type :

$$\overrightarrow{w_P} - \overrightarrow{w_Q}. \tag{3.5}$$

Les composantes du tenseur gradient seront déduites de ces différences, aussi anticipe-t-on dans la suite du calcul la disparition par différence du terme d'accélération ne dépendant pas de la masse d'épreuve considérée. Ainsi, nous déduisons des équations 3.2 et 3.4 la relation :

$$\overrightarrow{w_P} = \overrightarrow{\nabla}_P V - \overrightarrow{\nabla}_S V - \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \overrightarrow{\omega} \right) \wedge \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{SP} \right). \tag{3.6}$$

Les positions relatives des accéléromètres sont supposées constantes et petites devant les dimensions du problème. Nous obtenons donc au premier ordre :

$$\overrightarrow{\nabla}_P V - \overrightarrow{\nabla}_S V = (\triangle_P V)\, \overrightarrow{SP}. \tag{3.7}$$

De plus, notant :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

nous avons :

$$\overrightarrow{w_P} = (\triangle_P V)\, \overrightarrow{SP} - \left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \overrightarrow{SP} - \Omega^2 \overrightarrow{SP}. \tag{3.9}$$

Un calcul similaire donne, au point Q :

$$\overrightarrow{w_Q} = (\triangle_Q V)\, \overrightarrow{SQ} - \left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} \overrightarrow{SQ} - \Omega^2 \overrightarrow{SQ}, \tag{3.10}$$

si bien qu'au premier ordre :

$$\underbrace{\overrightarrow{w_Q} - \overrightarrow{w_P}}_{\text{gradient mesuré}} = \underbrace{\left(\triangle_S V - \left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}_{sat}} - \Omega^2 \right)}_{\Lambda} \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{\text{connu}}, \tag{3.11}$$

ou bien, en supposant la longueur des bras accélérométriques constante égale à L, et désignant par w_α^i la composante α de la mesure effectuée par le i^{e}accéléromètre selon la numérotation de la figure 2.4(b), la différence $w_\alpha^i - w_\alpha^j$ par $\delta w_\alpha^{ij} \quad \{i,j\} \subset \{1,2,3,4,5,6\},\ \alpha \in \{x,y,z\}$, et les composantes du tenseur gradient par $\{V_{\alpha\beta},\ \{\alpha,\ \beta\} \subset \{\ x,\ y,\ z\ \}\}$:

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\mathrm{L}}\right) \begin{pmatrix} \delta w_x^{21} & \delta w_y^{21} & \delta w_z^{21} \\ \delta w_x^{43} & \delta w_y^{43} & \delta w_z^{43} \\ \delta w_x^{65} & \delta w_x^{65} & \delta w_z^{65} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & -\dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathcal{R}_{sat}} + \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Pour obtenir les composantes du tenseur gradient, il reste à séparer dans Λ (équation 3.11) la partie gravitationnelle de la partie due à la rotation. Comme tout tenseur d'ordre 2, Λ peut être écrit de façon unique comme la somme d'une matrice Λ^s symétrique ($\Lambda_{ij}^s = \Lambda_{ji}^s$) et d'une matrice Λ^a antisymétrique ($\Lambda_{ij}^a = -\Lambda_{ji}^a$) selon :

$$\Lambda = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\Lambda + {}^t\Lambda\right)}_{\substack{\| \\ \Lambda^s \\ \text{symétrique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\Lambda - {}^t\Lambda\right)}_{\substack{\| \\ \Lambda^a \\ \text{antisymétrique}}} \quad , \tag{3.13}$$

où ${}^t\Lambda$ désigne la transposée de Λ. Les opérateurs $\triangle V$ et Ω^2 sont symétriques, et $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}}$ est antisymétrique. Or, la décomposition (3.13) est unique. Donc :

$$\begin{cases} \Lambda^s &= \triangle V - \Omega^2, \\ \Lambda^a &= -\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Les composantes d'accélération angulaire (partie antisymétrique Λ^a) peuvent donc être séparées du tenseur gradient de gravité, et intégrées pour obtenir la vitesse angulaire (*Koop et al.*, 2000) ; en revanche les composantes d'accélération centrifuge, symétriques comme le tenseur gradient, ne peuvent être immédiatement isolées : il faut utiliser une information complémentaire. Par exemple, *Aguirre-Martinez* (1999) a montré que du fait des contraintes imposées à l'orientation du satellite par rapport à la Terre, les composantes en y (transverses) de l'accélération centrifuge sont prépondérantes devant les autres, et peuvent être calculées avec une grande précision en combinant la vitesse angulaire calculée précédemment avec des données d'attitude issues des senseurs stellaires dont est équipé le satellite. Plus généralement, l'effet

en Ω^2 peut être atténué par des contraintes fortes sur l'attitude du satellite. Ainsi, à partir des accélérations mesurées, on peut calculer les composantes du tenseur gradient de gravité dans un repère lié au satellite. Notons qu'il suffirait, pour s'affranchir des rotations parasites, de mesurer non pas les dérivées secondes mais les dérivées troisièmes du potentiel de gravité (*Balmino et al.*, 1982).

3.1.2 Cas du gradiomètre Bell

La plupart des considérations précédentes s'appliquent pour le gradiomètre Bell, mais il faut prendre en compte une spécificité de l'instrument : la rotation à vitesse constante entretenue des accéléromètres. Le gradiomètre Bell est constitué de trois dispositifs identiques orientés selon les axes d'un trièdre trirectangle. Chaque dispositif (Gravity Gradiometer Instrument = GGI) est lui-même constitué d'une plate-forme, en rotation et inclinée, sur laquelle sont positionnées deux paires d'accéléromètres diamétralement opposés (voir Figure 3.2), perpendiculairement l'une à l'autre. Un seul de ces dispositifs permet de déterminer trois composantes du tenseur. En effet, il est possible de relier les sorties des accéléromètres à des combinaisons de composantes du tenseur mettant en jeu la vitesse de rotation de la plate-forme et son diamètre de telle façon que, si l'on démodule le signal au double de la vitesse de rotation, on récupère les valeurs de trois des composantes. L'utilisation des trois GGI permet alors de déterminer l'ensemble des neuf composantes du tenseur gradient de gravité, les dérivées par rapport à z étant obtenues grâce à l'inclinaison des plate-formes supportant les accéléromètres (*Hofmeyer and Affleck*, 1994). Comme pour le gradiomètre de GOCE, la difficulté est de séparer les accélérations que l'on veut mesurer de celles inévitablement senties par l'instrument, d'origine non gravitationnelle, ou des biais instrumentaux. Ce problème est partiellement résolu par la rotation de la plate-forme de chaque GGI. On peut montrer (*Dosch and Sieracki*, 2002; *Schweitzer et al.*, 2000) que la rotation de la plate-forme permet de s'affranchir, entre autre, du biais de l'instrument. En effet, considérant pour simplifier que la plate-forme est en rotation dans le plan horizontal, une des paires d'accéléromètres permet d'obtenir T_{xy}, tandis que l'autre donne la différence T_{xx} - T_{yy} . Si l'ensemble subit une rotation de $\frac{\pi}{2}$, alors le biais ne varie pas, mais les signes des composantes sont inversés. Il suffit alors de faire la différence entre les valeurs des sorties pour les deux positions orthogonales des axes pour éliminer le biais et récupérer les valeurs de T_{xy} et T_{xx} -T_{yy}. Comme pour GOCE, le gradiomètre est sensible aux rotations du véhicule. Le gradiomètre est placé sur une plate-forme stabilisée pour le découpler au maximum des mouvements du véhicule, et des gyroscopes, qui jouent le rôle des senseurs stellaires pour GOCE, permettent de caractériser ces rotations.

3.1.3 Accélérations gravitationnelles non désirées

Nous venons de voir qu'une des difficultés liées à l'emploi des gradiomètres est qu'ils sont sensibles à des accélérations non gravitationnelles qui, pour être en partie éliminées du signal

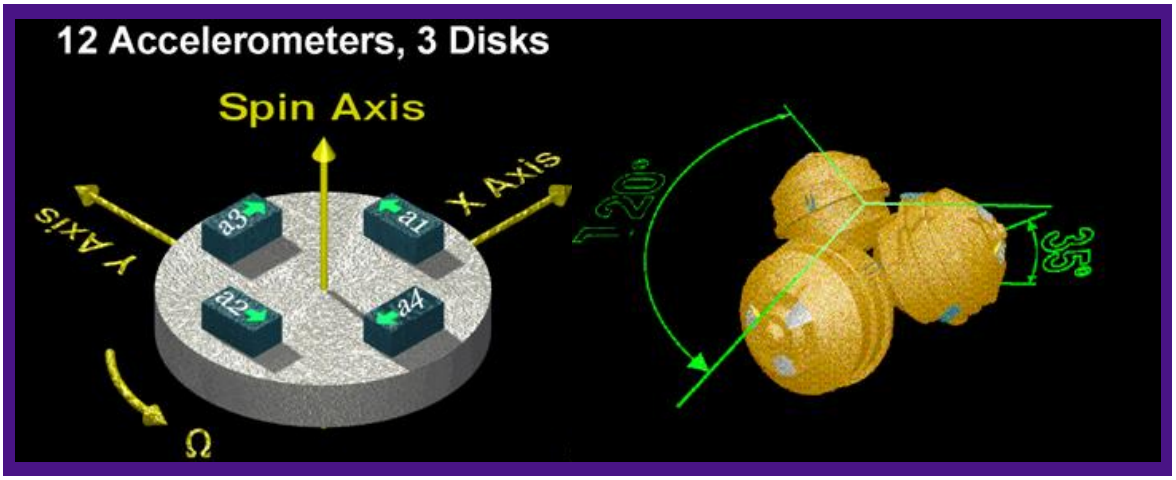


Figure 3.2: *Schémas de fonctionnement du gradiomètre Bell. À gauche, les paires d'accéléromètres, montées sur une plate-forme en rotation, constituant un GGI. À droite, les trois GGI dans leur configuration géométrique opérationnelle (*source : http ://www.bellgeo.com/*).*

mesuré, requièrent une instrumentation complémentaire. Dans le paragraphe suivant, nous décrivons les sources possibles de telles accélérations selon le mobile utilisé pour le transport du gradiomètre. Mais il existe aussi des accélérations gravitationnelles qu'il faut soustraire au signal pour obtenir l'information désirée. En effet le gradiomètre est avant tout sensible aux masses qui lui sont proches, c'est à dire la contribution au signal du véhicule lui-même. C'est pourquoi le nombre de pièces mobiles internes au véhicule est réduit au minimum. Dans le cas de l'instrument développé par Bell Geospace, l'instrument est embarqué de préférence toujours sur le même porteur, de telle sorte que les mouvements de masse systématiques lors des campagnes de mesure (par exemple, le vidage progressif des réservoirs de carburant, qui déplace le centre de gravité du bateau) puisse être caractérisés et retirés (*C. Murphy, communication personnelle*). Ces accélérations non désirées de type gravitationnel sont considérées dans ce qui suit comme bien modélisées et non traitées par la méthode de réduction du bruit que nous proposons.

3.2 Le bruit : causes et remèdes

3.2.1 Sources

Dans les calculs précédents, nous avons fait un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, considérant que les effets que nous oublions de considérer sont négligeables par rapport à ceux qui nous intéressent. Par exemple, pour isoler les accélérations gravitationnelles dans le cas du satellite GOCE, nous avons supposé que les lieux des accéléromètres étaient fixes par rapport au centre de masse du satellite. Le satellite a été conçu de sorte à ne contenir aucune

pièce mécanique mobile en dehors des masses d'épreuve des accéléromètres (*M. Drinkwater, communication personnelle*). Nous pouvons donc considérer que la répartition des masses, autres que les masses d'épreuve du gradiomètre, est fixe à l'intérieur du satellite. En pratique, l'ensoleillement variant au cours de la mission, le satellite subira des déformations dues à la chaleur, et ces déformations modifieront la position de son centre de masse par rapport à sa carcasse. Il est donc probable que l'hypothèse selon laquelle les éléments du gradiomètre ne bougent pas par rapport au centre de masse du satellite ne soit pas vérifiée. Ce changement de position est associé à une accélération, et donc source de bruit dans nos mesures. Similairement, nous avons supposé la distance entre les accéléromètres d'un même bras constante. Cela suppose une thermostatisation parfaite du gradiomètre et ne peut donc être en pratique réellement obtenu. Les sources de bruit de ce type sont nombreuses, et, si les effets, individuellement, sont la plupart du temps négligeables par rapport aux grandeurs mesurées, leur somme ne l'est pas nécessairement. Les mêmes considérations s'appliquent aux données aéroportées ou acquises en mer. Comme dans le cas de GOCE, le fonctionnement idéal du gradiomètre Bell est basé sur des hypothèses en réalité non vérifiées. Par exemple, la vitesse de rotation de la plate-forme et la distance entre les accéléromètres doivent être constantes. En pratique, de faibles oscillations des accéléromètres et un taux de rotation non constant induisent un bruit haute fréquence qu'il faut filtrer.

Deux sources de bruit spécifiques sont à considérer pour le satellite GOCE. Comme tout satellite artificiel, GOCE subit la *pression de radiation solaire*. Il s'agit d'une force créée par le rayonnement solaire, dirigée du soleil vers le satellite, associée à une accélération dont l'amplitude peut atteindre une dizaine de microGals. Cette force est difficile à modéliser car son action sur le satellite dépend des propriétés optiques de sa surface. En effet les rayons solaires frappant la surface peuvent avoir plusieurs comportements : être absorbés, réfléchis ou diffusés. En général le comportement réel est une combinaison des trois. L'estimation de cette pression de radiation au cours de la vie du satellite dépend donc de la bonne modélisation des caractéristiques optiques de sa surface, et du contrôle de son orientation par rapport au soleil. Ces effets à considérer ne sont pas spécifiques du satellite GOCE, nous ne détaillerons pas leur modélisation ici. On pourra par exemple se reporter à *Anselmo et al.* (1983) pour plus de détails. Un autre type de perturbation non gravitationnelle est à considérer pour tous les satellites évoluant en orbite basse : le frottement atmosphérique. Ainsi, le satellite GOCE, en orbite à 250 km, subit des accélérations dues au changement de densité et de température de la thermosphère. Entre autres instruments, le microaccéléromètre CACTUS développé par l'ONERA et embarqué à bord du satellite CASTOR, lancé en 1975, a effectué des mesures qui ont permis la réalisation d'un modèle empirique de la thermosphère (voir par exemple *Berger et al.*, 1998). Néanmoins, si les variations moyennes de densité et température de la thermosphère sont bien connues, les variations à petite échelle sont très difficiles à modéliser à une altitude donnée. Les accélérations ainsi engendrées sont alors du même ordre de grandeur que

les accélérations gravitationnelles mesurées par GOCE (*Canuto et al.*, 2003). De plus, comme pour la pression de radiation solaire, les accélérations induites par ces variations sur le satellite dépendent de la complexité de sa surface. Or GOCE, s'il a été muni d'équipements redondants pour assurer sa symétrie, n'est néanmoins pas une sphère. C'est pourquoi le satellite GOCE est équipé d'un système dit de *compensation de traînée*. À l'aide des mesures effectuées par les gradiomètres, le freinage atmosphérique est estimé en temps réel et compensé, toutes les secondes, par une impulsion provenant d'un propulseur ionique (*Canuto et al.*, 2003). Il nous faut signaler que ce système est nouveau, et indispensable pour le satellite GOCE. D'une part, l'effet du frottement n'est pas identique dans les trois directions de l'espace (*ESA*, 1999), ce qui induit une hétérogénéité dans la précision des différentes composantes, et peut donc induire des biais directionnels dans les modèles qui en sont dérivés. D'autre part, le frottement atmosphérique a pour conséquence de « faire tomber » le satellite. Si le système de compensation de traînée n'était pas présent sur GOCE, la mission ne pourrait pas durer les deux ans nécessaires pour atteindre la précision nominale des modèles de champ et géoïde produits.

Ainsi les sources de bruit sont nombreuses durant l'acquisition de données de gradiométrie en gravimétrie, et chacune est susceptible d'influencer tout ou partie du spectre des fréquences des mesures, qu'il s'agisse de données spatiales ou non. Pour les données marines, aéroportées ou spatiales, les mobiles sont équipés d'instruments complémentaires aux gradiomètres qu'ils transportent (pour un exposé exhaustif de ces équipements pour les différents types de mesures, spatiales ou non, et la bande de fréquence concernée, voir par exemple *ESA*, 1999; *Dransfield and Lee*, 2004; *Jekeli*, 1984, 1993, 2003), destinés à minimiser le bruit qui peut l'être. Cependant, même si ces équipements permettaient de compenser exactement les effets parasites auxquels leur utilisation est dédiée, il subsisterait, bien sûr, des sources de bruits aléatoire impossible à modéliser parfaitement. Dans le cas des gradients de gravité, le problème de la réduction du bruit est complexe, comme nous allons le voir, spécialement pour le bruit à haute fréquence. En effet, nous avons vu que l'information apportée par les gradients, en comparaison avec celle apportée par g_z, est dans le domaine des hautes fréquences (courtes longueurs d'onde) spatiales. Et la qualité du signal dans les hautes fréquences détermine la résolution des modèles qui seront calculés à partir de ces données (*ESA*, 1999). De plus le bruit affectant les mesures des gradients est la plupart du temps autocorrélé (*While et al.*, 2006), ce qui limite les méthodes de réduction du bruit par filtrage traditionnelles. Ainsi, il va falloir développer des méthodes spécifiques pour la réduction du bruit affectant les gradients, qui préservent le contenu haute fréquence du signal, ce que nous proposons dans ce qui suit.

3.2.2 Réduction du bruit : méthodes existantes

Il n'est bien sûr pas possible de modéliser exactement les sources de bruit et donc le bruit lui-même, afin de le soustraire au signal mesuré. Comme nous l'avons vu précédemment, une fois retirées les accélérations parasites, il subsiste un bruit essentiellement haute fréquence. De

nombreuses méthodes de filtrage permettent, usuellement, de traiter le bruit haute fréquence. Ces méthodes nécessitent la détermination d'une fréquence de coupure au-delà de laquelle on peut considérer que la partie concernée du spectre est pur bruit. Plusieurs méthodes de filtrage des gradients ont été proposées jusqu'à présent (voir par exemple *Lyrio et al.*, 2004; *While et al.*, 2006). Ces méthodes proposent une détermination plus ou moins automatique d'une fréquence de coupure, basée sur des hypothèses concernant la répartition des sources (pour *While et al.*, 2006, et leur méthode échoue lorsqu'ils l'appliquent à des données marines) ou le spectre supposé du bruit (pour *Lyrio et al.*, 2004). Dans le meilleur des cas, les auteurs admettent qu'une partie du signal filtré est associable à des sources superficielles. Un simple filtrage passe-bas ne saurait donc suffire pour réduire de manière efficace le bruit dans les données de gradiométrie en gravimétrie, tout en préservant le contenu spectral du signal d'intérêt ; nous avons développé pour ce faire, et proposons plus loin, une nouvelle méthode de réduction du bruit.

3.3 Profondeur des sources

3.3.1 Profondeur des sources

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le problème inverse en gravimétrie, qui consiste à caractériser les sources (localisation, forme et densité) à partir de l'anomalie mesurée, est sous-déterminé. En effet, un potentiel donné peut être expliqué par une infinité de distributions de sources. Pour réduire l'étendue de l'espace des solutions possibles, il faut donc ajouter des contraintes sur les solutions. Préalablement à l'utilisation de méthodes sophistiquées d'interprétation du signal telles que les méthodes d'inversion, il est possible, néanmoins, d'appréhender certaines propriétés des sources en leur supposant une géométrie simple. Ainsi, nous allons ici relier la profondeur maximale des sources aux longueurs d'onde du signal, à l'aide de l'étude du signal associé à une source ponctuelle.

Ce problème est résolu en gravimétrie. On démontre (voir par exemple *Nettleton*, 1940; *Telford et al.*, 1990) que si g_z est la valeur mesurée de la composante verticale de l'accélération de la pesanteur le long d'un profil (choisi arbitrairement selon l'axe Ox), alors la demie largeur à mi-hauteur du signal, c'est à dire la moitié de la largeur du segment $[x_{\min}, x_{\max}]$ tel que $g_z(x_{\min}) = g_z(x_{\max}) = \frac{\max(g_z)}{2}$ (voir Figure 3.3) est reliée à la profondeur h de la source selon :

$$\frac{|x_{\max} - x_{\min}|}{2} = \frac{1}{1,3}\, h = 0,77\, h. \tag{3.15}$$

À une profondeur donnée, la longueur d'onde du signal associé à un point source est plus petite que la longueur d'onde associée à n'importe quelle source ayant une dimension non nulle le long du profil. Pour une source donnée, la longueur d'onde spatiale de l'anomalie est d'autant plus large que la source est profonde. Une petite longueur d'onde spatiale présente

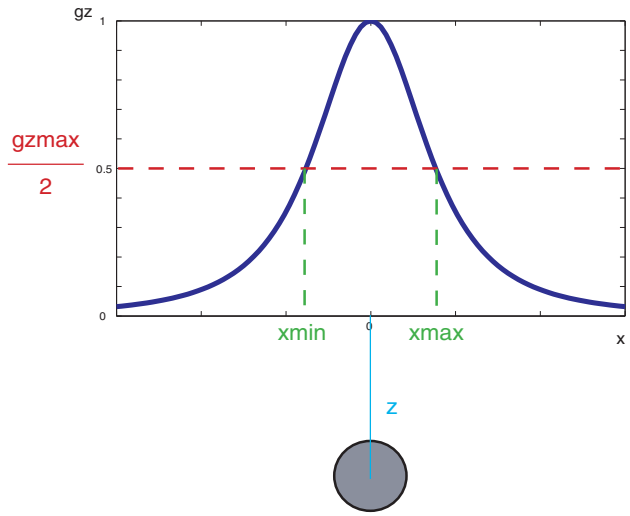


Figure 3.3: *Détermination de la demie largeur de l'anomalie en fonction de la profondeur d'une sphère de densité homogène ou d'une source ponctuelle.*

dans le signal ne peut donc être associée ni à une source trop profonde, ni à une source trop étendue. La plus petite longueur d'onde spatiale identifiable dans le signal peut donc être reliée à la profondeur maximale du toit des sources. Ainsi, même si la source ponctuelle n'a pas de réalité géologique, elle permet, étant donné un signal mesuré, d'estimer la profondeur maximale $h_{\max}$ du toit des sources selon :

$$h_{\max} = 1,3\frac{L}{2} = 0,65\,L, \tag{3.16}$$

où L est la plus petite longueur d'onde présente dans le signal mesuré. Des méthodes ont été développées pour déterminer la profondeur des sources à partir du spectre de Fourier du signal gravimétrique (voir par exemple *Spector and Grant*, 1970; *Bowin et al.*, 1986; *Hipkin*, 2001). Pour les gradients, une étude menée par *While et al.* (2006) tente d'établir une loi reliant la profondeur des sources au spectre de T_{zz}. Cependant, la loi établie est valable à condition que des hypothèses statistiques fortes sur la distribution des sources soient vérifiées (entre autres une répartition isotrope des sources), et cette loi n'est plus vérifiée lorsque les auteurs la confrontent à des mesures de gradiométrie en gravimétrie, aboutissant à des conclusions sur les sources incompatibles avec la réalité. Plus modestement, nous proposons d'établir pour les gradients des relations similaires à (3.16). Autrement dit il s'agit, à partir de l'étude du signal associé à une source ponctuelle, de relier la profondeur de la source à la largeur à mi-hauteur du signal.

Nous avons établi les formules (2.38) permettant de calculer les composantes du tenseur gradient associé à une anomalie ponctuelle. La figure (3.4) montre l'allure des différentes composantes sur un profil pour un exemple de point source ($\mathcal{G}M = 10^{-9}$ m^3.s^{-2}, $h = 1$ m).

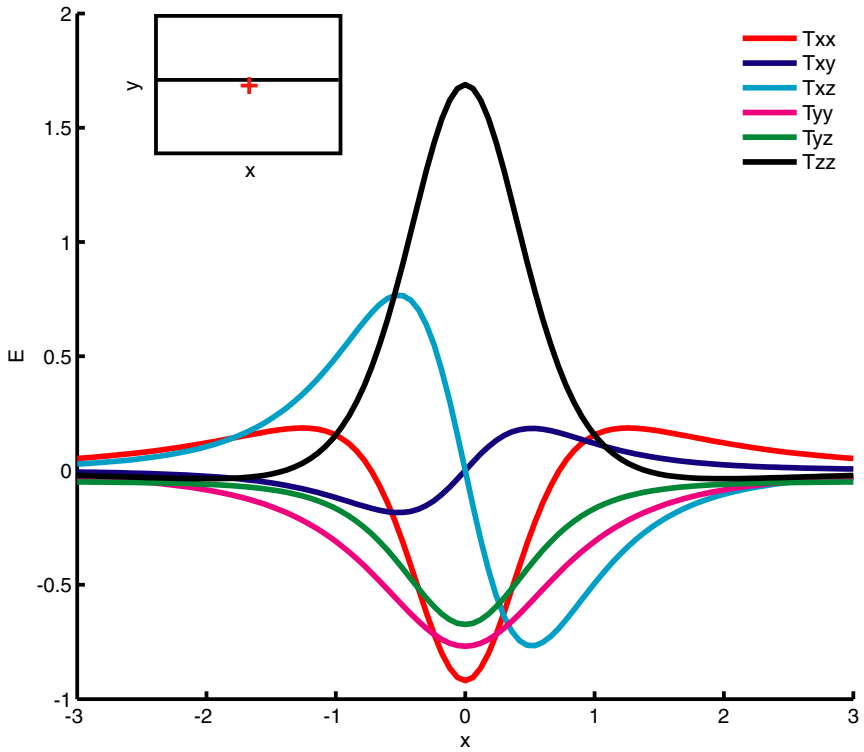


Figure 3.4: *Allures respectives des composantes T_{xx},T_{xy},T_{xz},T_{yy},T_{yz} et T_{zz} associées à une source ponctuelle. En haut à gauche, la position du profil par rapport au point source. La distance selon x est en mètres et la valeur du produit $\mathcal{G}M$ est arbitrairement fixée à 10^{-9} S.I., M désignant la masse de la source.*

L'origine du repère est prise à l'aplomb de la source. Comme nous pouvons le constater sur cette figure, les différentes composantes présentent un ou plusieurs extrema locaux. Pour chaque composante T_{ij}, $\{i,j\} \in \{x,y,z\}$, nous désignons par $T_{ij}^{\max}$ le maximum de la valeur absolue de T_{ij}. Nous recherchons alors, pour chaque composante, le (ou les) segments $[x_{\min}, x_{\max}]$ tel(s) que :

$$T_{ij}(x_{\min}) = T_{ij}(x_{\max}) = \frac{T_{ij}^{\max}}{2}. \tag{3.17}$$

La résolution du problème sur le profil (Ox) comporte théoriquement, pour chaque composante T_{ij}, les étapes suivantes :

1) déterminer l'ensemble A des x_0 en lesquels T_{ij} présente un extremum local. On note alors :

$$T_{ij}^{\max} = \max_{x \in A}(|T_{ij}(x)|); \tag{3.18}$$

2) déterminer l'ensemble B des x_1 tel que :

$$T_{ij}(x_1) = \frac{T_{ij}^{\max}}{2}; \tag{3.19}$$

3) ordonner l'ensemble B (nous constatons sur la figure 3.4 que B comporte quatre points pour T_{xy} et T_{xz}, et deux points pour les autres) en notant $x_1^1 \leq x_1^2 \leq ...$ les valeurs qui le composent ;

4) établir la formule :

$$\frac{x_1^2 - x_1^1}{2} = f(h), \tag{3.20}$$

où f est une fonction à déterminer.

La résolution analytique du problème est complexe car elle implique la résolution d'équations polynomiales de haut degré. Nous lui préférons une résolution numérique dont les étapes sont les suivantes :

1) Pour une profondeur h donnée de la source nous calculons les valeurs de T_{ij} en 2N+1 points régulièrement espacés sur le profil $(0x)$.

2) Nous déterminons la valeur maximale $T_{ij}^{\max}$ prise par $|T_{ij}|$ sur les N points. Repérant par x_0 la coordonnée du point en lequel ce maximum est réalisé, les 2N+1 points sont alors renumérotés :

$$x_{-k},\ x_{-k+1},\ ...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{p-1},\ x_p,$$

avec $k + p = 2N$.

3) Nous parcourons l'axe des x (les N points) depuis x_0 dans le sens des x croissants. Nous affectons à $x_{\max}$ la valeur de x pour laquelle la différence $T_{ij}(x) - \frac{T_{ij}^{\max}}{2}$ change de signe.

4) Similairement, nous déterminons $x_{\min}$ en parcourant l'axe des x depuis x_0 dans le sens des x décroissants.

5) Nous recommençons tout le processus pour une autre valeur de la profondeur.

Nous avons suivi les étapes précédentes pour chacune des composantes, pour un profil orienté selon l'axe x, puis pour un profil orienté selon l'axe y. Les résultats sont illustrés par la figure 3.5. Pour chacune des composantes, la demie largeur $\frac{L}{2}$ du signal varie linéairement avec la profondeur h de la source. Nous déterminons par un ajustement au sens des moindres carrés la pente α des droites $\frac{L}{2} = \alpha(h)$ pour chaque composante du tenseur ainsi que pour g_z, pour un profil selon $(0x)$ et un profil selon (Oy). Les résultats sont donnés dans le tableau 3.1.

Profil selon $(0x)$		Profil selon $(0y)$	
Composante	α	Composante	α
T_{xx}	0,4	T_{xx}	0,8
T_{xy}	0,4	T_{xy}	0,4
T_{xz}	0,4	T_{xz}	0,6
T_{yy}	0,8	T_{yy}	0,4
T_{yz}	0,6	T_{yz}	0,4
T_{zz}	0,5	T_{zz}	0,5
g_z	0,8	g_z	0,8

TAB. 3.1: *Pour chacune des composantes du tenseur gradient et g_z, coefficient de proportionnalité α entre la demie largeur du signal associé à une source ponctuelle et la profondeur h de la source. À gauche, variations pour des mesures le long de l'axe des x, à droite le long de l'axe des y. La source est en $x = y = 0$.*

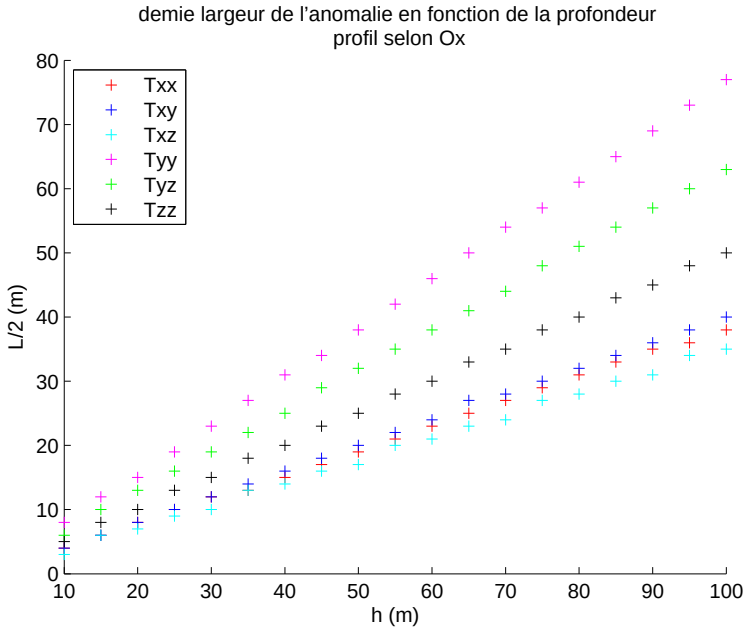
Remarquons que notre méthode donne, pour g_z, $\alpha = 0,8$: ce résultat est corroboré par la relation 3.15. Nous avons par ailleurs validé analytiquement les valeurs trouvées pour les composantes pour lesquelles la résolution exacte était possible. Il nous est donc possible, à partir de mesures des composantes du tenseur sur un profil, d'estimer la profondeur du toit des sources.

3.3.2 Application aux données traitées par Bell

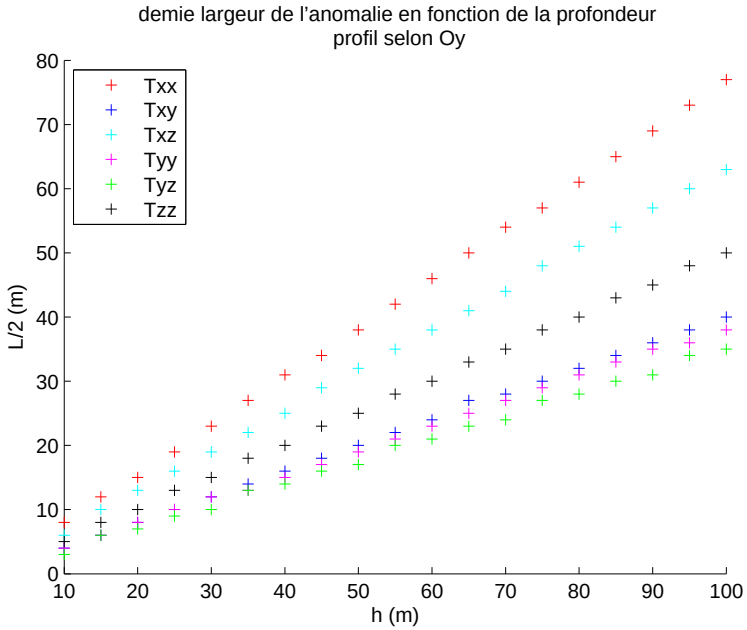
Comme nous l'avons mentionné dans la présentation des données Bell, nous disposons de données résultant de l'application par Bell Geospace d'une méthode de réduction du bruit dont les détails n'ont pas été publiés et sur laquelle nous n'avons pas ou peu d'information. Nous avons appliqué ce qui précède à ces données. Les longueurs d'onde des signaux après réduction du bruit donnent des profondeurs maximales pour les sources situées dans la tranche d'eau. Par exemple sur la figure 3.6, nous avons représenté T_{xy} le long du profil $T17$ (voir figure 2.13), pour les données brutes et les données traitées par Bell, après une rotation (voir §2.1.5) pour que le profil soit parallèle à l'axe des x. Nous constatons que le signal, traité par Bell en vue de réduire le bruit, contient des petites longueurs d'onde telles que le demie largeur à mi-hauteur n'excède pas 200 m. Selon les résultats résumés dans le tableau 3.1, cela correspond à une profondeur de source égale à :

$$h = \frac{1}{0,4} * 200 = 500\,\mathrm{m}.$$

Or, les données de bathymétrie montrent que le long de ce profil, la tranche d'eau a une épaisseur de l'ordre du kilomètre tout le long, ce qui est incompatible avec une profondeur pour les sources égale à 500 m. Ainsi, même si nous ne connaissons pas les détails de la méthode employée par Bell pour la réduction du bruit, nous concluons de ce qui précède que cette méthode peut-être améliorée.



(a)



(b)

Figure 3.5: *Variation, pour chacune des composantes du tenseur gradient, de la demie largeur du signal associé à une source ponctuelle en fonction de la profondeur h de la source. À gauche, variations pour des mesures le long de l'axe des x, à droite le long de l'axe des y. La source est en $x = y = 0$.*

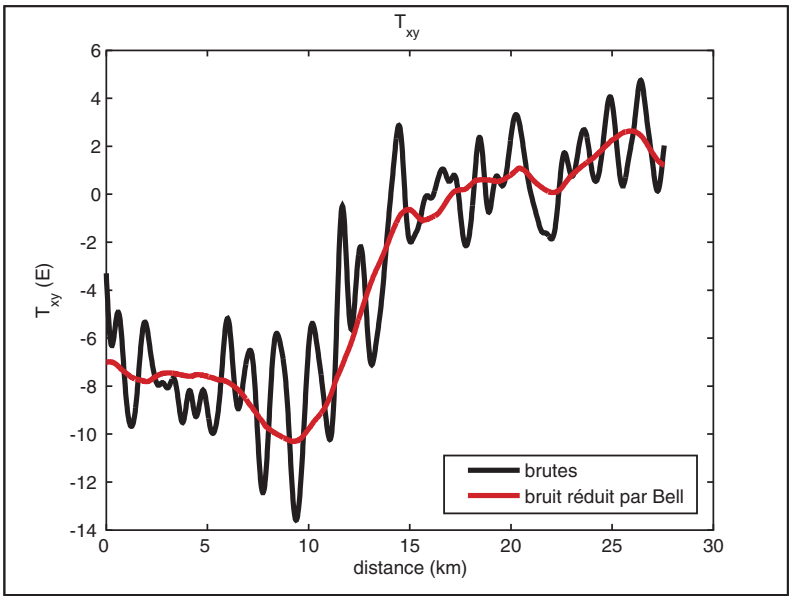


Figure 3.6: *Signal brut et traité par Bell pour la composante T_{xy} du tenseur gradient de gravité le long du profil $T17$, après une rotation pour amener le profil parallèle à l'axe des x.*

3.4 Réduction du bruit basée sur des considérations physiques

Comme nous l'avons vu, les méthodes de réduction du bruit mentionnées plus haut, bien qu'ayant été spécialement développées pour le traitement des mesures des composantes du tenseur gradient, souffrent de deux insuffisances :

- un filtrage passe-bas nécessite le choix d'une fréquence de coupure. Autrement dit, il faut pouvoir considérer qu'au-delà d'une certaine fréquence, le signal enregistré est pur bruit. Or les gradients de gravité rendent compte de la partie haute fréquence du signal de gravimétrie. Le choix de la fréquence de coupure est donc critique ;
- les méthodes développées jusqu'à présent sont basées sur des hypothèses concernant le comportement des gradients de gravité. Ces hypothèses, si elles sont confirmées par des tests numériques sur des données synthétiques, ne sont pas nécessairement vérifiées par les gradients mesurés.

