Analyse par ondelettes : quelques aspects numériques et applications à des signaux océaniques simulés et à l'estimation de densité de probabilité

Macky Coulibaly

▶ **To cite this version:**

Macky Coulibaly. Analyse par ondelettes : quelques aspects numériques et applications à des signaux océaniques simulés et à l'estimation de densité de probabilité. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1992. Français. NNT : . tel-00341126

HAL Id: tel-00341126

https://theses.hal.science/tel-00341126

Submitted on 24 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Macky COULIBALY

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I
(*arrêté ministériel du 5 juillet 1984*)
spécialité : **Mathématiques Appliquées**

ANALYSE PAR ONDELETTES : QUELQUES ASPECTS NUMERIQUES ET APPLICATIONS A DES SIGNAUX OCEANIQUES SIMULES ET A L'ESTIMATION DE DENSITE DE PROBABILITE

Date de soutenance : 26 juin 1992

Composition du jury : MM	R. ROBERT	Président
	A. ANTONIADIS	Examinateur
	P. BARAS	Examinateur
	B. BARNIER	Invité
	Y. GAGNE	Rapporteur
	S. JAFFARD	Rapporteur
	P. WITOMSKI	Examinateur

Thèse préparée au sein des laboratoires **LMC (IMAG)** et **LEGI (IMG)**.

à Claude GASQUET,
à mes parents.

Je voudrais rendre hommage à Claude GASQUET qui a guidé mes premiers pas dans la recherche. Son souvenir m'a soutenu tout au long de ce travail qu'il souhaitait voir aboutir.

Je tiens essentiellement à remercier Pierre BARAS, Professeur à l'Université de Savoie, grâce à qui j'ai pu méné ce travail à son terme. Il m'a toujours donné des idées, fait des suggestions, des commentaires et des critiques, il m'a relancé, encouragé et soutenu quand il le fallait. Je lui suis très reconnaissant de s'être autant impliqué dans mon travail. Si je ne pus m'acquitter de la dette que j'ai envers lui, qu'il en trouve au moins ici le témoignage.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Raoul ROBERT, Directeur de Recherche au CNRS, en acceptant la présidence de ce jury. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance pour l'attention qu'il porte à cette thèse.

Je suis particulièrement flatté que Messieurs Yves GAGNE, Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et Stéphane JAFFARD, Docteur Habilité à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - La Courtine, aient accepté de rapporter, malgré tout leur travail, sur cette thèse. Je suis très sensible à l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail; qu'ils reçoivent tous mes remerciements.

Bernard BARNIER, Chargé de Recherche au CNRS, a été un interlocuteur priviligié. Il est l'océanographe qui est à l'origine du présent travail. Sa rigueur et son approche systématique des problèmes nous ont permis d'effectuer un travail d'équipe efficace et humainement très enrichissant. J'ajoute que j'ai beaucoup apprécié sa grande disponibilité, sa gentillesse, son enthousiasme et surtout de pouvoir discuter avec lui d'autres choses que de mathématiques et d'océanographie.

Anestis ANTONIADIS, Professeur à l'Université Pierre Mendes France - Grenoble II, a eu la gentillesse de bien vouloir s'intéresser à mon travail dès le début. Tout au long de ce travail, ses conseils et critiques avisés ont été précieux. Sa présence dans ce jury me touche particulièrement.

J'ai été très touché par l'attention que m'a porté Patrick WITOMSKI, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, et par le soutien moral qu'il m'a procuré dans les moments difficiles. Qu'il sache que sa présence dans ce jury me fait le plus grand plaisir.

Jean Claude PAUMIER m'a soutenu moralement dans les moments difficiles. Qu'il sache que j'ai été très sensible à l'attention qu'il m'a porté. Mes remerciements vont également à tous les membres de l'équipe EDP du LMC (IMAG) qui par leurs propos scientifiques ou amicaux m'ont encouragé.

Je voudrais associer à ce travail trois personnes qui prennent un peu sur leur temps pour le faire bénéficier aux autres. Je veux parler de Bertrand MICHAUX avec qui j'ai eu de nombreuses discussions enrichissantes, de André EBERHARD pour le code de calcul de la *FFT*, et de Florent LYARD pour les programmes de tracé graphique en couleur.

Je remercie Madame Pascal PETIT de Merlin Gerin pour sa collaboration fructueuse au chapitre IV. En toute sympathie, merci à Pierre CHEVRIER du service "Informatique Scientifique et Technique" (IST) de Merlin Gerin pour le soutien moral et scientifique qu'il m'a apporté. Lors de mon passage à l'IST, j'ai beaucoup apprécié sa bonne humeur et son humour.

Je tiens à remercier Messieurs Christian LE PROVOST de m'avoir accueilli dans son équipe (Modelisation des Ecoulements Océaniques et des Marées) du LEGI (IMG) et Jacques VERRON pour son encouragement constant et l'amitié qu'il m'a témoignée. Je voudrais également exprimer ma reconnaissance à tous les membres de l'équipe MEOM pour leur accueil chaleureux.

Je ne peux oublier tous les collègues thèsards du LMC, qui m'ont apporté leur soutien moral tout le long de ce travail. Plus particulièrement Isabelle MAILLOT avec qui j'ai partagé les espoirs et les découragements, Christophe BONJOUR, Elbar OULD ELY TELMOUDY, Jian Xin KONG et Thierry BURRET pour leur encouragement constant.
Abdallah CHALABI et Christine BERNIER qui m'ont offert leur amitié.

Enfin, mes remerciements vont à toutes celles et ceux qui ont contribué de manière directe ou indirecte pour la réalisation de ce travail.

On n'agirait jamais, si l'on considérait le poids immense des choses et la faiblesse de l'homme. C'est pourquoi il faut agir et penser son action. Voyez ce maçon; il tourne tranquillement sa manivelle; c'est à peine si la grosse pierre remue. Pourtant la maison sera achevée, et des enfants gambaderont dans les escaliers. J'ai admiré une fois un ouvrier qui s'installait avec son vilebrequin, pour percer une muraille d'acier qui avait bien quinze centimètres d'épaisseur. Il tournait son outil en sifflant; les fins copeaux d'acier tombaient comme une neige. L'audace de cet homme me saisit. Il y a dix ans de cela. Soyez sûr qu'il a percé ce trou-là et bien d'autres ...

Il faut avoir foi dans les petits efforts et lutter en insecte contre l'insecte.

Alain, *"Propos sur le bonheur"*
Editions Gallimard.

Notations

$\mathbb{N}$: Entiers naturels.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: l'anneau des entiers relatifs.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$: le corps des réels

$(C, +, \cdot)$: le corps des complexes; on note $\bar{x}$ le complexe conjugué de x.

$L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, désigne l'ensemble des fonctions d'une variable à valeurs complexes et de puissance p-ième intégrable.

$L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'enemble des fonctions mesurables à valeurs complexes et de module borné.

Pour une paire de fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx$$

où $\overline{g}$ est le complexe conjugué de g. La norme de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$||f||_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

$H^2(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Hardy sur $\mathbb{R}$, c'est à dire l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ telles que $\hat{f}(\xi) = 0$ pour $\xi \leq 0$.

$$H^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : supp(\hat{f}) \subset [0, +\infty[\right\}$$

$l^2(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des suites à valeurs complexes et de carré sommable.

$$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty \right\}$$

C('est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \bar{y}_k$$

La translation de $k \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau_k f(x) = f(x - k)$$

$L^2{}_p(0,1)$ désigne l'ensemble des fonctions périodiques de période 1 et de carré intégrable sur $[0,1]$.

$L^1_{loc}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions localement intégrables à valeurs complexes.

$C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, désigne l'ensemble des fonctions k fois indéfiniment dérivables à valeurs complexes.

$C^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à valeurs complexes.

$L^2(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace de hilbert des fonctions à deux variables à valeurs complexes et de carré intégrable.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ est défini par

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\overline{g}(x,y)dxdy$$

où $\overline{g}$ désigne le complexe conjugué de g.

La norme de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est donnée par :

$$||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|^2 dxdy$$

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est définie par :

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-2i\pi(\xi x+\eta y)}dxdy$$

$l^2(\mathbb{Z}^2)$ désigne l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}^2$ à valeurs complexes et de carré sommable.

La translation de $(k,l) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \tau_{kl}f(x,y) = f(x-k, y-l)$$

Table des matières

Introduction 1

Chapitre 1 : Quelques aspects théoriques de la transformée en ondelettes 9

1.1 Introduction 11

1.2 Sur l'analyse temps-fréquence 11

1.2.1 Motivations et idée 11

1.2.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante 12

1.3 Analyse des signaux par ondelettes 15

1.3.1 Transformée en ondelettes continue sur $\mathbb{R}$ 15

1.3.1.1 Introduction et définition 15

1.3.1.2 Théorème fondamental 18

1.3.1.3 Remarques et commentaires 19

1.3.1.4 Quelques exemples d'ondelettes analysantes ... 22

1.3.1.5 Calcul explicite de $C_f(a,b)$ pour quelques signaux simples 25

1.3.2 Transformée en ondelettes discrète sur $\mathbb{R}$ 27

1.3.2.1 Introduction et définition 27

1.3.2.2 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ 29

1.3.2.3 Calcul pratique de quelques ondelettes orthogonales 35

1.3.3 Extension de la transformée en ondelettes en dimension deux 46

1.3.3.1 Transformée en ondelettes continue bidimensionnelle 46

1.3.3.2 Bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$ ... 49

Chapitre 2 : Sur l'étude de la régularité et de décroissance à l'infini des ondelettes complexes progressives 53

2.1 Introduction 55

2.2 Motivation de l'utilisation des ondelettes complexes progressives 55

2.3 Calcul explicite de l'ondelette ψ_1 63

2.4 Régularité et décroissance à l'infini de l'ondelette ψ_1 64

2.5 Cas particulier des ondelettes chapeau mexicain et huitième dérivée de gaussienne 69

Chapitre 3 : Calcul numérique de la transformée en ondelettes ... 71

3.1 Revue sur les algorithmes de décomposition de la transformée en ondelettes 73
3.1.1 Méthodes générales 73
3.1.2 Algorithme à trous 74
3.1.3 Algorithme de Mallat 75
3.1.4 Algorithme de décomposition en ondelettes périodiques 76
3.2 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes .. 76
3.2.1 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes continue 77
3.2.1.1 Calcul numérique des coefficients d'ondelettes 1-D 77
3.2.1.2 Calcul numérique des coefficients d'ondelettes 2-D 81
3.2.2 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes discrète 88
3.2.2.1 Mise en œuvre numérique 1-D 88
3.2.2.2 Mise en œuvre numérique 2-D 92
3.2.3 Tests de validation du calcul numérique des coefficients d'ondelettes 96
3.2.3.1 Tests dans le cas monodimensionnel 96
3.2.3.2 Tests dans le cas bidimensionnel 105

Chapitre 4 : Application de l'analyse par ondelettes aux signaux électriques et aux tourbillons océaniques 109
4.1 Introduction 111
4.2 Analyse par ondelettes des signaux électriques 112
4.2.1 Analyse par ondelettes d'un signal de tension d'arc .. 112
4.2.2 Analyse par ondelettes du courant de décharges partielles 113
4.2.3 Commentaires 113
4.3 Analyse par ondelettes des tourbillons engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream 119
4.3.1 Introduction 119
4.3.2 Le modèle de circulation océanique 119
4.3.2.1 Le modèle d'océan 119
4.3.2.2 Le modèle numérique 120
4.3.2.3 La circulation générale océanique simulée 121
4.3.2.4 La génération des tourbillons de méso-échelle . 122
4.3.3 Analyse par ondelettes des tourbillons océaniques 125
4.3.3.1 Introduction 125

4.3.3.2 Analyse par ondelettes unidimensionnelles 126
4.3.3.3 Analyse spectrale locale 141
4.3.3.4 Analyse par ondelettes bidimensionnelles 144
4.3.4 Une approche de filtrage numérique par ondelettes orthogonales 155
4.3.4.1 Remarque de départ 155
4.3.4.2 Choix du sous espace E_j et description de la méthode de filtrage 156
4.3.4.3 Un premier essai numérique 158

Chapitre 5 : Ondelettes et estimation de densité de probabilité .. 163
5.1 Introduction 165
5.2 Méthode de développement orthogonal 166
5.3 Méthode de développement par ondelettes 167
5.4 Extension de la méthode de développement par ondelettes 169
5.4.1 Introduction 169
5.4.2 Le problème de minimisation 170
5.4.2.1 Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation 170
5.4.2.2 Sur la résolution du problème de minimisation 172
5.4.2.3 Calcul de la matrice $\tilde{Q}_\beta$ 174
5.4.2.4 Calcul de la matrice S 176
5.4.2.5 Calcul de l'estimateur $\tilde{g}$ 176
5.4.2.6 Remarque et commentaire 177
5.4.2.7 Quelques tests numériques 178

Conclusion 181
Annexes 187
Annexe 1 189
Annexe 2 202
Annexe 3 205
Bibliographie 209

Introduction

Les travaux que nous présentons ici portent sur les aspects numériques de la décomposition en ondelettes dans le but de développer de logiciels d'analyse et de filtrage. A titre d'exemples, des applications à des signaux océaniques turbulents ainsi qu'à des sigaux électriques industriels sont présentées. Une approche de l'utilisation des ondelettes pour la construction d'un estimateur d'une densité de probabilité inconnue est également proposée.

Un problème très général en traitement du signal est celui posé par l'analyse, c'est à dire l'extraction, à partir des données, d'un ensemble d'informations pertinentes qui rendent compte tant du contenu spectral du signal que de son organisation temporelle (ou spatiale). Depuis longtemps, l'outil traditionnellement le plus utilisé est la transformée de Fourier. Ce procédé n'est cependant pas toujours la façon la plus naturelle pour l'analyse d'un signal. La musique ou la parole, par exemple, sont des signaux dont le spectre évoluent en fonction du temps d'une façon significative. A chaque instant, le son est une combinaison de fréquences qui change constamment. Cette évolution des fréquences en fonction du temps n'est pas reflétée dans la transformée de Fourier, ou du moins pas directement. Si un signal (temporel ou spatial) peut être reconstruit à partir de sa transformée de Fourier, la transformation donne une information sur toutes les fréquences (ou nombres d'onde) du signal sur tout le domaine, sans montrer comment les fréquences (ou nombres d'onde) varient avec le temps.

L'analyse de Fourier présente donc des inconvénients majeurs qui ne permettent pas de dégager à la fois une information sur la structure du signal analysé dans l'espace physique et dans l'espace spectral. Dans le spectre tous les aspects physiques du signal disparaissent, par exemple le début et la fin pour un signal fini, ou la localisation physique d'une singularité.

Il y a une dizaine d'annnées, une nouvelle méthode d'analyse, appliquée à l'origine aux signaux sismiques obtenus lors de la prospection pétrolière, a été proposée par le géophysicien J. Morlet [71] : l'analyse par ondelettes. Il eut l'idée d'analyser un signal à l'aide de fonctions élémentaires (ondelettes) toutes issues, par translation et dilatation, d'une même fonction (l'ondelette-mère).

Avec la contribution de A. Grossmann [41], (spécialiste de la mécanique quantique), une formulation mathématique de la transformée en ondelettes continue a été développée en rapport avec la théorie des groupes affines et les états cohérents de la mécanique quantique permettant de décomposer un signal à la fois en temps et en fréquence.

Utilisant la rotation en plus de la dilatation et translation, R. Murrenzi [73] étendit la transformée en ondelettes continue à des espaces de n dimensions.

Dans le cas de la transformée en ondelettes continue, les informations données par les coefficients d'ondelettes sont redondantes puisque les paramètres

de dilatation-translation varient continûment dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Il peut paraître numériquement peu satisfaisant de stocker les coefficients d'ondelettes qui contiennent de l'information superflue. I. Daubechies en collaboration avec A. Grossmann et Y. Meyer [18] ont alors judicieusement discrétisé la transformation précédente en se ramenant à un sous ensemble discret pour le choix des paramètres de dilatation-translation conduisant ainsi à des formules de reconstruction approchée sous forme de séries doubles (théorie des "frames").

Par la suite, les premières bases orthonormées d'ondelettes régulières ont été exhibées de façon indépendante en 1985 par Y. Meyer [66] et P. G. Lemarié en 1986 [57].

Dans le but d'inscrire la construction de bases orthonormées d'ondelettes dans un cadre général, S. Mallat et Y. Meyer [61][67] ont introduit en 1987 le concept d'analyse multirésolution. Ce fut alors la découverte par G. Battle [6] et P. G. Lemarié [57] des bases orthonormées d'ondelettes calculées à partir des fonctions splines ainsi que la construction par S. Jaffard [50] des bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

La compréhension du rapport ondelettes et filtres discrets (lié à la notion d'analyse multirésolution) a permis le développement d'algorithmes de décomposition [62][80]; et la construction de bases orthonormées d'ondelettes à support compact par I. Daubechies [21].

Les développements mathématiques de cet outil d'analyse ont donc considérablement avancé depuis 1984.

Les ondelettes permettent d'analyser plus efficacement des signaux où se combinent des phénomènes localisés dans l'espace physique ayant des échelles spectrales très différentes. C'est pour cette raison qu'elles semblent être un outil bien adapté à l'analyse des signaux tels que la turbulence océanique, où des évènements fortement énergétiques et très localisés (tourbillons de mésoéchelle), se produisent de façon intermitente.

L'idée fondamentale de cette technique consiste en l'utilisation de fenêtres d'analyse de largeur variable, ce qui le différencie directement de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (ou transformée de Gabor) pour laquelle la fenêtre est de dimension fixe. L'analyse par ondelettes permet mieux que les analyses classiques de Fourier ou de Gabor, d'extraire une information positionnée à la fois en temps (ou espace) et en échelle.

A l'image des premiers succès expérimentaux (analyse de signaux sismiques [35], analyse et synthèse de la parole [54][55][68]), c'est un vaste champ d'applications qui s'ouvre à la transformation en ondelettes. Ces travaux concernent principalement l'application des ondelettes à l'analyse et au traitement du signal ou de l'image, dans des domaines très variés : codage du signal dans

les communications téléphoniques [81], analyse des objets fractals [36][47]. Le domaine de l'analyse d'image a été exploité en premier par S. Mallat [60] et depuis fait l'objet d'un très grand nombre de travaux [14][28][31][74]. On voit également des applications à l'analyse des signaux turbulents [2][25], en médecine [7], en calcul scientifique [8][70], en simulation numérique de la turbulence [78] et dans la résolution numérique des problèmes d'équations aux dérivées partielles [34][52][78]. Ces différents travaux théoriques et appliqués montrent l'attrait que peuvent avoir les ondelettes, dans des domaines très variés du traitement du signal.

C'est plutôt du point de vue de l'analyse des signaux océaniques turbulents engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream que nous considérerons ici les ondelettes.

Dans la **première partie**, nous exposons succinctement les aspects théoriques majeurs de l'analyse par ondelettes après avoir introduit brièvement l'analyse temps-fréquence. L'analyse par ondelettes est une analyse temps-échelle permettant des analyses et resynthèses locales au sein d'un signal. Selon les applications que l'on souhaite en faire, il existe différentes transformées en ondelettes : transformée en ondelettes continue et transformée en ondelettes discrète (ou transformée en ondelettes orthogonale). La transformée en ondelettes continue telle qu'elle a été introduite par Grossmann et Morlet est un excellent outil d'analyse et présente l'avantage d'une grande lisibilité; mais a l'inconvénient majeur de conduire à une redondance des informations données par les coefficients d'ondelettes (redondance utile pour certaines applications telles que par exemple l'analyse). La transformée en ondelettes discrète, beaucoup plus utilisée par les numériciens, apparaît mieux adaptée au calcul numérique. Ces deux types de transformées en ondelettes sont exposés en détails dans plusieurs travaux ou ouvrages [19][33][41][43][69]. Pour chacune d'elles, nous rappelons les définitions ainsi que les propriétés qui s'y rattachent.

Dans la **deuxième partie**, nous proposons une étude des propriétés de régularité et de décroissance à l'infini des ondelettes complexes progressives obtenues à partir d'ondelettes réelles.

En effet, lorsque le signal à analyser est réel, une ondelette complexe introduit un module et une phase des coefficients d'ondelettes qui donnent diverses informations complémentaires sur le signal [54]. On a un procédé qui permet d'associer à une ondelette réelle une ondelette complexe de l'espace de Hardy permettant une meilleure analyse. L'objet de la deuxième partie est d'étudier la régularité de l'ondelette complexe en fonction de la régularité de l'ondelette initiale.

La **troisième partie** de ce travail est relative au développement de code de calcul de la transformée en ondelettes unidimensionnelle et bidimensionnelle.

En effet, les investigations numériques et mise en œuvre des applications industrielles n'ont pas suivie les développements théoriques de l'outil d'analyse par ondelettes. La grande majorité des utilisateurs potentiels étaient particulièrement désarmés pour appréhender les espoirs portés par les ondelettes, puisqu'ils n'avaient pas tous à leur disposition, de codes de calcul opérationnels de la transformée en ondelettes. A l'époque, les quelques logiciels existant n'étaient pas accessibles au public. C'est ainsi qu'à la demande de l'équipe de Modélisation des Ecoulements Océaniques et des Marées (MEOM) du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels de l'Institut de Mécanique de Grenoble (LEGI-IMG), pour des besoins d'analyse de signaux océaniques turbulents, le développement d'un logiciel d'analyse en ondelettes était jugé intéressant.

Des algorithmes de la transformée en ondelettes sont présentés dans plusieurs travaux [9][10][46][62][77]. Nous décrivons en détail les aspects numériques de l'algorithme général de la transformée en ondelettes continue ainsi que de l'algorithme de décomposition-récomposition de S. Mallat [62].

Des tests numériques valident les codes développés. Des comparaisons entre résultats numériques et résultats théoriques sont faits en vue d'évaluer la précision des calculs. Des tests faits sur des signaux académiques sont présentés.

La **quatrième partie** de ce travail présente les applications de l'analyse par ondelettes à des signaux électriques industriels ainsi qu'à des signaux océaniques turbulents. Les signaux électriques sont générés lors des expériences chez Merlin Gerin (Société spécialisée dans la construction électrique). Quant aux signaux océaniques turbulents, ils sont engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream dévéloppé par l'équipe MEOM du LEGI-IMG.

En fait, l'observation récente des océans à partir des satellites, ainsi que l'utilisation de modèles numériques de plus en plus réalistes (grâce notamment à l'assimilation de donnée d'origine satellitaire) tendent à produire une vision synoptique (vue générale) de l'océan, et font ainsi sentir le besoin d'outils d'analyse permettant une évaluation des échelles énergétiques de la circulation, tout en prenant en compte sa répartition géographique non homogène.

Nous présentons des analyses par ondelettes unidimensionnelles et bidimensionnelles de signaux océaniques. Une première approche d'utilisation de spectres locaux est présentée. Nous tentons d'aborder également l'utilisation des ondelettes pour le filtrage dans la perspective d'extraire l'information utile dans le signal analysé.

Enfin la **cinquième partie** est consacrée à une approche de l'utilisation des

ondelettes pour construire un estimateur d'une densité de probabilité inconnue.

En effet, dans l'espoir de pallier aux inconvénients des méthodes traditionnelles, A. Antoniadis et R. Carmona [1] ont introduit une méthode d'estimation de densité de probabilité par ondelettes. Cependant, cette méthode présente des difficultés dans son utilisation. L'objet de la cinquième partie est de proposer une extension de cette méthode permettant de contourner ces difficultés à l'aide d'un algorithme de calcul fondé sur l'utilisation des ondelettes à support compact de Daubechies.

Ce travail est le fruit d'une étroite collaboration entre l'équipe des équations aux dérivées partielles du Laboratoire de Modélisation et Calcul- Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble (LMC-IMAG) et l'équipe MEOM du LEGI-IMG pour développer un logiciel de simulation numérique en vue d'analyser en ondelettes l'évolution des tourbillons océaniques.

Chapitre 1

Quelques aspects théoriques de la transformée en ondelettes

1.1 Introduction

De tous les outils dont peut disposer le traitement du signal, la transformation de Fourier (l'analyse spectrale), dont nous donnons les propriétés fondamentales en annexe 1, est certainement l'un des plus importants. Son adéquation pour une description des signaux d'énergie finie en fait un outil fondamental dans l'analyse des signaux. La représentation temporelle et la représentation fréquentielle d'un signal sont liées par cette transformation. Si ces deux représentations décrivent le signal de manière commode et habituel, elles n'épuisent cependant pas l'information contenue dans celui-ci. Les nécessités d'accéder aux caractéristiques évolutives jugées pertinentes d'un signal imposent une "représentation conjointe en temps et fréquence" appelée spectre instantané ou spectre évolutif.

Nous introduisons très superficiellement la notion de représentation temps-fréquence; puis nous donnons une description très succincte des aspects théoriques de la transformation en ondelettes, qui est une représentation temps-échelle.

1.2 Sur l'analyse temps-fréquence

Les représentations temps-fréquence [30] permettent de donner sens à une notion d'analyse spectrale évolutive. Elles prennent explicitement en compte une possible évolution temporelle du contenu fréquentiel d'un signal et sont des outils spécifiques adaptés aux signaux non stationnaires (signaux dont le contenu fréquentiel ou les propriétés statistiques évoluent au cours du temps).

1.2.1 Motivations et idée

Lorsqu'on fait de l'analyse du signal, on cherche généralement à dégager une information :

- sur la structure temporelle du signal (que l'on obtient par exemple en l'échantillonnant pour les valeurs multiples d'un temps t_0 donné),

- sur sa structure fréquentielle.

Ces deux types d'analyse peuvent être présentés de la façon suivante :

* la première analyse (analyse temporelle) consiste à décomposer le signal sur des masses de Dirac placées aux points nt_0 avec $n \in \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire sur des "fonctions" très concentrées en espace mais totalement délocalisées en fréquence);

* la seconde (analyse fréquentielle) consiste à décomposer le signal sur des fonctions $e^{2i\pi\xi x}$ (c'est-à-dire sur des fonctions très concentrées en fréquence mais totalement délocalisées en espace).

Ces deux types d'analyse sont cependant insuffisants pour extraire simul-

tanément les aspects temporels et fréquentiels du signal. Ainsi, on peut souhaiter dans certains cas avoir une représentation intermédiaire sur laquelle on puisse lire les propriétés à la fois locales et fréquentielles du signal analysé. Ceci intervient quand on veut donner un sens au concept de "fréquence instantannée" d'un signal. L'exemple de la musique est caractéristique : un morceau se présente essentiellement comme une suite de notes, c'est-à-dire de signaux bien localisés en temps et en fréquence. Une analyse purement temporelle ou purement fréquentielle d'un tel signal serait de peu d'utilité.

Même si le principe d'incertitude de Heisenberg (cf. annexe 1) donne une limite numérique à la possibilité de localiser simultanément un signal et son spectre autour de l'origine, les contraintes techniques vont donc simplement nous conduire à trouver une représentation adéquate permettant de combiner les avantages de ces deux descriptions complémentaires. D'où l'idée de représentations temps-fréquence (ou temps-échelle).

L'avantage des représentations temps-fréquence ou temps-échelle est en fait essentiellement qu'elles permettent d'associer à un signal une signature susceptible de se prêter à des tâches de reconnaissance ou de classification. Il est clair que l'information présente dans les signaux temporels n'est pas augmentée en passant dans le plan transformé. Le changement d'espace de représentation permet cependant, par l'utilisation de deux dimensions, de mieux visualiser cette information en la concentrant sur les structures importantes, et physiquement significatives, du signal.

Dans le but de localiser l'information obtenue par l'analyse de Fourier, une première représentation temps-fréquence apparaît vers les années 1940 grâce au physicien D. Gabor [32] : la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

1.2.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

La transformée de Fourier à fenêtre glissante consiste à décomposer un signal sur des fonctions élémentaires $w_{\lambda b}$, toutes construites à partir d'une même "fonction fenêtre" w par translation en temps (paramètre b) et par modulation en temps (on multiplie la fonction w par une fonction sinusoïdale de fréquence λ). Autrement dit :

$$w_{\lambda b}(t) = e^{2i\pi\lambda t}.w(t-b)$$

On remplace ainsi les valeurs $\hat{f}(\lambda)$ de la transformée de Fourier (cf. annexe 1) par une famille à deux paramètres λ et b réels :

$$W_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{w}(t-b)e^{-2i\pi\lambda t}dt \qquad (1.1)$$

L'application $f \longrightarrow W_f(\lambda, b)$ est la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Le paramètre λ joue le rôle d'une fréquence localisée autour de l'abscisse b du signal temporel. $W_f(\lambda, b)$ donne ainsi une indication sur ce qui se passe autour de l'abscisse $t = b$ pour la fréquence λ .

D. Gabor a essentiellement utilisé une fenêtre plus lisse : la fenêtre de Gauss, définie par

$$w(t) = Ke^{-\alpha t^2} \quad (\alpha, K > 0)$$

$$\hat{w}(\lambda) = K\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\lambda^2}$$

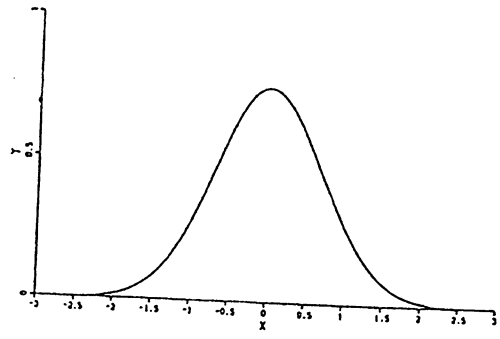


Fig. 1.1 : Fenêtre de Gauss, $\alpha = \frac{1}{2}, K = \pi^{-\frac{1}{4}}$

La connaissance des $W_f(\lambda, b)$ pour toutes les valeurs réelles de λ et b détermine complètement le signal f. Soit $w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fenêtre telle que $|\hat{w}|$ soit une fonction paire et $\|w\|_2 = 1$. Alors, pour tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ on montre [33] :

a/ Conservation de l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |W_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \tag{1.2}$$

b/ La formule de reconstruction

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\lambda, b) w_{\lambda b}(x) d\lambda db \tag{1.3}$$

Dans les cas pratiques on prendra naturellement une fonction w localisée autour de $t = 0$, par exemple la gaussienne. La fonction $w_{\lambda b}$ est alors localisée autour du point $t = b$ tandis que $\hat{w}_{\lambda b}$ est localisée autour de λ, compte tenu du fait que

$$\hat{w}_{\lambda b}(\xi) = e^{-2i\pi(\xi-\lambda)b}\hat{w}(\xi - \lambda).$$

Ceci fait que

$$W_f(\lambda, b) = (f, w_{\lambda b}) = (\hat{f}, \hat{w}_{\lambda b})$$

donne une information à la fois en temps et en fréquence autour du point (λ, b).

Dans la méthode de Gabor, du fait que $\omega_{\lambda b}$ et $\hat{\omega}_{\lambda b}$ soient bien localisées, l'analyse permet de réconcilier celle en variable d'espace (temps) avec celle en variable de Fourier (fréquence). Ceci met en évidence les avantages de la méthode de Gabor sur celle de Fourier.

Cependant, force est de constater que la représentation temps-fréquence de Gabor pèche dans l'analyse des signaux qui ont des temps caractéristiques très différents de la largeur de la fenêtre $w(t)$. Tel est le cas notamment de la parole, où suivant la largeur de la fenêtre, la transformée de Fourier à fenêtre glissante ne pourra être sensible simultanément aux voyelles (temps caractéristique long) et aux consonnes (temps caractéristique court). C'est également le cas pour l'analyse des turbulences en mécanique des fluides où apparaissent des phénomènes significatifs à des échelles à la fois macroscopiques et microscopiques.

Le géophysicien J. Morlet a constaté ces inconvénients en prospection pétrolière, pour l'analyse des signaux sismiques captés après réflexion sur des couches géologiques. Ceci l'a amené à proposer en 1981 [71] une nouvelle méthode d'analyse de signaux sismiques où la fenêtre varie par translation mais aussi par dilatation ou contraction : l'analyse par ondelettes.

1.3 Analyse des signaux par ondelettes

L'analyse par ondelettes est une représentation temps-échelle dont le principe est de décrire l'évolution temporelle d'un signal relativement à une échelle d'observation.

L'idée de base de la transformée en ondelettes est de représenter un signal quelconque comme une superposition de signaux élémentaires (les ondelettes) oscillants mais localisés dans le temps à la différence des ondes éternelles de Fourier. Tous ces signaux élémentaires ont même forme et ne diffèrent que par leur instant d'apparition et leur durée. C'est ce qui fait sa principale caractéristique par rapport à l'analyse de Fourier classique.

De même qu'il existe plusieurs transformées de Fourier, il existe différentes transformées en ondelettes : la transformée en ondelettes continue et la transformée en ondelettes discrète (ou transformée en ondelettes orthogonale). Ces différents types de transformée en ondelettes sont exposés en détail dans plusieurs travaux ou ouvrages [19][33][41][43][69]. Nous présentons ici une revue très succincte de ces différentes transformées en ondelettes.

1.3.1 Transformée en ondelettes continue sur $\mathbb{R}$

1.3.1.1 Introduction et définition

Les ondelettes sont des fonctions générées à partir d'une fonction ψ par translations et dilatations sur l'axe des temps (ou espace).

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}), \quad b \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

La fonction ψ est appelée ondelette-mère ou ondelette analysante. b est un paramètre de translation et a un paramètre de dilatation-contraction (dilatation si $a > 1$ et contraction si $a < 1$); le terme $\frac{1}{\sqrt{a}}$ est un facteur de normalisation. b est le centre de la fonction élémentaire ψ_{ab} et a est sa largeur.

Les coefficients d'ondelettes du signal sont alors les nombres

$$C_f(a,b) = (f, \psi_{ab})$$

La transformée est dite continue car les paramètres de dilatation-translation (a,b) varient continûment dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Dans l'espace de Fourier, les paramètres a et b ont pour rôles respectifs de dilater-contracter et de moduler l'échelle des fréquences :

$$\hat{\psi}_{ab}(\lambda) = \sqrt{a}e^{-2i\pi\lambda b}\hat{\psi}(a\lambda)$$

Pour une raison profonde, à la fois théorique et numérique, que nous verrons plus loin, ψ sera d'intégrale nulle donc oscillante. On s'efforcera également d'imposer à ψ et $\hat{\psi}$ une bonne localisation.

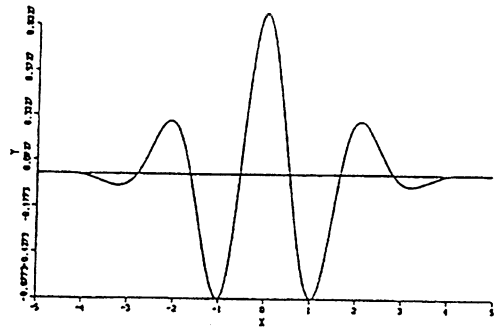


Fig.1.2 : Une ondelette-mère (ondelette huitième dérivée de gaussienne)

L'analyse en ondelettes offre la possibilité de suivre l'évolution d'un signal au cours du temps mais aussi, en considérant des signaux élémentaires de durée de plus en plus faible, de se focaliser sur des instants précis à la manière d'un "microscope mathématique" positionné en b, d'agrandissement $\frac{1}{a}$ et dont l'optique est donnée par l'ondelette ψ. De plus cette transformée contracte ou dilate l'axe des temps ce qui permet d'introduire la notion d'échelle ou de résolution.

L'originalité de cette transformation est qu'elle autorise l'analyse simultanée des signaux de temps caracteristiques très différents. Nous avons illustré, à la figure Fig.1.3, les différences de comportement entre les fonctions de base de Fourier, de Gabor $w_{\lambda b}$, à enveloppe fixe et les ondelettes, à contraction-dilatation.

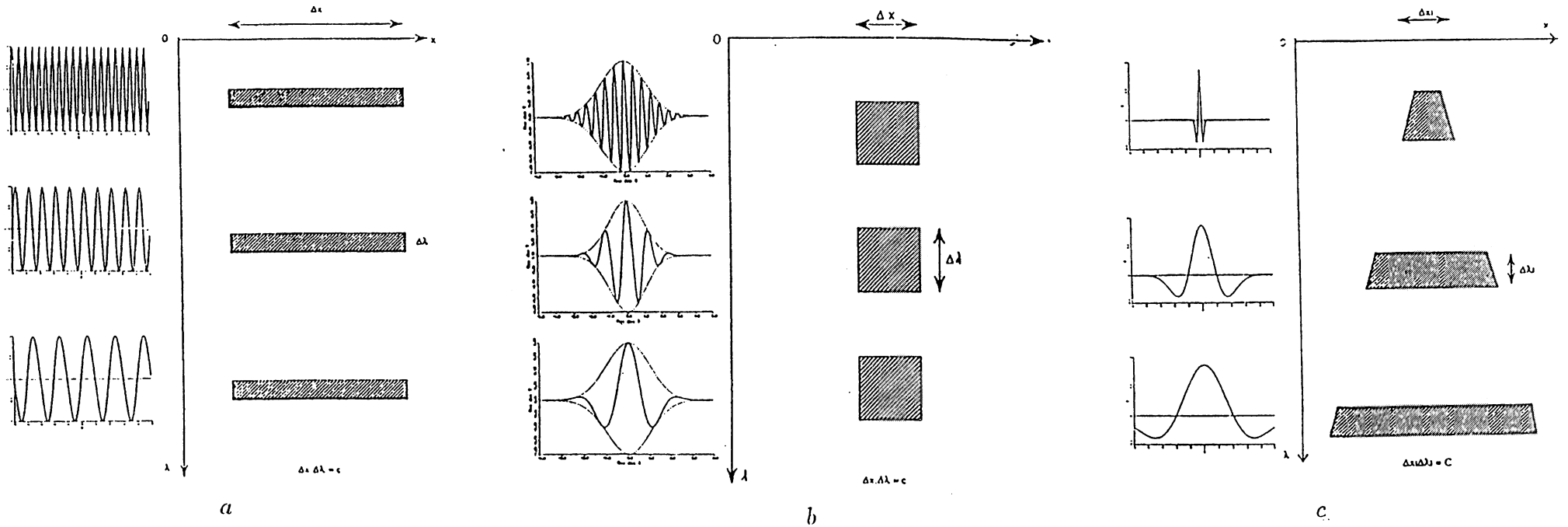


Fig.1.3 : Différence de comportement entre les fonctions de base de Fourier, de Gabor et les ondelettes [25].

a/ Analyse spectrale à l'aide de la transformée de Fourier. A gauche, les fonctions analysantes trigonométriques. A droite, résolution maximale en échelle mais pas en espace.

b/ Analyse espace-échelle à l'aide de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (transformée de Gabor). A gauche, les fonctions fenêtre à enveloppe gaussienne fixe. A droite, même résolution en espace et en échelle pour toutes les longueurs d'onde.

c/ Analyse espace-échelle à l'aide de la transformée en ondelettes. A gauche ondelettes analysantes de forme constante. A droite, résolution optimale en espace et en échelle pour chaque longueur d'onde λ_i.

1.3.1.2 Théorème fondamental

De même que la transformée de Fourier à fenêtre glissante, la transformation en ondelettes s'inverse et on vérifie [33][41] le résultat suivant

Théorème 1.1. *Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

i/ (condition d'admissibilité)

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < +\infty$$

ii/

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{0} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda$$

On dit que ψ est l'ondelette mère (ou ondelette analysante). On construit alors les ondelettes de base

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(\frac{t-b}{a}) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

et pour tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ on considère ses coefficients d'ondelettes

$$C_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi}_{ab}(t) dt \tag{1.4}$$

Alors on a

a/ Conservation de l'énergie

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |C_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = c_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

b/ La formule de reconstruction

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int \int_{\mathbb{R}^2} C_f(a,b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

au sens suivant : si

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{c_\psi} \int \int_{\substack{|a| \geq \varepsilon \\ b \in \mathbb{R}}} C_f(a,b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

alors $f_\varepsilon \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0^+$

1.3.1.3 Remarques et commentaires

a/ La condition d'admissibilité (hypothèse *i/* du théorème 1.1) implique que le moment d'ordre 0 de l'ondellete est nul, ie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$$

L'hypothèse d'admissibilité est donc assurée par $\hat{\psi}(0) = 0$; ce qui signifie que $\hat{\psi}(\lambda)$ décroît suffisamment au voisinage de 0.

Dans les études initiales de Grossmann et Morlet [41], la condition d'admissibilité est assurée car ils imposent à l'ondelette ψ l'une des deux propriétés suivantes :

$$(P_1) \qquad \hat{\psi}(\lambda) = 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda \leq 0$$

$$(P_2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{0} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < +\infty$$

La propriété (P_1) signifie que ψ appartient à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{R})$ défini par

$$H^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f}(\lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leq 0 \right\}$$

C'est l'espace des fonctions à fréquences positives (appelées aussi fonctions progressives).

En général, on a soit $\psi \in H^2(\mathbb{R})$, soit ψ est à valeurs réelles mais alors il faut assurer la condition d'admissibilité. Dans la pratique, il apparaît qu'on a une meilleure qualité d'analyse lorsque $\psi \in H^2(\mathbb{R})$. Nous verrons plus loin (au deuxième chapitre) comment on peut transformer une ondelette ψ à valeurs réelles en une ondelette complexe ψ_1 appartenant à $H^2(\mathbb{R})$.

b/ La condition d'admissibilité autorise l'inversion de la transformation en ondelettes. On se limite le plus souvent à des valeurs positives du paramètre a.

L'application $C :\longrightarrow C_f = C_f(a,b)$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a^2})$ n'étant pas surjective, les coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$ sont corrélés entre eux. Ce qui conduit à une redondance dans l'information présentée par les coefficients d'ondelettes. La formule de reconstruction n'est donc pas unique. En général, dans la pratique, on utilise le cas particulier suivant :

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(a,b)\psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

c/ Notons par ψ_a la dilatée de ψ par un facteur a

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t}{a})$$

et définissons $\tilde{\psi}_a$ par

$$\tilde{\psi}_a(t) = \psi_a(-t)$$

La transformée en ondelettes d'une fonction f à l'échelle a et à la position b est alors donnée par

$$C_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\tilde{\psi}}_a(b-t)dt = f * \overline{\tilde{\psi}}_a(b)$$

L'ondelette ψ peut donc être interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande et la transformée en ondelettes comme une convolution avec un filtre passe-bande qui est dilaté.

Si l'échelle a est large, $C_f(a,b)$ détecte les composantes de grandes échelles du signal f. Lorsque l'échelle a décroît, le support de l'ondelette ψ_a décroît ainsi le coefficient d'ondelette $C_f(a,b)$ est sensible aux plus petits détails. L'échelle a caractérise la taille et la régularité des caractéristiques du signal extraites par le coefficient d'ondelette $C_f(a,b)$. Plus une fonction est régulière, plus ses coefficients d'ondelettes décroissent vite.

L'analyse en ondelettes permet de localiser les singularités en observant les endroits où les coefficients d'ondelettes sont très grands [16][40][49][63]. Ce qui n'existe évidemment pas pour l'analyse de Fourier.

Si l'on souhaite analyser des fonctions régulières, par exemple des fonctions de $C^m(\mathbb{R})$, il est nécessaire d'utiliser des ondelettes régulières avec un certain nombre de moments nuls, ie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\psi(t)dt = 0, \quad k = 0,...,m-1$$

car une ondelette peu régulière introduirait des discontinuités dans l'analyse.

d/ Pour certains types d'applications [40], on préfère considérer la famille d'ondelettes

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{a}\psi(\frac{t-b}{a}), \qquad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

qui diffère de la famille précédente d'un facteur multiplicatif $\frac{1}{a}$ et la transformée en ondelettes associée est

$$T_f(a,b) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi}(\frac{t-b}{a})dt$$

e/ On peut utiliser l'un des deux systèmes de coordonnées ($\{b, a\}$ ou $\{b, -loga\}$) de la figure Fig.1.4 pour représenter les coefficients d'ondelettes $C_f(a, b)$ dans le plan temps-échelle. Le système de coordonnées $\{b, -loga\}$ (Fig.1.4-b) est plus couramment utilisé; il a l'avantage de représenter les grandes échelles au dessus des petites.

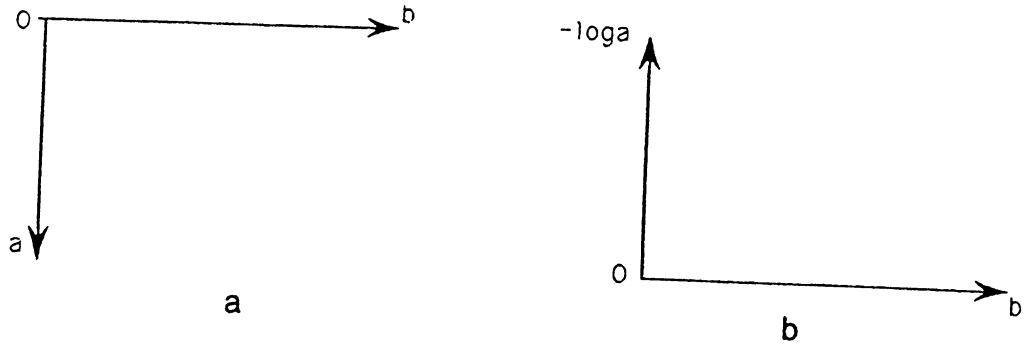


Fig.1.4 : Systèmes de coordonnées utilisés pour la représentation des coefficients d'ondelettes. (a) Système de coordonnées $\{b, a\}$. (b) Système de coordonnées $\{b, -loga\}$.

f/ Pour certaines applications des ondelettes telles que l'analyse des signaux évolutifs (fractals, turbulences, etc, $\cdots$), il est important que les coefficients d'ondelettes soient invariants par translation. Cette propriété d'invariance par translation est vérifiée par les $C_f(a, b)$.

En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ un signal et $\tau_{b_0} f$ la translatée de f au point b_0, i.e. $\tau_{b_0} f(t) = f(t - b_0)$.

On a

$$C_{\tau_{b_0} f}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t - b_0) \psi(\frac{t - b}{a}) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(\frac{t - (b - b_0)}{a}) dt$$
$$= C_f(a, b - b_0)$$

D'autre part soit $g_k(t) = g(kt), \quad k \neq 0$. Nous avons que

$$C_{g_k}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(kt) \psi(\frac{t - b}{a}) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \psi(\frac{t - kb}{ka}) \frac{dt}{k}$$
$$= \frac{1}{k} C_g(ka, kb)$$

Nous verrons plus loin (à la section 1.3.2.2.c) que cette propriété d'invariance par translation n'est pas conservée dans le cas de la transformée en ondelettes discrète.

1.3.1.4 Quelques exemples d'ondelettes analysantes

Le choix de l'ondelette analysante n'est pas un problème simple. Les critères imposés à une fonction pour être une ondelette sont peu restrictifs et de nombreuses fonctions peuvent remplir ces critères. Il s'agit en fait de tenir compte de la nature du problème à traiter : quelle information veut-on extraire du signal à analyser, quel type d'ondelette utiliser, quelle transformée choisir. Cependant, l'ondelette analysante peut être réelle ou complexe.

- **L'ondelette de Morlet**

La fonction utilisée initialement par J. Morlet [35] dans ses analyses temps-fréquence de signaux sismiques est une fonction oscillante dont l'enveloppe est de forme gaussienne

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Dans la pratique, le choix de $\omega_0 \geq \pi\sqrt{\frac{2}{Log(2)}} \simeq 5.33$ permet à ψ de vérifier la condition d'admissibilité.

La transformée de Fourier de l'ondelette de Morlet s'écrit :

$$\hat{\psi}(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(2\pi\lambda - \omega_0)^2}{2}}$$

Il est important de remarquer que l'ondelette de Morlet ne vérifie pas la condition d'admissibilité puisque, même pour $\omega_0 = 5.33$ par exemple,

$$\hat{\psi}(0) = \sqrt{2\pi} e^{-14.2} > 0$$

On a donc $c_\psi = +\infty$! Mais cette valeur de $\hat{\psi}(0)$ est de l'ordre de 10^{-6}, on peut estimer qu'elle est numériquement nulle.

Dans la pratique, on choisit en général $\omega_0 = 5$.

- **Ondelette constante par morceaux**

L'exemple le plus simple de fonction ψ est donné par le chapeau français : "top-hat"

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 < |t| < 3 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 3 \end{cases}$$

On a dans ce cas

$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{3sin(2\pi\lambda) - sin(6\pi\lambda)}{\pi\lambda}\right]$$

La convergence vers 0 à l'infini est très lente, du fait de l'irrégularité de ψ. La fonction $\hat{\psi}$ est donc très mal localisée ce qui est un inconvénient majeur.

- **Dérivées de gaussiennes**

Pratiquement, toute fonction ψ bien localisée ainsi que $\hat{\psi}$ et d'intégrale nulle conviendra comme ondelette analysante. Par exemple :

$$\psi(t) = g^{(m)}(t) \qquad \text{avec} \quad g(t) = Ae^{-\alpha t^2} \quad \text{et} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Ces ondelettes possèdent la propriété d'avoir leur m premiers moments nuls. Elles sont donc toute admissibles. Les transformées de Fourier de ces ondelettes ont la forme particulière

$$\hat{\psi}(\lambda) = A(2i\pi\lambda)^m \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\lambda^2}$$

On prend géneralement :

- Pour $m = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (ondelette chapeau mexicain)

$$\psi(t) = A(1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

où l'on a

$$\hat{\psi}(\lambda) = A\sqrt{2\pi}(2\pi\lambda)e^{-2\pi^2\lambda^2}$$

- Pour $m = 8$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (ondelette huitième dérivée de gaussienne)

$$\psi(t) = A(t^8 - 28t^6 + 210t^4 - 420t^2 + 105)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

où l'on a

$$\hat{\psi}(\lambda) = A\left[\sqrt{2\pi}(2\pi\lambda)^8 e^{-2\pi^2\lambda^2}\right]$$

ψ et $\hat{\psi}$ sont alors des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ie, éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- **Ondelette progressive** [69]

Un autre exemple simple d'ondelette est donné par

$$\psi(t) = \frac{1}{(t+i)^2}$$

et l'on a

$$\hat{\psi}(\lambda) = \begin{cases} 4\pi^2\lambda e^{-2\pi\lambda} & \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\hat{\psi}(0) = 0$. Cette fonction ψ est remarquable par sa régularité, mais elle est mal localisée et peu oscillante (un seul moment nul).

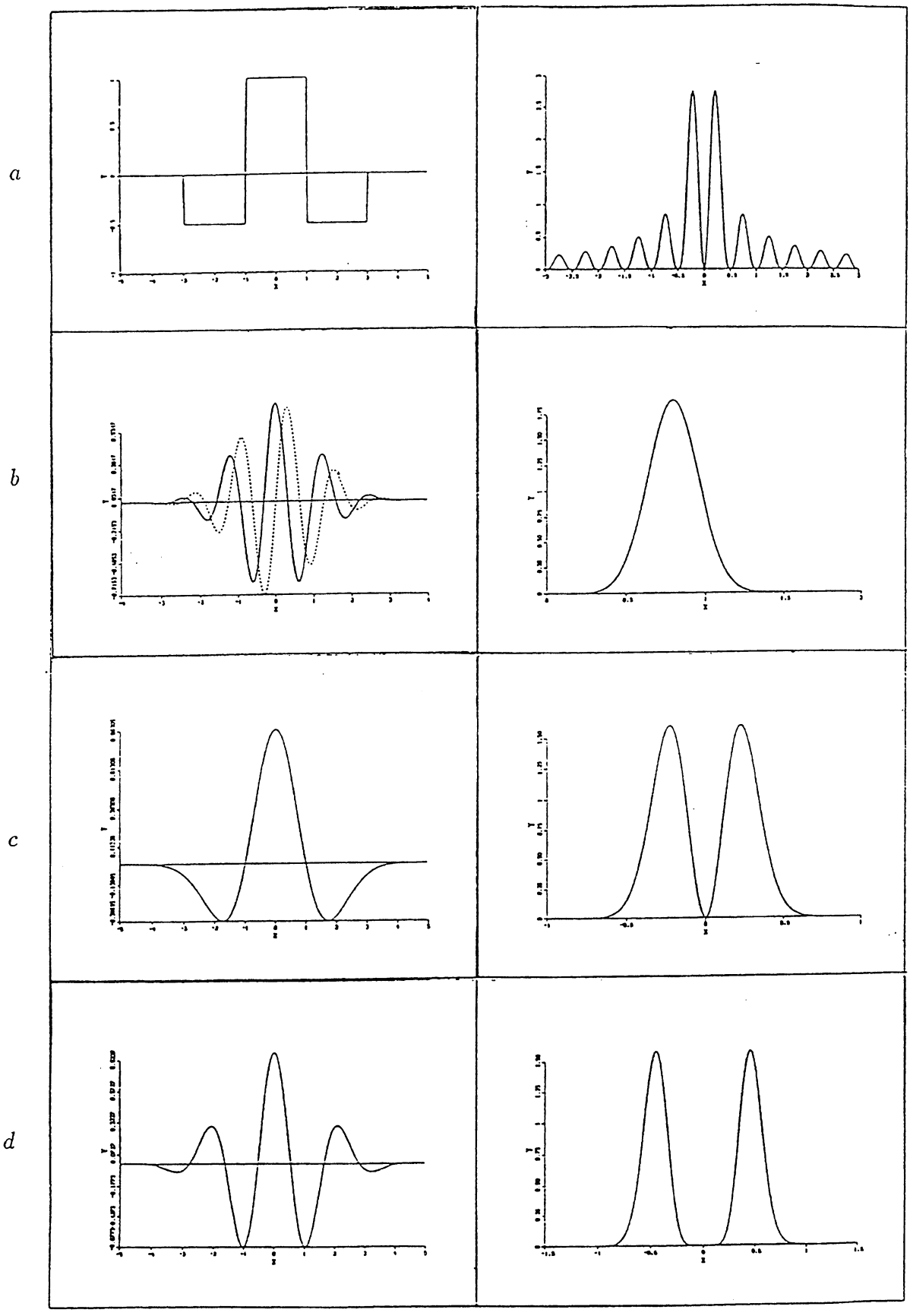


Fig.1.5 : Exemples d'ondelettes ψ couramment utilisées dans le cadre de la transformée en ondelettes continue. On montre ψ (à gauche) et $|\hat{\psi}|$ (à droite). (a) Ondelette "top-hat" (ou "chapeau français"). (b) Ondelette de Morlet ($\omega_0 = 5$), partie réelle (en trait plein) et partie imaginaire (en pointillé). (c) Ondelette "chapeau mexicain" ou "ondelette de Marr" (seconde dérivée de gaussienne). (d) ondelette "huitième dérivée de gaussienne".

1.3.1.5 Calcul explicite de $C_f(a,b)$ pour quelques signaux simples

Contrairement à l'analyse de Fourier, toutes les formules de la transformée en ondelettes ne se prètent pas à un calcul explicite, même pour f et ψ simples. A titre d'exemple, nous donnons ici l'expression explicite des $C_f(a,b)$ pour quelques fonctions simples.

