HAL
open science

Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure

Claire Bost

To cite this version:

Claire Bost. Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00341209

HAL Id: tel-00341209

https://theses.hal.science/tel-00341209v1

Submitted on 24 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Spécialité: "Mathématiques Appliquées"

préparée au Laboratoire Jean Kuntzmann, Equipe EDP

dans le cadre de l'École Doctorale
"Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique"

présentée par

CLAIRE BOST

Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure

---

Soutenue le 16 Octobre 2008 devant le jury

M.	Philippe ANGOT	PR, Université de Provence	Rapporteur
M.	Marius TUCSNAK	PR, Université Henri Poincarré	Rapporteur
M.	Matthieu HILLAIRET	MCF, Université Paul Sabatier	Examinateur
M.	Stéphane LABBÉ	PR, Université Joseph Fourier	Président
M.	Georges-Henri COTTET	PR, Université Joseph Fourier	Directeur de thèse
M.	Emmanuel MAITRE	MCF, Université Joseph Fourier	Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier mes rapporteurs sur le manuscrit, Marius Tucsnak, Professeur à l'Université de Nancy, et Philippe Angot, Professeur à l'Université de Marseille. Leur expertise sur les sujets traités dans cette thèse, tant sur les aspects numériques que théoriques, ainsi que les nombreuses remarques dont ils m'ont fait part avant la soutenance, m'ont permis d'approfondir ma compréhension de certains points délicats de ce travail. Je les remercie de leur cordialité et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je souhaite remercier aussi Matthieu Hillairet, Maitre de Conférence à l'Université de Toulouse, d'avoir participer au jury, et Stéphane Labbé, Professeur à l'Université de Grenoble, d'en avoir accepté la charge de président.
Au terme de ces quatre années de thèse, je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mes deux directeurs de thèse, Emmanuel Maitre et Georges-Henri Cottet. Je les remercie de m'avoir fait confiance en acceptant de travailler avec moi. L'achèvement de cette thèse tient en grande partie à leur patience, leur expertise scientifique permettant d'aller toujours dans le bon sens, et leurs qualités humaines qui m'ont donné et redonné la motivation nécessaire pour mener ces travaux.
Mon passage au LJK a été pour moi l'occasion de nombreux bons moments, dans le bureau 56, avec Claire d'abord, puis avec Florian et Innocent, lors des conférences et écoles avec Thomas et Elie notamment, ou encore avec Elise, Monika, Emilie, Carine, Morgan, Mathieu, Ibrahim, Marc. Je les remercie de leur amitié, leurs encouragements et leurs conseils. Je souhaite d'autre part remercier ici Cathy, Juana, et Claudine pour leur grande disponibilité, jusqu'au matin même du jour de ma soutenance, et pour leur aide dans mes démarches administratives.
Ensuite je veux remercier ma famille et mes amis d'avoir accepter me voir les délaisser parfois pour cette thèse dont le titre reste pour la plupart d'entre eux une suite de mots étranges. Leur soutien, leur attention, m'ont permis de rester (je l'espère) presque équilibrée durant ce parcours. Je pense particulièrement à mon grand-père que j'aurais tellement aimé inviter à ma soutenance.
Ces années grenobloises me laisseront de nombreux très bons souvenirs, à partager avec Emilie, Samuel, Evelyne, Tony, Nicolas, Hélène et Jean Lourmi notamment.
Enfin, mes pensées vont à Simon, dont la présence à mes cotés a constitué la source d'énergie nécessaire à l'accomplissement de ce travail.

Notations

Grandeurs physiques et géométriques

u	Champ de vitesse eulérien
ρ	Densité
p	Pression
μ	Viscosité dynamique
Σ	Tenseur fluide des contraintes
g	Gravité
$\mathcal{E}$	Energie
e	Etirement
E_e	Fonctionnelle d'énergie élastique
T_e	Tension élastique
ν_e	Coefficient de raideur
F_e	Force élastique
λ_e	Densité linéique de masse
x_G	Centre de gravité
ω	Vitesse angulaire
r	Vecteur position par rapport au centre de gravité
J	Matrice d'inertie
M	Masse
Ω, $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$	Domaines de calcul
$\Gamma_e(t)$	Membrane élastique
γ	Paramétrage
n, τ	Vecteurs normal et tangent
κ	Courbure
ϕ	Fonction level-set

Paramètres numériques

Δx, Δt	Pas de discrétisation spatial et temporel
ε	Largeur d'interface
η	Paramètre de pénalisation
σ	Largeur de voisinage

Espaces fonctionnels, opérateurs

$\mathcal{D}'$	Espace des distributions
$L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$	Espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles qu'il existe une constante C telle que $\|f(x)\| \leq C$ p.p. sur Ω
H^m, H^1_0	Espaces de Sobolev
$\mathcal{C}(0,T)$	Espace des fonctions $f :]0,T[\to \mathbb{R}$ continues
$\mathcal{H}$	$\{u \in L^2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u.n_{\|\partial\Omega} = 0\}$
$\mathcal{V}^r$	$\{v \in H^r(\Omega), \operatorname{div} v = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, pour $r > 0$
$\mathcal{K}(t)$	$\{u \in \mathcal{V}, D(u(t)) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_s(t))\}$
$\Omega_{s,\sigma}(t)$	$\{x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \Omega_s(t)) < \sigma\}$
$\mathcal{K}^r_\sigma(t)$	$\{v(t) \in \mathcal{V}^r, D(v(t)) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_{s,\sigma}(t))\}$
$P^r_\sigma(t)$	Projection orthogonale de $\mathcal{V}^r$ sur $\mathcal{K}^r_\sigma(t)$
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire
$\|.\|$	Norme
$\operatorname{div}(u)$	Divergence de u
$D(u)$	Tenseur des vitesses de déformation
∇, Δ	Gradient et Laplacien
$\times$, $\otimes$	Produits vectoriel et tensoriel

Divers

χ_Ω	Fonction caractéristique de Ω
H	Fonction de Heaviside
δ	Masse de Dirac
ζ	Masse de Dirac régularisée
dist	Fonction distance
Supp	Fonction support
$\mathbb{I}_d$	Matrice identité dans $\mathbb{R}^d$

Table des matières

Table des matières **5**

Introduction **7**

1 Modèles mathématiques de couplage fluide-structure **13**
1.1 Modèles mathématiques en formulation classique 19
1.1.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes 19
1.1.2 Equations de Navier Stokes incompressible pour un fluide newtonien 20
1.1.3 Equations pour une courbe élastique 1D 22
1.1.4 Equations pour un solide rigide 25
1.1.5 Vers un milieu continu multiphysique 27
1.2 Modèle eulérien de couplage fluide-membrane élastique en 2D 27
1.2.1 Méthode de Frontière Immergée 28
1.2.2 Méthode level set 33
1.2.3 Expression de la force élastique en formulation level-set 35
1.2.4 Formulation level-set de la méthode de frontière immergée 36
1.3 Résolution de Navier Stokes 41
1.4 Conclusion 43

2 Stabilité numérique du couplage eulérien fluide-membrane élastique **45**
2.1 Introduction 45
2.2 Modèle 47
2.2.1 Modèle eulérien de couplage fluide-membrane élastique 47
2.2.2 Relaxation d'une membrane élastique 47
2.2.3 Calcul numérique de la force élastique 52
2.3 Calcul d'une condition de stabilité 54
2.3.1 Conditions de stabilité existantes 55
2.3.2 Etude de stabilité de Von Neumann sur un modèle 1D linéarisé . . 56
2.3.3 Etude numérique du schéma semi-implicite 70
2.4 Conservation de l'énergie discrète 80
2.4.1 Schéma de couplage en temps conservatif 80

2.5 Conclusion 85

3 Méthode de pénalisation pour le couplage fluide-solide rigide 87

3.1 Introduction 87
3.2 Formulation faible et méthode de pénalisation L^2 88
3.2.1 Formulation faible 90
3.2.2 Méthode de pénalisation L^2 100
3.3 Analyse numérique de la méthode de pénalisation L^2 105
3.3.1 Lemme de projection 106
3.3.2 Estimations sur les équations de transport et de Navier-Stokes . . . 107
3.3.3 Passage à la limite dans la vitesse rigide 111
3.3.4 Convergence forte de u_η dans $L^2((0,T)\times\Omega)$ 114
3.3.5 Passage à la limite 133
3.4 Extension : méthode de pénalisation H^1 136
3.5 Résultats numériques 137
3.5.1 Mise en œuvre numérique 137
3.5.2 Lien avec la méthode de projection de [59] et [69] 141
3.5.3 Test 2D : cylindre rigide en sédimentation 141
3.5.4 Test 3D : sphère rigide en sédimentation 144
3.6 Conclusion 145

Conclusion 153

Bibliographie 160

Table des figures 161

Introduction

La simulation numérique représente une alternative de plus en plus importante aux tests expérimentaux pour l'étude de systèmes physiques mettant en jeu des fluides et des structures.
Ces systèmes présentent des caractéristiques physiques très variées et concernent des applications dans des domaines tels que l'aéronautique, la médecine, ou l'étude des phénomènes environnementaux.
En ce qui concerne la médecine par exemple, la simulation numérique permet d'obtenir certains diagnostics sans faire appel à des méthodes invasives, et constitue une approche complémentaire aux expériences *in vivo* ou *in vitro*. Dans d'autres applications, les coûts importants associés aux tests expérimentaux peuvent être considérablement réduits par une étude numérique préalable, c'est le cas notamment en aéronautique.

En pratique, la simulation numérique d'un problème de couplage fluide-structure correspond à la résolution d'un problème triple : en plus de la résolution de chacun des composants (fluide et structure) on se doit en effet de traiter le couplage entre les deux, ce qui comporte des aspects très différents selon les applications considérées.
Pour la simulation numérique de l'écoulement du sang dans une artère on ne peut pas négliger la déformation de l'artère dûe à l'écoulement et l'influence de cette déformation sur l'écoulement lui-même, dès lors que l'on souhaite obtenir des résultats numériques réalistes. Par ailleurs la simulation de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion doit quant à elle tenir compte de la géométrie éventuellement complexe de l'aile et du comportement fortement turbulent de l'écoulement d'air dû à la vitesse importante de déplacement d'un avion.
Enfin, certains phénomènes qui peuvent être traités de manière continue à certaines échelles peuvent aussi entrer dans le cadre de l'interaction fluide-structure. C'est le cas par exemple de l'étude de l'écoulement des boues, pour laquelle il faut simuler le transport par un fluide d'un grand nombre de particules, entrant éventuellement en collision.