Avec les mesures de gradiométrie en gravimétrie, nous avons la chance de disposer de levés constitués, en chaque point, de mesures simultanées de plusieurs quantités qui ne sont pas indépendantes. Nous allons utiliser la relation, en chaque point de mesure, des quantités mesurées entre elles pour proposer dans ce qui suit une méthode de réduction du bruit qui ne filtre pas les données. Le spectre en fréquence du signal est traité de façon homogène. Cette méthode ne repose sur aucune hypothèse concernant les sources ou le bruit. Elle suppose simplement que les signaux mesurés sont bien des gradients de gravité. Nous établissons des

systèmes d'équations différentielles vérifiées par les gradients mais pas par le bruit aléatoire qui les affecte, ce qui nous permet de discriminer d'une façon nouvelle le signal du bruit. Nos tests montrent une réduction significative du bruit, sans altération du contenu haute fréquence. Les résultats peuvent encore être améliorés par l'utilisation d'un filtre léger rudimentaire, l'utilisation du filtrage seul ne permettant pas d'obtenir d'aussi bons résultats. Ainsi en utilisant la complémentarité du filtrage et de notre méthode, nous obtenons une réduction du bruit particulièrement efficace pour les gradients de gravité et de g_z mesurés en mer, préservant le contenu fréquentiel du signal. Ces points sont discutés plus en détail après l'exposé succinct qui suit du principe de la méthode elle-même (détaillée dans l'article *Pajot et al. – en fin de chapitre, la version acceptée pour publication*).

3.4.1 Principe de la méthode

La méthode pour réduire le bruit dans les données de gradiométrie en gravimétrie exposée dans l'article qui clôt ce chapitre est basée sur un principe simple. Les composantes du tenseur gradient de gravité dérivent du même potentiel, le bruit aléatoire qui affecte les différentes composantes non. Nous retirons donc du signal mesuré tout ce qui n'est pas compatible avec cette dépendance à un même potentiel.

En pratique, il faut mettre cette dépendance en équation. L'équation de Laplace, par exemple, est une mise en équation possible de la dépendance au potentiel. En effet, supposons des mesures simultanées idéales (sans bruit) de T_{xx}, T_{yy} et T_{zz} au même point (en dehors des sources). Alors nécessairement :

– Il existe un potentiel de gravité U tel que :

$$\begin{cases} T_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ T_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ T_{zz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{cases}, \tag{3.21}$$

– et ce potentiel vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{3.22}$$

donc les composantes mesurées sont liées par la relation :

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0. \tag{3.23}$$

En pratique, T_{xx}, T_{yy} et T_{zz} sont affectées de bruits notés (respectivement par rapport aux composantes) ϵ_{xx}, ϵ_{yy} et ϵ_{zz}. Notons les valeurs mesurées :

$$T^m_{\alpha\alpha} = T_{\alpha\alpha} + \epsilon_{\alpha\alpha}, \quad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{3.24}$$

Alors leur somme vérifie, substituant 0 à la somme des valeurs sans bruit en vertu de l'équation 3.23 :

$$T_{xx}^m + T_{yy}^m + T_{zz}^m = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}. \tag{3.25}$$

Les valeurs mesurées ne vérifient donc l'équation de Laplace que si la somme des bruits qui les affecte est nulle. Ponctuellement, le bruit peut se compenser ; nous pouvons imaginer qu'exceptionnellement, en des points de mesure isolés, les bruits vérifient $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0$. Mais puisque nous parlons de bruit aléatoire, nous supposons que cette relation ne peut pas être vraie en tout point de mesure. Ainsi, la présence de bruit aléatoire dans les mesures de T_{xx}, T_{yy} et T_{zz} se traduit par une violation de l'équation de Laplace, à condition de considérer plusieurs points de mesure. En pratique, ce qui précède est utilisé pour améliorer la qualité des mesures durant l'acquisition des données de gradiométrie en gravimétrie aéroportée et marine (*Fitzgerald and Holstein*, 2006) : la diagonale du tenseur est ajustée pour que la trace soit nulle. Cependant, la relation (3.23) ne met en jeu que les composantes diagonales du tenseur, et ne permet pas de contraindre les autres composantes. Il nous faut donc établir d'autres relations pour contraindre les autres composantes du tenseur.

Les données de gradiométrie marine dont nous disposons ont déjà subi un ajustement selon l'équation de Laplace lors de leur acquisition. Ainsi, même si nous disposons de valeurs pour T_{zz}, nous choisissons de ne pas les considérer pour l'étude, et nous nous concentrons sur les cinq composantes indépendantes restantes : T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy} et T_{yz}. Nous notons T_{xx}^m, T_{xy}^m, T_{xz}^m, T_{yy}^m et T_{yz}^m les valeurs mesurées, T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy} et T_{yz} représentant les valeurs sans bruit. Comme précédemment, il existe un potentiel de gravité U tel qu'en tout point de mesure :

$$\begin{cases} T_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ T_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ T_{xz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \\ T_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ T_{yz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Il reste à déduire, de cette dépendance des cinq composantes considérées au même potentiel, des relations permettant de les dissocier du bruit aléatoire.

Le potentiel de gravité possède des dérivées de tous ordres (voir par exemple *Blakely*, 1996). En particulier, U possède des dérivées troisièmes dans les directions x et y (comme toutes nos mesures sont réalisées sur le plan $z = 0$, nous choisissons de ne pas considérer les dérivées par rapport à z. Pour les exploiter comme contrainte, il faudrait prolonger les données vers le haut, ce qui va au-delà du champ de cette étude). Les quantités suivantes, entre autres, sont donc définies :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right), \text{ et } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right).$$

Or d'après le théorème de Schwarz, ou théorème de Clairaut, les dérivées commutent. Donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \end{array} \right. . \tag{3.27}$$

Ainsi, d'après les équations (3.26) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y} T_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} & = & 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} - \frac{\partial}{\partial x} T_{yy} & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.28}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial y} T_{xz} - \frac{\partial}{\partial x} T_{yz} = 0. \tag{3.29}$$

Nous avons ainsi établi des équations de contrainte permettant de relier entre elles les composantes mesurées simultanément au même point, et traduisant le fait qu'elles dépendent d'un même potentiel. Les composantes mesurées vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y} T^m_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} T^m_{xy} & = & \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial y} T^m_{xy} - \frac{\partial}{\partial x} T^m_{yy} & = & \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{xy} - \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{yy}, \end{array} \right. \tag{3.30}$$

et

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} T^m_{xz} - \frac{\partial}{\partial x} T^m_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{xz} - \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{yz}, \right. \tag{3.31}$$

où les ϵ désignent le bruit affectant chaque composante. Supposant que les dérivées du bruit aléatoire ne peuvent se compenser en tout point de mesure, la présence d'un bruit aléatoire se traduit par une violation des équations (3.28) et (3.29). Nous disposons pour notre étude d'une sixième valeur qui peut être reliée aux cinq composantes du tenseur. En effet, les valeurs de g_z, mesurées indépendamment des composantes du tenseur par un gravimètre embarqué en plus du gradiomètre marin, vérifient nécessairement :

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{3.32}$$

où U est le même potentiel que dans l'équation 3.26. Des relations (3.32) et (3.26) nous pouvons donc déduire deux équations de contrainte supplémentaires :

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = T_{yz} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g_z}{\partial x} = T_{xz}. \tag{3.33}$$

Finalement, nous obtenons les deux systèmes découplés :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y} T_{xx} & = & \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} & = & \frac{\partial}{\partial x} T_{yy} \end{array} \right. \tag{3.34}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y} T_{xz} & = & \frac{\partial}{\partial x} T_{yz} \\ \frac{\partial}{\partial x} g_z & = & T_{xz}, \end{array} \right. , \tag{3.35}$$

les systèmes (3.33) et (3.31) ayant été combinés en un seul système de deux équations indépendantes. Pour utiliser ces contraintes afin de réduire le bruit, nous traduisons au sens des moindres carrés le respect simultané des systèmes (3.34) et (3.35) et des équations d'observation. Autrement dit, nous inversons par moindres carrés les mesures pour trouver les valeurs de T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz} et g_z qui minimisent, sur l'ensemble des points de mesure et après adimensionnement des quantités mises en jeu, les résidus :

$$\begin{aligned} R_{Sys1} = \sum_{points\ de\ mesure} (& |T_{xx} - T_{xx}^m|^2 + \left|T_{xy} - T_{xy}^m\right|^2 + \left|T_{yy} - T_{yy}^m\right|^2 + \\ & |\partial_y T_{xx} - \partial_x T_{xy}|^2 + |\partial_y T_{xy} - \partial_x T_{yy}|^2 \Big) , \end{aligned} \tag{3.36}$$

et

$$\begin{aligned} R_{Sys2} = \sum_{points\ de\ mesure} (& |T_{xz} - T_{xz}^m|^2 + \left|T_{yz} - T_{yz}^m\right|^2 + |g_z - g_z^m|^2 + \\ & |\partial_y T_{xz} - \partial_x T_{yz}|^2 + |\partial_x g_z - T_{xz}|^2 \Big) . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les tests réalisés et le résultat de l'application aux données Bell sur une zone extraite de celle couverte par nos données sont présentés dans l'article en fin de chapitre.

3.4.2 Quelques remarques

Calcul des dérivées Au travers des équations (3.30) et (3.31), nous pourrions considérer qu'une des limitations de la méthode proposée réside dans le calcul des dérivées. En effet, supposons que l'on utilise un schéma aux différences finies pour calculer les dérivées. Alors, il résulte des équations (3.30) et (3.31) une amplification du bruit à réduire, d'autant plus forte que le pas de la grille est petit. Si la grille possède la même résolution dans les deux directions x et y, ce phénomène est sans incidence. En revanche, si une des directions est mieux résolue que l'autre, alors l'amplification du bruit dans une direction privilégiée est équivalente à la surpondération de certaines quantités. Par exemple, supposons $\Delta_x << \Delta_y$, où Δ_x et Δ_y sont les pas de grille dans les deux directions orthogonales x et y, et considérons l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial y} T_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} = 0. \tag{3.38}$$

En un point intérieur (i, j) de la grille des points de mesure, cette équation se traduit, en utilisant un schéma aux différences finies d'ordre 2 (et en reprenant les notations de l'article),

par :

$$\frac{T_{xx}(i,j+1)-T_{xx}(i,j-1)}{\Delta_y}-\frac{T_{xy}(i+1,j)-T_{xy}(i-1,j)}{\Delta_x}=0. \tag{3.39}$$

En ajoutant le bruit aux composantes on obtient :

$$\frac{T_{xx}(i,j+1)-T_{xx}(i,j-1)}{\Delta_y}-\frac{T_{xy}(i+1,j)-T_{xy}(i-1,j)}{\Delta_x}= \tag{3.40}$$

$$\frac{\epsilon_{xy}(i+1,j)-\epsilon_{xy}(i-1,j)}{\Delta_x}-\frac{\epsilon_{xx}(i,j+1)-\epsilon_{xx}(i,j-1)}{\Delta_y}. \tag{3.41}$$

Quand le pas Δ_x en x diminue *ceteris paribus* (*sic stantibus*), l'équation se réduit à ses termes devenus prépondérants :

$$-\frac{T_{xy}(i+1,j)-T_{xy}(i-1,j)}{\Delta_x}\approx\frac{\epsilon_{xy}(i+1,j)-\epsilon_{xy}(i-1,j)}{\Delta_x}, \tag{3.42}$$

et T_{xx} ne reçoit plus aucune contrainte de l'équation. Les schémas aux différences finies sont naturellement une façon des plus rudimentaires d'approcher les dérivées. D'autres méthodes plus sophistiquées, telle celle exposée dans l'article basée sur un ajustement polynomial, permettent d'amoindrir l'amplification du bruit. Néanmoins, nous avons tenu à présenter les résultats obtenus par différences finies car, si la composante dérivée dans la direction la moins bien résolue (T_{xx} dans notre exemple) ne reçoit plus aucune contrainte, et donc ne voit pas son bruit réduit, l'autre composante mise en jeu (T_{xy} dans notre exemple) dans la même équation voit quasiment 100% du bruit qui l'affecte disparaître. Quoi qu'il arrive, notre méthode retire donc deux tiers de l'ensemble du bruit sur les composantes, mais le choix du mode de calcul des dérivées permet de choisir comment se répartit cette diminution sur chacune des composantes. Le calcul des dérivées est donc moins une limitation de la méthode qu'un paramètre à ajuster pour optimiser la réduction du bruit sur une composante donnée.

Nous retirons deux-tiers du bruit. Nous expliquons cette limitation par le rapport entre le nombre d'équations de contrainte indépendantes (quatre) et le nombre de composantes dont on cherche à contraindre la valeur (six). Une réduction de 100% du bruit serait donc obtenue par l'ajout de deux équations de contrainte indépendantes de (3.34) et (3.35). Une équation possible se déduirait de l'équation de Laplace :

$$T_{xx}+T_{yy}+\frac{\partial}{\partial z}g_z=0. \tag{3.43}$$

Bien sûr il est toujours possible de prolonger g_z sur un plan à une altitude plus élevée (voir par exemple *Blakely*, 1996). Néanmoins, l'esprit de la méthode que nous avons développée est l'utilisation d'un ensemble de valeurs mesurées simultanément, dont chacune va contraindre les autres, et non de valeurs théoriques. Nous n'avons donc pas exploré cette voie. En revanche il serait intéressant d'étendre la méthode (le formalisme restant inchangé à trois dimensions)

à des données de gradiométrie aéroportée récoltées sur deux levés à altitude différente. En considérant les dérivées verticales, nous obtiendrions le nombre adéquat d'équations indépendantes (six) pour obtenir une réduction (presque) totale du bruit, d'autant plus que nous avons montré que les performances de la méthode étaient peu affectées par des erreurs de position en x et y. Nous montrons dans l'article que tant que nous n'avons pas six équations indépendantes, un léger filtrage (moyenneur) peut encore permettre d'améliorer les résultats ; l'utilisation des dérivées verticales permettrait de s'affranchir totalement du filtrage et donc d'avoir une méthode qui préserve totalement le contenu fréquentiel, ce qui est l'enjeu signalé plus haut de la réduction du bruit dans les données de gradiométrie en gravimétrie.

Enfin, signalons, encore une fois, l'apparition des dérivées troisièmes du potentiel de gravitation dans notre étude. Nous avons expliqué au paragraphe 3.1.1 qu'une mesure de ces dérivées permettrait d'éliminer le problème de la séparation des accélérations parasites dues à la rotation. Ici, nous utilisons les dérivées troisièmes pour réduire le bruit dans les dérivées d'ordre inférieur du potentiel de gravité. Il nous semble donc que, si la mesure et l'interprétation des dérivées secondes du potentiel n'en sont finalement qu'à leurs balbutiements, les applications de la mesure des dérivées troisièmes, et, pourquoi pas, d'ordres supérieurs, devraient apparaître rapidement comme une évolution naturelle en gravimétrie.

Comparaison avec la réduction du bruit opérée par Bell Nous comparons nos résultats avec ceux de la réduction du bruit opérée par Bell sur la même zone que celle décrite dans l'article. La figure (3.7) montre les différences entre, à gauche, nos résultats et les les données brutes, et à droite, les résultats de la méthode de réduction du bruit employée par Bell et les données brutes. Nous pouvons constater que les effets des deux méthodes de réduction du bruit sont similaires pour T_{xx} et T_{yy}, mais très différents pour les autres composantes du tenseur. En effet, (les échelles de couleurs étant identiques pour toutes les composantes) pour les autres composantes, l'amplitude des différences est bien plus faible pour la réduction du bruit opérée par Bell que pour le nôtre. Selon Bell Geospace, leur routine de réduction du bruit est basée sur le principe qu'en un point donné, la signature d'une anomalie doit être présente dans toutes les composantes (*C. Murphy, communication personnelle*). Est retiré de chaque composante tout ce qui ne vérifie pas ce principe. En fait, c'est également l'hypothèse de base de notre méthode, aussi, en l'absence d'information supplémentaire, ne comprenons nous pas les différences observées pour les composantes non diagonales. En revanche les résultats similaires sur T_{xx} et T_{yy} peuvent s'expliquer. En effet, le gradiomètre mesure également T_{zz}, en plus de cinq autres composantes indépendantes du tenseur. Nous supposons que les valeurs mesurées pour T_{zz} ont éte utilisées pour contraindre T_{xx} et T_{yy}, en vertu de l'équation de Laplace, ce qui expliquerait les résultats similaires aux nôtres pour ces deux composantes. Bien sûr, puisqu'il s'agit de données réelles, nous ne pouvons dire si notre méthode produit des résultats supérieurs aux leurs.

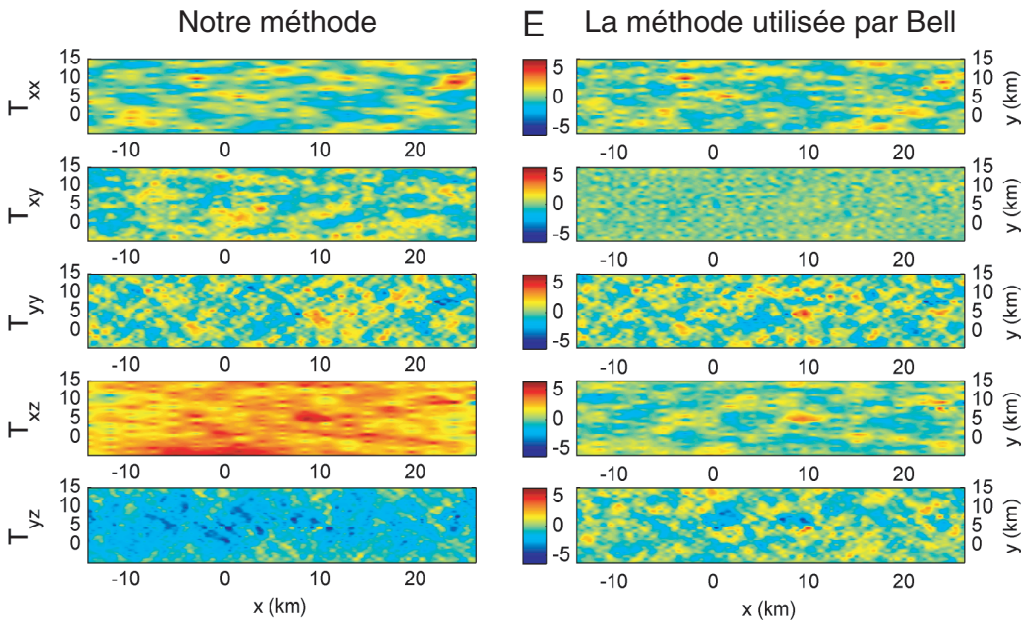


Figure 3.7: *Résidu entre, d'une part, nos résultats et les données brutes (à gauche), et d'autre part, les résultats de la réduction du bruit opérée par Bell et les données brutes (à droite). L'échelle de couleur est la même pour tous les graphes, en Eötvös.*

Retour sur le filtrage Nous avons mis au point cette méthode pour nous affranchir du choix d'une fréquence de coupure, choix parfois basé sur des hypothèses invérifiables comme dans les travaux de *While et al.* (2006) et *Lyrio et al.* (2004). Cependant, nous montrons que notre méthode et un léger filtrage sont complémentaires. Nous avons également montré qu'une propriété spectrale simple pouvait être déduite de la profondeur minimale des sources. Qu'il s'agisse de données aéroportées, marines ou spatiales, la distance entre le gradiomètre et le sol (le fond de l'eau pour les données marines) peut être considérée comme une profondeur minimale pour les sources et cette profondeur utilisée pour le choix d'une fréquence de coupure. Ceci ne suppose aucun *a priori* sur la distribution des sources ou sur le spectre du bruit. Ainsi, en combinant la méthode que nous avons mis au point avec un léger filtrage, même sans utiliser les dérivées verticales, il devrait être possible d'obtenir une réduction du bruit optimale dans les données de gradiométrie en gravimétrie, basée uniquement sur des considérations physiques simples.

Article 1

Ci-après, l'article « Noise reduction through a joint processing of gravity and gravity gradient data », soumis à la revue *Geophysics* le 21 Juin 2007, accepté pour publication le 11 Février 2008.

Noise reduction through a joint processing of gravity and gravity gradient data

G. Pajot[*†], O. de Viron[*‡], M. Diament[*], M.-F. Lequentrec-Lalancette[§] and V. Mikhailov[*¶]

[*] *Institut de physique du globe de Paris, France*

[†] *now at BRGM, Orléans, France*

[‡] *Université Paris 7 (UFR STEP), France*

[§] *Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, Brest, France*

[¶] *Institute of Physics of the Earth, Moscow, Russia*

(March 18, 2008)

GEO-2007-0162

Running head: **Noise reduction in tensor gravity data**

ABSTRACT

In mineral and oil exploration, gravity gradient data can help to delineate small scale features, which cannot be retrieved from gravity measurements. Removing high frequency noise while preserving the high frequency real signal, is one of the most challenging tasks associated with gravity gradiometry data processing.

We present here a method for noise reduction of gravity and gravity gradient data when both are measured in the same area, based on a least square simultaneous inversion of observations and physical constraints, inferred from the gravity gradient tensor definition and its mathematical properties. Instead of handling profiles individually, as in previous studies, our noise reduction method uses simultaneously measured values of the tensor components

and of gravity in the whole survey area, benefiting from all available information. We show on synthetic examples that more than half of the random noise can be removed from all tensor components, and nearly all of the noise from the gravity anomaly, without altering the high frequency information. We apply our method to a set of marine gravity gradiometry data acquired by Bell Geospace in the Faroe-Shetland Basin, in order to demonstrate its power to resolve small-scale features.

INTRODUCTION

Gravity gradient measurements have been used as a gravity exploration technique since the beginning of the twentieth century. The first instruments, built by Loràn d Eötvös (Shaw and Lancaster-Jones, 1922), allowed measurement, among four independent quantities, of the horizontal derivatives of the vertical component of the gravity acceleration vector. They were used successfully in field studies, for instance to map oil fields in Slovakia (Szabó, 1998). Presently, instruments like the Lockheed Martin gradiometer (Bell et al., 1997) allow measurements of five independent gravity derivatives and can retrieve the whole gravity gradient tensor (Full Tensor gravity Gradiometry or FTG). In addition to regional surveys, in the near future, the satellite GOCE will be launched by the European Space Agency with a gradiometer onboard. Its measurements of the gravity gradient tensor elements covering the whole Earth surface will, hopefully, lead to geoid and gravity field global models of unprecedented accuracy and spatial resolution (e.g. Klees et al., 2000). For both GOCE and Lockheed Martin instruments, the derivatives of the gravity vector are measured using pairs of accelerometers, separated from each other by a fixed distance (Hofmeyer and Affleck, 1994). The derivative of the gravity acceleration vector along one direction (defined by one pair of accelerometers) is approximated by the difference between the two measured accelerations, divided by the distance between the accelerometers. Using this system, common mode non gravitational linear accelerations, sensed identically by two accelerometers, cancel out during the data acquisition. Devices and special processing techniques are used to reduce the noise associated with non-linear accelerations of the craft due, for example, to ship rolling, or aircraft bumping (Dransfield and Lee, 2004; Canuto et al., 2003). As measuring gravity gradients retrieves features at a smaller scale than those characterized with similarly retrieved gravity measurements (Mumaw, 2004; ESA, 1999),

removing the noise in the gradient data without filtering out the high frequency information is a challenge. This requires development of methods that benefit from simultaneous observations of all FTG components.

So far, gradiometry data noise reduction methods developed for airborne and marine surveys have been based on independent analyses of the survey lines, and need a priori hypotheses to separate signal from noise. For example Lyrio et al. (2004), developed a wavelet filtering method and applied it on the tensor components along the survey lines. This method is based on the hypothesis that a large number of finer scale coefficients of the wavelet reconstruction are pure noise, whereas the larger scale coefficients are pure signal. They propose a method of determining of the scales that must be filtered out and, for the remaining scales, the minimum value of the wavelet coefficients to keep. The remaining non-zero coefficients are then used to estimate the filtered signal. Although reasonable, the assumption that noise and signal have different energy in real cases cannot be strictly demonstrated. Moreover, wavelet thresholding remains a filtering method. As the authors point out, short-scale features associated with targets of interest are preserved, but part of the removed field can still be associated with shallow sources. While et al. (2006) developed a method to characterize the spectral content of gravity gradients using 2D information, so that they can determine a cut-off wavelength above which the signal can be considered as non-geophysical. However this method fails when applied to real data because, according to the authors, the assumptions made on certain properties of the source may not be true for real data.

Recently, methods based on the fact that gravity gradients measured simultaneously are physically related to each other in order to locate the sources have been developed (Mikhailov et al., 2007). What we propose here is in the same spirit: a noise reduction

method based only on physical considerations. Being the successive derivatives of the same potential, gravity and gravity gradients are related to each other by differential equations. We keep as signal the part of data consistent with these differential equations. The inconsistent part is then considered to be pure noise.

For this study, we had at our disposal a dataset with nearly parallel survey lines, with perpendicular control lines, in the horizontal plane, and simultaneous gravity and gradiometry measurements. Consequently, all the algorithms and tests have been developed under those assumptions. In particular, we establish the differential relationships in the case of a survey during which gravity and gravity gradients are measured simultaneously and levelled to a common plane (as for example marine gravity gradiometry surveys). Nevertheless, the method can be easily generalized, but we did not test the performance of the generalized method. We perform the inversion of all the observation equations together with the differential equations. This yields an enhanced dataset, using all the available information. The first section addresses the mathematical formalism of the method. In the second section we demonstrate on synthetic data the capability of our method to remove random noise, correlated or not, while preserving the short scale patterns. We show that in that prospect, our method and filtering may be used complementarily, as long as we do not have additional physical constraints. In the third section we apply the method to real marine gravity gradiometry data collected by Bell Geospace in the Faroe-Shetland Basin. Finally we discuss the relevance of this method to mineral exploration and the processing of satellite data.

METHOD

Equations

Gravity gradiometry data are measurements of the derivatives of the components of the gravity vector $\mathbf{g}=(g_x, g_y, g_z)$ in three orthogonal directions (x, y, z) of space. These derivatives are the components of the gravity gradient tensor, which we denote by:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}, \text{ where } T_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial \beta} = \partial_\beta g_\alpha, \ \forall\{\alpha, \beta\} \subset \{x, y, z\}. \tag{1}$$

The gravity vector components are first order derivatives of a potential function V, which obeys Laplace's equation in free space. Gravity gradients are thus second order derivatives of the same potential function V. Therefore, in free space:

- $\mathbf{T}$ is symmetric:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial V}{\partial \alpha} = T_{\beta\alpha}, \ \forall\{\alpha, \beta\} \subset \{x, y, z\}, \tag{2}$$

- the trace of $\mathbf{T}$ is zero:

$$\sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} T_{\alpha\alpha} = \nabla^2 V = 0. \tag{3}$$

Due to equations 2 and 3, only five of the nine components of the tensor are independent quantities. Simultaneous measurements of five quantities at every point are thus enough to recover the whole tensor (Full Tensor gravity Gradiometry or FTG). In marine FTG surveys, the gravity gradients and g_z are measured simultaneously, with g_z being measured independently from the gradients. The theoretical work in this paper is based upon simultaneous measurements of T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz} and g_z. It can be extended to any case where

those quantities can be computed from other measurements, with independent errors, as in our study. By definition of $\mathbf{T}$, the following linear differential equation system holds:

$$\begin{cases} \partial_y T_{xx} &= \partial_x T_{xy} \\ \partial_y T_{xy} &= \partial_x T_{yy} \\ \partial_y T_{xz} &= \partial_x T_{yz} \\ \partial_y g_z &= T_{yz} \\ \partial_x g_z &= T_{xz} \\ \partial_z T_{xx} &= \partial_x T_{xz} \\ \partial_z T_{xy} &= \partial_x T_{yz} \\ \partial_z T_{yy} &= \partial_y T_{yz} \\ \partial_z g_z &= T_{zz} \end{cases} . \tag{4}$$

In our study, we consider that measurements are made at a constant z-level. We do not consider here upward continued data, therefore we drop the last four equations of system 4. We are left with the following two independent subsystems:

$$\begin{cases} \partial_y T_{xx} &= \partial_x T_{xy} \\ \partial_y T_{xy} &= \partial_x T_{yy} \end{cases} \quad \text{(horizontal system)} \tag{5}$$

and

$$\begin{cases} \partial_y T_{xz} &= \partial_x T_{yz} \\ \partial_x g_z &= T_{xz} \\ \partial_y g_z &= T_{yz} \end{cases} \quad \text{(vertical system)} \tag{6}$$

In the second subsystem, only two equations of the three are independent. We keep the first two, and system 6 is reduced to:

$$\begin{cases} \partial_y T_{xz} &= \partial_x T_{yz} \\ \partial_x g_z &= T_{xz} \end{cases} \quad \text{(vertical system)} \tag{7}$$

Ideal noise-free measurements of $T_{\alpha\beta}$ and g_z would satisfy the conditions imposed by systems 5 and 7 at any measurement point. Random noise, on the contrary, would not follow these equations. We will use system 5 and system 7 as physical constraints that must be satisfied by noise-free measurements, in combination with observation equations, in order to reduce the random noise in the data. In other words, we will compute values of T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz} and g_z that, at each measurement point, satisfy optimally both systems 5 and 7 and the observation equations:

$$\begin{cases} T_{\alpha\beta} & = T^m_{\alpha\beta}\,, \quad \alpha\beta \in \{xx, xy, yy, xz, yz\} \\ g_z & = g^m_z, \end{cases} \tag{8}$$

where the superscript m denotes the measured value. Note that Laplace's equation (zero trace, equation 3) is usually used to relate the tensor components to each other in order to improve the quality of the signal (Hammond, 1999) during the acquisition of FTG data. Our method differs from previous work, however, since it uses differential equations to relate the components to each other; in particular, our method requires that we provide an adequate way to compute the derivatives of the components. This problem is adressed later in this paper.

Least square formulation of the problem

We assume henceforward that the measurement errors follow a Gaussian or close to Gaussian distribution. We simultaneously solve the observation equations 8 with the physical constraint equations 5 and 7 in order to reduce the noise in the data. Practically, we compute the values of T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz} and g_z so that they minimize the sum over all data points of the squared misfits d^{obs}_{α} between computed values and observations, defined

at each data point i by:

$$d_{\alpha}^{obs}(i) = |T_{\alpha}(i) - T_{\alpha}^{m}(i)| \tag{9}$$

where $T_{\alpha}^{m}(i)$ is the value of a component (tensor component or g_z) measured at one point i, and $T_{\alpha}(i)$ the value of the same component retrieved by our method at the same point. The computed values must simultaneously satisfy the physical constraint equations, which means that, in addition to minimizing the sum of the squared misfits d_{α}^{obs} to the measured values, they also have to minimize the sum of the squared quantities $d_{\gamma\delta}^{eq}$ defined by:

$$d_{\gamma\delta}^{eq}(i) = |\partial_x T_{\gamma}(i) - \partial_y T_{\delta}(i)| \tag{10}$$

where $T_{\gamma}(i)$ and $T_{\delta}(i)$ stand for tensor components involved in one equation of the horizontal system 5 or in the first equation of the vertical system 7. We also minimize, from the last equation of the vertical system 7, the sum of the squared quantities d^{eq} defined by:

$$d^{eq}(i) = |\partial_x g_z(i) - T_{xz}(i)| \,. \tag{11}$$

For Gaussian errors, finding the minimum variance solution to this problem is equivalent with minimizing the sum of the square residuals $(d^{obs})^2 + (d^{eq})^2$. Consequently, for the horizontal system 5 we compute values of T_{xx}, T_{xy} and T_{yy} that minimize the sum:

$$R^{\mathrm{h}} = \sum_{data\ points} \Big(|T_{xx} - T_{xx}^{m}|^2 + \left|T_{xy} - T_{xy}^{m}\right|^2 + \left|T_{yy} - T_{yy}^{m}\right|^2 + \\ |\partial_y T_{xx} - \partial_x T_{xy}|^2 + |\partial_y T_{xy} - \partial_x T_{yy}|^2 \Big) \,, \tag{12}$$

and, for system 7, we compute values of T_{xz}, T_{yz} and g_z that minimize the sum:

$$R^{\mathrm{v}} = \sum_{data\ points} \Big(|T_{xz} - T_{xz}^{m}|^2 + \left|T_{yz} - T_{yz}^{m}\right|^2 + |g_z - g_z^{m}|^2 + \\ |\partial_y T_{xz} - \partial_x T_{yz}|^2 + |\partial_x g_z - T_{xz}|^2 \Big) \tag{13}$$

Quantities involved in equation 13 are set to be dimensionless, as explained in the next paragraph. Note that, by nature, the method is not designed to remove any bias.

Computing the derivatives

As mentioned previously, in order to compute the enhanced values of the components, we need a way to compute their derivatives. Most of the numerical differentiation schemes express the derivatives as linear combinations of data distributed on a lattice. This discretization process is associated with an error becoming larger when the distance between two data points increases. Assuming that the data are distributed on a grid with regular steps Δ_x and Δ_y along $x-$ and $y-$directions, we basically adopt two derivative schemes:

- compute centered finite differences of order 2: derivative $\partial_x T_\alpha(x_i, y_j)$ of one component T_α is approximated at point (x_i, y_j) by:

$$\partial_x T_\alpha(i,j) \approx \frac{T_\alpha(x_{i+1}, y_j) - T_\alpha(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta_x} \tag{14}$$

  where (x_{i+1}, y_j) and (x_{i-1}, y_j) are neighbouring data points of (x_i, y_j) in the x-direction, both separated from (x_i, y_j) on the computing grid by Δ_x. Similar expressions hold for the derivatives along the y-direction.

- compute from several neighbouring points a low degree polynomial fit of the data in the direction of the derivative, and use the analytical derivative of this polynomial function to approximate the derivative of the component. Details are given in Appendix A. Using such an approximation is made necessary when data are sampled much more densely in one direction than in the other. Using this approximation helps to prevent noise enhancement due to the derivative computation (this effect is considered here being much larger than the discretization error). Then, derivative $\partial_x T_\alpha(x_i, y_j)$ of one component T_α in the x-direction is approximated at point (x_i, y_j) by:

$$\partial_x T_\alpha(x_i, y_j) \approx \sum_{m=i-N}^{i+N} \beta_m \; T_\alpha(x_m, y_j) \tag{15}$$

where the coefficients β_m are computed according to the method described in Appendix A. Typically, the number $2N+1$ of points from which the polynomial approximation is computed is chosen such that the distance $\Delta = x_{i+N} - x_{i-N}$ equals Δ_y. We use a similar expression when computing the derivative along the y-direction.

The finite difference method, albeit simplistic, is shown to yield results as good as the more sophisticated polynomial method, as long as the data are evenly distributed. It is much faster, therefore we use it in all the tests with evenly distributed data. We do not need data to be distributed along profiles parallel to the $x-$ and $y-$axes. Derivatives can be computed in the two ways that we just mentioned using the true coordinates of the data points. However, for simplicity, we present our results for data distributed on regular grids. We address the problem of irregular data sampling later, when applying our method to real marine gravity gradiometry data.

Matrix formulation

The derivatives of one tensor component are expressed as linear combinations of the values of the same component at neighbouring points. This allows us to write the problem of minimizing residuals in equations 12 and 13 in matrix form. We denote $\mathbf{A}$ the matrix of normal equations (physical constraint and observation equations), $\mathbf{x}$ the vector containing the unknowns (i.e. the enhanced values of the tensor components and g_z, and $\mathbf{b}$ the observation vector. The system of equations:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{16}$$

is overdetermined. We compute the values of T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz} and g_z that minimize the L^2-norm of the vector $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$.