- **Exemple 1**

Soit $s(t) = sin(2\pi\omega t)$. Alors $\hat{s}(\lambda) = \frac{1}{2i}(\delta_\omega - \delta_{-\omega})$.

$$\begin{aligned} C_s(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int s(t)\overline{\psi}(\frac{t-b}{a}) = \sqrt{a} \int \hat{s}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi\lambda b}d\lambda \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2i} \int \Big(\delta_\omega - \delta_{-\omega}\Big)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi\lambda b}d\lambda \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2i}\Big[\overline{\hat{\psi}}(a\omega)e^{2i\pi\omega b} - \overline{\hat{\psi}}(-a\omega)e^{-2i\pi\omega b}\Big] \end{aligned}$$

Si $\hat{\psi}$ est paire

$$C_s(a,b) = \sqrt{a}\overline{\hat{\psi}}(a\omega)sin(2\pi\omega b), \quad a > 0, \quad b \in I\!R$$

- **Exemple 2**

Soit $f(t) = cos(2\pi\omega t)$. On a donc $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2}(\delta_\omega - \delta_{-\omega})$. Par le même calcul on a

$$C_f(a,b) = \frac{\sqrt{a}}{2}\Big[\overline{\hat{\psi}}(a\omega)e^{2i\pi\omega b} + \overline{\hat{\psi}}(-a\omega)e^{-2i\pi\omega b}\Big]$$

et si $\hat{\psi}$ est paire

$$C_f(a,b) = \sqrt{a}\overline{\hat{\psi}}(a\omega)cos(2\pi\omega b), \quad a > 0, \quad b \in I\!R$$

- **Exemple 3**

Pour $h(t) = e^{2i\pi\omega t}$, $\quad \hat{h}(\lambda) = \delta_\omega$

$$C_h(a,b) = \sqrt{a} \int \hat{h}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi\lambda b}d\lambda = \sqrt{a}\overline{\hat{\psi}}(a\omega)e^{2i\pi\omega b}$$

1.2.1.*d.i* Remarque

Dans la pratique, on restreint les paramètres de dilatation-translation (a,b) à un sous-ensemble discret; ce qui conduit à la notion de frames d'ondelettes étudiés par I. Daubechies, A. Grossmann et Y. Meyer [18]. On choisit

$a_m = \alpha^{-m}$, $\quad b_n = n\beta\alpha^{-m}$, $\quad (\alpha > 1, \quad \beta \neq 0)$ avec $\quad \psi_{a_m b_n} = \alpha^{\frac{m}{2}}\psi(\alpha^m x - n\beta)$

Pour des fins de stabilité numérique, I. Daubechies [19], a étudié dans quelles conditions l'application

$$C : f \to C_f = (C_f(a_m, b_n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

de $L^2(\mathbb{R})$ dans $l^2(\mathbb{Z}^2)$ est injective (c'est à dire que les coefficients d'ondelettes caractérisent bien le signal , ce qui est le cas le plus souvent) mais aussi d'inverse continue sur son domaine. Elle a montré que cette dernière condition, se traduit par l'existence de deux constantes positives A et B telles que

$$A||f||^2 \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |(\psi_{a_m,b_n}, f)|^2 \leq B||f||^2$$

et que la formule de reconstruction devient alors

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} C_f(a_m, b_n)\psi_{a_m,b_n} + R_f$$

où le reste R_f est estimé par $\|R_f\| \leq \mathcal{O}(\frac{B}{A} - 1)\|f\|$. Si $\frac{B}{A} \sim 1$, le terme d'erreur R_f peut être négligé et la reconstruction est numériquement satisfaisante.

Pour d'autres types d'applications tels que par exemple le calcul numérique, le filtrage, on préfère utiliser des bases orthonormées d'ondelettes dans le but de réduire autant que possible la redondance de la famille $(\psi_{a_m,b_n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$. La section suivante introduit la notion de bases orthonormée d'ondelettes.

1.3.2 Transformée en ondelettes discrète sur $\mathbb{R}$

1.3.2.1 Introduction et définition

Un progrès important dans l'analyse et le filtrage temps-échelle fut la découverte en 1985 de bases orthonormées d'ondelettes.

Compte tenu de la redondance d'informations données par les coefficients $C_f(a,b)$ sur la "base" des ψ_{ab}, Y. Meyer [66] a montré qu'on peut choisir l'ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, régulière, telle que (ψ_{jk}) $j,k \in \mathbb{Z}$ soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Ces ondelettes particulières sont appelées ondelettes orthogonales sur lesquelles on peut décomposer tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ en série double :

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{jk})\psi_{jk}(x)$$

avec

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

On obtient ainsi des coefficients que nous noterons, pour simplifier

$$C_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^j x - k)dx$$

et qui sont indépendants les uns des autres.

Le réseau des paramètres de dilatation-translation considéré dans ce cas est la collection de tous les intervalles dyadiques

$$I(j,k) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[, \qquad (j,k \in \mathbb{Z})$$

où les paramètres de dilatation-translation sont

$$(a,b) = (2^{-j}, 2^{-j}k)$$

ψ_{jk} est l'ondelette dilatée d'un facteur de 2^{-j} et translatée de $2^{-j}k$; $2^{\frac{j}{2}}$ est un facteur de normalisation choisi de façon que $||\psi||_2 = ||\psi_{jk}||_2$.

Les points $(a,b) = (2^{-j}, 2^{-j}k)$ correspondent à la discrétisation de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (Fig.1.6).

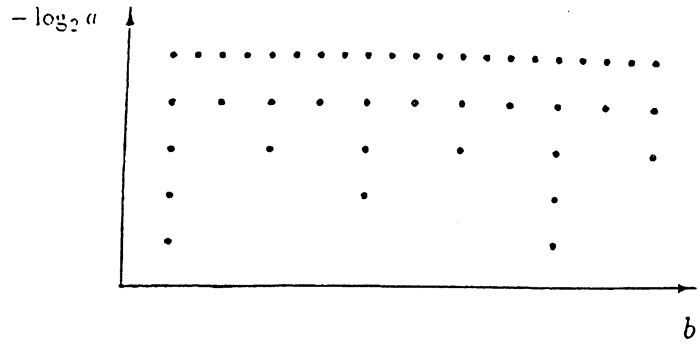


Fig.1.6 Grille dyadique dans le plan temps-échelle.

Définition 1.1. : On appelle **ondelette de classe** r, $r \in \mathbb{N}$, toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant

a/

$$\forall m = 0, ..., r \qquad \begin{cases} \psi^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R}) \\ \\ \psi^{(m)} \qquad \text{est à décroissance rapide} \end{cases}$$

b/

$$\forall k = 0, ..., r \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0$$

(Condition des moments : $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$)

c/ Les fonctions $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$, $(j, k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Les fonctions $\psi_{j,k}$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ sont les ondelettes engendrées par l'ondelette analysante (ou ondelette-mère) ψ et les conditions $a/$ et $b/$ expriment respectivement la régularité, la localisation et le caractère oscillant qu'on souhaite imposer à l'ondelette analysante ψ.

Un exemple de base orthonormale d'ondelette de $L^2(\mathbb{R})$ est la bien connue **base de Haar** découverte par A. Haar en 1909 [42]. L'ondelette mère correspondant à cette base orthonormée est :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Malheureusement, cette ondelette n'est pas continue, ce qui est un inconvénient majeur pour beaucoup d'applications car elle introduit des discontinuités dans l'analyse.

Y. Meyer [66], en 1985, a exhibé une ondelette de classe infinie (donc dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schawrtz), en construisant $\hat{\psi}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact). Nous donnons des indications sur la construction de cette ondelette en annexe 3.

Par un calcul très technique, il a démontré [71] que les ψ_{jk} forment une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \qquad f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}$$

et

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |(f, \psi_{jk})|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Pour une telle base orthonormée, on obtient des approximations de f à mesure que j croît :

$$f_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}$$

tend vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ et le terme

$$e_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \psi_{nk}) \psi_{nk}$$

représente le détail que l'on ajoute à f_n pour obtenir f_{n+1}, approximation, plus fine. Ces idées ont conduit à la notion d'analyse multirésolution introduite en 1986 par S. Mallat et Y. Meyer [61][67].

1.3.2.2 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Le cadre algébrique des analyses multirésolutions de $L^2(\mathbb{R})$ a été introduit par Y. Meyer [67] et S. Mallat [61] et s'est révélé particulièrement fécond pour la construction des bases orthonormées d'ondelettes. Il s'agit d'approcher chaque fonction de $L^2(\mathbb{R})$ par une suite de fonction f_j, $j \in \mathbb{Z}$, contenant de plus en plus d'informations sur la fonction f (f_j étant l'approximation de f à l'échelle 2^{-j}). L'idée de base est alors de mesurer les changements entre l'approximation f_j de f à l'échelle 2^{-j} et l'approximation f_{j+1} de f à l'échelle $2^{-(j+1)}$.

S. Mallat et Y. Meyer ont montré que ce programme peut être réalisé de la façon suivante.

Définition 1.2. On appelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ la donnée d'une suite croissante V_j, $j \in \mathbb{Z}$, de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ ayant en outre les propriétés suivantes :

i/ $\forall j \in \mathbb{Z}, \qquad f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

ii/ V_0 est invariant par les translations entières de la variable :

$$f \in V_0 \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tau_k f \in V_0$$

iii/ $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$

iv/ Il existe une fonction g dans V_0 telle que la suite $(\tau_k g)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de V_0.

Une famille $\{e_j\}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert H si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites (Jaffard [51]) :

a/ Les combinaisons linéaires finies $\sum \alpha_i e_i$ sont denses dans H.

b/ Il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2, telles que pour toute suite finie $\{\alpha_i\}$, on ait

$$C_1\Big(\sum |\alpha_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum \alpha_i e_i\Big\| \leq C_2\Big(\sum |\alpha_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

V_j peut s'interpréter comme l'espace de tous les approximants possibles, à l'échelle 2^{-j}.

La condition $V_j \subset V_{j+1}$ traduit le fait que toute information accessible à l'échelle 2^{-j} (ie, la projection sur V_j) l'est aussi à l'échelle $2^{-(j+1)}$: l'information contenue dans le signal est dégradée lorsque j décroît.

La condition *i/* est la propriété d'invariance par dilatation.

L'axiome *iii/* indique, d'une part que lorsque $j \to +\infty$, l'approximant f_j de f tend vers f en moyenne quadratique, d'autre part que cet approximant tend vers 0 quand $j \to -\infty$, autrement dit, le signal approché contient de moins en moins d'informations.

Définition 1.3. Une analyse multirésolution V_j, $j \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$ est **r-régulière** ($r \in \mathbb{N}$) si l'on peut choisir la fonction $g \in V_0$ (de l'axiome *iv/* de la définition 1.2) telle que $g^{(q)}$ soit à décroissance rapide pour $q = 0, 1, ..., r$.

1.3.2.2.*a* Exemples d'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

1/ Un exemple plus simple d'analyse multirésolution est celle de Haar. Les V_j sont des sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$ formés des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}[$, $k \in \mathbb{Z}$ est une fonction constante. La fonction g de V_0 est alors la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$.

2/ Un second exemple d'analyse multirésolution est celle venant de suites emboitées de fonctions splines d'ordre r, $r \in \mathbb{N}^*$ associées à des rafinements de maillages. Dans ce cas, les V_j sont des sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$ formés des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à chaque intervalle $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}[$, $k \in \mathbb{Z}$ est un polynôme de dégré $\leq r$.

Un choix possible de la fonction g de V_0 est fourni par le produit de convolution $g = \chi * \chi * \cdots * \chi$, $(r+1)$ fois, où χ est le créneau centré en 0 de longueur 1.

Pour beaucoup d'applications, on souhaite avoir une approximation régulière, alors , on augmente simultanément le dégré des polynômes et la régularité globale de l'approximant en choisissant r grand.

3/ Un troisième exmple est l'analyse multirésolution de Shanon. Ici, V_0 est le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ formé de fonctions dont la transformée de Fourier est portée par l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. La fonction g est alors $g(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$ ($\hat{g} = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$) et on montre [69] que les $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de V_0.

Cet exemple ne conduit pas à une analyse multirésolution régulière, car la fonction g n'a pas la décroissance nécessaire.

4/ Analyse multirésolution dite de Littlewood-Paley : Cet exemple est une correction de l'exemple 3/. V_0 est défini de sorte que la fonction g appartienne à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions à décroissance rapide.

On part d'une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, réelle paire, telle que

$$\begin{cases} \theta(\xi) = 1, & si \quad \xi \in \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \\ \theta(\xi) = 0, & si \quad \xi \in \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},+\infty\right[\\ \theta^2(\xi) + \theta^2(\xi-1) = 1, & si \quad \xi \in [0,1] \end{cases}$$

On construit alors [71] l'analyse multirésolution à partir de θ; et la fonction g est définie telle que $\hat{g} = \theta$, ie, $g = \mathcal{F}^{-1}\theta$ où $\mathcal{F}^{-1}$ est la transformée de Fourier inverse (cf. annexe 1).

C'est cette analyse multirésolution qui conduit à l'ondelette C^∞ de Meyer.

1.3.2.2.*b* **Recherche d'une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$**

Soit W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} : $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. D'après les propriétés *i/,ii/* et *iii/* de la définition d'une analyse multirésolution (cf. section 1.2.2.*b*), les espaces W_j vérifient

- $f(x) \in W_0 \Longleftrightarrow f(2^j x) \in W_j, \quad j \in \mathbb{Z}$
- $f \in W_0 \Longleftrightarrow \tau_k f \in W_0, \quad k \in \mathbb{Z}$
- W_j est orthogonal à $W_{j'}$ pour $j \neq j'$

et $\quad L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$

Pour trouver une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit pour chaque j, de trouver une base orthonormée de W_j pour, en les rassemblant, trouver la base cherchée de $L^2(\mathbb{R})$.

Le problème revient donc à chercher une fonction $\psi \in W_0$ telle que les fonctions $\{\tau_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de W_0. Pour obtenir une base orthonormée de W_0, on commence par trouver une fonction $\varphi \in V_0$, telle que les $\{\tau_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_0. Ainsi, à l'aide de la fonction φ, on détermine ψ telles que les $\{\tau_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de W_0.

On va donc chercher une fonction φ telle $\Big(\varphi(x-k)\Big)_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0. Pour calculer φ, on orthonormalise la base $\Big(g(x-k)\Big)_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0. Pour cela, on a le résultat suivant (S. Mallat [61], Y. Meyer [69]).

Théorème 1.2. *: La fonction φ définie par*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\xi + k)|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{g}(\xi) \tag{1.5}$$

est telle que les fonctions $\{\tau_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_0.

La condition d'orthogonalité des $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, qui s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(x-k)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-2i\pi k\xi} d\xi = \delta_{0k}$$

est équivalente à la propriété

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1$$

(on applique la formule de Poisson donnée en annexe 1).

Le théorème 1.2 montre qu'une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est complètement caractérisée par la fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ définie à partir de la fonction g de V_0 et telle que la famille $\left(2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_j, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Cette fonction φ est appelée "fonction d'échelle" (S. Mallat) ou "père des ondelettes" (Y. Meyer).

Nous allons à présent introduire la fonction H qui joue un rôle important dans la construction de la fonction $\psi \in W_0$ que nous cherchons. On montre le résultat suivant (S. Mallat [61]) :

Proposition 1.1. *Soit φ la fonction de (1.5) . Il existe une fonction $H \in L^2_p(0,1)$ vérifiant pour tout ξ réel :*

$$\hat{\varphi}(2\xi) = H(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

$$|H(\xi)|^2 + \left|H(\xi + \frac{1}{2})\right|^2 = 1 \tag{1.6}$$

Ce résultat donne donc une caractérisation pratique de la transformée de Fourier de la fonction d'échelle φ. On montre également [61] la proposition suivante qui donne des conditions nécessaires sur ψ.

Proposition 1.2. *Si ψ existe alors il existe aussi une fonction $G \in L^2_p(0,1)$ vérifiant pour tout ξ réel :*

i/

$$\hat{\psi}(2\xi) = G(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \tag{1.7}$$

ii/

$$|G(\xi)|^2 + \left|G(\xi + \frac{1}{2})\right|^2 = 1 \tag{1.8}$$

iii/

$$H(\xi)\overline{G}(\xi) + H(\xi + \frac{1}{2})\overline{G}(\xi + \frac{1}{2}) = 0 \tag{1.9}$$

- **Calcul explicite de l'ondelette ψ**

Pour trouver ψ il suffit donc, en utilisant (1.7), de trouver $G \in L^2_p(0,1)$ qui doit vérifier (1.8) et (1.9). Les conditions (1.6), (1.8) et (1.9) se résument à : trouver $G \in L^2_p(0,1)$ telle que la matrice

$$\begin{bmatrix} H(\xi) & G(\xi) \\ H(\xi + \frac{1}{2}) & G(\xi + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

soit unitaire.

Un choix possible de G est :

$$G(\xi) = e^{-2i\pi\xi}\overline{H}(\xi + \frac{1}{2}) \tag{1.10}$$

On montre [61] que la formule (1.10) fournit la relation suivante qui est une relation entre les coefficients de Fourier h_k et g_k de H et G.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad g_k = (-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k} = (-1)^{1-k}h_{1-k}$$

car les h_k sont réels.

ψ est alors définie en (1.7) par sa transformée de Fourier et on a le résultat suivant (Mallat [61], Meyer[69]) :

Théorème 1.3. *La fonction ψ déduite de (1.7) et (1.10) est telle que les $\{\tau_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de W_0 , et les $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.*

Disposant ainsi d'une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, le signal f se décompose alors en

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(f,\psi_{jk})\psi_{jk} \tag{1.11}$$

Ainsi les fonctions ψ_{jk} permettent de caractériser, à chaque échelle j, l'information sur les détails nécessaire pour passer d'un niveau d'approximation donné (V_j) à l'approximation de résolution deux fois plus fine $(V_{j+1} = V_j \oplus W_j)$. Notons que cette information peut être localisée puisque les fonctions $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx - k)$ et $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx - k)$ sont concentrées autour du point $2^{-j}k$.

1.3.2.2.c **Remarques** :

a/ Dans ses études initiales, Y. Meyer [69] a imposé à la fonction d'échelle φ la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \hat{\varphi}(0) = 1$$

Dans la pratique, la décomposition la plus couramment utilisée est

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j$$

et la série d'ondelettes de f s'écrit :

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(f,\varphi_{0k})\varphi_{0k} + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(f,\psi_{jk})\psi_{jk}$$

b/ Il est important de remarquer que les coefficients d'ondelettes $C_{jk} = (f, \psi_{jk})$ ne sont pas invariants par translation.

En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ un signal et $\tau_{k_0} f$ la translatée de f au point $k_0 \in \mathbb{Z}$, ie, $\tau_{k_0} f(x) = f(x - k_0)$. On a

$$\begin{aligned} C_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \tau_{k_0} f(x) \psi(2^j x - k) dx &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x - k_0) \psi(2^j x - k) dx \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - (k - 2^j k_0)) dx \\ &= C_{j(k-2^j k_0)} \end{aligned}$$

Cette non invariance par translation est un inconvénient pour l'analyse en ondelelettes orthogonales des signaux évolutifs.

1.3.2.3 Calcul pratique de quelques ondelettes orthogonales

Nous présentons ici le calcul pratique des ondelettes splines et des ondelettes à support compact, qui sont actuellement les ondelettes les plus couramment utilisées dans le cadre de la transformée en ondelettes discrète.

1.3.2.3.*a* Ondelettes splines

Les ondelettes splines ont été construites en 1987 indépendamment par P. G. Lémarié [58] et G. Battle [6]. Elles sont à décroissance exponnentielle et sont donc numériquement à support compact. Pour ces ondelettes, l'analyse multirésolution considérée est celle de l'exemple 2/ de la section 1.3.2.2.*a*, ie, celle construite à partir des fonctions splines d'un dégré r impair, c'est à dire des fonctions de classe C^{r-1}, et qui sont des polynômes de dégré $\leq r$ par morceaux.

$$V_j = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f \in C^{r-1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f_{|[k2^{-j},(k+1)2^{-j}[} \text{ est un polynôme de dégré} \leq r \Big\}$$

- **Ondelette spline de dégré 1**

On part de l'espace V_0 défini par

$$V_0 = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f \in C^0(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f_{|[k,(k+1)[} \text{ est un polynôme de dégré} \leq 1 \Big\}$$

La fonction g de V_0 que l'on considère est définie par le produit de convolution $g = \chi * \chi$ où χ est le créneau centré en 0 de longeur 1. On a

$$\hat{g}(\xi) = \Big(\hat{\chi}(\xi)\Big)^2 = \Big(\frac{sin\pi\xi}{\pi\xi}\Big)^2$$

et d'après la formule (1.5) la fonction d'échelle φ est définie par sa transformée de Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\hat{g}(\xi+k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Puisque

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\hat{g}(\xi+k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = sin^2(\pi\xi)\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(\pi\xi+k\pi)^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et que nous avons (annexe 1) :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{\pi\xi+k\pi} = \frac{cos\pi\xi}{sin\pi\xi} \tag{1.12}$$

alors en dérivant 3 fois membre à membre (1.12), on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(\pi\xi+k\pi)^4} = \frac{1-\frac{2}{3}sin^2\pi\xi}{sin^4\pi\xi}$$

Ainsi on a :

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\hat{g}(\xi+k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = sin^2(\pi\xi)\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(\pi\xi+k\pi)^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-\frac{2}{3}sin^2\pi\xi}$$

D'où

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\left(\frac{sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{2}{3}sin^2\pi\xi}} = \frac{sin^2\pi\xi}{(\pi\xi)^2\sqrt{1-\frac{2}{3}sin^2\pi\xi}}$$

De la proposition 1.1, nous obtenons que

$$H(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)} = \frac{cos^2(\pi\xi)\sqrt{3-2sin^2\pi\xi}}{\sqrt{3-2sin^2 2\pi\xi}}$$

et (1.10) donne,

$$G(\xi) = e^{-2i\pi\xi}\bar{H}(\xi+\frac{1}{2}) = \frac{e^{-2i\pi\xi}sin^2(\pi\xi)\sqrt{3-2cos^2\pi\xi}}{\sqrt{3-2sin^2 2\pi\xi}}$$

Finalement, (1.7) nous permet d'obtenir l'ondelette ψ par sa transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(\xi) = G(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$$

et un calcul direct donne

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{3}{2\sqrt{6}}.e^{-i\pi\xi}\left(\frac{sin\frac{\pi\xi}{2}}{\frac{\pi\xi}{2}}\right)^2\left(\frac{1-cos\pi\xi}{2+cos\pi\xi}\right)\sqrt{\frac{7-cos2\pi\xi}{2+cos2\pi\xi}}$$

- **Ondelette spline de dégré 3**

Dans ce cas V_0 est le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$V_0 = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}); f \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f_{|[k,(k+1)[} \text{ est un polynôme de dégré} \leq 3\right\}$$

La fonction g de V_0 que l'on utilise est alors définie par $g = \chi * \chi * \chi * \chi$. On a

$$\hat{g}(\xi) = (\hat{\chi}(\xi))^4 = \left(\frac{sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^4$$

En suivant la même démarche dans la construction de l'ondelette spline de dégré 1, on obtient

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}|\hat{g}(\xi+k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}|\hat{g}(\xi+k)|^2 = sin^8(\pi\xi)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{\left(\pi\xi+k\pi\right)^8}$$

et en dérivant 7 fois membre à membre l'égalité (1.12), on obtient que

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{(\pi\xi+k\pi)^8} = \frac{P_3(sin^2\pi\xi)}{sin^8\pi\xi}$$

où $P_3(x)$ est un polynôme de dégré 3 défini par

$$P_3(x) = \frac{1}{315}(315 - 420x + 126x^2 - 4x^3)$$

(Un algorithme de calcul des coefficients de $P_3(x)$ est décrit dans [77].)

D'où

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\left(\frac{sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^4}{\sqrt{P_3(sin^2\pi\xi)}} = \frac{1}{(\pi\xi)^4}.\frac{sin^4\pi\xi}{\sqrt{P_3(sin^2\pi\xi)}}$$

Ainsi

$$H(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)} = cos^4(\pi\xi)\sqrt{\frac{P_3(sin^2\pi\xi)}{P_3(sin^2 2\pi\xi)}}$$

Par suite

$$G(\xi) = e^{-2i\pi\xi}\bar{H}(\xi + \frac{1}{2}) = e^{-2i\pi\xi}.sin^4(\pi\xi).\sqrt{\frac{P_3(cos^2\pi\xi)}{P_3(sin^2 2\pi\xi)}}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= H(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) \\ &= e^{-i\pi\xi} \cdot \frac{sin^8 \frac{\pi\xi}{2}}{\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^4} \cdot \frac{\sqrt{P_3(cos^2 \frac{\pi\xi}{2})}}{\sqrt{P_3(sin^2 \frac{\pi\xi}{2})P_3(sin^2\pi\xi)}}\end{aligned}$$

Nous montrons à la figure *Fig.*1.8 les différentes fonctions φ et ψ que nous venons de calculer. A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous à la figure *Fig.*1.7 les filtres H et G dans le cas de l'ondelette spline de dégré 3.

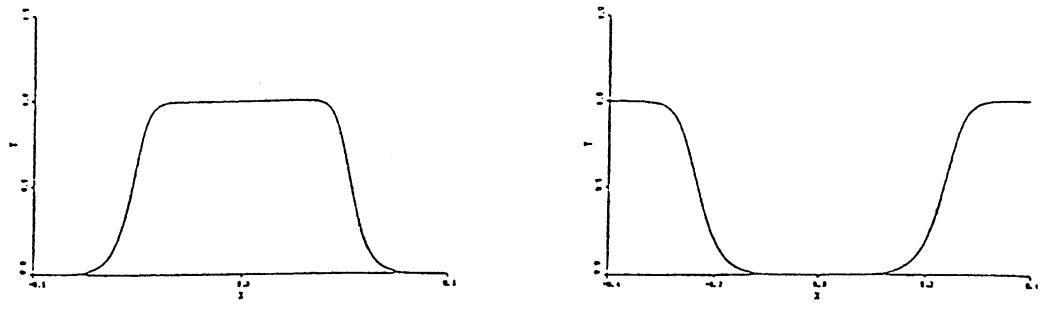


Fig. 1.7 : Filtres H et G associés à l'ondelette spline de dégré 3. A gauche, le filtre H passe-bas. A droite, le filtre G passe-haut.

Toutes les ondelettes analysantes ψ (ondelette C^∞ de Meyer, ondelettes splines) construites à partir d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ sont centrées en $x = \frac{1}{2}$ et les $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ sont centrées en $x_k = 2^{-j}(k + \frac{1}{2})$.

Par ailleurs, elles sont toutes à décroissance rapide ou exponentielle. Ceci met en évidence que le procédé de construction de bases orthonormales d'ondelettes à partir d'une analyse multirésolution ne conduit pas à des ondelettes à support compact.

Dans la démarche suivie pour construire les fonctions φ et ψ à partir d'une analyse multirésolution, il apparaît que cette construction implique l'existence de deux fonctions H et G de $L^2_p(0,1)$ vérifiant certaines propriétés. En traitement de signal, H et G sont interprétés respectivement comme des fonctions de transfert d'un filtre discret passe-bas h et d'un filtre discret passe-haut g.

Le concept d'analyse multirésolution est en fait directement lié à la théorie des filtres miroirs en quadratures (cf. annexe 3) introduite par Esteban et Galand [24] pour le traitement numérique et le codage du signal. Le rapport entre bases orthonormées d'ondelettes issues d'une analyse multirésolution et filtres miroirs en quadratures est décrit de façon détaillée dans [13].

I. Daubechies a astucieusement exploité ce rapport pour exhiber une méthode typique de construction de bases orthonormées d'ondelettes et cette méthode conduit effectivement à des ondelettes à support compact.

1.3.2.3.*b* **Ondelettes à support compact**

Dans le procédé de construction d'une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ à partir d'une analyse multirésolution, l'élément essentiel est la fonction d'échelle φ de V_0 telle que $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0; laquelle fonction permet, par la suite, de construire l'ondelette analysante ψ.

La compréhension du rapport ondelettes et filtres discrets a permis à I. Daubechies [21], par simple constatation que les ondelettes ont des filtres discrets associés, de construire des bases orthonormées d'ondelettes à support compact qui se sont révélées adaptées au calcul numérique [8].

Nous exposons ici très brièvement la démarche générale suivie par Daubechies. Pour les détails, nous renvoyons à [21][69][85].

L'idée de base est de construire une fonction filtre $H \in L^2_p(0,1)$ dont la réponse impulsionnelle h est de longueur finie et vérifie les conditions suivantes :

$$i/ \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) = \sqrt{2}$$

$$ii/ \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)h(k-2m) = \delta_{0m}$$

$$iii/ \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^m g(k) = 0, \quad m = 0,1,...,N-1$$

avec $\quad g(k) = (-1)^k h(1-k).$

Ainsi à partir de l'équation suivante dite équation d'échelle

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\varphi(2x-k), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

on cherche une solution φ normalisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$

Par suite, à l'aide de la fonction d'échelle φ ainsi déterminée, l'ondelette analysante ψ est définie par

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k)\varphi(2x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

La transformée de Fourier de (1.13) donne

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) \tag{1.15}$$

où $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-2i\pi k\xi}$ qui est une fonction périodique de période 1. $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\xi)$ où $H(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-2i\pi k\xi}$. En itérant (1.15) aux points $\frac{\xi}{2}$, $\frac{\xi}{4}$, $\cdots$, et du fait que $\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$, on a

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left[\prod_{j=0}^{N} m_0(\frac{\xi}{2^j}) \right] \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^N}) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$$

Remarque *1.1.* La condition *ii/* sur les $h(k)$ est la condition d'orthogonalité des ondelettes; elle se traduit sur la fonction m_0 par

$$|m_0(\xi)|^2 + \left| m_0(\xi + \frac{1}{2}) \right|^2 = 1 \tag{1.16}$$

Quant à la condition *iii/*, elle indique que la fonction ψ a N moments nuls, ie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x)dx = 0, \quad m = 0, \cdots, N-1$$

I. Daubechies [21] a montré que les $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ ainsi construites définissent une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et que les $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ sont la base orthonormée d'ondelettes associée.

La fonction m_0 de $L^2_p(0,1)$ est l'élément essentiel dans cette théorie. Le lemme suivant caractérise toutes les fonctions m_0 vérifiant (1.16).

Lemme 1.1. *(I. Daubechies [21]). Tout polynôme trigonometrique m_0 solution de (1.16) est de la forme*

$$m_0(\xi) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{2i\pi\xi}) \right]^N Q(e^{2i\pi\xi})$$

où $N \geq 1$ est le nombre de moments nuls et où Q est un polynôme tel que

$$|Q(e^{2i\pi\xi})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} sin^{2k}\pi\xi + (sin^{2N}\pi\xi) R(\frac{1}{2} cos\pi\xi)$$

où R est un polynome impair tel que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k + y^N R(\frac{1}{2} - y) \geq 0 \quad pour \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1.17}$$

et

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k + y^N R(\frac{1}{2} - y) \right] < 2^{2(N-1)}, \quad si \quad N \geq 2 \tag{1.18}$$

où

$$-\frac{2}{1-|2x|} \leq R(x) \leq \frac{2}{1+|2x|} \quad pour \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \quad si \quad N = 1 \tag{1.19}$$

Si la suite $h(k)$ est de longueur finie, la fonction φ est à support compact et par conséquent ψ est à support compact. Pour $N = 1$, $m_0(\xi) = \frac{1+e^{2i\pi\xi}}{2}$ et l'ondelette associée est **l'ondelette de Harr**. Dans ce cas $h(0) = h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi = \chi_{[0,1]}$.

Pour $N \geq 2$, I. Daubechies a exhibé une famille spéciale de fonctions m_0 en choisissant $R \equiv 0$.

$$m_{0N}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_N(k) e^{-2i\pi k\xi}$$

A chaque fonction m_{0N} ainsi définie, est associée une base orthonormée d'ondelettes à support compact. On note par φ_N et ψ_N les fonctions φ et ψ correspondant.

$$\varphi_N(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_N(k) \varphi_N(2x-k)$$

On montre [20][63] que $supp(\varphi_N) = [0, 2N-1]$ et que le support de ψ_N définie par

$$\psi_N(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k h_N(1-k) \varphi_N(2x-k)$$

est $[1-N, N]$.

$h_N(k) = 0$ pour $k < 0$ ou pour $k > 2N-1$. N est le nombre de moments nuls de l'ondelette ψ_N tandis que le nombre de coefficients $h_N(k)$ non nuls est $2N$.

Une table des coefficients $h_N(k)$ pour $N = 2, 3, ..., 10$ est donnée dans [21]. Nous montrons cette table en annexe (Annexe 3).

Lorsque N augmente, φ_N et ψ_N déviennent plus régulières et leurs supports grandissent en conséquence. Plus précisement, I. Daubechies a montré que pour $N \geq 2$, φ_N, $\psi_N \in C^{(\mu-\epsilon)N}$ avec $\mu = \frac{\log(\frac{4}{\pi})}{\log 2} \simeq 0.3485$.

- **Calcul pratique de φ_N**

Nous venons de voir que

$$\hat{\varphi}_N(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_{0N}(\frac{\xi}{2^j})$$

Dans la pratique, on peut déterminer $\hat{\varphi}_N(\xi)$ en tronquant le produit infini (par exemple j=10 suffit).

$$\hat{\varphi}_N(\xi) = \prod_{j=1}^{10} m_{0N}(\frac{\xi}{2^j})$$

On peut aussi directement obtenir φ_N [21] dans l'espace physique à l'aide de la définition suivante de récurrence sur η_j

$$\begin{cases} \varphi_N(x) = \lim\limits_{j \to +\infty} \eta_j(x) \\ \eta_j(x) = \sqrt{2} \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}} h_N(m) \eta_{j-1}(2x - m) \\ \eta_0(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} \end{cases}$$

Dans la pratique, 7 itérations suffisent pour avoir φ_N. Une technique pour calculer η_j est décrite dans [22]. La démarche est la suivante :

On part de la suite (a_k^0), $k \in \mathbb{Z}$, définie par

$$a_k^0 = \delta_{0k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et à l'étape j, $j \geq 1$, on calcule la suite (a_n^j), $n \in \mathbb{Z}$ à l'aide de la formule de convolution

$$a_n^j = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_N(n - 2k) a_k^{j-1}$$

Ainsi on associe à la suite $(a_k^j), k \in \mathbb{Z}$ la fonction η_j (à l'échelle j) définie par

$$\eta_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \chi(2^j x - k)$$

Les fonctions φ_N et ψ_N montrées aux figures *Fig.*1.9.*a* et *Fig.*1.9.*a* ont été calculées en 7 itérations par cette méthode.

Contrairement aux ondelettes splines de Lemarié-Battle ou C^∞ de Meyer, les ondelettes à support compact n'admettent pas d'axe de symétrie. L'ondelette de Harr est la seule ondelette à support compact admettant un axe de symétrie.

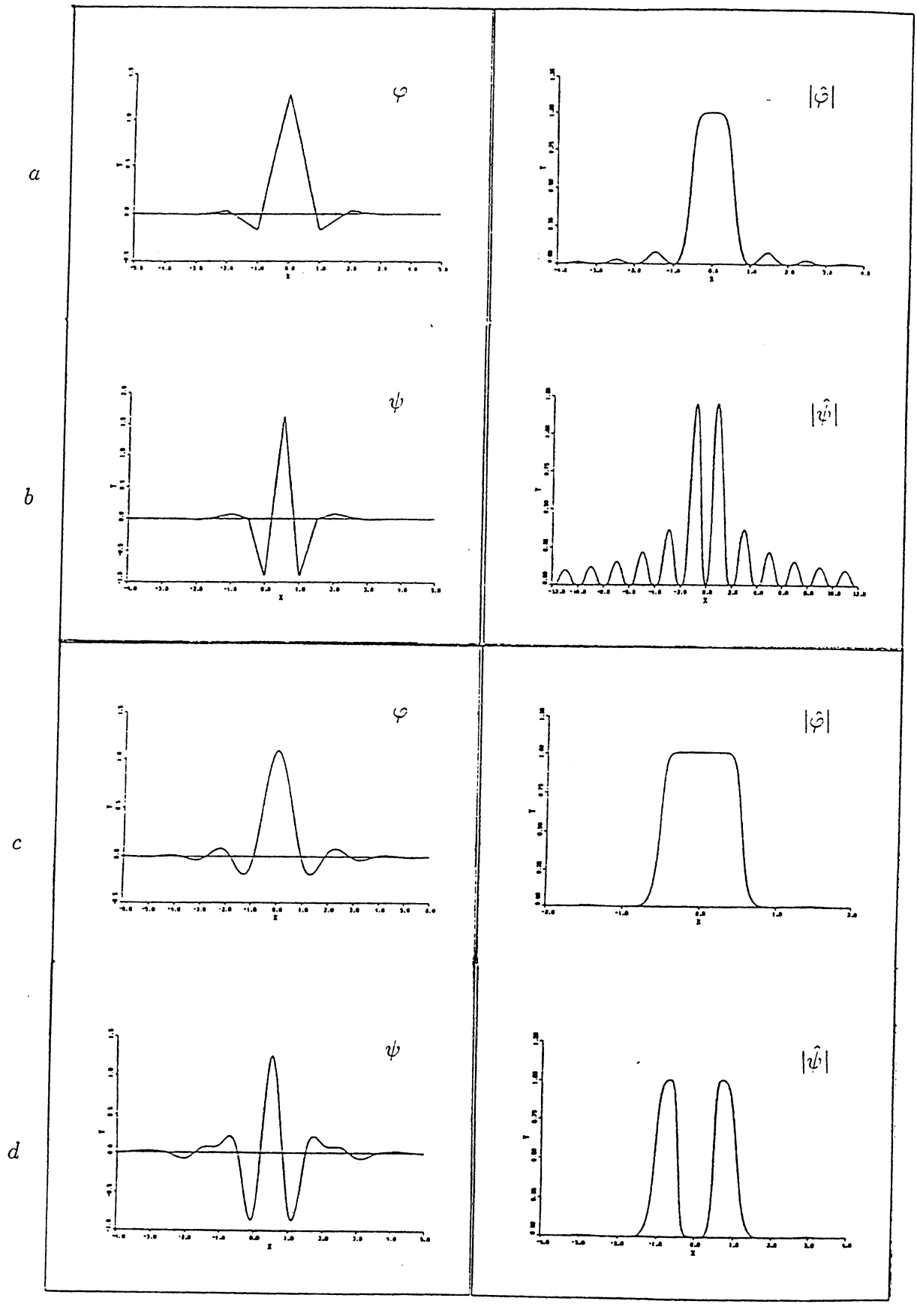


Fig.1.8 : Exemples d'ondelettes othogonales (construites à partir des fonctions splines de dégré 1 et 3). Fonctions d'échelles φ et ondelettes ψ. On représente φ, ψ (à gauche) et $|\hat{\varphi}|$, $|\hat{\psi}|$ (à droite). (a) Fonction d'échelle φ (spline de degré 1). (b) Ondelette ψ (spline de dégré 1). (c) Fonction d'échelle φ (spline de degré 3). (d) Ondelette ψ (spline de dégré 3).

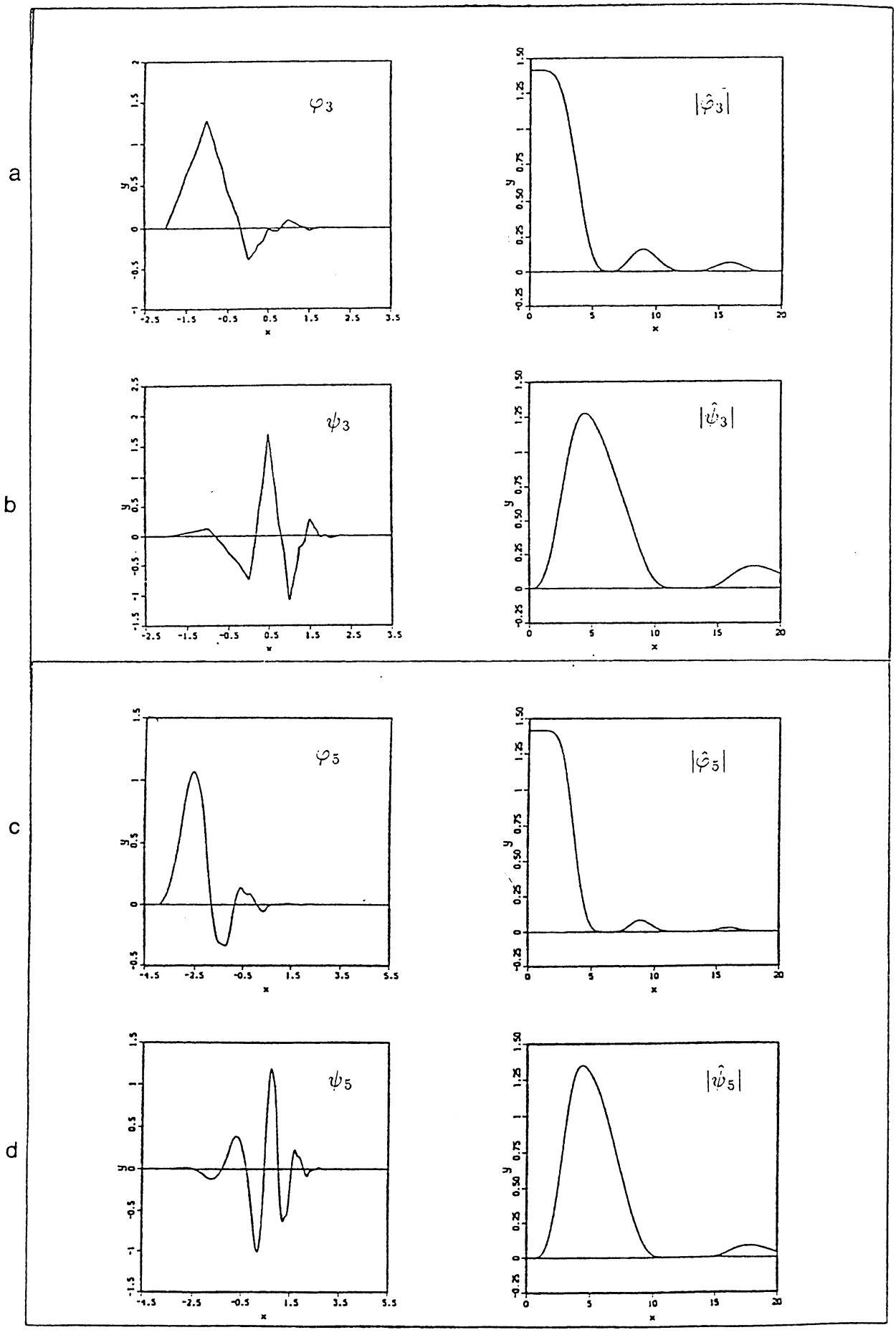


Fig.1.9.*a* : Exemples d'ondelettes orthogonales à support compact. Fonctions d'échelle φ_N et ondelettes ψ_N (N est le nombre de moments nuls de l'ondelette). On représente φ_N, ψ_N (à gauche) et $|\hat{\varphi}_N|$, $|\hat{\psi}_N|$ (à droite). (*a*) Fonction d'échelle φ_3. (*b*) Ondelette ψ_3. (*c*) Fonction d'échelle φ_5. (*d*) Ondelette ψ_5.

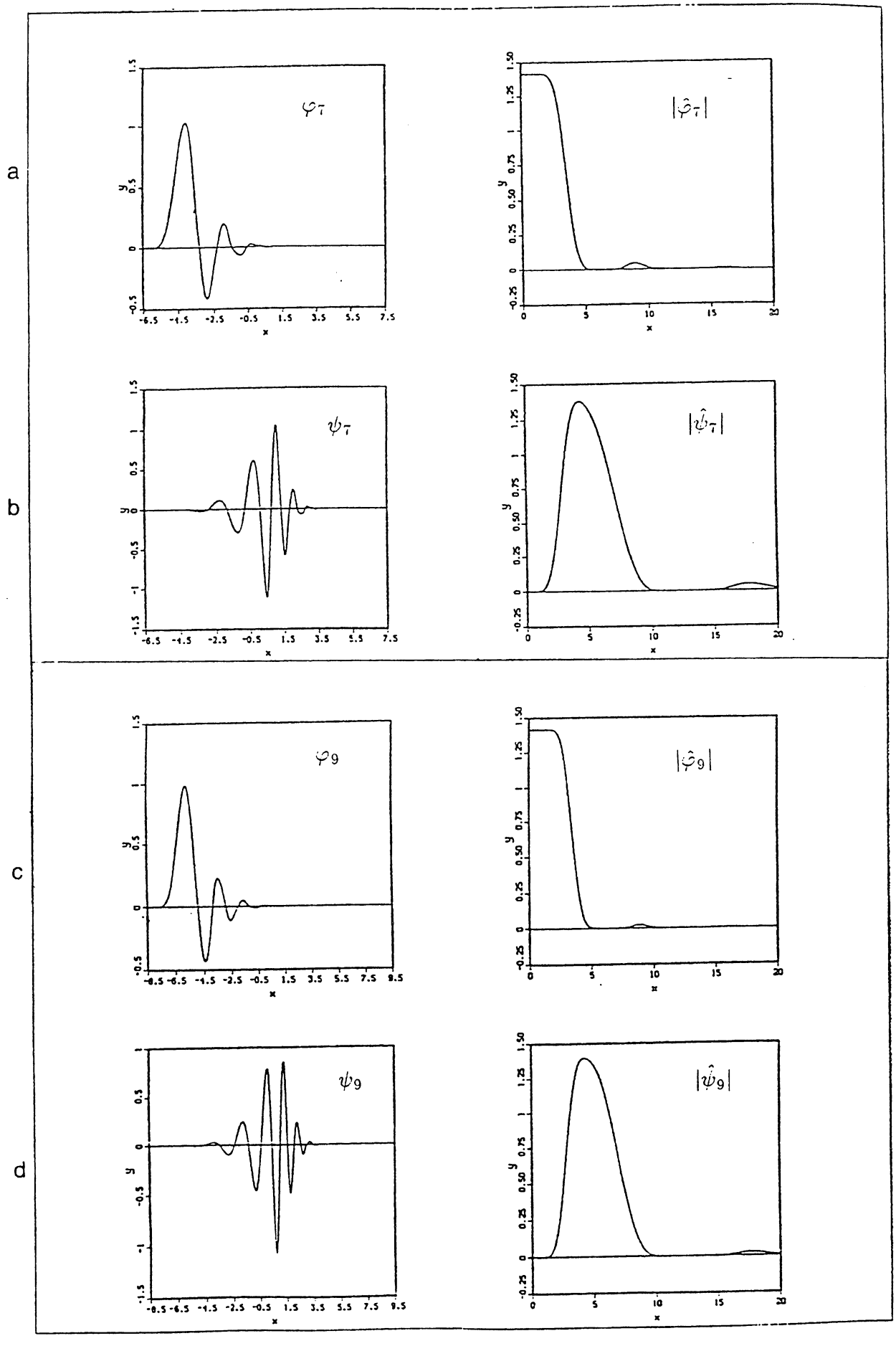


Fig.1.9.*b* : Exemples d'ondelettes orthogonales à support compact. Fonctions d'échelle φ_N et ondelettes ψ_N (N est le nombre de moments nuls de l'ondelette). On représente φ_N, ψ_N (*a*) et (*b*) $|\hat{\varphi}_7|$, $|\hat{\psi}_7|$ (*c*) Fonction d'échelle φ_9, (*d*) Ondelette ψ_9, (*c*) Fonction

1.3.3 Extension de la transformée en ondelettes en dimension deux

La transformée en ondelettes peut être généralisée à plusieurs dimensions [69][73]. Mais pour les besoins de notre application (analyse des signaux océaniques turbulents bidimensionnels), nous nous limitons au cas de $\mathbb{R}^2$. Le signal à analyser est à présent une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ d'énergie finie.

1.3.3.1 Transformée en ondelettes continue bidimensionnelle

R. Murenzi [73], utilisant la rotation en plus de la dilatation et translation, étendit la transformée en ondelettes continue à $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nous nous intéressons ici au cas de la dimension deux.

Comme en dimension un, on part d'une fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

i/ (condition d'admissibilité)

$$c_\psi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi,\eta)\right|^2}{\xi^2+\eta^2} d\xi d\eta < +\infty \tag{1.20}$$

ψ est l'ondelette analysante et la condition (1.20) signifie que $\hat{\psi}(0,0) = 0$.

On définit alors les ondelettes $\psi_{(a,r,\vec{b})}$, avec $\vec{b} = (b,b') \in \mathbb{R}^2$, par

$$\psi_{(a,r,\vec{b})}(x,y) = \frac{1}{a}\psi\left(r^{-1}\left(\frac{x-b}{a}, \frac{y-b'}{a}\right)\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^2$$

où a,r et $\vec{b}$ sont respectivement le paramètre de dilatation, l'opérateur de rotation bidimensionnelle et le vecteur de translation. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on prend

$$r = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

θ étant l'angle de rotation.

La rotation et la condition d'admissibilité (1.20) autorisent la conservation de l'énergie et la reconstruction du signal.

Pour tout signal $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, les coefficients d'ondelettes sont définis par

$$C_f(a,r,\vec{b}) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\overline{\psi}\left(r^{-1}\left(\frac{x-b}{a}, \frac{y-b'}{a}\right)\right) dxdy$$

On montre [74] :

a/ La formule de conservation de l'énergie

$$\int_0^{+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} \left|C_f(a,r,\vec{b})\right|^2 dadr\frac{dbdb'}{a^3} = c_\psi \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|^2 dxdy$$

où dr est la mesure invariante sur le groupe des rotations.

b/ La formule de reconstruction est définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{c_\psi}\int_0^{+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} C_f(a,r,\vec{b})\psi_{(a,r,\vec{b})}(x,y)dadr\frac{dbdb'}{a^3}$$

1.3.3.1.*a* Exemples d'ondelettes analysantes en dimension deux

- **Ondelette de Morlet bidimensionnelle**

L'ondelette de Morlet bidimensionnelle est définie par

$$\psi(x,y) = e^{i(\omega_0 x+\omega_0' y)}e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$$

et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}(\xi,\eta) = 2\pi e^{-[\frac{(2\pi\xi-\omega_0)^2+(2\pi\eta-\omega_0')^2}{2}]}$$

Dans la pratique, $\vec{\omega_0} = (\omega_0,\omega_0')$ est choisi de façon que la condition d'admissibilité (1.20) soit vérifiée, ie, que $\hat{\psi}(0,0) = 0$. Par exemple dans [73], on choisit $\vec{\omega_0}$ tel que $|\vec{\omega_0}| = \pi\sqrt{\frac{2}{log(2)}}$

- **Ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle**

L'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle est définie par

$$\psi(x,y) = \Delta g(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}g(x,y)$$

avec $g(x,y) = e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$

Nous avons donc :

$$\psi(x,y) = (2-(x^2+y^2))e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$$

Ici, ψ ne dépend que de $r = \sqrt{x^2+y^2}$; on dit alors que ψ est radiale.

Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}(\xi,\eta) = 8\pi^3(\xi^2+\eta^2)e^{-2\pi^2(\xi^2+\eta^2)}$$

- **Ondelette $8^{\text{ème}}$ dérivée de gaussienne bidimensionnelle**

La $8^{\text{ème}}$ dérivée de gaussienne bidimensionnelle est définie par

$$\psi(x,y) = \Delta^4 g(x,y) \qquad \text{avec} \quad g(x,y) = e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$$

Ainsi

$$\psi(x,y) = \left[(x^8+y^8) - 28(x^6+y^6) + 210(x^4+y^4) - 410(x^2+y^2) + 210\right] e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$$

et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}(\xi,\eta) = (2\pi)^9(\xi^2+\eta^2)^4 e^{-2\pi^2(\xi^2+\eta^2)}$$

1.3.3.1.*b* Calcul explicite de $C_f(a,r,\vec{b})$ pour certains signaux simples

- **Exemple 1**

Soit $s(\vec{t}) = sin(2\pi\vec{\omega}\vec{t})$. Alors $\hat{s}(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2i}(\delta_{\vec{\omega}} - \delta_{-\vec{\omega}})$.
Nous avons

$$\begin{aligned} C_s(a,r,\vec{b}) &= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^2} s(\vec{t})\overline{\psi}\left(\frac{r^{-1}(\vec{t}-\vec{b})}{a}\right)d\vec{t} \\ &= a\int_{\mathbb{R}^2} \hat{s}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\lambda})e^{2i\pi\vec{\lambda}\vec{b}}d\vec{\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} C_s(a,r,\vec{b}) &= a\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2i}(\delta_{\vec{\omega}} - \delta_{-\vec{\omega}})\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\lambda})e^{2i\pi\vec{\lambda}\vec{b}}d\vec{\lambda} \\ &= \frac{a}{2i}\left[\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})e^{2i\pi\vec{\omega}\vec{b}} - \overline{\hat{\psi}}(-ar^{-1}\vec{\omega})e^{-2i\pi\vec{\omega}\vec{b}}\right] \end{aligned}$$

Pour $\hat{\psi}$ réelle

$$\begin{aligned} C_s(a,r,\vec{b}) = \frac{a}{2}\big[&sin(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\left(\hat{\psi}(ar^{-1}\vec{\omega}) + \hat{\psi}(-ar^{-1}\vec{\omega})\right) \\ &- icos(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\left(\hat{\psi}(ar^{-1}\vec{\omega}) - \hat{\psi}(-ar^{-1}\vec{\omega})\right)\big] \end{aligned}$$

et si $\hat{\psi}$ est paire

$$C_s(a,r,\vec{b}) = a.sin(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})$$

- **Exemple 2**

Soit $g(\vec{t}) = cos(2\pi\vec{\omega}\vec{t})$. Alors $\hat{g}(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2}(\delta_{\vec{\omega}} + \delta_{-\vec{\omega}})$.
Par le même calcul que précédemment, on a :

Pour $\hat{\psi}$ réelle

$$C_g(a,r,\vec{b}) = \frac{a}{2}\big[cos(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\big(\hat{\psi}(ar^{-1}\vec{\omega}) + \hat{\psi}(-ar^{-1}\vec{\omega})\big) + isin(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\big(\hat{\psi}(ar^{-1}\vec{\omega}) - \hat{\psi}(-ar^{-1}\vec{\omega})\big)\big]$$

Pour $\hat{\psi}$ paire

$$C_g(a,r,\vec{b}) = a.cos(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})$$

- **Exemple 3**

Considérons le signal $h(\vec{t}) = e^{2i\pi\vec{\omega}\vec{t}}$, où $\hat{h}(\vec{\lambda}) = \delta_{\vec{\omega}}$.
On a de même

$$C_h(a,r,\vec{b}) = a\big[\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})cos(2\pi\vec{\omega}\vec{b}) + i\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})sin(2\pi\vec{\omega}\vec{b})\big]$$

1.3.3.2 Bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$

On peut [69] facilement étendre la construction d'une base orthonormée d'ondelettes à $L^2(\mathbb{R}^2)$ grâce à la notion d'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est, par définition, la donnée d'une suite croissante $(\mathcal{V}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les extensions en dimension deux des propriétés $i/, ii/, iii/$ et $iv/$ de la définition 1.2 de la section 1.3.2.2.

La technique la plus couramment utilisée pour généraliser les bases d'ondelettes dans le cas bidimensionnel est le produit tensoriel. Dans ce cas, on part d'une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$; et on définit $\mathcal{V}_j$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ comme produit tensoriel de deux sous-espaces identiques V_j de $L^2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$$

On montre alors [62][69] que la suite d'espaces $(\mathcal{V}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ ainsi définie forme une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Une telle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est appelée analyse multirésolution séparable. La fonction d'échelle ϕ qui engendre l'analyse multirésolution $\mathcal{V}_j$ est donnée par :

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

où φ est la fonction d'échelle associée à l'analyse multirésolution (V_j) de $L^2(\mathbb{R})$.

Comme dans le cas monodimensionnel, le coefficient d'ondelettes du signal est donné par la projection sur le sous-espace supplémentaire $\mathcal{W}_j$ de $\mathcal{V}_j$ dans $\mathcal{V}_{j+1}$. Or les propriétés du produit tensoriel conduisent à

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_j &= (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \\ &= \mathcal{W}_j^1 \oplus \mathcal{W}_j^2 \oplus \mathcal{W}_j^3\end{aligned}$$

Une base orthonormée de $\mathcal{W}_j$ est par conséquent formée par des dilatés et translatés de trois fonctions ondelettes. Dans le cas d'une analyse multirésolution séparable, on utilise donc trois ondelettes pour caractériser les détails nécessaires pour passer d'une échelle à la suivante.

Le théorème suivant est une extension du théorème 1.3 de la section 1.3.2.2.*b* et permet d'obtenir une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On montre [62][69]

Théorème 1.4. *: Soit $\mathcal{V}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, une analyse multirésolution séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$ associée à la fonction d'échelle $\phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ et ψ l'ondelette monodimensionnelle associée à φ.*
Alors les trois ondelettes ψ^1,ψ^2 et ψ^3 définies par : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi^1(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$$

$$\psi^2(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$$

$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

sont telles que les fonctions $\left(\psi^1_{jkl}, \psi^2_{jkl}, \psi^3_{jkl}\right)_{(j,k,l)\in\mathbb{Z}^3}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$, avec $\psi^n_{jkl}(x,y) = 2^j\psi^n(2^jx-k, 2^jy-l)$, $n = 1,2,3$.

Les coefficients d'ondelettes du signal $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sont alors donnés par les trois coefficients d'ondelettes élémentaires

$$C^1_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\psi^1(2^jx-k, 2^jy-l)dxdy$$

$$C^2_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\psi^2(2^jx-k, 2^jy-l)dxdy$$

$$C^3_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\psi^3(2^jx-k, 2^jy-l)dxdy$$

Ainsi, on montre que le signal peut être reconstruit par :

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(C^1_{jkl}\psi^1_{jkl} + C^2_{jkl}\psi^2_{jkl} + C^3_{jkl}\psi^3_{jkl}\right)$$

et qu'on a la formule de conservation de l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|^2dxdy=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(|C_{jkl}^1|^2+|C_{jkl}^2|^2+|C_{jkl}^3|^2\right)$$

- **Remarque**

a/ ψ^1, ondelette verticale, sert à détecter les bords horizontaux dans l'image, ψ^2, ondelette horizontale, détecte les bords verticaux et ψ^3, ondelette diagonale, détecte les coins.

b/ Cette méthode d'analyse multirésolution séparable nécessite trois ondelettes pour extraire l'information inter-échelles et présente la caractéristique de privilégier nettement la détection des structures horizontales et verticales par rapport aux autres directions.