Les attentes vis-à-vis de la simulation numérique de problèmes de couplage fluide-structure peuvent elles aussi être très variables. Dans l'idéal on espère proposer un code de calcul à la fois peu coûteux en temps, précis, simple à implémenter et ouvert afin de permettre l'utilisation de codes existants pour certains calculs intermédiaires. Cependant en pra-

tique un compromis entre toutes ces propriétés et une représentation satisfaisante des caractéristiques physiques du problème doit souvent être adopté. On choisit ainsi d'utiliser parfois des modèles simplifiés négligeant certains effets, de modifier la rhéologie d'un écoulement, ou encore de découpler au maximum le problème.

Les méthodes numériques dédiées à la simulation de problèmes de couplage fluide-structure peuvent alors être classées selon trois critères : la formulation eulérienne ou lagrangienne de l'écoulement, la localisation de la structure par suivi ou capture d'interface, et la prise en compte des interactions entre le fluide et la structure. De ces critères dépend notamment le choix du ou des maillages utilisés, fixes ou adaptatifs.

Les deux modèles de couplage fluide-structure que nous considérons sont ceux d'une membrane (structure fine) élastique et d'un solide rigide immergés dans un fluide visqueux incompressible.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une formulation eulérienne du fluide, avec définition d'un maillage fixe cartésien sur lequel les différences finies sont utilisées pour la discrétisation spatiale. Ce choix justifié par un souci de simplicité permet entre autre l'utilisation d'un solveur de la librairie FISHPACK pour le calcul de la pression. On résout les équations de Navier-Stokes incompressible décrivant la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse du fluide, de manière à prendre en compte exactement les forces hydrodynamiques mises en jeu. Les interfaces fluide-structure sont capturées par la méthode *level-set* introduite dans les travaux de S. Osher et J.A. Sethian en 1988 [58] : on représente l'interface implicitement en utilisant une fonction dont la ligne de niveau 0 correspond à chaque instant à l'interface. Enfin l'action de la structure est prise en compte en modifiant les équations du fluide. Dans le cas de la membrane, on exprime la force élastique à l'aide d'une loi de comportement reliant la contrainte à la déformation. Cette force localisée sur la membrane est incluse dans les équations du fluide avec la méthode de *frontière immergée* proposée par C.S. Peskin en 1977 [62], dont nous utilisons la formulation eulérienne introduite par E. Maitre et G.H. Cottet dans ([20], [21]). En ce qui concerne le couplage avec le solide rigide, on se place dans le cadre des méthodes de *domaine fictif* qui permettent de considérer un domaine de calcul global comprenant à la fois le fluide et la structure. Le respect de la contrainte de rigidité dans le solide afin qu'il ne se déforme pas est ensuite obtenu en ajoutant dans les équations du fluide un terme de *pénalisation*.

Dans ce contexte, nous nous intéressons à deux problématiques.

La méthode de *frontière immergée* permet de prendre en compte la force élastique d'une

membrane dans les équations du fluide, ce qui produit un système d'équations couplant les variables relatives au fluide et à la structure. Pour la résolution de ce système couplé, si on utilise à chaque pas de temps la valeur au pas de temps précédent des variables du fluide (resp. de la structure) pour calculer la nouvelle valeur des variables de la structure (resp. du fluide), on résout les équations de manière décalée, et on parle alors de couplage faible ou explicite. Inversement si l'on souhaite à chaque pas de temps forcer le couplage de manière à vérifier à chaque instant les conditions d'interface, alors il faut résoudre les équations de manière simultanée, et on obtient un couplage fort ou implicite. L'approche intermédiaire consistant à ne coupler fortement que certains effets produit des schémas semi-implicites.
Le choix d'un couplage explicite, semi-implicite ou implicite entre le fluide et la structure est crucial car il conditionne fortement la stabilité des calculs. En effet plus le couplage est implicite plus les calculs seront stables. Mais la stratégie de couplage a aussi une répercussion sur le coût des calculs. Si l'utilisation d'un schéma explicite nécessite de prendre de petits pas de temps afin de minimiser le décalage entre le calcul des différentes variables, le couplage implicite suppose de résoudre à chaque pas de temps un système couplé non-linéaire par une méthode itérative, dont le temps de convergence peut amoindrir l'intérêt de prendre de grands pas de temps.
La stabilité des calculs dépend aussi fortement des paramètres physiques (raideur de la membrane, viscosité du fluide, rapport des densités,...) et des caractéristiques géométriques de l'application considérée. L'hypothèse d'un fluide très visqueux permettra par exemple d'améliorer la stabilité.
L'étude de la stabilité des calculs représente donc une part importante des recherches menées au sujet de la méthode de *frontière immergée*. De nombreux schémas implicites ont été développés mais leur coût semble rédhibitoire en pratique. Le repli vers des schémas semi-implicites a fourni cependant des méthodes plus réalistes du point de vue de leur mise en œuvre. Afin de déterminer quels sont les effets à traiter de manière implicite dans ces méthodes il est avant tout nécessaire de comprendre quelles sont les sources de l'instabilité, i.e. identifier l'influence des paramètres physiques ou géométriques sur le comportement de schémas explicites, semi-implicites ou implicites.

Dans le cas du couplage fluide-solide rigide, la définition d'un domaine fictif comprenant le fluide et le solide permet la définition d'un maillage structuré sur lequel des solveurs existants peuvent être employés pour la résolution du fluide par exemple.
En ce qui concerne la contrainte rigide dans le solide, la méthode de *pénalisation* consiste à ajouter un terme dans les équations du fluide, dont le poids peut être ajusté par un coefficient qui numériquement doit être choisi suffisamment grand afin d'obtenir la précision souhaitée.
Préalablement à l'utilisation numérique d'une méthode de *pénalisation* il est nécessaire de vérifier que le problème ainsi défini modélise bien le modèle de couplage considéré, c'est-à-dire que lorsque le coefficient de *pénalisation* devient grand les solutions du problème

pénalisé convergent vers les solutions d'une formulation admise du couplage.
D'autre part il est souhaitable d'un point de vue numérique que l'ajout du terme de *pénalisation* dans les équations du fluide affecte au minimum l'efficacité et la précision des calculs. Si le mouvement d'un corps rigide peut être modélisé de différentes manières (vitesse égale à la composition d'une translation et d'une rotation, déformation nulle), le choix du terme de *pénalisation* est donc conditionné aussi par les contraintes numériques.

Ce document est organisé de la manière suivante :

Dans le chapitre 1 nous abordons les différents aspects de la simulation numérique des modèles de couplage fluide-structure, et nous proposons une revue des méthodes numériques de la littérature relatives à ce sujet.
Les modèles mathématiques pour un fluide visqueux incompressible, une membrane élastique en dimension 2, et un solide rigide sont ensuite détaillés dans leur formulation classique (eulérienne pour le fluide et lagrangienne pour la membrane élastique et le solide rigide). Enfin le modèle eulérien pour le couplage fluide-membrane élastique en dimension 2 proposé dans ([20], [21]) et utilisant une formulation *level-set* de la méthode de *frontière immergée* est décrit.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de stabilité du modèle eulérien pour le couplage fluide-membrane élastique.
Une condition de stabilité numérique pour ce modèle est tout d'abord calculée via l'analyse d'un modèle de tension de surface linéarisé en dimension 1. Cette condition mettant en relation les effets visqueux et la tension de surface est ensuite comparée à des conditions de la littérature, notamment celles proposées dans [10] et [81], et utilisée pour des tests numériques en dimension 2, sur l'exemple de la relaxation d'une membrane élastique dans un fluide visqueux incompressible.
Enfin la question de la stabilité numérique sous l'angle de la conservation d'énergie totale du système au niveau discret est abordée par la définition d'un schéma semi-discret en temps conservatif.

Enfin dans le chapitre 3 nous nous intéressons à l'analyse numérique d'une méthode de *pénalisation* pour le couplage fluide-solide rigide en dimension 2 ou 3. Le problème pénalisé est obtenu en pénalisant les équations de Navier-Stokes pour le fluide par la différence entre la vitesse fluide et la vitesse rigide dans le solide. Cette méthode constitue une généralisation au cas d'obstacles mobiles de la méthode de [5], et le calcul de la vitesse rigide est réalisé avec la méthode de projection de [59].
Nous montrons la convergence des solutions de ce problème vers celles d'une formulation faible introduite dans [24] et [33], en utilisant des outils proposés dans [52].

Des tests numériques pour la sédimentation d'un cylindre rigide dans un fluide en 2D sont enfin présentés afin de valider la prise en compte de la contrainte rigide dans le solide.

Chapitre 1

Modèles mathématiques de couplage fluide-structure

La simulation de milieux multiphysiques passe par la prise en compte de problèmes de couplage très divers dans lesquels un ou plusieurs fluides interagissent avec éventuellement une ou plusieurs structures, de nature physique et géométrique variable. De la diversité des domaines d'application visés (biologie, aéronautique,...) et des caractéristiques des modèles étudiés (incompressibilité, élasticité, rigidité,...) est apparu un large choix de méthodes numériques, visant à résoudre le triple problème posé : la résolution simultanée du fluide, de la structure, et du couplage entre les deux.

Les deux modèles auxquels nous nous sommes intéressé mettent en jeu d'une part un fluide visqueux incompressible, d'autre part soit une membrane élastique soit un solide rigide. Il s'agit donc premièrement de localiser une structure (interface ou domaine) transportée par le fluide, et de calculer les forces hydrodynamiques liées au mouvement de celle-ci. Dans le premier cas il faut en plus calculer la force élastique portée par la membrane et agissant sur le fluide. Dans le second, une contrainte de rigidité doit être satisfaite au niveau du domaine solide.