We have two kinds of equations described by the matrix **A**: observation and physical constraint. Matrix **A** is made of two separate blocks:

(1) one block with observation equations of the type given in equation 8; the corresponding block of the normal matrix is diagonal, and the associated block of vector **b** is the set of observations,

(2) one block with physical constraint equations 5 or 7. Equations of the form:

$$\frac{\partial}{\partial x} T_{y\alpha}(x_{i_0}, y_{i_0}) = \frac{\partial}{\partial y} T_{x\alpha}(x_{i_0}, y_{i_0}) \tag{17}$$

can be written as:

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_x(i_0)} a_i T_{y\alpha}(x_i, y_{i_0}) - \sum_{i \in \mathcal{V}_y(i_0)} b_i T_{x\alpha}(x_{i_0}, y_i) = 0, \tag{18}$$

where $\mathcal{V}_x(i_0)$ and $\mathcal{V}_y(i_0)$ are sets of indices denoting coordinates of neighbouring points of (x_{i_0}, y_{i_0}). The number and positions of the neighbouring points depend on the method chosen to compute the derivatives, as do the values of the coefficients a_i and b_i. Similar expressions are derived for equations 7 involving g_z. For instance, using a centered finite difference scheme of order 2, the first equation of system 5 becomes:

$$\frac{1}{\Delta_x} T_{xy}(x_{i+1}, y_i) - \frac{1}{\Delta_x} T_{xy}(x_{i-1}, y_i) - \frac{1}{\Delta_y} T_{xx}(x_i, y_{i+1}) + \frac{1}{\Delta_y} T_{xx}(x_i, y_{i-1}) = 0. \tag{19}$$

The associated block of the normal matrix is not far from diagonal, and the corresponding components of vector **b** are zeros.

Matrix **A** is sparse. Many algorithms allow fast solving of least squares inversion with fair stability (e.g. Paige and Saunders 1982). Note that when expressed in SI units (usual units are the Eötvös unit for gravity gradients, one Eötvös being equal to $10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}$, and the mGal for gravity, with 1mGal=$10^{-5}\,\mathrm{m.s}^{-2}$), g_z and tensor component values associated with the

same geology may differ by several orders of magnitude; this affects the efficiency of the inversion algorithm, and overweights the impact of some of the equations. To overcome this problem, equation systems 5 and 7 are transformed so that the equations only involve quantities with no physical dimension and of order of magnitude 1. Instead of solving for g_z and tensor components $T_{\alpha\beta}$, we solve for quantities:

$$\begin{cases} g'_z &= \frac{1}{g_0}\, g_z \\ T'_{\alpha\beta} &= \frac{\Delta_0}{g_0}\, T_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{20}$$

where g_0 is the standard deviation of the value of g_z in the survey area and Δ_0 is the diameter of the survey area. Intervals Δ_x and Δ_y between points along $x-$ and $y-$directions become Δ'_x and Δ'_y respectively, where:

$$\begin{cases} \Delta'_x = \frac{\Delta_x}{\Delta_0} \\ \Delta'_y = \frac{\Delta_y}{\Delta_0} \end{cases} . \tag{21}$$

This procedure improves the efficiency of the algorithm for system 7. For example, replacing T_{xx} and T_{xy} by $\frac{\Delta_0}{g_0}T'_{xx}$ and $\frac{\Delta_0}{g_0}T'_{xy}$ respectively, and Δ_x and Δ_y by $\Delta_0\Delta'_x$ and $\Delta_0\Delta'_y$ transforms equation 19 into:

$$\frac{1}{\Delta'_x}T'_{xy}(x_{i+1}, y_i) - \frac{1}{\Delta'_x}T'_{xy}(x_{i-1}, y_i) - \frac{1}{\Delta'_y}T'_{xx}(x_i, y_{i+1}) + \frac{1}{\Delta'_y}T'_{xx}(x_i, y_{i-1}) = 0, \tag{22}$$

and the finite difference form of the last equation of system 7 becomes:

$$\frac{1}{\Delta'_x}g'_z(x_{i+1}, y_i) - \frac{1}{\Delta'_x}g'_z(x_{i-1}, y_i) - T'_{xz}(x_i, y_i) = 0. \tag{23}$$

In our study we normalize data in order to account for the amplitude difference of the different measured quantities. In addition, this can be extended to account for an a priori knowledge about the quality of each measurement (for instance, if the variance/covariance matrix is known).

TESTS ON SYNTHETIC DATA

In this section, tests are performed using synthetic data computed on regular square grids.

Estimator for the noise reduction

Denoting X the synthetic value of a tensor component or of g_z prior to noise addition, X_n the value when noise is added, and X_r the result of our least squares fit, we determine the performance of the noise reduction method by estimating, for each component, the noise reduction factor:

$$\lambda = \frac{\mathrm{Var}\,(X_n - X) - \mathrm{Var}\,(X_r - X)}{\mathrm{Var}\,(X_n - X)} \tag{24}$$

where Var is a discrete realization of the variance computed using all the values on the grid. A positive value of λ indicates that the noise has been reduced, and the magnitude of λ the ratio of the noise that has been eliminated, if so. Values close to 1 indicate that a high percentage of the noise has been removed, and near zero values indicate poor performance of the method.

Sensitivity to the nature and magnitude of noise

We first describe the sensitivity of our method to the data resolution and the noise level using Gaussian white noise and autocorrelated noise. To this end, using formulae derived by Okabe (1979), we compute synthetic gravity gradients and g_z corresponding to a structure made of three rectangular prisms, the characteristics of which are given in Table 1, and illustrated in Figure 1. This structure combines bodies at different depths and having different spatial extents, which allows us to test the efficiency of our noise reduction method for a broad range of spatial scales. The three bodies could represent a large deep basement

(Prism 1), a shallow anomaly (Prism 2), and a thin dyke (Prism 3). The synthetic signal can be seen on the left panels of Figure 2 and Figure 3.

Gaussian white noise

Tests are performed with white Gaussian noise, of standard deviation σ (in Eötvös for the tensor components, in mGal for g_z), which is set as a percentage of the maximum peak-to-peak amplitude of the original (noise-free) component.

Data resolution

We add noise to the synthetic data with σ equal to 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the components and compare the noise reduction results at different grid resolutions (grid steps). These results are shown in Table 2, and illustrated in Figures 2 and 3. Increasing the grid resolution improves the results. In particular, λ reaches a value that differs from 1 by less than 5 per mil, indicating that the noise reduction technique removed more than 99% of the noise on g_z. Besides, more than one half of the noise is removed from the tensor components. However, as the grid step decreases, the $\lambda-$parameter tends asymptotically to a maximum value $\lambda_T^{\max}$ that depends on the component T (tensor component or g_z) under consideration. These $\lambda^{\max}$ values are such that, defining for each system the average value λ_{lim} by:

$$\begin{cases} \lambda_{\text{lim}}^{\text{h}} = \frac{\lambda_{Txx}^{\max}+\lambda_{Txy}^{\max}+\lambda_{Tyy}^{\max}}{3} & \text{for system 5} \\ \lambda_{\text{lim}}^{\text{v}} = \frac{\lambda_{Txz}^{\max}+\lambda_{Tyz}^{\max}+\lambda_{gz}^{\max}}{3} & \text{for system 7} \end{cases} \tag{25}$$

we have:

$$\begin{cases} \lambda_{\text{lim}}^{\text{h}} \approx \frac{2}{3} \\ \lambda_{\text{lim}}^{\text{v}} \approx \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{26}$$

The two-third ratio is probably linked with the ratio between the number of independent equations (two) and the number of unknowns (three). To confirm this conjecture, we performed tests removing one equation. Removing one equation leaves one equation with two unknowns, leading to $\lambda^{\mathrm{h}}_{\mathrm{lim}} = \lambda^{\mathrm{v}}_{\mathrm{lim}} \approx \frac{1}{2}$. The two systems do not have the same behaviour, however. For system 5, both tensor components involved are corrected to the same extent ($\lambda_{\mathrm{max}} = 0.50$) regardless of which equation is kept. This stands for system 7 if we keep the first equation and drop the equation involving g_z. Instead, if we keep the equation involving g_z and drop the first equation, we obtain $\lambda^{\mathrm{max}} = 1.00$ for g_z and $\lambda^{\mathrm{max}} = 0.00$ for T_{xz}. Gravity gradients do not seem to benefit from any information brought by g_z. Therefore we conclude that, as long as data have a sufficient resolution, we remove two thirds of the random noise that they contain. We observed in our simulations that, given a grid resolution, the λ_{lim} value does not change when the level of noise increases, staying equal to two thirds. We will focus, in the section dedicated to spectral content, on the behaviour of our method as the data grid sampling decreases, since this is related to the frequency content of the sampled signal.

Signal to noise ratio

We investigate the impact of raising or lowering the noise level, with a given grid step. As shown in the previous example, optimal values are obtained for a grid step equal to 200 m or less. Consequently, all following tests are performed on a regular square grid with a step of 200 m. Results are shown in Figure 4. The method becomes more effective as the signal-to-noise ratio decreases, and does not perform well when the noise level is too low. This is thought to be related to the criteria used for stopping the least square inversion (see Paige and Saunders (1982) for details on the inversion algorithm used here), and to the

measurement error becoming small with respect to the discretization error. As the noise level increases, the noise reduction factor λ on each component reaches its optimum value, leading to a mean noise reduction factor of two thirds.

Impact of smoothing

Low-pass filtering is designed to attenuate the high frequency part of a signal. In this section we compare the results of our method with a low-pass filter. A Gaussian smoothing (Wells, 1986) with standard deviation 0.65 is applied to the gridded data in a 3×3 point window, (Figures 5, 6 and 7 for the horizontal system 5, and Figures 8, 9 and 10 for the vertical system 7). Of course better filters could be used; however, since we only wish to demonstrate how our method handles high frequencies, this simple filter suffices.

With Gaussian smoothing, the λ-parameter tends asymptotically towards a value close to 0.8, for all the components. For T_{xx}, T_{yy}, T_{xz} and T_{yz}, Gaussian smoothing performs better than our method when the noise increases, but for T_{xy} both methods perform similarly. For g_z, our method gives the best result. For all components, a combination of both smoothing and our method gives better results than using either of them alone. We show later through spectral analyses that smoothing and our method have distinct and complementary natures; this is particularly interesting at high frequencies. Note that for lower values of the standard deviation of the noise, the $\lambda-$parameter is negative for smoothing, which means that after smoothing the data fit the noise-free synthetic data less well than without smoothing.

To conclude, we have shown on synthetic data that our method allows to remove two

thirds of the added noise, independently of the noise level, as long as the noise is not too small. In our test cases, Gaussian filtering performs slightly better than our method. It removes the noise according to hypotheses on the spectral content of the signal. On the other hand, our method reduces the noise on the basis of the potential basis of the tensor. Filtering and our method can consequently be used together to optimize the noise reduction. We also tested our method on synthetic data contaminated with covariant noise generated from Gaussian distributions by a second order autoregressive process, as well as uniformly distributed (non-Gaussian) noise. We obtain similar results as with Gaussian white noise (as long as the noise autocorrelation is not unrealistically high in the case of a covariant noise).

Short wavelength preservation

As outlined in the introduction, gravity gradients can help to retrieve the shortest wavelengths of the gravity signal, when these cannot be precisely measured by gravimeters. Therefore, a gradiometry noise-reduction method must preserve the high-frequency content. In this respect, our method is complementary to smoothing, as illustrated by the following example. We generated a structure composed of 40 identical rectangular prisms having dimensions of 50 km$\times$50 m in the (x, y)-plane, depths to their top and bottom sides of 30 m and 10 km respectively, and density 1,000 kg/m^3. Twenty prisms are regularly set parallel to the y-axis at every 2.4 km. These are intersected by twenty other prisms, regularly set parallel to the x-axis at every 2.4 km. The gradient contributions of the 40 prisms are added, so that their intersections (rectangular prisms with square 50 m$\times$50 m top sides) have twice the density of the individual prisms. The projection of this structure onto the $(x, y)-$plane is shown in Figure 11. We computed the g_z signal on three different square

50 km×50 km grids, with data points every 250 m, 500 m and 1000 m. We contaminate g_z with 10% Gaussian noise. For the grids having steps of 250 m and 500 m, the λ-parameter for our method is greater than 0.99, which is always greater than the maximum λ value (0.94) obtained with smoothing (the best window size for smoothing being, according to our tests, 7x7 for 250 m step grids and 5x5 for 500 m step grids). Results on a profile for the 250 m step grid and the 500 m step grid are shown on Figure 12 and Figure 13. The best result obtained by Gaussian smoothing does not fit the original noise-free synthetic data as well as our solution. The average power spectra in the $x-$direction (mean of the spectra along all profiles parallel to the $x-$axis) for these two examples are shown in Figure 14 and Figure 15. For the 250 m step grid, the power curve of our solution (dotted black) matches almost exactly that of the original data (red). At the larger grid step, our solution has too much power in the shorter wavelengths (high frequencies), but its spectrum still has a shape similar to that of the original data. Tests performed at a grid step equal to 1000 m confirm that, when approaching the Nyquist frequency ($0.84=1/1.19\,\mathrm{km}^{-1}$), power in the high frequencies is amplified (see Figure 16). The anomalies are better detected than with smoothing, but their magnitude is overestimated. It then becomes necessary to apply a light smoothing (3x3) to our solution to retrieve the original signal, but with greater accuracy than with smoothing only. This example shows that smoothing and our method are complementary to each other, especially for short wavelength signals.

APPLICATION TO MARINE GRAVITY GRADIOMETRY DATA

We now apply our method to a set of marine gravity gradiometry data and the vertical gravity anomaly collected over the Faroe-Shetland Basin. These data were kindly provided by Bell Geospace for this study. The various components were corrected for bathymetric

effects prior to being provided to us. The dataset we consider is a subset of a larger survey, thoroughly described by Mumaw (2004). The survey is composed of roughly parallel lines oriented at 45N, called the L-lines and lines perpendicular to the L-lines, called the T-line, mapped onto the measured gravity anomaly on Figure 17.

Application to Bell Geospace data

The tests in appendix B show that, as long as the data are distributed on a near regular lattice, we can work on a regular grid without greatly impacting the result, while saving computing time. We prepared the dataset to be handled in the following two steps:

(1) Rotation of the grid: coordinates are rotated in such a way that the L-lines are parallel to the x-axis, pointing eastwards, and the T-lines are parallel to the y-axis, pointing northwards. As the gravity gradients are tensor components, they are transformed to account for the rotation of the coordinate system.

(2) Grid regularization: we determine a grid made of strictly parallel and perpendicular lines that approaches the original survey grid. We construct a rectangular lattice with points regularly spaced on a L- or T-line and identify a given lattice point with the nearest survey point. We obtain 29 L-lines separated by 750 m and 21 T-lines, separated from each other by 2250 m. This operation results in a grid with 1018 points regularly spaced on the T-lines, with an interval equal to 21 m, and 2105 points on a L-line, with the same interval. We obtain a standard deviation of the position errors of less than 20 m, which we have shown to be of no significant impact on the result.

Results

We present the result of our method only, with no additional filtering. Indeed, choosing the appropriate cutoff wavelength for smoothing would require a priori hypotheses on the sources, which is not relevant here. Before we applied our noise reduction method we tested the raw data for relationships 5 and 7. Residuals between computed derivatives of g_z in $x-$ and $y-$directions and T_{xz} and T_{yz} respectively showed no large scale patterns, only small scale spatial variations with amplitudeof the same magnitude as the signal. After applying the method, this amplitude was significantly reduced (by 50 % to 100 %). The results are illustrated in Figure 18 and Figure 19. We can see in these figures that many short wavelengths features have been removed. However, small scale features are preserved, that would have been smoothed out by low pass filtering. The gravity anomaly g_z has been slightly modified. The comparison, on a profile parallel with the $x-$axis, between the noise reduction result and the original raw data is shown for T_{yz} in Figure 20.

DISCUSSION

When describing a gravity gradiometer system similar to the Lockheed Martin instrument, van Leeuwen et al. (2005) identified two general types of noise in airborne (or shipborne) gravity gradiometry measurements: deterministic and intrinsic random noise. Deterministic noise has mainly three causes:

- the change in gravity sensed by the gradiometer when the masses move with respect to the instrument itself (self-gradient);
- an additional contribution to the signal, called residual acceleration sensitivity, that is proportional to the accelerations measured by the gradiometer,

- a contribution due, for instance, to the rotation of the platform on which the gradiometer is mounted.

The self-gradient is a true gradient, therefore it obeys the equations in systems 5 and 7. The same holds for rotational noise, which mimics a gravity gradient. According to van Leeuwen et al. (2005), these contributions are easily corrected, since they can be modeled or measured prior to the survey and removed during or after acquisition. Intrinsic random noise, however, really limits the measurement accuracy, and even limits the reduction of the residual acceleration sensitivity. Being purely random, this intrinsic noise is fully adressed and successively removed by our method.

In the GOCE mission, as well as in airborne surveys, all tensor components are measured simultaneously, but no simultaneous measurement of g_z is performed. The gravity field is computed from both the measured gradient components, for the high frequency part, and the precise determination of the orbit of the satellite, for the low frequency part (Visser and Van den Ijssel, 2000). Our method can still be applied to the components involved in system 5, providing a method can be found to compute the $z-$derivative (for example by using a multisatellite system or upward continuation of the components). The method can even be refined using, instead of systems 5 and 7 the physical constraints defined by the

following approximate linear differential system:

$$\begin{cases} \partial_y T_{xx} & = & \partial_x T_{xy} \\ \partial_y T_{xy} & = & \partial_x T_{yy} \\ \partial_y T_{xz} & = & \partial_x T_{yz} \\ \partial_z T_{xx} & = & \partial_x T_{xz} \\ \partial_z T_{xy} & = & \partial_x T_{yz} \\ \partial_z T_{yy} & = & \partial_y T_{yz} \\ \partial_y T_{zz} & = & \partial_z T_{yy} \\ \partial_x T_{zz} & = & \partial_z T_{xz} \end{cases} . \tag{27}$$

The vertical component T_{zz} being actually measured rather than computed from T_{xx} and T_{yy}, Laplace's equation may also be added.

CONCLUSION

We have developed a method for simultaneous noise reduction of independent gravity and Full Tensor gravity Gradiometry data. This method does not require any a priori information. Moreover, it uses all measured values simultaneously, instead of handling lines of the survey separately. Therefore all the available information coming from the data is used to improve the values at each measurement point. Since we do not filter the data, high frequencies of the signal are preserved. This is of tremendous importance when dealing with such data since the expected benefit from gravity gradiometry data is the additional high frequency information brought by the derivatives, as compared with gravity measurements only. Our method corrects half the random noise affecting gravity gradients, (which can be later improved by light filtering if needed for gradiometry interpretation) and most of

the noise in the gravity anomaly. Furthermore, results are only weakly affected by noise autocorrelation. Finite differences may be replaced by another way to compute the derivatives, as long as the derivative can be written as a linear combination of some values of the components. This, however, increases the computing time (from 3s to 17s for the Bell Geospace data example, on a standard personal computer) and is not necessary for low resolution data. We demonstrated the power of this method on synthetic data, and illustrated it on real data aquired by Bell Geospace over the Faroe-Shetland Basin. We obtained maps showing that the noise was visibly reduced and that small scale features were preserved that would have been smoothed out by a filtering method.

In the Bell Geospace data that we used for our study, the diagonal components of the tensor have been preprocessed so that the trace is zero. Consequently, only two of these diagonal components having independent errors, our method cannot be applied using the three diagonal components simultaneously. We choose to not solve for T_{zz}, as, g_z beeing available in our case study, we had another option to remove the noise from the non diagonal components. The noise reduction is likely to be improved if we add to the horizontal and vertical system equations involving T_{zz}, when it is measured simultaneously with the other gradients.

ACKNOWLEDGMENTS

We gratefully acknowledge Bell Geospace (and, in particular, Colm Murphy) for making marine gravity gradiometry data available for our study. We also thank Maria Annechione, Des Fitzgerald, Horst Holstein, Xiong Li, and anonymous reviewers for careful reading of this manuscript and helpful remarks. G. Pajot benefited from a DGA grant, and the whole work was supported by the French space agency CNES through the Tosca committee. We

thank M. Van Camp and M. Beuthe for discussion and helpful comments. This is IPGP contribution 2330.

APPENDIX A

COMPUTATION OF THE DERIVATIVES

The equations we used throughout the study are of the form

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{A-1}$$

or, in the case of system 7, of the form:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} - G(x,y) = 0, \tag{A-2}$$

or

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} - G(x,y) = 0. \tag{A-3}$$

Let us focus on the form described by equation A-1. This can be approximated by the centered difference scheme :

$$\frac{F(x_{i+1},y_j) - F(x_{i-1},y_j)}{\Delta x} = \frac{G(x_i,y_{j+1}) - G(x_i,y_{j-1})}{\Delta y} \tag{A-4}$$

This scheme becomes increasingly unfavorable when the sampling interval decreases, if the signal does not include enough high wave number content. This is obviously the case in our simulation, due to the simplicity and lateral extent of the sources in consideration. Let us suppose for now that the sampling interval decreases in the x-direction ($\Delta x \ll \Delta y$).

To overcome this problem, we apply the equation linking the gradient to what would be the best polynomial fit of the data, with given degree, in the direction x of the highest

sampling. The approximation of the $2N+1$ measurements $F(x_k, y_j), k = i-N...i+N$, using a polynomial of degree n at the locations x_k, can be written as

$$F(x_k, y_j) \simeq \sum_{m=0}^{n} \alpha_m x_k^m \tag{A-5}$$

where the coefficients α_i are determined so that the sum of the squared residuals is minimal. We determine the expression of the α_i coefficients as a function of the value of the datum $F(x_k, y_j)$, and we substitute them in the expression of the derivative of the polynomial fit:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \sum_{m=1}^{n} m\alpha_m x_i^{m-1} \tag{A-6}$$

As every α_m can be expressed as a linear combination of the measurements $F(x_k, y_j)$, we then obtain an expression such as

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \sum_{m=i-N}^{i+N} \beta_m F(x_m, y_j) \tag{A-7}$$

where β_m coefficients depend on $\frac{1}{\Delta x}$. Consequently, in the least squares fit of our data, we replace equation A-4 by

$$\sum_{m=i-N}^{i+N} \beta_m F(x_m, y_j) - \frac{G(x_i, y_{j+1}) - G(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} = 0. \tag{A-8}$$

Similarly, equation A-2 transforms to:

$$\sum_{m=i-N}^{i+N} \beta_m F(x_m, y_j) - G(x_i, y_j) = 0, \tag{A-9}$$

while equation A-3 stays:

$$\frac{F(x_i, y_{j+1}) - F(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} - G(x_i, y_j) = 0. \tag{A-10}$$

APPENDIX B

EFFECT OF GRID IRREGULARITIES

In our tests we used regular square grids with identical steps in the x and y directions. In order to handle real data, we must account for two main differences:

- the sampling interval along a line is by far smaller than the distance between lines;
- the positions of the measurement points do not follow straight lines.

Grid anisotropy

At first we work on a grid where data are distributed on a lattice made of parallel and perpendicular straight lines, but we investigate what happens for the points not located where lines intersect. First, we work with the synthetic structure presented in the previous section, a 50 km×50 km square grid, with a noise level equal to about 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the component. In this case where the interval between two consecutive points on a profile is small, finite differences are not appropriate to compute the derivatives when handling real data. We performed tests with several orders of finite difference schemes, with no significant improvement in the results. We present here what happens when the sampling interval decreases in one direction. Table 3 and Table 4 summarize the noise reduction results when the sampling interval decreases, respectively in the y-direction and in the x-direction. In both cases, the derivatives were computed using centered finite differences of order 2 (see Appendix A). The derivative along the direction in which the sampling interval decreases (T_{xx} and T_{xz} for y-interval decreasing, T_{yy} and T_{yz} for x-interval decreasing) or components that have derivatives involved in more than

one equation (T_{xy} and g_z) are all better corrected because the sampling interval decreases in either of the two directions. However, at the same time the noise affecting the other components is less well reduced. The problem is overcome when using, for the calculation of derivatives, a least square fit of a low degree polynomial as described in Appendix A. Results are improved in such a way that we retrieve results similar to those obtained on regular square grids. However, this multiplies by five the computing time, and may be avoided when not necessary.

Positioning misfit

To test what happens for data that are not perfectly distributed along straight lines, we performed the following test.

i) Let (x_i^0, y_j^0) be the coordinates of the measurement points on a regular square grid. A random component with normal distribution is added to the coordinates of each of these points. Let us denote (x_i^1, y_j^1) the new coordinates.

ii) We generate synthetic data : the values T^1 of the components are computed at the (x_i^1, y_j^1) points.

iii) We add noise to the values of the components and then we apply our method to the data, but assuming the measurement points to be (x_i^0, y_j^0) instead of (x_i^1, y_j^1).

iv) We compare the results of our method, on the one hand to the noise-free synthetic data T^1 computed at the (x_i^1, y_j^1) points (Test "A"), and on the other hand to the noise-free synthetic data T^0 computed at the (x_i^0, y_j^0) points (Test "B").

We performed this test with the same synthetic data as the ones used here above, with 10 % noise added on the components, using a regular square grid with 250 m sampling interval. For both anomalous bodies, we added a random normal error with 25 m standard deviation (corresponding to our dataset) on the x and y coordinates. Results are almost identical to those obtained in the previous sections for regular square grids. The λ parameters are slightly better (approximately 0.01 greater) for Test B than for Test A though, which may indicate that in the examples we studied, our method handles the noise in the coordinates as noise in the components. But the difference is too small to be considered statistically significant.

REFERENCES

Bell, R. E., R. Anderson, and L. F. Pratson, 1997, Gravity gradiometry resurfaces: The Leading Edge, **16**, 55–59.

Canuto, E., P. Martella, and G. Sechi, 2003, Attitude and drag control: an application to the GOCE satellite: Space Science Reviews, **108**, 357–366.

Dransfield, M. H. and J. B. Lee, 2004, The FALCON airborne gravity gradiometer survey systems: ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop, Expanded Abstracts, 15–20.

ESA, 1999, SP-1233(1) Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission: Technical report, ESA.

Hammond, S., 1999, Acquiring and processing gradient gravity data: Offshore, **59**, 92–93.

Hofmeyer, G. and C. Affleck, 1994, Rotating accelerometer gradiometer: US Patent 5,357,802.

Klees, R., R. Koop, P. Visser, and J. Van den Ijssel, 2000, Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observations: Journal of Geodesy, **74**, 561–571.

Lyrio, J. C. S., L. Tenorio, and Y. Li, 2004, Efficient automatic denoising of gravity gradiometry data: Geophysics, **69**, 772–782.

Mikhailov, V., G. Pajot, M. Diament, and A. Price, 2007, Tensor deconvolution: a method to locate equivalent sources from full tensor gravity data: Geophysics, **72**, I61–I69.

Mumaw, G., 2004, Marine 3D full tensor gravity gradiometry – the first five years: Hydro International, **8**, 38–41.

Okabe, M., 1979, Analytical expressions for anomalies due to polyhedral bodies and translation into magnetic anomalies: Geophysics, **44**, 730–741.

Paige, C. C. and M. A. Saunders, 1982, LSQR, an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares: ACM Trans. Math. Software, **8**, 43–71.

Shaw, H. and B. Lancaster-Jones, 1922, The Eötvös torsion balance: Proceedings of the Physical Society of London, **35**, 151–166.

Szabó, Z., 1998, Eötvös the man, the scientist, the organizer, 5–34. Eötvös Loràn d Geophysical Institute, Budapest.

van Leeuwen, E. H., K. G. McCracken, J. B. Lee, and R. J. Turner, 2005, Airborne gravity gradiometer: US Patent 6,883,372B2.

Visser, P. and J. Van den Ijssel, 2000, GPS-based precise orbit determination of the very low earth-orbiting gravity mission GOCE: Journal of Geodesy, **74**, 590–602.

Wells, W., 1986, Efficient synthesis of gaussian filters by cascaded uniform filters: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **PAMI-8**, 234–239.

While, J., A. Jackson, D. Smit, and E. Biegert, 2006, Spectral analysis of gravity gradiometry profiles: Geophysics, **71**, 11–22.

LIST OF TABLES

1 Characteristics of the three rectangular prisms considered in the synthetic model. Positions of the centers of the top sides are given in the (x, y)-plane of a Cartesian frame (O, x, y, z). Prism 3 is rotated in the (x, y) plane around its center.

2 Noise reduction as a function of the step of the grid for regular square grids. Results of our method are given for a white Gaussian noise with standard deviation roughly 10% of the peak-to-peak amplitude of the component variation.

3 Variations of the λ-parameter, for a noise level equal to 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the component, for decreasing sampling interval along the y-axis. The interval along the x-axis is constant (1 km).

4 Variations of the λ-parameter, for a noise level equal to 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the component, for decreasing sampling interval along the x-axis. The interval along the y-axis is constant (1 km).

LIST OF FIGURES

1 Projection, onto the (x, y)-plane, of the three blocks described in Table 1. Density contrasts $\Delta\rho$ are in kg/m^3.

2 Noise reduction results, for the horizontal system 5, with a grid step of 100 m, for a noise standard deviation equal to 10% of the peak-to-peak amplitude of the components. The color scale is the same for all tensor components. Black lines delineate the projections of the top sides of the anomalous bodies onto the (x, y)-plane.

3 Noise reduction results, for the vertical system 7, with a grid step of 100 m, for a noise standard deviation equal to 10% of the amplitude peak-to-peak of the components. The color scale is the same for all tensor components, and the color scale is the same for g_z with or without noise, and reconstructed. Black lines delineate the projections of the top sides of the anomalous bodies onto the (x, y)-plane.

4 Variations of the λ parameter according to the logarithm of the noise standard deviation σ, in Eötvös for the gravity gradients, in mGal for g_z, on a regular square grid with a step of 200 m.

5 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xx} involved in the horizontal system 5. The symbols • stand for the result of our method only, △ for the result of Gaussian smoothing only, and ⋄ for the result of the two methods applied successively. The standard deviation σ is in Eötvös.

6 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xy} involved in the horizontal system 5.

7 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of

Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{yy} involved in the horizontal system 5.

8 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xz} involved in the vertical system 7.

9 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xz} involved in the vertical system 7.

10 Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the component g_z involved in the vertical system 7.

11 Projection onto the $(x, y)-$plane, of the structure used to show how our method handles small wavelengths. The structure is made of 40 identical rectangular prisms arranged in an orthogonal lattice, each prism having (x, y) dimensions 50 m×50 km. The depth to the top sides of the prism is 30m. The depth to the bottom is 10,000m. The density contrast is 1,000 kg/m^3.

12 Comparison, along a profile, for a grid step of 250 m, between the noise reduction results of our method and Gaussian smoothing with varying window size, applied on g_z. In the background, in gray, the anomaly with 10 % noise added, in red the original anomaly, in dotted black our result, and in dark and light blue the results of Gaussian smoothing.

13 Comparison, along a profile, for a grid step of 500 m, between the noise reduction results of our method and Gaussian smoothing with varying window size, applied on g_z. In the background, in gray, the anomaly with 10 % noise added, in red the original anomaly, in dotted black our result, and in dark and light blue the results of Gaussian smoothing.

14 Mean of the power spectra of all profiles parallel to the $x-$axis for the results of our method and for Gaussian smoothing on g_z, for a grid step of 250 m. Colors used are the same as for Figure 12.

15 Mean of the power spectra of all profiles parallel to the $x-$axis for the results of our method and for Gaussian smoothing on g_z, for a grid step of 500 m. Colors used are the same as for Figure 13.

16 Comparison, along a profile, for a grid step of 1000 m, between the results of our method enhanced by smoothing and the results of smoothing only.

17 Bell Geospace survey line path mapped onto the gravity data.

18 Results of the noise reduction method applied to Bell Geospace data. Left column: components involved in system 5. Right column: noise reduction results on these components.

19 Results of the noise reduction method applied to Bell Geospace data. Left column: components involved in system 7. Right column: noise reduction results on these components.

20 Noise reduction results on Bell Geospace data along a profile parallel to the x-axis, for tensor component T_{yz}.

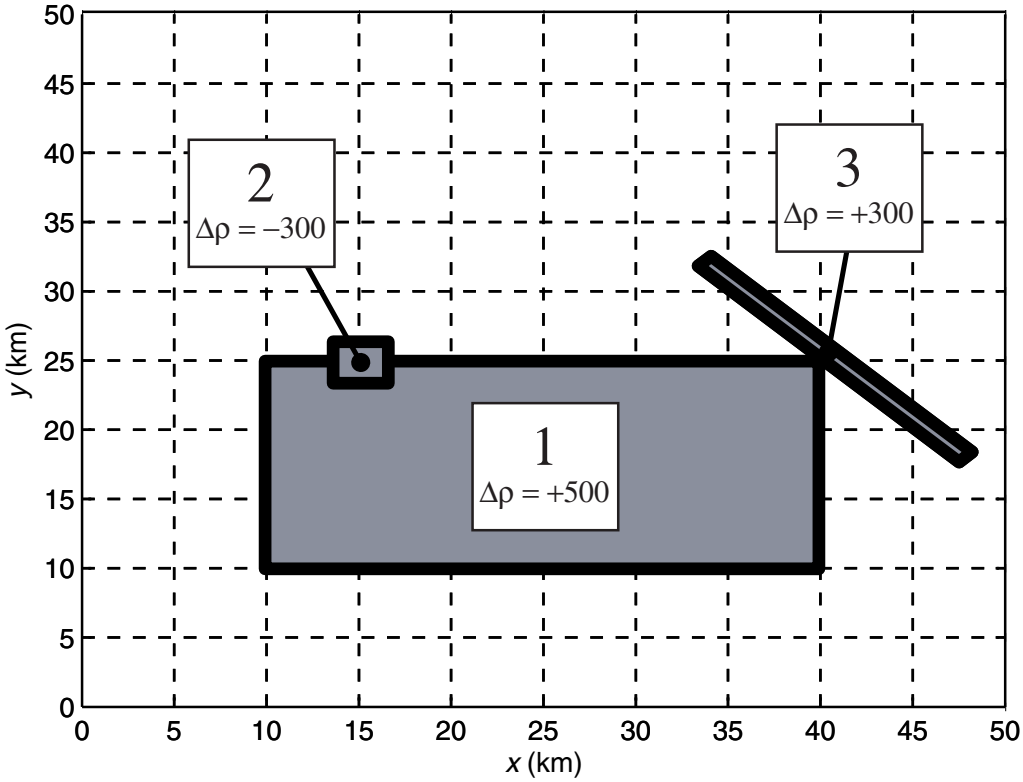


Figure 1: Projection, onto the (x, y)-plane, of the three blocks described in Table 1. Density contrasts $\Delta\rho$ are in kg/m^3.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

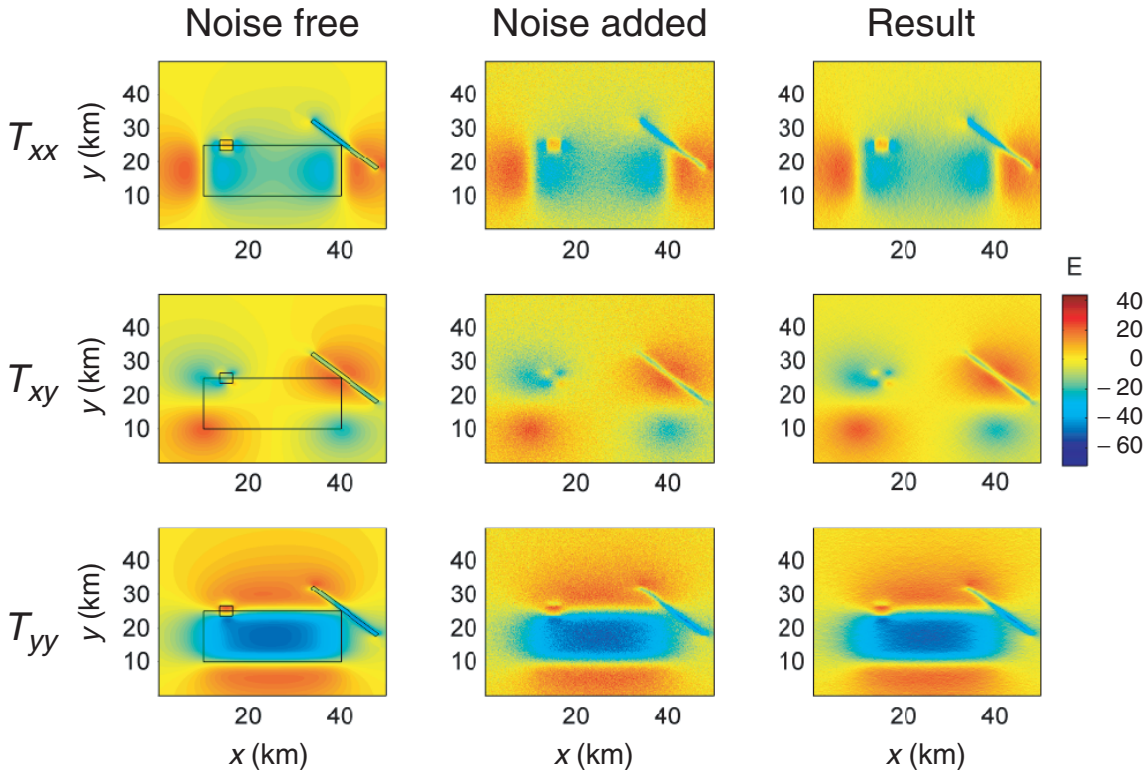


Figure 2: Noise reduction results, for the horizontal system 5, with a grid step of 100 m, for a noise standard deviation equal to 10% of the peak-to-peak amplitude of the components. The color scale is the same for all tensor components. Black lines delineate the projections of the top sides of the anomalous bodies onto the (x, y)-plane.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