Pour effectuer une analyse plus isotrope permettant une meilleure résolution angulaire, J. C. Feauveau [28] a utilisé une seule ondelette, non sélective à l'orientation. D'un point de vue théorique, l'analyse 2-D développée par J. C. Feauveau est très proche de l'analyse 1-D proposée par Mallat [61]. Pour les détails, nous renvoyons à [28][29].

Chapitre 2

Sur l'étude de la régularité et de décroissance à l'infini des ondelettes complexes progressives issues d'ondelettes réelles

2.1 Introduction

Dans le cadre de l'utilisation de la transformée en ondelettes continue, nous avons vu à la section 1.3.1.3 que le choix courant de l'ondelette analysante pour assurer la condition d'admissibilité (théorème 1.1 de la section 1.3.1.2), est d'utiliser une ondelette de l'espace de Hardy

$$H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : supp(\hat{f}) \subset [0, +\infty[\}$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit sur $L^2(\mathbb{R})$.

J. Morlet et A. Grossmann [41] ont utilisé des ondelettes complexes ψ appartenant à $H^2(\mathbb{R})$. De telles ondelettes sont appélées ondelettes progressives (cf. section 1.3.1.3) et conduisent à une meilleure qualité de l'analyse.

Dans la pratique, il peut arriver que l'ondelette analysante soit réelle. Dans ce cas, pour des besoins d'analyse, la technique consiste à transformer l'ondelette réelle en une ondelette complexe de l'espace de Hardy.

Nous proposons ici une étude des propriétés de régularité et de décroissance à l'infini de telles ondelettes complexes progressives obtenues à partir d'ondelettes réelles.

2.2 Motivation de l'utilisation des ondelettes complexes progressives

Pour certaines applications en traitement du signal, il peut être particulièrement intéressant [54][55] d'obtenir le module et la phase des coefficients d'ondelettes qui donnent des informations complémentaires sur le signal. Or dans le cadre de l'utilisation de la transformée en ondelettes continue, pour un signal réel f, si on prend une ondelette mère réelle (par exemple, l'ondelette chapeau mexicain) tous les coefficients d'ondelettes $C_f(a, b)$ sont réels. Pour avoir des coefficients complexes, dans la pratique, on part de l'ondelette réelle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on construit une autre ondelette que nous notons ψ_1, déduite de ψ en mettant à zéro les valeurs de $\hat{\psi}(\xi)$ pour $\xi < 0$.

$$\hat{\psi}_1(\lambda) = \begin{cases} \hat{\psi}(\xi) & \text{si} \quad \xi \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement

$$\hat{\psi}_1(\xi) = u(\xi) \cdot \hat{\psi}(\xi)$$

où

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(u est l'échelon unité de Heaviside).

Le coefficient d'ondelettes $C_f(a,b)$ obtenu à partir de ψ_1 est dans ce cas un nombre complexe. La phase et le module des coefficients peuvent alors être facilement obtenus pour tout paramètre d'échelle a et de position b donnés.

Une autre raison d'utilser ψ_1 plutôt que ψ pourrait venir de la situation suivante. Regardons ce que donne une singularité simple en calculant par exemple les coefficients d'ondelettes $C_u(a,b)$ de l'échelon unité de Heaviside (qui existe puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Nous avons

$$C_u(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\bar{\psi}(\frac{x-b}{a})dx$$

Prenons par exemple pour ψ le chapeau mexicain, ie, $\psi(x) = g^{(2)}(x)$ avec $g(x) = e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0.$

$$C_u(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}(\frac{x-b}{a})dx = \sqrt{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} \bar{\psi}(x)dx$$
$$= \sqrt{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} g''(x)dx = -\sqrt{a}g'(-\frac{b}{a})$$

Ainsi contrairement à l'idée que les coefficients d'ondelettes sont très grands aux points de singularités du signal analysé, nous avons ici des coefficients d'ondelettes $C_u(a,0)$ qui sont nuls ($b = 0$ est point de singularité de u).

Par contre

$$C_u^1(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}_1(\frac{x-b}{a})dx = \sqrt{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} \bar{\psi}_1(x)dx$$

Comme $\psi = g'' \qquad \hat{\psi} = \widehat{g''} = -4\pi^2\xi^2\hat{g}$

Du fait que

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + i\int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\xi)sin(2\pi\xi x)dx$$

(le calcul est explicité à la section suivante)
il vient que

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}g''(x) - 4i\pi^2 \int_0^{+\infty} \xi^2\hat{g}(\xi)sin(2\pi\xi x)dx$$

D'où

$$C_u^1(a,b) = \frac{\sqrt{a}}{2} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} g''(x) - i4\pi^2\sqrt{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \xi^2\hat{g}(\xi)sin(2\pi\xi x)d\xi dx$$
$$= \frac{\sqrt{a}}{2}g'(-\frac{b}{a}) - i4\pi^2\sqrt{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \xi^2\hat{g}(\xi)sin(2\pi\xi x)d\xi dx$$

Les coefficients d'ondelettes $C_u^1(a,0)$ sont non nuls car le second terme de la différence est non nul. En fait l'intégrale double est de l'ordre de 10^{-2}.

A titre d'exemple, nous montrons aux figures *Fig*.2.1.*a* et *Fig*.2.1.*b* le module des coefficients d'ondelettes de l'échelon unité de Heaviside et du creneau calculés avec les ondelettes ψ et ψ_1 dans le cas de l'ondelette chapeau mexicain et de l'ondelette huitième dérivée de Gaussienne. Sur les graphiques, nous constatons que les coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$ sont nuls aux points de singularités du signal dans les cas où les calculs sont faits avec l'ondelette ψ. Par contre, ils sont non nuls lorsque les calculs sont faits avec l'ondellete progressive ψ_1 ; en plus on a une meilleure qualité d'analyse dans ces cas.

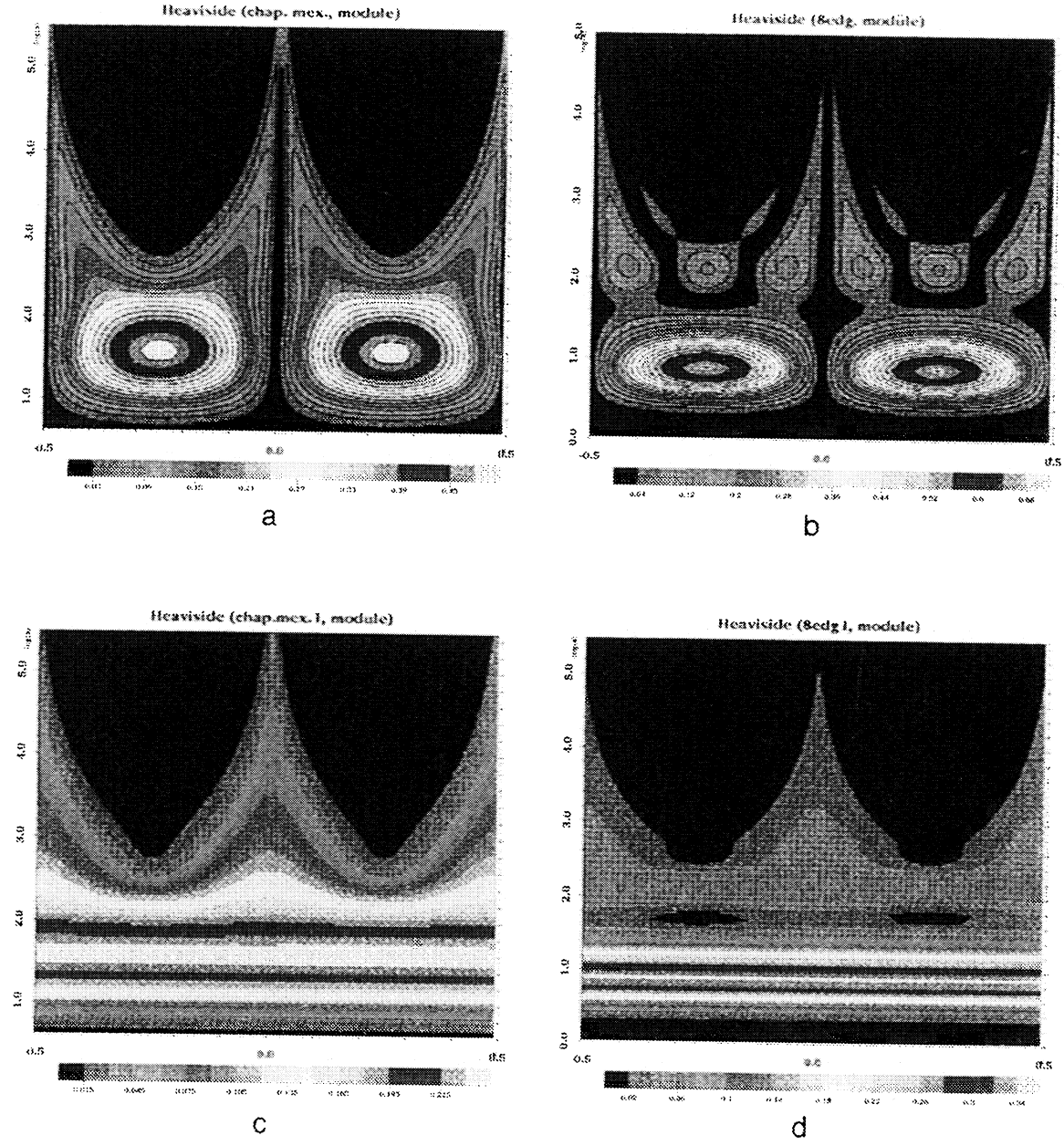


Fig.2.1.*a* : Transformée en ondelettes de l'échelon unité de Heaviside. On représente le module des coefficients d'ondelettes calculés avec les ondelettes ψ et ψ_1 (ψ_1 est l'ondelette complexe progressive issue de l'ondelette réelle ψ).

(*a*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette chapeau mexicain.

(*b*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette huitième dérivée de Gaussienne.

(*c*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette ψ_1 issue de l'ondelette chapeau mexicain.

(*d*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette ψ_1 issue de l'ondelette huitième dérivée de Gaussienne.

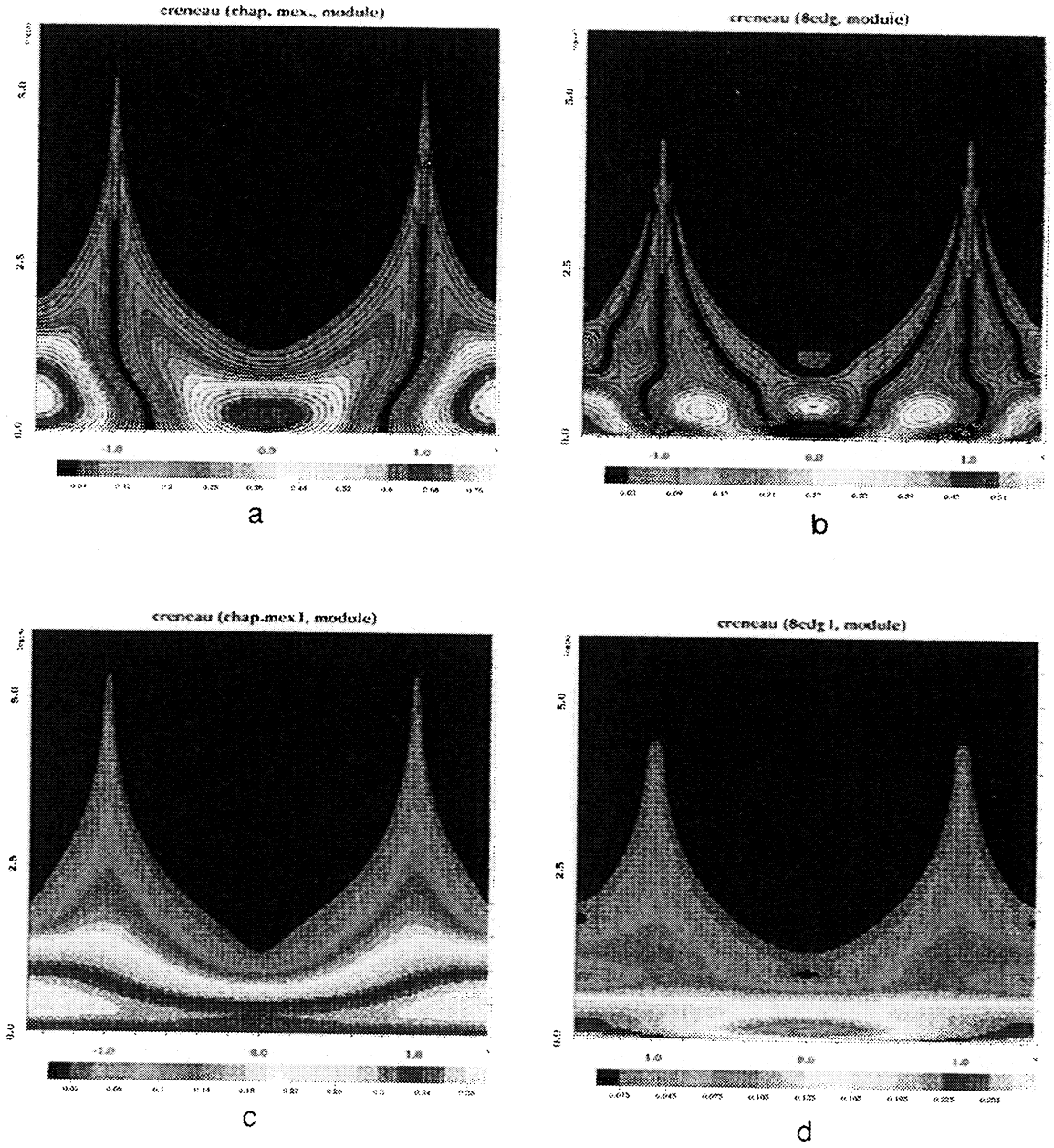


Fig.2.1.*b* : Transformée en ondelettes du créneau sur $[-1,1]$. On représente le module des coefficients d'ondelettes calculés avec les ondelettes ψ et ψ_1 (ψ_1 est l'ondelette complexe progressive issue de l'ondelette réelle ψ).

(*a*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette chapeau mexicain.

(*b*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette huitième dérivée de Gaussienne.

(*c*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette ψ_1 issue de l'ondelette chapeau mexicain.

(*d*) : Les coefficients d'ondelettes sont calculés avec l'ondelette ψ_1 issue de l'ondelette huitième dérivée de Gaussienne).

A travers les exemples que nous venons de présenter, il apparaît donc que dans la pratique, si l'ondelette analysante ψ est réelle, il est souhaitable de la transformer en une ondelette complexe ψ_1 de l'espace de Hardy. Nous pensons donc qu'il est important de nous assurer que l'ondelette complexe progressive ψ_1 ainsi obtenue (à partir d'une ondelette réelle ψ) vérifie les propriétés de régularité et de décroissance à l'infini que l'on souhaite imposer à une ondelette analysante.

Nous allons à présent calculer explicitement ψ_1 en fonction de ψ.

2.3 Calcul explicite de l'ondelette ψ_1

Nous avons que

$$\psi_1(x) = \bar{\mathcal{F}}[u(\xi)\cdot\hat{\psi}(\xi)](x) = \bar{\mathcal{F}}(u(\xi)) * \psi(x)$$

De

$$\bar{\mathcal{F}}u(\xi) = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2i\pi}vp(\frac{1}{\xi})$$

On a

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \Big[\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2i\pi}vp(\frac{1}{\xi})\Big] * \psi(x)\\ &= \frac{1}{2}\delta * \psi(x) - \frac{1}{2i\pi}vp(\frac{1}{\xi}) * \psi(x)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\psi(x) + iH\psi(x)\Big]\end{aligned}$$

où $H\psi$ est la transformée de Hilbert de ψ définie par

$$H\psi(x) = \frac{1}{\pi}vp(\frac{1}{x}) * \psi(x)$$

Ainsi

$$\mathcal{R}e(\psi_1) = \frac{1}{2}\psi \qquad \text{et} \qquad Im(\psi_1) = \frac{1}{2}H\psi$$

- **Remarque :** Si ψ est réelle paire (donc $\hat{\psi}$ aussi), on a :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\hat{\psi}(\xi)e^{2i\pi\xi x}d\xi = \int_0^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)e^{2i\pi\xi x}d\xi\\ &= \int_0^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)cos(2\pi x\xi)d\xi + i\int_0^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)sin(2\pi x\xi)d\xi\end{aligned}$$

D'autre part

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)e^{2i\pi\xi x}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)cos(2\pi\xi x)d\xi = 2\int_0^{+\infty}\hat{\psi}(\xi)cos(2\pi\xi x)d\xi$$

D'où

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + i\int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\xi) sin(2\pi\xi x) d\xi$$

2.4 Régularité et décroissance à l'infini de ψ_1

Nous abordons maintenant l'étude de la régularité et de décroissance à l'infini de ψ_1 en fonction de celle de ψ. On a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\xi = 0$ est une racine d'ordre N, $N \geq 1$ de $\hat{\psi}$, ie :*

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Alors, la fonction ψ_1 définie par

$$\hat{\psi}_1(\xi) = u(\xi) \cdot \hat{\psi}(\xi)$$

(où u est l'échelon unité de Heaviside) vérifie les propriétés suivantes :

$1^o/$ $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$
$2^o/$ $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R})$ *dès que* $N \geq 1$
$3^o/$ $\exists A > 0$, *une constante dépendant de k telle que*

$$|\psi_1^{(k)}(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{N+k+1}}, \quad \forall k \geq 0$$

DÉMONSTRATION:

$1^o/$ La prémière partie est immédiate. En effet, $\hat{\psi}_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et est à décroissance rapide car : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\xi^k \hat{\psi}_1(\xi) \longrightarrow 0$ si $|\xi| \longrightarrow \infty$. Il vient donc (proposition 1.3 de l'annexe 1) que $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$2^o/$ Pour démontrer la seconde propriété, il nous suffit de trouver une majoration de $|\psi_1|$. Pour cela, commençons par étudier les dérivées de $\hat{\psi}_1$.
On a que $\hat{\psi}_1 \in L^1(\mathbb{R})$ puisqu'elle est localement intégrable et à décroissance rapide (cf. proposition 1.3 - annexe 1). Par conséquent ψ_1 est bornée (cf. théorème 1.1 de l'annexe 1).
Montrons que les $\hat{\psi_1}^{(k)}$, $k \leq N$, sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\widehat{\psi_1}'(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}'(\xi) + \hat{\psi}(0)\delta$$
$$\hat{\psi_1}''(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}''(\xi) + \delta'\hat{\psi}(0) + \hat{\psi}'(0)\delta \quad \text{car} \quad u' = \delta \quad \text{et} \quad \delta\hat{\psi}'(\xi) = \delta\hat{\psi}'(0)$$

D'une façon générale, on en déduit que

$$\widehat{\psi_1}^{(k)}(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}^{(k)}(\xi) + \delta^{(k-1)}\hat{\psi}(0) + \cdots + \delta\hat{\psi}^{(k-1)}(0)$$

Puisque $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \cdots, N-1$, alors

$$\begin{cases} \widehat{\psi_1}^{(k)}(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}^{(k)}(\xi), & k \leq N \\ \widehat{\psi_1}^{(N+1)}(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi) + \delta\hat{\psi}^{(N)}(0) \end{cases}$$

On a donc que $\widehat{\psi_1}^{(k)}$, $k \leq N$, sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ (plus précisement des fonctions localement intégrables à décroissance rapide).
Passons maintenant à la majoration de $|\psi_1|$. Nous avons

$$\mathcal{F}\left[\widehat{\psi_1}^{(N+1)}(\xi)\right] = \mathcal{F}\left[u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi)\right] + \mathcal{F}\left[\hat{\psi}^{(N)}(0)\delta\right]$$

d'où

$$(2i\pi x)^{N+1}\widehat{\widehat{\psi_1}}(x) = \mathcal{F}\left[u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi)\right] + \hat{\psi}^{(N)}(0)$$

Comme $u\hat{\psi}^{(N+1)} \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}\left[u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi)\right]$ est bornée (Riemann-Lebesgue (cf. annexe 1.)). D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^{N+1}|\psi_1(x)| \leq C^{te}$$

et comme ψ_1 est bornée, on en déduit

$$(1 + |x|^{N+1})|\psi_1(x)| \leq C^{te}$$

$$|\psi_1(x)| \leq \frac{C^{te}}{(1 + |x|^{N+1})} \tag{2.1}$$

Par suite $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R})$ dès que $N \geq 1$.

3°/ Pour démontrer la troisième partie de la proposition, commençons par trouver une majoration de

$$\left|\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(\xi)\right| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}\left[\widehat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(\xi) &= \mathcal{F}\left[(-2i\pi\xi)^k\hat{\psi_1}^{(N+1)}(\xi)\right] \\ &= \mathcal{F}\left[(-2i\pi\xi)^k\left[u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi) + \hat{\psi}^{(N)}(0)\delta\right]\right]\end{aligned}$$

Or pour $k \neq 0$, $\xi^k \delta = 0$. D'où

$$\left(\mathcal{F}\left[\widehat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}\left[(-2i\pi\xi)^k u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi)\right]$$

Posons

$$\hat{g}(\xi) = (-2i\pi\xi)^k u(\xi)\hat{\psi}^{(N+1)}(\xi) = u(\xi) \cdot \hat{\theta}(\xi)$$

avec $\hat{\theta}(\xi) = (-2i\pi\xi)^k \hat{\psi}^{(N+1)}(\xi)$. On a : $\hat{\theta}^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, \cdots, k-1$, ie, $\xi = 0$ est une racine d'ordre k de $\hat{\theta}$.
D'autre part $\hat{\psi}^{(N+1)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc $\hat{\theta}(\xi) = (-2i\pi\xi)^k \hat{\psi}^{(N+1)}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Ainsi nous avons que $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\theta}^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, \cdots, k-1$ et $\hat{g}(\xi) = u(\xi) \cdot \hat{\theta}(\xi)$. On peut donc appliquer à g le résultat (2.1) (majoration de $|\psi_1(x)|$). Il vient alors que

$$\left|g(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1 + |x|^{k+1}}$$

Et comme

$$\left|\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(\xi)\right| = \left|\mathcal{F}\left[(-2i\pi\xi)^k \hat{\psi_1}^{(N+1)}(\xi)\right]\right| = \left|\hat{\hat{g}}(\xi)\right| = |g(-\xi)|$$

On a donc que

$$\left|\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1 + |x|^{k+1}}, \quad k \geq 1 \qquad (2.2).$$

Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour prouver que

$$\left|{\psi_1}^{(k)}(x)\right| \leq \frac{C^{te}(k)}{1 + |x|^{N+k+1}}$$

On procède par récurrence.

a) Montrons d'abord la relation pour $k = 1$.

En prenant $k = 1$ dans (2.2), on a

$$\left|\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)'(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1 + |x|^2}$$

Or

$$\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right](x) = (2i\pi x)^{N+1} \hat{\hat{\psi}}_1(x) = (2i\pi x)^{N+1} \psi_1(-x)$$

D'où

$$\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)'(x) = (N+1)(2i\pi x)^N \psi_1(-x) - (2i\pi x)^{N+1} \psi_1'(-x)$$

$$(2i\pi x)^{N+1}\psi'_1(-x) = (N+1)(2i\pi x)^N\psi_1(-x) - \left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)'(x)$$

En changeant x en $-x$, il vient que

$$|x|^{N+1}|\psi'_1(x)| \leq A \cdot |x|^N|\psi_1(x)| + B \cdot \left|\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right]\right)'(x)\right|$$

Or

$$\left|\psi_1(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1+|x|^{N+1}}$$

On a donc en utilisant (2.2)

$$|x|^{N+2}|\psi'_1(x)| \leq C^{te} + \frac{|x|B}{1+|x|^2} \leq C^{te}$$

D'autre part

$$\hat{\psi_1}(\xi) = u(\xi)\hat{\psi}(\xi)$$
$$\psi'_1(x) = \left(\bar{\mathcal{F}}\left[u(x)\hat{\psi}(x)\right]\right)' = \bar{\mathcal{F}}\left[2i\pi x u(x)\hat{\psi}(x)\right]$$

Or $u(\xi)x\hat{\psi}(x) \in L^1(\mathbb{R})$. D'où $\bar{\mathcal{F}}\left[2i\pi x u(x)\hat{\psi}(x)\right]$ est borné (Riemann-Lebesgue). Ainsi

$$\left|\psi'_1(x)\right| \leq C^{te}$$

Et finalement

$$\left(1+|x|^{N+2}\right)\left|\psi'_1(x)\right| \leq C^{te}$$

$$\left|\psi'_1(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1+|x|^{N+2}} \tag{2.3}$$

Ce qu'il fallait démontrer pour $k=1$.

b) Supposons maintenant la propriété vraie jusqu'à l'ordre $k-1$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre k.

On a

$$\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{(N+1)}\right](x) = (2i\pi x)^{N+1}\hat{\hat{\psi}}_1(x) = (2i\pi x)^{N+1}\psi_1(-x)$$

D'où

$$\left(\mathcal{F}\left[\hat{\psi_1}^{N+1}\right]\right)^{(k)}(x) = \left[(2i\pi x)^{N+1}\psi_1(-x)\right]^{(k)}$$

Or

$$\left[(2i\pi x)^{N+1}\psi_1(-x)\right]^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p\left[(2i\pi x)^{N+1}\right]^{(k-p)}\psi_1{}^{(p)}(-x)$$

$$= \sum_{p=0}^{k} C_k^p\alpha_{k,N,p}x^{N-k+p+1}\psi_1{}^{(p)}(-x)$$

D'où

$$x^{N+1}{\psi_1}^{(k)}(-x) = \left(\mathcal{F}\left[{\hat{\psi}_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(x) - \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p \alpha_{k,N,p} x^{N-k+p+1} {\psi_1}^{(p)}(-x)$$

Donc

$$|x|^{N+1}|{\psi_1}^{(k)}(x)| \leq \left|\left(\mathcal{F}\left[{\hat{\psi}_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(x)\right| + \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p |\alpha_{k,N,p}||x|^{N-k+p+1}|{\psi_1}^{(p)}(x)|$$

D'où

$$|x|^{N+k+1}|{\psi_1}^{(k)}(x)| \leq |x|^k\left|\left(\mathcal{F}\left[{\hat{\psi}_1}^{(N+1)}\right]\right)^{(k)}(x)\right| + \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p |\alpha_{k,N,p}||x|^{N+p+1}|{\psi_1}^{(p)}(x)|$$

En utilisant les majorations (2.1) et (2.2) et le fait que pour tout entier

$$n = 1, 2, \cdots, k-1; \quad k \geq 1, \quad \left|{\psi_1}^{(n)}(x)\right| \leq \frac{C^{te}}{1+|x|^{N+n+1}}$$

on obtient

$$|x|^{N+k+1}|{\psi_1}^{(k)}(x)| \leq \frac{C^{te}|x|^k}{1+|x|^{k+1}} + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{|\alpha_{k,N,p}||x|^{N+p+1}}{1+|x|^{N+p+1}}$$

Le second membre est borné sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$|x|^{N+k+1}\left|{\psi_1}^{(k)}(x)\right| \leq C^{te}(k)$$

(en fait C^{te} est une constante qui dépend de k)
D'autre part, ${\psi_1}^{(k)}$ est borné pour la même raison que ψ_1'. D'où finalement

$$(1+|x|^{N+k+1})|{\psi_1}^{(k)}(x)| \leq C^{te}(k)$$

$$|{\psi_1}^{(k)}(x)| \leq \frac{C^{te}(k)}{1+|x|^{N+k+1}}, \quad \forall k \geq 0 \tag{2.4}$$

■

2.5 Cas particulier des ondelettes chapeau mexicain et huitième dérivée de gaussienne

Nous établissons ici une majoration des dérivées d'ordre k de ψ_1 dans le cas où l'ondelette réelle ψ est l'ondelette chapeau mexicain ou l'ondelette huitième dérivée de gaussienne.

Soit $g(x) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0.$

- **Cas où ψ est l'ondelette chapeau mexicain**

On a $\psi(x) = g^{(2)}(x)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\hat{\psi}(\xi) = \widehat{g^{(2)}(x)}(\xi) = (2i\pi\xi)^2 \hat{g}(\xi)$$

On en déduit que $\xi = 0$ est une racine d'ordre 2 de $\hat{\psi}$; par suite nous avons $N = 2$. On peut donc appliquer la majoration (2.4) à ψ_1. D'où

$$\left|{\psi_1}^{(k)}(x)\right| \leq \frac{C^{te}(k)}{1 + |x|^{k+3}}, \quad k \geq 0.$$

- **Cas où ψ est l'ondelette huitième dérivée de gaussienne**

Nous avons $\psi(x) = g^{(8)}(x)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\hat{\psi}(\xi) = \widehat{g^{(8)}(x)}(\xi) = (2i\pi\xi)^8 \hat{g}(\xi)$$

$\xi = 0$ est une racine d'ordre 8 de $\hat{\psi}$; d'où $N = 8$. En appliquant donc la majoration (2.4) à ψ_1, on a :

$$\left|{\psi_1}^{(k)}(x)\right| \leq \frac{C^{te}(k)}{1 + |x|^{k+9}}, \quad k \geq 0.$$

Nous présentons ci-dessous les graphiques des parties réelles et imaginaires de ψ_1 dans le cas où ψ est l'ondelette chapeau mexicain ou l'ondelette huitième dérivée de gaussienne.

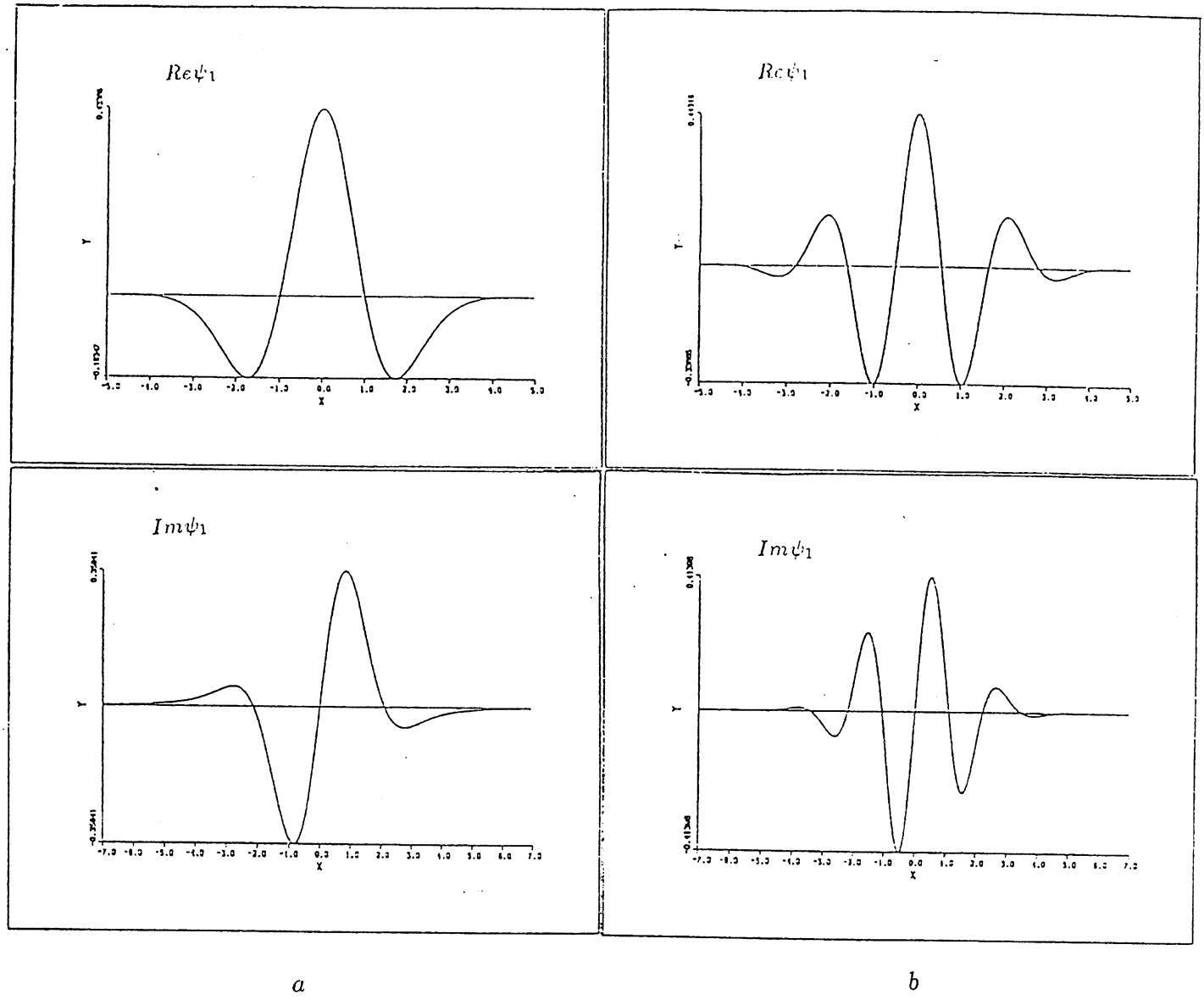


Fig.2.2 : Exemples d'ondelettes complexes progressives ψ_1 issues d'ondelettes réelles ψ. On représente la partie réelle $R_e\psi_1$ (en haut) et la partie imaginaire $Im\psi_1$ (en bas).
(a) : ψ_1 est issue de l'ondelette réelle chapeau mexicain.
(b) : ψ_1 est issue de l'ondelette réelle huitième dérivée de Gaussienne.

Chapitre 3

Calcul numérique de la transformée en ondelettes

Ce chapitre concerne essentiellement les aspects numériques de la transformée en ondelettes. Nous présentons très brièvement une revue des différents algorithmes de décomposition en ondelettes, puis nous décrivons en détail la mise en œuvre numérique des algorithmes que nous avons implémentés.

3.1 Revue sur les algorithmes de décomposition de la transformée en ondelettes

Les algorithmes de décomposition en ondelettes sont différents en fonction du problème à traiter ou de la méthode choisie et sont présentés dans plusieurs travaux [9][10][46][62][77]. Le choix optimal pour un problème précis n'est pas évident. Mais le plus souvent, le choix de l'ondelette détermine le type de l'algorithme.

Pour calculer numériquement les coefficients d'ondelettes, il existe actuellement plusieurs possibilités, chacune étant associée à une formulation différente de la transformée en ondelettes. Nous présentons d'abord de façon très succincte celles qui sont les plus couramment utilisées, puis nous décrivons en détail les méthodes que nous avons utilisées.

3.1.1 Méthodes générales

Les formules générales de la transformée en ondelettes peuvent conduire à deux façons de procéder pour le calcul numérique des coefficients d'ondelettes.

3.1.1.1 On peut penser à appliquer une méthode d'intégration numérique sur la formule directe

$$C_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi}(\frac{t-b}{a})dt$$

qu'on peut discrétiser (par une formule de quadrature) sous la forme

$$C_f(a,b) = \frac{\Delta t}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\overline{\psi}(\frac{t_i-b}{a})$$

où $t_i = i\Delta t, \quad i = 1, \cdots, N$, Δt étant le pas d'échantillonnage du signal.

Pour un seul coefficient $C_f(a,b)$ à calculer, le coût de la méthode est en $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre d'échantillon du signal. Lorsqu'on a N coefficients à calculer pour un certain nombre d'échelle J, le coût de la méthode est dans ce cas de l'ordre de JN^2 qui est un coût très élévé; ce qui peut être un inconvénient majeur pour la méthode.

3.1.1.2 Une seconde possibilité que nous décrivons en détail à la section 3.2.1 est de partir de la formule

$$C_f(a,b) = \sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi b\lambda}d\lambda$$

et de calculer, pour une échelle fixée, les coefficients d'ondelettes de f à partir de la formule

$$C_f(a,b) = \sqrt{a}\Delta\lambda \sum_{k=0}^{N-1} F_k\overline{\hat{\psi}}(a\lambda_k)e^{2i\pi b\lambda_k}$$

où F_k est la transformée de Fourier discrète de f et $\Delta\lambda$ le pas d'échantillonnage de $\hat{f}$.

Cette méthode est souvent appliquée car elle permet l'utlisation de la transformée de Fourier rapide (T.F.R.); ce qui réduit énormement le coût du calcul en $\mathcal{O}(JNlog_2N)$ opérations pour N échantillons du signal, J étant le nombre total d'échelles.

En conclusion, pour b fixé, le coût du calcul des coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$ pour J échelles est en $\mathcal{O}(JN)$ pour la méthode 3.1.1.1 tandis qu'il est en $\mathcal{O}(JN\log_2N)$ pour la méthode 3.1.1.2 car le calcul est fait pour les N coefficients en même temps à chaque échelle. Il peut donc être intéressant d'utiliser la méthode 3.1.1.1 lorsque b est fixé car il est moins coûteux dans ce cas que la méthode 3.1.1.2.

3.1.2 Algorithme à trous

Nous présentons ici très brièvement le principe de l'algorithme à trous. Pour les détails, nous renvoyons à [46].

On considère un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ échantillonné en $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et l'on cherche à calculer ses coefficients d'ondelettes $C_f(2^j,b)$, $j \geq 0$ et $b = 2^jk$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\begin{aligned} C_f(2^j,2^jk) &= 2^{-\frac{j}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\psi}(2^{-j}(x-2^jk))dx \\ &\simeq 2^{-\frac{j}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\overline{\psi}(2^{-j}(n-2^jk)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_f(2^j,2^jk) \simeq 2^{-\frac{j}{2}}\left(f *_d \overline{\psi}(-2^{-j}\cdot)\right)(2^jk) \tag{3.1}$$

où "$*_d$" désigne l'opérateur de convolution discrète.

L'idée de l'algorithme à trous est de remplacer dans la convolution (3.1) l'ondelette ψ par un interpolé I_ψ défini par

$$I_\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)\varphi(x-n)$$

et de calculer les coefficients d'ondelettes à l'échelle 2^j à partir de ceux de l'échelle 2^{j-1}. φ est une fonction d'interpolation à choisir [46].

Pour calculer $C_f(2^j, 2^j k)$, on définit l'opérateur de dilatation D par

$$D \cdot \psi(n) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{n}{2}) & \text{si n est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose

$$h_{i+1} = D \cdot h_i, \quad i \geq 1$$

avec

$$h_1(n) = \begin{cases} 1 + h(-1) & \text{si } n = 0 \\ h(\frac{n}{2} - 1) & \text{si n est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où h est un filtre de $l^2(\mathbb{Z})$ tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1$ et vérifiant

$$I_\psi\left(2^{-j}(n + \frac{1}{2})\right) = \sum_m h(n - m) I_\psi(2^{-j} m), \quad n \in \mathbb{Z}$$

La fonction d'interpolation φ qui permet de construire l'interpolé I_ψ est déterminé à partir du filtre h. On utilise alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} \chi_0 & = & f \\ \chi_j & = & 2^{-\frac{1}{2}} h_j *_d \chi_{j-1} \\ C_f(2^j, 2^j k) & = & (D^j \cdot \psi *_d \chi_j)(2^j k) \end{cases}$$

qui permettent un calcul rapide des coefficients d'ondelettes $C_f(2^j, 2^j k)$.

Le coût de l'algorithme est de l'ordre de $J.NlogN$ opérations pour N coefficients, J étant le nombre total d'échelles que l'on souhaite examiner.

3.1.3 Algorithme de Mallat

Cet algorithme [62] que nous décrivons en détail à la section 3.2.2.1 s'applique aux ondelettes issues d'une analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ introduite à la section 1.3.2.2. Soient φ la fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution (V_j) et ψ l'ondelette correspondante. Etant donné que

$$V_j = V_{j-1} \bigoplus W_{j-1},$$

le principe de base de l'algorithme est connaissant une fonction f_j de V_j (espace d'approximation) et ses coefficients $a_k^j = (f_j, \varphi_{jk})$ sur la base orthonormée $(\varphi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_j, de déterminer f_{j-1} projection de f_j sur V_{j-1} et les coefficients d'ondelettes correspondant sur W_{j-1}.

Le passage de V_j à V_{j-1} se fait par l'intermediaire d'un filtre passe-bas H sur les coefficients de f_j et le passage de V_j à W_{j-1} se fait par l'intermédiaire d'un filtre passe-bande G sur les mêmes coefficients.

3.1.4 Algorithme de décomposition en ondelettes périodiques

Cet algorithme décrit en détail dans [77] et inspiré de celui de S. Mallat est fondé sur le concept d'analyse multirésolution périodique introduite dans [69]. Le principe de l'algorithme est le même que celui de S. Mallat, sauf qu'au contraire de celui-ci, les filtres H et G sont fonction de la voie j.

- **Remarque**

Les algorithmes ainsi brièvement présentés sont les plus couramment utilisés. On peut également trouver dans [10] une méthode de calcul de la transformée en ondelettes (T.O.R.) de même type que l'algorithme T.F.R. (transformée de Fourier rapide) et qui est fondée sur le concept d'analyses multi-échelles discrètes introduite dans les travaux en question.

3.2 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes

L'objet de cette section est de décrire la mise en œuvre numérique des algorithmes de la transformée en ondelettes que nous avons implémentés pour des besoins d'analyse ou de filtrage.

Dans le cadre de l'analyse, nous utilisons la transformée en ondelettes continue à cause de l'invariance par translation des coefficients d'ondelettes et aussi parce qu'elle permet d'obtenir également (subjectif) une bonne image qualitative de la structure temps-fréquence du signal analysé. Pour le calcul des coefficients d'ondelettes, nous utilisons la méthode générale 3.1.1.2 présentée à la section 3.1.1. Cet algorithme est extrèmement efficace et rapide. Nous nous limitons particulièrement à l'aspect décomposition, qui est suffisante pour notre objectif (analyse); la reconstruction n'étant pas nécessaire.

Dans une perspective d'introduire une approche de filtrage, nous utilisons la transformée en ondelettes discrète. L'algorithme que nous utilisons dans ce cas est celui de S. Mallat qui est adapté aux ondelettes issues d'une analyse multirésolution et permet une décomposition-recomposition extrèmement rapide.

3.2.1 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes continue

S'il est aisé de percevoir avec la transformée en ondelettes continue l'intérêt de cet outil pour notre problème (analyse de signaux océaniques turbulents), le passage au numérique n'est cependant pas immédiat. Nous présentons dans les sections qui suivent, le calcul numérique des coefficients d'ondelettes monodimensionnelles et bidimensionnelles dans le cas de la transformée en ondelettes continue.

3.2.1.1 Calcul numérique des coefficients d'ondelettes 1-D

La transformée en ondelettes dépend de deux paramètres a et b (paramètres de dilatation-translation) qui varient continûment dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour des applications pratiques, on n'a pas d'autre choix que de restreindre ces paramètres à un sous-ensemble discret (et même fini) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Plus généralement, on choisit

$$a_j = \alpha^{-j}, \quad b_n = n\beta\alpha^{-j} \qquad (\alpha > 1, \beta \neq 0)$$

avec

$$\psi_{a_j b_n}(x) = \alpha^{\frac{j}{2}} \psi(\alpha^j x - n\beta)$$

Plus a est proche de 1 et b proche de 0, plus l'information est redondante, nécessitant d'ailleurs de gros calculs. Dans la plupart des applications pratiques, on choisit $\alpha = 2$; ce choix correspond aux différents octaves en musique.

Nous calculons les coefficients $C_f(a,b)$ dans l'espace de Fourier, ceci pour profiter sur le plan pratique des performances de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (TFR) ou "fast Fourier transform" (FFT) en anglais.

Nous avons :

$$C_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi}(\frac{t-b}{a})dt$$

Posons

$$g(t) = \psi(\frac{t-b}{a})$$

Alors

$$C_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}}(\lambda)d\lambda$$

De

$$\hat{g}(\lambda) = \mathcal{F}[\psi(\frac{t-b}{a})](\lambda) = ae^{-2i\pi\lambda b}\hat{\psi}(a\lambda)$$

on déduit

$$C_f(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi\lambda b}d\lambda$$

Pour la suite, nous supposerons que le signal f est connu sur un intervalle $[d_0, d_1]$ et est discrétisé en N échantillons aux points

$$x_n = d_0 + n\Delta x, \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

où

$$\Delta x = \frac{T}{N} \qquad \text{avec} \qquad T = d_1 - d_0$$

Nous considérerons N sous forme d'une puissance de 2 : $N = 2^p$, p entier ≥ 1.

On notera $f(x_n)$ par y_n.

Nous déterminons une approximation de $\hat{f}(\lambda)$ de la façon suivante :

Par définition

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx$$
$$\approx \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2i\pi\lambda(d_0+n.\Delta x)}$$

(formule des rectangles tronquée appliquée à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx$)

Une discrétisation dans le domaine fréquentiel donne

$$\Delta\lambda = \frac{1}{T} \quad ; \qquad \lambda_k = \frac{k}{T}$$

$$\hat{f}(\lambda_k) \approx \frac{T}{N}e^{-2i\pi\frac{k}{T}d_0}\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2i\pi k\frac{n}{N}} = Te^{-2i\pi k\frac{d_0}{T}}.Y_k$$

où ,

$$Y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2i\pi k\frac{n}{N}}, \qquad k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

Y_k est la transformée de Fourier discrète du signal (y_n) (cf. annexe 1). Ainsi, $\hat{f}(\lambda_k)$ est à approcher par $T.e^{-2i\pi k\frac{d_0}{T}}.Y_k$. En revenant au calcul des $C_f(a,b)$; on obtient :

$$C_f(a,b) = \sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda)e^{2i\pi\lambda b}d\lambda$$
$$\approx \sqrt{a}\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_k)\overline{\hat{\psi}}(a\lambda_k)e^{2i\pi\lambda_k b}$$
$$= \sqrt{a}\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} T.e^{-2i\pi k\frac{d_0}{T}}.Y_k.\overline{\hat{\psi}}(a\frac{k}{T})e^{2i\pi\frac{k}{T}b}$$
$$= \sqrt{a}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k.\overline{\hat{\psi}}(a\frac{k}{T})e^{2i\pi k(\frac{b-d_0}{T})}$$
$$= \sqrt{a}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k.\overline{\hat{\psi}}(a\frac{k}{N.\Delta x})e^{2i\pi k(\frac{b-d_0}{N.\Delta x})}$$

On choisit des valeurs b_n telles que $\frac{b_n - d_0}{\Delta x} = n$; on a donc $b_n = d_0 + n.\Delta x$, $n = 0, \cdots, N-1$. Ainsi

$$\begin{cases} C_f(a, b_n) \approx \sqrt{a} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k . \overline{\hat{\psi}}(a \frac{k}{N.\Delta x}) . e^{2i\pi k \frac{n}{N}} = \sqrt{a}.s_n \\ \\ b_n = d_0 + n.\Delta x \end{cases}$$

Finalement le calcul des coefficients $C_f(a, b)$ se réduit à :

$$\forall a > 0 \qquad \begin{cases} C_f(a, b_n) \approx \sqrt{a}.s_n \\ \\ b_n = d_0 + n.\Delta x \end{cases}$$

$$n = 0, \cdots, N-1$$

$$(S_k) \overset{\mathcal{F}_N^{-1}}{\longrightarrow} (s_n)$$

avec

$$S_k = Y_k . \overline{\hat{\psi}}(a . \frac{k}{N.\Delta x}), \quad k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

3.2.1.1.a Organisation et coût du calcul

a/ Organisation du calcul

Le calcul des coefficients d'ondelettes $C_f(a, b)$ se ramène aux étapes suivantes :

1/ calcul des Y_k

$$(y_n) \overset{\mathcal{F}_N}{\longrightarrow} (Y_k)$$

2/ Calcul des S_k

$$S_k = Y_k . \overline{\hat{\psi}}(\frac{a.k}{N.\Delta x}), \qquad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$$

3/ Calcul des s_n

$$(S_k) \overset{\mathcal{F}_N^{-1}}{\longrightarrow} (s_n)$$

4/ Calcul des $\quad C_f(a, b_n) \approx \sqrt{a}.s_n$

b/ Coût du calcul

L'étape 1/ est effectuée une fois pour toute et fait intervenir une F.F.T.

Pour chaque échelle a, les étapes 2/, 3/ et 4/ sont effectuées. La transformée de Fourier $\hat{\psi}$ étant connue analytiquement ou numériquement si nécessaire, l'étape 2/

fait intervenir N multiplications complexes. L'étape 3/ fait intervenir également une F.F.T. (inverse). Quant à l'étape 4/, elle fait intervenir N multiplications d'un réel par un complexe; ce qui fait $2N$ multiplications réelles.

Etant donné qu'une F.F.T. coûte $\frac{1}{2}NLog_2N$ multiplications complexes et $NLog_2N$ additions complexes pour une suite de $N = 2^p$, éléments, $p \geq 1$; alors les étapes 1/ et 3/ font intervenir chacune

$$\frac{1}{2}NLog_2N \qquad \text{multiplications complexes}$$

$$NLog_2N \qquad \text{additions complexes}$$

Le coût d'une multiplication complexe étant 4 multiplications réelles et 2 additions réelles et celui d'une addition complexe étant 2 additions réelles; alors si J est le nombre total d'échelle que l'on veut examiner, en désignant par Mr le nombre de multiplications réelles et par Ar le nombre d'additions réelles, le coût du calcul des $C_f(a,b)$ pour un signal échantillonné en $N = 2^p$ points, $p \geq 1$, est

$$Mr = 2(J+1)NLog_2N + 6JN$$

$$Ar = 3(J+1)NLog_2N + 2JN$$

Il vient donc que le coût du calcul des $C_f(a,b)$ est en $\mathcal{O}\big(JNLog_2N\big)$ opérations.

3.2.1.1.*b* Un choix possible de la plus petite échelle

Couramment, on discrétise l'échelle a, en fraction d'octave $a_j = 2^{-\frac{j}{v}}$ où v est le nombre de voies par octave [72]. L'ensemble des $C_f(a_j, b_n)$, pour a_j fixé, constitue une voie. Il est à remarquer qu'un bon choix des a_j dépend de l'ondelette et du signal en question. Toutefois, la plus petite échelle , que nous notons a_{min}, peut être fixée de la façon suivante :

On a

$$C_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(\frac{x-b}{a})dx \approx \frac{1}{\sqrt{a}}.\Delta x.\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\psi(\frac{x_n-b}{a})$$

Désignons par $[\alpha, \beta]$ l'intervalle en dehors duquel ψ peut être considérée comme négligeable. Le support de ψ_a défini par $\psi_a(x) = \psi(\frac{x}{a})$ est alors $[a\alpha, a\beta]$. Pour que $C_f(a,b)$ soit pertinent, $supp\,(\psi_a) = [a\alpha, a\beta]$ doit contenir un certain nombre de points d'échantillonnage, donc être de l'ordre de $k\Delta x$, ie

$$[a\alpha, a\beta] \sim k\Delta x$$

Ainsi

$$a_{min}\,(\beta - \alpha) = k\Delta x \qquad \text{d'où} \qquad a_{min} = \frac{k\Delta x}{\beta - \alpha}$$

où k est le nombre minimal de points souhaité.

3.2.1.2 Calcul numérique des coefficients d'ondelettes 2-D

Comme dans le cas monodimensionnel, on choisit une discrétisation des paramètres a et $\vec{b} = (b, b')$, $a > 0$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$, de la façon suivante

$$a_j = \alpha^{-j}, \qquad b_n = n\beta\alpha^{-j}, \qquad b'_m = m\gamma\alpha^{-j}$$

avec

$$\psi_{(a_j, r, b_n, b'_m)}(x, y) = \alpha^{-j}\psi(\alpha^j r^{-1}(x - n\beta, y - m\gamma))$$

Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cas monodimensionnel (rapidité du calcul), nous calculons les coefficients $C_f(a, r, \vec{b})$ dans l'espace de Fourier afin d'utiliser la T.F.R. bidimensionnelle.

Avant de passer au calcul des $C_f(a, r, \vec{b})$, explicitons d'abord le calcul de $\mathcal{F}\Big[f(A\vec{x})\Big](\vec{\lambda})$, où A est une matrice inversible ($\mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier de f définie en annexe 1). Ce calcul nous servira dans la suite.

On a par définition :

$$\mathcal{F}[f(A\vec{x})](\vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(A\vec{x})e^{-2i\pi\vec{\lambda}\vec{x}}d\vec{x} \qquad \text{avec} \quad d\vec{x} = dxdx'$$

Par un changement de variable $A\vec{x} = \vec{y}$, puisque A est inversible, on a :

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \qquad \text{et} \qquad d\vec{x} = A^{-1}d\vec{y}$$

Le jacobien de cette transformation est $det(A^{-1})$. D'où

$$\mathcal{F}[f(A\vec{x})](\vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{y})e^{-2i\pi\vec{\lambda}A^{-1}\vec{y}}\big|det(A^{-1})\big|d\vec{y}$$

$$= \frac{1}{|det(A)|}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{y})e^{-2i\pi\vec{\lambda}A^{-1}\vec{y}}d\vec{y}$$

$$\text{Or} \quad \vec{\lambda}A^{-1}\vec{y} = <\vec{\lambda}, A^{-1}\vec{y}> = <{}^t(A^{-1})\vec{\lambda}, \vec{y}> = {}^t(A^{-1})\vec{\lambda}\vec{y}$$

où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

Donc

$$\mathcal{F}\Big[f(A\vec{x})\Big](\vec{\lambda}) = \frac{1}{\big|det(A)\big|}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{y})e^{-2i\pi{}^t(A^{-1})\vec{\lambda}\vec{y}}d\vec{y}$$

Par suite

$$\mathcal{F}\Big[f(A\vec{x})\Big](\vec{\lambda}) = \frac{1}{\Big|det(A)\Big|}\hat{f}\Big((A^{-1})\vec{\lambda}\Big) \tag{3.2}$$

- **Calcul des $C_f(a,r,\vec{b})$**

Nous allons maintenant aborder le calcul des $C_f(a,r,\vec{b})$. Nous avons

$$C_f(a,r,\vec{b}) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\overline{\psi}\left(r^{-1}(\frac{x-b}{a},\frac{y-b'}{a})\right)dxdy$$

Posons

$$g(x,y) = \psi\left(r^{-1}(\frac{x-b}{a},\frac{y-b'}{a})\right)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} C_f(a,r,\vec{b}) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\overline{g}(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda,\mu)\overline{\hat{g}}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu \end{aligned}$$

Calculons

$$\hat{g}(\lambda,\mu) = \mathcal{F}\Big[\psi\left(r^{-1}(\frac{x}{a},\frac{y}{a})\right)\Big](\lambda,\mu)$$

On pose

$$h(x,y) = \psi\left(r^{-1}(\frac{x}{a},\frac{y}{a})\right)$$

$$h(x-b,y-b') = \psi\left(r^{-1}(\frac{x-b}{a},\frac{y-b'}{a})\right)$$

Or

$$\hat{h}(\lambda,\mu) = \mathcal{F}\Big[\psi\left(r^{-1}(\frac{x}{a},\frac{y}{a})\right)\Big](\lambda,\mu) = a^2\mathcal{F}\Big[\psi\big(ar^{-1}(x,y)\big)(\lambda,\mu)$$

En appliquant (3.2), on a :

$$\hat{h}(\lambda,\mu) = a^2\frac{1}{|det(r^{-1})|}\hat{\psi}\Big(a\cdot{}^t\Big[(r^{-1})^{-1}\Big](\lambda,\mu)\Big)$$

Puisque $r = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$,

$$det(r^{-1}) = 1 \qquad \text{et} \qquad {}^t\Big[(r^{-1})^{-1}\Big] = {}^t r = r^{-1}$$

D'où

$$\hat{h}(\lambda,\mu) = a^2\hat{\psi}(ar^{-1}(\lambda,\mu))$$

D'autre part

$$\mathcal{F}\Big[h(x-b,y-b')\Big](\lambda,\mu) = e^{-2i\pi(\lambda b+\mu b')}\hat{h}(\lambda,\eta) = a^2.e^{-2i\pi(\lambda b+\mu b')}\hat{\psi}(ar^{-1}(\lambda,\mu))$$

De $\hat{g}(\lambda,\mu) = \mathcal{F}\Big[h(x-b,y-b')\Big](\lambda,\mu)$ on déduit que

$$C_f(a,r,\vec{b}) = a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda,\mu)\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\lambda,\mu))e^{2i\pi(\lambda b+\mu b')}d\lambda d\mu$$

Dans la suite, nous supposerons que le signal f est connu sur un rectangle $[d_0,d_1]\times[c_0,c_1]$ et est discrétisé en $N.M$ échantillons aux points $(x_{n,},y_m)$ avec

$$x_n = d_0 + n\Delta x, \qquad y_m = c_0 + m\Delta y$$

$$n = 0,\cdots,N-1, \qquad \text{et} \qquad m = 0,\cdots,M-1$$

où

$$\Delta x = \frac{T_1}{N} \qquad \text{avec} \qquad T_1 = d_1 - d_0$$

$$\Delta y = \frac{T_2}{M} \qquad \text{avec} \qquad T_2 = c_1 - c_0$$

Nous considérons N et M sous forme d'une puissance de 2, ie, $N = 2^p$, $M = 2^q$, p et q entiers ≥ 1.