En s'inspirant de la classification proposée dans [71] dans le contexte d'écoulements bi-fluide à interface libre, on peut répartir les méthodes numériques de couplage pour les modèles précédemment cités selon trois critères :

Formulation de l'écoulement fluide : eulérienne, lagrangienne, ou eulérienne - lagrangienne

La formulation eulérienne de l'écoulement fluide consiste à travailler sur un maillage fixe, défini sur le domaine de calcul tout entier, et à travers lequel le fluide, et éventuellement les autres composantes du modèle, sont transportés. Dans le cas de la présence

d'une structure dans le fluide, on peut conserver ce maillage en définissant un domaine fictif comprenant le fluide et la structure, dans lequel on peut ignorer dans un premier temps la présence de la structure afin de calculer le fluide. Inversement, en formulation lagrangienne, chaque maille ou particule est associée à un élément de fluide et suit l'écoulement. Cette formulation, dans laquelle les lois de conservation (incompressibilité par exemple) s'expriment moins simplement, est donc moins naturelle pour l'étude des écoulements fluides. Cependant, de bons résultats ont été obtenus avec cette formulation par Johnson et Tezduyar [45], Hu et al. [38] pour l'étude d'écoulements fluide-particules rigides. Enfin la formulation eulérienne-lagrangienne utilise les deux précédentes. Si l'on souhaite définir une formulation eulérienne sur le domaine fluide seulement, qui est modifié avec l'écoulement, alors le maillage ne peut rester fixe sur le bord de celui-ci. La méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) proposée par Hirt et al. [34] consiste à travailler à partir d'un maillage du domaine fluide initial, et à déformer ce maillage suivant une vitesse coincidant avec la vitesse du fluide à l'interface fluide-structure, et arbitraire mais régulière ailleurs. Une attention particulière doit alors être apportée au traitement des termes d'advection sur le maillage courant, afin de tenir compte du mouvement de celui-ci. Cette formulation est notamment utilisée dans le cas de grands déplacements de la structure dans [77] ou par exemple pour l'étude d'un problème de couplage fluide-particules dans [53] et [40].

Localisation de la structure : suivi ou capture

La question de la localisation de la structure peut être résolue de deux manières différentes. On peut d'une part répartir sur la structure des marqueurs lagrangiens, et suivre les trajectoires de ces marqueurs. On réalise alors le suivi de la structure. Chaque marqueur est associé à un élément de la structure, et en terme de conservation de la masse, cette méthode donne donc de bons résultats. Depuis le travail de [41], de nombreuses recherches ont été effectuées dans ce sens, voir notamment [25]. Cependant lors de grandes déformations, la distorsion de ces marqueurs peut devenir contraignante sur les pas de temps de calcul, et l'on peut préférer des méthodes implicites dites de capture, dans lesquelles on introduit une fonction auxilliaire continue ou non de variables de champs telles que la densité, ou la fraction de fluide par exemple. Ces méthodes sont généralement associées à une formulation eulérienne pour le fluide.
La méthode VOF (Volume Of Fluid) proposée par Hirt et Nichols [35] consiste à utiliser la fraction de volume de fluide dans chaque maille comme fonction auxilliaire. La reconstruction de l'interface à partir de cette fonction auxilliaire est un point crucial de la méthode et qui a suscité de nombreux travaux. On obtient une bonne conservation de la masse, mais la discontinuité de la fonction auxilliaire pose des problèmes au niveau numérique, notamment pour l'évaluation des grandeurs géométriques liées à l'interface fluide-structure.
D'autres méthodes de capture utilisent une version continue de fonction caractéristique.

C'est le cas de la méthode de champ de phase introduite avec les travaux de Cahn, Hilliard et Allen ([12], [3]), et qui remplace une interface raide entre deux milieux par une zone de transition de faible épaisseur. Cette méthode est notamment utilisée pour l'étude de modèles multi-fluides dans [43] et [6]. La fonction caractéristique, appelée champ de phase, définie à partir d'un modèle d'énergie, varie de manière continue mais rapide au niveau de l'interface, et demeure uniforme ailleurs. Une bonne résolution du déplacement de l'interface passe donc par un calcul précis du profil du champ de phase dans sa zone de transition. Cette méthode permet une bonne conservation de la masse. Cependant la fonction caractéristique possède un sens physique (concentration, température,...) et ne peut donc pas être choisie de manière arbitraire. Cette contrainte disparait dans la méthode Level-set proposée par Osher et Sethian dans [58], qui utilise seulement le niveau 0 de la fonction caractéristique, une fonction distance par exemple, pour localiser l'interface fluide-structure. On peut alors accéder facilement aux grandeurs géométriques de l'interface via la fonction auxilliaire. Dans ces méthodes, la définition implicite de l'interface permet le passage de modèles de la dimension 2 à la dimension 3 avec peu d'effort et un traitement naturel des changements de topologie. Des phénomènes de fusion ou de dissolution d'interface non physiques peuvent néanmoins apparaitre lorsque l'écoulement est sous-résolu. Dans [26] et [32], l'ajout de particules sans masse positionnées au niveau de l'interface et advectées par une méthode lagrangienne est étudié afin de détecter ce type de phénomèmes, et d'améliorer la reconstruction de l'interface. Parmi les nombreux travaux réalisés autour de la méthode level-set ([15], [83], [57], [68]), on peut citer une méthode hybride VOF/level-set, profitant des qualités des deux méthodes, utilisée dans [75] sur un maillage fixe et [82] sur un maillage adaptatif.

Prise en compte des interactions entre le fluide et la structure

La prise en compte des interactions entre le fluide et la structure est un problème comportant plusieurs aspects, et qui a suscité de nombreux travaux de recherche au cours des dernières années.

Tout d'abord, les forces hydrodynamiques induites par le fluide sur la structure peuvent être déterminées de manière approchée ou exacte. Les méthodes d'approximation, basées sur l'utilisation de modèles simplifiés pour le fluide, comme par exemple des modèles de Stokes ou de fluide potentiel, réduisent le coût des calculs en ignorant certains effets (la trainée pour un écoulement potentiel ou les forces d'inertie pour un écoulement de Stokes). On peut aussi citer dans ce cadre la méthode dite de Lattice Boltzmann, qui construit un modèle cinétique simplifié pour le mouvement de particules discrètes de fluide, et qui fournit de bons résultats lorsque les gradients de pression sont relativement petits. Cette méthode est utilisée pour la simulation du mouvement de particules solides dans un fluide dans [47].
Inversement, la simulation numérique directe consiste à résoudre les équations de conser-

vation pour déterminer exactement l'action du fluide sur la structure. Plus précisément on résout les équations de Navier-Stokes dans le domaine fluide, et le principe fondamental de la dynamique permet de déterminer sans approximation le mouvement de la structure. Cette méthode, introduite par Hu, Crochet, Joseph [39], pour l'étude de systèmes fluide-particules, trouve de nombreuses applications, notamment pour l'étude de la sédimentation et des suspensions de particules, du transport lubrifié, des boues.

Ensuite, le couplage temporel peut être implicite, i.e. le fluide et la structure sont calculés simultanément, ou explicite, dans ce cas la résolution est effectuée de manière alternée, l'état de l'un étant calculé à partir d'un état antérieur de l'autre.

En ce qui concerne la prise en compte numérique des interactions entre le fluide et la structure, l'approche la plus classiquement utilisée est la méthode ALE, dans laquelle des conditions d'interface sont explicitement imposées aux bords du domaine fluide dont le maillage évolue avec le déplacement de la structure. Ces méthodes sont précises mais relativement coûteuses car, à chaque pas de temps, des modifications d'ordre géométrique liées au déplacement de la structure doivent être effectuées. De plus ces méthodes peuvent être difficiles à implémenter en $3D$. Aussi, pour les deux modèles de couplage que nous avons étudiés, de nombreux travaux ont mené à l'élaboration de différentes alternatives.

En effet, dans le cas particulier d'une structure de dimension inférieure à celle du domaine fluide (courbe $1D$ dans $\mathbb{R}^2$, surface $2D$ dans $\mathbb{R}^3$), les conditions d'interface peuvent être remplaçées par un terme de force singulier dans les équations du fluide. C'est dans cet esprit que les méthodes de frontière immergée ont été introduites par Peskin dans [62], afin de modéliser et simuler initialement des systèmes couplant un fluide et une structure constituée de fibres uni-dimensionnelles agissant sur le fluide par des forces élastiques. L'application visée était plus spécialement l'étude de modèles biologiques décrivant l'action mécanique cardiaque en interaction avec un écoulement sanguin. Une revue de ces méthodes est établie dans [63].
La formulation mathématique met en relation des variables eulériennes (pour le fluide) et lagrangiennes (pour la structure) via des masses de Dirac à support sur les fibres, ce qui permet de faire apparaître les forces des fibres en second membre des équations du fluide, portées par ces masses de Dirac.
Numériquement, les variables eulériennes sont définies sur un maillage cartésien fixe, et le suivi de la structure nécessite l'introduction de marqueurs lagrangiens le long des fibres, transportés lors du mouvement de celles-ci. Ces marqueurs peuvent nécessiter une attention particulière lors de grandes déformations. Le passage entre ces deux systèmes de variables est effectué grâce à des interpolations, qui peuvent conduire à une perméabilité des fibres. La méthode de frontière immergée proposée dans [64] permet d'améliorier la conservation du volume en définissant un opérateur de projection modifié pour le calcul de la vitesse fluide. On peut également citer la méthode d'interface immergée de [49] qui

en incorporant la composante normale de la force élastique dans les conditions de saut en pression donne aussi de bons résultats en terme de conservation de volume, et permet une résolution précise de la pression au niveau de l'interface. Cependant la simplicité de la méthode originelle est perdue.
Afin d'éviter les interpolations entre variables eulériennes et lagrangiennes, Cottet et Maitre ([20], [21]) ont proposé de capturer l'interface fluide-structure avec la méthode level-set, obtenant ainsi une formulation complètement eulérienne du modèle fluide-structure. Le déplacement de la structure est alors effectué par la résolution d'une équation d'advection sur le maillage fluide fixe. D'autre part les dérivées de la fonction level-set donnent accès dans le cas d'un écoulement incompressible à l'étirement de la structure. La force élastique apparaissant dans les équations du fluide s'exprime donc entièrement à partir de la fonction level-set et d'une masse de Dirac régularisée. De par la formulation level-set, cette méthode s'applique facilement à des surfaces immergées en $3D$. Enfin il est montré dans [21] que la régularisation de la force élastique n'affecte pas la conservation de l'énergie du système au niveau continu.