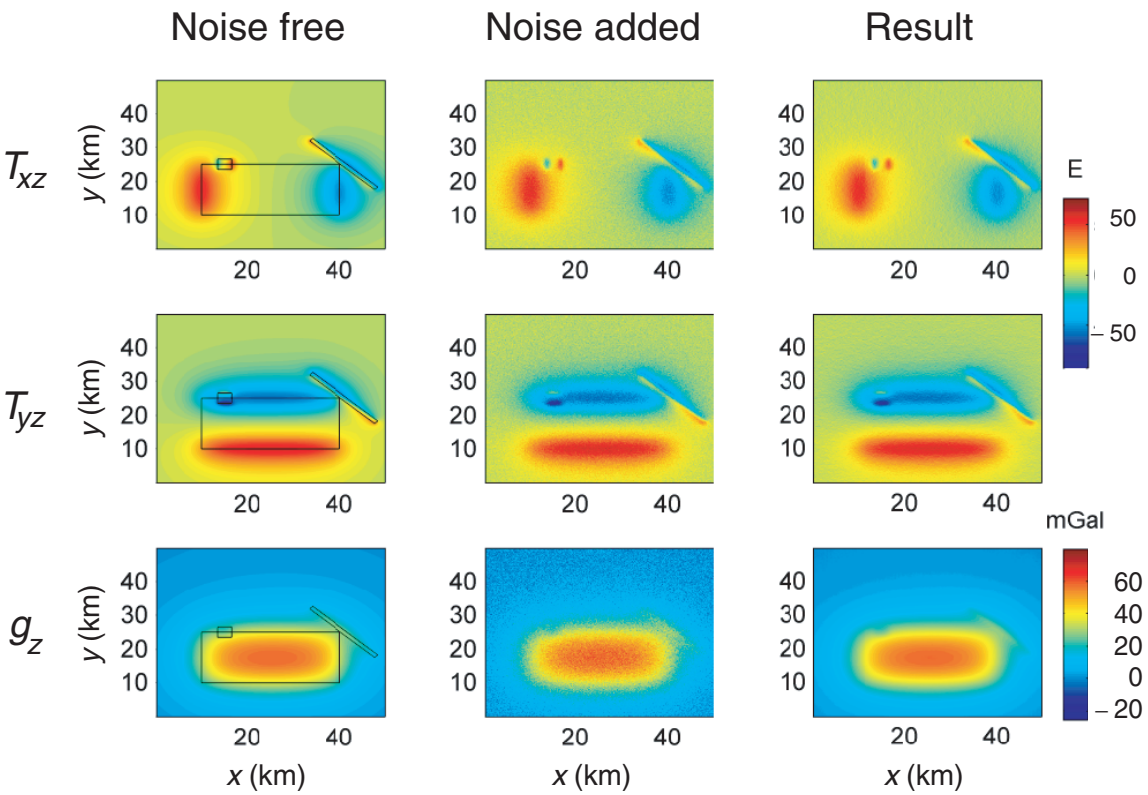


Figure 3: Noise reduction results, for the vertical system 7, with a grid step of 100 m, for a noise standard deviation equal to 10% of the amplitude peak-to-peak of the components. The color scale is the same for all tensor components, and the color scale is the same for g_z with or without noise, and reconstructed. Black lines delineate the projections of the top sides of the anomalous bodies onto the (x, y)-plane.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

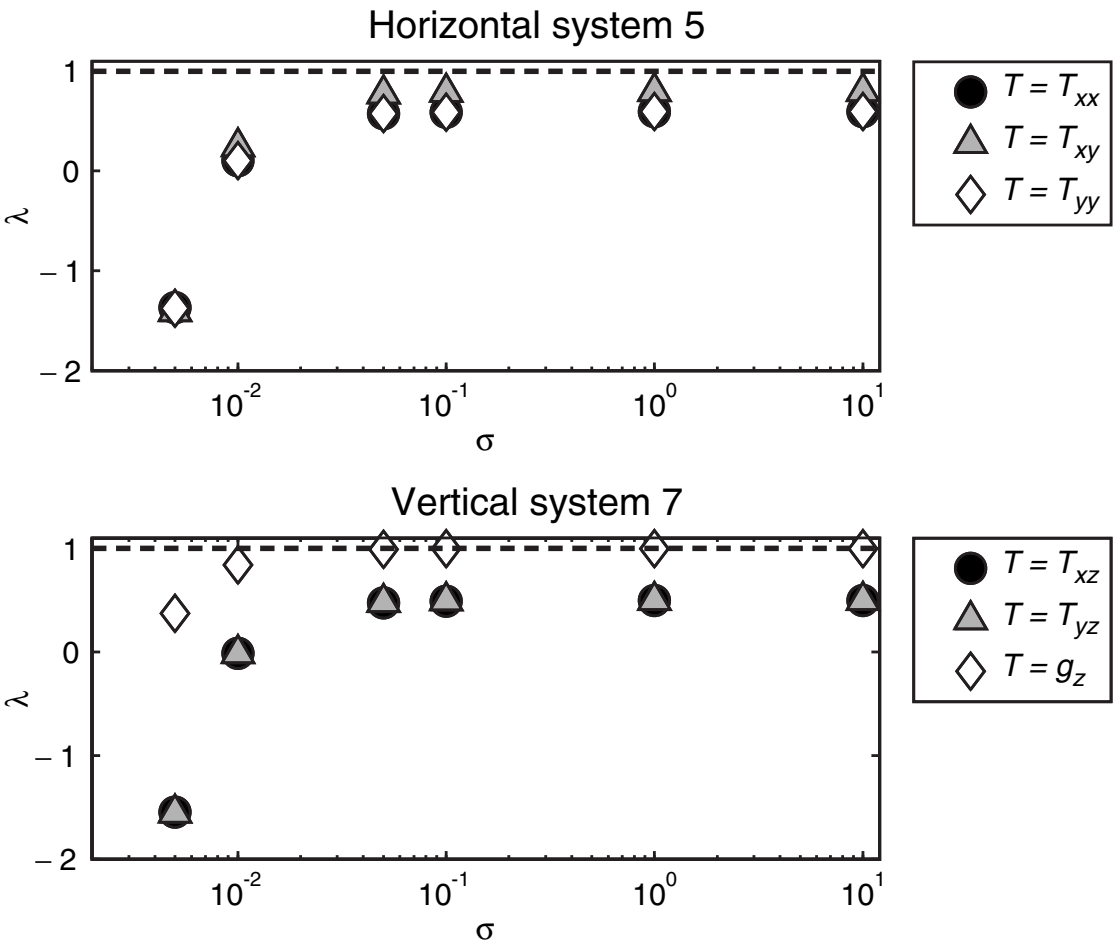


Figure 4: Variations of the λ parameter according to the logarithm of the noise standard deviation σ, in Eötvös for the gravity gradients, in mGal for g_z, on a regular square grid with a step of 200 m.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

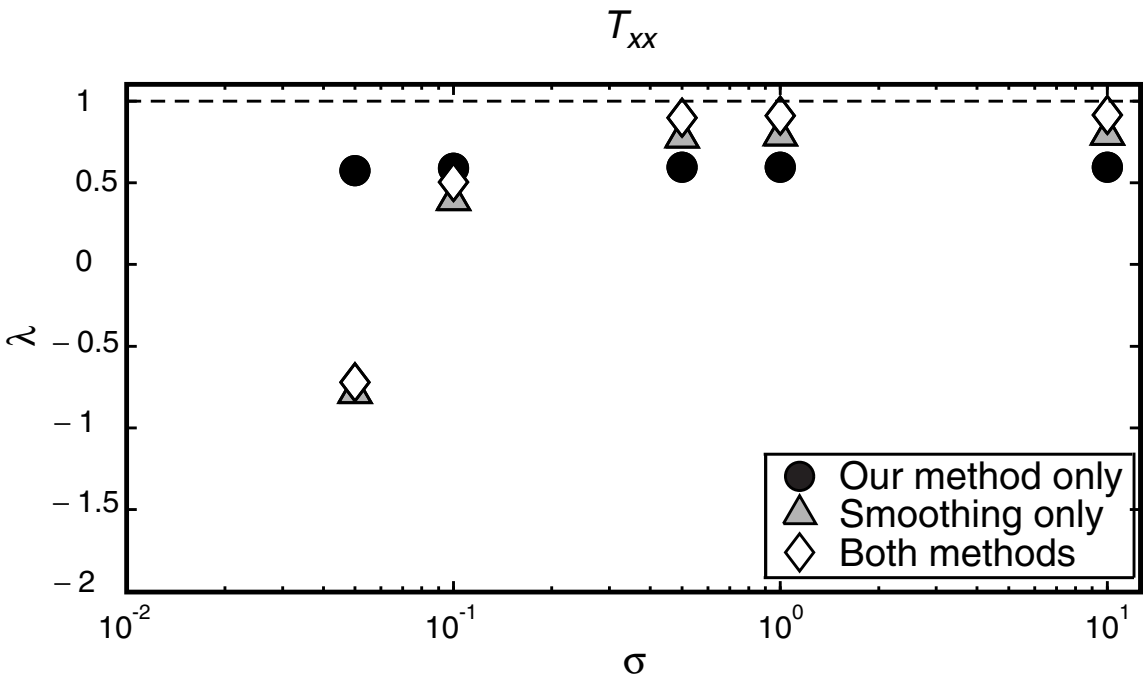


Figure 5: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xx} involved in the horizontal system 5. The symbols • stand for the result of our method only, △ for the result of Gaussian smoothing only, and ⋄ for the result of the two methods applied successively. The standard deviation σ is in Eötvös.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

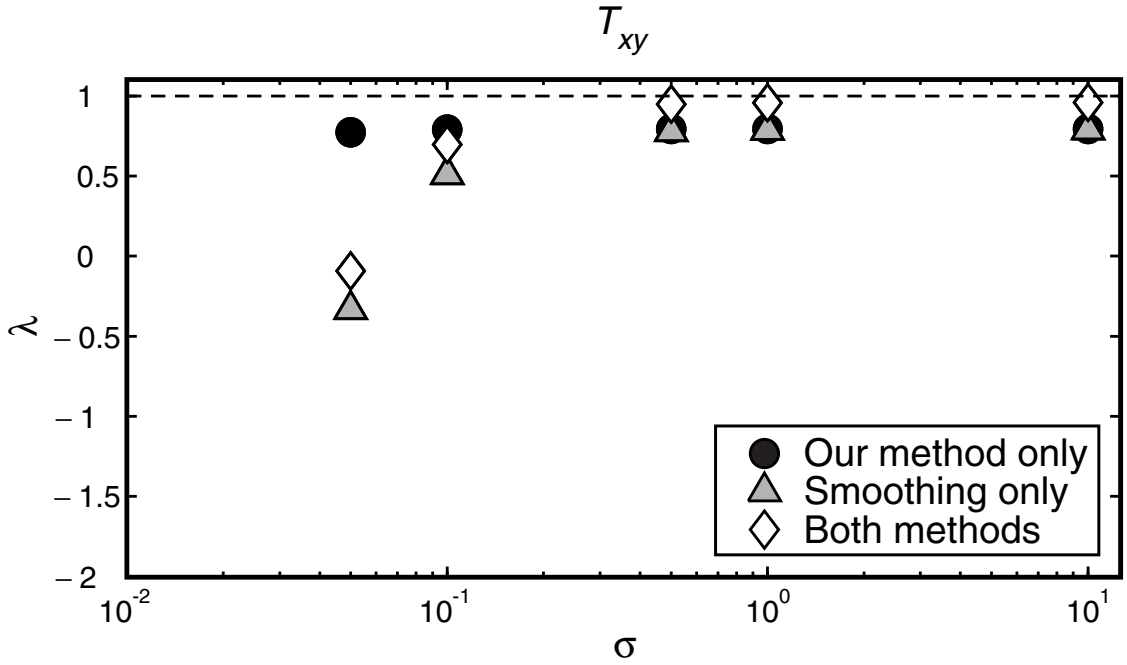


Figure 6: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xy} involved in the horizontal system 5.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

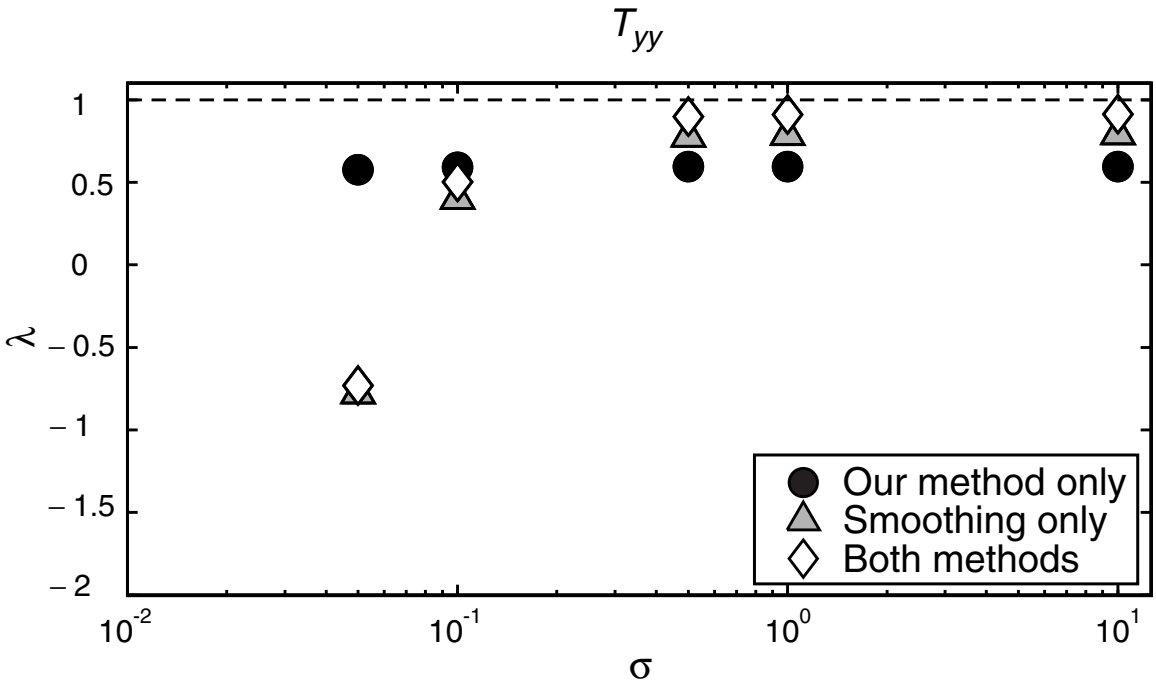


Figure 7: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{yy} involved in the horizontal system 5.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

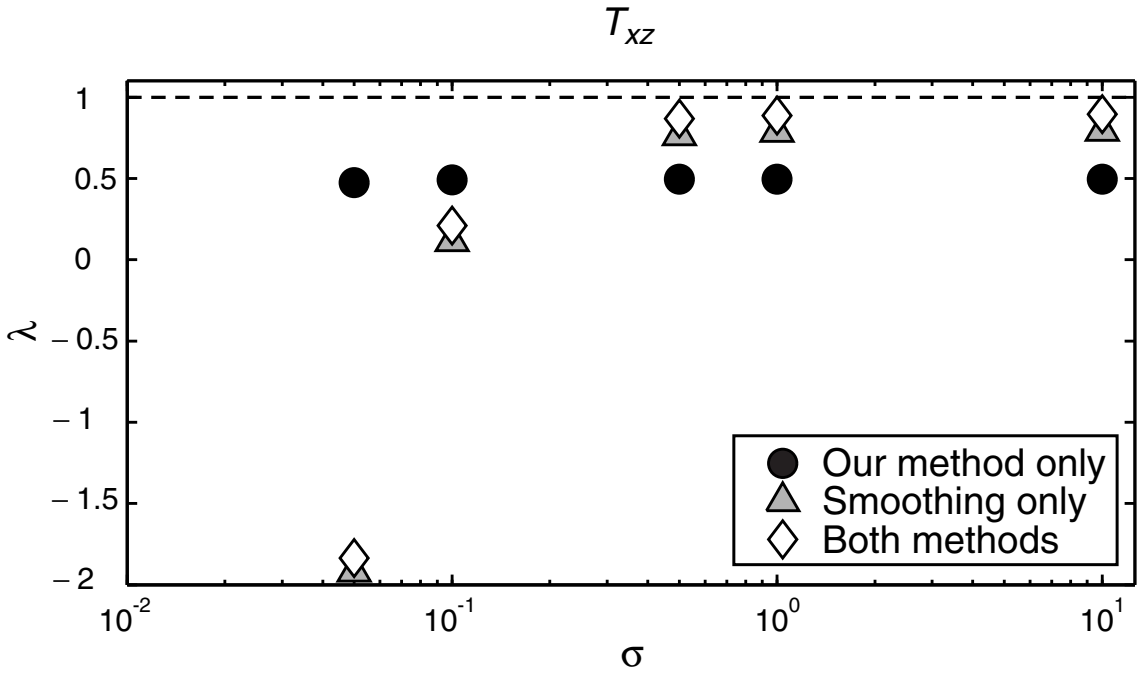


Figure 8: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xz} involved in the vertical system 7.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

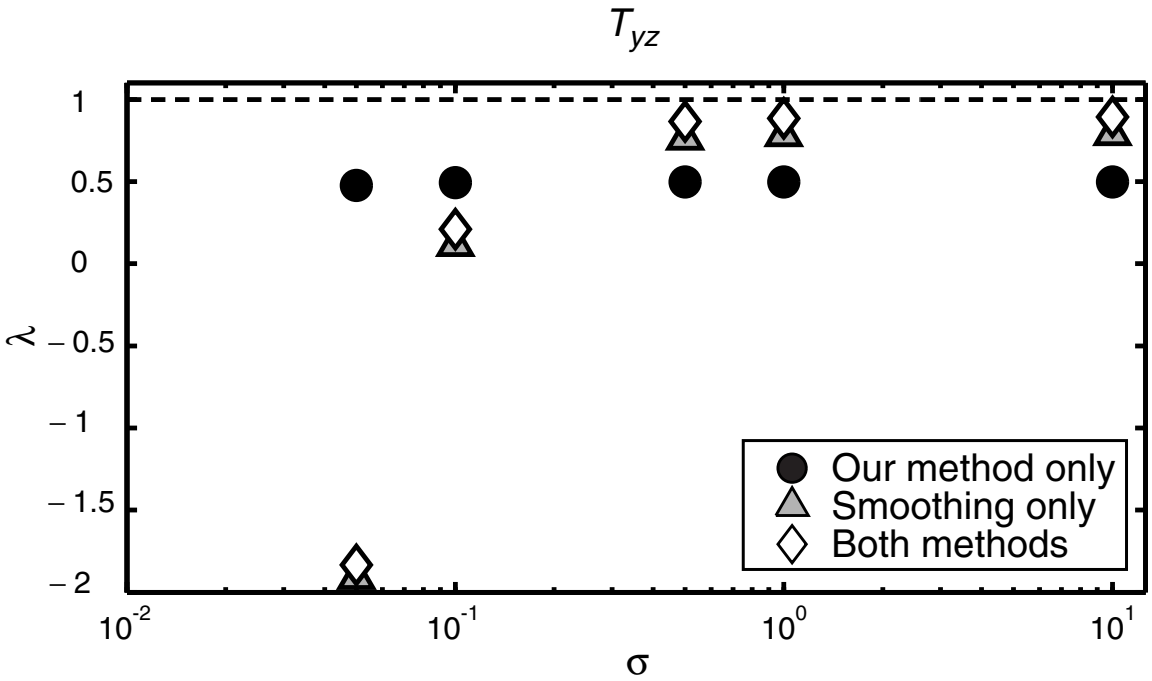


Figure 9: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the tensor component T_{xz} involved in the vertical system 7.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

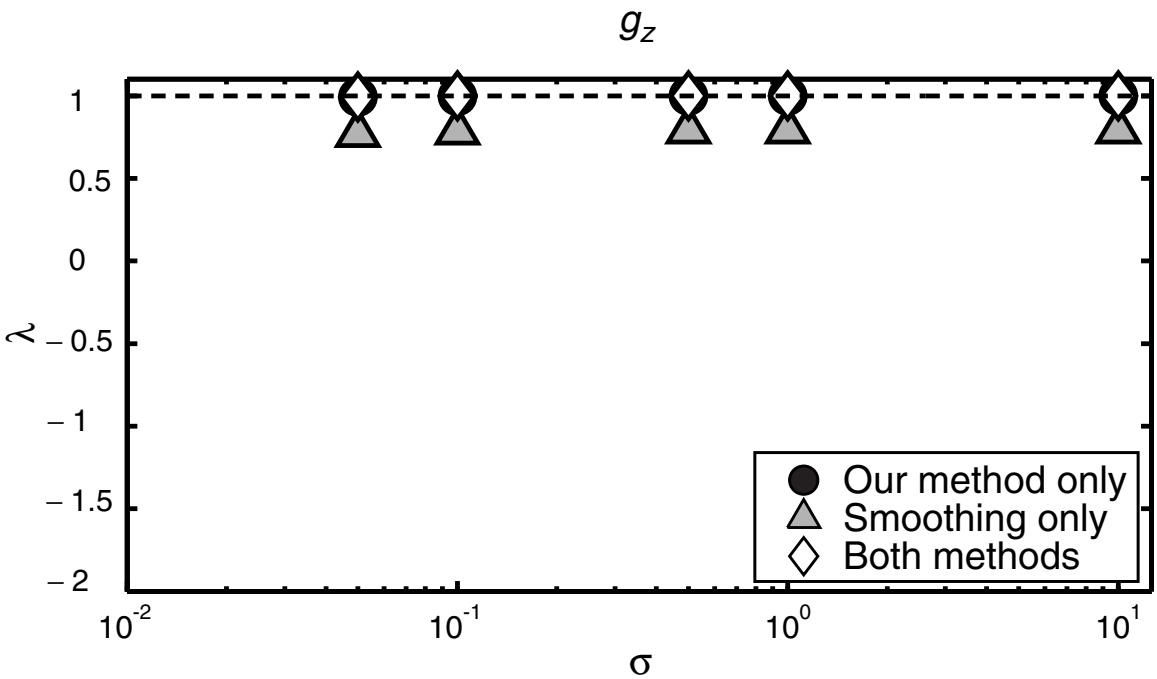


Figure 10: Comparison, on a regular square grid with a step of 200 m, between the impact of Gaussian smoothing in a 3×3 point window and our noise reduction method for the component g_z involved in the vertical system 7.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

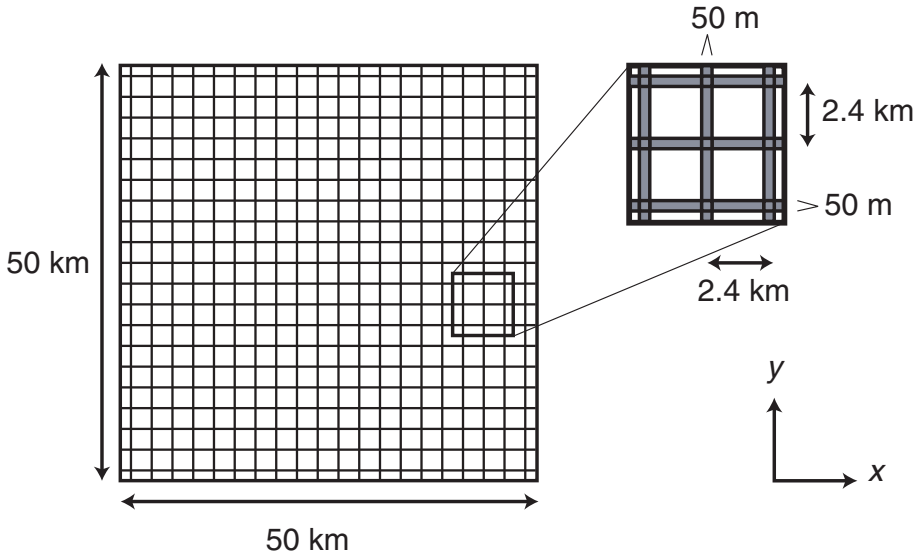


Figure 11: Projection onto the $(x, y)-$plane, of the structure used to show how our method handles small wavelengths. The structure is made of 40 identical rectangular prisms arranged in an orthogonal lattice, each prism having (x, y) dimensions $50\,\mathrm{m}\times 50\,\mathrm{km}$. The depth to the top sides of the prism is 30m. The depth to the bottom is 10,000m. The density contrast is $1{,}000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

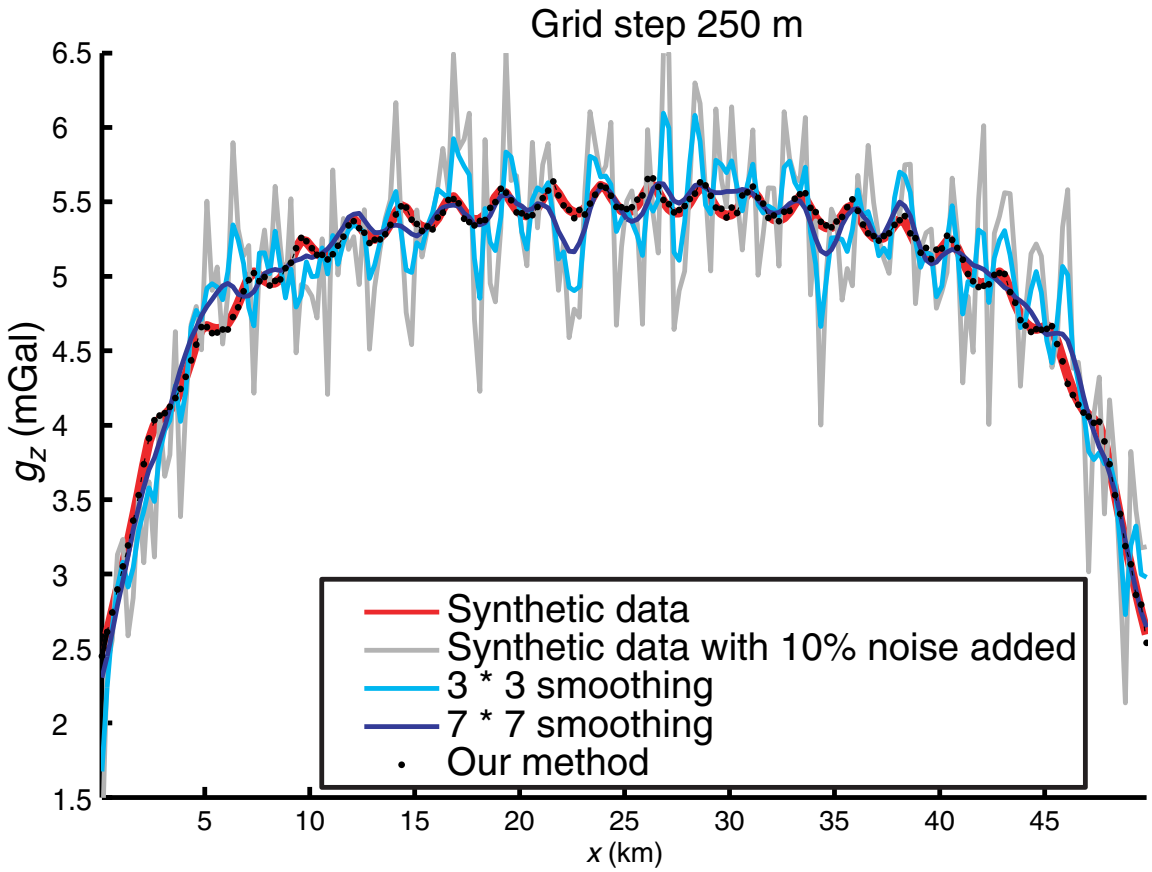


Figure 12: Comparison, along a profile, for a grid step of 250 m, between the noise reduction results of our method and Gaussian smoothing with varying window size, applied on g_z. In the background, in gray, the anomaly with 10 % noise added, in red the original anomaly, in dotted black our result, and in dark and light blue the results of Gaussian smoothing.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

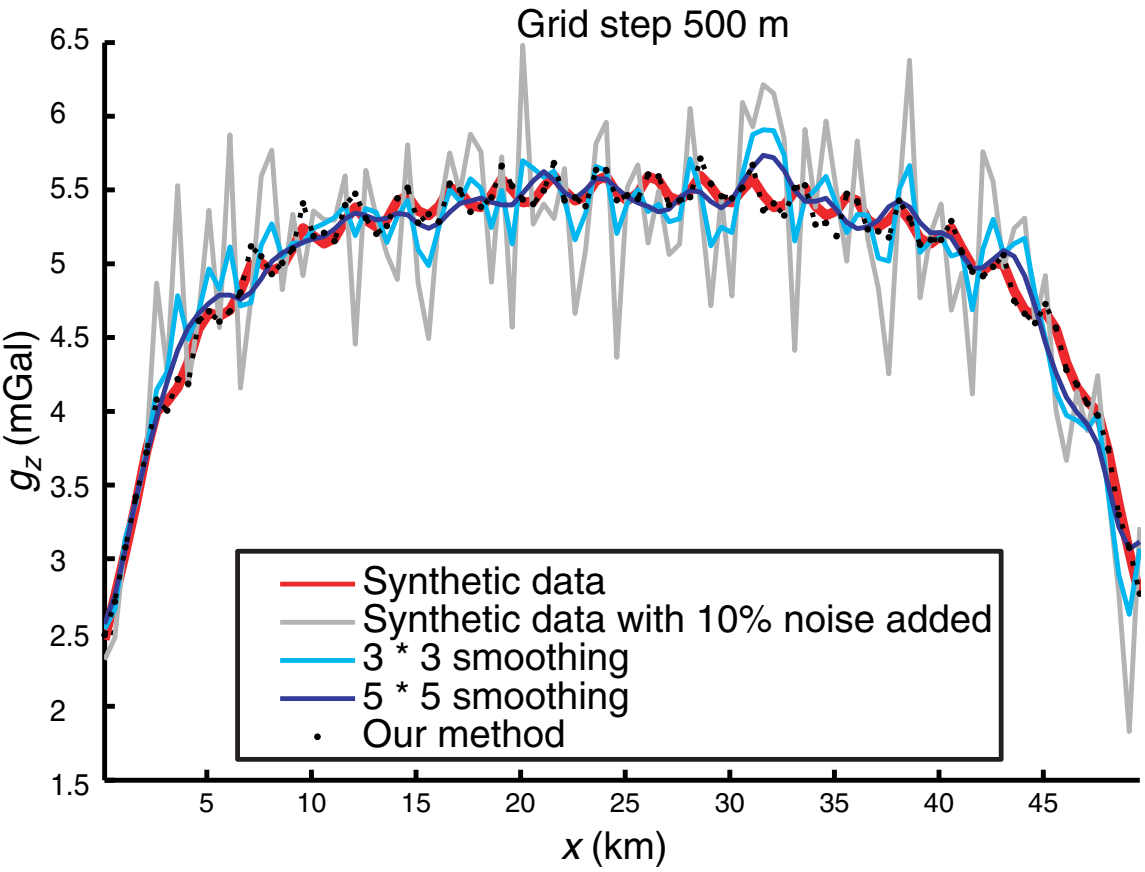


Figure 13: Comparison, along a profile, for a grid step of 500 m, between the noise reduction results of our method and Gaussian smoothing with varying window size, applied on g_z. In the background, in gray, the anomaly with 10 % noise added, in red the original anomaly, in dotted black our result, and in dark and light blue the results of Gaussian smoothing.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

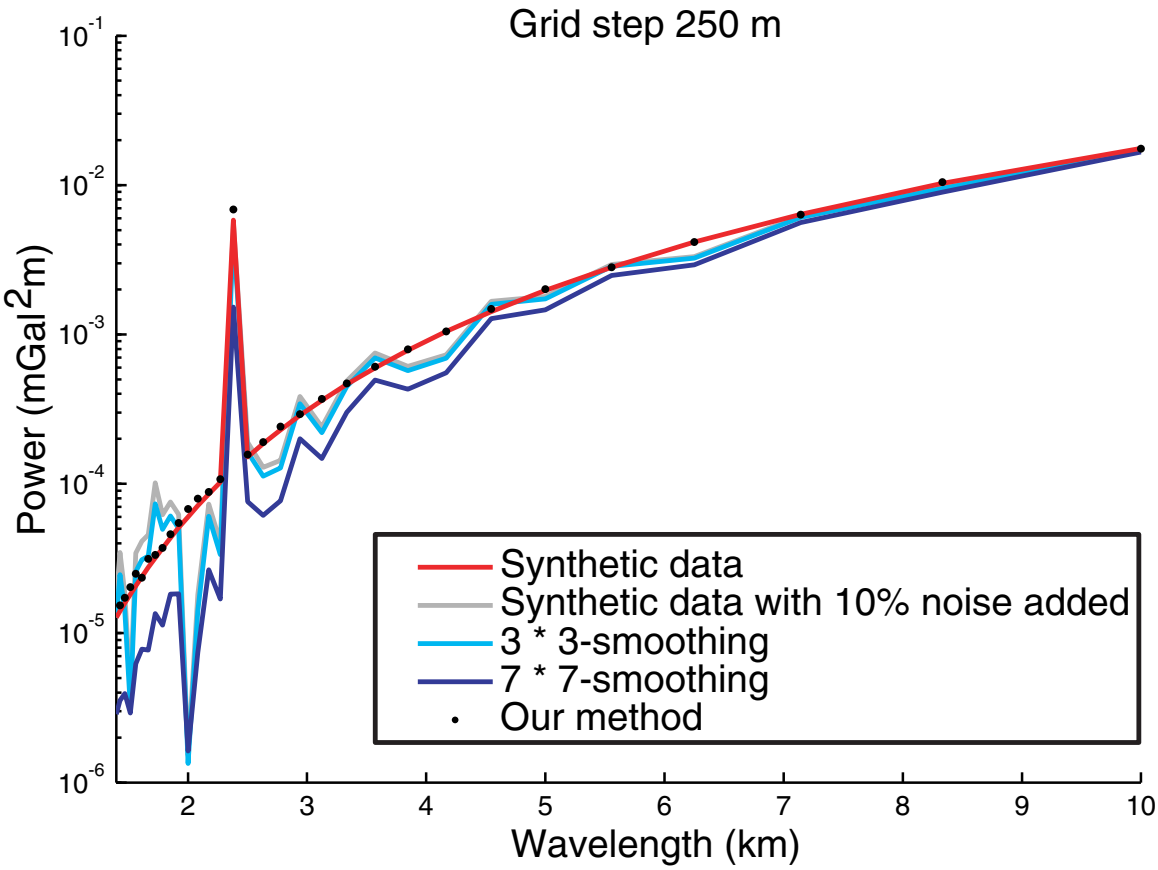


Figure 14: Mean of the power spectra of all profiles parallel to the $x-$axis for the results of our method and for Gaussian smoothing on g_z, for a grid step of 250 m. Colors used are the same as for Figure 12.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

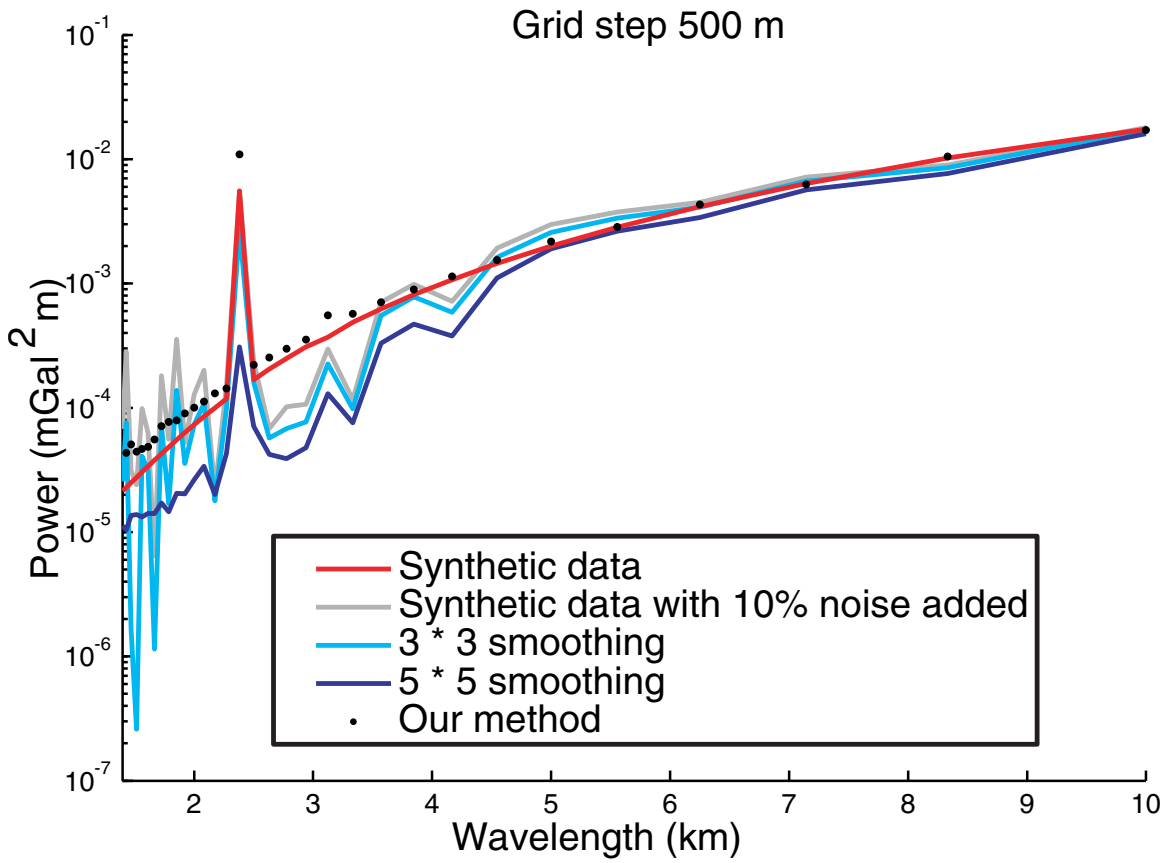


Figure 15: Mean of the power spectra of all profiles parallel to the $x-$axis for the results of our method and for Gaussian smoothing on g_z, for a grid step of 500 m. Colors used are the same as for Figure 13.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