On notera $f(x_n,y_m)$ par z_{nm}.

Nous déterminons une approximation de $\hat{f}(\lambda,\mu)$ de la façon suivante :

Par définition

$$\hat{f}(\lambda,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-2i\pi(\lambda x+\eta y)}dxdy$$

$$\approx \Delta x\Delta y\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}f(x_n,y_m)e^{-2i\pi(\lambda x_n+\eta y_m)}$$

Une discrétisation dans le domaine fréquentiel nous donne

$$\Delta\lambda = \frac{1}{T_1}, \qquad \lambda_k = \frac{k}{T_1}$$

$$\Delta\mu = \frac{1}{T_2}, \qquad \mu_l = \frac{l}{T_2}$$

$$\hat{f}(\lambda_k,\mu_l) \approx \Delta x\Delta y\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}f(x_n,y_m)e^{-2i\pi(\lambda_k x_n+\mu_l y_m)}$$

$$= T_1T_2.e^{-2i\pi(\frac{kd_0}{T_1}+\frac{lc_0}{T_2})}.\frac{1}{N.M}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}z_{nm}e^{-2i\pi(\frac{nk}{N}+\frac{ml}{M})}$$

$$= T_1T_2e^{-2i\pi(\frac{kd_0}{T_1}+\frac{lc_0}{T_2})}.Z_{kl}$$

où Z_{kl} est la transformée de Fourier discrète du signal (y_{nm}).

Nous approchons donc $\hat{f}(\lambda_k, \mu_l)$ par

$$T_1 T_2 \cdot e^{-2i\pi(\frac{kd_0}{T_1}+\frac{lc_0}{T_2})}.Y_{kl}$$

En revenant au calcul des $C_f(a, r, \vec{b})$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} C_f(a,r,\vec{b}) &= a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda,\mu)\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\lambda,\mu))e^{2i\pi(\lambda b+\mu b')}d\lambda d\mu \\ &\approx a\cdot\frac{1}{T_1\cdot T_2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}\hat{f}(\lambda_k,\mu_l)\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\lambda_k,\mu_l))e^{2i\pi(\lambda_k b+\mu_l b')} \\ &= a\cdot\frac{1}{T_1\cdot T_2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} Z_{kl}\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\frac{k}{N\Delta x},\frac{l}{M\Delta y}))e^{2i\pi(\frac{k(b-d_0)}{N\Delta x}+\frac{l(b'-c_0)}{M\Delta y})} \end{aligned}$$

On choisit les b_n et b'_m tels que

$$\frac{b_n - d_0}{\Delta x} = n \qquad \text{et} \qquad \frac{b'_m - c_0}{\Delta y} = m$$

On a donc

$$b_n = d_0 + n.\Delta x \qquad \text{et} \qquad b'_m = c_0 + m.\Delta y$$

avec $n = 0, \cdots, N-1$ et $m = 0, \cdots, M-1$

Ainsi

$$\begin{cases} C_f(a,r,b_n,b'_m) \approx a.\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} Z_{kl}\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\frac{k}{N.\Delta x},\frac{l}{M.\Delta y}))e^{2i\pi(\frac{nk}{N}+\frac{ml}{M})} \\ b_n = d_0 + n.\Delta x \\ b'_m = c_0 + m.\Delta y \end{cases}$$

Finalement le calcul des coefficients $C_f(a, r, \vec{b})$ se réduit à

$$\begin{array}{c} \forall a > 0 \\ n = 0, \cdots, N-1 \\ m = 0, \cdots, M-1 \end{array} \quad \begin{cases} C_f(a,r,b_n,b'_m) \approx a.s_{nm} \\ b_n = d_0 + n.\Delta x \\ b'_m = c_0 + m.\Delta y \end{cases}$$

avec

$$s_{nm} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} Z_{kl}\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\frac{k}{N.\Delta x},\frac{l}{M.\Delta y}))e^{2i\pi(\frac{nk}{N}+\frac{ml}{M})}$$

où

$$(S_{kl}) \overset{\mathcal{F}_{NM}^{-1}}{\longrightarrow} (s_{nm})$$

$$S_{kl} = Z_{kl}.\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}(\frac{k}{N.\Delta x},\frac{l}{M.\Delta x}))$$

$$k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \qquad \text{et} \qquad l = -\frac{M}{2}, \cdots, \frac{M}{2} - 1$$

3.2.1.2.*a* Organisation et coût du calcul

- **Organisation du calcul**

Le calcul des coefficients d'ondelettes $C_f(a, r, \vec{b})$ revient à :
1/ Calcul des Z_{kl}.

$$(z_{nm}) \overset{\mathcal{F}_{NM}}{\longrightarrow} (Z_{kl})$$

2/ Calcul des S_{kl}.

$$S_{kl} = Z_{kl}.\overline{\hat{\psi}}(a \cdot r^{-1}(\frac{k}{N.\Delta x}, \frac{l}{M.\Delta y}))$$

$$k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \quad \text{et} \quad l = -\frac{M}{2}, \cdots, \frac{M}{2} - 1$$

3/ Calcul des s_{nm}.

$$(S_{kl}) \overset{\mathcal{F}_{NM}^{-1}}{\longrightarrow} (s_{nm})$$

4/ Calcul des $C_f(a, r, b_n, b'_m) \approx a.s_{nm}$.

- **Coût du calcul**

Le coût du calcul est évalué de la même façon que dans le cas monodimensionnel. On notera simplement que la F.F.T bidimensionnelle coûte $\frac{1}{2}MNLog_2N$ multiplications complexes et $MNLog_2N$ additions complexes pour une suite de $NM = 2^p \cdot 2^{p'}$ points, avec $p, p' \geq 1$. Ainsi, en désignant par Ar le nombre d'additions réelles , par Mr le nombre de multiplications réelles et par J le nombre total d'échelle que l'on veut examiner; le coût du calcul des $C_f(a, r, \vec{b})$, pour r fixé, s'évalue à

$$Mr = 2(J+1)MNLog_2N + 6JMN$$

$$Ar = 3(J+1)MNLog_2N + 2JMN$$

En posant $M = N$ (signal de N^2 échantillons), on a :

$$Mr = 2(J+1)N^2Log_2N + 6JN^2$$

$$Ar = 3(J+1)N^2Log_2N + 2JN^2$$

On peut donc estimer la complexité du calcul des $C_f(a, r, \vec{b})$, pour r fixé, en $\mathcal{O}(JN^2 Log_2 N)$ opérations.

3.2.1.2.*b* Choix des échelles et de la rotation

Comme dans le cas unidimentionnel, l'échelle a est discrétisée en fraction d'octave $a_j = 2^{-\frac{j}{v}}$ où v est le nombre de voies par octave.

L'angle de rotation θ (cf. section 1.2.3.1) peut être choisi en fonction de la forme des phénomènes que l'on cherche à mettre en évidence dans le signal à analyser.

Lorsque l'ondelette est radiale, (l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle par exemple), la rotation ne joue aucun rôle. Par contre tel n'est pas le cas lorsque l'ondelette n'est pas radiale (par exemple l'ondelette de Morlet bidimensionnelle), où la rotation a une influence considérable. En effet, pour l'ondelette analysante de Morlet bidimensionnelle,

$$\psi(x, y) = e^{i\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}} \cdot e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}},$$

l'ondelette élémentaire, pour $\vec{b} = \vec{0}$, est donné par :

$$\psi_{(a,r,\vec{0})}(x, y) = \frac{1}{a}\psi\Big(r^{-1}\big(\frac{\vec{x}}{a}\big)\Big) = \frac{1}{a}e^{i\frac{r\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}}{a}} \cdot e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}}$$

D'où pour $a = 1$, on a

$$\psi_{(1,r,\vec{0})}(x, y) = e^{ir\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}} \cdot e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}} \tag{3.3}$$

De (3.3), il apparaît donc qu'une rotation inverse sur les axes revient à une rotation sur la direction de l'ondelette. Nous montrons à la figure *Fig*.3.1 l'effet de la rotation sur l'ondelette de Morlet bidimensionnelle.

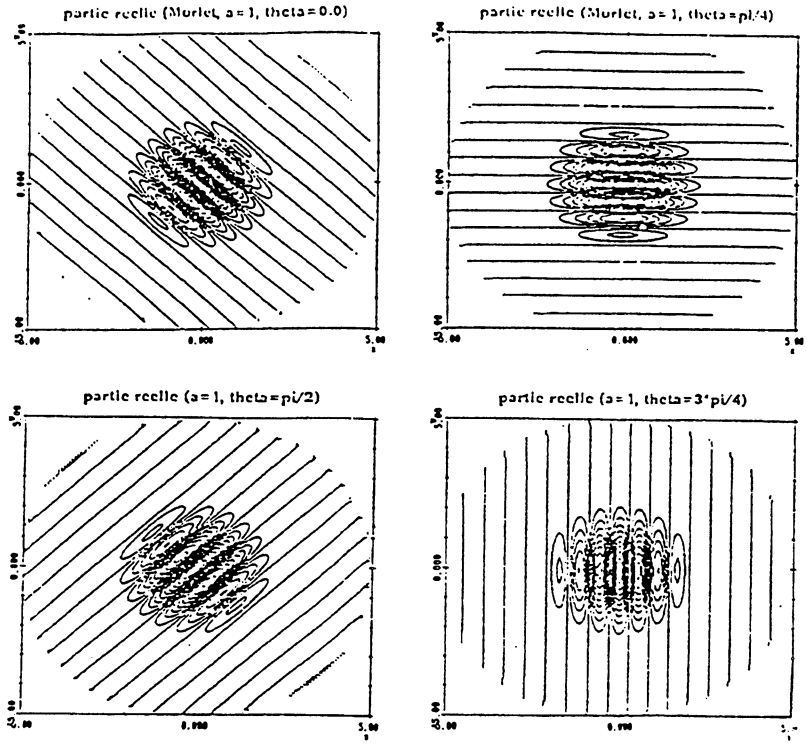


Fig. 3.1 : Action de la rotation sur l'ondelette de Morlet bidimensionnelle $\psi_{(a,r,\vec{b})}(\vec{x})$. On représente les lignes isovaleurs de la partie réelle pour $a = 1$ et $\vec{b} = (0,0)$. On montre : en haut : $\theta = 0$ (àgauche), $\theta = \frac{\pi}{4}$ (à droite); en bas : $\theta = \frac{\pi}{2}$ (àgauche), $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (àdroite).

3.2.1.2.c Remarque

Outre son efficacité et sa rapidité, cet algorithme présente l'avantage de pouvoir explorer continûment l'échelle des fréquences et de pouvoir suivre l'échantillonnage du signal. Ce qui est important pour l'analyse car permet une bonne lisibilité de la transformée en ondelettes. Cependant les limitations de cette méthode résident dans les problèmes de bord lorsque le signal analysé est non périodique (la périodicité étant introduite de façon implicite par la FFT). Pour remédier à ces problèmes de bord, nous avons utilisé un procédé que nous appelons "procédé d'adoucissement" qui consiste à ramener le signal à zéro en ses deux extrémités. Dans le cas 1-D, la démarche suivie est la suivante :

a/ On remplace le signal initial (y_n) par un signal (y'_n) à $2N$ échantillons où N est le nombre d'échantillon de (y_n) tel que

$$y'_n = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

$$y'_n = y_{n-\frac{N}{2}} \quad \text{pour} \quad n = \frac{N}{2}, \cdots, \frac{3N}{2} - 1$$

$$y'_n = 0 \quad \text{pour} \quad n = \frac{3N}{2}, \cdots, 2N - 1$$

b/ On applique ensuite aux deux extrémités de (y'_n) le "lissage" suivant :

$$y'_n = \frac{1}{3}(y'_{n-1} + y'_n + y'_{n-1}), \quad n = \frac{N}{2} - 1, \cdots, 0 \quad \text{et} \quad n = \frac{3N}{2} - 1, \cdots, 2N - 1.$$

Pour éviter de ramener brusquement le signal à zéro, on peut itérer le point *b/* 2 ou 3 fois. Ainsi, après avoir calculer les coefficients d'ondelettes de (y'_n), on ne retient que les coefficients $C_f(a, b_n)$, $n = \frac{N}{2}, \cdots, \frac{3N}{2} - 1$, qui correspondent aux coefficients d'ondelettes du signal initial (y_n). Cette méthode que nous utilisons s'étend facilement au cas bidimensionnel.

L'inconvénient de la méthode est qu'elle conduit à l'augmentation du coût du calcul des coefficients d'ondelettes puisque le calcul est fait avec $2N$ échantillons au lieu de N échantillons. On peut pallier cet inconvénient en effectuant directement le "procédé d'adoucissement" sur un certain nombre de points aux deux extrémités du signal. Seulement dans ce cas, l'information portée par les coefficients d'ondelettes aux bords ne caractérisent plus le signal en ces endroits.

3.2.2 Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes discrète est naturellement celle qui convient pour des besoins filtrage : pas de redondance d'information, peu de coefficients à calculer. Un algorithme efficace et rapide qui lui est associé est celui de S. Mallat [62].

Nous décrivons ici **l'algorithme de S. Mallat** que nous avons implémenté pour des fins de filtrage. Cet algorithme, très utilisé pour la décomposition-recomposition sur une base orthonormée d'ondelettes, est appliqué aux ondelettes issues d'une analyse multirésolution. Il est pour la transformée en ondelettes discrète ce qu'est la F.F.T. pour la transformée de Fourier discrète.

3.2.2.1 Mise en œuvre numérique 1-D

Soit (V_j) une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et φ la fonction d'échelle associée, où ψ est l'ondelette analysante associée à φ. On a

$$V_j = V_{j-1} \bigoplus W_{j-1} \tag{3.4}$$

Nous rappelons que le principe de l'algorithme de S. Mallat est, partant de $f_j \in V_j$, de déterminer f_{j-1} projection de f_j sur V_{j-1} et les coefficients d'ondelettes correspondant sur W_{j-1}.

3.2.2.1.a Décomposition

On part d'une suite $(a_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$, c'est à dire de la fonction f_0 de V_0.

$$f_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^0 \varphi(x-n)$$

Pour calculer les coefficients d'ondelettes de f_0, ie, les (f_0, ψ_{jn}), on utilise la décomposition

$$V_0 = V_{-J} \bigoplus_{j=-J}^{-1} W_j$$

(on arrête la décomposition à l'espace V_{-J}).

On cherche donc les coefficients a_n^{-J} et c_n^j, $n \in \mathbb{Z}$, $-J \le j \le -1$, $J \ge 1$ tels que

$$f_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{-J} \varphi_{-Jn}(x) + \sum_{j=-J}^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j \psi_{jn}(x)$$

où

$$a_n^{-J} = (f_0, \varphi_{-Jn}) \qquad \text{et} \qquad c_n^j = (f_0, \psi_{jn})$$

Décrivons l'algorithme à l'étape j de la décomposition. Pour cela on part de $f_j \in V_j$. De (3.4), on a :

$$f_j(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^j \varphi_{jn}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{j-1} \varphi_{j-1n}(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j-1} \psi_{j-1n}(x)$$

où

$$a_n^{j-1} = (f_j, \varphi_{j-1n}) \qquad \text{et} \qquad c_n^{j-1} = (f_j, \psi_{j-1n})$$

Comme $\varphi_{j-1k} \in V_{j-1} \subset V_j$, il vient donc que

$$\varphi_{j-1k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi_{j-1k}, \varphi_{jn}) \varphi_{jn}$$

et

$$(f_j, \varphi_{j-1k}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi_{j-1k}, \varphi_{jn})(f_j, \varphi_{jn})$$

ou encore

$$a_k^{j-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi_{j-1k}, \varphi_{jn}) a_n^j$$

Un calcul direct donne

$$(\varphi_{j-1k}, \varphi_{jn}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2}\Big) \varphi(x-(n-2k)) dx$$

En posant

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2}\Big)\varphi(x-n)dx$$

On obtient

$$a_k^{j-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n-2k)a_n^j \tag{3.5}$$

De la même façon, en remarquant que $\psi_{j-1k} \in W_{j-1} \subset V_j$, un calcul direct donne

$$c_k^{j-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n-2k)a_n^j \tag{3.6}$$

avec

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\Big(\frac{x}{2}\Big)\varphi(x-n)dx$$

h et g sont des filtres discrets indépendants de j associés à l'analyse multirésolution (V_j). On montre [62] que

$$g(n) = (-1)^{1-n}h(1-n)$$

h et g peuvent s'écrire également, à l'aide de la transformée de Fourier, sous les formes

$$h(n) = \sqrt{2}\int \hat{\varphi}(2\lambda)\bar{\hat{\varphi}}(\lambda)e^{2i\pi n\lambda}d\lambda$$

$$g(n) = \sqrt{2}\int \hat{\psi}(2\lambda)\bar{\hat{\varphi}}(\lambda)e^{2i\pi n\lambda}d\lambda$$

Si l'on désigne par H et G les fonctions de transfert des filtres discrets h et g où

$$H(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)e^{-2i\pi n\lambda}, \qquad G(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)e^{-2i\pi n\lambda}$$

On a

$$H(\lambda) = \sqrt{2}\hat{\varphi}(2\lambda)\bar{\hat{\varphi}}(\lambda)$$

$$G(\lambda) = \sqrt{2}\hat{\psi}(2\lambda)\bar{\hat{\varphi}}(\lambda)$$

Les relations (3.5) et (3.6) peuvent alors s'écrire

$$a^{j-1} = Ha^j \qquad c^{j-1} = Ga^j$$

3.2.2.1.*b* **Reconstruction**

Le signal est facilement reconstruit en utilisant les filtres h et g.

En effet, à l'étape j, pour reconstruire $f_j \in V_j$, on a :
De (3.4),

$$\varphi_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi_{jn}, \varphi_{j-1k})\varphi_{j-1k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi_{jn}, \psi_{j-1k})\psi_{j-1k}$$

et

$$(f_j, \varphi_{jn}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi_{jn}, \varphi_{j-1k})(f_j, \varphi_{j-1k}) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi_{jn}, \psi_{j-1k})(f_j, \psi_{j-1k})$$

ou encore

$$a_n^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{h}(2k-n)a_k^{j-1} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{g}(2k-n)c_k^{j-1} \tag{3.7}$$

avec $\tilde{h}(n) = h(-n)$ et $\tilde{g}(n) = g(-n)$. L'équation (3.7) peut encore s'écrire sous la forme

$$a^j = \tilde{H}a^{j-1} + \tilde{G}c^{j-1}$$

où $\tilde{H}$ et $\tilde{G}$ sont les fonctions de transfert associées respectivement aux réponses impulsionnelles $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$.

3.2.2.1.*c* **Résumé**

L'algorithme de décomposition-recomposition de S. Mallat est recursive. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

• **Décomposition** : On initialise $a^0 = f$ et pour $j = -1, \cdots, -J$, $J \geq 1$, on calcule les a^j et c^j à l'aide des recurrences suivantes :

$$a_k^{j-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n-2k)a_n^j$$

$$c_k^{j-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n-2k)a_n^j$$

A chaque étape j, les coefficients d'ondelettes effectivement calculés sont les $(c_k^j)_{0\leq k\leq 2^j N-1}$ où N est le nombre d'échantillon du signal initial.
Dans la pratique, on arrête la décomposition après un nombre fini J d'étapes. C'est à dire que $(a_n^0)_{n\in Z}$ est décomposé en $c^{-1}, \cdots, c^{-J}$ et a^{-J}.

• **Recomposition** : On part de a^{-J} et $c^{-J}, \cdots, c^{-1}$; et pour $j = -J, \cdots, -1, 0$, on calcule

$$a_n^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{h}(2k-n)a_k^{j-1} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{g}(2k-n)c_k^{j-1}$$

Pour reconstruire le signal, on part donc des coefficients a_k^{-J} et c_k^{-J} et on remonte les étapes successives ($j = -J$ à $j = 0$) de l'algorithme de décomposition.

Ces calculs peuvent être schématisés comme suit :

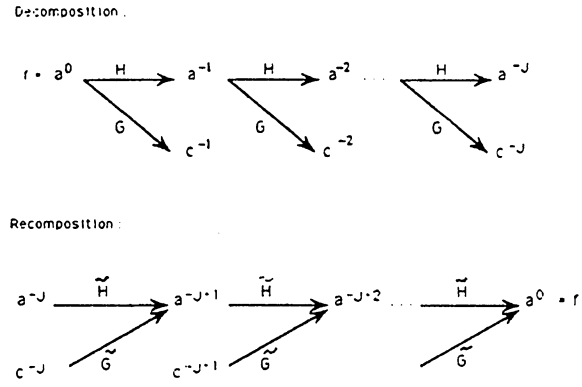


Fig.3.2: Schéma de décomposition-recomposition 1-D de l'algorithme de S. Mallat [62]

3.2.2.2 Mise en œuvre numérique 2-D

3.2.2.2.*a* Décomposition

Soit $(\mathcal{V}_j)$ une analyse multirésolution séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Désignons par $\mathcal{W}_{j-1}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{V}_{j-1}$ dans $\mathcal{V}_j$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_j &= \mathcal{V}_{j-1} \oplus \mathcal{W}_{j-1} \\ &= \mathcal{V}_{j-1} \oplus \mathcal{W}^1_{j-1} \oplus \mathcal{W}^2_{j-1} \oplus \mathcal{W}^3_{j-1}\end{aligned}$$

Comme dans le cas monodimensionnel, à l'étape j de la décomposition, on part de $f_j \in \mathcal{V}_j$. On a alors :

$$\begin{aligned}f_j(x,y) &= \sum_n \sum_m a^j_{nm} \phi_{j,nm}(x,y) \\ &= \sum_n \sum_m a^{j-1}_{nm} \phi_{j-1,nm}(x,y) + \sum_n \sum_m \Big[C^1_{j-1,nm} \psi^1_{j-1,nm}(x,y) \\ &+ C^2_{j-1,nm} \psi^2_{j-1,nm}(x,y) + C^3_{j-1,nm} \psi^3_{j-1,nm}(x,y) \Big]\end{aligned}$$

où

$a^{j-1}_{nm} = (f_j, \phi_{j-1,nm})$, $C^1_{j-1,nm} = (f_j, \psi^1_{j-1,nm})$, $C^2_{j-1,nm} = (f_j, \psi^2_{j-1,nm})$ et $C^3_{j-1,nm} = (f_j, \psi^3_{j-1,nm})$

Les ondelettes ψ^1, ψ^2 et ψ^3, sont définies à la section 1.3.2.2. Du fait que $\phi_{j-1,kl} \in \mathcal{V}_{j-1} \subset \mathcal{V}_j$, on a

$$\phi_{j-1,kl} = \sum_n \sum_m \Big(\phi_{j-1,kl}, \phi_{j,nm} \Big) (f_j, \phi_{j,nm})$$

et donc

$$a_{kl}^{j-1} = \sum_n \sum_m \Big(\phi_{j-1,kl}, \phi_{j,nm}\Big) a_{nm}^j$$

Compte tenu du fait que

$$\phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

où φ est la fonction d'échelle associée à l'analyse multirésolution (V_j) de $L^2(\mathbb{R})$; un calcul direct donne

$$(\phi_{j-1,kl}, \phi_{j,nm}) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\frac{x}{2})\varphi(x-(n-2k))dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\frac{y}{2})\varphi(y-(m-2l))dy\right)$$

c'est à dire que

$$(\phi_{j-1,kl}, \phi_{j,nm}) = h(n-2k)h(m-2l)$$

On obtient donc

$$a_{kl}^{j-1} = \sum_n \sum_m h(n-2k)h(m-2l)a_{nm}^j \tag{3.8}$$

De la même manière, en remarquant que

$$\psi_{j-1,kl}^1 \in \mathcal{W}_{j-1}^1 \subset \mathcal{V}_j,\ \psi_{j-1,kl}^2 \in \mathcal{W}_{j-1}^2 \subset \mathcal{V}_j, \quad \text{et} \quad \psi_{j-1,kl}^3 \in \mathcal{W}_{j-1}^3 \subset \mathcal{V}_j$$

On a :

$$C_{j-1,kl}^1 = \sum_n \sum_m h(n-2k)g(m-2l)a_{nm}^j$$

$$C_{j-1,kl}^2 = \sum_n \sum_m g(n-2k)h(m-2l)a_{nm}^j$$

$$C_{j-1,kl}^3 = \sum_n \sum_m g(n-2k)g(m-2l)a_{nm}^j$$

h et g sont les filtres discrets définis à la section 3.2.2.1.a.

Il convient de remarquer que les coefficients d'ondelettes de l'image sont calculés comme dans le cas 1-D. A l'étape j de la décomposition, l'image a_{nm}^j est décomposée sur des sous-espaces orthogonaux; chacune des sous-images obtenues est ainsi constituée par les coefficients d'ondelettes $C_{j,kl}^1$, $C_{j,kl}^2$, et $C_{j,kl}^3$, $0 \leq k,l \leq 2^j N - 1$, $-J \leq j \leq -1$, où N^2 est le nombre d'échantillons de l'image initiale.

3.2.2.2.*b* Recomposition

L'algorithme de reconstruction 1-D peut être facilement étendu à plusieurs dimensions. Un calcul direct montre qu'à chaque étape j de la reconstruction, l'image a^j_{nm} est reconstruite à partir de a^{j-1}_{nm} et des coefficients d'ondelettes $C^1_{j-1,kl}$, $C^2_{j-1,kl}$, et $C^3_{j-1,kl}$. On a :

$$a^j_{nm} = \sum_k \sum_l \Big[\tilde{h}(2k-n)\tilde{h}(2l-m)a^{j-1}_{kl} + \tilde{h}(2k-n)\tilde{g}(2l-m)C^1_{j-1,kl} + \tilde{g}(2k-n)\tilde{h}(2l-m)C^2_{j-1,kl} + \tilde{g}(2k-n)\tilde{g}(2l-m)C^3_{j-1,kl} \Big]$$

où $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ sont les filtres discrets définis à la section 3.2.2.1.*b*.

Le schéma de la décomposition-reconstruction est présenté ci-dessous.

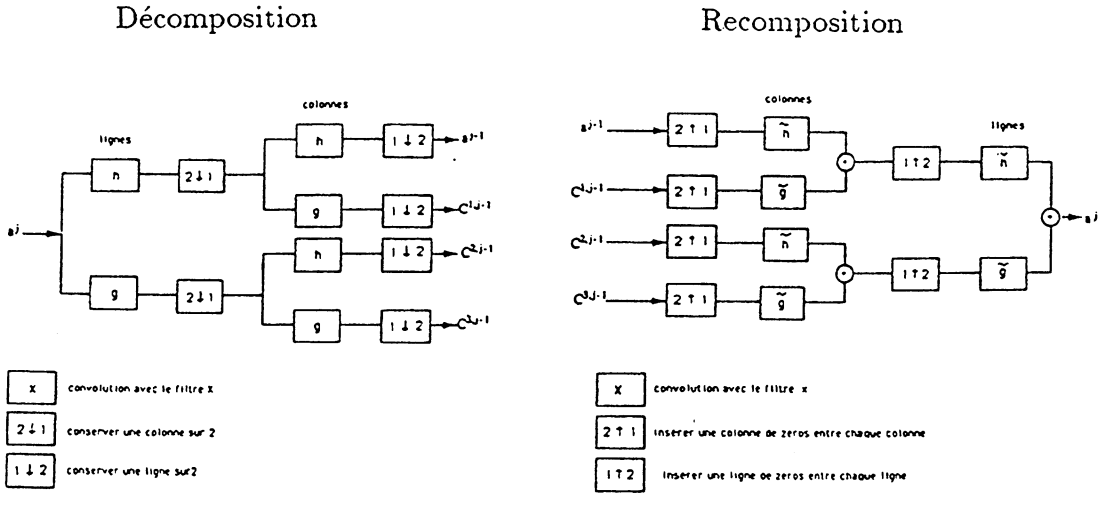


Fig.3.3 : Schéma de décomposition-recomposition 2-D de l'algorithme de S. Mallat [62]

3.2.2.2.*c* Remarque

L'algorithme de S. Mallat est exact lorsque les filtres h et g sont finis. Ce qui est le cas par exemple des ondelettes à support compact de I. Daubechies ou des ondelettes splines (à décroissance exponentielle) qui sont numériquement considérées à support compact. Dans ce cas le coût de l'algorithme est de l'ordre de $L \cdot N$ opérations dans le cas $1-D$ et de l'ordre $L \cdot N^2$ opérations dans le cas 2-D où L est la largeur du filtre et N (respectivement N^2) le nombre d'échantillons du signal (respectivement de l'image) d'entrée. C'est un algorithme qui pose des

problèmes de bord puisqu'il est adapté à des ondelettes définies sur $\mathbb{R}$ donc prévu pour des signaux à valeurs dans $\mathbb{R}$; or dans la pratique les signaux analysés sont à support borné. Pour remédier à ces problèmes de bord, S. Mallat [67] propose de prolonger le signal en dehors de son domaine de définition. Nous avons plutôt utilisé le "procédé d'adoucissement" décrit à la section 3.2.1.2.*c*. Seulement, au lieu d'élargir le signal à $2N$ échantillons (cas du calcul de la transformée en ondelettes continue 1-D), on peut se limiter à $\frac{3N}{2}$ ou $\frac{3N}{4}$ échantillons et on obtient une parfaite reconstruction.

3.2.3 Tests de validation du calcul numérique des coefficients d'ondelettes

Nous avons effectué de nombreux tests numériques visant à valider les calculs numériques des coefficients d'ondelettes. Une comparaison entre coefficients d'ondelettes théoriques et numériques faite à partir des exemples donnés aux sections 1.3.1.5 et 1.3.3.1.*b* a permis d'évaluer la précision des calculs numériques qui est de l'ordre de 10^{-5}.

3.2.3.1 Tests dans le cas monodimensionnel

Dans le cadre des tests visant à valider les calculs numériques, nous présentons ici l'application de l'analyse par ondelettes à certains signaux académiques bien connus. Les résultats obtenus sont très satisfaisants et confirment la théorie.

3.2.3.1.*a* Ondelettes et détection de discontinuités

- **Cas de la transformée en ondelettes continue**

Les résultats de l'analyse par ondelettes de signaux académiques sont présentés dans plusieurs travaux [27][39][72][77]. Les quantités visualisées sont généralement le module et la phase des coefficients d'ondelettes (complexes). Faisons remarquer que le coefficient d'ondelette $C_f(a,b)$ peut s'écrire

$$C_f(a,b) = |C_f(a,b)|e^{i\varphi(a,b)}, \quad 0 \leq \varphi(a,b) \leq 2\pi$$

Le module $|C_f(a,b)|$ apporte un renseignement quantitatif (répartition d'énergie du signal dans le demi-plan temps-fréquence) pendant que la phase $\varphi(a,b) = Arg(C_f(a,b))$ apporte un renseignement qualitatif (convergence des lignes d'isophases vers les points de singularité).

A titre d'exemple, nous présentons ici l'analyse de trois signaux académiques : un créneau sur $[-1,1]$, un Dirac et une sinusoïde $(sin(2\pi x))$. Nous signalons que nous avons au préalable utilisé, pour les tests, plusieurs types d'ondelettes notamment celles données en exemple dans la section 1.3.1.4 et nous avons obtenus des résultats cohérents. C'est dire donc qu'a priori, le code que nous avons développé ne privilégie aucune ondelette particulière. Mais, à titre d'exemple, nous nous limitons ici aux seules ondelettes de Morlet et chapeau mexicain (plutôt l'ondelette complexe progressive chapeau mexicain) qui sont les plus couramment utilisées dans la pratique.

Notons que la transformée en ondelettes d'un signal dépendant d'une seule variable (le temps ou l'espace) donne des coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$

dépendant de deux variables "b" et "a" telles que "b" est la position (dans le temps ou l'espace) où l'ondelette a été convoluée avec le signal, et "$\frac{1}{a}$" représente l'échelle spectrale (fréquence ou nombre d'onde). Pour la représentation graphique, nous avons utilisé le système de coordonnées $\{b, -log(a)\}$.

Les quantités visualisées sont le module et la phase des coefficients d'ondelettes.

* **Module des coefficients d'ondelettes**

- **créneau**

Nous constatons à la figure $Fig.3.4$ que les coefficients ont de grandes valeurs (en module) aux points de discontinuité ($b = 0$ et $b = 1$) du signal. Ces points singuliers sont mis en évidence dans les petites échelles. Les plus grandes valeurs des coefficients sont situées dans les plus grandes échelles, dans la zône même de la singularité; ce qui montre que le signal est un phénomène basse fréquence.

- **Dirac**

La représentation du module des coefficients dans le plan temps-fréquence forme un cône qui pointe vers la discontinuité ($Fig.3.4$). Les plus grandes valeurs des coefficients sont situées dans les plus petites échelles à la position même du Dirac, illustrant ainsi que le signal est un phénomène purement haute fréquence.

- **signal monochromatique**

On constate ($Fig.3.4$) une mise en évidence de la fréquence fondamentale.

- **Synthèse** : En résumé, nous remarquons dans les différentes décompositions que les points de singularité sont mis en évidence dans les plus petites échelles. Ces singularités se manifestent par des coefficients d'ondelettes grands en module.

• **Phase des coefficients d'ondelettes**

L'interprétation de la phase est beaucoup plus délicate; cependant, sur tous les graphiques ($Fig.3.5$), nous observons que les lignes d'isophase ont la propriété de converger vers les points de singularités du signal.

- **Cas de la transformée en ondelettes discrète**

Dans le cas de la transformée en ondelettes discrète, le coefficient d'ondelette C_{jk} donne des informations au point $2^{-j}k$ et à l'échelle 2^{-j}. Pour un indice j fixé, considérons l'application $h : 2^{-j}k \longrightarrow C_{jk}$. Au voisinage d'un point où le signal analysé est peu régulière, le coefficient doit être grand en module. Il doit, au contraire, être petit si $2^{-j}k$ est dans une zône où le signal est très régulière. A titre d'exemple nous représentons l'application h pour les fonctions suivantes :

$f_1(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ une fonction discontinue
$f_2(x) = 2 - x^2$ sur $[-1,1]$ une fonction discontinue
$f_3(x) = 1 - x^2$ sur $[-1,1]$ une fonction continue
$f_4(x) = \chi_{[0,1]} sin(2\pi x)$ une fonction continue

Pour ces différentes fonctions, nous présentons pour j fixé, le graphique des coefficients d'ondelettes C_{jk} tracé au dessous de la représentation du signal initial. Les graphiques ($Fig.3.6$) montrent qu'au voisinage des discontinuités du signal analysé, les coefficients d'ondelettes sont oscillants et grands en module (cas de f_1, f_2). On constate également que des discontinuités "cachées" (par exemple discontinuités des dérivées premières) sont aussi repérées : c'est le cas de f_3 et f_4.

La figure $Fig.3.7$ présente des exemples de reconstruction de quelques signaux à l'aide de l'algorithme de décomposition-recomposition de S. Mallat. On constate qu'on a une reconstruction parfaite dans tous les exemples montrés. Ces exemples rentrent également dans le cadre des tests effectués.

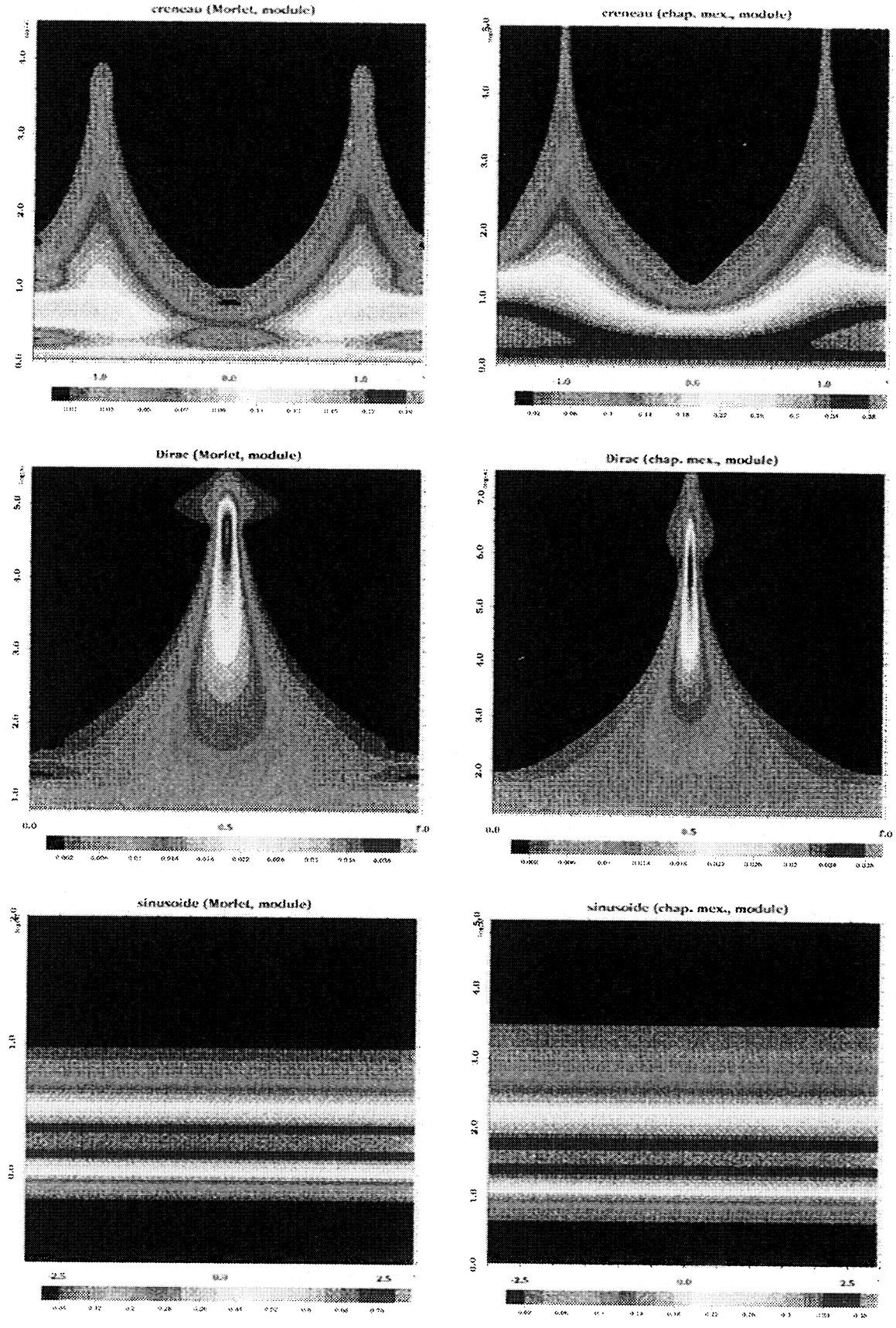


Fig.3.4 : Exemples de détection de discontinuité à l'aide de la transformée en ondelettes continue. On représente le module des coefficients d'ondelettes. L'intensité de la couleur correspond à la valeur du module. A gauche, analyse par l'ondelette de Morlet ($\omega_0 = 5$) . A droite, analyse par l'ondelette chapeau mexicain complexe progressive. Le système de coordonnées utilisé est $\{b, -\log a\}$. Le nombre de voies par octave choisi est 8. En haut, analyse du créneau sur [-1,1]. Au milieu, analyse d'un Dirac en $x = 0.5$. En bas, analyse d'une sinusoïde pure ($sin(2\pi x)$) sur [-3, 3]).

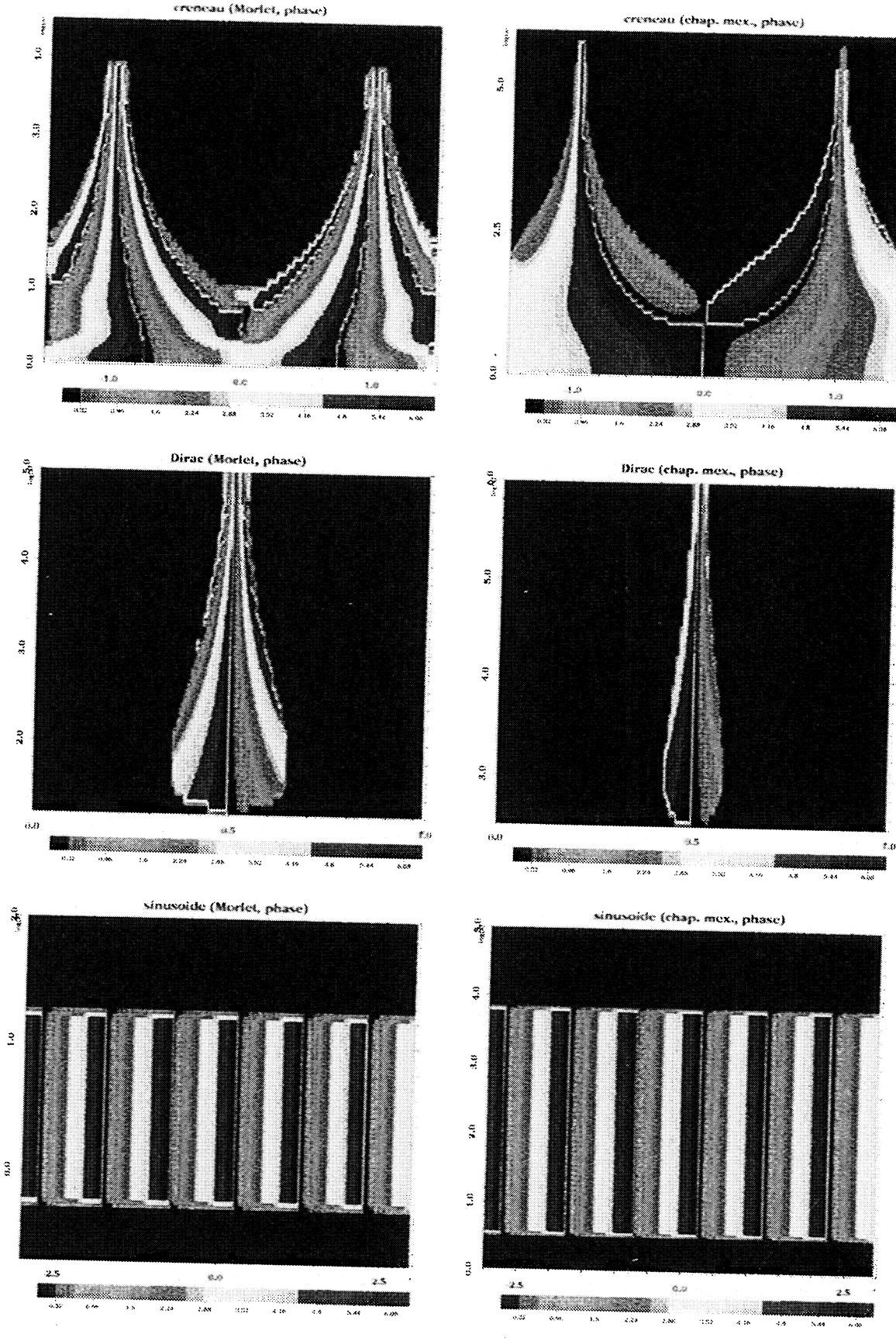


Fig.3.5 : Exemples de détection de discontinuité à l'aide de la transformée en ondelettes continue. On représente la phase des coefficients d'ondelettes. L'intensité de la couleur correspond à la valeur de la phase. A gauche, analyse par l'ondelette de Morlet ($\omega_0 = 5$). A droite, analyse par l'ondelette chapeau mexicain complexe progressive. Le système de coordonnées utilisé est $\{b, -\log a\}$. Le nombre de voies par octave choisi est 8. En haut, analyse du créneau sur [-1,1]. Au milieu, analyse d'un Dirac en $x = 0.5$. En bas, analyse d'une sinusoïde pure ($sin(2\pi x)$) sur [-3, 3]).

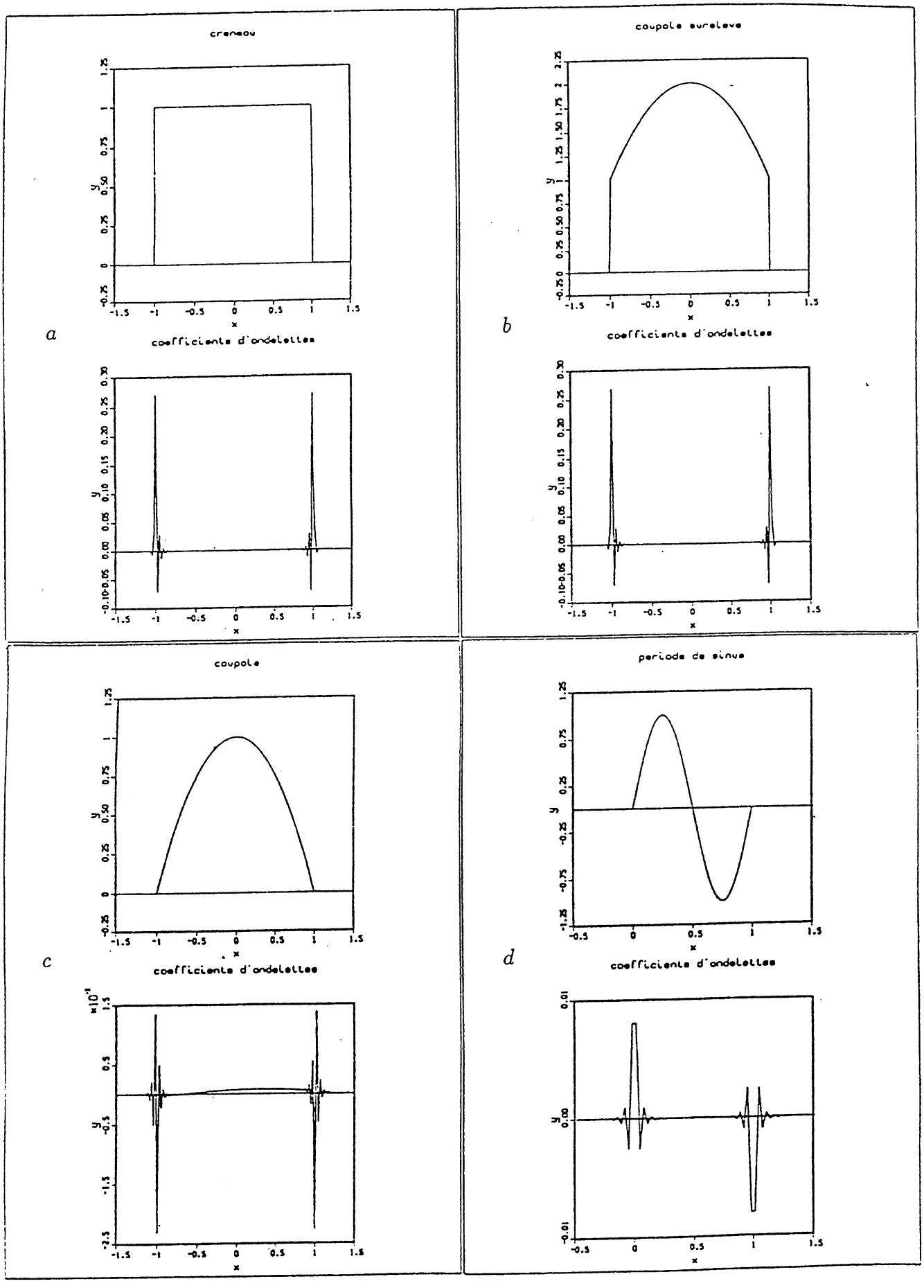
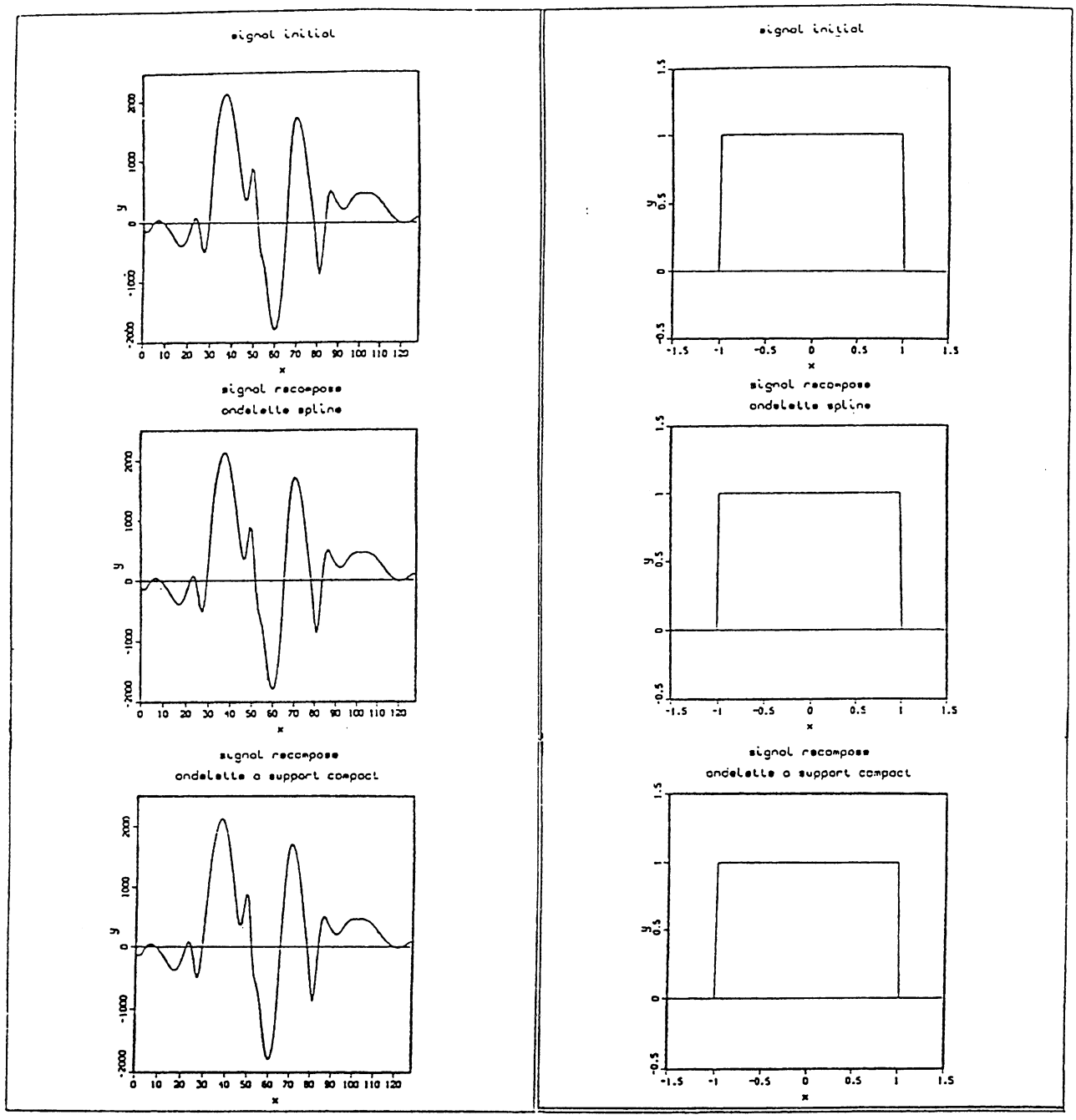


Fig.3.6 : Exemples de détection de discontinuité à l'aide de la transformée en ondelettes discrète. L'ondelette utilisée est l'ondelette spline de dégré 3. La décomposition est faite sur trois niveaux de résolution ($j = -1, -2, -3$). On représente les coefficients d'ondelettes C_{jk} ($j = -1$) au dessous du signal initial. (a) créneau sur [-1,1] (fonction discontinue). (b) coupole surélévé sur [-1,1] (fonction discontinue). (c) coupole sur [-1,1] (fonction continue). (d) une



a *b*

Fig.3.7 : Exemples de reconstruction de signaux à l'aide de la transformée en ondelettes discrète. La décomposition-recomposition est faite sur trois niveaux d'échelles (j=-1,-2,-3). En haut, le signal initial; au milieu, le signal reconstruit à l'aide de l'ondelette spline de dégré 3 et en bas, le signal reconstruit à l'aide de l'ondelette à support compact ψ_5. (*a*) un signal réel (section unidimensionnelle de vorticité). (*b*) un signal académique (créneau sur [-1,1]).

3.2.3.2 Tests dans le cas bidimensionnel

A titre d'exemple, nous présentons les tests suivants que nous avons également effectué, dans le cas bidimensionnel.

a/ Considérons par exemple, le signal monochromatique $s(\vec{x}) = e^{2i\pi\vec{\omega}\vec{x}}$ sur $[0,1] \times [0,1]$. Nous avons que :

$$C_s(a,r,\vec{b}) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^2} s(\vec{x})\overline{\psi}\Big(r^{-1}\big(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\big)\Big)d\vec{x}$$

Par souci de simplicité, posons $r = I$, et $\vec{b} = \vec{0} = (0,0)$. On a

$$C_s(a,r,\vec{0}) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^2} s(\vec{x})\overline{\psi}(\frac{\vec{x}}{a})d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{s}(\vec{\xi})\overline{\hat{\psi}}(a\vec{\xi})d\vec{\xi}$$

$$= (\Delta\xi)^2 \sum_n \sum_m \hat{s}_{nm}.\overline{\hat{\psi}}(a\xi_{nm})$$

où $\xi_{nm} = (n\Delta\xi, m\Delta\xi)$ et $\hat{s}_{nm}$ est la transformée de Fourier discrète de $s(i\Delta x, j\Delta y)$. Puisque $\hat{\psi}$ est connue analytiquement, le calcul de $\overline{\hat{\psi}}(a\xi_{nm})$ est un calcul exact. Or

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{nm} &= \frac{1}{N^2}\sum_k\sum_l s(k\Delta x, l\Delta y)e^{-\frac{2i\pi}{N}(nk+ml)} \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_k\sum_l e^{2i\pi\vec{\omega}(k\Delta x, l\Delta y)}e^{-\frac{2i\pi}{N}(nk+ml)} \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi(\omega_1 k\Delta x - \frac{nk}{N})}\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi(\omega_2 l\Delta y - \frac{ml}{N})}\right) \quad \text{(on tronque)} \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(\omega_1 - n)k}\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(\omega_2 - m)l}\right) \quad \text{(suites géométriques)} \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\frac{1-e^{2i\pi(\omega_1-n)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{N}(\omega_1-n)}}\right)\left(\frac{1-e^{2i\pi(\omega_2-m)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{N}(\omega_2-m)}}\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\hat{s}(\vec{\xi}) = \widehat{e^{2i\pi\vec{\omega}\vec{\xi}}} = \delta_{\vec{\omega}}$$

On déduit donc que $\hat{s}_{nm}$ est une meilleure approximation de $\hat{s}(\vec{\xi})$ si $(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{N}^2$, et que par contre, cette approximation est mauvaise si $(\omega_1,\omega_2) \notin \mathbb{N}^2$.

Ainsi, on a une bonne précision sur le calcul des $C_f(a,r,\vec{b})$ si $(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{N}^2$, qui est par contre mauvaise si $(\omega_1,\omega_2) \notin \mathbb{N}^2$.

Le calcul numérique des coefficients d'ondelettes confirme effectivement cette hypothèse. La précision est de l'ordre de 10^{-5} si $(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{N}^2$, et elle est très

mauvaise (voire de l'ordre de 10^{-1}) si $(\omega_1, \omega_2) \notin I\!N^2$.

b/ Un second test effectué consiste à considérer toujours le signal $s(\vec{t}) = e^{2i\pi\vec{\omega}\vec{t}}$ ainsi que ses coefficients d'ondelettes donnés par (cf. section 1.3.1.5) :

$$C_s(a, r, \vec{b}) = a\overline{\hat{\psi}}(ar^{-1}\vec{\omega})e^{2i\pi\vec{b}\vec{\omega}}$$

Prenons $r = I$ (ie, $\theta = 0$) par souci de simplicité. Il vient que

$$\frac{|C_s(a, r, \vec{b})|}{a} = |\overline{\hat{\psi}}(a\vec{\omega})|$$

Supposons, pour $\vec{\omega}$ fixé, que $\hat{\psi}$ (raméné à une dimension) atteint son maximum en un point ξ_0. Alors $\hat{\psi}(a\vec{\omega})$ atteint son maximum en a_0 tel que $a_0 = \frac{\xi_0}{|\vec{\omega}|}$. D'où le maximum de $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ est pris en $a_0|\vec{\omega}| = \xi_0$. Nous examinons ci-dessous, cette hypothèse pour $\vec{\omega} = (17.4, 13.7)$ par exemple et ceci pour chacune des deux ondelettes (Morlet et chapeau mexicain).