Dans le cas général, lorsqu'une contrainte doit être satisfaite dans la structure, notamment la rigidité, la définition d'un domaine fictif comprenant les domaines fluide et solide permet d'étudier le modèle couplé sur un maillage fixe et éventuellement régulier. La résolution du modèle peut alors être découplée en la résolution d'un problème fluide sur le domaine fictif tout entier et en la prise en compte de la contrainte dans le domaine solide. Une première méthode consiste alors à travailler avec une formulation variationnelle dans laquelle la contrainte rigide est prise en compte dans les espaces fonctionnels eux-mêmes. Dans [51], la convergence d'une discrétisation en temps et en espace d'une telle formulation par une méthode de type Lagrange-Galerkin est montrée. Les espaces d'éléments finis utilisés sont alors adaptés de ceux associés à un problème fluide classique pour prendre en compte la contrainte rigide.
Dans [60] et [29], la contrainte de rigidité est satisfaite via l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange représentant la force volumique nécessaire pour maintenir le solide rigide. De la même manière que la pression est utilisée afin d'annuler la divergence du champ de vitesse dans la résolution des équations de Navier-Stokes, la présence de ce multiplicateur a pour but d'annuler le tenseur des vitesses de déformation dans le domaine rigide, ce qui conduit à résoudre un problème elliptique.
La méthode proposée dans [59] calcule quant à elle la vitesse rigide du solide par projection de la vitesse du fluide calculée dans le domaine rigide, de manière à conserver les moments linéaire et angulaire du solide. Le champ fluide calculé sur tout le domaine est donc projeté dans l'espace des champs rigides dans le solide, ce qui suggère de faire là encore le lien avec les méthodes de splitting de type Chorin-Temam pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Cette méthode simple à implémenter permet de prendre en compte la rigidité de manière peu coûteuse, et représente donc une solution efficace pour l'étude de modèles de couplage avec un grand nombre de particules rigides, par exemple

pour l'étude du transport lubrifié ou des boues. Des tests numériques pour la sédimentation d'une ou plusieurs particules rigides en 2D et 3D sont présentés dans [59] et [69]. Cette méthode est également implémentée dans [13] pour l'animation d'objets rigides de formes complexes tombant dans l'eau.
Enfin, la contrainte rigide peut aussi être satisfaite à l'aide d'une pénalisation des équations du fluide, c'est-à-dire par l'ajout d'un terme forçant la contrainte rigide dans le solide. On parle de pénalisation L^2 (resp. H^1) lorsqu'elle concerne le champ de vitesse (resp. ses dérivées). Ce type de méthode a été largement développé pour l'étude d'écoulements autour d'obstacles fixes. Dans [4] un modèle de Brinkman (milieux poreux) est utilisé pour définir des méthodes de pénalisation L^2 (basée sur la perméabilité, nulle dans le solide rigide et infinie dans le fluide) et H^1 (basée sur la viscosité, infinie dans le solide rigide). Différentes validations numériques relatives à ces méthodes sont présentées dans [46]. Dans [5], la pénalisation L^2 est basée sur l'annulation de la vitesse dans l'obstacle. D'autres travaux sur ce type de modèles se trouvent dans [67], avec notamment l'étude de différentes conditions d'interface, et la précision de ces méthodes en fonction du traitement numérique de l'interface. Dans le cadre d'écoulements fluide-particules, le mouvement d'une boule rigide dans un fluide visqueux est étudié dans [16] à l'aide d'un changement de variable par rapport au centre du solide, et d'une pénalisation du champ de vitesse en dehors du domaine fluide-solide rigide. La méthode proposée dans [66] pénalise le tenseur des vitesses de déformation dans le solide, ce qui revient à considérer ce milieu comme un fluide de viscosité infinie ; la vitesse rigide étant par ailleurs calculée par une projection. Dans [65], une nouvelle formulation du tenseur des contraintes du fluide permet de plus d'établir plusieurs stratégies de pénalisation, et ainsi de traiter de problèmes multi-fluides pouvant contenir des phases gazeuses et des particules rigides. Le cas de plusieurs solides en mouvement est traité dans [52] avec une pénalisation H^1. Enfin la méthode de pénalisation proposée dans [44] permet d'écrire une formulation variationnelle basée sur des espaces fonctionnels non contraints, en pénalisant dans les équations le tenseur des déformations.

Pour l'étude des modèles de couplage fluide - membrane élastique en 2D, et fluide - solide rigide en 2D ou 3D, nous nous plaçons dans le cadre suivant :

(1) La formulation eulérienne de l'écoulement fluide, qui autorise l'utilisation d'un maillage régulier fixe, défini sur un domaine fixe. Les différences finies sont utilisées pour la discrétisation spatiale.
(2) La localisation de la structure par capture, avec la méthode level-set, en utilisant notamment les propriétés de la méthode présentées dans [20] dans le cas d'une membrane élastique (expression de la force élastique). Pour le couplage fluide-solide rigide, la formulation level-set est non seulement utilisée pour la localisation de la structure mais aussi pour la gestion des contacts entre solides (détection des contacts et utilisation d'un modèle simplifié de collision).
(3) La simulation numérique directe des forces hydrodynamiques.

(4) L'utilisation de la méthode de frontière immergée (en formulation level-set) pour l'application de la force élastique de la membrane.
(5) La pénalisation des équations du fluide pour la réalisation de la contrainte de rigidité du solide suivant une généralisation de la méthode présentée dans [5].

Dans ce chapitre nous présentons les équations régissant les modèles physiques étudiés dans la suite.
Après avoir rappelé les caractéristiques des deux systèmes de coordonnées utilisés pour l'écriture de ces modèles, eulérien et lagrangien, nous présentons les équations décrivant les trois types de milieux considérés - fluide visqueux incompressible, membrane élastique, solide rigide - d'abord dans leur formulation classique (eulérienne pour le fluide, lagrangienne pour la membrane élastique et le solide rigide).
Le modèle complètement eulérien de [20] et [21] pour le couplage fluide - membrane élastique est ensuite introduit. Ce modèle utilise la méthode de Frontière Immergée de Peskin pour la prise en compte de la force élastique, avec une localisation de la membrane par la méthode Level-Set. En remarquant que les dérivées de la fonction Level-Set donnent directement accès à l'étirement de la membrane, cette formulation permet notamment d'obtenir un modèle couplé dans lequel le terme de force élastique est exprimé complètement à partir de la fonction Level-Set, et apparaît en second membre des équations de Navier-Stokes. Les interpolations liées au passage des variables lagrangiennes à eulériennes dans la méthode classique sont ainsi supprimées, résolvant le problème de la perméabilité de la membrane. On peut en outre montrer que ce modèle satisfait une propriété de conservation de l'énergie totale.
Les méthodes de Frontière Immergée et Level-Set, ainsi que les questions numériques liées à leur utilisation sont tout d'abord présentées, puis le modèle eulérien de couplage fluide/membrane élastique est établi.
Nous précisons enfin les méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes dans les simulations.

1.1 Modèles mathématiques en formulation classique

1.1.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes

On peut décrire l'évolution d'un milieu physique de deux manières différentes, en utilisant les coordonnées lagrangiennes ou eulériennes pour écrire les équations.
La première méthode, lagrangienne, consiste à attacher les propriétés aux particules du milieu, et à suivre ces particules dans leur mouvement. Elles sont alors repérées par leur position $X(t, t_0, x_0)$ au cours du temps, où $X(t, t_0, x_0)$ est la position dans un repère fixe, à l'instant t, de la particule qui occupait la position x_0 à l'instant t_0.
La seconde, eulérienne, consiste à attacher les propriétés aux points du repère fixe que l'on a choisi. Une caractéristique physique donnée est alors définie en chaque point du

repère et à chaque instant comme étant celle de la particule qui passe en ce point à cet instant. Le champ de vitesse u est alors introduit afin de décrire le mouvement du milieu.

Les champs de vitesse u et de position $X(s,t,x)$ sont reliés par la relation cinématique suivante :

$$u(t,x) = \left(\frac{\partial X(s,t,x)}{\partial s}\right)_{|s=t}$$

D'autre part si l'on connait le champ de vitesse u on peut retrouver le champ des positions X en résolvant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,t_0,x_0)}{\partial t} = u(t, X(t,t_0,x_0)) \\ X(t_0,t_0,x_0) = x_0 \end{cases}$$

Travailler en coordonnées eulériennes revient donc à se placer en un point géométrique X et à écrire les bilans mécaniques, énergétiques, et thermodynamiques au voisinage de ce point fixe.
On définit enfin la dérivée particulaire d'une quantité eulérienne $\phi(t,X)$ par :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi$$

En mécanique des fluides, on utilise généralement les coordonnées eulériennes, qui permettent de décrire le comportement global de l'écoulement, sans peut-être déterminer l'ensemble des positions des particules du système.
Au contraire, en élasticité, les contraintes sont exprimées par rapport à un état de référence, et il est plus naturel de travailler en formulation lagrangienne, afin de mesurer les variations de longueur dans le milieu, par rapport à l'état de référence.
Enfin, le mouvement rigide d'un solide est classiquement exprimé en variables lagrangiennes.

Ce sont dans ces formulations classiques (eulérienne pour le fluide, lagrangienne pour la membrane élastique et le solide rigide) que sont écrites les équations dans cette partie.

1.1.2 Equations de Navier Stokes incompressible pour un fluide newtonien

Soit T>0. Nous étudions l'évolution d'un fluide newtonien visqueux incompressible dans $\bigcup_{t\in[0,T]} (\{t\} \times \Omega_f(t))$, $\Omega_f(t)$ ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$.

On note, pour $(t,x) \in \bigcup_{t\in[0,T]} (\{t\} \times \Omega_f(t))$:

- $u_f(t,x)$ le champ de vitesse
- $\rho_f(t,x) \geq 0$ la densité
- $p(t,x)$ le champ de pression
- $\mu_f(t,x) \geq 0$ la viscosité dynamique
- $\Sigma_f(t,x)$ le tenseur des contraintes de Cauchy
- $D(u_f(t,x))$ le tenseur des vitesses de déformation
- $n(t,x)$ la normale sortante à $\Omega_f(t)$

Nous supposons l'écoulement isotherme et sans échange de chaleur avec l'extérieur.