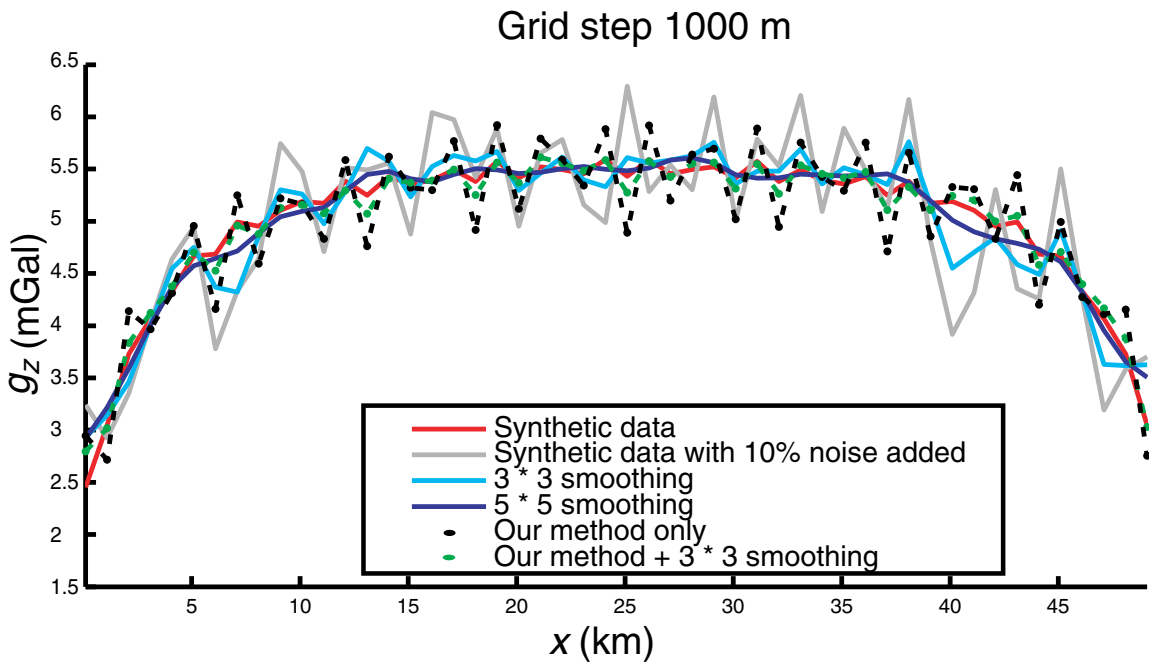


Figure 16: Comparison, along a profile, for a grid step of 1000 m, between the results of our method enhanced by smoothing and the results of smoothing only.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

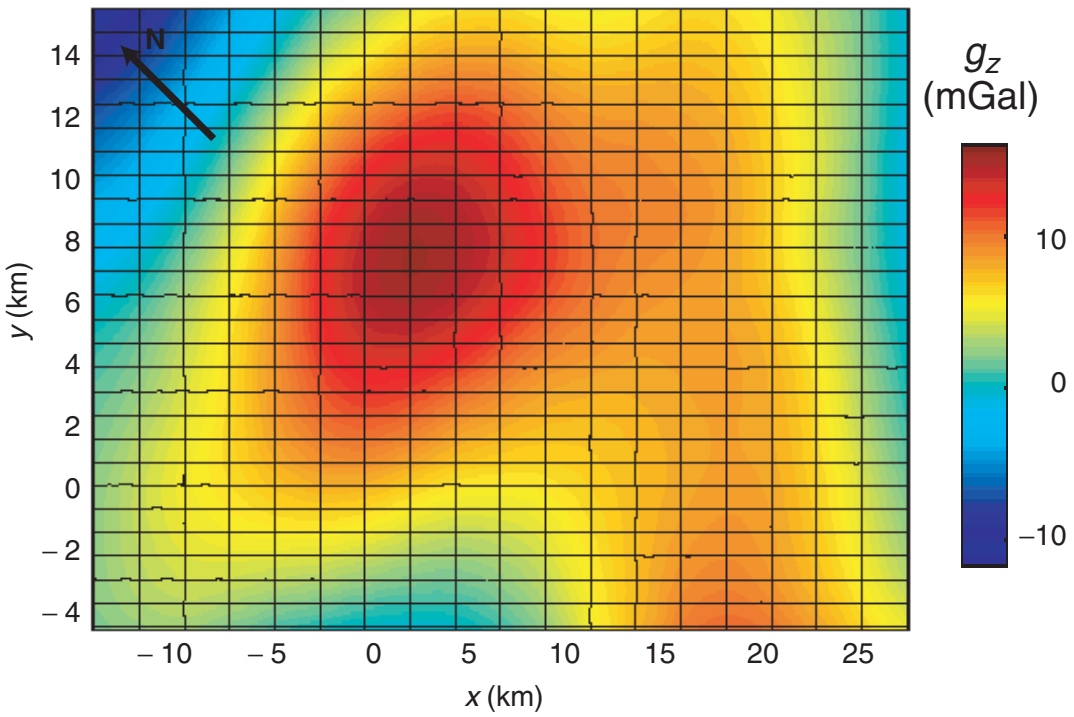


Figure 17: Bell Geospace survey line path mapped onto the gravity data.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

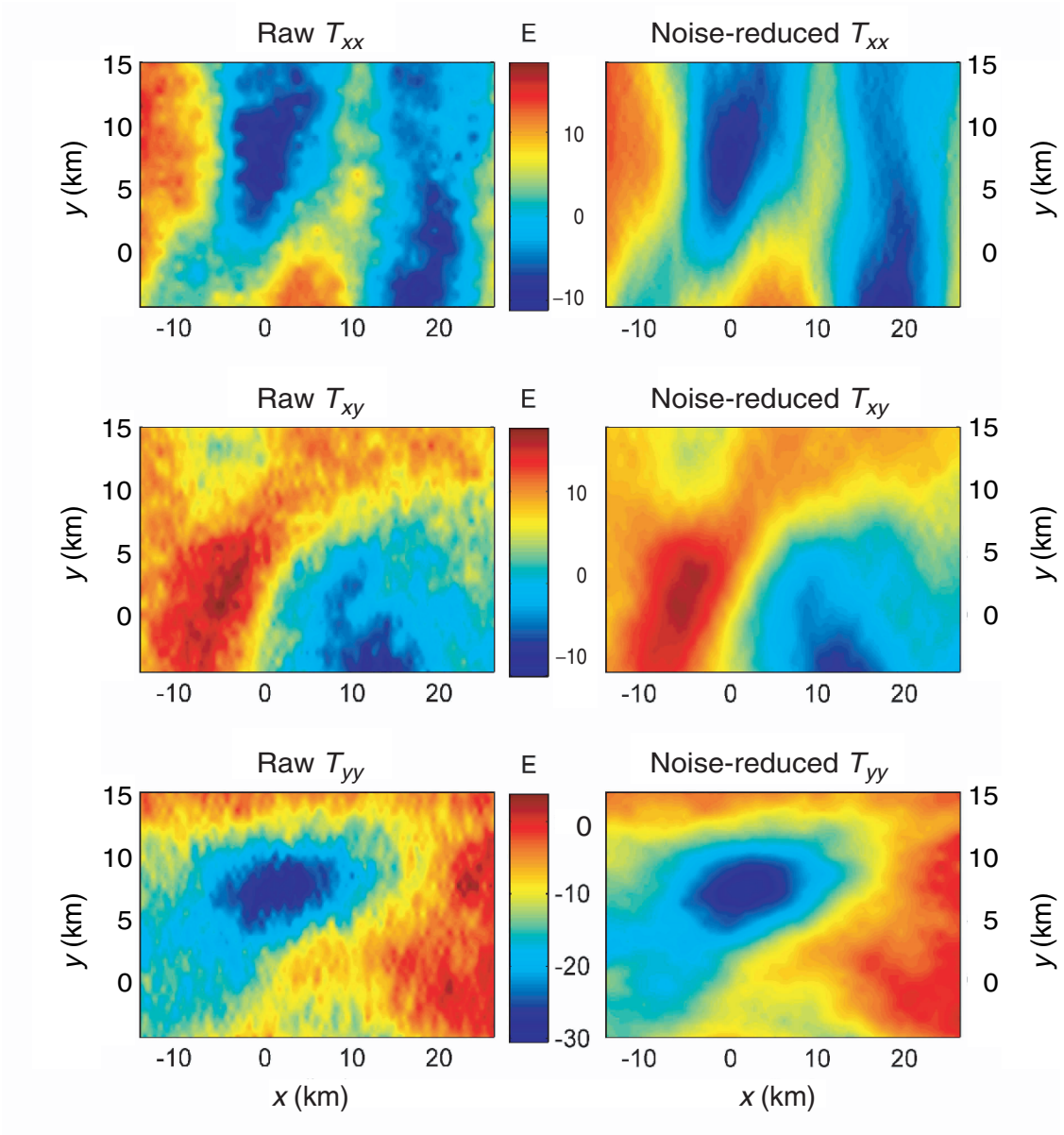


Figure 18: Results of the noise reduction method applied to Bell Geospace data. Left column: components involved in system 5. Right column: noise reduction results on these components.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

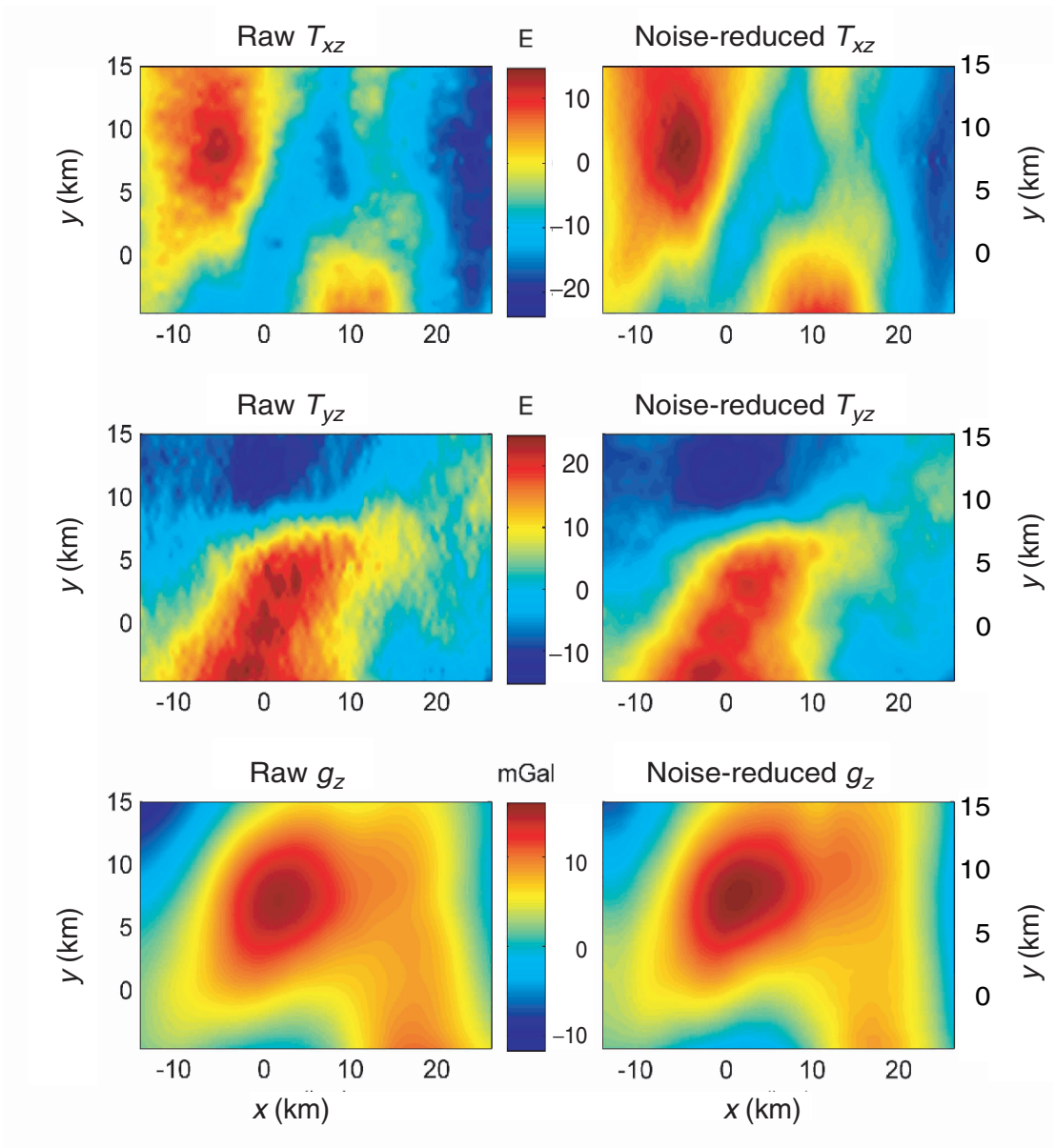


Figure 19: Results of the noise reduction method applied to Bell Geospace data. Left column: components involved in system 7. Right column: noise reduction results on these components.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

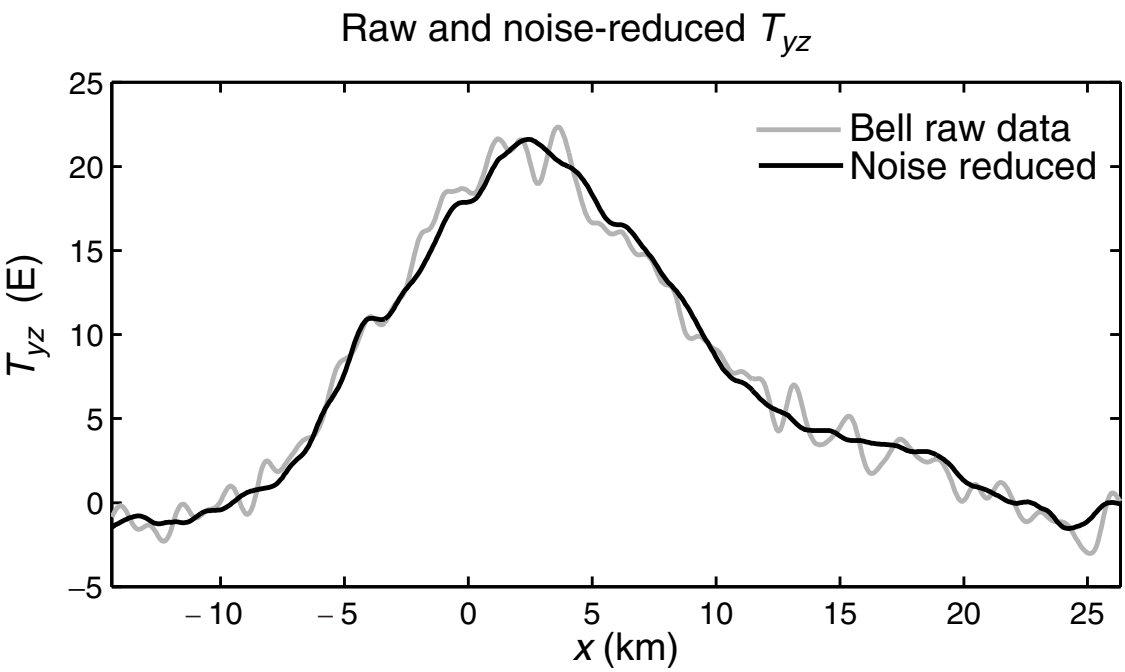


Figure 20: Noise reduction results on Bell Geospace data along a profile parallel to the x-axis, for tensor component T_{yz}.

Pajot et al. – GEO-2007-0162

Prism	Dimensions $x \times y \times z$ (km)×(km)×(km)	Top side Center (x, y) (km,km)	Top side Depth (km)	Rotation angle (rad)	Density contrast (kg/m^3)
1	30 ×15 ×8	(25.0, 17.5)	3.0	0	+ 500
2	3 ×3 ×1	(15.0, 25.0)	0.5	0	- 300
3	1×20×7.5	(40.8, 25.1)	0.5	$-\pi/4$	+ 300

Table 1: Characteristics of the three rectangular prisms considered in the synthetic model. Positions of the centers of the top sides are given in the (x, y)-plane of a Cartesian frame (O, x, y, z). Prism 3 is rotated in the (x, y) plane around its center.

Grid step (m)	λ					
	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}	T_{xz}	T_{yz}	g_z
1000	0.57	0.78	0.55	0.49	0.50	0.92
500	0.59	0.78	0.59	0.50	0.49	0.98
200	0.59	0.80	0.60	0.50	0.50	0.99
100	0.60	0.80	0.60	0.50	0.50	1.00

Table 2: Noise reduction as a function of the step of the grid for regular square grids. Results of our method are given for a white Gaussian noise with standard deviation roughly 10% of the peak-to-peak amplitude of the component variation.

Component	λ values (dx=1 km)					
	dy=1000 m	dy= 500 m	dy= 250 m	dy= 125 m	dy= 62.5 m	dy= 31.25 m
T_{xx}	0.55	0.76	0.85	0.90	0.92	0.93
T_{xy}	0.78	0.83	0.89	0.94	0.96	0.97
T_{yy}	0.53	0.36	0.17	0.07	0.03	0.01
T_{xz}	0.48	0.68	0.82	0.89	0.93	0.95
T_{yz}	0.50	0.26	0.13	0.06	0.03	0.01
g_z	0.97	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00

Table 3: Variations of the λ-parameter, for a noise level equal to 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the component, for decreasing sampling interval along the y-axis. The interval along the x-axis is constant (1 km).

Component	λ values (dy=1 km)					
	dx=1000 m	dx= 500 m	dx= 250 m	dx= 125 m	dx= 62.5 m	dx= 31.25 m
T_{xx}	0.55	0.34	0.16	0.07	0.02	0.01
T_{xy}	0.78	0.82	0.89	0.94	0.96	0.97
T_{yy}	0.53	0.75	0.85	0.89	0.92	0.93
T_{xz}	0.48	0.29	0.14	0.07	0.03	0.01
T_{yz}	0.50	0.67	0.80	0.88	0.92	0.94
g_z	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00

Table 4: Variations of the λ-parameter, for a noise level equal to 10% of the maximum peak-to-peak amplitude of the component, for decreasing sampling interval along the x-axis. The interval along the y-axis is constant (1 km).

Chapitre 4

Interprétation des mesures

Par « interprétation gravimétrique », nous entendons « caractériser les sources qui peuvent expliquer le signal mesuré ». Nous considérons une source déterminée si sa géométrie (forme et dimensions), sa localisation (position du centre de gravité), son orientation dans l'espace et sa masse sont connues. Comme nous l'avons déjà mentionné, en gravimétrie, ce problème ne possède pas de solution unique, même en supposant avoir retiré tout le bruit des données. Aussi les méthodes d'interprétation du signal gravimétrique ne peuvent-elles donner de résultat que si l'on suppose un ou plusieurs des paramètres susmentionnés connus. Nous avons déjà expliqué, par exemple, qu'il était possible, étant données des mesures de g_z, de déterminer un système de sources ponctuelles, dites sources équivalentes, à une profondeur arbitrairement choisie, telles que leur distribution, dans le plan choisi, soit associée au signal mesuré. D'une manière générale, si nous voulons caractériser les sources à partir du signal, il faudra ajouter des équations de contrainte, ou focaliser l'étude sur un paramètre en particulier, supposant les autres connus.

Nous commençons par montrer que l'interprétation directe de cartes de composantes du tenseur est délicate. Puis nous présentons des méthodes qui, pour préciser l'un ou l'autre des paramètres de la source, utilisent les dérivées calculées de g_z. Les deux méthodes sur lesquelles nous attirons l'attention, le signal analytique et la déconvolution d'Euler, sont basées sur l'utilisation de certaines propriétés mathématiques vérifiées, en particulier, par le potentiel de pesanteur et ses dérivées. Pour chacune, nous décrivons, sans entrer dans le détail, la propriété mathématique utile, puis nous nous concentrons sur la méthode à proprement parler. Nous introduisons l'article en fin de chapitre qui (outre qu'il donne des informations supplémentaires sur les méthodes précédemment évoquées) présente une nouvelle méthode pour localiser les sources à partir des gradients mesurés. Enfin nous évoquons en perspective l'inversion des composantes du tenseur gradient pour déterminer une distribution de densité.

4.1 Localisation des sources et détermination des contours

4.1.1 Interprétation visuelle des composantes

Nous avons vu que les dispositifs de mesure des gradients de gravité faisaient largement usage de la mesure de différences d'accélérations. En effet, une dérivée est par définition la limite du taux de variation d'une quantité entre deux points quand la distance entre ces deux points tend vers zéro. La dérivée d'une fonction numérique en un point traduit donc la vitesse de variabilité de cette fonction autour de ce point : une dérivée petite (en valeur absolue) indique que les valeurs de la fonction varient peu autour du point considéré, et inversement une valeur élevée de la dérivée indique une variabilité rapide. Ceci permet une première interprétation visuelle d'une carte de gradients de gravités.

Considérons l'exemple de la figure 2.8. Le corps anomalique est un prisme droit de dimensions $x = y$=15 km, z=5 km, dont la face supérieure est à la profondeur h=3 km, et présentant un contraste de densité 0.5 avec l'encaissant. Sur la figure sont représentées les composantes du tenseur gradient de gravité (les composantes du triangle inférieur, se déduisant des autres par symétrie du tenseur, ne sont pas représentées) et la composante verticale de l'accélération de la pesanteur associée à la structure. Comme nous l'avons dit, les dérivées mettent en évidence les variations rapides du signal. En particulier, nous pouvons voir sur la figure 2.8 que les contours du prisme sont mis en évidence sur les cartes des gradients, alors qu'ils sont lissés sur g_z. De même, les lignes de niveau du gradient horizontal sur la figure 4.1 soulignent la géométrie du corps anomalique.

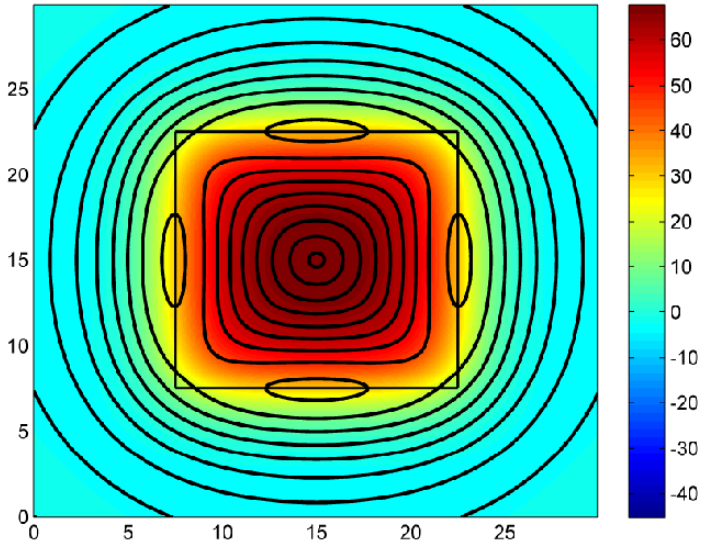


Figure 4.1: *Mise en évidence des contours par les dérivées de g_z. En fond, T_{zz}, en Eötvös. Les lignes de niveau (tous les 5 Eötvös) représentent le gradient horizontal $H = \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2}$. La position du prisme est repérée par le carré noir.*

Cependant, cette propriété seule pourrait sembler d'un intérêt minime. En effet, les mêmes résultats sont obtenus et interprétés depuis longtemps avec les gradients calculés à partir des mesures de g_z, et non mesurés (voir par exemple *Evjen*, 1936; *Blakely and Simpson*, 1986; *Grauch and Cordell*, 1987). Néanmoins, cet exemple souligne le fait que l'information apportée par les composantes du tenseur se situe au niveau de la géométrie des sources. Ainsi, si les gradients sont utilisés pour améliorer l'interprétation du signal de pesanteur, il est plausible que l'amélioration concerne plus particulièrement la localisation et la géométrie des sources. Enfin, comme nous le soulignions au chapitre précédent, le calcul des dérivées à partir de données bruitées est instable. Si, pour pallier ces instabilités, nous filtrons g_z, alors nous atténuons en particulier ses variations rapides, et la dérivation devient moins efficace pour mettre en évidence les contours. Il vaudra donc toujours mieux, pour identifier les contours des sources, mesurer les gradients que les calculer à partir de g_z.

Nous avons mentionné que les cartes du gradient horizontal $\sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2}$ permettaient de tracer les lignes isogales, et donc donnaient accès à la même information que la mesure de g_z. Nous venons également de souligner le fait que les composantes du tenseur gradient, étant par nature sensibles aux variations spatiales de l'accélération de la pesanteur, mettent en évidence les contours des sources. Néanmoins nous allons montrer sur l'exemple qui suit qu'une interprétation visuelle des cartes des composantes du tenseur est insuffisante pour localiser précisément les sources ou en déterminer les contours.

4.1.1.1 Exemple 1

On considère un prisme droit de hauteur D et à base carrée d'arête L. La face supérieure du prisme est rognée dans la direction x de manière à obtenir un prisme droit à base trapézoïdale dans le plan (xOz), comme le montre la figure 4.2. Les nouvelles dimensions de la face supérieure du prisme sont alors L dans la direction y et $r < L$ dans la direction x, la face inférieure restant inchangée. Nous calculons, à l'aide de l'algorithme d'*Okabe* (1979) les composantes du tenseur gradient pour $r = D$ (prisme d'origine), $r = (3/4)D$, $r = (1/2)D$, $r = (1/4)D$ et $r = 0$ (les faces latérales du prisme dans le plan (xOz) sont alors des triangles). Nous représentons alors les valeurs des composantes T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} et T_{zz} (on obtiendra les résultats pour les composantes restantes en permuttant les rôles joués par x et y) sur un profil parallèle à l'axe (Ox), dont la position est visible (en rouge) sur la figure 4.5. Les résultats obtenus sont visibles sur la figure 4.3. Les projections des faces supérieure et inférieure du prisme sont représentées sur l'axe des x avec les couleurs correspondant à la légende selon les valeurs de r.

Concentrons-nous sur les déplacements des points d'inflexion notés P_0, P_1 et P_2 sur la figure 4.3 (nous ne les avons représentés que pour le prisme droit afin d'alléger la figure). Pour les quatre composantes considérées, le constat est identique. Pour $r = D$ (prisme droit) P_0 et P_2 donnent la position des faces parallèles au plan (yOz) et P_1 la position du centre

des faces supérieure et inférieure. Les faces supérieure et inférieure sont donc localisées en x. Lorsque r diminue, P_0 continue de marquer la face verticale parallèle à (yOz), en revanche P_1 et P_2 ne permettent plus de localiser directement les limites inférieures en x des deux faces horizontales. Leur position est très probablement fonction de r. Nous n'avons pas calculé cette fonction (notons que dans l'exemple que nous considérons la masse totale du prisme varie) mais la variation de la position en x du maximum de l'anomalie donne à penser que ce n'est pas une fonction linéaire de r. Il est possible que la dérivée au point P_2 soit liée à la pente de la face inclinée du prisme.

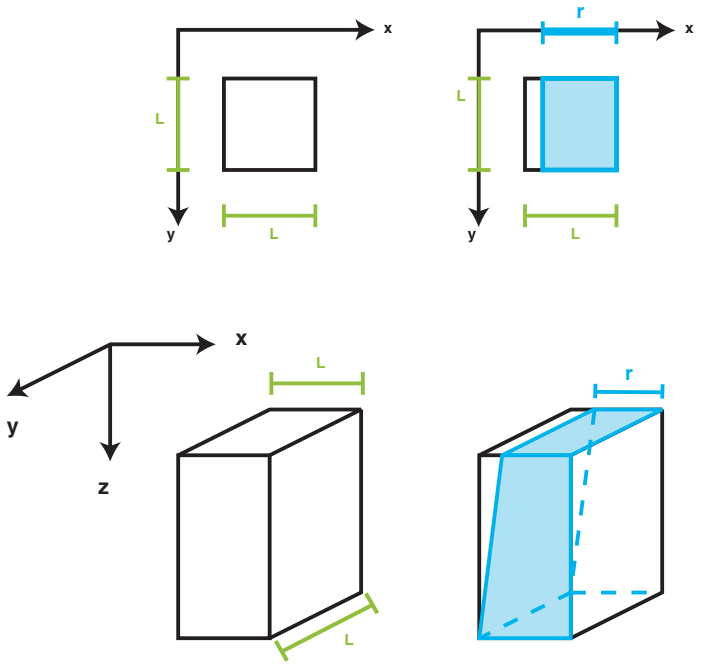


Figure 4.2: *Géométries utilisées pour l'exemple 1 : prisme droit rogné dans la direction x.*

4.1.1.2 Exemple 2

Nous avons effectué les mêmes tests pour un prisme droit (identique au prisme initial de l'exemple 1), rogné cette fois-ci dans la direction z, de telle sorte que la hauteur D d'une des faces parallèles au plan (xOz) devient $h < D$, comme indiqué sur la figure 4.4. Un aperçu des résultats est donné, pour T_{zz}, par la deuxième ligne de la figure 4.5 (la première ligne montrant les variations de T_{zz} pour l'exemple 1). Comme pour l'exemple 1, l'anomalie devient dissymétrique quand h diminue, et l'étude des points d'inflexion (définis comme sur l'exemple 1) des composantes, sur un profil parallèle à l'axe y, permet de localiser la face opposée à celle qui a été rognée. En revanche quand la hauteur h diminue, un déplacement des points

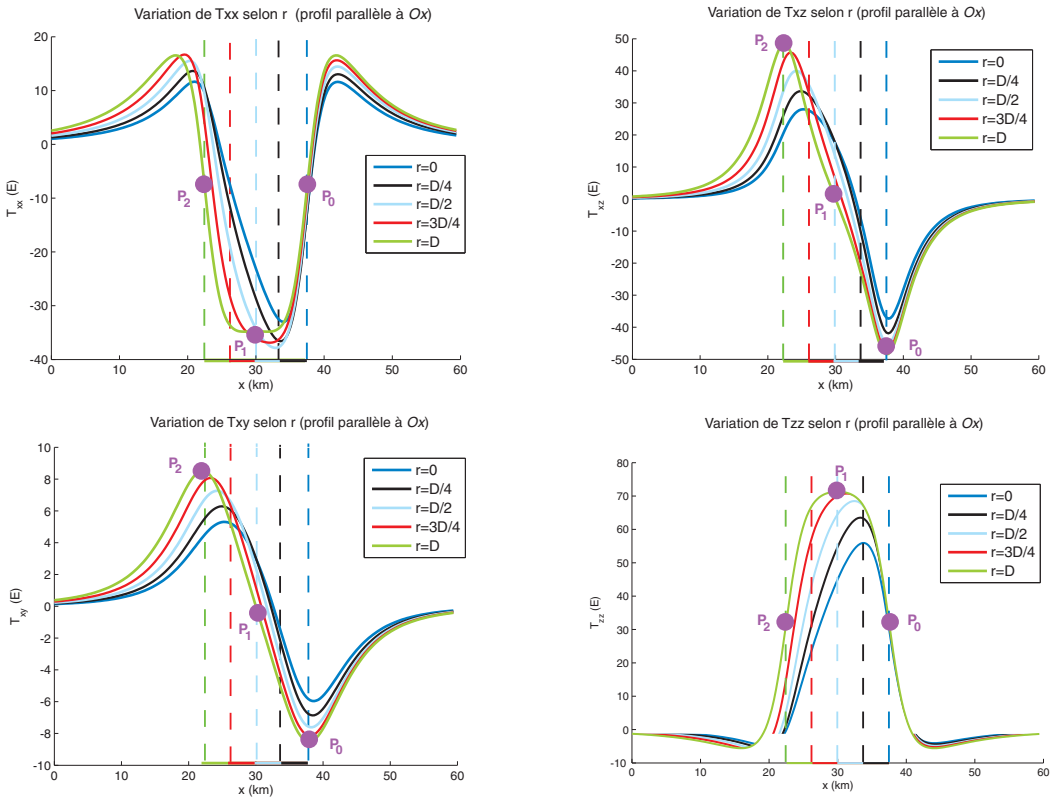


Figure 4.3: *Variations de T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} et T_{zz} pour le prisme de l'exemple 1 suivant la diminution de la surface supérieure en x.*

d'inflexions correspondant à la face de hauteur diminuée conduit à sous-estimer la dimension y du prisme (nous n'avons pas représenté les résultats ici, la figure obtenue étant très similaire à celle de l'exemple 1).

4.1.1.3 Conclusion sur l'interprétation visuelle

Nous venons donc de montrer que l'interprétation visuelle à partir des cartes était biaisée dans le cas où les sources ont des parois non verticales. Si les prismes choisis pour illustrer notre propos n'ont pas de réalité géologique, l'exemple n'est pourtant pas anodin. En effet, nous pouvons déduire des deux exemples qui précèdent ce paragraphe que la qualité de l'interprétation des composantes du tenseur dans une zone faillée sera nécessairement fonction du pendage. De plus, nous avons montré (§3.3.1) que la largeur des anomalies mesurées, pour les gradients comme pour g_z, dépendait de la profondeur des sources, mais les formules simples que nous avons pu établir pour estimer la profondeur ne s'appliquent qu'au cas du point source. Enfin, nous avons vu que les composantes du tenseur n'étaient pas insensibles aux changements de repère (§2.1.6). Les directions les mieux caractérisées seront celles des axes du repère choisi. Ainsi, considérant les cartes des données Bell (§2.2), nous ne pouvons nier qu'il existe une

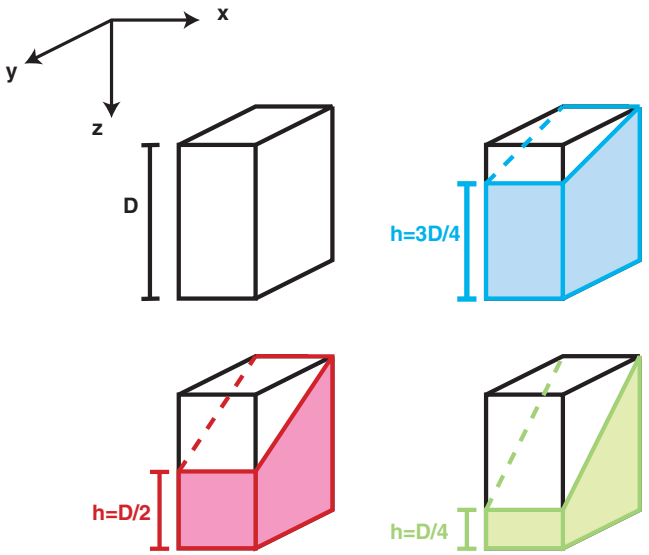


Figure 4.4: *Géométries utilisées pour l'exemple 2 : prisme droit rogné dans la direction z.*

anomalie (il suffit de regarder T_{zz}, Figure 2.15(e)), mais il est impossible de déduire directement de ces cartes, même après réduction du bruit dans les données, les positions exactes des sources, ni leur contour. Tout au plus, les cartes renseigneront sur la présence d'une anomalie dans une zone un peu mieux définie que par la seule mesure de la composante verticale du champ de pesanteur, et donneront une idée approximative de sa forme géométrique. Il faut donc des méthodes plus sophistiquées que la simple interprétation visuelle des cartes des composantes du tenseur pour utiliser l'information apportée par les données de gradiométrie en gravimétrie. Les paragraphes suivants sont consacrés à de telles méthodes.

4.1.2 Interprétation gravimétrique utilisant les dérivées calculées de g_z

Nous avons mentionné dans l'introduction que le gradient vertical du champ de pesanteur était depuis longtemps déjà utilisé pour améliorer l'interprétation gravimétrique. C'est un premier exemple de méthode où l'on utilise l'information apportée par la mesure d'une dérivée directionnelle du champ (il suffit pour l'obtenir de mesurer g_z à deux altitudes différentes, à l'aplomb du même point). Il existe également des méthodes d'interprétation gravimétrique qui, pour localiser ou déterminer les contours des sources, utilisent les dérivées horizontales de g_z, calculées et non mesurées. Nous en donnons ici un bref apercu.