Pour l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle, on a

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = 8\pi^3(\xi^2 + \eta^2)e^{-2\pi^2(\xi^2+\eta^2)}.$$

Ramenons-nous en une dimension par souci de simplicité. On considère donc

$$\hat{\psi}(\xi) = 8\pi^3\xi^2 e^{-2\pi^2\xi^2}$$

Sa dérivée

$$\hat{\psi}'(\xi) = 16\pi^3(1 - 2\pi^2\xi^2)\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$$

s'annule pour $\xi_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}$. Par conséquent, $\hat{\psi}$ atteint son maximum en $\xi_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}$ $\simeq 0.225$. Or le maximum de $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ est pris en $a_0 \simeq 0.9683910^{-2}$ (cf. figure *Fig.*3.8). Il vient alors que $a_0|\vec{\omega}| = 0.2198 \simeq 0.2 = \xi_0$

Pour l'ondelette de Morlet bidimensionnelle, on a

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = 2\pi e^{-\left[\frac{(2\pi\xi - k)^2 + (2\pi\eta - k')^2}{2}\right]}$$

et en se ramenant toujours en une dimension, on a

$$\hat{\psi}(\xi) = 2\pi e^{-\frac{(2\pi\xi - k)^2}{2}}$$

et

$$\hat{\psi}'(\xi) = 8\pi^2(2\pi\xi - k)e^{-\frac{(2\pi\xi - k)^2}{2}}$$

s'annule, pour $\xi_0 = \frac{k}{2\pi}$. D'où $\hat{\psi}$ atteint son maximum en $\xi_0 = \frac{k}{2\pi} \simeq 0.795 \simeq 0.8$ $(k = 5)$ (cf. figure *Fig.*3.8). Ici le maximum de $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ est pris en $a_0 \simeq 0.3716610^{-1}$ et $a_0|\vec{\omega}| = 0.843 \simeq \xi_0$.

Dans les deux cas, le calcul numérique des coefficients d'ondelettes vérifie effectivement que, pour $\vec{\omega}$ fixé, $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ est maximum en une valeur a_0 telle que $a_0|\vec{\omega}| = \xi_0$.

Nous présentons à la figure *Fig.*3.8 les graphiques de $\hat{\psi}$ et de $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ pour chacune des deux ondelettes.

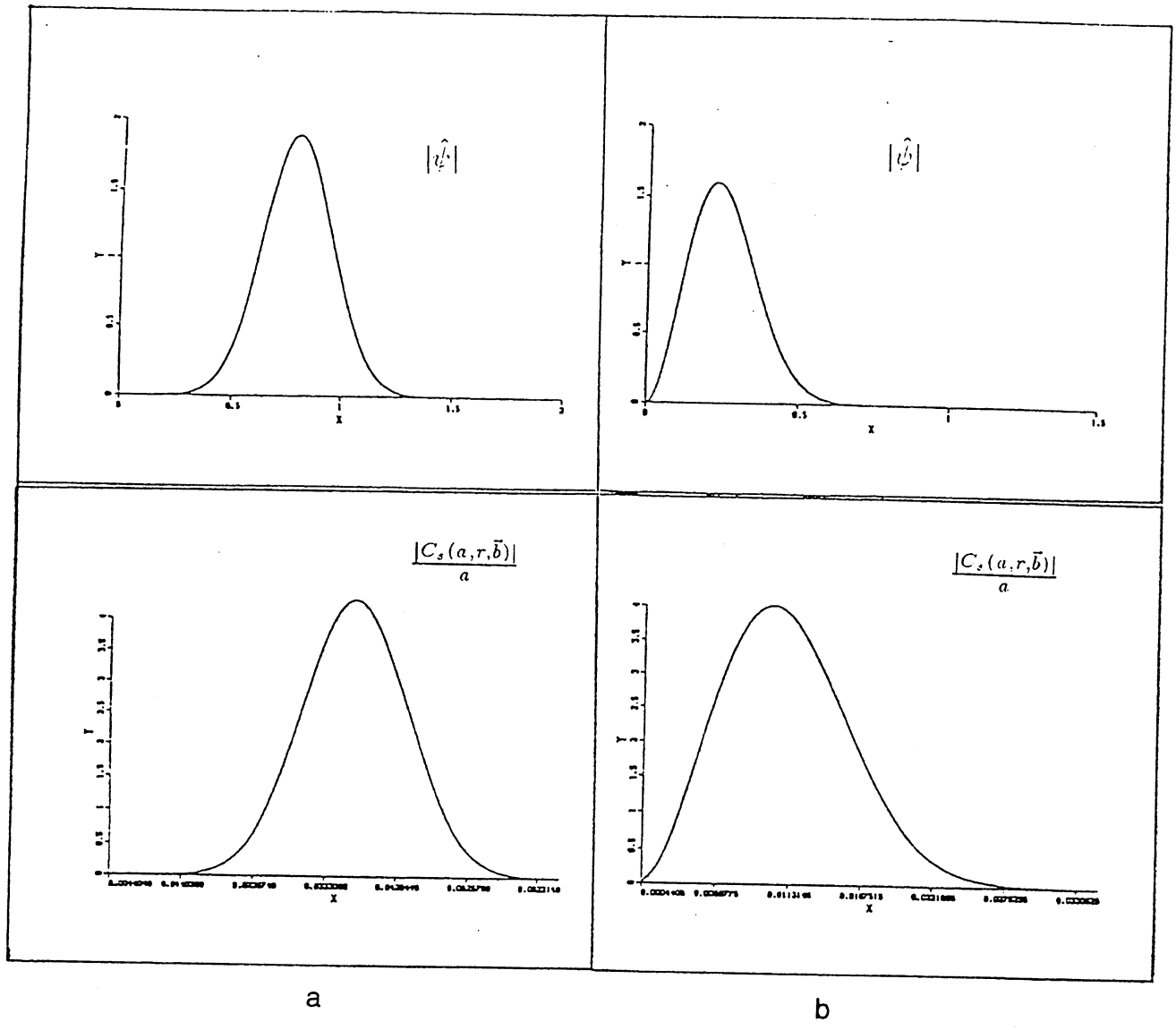


Fig.3.8 : Tracés graphiques de $|\hat{\psi}|$ et de $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a} = |\overline{\hat{\psi}}(a\vec{\omega})|$. Les $|C_s(a,r,\vec{b})|$ ($r = I$, $\vec{b}$ fixé) sont les coefficients d'ondelettes de $s(\vec{t}) = e^{2i\pi\vec{\omega}\frac{\vec{a}}{t}}$ avec $\vec{\omega} = (17.4, 13.7)$. On représente $|\hat{\psi}|$ (en haut) et $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ (en bas). $\frac{|C_s(a,r,\vec{b})|}{a}$ est représenté en fonction de a.

(a) L'ondelette utilisée est celle de Morlet.

(b) L'ondelette utilisée est le chapeau mexicain complexe progressive.

Chapitre 4

Application de l'analyse par ondelettes aux signaux électriques et aux tourbillons océaniques

4.1 Introduction

Nous présentons dans cette section une application de l'analyse par ondelettes aux signaux électriques générés lors des expériences chez Merlin Gerin (société spécialisée en construction de matériels électriques), ainsi qu'aux tourbillons océaniques engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream de l'équipe MEOM du LEGI-IMG.

Pour l'analyse, on préfère utiliser la transformée en ondelettes continue dont la redondance permet un déploiement de l'information sur la grille complète espace-échelle; ce qui n'est pas le cas de la grille dyadique utilisée dans le cadre de la transformée en ondelettes discrète.

Nous utilisons des ondelettes complexes pour des raisons données dans la section 2.2 du chapitre 2 à savoir obtenir le module et la phase des coefficients d'ondelettes. Dans une première approche, les ondelettes considérées sont l'ondelette de Morlet et l'ondelette "chapeau mexicain complexe progressive" (cf. section 2.3 du chapitre 2) qui sont les plus couramment utilisées dans le domaine de l'analyse.

Pour donner un sens physique à l'interprétation que nous faisons de l'analyse en ondelettes de ces signaux de cas réels, il est important de lier l'échelle a (paramètre de dilatation) à des nombres d'onde (ou fréquences). Les relations que nous avons établies dépendent de l'ondelette en question. Notons par k le nombre d'onde (ou fréquence) et par λ la longueur d'onde (ou période). Puisque c'est le carrée du module (amplitude) des coefficients d'ondelettes que nous calculons, qu'on le calcule avec l'ondelette ψ ou $-\psi$, le résultat reste inchangé. Ainsi, si on définit l comme la mesure du lobe principal de l'ondelette ψ, alors nous considérons l comme étant une demi-période et la longueur d'onde est dans ce cas $\lambda = 2l\Delta x$, où Δx est le pas d'échantillonnage du signal. Pour l'ondelette chapeau mexicain $l = 2a$ et pour l'ondelette de Morlet $l = \frac{a\pi}{\omega_0}$, où ω_0 est la constante qui intervient dans l'expression analytique de l'ondelette en question. Ainsi, pour l'ondelette de Morlet, la relation cherchée est $k_m = \frac{1}{\lambda_m} = \frac{\omega_0}{2\pi a \Delta x}$; et pour l'ondelette chapeau mexicain, on a $k_c = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{4a\Delta x}$.

Il est à remarquer que λ_m est de l'ordre de $\frac{1}{4.5}$ du support de l'ondelette de Morlet pendant que λ_c est de l'ordre de $\frac{2}{3}$ du support de l'ondelette chapeau mexicain.

4.2 Analyse par ondelettes des signaux électriques

Le logiciel d'analyse par ondelettes 1-D que nous avons développé est actuellement opérationnel chez Merlin Gerin et est utilisé pour l'étude de l'évolution temporelle des signaux électriques expérimentaux relativement à une fréquence d'observation. Une telle étude est intéressante pour la conception d'appareils électriques.

A titre d'exemple, nous présentons l'analyse par ondelettes de deux de ces signaux électriques : un signal de tension d'arc électrique et un courant de décharges partielles.

Sur les graphiques, le signal initial est représenté dans le domaine temporel au dessus de la représentation bidimensionnelle (temps-fréquence) de ses coefficients d'ondelettes. La quantité représentée est le module carré (amplitude) des coefficients d'ondelettes.

4.2.1 Analyse par ondelettes d'un signal de tension d'arc

Lors de la coupure d'un courant électrique en basse tension, on cherche à éteindre l'arc en dissipant l'énergie dans une chambre de coupure constituée d'éléments de plaque métallique (séparateurs) dans lesquels s'insère l'arc électrique. La tension d'arc s'élève alors pour atteindre une tension de l'ordre de $400V$.

L'arc est mobile et se déplace pendant la coupure en se désinsérant parfois de certains séparateurs. La tension d'arc diminue dans ce cas.

Pour obtenir une bonne coupure, il faut éviter des temps de désinsertion trop longs ou qui se reproduisent trop souvent car l'appareil vieillirait prématurément : il devrait absorber beaucoup trop d'énergie.

Il est donc intéressant lors de la conception d'un appareil de situer les instants où l'arc se désinsère de la chambre de coupure et les temps caractéristiques pour que l'arc retourne dans les séparateurs. C'est l'objectif de l'analyse par ondelettes des signaux de tension d'arc.

La figure $Fig.4.1.a$ montre un exemple de l'analyse par ondelettes d'un signal de tension d'arc. On observe que le signal présente de fortes variations aux instants $t_i \simeq 2.3332310^{-3}s$ et $t_{apc} \simeq 6.1147510^{-3}s$. Ces instants correspondent respectivement au moment où l'arc est introduit dans la chambre de coupure et à l'après coupure. On observe effectivement de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes aux instants t_i et t_{apc}. C'est la mise en évidence des fortes variations qui sont au début et à la fin du signal.

Par ailleurs, entre les instants t_i et t_{apc}, on peut également observer de grandes

amplitudes des coefficients d'ondelettes à des fréquences de l'ordre de 4, 6 et $12KHZ$ dans les reclaquages.

La fréquence $f_1 \simeq 4KHZ$ est localisée aux instants $t_1 \simeq 4.107310^{-3}s$ et $t_1' \simeq 4.620710^{-3}s$ pendant que les fréquences $f_2 \simeq 6KHZ$ et $f_3 \simeq 12KHZ$ sont respectivement localisées aux instants $t_2 \simeq 4.387310^{-3}s$ et $t_3 \simeq 4.293910^{-3}s$. On note à ces instants une baisse de la tension d'arc qui témoigne d'une désinsertion de l'arc électrique. Les fréquences f_1 et f_2 correspondent aux temps de désinsertion et sont propres à la géométrie du disjoncteur (propagation d'ondes de choc). La fréquence f_3 que l'on retrouve à l'instant t_3 est la fréquence propre du circuit correspondant à la tension transitoire de retablissement (TTR).

4.2.2 Analyse par ondelettes du courant de décharges partielles

Différents courants de fuite peuvent être à l'origine de la dégradation des isolants : courant de conduction, courant corona, courant de décharges partielles.

La superposition de plusieurs phénomènes dans un matériau soumis à une moyenne ou haute tension souligne la présence de défauts dans l'isolant et implique une réduction de la durée de vie du matériau. Ainsi, des mesures en cours de vie du matériau permettent de détecter les évolutions d'amplitude, d'énergie et de fréquence d'occurence (fréquence de repétition) des divers courants. Il est alors intéresssant d'étudier l'évolution temporelle de ces courants à une fréquence d'observation. D'où l'intérêt de l'analyse par ondelettes de ces courants de fuite. A titre d'exemple, la figure $Fig.4.1.b$ montre l'analyse par ondelettes du courant de décharges partielles.

Couramment, on distingue deux phénomènes hautes fréquences : les trichels de faible amplitude, de fréquence d'occurence de l'ordre de 10^5HZ et les streamers : phénomènes aléatoires, pic de courant intense et étroit ($\simeq 100ns$) et de fréquence d'occurence de l'ordre de quelques KHZ.

L'analyse par ondelettes met en évidence les trichels qu'on peut observer à la fréquence $log_{10}(f) \simeq 4.946 \simeq 5$, ie, $f \simeq 10^5HZ$ et aux instants $t_1 \simeq 47.058010^{-4}s$, $t_2 \simeq 50.260910^{-4}s$, $t_3 \simeq 52.129210^{-4}s$, $t_4 \simeq 54.531410^{-4}s$ et $t_5 \simeq 56.132810^{-4}s$.

L'analyse révèle l'absence des streamers.

4.2.3 Commentaire

Les résultats obtenus par l'analyse en ondelettes des signaux électriques sont très satisfaisants. En effet, l'analyse par ondelettes est bien adaptée au type de problème de Merlin Gerin à savoir : localisation temps-fréquence des phénomènes intervenant dans le signal.

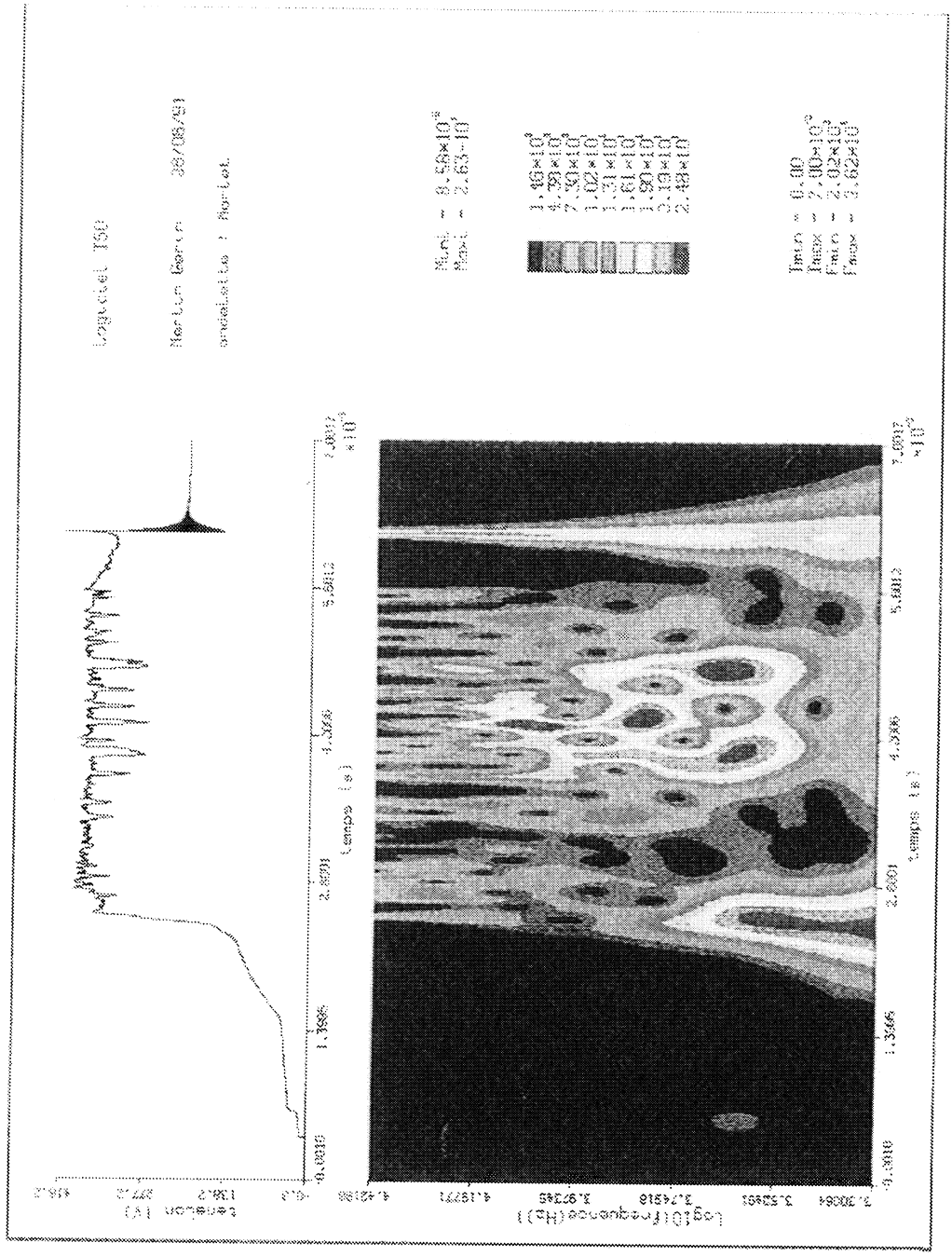


Fig.4.1.a : Analyse par ondelettes d'un signal de tension d'arc électrique.

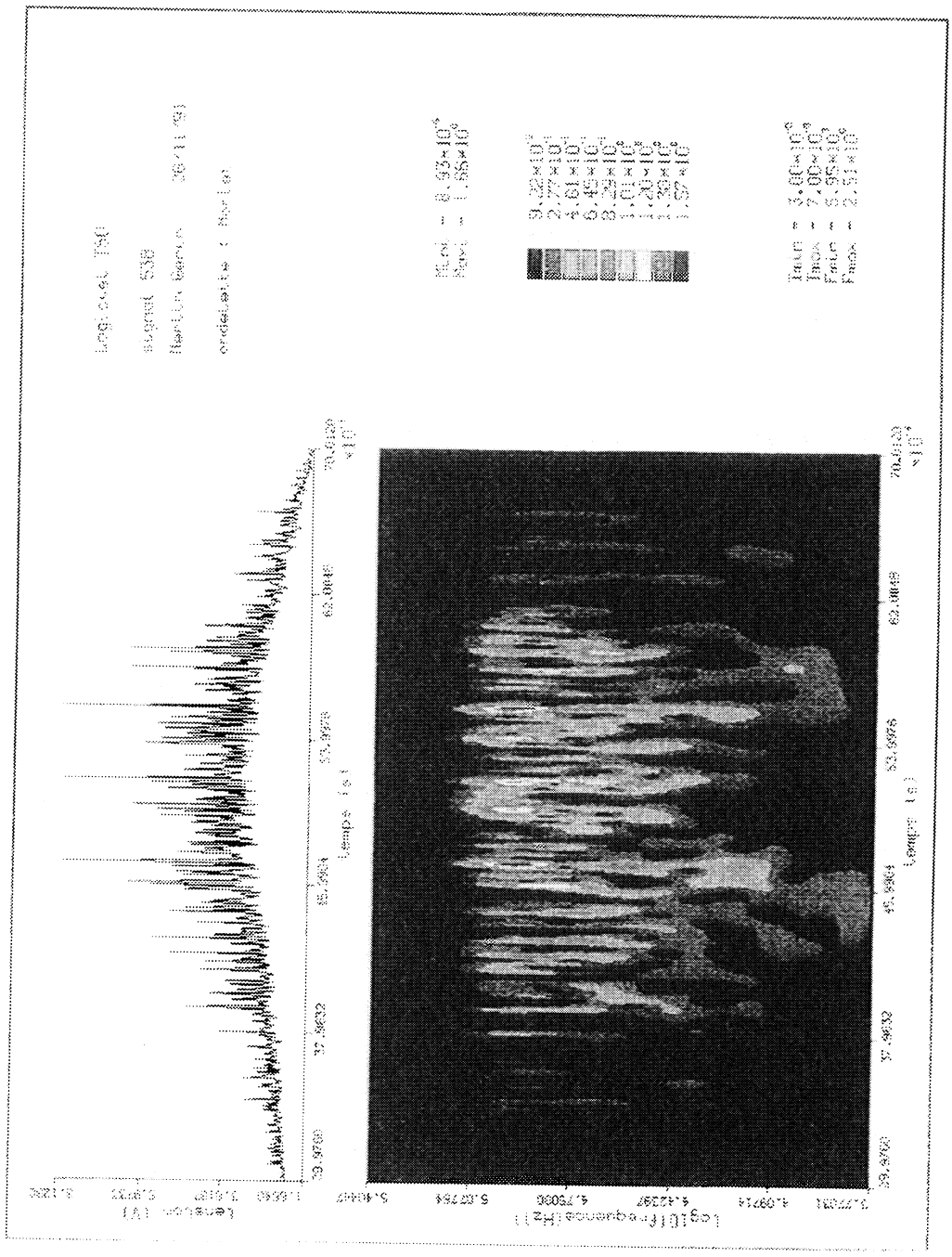


Fig.4.1.b : Analyse par ondelettes du courant de décharges partielles.

4.3 Analyse par ondelettes des tourbillons engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream

4.3.1 Introduction

La circulation océanique, aux latitudes moyennes, est géographiquement hétérogène et présente une dynamique multi-échelles. La circulation de l'océan Atlantique Nord en est un bon exemple. Sous l'influence du cisaillement du champ de vent (vents d'est aux hautes latitudes (50^0N), vents d'ouest aux latitudes moyennes (35^0N) et alizés plus près de l'équateur), les masses d'eau circulent (*Fig*.4.2.*a*) en une cellule anticyclonique au sud (tourbillon subtropical), avec une lente dérive intérieure dirigée vers l'équateur et un intense courant chaud de retour sur le bord ouest du bassin (le Gulf Stream), et une cellule cyclonique au nord (tourbillon subpolaire), avec sur le bord ouest un courant froid vers le sud (le courant du Labrador). Le Gulf Stream quite la côte américaine vers 37^0N pour pénétrer vers l'intérieur du bassin, et défini en quelque sorte la limite entre les cellules. Cette circulation permanente de grande échelle, s'accompagne d'une forte variabilité de méso-échelle, partout présente dans l'océan mais dont la répartion géographique est irrégulière. Cette agitation tourbillonnaire est la plus intense au voisinage des courants de bord ouest, où les instabilités de cisaillement en permettent le développement.

En conséquence, la dynamique océanique des latitudes moyennes est caractérisée par de fortes interactions entre différentes échelles, les processus d'instabilité et de rectification conditionnant en partie la structure de la circulation générale du bassin (Marshall [65], Barnier et al. [3]).

L'absence d'une couverture synoptique des variables océaniques par les observations traditionnelles est partiellement responsable d'une méconnaissance des interactions entre différentes échelles. La répartition spectrale (en nombre d'onde) de l'énergie dans l'océan est actuellement estimée d'après les résultats des modèles numériques, et non par des observations directes (exception faite des données satellitaires récentes).

4.3.2 Le modèle de circulation océanique

4.3.2.1 le modèle d'océan

Le modèle d'océan que nous utilisons dans cette étude est une généralisation multicouche du modèle de Holland [44]. Fondé sur l'approximation quasi-géostrophique (QG) (ie un modèle dérivé des équations de Navier-Stokes dans

un contexte d'approximation dit quasi-géostrophique et écrit sous la forme vorticité-fonction de courant), il simule la circulation générale d'un bassin océanique dans des géométries simples, en dessous de la couche mélangée. Sa résolution spatiale est assez fine pour qu'il permette explicitement la génération de tourbillons de méso-échelle par les instabilités internes de l'océan. Ce type de modèle QG a la capacité de simuler avec un certain réalisme la variabilité tourbillonnaire associée aux intenses courants de bord ouest des latitudes moyennes, telles que le Gulf Stream (Schmitz et Holland, [88]), et son équlibre dynamique dépend de façon crutiale des processus d'interactions multi-échelles (Barnier et al., [3]).

La géometrie du modèle (*Fig.*4.2.*b*) est une schématisation de l'Atlantique Nord par une boite rectangulaire de 3600 km par 3200 km, sa latitude centrale est positionnée à $37.5^0 N$, latitude à laquelle le Gulf Stream quitte la côte Americaine. La stratification est représentée par six couches superposées, chacune de densité homogène. Les trois premières couches (d'épaisseur cumulée 1050 mètres) représentent l'océan de surface, au dessus de la thermocline principale. Les trois autres couches (épaisseur cumulée 3950 mètres) décrivent l'océan profond.

Les équations du modèle traduisent, dans le cadre non-linéaire de l'approximation quasi-géostrophique, la conservation de la vorticité potentielle dans chaque couche. La paramétrisation des échelles sous-maille se fait à l'aide d'une friction biharmonique. L'énergie est dissipée dans la couche de fond par friction linéaire. Le modèle est forcé par un vent zonal, constant dans le temps, et variant sinusoidalement dans la direction méridienne. Cette schématisation du vent sur l'Atlantique Nord est classique dans ce type de simulation (Holland, [44]) et force une circulation de grande échelle à deux cellules simulant le tourbillon subtropical et le tourbillon subpolaire, au sud et au nord du bassin respectivement. La formulation du modèle et l'intégration aux différences finies des équations sont décrites par Schmitz et Holland [89]. La configuration détaillée du modèle à six couches est représentée dans Barnier et al. [3]. La grille horizontale sur laquelle les équations sont discrétisées a une résolution de 10 km.

4.3.2.2 Le modèle numérique

Le modèle numérique est obtenu par discrétisation de l'équation de la conservation de la vorticité potentielle sur un plan en coordonnées cartésiennes

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = \sum \text{termes de forçage et de puits d'énergie}$$

écrite pour chaque couche avec

$\zeta = -\Delta\psi$ est la vorticité relative, ψ étant une fonction de courant dont sont dérivées les vitesses horizontale et verticale u et v définies par $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$;

$f = f_0 + \beta y$: vorticité planétaire;

h : épaisseur de la couche;

$\frac{D}{Dt}$: dérivée lagrangienne.

Les conditions aux limites considérées sont de type glissement.

L'intégration de l'équation de vorticité est faite par différences finies sur une maille de 10 km. Le schéma numérique utilisé est un schéma explicite. On calcule de façon prognostique :

- la fonction de courant des couches : $\psi(x, y, t)$.

4.3.2.3 La circulation générale océanique simulée

Dans un état d'équilibre statisquement stationnaire, l'énergie injectée par le vent dans la couche de surface du modèle doit être transferée vers les couches profondes pour être dissipée par la friction de fond. Comme le modèle n'inclut pas de friction interfaciale entre les différentes couches, ce transfert ne peut se faire que par les circulations transitoires, à travers le couplage de pression. En conséquence, pendant la phase de mise en équilibre du modèle, une circulation à double cellule s'établit dans la couche de surface, avec une lente dérive méridienne à l'intérieur, et un courant de bord ouest qui quitte la côte a une latitude centrale pour se concentrer en un jet zonal. Ce jet s'intensifie jusqu'à devenir instable. Il génère alors des méandres et des tourbillons de méso-échelle, qui propagent l'énergie vers les couches profondes et engendrent une circulation abyssale (en profondeur) permanente par des processus de rectification. Le modèle atteint un état d'équilibre lorsque les transferts d'énergie vers les couches profondes contrebalencent l'injection d'énergie dans la couche de surface.

La circulation moyenne des couches 1,3 et 6, présentée en *Fig.*4.5.*a*, est tout à fait représentative de ce type de simulation (Holland [45]), et est largement commentée dans Barnier et al. [3]. La couche de surface exhibe une circulation à deux cellules antisymétriques, avec un gyre anticyclonique au sud et un gyre cyclonique au nord. A l'intérieur, la dérive méridienne de Sverdrup rejoint un courant de bord ouest qui, à la latitude médiane se sépare de la côte et pénètre vers l'intérieur du bassin en un long jet vers l'est, qui simule le Gulf Stream. De chaque côté du jet on remarque un retour des masses d'eau vers l'ouest (recirculation inertielle d'étendue méridienne limitée). Aux profondeurs intermédiaires (couche 3 par exemple), la circulation se fait encore à l'échelle du bassin, mais les tourbillons inertiels apparaissent dominants. Dans les couches de fond, la

signature du jet de surface se limite à la circulation inertielle qui est prédominante. De part et d'autre de cette circulation, on observe des cellules de circulation inversée qui sont en fait engendrées par les tourbillons de méso-échelle, et sont caractéristiques de la circulation abyssale.

4.3.2.4 La génération des tourbillons de méso-échelle

Dans la présente étude, l'attention est concentrée sur la génération des tourbillons de méso-échelle. La circulation instantannée (*Fig.*4.3) montre un jet puissant, comportant de larges méandres. On remarque dans le courant de retour des structures tourbillonnaires de méso-échelle qui dérivent lentement vers l'ouest. Ces tourbillons (qui dans nos simulations représentent les anneaux du Gulf Stream) se forment généralement à l'extrémité du jet, comme le montre la séquence de la figure *Fig.*4.5 – *b*. Les processus physiques qui engendrent ces structures sont reliés aux instabilités baroclines et barotropes (Robinson et al. [82]).

Le rôle de cette variabilité de méso-échelle dans l'établissement de la circulation moyenne a été largement étudié. Des études sur la turbulence libre ont montré une cascade inverse de l'énergie vers les grandes échelles horizontales et verticales (Rhines [79]). Lorsque la turbulence est forcée, les caracteristiques de la turbulence se trouvent notablement modifiées selon la nature du forçage (Hua and Haidvogel [48], Treguier and Hua [91]), mais la cascade inverse reste le phénomène prédominant.

Le cas d'une turbulence quasi-géostrophique entretenue par les instabilités internes d'un fort courant inertiel est plus délicat à étudier, car l'écoulement n'est pas isotrope dans la région du jet. Les méthodes spectrales habituellement utilisées pour caractériser la turbulence donne des résultats d'interprétation difficile. Les spectres de la figure *Fig.*4.4 par exemple, caractérisent le champ tourbillonnaire dans l'expérience faite par l'équipe MEOM du LEGI-IMG. Ils ont globalement l'allure des spectres que l'on observe dans les expériences de turbulence homogène et isotrope (pente en k^{-2} dans la zône inertielle et en k^{-6} dans la zône dissipative), ce qui permet d'affirmer la forte présence de la cascade inverse d'énergie. Cependant, ces spectres couvrent aussi bien des structures de grande échelle, telles que les tourbillons subtropicaux et subpolaires, que des structures anisotropes comprenant des grandes et moyennes échelles, telles que le jet et les cellules de recirculation inertielles, dont l'échelle zonale est bien supérieure à l'échelle méridienne, et des structures de méso-échelles à forte variabilité, telles que les tourbillons de méso-échelles et les ondes planétaires. Ceci rend leur interprétation problématique, car ils ne permettent pas de faire la part des différents processus physiques qui sont dominants dans telle ou telle région de l'océan.

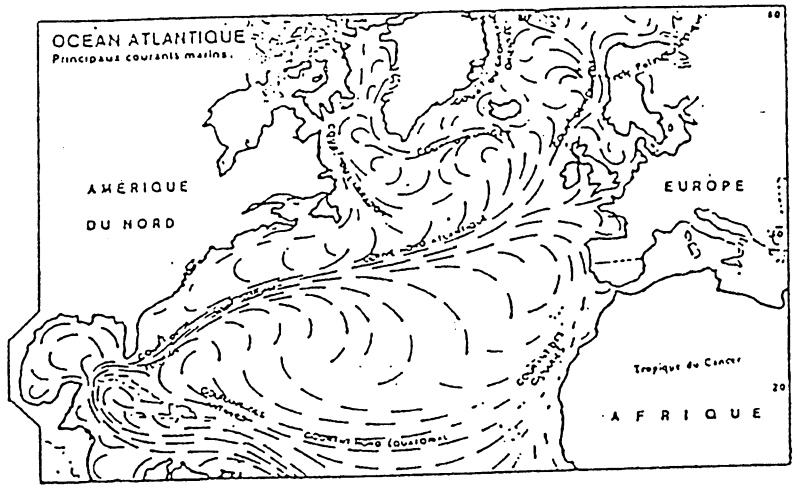


Fig.4.2.a

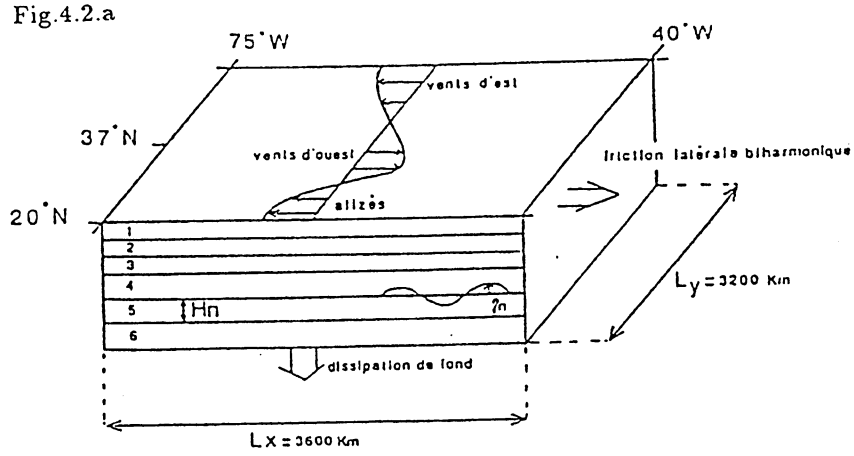


Fig.4.2.b

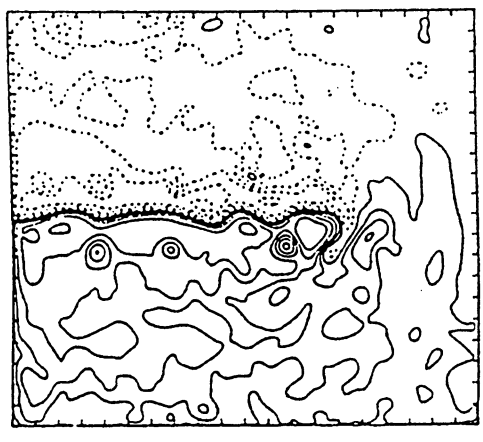


Fig.4.3

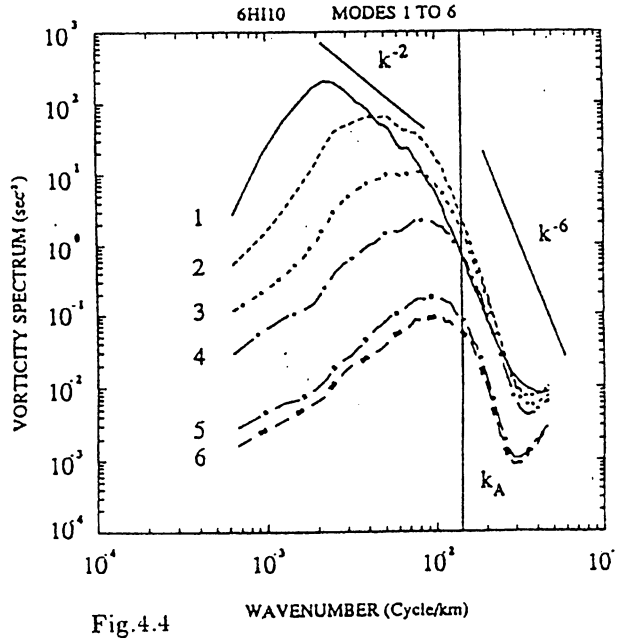


Fig.4.4

Fig.4.2.a : Circulation schématique de l'océan Atlantique Nord.

Fig.4.2.b : Schématisation (modèle physique) de l'océan Atlantique Nord. Superposition de 6 couches fluides, chacune de densité homogène, dans un bassin rectangulaire. H_n : épaisseur de la couche n. η_n : dénivellation de l'interface n.

Fig.4.3 : Circulation instantannée de la couche supérieure (fonction de courant) (résolution : $10km$). (Barnier et al [3]).

Fig.4.4 : Spectres de vorticité en fonction des nombres d'ondes isotropiques dans les 6 modes verticaux du modèle. Chaque spectre est une moyenne lissée de 25 spectres obtenus des champs instantannés non correlés extraits de la simulation numérique du Gulf Stream sur 2500 jours. La ligne verticale indique l'échelle caractéristique de l'hyperviscosité. (Barnier et al [3]).

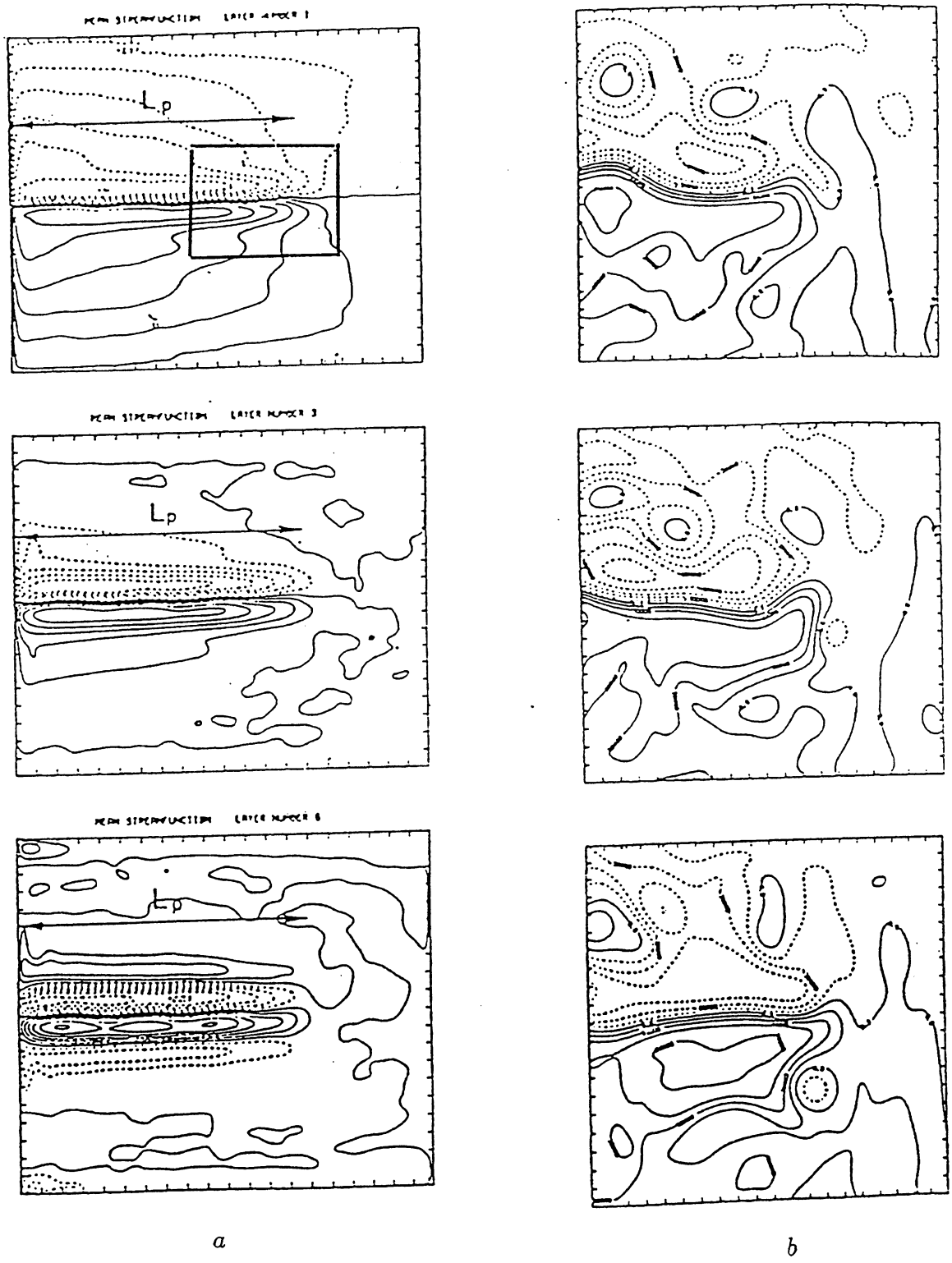


Fig.4.5 : (*a*) Circulation moyenne (fonction de courant) des couches 1,3 et 6. Les lignes de contour en trait plein (respectivement en pointillé) indiquent les valeurs positives ou nulles (respectivement négatives), (Intervalle de contour $10000 m^2 sec^{-1}$) (Barnier et al [3]).

(*b*) Circulation instantannée (fonction de courant) dans la couche de surface aux jours 16, 32 et 48 dans le domaine réduit de $1280 km \times 1280 km$, à l'extrémité du jet. La séquence est extraite de la simulation numérique du Gulf Stream sur 200 jours (avec un pas d'échantillonnage de 4 jours). (Intervalle de contour $15 m^2 sec^{-1}$).

4.3.3 Analyse par ondelettes des tourbillons océaniques

4.3.3.1 Introduction

L'analyse par ondelettes a été récemment utilisée en turbulence par Argoul et al. [2] pour analyser la turbulence développée dans la souflerie de Modane. Selon les auteurs, cette analyse a permis de visualiser pour la première fois les cascades de Richardson où s'effectuent les transferts d'énergie des grandes vers les petites échelles. Farge [25][26] [27] a également utilisé les ondelettes en turbulence notamment dans le domaine de la météorologie (analyse par ondelettes de simulation numérique en météréologie dynamique). L'analyse par ondelettes de sections unidimensionnelles de champ de vorticité présentée dans [25] a, selon l'auteur, montré que les centres des tourbillons correspondent aux régions les plus irrégulières du champ de vorticité, où se trouve concentrée la plus grande partie de l'enstrophie, tandis que l'écoulement résiduel se développant entre les tourbillons est beacoup plus régulier et moins excité.

Nous abordons ici plutôt une approche de l'utilisation des ondelettes en océanographie. Il s'agit d'analyser par ondelettes des signaux océaniques turbulents obtenus à partir d'une expérience numérique simulant le Gulf Stream par un fort courant zonal instable. On s'intéresse à la formation des tourbillons de moyenne échelle, phénomènes localisés dans l'espace mettant en jeu des interactions entre différentes échelles spatiales.

Les données dont nous disposons sont issues d'une simulation numérique du Gulf Stream longue de 2500 jours, dans un bassin océanique de géométrie idéalisée (rectangle de $3600km \times 3200km$), forcé par le vent (Barnier et al [3]). La résolution horizontale du modèle est $10km$. Nous avons extrait de cette expérience une séquence de 200 jours (échantillonnée à 4 jours), décrivant l'évolution de la circulation de la couche de surface, dans un pavé d'océan carré de $1280km$ de côté, centré à l'extrémité du jet là où se forment la plupart des tourbillons.

Les quantités physiques que nous allons analyser sont la vorticité, ζ, et un terme de conversion d'énergie potentielle turbulente en énergie cinétique turbulente, noté $PeKe$. La vorticité, solution de l'équation de la conservation de la vorticité potentielle (cf section 4.2.2.2) intégrée numériquement, est reliée à la dynamique du modèle d'océan considéré. $PeKe$ [64] est un terme d'interaction entre l'énergie potentielle disponible de la turbulence Pe et l'énergie cinétique turbulente Ke (Pe est l'énergie nécessaire pour passer d'une stratification horizontale neutre à une stratification qui engendre le mouvement). Lorsque $PeKe > 0$, il y a conversion de Pe en Ke c'est à dire transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique; et lorsque $PeKe < 0$, il y a conversion de Ke en Pe. $PeKe > 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante à l'instabilité baro-

cline (Pedlosky, 1979) qui engendre un mouvement tourbillonnaire. Nous espérons donc que l'analyse par ondelettes de la vorticité nous permettra d'obtenir des informations sur le contenu en échelle instantanné du tourbillon et que celle du terme $PeKe$ pourra nous donner des renseignements sur les processus physiques (échanges d'énergie) qui interviennent dans sa formation.

Nous avons choisi d'étudier plus particulièrement le jour 48 où le tourbillon est bien formé.

4.3.3.2 Analyse par ondelettes unidimensionnelles

Nous allons commencer par analyser des sections unidimensionnelles méridiennes passant par le cœur du tourbillon obtenues à partir des champs bidimensionnels de vorticité ou de $PeKe$ (*Fig.*4.7).

Les sections de vorticité ζ et de $PeKe$ analysées sont celles du jour 48.

L'évolution du Gulf Stream simulé a été étudiée par Marchesiello [64]. Au jour 16 il s'est formé à l'extrémité du jet un filament de vorticité positive (tourbillon non totalement formé) qui s'est concentré au jour 32 (début de formation du tourbillon (forme allongée)) pour finir par avoir une forme circulaire au jour 48 (tourbillon bien formé).

Sur la carte de vorticité du jour 48 (*Fig.*4.6), on observe que le tourbillon se trouve dans un environnement perturbant et traîne un filament qui le relie encore au courant principal qui se situe au "Nord".

L'environnement perturbant dans lequel se trouve le tourbillon s'observe d'ailleurs sur la figure des sections de vorticité et de $PeKe$ (*Fig.*4.7) où nous séparons le Gulf Stream au "Nord" du tourbillon et le filament qui se caractérise par un maximum secondaire entre le courant principal et le tourbillon. D'après la section de vorticité, les caractéristiques du tourbillon sont : largeur $l \simeq 180km$ (de $300km$ à $480km$), centre $c \simeq 380km$, échelle (taille) $k \simeq \frac{1}{200km}$; et d'après la section de $PeKe$, ces caractéristiques sont : largeur $l \simeq 190km$ (de $300km$ à $490km$), centre $c \simeq 400km$, échelle $k \simeq \frac{1}{190km}$.

4.3.3.2.*a* Analyse de Fourier

L'analyse spectrale de la section de vorticité (*Fig.*4.8) exhibe un spectre où l'on observe quatre maxima aux nombres d'onde $k_1 \simeq \frac{1}{400km}$, $k_2 \simeq \frac{1}{170km}$, $k_3 \simeq \frac{1}{80km}$, $k_4 \simeq \frac{1}{70km}$. Le nombre d'onde k_2 pourrait correspondre à l'échelle du tourbillon. On constate également une coupure d'énergie aux grands nombres d'onde ($k \geq \frac{1}{50km}$).

Quant à l'analyse spectrale de la section de $PeKe$ (*Fig.*4.9), elle met en évidence quatre maxima aux nombres d'onde $k_1 \simeq \frac{1}{200km}$, $k_2 \simeq \frac{1}{130km}$,

$k_3 \simeq \frac{1}{100km}$ et $k_4 \simeq \frac{1}{80km}$. Le nombre d'onde k_1 pourrait correspondre à la taille du tourbillon. La coupure d'énergie est également observée aux grands nombres d'onde $k \geq \frac{1}{50km}$.

En resumé, avec l'analyse spectrale on obtient une quantification des échelles relatives au tourbillon mais pas une localisation de sa largeur, ni une identification certaine des structures associées aux différents pics du spectre.

4.3.3.2.*b* Analyse par ondelettes

La quantité que nous représentons dans les figures relatives à l'analyse en ondelettes est le carré du module des coefficients d'ondelettes. Nous représentons en abscisse la variable de l'espace physique (paramètre de translation b) et en ordonnée le nombre d'onde k en $cycle/km$ (sur une échelle logarithmique). Il faut noter qu'en général, l'amplitude des coefficients d'ondelettes d'un signal est plutôt reliée à sa variation qu'à son énergie.

L'analyse par ondelettes de la section de vorticité du jour 48 révèle :

- Avec l'ondelette de Morlet (*Fig.*4.10) qu'on observe de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes sur une gamme fine de nombres d'onde ($2.510^{-3}km^{-1} \leq k \leq 3.210^{-3}km^{-1}$ c'est à dire $\frac{1}{400km} \leq k \leq \frac{1}{310km}$). Cette gamme est localisée en espace sur une largeur allant de $b \simeq 400km$ à $b \simeq 630km$. Le maximum des amplitudes est observé au nombre d'onde $k_0 \simeq 2.810^{-3}km^{-1}$ $\simeq \frac{1}{360km}$ et est centré en $b_0 \simeq 520km$. On peut donc penser qu'il s'agit dans cette gamme de la détection, à l'échelle k_0, du front Nord du tourbillon et du filament qui le lie encore au courant principal, mais mal séparés en espace. En fait, cet endroit correspond effectivement à une zône de fort gradient de vorticité.

- Avec l'ondelette chapeau mexicain (*Fig.*4.10), les grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes s'observent sur une gamme de nombres d'onde qui va de $k_1 \simeq 2.310^{-3}km^{-1}$ à $k_2 \simeq 2.810^{-3}km^{-1}$ ($k_1 \simeq \frac{1}{430km}$ à $k_2 \simeq \frac{1}{360km}$) et s'étend en espace sur une bande moins large ($430km \leq b \leq 540km$). Le maximum des amplitudes est observé à l'échelle $k_0 \simeq 2.510^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{400km}$ et à la position spatiale $b_0 \simeq 470km$. Il pourrait donc s'agir ici de la détection du front "Nord" du tourbillon à l'échelle k_0. On peut également noter la présence d'un maximum secondaire à $b \simeq 650km$ et à l'échelle $k \simeq 4.10^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{250km}$. Il s'agit ici de la mise en évidence du courant principal qui correspond à une zône de forte variation de vorticité.

On peut donc retenir de l'analyse par ondelettes de la section de vorticité du jour 48 une mise en évidence des gradients (détection de fronts), une quantification de l'échelle (largeur) des fronts ainsi que leurs localisation en espace.

Quant à l'analyse par ondelettes de la section de $PeKe$ du jour 48, on peut constater :

- Avec l'ondelette de Morlet ($Fig.4.11$), la présence de deux régions bien séparées dans le domaine spectral où des grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes sont observées.

* La première région qui est dans les grands nombres d'ondes (de $k \simeq 4.610^{-3}km^{-1}$ à $k \simeq 6.210^{-3}km^{-1}$, ie, de $k \simeq \frac{1}{220km}$ à $k \simeq \frac{1}{160km}$) est formée de deux cellules mal séparées en espace. Dans la première cellule ($350km \leq b \leq 450km$), le maximum des coefficients d'ondelettes est observé à $b_1 \simeq 400km$ et à l'échelle $k_1 \simeq 5.10^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{200km}$. Il pourrait s'agir ici de la détection du cœur du tourbillon (là où $PeKe$ change de signe ?). Sur la seconde cellule ($550km \leq b \leq 750km$), le maximum des amplitudes est repéré à la position $b_2 \simeq 680km$ et à l'échelle $k_2 \simeq 5.810^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{170km}$. Il pourrait être question ici d'une zône de fort gradient au niveau du courant principal. On peut donc penser qu'il s'agit globalement dans cette première région, de la détection des échelles d'interaction entre le tourbillon et le Gulf Stream (un renforcement du tourbillon par instabilité barocline ?).

* Aux plus petits nombres d'ondes, la deuxième région de variation des amplitudes s'étend du nombre d'onde $k'_1 \simeq 2.310^{-3}km^{-1}$ à $k'_2 \simeq 3.10^{-3}km^{-1}$ ($k'_1 \simeq \frac{1}{430km}$ à $k'_2 \simeq \frac{1}{330km}$) et est étallée en espace sur une largeur allant de $b \simeq 400km$ à $b \simeq 600km$. Le maximum des amplitudes est localisé en espace à $b'_0 \simeq 500km$ et à l'échelle $k'_0 \simeq 2.710^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{370km}$; ce qui correspond à la détection du front Nord du tourbillon (limite du tourbillon ou filament).

- L'analyse faite avec l'ondelette chapeau mexicain ($Fig.4.11$), montre également deux régions de l'espace bien séparées où les coefficients d'ondelettes sont maxima.

* Dans la première région (la plus au Sud : $370km \leq b \leq 480km$), les grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes s'étendent sur une gamme assez large de nombre d'onde ($2.810^{-3}km^{-1} \leq k \leq 5.510^{-3}km^{-1}$, ie, $\frac{1}{360km} \leq k \leq \frac{1}{180km}$). Le maximum des amplitudes est localisé à la position $b_0 \simeq 420km$ et à l'échelle $k_0 \simeq 4.10^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{250km}$. Il peut s'agir ici de la mise en évidence du cœur du tourbillon. On observe également un maximum secondaire à $b \simeq 480km$ et à l'échelle $k \simeq 2.710^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{370km}$, ceci correspond au front Nord du tourbillon. Comme dans le cas de l'ondelette de Morlet, il s'agit dans cette région de la mise en évidence des échelles d'interaction entre le tourbillon et le Gulf Stream (renforcement du tourbillon par instabilité barocline ?) mais cette fois-ci bien localisée en espace.

* Dans la deuxième région (au Nord : $670km \leq b \leq 740km$), les grandes amplitudes sont localisées en échelles sur une gamme plus fine de nombres d'onde ($4.710^{-3}km^{-1} \leq k \leq 7.10^{-3}km^{-1}$ c'est à dire $\frac{1}{210km} \leq k \leq \frac{1}{140km}$).

Le maximum des amplitudes est observé à la position $b'_0 \simeq 700km$ et à l'échelle $k'_0 \simeq 6.10^{-3}km^{-1} \simeq \frac{1}{170km}$. Il s'agit ici de la détection de la forte variation de $PeKe$ au niveau du courant principal.

On peut donc retenir de l'analyse par ondelettes de la section de $PeKe$ du jour 48 une mise en évidence des échelles d'interaction entre le tourbillon et le Gulf Stream. Ces structures ainsi mises en évidence correspondent soit à des gradients de $PeKe$ (localisation spatiale des fronts et quantification de leur échelle), soit à des maximums de $PeKe$. Il apparaît donc que l'amplitude des coefficients d'ondelettes est à la fois liée à la variation et à l'énergie du signal.

L'utilisation des deux ondelettes montrent que l'on a en fait trois structures : le tourbillon, le front Nord du tourbillon (la "traîne") non encore séparé du courant principal et le Gulf Stream; à des échelles caractéristiques données dans le tableau suivant.

Structures	Echelles (Morlet)	Echelles (chap. mex.)
Tourbillon	$\lambda \simeq 200km$	$\lambda \simeq 250km$
front Nord du tourbillon	$\lambda \simeq 370km$	$\lambda \simeq 370km$
Gulf Stream	$\lambda \simeq 170km$	$\lambda \simeq 170km$

Tableau 4.1 : Echelles caractéristiques des stuctures mises en évidence par l'analyse par ondelettes du terme $PeKe$ du jour 48.

4.3.3.2.c Discussion

Nous avons eu beaucoup de difficultés dans l'interprétation des coefficients d'ondelettes; difficultés liées pour la plus part des cas à une mauvaise séparation des maximums et des gradients. Il est apparu que les coefficients d'ondelettes sont tantôt liés à la variation du signal, tantôt à son énergie et parfois aux deux à la fois. Cependant, on peut noter qu'en général, l'amplitude des coefficients d'ondelettes est plutôt liée à la variation du signal. Pour l'interprétation des coefficients d'ondelettes, et pour mieux comprendre les phénomènes observés, nous avons souvent eut recours au signal lui-même. On peut retenir de cette analyse une localisation des fronts (maximum de gradients) et une détermination quantitative des échelles transverses associées aux fronts. Il conviendrait par ailleurs de souligner la complémentarité des deux ondelettes utilisées. La première (l'ondelette de Morlet) a un meilleur pouvoir séparateur en échelle, pendant que la seconde (l'ondelette chapeau mexicain) sépare mieux en espace.