Lois de conservation

L'incompressibilité (conservation du volume) s'exprime en fonction de la vitesse eulérienne u_f par

$$\operatorname{div} u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \tag{1.1}$$

D'autre part l'équation de conservation de la masse ou équation de continuité s'écrit dans le cas général :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f u_f) = 0 \text{ dans } \Omega_f(t)$$

Dans le cas incompressible, elle devient :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + u_f \cdot \nabla \rho_f = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \tag{1.2}$$

Enfin, d'après le théorème fondamental de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement d'un volume de fluide est égale à la somme des forces (volumiques et surfaciques) appliquées à ce volume. On en déduit par définition du tenseur des contraintes de Cauchy l'équation suivante (forme conservative) :

$$\frac{\partial(\rho_f u_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f u_f \otimes u_f) = \operatorname{div} \Sigma_f + \rho_f f_{\text{ext}} \text{ dans } \Omega_f(t) \tag{1.3}$$

où f_{ext} est une force volumique extérieure.

Loi de comportement : fluide newtonien

Le tenseur des vitesses de déformation est défini par :

$$D(u_f) = \frac{1}{2}(\nabla u_f + (\nabla u_f)^t) \tag{1.4}$$

Un fluide incompressible est dit newtonien si son tenseur des contraintes de Cauchy s'exprime par :

$$\Sigma_f = -p\mathbb{I}_d + 2\mu_f D(u_f) \tag{1.5}$$

Equations de Navier-Stokes incompressible

Pour un fluide visqueux incompressible newtonien, nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_f u_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f u_f \otimes u_f) + \nabla p - 2\operatorname{div}(\mu_f D(u_f)) = \rho_f f_{\text{ext}} \text{ dans } \Omega_f(t) \\ \operatorname{div} u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \\ \dfrac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f u_f) = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

La pression p est calculée à une constante près et les deux systèmes précédents doivent être complétés par des conditions initiales et aux limites.

Energie totale

Dans le cadre dans lequel nous nous plaçons (écoulement isotherme et sans échange de chaleur avec l'extérieur), l'énergie totale $\mathcal{E}_t$ du système "fluide incompressible" se réduit à son énergie cinétique $\mathcal{E}_c$:

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\rho_f |u_f|^2 \tag{1.7}$$

1.1.3 Equations pour une courbe élastique 1D

Dans ce paragraphe les équations sont écrites classiquement en variables lagrangiennes, leur réécriture en variables eulériennes est détaillée dans la partie 1.2.

Soit $T > 0$. Nous étudions l'évolution d'une courbe fermée élastique $\Gamma_e(t)$ dans $\mathbb{R}^2$, pour $t \in [0, T]$. Soit $\gamma : [0, T] \times [0, L] \to \gamma(t, s)$ un paramétrage régulier de $\Gamma_e(t)$, avec s l'abscisse curviligne.
Soit $\widetilde{\Gamma}_e$ sa configuration au repos (en général $\widetilde{\Gamma}_e \neq \Gamma_e(0)$), de paramétrage régulier $\widetilde{\gamma}(s)$.
L'étirement e de la courbe $\Gamma_e(t)$ est alors défini par

$$e(t, \gamma(t, s)) = \frac{|\gamma_s(t, s)|}{|\widetilde{\gamma}_s(s)|} \text{ sur } [0, T] \times [0, L] \tag{1.8}$$

On note, pour $(t, s) \in [0, T] \times [0, L]$:

- $\Lambda_e(t, s)$ la densité de masse de $\Gamma_e(t)$
- $\tau(t, s)$ le vecteur tangent à $\Gamma_e(t)$, $\tau = \dfrac{\gamma_s}{|\gamma_s|}$
- $n(t, s)$ et $\kappa(t, s)$ la normale et la courbure de $\Gamma_e(t)$
- $T_e(t, s)$ la tension de $\Gamma_e(t)$
- F_{ext} la densité de force extérieure exercée sur $\Gamma_e(t)$
- ν_e le coefficient de raideur de $\Gamma_e(t)$

– $F_e(t,s)$ la densité de force élastique de $\Gamma_e(t)$

En tant que milieu mono-dimensionnel, la courbe $\Gamma_e(t)$ n'est pas considérée comme incompressible.

Lois de conservation

La conservation de la masse est décrite par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_e(t,s)\right) = 0 \tag{1.9}$$

D'autre part la quantité de mouvement de $\Gamma_e(t)$ est définie par :

$$\Lambda_e(t,s)\gamma_t(t,s)$$

Les forces agissant sur une portion $[s, s+ds]$ de $\Gamma_e(t)$ sont de deux types :
- les forces extérieures, de densité totale F_{ext}
- les forces de tension appliquées en $s+ds$ et s par le reste de la courbe $\Gamma_e(t)$, suivant $\tau(s)$ ou $\tau(s+ds)$, et de sens opposé : $T_e(t,s+ds)$ et $-T_e(t,s)$

Sur la portion $[s, s+ds]$, la conservation de la quantité de mouvement s'exprime donc par :

$$(\Lambda_e(t,s)\gamma_t(t,s)ds)_t = T_e(t,s+ds) - T_e(t,s) + F_{ext}(t,s)ds$$

Donc, en passant à la limite en $ds \to 0$, et en utilisant (1.9), on a :

$$\Lambda_e(t,s)\gamma_{tt}(t,s) = \frac{\partial T_e}{\partial s}(t,s) + F_{ext}(t,s) \tag{1.10}$$

Energie et force élastique

La densité de force élastique exercée par $\Gamma_e(t)$ apparait dans (1.10) sous la forme

$$F_e(t,s) = \frac{\partial T_e}{\partial s}(t,s)$$

Une autre manière de l'obtenir est de la dériver à partir de l'énergie élastique de $\Gamma_e(t)$. C'est ce qui est proposé dans [63]. En effet, si l'on suppose que l'énergie élastique $\mathcal{E}_e$ stockée dans $\Gamma_e(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{E}_e = \int_0^L E_e\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right) ds \tag{1.11}$$

avec E_e une loi d'énergie à préciser, la densité de force élastique F_e exercée par $\Gamma_e(t)$ peut être interprétée comme la dérivée de Fréchet de $\mathcal{E}_e$, qui apparait lorsque l'on exprime la perturbation $\delta\mathcal{E}_e$ d'énergie élastique induite par une perturbation $\delta\gamma$ du milieu :

$$F_e = -\frac{\delta\mathcal{E}_e}{\delta\gamma} \text{ avec } \delta\mathcal{E}_e = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial s}\left(E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\frac{\gamma_s}{|\gamma_s|}\right)\delta\gamma ds$$

et s'exprime alors par :

$$F_e(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\frac{\gamma_s}{|\gamma_s|}\right) \tag{1.12}$$

En posant

$$T_e(t,s) = E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\frac{\gamma_s}{|\gamma_s|}$$

on retrouve

$$F_e(t,s) = \frac{\partial T_e}{\partial s}(t,s) \tag{1.13}$$

En dérivant, on obtient (en utilisant une formule de Frénet)

$$\begin{aligned} F_e(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\tau\right) \\ &= \left(\nabla E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right).\gamma_s\right)\tau + E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)|\gamma_s|\kappa n \\ &= \left[\left(\nabla E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right).\tau\right)\tau + E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\kappa n\right]|\gamma_s| \end{aligned}$$

Cette dernière formule fait apparaitre les composantes tangentielle et normale de la densité de force élastique.

Loi de comportement

Afin de compléter le modèle, nous exprimons la relation entre la tension T_e et l'étirement $e = \dfrac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}$ de $\Gamma_e(t)$, ce qui revient à choisir la loi E_e' dans l'expression :

$$T_e(t,s) = E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\frac{\gamma_s}{|\gamma_s|}$$

Nous supposons $E_e'(r) = 0$ pour $r \leq 1$ afin d'annuler la tension lorsque la membrane est au repos.
Le choix

$$E_e'(r) = \nu_e(r-1) \text{ pour } r \geq 1 \tag{1.14}$$

permet d'obtenir un modèle d'élasticité linéaire en ce qui concerne la relation entre déformations et contraintes, mais qui reste géométriquement non linéaire, c'est-à-dire que l'on ne fait pas de linéarisation dans le cas des petits déplacements de la membrane.

Remarque : Nous ne prenons pas en compte les forces de courbure dans ce modèle.

1.1.4 Equations pour un solide rigide

Soit T>0. Nous étudions l'évolution d'un solide rigide homogène $\Omega_s(t)$ dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, pour $t \in [0, T]$.

On définit :
- $x_G(t)$ son centre de gravité
- $r(t, x)$ le vecteur position d'un point de $\Omega_s(t)$ par rapport au centre de gravité $x_G(t)$:

$$r(t, x) = x - x_G(t) \tag{1.15}$$

- $\omega(t)$ sa vitesse angulaire

On a alors $\Omega_s(t) = X(t, \Omega_s(0))$ avec X vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = x'_G(t) + \omega(t) \times r(t, X(t)) \\ X(0, x) = x \end{cases} \tag{1.16}$$

On suppose enfin sa densité ρ_s constante.