4.1.2.1 Signal analytique

Fonction analytique Les fonctions analytiques sont en quelque sorte la généralisation, à l'espace des nombres complexes, des fonctions réelles développables en série de Taylor. Ainsi,

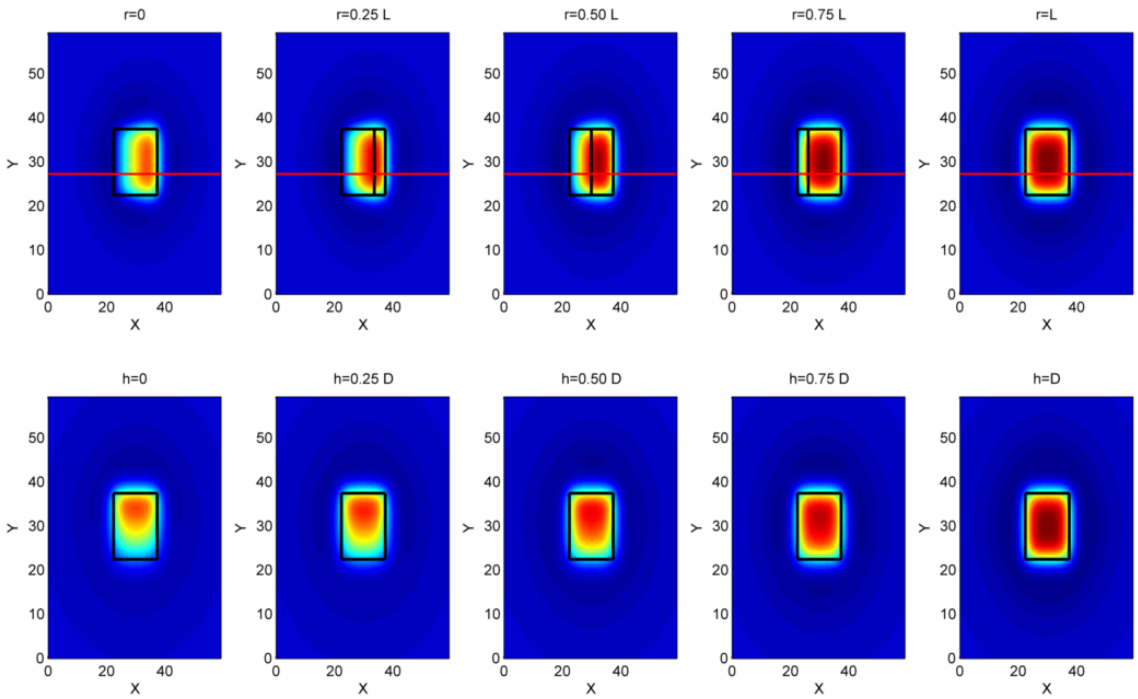


Figure 4.5: *Variations de T_{zz} pour l'exemple 1 (en haut) et l'exemple 2 (en bas), selon la diminution de la surface supérieure en x pour l'exemple 1, et la face avant en z pour l'exemple 2. En rouge, le profil utilisé pour l'exemple 1. En noir la projection du prisme sur le plan (xOy). La figure n'ayant pas d'autre vocation qu'illustrer les modifications de l'allure du signal observé, nous n'avons pas représenté l'échelle de couleur de T_{zz} (mais elle est la même sur toutes les cartes).*

une fonction complexe f définie sur un ouvert Ω du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est dite analytique dans Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω : en particulier, étant donné un point z_0 de Ω, f s'écrira, en tout point z au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \,, \tag{4.1}$$

et la série (4.1) sera convergente. Parmi les nombreuses propriétés des fonctions analytiques (voir par exemple *Rudin*, 1975), l'une d'entre elles, qui nous intéresse ici, est donnée par le théorème parfois désigné sous le nom de *Principe du Maximum*. Avec les notations précédentes, et supposant f analytique dans Ω, considérons un domaine D fermé (être fermé, ici, signifie à peu près avoir un bord. Pour les notions précises de topologie, on pourra par exemple se reporter à *Brezis*, 1983; *Bourbaki*, 1990), borné (il n'est pas possible de trouver dans D un nombre complexe ayant un module aussi grand que l'on veut), et inclus dans Ω. Alors selon le Principe du Maximum, si f n'est pas constante dans D et $|f|$ possède un maximum local en

un point de D, alors ce point appartient nécessairement au bord du domaine D. Considérant ce théorème, nous comprenons intuitivement que s'il est possible de construire, à partir du potentiel de pesanteur, une fonction analytique dont le module présente un maximum local relié à la présence d'une source, nous devons pouvoir mettre en évidence les contours de cette source en étudiant les extrema de cette fonction. Le signal analytique décrit ci-après est une telle fonction.

Signal analytique *Roest et al.* (1992) ont montré que l'on pouvait définir une fonction, analytique au sens défini dans le paragraphe précédent (*Ville*, 1948), appelée signal analytique du vecteur accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g}$ en trois dimensions, selon [1] :

$$\overrightarrow{S}(x,y,z) = g_x\overrightarrow{e_x} + g_y\overrightarrow{e_y} + ig_z\overrightarrow{e_z}, \tag{4.2}$$

où $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont les vecteurs unitaires dans les directions x, y et z respectivement, et i le nombre imaginaire pur dont le carré vaut -1. Alors les dérivées de $\overrightarrow{S}$ dans les trois directions x, y et z (celles des vecteurs de base étant nulles) sont respectivement $\overrightarrow{A_x}$, $\overrightarrow{A_y}$ et $\overrightarrow{A_z}$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{A_x} & = & \frac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial x} & = & \frac{\partial g_x}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial g_y}{\partial x}\overrightarrow{e_y} + i\frac{\partial g_z}{\partial x}\overrightarrow{e_z}, \\ \overrightarrow{A_y} & = & \frac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial y} & = & \frac{\partial g_x}{\partial y}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + i\frac{\partial g_z}{\partial y}\overrightarrow{e_z}, \\ \overrightarrow{A_z} & = & \frac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial z} & = & \frac{\partial g_x}{\partial z}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial g_y}{\partial z}\overrightarrow{e_y} + i\frac{\partial g_z}{\partial z}\overrightarrow{e_z}, \end{array}\right. \tag{4.3}$$

et, par définition (équation 2.6) des composantes du tenseur gradient de gravité :

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{A_x} & = & T_{xx}\overrightarrow{e_x} + T_{xy}\overrightarrow{e_y} + iT_{xz}\overrightarrow{e_z}, \\ \overrightarrow{A_y} & = & T_{xy}\overrightarrow{e_x} + T_{yy}\overrightarrow{e_y} + iT_{yz}\overrightarrow{e_z}, \\ \overrightarrow{A_z} & = & T_{xz}\overrightarrow{e_x} + T_{yz}\overrightarrow{e_y} + iT_{zz}\overrightarrow{e_z}. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Les modules des trois vecteurs $\overrightarrow{A_x}$, $\overrightarrow{A_y}$ et $\overrightarrow{A_z}$ sont alors (voir par exemple *Mohan and Anand Babu*, 1995) :

$$\left\{\begin{array}{lll} \left|\overrightarrow{A_x}\right| & = & \sqrt{T_{xx}^2 + T_{xy}^2 + T_{xz}^2}, \\ \left|\overrightarrow{A_y}\right| & = & \sqrt{T_{xy}^2 + T_{yy}^2 + T_{yz}^2}, \\ \left|\overrightarrow{A_z}\right| & = & \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2 + T_{zz}^2}. \end{array}\right. \tag{4.5}$$

[1] Il y a plusieurs façons de définir le signal analytique. Pour une analyse de l'équivalence entre une formulation vectorielle et une formulation scalaire, par exemple, voir *Mohan and Anand Babu* (1995).

Il existe de nombreux exemples d'application à des données de gravimétrie ou de magnétisme, dans la littérature, montrant que l'on peut utiliser l'amplitude du signal analytique et de ses dérivées pour localiser les sources (voir par exemple *Roest et al.*, 1992; *Debeglia and Corpel*, 1997; *Hsu et al.*, 1998; *Asfirane-Haddadj and Galdeano*, 2000; *Florio et al.*, 2006; *Li*, 2006). Dans l'article en fin de chapitre (*Mikhailov et al.*, 2007), nous montrons comment les amplitudes définies dans l'équation (4.5) peuvent être reliées aux invariants du tenseur définis au chapitre 2 par les équations (2.22), et utilisées pour souligner leurs contours. Traditionnellement, les quantités mises en jeu dans les équations (4.5) sont calculées à partir des valeurs mesurées de g_z. Nous soulignons dans l'article qu'en présence de bruit dans les données, un tel calcul est numériquement instable. Si elles ont une précision suffisante, il est donc intéressant d'utiliser les dérivées mesurées et non calculées pour une telle application.

4.1.2.2 Déconvolution d'Euler

Fonctions homogènes Une fonction numérique f est dite homogène de degré α (où α est un réel) si, pour tout x du domaine de définition D_f de f et tout réel t strictement positif :

$$tx \in D_f \quad \text{et} \quad f(tx) = t^{\alpha} f(x). \tag{4.6}$$

On pourra par exemple se reporter à *Cauchy* (1882) ou *Boussinesq* (1887) pour quelques propriétés des fonctions homogènes. Entre autres, on peut montrer que si f est une fonction homogène de degré α et différentiable dans son domaine de définition, alors les dérivées partielles du premier ordre de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$ sur ce même domaine ; il en découle la propriété suivante, appelée *Identité d'Euler* (ou *Théorème des Fonctions Homogènes* pour *Cauchy*, 1882) : si $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ où les x_i sont des réels strictements positifs, et f est différentiable en x et homogène de degré α, alors :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha\, f(x). \tag{4.7}$$

La formule (4.7) se généralise à tout x non nul, et réciproquement, une fonction différentiable qui vérifie (4.7) en tout x non nul de son domaine de définition est homogène de degré α. Nous faisons appel à l'identité d'Euler ainsi établie dans ce qui suit, l'application de cette identité aux champs de potentiels découlant naturellement de l'homogénéité des fonctions du type $\frac{1}{r^N}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Déconvolution d'Euler On peut montrer (voir par exemple *Thompson*, 1982; *Reid et al.*, 1990) que pour un certain nombre de sources de géométrie simple (point source, lignes de points sources, contact, dyke mince, ...), la position (x_0, y_0, z_0) des sources est reliée aux

Source	Indice structural N (gravimétrie)		
	potentiel	accélération	dérivées
point source	1	2	3
ligne de points sources cylindre horizontal	0	1	2
plan semi-infini dyke mince marche	-2	-1	0

TAB. 4.1: *Indices structuraux associés à quelques géométries simples pour les anomalies du potentiel de pesanteur et de ses dérivées spatiales premières et secondes (d'après Stavrev, 1997). Les indices équivalents s'obtiennent, pour les sources magnétiques, en ajoutant 1 à ceux obtenus pour les anomalies gravimétriques.*

valeurs $T(x, y, z)$ des anomalies (magnétiques ou gravimétriques), par l'équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z) + (y - y_0)\frac{\partial T}{\partial y}(x, y, z) + (z - z_0)\frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z) = N(B_0 - T(x, y, z)), \quad (4.8)$$

où N est appelé *indice structural* et B_0 est la valeur d'un champ régional à déterminer. Avec $N = -\alpha$, les équations (4.7) et (4.8) sont similaires, et l'équation (4.8) est nommée *Équation d'Euler*, par analogie avec l'identité d'Euler (4.7). L'indice structural N dépend de la géométrie de la source et caractérise la vitesse d'atténuation de l'anomalie (par exemple l'anomalie gravimétrique s'atténue en $\frac{1}{r^2}$ pour un point source et l'indice structural vaut 2). Nous avons vu que si f est une fonction homogène de degré α, alors ses dérivées sont homogènes de degré $\alpha - n$ où n est l'ordre de dérivation. Si l'équation (4.8) est valable pour le potentiel, elle l'est donc aussi pour ses dérivées. Ainsi, le tableau 4.1, issu de *Stavrev* (1997), donne la valeur des indices structuraux pour quelques géométries simples, l'anomalie T de l'équation (4.8) représentant le potentiel de pesanteur, l'accélération ou ses dérivées selon la colonne du tableau. Supposant N connu, l'équation (4.8) possède quatre inconnues : la position de la source (x_0, y_0, z_0) et le champ régional B_0. En théorie, il suffit donc de mesurer l'anomalie en quatre positions distinctes (pour résoudre quatre équations indépendantes) pour déterminer ces paramètres.

En pratique, les mesures n'étant jamais parfaites ni le bruit totalement éliminé, on ne se contente pas de quatre mesures, bien sûr. On effectue autant de mesures que possible, puis on résout par moindres carrés le système surdéterminé (voir *Blakely*, 1996) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x}(\overrightarrow{r_1}); & \frac{\partial T}{\partial y}(\overrightarrow{r_1}); & \frac{\partial T}{\partial z}(\overrightarrow{r_1}); & N \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\overrightarrow{r_2}); & \frac{\partial T}{\partial y}(\overrightarrow{r_2}); & \frac{\partial T}{\partial z}(\overrightarrow{r_2}); & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\overrightarrow{r_p}); & \frac{\partial T}{\partial y}(\overrightarrow{r_p}); & \frac{\partial T}{\partial z}(\overrightarrow{r_p}); & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} T(\overrightarrow{r_1}) \\ T(\overrightarrow{r_2}) \\ \vdots \\ T(\overrightarrow{r_p}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{r_1}.\overrightarrow{\nabla T}(\overrightarrow{r_1}) \\ \overrightarrow{r_2}.\overrightarrow{\nabla T}(\overrightarrow{r_2}) \\ \vdots \\ \overrightarrow{r_p}.\overrightarrow{\nabla T}(\overrightarrow{r_p}) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

équivalent à autant de répliques indépendantes de l'équation (4.8) qu'il y a de points de mesure, $p \geq 4$ représentant le nombre de points de mesure utilisés pour la résolution, et $\overrightarrow{r_i}$ le vecteur position du point de mesure $i = 1, .., p$. Le système (4.9) est résolu dans une fenêtre (contenant les p points et dont la taille est à déterminer selon le problème traité) que l'on fait glisser sur la grille de mesure (voir par exemple *Reid et al.*, 1990). On obtient alors autant de solutions que de positions de la fenêtre. Dès lors se pose le problème de la sélection des solutions.

Lorque la méthode fonctionne bien (voir par exemple *Widiwijayanti et al.*, 2003), les solutions forment des amas délimitant les contours des sources, dans des plans horizontaux, permettant non seulement de définir les sources latéralement mais aussi d'estimer leur profondeur. C'est par exemple le cas pour des sources compactes, isolées, et bornées par des parois verticales. Bien sûr, la morphologie de l'ensemble final des solutions dépend de paramètres liés à l'implémentation, tels le choix de la fenêtre et du pas pour son glissement ou le choix d'un critère de sélection (pour une revue détaillée des critères de sélection des solutions, voir par exemple *Mikhailov et al.*, 2002; *Fitzgerald et al.*, 2004, ou l'article en fin de chapitre). Mais la distribution des solutions et la possibilité de les interpréter dépend également de la distribution des sources, de leur nature et de la qualité de l'ensemble des mesures. En effet, pour résoudre le système (4.9), il faut calculer les dérivées de l'anomalie. Si les données sont trop bruitées ou trop irrégulièrement distribuées, l'erreur due au calcul des dérivées est pénalisante. De même, des sources proches l'une de l'autre interfèrent (voir par exemple *Reid et al.*, 1990) et les solutions obtenues forment des nuages épars, difficiles à interpréter. Enfin, la résolution de (4.9) suppose l'indice structural N connu et constant.

Cette dernière contrainte est particulièrement importante. En effet, le choix d'un indice structural signifie le choix d'une géométrie commune à toutes les sources recherchées, interdisant la recherche simultanée d'une combinaison de sources de types différents. De plus, comme nous l'avons dit plus haut, l'équation d'Euler (4.8) est vérifiée pour des corps à géométrie simple, avec des indices structuraux entiers. Pour des corps à géométries complexes, autrement dit pour la majorité des sources réelles, il faut envisager des indices structuraux à valeur non entière, et variable. Il paraît donc essentiel d'élaborer des méthodes pour lesquelles l'indice structural est calculé automatiquement. *Li* (2003) passe en revue les méthodes pour l'estimation de la profondeur, et souligne le fait que les méthodes permettant de déterminer la géométrie de la source *a priori*, et donc de déterminer l'indice structural adéquat, sont basées sur le calcul, numériquement instable en présence de bruit dans les données, de dérivées (voir par exemple la série d'articles sur la déconvolution d'Euler « étendue » mentionnés dans l'article en fin de chapitre). Ce constat appelle au développement d'une méthode qui permette d'estimer l'indice automatiquement sans avoir recours au calcul des dérivées. Nous avons développé et présentons succintement (les détails sont décrits dans l'article) dans ce qui suit une telle méthode.

4.1.3 Méthodes utilisant les données du tenseur complet

Zhang et al. (2000) présentent une tentative d'adapter la déconvolution d'Euler étendue pour utiliser les gradients de gravité mesurés plutôt que calculés. Néanmoins, si leur procédure évite le calcul des dérivées horizontales de g_z, elle requiert le calcul de g_x et g_y à partir de g_z. Le problème de l'instabilité du calcul due au bruit dans les données est donc seulement déplacé.

La méthode que nous proposons dans l'article qui clôt ce chapitre utilise seulement les gradients mesurés et les valeurs mesurées de g_z. *Pedersen and Rasmussen* (1990) ont proposé, pour de futures applications dans l'interprétation des données de magnétisme ou gravimétrie, d'utiliser la quantité invariante I, construite à partir des deux invariants du tenseur I_1 et I_2 non nuls du système d'équations (2.22) selon :

$$I = -\frac{(I_2/2)^2}{(I_1/2)^3}. \tag{4.10}$$

Nous montrons qu'il est possible, en extrapolant les formules établies pour des sources simples, d'obtenir l'expression générale reliant I à la profondeur des sources :

$$h = (1 + I)\,\frac{g_z}{\lambda_1}, \tag{4.11}$$

ou, de manière équivalente :

$$h = N\frac{g_z}{\lambda_1}, \tag{4.12}$$

où λ_1 est la valeur propre du tenseur dont la valeur absolue est la plus grande, et h la profondeur de la source. L'indice structural $N = 1+I$ est alors calculé en chaque point à l'aide des formules (2.22) et (4.10). Ce calcul ne suppose aucun *a priori* sur la géométrie des sources, et les variations de l'indice structural N sur la zone reflètent la complexité des sources. Il est alors possible de déterminer un système de sources ponctuelles équivalentes (voir §2.1.7.1) qui explique le signal mesuré. Nous montrons sur des exemples synthétiques que notre méthode et la déconvolution d'Euler sont complémentaires. En effet, là où la déconvolution d'Euler va préciser les contours des sources, notre méthode localisera le centre du corps anomalique. De plus les variations dans la gamme de profondeurs possibles sont plus faibles pour nos résultats que pour ceux issus de la déconvolution d'Euler. Enfin, nous avons comparé nos résultats avec les résultats de la déconvolution d'Euler connaissant les sources, c'est à dire connaissant l'indice structural adéquat, ce qui n'arrive jamais dans la pratique. La figure 4.6 montre les résultats de l'application de la déconvolution d'Euler et de notre méthode sur les données Bell, avec en fond la composante T_{zz}. Comme sur les exemples synthétiques, les solutions d'Euler semblent délimiter les contours des sources, tandis que nos résultats en localisent vraisemblablement les centres.

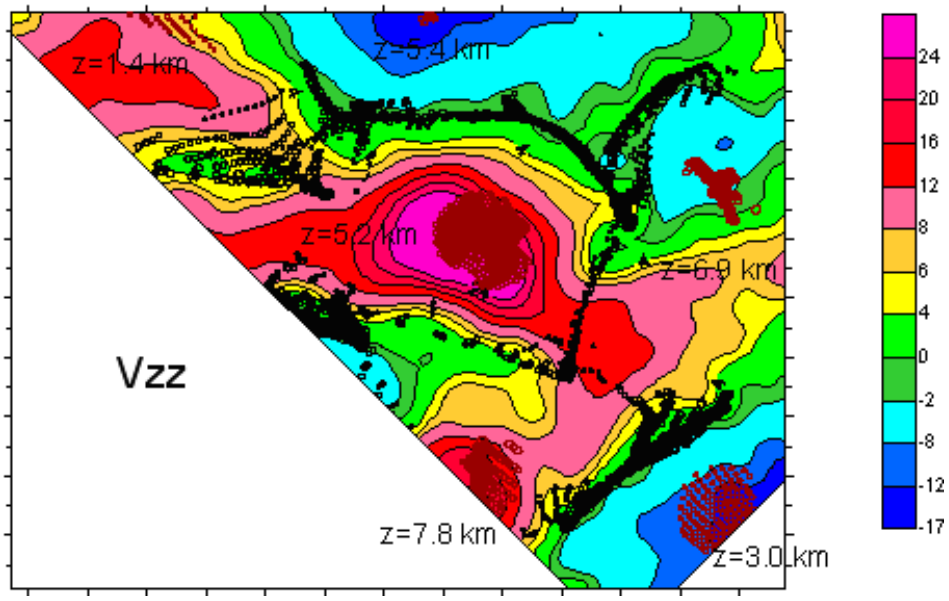


Figure 4.6: *Application de la méthode décrite en fin de chapitre, dite « déconvolution tensorielle » aux données Bell. En fond (échelle en Eötvös), la composante T_{zz} mesurée du tenseur gradient de gravité. En noir les solutions issues de la déconvolution d'Euler traditionnelle, en brun nos solutions. Les profondeurs des amas de nos solutions sont indiquées à côté de chacun des amas.*

Soulignons un point important : lorsque nous calculons l'indice structural à partir des composantes du tenseur, nous utilisons toutes les composantes mesurées. C'est la connaissance du tenseur complet (par cinq composantes indépendantes mesurées simultanément), qui permet d'améliorer la localisation des sources, tout comme ces mesures permettaient d'améliorer la qualité du signal pour la méthode de réduction du bruit présentée dans le chapitre précédent. Signalons enfin que, puisque nous faisons appel aux invariants du tenseur, les performances de notre méthode devraient être insensibles aux problèmes d'orientation, en particulier de rotation du dispositif de mesure (voir §3.1.2), point particulièrement important dans le cadre du traitement des données de gradiométrie en gravimétrie, marines ou aéroportées.

4.2 Perspective : inversion en densité

4.2.1 Problèmes inverses en gravimétrie

En 1938, M. Brillouin écrivait, après avoir attiré l'attention sur la sous-détermination du problème inverse en gravimétrie : « *On voit [...] combien seraient incomplets les résultats fournis par la méthode de prospection gravimétrique (Eötvös), même en supposant le réseau des stations beaucoup mieux réparti en surface qu'il ne l'est ordinairement, si les prospecteurs ne faisaient appel aux observations géologiques locales, et n'utilisaient habilement toutes les indications suggérées par leurs observations antérieures. La prospection est un art* » (voir *Brillouin*,

1938). Si ces propos sont anciens, ils n'en restent pas moins d'actualité. La difficulté, lorsque l'on veut déterminer la distribution interne des masses qui engendre le signal mesuré, autrement dit « résoudre le problème inverse en gravimétrie », réside bien dans le cumul et la prise en considération de toute l'information disponible sur les sources.

Résoudre un problème inverse est en général un problème d'optimisation (*Tarantola*, 2003) : il va s'agir de déterminer le modèle m tel que le signal associé soit le plus proche (au sens d'une certaine norme) possible des données d. Cette définition très générale suffit à anticiper quelques problèmes posés par l'inversion en général, et l'inversion en gravimétrie en particulier. Tout d'abord il faut être capable d'écrire le signal mesuré s comme une fonction des modèles :

$$s = s(m) \tag{4.13}$$

afin de pouvoir comparer, pour un modèle donné, s aux données. C'est ce que l'on appelle « résoudre le problème direct ». Nous avons vu au paragraphe 2.1.7, qu'il était possible de calculer le potentiel de pesanteur et ses dérivées du premier et deuxième ordre pour des corps à géométrie simple. Il n'existe bien sûr pas de formule pour un corps à géométrie quelconque. Pour traiter le cas de géométries complexes, il faudra approcher la géométrie du corps (ou d'une zone) par une association de corps (ou d'interfaces) à géométries élémentaires, et sommer leurs contributions (utilisant la linéarité du signal dans les paramètres du modèle). Une approximation fine de la géométrie d'une source, et donc la résolution du problème direct pour des corps à géométrie complexe, nécessiteront donc un temps de calcul accru. De plus, si nous voulons déterminer un modèle qui explique les données, il faut que ce modèle explique également le bruit dans les données. Or nous avons vu qu'une grande partie du bruit dans les données de gravimétrie était difficile à modéliser. Enfin, si la relation (4.13) était biunivoque, connaissant l'expression analytique de s utilisée pour le calcul direct, il suffirait d'inverser s, c'est à dire calculer la fonction réciproque s^{-1}de s. Puisqu'une infinité de distributions de sources peuvent expliquer un même signal gravimétrique, il n'est bien sûr pas possible de définir et calculer la fonction réciproque. En résumé, la première difficulté dans la résolution du problème inverse en gravimétrie est de calculer des distributions de sources qui peuvent expliquer les données. La seconde, et non la moindre, est de posséder suffisamment d'informations sur les sources, en plus du signal gravimétrique, pour pouvoir déterminer, parmi les solutions que nous pouvons calculer, celle correspondant effectivement à la réalité géologique.

4.2.2 Utilisation des gradients

Malgré l'indétermination, il existe de nombreux algorithmes d'inversion en densité des données gravimétriques (entre nombreux autres, *Last and Kubik*, 1983; *Guspi*, 1993; *Bear et al.*, 1995; *Medeiros and Silva*, 1996; *Li and Oldenburg*, 1998; *Silva et al.*, 2000; *Camacho et al.*, 2000; *Moraes and Hansen*, 2001; *Roy et al.*, 2005; *Silva and Barbosa*, 2006; *van Zon and Roy-Chowdhury*, 2006). Pour parvenir à une solution unique, les différents auteurs utilisent

l'information géologique disponible pour trouver des bornes aux densités possibles, localiser les sources, supposent des propriétés mathématiques particulières (de topologie) vérifiées par les sources ou inversent conjointement les données de gravimétrie et d'autres données (*Gallardo-Delgado et al.*, 2003; *Tiberi et al.*, 2003; *Bosch et al.*, 2006; *Pilkington*, 2006). Depuis quelque temps, de nouvelles méthodes apparaissent, utilisant les gradients de gravité mesurés (par exemple *Zhdanov et al.*, 2004; *Jia et al.*, 2005; *Lee et al.*, 2005; *Kirkendall et al.*, 2006; *Droujinine et al.*, 2007). On peut se demander ce que la mesure des gradients peut apporter à une méthode d'inversion gravimétrique en densité, puisque, *stricto sensu*, les dérivées du champ de pesanteur ne contiennent pas plus d'information que le champ lui-même. En fait, si l'on connaissait parfaitement le potentiel en tout point, on connaîtrait également ses dérivées de tous ordres. Mais, la précision et la couverture des mesures étant limitée, on ne connaît justement pas le potentiel en tout point. Or nous avons montré, dans ce qui précède, que si l'on utilisait la redondance (parce qu'elles dérivent d'un même potentiel) et la complémentarité (parce que les différentes dérivées apportent une information dans différentes directions de l'espace) des mesures des composantes du tenseur, alors il était possible, non seulement de réduire considérablement le bruit qui est le moins facilement modélisable dans les mesures de g_z, mais également de mieux localiser les sources (latéralement comme en profondeur) et déterminer leurs contours, qu'avec la seule information issue de la mesure de la composante verticale du champ de pesanteur. Il est donc naturel d'inclure les dérivées mesurées dans le processus d'inversion des données gravimétriques, et les quelques articles sur le sujet que nous citons plus haut ne sont certainement que les premiers d'une longue série.

Article 2

Ci-après, l'article « Tensor deconvolution : a method to locate equivalent sources from full tensor gravity data, paru dans la revue *Geophysics*, volume 72, en 2007.

GEOPHYSICS, VOL. 72, NO. 5 (SEPTEMBER-OCTOBER 2007); P. I61–I69, 8 FIGS.
10.1190/1.2749317

Tensor deconvolution: A method to locate equivalent sources from full tensor gravity data

Valentin Mikhailov[1], Gwendoline Pajot[2], Michel Diament[2], and Antony Price[3]

ABSTRACT

We present a method dedicated to the interpretation of full tensor (gravity) gradiometry (FTG) data called tensor deconvolution. It is especially designed to benefit from the simultaneous use of all the FTG components and of the gravity field. In particular, it uses tensor scalar invariants as a basis for source location. The invariant expressions involve all of the independent components of the tensor. This method is a tensor analog of Euler deconvolution, but has the following advantages compared to the conventional Euler deconvolution method: (1) It provides a solution at every observation point, without the use of a sliding window. (2) It determines the structural index automatically; as a consequence, the structural index follows the variations of the field morphology. (3) It uses all components of the measured full gradient tensor and gravity field, thus reducing errors caused by random noise. It is based on scalar invariants that are by nature insensitive to the orientation of the measuring device. We tested our method on both noise-free and noise-contaminated data. These tests show that tensor solutions cluster in the vicinity of the center of causative bodies, whereas Euler solutions better outline their edges. Hence, these methods should be combined for improved contouring and depth estimation. In addition, we use a clustering method to improve the selection of solutions, which proves advantageous when data are noisy or when signals from close causative bodies interfere.

INTRODUCTION

The history of gravity gradiometry dates back to 1886 when Loránd Eötvös constructed his first torsion balance gradiometer. It was the first potential field measurement device widely used in oil exploration (e.g. Bell and Hansen, 1998; Pawlowski, 1998). The first mapping of oil-bearing anticline structure was performed in Gbely, Slovakia, in 1916 (Szabó, 1998). In the 1930s, gradiometers were replaced by gravimeters and gravity measurements became easier, faster, and cheaper. Because gravity data were more easily interpretable in the precomputer era, this method was widely used.

The development of high-performance moving-platform full tensor gradiometry (FTG) systems has led to the rebirth of gravity gradiometry. The first systems measuring all components of the gravity gradient tensor (FTG) were developed in 1970s (Jekeli, 1993; Bell et al., 1997). In the late 1980s, these instruments were, for the first time, implemented in exploration geophysics (e.g. Bell and Hansen, 1998). Recently, many examples of successful applications of FTG data in mineral exploration and oil prospecting have been reported (e.g. Pawlowski, 1998; Zhdanov et al., 2004). Gravity gradiometry applications, however, are not restricted to prospecting purposes. Indeed, the European Space Agency is planning to launch the GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) satellite in late 2007 with a gradiometer onboard (ESA, 1999). Tensor data will then be used in combination with GPS tracking to improve models of the global gravity field and geoid. This shall lead to unprecedented accuracy and spatial resolution, thus allowing new regional and local geodynamical studies.

In many studies, FTG data are used to calculate the enhanced gravity field g_z, which contains shorter wavelength components in comparison to gravimetry data. This allows a more detailed mapping of subsurface structures, such as the lower boundary of salt domes (Jorgensen and Kisabeth, 2000; Routh et al., 2001). Using the enhanced second vertical derivative of the potential U_{zz} calculated from FTG data, joint inversion of seismic and FTG data is also performed (e.g. O'Brien et al., 2005). Several new techniques for FTG data processing and interpretation have been recently suggested (e.g. Condi and Talwani, 1999; Jorgensen and Kisabeth, 2000; Zhang et al., 2000; Li, 2001a, b; Routh et al., 2001; Lyrio et al., 2004; Zhdanov et al., 2004; and While et al., 2006). However, theory and methods for FTG data processing and interpretation that combine all FTG components and the gravity field are still challenging. We be-

Manuscript received by the Editor July 7, 2006; revised manuscript received April 6, 2007; published online July 18, 2007.
[1]Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France and Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, Russia. E-mail: valentin@ipgp.jussieu.fr.
[2]Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France. E-mail: pajot@ipgp.jussieu.fr; diament@ipgp.jussieu.fr.
[3]Total E&P, Non-seismic Geophysics, Paris, France. E-mail: antony.price@total.com.
© 2007 Society of Exploration Geophysicists. All rights reserved.

lieve that new marine, airborne, and space FTG measurement techniques call for the development of new methods of data processing and interpretation. Indeed, even the transformation of FTG data into enhanced gravity leads to the loss of useful information.

In this paper, we present a method to locate equivalent sources using FTG data. It is based on the same principles as Euler deconvolution, thus we call this method *tensor deconvolution*. It uses tensor scalar invariants and, thus, should be robust to errors caused by imperfect orientation of the measuring device. Moreover, because it uses the complete set of components of the FTG tensor, it is resistant to random noise in the different measurement channels. Contrary to the traditional Euler deconvolution method, it allows an automated estimate of the structural index and does not require a sliding window. Moreover, although this is not the first attempt to enhance Euler deconvolution by the use of gravity gradient data, this method differs from the previously published work dedicated to this effort because it uses all the measured values simultaneously, and only these values. (For example, Zhang et al., 2000, applied Euler deconvolution to FTG data considering different lines of the FTG tensor components separately. Their approach requires the calculation of the horizontal derivatives g_x and g_y of the gravity potential U.)

After recalling the fundamentals of Euler deconvolution and developing the mathematical relationships on which the algorithm is based, we present this algorithm and apply it to synthetic examples. It appears that our method may be particularly efficient at resolving the depths of multiple sources in the presence of noise.

TENSOR DECONVOLUTION

Mathematical background

Let us first briefly recall the principle of Euler deconvolution. By definition, a real function f is a homogeneous function of degree n when, for any t, it obeys the equation,

$$f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z). \tag{1}$$

According to this definition, the gravity and magnetic fields caused by some simple sources are homogeneous functions of the spatial coordinates. In particular, this equation is valid (see, for example, Blakely, 1995) for gravity (and magnetic) anomalies associated with point sources and lines of sources (or, in the magnetic case, point poles and point dipoles and lines of poles and dipoles). The location of a point source (ξ, η, ζ) in 3D, or the location of a line source (ξ, ζ) in 2D, can be found from the following equation (Euler equation):

$$(x - \xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - \eta)\frac{\partial f}{\partial y} + (z - \varsigma)\frac{\partial f}{\partial z} = - N(f(x,y,z) - A), \tag{2}$$

where $N = -n$ is the structural index, which depends on the type of the body, and A is an unknown constant level in a measured field (Thompson, 1982; Reid et al., 1990). To solve equation 2, the Euler deconvolution method uses a sliding window of data points. At least four data points are required in this window, because we are solving for four unknown parameters: ξ, η, ζ, and A (e.g., Reid et al., 1990).

Strictly speaking, line and point sources are the only causative bodies that obey the Euler equation of homogeneity. Nevertheless, Euler deconvolution can also be applied to a deep body of arbitrary shape, where the anomaly is close to that of a point source or a line of sources, with corresponding structural indices $N = 2$ or $N = 1$ (examples of the structural indices corresponding to different causative sources are given by Stavrev, 1997). Moreover, Euler deconvolution has proven successful for edge detection of real bodies, especially simple ones having close to vertical sides. Furthermore, several bodies may obey the Euler equation under specific conditions. For example, equation 2 is valid for a dike (vertical or inclined) or a finite step when its offset is considerably smaller than its depth (Li, 2003). When the Euler method is applied to real 3D bodies, the obtained solutions very often either trace near vertical edges of causative bodies, or point to their center of mass.

Results of Euler deconvolution are sensitive to the choice of the structural index, as well as of the size and location of the sliding windows (Fairhead et al., 1994). In practice, several structural indices are tried, and the one providing results fitting to known geological and seismic data, or having good clustering properties, is kept (for an exhaustive study of the discrimination techniques to use in Euler deconvolution methods, see Fitzgerald et al., 2004). However, errors in the estimated depth of the sources occur when the index is inappropriate, and the a priori choice of a single constant index is obviously inappropriate when multiple sources with different geometries interfere. The depth estimation can be improved using additional analytical constraints, namely the property of invariance under rotation of homogeneous functions (Mushayandebvu et al., 1999). This provides additional equations and the so-called "extended Euler deconvolution method" provides better depth estimation than traditional Euler. Nabighian and Hansen (2001) mention that additional equations permit the elimination of the structural index N between pairs of equations, yielding a system of two equations at each point, which are still linear in ξ, η, and ς, do not contain N explicitly, but are bilinear in the field variables. Discussions on methods to estimate the structural index can be found, for example, in Slack et al. (1967), Steenland (1968), Barbosa et al. (1999), and Martelet et al. (2001). As recalled by Li (2003), most methods to determine the geometry of the source (without deducing it from geology) and, thus, to guide the choice of an adequate structural index, are based on computing derivatives, and this calculation is well known to be numerically unstable, especially in the presence of noise. On the synthetic examples below, we compare our suggested tensor deconvolution method with different versions of the Euler technique, even though the comparison of extended and conventional Euler deconvolution is beyond the scope of this paper. When applying the conventional and extended Euler method we assigned the correct structural index corresponding to synthetic sources used. We believe that in this case (contrary to realistic exploration situations where the structural index is unknown) extended Euler methods provide results close to the ones obtained by conventional Euler.