Nous avons également effectué le type d'analyse réalisé pour le jour 48 sur la série temporelle de champ de vorticité correspondant à la formation du tourbillon,

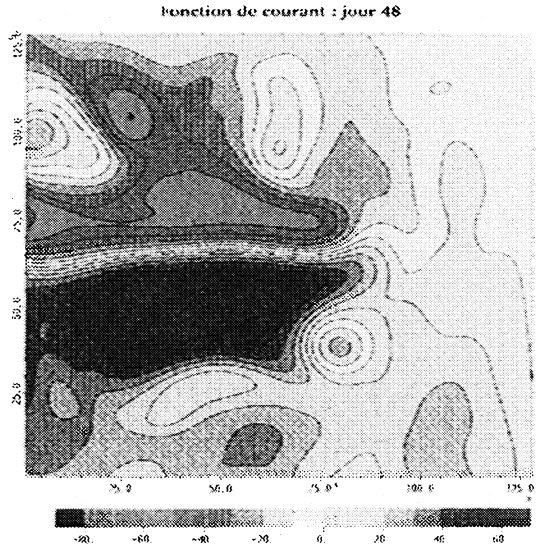
soit sur les jours 0 à 50. Cependant, ces analyses par ondelettes, effectuées sur les sections unidimensionnelles de vorticité et de $PeKe$ n'a pas conduit aux résultats escomptés à savoir : l'obtention d'informations sur l'évolution temporelle et fréquentielle des tourbillons et sur les cascades d'énergie entre échelles qui caractérisent les processus physiques qui engendrent ces tourbillons. Ceci nous amène, par delà de la plus grande difficulté que nous avons de l'interprétation des coefficients d'ondelettes, à nous poser des questions telles que

- Avons-nous fait le bon choix de l'ondelette analysante ?

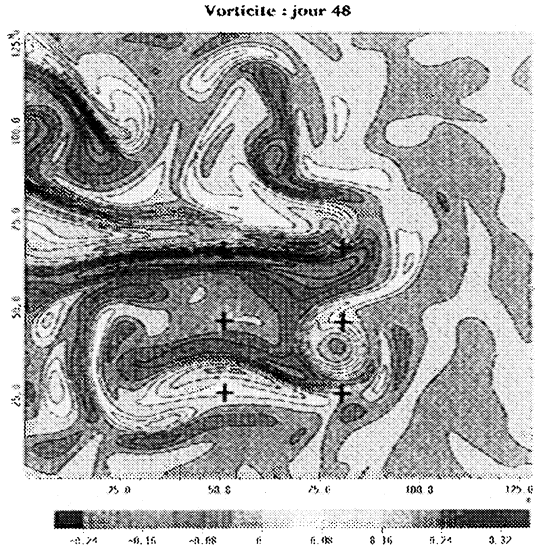
- L'analyse par ondelettes des sections unidimensionnelles de vorticité ou du terme de conversion $PeKe$ nous renseigne-t-elle réellement sur l'évolution des tourbillons qui sont des phénomènes beaucoup plus complexes (bidimensionnels et de plus anisotropes) ?

- L'analyse par ondelettes est-elle adaptée aux types de signaux que nous avons considérés ? Ce qui pose donc le problème du choix de la variable physique. Si par exemple l'analyse est faite sur la fonction de courant ψ, alors les coefficients d'ondelettes sont reliés au gradients de ψ ($\nabla\psi$), donc aux vitesses. En l'occurence, l'analyse des sections méridiennes de ψ soit $\psi(y)$ va nous donner des informations sur la vitesse zônale $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, le module carré des coefficients d'ondelettes étant alors relié à l'énergie cinétique zonale.

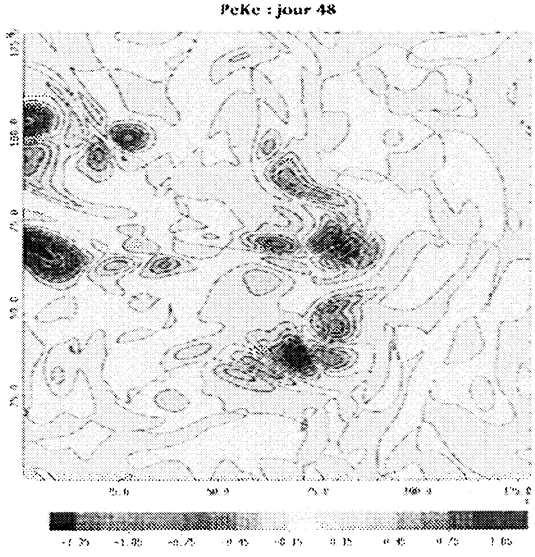
A travers cette première approche, une des perspectives de l'utilisation des ondelettes en océanographie pourrait être l'étude des fronts.



(*a*) Carte de la fonction de courant ψ. On remarque que le tourbillon est bien formé (forme circulaire) et qu'il se trouve dans un environnement perturbant dû à la présence du Gulf Stream qui se situe au "Nord".



(*b*) Carte de vorticité ζ. On constate que le tourbillon (cyclonique) traine un filament qui le relie encore au courant principal. Dans la moitié Sud du bassin, les croix indiquent les points où les spectres locaux instantannés sont étudiés.



(*c*) Carte du terme de conversion d'énergie $PeKe$. On observe également le filament trainé par le tourbillon qui est dans une phase de croissance par instabilité barocline et commence sa dérive vers l'Ouest. La structure tourbillonnaire est constituée de deux cellules où $PeKe$ est de signe opposé. C'est dans ces deux cellules qu'ont lieu les interactions (échanges d'énergie). Leur intersection correspond à l'endroit où $PeKe$ est nul; on la considère comme étant le centre du tourbillon. Ceci ne semble pas être en contradiction avec le centre du tourbillon repéré sur les cartes de la fonction de courant ψ et de vorticité ζ.

Fig.4.6 : Cartes de la fonction de courant, de vorticité et du terme de conversion d'énergie $PeKe$ du jour 48 (couche de surface). ($\Delta x = \Delta y = 10km$).

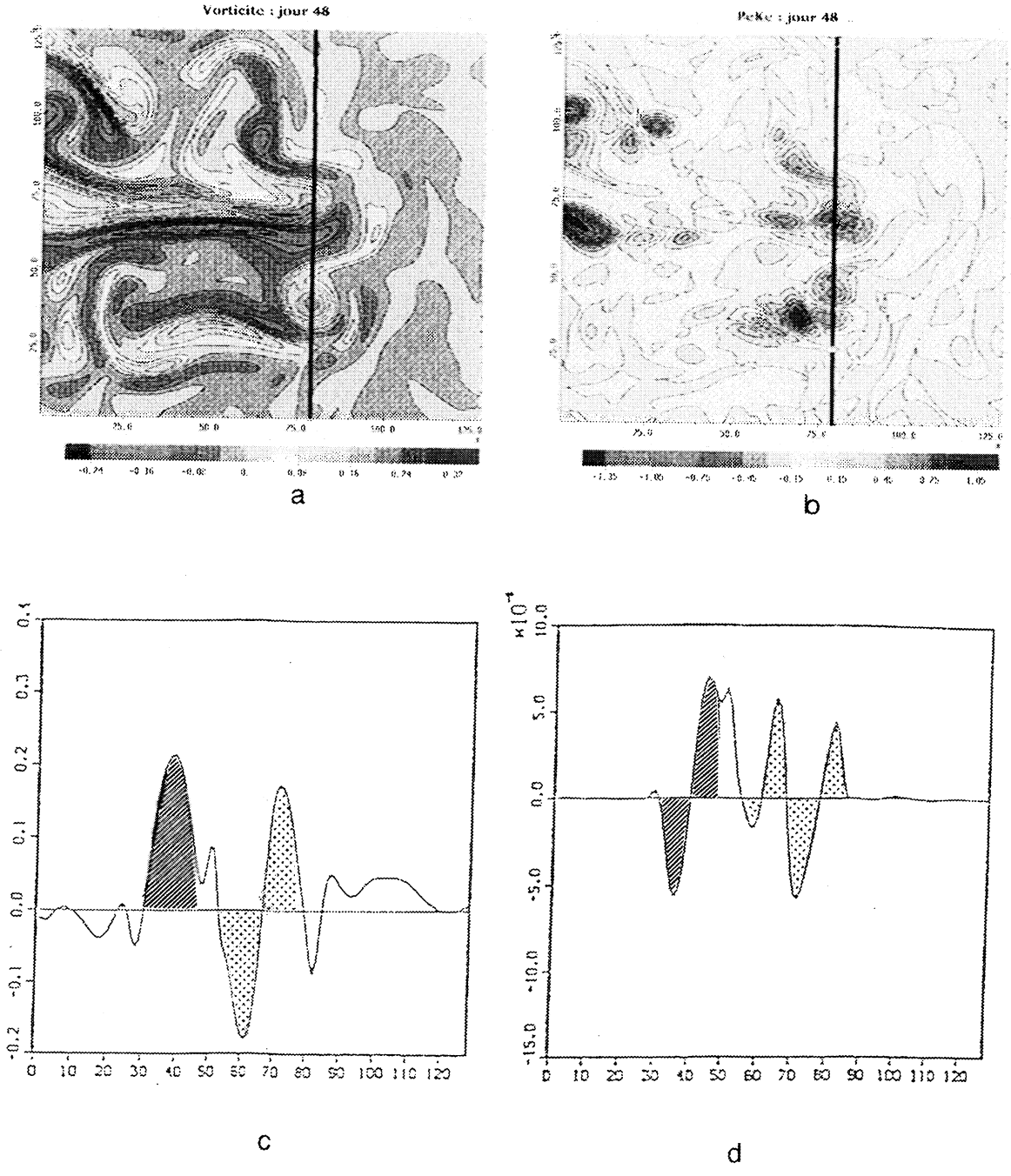


Fig.4.7 : (*a*) Carte de vorticité du jour 48. (*b*) Carte du terme de conversion d'énergie $PeKe$ du jour 48. (résolution : $10km$). Sur les cartes, la ligne verticale indique l'endroit où la section méridienne (du Sud vers le Nord) est faite.

(*c*) Section méridienne de vorticité. (*d*) Section méridienne de $PeKe$. $\Delta x = 10km$. Les sections sont faites à la position spatiale $x = 790km$. Les parties hachurées représentent le tourbillon et les parties en pointillé représentent le courant principal; entre les deux se situe le filament qui relie le tourbillon au courant principal.

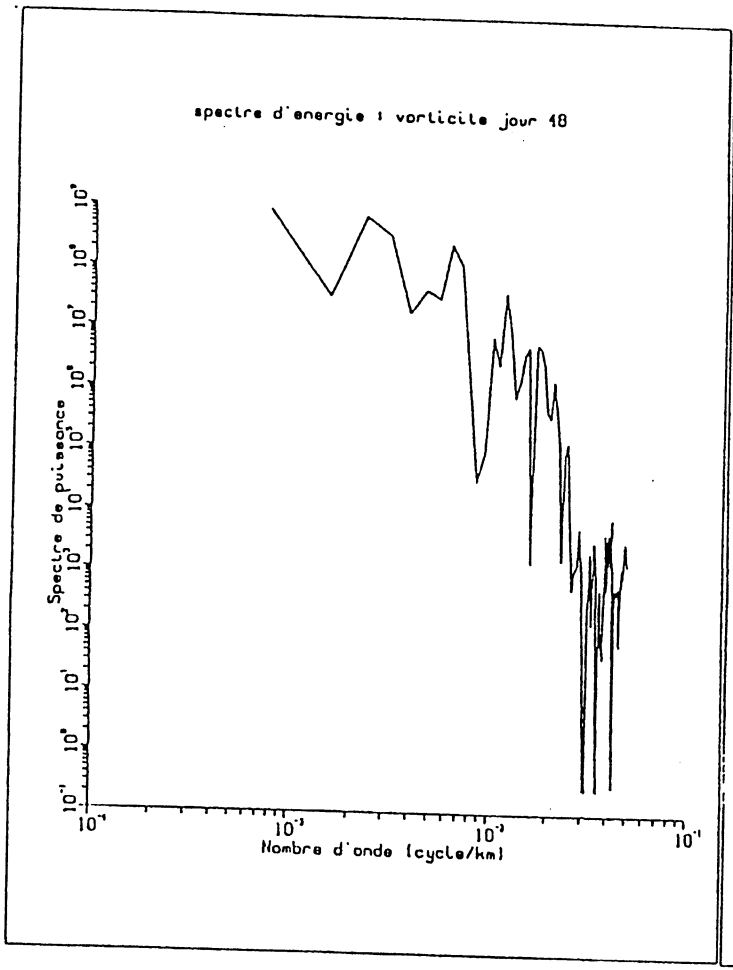


Fig.4.8

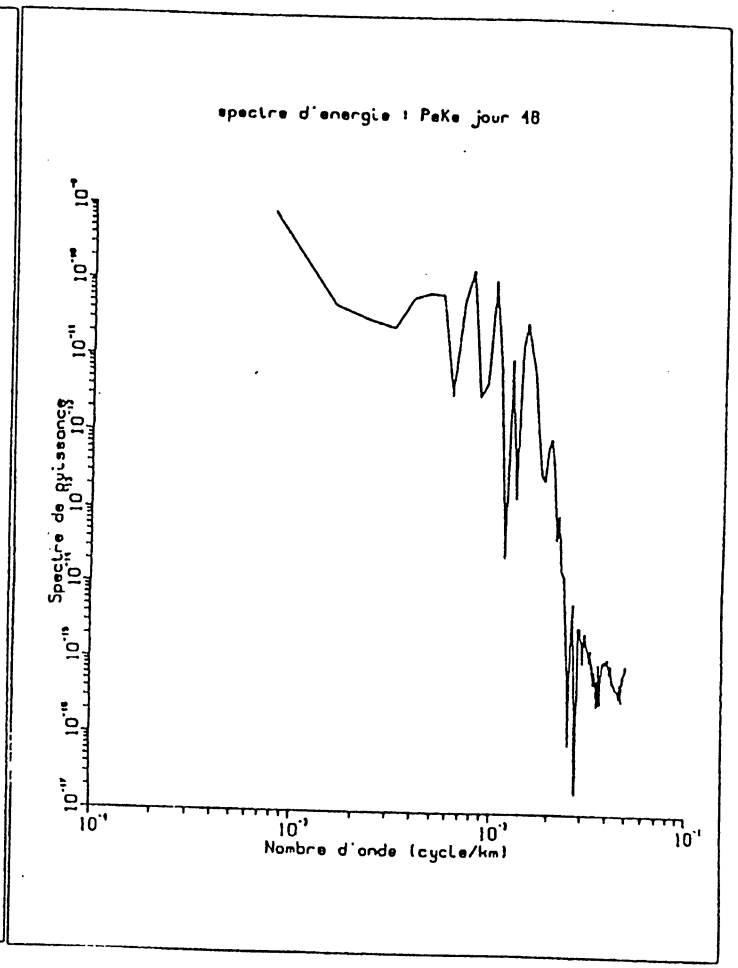


Fig.4.9

Fig.4.8 : Analyse spectrale de la section de vorticité du jour 48 (cf. Fig.4.7)
Fig.4.9 : Analyse spectrale de la section du terme de conversion d'énergie $PeKe$ du jour 48 (cf. Fig.4.7)

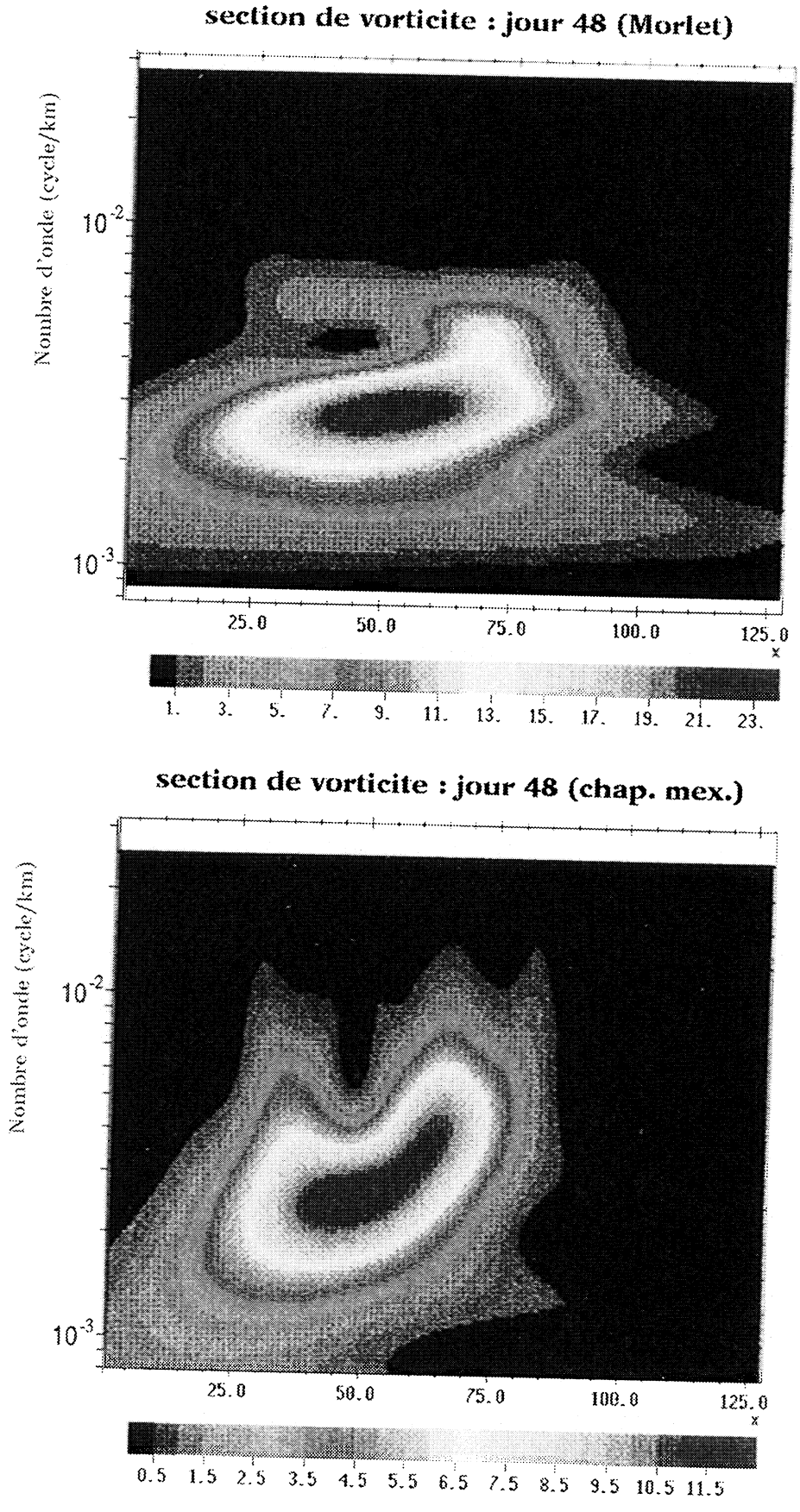


Fig.4.10 : Analyse par ondelettes de la section unidimensionnelle de vorticité du jour 48. En haut, analyse faite avec l'ondelette de Morlet ($\omega_0 = 5$). En bas, analyse faite avec l'ondelette chapeau mexicain complexe progressive. On représente le carré du module des coefficients d'ondelettes. L'espace est représenté en abscisse ($\Delta x = 10km$) et les nombres d'onde en *cycle/km* sont en ordonnée.

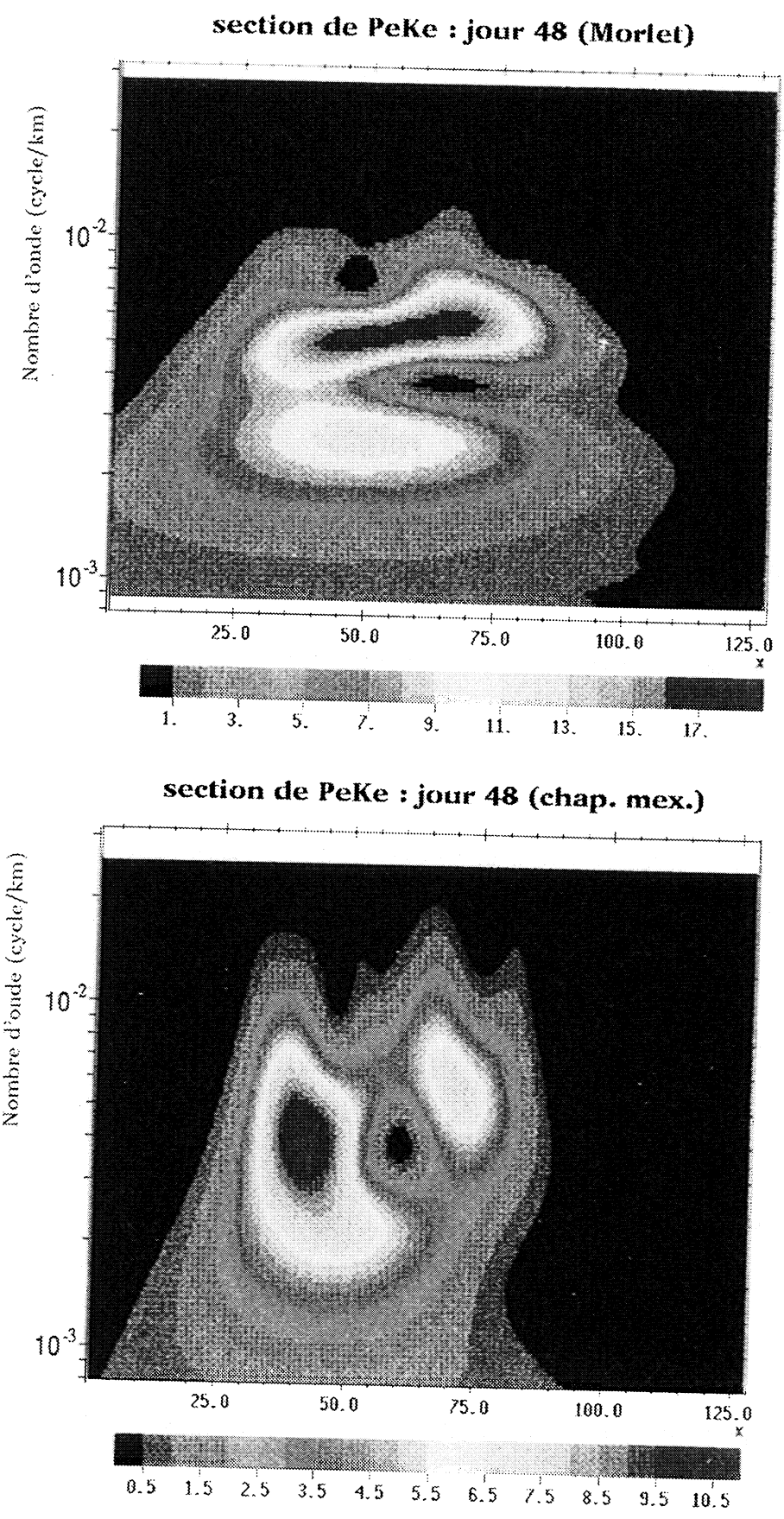


Fig.4.11 : Analyse par ondelettes de la section unidimensionnelle du terme de conversion d'énergie $PeKe$ du jour 48. En haut, analyse faite avec l'ondelette de Morlet ($\omega_0 = 5$). En bas, analyse faite avec l'ondelette chapeau mexicain complexe progressive. On représente le carré du module des coefficients d'ondelettes. L'espace est représenté en abscisse ($\Delta x = 10km$) et les nombres d'onde en $cycle/km$ sont en ordonnée.

4.3.3.3 Analyse spectrale locale

L'analyse par ondelettes permet de faire une analyse spectrale locale d'un signal; ce qui est un avantage considérable par rapport à l'analyse de Fourier. En effet, on peut faire une section du champ bidimensionnel du module des coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$ en un point $b = b_0$ par exemple. La représentation des $C_f(a,b_0)$ à toutes les échelles a donne ainsi un spectre local du signal f au point de l'espace $x = b_0$.

Nous abordons dans cette section une analyse spectrale locale en ondelettes de la vorticité en six points du domaine ($Fig.4.6.b$). Notons qu'il est plutôt question ici de spectre des variations que de spectre d'énergie puisque les coefficients d'ondelettes semblent en général être reliés à la variation du signal.

Le tableau suivant donne les cordonnées des points auxquels les spectres locaux sont calculés.

points	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
abscisses (km)	510	810	510	810	510	810
ordonnées (km)	650	650	450	450	250	250

Tableau 4.2 : Coordonnées des points auxquels des spectres locaux sont réalisés. Ces points sont indiqués par une croix à la figure $Fig.4.6 - b$

Par chaque point passe une section zonale et une section méridienne. Ces sections sont analysées par ondelettes et la représentation des coefficients $C_f(a,A_i)$ donne un spectre local instantané. Nous présentons à la figure $Fig.4.12$ les spectres moyens (moyenne de 50 spectres instantanés couvrant la période de 200 jours) pour les six points du tableau ci-dessus. La zône 1 (point A_1) est dans le courant principal où l'on observe un fort gradient de vorticité. La zône 2 (point A_2) est une zône particulière à l'extrémité du jet où naissent les filaments qui engendrent les tourbillons. Les zônes 3 et 5 (points A_3 et A_5) sont des zônes de recirculation inertielle caractérisées par un courant permanent vers l'ouest. Quant aux zônes 4 et 6 (points A_4 et A_6), elles sont des zônes de dérive vers l'Ouest et croissance des tourbillons.

Dans les zônes 1 et 2, on observe une différence significative entre les spectres moyens méridiens et zônaux. Cette différence apparaît à toutes les longueurs d'onde en ce qui concerne la zône 1 pendant que dans la zône 2, elle s'observe sur une large bande de longueurs d'onde ($110km \leq \lambda \leq 1250km$). Il semble donc que la circulation océanique est anisotrope dans ces zônes. Le maximum du spectre moyen méridien est observé à la longueur d'onde de $330km$ dans la zône 1, et à la longueur d'onde $380km$ dans la zône 2. Ce maximum est certainement associé à la

largeur du jet (front). Quant au maximum du spectre zônal, il est repéré dans les zônes 1 et 2 respectivement aux grandes longueurs d'ondes $500km$ et $530km$. Il est très probablement lié à l'échelle des oscillations du courant principal (ondes) qui ont des échelles beaucoup plus grandes.

La zône 3 semble également être une zône où la circulation océanique présente un caractère anisotrope important puisqu'on peut constater une différence entre les spectres moyens méridiens et zônaux dans cette zône. Le maximum du spectre moyen méridien est observée à la longueur d'onde de $500km$ et pourrait être lié à l'échelle méridienne du courant de recirculation inertielle.

Dans la zône 4 (zône de génération de tourbillon), les deux spectres moyens sont identiques aux courtes longueurs d'onde $\lambda \leq 300km$ indiquant ainsi qu'aux plus petites échelles, la circulation océanique semble présenter un caractère isotrope dans cette zône. Aux grandes longueurs d'onde $\lambda \geq 300km$, une différence est observée entre les deux spectres. Dans cette zône, l'écoulement parraît donc anisotrope aux plus grandes échelles. Le maximum du spectre moyen méridien observé à la longueur d'onde $\lambda \simeq 500km$, est probablement lié à l'échelle du courant de la recirculation inertielle.

Les zône 5 et 6 semblent être isotropes puisque les spectres moyens zonaux et méridiens sont identiques dans ces zônes (même si une différence que nous jugeons non significative est observée entre les deux spectres dans la zône 5). Dans la zône 6, le maximum des deux spectres se situe à la longueur d'onde de $400km$.

Dans l'ensemble, les spectres locaux présentent une forme générale qui est telle qu'à partir du nombre d'onde $k = 2.10^{-2}km^{-1}$ (échelles de dissipation biharmonique (Barnier et al [3]), ils sont en k^{-4} et aux nombres d'ondes $k < 10^{-2}km^{-1}$, ils sont soit plats, soit présentent un pic large entre les longueurs d'ondes $300km$ et $500km$.

- **Discussion**

Il convient de noter que nous avons travaillé sur de statistiques trop courtes pour bien prendre en compte sur les spectres les effets de l'intermittence (aspect cahotique) de la génération des tourbillons. Nous ne pouvons par conséquent pas donner de conclusion; en fait, il n'y a que deux tourbillons engendrés sur les 200 jours.

Même si le nombre d'échantillons que nous avons considéré n'est pas suffisant (200 jours) pour être absolument représentatif, il apparaît que l'analyse spectrale locale peut être un moyen de déterminer localement l'isotropie ou l'anisotropie de l'écoulement. Ceci paraît très intéressant car nous pensons que ça pourrait aider dans le choix de l'ondelette analysante pour l'analyse d'un champ bidimensionnel. Du point de vue de la physique du modèle, un intérêt peut être d'envisager une quantification du dégré d'anisotropie de l'écoulement.

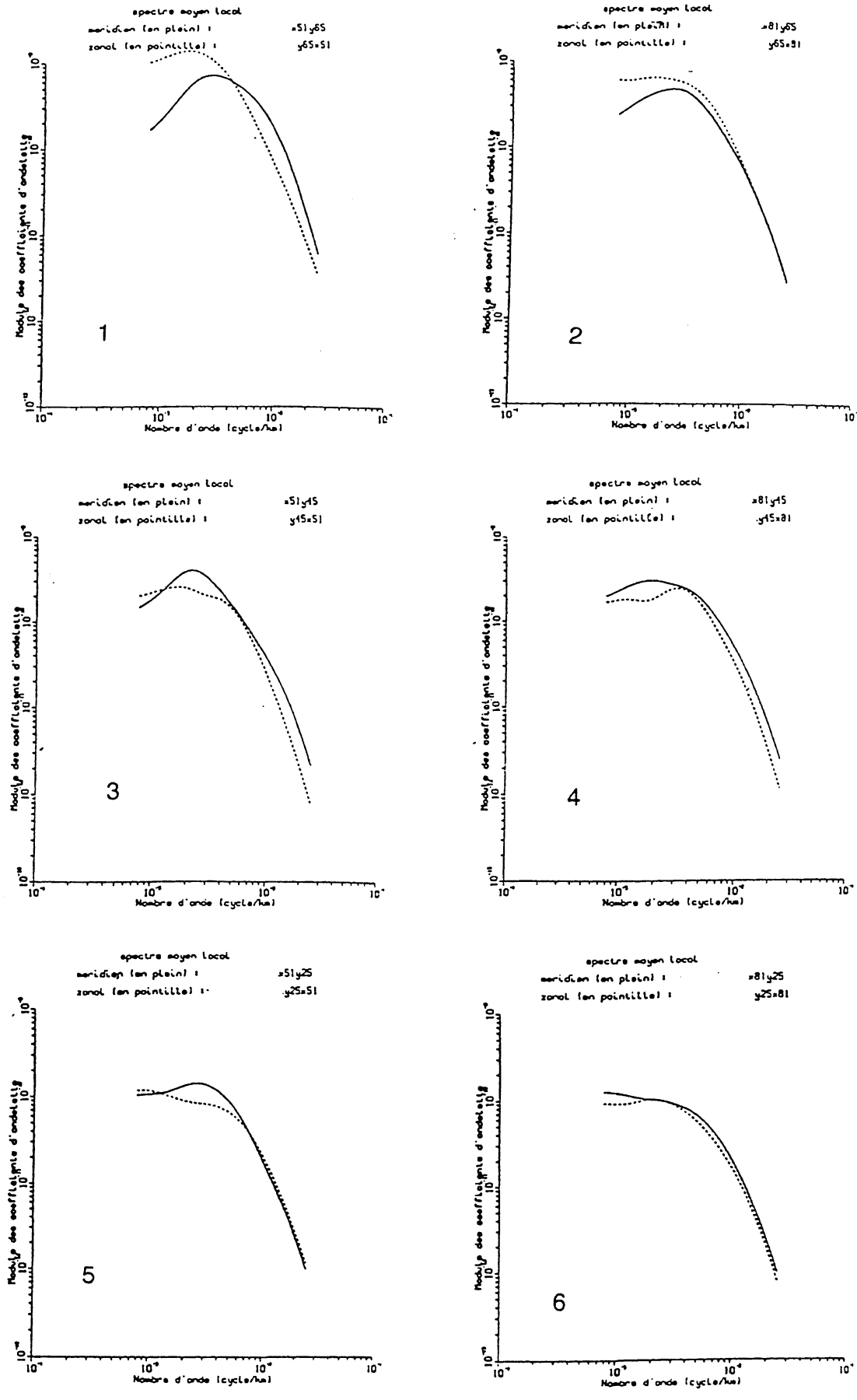


Fig.4.12 : Spectres locaux moyens méridiens et zônaux des zônes 1 à 6 (cf. Fig.4.6 – *b*). La moyenne est faite sur 200 jours de simulation du Gulf Stream avec un pas d'échantillonnage de 4 jours. L'ondelette utilisée est l'ondelette chapeau mexicain complexe progressive.

4.3.3.4 Analyse par ondelettes bidimensionnelles

Nous tentons d'aborder dans cette section une analyse par ondelettes bidimensionnelles du champ de vorticité du jour 48 où le tourbillon est bien formé.

Nous représentons le carré du module des coefficients d'ondelettes ($|C_f(a,r,\vec{b})|^2$) qui mesure l'énergie ou la variation du signal f en terme d'espace, d'échelle et de direction. La décomposition en ondelettes d'un signal bidimensionnel donne des coefficients d'ondelettes dépendant de quatre variables; mais dans la pratique, on fixe la direction par le choix de l'angle de rotation θ et l'on se ramène ainsi à trois variables. La représentation graphique du module des coefficients d'ondelettes bidimensionnelles est donc un problème beaucoup plus difficile que dans le cas unidimensionnel. Compte tenu des moyens graphiques qui sont à notre disposition, nous fixerons l'échelle d'observation en faisant des coupes en longueurs d'onde afin de nous ramener à une situation de deux variables pour la visualisation des $|C_f(a,r,\vec{b})|^2$.

Comme dans le cas unidimensionnel, dans une première approche, nous utiliserons l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle qui est isotrope (donc non sélective à l'orientation) et celle de Morlet bidimensionnelle qui est anisotrope (donc sélective à l'orientation).

4.3.3.4.*a* Analyse par l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle

Puisque l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle est isotrope, la rotation n'a aucune influence. Nous avons donc choisi $\theta = 0$ dans cette étude.

Les résultats de l'analyse par ondelettes (*Fig.*4.13) sont visualisés pour les longueurs d'onde $\lambda_1 = 40km$, $\lambda_2 = 80km$, $\lambda_3 = 160km$ et $\lambda_4 = 320km$. On va des petites échelles vers les grandes.

* Aux petites longueurs d'onde λ_1 et λ_2, l'analyse par ondelettes met en évidence des grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes dans plusieurs régions du bassin.

- Une première zône située dans le coin Nord-Ouest du bassin est associée à un filament de vorticité. La carte de la fonction de courant (*Fig.*4.6.*a*) montre que cette structure filamentaire de vorticité est associée aux interactions entre le gros tourbillon avec la circulation (cascade d'enstrophie vers les petites échelles). Il s'agit dans cette première région de la détection de forts gradients de vorticité.

- Dans la région du courant principal également, des cellules de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes sont aussi observées. Dans cette zône, les maxima d'amplitudes caractérisent, d'une manière générale, la mise en évidence des fronts Nord et Sud du Gulf Stream et de maximum de vorticité situé à l'extrémité du jet.

- En dehors de la région du courant principal, on peut également constater la présence de trois autres cellules de maxima d'amplitude des coefficients d'ondelettes. La carte de vorticité montre que ces cellules sont associées à des structures filamentaires de vorticité. L'un de ces filaments de vorticité se trouve au Nord du bassin vers l'extrémité du jet, pendant que les deux autres sont situés au Sud du bassin où l'un d'eux est en interaction avec le tourbillon au Sud-Ouest. Il s'agit donc de la détection des gradients de vorticité dans ces trois cellules de maxima d'amplitude des coefficients d'ondelettes, .

* A la longueur d'onde moyenne λ_3, on constate toujours une mise en évidence des bords Nord et Sud du courant principal. En plus de la détection du filament de vorticité situé dans le coin Nord-Ouest du bassin et de celui situé au Nord vers l'extrémité du jet, on peut également observer au Sud du bassin une autre cellule de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes. Cette cellule est associée au front Sud-Ouest du tourbillon. Il est à remarquer que le maximum de l'amplitude des coefficients d'ondelettes est observé à l'extrémité du jet; ce qui pourrait être une mise en évidence à la fois de maximum et de gradients de vorticité.

* A la grande longueur d'onde λ_4, nous remarquons toujours la détection des bords Nord et Sud du jet; le maximum de l'amplitude des coefficients d'ondelettes étant toujours repéré à l'extrémité du courant principal : détection à la fois de maximum et de gradient de vorticité. En plus de la mise en évidence du front Sud du tourbillon et de la variation associée au filament de vorticité situé au Nord du bassin vers l'extrémité du jet, on peut noter la présence d'une cellule secondaire située au bord Nord-Ouest du bassin où de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes sont observées. La carte de fonction de fonction de courant (*Fig.*4.6.*a*) montre que cette cellule est la détection du gros tourbillon et de la structure filamentaire de vorticité associée aux interactions entre ce gros tourbillon avec la circulation. Il s'agit donc là de la mise en évidence à la fois de maximum et de gradient de vorticité.

En resumé, on peut retenir de cette analyse par l'ondelette chapeau mexicain bidimensionnelle, une localisation des fronts Nord et Sud du Gulf Stream, ainsi qu'une mise en évidence de certaines régions de fortes variations de vorticité associées à des structures filamentaires. Le tourbillon qui contient le maximum de vorticité n'a pas été localisé, mais son front Sud semble être détecté seulement à partir de la longueur d'onde $\lambda_4 \simeq 320km$.

4.3.3.4.*b* Analyse par l'ondelette de Morlet bidimensionnelle

L'ondelette de Morlet bidimensionnelle est anisotrope, la rotation a donc une influence considérable. La représentation des lignes isovaleurs de la partie réelle

de l'ondelette (*Fig.*3.1 de la section 3.2.1.2.*b*), nous a guidé dans le choix de l'angle de rotation θ pour l'analyse du champ bidimensionnel de vorticité du jour 48.

Nous présenterons d'abord une analyse suivant les longueurs d'onde c'est à dire que nous fixons la direction de l'ondelette (angle θ) et faisons varier l'échelle d'observation. Puis nous montrerons une analyse suivant les directions de l'ondelette c'est à dire que nous fixons la longueur d'onde d'observation et faisons varier l'orientation de l'ondelette.

A/ Analyse suivant les longueurs d'onde

Compte tenu de la structure (diagonale et horizontale) du champ de vorticité que nous avons à analyser, nous avons choisi, pour une première approche, $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, pour θ fixé, les résultats de l'analyse (*Fig.*4.14) sont montrés pour les longueurs d'onde $\lambda_1 \simeq 50km$ et $\lambda_2 \simeq 100km$.

- **Cas où** $\theta = 0$ (*Ondelette de direction diagonale secondaire*)

Pour toutes les échelles considérées, on peut observer de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes dans deux zônes, dans le coin Nord-Ouest du bassin. La première (la plus au Nord) est liée au filament de vorticité associé aux interactions entre le gros tourbillon avec la circulation (cf. carte de la fonction de courant (*Fig.*4.6 $- a$)). La seconde est la détection du bord Nord du jet qui correspond à une zône de forte variation de vorticité.

A la plus grande échelle λ_2, en plus des deux zônes (dans le coin Nord-Ouest du bassin) mises en évidence, on peut noter la présence d'une troisième zône où s'observent également de grandes amplitudes des coefficients d'ondelettes. Cette cellule de grandes amplitudes de coefficients est associée au filament de vorticité se trouvant au Nord du bassin et qui est en interaction avec l'extrémité du jet. On peut également remarquer que la zône de maxima d'amplitude des coefficients d'ondelettes qui se situe au Nord-Ouest du bassin s'est élargie. Cet élargissement pourrait être dû à une mauvaise séparation de gradient et de maximum de vorticité à cette échelle.

Il convient de remarquer que toutes les structures mises en évidence dans cette analyse ont la même orientation que l'ondelette.

- **Cas où** $\theta = \frac{\pi}{4}$ (*Ondelette de direction zonale*)

On observe que le Gulf Stream est mis en évidence à toutes les échelles considérées (*Fig.*4.14). On constate également qu'il y a une mauvaise séparation

spatiale de gradients et de maximums de vorticité. Ceci pourrait être dû au fait que l'ondelette de Morlet sépare mal en espace. Neanmoins, le front du Gulf Stream est globalement localisé. Ici également, on remarque que la structure détectée (le jet) a la même orientation que l'ondelette.

B/ Analyse suivant les directions de l'ondelette

Dans cette section, nous avons fixé la longueur d'onde d'observation $\lambda \simeq 50km$ et avons fait varié la direction de l'ondelette en choisissant différentes valeurs de l'angle de rotation θ. Ainsi pour λ fixé, les résultats de l'analyse (*Fig.*4.15) sont montrés pour $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- Pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$, se reporter à la section "analyse suivant les longueurs d'onde".

- **Cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$** (*ondelettes de direction diagonale principale*)

L'analyse par ondelettes met en évidence deux régions du bassin où l'on observe de maxima d'amplitude des coefficients d'ondelettes. L'observation de la carte de vorticité montre que la première région située au bord Ouest du bassin correspond à la détection d'un gradient de vorticité associé à une structure filamentaire de vorticité. Quant à la deuxième région située au Sud du bassin, elle serait la mise en évidence du front Nord-Ouest du tourbillon qui représente également une zône de forte variation de vorticité. On peut remarquer que les structures détectées ont la même orientation que l'ondelette.

- **Cas où $\theta = \frac{3\pi}{4}$** (*ondelettes de direction méridienne*)

On observe trois cellules de grandes amplitudes de coefficients d'ondelettes. La première cellule est située au Nord du bassin, la deuxième au Sud-Ouest et la troisième au Sud-Est. On peut constater sur la carte de vorticité, que ces trois cellules correspondent à la détection de gradients de vorticité associés à de petites structures filamentaires de vorticité de direction méridienne.

C/ Discussion

L'analyse par l'ondelette de Morlet bidimensionnelle a en général mis en évidence les gradients de vorticité : détection de filaments de vorticité, mise en évidence des fronts du Gulf Stream et du tourbillon.

Il apparaît également que le résultat de l'analyse est fortement lié à la direction

de l'ondelette (seules les structures de même orientation que l'ondelette sont détectées). Le choix de l'angle de rotation est donc important lorsque l'ondelette analysante n'est pas isotrope. Ce choix peut être fait par exemple en fonction de la forme des phénomènes que l'on cherche à observer dans le signal.

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, les ondelettes considérées sont de direction orthogonales et les résultats de l'analyse faite avec les ondelettes associées à ces valeurs de θ sont complètement différents. Il en est de même pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Ceci peut donc signifier que d'une manière générale, l'écoulement est anisotrope dans le bassin.

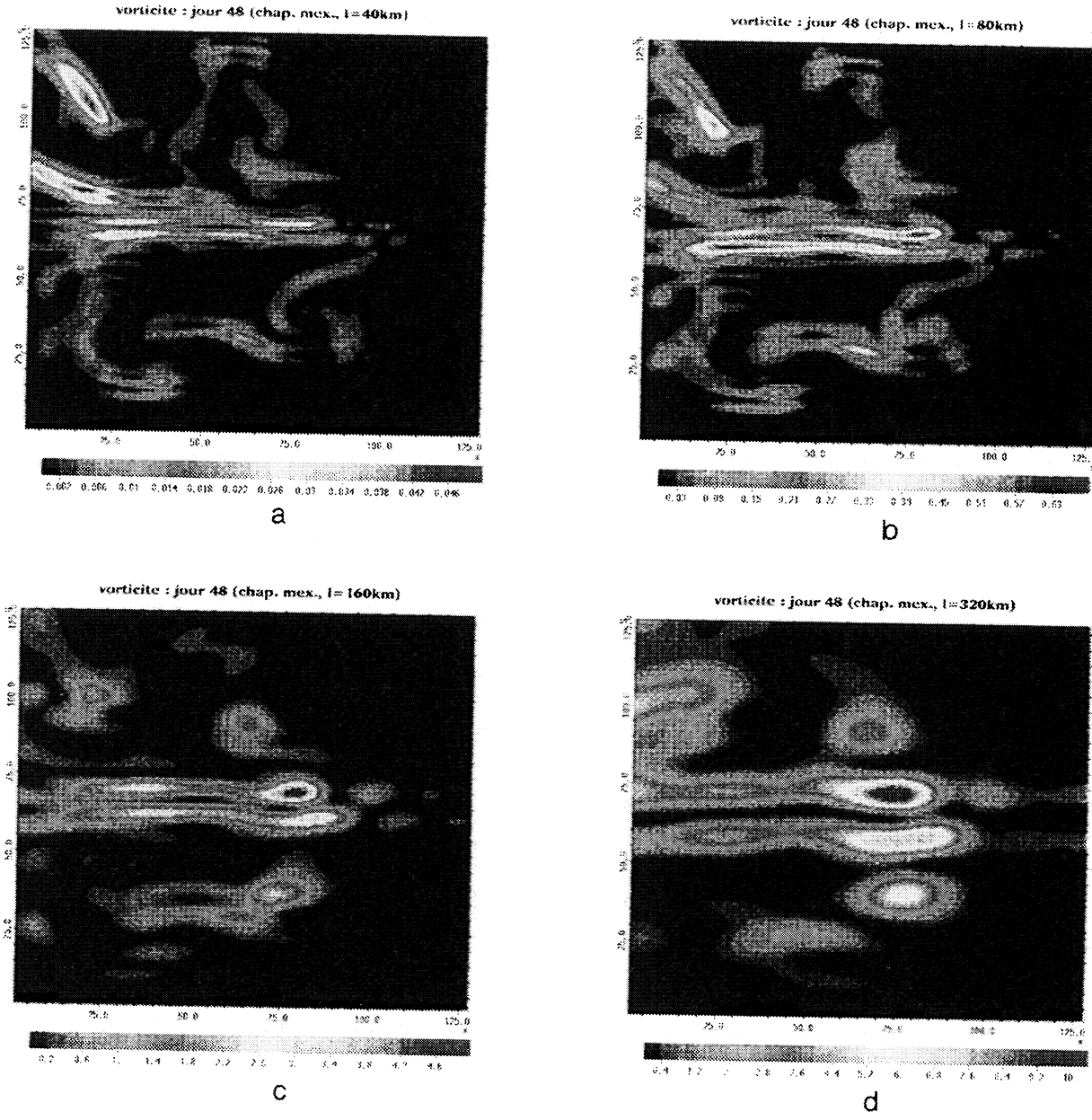


Fig.4.13 : Analyse par ondelettes bidimensionnelles du champ de vorticité du jour 48. L'ondelette utilisée est l'ondelette chapeau mexicain (complexe progressive) bidimensionnelle. On représente le carré du module des coefficients d'ondelettes pour différentes valeurs de la longueur d'onde λ. L'angle de rotation choisi est $\theta = 0$.
(a) $\lambda = 40km$. (b) $\lambda = 80km$. (c) $\lambda = 160km$. (d) $\lambda = 320km$.

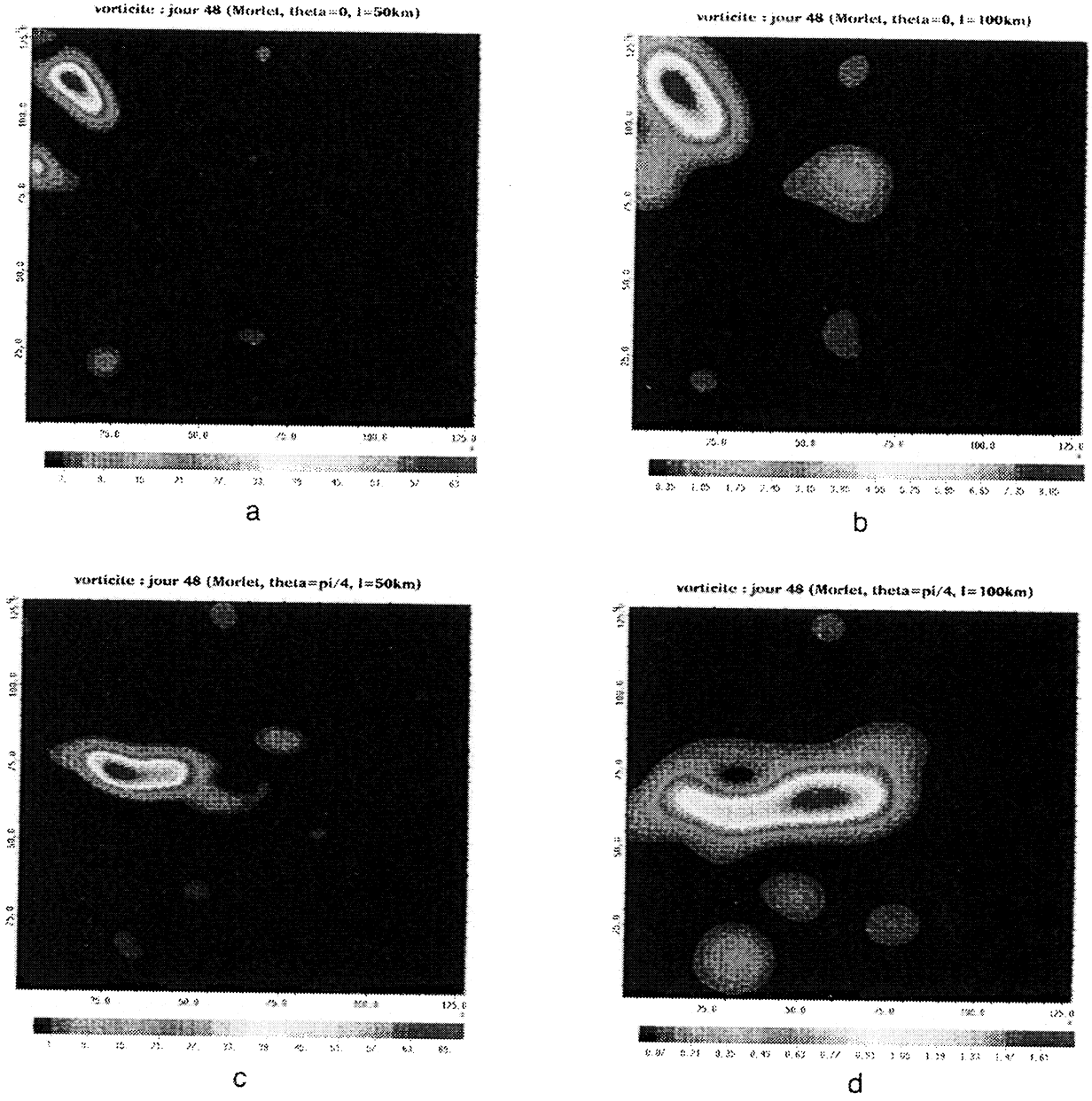


Fig.4.14 : Analyse du champ bidimensionnel de vorticité du jour 48 à l'aide de l'ondelette de Morlet bidimensionnelle ($|\varpi_0| = 5$). L'angle de rotation θ est fixé et l'analyse est faite suivant les longueurs d'onde λ. On représente le carré du module des coefficients d'ondelettes.
(a) $\theta = 0$, $\lambda = 50km$ $\quad (b)$ $\theta = 0$, $\lambda = 100km$
(c) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\lambda = 50km$ $\quad (d)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\lambda = 100km$.

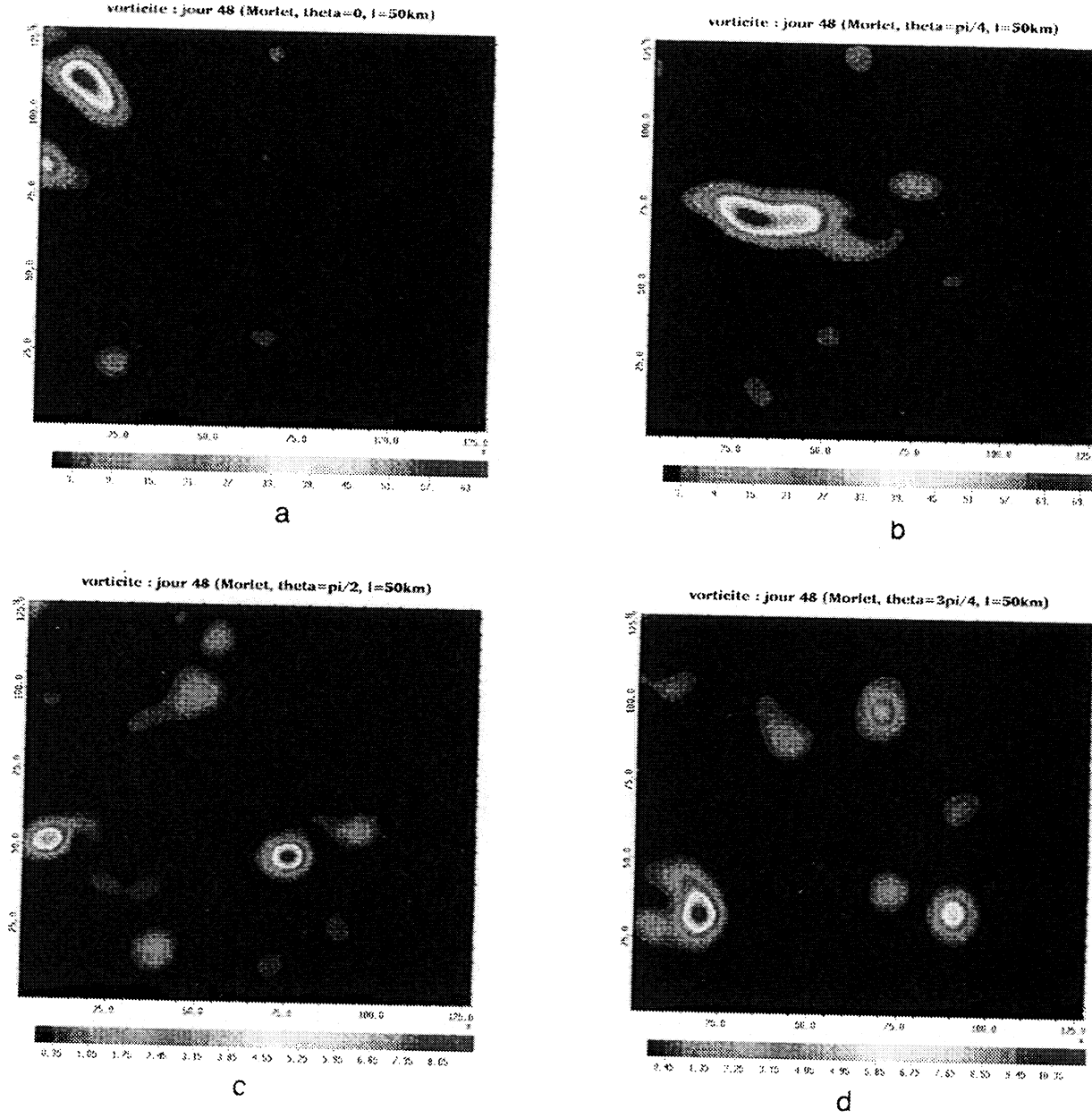


Fig.4.15 : Analyse du champ bidimensionnel de vorticité du jour 48 à l'aide de l'ondelette de Morlet bidimensionnelle ($|\vec{\omega}_0| = 5$). La longueur d'onde λ est fixée ($\lambda = 50km$) et l'analyse est faite suivant les directions de l'ondelette. On représente le carré du module des coefficients d'ondelettes.
$(a)\ \theta = 0 \quad (b)\ \theta = \frac{\pi}{4} \quad (c)\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad (d)\ \theta = \frac{3\pi}{4}$.

4.3.4 Une approche de filtrage numérique par ondelettes orthogonales

Il existe déjà des techniques de filtrage par ondelettes permettant de dégager des lignes spectrales [40] ou des structures particulières [22] dans le champ des coefficients d'ondelettes. Ces techniques sont basées sur l'utilisation de la transformée en ondelettes continue. O. Bertrand et al [7] ont utilisé les ondelettes orthogonales pour le filtrage temps-fréquence des signaux transitoires médicaux. V. Perrier [82] a également utilisé les bases orthonormées d'ondelettes périodiques pour le filtrage des oscillations parasites (phénomènes de Gibbs) pouvant apparaître dans la solution numérique d'une E.D.P. au cours de la résolution.

L'application que nous proposons ici est une approche de filtrage numérique basée sur l'utilisation des ondelettes orthogonales dans le but d'extraire une structure spécifique d'un signal.