Lois de conservation

On définit les moments linéaire et angulaire de $\Omega_s(t)$ par :

- $M_s x'_G(t)$ le moment linéaire avec M_s la masse définie par

$$M_s = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s dx \tag{1.17}$$

- $J_s(t)\omega(t)$ le moment angulaire avec $J_s(t)$ la matrice d'inertie définie par

$$J_s(t) = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s (r^2(t, x)\mathbb{I}_d - r(t, x) \otimes r(t, x)) dx \tag{1.18}$$

Soit $n(t, x)$ la normale sortante à $\Omega_s(t)$, et le vecteur g_{ext} (resp. le tenseur Σ_{ext}) représentant les forces volumiques (resp. surfaciques) appliquées au solide. La conservation des moments linéaire et angulaire de $\Omega_s(t)$ s'écrit alors :

$$M_s \frac{d^2 x_G(t)}{dt^2} = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s g_{\text{ext}}(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_s(t)} \Sigma_{\text{ext}}(t, s).n(t, s) ds \tag{1.19}$$

et

$$\frac{d(J_s(t)\omega(t))}{dt} = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r(t, x) \times g_{\text{ext}}(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_s(t)} r(t, s) \times (\Sigma_{\text{ext}}(t, s).n(t, s)) ds$$

i.e.

$$\begin{aligned} J_s(t)\frac{d\omega(t)}{dt} &= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r(t,x) \times g_{\text{ext}}(t,x)dx + \int_{\partial\Omega_s(t)} r(t,s) \times (\Sigma_{\text{ext}}(t,s).n(t,s))ds \\ &\quad -\omega(t) \times (J_s(t).\omega(t)) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Pour l'obtention de (1.20) nous avons utilisé la propriété

$$\frac{dJ_s(t)}{dt}\omega(t) = \omega(t) \times (J_s(t).\omega(t))$$

Nous utilisons pour montrer cette propriété la relation suivante pour a, b, et c trois vecteurs :

$$(a \otimes b) \cdot c = (b \cdot c)a \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s(t)}{dt}\omega(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_s(t)} \rho_s(r^2(t,x)\mathbb{I} - r(t,x) \otimes r(t,x))dx\right)\omega(t) \\ &= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \frac{d}{dt}\left(r^2(t,x)\mathbb{I} - r(t,x) \otimes r(t,x)\right)\omega(t)dx \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s(t)}{dt}\omega(t) &= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(2\left(r.\frac{dr}{dt}\right)\omega - \left(r \otimes \frac{dr}{dt}\right)\omega - \left(\frac{dr}{dt} \otimes r\right)\omega\right)dx \\ &\overset{(1.21)}{=} \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(2\left(r.\frac{dr}{dt}\right)\omega - \left(\omega.\frac{dr}{dt}\right)r - (\omega.r)\frac{dr}{dt}\right)dx \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{dr(t,x))}{dt} &= \frac{d(x - x_G(t))}{dt} \\ &= -\frac{\partial x_G(t))}{\partial t} + (x'_G(t) + \omega(t) \times r(t,x)).\nabla(x - x_G(t)) \\ &= -x'_G(t) + (x'_G(t) + \omega(t) \times r(t,x)).\mathbb{I} \\ &= \omega(t) \times r(t,x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_s(t)}{dt}\omega(t) &= -\int_{\Omega_s(t)} \rho_s(\omega(t).r(t,x))(\omega(t)\times r(t,x))dx \\
&= -\omega(t)\times\int_{\Omega_s(t)} \rho_s(\omega(t).r(t,x))r(t,x)dx \\
&\overset{(1.21)}{=} -\omega(t)\times\int_{\Omega_s(t)} \rho_s((r(t,x)\otimes r(t,x)).\omega(t))dx \\
&= -\omega(t)\times\left(\int_{\Omega_s(t)} \rho_s(r(t,x)\otimes r(t,x))dx.\omega(t)\right) \\
&= \omega(t)\times(J_s(t).\omega(t))
\end{aligned}$$

car

$$\omega(t)\times\left(\int_{\Omega_s(t)} \rho_s(r(t,x))^2\mathbb{I}dx\right).\omega(t) = 0$$

Remarque : Si le solide est un disque (pour $d = 2$) ou une sphère (pour $d = 3$), le terme $\omega(t)\times(J_s(t).\omega(t))$ disparait de la conservation du moment angulaire car dans ce cas $J_s = \int_{\Omega_s} \rho_s(r(t,x))^2\mathbb{I}dx$.

1.1.5 Vers un milieu continu multiphysique

Cette partie a été consacrée à la présentation de manière indépendante des équations pour un fluide incompressible, une membrane élastique, et un solide rigide. Dans la suite, nous sommes amenés à considérer comme un milieu continu les systèmes couplés "fluide-membrane élastique" et "fluide-solide rigide".
Nous définissons alors un champ de vitesse (eulérien) ainsi que des caractéristiques physiques (densité, viscosité) sur tout le domaine d'étude. L'utilisation d'un champ de vitesse continu nécessite de faire ici certaines hypothèses d'ordre physique. En effet, nous supposons que le contact "fluide-membrane" ou "fluide-solide" est collant, i.e. qu'il ne peut y avoir glissement, afin d'éviter une discontinuité dans la composante tangentielle du champ de vitesse au niveau de ces interfaces. Nous supposons d'autre part qu'il n'y a pas de transfert de matière entre les différents systèmes.

1.2 Modèle eulérien de couplage fluide-membrane élastique en 2D

Soit T>0. Dans toute cette partie nous considérons une membrane élastique $\Gamma_e(t)$, $t\in[0,T]$, immergée dans un fluide incompressible contenu dans le domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.
On note $\gamma(t,s)$ son paramétrage à l'instant t, et $\gamma_0(s)$ le paramétrage à l'instant 0. Soit

$\widetilde{\Gamma}_e$ sa configuration au repos (en général $\widetilde{\Gamma}_e \neq \Gamma_e(0)$), de paramétrage régulier $\widetilde{\gamma}(s)$.

1.2.1 Méthode de Frontière Immergée

La méthode de Frontière Immergée de Peskin [63] utilise pour ce problème une description eulérienne de la vitesse et de l'incompressibilité du système, et une description lagrangienne de la configuration (position, étirement) de la membrane. Le principe est de mettre en interaction ces deux descriptions afin de résoudre le problème de couplage sur le maillage eulérien, via un unique système d'équations.

Soit u le champ de vitesse eulérien du milieu continu, défini sur Ω tout entier.
On considère les variables lagrangiennes suivantes :

- $\gamma : (t,s) \in [0,T] \times [0,L] \to \gamma(t,s)$ la position des points matériels de la membrane, avec s la coordonnée curviligne attachée à la membrane.
- $F_e : (t,s) \in [0,T] \times [0,L] \to F_e(t,s)$ la densité de force élastique de la membrane, entièrement déterminée à partir de son étirement $\dfrac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}$.
- $\Lambda_e : (t,s) \in [0,T] \times [0,L] \to \Lambda_e(t,s)$ la densité de masse de la membrane.

La méthode de Frontière Immergée consiste à résoudre les points suivants :

- La densité de force élastique $F_e(t,s)$, dérivée d'une énergie, s'exprime en fonction de $\gamma(t,s)$ par

$$F_e(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(E_e'\left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|}\right)\frac{\gamma_s}{|\gamma_s|}\right) \tag{1.22}$$

  où E_e' est une loi de comportement élastique.

- Cette force est distribuée au voisinage de la membrane, à l'aide d'une masse de Dirac δ régularisée numériquement. Une densité eulérienne de force élastique f_e définie sur les points du maillage fluide est calculée en résolvant l'équation d'interaction suivante :

$$f_e(t,x) = \int_{[0,L]} F_e(t,s)\delta(x-\gamma(t,s))ds \tag{1.23}$$

En multipliant f_e par une fonction test ψ et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_e(t,x)\psi(x)dx &= \int_\Omega \int_{[0,L]} F_e(t,s)\delta(x-\gamma(t,s))ds\psi(x)dx \\
&= \int_{[0,L]} F_e(t,s) \int_\Omega \psi(x)\delta(x-\gamma(t,s))dxds \\
&= \int_{[0,L]} F_e(t,s)\psi(\gamma(t,s))ds \\
&= \int_{\Gamma_e(t)} \frac{1}{|\gamma_s|} F_e(t,s)\psi(s)|\gamma_s|ds \\
&= \langle \frac{1}{|\gamma_s|} F_e(t,s)\delta_{\Gamma_e(t)}, \psi(s)\rangle \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

– La vitesse eulérienne u est alors solution des équations de Navier-Stokes incompressible avec en second membre la densité eulérienne de force élastique :

$$\begin{cases} (\rho + \frac{1}{|\gamma_s|}\Lambda_e\delta_{\Gamma_e(t)})\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) + \nabla p - 2\,\mathrm{div}(\mu D(u)) = \frac{1}{|\gamma_s|}F_e\delta_{\Gamma_e(t)} \\ \mathrm{div}\, u = 0 \end{cases} \qquad (1.25)$$

La densité de masse eulérienne de la membrane élastique apparaissant dans la première équation de 1.25 est définie par

$$\lambda_e(t,x) = \int_{[0,L]} \Lambda_e(t,s)\delta(x-\gamma(t,s))ds \qquad (1.26)$$

Et avec le même raisonnement que précédemment, on a

$$\int_\Omega \lambda_e(t,x)\psi(x)dx = \langle \frac{1}{|\gamma_s|}\Lambda_e(t,s)\delta_{\Gamma_e(t)}, \psi(s)\rangle \qquad (1.27)$$

– u est enfin interpolée aux points de contrôle $\gamma(t,s)$ à l'aide de la fonction δ, et la membrane est transportée avec le champ obtenu :

$$u(t,\gamma(t,s)) = \int_\Omega u(t,x)\delta(x-\gamma(t,s))dx \qquad (1.28)$$

$$\frac{\partial\gamma(t,s)}{\partial t} = u(t,\gamma(t,s)) \qquad (1.29)$$

Le calcul de 1.28 suppose que le champ de vitesse u est continu à travers l'interface. On considère pour cela que la membrane possède de la viscosité, celle du fluide, dans la première équation de 1.25.

Il est à noter que les intégrales (1.23) et (1.26) sont mathématiquement différentes de (1.28). En effet, si (1.28) est effectuée sur le domaine $2D$ Ω, et demeure donc bornée, les deux autres sont des intégrales curvilignes sur $\Gamma_e(t)$, donc l'intégration de la fonction singulière δ donne lieu à une singularité dans les équations (1.25). Une formulation basée sur des conditions de sauts au niveau de la membrane est proposée dans [72] afin déviter cette singularité.

En comparaison avec les méthodes de type ALE, la méthode de Frontière immergée est relativement simple et facile à implémenter. Elle constitue donc une bonne alternative pour l'étude des problèmes de couplage fluide structure, notamment dans le cas de géoméries complexes, puisque la résolution du fluide reste effectuée sur un maillage fixe et régulier. Cependant l'utilisation d'une masse de Dirac régularisée numériquement au niveau de l'interface tend à masquer les éventuels sauts des variables du système à cet endroit, ce qui limite en général la précision de la méthode à l'ordre 1, sauf pour des solutions régulières, c'est-à-dire en présence d'interfaces d'épaisseur non nulle, pour lesquelles l'ordre 2 est alors atteint ([30]). La précision peut néanmoins être améliorée à travers l'approximation de la masse de Dirac, nous discutons ce point plus précisément dans la suite. D'autre part, l'interpolation du champ de vitesse eulérien sur le maillage lagrangien est reconnue pour être responsable d'une mauvaise conservation du volume. En effet, l'incompressiblité du champ de vitesse est altérée lors de cette interpolation. Dans [64], un opérateur de projection modifié pour le calcul de la vitesse fluide est introduit à cet effet, mais on perd alors en partie l'avantage de la simplicité de la méthode. Le modèle eulérien de ([20]) et ([21]) présenté dans la suite résout ce problème en supprimant l'interpolation du champ de vitesse elle-même.