Zhang et al. (2000) adapted the extended Euler deconvolution method to gravity gradient data. This allows the use of measured rather than computed derivatives, but their method requires the calculation from g_z of derivatives g_x and g_y of the gravity potential along two horizontal coordinate lines, which is also known to be numerically unstable, especially in the presence of regional long-wavelength components. We hereafter describe a method to use the gravity tensor invariants computed from measured gravity gradients. Unlike previous methods, it combines the following advantages:

- Instead of a priori choosing a constant structural index, the index, which is related to the geometry of the source, is computed at every point directly from the data. The constraint brought by the knowledge of the geometry of the source to aid its localization is

therefore deduced from the data and suitable for large data sets where the structural index is likely to vary.

- It does not require the use of a sliding window or the computation of derivatives, and, thus may be less sensitive to numerical instabilities caused by noise.

Let us now recall some fundamentals about the gravity gradient tensor. We use a Cartesian system of coordinates (x,y,z) with the z-axis directed downwards and the x-axis directed northwards. The gravity gradient tensor in the (x,y,z) frame can then be written in the form,

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

where U is the gravity potential, and for all pair (α,β) in $\{x,y,z\}$ $U_{\alpha\beta} = \partial^2 U/\partial\alpha\partial\beta$. In the following text, we denote by g_α the first derivative of the gravity potential U along direction α. Traditionally, gradients $U_{\alpha\beta}$ are expressed in Eötvös unit E, with 1E = 10^{-9} s^{-2}, and g_α in mGal, with 1 mGal = 10^{-5} ms^{-2}. Because gravity is a conservative field and because of the commutability of the differential operators, the tensor is symmetric ($U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$) and its trace is equal to zero outside of the causative sources. Thus, in free space, the tensor has only five independent components. Current commercial gradiometers, such as the Bell Geospace FTG, provide all off-diagonal and two diagonal components of the upper triangle of the gradient tensor, the third diagonal component being calculated from the two others (While et al., 2006). The tensor is fully defined from these five measurements.

Following Pedersen and Rasmussen (1990), we now investigate the scalar invariants of the tensor. Let us consider the eigenvectors $\mathbf{v}_i$ and the eigenvalues λ_i of the tensor $\mathbf{T}$. Being real and symmetric, tensor $\mathbf{T}$ can be written in the form (Pedersen and Rasmussen, 1990, equation 9):

$$\mathbf{V}^t\mathbf{T}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \tag{4}$$

where $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$ is a matrix, the columns of which are eigenvectors of $\mathbf{T}$, and $\mathbf{\Lambda}$ is a diagonal matrix containing the three eigenvalues of the tensor. The superscript t denotes the transposition of tensor $\mathbf{T}$. Physically, with the origin of the coordinate system at the observation point, equation 4 means that one can find three principally different possible orthogonal rotations of the initial system of Cartesian coordinates (x,y,z), such that in the new coordinate system all off-diagonal elements vanish. The eigenvectors $\mathbf{v_i}$ determine the axes (known as the principal axes) of the new coordinate system. By definition, the tensor eigenvalues are the roots of the characteristic equation:

$$\lambda^3 - I_0\lambda^2 + I_1\lambda - I_2 = 0, \tag{5}$$

where the I_i coefficients are the scalar invariants of the tensor $\mathbf{T}$, the expressions of which involve only the tensor eigenvalues.

Pedersen and Rasmussen (1990) introduced the dimensionless invariant ratio I associated with tensor $\mathbf{T}$ that we call hereafter the *invariant ratio*:

$$I = -(I_2/2)^2/(I_1/3)^3, 0 \le I \le 1. \tag{6}$$

The invariant ratio I is equal to zero when the field is invariant along some direction (2D causative source) and equal to 1 for radially symmetric fields (e.g., a point source, see below).

We now develop the main relationships that allow us to compute the coordinates of a point source and a line source using the invariant ratio and eigenvalues.

Point source

The gravity potential that is associated with a point source is $U = GM/R$, where G is the gravitational constant, M is the mass of the point source, $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2}$, (x,y,z) are the coordinates of the observation point, and (ξ,η,ς) those of the point source. We denote by λ_1 the maximal by absolute value eigenvalue of the tensor, and $\mathbf{v}_1$ the corresponding eigenvector. Following Pedersen and Rasmussen (1990) we get, with our sign convention,

$$\lambda_1 = 2GM/R^3 \text{ and } \mathbf{v}_1 = (\xi - x, \eta - y, \varsigma - z)/R, \tag{7}$$

where $\mathbf{v}_1$ is directed from the observation point towards the source. Thus, the eigenvector components assign the three directional angles to the source, but because $\mathbf{v}_1$ is a unit vector, they do not assign the distance to it. To find the three coordinates of the source, we can use the formula for the gravity anomaly g_z (measured or enhanced/calculated, see the introduction), which is equal to

$$g_z = GM(\varsigma - z)/R^3. \tag{8}$$

Thus, using equations 7 and 8, we compute the depth to the point source:

$$\varsigma - z = 2g_z/\lambda_1, \tag{9}$$

and the remaining $(\xi - x, \eta - y)$ coordinates can now be found from the components of vector $\mathbf{v}_1$. As a result, using all values of the full gradient tensor to compute λ_1 and knowing the value of the gravity anomaly in one point, it is possible to find the position of an equivalent point source.

Moreover, the eigenvector $\mathbf{v}_1$ determines a new Cartesian frame (O_1,x_1,y_1,z_1), whose origin O_1 is at an observation point and where the z_1-direction coincides with $\mathbf{v}_1$. Thus at the origin O_1 (former (x,y,z) point) we have:

$$\lambda_1 = U_{z_1z_1}, \quad g_{z_1} = GM/R^2, \tag{10}$$

and equation 9 transforms to:

$$(z_1 - \varsigma)U_{z_1z_1} = -2g_{z_1}. \tag{11}$$

In the new coordinate system, derivatives $U_{x_1z_1}$ and $U_{y_1z_1}$ are equal to zero. Therefore, equation 11 is equivalent to the Euler equation for a point source with structural index 2.

For a line source directed along the x*-axis*

We denote by M the mass of the line source per unit length. Then, the gravity potential is $U = -2GM\ln(R)$ (Telford et al., 1990) and using the same notations as for the point source, and still following Pedersen and Rasmussen (1990), we have

$$\lambda_1 = 2GM/R^2 \text{ and } \mathbf{v}_1 = (0, \eta - y, \varsigma - z)/R. \tag{12}$$

Unit vector $\mathbf{v}_1$ is directed from the observation point to the nearest point of the line source (it is obvious that all these relationships are valid for an arbitrary orientation of the line source). As before, to find

the coordinates of the source we use the gravity anomaly g_z which is, for a line source, $g_z = 2GM(\varsigma - z)/R^2$, and thus we find the depth of the line source:

$$\varsigma - z = g_z/\lambda_1. \tag{13}$$

Again, equation 13 is analogous to the Euler equation with the structural index equal to 1.

Extending formulas to real 3D bodies

Considering equations 11 and 13, we now suggest a general formula valid for elongated and isometric bodies, as follows:

$$\varsigma = z + (1 + I)g_z/\lambda_1, \tag{14}$$

or, equivalently,

$$\varsigma = z + Ng_z/\lambda_1. \tag{15}$$

Indeed, according to Pedersen and Rasmussen (1990) a point source has an invariant ratio $I = 1$, which provides the structural index $N = 2$. For a line source, the invariant ratio I is zero, thus $N = 1$. Equation 14 thus links equations 11 and 13. For other sources, there is no strict analog of the Euler formula, instead we check our equation 14 numerically using fields generated by different causative sources. Because equation 14 is not the only way to relate the structural index to the invariant ratio I, further numerical studies are, of course, necessary. Using synthetic examples we investigated different power functions $N = 1 + I^k$, but for k ranging from 1 to 10, results appeared to be very close. Invariants of a tensor are, by definition, independent of the vector basis where the components of the tensor are expressed. Thus, we expect our method to be less sensitive than others to the problems of misorientation of the measuring device. However, we do not investigate this question further in the present paper. We also do not address here the problem that some measured FTG tensor components are probably more noisy than others, as described by While et al. (2006).This would be a subject for a separate detailed investigation. We can now present the procedure for contouring causative sources and estimating their depths from FTG data.

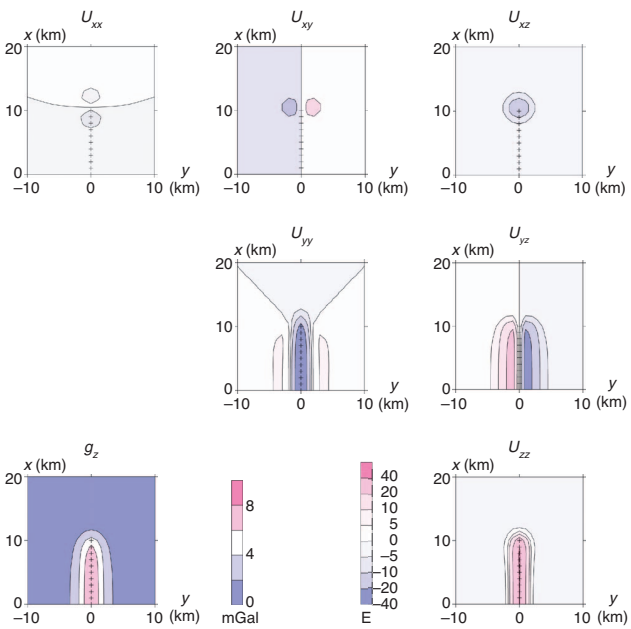


Figure 1. FTG components $U_{\alpha\beta}$ (in E) and the gravity field g_z (in mGal) caused by 21 point sources situated, one per kilometer, below the x-axis, between $x = -10$ km and $x = 10$ km, and all at a depth of 2 km. Because of symmetry, only the northern part ($x \geq 0$) of the resulting fields are shown. All distances are in kilometers. The individual effects of the point sources cannot be seen in either the gravity field or its derivatives.

Algorithm for the tensor deconvolution

The algorithm for the tensor deconvolution includes the following steps:

1) Calculation of eigenvalues, eigenvectors, tensor invariants, and the invariant ratio I at every observation point and estimation of the structural index according to equation 14
2) Calculation of the coordinates of an equivalent source using the maximal by absolute value eigenvalue and corresponding eigenvector
3) Filtering the solutions using approaches developed for Euler deconvolution (limits along coordinates, distance from observation point to the equivalent source etc)

At step 1 we used the standard procedure suggested in Press et al. (1992). In our practical calculations, we also applied two additional approaches for the step 3 of the algorithm: solutions are rejected when their horizontal distance L from the observation point is K times larger than their depth z (K is a user-determined parameter), and we apply clustering of the solutions as suggested by Mikhailov et al. (2003). The first criterion means that we are looking for solutions situated below the observation point within the cone whose top angle α is $\alpha = 2\tan^{-1}(K)$. This criterion appeared to be very efficient. Different possible criteria to discriminate between the solutions are widely discussed by Fitzgerald et al. (2004).

DISCUSSION

In this section, we discuss the efficiency of Euler and tensor deconvolution in locating causative sources on synthetic examples. Because for isolated bodies both Euler and tensor deconvolution work well, we focus on examples of complex fields (extensive interference of signals, high noise level). For the first two examples, we show the invariants of the tensor corresponding to the investigated structures, as well as the three amplitudes of the analytic signal derivatives (see Appendix) and discuss their contouring properties. We then compare the efficiency of different versions of the Euler deconvolution method and of our method to locate the causative sources. The last example shows the ability of the algorithm to distinguish interfering 3D sources which do not obey the Euler equation.

Example 1: Line of point sources

We consider the gravity anomaly caused by 21 point sources situated, one per kilometer, below the x-axis, between $x = -10$ km and $x = 10$ km, and all at a depth of 2 km. On the figures illustrating this example, only the $x > 0$ part of the plane is shown, because the gravity field is symmetrical with respect to the y-axis.

Figure 1 shows the components of the gradient tensor and the gravity anomaly g_z caused by these point sources. Figure 2 shows the amplitudes of the analytic signal derivatives A_x (Figure 2a), A_y (Figure 2b) and A_z (Figure 2c), the first (Figure 2d) and second (Figure

2e) invariants of the tensor, and the invariant ratio (Figure 2f). Figure 3 shows the results of our method without (Figure 3a) and with (Figure 3c) clustering, those of traditional Euler deconvolution with the clustering selection criterion (Figure 3b), window size 3×3 km, and a constant structural index $N = 1$ corresponding to a linear source. Isolines of g_z are plotted in the backgrounds of Figure 3a–c.

The isolines of A_y (Figure 2b) and A_z (Figure 2c), as well as the first invariant (Figure 2d) contour the set of the causative sources (these functions are similar because the line of monopoles stretches along the x-axis). Analytic signal A_x (Figure 2a) and the second invariant (Figure 2e) are maximal over the edge of the line of sources. The invariant ratio I (Figure 2f) is close to 0 above the line of sources, and close to 1 far from it. Thus the structural index $N = I + 1$ varies over the area. Being calculated with this varying structural index, the tensor solutions from equation 14 (Figure 3a) cluster more densely than the conventional Euler solutions computed with the constant a priori structural index $N = 1$ (Figure 3b). Moreover, the tensor solutions are located in a narrower depth range than the conventional Euler ones. Thus, we conclude that in this example, our method better localizes the sources than the conventional Euler deconvolution method.

If, in addition, we use a clustering selection criterion of the tensor solutions (Figure 3c), we can even isolate all point sources, but the outermost solutions are slightly shifted toward smaller x (northing) values, in comparison to the corresponding point sources. This is a surprising result considering that the depth of the sources is twice the distance between them. However, this result is achieved in absence of any kind of noise.

Example 2: Noise sensitivity

In this example, we investigate a field corresponding to a rectangular prism. This structure is far from geologically realistic, but has the advantage of being a 3D isometric body that does not obey the Euler equation. This example allows testing of equation 14. To apply the conventional Euler deconvolution method, we need to assess the structural index corresponding to a prism. Zhang et al. (2000) mentions that before substitution of integral limits, the gravity field of a rectangular block resembles a homogeneous function with the structural index $N = -1$. However, the full formula with integer limits does not obey the Euler equation. Moreover, a negative structural index does not fit any potential function. Indeed, an index $N = -1$ corresponds to a function growing toward infinity.

Because at large distances the gravity effect of a rectangular prism is close to that of a point mass, its structural index approaches $N = 2$ as the distance tends to infinity. At shorter distances the structural index $N = 1$ corresponding to a small-amplitude step can be used. (Note that this supports the idea of an effective structural index changing with the distance from a source). For this example, we choose to apply the conventional and extended Euler deconvolution method with a constant a priori structural index $N = 2$.

The gravity field and its derivatives are calculated for a rectangular body of 10×10 km horizontal dimensions, stretching down from 2 to 30 km and having a density contrast equal to 1 g/cm^3.

Figure 4 shows the tensor components and g_z associated with this structure. Figure 5 shows the amplitudes of the analytic signal derivatives A_x (Figure 5a), A_y (Figure 5b), and A_z (Figure 5c), the first (Figure 5d) and second (Figure 5e) invariants of the tensor, and the invariant ratio (Figure 5f). Figure 5a and b demonstrate the selective directional sensitivity of the A_x and A_y components, which allows

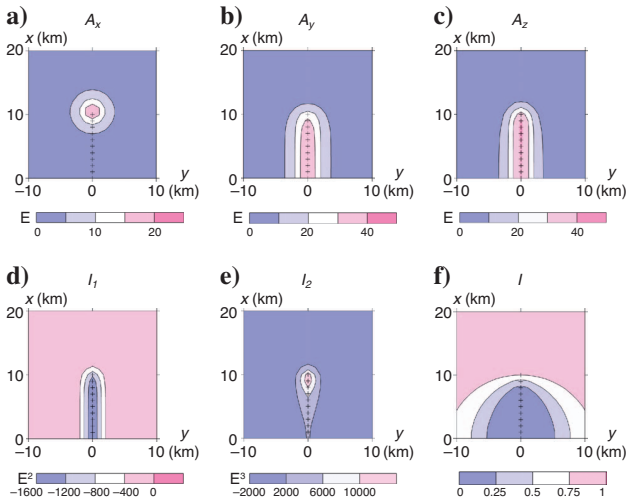


Figure 2. Amplitude of the analytic signal derivatives, invariants of the gravity gradient tensor, and invariant ratio I for the example shown on Figure 1. (a), (b), and (c) The amplitude of the analytic signals derivative A_x, A_y, A_z in Eötvös units; (d) and (e) show the first and second nonzero invariants (in E^2 for I_1 and E^3 for I_2); and (f) shows the dimensionless invariant ratio I. Notice the selective sensitivity of these various transforms.

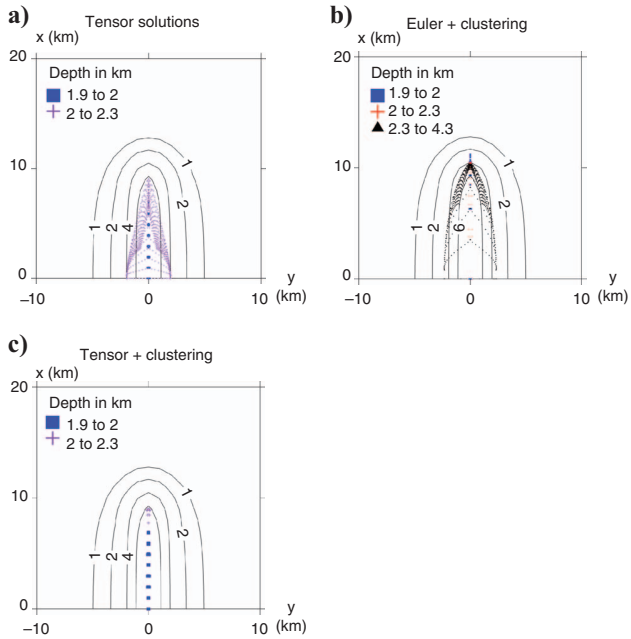


Figure 3. Comparison of tensor and Euler deconvolution for the example illustrated by Figures 1 and 2. (a) The results of tensor deconvolution, (b) the Euler solutions after selection and clustering, and (c) the tensor solutions selected by clustering. All figures are with the gravity field g_z in the background. Blue squares, red crosses, and black triangles indicate different depth intervals in kilometers. Notice that Euler solutions (b) form a wider cloud than the tensor solutions (a). Tensor solutions (a) are located close to the sources. After the clustering of the tensor solutions (c) all point sources are recognized, though the outermost solutions are shifted to smaller x values with respect to the corresponding point sources. The depths of the solutions are then very close to the real depth of 2 km.

improved outlines of the different edges of the causative bodies. We can also notice the variation of the invariant ratio I above the vertical sides of the prism (Figure 5f).

First we add Gaussian random noise with zero average and standard deviations of 1 mGal and 1 E to the gravity field and to all FTG components, respectively (Figure 6). Then we investigate the effect of noise with larger standard deviations, 3 mGal and 7 E, respectively (Figure 7).

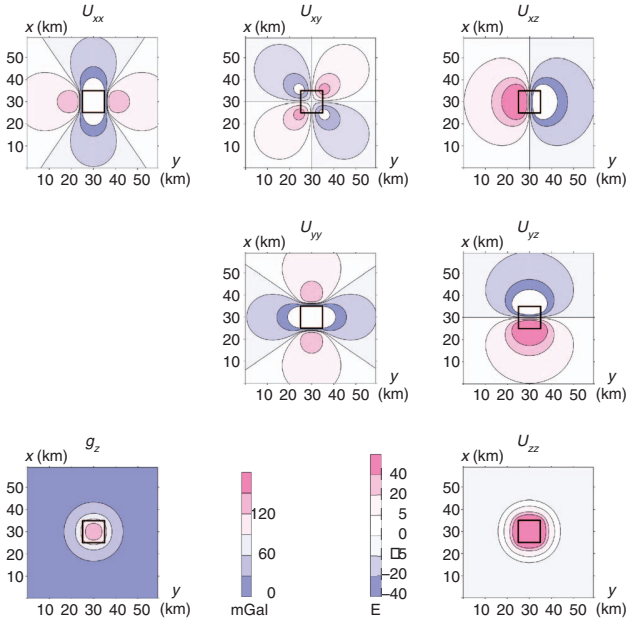


Figure 4. FTG components $U_{\alpha\beta}$ (in E) and gravity field g_z (in mGal) caused by a rectangular body of horizontal dimensions 10×10 km. The top is at 2 km and the bottom at 30 km, excess density is 1 g/cm^3. The solid square on the plots shows the contour of the causative body.

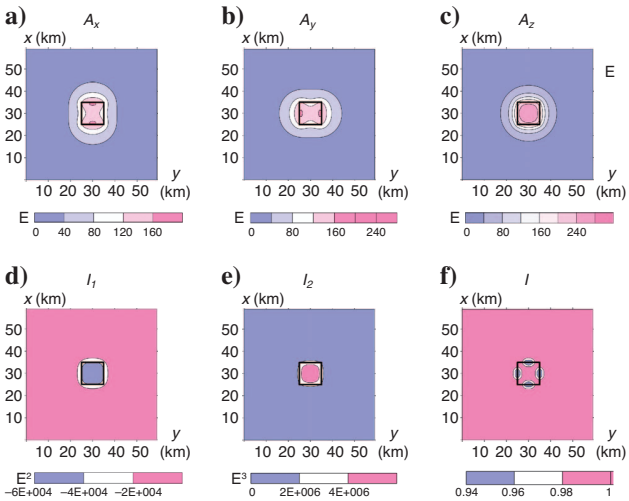


Figure 5. Same as Figure 2, except for the example shown on Figure 4. The solid square shows the contour of the causative body. Notice that the transform A_x outlines the boundaries that are perpendicular to the x-axis and A_y the ones perpendicular to the y-axis. Because the gravity field is isometric, the behavior of the invariants is similar to that of transform A_z. As a result, the invariant ratio I is everywhere close to 1.

Figure 6 shows the results of our method (Figure 6a) and of conventional Euler deconvolution (Figure 6b) with window size 3×3 km. For the tensor deconvolution, solutions were selected using two criteria:

1) Solutions are required to have positive depth
2) Solutions whose horizontal distance from the observation point is K-times larger than their depth are rejected (we used $K = 1$, thus looking for solutions situated below the observation point, within the cone with top angle 90°)

For the low-noise example, we restricted the conventional Euler deconvolution method, used as a comparison, by applying both routine selection and clustering. This was necessary because Euler solutions were more widely dispersed.

Figure 6a and b demonstrate that our method better locates the center of the anomalous body, whereas conventional Euler solutions better identify its edges. This suggests that these methods are complementary and can be applied simultaneously to better locate causative bodies. The tensor solutions are, however, better at determining a more accurate depth for the causative body modeled here.

When the level of noise increases (Figure 7a-c) the depth accuracy of the conventional Euler solutions increases drastically, and the edges of the body are not well outlined (Figure 7b). Though almost the same selection criterion are applied in the cases shown on Figures 6a and 7a, the tensor solutions remain very densely clustered in the center of the body, being distributed in a narrow depth range. To better outline the causative source by conventional Euler and clustering, we applied stronger selection criteria, thus considerably reducing the number of solutions (Figure 7b). Very strong selection criteria applied to extended Euler deconvolution (LCT software, structural index 2, and window size 36×36 points) result in a very dense deep cluster situated within a narrow depth interval (Figure

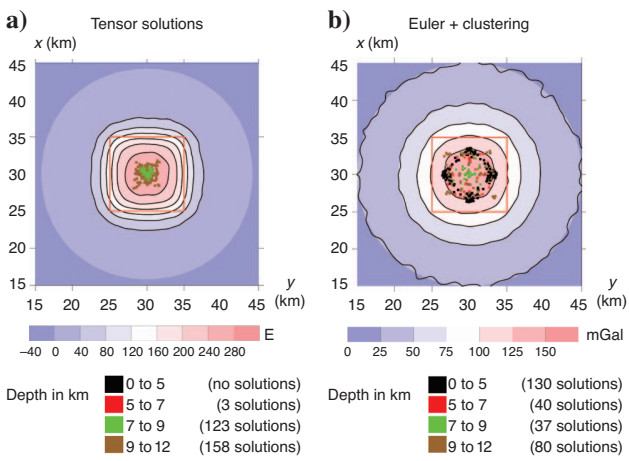


Figure 6. Results of tensor (a) and Euler (b) deconvolution of data in the presence of noise. A random Gaussian noise with zero average and standard deviation of 1 mGal and 1 E was added to the gravity field and all FTG components. Color scales show fields without noise [U_{zz} on (a) and g_z on (b)], whereas isolines show the noisy fields. Colored symbols show the depth intervals for the solutions. See the text for more details.

7c). This example indicates that our method is robust to the noncovariant Gaussian noise, even when applied to structures that do not obey the Euler equation. In this paper, we do not address the question of a possible covariance of noise in the FTG components.

Example 3: Combination of interfering sources

We now show on Figure 8 a synthetic example involving three bodies:

1) A thin dike at the top of the figure with its top at 0.5 km depth
2) A rectangular block (bottom right) with its top at 1 km
3) A rectangular block (bottom left) with its top at 2 km

The lower boundaries of the three bodies are at 10-km depth. The excess density of the dike is two times larger than that of the other blocks, but its total mass is nearly three times smaller, so the anomaly (image background) of the dike is considerably less prominent than those of rectangular bodies. We can notice the coalescence of anomalies from the rectangular blocks at the bottom.

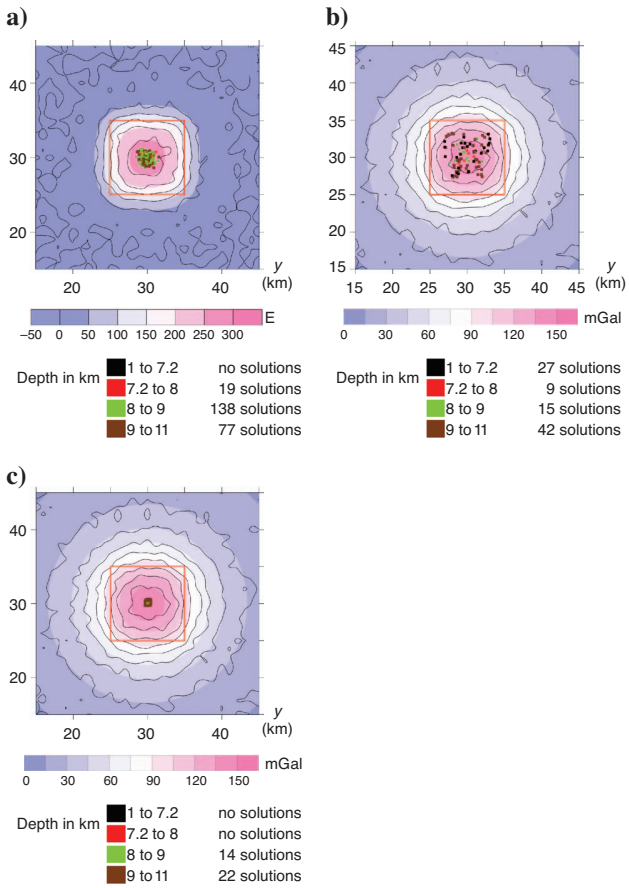


Figure 7. The same as Figure 6, but with a higher level of noise (random Gaussian noise with zero average and standard deviation of 3 mGal and 7 E). (a) Tensor solutions 234 and (b) Conventional Euler solutions 93 after clustering. (c) The results of extended Euler deconvolution after strong selection (only 36 solutions left). The depth interval of the solutions is smaller than on Figure 6 because of the strong selection.

Figure 8a and b show the results of the tensor deconvolution method, with the two following selection criteria:

1) Figure 8a: rejecting solutions whose distances from the observation point are larger than twice their depth ($\alpha = 26°$)
2) Figure 8b: rejecting solutions whose distances from the observation point are larger than their depth ($\alpha = 90°$). For this example, the clustering of the solutions method was also applied

Figure 8c and d show the results of the extended Euler deconvolution method, with window size 5 km and structural index 1 and 2, respectively. Note that the extended Euler depth estimations were performed independently, and that no a priori knowledge of the source body depth, shape, or distribution was provided.

Though different rejection criteria were used (even additional clustering for Figure 8b case), the results presented on plots for Figure 8a and b are close to each other. Tensor solutions clearly show the central parts of the rectangular blocks and demonstrate that they are well separated. The thin dike at the top of the figure is also well outlined. Solutions also show that the dike is shallower than the blocks and that the block to the right is shallower than its neighbor on the left. The extended Euler solutions (Figure 8c and d) are more widely dispersed, showing edges of the causative bodies. The position of the thin dike at the top, as well as the separation of the two blocks at the bottom, is less clear than in the tensor solutions case. This indicates that the tensor deconvolution method may be more stable to the interference of signals from close causative bodies.

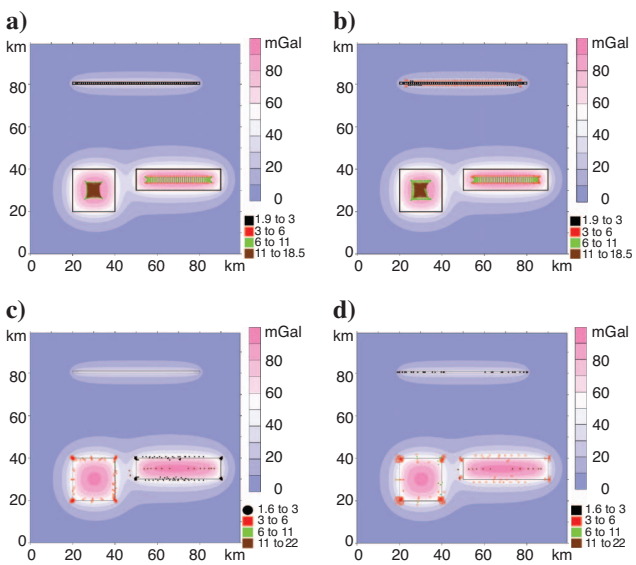


Figure 8. (a) and (b) Results of tensor deconvolution with different rejection criteria applied for the selection of the solutions; (c) and (d) extended Euler deconvolution for a combination of three sources, in the absence of noise. Square box legends with symbols indicating the depth of the solutions in kilometers are given for each plot. The colored backgrounds stand for g_z in mGal. Though different criteria were used for the selection of the solutions, the results of tensor deconvolution on (a) and (b) remain close to each other; (c) and (d) show solutions obtained using extended Euler deconvolution (LCT software) with a window size of 5×5 points and a structural index of 1 (c) and 2 (d). The bodies are better separated by the tensor solutions when their edges are better outlined by the traditional Euler solutions, so these methods are complementary.

CONCLUSION

We have described here our new method to locate causative sources from gravity gradiometry data. As it is analogous to the Euler deconvolution method and uses all full tensor gravity gradient components, we call it *tensor deconvolution*. It must be noted again that several improvements of the traditional Euler deconvolution method have been proposed, such as the extended Euler deconvolution method or Euler deconvolution of the analytic signal. Our aim was not to develop a method that improves Euler deconvolution, but to develop a method suited to the interpretation of gravity gradiometry data, and taking advantage of the complete set of components of the gravity gradient tensor measured by a gradiometer. The tensor deconvolution method is therefore complementary to the traditional Euler deconvolution method rather than its enhancement. Several differences between our approach and several routine Euler deconvolution methods must, however, be outlined:

- Tensor deconvolution provides a solution at every observation point, without using a sliding window, and thus is not sensitive to the size or the location of such a window.
- It determines the structural index automatically from the data, and as a consequence, the structural index follows the variations of the field morphology.
- It uses the gravity field and all components of the measured full gradient tensor. Because gravity gradiometry measurements are performed independently from gravity ones, and because the tensor components are considered simultaneously, errors caused by any random noise are likely to be reduced. The robustness of tensor deconvolution (compared with traditional Euler deconvolution), applied to increasingly noisy data has been demonstrated.
- The gravity field derivatives are used through the scalar invariants of the tensor. Because the invariants are by definition independent from the basis on which they are computed, the results should be insensitive to the orientation of measuring devices. Further work with real data will allow us to investigate this promising property of the invariants.

Note that even if sliding windows are not necessary, they could be useful, especially in the presence of noise. The use of sliding windows actually allows the introduction of an unknown constant in equation 14, writing $(g_z - A)$ instead of g_z. The possibility of introducing such a constant is useful because real measurements provide relative values of the gravity anomaly. We do not recommend introducing independent constants for every sliding window, because in this case, one subtracts, not a constant level, but some continuous field component that changes (sometimes dramatically) from one point to another. Introducing one constant for the whole study area or for relatively large domains is therefore preferable. Moreover, if the measured field contains components with different wavelengths, we recommend prior simultaneous filtering of the gravity field and its FTG components, allowing for the fact that they are derivatives of the same potential function U. An equivalent sources technique may be used for this filtering.

Lastly, clusters of tensor solutions localize the center of causative bodies, whereas the Euler solutions traditionally better outline their edges. Thus, these methods should best be combined to better identify the sources and estimate their depths. Clustering of solutions, as proposed by Mikhailov et al. (2003), is indeed a powerful tool, especially useful for noisy data or if signals from various sources interfere.

ACKNOWLEDGMENTS

Our paper greatly benefited from a very extensive revision by nine reviewers. We thank Ed Biegert, Horst Holstein, Xiong Li, Laust Pedersen, Alan Reid and four anonymous reviewers for their helpful comments and suggestions that allowed us to greatly improve the original version of this manuscript. V. Mikhailov acknowledges financial support of Russian Foundation for Basic Research (grant 06-05-64629). G. Pajot benefited from a DGA grant, and this study was supported by the French Space Agency CNES. This is IPGP contribution N 2225.

APPENDIX A

RELATIONSHIPS BETWEEN THE TENSOR INVARIANTS AND THE ANALYTIC SIGNAL

According to Roest et al. (1992), the gravity analytic signal is

$$A(x,y,z) = g_x\mathbf{e}_x + g_y\mathbf{e}_y + ig_z\mathbf{e}_z, \qquad \text{(A-1)}$$

where i is the complex unit, and $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ are unit vectors in directions x, y, and z respectively. The amplitudes of the directional derivatives of the analytic signal are

$$A_x = \sqrt{U_{xx}^2 + U_{xy}^2 + U_{xz}^2},$$
$$A_y = \sqrt{U_{xy}^2 + U_{yy}^2 + U_{yz}^2},$$
$$A_z = \sqrt{U_{xz}^2 + U_{yz}^2 + U_{zz}^2}, \qquad \text{(A-2)}$$

and, thus, may be calculated using rows of the full gravity gradient tensor. Those amplitudes possess a selective sensitivity in different directions, and can be used for tracing faults or close to vertical sides of causative bodies.

Considering the expressions of the three amplitudes A_x, A_y, and A_z given in equation A-2, we infer from equation 10b by Pedersen and Rasmussen (1990) that the first nonzero scalar invariant can be written as

$$I_1 = -(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)/2. \qquad \text{(A-3)}$$

The synthetic examples in the text illustrate the contouring properties of the derived transforms. We give a comparative analysis of the morphology of the three amplitudes of the directional derivatives of the analytic signal and of the invariants when discussing these examples.