4.3.4.1 Remarque de départ

Si E_j, $j \in \mathbb{N}$, est une famille de sous espaces de $L^2(\mathbb{R})$, alors tout signal f appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$\begin{cases} g_0 = f \\ g_j = f_{j+1} + g_{j+1} \end{cases}$$

avec $f_{j+1} \in E_{j+1}$ et $g_{j+1} \in {E_{j+1}}^{\perp}$.

La suite f_j ainsi définie est telle que

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j$$

$$\int f^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \int f_j^2$$

si $\|g_j\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$.

En effet, on a :

$$\begin{array}{ccccc} g_0 & = & f_1 & + & g_1 \\ g_1 & = & f_2 & + & g_2 \\ g_2 & = & f_3 & + & g_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1} & = & f_n & + & g_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \int g_0^2 & = & \int f_1^2 & + & \int g_1^2 \\ \int g_1^2 & = & \int f_2^2 & + & \int g_2^2 \\ \int g_2^2 & = & \int f_3^2 & + & \int g_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int g_{n-1}^2 & = & \int f_n^2 & + & \int g_n^2 \end{array}$$

En faisant la somme membre à membre des deux termes de l'égalité, on obtient

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j + g_n$$

$$\int f^2 = \sum_{j=1}^{n} \int f_j^2 + \int g_n^2$$

Si $\|g_n\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ alors

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j$$

$$\int f^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \int f_j^2$$

On obtient ainsi la décomposition d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ en signaux élémentaires f_i, $i \geq 1$, tels que la somme des énergies des signaux élémentaires est égale à l'énergie du signal initial.

4.3.4.2 Choix du sous espace E_J et description de la méthode de filtrage

Pour J fixé, nous allons décrire la méthode en dimension un pour ensuite l'étendre en dimension deux.

Pour utiliser les algorithmes rapides de décomposition en ondelettes orthogonales et isoler d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ des structures centrées en X_J et de longueur d'onde λ_J, on prend

$$E_J = \{\mathbb{R} \cdot \Phi_J\} \quad \text{avec} \quad \Phi_J(X) = \psi\left(\frac{X - X_J}{\lambda_J}\right)$$

où ψ est l'ondelette analysante considérée. Ce choix consiste à centrer l'ondelette ψ en X_J et à la dilater de λ_J.

Pour calculer f_J et g_J, on a

$$g_{J-1}(X) = \alpha \Phi_J(X) + g_J(X), \alpha \in \mathbb{R}$$

On sait que si $h \in L^2(\mathbb{R})$, alors

$$h(x) = \sum_{j,k\mathbb{Z}} c_{jk}(h) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$

où $c_{jk}(h) = (h, \psi_{jk})$ avec $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$. $c_{jk}(h)$ caractérise sur h les structures à l'échelle 2^{-j}.

Donc si $\frac{X-X_J}{\lambda_J} = 2^{j_0}x - k_0, j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$, on a $X = \lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J$.
On pose

$$\tilde{g}_J(x) = g_J(\lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J)$$
$$\tilde{g}_{J-1}(x) = g_{J-1}(\lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J)$$

Alors

$$\tilde{g}_{J-1}(x) = \alpha\psi(2^{j_0}x - k_0) + \tilde{g}_J(x)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{J-1}(x) &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{jk}(\tilde{g}_{J-1})2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) \\ &= c_{j_0k_0}(\tilde{g}_{J-1})2^{\frac{j_0}{2}}\psi(2^{j_0}x - k_0) + \sum_{(j,k)\neq(j_0,k_0)} c_{jk}(\tilde{g}_{J-1})2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha = 2^{\frac{j_0}{2}}c_{j_0k_0}(\tilde{g}_{J-1})$$
$$\tilde{g}_J(x) = \sum_{(j,k)\neq(j_0,k_0)} c_{jk}(\tilde{g}_{J-1})2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

Ainsi, la fonction f_J cherchée est

$$f_J(X) = 2^{\frac{j_0}{2}}c_{j_0k_0}(\tilde{g}_{J-1})\psi(\frac{X - X_J}{\lambda_J})$$

- **Extension de la méthode en dimension deux**

Pour isoler d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ des structures centrées en (X_J, Y_J) et de longueur d'onde λ_J, on prend

$$E_J = \left\{\mathbb{R}^2 \cdot \Phi^i_J, i = 1,2,3\right\}, \quad \text{avec} \quad \Phi^i_J(X,Y) = \psi^i\left(\frac{X - X_J}{\lambda_J}, \frac{Y - Y_J}{\lambda_J}\right)$$

où $\psi^i, i = 1,2,3$ sont des ondelettes analysantes (voir section 1.3.3.2).
On a

$$g_{J-1}(X,Y) = \alpha_1\Phi^1_J(X,Y) + \alpha_2\Phi^2_J(X,Y) + \alpha_3\Phi^3_J(X,Y) + g_J(X,Y), \alpha_i \in \mathbb{R}$$

On sait que si $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\begin{aligned}h(x,y) = \sum_{j,k,l\in\mathbb{Z}} &(c^1_{jkl}(h)2^j\psi^1(2^j x - k, 2^j y - l) + c^2_{jkl}(h)2^j\psi^2(2^j x - k, 2^j y - l) \\ &+ c^3_{jkl}(h)2^j\psi^3(2^j x - k, 2^j y - l)\end{aligned}$$

où $c^i_{jkl}(h) = (h, \psi^i_{jkl}), i = 1,2,3$ avec $\psi^i_{jkl}(x,y) = 2^j\psi^i(2^jx - k, 2^jy - l)$. Les c^i_{jkl} détectent des phénomènes sur h à l'échelle 2^{-j}.

Donc si

$$\frac{X - X_J}{\lambda_J} = 2^{j_0}x - k_0, \quad ie, \quad X = \lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J,$$

$$\frac{Y - Y_J}{\lambda_J} = 2^{j_0}y - l_0, \quad ie, \quad Y = \lambda_J(2^{j_0}y - l_0) + Y_J,$$

en suivant la même démarche que dans le cas unidimensionnelle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 2^{j_0}c^1_{j_0k_0l_0}(\tilde{g}_{J-1}) \\
\alpha_2 &= 2^{j_0}c^2_{j_0k_0l_0}(\tilde{g}_{J-1}) \\
\alpha_3 &= 2^{j_0}c^3_{j_0k_0l_0}(\tilde{g}_{J-1}) \\
\tilde{g}_J(x,y) &= \sum_{(j,k,l)\neq j_0,k_0,l_0)} \left(\sum_{i=1}^{3} c^i_{jkl}2^j\psi^i(2^jx - k, 2^jy - l) \right)
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{g}_{J-1}(x,y) = g_{J-1}(\lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J, \lambda_J(2^{j_0}y - l_0) + Y_J).$$

$$\tilde{g}_J(x,y) = g_J(\lambda_J(2^{j_0}x - k_0) + X_J, \lambda_J(2^{j_0}y - l_0) + Y_J).$$

Nous avons donc

$$f_J(X,Y) = 2^{j_0}\left(\sum_{i=1}^{3} c^i_{j_0k_0l_0}(\tilde{g}_{J-1})\psi^i(\frac{X - X_J}{\lambda_J}, \frac{Y - Y_J}{\lambda_J}) \right)$$

D'autres stratégies de choix des sous espaces E_J sont possibles. On peut par exemple envisager de prendre le maximum des coefficients d'ondelettes.

4.3.4.3 Un premier essai numérique

On présente à titre d'exemple, une utilisation de la méthode proposée pour extraire d'un signal 256×256 une structure tourbillonnaire centrée en $(k_0, l_0) \simeq (128, 128)$ et de longueur d'onde $\lambda \simeq 70$. Le signal initial est un échantillon 64×64 ,centré sur le tourbillon, prélévé sur la carte de vorticité du jour 48 dans la moitié Sud du bassin (cf. Fig.4.6.*b*). Par un procédé d'interpolation (spline cubique), on s'est raméné à un signal de taille 256×256.

Dans le but de tester la méthode, on cherche à extraire la structure tourbillonnaire se trouvant au centre du signal initial (*Fig*.4.16.*a*). Pour des raisons de rapidité de calcul, on utilise l'ondelette à support compact ψ_5 de Daubechies. La décomposition-recomposition en ondelettes est faite sur 5 niveaux d'échelle

($j = -1, \cdots, -5$). Nous avons choisi $j_0 = -5$ comme paramètre de l'échelle d'extraction. Ce choix est purement arbitraire.

La figure *Fig.*4.16.*b* représente la reconstruction du signal à l'aide de tous ses coefficients d'ondelettes. On observe qu'on obtient une reconstruction parfaite. En fait, il n'y a pratiquement pas de différence entre le signal initial (*Fig.*4.16.*a*) et le signal reconstruit. Cette reconstruction vise à valider le calcul numérique des coefficients d'ondelettes.

La figure *Fig.*4.16.*c* représente la structure tourbillonnaire extraite du signal initial. On peut effectivement observer la présence du tourbillon au centre du bassin où la vorticité est maximale. On constate qu'il y a beaucoup plus d'informations extraites car en plus du tourbillon, on observe la présence d'autres stuctures (basses fréquences) au Nord-Ouest ainsi qu'à l'Ouest du bassin. Ces structures pourraient certainement être liées aux coefficients d'ondelettes $c^1_{j_0 k_0 l_0}$ et $c^2_{j_0 k_0 l_0}$ qui détectent respectivement les phénomènes horizontaux et verticaux. Pour n'extraire que l'information utile, c'est à dire le tourbillon, nous pensons qu'il faut seulement considérer le coefficient d'ondelette $c^3_{j_0 k_0 l_0}$.

La figure *Fig.*4.16.*d* représente la différence entre le signal initial et le signal extrait. On peut effectivement constater que le tourbillon est enlévé du signal initial. Il ne reste plus que des structures de hautes fréquences situées dans une zône qui se trouve au Nord-Ouest du bassin.

Nous avons également vérifié la conservation d'énergie en comparant l'énergie du signal initial à la somme des énergies du signal extrait et du signal restant (différence entre signal initial et signal extrait). On obtient un déficit de 0.7% qui représente une perte insignifiante. En fait on a $E_c(si) = 386.9209 kgm^2 s^{-2}$ (énergie du signal initial), $E_c(se) = 276.6038 kgm^2 s^{-2}$ (énergie du signal extrait), $E_c(sr) = 107.5295 kgm^2 s^{-2}$ (énergie du signal reste). $E_c(se) + E_c(sr) = 384.1333 kgm^2 s^{-2}$

Cet exemple n'est qu'un premier essai et les résultats obtenus sont très encourageants. La méthode proposée semble donc efficace pour extraire une structure spécifique dans un signal. Cependant, il convient de noter qu'elle présente l'inconvénient d'imposer la connaissance du centre et de la longueur d'onde de la structure à extraire. En plus le choix de j_0 (paramètre de l'échelle d'extraction) est complètement arbitraire.

Cette approche n'est qu'une première tentative d'utilisation des ondelettes ortthogonales pour le filtrage numérique et nous pensons qu'elle est à approfondir d'un point de vue de vue algorithmique de façon à obtenir un procédé direct du choix de j_0.

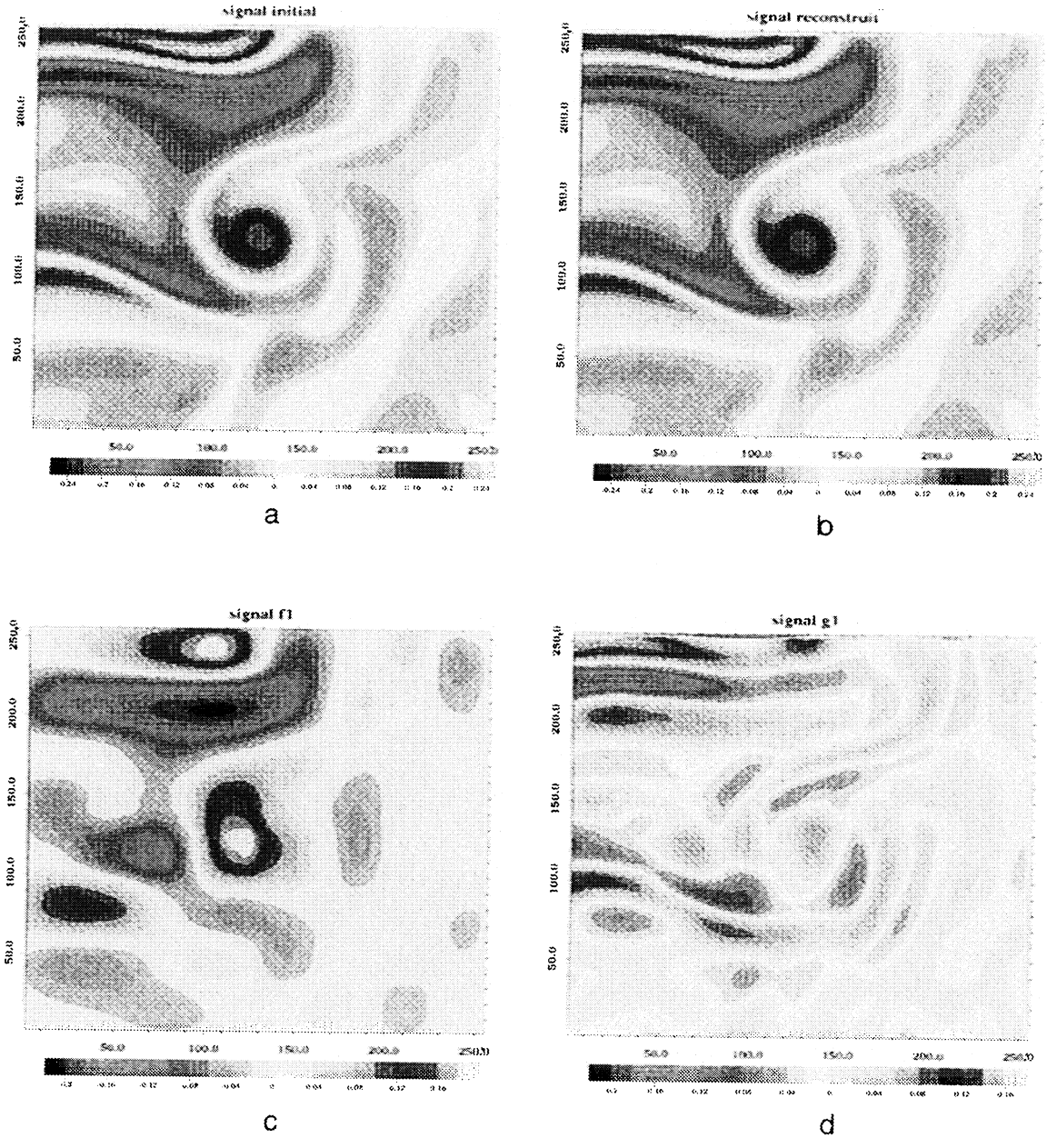


Fig.4.16 : Extraction de structure spécifique d'un signal par filtrage numérique par ondelettes orthogonales. On utilise l'ondelette à support compact ψ_5 de Daubechies.

(a) : Signal initial 256×256, où l'on observe une structure tourbillonnaire centrée en $(x_0, y_0) \simeq (128, 128)$.

(b) : Reconstruction du signal initial à l'aide de tous ses coefficients d'ondelettes. La décomposition-recomposition est faite sur 5 niveaux de résolution ($j = -1, \cdots, -5$). On constate que la reconstruction est parfaite.

(c) : Structure tourbillonnaire extraite du signal initial par la méthode de filtrage proposée.

(d) : Différence entre le signal initial et le signal extrait.

Chapitre 5

Ondelettes et estimation de densité de probabilité

5.1 Introduction

Cette section est consacrée à une approche de l'utilisation des ondelettes pour construire un estimateur d'une densité de probabilité inconnue supposée appartenir à un espace de Sobolev donné, au vu d'une suite de réalisations indépendantes de cette dernière.

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, leur distribution commune ayant une densité de probabilité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La densité f est rarement connue en pratique, mais on peut l'estimer au vu des observations. L'approche classique est de commencer avec un modèle paramétrique f_θ où θ est un paramètre vectoriel inconnu de dimension p qu'il s'agit d'estimer. Néanmoins, le choix d'une telle forme de la densité est souvent peu justifié et on préfère utiliser une estimation non paramétrique de f. Un des exemples les plus connus de tels estimateurs est l'histogramme empirique. Malheureusement l'histogramme est discontinu et ne permet pas d'extrapoler la densité au delà de l'étendue des données. Lorsque des connaissances a priori permettent d'affirmer que la densité inconnue f est "lisse", pour l'estimer, plusieurs méthodes ont été proposées et utilisées au cours de ces dernières années. Elles comprennent la méthode du noyau (Rozenblatt [84], Parzen [75], Watson et Leabetter [96]), les méthodes de séries orthogonales (Cencov [12], Kronmal et Tarter [56], Schwartz [87], Walter [94], Walter et Blum [95]), les méthodes d'interpolation splines (Wahba [93]). Cette liste est loin d'être exhaustive et pour une bibliographie plus complète on pourra se reporter aux ouvrages [11] [90] sur l'estimation d'une densité.

L'estimation de la densité par la méthode du noyau est la plus populaire parmi toutes les méthodes. Son caractère local est certainement sa principale attraction. La méthode des séries orthogonales est compétitive dans beaucoup de situations, notamment en dimension un et lorsque la fonction densité inconnue est à support compact. Par exemple, les développements en série de Fourier sont très populaires à cause de la puissance de calcul de la FFT (fast Fourier transform). Malheureusement, ces estimateurs sont peu efficaces lorsqu'il s'agit d'estimer les propriétés locales de la fonction densité. Les développements en série de Haar sont aussi très populaires à cause de leur caractère local. Mais ils sont incapables d'estimer les variations locales de la dérivée de la fonction densité.

Récemment, une méthode d'estimation de densité basée sur le "développement en ondelettes" a été introduite par A. Antoniadis et R. Carmona [1] dans l'espoir de pallier aux inconvénients des méthodes traditionnelles. Cependant, pour une raison numérique qui apparaîtra dans la suite, la méthode introduite par A. Antoniadis et R. Carmona présente des difficultés dans son utilisation. L'objet de ce chapitre est de proposer une extension de cette méthode permettant de

contourner ces difficultés à l'aide d'un algorithme de calcul fondé sur l'utilisation des ondelettes à support compact de Daubechies.

5.2 Méthode de développement orthogonal

Nous décrivons très brièvement la stratégie de construction d'un estimateur non paramétrique de densité par la méthode de développement orthogonal dont est inspirée la méthode de "développement en ondelettes". Elle est l'approche la plus naturelle du point de vue de l'analyse fonctionnelle.

Si la fonction densité inconnue f appartient à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si $\{\varphi_n, n \geq 0\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, alors on a :

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i$$

La convergence de la série a lieu au sens de la norme de $\mathcal{H}$. Etant donné un échantillon $X_1, \cdots, X_n$ de densité de probalité f, un estimateur $\tilde{f}$ de f est obtenu en remplaçant la série infinie par une somme finie et chaque coefficient par un estimateur calculé à l'aide de l'échantillon. En d'autres termes, on considère $\tilde{f}$ sous la forme

$$\tilde{f} = \sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i$$

où N est un entier grand (à choisir) et c_i un estimateur du i-ème coefficient (f, φ_i). Dans le cas particulier où $\mathcal{H} = L^2$, on a

$$(f, \varphi_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi_i(x)}dx = I\!E\{\overline{\varphi_i(X_1)}\}$$

et l'estimateur sans biais c_i de (f, φ_i) est choisi tel que

$$c_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_i(X_j)}$$

Cette approche a été utilisée avec le système d'Hermite de $L^2(I\!R)$ pour les densités sur $I\!R$, le système de Laguerre pour les densités sur $[0, +\infty[$ et le système de Haar ainsi que les systèmes trigonométriques pour les densités à support compact. Pour plus de détail on peut consulter [11].

5.3 Méthode de développement par ondelettes

L'approche suivie par A. Antoniadis et R. Carmona [1] pour la construction d'un estimateur de densité de probabilité par la méthode de développement par ondelettes est dans le même esprit que pour la méthode des séries orthogonales. Mais elle a une grande flexibilité en ce sens qu'un choix approprié de l'ondelette analysante peut être utilisé pour alléger les inconvenients des méthodes traditionnelles. En particulier, le fait que les estimations par les séries de Fourier captent difficilement les caractéristiques locales de la densité inconnue, que le système de Harr a des difficultés dans la prise en compte des variations de la fonction densité.

Soit $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ une analyse multirésolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$ (cf. section 1.3.2.2) avec une fonction d'échelle associée φ réelle, bornée et de dérivée première bornée.

Etant donné un échantillon $X_1, \cdots, X_n$ de densité de probalité f, on choisit un entier j qui définit la résolution (l'échelle) de l'estimateur. Une très grande valeur de j conduirait à un estimateur très oscillant, très fidèle aux données (à la densité empirique) alors qu'une petite valeur de j conduirait à un estimateur très lisse qui peut éventuellement "rater" les détails du comportement local de la densité. Ce choix de j indique que l'on cherche un estimateur dans l'espace V_j. En d'autres termes, on essaye d'estimer $f_j = P_{V_j} f$ (projection de f dans V_j) au lieu de f, le prix à payer étant une contribution $\|f - f_j\|^2$ à l'erreur quadratique moyenne. On utilise donc la base orthonormée $\{\varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$ de V_j pour décomposer f_j; puis on détermine un entier $k(j) > 0$ et on remplace

$$f_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f_j, \varphi_{jk})\varphi_{jk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \varphi_{jk})\varphi_{jk} \tag{5.1}$$

par

$$f_{jk(j)} = \sum_{k=-k(j)}^{k(j)} (f, \varphi_{jk})\varphi_{jk} \tag{5.2}$$

introduisant ainsi une nouvelle contribution

$$\|f_j - f_{jk(j)}\|^2 = \sum_{|k|>k(j)} (f, \varphi_{jk})^2$$

à l'erreur quadratique moyenne. Notons que la valeur $k(j) = \infty$ est une possibilité qui pourrait éventuellement être envisagée. En effet la sommation (5.2) nécessite seulement un nombre fini de termes lorsque la fonction φ est à support compact.

Finalement, l'estimateur proposé par A. Antoniadis et R. Carmona est

$$\tilde{f}_j = \sum_{k=-k(j)}^{k(j)} \tilde{c}_{jk}\varphi_{jk}$$

où $\tilde{c}_{jk}$ défini par

$$\tilde{c}_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{jk}(X_i)$$

est l'estimateur sans biais des coefficients (f, φ_{jk}) basé sur l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$.

Le résultat intéressant de A. Antoniadis et R. Carmona est l'étude des propriétés asymptotiques ($n \longrightarrow +\infty$) de cet estimateur par le contrôle de l'erreur quadratique moyenne ($MISE$)

$$MISE = \mathbb{E}\{\|\tilde{f}_j - f\|^2\} = \mathbb{E}\{\int_0^{+\infty} |\tilde{f}_j(x) - f(x)|^2 dx\}$$

Plus précisement, ils ont montré le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soit $f \in H^s$ (espace de sobolev d'ordre s) une densité de probabilité qui vérifie*

$$\lim \sup_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|^\beta} < \infty$$

pour un réel $\beta > 1$ et soit φ la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution r-régulière $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. On suppose que $r > s$ et que φ est réelle, bornée et de dérivée première bornée.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'entier j_n et $k_n = k(j_n)$ par

$$j_n = \frac{1}{2s+1} log_2 n \qquad et \quad k_n = n^{\frac{(2s+1)}{(2s+1)(\beta-1)}}$$

Alors, pour tout échantillon $X_1, ..., X_n$ de distribution f , l'estimateur

$$\tilde{f}_{j_n}(x) = \sum_{k=-k_n}^{k_n} \tilde{c}_{j_n k} \varphi_{j_n k}(x)$$

où

$$\tilde{c}_{j_n k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{j_n k}(X_i)$$

vérifie

$$\mathbb{E}\{\|f - \tilde{f}_{j_n}\|^2\} = O(n^{-\frac{2s}{2s+1}})$$

Le taux de convergence ainsi obtenu est optimal au sens qu'il atteint le meilleur taux établi par Bretagnolle et Huber [11]. Le meilleur taux de convergence possible de l'erreur quadratique moyenne est $O(n^{-q})$, où $q = \frac{2s}{2s+1}$ dans le cas unidimensionnel. L'estimateur de densité en ondelettes proposé ici possède donc

ce taux de convergence optimal.

5.4 Extension de la méthode de développement par ondelettes

5.4.1 Introduction

Si les fonctions d'échelles φ et l'ondelette ψ sont convenablement choisies, elles peuvent être interprétées comme des filtres passe-bandes.

On peut donc voir que l'estimateur obtenu par A. Antoniadis et R. Carmona est adapté à la structure locale des données en ce sens qu'il est essentiellement une superposition d'estimateur à noyaux de longueurs de fenêtre différentes. Les auteurs ont trouvé que de petites valeurs du paramètre j se sont révelées assez satisfaisantes en pratique ($j = 1$ et même $j = 0$, dépendant de la régularité de la densité à estimer). Cette méthode semble être aussi bonne sinon meilleure que toutes celles qu'ils ont essayées dans le cas unidimensionnel. Malheureusement on ne dispose pas de procédé automatique de choix optimal de j en fonction des données observées. C'est pourquoi actuellement, ils ont proposé d'étudier la possibilité d'adapter à leur procédure d'estimation par ondelettes les idées introduites dans (Gu et Wahba [37]) pour les analyses des modèles de splines inf-convolution. Comme pour j relativement grand, $\tilde{f}_j$ (estimateur en ondelettes de f) peut être considéré comme un descripteur des données brutes, l'idée est de chercher un estimateur $\tilde{g}$ dans V_j qui minimise un critère de type-MISE avec une condition de régularité. Plus précisement, comme $V_j = V_0 \overset{j-1}{\underset{\beta=0}{\oplus}} W_\beta$, on cherche $\tilde{g}$ dans V_j minimisant la fonction suivante

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}} \Big((\tilde{f}_j, \varphi_{jk'}) - (\tilde{g}, \varphi_{jk'}) \Big)^2 + \sum_{\beta=0}^{j-1} \lambda_\beta \| P_{W_\beta} \tilde{g} \|^2$$

où les λ_β sont des paramètres de pondération (de lissage) des détails et P_{W_β} l'opérateur de projection orthogonale sur W_β (espace des détails). La condition de régularité choisie est une somme des carrés des normes des $P_{W_\beta}\tilde{g}$ (projections de $\tilde{g}$ sur W_β) munie d'un poids. Puisque les projections P_{W_β} peuvent être vues comme des filtres passe-bandes, le nouvel estimateur peut être vu comme le résultat du passage de l'estimateur en ondelettes par différents filtres passe-bandes dont les puissances sont contrôlées par les poids λ_β. Avec cette méthode, on espère pouvoir utiliser le j optimal fourni, en fonction des données, par le théorème 5.1 et obtenir un estimateur $\tilde{g}$ convenable.

5.4.2 Le problème de minimisation

5.4.2.1 Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation

On est donc conduit à poser le problème précédent comme un problème de minimisation

$$(\mathcal{P}) : \min_{\tilde{g}\in V_j}\left[\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\left((\tilde{f}_j,\varphi_{jk'})-(\tilde{g},\varphi_{jk'})\right)^2+\sum_{\beta=0}^{j-1}\lambda_\beta\|P_{W_\beta}\tilde{g}\|^2\right] \tag{5.3}$$

Lorsque la fonction d'échelle φ est à support compact, le problème $(\mathcal{P})$ qui peut être de dimension infinie a priori, se ramène à un problème de dimension finie et est réduit à la résolution du problème

$$(\mathcal{P}) : \min_{\tilde{g}\in V_j}\left[\sum_{k'=-k_j}^{k_j}\left((\tilde{f},\varphi_{jk'})-(\tilde{g},\varphi_{jk'})\right)^2+\sum_{\beta=0}^{j-1}\lambda_\beta\|P_{W_\beta}\tilde{g}\|^2\right] \tag{5.4}$$

A présent, on veut se ramener à un problème du type

$$\min_{(c,d)}\left[\left\|y-Sd-Qc\right\|^2+\lambda^t cQc\right] \tag{5.5}$$

pour appliquer les méthodes introduites par Gu et Wahba [37] pour évaluer les vecteurs c, d et λ.

Posons donc $\lambda_\beta = \frac{\lambda}{\theta_\beta}$; et redéfinissons la structure Hilbertienne (norme et produit scalaire) sur V_j. Pour cela, on définit la norme modifiée indexée par θ par :

$$\|\varphi\|_\theta^2 = \|P_{V_0}\varphi\|^2+\sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta^{-1}\|P_{W_\beta}\varphi\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme initiale sur V_j (norme sur $L^2(\mathbb{R})$). On note par $(\cdot,\cdot)_\theta$ le produit scalaire correspondant à la norme $\|\cdot\|_\theta$. En effet, on vérifie facilement que $\|\cdot\|_\theta$ est bien une norme.

Posons

$$\varphi_{jk'}^\theta = P_{V_0}\varphi_{jk'}+\sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta P_{W_\beta}\varphi_{jk'}$$

alors, on montre facilement que

$$(\varphi,\varphi_{jk'}) = (\varphi,\varphi_{jk'}^\theta)_\theta, \forall\varphi\in V_j.$$

Le problème $(\mathcal{P})$ peut alors s'écrire

$$(\mathcal{P}) : \min_{\tilde{g}\in V_j}\left[\sum_{k'=-k_j}^{k_j}\left((\tilde{f}_j,\varphi_{jk'}^\theta)_\theta-(\tilde{g},\varphi_{jk'}^\theta)_\theta\right)^2+\lambda\|P_*\tilde{g}\|_\theta^2\right] \tag{5.6}$$

où $P_* = \sum_{\beta=0}^{j-1} P_{W_\beta}$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $W_* = \bigoplus_{\beta=0}^{j-1} W_\beta$ pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\theta$.

On montre alors (Gu and Wahba,[37]) que le problème (5.6) admet une solution unique donnée par

$$\tilde{g}_\lambda = \sum_{k=-k_0}^{k_0} d_k \varphi_{0k} + \sum_{k'=-k_j}^{k_j} c_{k'} \varphi^\theta_{jk'}$$

où $(\varphi_{0k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0. Cette solution unique de (5.6) est, par voie de conséquence, la solution de (5.4).

En introduisant $\tilde{g}_\lambda$ dans (5.6), on obtient :

$$(\mathcal{P}) : \min_{\tilde{g}\in V_j} \left[\sum_{k'=-k_j}^{k_j} \left((\tilde{f}_j, \varphi^\theta_{jk'})_\theta - \sum_{k=-k_0}^{k_0} d_k (\varphi_{0k}, \varphi^\theta_{jk'})_\theta - \sum_{k''=-k_j}^{k_j} c_{k''} (\varphi^\theta_{jk''}, \varphi^\theta_{jk'})_\theta \right)^2 + \lambda \Big\| \sum_{k''=-k_j}^{k_j} c_{k''} P_* \varphi^\theta_{jk''} \Big\|^2_\theta \right]$$

Des égalités

$$(\tilde{f}_j, \varphi^\theta_{jk'})_\theta = (\tilde{f}_j, \varphi_{jk'}); \quad (\varphi_{0k}, \varphi^\theta_{jk'})_\theta = (\varphi_{0k}, \varphi_{jk'})$$
$$(\varphi^\theta_{jk''}, \varphi^\theta_{jk'})_\theta = (P_*\varphi^\theta_{jk''}, P_*\varphi^\theta_{jk'})_\theta$$

on obtient

$$(\mathcal{P}) : \min_{\tilde{g}\in V_j} \left[\sum_{k'=-k_j}^{k_j} \left((\tilde{f}_j, \varphi_{jk'}) - \sum_{k=-k_0}^{k_0} d_k (\varphi_{0k}, \varphi_{jk'}) - \sum_{k''=-k_j}^{k_j} c_{k''} (P_*\varphi^\theta_{jk''}, P_*\varphi^\theta_{jk'})_\theta \right)^2 + \lambda \sum_{k',k''=-k_j}^{k_j} c_{k'} c_{k''} (P_*\varphi^\theta_{jk''}, P_*\varphi^\theta_{jk'})_\theta \right]$$

En posant

$$y_j = \Big((\tilde{f}_j, \varphi_{jk'}) \Big), \quad S = \Big((\varphi_{0k}, \varphi_{jk'}) \Big) \quad \text{et} \quad \tilde{Q}^\theta_* = \Big((P_*\varphi^\theta_{jk'}, P_*\varphi^\theta_{jk''})_\theta \Big)$$

$$\text{avec} \quad k = -k_0, \cdots, k_0; \quad k', k'' = -k_j, \cdots, k_j$$

le problème $(\mathcal{P})$ se rammène alors à

$$\min_{(c,d)} \left[\Big\| y_j - Sd - \tilde{Q}^\theta_* c \Big\|^2 + \lambda^t c \tilde{Q}^\theta_* c \right]$$

qui est bien la forme cherchée.

- **Remarque**

Nous allons à présent exprimer $\tilde{Q}_*^\theta$ à l'aide du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ correspondant à la norme $\|\cdot\|$ de L^2. On a :

$$P_*\varphi_{jk'}^\theta = \sum_{\beta=0}^{j-1} P_{W_\beta}\varphi_{jk'}^\theta = \sum_{\beta=0}^{j-1} P_{W_\beta}\big(P_{V_0}\varphi_{jk'} + \sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk'}\big)$$
$$= \sum_{\beta=0}^{j-1} P_{W_\beta}\big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk'}\big) = \sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta P_{W_\beta}\varphi_{jk'}$$

D'où

$$\Big(P_*\varphi_{jk'}^\theta, P_*\varphi_{jk''}^\theta\Big)_\theta = \Big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk'}, \sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk''}\Big)_\theta$$
$$= \Big(P_{V_0}\big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk'}\big), P_{V_0}\big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk''}\big)\Big)$$
$$+ \sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta^{-1}\Big(P_{W_\beta}\big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk'}\big), P_{W_\beta}\big(\sum_{\alpha=0}^{j-1}\theta_\alpha P_{W_\alpha}\varphi_{jk''}\big)\Big)$$

Puisque les W_β, $\beta = 0,\cdots,j-1$ sont orthogonaux à V_0, le premier terme de la somme est nul. Ainsi, à cause du fait que les W_β sont également deux à deux orthogonaux, on obtient

$$\Big(P_*\varphi_{jk'}^\theta, P_*\varphi_{jk''}^\theta\Big)_\theta = \sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta\Big(P_{W_\beta}\varphi_{jk'}, P_{W_\beta}\varphi_{jk''}\Big)$$

D'où

$$\tilde{Q}_*^\theta = \sum_{\beta=0}^{j-1}\theta_\beta\tilde{Q}_\beta \quad \text{avec} \quad \tilde{Q}_\beta = \Big(\big(P_{W_\beta}\varphi_{jk'}, P_{W_\beta}\varphi_{jk''}\big)\Big)$$

5.4.2.2 Sur la résolution du problème de minimisation

Nous allons maintenant donner des indications sur la résolution du problème $(\mathcal{P})$ écrite sous la forme

$$\min_{(c,d)}\left[\Big\|y_j - Sd - \tilde{Q}_*^\theta c\Big\|^2 + \lambda^t c\tilde{Q}_*^\theta c\right] \tag{5.7}$$

Soit $n \geq 1$ le nombre des données observées. En multipliant (5.7) par $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\min_{(c,d)}\left[\frac{1}{n}\Big\|y_j - Sd - \tilde{Q}_*^\theta c\Big\|^2 + \lambda'^t c\tilde{Q}_*^\theta c\right] \quad \text{avec} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{n} \tag{5.8}$$

Cette fonction atteint son minimum en c et d si ses dérivées par rapport à c et d s'annullent, ie

$$\begin{cases} (-y_j + Sd + \tilde{Q}_*^\theta c, S\delta d) & = & 0 \\ (-y_j + Sd + \tilde{Q}_*^\theta c + n\lambda' {}^t c, \tilde{Q}_*^\theta \delta c) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} Sd + (\tilde{Q}_*^\theta + \lambda' nI)c & = & y_j \\ (-n\lambda' c, S\delta d) & = & 0 \end{cases}$$

Finalement on obtient

$$\begin{cases} (\tilde{Q}_*^\theta + n\lambda' I)c + & Sd & = & y_j \\ & {}^t Sc & = & 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

La solution du système linéaire (5.9) est donc un minimum de (5.8). On montre (Gu and Wahba, [37]) que c'est le seul minimum si $\tilde{Q}_*^\theta$ est inversible.

Des algorithmes de résolution du système linéaire (5.9) basés sur la méthode de validation croisée généralisée et de celle de Newton sont présentés en détail dans [37]. Le principe est de choisir le paramètre de pondération λ' par validation croisée généralisée; la minimisation étant faite par la méthode de Newton. Nous allons très brièvement décrire ci-dessous la méthode de validation croisée. Pour les détails techniques, nous renvoyons aux travaux de Gu et Wahba dans [37].

Soit $S = FR = (F_1, F_2)\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la décomposition QR de S. La méthode de validation croisée généralisée cherche λ' qui minimise la fonction $V(\lambda', \theta)$ définie par

$$V(\lambda', \theta) = \frac{(\frac{1}{n}) {}^t z (Q_*^\theta + n\lambda' I)^{-2} z}{\left[(\frac{1}{n})(Q_*^\theta + n\lambda' I)^{-1}\right]^2}$$

où $z = {}^t F_2 y$ et $Q_*^\theta = {}^t F_2 \tilde{Q}_*^\theta F_2 = \sum_{\beta=0}^{j-1} \theta_\beta ({}^t F_2 \tilde{Q}_\beta F_2) = \sum_{\beta=0}^{j-1} \theta_\beta Q_\beta$

avec $Q_\beta = {}^t F_2 \tilde{Q}_\beta F_2$

Pour minimiser $V(\lambda', \theta)$ par rapport θ et λ', on itère sur le cycle suivant :

a/ Pour θ fixé, minimiser $V(\lambda', \theta)$ par rapport à $n\lambda'$.

b/ Mettre à jour θ en utilisant les informations des évaluations en cours.

Les algorithmes de résolution du système linéaire (5.9) ont été implémentés par Gu [38] et le code dévéloppé s'appelle $RKPACK$. Pour résoudre le système linéaire (5.9), $RKPACK$ exige en entrées les matrices S, $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$ et le vecteur y_j des observations et restitue les vecteurs c, d et λ' qui permettent par la suite d'évaluer l'estimateur $\tilde{g}_\lambda$. A ce niveau, le problème revient au calcul des matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$.

On aborde donc maintenant le calcul des matrices S et $\tilde{Q}_\beta$ en vue de l'utilisation de $RKPACK$. Pour cela, nous utiliserons les ondelettes à support

compact de Daubechies définies à la section 1.3.2.3.*b* du chapitre 1.

5.4.2.3 Calcul de la matrice $\tilde{Q}_\beta$

On rapelle (cf. section 1.3.2.3.*b*) que la fonction d'échelle φ à support compact de Daubechies est définie à l'aide de l'équation d'échelle

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où les h_k vérifient les conditions *i/*, *ii/* et *iii/* de la section 1.3.2.3.*b*. L'ondelette ψ est alors définie par

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \varphi(2x - k) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

qui peut encore s'écrire, en changeant k en $-k$, sous la forme :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{k+1} \varphi(2x + k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Les ondelettes à support compact n'ont pas d'expression analytique simple. Par conséquent, pour le calcul des matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, il peut être très compliqué et couteux de calculer les produits scalaires à l'aide de formules d'intégration numérique.

L'objectif que nous nous fixons donc ici est de calculer les matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$, à l'aide des coefficients h_k uniquement.

On a

$$\tilde{Q}_*^\theta = \sum_{\beta=0}^{j-1} \theta_\beta \tilde{Q}_\beta \quad \text{avec} \quad \tilde{Q}_\beta = \Big((P_{W_\beta} \varphi_{jk}, P_{W_\beta} \varphi_{jk'}) \Big), \quad k, k' = -k_j, \cdots, k_j$$

Pour calculer $\tilde{Q}_\beta$, nous allons évaluer le produit scalaire $(P_{W_\beta} \varphi_{jk}, P_{W_\beta} \varphi_{jk'})$. On a :

$$\begin{aligned} (P_{W_\beta} \varphi_{jk}, P_{W_\beta} \varphi_{jk'}) &= \Big(\sum_{l \in \mathbb{Z}} (\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) \psi_{\beta l}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\varphi_{jk'}, \psi_{\beta m}) \psi_{\beta m} \Big) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) (\varphi_{jk'}, \psi_{\beta m}) (\psi_{\beta l}, \psi_{\beta m}) \end{aligned}$$

$\{\psi_{\beta n}, n \in \mathbb{Z}\}$ étant une base orthonormale de W_β, alors

$$(\psi_{\beta l}, \psi_{\beta m}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad l = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Doù

$$(P_{W_\beta}\varphi_{jk}, P_{W_\beta}\varphi_{jk'}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\varphi_{jk}, \psi_{\beta l})(\varphi_{jk'}, \psi_{\beta l})$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}(\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) &= 2^{\frac{j+\beta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^j x - k)\psi(2^\beta x - l)dx \\ &= 2^{\frac{j-\beta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{j-\beta}x + 2^{j-\beta}l - k)\psi(x)dx \\ &= (\varphi_{j-\beta,k-2^{j-\beta}l}, \psi)\end{aligned}$$

Or

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}\varphi(2x+m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}\varphi_{1,-m}$$

Donc

$$(\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}(\varphi_{j-\beta,k-2^{j-\beta}l}, \varphi_{1,-m})$$

De

$$(\varphi_{jl}, \varphi_{1,-m}) = (\varphi_{j-1,l+2^{j-1}m}, \varphi)$$

on obtient

$$(\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}(\varphi_{j-\beta-1,k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m}, \varphi)$$

Posons $\Phi_l^j = (\varphi_{jl}, \varphi)$; alors

$$(\varphi_{jk}, \psi_{\beta l}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}\Phi^{j-\beta-1}_{k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m}$$

De même

$$(\varphi_{jk'}, \psi_{\beta l}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n h_{n+1}\Phi^{j-\beta-1}_{k'-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}n}$$

et par suite

$$\begin{aligned}(P_{W_\beta}\varphi_{jk}, P_{W_\beta}\varphi_{jk'}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Bigg\{ &\Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m h_{m+1}\Phi^{j-\beta-1}_{k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m}\Big] \\ &\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n h_{n+1}\Phi^{j-\beta-1}_{k'-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}n}\Big]\Bigg\}\end{aligned}$$

• **Calcul du terme Φ_l^j**

Nous allons à présent calculer Φ_l^j qui mettra fin au calcul de $\tilde{Q}_\beta$. De

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1k}(x)$$

on a

$$\Phi_l^j = (\varphi_{jl}, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (\varphi_{jl}, \varphi_{1k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (\varphi_{j-1, l-2^{j-1}k}, \varphi)$$

D'où

$$\Phi_l^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi_{l-2^{j-1}k}^{j-1}$$

avec

$$\Phi_l^0 = (\varphi_{0l}, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.4.2.4 Calcul de la matrice S

Nous avons que

$$S = \Big((\varphi_{0k}, \varphi_{jk'}) \Big), \quad k = -k_0, \cdots, k_0 \quad \text{et} \quad k' = -k_j, \cdots, k_j$$

Or

$$\begin{aligned} (\varphi_{0k}, \varphi_{jk'}) &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) \varphi(2^j x - k') dx \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^j x + 2^j k - k') \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{j, k' - 2^j k}(x) \varphi(x) dx \\ &= (\varphi_{j, k' - 2^j k}, \varphi) \end{aligned}$$

D'où

$$(\varphi_{0k}, \varphi_{jk'}) = \Phi_{k' - 2^j k}^j$$

5.4.2.5 Calcul de l'estimateur $\tilde{g}$

Connaissant les matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$; le code de minimisation *RKPACK* permet d'obtenir les vecteurs c, d et λ du problème (5.7) en résolvant le système linéaire (5.8). Ainsi, l'estimateur $\tilde{g}$ est évalué par :

$$\tilde{g}_\lambda = \sum_{k=-k_0}^{k_0} d_k \varphi_{0k} + \sum_{k'=-k_j}^{k_j} c_{k'} \varphi_{jk'}^\theta \tag{5.10}$$

où

$$\varphi^{\theta}_{jk'} = P_{V_0}\varphi_{jk'} + \sum_{\beta=0}^{j-1} \theta_\beta P_{W_\beta}\varphi_{jk'}$$

En introduisant $\varphi^{\theta}_{jk'}$ dans (5.10), on obtient

$$\tilde{g}_\lambda = \sum_{k=-k_0}^{k_0} \Big(d_k + \sum_{k'=-k_j}^{k_j} c_{k'}(\varphi_{0k}, \varphi_{jk'})\Big)\varphi_{0k} + \sum_{\beta=0}^{j-1} \theta_\beta \Big(\sum_{k'=-k_j}^{k_j} c_{k'} \sum_{l=-l_\beta}^{l_\beta} (\varphi_{jk'}, \psi_{\beta l})\Big)\psi_{\beta l}$$

où $(\varphi_{0k}, \varphi_{jk'})$ et $(\varphi_{jk'}, \psi_{\beta l})$ sont calculés aux sections 5.4.2.3 et 5.4.2.4 à l'aide de Φ^j_l définie à la section 5.4.2.3.

5.4.2.6 Remarque et commentaire

Pour le calcul des matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$, la valeur de j est déterminée au théorème 5.1. Dépendant de la taille des données et de la régularité de la fonction densité, elle indique l'espace V_j sur lequel on cherche à déterminer l'estimateur $\tilde{g}$.

Par exemple, si nous cherchons à déterminer un estimateur en ondelettes d'une fonction densité de probabilité $f \in \mathcal{H}^2$ (espace de Sobolev d'ordre 2) pour une population de $n = 1024$ échantillons, on a $j = \frac{1}{2s+1} log_2 n = 2$. L'estimateur $\tilde{g}$ est à chercher donc sur $V_2 = V_0 \bigoplus_{\beta=0}^{1} W_\beta$. On a alors $\tilde{Q}^{\theta}_* = \sum_{\beta=0}^{1} \theta_\beta \tilde{Q}_\beta$ et on doit calculer deux matrices élementaires $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, 1$. Comme nous l'avons montré à la section 5.4.2.3, pour calculer $\tilde{Q}_\beta$, pour β fixé, il suffit de calculer $\Phi^{j-\beta-1}_{k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m}$. Il vient donc que :

- Pour $\beta = 0$, on a

$$\Phi^{j-\beta-1}_{k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m} = \Phi^1_{k-4l+2m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \Phi^0_{k-4l+2m-n} = h_{k-4l+2m}$$

- Pour $\beta = 1$, on a

$$\Phi^{j-\beta-1}_{k-2^{j-\beta}l+2^{j-\beta-1}m} = \Phi^0_{k-2l+m} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k-2l+m=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à la matrice S, elle est calculée à partir de $\Phi^j_{k'-2^j k}$. Or

$$\Phi^j_{k'-2^j k} = \Phi^2_{k'-4k} = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} c_{n_1} \Phi^1_{k'-4k-2n_1} = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} h_{n_1} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} h_{n_2} \Phi^0_{k'-4k-2n_1-n_2}$$

$$= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} h_{n_1} h_{n_2}$$

$$\text{avec} \quad k' - 4k = 2n_1 + n_2$$

Il apparaît donc qu'on peut aisément calculer les matrices S et $\tilde{Q}_\beta$, $\beta = 0, \cdots, j-1$, uniquement à l'aide des coefficients h_k intrevenant dans les formules de construction des ondelettes à support compact de Daubechies.

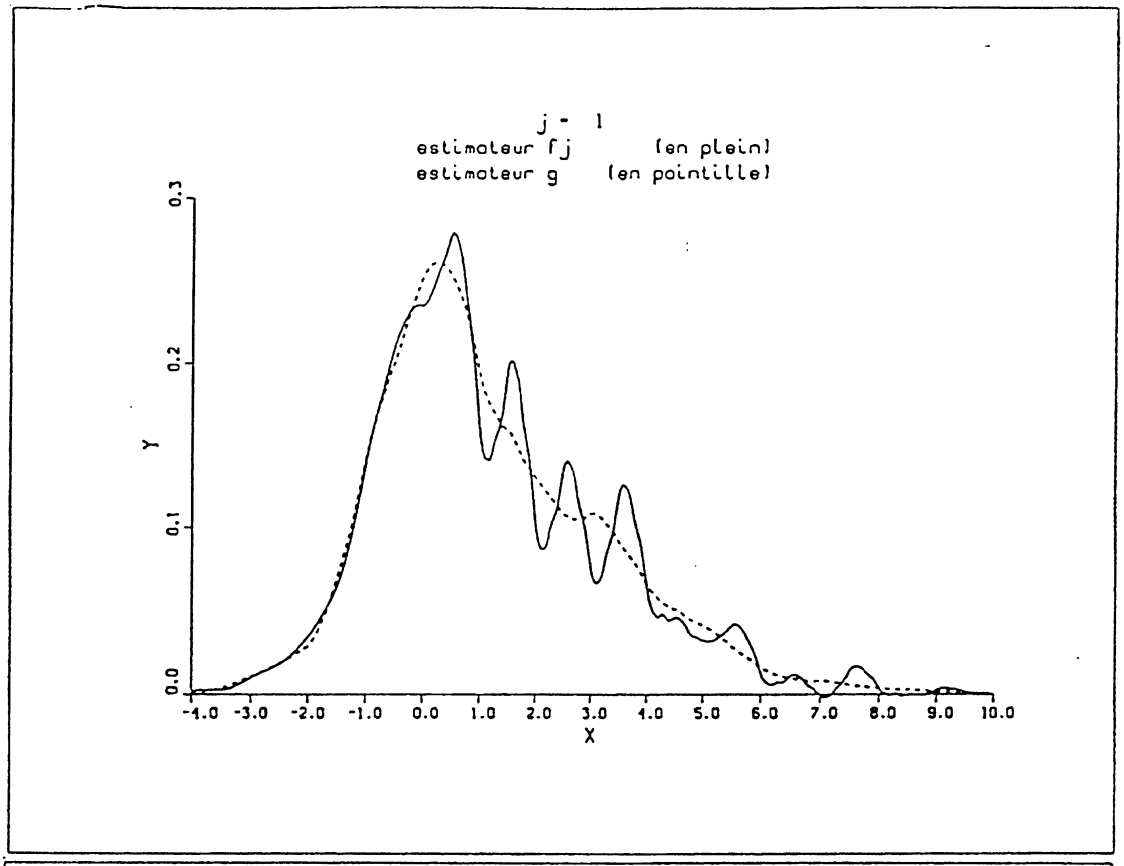
5.4.2.7 Quelques tests numériques

Nous présentons ici deux exemples des tests numériques que nous avons effectués sur des données simulées de 500 observations indépendantes générées à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. L'objectif de ces tests est de vérifier que partant d'un estimateur $\tilde{f}_j$ d'une densité de probabilité (déterminé par la méthode de développement par ondelettes), on peut construire un estimateur $\tilde{g}$ par la méthode proposée de sorte que $\tilde{g}$ soit un lissage approprié de $\tilde{f}_j$ et donc une meilleure estimation de la densité inconnue f. Pour ces tests, nous avons utilisé l'ondelette à support compact ψ_4 (ie, à 4 moments nuls) de Daubechies. En supposant que la densité à estimer f appartient à H^2 (espace de Sobolev d'ordre 2), le j optimal au sens de Antoniadis et Carmona (cf. théorème 5.1 de la section 5.3) pour $n = 500$ données est $j = 2$. Mais pour chacun des exemples, nous avons calculé $\tilde{f}_j$ et $\tilde{g}$ pour $j = 1$ et $j = 2$.

Dans l'exemple 1 (*Fig.*5.1), on peut constater que $\tilde{f}_j$ présente une grande variabilité dans les deux cas ($j = 1$ et $j = 2$). Cependant, on observe que $\tilde{g}$ a un meilleur comportement (variance plus petite) et réalise une bonne estimation de $\tilde{f}_j$.

Dans l'exemple 2 (*Fig.*5.2), les deux estimateurs sont acceptables pour $j = 1$ alors que $\tilde{f}_j$ devient mauvais (oscillant) pour $j = 2$. On constate que $\tilde{g}$ lisse bien $\tilde{f}_j$. Il convient cependant de noter qu'on a un problème de bord avec $\tilde{g}$.

Ces tests numériques montrent que $\tilde{g}$ réalise effectivement une bonne estimation de f même pour de grandes valeurs du paramètre j. Ce qui est l'objectif de la méthode proposée. Ces premiers essais sont encourageants et il nous semble donc qu'en partant de données réelles, on pourrait par cette méthode contourner les difficultés présentées par la méthode introduite par A. Antoniadis et R. Carmona.



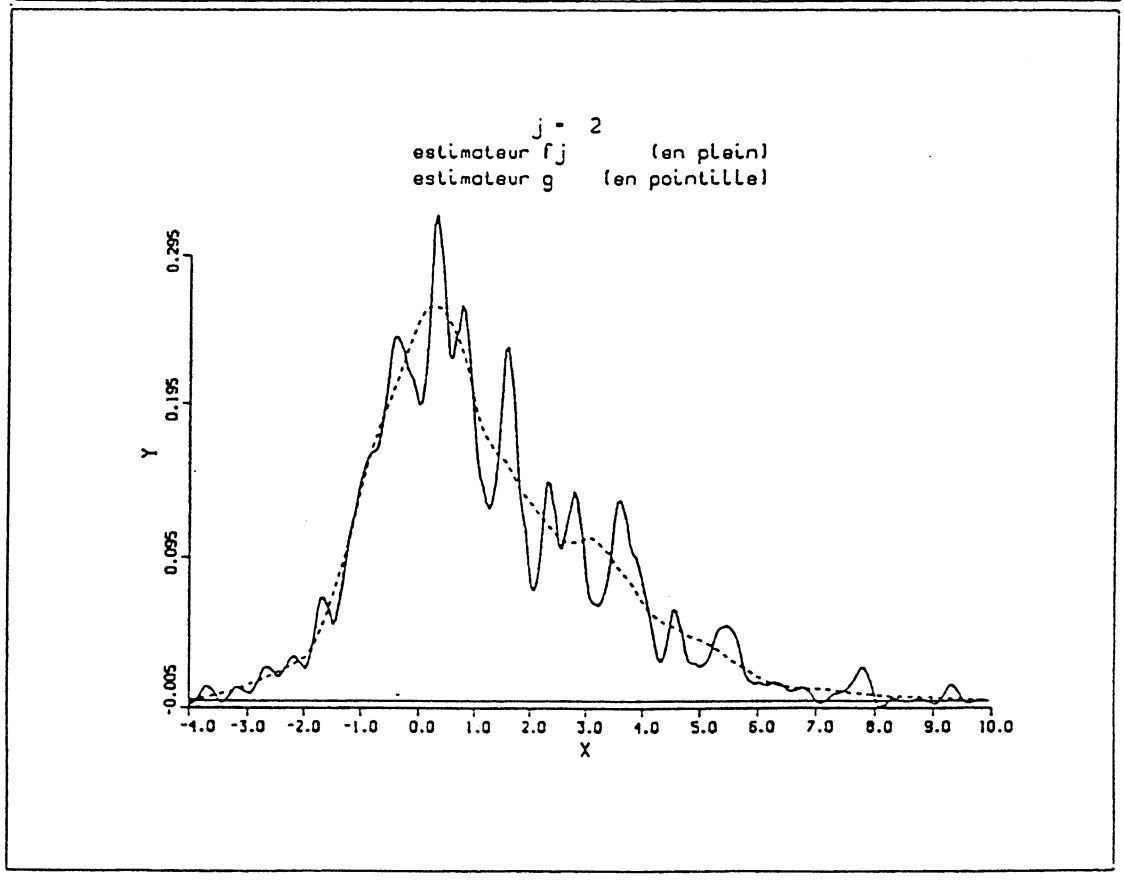


Fig.5.1 : Exemple de tests numériques visant à valider le calcul de l'estimateur $\tilde{g}$.
$\tilde{f}_j$ (en plein) est l'estimateur de densité calculé par la méthode de développement par ondelettes introduite par A. Anestis et R. Carmona [1]. $\tilde{g}$ (en pointillé) est l'estimateur calculé par la méthode proposée. On considère $j = 1$ (en haut) et $j = 2$ (en bas). Le nombre d'observations considérées est $N = 500$.