Approximation de la masse de Dirac

En pratique, la force élastique singulière localisée sur la membrane est régularisée afin d'obtenir une force volumique dont le support se situe dans un voisinage de celle-ci. Cela revient alors à régulariser l'interface fluide-structure. Cette approximation de la masse de Dirac est un point important de la méthode de frontière immergée car cette fonction est l'outil mathématique permettant d'appliquer la force de la structure sur le fluide. Cela a donc une influence sur la précision de la méthode.

En dimension 1, la fonction singulière δ est donc remplacée par une fonction δ^ε, avec $\varepsilon = C\Delta x$, $C > 0$, telle que

$$\begin{cases} \delta^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ \mathrm{Supp}(\delta^\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon], \\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R},\ \delta^\varepsilon(x-\bar{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{x-\bar{x}}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \delta_0(x-\bar{x}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

avec ζ une fonction de troncature.

En dimension $d \geq 2$, le choix classique pour δ^ε est un produit de fonctions à une variable :

$$\delta^\varepsilon(x-\bar{x}) = \delta^{\varepsilon,1}(x_1-\bar{x_1})...\delta^{\varepsilon,d}(x_d-\bar{x_d}) = \frac{1}{\varepsilon^d}\zeta^1\left(\frac{x_1-\bar{x_1}}{\varepsilon}\right)...\zeta^d\left(\frac{x_d-\bar{x_d}}{\varepsilon}\right) \tag{1.31}$$

où $x_1, ..., x_d$ sont les composantes de x.

Dans [62], un certain nombre de conditions de compatibilité sur la fonction δ^ε sont enumérées en plus des propriétés de continuité (afin d'éviter les sauts de vitesse et de force au niveau de l'interface lors de l'évaluation sur le maillage eulérien) et de support borné (pour des raisons de coût des calculs).
En particulier, dans le cas 1D, en définissant l'erreur de discrétisation E par

$$E = \left| f(\bar{x}) - \Delta x \sum_{i\in Z} \delta^\varepsilon(x^i-\bar{x}) f(x^i) \right| = \left| \int_\Omega \delta_0(x-\bar{x}) f(x)dx - \Delta x \sum_{i\in Z} \delta^\varepsilon(x^i-\bar{x}) f(x^i) \right| \tag{1.32}$$

avec $\{x^i = i\Delta x\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un maillage eulérien régulier, il est montré dans [7] que si δ^ε satisfait q conditions de moments discrets, $q > 0$, i.e. si

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R},\ \Delta x \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta^\varepsilon(x^i-\bar{x})(x^i-\bar{x})^r = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ 0 \text{ si } 1 \leq r < q \end{cases} \tag{1.33}$$

alors $E \leq C(\Delta x)^q$ pour $f \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathrm{Supp}(\delta^\varepsilon))$ et $f^{(q-1)}$ lipschitz continue sur cet intervalle. Ce résultat est obtenu en écrivant le développement de Taylor à l'ordre $q-1$ de f.
Ainsi pour $q = 1$ (resp. $q = 2$) les fonctions constantes (resp. linéaires) sont interpolées exactement. La condition $\Delta x \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta^\varepsilon(x^i-\bar{x}) = 1$ assure simplement que δ^ε reste de masse 1.
Le résultat est étendu en dimension $d \geq 2$ dans [79] pour des conditions analogues sur les fonctions $\delta^{\varepsilon,k}$.
Pour $2\varepsilon \geq q\Delta x$ [79], il existe au moins une fonction δ^ε satisfaisant q conditions de moments pour un ordre q donné. D'autres conditions formulées dans [62] permettent de déterminer cette fonction de manière unique.
Ainsi, pour $q = 2$, on obtient :

$$\zeta(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(3 - 4|r| + \sqrt{1+8|r|-16r^2}\right) \text{ si } |r| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\left(5 - 4|r| - \sqrt{-7+24|r|-16r^2}\right) \text{ si } \frac{1}{2} < |r| \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Une très bonne approximation couramment utilisée de la fonction précédente est :

$$\zeta_{cos}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos(\pi r)\right) \text{ si } |r| \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette fonction ne satisfait cependant qu'une condition de moment discret, pour $r = 0$. Pour $q = 3$ on peut trouver l'expression de la fonction calculée à l'aide de MAPLE, dans [72].

Une manière d'améliorer la précision de l'approximation de la masse de Dirac est donc d'imposer des conditions supplémentaires sur les moments discrets, i.e. exiger une meilleure interpolation des fonctions d'ordre plus élevé. Cependant, ces conditions supplémentaires s'accompagnent d'une augmentation du support, ce qui accroit dans le même temps le coût des calculs, malgré une meilleure résolution de la structure.
D'autre part, lorsque la fonction f ou ses dérivées présente un saut au niveau de l'interface, et c'est notamment le cas de la dérivée normale de la vitesse dans la méthode de Frontière Immergée, l'ordre de précision diminue. Dans [7], des conditions de moment uni-latérales supplémentaires sont satisfaites pour atteindre le même ordre que dans le cas régulier :

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R},\ \Delta x \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta^{\varepsilon}(x^i - \bar{x})(x^i - \bar{x})^r H(x^i - \bar{x}) = 0 \text{ si } 1 \leq r < q \tag{1.34}$$

avec H la fonction de Heaviside.
La méthode d'interface immergée de [49] permet aussi d'obtenir plus de précision en écrivant des conditions de sauts prenant en compte une partie de la force élastique.

Ce qui précède concerne des modèles dans lesquels la membrane est représentée de manière explicite. Dans le cas d'une représentation implicite de celle-ci, par exemple avec la méthode Level-Set, un choix classique pour δ^{ε} est $\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$ où le niveau 0 de ϕ représente l'interface, et ε est de l'ordre de 1 ou 2 pas d'espace. Il est montré dans [79] que ce choix, qui a l'avantage de la simplicité, peut entrainer une erreur en $O(1)$ sur le calcul de la longueur de l'interface, indépendamment de la fonction ζ choisie. Deux méthodes sont proposées pour améliorer cet ordre de précision, la première basée sur une approximation du produit 1.31, l'autre sur un ε variable. Dans les deux cas la fonction ϕ et ses dérivées sont utilisées pour construire la nouvelle approximation.

1.2.2 Méthode level set

Le principe de la méthode Level-Set introduite dans [58] est de représenter $\Gamma_e(t)$ par l'intermédiaire d'une fonction régulière ϕ telle que

$$\Gamma_e(t) = \{x \in \Omega, \phi(t,x) = 0\} \tag{1.35}$$

i.e. $\phi(t, \gamma(t,s)) = 0$ pour $(t,s) \in [0,T] \times [0,L]$, ce qui donne, en dérivant par rapport à t :

$$\phi_t(t, \gamma(t,s)) + u(t, \gamma(t,s)) \cdot \nabla\phi(t, \gamma(t,s)) = 0 \tag{1.36}$$

On se donne donc une fonction initiale ϕ_0 représentant $\Gamma_e(0)$, et à chaque instant on cherche une fonction ϕ solution sur tout Ω de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \phi_t + u \cdot \nabla\phi = 0 \text{ sur }]0,T] \times \Omega \\ \phi = \phi_0 \text{ sur } \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{1.37}$$

Si ϕ_0 est de classe C^1, le problème décrit par l'équation (1.37) admet une solution unique de classe C^1 donnée par :

$$\phi(t,x) = \phi_0(X(0;x,t)) \tag{1.38}$$

On choisit en général la fonction ϕ_0 comme la distance signée à Γ_t :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma_e(0)) \text{ si } x \text{ est dans le domaine intérieur à } \Gamma_e(0) \\ \text{dist}(x, \Gamma_e(0)) \text{ si } x \text{ est dans le domaine extérieur à } \Gamma_e(0) \end{cases} \tag{1.39}$$

Il est à noter que même si la fonction level-set est initialisée à une distance, elle ne le reste pas en général lors de son transport.

Expression des grandeurs géométriques

Avec le choix de signe de ϕ_0 fait précédemment, la normale extérieure n au domaine délimité par $\Gamma_e(t)$, et sa courbure κ s'expriment par :

$$n(t,x) = \frac{\nabla\phi(t,x)}{|\nabla\phi(t,x)|} \tag{1.40}$$

$$\kappa(t,x) = \text{div}\,\frac{\nabla\phi(t,x)}{|\nabla\phi(t,x)|} \tag{1.41}$$

En 2D en particulier, on peut de plus exprimer la tangente τ à $\Gamma_e(t)$ par

$$\tau(t,x) = \frac{\nabla \times \phi(t,x)}{|\nabla\phi(t,x)|} \tag{1.42}$$

Expression de variables du milieu continu

Soit H la fonction définie par :

$$H(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y < 0 \\ 0 \text{ si } y \geq 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

Alors

$$H(\phi(t,x)) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est dans le domaine intérieur à } \Gamma_e(t) \\ 0 \text{ si } x \text{ est dans le domaine extérieur à } \Gamma_e(t) \end{cases} \tag{1.44}$$

Et $H(\phi)$ est aussi solution (au sens des distributions) de l'équation de transport :

$$(H(\phi))_t + u \cdot \nabla(H(\phi)) = 0 \tag{1.45}$$

Donc toute variable α du milieu continu, de valeurs α_1 (resp. α_2) à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de $\Gamma_e(t)$, peut s'exprimer par :

$$\alpha(\phi) = \alpha_2 + H(\phi)(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{1.46}$$

Nous donnons dans la suite une version régularisée de la fonction $H(\phi)$, dans le cadre de la méthode de frontière immergée.