REFERENCES

Barbosa, V. C. F., J. B. C. Silva, and W. E. Medeiros, 1999, Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution: Geophysics, **64**, 48–60.
Bell, R. E., R. Anderson, and L. Pratson, 1997, Gravity gradiometry resurfaces: The Leading Edge, **16**, 55–59.
Bell, R. E., and R. O. Hansen, 1998, The rise and fall of early oil field technology: The torsion balance gradiometer: The Leading Edge, **17**, 81–83.
Blakely, R. J., 1995, Potential theory in gravity and magnetic applications: Cambridge University Press.
Condi, F., and M. Talwani, 1999, Resolution and efficient inversion of gravi-

ty gradiometry: 69th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 358–361.
ESA, 1999, ESA gravity field and steady-state ocean circulation explorer, Reports for mission selection, the four candidate earth explorer core missions: SP-1233.
Fairhead, J. D., K. J. Bennett, D. R. H. Gordon, and D. Huang, 1994, Euler: Beyond the "black box": 64th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 422–424.
Fitzgerald, D., A. Reid, and P. McInerney, 2004, New discrimination techniques for Euler deconvolution: Computers and Geosciences, **30**, 461–469.
Gordin, V. M., B. O. Mikhailov, and V. O. Mikhailov, 1980, Physical aspects of anomalous fields approximation and filtration: Izvestiya, Physics of the Solid Earth, **16**, 52–61.
Jekeli, C., 1993, A review of gravity gradiometer survey system data analysis: Geophysics, **58**, 508–514.
Jorgensen, G. J., and J. L. Kisabeth, 2000, Joint 3-D inversion of gravity, magnetic and tensor gravity fields for imaging salt formations in the deep water Gulf of Mexico: 70th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 424–426.
Keating, P., and M. Pilkington, 2004, Euler deconvolution of the analytic signal and its application to magnetic interpretation: Geophysical Prospecting, **52**, 165–182.
Li, X., 2003, On the use of different methods for estimating magnetic depth: The Leading Edge, **22**, 1090–1099.
Li, Y., 2001a, Processing gravity gradiometer data using an equivalent source technique: 71st Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1466–1469.
———, 2001b, 3-D inversion of gravity gradiometer data: 71st Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1470–1473.
Lyrio, J., L. Tenorio, and Y. Li, 2004, Efficient automatic denoising of gravity gradiometry data: Geophysics, **69**, 772–782.
Martelet, G., P. Sailhac, F. Moreau, and M. Diament, 2001, Characterization of geological boundaries using 1D-wavelet transform on gravity data: Geophysics, **66**, 1116.
Mikhailov, V. O., A. Galdeano, M. Diament, A. Gvishiani, S. Agayan, S. Bogoutdinov, E. Graeva, and P. Sailhac, 2003, Application of artificial intelligence for Euler solution clustering: Geophysics, **68**, 168–180.
Mushayandebvu, M. F., P. van Driel, A. B. Reid, and J. D. Fairhead, 1999, Magnetic imaging using extended Euler deconvolution: 69th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 401–402.
Nabighian, M. N., and R. O. Hansen, 2001, Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via the generalized Hilbert transform: Geophysics, **66**, 1805–1810.
O'Brien, J., A. Rodriguez, D. Sixta, M. A. Davies, and P. Houghton, 2005, Resolving the K-2 salt structure in the Gulf of Mexico: An integrated approach using prestack depth imaging and full tensor gravity gradiometry, The Leading Edge, **24**, 404–409.
Pawlowski, B., 1998, Gravity gradiometry in resource exploration: The Leading Edge, **17**, 51–52.
Pedersen, L. M., and T. M. Rasmussen, 1990, The gradient tensor of potential anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps: Geophysics, **55**, 1558–1566.
Press, W. H., S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, and W. T. Vetterling, 1992, Numerical recipes in Fortran: the Art of Scientific Computing, 2nd ed.: Cambridge University Press.
Reid, A. B., J. M. Allsop, H. Grancer, A. J. Millett, and I. W. Somerton, 1990, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution: Geophysics, **55**, 80–91.
Roest, W. R., J. Verhoev, and M. Pilkington, 1992, Magnetic interpretation using the 3D analytic signal: Geophysics, **57**, 116–125.
Routh, P., G. J. Jorgensen, and J. L. Kisabeth, 2001, Base of the salt mapping using gravity and tensor gravity data: 70th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1482–1484.
Slack, H. A., V. M. Lynch, and L. Langan, 1967, The geomagnetic gradiometer: Geophysics, **32**, 877–892.
Stavrev, P. Y., 1997, Euler deconvolution using differential similarity transformations of gravity or magnetic anomalies: Geophysical Prospecting, **45**, 207–246.
Steenland, N. C., 1968, Discussion on: "The geomagnetic gradiometer," H. A. Slack, V. M. Lynch, and L. Langan, authors: Geophysics, **33**, 681–683.
Szabó, Z., 1998, Three fundamental papers of Loránd Eötvös: Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary.
Telford, W. M., L. P. Geldart, and R. E. Sheriff, 1990, Applied Geophysics: Cambridge University Press.
Thompson, D. T., 1982, EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data: Geophysics, **47**, 31–37.
While, J., A. Jackson, D. Smit, and E. Biegert, 2006, Spectral analysis of gravity gradiometry profiles: Geophysics, **71**, no. 1, J11–J22.
Zhang, C., M. F. Mushayandebvu, A. B. Reid, J. D. Fairhead, and M. Odegard, 2000, Euler deconvolution of gravity tensor gradient data: Geophysics, **65**, 512–520.
Zhdanov, M. S., R. Ellis, and S. Mukherjee, 2004, Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data: Geophysics, **69**, 925–937.

Conclusions, perspectives

Dans cette étude, nous nous sommes employés à développer ou préciser certaines étapes de la chaîne de traitement des données de gradiométrie en gravimétrie. Après avoir donné un aperçu de l'évolution des dispositifs de mesure, nous avons étudié le signal lui-même sous divers aspects (propriétés mathématiques, spectre des données ...). Puis nous avons mis au point une méthode spécifique pour réduire le bruit dans les données de gradiométrie en gravimétrie, permettant un « nettoyage » spectaculaire des données de gravimétrie classique. Enfin, nous avons abordé un pan de l'interprétation des données, expliquant l'apport des gradients pour la caractérisation de la géométrie et la localisation des sources. Nous avons proposé une méthode nouvelle, utilisant les invariants du tenseur, pour localiser les sources à partir des dérivées mesurées plutôt que calculées et avons montré que ses résultats étaient complémentaires à ceux de la déconvolution d'Euler classique.

D'une façon générale, nous avons montré qu'utiliser simultanément l'ensemble des composantes indépendantes du tenseur gradient de gravité permettait de s'affranchir de certains *a priori* jusqu'ici nécessaires dans le traitement des données gravimétriques. La méthode de réduction du bruit que nous avons développée ne requiert ni modèle du champ, ni modèle du bruit. La méthode de localisation des sources présentée dans le dernier chapitre, « cousine » de la déconvolution d'Euler, ne nécessite pas le choix d'un indice structural caractérisant la géométrie des sources, mais détermine l'indice adéquat à partir des mesures des dérivées. Un prolongement naturel à ce qui a été fait serait d'étudier comment ces précisions d'ordre géométrique se répercutent sur les méthodes d'inversion en densité, autrement dit, de quelle façon optimiser la prise en compte du caractère directionnel de l'information apportée par les dérivées spatiales afin de mieux contraindre l'inversion en densité. Quelques études sont parues cette année sur l'inversion des gradients, mais cette discipline en est à ses balbutiements.

À l'origine, on doit la disparition, puis la renaissance récente de la gradiométrie en gravimétrie au coût des levés, moindre à l'heure actuelle, grâce aux progrès instrumentaux, que

celui des levés de gravimétrie qu'il faudrait réaliser pour obtenir des résultats équivalents. Aujourd'hui, on s'intéresse aux gradients de la pesanteur, non comme substitut des données de gravimétrie, mais comme données à part entière. Nous avons voulu, dans cette étude, mettre en lumière le type d'information que les dérivées mesurées pouvaient apporter, en particulier pour la localisation et la caractérisation de la géométrie des sources. La caractérisation fine de la géométrie des unités géologiques est en soi un sujet d'actualité. Par exemple, plusieurs études ont montré (par exemple *Arts et al.*, 2004) que la surveillance des zones de stockage de CO_2 ne pouvait s'effectuer de façon efficace qu'en couplant les informations issue des données de gravimétrie, pour estimer la masse du gaz, et de sismique haute résolution, pour caractériser l'évolution de la géométrie de la bulle de CO_2. Or ce type de levé sismique coûte très cher. On commence donc à s'intéresser à l'apport de la gradiométrie dans ce domaine (*Droujinine et al.*, 2007).

Dans les méthodes que nous avons développées, certains aspects, peu exploités dans le cadre de la présente étude, pourraient s'avérer particulièrement intéressants pour l'utilisation des données du satellite GOCE. En effet, les dérivées mesurées par GOCE ne sont pas d'égale qualité dans toutes les directions, en particulier les composantes non diagonales du tenseur sont moins bien estimées que les composantes diagonales. Or nous avons montré, dans notre étude sur la réduction du bruit, que traiter ensemble les gradients mesurés permettait d'en extraire l'information commune, c'est à dire la dépendance à un même potentiel. Il serait intéressant de tester comment la méthode de réduction du bruit que nous avons mise au point pourrait être adaptée au cas de la mission GOCE pour améliorer la qualité des composantes non diagonales du tenseur, d'autant plus que la méthode que nous avons développée est facile à implémenter et rapide à exécuter. Ces critères sont importants pour le traitement de données spatiales, pour lesquelles il faut développer des méthodes peu gourmandes en temps de calcul et en mémoire, compte tenu du grand nombre de données à traiter. De plus, nous avons montré qu'il était possible d'utiliser, non pas les composantes, mais les invariants non nuls du tenseur. Jusqu'à présent, ces invariants n'ont pas été exploités, en raison de la forte non linéarité qui apparaît lorsqu'on les utilise pour formuler les problèmes d'interprétation gravimétrique. Pourtant, les invariants sont par nature insensibles aux problèmes d'orientation des dispositifs de mesure. Il est donc urgent de mettre au point des méthodes les utilisant car, qu'il s'agisse de prospection ou de la mission GOCE, les données de gradiométrie en gravimétrie ne sont plus acquises que dans des mobiles, dont l'attitude ne peut être parfaitement contrainte.

La vocation première du satellite GOCE n'est pas l'étude de la Terre solide. Nous espérons avoir contribué à montrer qu'en traitant les dérivées mesurées de la pesanteur, non comme des données auxiliaires permettant d'améliorer les modèles de géoïde, mais comme des données à part entière aidant en particulier à caractériser la géométrie des sources superficielles, il sera possible d'utiliser la gradiométrie en gravimétrie comme un nouveau moyen d'étudier la structure et la dynamique interne du Globe à différentes échelles.

Bibliographie

Aguirre-Martinez, M., Derivation of the satellite gravity gradient observables and recovery of the centrifugal terms in GOCE, ESA-ESTEC working paper EWP-2033, 1999.

Anselmo, L., B. Bertotti, P. Farinella, M. A., and A. M. Nobili, Orbital perturbations due to radiation pressure for a spacecraft of complex shape, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *29*(1), 27–43, 1983.

Arts, R., O. Eiken, A. Chadwick, P. Zweigel, L. van der Meer, and B. Zinszner, Monitoring of CO2 injected at Sleipner using time-lapse seismic data, *Energy*, *29*, 1383–1392, 2004.

Asfirane-Haddadj, F., and A. Galdeano, L'utilisation de la déconvolution d'Euler et du signal analytique pour la localisation des sources magnétiques, *Bulletin de la Société Géologique de France*, *171*(1), 71–81, 2000.

Balmino, G., A. Cazenave, A. Comolet-Tirman, J. Husson, and M. Lefèbvre, *cours de géodésie dynamique et spatiale*, E.N.S.T.A., 1982.

Balmino, G., et al., Le projet GRADIO et la détermination à haute résolution du géopotentiel (GRADIO project and determination at high resolution of Earth potential), *Bulletin Géodésique*, *58*(2), 151–179, 1984.

Barlier, F., Review of results obtained with the CACTUS accelerometer, *Annales de Géophysique*, *37*, 223–233, 1981.

Barnett, C., Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body, *Geophysics*, *41*, 1353–1364, 1976.

Bear, G., H. Al-Shukri, and A. Rudman, Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions, *Geophysics*, *60*, 1995.

Bell, R., and R. Hansen, The rise and fall of early oil field technology : The torsion balance gradiometer, *The Leading Edge*, *17*, 81–83, 1998.

Bell, R. E., R. Anderson, and L. F. Pratson, Gravity gradiometry resurfaces, *The Leading Edge*, *16*(1), 55–59, 1997.

Berger, C., R. Biancale, M. Ill, and F. Barlier, Improvement of the empirical thermospheric model DTM : DTM94 - a comparative review of various temporal variations and prospects in space geodesy applications, *Journal of Geodesy*, *72*(3), 161–178, 1998.

Biegert, E., Gravity gradients in PreStack Depth Migration, in *Innovation in EM, Grav and Mag Methods : a new perspective for exploration. Capri, Italy, April 15-18, 2007*, 2007.

Blakely, R., and R. Simpson, Approximating edges of source bodies from magnetic or gravity anomalies, *Geophysics*, *51*(7), 1494–1498, 1986.

Blakely, R. J., *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press, 1996.

Bodet, L., Interprétation et inversion de données gradiométriques en gravimétrie, Mémoire de DEA de l'Institut de physique du globe de Paris, 2000.

Bosch, M., R. Meza, R. Jimenez, and A. Hönig, Joint gravity and magnetic inversion in 3D using Monte Carlo methods, *Geophysics*, *71*, 2006.

Bourbaki, N., *Topologie générale*, Masson, 1990.

Boussinesq, J., *Cours d'analyse infinitésimale - Tome I, fascicule 2 - Complément à la huitième leçon - 80 - Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et autres propriétés générales de ces fonctions*, chap. 4, pp. 122–125, Gauthier-Villars, 1887.

Bowin, C., E. Scheer, and W. Smith, Depth estimates from ratios of gravity, geoid, and gravity gradient anomalies, *Geophysics*, *51*, 1986.

Brezis, H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.

Brillouin, M., Qu'apprend-on de l'intérieur du Globe par les mesures faites à sa surface ? Pesanteur. Magnétisme., *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, *8*(4), 151–192, 1938.

Camacho, A., F. Montesinos, and R. Vieira, Gravity inversion by means of growing bodies, *Geophysics*, *65*(1), 95–101, 2000.

Canuto, E., P. Martella, and G. Sechi, Attitude and drag control : an application to the GOCE satellite, *Space Science Reviews*, *108*, 357–366, 2003.

Cauchy, A., *Tome IV des œuvres complètes : Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal - Théorème des fonctions homogènes - Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables*, chap. X, pp. 58–62, Gauthiers-Villars, 1882.

Cavendish, H., Experiments to Determine the Density of the Earth, *Philosophical Transactions Series I*, *88*, 469–526, 1798.

Dahlen, F. A., and J. Tromp, *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, 1998.

Dampney, C., The equivalent source technique, *Geophysics*, *34*(1), 39–53, 1969.

Debeglia, N., and J. Corpel, Automatic 3D interpretation of potential field data using analytic signal derivatives, *Geophysics*, *62*(1), 87–96, 1997.

Difrancesco, D., Advances and challenges in the development and deployment of gravity gradiometer systems, in *Innovation in EM, Grav and Mag Methods : a new perspective for exploration. Capri, Italy, April 15-18, 2007*, 2007.

Ditmar, P., J. Kusche, and R. Klees, Computation of spherical harmonic coefficients from gravity gradiometry data to be acquired by the GOCE satellite : regularization issues, *Journal of Geodesy*, *77*, 465–477, 2003.

Domenico, N., The SEG Museum's torsion balance, *The Leading Edge*, *13*(6), 683–686, 1994.

Dosch, D., and D. Sieracki, Gravity gradiometer and method for calculating a gravity tensor with increased accuracy., *US Patent 6,799,459 B2*, 2002.

Dransfield, M. H., and J. B. Lee, The FALCON airborne gravity gradiometer survey systems, in *Airborne gravity 2004-abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop*, *Geoscience Australia Record*, vol. 18, edited by R. Lane, pp. 15–20, 2004.

Droujinine, A., A. Vasilevsky, and R. Evans, Feasibility of using full tensor gradient FTG data for detection of local lateral density contrasts during reservoir monitoring, *Geophysical Journal International*, *169*(3), 795–820, 2007.

Eisner, A., and S. Yionoulis, NOVA-1 Ű- the "Drag-Free" Navigation Satellite, in *Proceedings from the 1982 Aerospace Meeting, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA*, pp. 26–31, 1982.

ESA, SP-1233(1) Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission, *Tech. rep.*, ESA, 1999.

Evjen, H., The place of the vertical gradient in gravitational interpretations, *Geophysics*, *1*, 127–136, 1936.

Fitzgerald, D., A. Reid, and P. McInerney, New discrimination techniques for Euler deconvolution, *Computers and Geosciences*, *30*, 461–469, 2004.

Fitzgerald, D. J., and H. Holstein, Innovative data processing methods for gradient airborne geophysical data sets, *The Leading Edge*, *25*(1), 87–94, 2006.

Florio, G., M. Fedi, and R. Pasteka, On the application of Euler deconvolution to the analytic signal, *Geophysics*, *71*(6), 87–93, 2006.

FPA, Second Faroese licensing round, Faeroes petroleum administration, online, 2004.

Gallardo-Delgado, L., M. Pérez-Flores, and E. G.-T. no, A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data, *Geophysics*, *68*, 2003.

Grauch, J., and L. Cordell, Limitations of determining density or magnetic boundaries from the horizontal gradient of gravity or pseudogravity data, *Geophysics*, *52*(1), 118–121, 1987.

Guspi, F., Noniterative nonlinear gravity inversion, *Geophysics*, *58*, 1993.

Hadamard, J., Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique., *Princeton University Bulletin*, *8*(4), 151–192, 1938.

Hammer, S., Approximation in gravity interpretation calculations, *Geophysics*, *39*, 205–222, 1974.

Han, S.-C., C. K. Shum, M. Bevis, C. Ji, and C.-Y. Kuo, Crustal dilatation observed by grace after the 2004 sumatra-andaman earthquake, *Science*, *313*, 658–662, 2006.

Heiland, C., A rapid method for measuring the profile components of horizontal and vertical gravity gradients, *Geophysics*, *8*, 119–132, 1943.

Helbig, K., Surfaces of equal potential and the physics behind the torsion balance and gradiometers, *The Leading Edge*, *20*, 840–847, 2001.

Hipkin, R., The statistics of pink noise on a sphere : applications to mantle density anomalies, *Geophysical Journal International*, *144*, 259–270, 2001.

Hofmeyer, G., and C. Affleck, Rotating accelerometer gradiometer, *US Patent 5,357,802*, 1994.

Holstein, H., and B. Ketteridge, Gravimetric analysis of uniform polyhedra, *Geophysics*, *61*(2), 357–364, 1996.

Holstein, H., P. Schürholz, A. Starr, and M. Chakraborty, Comparison of gravimetric formulas for uniform polyhedra, *Geophysics*, *64*, 1999.

Hsu, S., D. Coppens, and C. Shyu, Depth to magnetic source using the generalized analytic signal, *Geophysics*, *63*(6), 1947–1957, 1998.

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons, 1998.

Jekeli, C., Analysis of airborne gravity gradiometer survey accuracy, *Manuscripta Geodaetica*, *9*, 323–379, 1984.

Jekeli, C., A review of gravity gradiometer survey system data analysis, *Geophysics*, *4*(58), 508–514, 1993.

Jekeli, C., Statistical analysis of moving-base gravimetry and gravity gradiometry., *Tech. Rep. 466*, Laboratory for Space Geodesy and Remote Sensing Research, Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio., 2003.

Jekeli, C., and L. Zhu, Comparison of methods to model the gravitational gradients from topographic data bases, *Geophysical Journal International*, *166*(3), 999–1014, 2001.

Jia, R., R. Groom, and B. Lo, On some issues regarding 3D-gravity inversion, *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 631–634, 2005.

Jolly, P., Contribution à l'étude du changement de phase liquide-vapeur dans des capillaires micrométriques en vue des applications aux étanchéités statiques, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers., 2004.

Kennedy, G., and M. Crawford, Innovation derived from the Transit program, *Johns Hopkins APL Technical Digest*, *19*(1), 27–35, 1998.

Kirkendall, B., Y. Li, and D. Oldenburg, Imaging cargo containers using gravity gradiometry, in *Photonics for Port and Harbor Security II*, *presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*, vol. 6204, 2006.

Klees, R., R. Koop, P. Visser, and J. Van den IJssel, Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observations, *Journal of Geodesy*, *74*, 561–571, 2000.

Koop, R., P. Visser, J. van den IJssel, and R. Klees, Detailed scientific data processing approach, in *From Eötvös to mGal, Final Report*, pp. 29–104, 2000.

Last, B., and K. Kubik, Compact gravity inversion, *Geophysics*, *48*(6), 713–721, 1983.

Lee, J., Y. Li, and R. Lane, Effects of data filtering on inversion of gravity gradient data, *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 627–630, 2005.

Lerch, F., S. Klosko, R. Laubscher, and C. Wagner, Gravity Model Improvement Using Geos3 (GEM9 and 10), *Journal of Geophysical Research*, *84*, 3897–3916, 1979.

Li, X., On the use of different methods for estimating magnetic depth, *The Leading Edge*, *22*, 1090–1099, 2003.

Li, X., Understanding 3D analytic signal amplitude, *Geophysics*, *71*(2), 13–16, 2006.

Li, X., and M. Chouteau, Three-dimensional gravity modeling in all space, *Surveys in Geophysics*, *19*(4), 339–368, 1998.

Li, Y., Processing gravity gradiometer data using an equivalent source technique, *SEG technical program expanded abstract*, pp. 1466–1469, 2001.

Li, Y., and D. Oldenburg, 3-D inversion of gravity data, *Geophysics*, *63*, 1998.

Lyrio, J. C. S., L. Tenorio, and Y. Li, Efficient automatic denoising of gravity gradiometry data, *Geophysics*, *69*(3), 772–782, 2004.

Medeiros, W., and J. Silva, Geophysical inversion using approximate equality constraints, *Geophysics*, *61*, 1996.

Metzger, E. H., and A. Jircitano, Inertial navigation performance improvement using gravity gradient matching techniques, in *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Guidance and Control Conference, Boston, Mass., Aug. 20-22, 1975, 11 p.*, edited by W. G. Heller and S. K. Jordan, 1975.

Mikhailov, V., A. Galdeano, M. Diament, A. Gvishiani, S. Agayan, S. Bogoutdinov, E. Graeva, and P. Sailhac, Application of artificial intelligence for Euler solution clustering, *Geophysics*, *68*, 168–180, 2002.

Mikhailov, V., G. Pajot, M. Diament, and A. Price, Tensor deconvolution : a method to locate equivalent sources from full tensor gravity data, *Geophysics*, *72*, 2007.

Mohan, N., and L. Anand Babu, An analysis of the 3D analytic signal, *Geophysics*, *60*(2), 531–536, 1995.

Mohr, P. J., and B. N. Taylor, CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2002, *Reviews of modern physics*, *77*(1), 2005.

Moraes, R., and R. Hansen, Constrained inversion of gravity fields for complex 3-D structures, *Geophysics*, *66*, 2001.

Mumaw, G., Marine 3D full tensor gravity gradiometry – The first five years, *Hydro International*, *8*(7), 38–41, 2004.

Murphy, C., J. Brewster, and J. Robinson, Evaluating air-ftg survey data : bringing value to the full picture, *Proceedings of the Australian Earth Science Convention*, 2006.

Nagy, D., The gravitational attraction of a right rectangular prism, *Geophysics*, *31*, 362–371, 1966.

Nettleton, L. L., *Geophysical Prospecting for Oil*, McGraw-Hill Book Company, 1940.

Okabe, M., Analytical expressions for anomalies due to polyhedral bodies and translation into magnetic anomalies, *Geophysics*, *44*(4), 730–741, 1979.

Pajot, G., O. de Viron, M. Diament, M.-F. Lequentrec-Lalancette, and V. Mikhailov, Noise reduction through a joint processing of gravity and gravity gradient data, *Geophysics, sous presse*, 200X.

Panet, I., et al., Co-seismic and post-seismic signatures of the Sumatra December 2004 and March 2005 earthquakes in GRACE satellite gravity, *Geophysical Journal International*, 2007.

Pedersen, L. B., and T. M. Rasmussen, The gradient tensor of potential field anomalies : Some implications on data collection and data processing of maps, *Geophysics*, *55*(12), 1558–1566, 1990.

Pilkington, M., Joint inversion of gravity and magnetic data for two-layer models, *Geophysics*, *71*, 2006.

Reid, A. B., J. M. Allsop, H. Grancer, A. J. Millett, and I. W. Somerton, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution, *Geophysics*, *55*, 80–91, 1990.

Reigber, C., G. Balmino, B. Moynot, and H. Müller, The GRIM3 earth gravity field model, *Manuscripta Geodaetica*, *8*, 93–138, 1983.

Reigber, C., H. Mueller, W. Bosch, G. Balmino, and B. Moynot, GRIM gravity model improvement using lageos (GRIM3-L1), *Journal of Geophysical Research*, *90*, 9285–9299, 1985.

Roest, W., J. Verhoev, and M. Pilkington, Magnetic interpretation using the 3D analytic signal, *Geophysics*, *57*, 116–125, 1992.

Roy, L., M. Sen, D. Blankenship, P. Stoffa, and T. Richter, Inversion and uncertainty estimation of gravity data using simulated annealing : An application over lake vostok, east antarctica, *Geophysics*, *70*, 2005.

Rudin, W., *Analyse réelle et complexe*, 448pp pp., Masson, 1975.

Rummel, R., Satellite gradiometry, in *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, edited by H. Sünkel, pp. 317–363, 1986.

Rummel, R., *Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry*, Delft, Netherlands : Nederlandse Commissie Voor Geodesie, 1993., 1993.

Schweitzer, M., W. K. Feldman, W. F. Konig, D. J. DiFrancesco, D. L. Sieracki, and C. P. San Giovanni, System and process for optimizing gravity gradiometer measurements., *US Patent 6,125,698*, 2000.

Shaw, H., and B. Lancaster-Jones, The Eötvös torsion balance, *Proceedings of the Physical Society of London*, *35*, 151–166, 1922.

Silva, J., and V. Barbosa, Interactive gravity inversion, *Geophysics*, *71*, 2006.

Silva, J., W. Medeiros, and V. Barbosa, Gravity inversion using convexity constraint, *Geophysics*, *65*, 2000.

Singh, B., and D. Guptasarma, New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra, *Geophysics*, *66*, 2001.

Skeels, D., Ambiguity in gravity interpretation, *Geophysics*, *12*(1), 43–56, 1947.

Spector, A., and F. Grant, Statistical models for interpreting aeromagnetic data, *Geophysics*, *35*(2), 293–302, 1970.

Spiegel, M. R., *Theory and Problems of Vector Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

Stavrev, P. Y., Euler deconvolution using differential similarity transformations of gravity or magnetic anomalies, *Geophysical Prospecting*, *45*, 207–246, 1997.

Sumner, D., S. Chew, J. Dmytrasz, J. Gatta, and H. Ritchie, Passive navigation system, *US Patent 6,014,103*, 1999.

Szabó, Z., *Eötvös the man, the scientist, the organizer*, pp. 5–34, ELGI, Budapest, 1998.

Talwani, M., Joint inversion and other issues concerning gravity gradients, Source web, 2001.

Tapley, D. B., S. Bettadpur, J. Ries, P. Thomson, and M. Watkins, GRACE measurements of mass variability in the earth system, *Science*, *305*, 503–505, 2004.

Tarantola, A., *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, SIAM, 2003.

Telford, W., L. Geldart, and R. Sheriff, *Applied Geophysics*, Cambridge University Press, 1990.

Thompson, D. T., EULDPH : A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data, *Geophysics*, *47*, 31–37, 1982.

Thyssen-Bornemisza, Vertical gradient of gravity, *Geophysics*, *23*, 359–360, 1958.

Thyssen-Bornemisza, and W. Stackler, Observation of the vertical gradient of gravity in the field, *Geophysics*, *21*, 1956.

Tiberi, C., M. Diament, J. Déverchère, C. Petit-Mariani, V. Mikhailov, S. Tikhotsky, and U. Achauer, Deep structure of the Baikal rift zone revealed by joint inversion of gravity and seismology, *Journal of Geophysical Research*, *108*, 2003.

van Leeuwen, E. H., K. G. McCracken, J. B. Lee, and J. Turner, Airborne gravity gradiometer, *US Patent 6,883,372B2*, 2005.

van Zon, T., and K. Roy-Chowdhury, Structural inversion of gravity data using linear programming, *Geophysics*, *71*, 2006.

Ville, W., Théorie et application de la notion de signal analytique, *Câbles et Transmissions*, *2A*, 61–74, traduit en anglais par I. Selin pour RAND Corp., Rapport T92, Août 1958, 1948.

Wahr, J., M. Molenaar, and F. Bryan, Time variability of earth's gravity field : Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *Journal of Geophysical Research*, *103*, 30,205–30,229, 1998.

Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley and Sons, 1972.

While, J., A. Jackson, D. Smit, and E. Biegert, Spectral analysis of gravity gradiometry profiles, *Geophysics*, *71*(1), 11–22, 2006.

White, R., R. Spitzer, P. Christie, A. Roberts, Z. Lunnon, J. Maresh, and iSIMM Working Group, Seismic imaging through basalt flows on the faroes shelf, in *Faroe Islands Exploration Conference : Proceedings of the 1st Conference, Annales Societatis Scientiarum Færoensis, Tórshavn, 2005.*, vol. 43, pp. 11–31, 2005.

Widiwijayanti, C., V. Mikhailov, M. Diament, C. Deplus, R. Louat, S. Tikhotsky, and A. Gvishiani, Structure and evolution of the Molucca sea area : Constraints based on interpretation of a combined sea-surface and satellite gravity dataset, *Earth and Planetary Science Letters*, *215*, 135–150, 2003.

Wilson, A., *GOCE*, *ESA-Brochures*, vol. 200, pp. 236–239, Esa Publications Division, 2001.

Zhang, C., M. F. Mushayandebvu, A. B. Reid, J. D. Fairhead, and M. Odegard, Euler deconvolution of gravity tensor gradient data, *Geophysics*, *65*, 512–520, 2000.

Zhdanov, M., R. Ellis, and S. Mukherjee, Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data, *Geophysics*, *69*, 2004.

Ziolkowski, A., P. Hanssen, R. Gatliff, H. Jacubowicz, A. Dobson, G. Hampson, X.-Y. Li, and E. Liu, The use of low frequencies for sub-basalt imaging, *Geophysical Prospecting*, *51*, 169–182, 2003.

Table des matières

Liste des acronymes **5**

Résumés **7**

Introduction **11**

1 Cadre de l'étude **13**

1.1 Évolution des mesures : apport de la gradiométrie 14

1.2 Enjeux 21

2 Données de gradiométrie en gravimétrie **23**

2.1 Tenseur gradient de gravitation 23

2.1.1 Attraction gravitationnelle 23

2.1.2 Champ et potentiel de pesanteur 24

2.1.3 Dérivées successives du potentiel 25

2.1.3.1 Conséquence de l'équation de Laplace 26

2.1.4 Interprétation physique des composantes 27

2.1.5 Changement de repère orthonormal 29

2.1.6 Quantités invariantes par rotation 31

2.1.6.1 Invariants du tenseur 31

2.1.6.2 Autres invariants par rotation 32

2.1.7 Calcul des gradients 36

2.1.7.1 Sources ponctuelles 37

2.1.7.2 Prismes droits 38

2.1.8 Ordres de grandeur 39

2.2 Données 44
2.2.1 Zone d'étude 44
2.2.2 Levé 45
2.2.3 Données 45
2.2.4 Quelques remarques préliminaires sur les données 49

3 Réduction du bruit 51
3.1 Séparation des accélérations 51
3.1.1 Cas du satellite GOCE 52
3.1.2 Cas du gradiomètre Bell 56
3.1.3 Accélérations gravitationnelles non désirées 56
3.2 Le bruit : causes et remèdes 57
3.2.1 Sources 57
3.2.2 Réduction du bruit : méthodes existantes 59
3.3 Profondeur des sources 60
3.3.1 Profondeur des sources 60
3.3.2 Application aux données traitées par Bell 64
3.4 Réduction du bruit basée sur des considérations physiques 66
3.4.1 Principe de la méthode 67
3.4.2 Quelques remarques 70
Article 1 : Noise reduction through a joint processing of gravity and gravity gradient data 75

4 Interprétation des mesures 135
4.1 Localisation des sources et détermination des contours 136
4.1.1 Interprétation visuelle des composantes 136
4.1.1.1 Exemple 1 137
4.1.1.2 Exemple 2 138
4.1.1.3 Conclusion sur l'interprétation visuelle 139
4.1.2 Interprétation gravimétrique utilisant les dérivées calculées de g_z 140
4.1.2.1 Signal analytique 140
4.1.2.2 Déconvolution d'Euler 143
4.1.3 Méthodes utilisant les données du tenseur complet 146
4.2 Perspective : inversion en densité 147
4.2.1 Problèmes inverses en gravimétrie 147
4.2.2 Utilisation des gradients 148
Article 2 : Tensor deconvolution : a method to locate equivalent sources from full tensor gravity data 151

Conclusions, perspectives **161**

Références **163**

Table des matières **173**

Table des figures **177**

Table des figures

1.1 Balance de torsion d'Eötvös. 15
1.2 Première utilisation de la balance de torsion d'Eötvös en extérieur : Transdanubie, 1891. 16
1.3 Gradiomètre Bell. 18
1.4 Le satellite GOCE (vue d'artiste). 21

2.1 Attraction gravitationnelle entre deux points massiques. 24
2.2 Projection du vecteur position dans le plan équatorial. 27
2.3 Modèle simple pour expliquer la mesure des variations spatiales du champ de pesanteur. 29
2.4 Schéma simplifié d'un gradiomètre. 30
2.5 Orientation du vecteur gradient horizontal pour une source ponctuelle. 33
2.6 Courbures principales en un point P. 35
2.7 Première carte de gradients de gravité pour la prospection pétrolière, réalisée à l'aide de la balance de torsion d'Eötvös en 1916 : région d'Egbell (Slovaquie). . 36
2.8 Signal gradiométrique associé à un prisme droit. 40
2.9 Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à l'altitude 0, dérivée du modèle EIGEN-GL04C. 41
2.10 Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à 250 km d'altitude, dérivée du modèle EIGEN-GL04C. 42
2.11 Estimation du signal anomalique global de gradiométrie à l'altitude 0, pour la dérivée radiale seconde, dérivée du modèle EIGEN-GL04C. 43
2.12 Description du levé Bell. 44
2.13 Lignes du levé 46
2.14 Composantes T_{xx}, T_{xy} et T_{xz} du tenseur gradient mesurées par Bell Geospace. . 47

2.15 Composantes T_{yy}, T_{yz} et T_{zz} du tenseur gradient mesurées par Bell Geospace. . 48
2.16 Anomalie à l'air libre et bathymétrie multifaisceaux acquises par Bell. 49

3.1 Position des accéléromètres dans le satellite. 53
3.2 Schémas de fonctionnement du gradiomètre Bell. 57
3.3 Détermination de la demie largeur de l'anomalie en fonction de la profondeur d'une sphère de densité homogène ou d'une source ponctuelle. 61
3.4 Allures respectives des composantes T_{xx},T_{xy},T_{xz},T_{yy},T_{yz} et T_{zz} associées à une source ponctuelle. 62
3.5 Variation, pour chacune des composantes du tenseur gradient, de la demie largeur du signal associé à une source ponctuelle en fonction de la profondeur h de la source. 65
3.6 Signal brut et traité par Bell pour la composante T_{xy} du tenseur gradient de gravité le long du profil $T17$, après une rotation pour amener le profil parallèle à l'axe des x. 66
3.7 Comparaison entre notre méthode de réduction du bruit et celle de Bell. 73

4.1 Mise en évidence des contours par les dérivées de g_z. 136
4.2 Géométries utilisées pour l'exemple 1 : prisme droit rogné dans la direction x. . 138
4.3 Variations de T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} et T_{zz} pour le prisme de l'exemple 1 suivant la diminution de la surface supérieure en x. 139
4.4 Géométries utilisées pour l'exemple 2 : prisme droit rogné dans la direction z. . 140
4.5 Variations de T_{zz} pour l'exemple 1 et l'exemple 2. 141
4.6 Application de la déconvolution tensorielle aux données Bell. 147

Résumé

La mesure des dérivées spatiales du champ de pesanteur, ou gradiométrie en gravimétrie, est née au début du XXe siècle avec la balance de torsion d'Eötvös, premier gradiomètre. Utilisée avec succès pour la prospection géophysique, cette technique fut cependant délaissée pour un temps au profit de la gravimétrie, plus facile et moins coûteuse. Cependant, les développements instrumentaux en gradiométrie ont continué, et les gradiomètres actuels permettent la mesure simultanée des gradients de pesanteur dans trois directions indépendantes de l'espace. La gradiométrie en gravimétrie connaît ainsi une renaissance, et l'Agence Spatiale Européenne lancera en 2008 le satellite GOCE, avec à son bord le premier gradiomètre spatial, permettant la cartographie globale de la pesanteur avec une résolution spatiale sans précédent. Cette étude est consacrée au signal de gradiométrie en gravimétrie, de l'acquisition des données à leur interprétation. Plus spécifiquement, dérivant d'un même potentiel, l'accélération de la pesanteur et ses dérivées peuvent être considérées comme des mesures interdépendantes d'une même quantité. Nous avons élaboré une méthode permettant, en exploitant cette redondance, de réduire le bruit dans les données de gradiométrie et, plus efficacement, dans celles de gravimétrie. Nous utilisons également une propriété spécifique des gradients de pesanteur, l'existence d'invariants scalaires combinant les différents gradients, que nous relions à la géométrie des sources à l'origine des anomalies de pesanteur. Nous avons ainsi développé une méthode, complémentaire à la déconvolution d'Euler des données de gravimétrie, qui améliore la localisation de ces sources.

Abstract

Gravity gradiometry was born at the beginning of the twentieth century, with Eötvös' torsion balance, first instrument allowing the measurement of some spatial derivatives of gravity. After quite a success, gravity gradiometry was however left behind in favour of gravimetry, easier and cheaper for geophysical prospecting. Meanwhile, gradiometers were still being developed. Unlike former ones, the latest instruments allow the measurement of the whole set of gravity spatial derivatives. This has led to the recent rebirth of gravity gradiometry. In particular, the data collected by the first space gradiometer, onboard the satellite GOCE (European Space Agency, 2008), will be used to compute a global gravity field model with unprecedented spatial resolution. This study is dedicated to gravity gradiometry data, from their measurement to their interpretation. In particular, the acceleration of gravity and its derivatives are related to the same potential function ; hence we can consider them as being measurements of one same quantity. We established formulae to relate them to each other and we built a method that uses this redundancy to diminish the noise in gravity gradiometry data, and, more efficiently, in simultaneous measurements of gravity. We also focused on a specific property of the gravity gradient tensor. Relating its scalar invariants to a structural index reflecting the geometrical properties of the sources originating gravity anomalies, we developed a method than can be used complementarily to the Euler deconvolution method, in order to better localize the anomalous bodies.