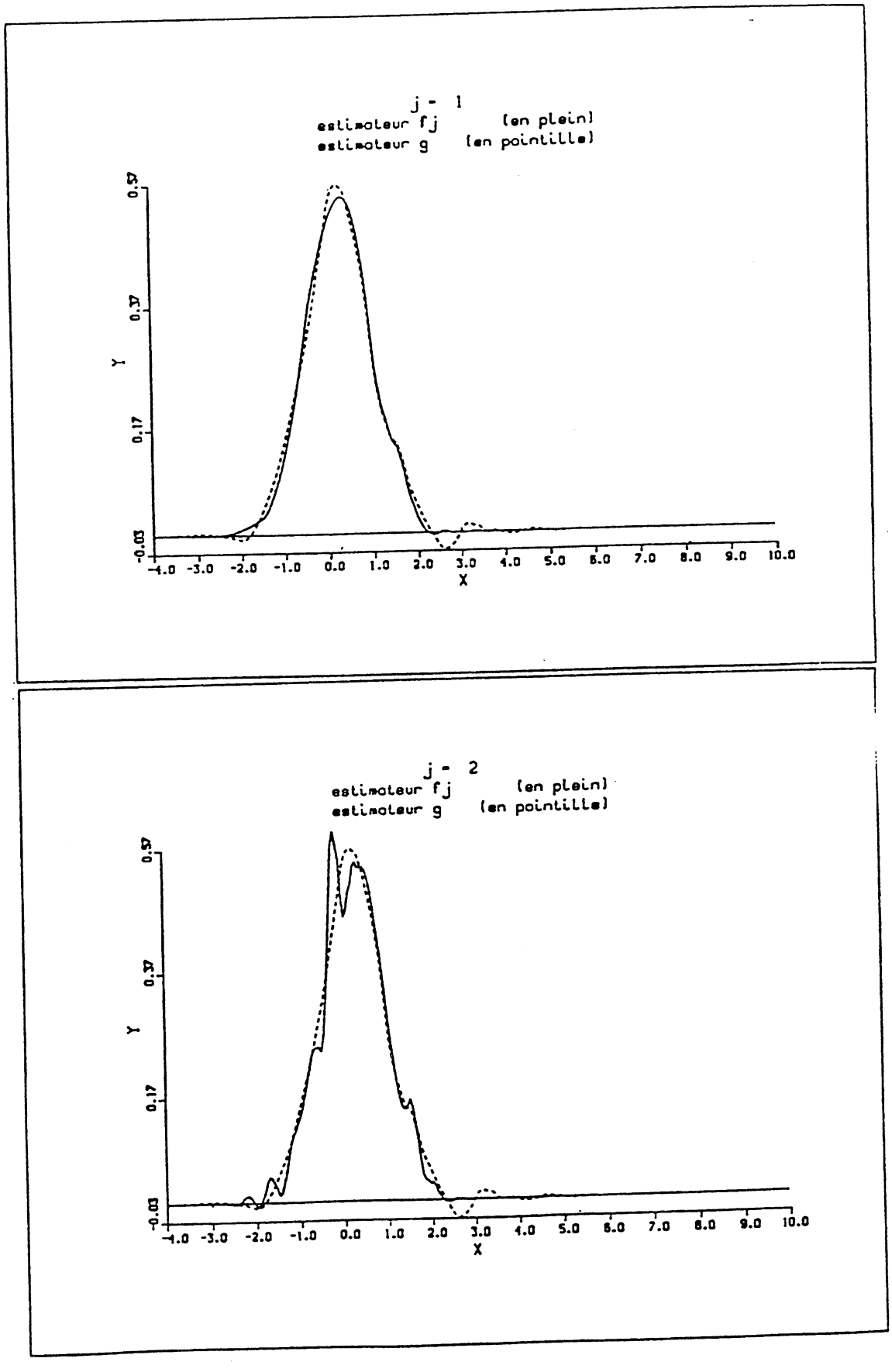


Fig.5.2 : Exemple de tests numériques visant à valider le calcul de l'estimateur $\tilde{g}$.
$\tilde{f}_j$ (en plein) est l'estimateur de densité calculé par la méthode de développement par ondelettes introduite par A. Anestis et R. Carmona [1]. $\tilde{g}$ (en pointillé) est l'estimateur calculé par la méthode proposée. On considère $j = 1$ (en haut) et $j = 2$ (en bas). Le nombre d'observations considérées est $N = 500$.

Conclusion

Lorsque cette thèse a commencé (octobre 1988), les aspects théoriques majeurs autour des ondelettes, concernant entre autres la souplesse des méthodes de construction de bases d'ondelettes, étaient suffisamment éclaircis tandis qu'un vaste champ d'applications dans des domaines très variés du traitement du signal s'ouvrait en ce moment à la transformée en ondelettes. Un des problèmes très importants d'alors concernait le développement d'algorithmes de calcul de la transformée en ondelettes ainsi que de logiciels d'analyse accessibles au public.

Dans le cadre de la transformée en ondelettes continue, nous avons développé de logiciels d'analyse (unidimensionnelle et bidimensionnelle). Pour cela, nous avons implémenté l'algorithme général de la transformée en ondelettes en utilisant la transformée de Fourier rapide (T.F.R.). Le code développé a été testé sur des signaux académiques bien connus et est actuellement utilisé industriellement. Compte tenu du fait que le choix de l'ondelette analysante n'est pas un problème simple, nous avons testé différentes ondelettes pour essayer d'optimiser leur choix pour un type de problème donné. La technique des ondelettes étant une technique très jeune qui évolue très rapidement, une actualisation du code développé doit donc être envisagée.

Dans le cadre de la transformée en ondelettes discrète, nous avons implémenté l'algorithme de décomposition-recomposition de S. Mallat pour des perspectives de filtrage numérique par ondelettes bidimensionnelles. Dans cette optique, nous avons introduit une première approche de filtrage numérique par ondelettes orthogonales dans la perspective d'extraire une structure spécifique dans un signal. Les premiers tests numériques effectués sont encourageants et montrent que la méthode proposée semble efficace pour le traitement envisagé. Cependant, elle présente l'inconvénient d'imposer la connaissance du centre et de la longueur d'onde de la structure à extraire. Une des difficultés de l'utilisation de cette méthode est le choix du paramètre de l'échelle d'extraction qui est fait de façon arbitraire. Il conviendrait de l'approfondir d'un point de vue algorithmique de manière à trouver un procédé automatique du choix du paramètre lié à l'échelle d'extraction.

Du point de vue des applications, nous avons appliqué les ondelettes à l'analyse de signaux électriques expérimentaux de Merlin Gerin (Société spécialisée dans la construction de matériels électriques). Les résultats obtenus sont très satisfaisants dans l'ensemble.

Nous avons également abordé l'analyse par ondelettes des tourbillons océaniques engendrés par un modèle numérique du Gulf Stream. Il est important pour nous de signaler que nous avons rencontré de grandes de difficultés dans ce

domaine quant à l'interprétation des coefficients d'ondelettes. Par conséquent, les analyses que nous avons faites sont à considérer avec beaucoup de réserve. Néanmoins, les premières analyses font apparaître qu'en général, l'amplitude des coefficients d'ondelettes est plutôt liée à la variation du signal. A la lumière donc de ces premiers résultats, une des perspectives de l'utilisation des ondelettes en océanographie pourrait être l'étude des fronts. Au delà de la grande difficulté que nous avons eu dans l'interprétation des coefficients d'ondelettes, se pose le problème d'adaptation de l'analyse par ondelettes aux types de signaux océaniques que nous avons considérés. Cependant, nous pensons qu'il reste beaucoup à faire dans le cadre de l'interprétation des coefficients d'ondelettes. Pour une meilleure compréhension de l'analyse réalisée, c'est donc aux spécialistes des signaux océaniques de l'équipe MEOM du LEGI-IMG, de profiter du code développé pour apprendre à lire les coefficients d'ondelettes (module et phase), la base de cet apprentissage étant les résultats liant le comportement des coefficients d'ondelettes à la régularité du signal. Il semble donc nécessaires de planifier une série de tests sur plusieurs types de signaux. En effet, plus de pratique devrait permettre de pouvoir interpréter au mieux les coefficients d'ondelettes.

Nous avons également introduit une approche originale, d'analyse spectrale locale par ondelettes. Du point de vue de la physique du modèle d'océan, cette approche semble avoir un intérêt dans la quantification du dégré d'anisotropie de l'écoulement. Il serait intéressant, par l'intermédiaire de toute une série de tests, d'envisager de travailler sur de statistiques assez longues permettant de prendre en compte sur les spectres locaux les effets de l'intermittence de la génération des tourbillons.

Quant au choix du type de transformée en ondelettes, il semble actuellement être un problème éclairci. En effet, la transformée en ondelettes continue est bien adaptée pour l'analyse à cause de l'invariance par translation des coefficients d'ondelettes, de la redondance des informations portées par les coefficients et d'une bonne lisibilité des informations; tandis que la transformée en ondelettes discrète est préférée pour des objectifs de filtrage, de compression des données, $\cdots$, etc car on a peu de coefficients à calculer et il n'y a pas de redondance des informations. Cependant, le choix de l'ondelette analysante reste par contre un problème important qui dépend de la nature de l'information qu'on veut extraire du signal. Une façon possible de déterminer ce choix peut consister à faire des tests sur différentes ondelettes analysantes et de choisir celle qui convient le mieux au traitement envisagé.

Dans le cadre de l'analyse, lorsque l'ondelette choisie est réelle, il nous semble préferable de la transformer en une ondelette complexe progressive afin d'obtenir une meilleure qualité d'analyse (bonne lisibilité des coefficients d'ondelettes). Ce

problème nous semble important et nous avons proposé une étude des propriétés de régularité et de décroissance à l'infini des ondelettes complexes progressives issues d'ondelettes réelles.

Il convient cependant de noter que cette technique de transformation d'une ondelette réelle en une ondelette complexe progressive qui se réalise facilement dans le cas unidimensionnel en mettant à zéro le spectre de l'ondelette réelle de départ pour les fréquences négatives, devient moins évidente en dimension deux car la notion de fréquence négative dans ce cas est purement conventionnelle.

Enfin, nous avons développé un algorithme de calcul efficace pour construire un estimateur d'une densité de probabilité inconnue. Cet algorithme est fondé sur l'utilisation des ondelettes à support compact de Daubechies. Les premiers essais numériques effectués sont très encourageants lorsqu'ils sont comparés aux résultats obtenus par la méthode d'estimation par ondelettes introduite par A. Antoniadis et R. Carmona. Il reste maintenant à appliquer la méthode à des cas réels et de comparer les résultats à ceux obtenus par des méthodes d'estimation de densité bien connues telles que par exemple la méthode du noyau.

Annexes

Annexe 1

Rappels sur la transformée de Fourier

Ce paragraphe est consacré à un résumé très succinct des propriétés de la transformée de Fourier outil essentiel pour aborder la transformée en ondelettes. Nous ne donnons que les propriétés fondamentales; pour plus de détails, nous renvoyons à [33][83].

1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.1. Etant donné $f \in L^1(\mathbb{R})$ on pose

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}dx$$

$$\bar{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2i\pi\xi x}dx$$

$\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier de f.
$\bar{\mathcal{F}}$ est la transformée de Fourier conjuguée.

L'intégrale étant prise au sens de Lebesgue, la condition $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une condition nécessaire et suffisante d'existence de ces formules. Nous verons plus loin que $\bar{\mathcal{F}}$ est en général la transformation inverse de $\mathcal{F}$.

Exemple 1.1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-a, a] \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$$

Exemple 1.2: Soit $a > 0$ et $f(x) = u(x)e^{-ax}$ où

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(u est l'échelon unité de Heaviside).

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a + 2i\pi\xi}$$

Nous avons

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2\xi^2}} \sim \frac{1}{2\pi\,|\xi|} \quad \text{quand} \quad |\xi| \to +\infty$$

Son intégrale sur $\mathbb{R}$ ne converge donc pas. Ainsi $\hat{f}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$; par conséquent $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par Fourier.

1.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier

On démontre le théorème suivant qui donne le comportement de $\hat{f}$

Théorème 1.1. *(**Riemann-Lebesgue**).*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

i/ $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

ii/ $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire et continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$

$$On\ a \qquad \|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

iii/ $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$

Le lien avec la dérivation est l'une des propriétés remarquables de la transformée de Fourier.

Proposition 1.1. *(**Transformation de Fourier et dérivation**).*

i/ Si $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, ..., n$, $\hat{f}$ est n fois dérivable et on a

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}\Big[(-2i\pi x)^k f(x)\Big], \quad k = 0, 1, 2, ..., n$$

ii/ Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si toutes les dérivées $f^{(k)}$, $k = 0, 1, ..., n$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi), \quad k = 1, 2, ..., n$$

iii/ Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et à support borné alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Le résultat *ii/* de la proposition 1.1 conduit à une importante majoration. En effet, de

$$(2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi) = \widehat{f^{(k)}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

on a

$$|2\pi\xi|^k |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| dx$$

d'où

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{C^{te}}{1+|\xi|^n}$$

On conclut alors que :

Remarque *1.1.* Plus une fonction est régulière, plus son spectre décroit rapidement à l'infini.

Nous donnons maintenant les propriétés concernant le comportement de la transformée de Fourier par rapport à un changement d'échelle ou à une translation. La translatée $\tau_a f$ de f est la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$

Proposition 1.2. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$

i/ $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}\hat{f}(\xi)$

ii/ $\tau_a \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left[e^{2i\pi ax} f(x)\right]$

iii/ $\widehat{f(a\xi)} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\xi}{a})$, *a réel non nul*

1.1.2 La transformée de Fourier inverse

On sait que sous certaines conditions, l'inverse de l'opérateur $\mathcal{F}$ est $\bar{\mathcal{F}}$ c'est à dire formellement $\bar{\mathcal{F}}\hat{f} = f$. Cependant il y a là une difficulté : nous avons vu au paragraphe précédent que si f est intégrable, $\hat{f}$ ne l'est pas toujours (exemple 1.2) et donc $\bar{\mathcal{F}}\hat{f}$ n'est pas défini. L'obtention de la transformée de Fourier inverse nécessite donc des hypothèses supplémentaires sur f.

On démontre le résultat suivant

Théorème 1.2. *(***Théorème d'inversion dans** $L^1(\mathbb{R})$*)*
Si f *et* $\hat{f}$ *sont dans* $L^1(\mathbb{R})$ *alors* f *est égale presque partout à une fonction continue et* $\bar{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$ *en tout point* t *où* f *est continue.*

Un critère d'appartenance de $\hat{f}$ à $L^1(R)$ à partir d'informations sur f uniquement est obtenu à partir de la proposition 1.1 en supposant $f \in C^2, f, f', f'' \in L^1$.

Une conséquence de ce résultat est la suivante :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est discontinue en au moins un point $a \in \mathbb{R}$, $\hat{f}$ ne peut pas être intégrable.

1.2 Transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Nous avons vu au paragraphe 1.1 que l'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par transformée de Fourier. Nous allons ici introduire un sous-espace de $L^1(\mathbb{R})$ stable par transformation de Fourier.

Définition 1.2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to C$ est dite à décroissance rapide si pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{|t| \to +\infty} |t^p f(t)| = 0$$

Exemple 1.3: $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $(\alpha > 0)$; $g(t) = e^{-at^2}$, $(a > 0)$; $h(t) = e^{-P(t)}$ avec $P(t) = t^{2k} + ...$, sont des fonctions à décroissance rapide.

On démontre le résultat suivant :

Proposition 1.3.

i/ Si une fonction f de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

ii/ Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide. $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable (ie, $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$).

iii/ Soit f une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est défini par :

Définition 1.3. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans C qui vérifient les deux propriétés

i/ f indéfiniment dérivable

ii/ f ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ & f \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ ii/ & \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)} \text{ est à décroissance rapide} \end{cases}$$

Exemple 1.4: $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, est une fonction de $\mathcal{S}(R)$

On a la propriété suivante : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

1.2.1 Inversion de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème 1.3. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier (ie, $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$)*

On démontre également le théorème suivant :

Théorème 1.4. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'application inverse est $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$, c'est à dire que pour f appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il y a équivalence entre les rélations suivantes*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

$$\forall x \in I\!R \qquad f(x) = \int_{I\!R} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$$

Exemple 1.5: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$. $f \in \mathcal{S}(I\!R)$ et $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. Cette fonction est invariante par transformée de Fourier.

Proposition 1.4. *(égalité de Plancherel-Parseval)*
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(I\!R)$. On a

i/ $\int_{I\!R} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi = \int_{I\!R} f(x)\bar{g}(x)dx$

ii/ $\int_{I\!R} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{I\!R} |f(x)|^2 dx$

1.3 Transformée de Fourier dans $L^2(I\!R)$

Les résultats établis pour $\mathcal{S}(I\!R)$ peuvent être étendus à $L^2(I\!R)$.

Théorème 1.5. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ (respectivement la transformée de Fourier inverse $\bar{\mathcal{F}}$) est une application linéaire bijective isometrique de $L^2(I\!R)$ sur $L^2(I\!R)$. On a*

i/ $\forall f \in L^2(I\!R) \quad \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$

ii/ $\forall f \in L^2(I\!R), \quad \forall g \in L^2(I\!R) \quad \int_{I\!R} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{I\!R} \mathcal{F}f(\xi)\bar{\mathcal{F}}g(\xi)d\xi$

iii/ $\forall f \in L^2(I\!R) \quad \|f\|_{L^2(I\!R)} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(I\!R)}$.

Les fonctions de $L^2(I\!R)$ jouent un grand rôle en traitement du signal, car la quantité $\int |f(x)|^2$ s'interprète comme une énergie.

On appélera spectre d'amplititude de f le graphe de la fonction $|\hat{f}|$; spectre d'énergie le graphe de la fonction $|\hat{f}|^2$ et spectre de phase le graphe de la fonction $Arg\hat{f}$.

Nous avons vu à la proposition 1.1 (section 1.1.1 de l'Annexe 1) que si f est à support borné alors $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable et à support dans $I\!R$ tout entier. On peut exprimer quantitativement ce fait de différentes manières suivant la façon dont on exprime l'étendue d'un signal. Pour l'exprimer, nous allons donner une propriété liée aux moments d'ordre 2 de $|f(x)|^2$ et $|\hat{f}(\xi)|^2$ pour les fonctions de $L^2(I\!R)$.

1.3.1 Principe d'incertitude

Soit $f : I\!R \longrightarrow C$ une fonction telle que f, f' et xf soient dans $L^2(I\!R)$. Dans ces conditions, on définit la dispersion en espace de f autour de 0 par

$$\sigma_f = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|xf\|_2}{\|f\|_2}.$$

La dispersion en fréquence de f sera exprimée de la même façon par :

$$\sigma_{\hat{f}} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left\|\xi \hat{f}\right\|_2}{\left\|\hat{f}\right\|_2}.$$

On a alors

Proposition 1.5. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow C$ une fonction telle que f, f' et xf soient dans $L^2(\mathbb{R})$.*
Alors on a

$$\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

DÉMONSTRATION:
On a $\left(f\bar{f}\right)' = f'\bar{f} + f\bar{f}'$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} x \left(f(x)\bar{f}(x) \right)' dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| xf'(x)\bar{f}(x) \right| dx + \int_{\mathbb{R}} \left| xf(x)\bar{f}'(x) \right| dx \\
&\leq \|x\bar{f}\|_2 \left\| f' \right\|_2 + \|xf\|_2 \|\bar{f}'\|_2 \\
&= 2\|xf\|_2 \left\| f' \right\|_2
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a $\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi)$. Puisque la transformation de Fourier conserve la norme dans $L^2(\mathbb{R})$, il s'en suit que

$$\|f\|_2^2 \sigma_{\hat{f}}^2 = \left\| \xi \hat{f} \right\|_2^2 = \frac{1}{4\pi} \left\| \widehat{f'} \right\|_2^2 = \frac{1}{4\pi} \left\| f' \right\|_2^2.$$

Donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x \left(f(x)\bar{f}(x) \right)' dx \right| \leq 2\left(|f|_2 \sigma_f \right) \left(2\pi |f|_2 \sigma_{\hat{f}} \right) = 4\pi |f|_2^2 \sigma_f \sigma_{\hat{f}}.$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}} x \left(f(x)\bar{f}(x) \right)' dx = \left[x|f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Les hypothèses sur f entrainent que $x|f|^2 \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$.
D'où

$$\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

■

L'inégalité que nous venons de démontrer est appelée "relation d'incertitude". Cette relation donne une limite numérique à la possibilité de localiser simultanément un signal et son spectre autour de l'origine. En d'autres termes on ne peut pas avoir un signal de brève durée et à spectre étroit.

L'égalité a lieu, dans le cas réel, si les fonctions xf et f' sont proportionnelles. Ce qui conduit à

$$f(x) = C^{te} e^{k\frac{x^2}{2}}.$$

La condition de décroissance à l'infini entraine que $k < 0$. L'égalité a donc lieu pour des gaussiennes centrées à l'origine.

1.4 Transformée de Fourier et convolution

La transformation de Fourier et la convolution constituent deux outils mathématiques essentiels étroitement liés l'un à l'autre.

Définition 1.4. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans C. On appelle produit de convolution de f et g, la fonction $f * g$ définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du$$

lorsque cette intégrale existe.
Si aucune hypothèse n'est faite sur f et g, la convolution, en géneral, nexiste pas. Par exemple pour $f = g \equiv 1$.

Un cas simple d'existence est celui où l'une des deux fonctions, par exemple g, est à support borné, de sorte que l'intégrale est convergente si f est L^1_{loc}.

Un des résultats d'existence du produit de convolution de deux fonctions f et g que l'on démontre est le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On a*

i/ $f * g$ défini presque partout et $f * g$ dans $L^1(\mathbb{R})$

ii/ la convolution est un opérateur bilinéaire et continue de $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ avec

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

L'opérateur de Fourier transforme l'opération de convolution en multiplication.

Proposition 1.6. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R})$. On a*

i/ $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f} \cdot \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

ii/ Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{f \cdot g}(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

1.5 Transformée de Fourier et distributions

C'est le fait que beaucoup de fonctions n'ont pas de transformée de Fourier qui nécessite cette extension.

Pour définir les distributions on utilise l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests C^∞ à support borné.

Définition 1.5. On appelle distribution toute application $T : \mathcal{D} \longrightarrow C$ linéaire et continue

La valeur de T en $\varphi \in \mathcal{D}$ sera notée $T(\varphi)$ ou $< T, \varphi >$.

La continuité de T se traduit par : si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}$ alors $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ avec sur $\mathcal{D}$ la notion de limite définie par :

$$\varphi_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists A, B \quad \forall n \in I\!N \quad supp(\varphi_n) \subset [A, B] \\ \forall p \in I\!N \quad \varphi_n^{(p)} \quad \text{converge uniformement vers} \quad 0 \quad \text{sur} \quad I\!R \end{cases}$$

Exemple 1.6:

a/ A une fonction f localement sommable sur $I\!R$ on peut associer une distribution notée T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad < T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

On identifie T_f et f.

b/ L'exemple de distribution le plus simple est la distribution de Dirac au point a, notée δ_a (on écrira $\delta_0 = \delta$).

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I\!R), \quad < \delta_a, \varphi >= \varphi(a).$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I\!R), \quad < \delta, \varphi >= \varphi(0)$$

L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}'(I\!R)$ (c'est le dual topologique de $\mathcal{D}(I\!R)$.

1.5.1 Transformée de Fourier des distributions

On peut être tenté de définir la transformée de Fourier d'une distribution T par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad < \hat{T}, \varphi >=< T, \hat{\varphi} > .$$

Le problème vient alors du fait que si φ est à support borné, $\hat{\varphi}$ n'est plus à support borné. On a seulement $\hat{\varphi}(\xi) \longrightarrow 0$ quand $\xi \longrightarrow +\infty$ et $\hat{\varphi} \in C^\infty$. Il

nous faut donc travailler sur un autre espace que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui doit être un espace stable par transformation de Fourier. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convient en ce sens que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La topologie sur S étant définie par : $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \left\| t^p \varphi_n^{(q)}(t) \right\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty$$

On introduit donc la définition suivante :

Définition 1.6. On appelle distribution tempérée toute fonctionnelle $T : \mathcal{S} \longrightarrow C$ linéaire continue.
On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées.

Exemple 1.7: Toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ définit une distribution tempérée.

Définition 1.7. **(Fonctions à croissance lente)**
On dit qu'une fonction f est à croissance lente si

$$\exists A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \|f(t)\| \leq A(1 + |t|^N) \quad \text{presque pour tout} \quad t \in \mathbb{R}$$

Proposition 1.7. *Toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée.*

Définition 1.8. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier notée $\hat{T}$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad < \hat{T}, \varphi > = < T, \hat{\varphi} >$$

1.5.2 Exemples de transformée de Fourier des distributions

a/ **Transformée de Fourier de** $f \equiv 1$ (distribution tempérée).

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad < \hat{1}, \varphi > = < 1, \hat{\varphi} > = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(0.\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$
$$= \varphi(0) = < \delta, \varphi >$$

Donc

$$\hat{1} = \delta$$

De même

$$\hat{\delta} = 1$$

b/ **Transformée de Fourier de** δ_a

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad < \hat{\delta_a}, \varphi > = < \delta_a, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi a\lambda} \varphi(t) dt = < e^{-2i\pi a\lambda}, \varphi >$$

D'où

$$\hat{\delta_a} = e^{-2i\pi a\lambda}$$

De même

$$\widehat{e^{2i\pi a\lambda}} = \delta_a$$

$$\widehat{e^{-2i\pi a\lambda}} = \delta_{-a}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}\Big[cos(2\pi\omega\lambda)\Big] = \frac{1}{2}(\delta_\omega + \delta_{-\omega})$$

$$\mathcal{F}\Big[sin(2\pi\omega\lambda)\Big] = \frac{1}{2i}(\delta_\omega - \delta_{-\omega})$$

Proposition 1.8. *La transformée de Fourier est une application linéaire continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

1.6 Série de Fourier

Soit f une fonction de $L^2_p(0,a)$. La série de Fourier de f est définie par

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi\frac{nt}{a}} \tag{1.1}$$

Les c_n sont appélés coefficients de Fourier de la fonction périodique f.

$$c_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)e^{-2i\pi\frac{nt}{a}}dt$$

La formule (1.1) peut encore s'écrire

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n cos(2\pi\frac{nt}{a}) + b_n sin(2\pi\frac{nt}{a})\Big)$$

avec, pour $n \geq 0$

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)cos(2\pi\frac{nt}{a})dt \\ b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)sin(2\pi\frac{nt}{a})dt \end{cases}$$

1.6.1 Formule sommatoire de Poisson

Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que f admet une dérivée continue et intégrable. $\forall a > 0$, la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-ka) = \frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\frac{k}{a})e^{2i\pi k\frac{t}{a}}$$

est apelée formule sommatoire de Poisson.

1.6.2 Calcul de la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda+k\pi}$

Nous allons utiliser le développement en série de Fourier pour calculer le terme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda + k\pi}$$

On part de la fonction $f(t) = cos\pi zt$, $z \in C \quad (z \notin C)$, définie sur $[-1,1]$ et de période $a = 2$. Le développement en série de Fourier de f donne

$$\forall t \in I\!R, \quad cos\pi zt = \frac{sin\pi z}{\pi z} + 2z\frac{sin\pi z}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}cos(n\pi t)$$

Ainsi pour $t = 1$, on a

$$cos\pi z = \frac{sin\pi z}{\pi z} + 2z\frac{sin\pi z}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$$

D'où

$$\pi cotg\pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$$

D'autre part

$$\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} + z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} + z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$$

En regroupant les deux premiers termes puis en changeant n en $-n$ dans le troisième terme du second membre, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} &= z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} + z\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{z^2-n^2} \\ &= z\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = z\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2z}\Big[\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\Big]\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z+n} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-n}$$

En changeant de nouveau n en $-n$ dans le second terme du second membre, on obtient

$$\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z+n}$$

Par suite

$$\pi cotg\pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n}$$

et donc

$$cotg\pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi z + \pi n}$$

D'où il vient que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi x + k\pi} = \frac{cos\pi x}{sin\pi x}$$

1.7 Transformée de Fourier discrète

1.7.1 Cas unidimensionnel

Nous définissons la transformée de Fourier discrète Y_k d'un signal discret y_n de N échantillons par :

$$(y_n) \xrightarrow{\mathcal{F}_N} (Y_k)$$

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \qquad \text{pour} \qquad k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

Réciproquement, la T.F.D. inverse est donnée par :

$$(Y_k) \xrightarrow{\mathcal{F}_N^{-1}} (y_n)$$

$$y_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} Y_k e^{2i\pi k \frac{n}{N}} \qquad \text{pour} \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

1.7.2 Cas bidimensionnel

Nous définissons la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle Y_{kl} d'un signal discret y_{nm} de $N.M$ échantillons par :

$$(y_{nm}) \xrightarrow{\mathcal{F}_{NM}} (Y_{kl})$$

$$Y_{kl} = \frac{1}{N.M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} y_{nm} e^{-2i\pi(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M})}$$

avec

$$k = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \qquad \text{et} \quad l = -\frac{M}{2}, \cdots, \frac{M}{2} - 1$$

La T.F.D. bidimensionnelle inverse est alors donnée par :

$$(Y_{kl}) \overset{\mathcal{F}_{NM}^{-1}}{\longrightarrow} (y_{nm})$$

$$y_{nm} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} Y_{kl} e^{2i\pi(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M})}$$

avec

$$n = 0, \cdots, N-1 \quad \text{et} \quad m = 0, \cdots, \quad M-1$$

Annexe 2

Quelques indications sur le calcul explicite de l'ondelette C^∞ de Meyer

Y. Meyer [66], en 1985, a exhibé une ondelette de classe infinie (donc dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schawrtz), en construisant $\hat{\psi}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact). Le calcul est très technique, et nous ne donnons ici que les grandes lignes.

On part d'une fonction $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, paire, réelle ayant l'allure suivante :

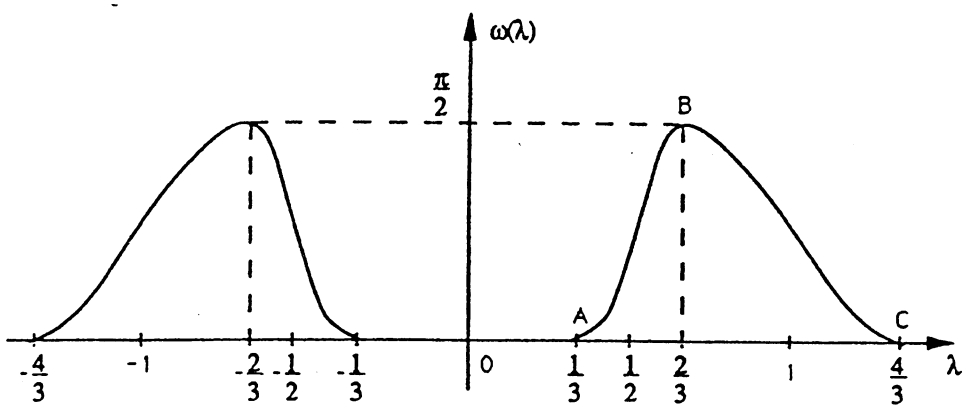


Fig. A.2.1 Fonction ω

On impose à l'arc AB d'avoir un centre de symétrie :

$$\forall \lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \qquad \omega(1-\lambda) = \frac{\pi}{2} - \omega(\lambda)$$

et l'arc BC a la même forme, renversée et étirée, que AB :

$$\forall \lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \qquad \omega(2\lambda) = \frac{\pi}{2} - \omega(\lambda)$$

$\hat{\psi}$ est alors définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \hat{\psi}(\lambda) = e^{-i\pi\lambda} sin\,[\omega(\lambda)] \tag{2.1}$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \psi(t) = 2\int_0^{+\infty} cos\left[2\pi(t-\frac{1}{2})\lambda\right] sin\,[\omega(\lambda)]\,d\lambda$$

$\hat{\psi}$ est à support compact et on vérifie que l'on a $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

ψ est réelle et son graphe est symétrique par rapport à la droite $t = \frac{1}{2}$. En effet soit φ telle que $\hat{\varphi}(\lambda) = sin\,[\omega(\lambda)]$, φ est réelle paire car $\hat{\varphi}$ est réelle paire et $\psi(t) = \varphi(t - \frac{1}{2})$ vérifie donc $\psi(1-t) = \psi(t)$.

Pour obtenir ω, on part d'une fonction θ definie sur [0 , 1], de classe C^∞ et telle que

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 & \theta(1) = 1 \\ \theta^{(n)}(0) = \theta^{(n)}(1) & \forall n \in N^* \\ 0 \leq \theta(t) \leq 1 & \text{si} \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

et telle que le graphe de θ admette le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ comme centre de symétrie

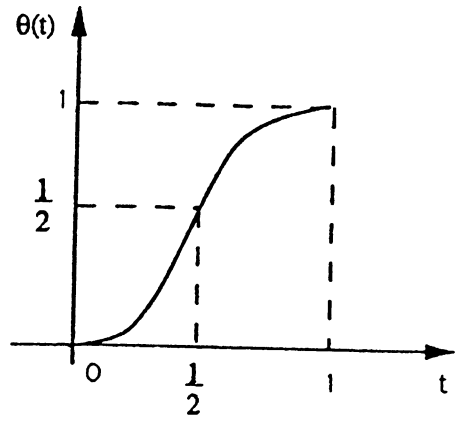


Fig. A.2.2 : Fonction θ

et on pose

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty[\\ \theta(3\lambda - 1), & \lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \theta(2 - \frac{3}{2}\lambda), & \lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \end{cases}$$

θ est de classe C^∞. Cependant, dans la pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir θ aussi réguliée. On peut prendre $\theta \in C^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, sans perdre le fait que les fonctions $\psi_{jk}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

S. Jaffard [49] a montré que numériquement des ondelettes bien localisées sont obtenues avec la famille de polynômes

$$\theta_n(t) = \frac{\int_0^t u^n(1-u)^n du}{\int_0^1 u^n(1-u)^n du}.$$

Une bonne fonction θ_n semble être pour $n = 7$ [16][49] (ψ est alors inférieure à 5.10^{-4} en dehors d'un intervalle de longueur 15 centré en $\frac{1}{2}$). On définit alors

la fonction $w_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et paire de la façon suivante :

$$\omega_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty[\\ \theta_n(3\lambda - 1), & \lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \theta_n(2 - \frac{3\lambda}{2}), & \lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \end{cases}$$

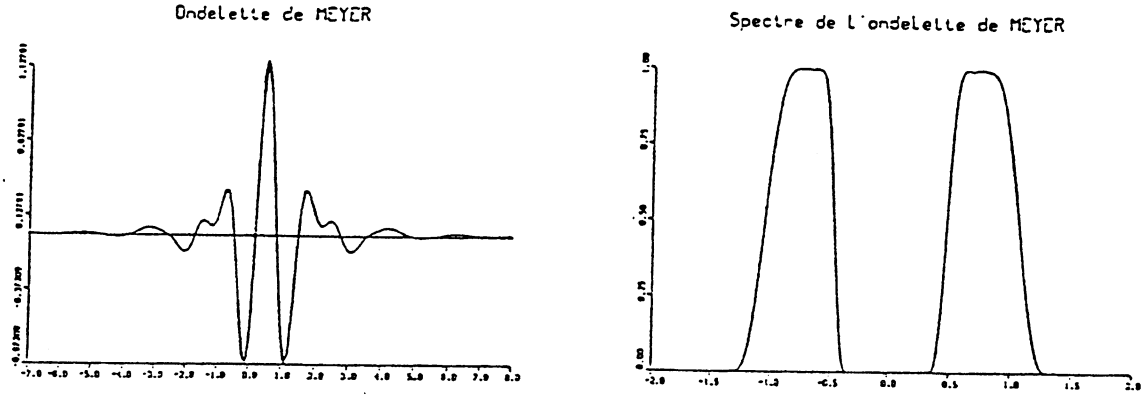


Fig. A.2.3 : A gauche l'ondelette de Meyer. A droite le spectre de l'ondelette de Meyer. Les calculs sont faits avec la fonction θ_7

Annexe 3

Quelques définitions relatives au filtrage numérique

3.1 Fonction filtre

Soit H une fonction appartenant à $L^2_p(0,1)$, alors il est bien connu qu'à H est associée bijectivement une suite $h(n)$ de $l^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$H(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)e^{2i\pi n\lambda}$$

La fonction H est appélée fonction filtre.

En terme de traitement du signal, h est la réponse impulsionnelle de la fonction filtre H et H est la fonction de transfert de h.

Dans un langage plus mathématique, $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sera appélée la transformée de Fourier de H. Réciproquement, pour toute suite $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $l^2(\mathbb{Z})$, la fonction H appartient à $L^2_p(0,1)$ et est appélée aussi transformée de Fourier de $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

3.2 Définition d'un opérateur de filtrage (V. Perrier [78])

L'opérateur de filtrage F associé à une fonction filtre H est une opération linéaire de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $l^2(2\mathbb{Z})$ commutant avec les translations d'entiers pairs définie par :

$$(Fa)_{2n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k-2n)a_n$$

où h est la réponse impulsionnelle de la fonction filtre H et $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$. H est la représentation du filtre F. F est une convolution suivie d'une décimation.

L'opération duale (au sens de $l^2(\mathbb{Z})$) F^* de F est définie par :

$$(F^*b)_{2n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{h(n-2k)}b_k, \quad (b_k) \in l^2(\mathbb{Z})$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(n-2k)b_k, \quad \text{si} \quad h(n) \quad \text{est réel.}$$

3.3 Définition des filtres miroirs en quadrature (V. Perrier [78])

Soient F_0 et F_1 deux opérateurs de filtrage. F_0 et F_1 sont des filtres miroirs en quadrature si l'application

$$\begin{aligned}(F_0, F_1) : l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow l^2(2\mathbb{Z}) \times l^2(2\mathbb{Z}) \\ (a_n) &\longrightarrow [(F_0 a)_{2n}, (F_1 a)_{2n}]\end{aligned}$$

est isométrique, c'est à dire pour tout $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(F_0 a)_{2n}|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(F_1 a)_{2n}|^2$$

Dans la pratique, F_0 est un filtre "passe-bas" et F_1 un filtre "passe-haut".

3.4 Coefficients des filtres associés aux ondelettes à support compact (I. Daubechies [21])

Le tableau ci-dessous donne les coefficients des filtres h_N, $N = 2, 3, \cdots, 10$, intervenant dans la construction des ondelettes à support compact de Daubechies [21]. N représente le nombre de moments nuls de l'ondelette ψ_N associée au filtre h_N tandis que $2N$ est le nombre total des coefficients non nuls de h_N.

Table 1. The coefficients $h_N(n)$ $(n = 0, \cdots, 2N-1)$ for $N = 2, 3, \cdots, 10$.

	n	$h_N(n)$		n	$h_N(n)$
$N = 2$	0	.482962913145	$N = 8$	0	.054415842243
	1	.836516303738		1	.312871590914
	2	.224143868042		2	.675630736297
	3	−.129409522551		3	.585354683654
$N = 3$	0	.332670552950		4	−.015829105256
	1	.806891509311		5	−.284015542962
	2	.459877502118		6	.000472484574
	3	−.135011020010		7	.128747426620
	4	−.085441273882		8	−.017369301002
	5	.035226291882		9	−.044088253931
$N = 4$	0	.230377813309		10	.013981027917
	1	.714846570553		11	.008746094047
	2	.630880767930		12	−.004870352993
	3	−.027983769417		13	−.000391740373
	4	−.187034811719		14	.000675449406
	5	.030841381836		15	−.000117476784
	6	.032883011667	$N = 9$	0	.038077947364
	7	−.010597401785		1	.243834674613
$N = 5$	0	.160102397974		2	.604823123690
	1	.603829269797		3	.657288078051
	2	.724308528438		4	.133197385825
	3	.138428145901		5	−.293273783279
	4	−.242294887066		6	−.096840783223
	5	−.032244869585		7	.148540749338
	6	.077571493840		8	.030725681479
	7	−.006241490213		9	−.067632829061
	8	−.012580751999		10	.000250947115
	9	.003335725285		11	.022361662124
$N = 6$	0	.111540743350		12	−.004723204758
	1	.494623890398		13	−.004281503682
	2	.751133908021		14	.001847646883
	3	.315250351709		15	.000230385764
	4	−.226264693965		16	−.000251963189
	5	−.129766867567		17	.000039347320
	6	.097501605587	$N = 10$	0	.026670057901
	7	.027522865530		1	.188176800078
	8	−.031582039318		2	.527201188932
	9	.000553842201		3	.688459039454
	10	.004777257511		4	.281172343661
	11	−.001077301085		5	−.249846424327
$N = 7$	0	.077852054085		6	−.195946274377
	1	.396539319482		7	.127369340336
	2	.729132090846		8	.093057364604
	3	.469782287405		9	−.071394147166
	4	−.143906003929		10	−.029457536822
	5	−.224036184994		11	.033212674059
	6	.071309219267		12	.003606553567
	7	.080612609151		13	−.010733175483
	8	−.038029936935		14	.001395351747
	9	−.016574541631		15	.001992405295
	10	.012550998556		16	−.000685856695
	11	.000429577973		17	−.000116466855
	12	−.001801640704		18	.000093588670
	13	.000353713800		19	−.000013264203

Tableau A.3.1 : Tableau des coefficients des filtres h_N associés aux ondelettes à support compact ψ_N de Daubechies [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A. Antoniadis and R. Carmona**, *Multiresolution analyses and wavelets for density estimation*, preprint, 1991.

[2] **F. Argoul, A. Arneodo, G. Grasseau, Y. Gagne, E. Hopfinger et U. Frisch**, *Wavelette analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade*, Nature, vol. 338, p. 51-53, 2 March 1989.

[3] **B. Barnier, B. L. Hua and C. Le Provost**, *On the catalytic role of high baroclinic modes in eddy-driven large scale circulation*, J. Phys. Oceanogr., 21, in press, 1991.

[4] **M. Barrat, O. Lepetit**, *Calcul rapide de la transformée en ondelettes*, Traitement du Signal, vol. 8 n^o 1, 1991.

[5] **C. Basdevant, M. Holschneider et V. Perrier**, *Méthode des ondelettes mobiles*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Serie I, p. 647-652, 1990.

[6] **G. Battle**, *A block spin construction of ondelettes, Part I : Lemarié fonctions*, Commun. Math. Phys., vol. 110, p. 607-615, 1987.

[7] **O. Bertrand, J. Bohorquez, J. Pernier**, *Analyse et filtrage de signaux numériques par décomposition en ondelettes discrètes*, preprint, juin 1989.

[8] **G. Beylkin , R. Coifman and V. Rokhlin**, *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XLIV, p. 141-183, 1991.

[9] **A. Bijaoui**, *Algorithmes de la transformation en ondelettes: Application à l'imagerie astronomique*, Colloque international ondelettes et paquets d'ondes, Rocquencourt (France), juin 1991.

[10] **P. Bonnet, D. Remond**, *Une transformée en ondelettes rapide*, Traitement du Signal, vol. 8 n^o 3, 1991.

[11] **J. Bretagnolle and C. Hubert**, *Estimation des densités : risque minimax*, Zeit Für Wahrsch. und gebiete, 47, 119-137, 1982.

[12] **N. N. Cencov**, *Evaluation of an unknown distribution density from observations*, Soviet Math., 3, 1559-1563, 1962.

[13] **A. Cohen**, *Ondelettes, analyse multiresolution et filtres miroirs en quadrature*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, analyse non lineaire, vol. 7, n^o 5, pp. 439-459, 1990.

[14] **A. Cohen**, *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique de l'image*, Thèse de Doctorat, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 1990.

[15] **A. Cohen, I. Daubechies, J. C. Feauveau**, *Biorthogonales bases of compactily supported wavelets*, à paraître dans com. in Pure and Applied Math., 1990.

[16] **M. Coulibaly**, *Calcul de coefficients d'ondelettes*, Rapport de D.E.A. de Mathématiques Appliquées, Université Joseph Fourier de Grenoble, juin 1988.

[17] **M. Coulibaly**, *Analyse en ondelettes de la simulation numérique des courants océaniques*, 22$^{\text{ème}}$ Congrès National d'Analyse Numérique, Loctudy,

1990.

[18] **I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer**, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. 27, pp. 1271-1283, 1986.

[19] **I. Daubechies**, *The wavelet transform, time-frequency localisation and signal analysis*, IEEE Transactions of Information Théory, vol. 36 n^o 5, September 1990.

[20] **I. Daubechies**, *Time-frequency localisation operators : A geometric phase space approach*, IEEE Transactions of Information Théory, vol. 34 n^o 4, Juillet 1988.

[21] **I. Daubechies**, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. in Pure and Applied Math., vol. 41, pp. 909-996, Nov. 1988.

[22] **I. Daubechies**, *Two-scale Difference Equations : I. Global regularity of solutions*, Work Project N^o 311404-2999, File Case 20878 ATT Bell Laboratories, October 1988.

[23] **B. Escudié, B. Torresani**, *Wavelet analysis of asymptotic signals*, preprint CPT-89/P.2304, 1989.

[24] **D. Esteban and C. Galand**, *Applications of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes*, Proc. Internat. Conf. Acoustic Speech and signal Proc., Connecticut may 1977.

[25] **M. Farge et G. Rabreau**, *Transformée en ondelettes pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnels*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1988.

[26] **M. Farge, M. Holschneider, J.F. Colonna**, *Wavelet analysis of coherent structures in two-dimensional turbulent flows*, Topological Fluid Mechanics, ed. Moffatt, Cambridge University Press, 765-776, 1990.

[27] **M. Farge**, *Wavelet transforms and their applications to turbulence*, Annual Review of Fluid Mechanics, p.395-457, 1992.

[28] **J. C. Feauveau**, *Analyse multirésolution par ondelettes non orthogonales et bancs de filtres numériques*, Thèses de Doctorat, Université Paris Sud, Janvier 1990.

[29] **J. C. Feauveau**, *Analyse multirésolution pour les images avec un facteur de résolution* $\sqrt{2}$, Traitement du signal, vol. 7, n^o 2, 1990.

[30] **P. Flandrin**, *Représentations temps-fréquences des signaux non-stationnaires*, Thèse de Doctorat d'Etat Es Sciences Physiques, Institut National Polytechnique de Grenoble, mai 1987.

[31] **J. Froment**, *Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris-IX Dauphine, juin 1990.

[32] **D. Gabor**, *Theory of communication*, J. Inst. Elect. Eng., vol. 93, p. 429-457, London 1946.

[33] **C. Gasquet, P. Witomski**, *Analyse de Fourier et applications*, Masson 1990.

[34] **R. Glowinski, W. M. Lawton, M. Ravachot, E. Tenenbaum**, *Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic*

problems in one space dimension, 9th International Conf. in Appl. Sci. and Engineering, SIAM, Philadelphia 1990.

[35] **P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet**, *Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis*, Geoexploration, vol. 23, pp. 85-102, 1984-1985, Elsevier Science Publishers, B. V. Amsterdam.

[36] **G. Grasseau**, *Des techniques mathématiques aux outils numériques pour l'étude d'objets fractals*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, Juillet 1989.

[37] **C. Gu and G. Wahba**, *Minimizing GCV/GML scores with multiple smoothing parameters via the Newton method*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. vol 12 n^o 2, pp. 383-398, March 1991.

[38] **C. Gu**, *Rkpack and its apllications: fitting smothing spline models, Technical Report n^o 857, Departement of Statistics*, University of Wisconsin-Madison, may 1989.

[39] **Ph. Guillemain, R. Kronland-Martinet**, *Parameters estimation though continous wavelet transform for synthesis of audio-sounds*, preprint 3009 (A-2), Audio Engineering Society, 1991.

[40] **A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet et J. Morlet**, *Détection of abrupt change in sound signals with the help of wavelet transforms*, Advance in Electronics and Election Physics, Suppl. 19, Inverse problems, Academic Press, 1987.

[41] **A. Grossmann et J. Morlet**, *Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM J. Math. Anal., vol. 15, p. 723-736, 1984.

[42] **A. Haar**, *Zur theory der orthogonalen funktionsystème*, Gottingen, juli 1909.

[43] **C. E. Heil and D. F. Walnut**, *Continuous and discrete wavelet transforms*, Siam Review, vol. 31, n^o 4, pp.628-666, December 1989.

[44] **W. R. Holland**, *The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean - Numerical experiment using a wind-driven quasi-geostrophic model*, J. Phys. Oceanogr., 8, pp. 363-392, 1978.

[45] **W. R. Holland**, *Simulation of mesoscale ocean variability in mid-latitude gyres*, Adv. Geophys., 28, pp. 340-390, 1985.

[46] **M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, Ph. Tchamitchan**, *"The algorithme à trous"* , Rapport CPT-88/P.2115, may 1988.

[47] **M. Holschneider**, *L' analyse d'objets fractals et leur transformée en ondelettes*, Thèse de Doctorat, Aix-Marseille I, octobre 1988.

[48] **B. L. Hua and D. B. Haidvogel**, *Numerical simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence*, J. Atmos. Sci.,43, PP. 2923-2936, 1986.

[49] **S. Jaffard**, *Algorithmes de Transformation en ondelettes*, prépublication Ecole Polytechnique C.M.A.P., 91128 Palaiseaux Cedex.

[50] **S. Jaffard, Y. Meyer**, *Bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$*, Journal Maths. pures et appl., vol. 68, pp. 95-108, 1989.

[51] **S. Jaffard**, *Construction et propriétés des bases d'ondelettes. Remarques sur la contrôlabilité exacte*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, Mai 1989.

[52] **S. Jaffard**, *Wavelet method for fast resolution of elliptic problems*, prépublication, Mai 1990.

[53] **G. Kimeldorf and G. Wahba**, *Some results on Tchebycheffian spline functions*, J. Math. Anal. Applic., 33, 82-85, 1971.

[54] **R. Kronland-Martinet, J. Morlet, A. Grossmann**, *Analysis of sound patterns through wavelet transforms*, Int. J. Pattern Analysis and Artificial Intelligence, 1, pp. 273-302, 1987.

[55] **R. Kronland-Martinet**, *The use of the wavelet transform for the analysis, synthesis and processing of speech and music sounds*, Computer music journal, MIT Press, vol. 12(4), 1988.

[56] **R. Kronmal and M. Tarter**, *The estimation of probability densities and cumulatives by Fourier series methods.*, J. Amer. Statist. Assoc., 63, 925-952, 1968.

[57] **P. G. Lemarié, Y. Meyer**, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Rev. Math. Iberoamericana, vol. 2, 1986.

[58] **P. G. Lemarié**, *ondelettes à localisation exponentielle*, Jour. de Math. Pures et Appl., vol. 67, p. 227-236, 1988.

[59] **P. G. Lemarié-Rieusset et G. Malgouyres**, *Support des fonctions de base dans une analyse multirésolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, série I, p. 377-380, 1991.

[60] **S. Mallat**, *Review of multifrequency channel decompositions of images and wavelet models*, Tchnical Report n^o 412 - Robotics report n^o 178, Courant institute of Mathematical Sciences, 1988.

[61] **S. Mallat**, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Transaction of the American Mathematical Society, vol. 315, n^o 1, p. 69-87, Sept. 1989.

[62] **S. Mallat**, *A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11, n^o 7, p. 674-693, 1989.

[63] **S. Mallat and W. L. Hwang**, *Singularity detection and processing with wavelets*, Technical Report n^0 549, Robotics Report n^0 245, march 1991.

[64] **P. Marchesiello**, *Etude des bilans d'énergie dans les modèles d'océan*, Rapport de D.E.A. d'énergétique physique - Dynamique des fluides géophysiques et environnement, Université Joseph Fourier de Grenoble, Septembre 1990.

[65] **J. C. Marshall**, *Eddy mean flow interaction in barotropic ocean model*, Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 110, pp. 573-591, 1984.

[66] **Y. Meyer**, *Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'operateurs*, Seminaire Bourbaki, 1985-1986, n^o 662.

[67] **Y. Meyer**, *Ondelettes, fonctions splines et analyse graduée*, Cahiers du

Ceremade n^o 8703, Université Paris-Dauphine, 1987.

[68] **Y. Meyer, S. Jaffard et O. Rioul,** *L'analyse par ondelettes*, Pour la Science, n^o 119, 1987.

[69] **Y. Meyer,** *Ondelettes et Opérateurs tome I*, Actualités mathématiques, Hermann, 1990.

[70] **Y. Meyer,** *Le calcul scientifique, les ondelettes et les filtres miroirs en quadrature*, Rapport CEREMADE, n^0 9007, Université Paris Dauphine, 1990.

[71] **J. Morlet,** *Sampling theory and wave propagation*, Proc. 51st Annual Meeting of the Society of exploration Geophysicists, Los Angeles, 1981.

[72] **J. Morlet, A. Grossmann et R. Kronland-Martinet,** *Reading and understanding continous wavelet transforms*, C.P.T., Luminy Case 907, 13288 Marseille Cedex 09.

[73] **R. Murenzi,** *Wavelet transforms associated to the n-dimensional euclidean group with dilatations : signal in more than one dimension*, Institut de Physique théorique, Université catholique de Louvain, 1348 Louvain-La Neuve, Belgium, 1989.

[74] **R. Murenzi,** *Ondelettes multidimensionnelles et apllication à l'analyse d'images*, Thèse de Doctorat de l'Université catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgique, janvier 1990.

[75] **E. Parzen,** *On the estimation of probability density and mode*, Ann. Math. Statist., 33, 1065-1076, 1962.

[76] **J. Pedlosky,** *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New-York, 1979.

[77] **V. Perrier et C. Basdevant,** *La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse des champs inhomogènes. Théorie et Algorithmes*, La Recherche Aérospatiale, Année 1989, n^o 3 (Mai-Juin), p. 53-67.

[78] **V. Perrier,** *Ondelettes et simulation numérique*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, fevrier 1991.

[79] **P. B. Rhines,** *The dynamics of unsteady currents. Marine modeling*, The Sea, vol. 6, E. D. Goldberg, I.N.Mc Cane, J.J. O'Brien, and J.H. Steele, Eds., Wiley, pp. 189-318, 1977.

[80] **O. Rioul,** *Un algorithme rapide de décomposition discrète de signaux échantillonnés en ondelettes orthogonales*, janvier 1988, Note.

[81] **O. Rioul,** *A unifying multiresolution theory for the discrete wavelet transform*, regular filter banks and pyramid transform, soumis à IEEE transf. on Acoustic, speek and signal processing, june 1990.

[82] **A. R. Robinson, M. A. Spall and N. Pinardi,** *Gulf Stream simulations and the dynamics of the ring and meander processes*, J. Phys. Oceanogr., 18,
pp. 1811-1835, 1985.

[83] **F. Rodier,** *Distribution et transformée de Fourier*, Ediscience, 1978.

[84] **M. Rosenblatt,** *Remarks on some nonparametric estimates of density*

function, Ann. Math. Statist., 27, 832-837, 1956.

[85] **G. Strang**, *Wavelets and Dilatation Equation : A brief introduction*, Siam Review vol. 31, n^o 4, pp.614-627, December 1989.

[86] **J. O. Stromberg**, *A modified Haar system and higher order spline systems*, Conference on "harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund", II, pp. 475-493, W. Beker et al. eds., Wadworth math. series, 1981.

[87] **S. C. Schwartz**, *Estimation of probability density by an orthogonal series*, Ann. Math. Statist., 38, 1261-1265, 1967.

[88] **W. J. Schmitz and W. R. Holland**, *Numerical eddy resolving general circulation experiements : preliminary comparison with observation*, J. Mar. Res. 40(1), pp.15-117, 1982.

[89] **W. J. Schmitz et W. R. Holland** , *Observed and modeled mesoscale variability near the Gulf Stream and Kuroshio extension*, J. Geophys. Res., 91, pp. 9624-9638, 1986.

[90] **B. W. Silverman**, *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall, New-York, N.Y, 1986.

[91] **A. M. Treguier and B. L. Hua**, *Oceanic quasi-geostrophic turbulence forced by stochastic wind fluctuations*, J. Phys. Oceanogr., 17, pp. 397-411, 1987.

[92] **M. Vetterli and C. Herley**, *Wavelets and Filter Banks : Relationships and new results*, in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Proc., Albuquerque (USA), pp. 1723-1726, Apr. 3-6, 1990.

[93] **G. Wahba**, *Optimal convergence properties of variable knot, kernel and orthogonal series methods for density estimation*, Ann. Math. Statist., 3, 15-29, 1975.

[94] **G. G. Walter**, *Properties of Hermite series estimation of probability density*, Ann. Statist., 5, 1258-1264, 1977.

[95] **G. G. Walter and J. Blum**, *Probability density estimation using delta sequences*, Ann. Math. Statist., 7, 328-340, 1979.

[96] **G. S. Watson and M. R. Leadbetter**, *On the estimation of a probability density,I*, Ann. Math. Statist., 34, 480-491, 1963.