Transport de la fonction level-set

La formulation level-set d'un problème de couplage fluide-structure repose sur le transport d'une fonction auxilliaire ϕ. Un soin particulier doit donc être apporté à la résolution numérique de l'équation d'advection sur ϕ. En effet, si l'on souhaite obtenir des informations mécaniques sur la structure à partir de ϕ, il est préférable de s'orienter vers des schémas précis et peu diffusifs.
Si de nombreux schémas existent pour l'équation de transport, les contraintes citées précédemment en éliminent certains, notamment le plus classique, le schéma amont, trop diffusif, et le schéma de Lax-Wendroff, délicat à écrire en dimension 2 et qui d'autre part se comporte assez mal pour une solution irrégulière. Enfin les interpolations nécessaires à la mise en place de la méthode des caractéristiques nous amènent à choisir d'autres schémas.

Traitement des termes convectifs Les schémas ENO (Essentially Non Oscillatory), introduits dans [31] en 1987 et adaptés du schéma amont, choisissent le stencil d'interpolation en fonction d'un critère de régularité locale de la solution numérique, contrairement aux méthodes traditionnelles de différences finies basées sur des interpolations à stencil fixe. Le but de ces schémas est en effet d'éviter les endroits où la fonction est irrégulière, et l'ajustement du critère de régularité permet d'obtenir des schémas d'ordre élevé. Voir [70]

pour plus de précisions sur ces schémas. Plus récemment, les schémas WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) ont été développés. Ces schémas utilisent une combinaison convexe de stencils d'interpolation, plutôt que de choisir le meilleur stencil. Aux endroits où la fonction est irrégulière, ils se comportent comme des schémas ENO. En ce qui concerne la précision, les résultats obtenus avec ces schémas sont comparables avec ceux obtenus avec des schémas tels que le schéma de Fromm ou le schéma de Beam-Warming. On utilise dans les simulations présentées dans la suite un schéma WENO d'ordre 5 pour l'équation de d'advection de la fonction level-set.

Traitement des termes temporels L'attention accordée à la discrétisation des termes convectifs est justifiée par la grande sensibilité des méthodes level-set à l'approximation de ces termes. En ce qui concerne la discrétisation des termes temporels, l'expérience semble montrer que l'influence sur la qualité de la solution numérique est moindre. Nous utilisons donc un schéma d'Euler d'ordre 1 dans nos simulations.
Cependant, si l'on souhaite augmenter l'ordre de la discrétisation temporelle, on peut par exemple choisir d'utiliser des schémas de Runge Kutta dits "total variation diminishing" (RK TVD). Ces schémas, proposés dans [70], garantissent qu'il n'y a pas création d'oscillations supplémentaires lorsque l'on augmente l'ordre de la discrétisation temporelle, par rapport au schéma d'Euler.

1.2.3 Expression de la force élastique en formulation level-set

Expression de l'étirement de $\Gamma_e(t)$ en fonction de ϕ

Dans [20] et [21] il est montré que l'on peut à chaque instant exprimer la variation de longueur ou étirement de $\Gamma_e(t)$ en fonction de la fonction ϕ.
Nous présentons ici le calcul de l'étirement donné dans [20] en partant du paramétrage de $\Gamma_e(t)$. Une autre preuve, basée sur des considérations plus géométriques, est donnée dans [21].

On introduit le champ d'étirement $e : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ défini par :

$$e(t, \gamma(t,s)) = \frac{|\gamma_s(t,s)|}{|\widetilde{\gamma}_s(s)|} \text{ sur } [0,T] \times [0,L] \tag{1.47}$$

En dérivant cette expression par rapport à t, on obtient :

$$e_t + u \cdot \nabla e = \frac{\gamma_{st} \cdot \gamma_s}{|\gamma_s||\widetilde{\gamma}_s|} = e\frac{\gamma_{st} \cdot \gamma_s}{|\gamma_s|^2} \tag{1.48}$$

Avec la définition de ϕ, et en se donnant une fonction initiale e_0, on cherche alors e solution de :

$$\begin{cases} e_t + u \cdot \nabla e = e\dfrac{[Du]\nabla \times \phi \cdot \nabla \times \phi}{|\nabla \phi|^2} & \text{sur }]0,T] \times \Omega \\ e = e_0 & \text{sur } \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{1.49}$$

Dans le cas d'un écoulement fluide incompressible, on peut alors montrer que $|\nabla \phi|$ vérifie la même équation que e. Donc

$$\frac{|\nabla \phi(t, \gamma(t,s))|}{|\nabla \phi_0(\gamma_0(s))|} = \frac{|e(t, \gamma(t,s))|}{|e_0(\gamma_0(s))|} \tag{1.50}$$

Dans le cas où e_0 est constant, on peut alors choisir ϕ_0 comme la distance signée à $\Gamma(0)$ multipliée par e_0, et ainsi odtenir $e = |\nabla \phi|$ à chaque instant sans le calculer.

Expression de la force élastique en fonction de ϕ

On rappelle la densité de force élastique dérivée précédemment en formulation lagrangienne :

$$F_e(t,s) = \left[\left(\nabla E_e' \left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|} \right) .\tau \right) \tau + E_e' \left(\frac{|\gamma_s|}{|\widetilde{\gamma}_s|} \right) \kappa n \right] |\gamma_s|$$

Les résultats (1.40), (1.41), (1.42), et surtout (1.50) nous permettent de réécrire cette densité complètement en fonction de ϕ [21] :

$$F_e = P_{\nabla \phi^\perp} \left(\nabla \left(E_e'(|\nabla \phi|) \right) \right) |\nabla \phi| - E_e'(|\nabla \phi|) \kappa(\phi) \nabla \phi \tag{1.51}$$

avec $\mathbb{P}_{\nabla \phi^\perp}$ la projection sur l'hyperplan orthogonal à $\nabla \phi$.
On peut aussi réécrire cette densité de force sous la forme

$$F_e = \left(\nabla \left(E_e'(|\nabla \phi|) \right) - \nabla . \left(E_e'(|\nabla \phi|) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) |\nabla \phi| \tag{1.52}$$

1.2.4 Formulation level-set de la méthode de frontière immergée

En utilisant (1.51) ou (1.52), on présente maintenant une formulation complètement eulérienne de la méthode de frontière immergée pour le couplage fluide-membrane élastique en 2D, proposée dans [20], et qui permet d'éviter les interpolations entre variables eulériennes et lagrangiennes, grâce à l'utilisation d'une fonction level-set pour localiser la structure.
Il reste pour cela à exprimer l'approximation de la masse de Dirac en fonction de ϕ.

Régularisation de l'interface fluide-structure en formulation level-set

La régularisation de l'interface fluide-structure se traduit en formulation level-set par ([21]) :

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)|\nabla\phi| \rightharpoonup \delta_{\{\phi=0\}} \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega)$$

avec $\mathcal{M}(\Omega)$ le dual de $\mathcal{C}_c(\Omega)$.

On fait donc l'approximation volumique suivante pour ε petit :

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)|\nabla\phi| \simeq \delta_{\{\phi=0\}} \tag{1.53}$$

La quantité $|\nabla\phi|$ qui apparait dans cette approximation représente la largeur du voisinage de la membrane sur lequel on applique la force.

Traitement de l'étalement de la fonction level set

L'approximation (1.53) suppose de pouvoir contrôler le gradient de la fonction level-set, car cela va déterminer le support de la fonction de régularisation, et donc de la force elle-même.
Or si la fonction level-set est initialisée comme une fonction distance, elle ne le reste pas nécessairement lors de son déplacement. On présente donc trois méthodes visant à obtenir à partir de la fonction level-set une fonction distance à chaque pas de temps, c'est-à-dire une fonction de gradient unitaire.

Ré-initialisation par résolution d'une équation d'Hamilton-Jacobi La première solution consiste à résoudre à chaque instant t l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d}{\partial \tau} = \text{signe}(\phi)(1-|\nabla d|) \\ d(0,x) = \phi(t,x) \end{cases} \tag{1.54}$$

avec la fonction *signe* prenant ses valeurs dans $\{-1;0;1\}$ suivant le signe de ϕ.

On observe que lorsque l'état stationnaire est atteint, le gradient de d est unitaire.
Cette méthode a été introduite par Sussman, Smereka et Osher dans [76].

En réécrivant l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} + w\cdot\nabla d = \text{signe}(\phi) \tag{1.55}$$

avec $w = \text{signe}(\phi)\frac{\nabla d}{|\nabla d|}$, il apparait que le problème à résoudre est hyperbolique, et que les caractéristiques partent perpendiculairement de $\{\phi = 0\}$, ce qui signifie que la reconstruction de ϕ s'effectue en partant de l'interface. Pour obtenir une distance au voisinage de l'interface seulement, quelques itérations suffisent donc.

Cependant, en dehors du fait que cette méthode exige la résolution d'une équation supplémentaire, elle peut aussi induire numériquement un petit déplacement de l'interface du fait de la compressibilité du champ w. On peut trouver une description plus détaillée de cette méthode dans [57].

Modification de l'équation d'advection en dehors de l'interface Une autre solution, proposée initialement par Zhao, Chan, Merriman, et Osher dans [83] à partir d'une idée de Evans et Spruck, et reprise ensuite dans d'autres travaux, est de remplacer l'équation d'advection de ϕ par l'équation suivante :

$$\phi_t(t,x) + (u \cdot \nabla\phi)(t, x - (\phi\nabla\phi)(t,x)) = 0 \tag{1.56}$$

Ainsi l'interface représentée par $\{\phi = 0\}$ est bien transportée par la vitesse u, et la fonction ϕ reste une distance à chaque instant. Cependant, le caractère non local de cette équation peut apparaître gênant pour des applications en mécanique des fluides.

Renormalisation par le gradient Dans le cas où l'on souhaite exprimer la force élastique de la membrane entièrement en fonction de la fonction level-set, c'est-à-dire obtenir l'étirement à partir du gradient de ϕ, les deux méthodes précédentes ne peuvent pas être utilisées car elles modifient toutes les deux la fonction ϕ, donc son gradient.
La troisième solution, proposée par Cottet dans [19] est inspirée par l'observation suivante : au voisinage de l'interface, une bonne approximation de la distance à celle-ci est donnée par $\frac{\phi}{|\nabla\phi|}$. Ainsi on peut conserver l'information mécanique d'étirement portée par le gradient de la fonction level-set, tout en contrôlant l'épaisseur numérique de l'interface. Cette méthode, en ne modifiant pas ϕ, possède ainsi de bonnes propriétés de conservation de volume. Des résultats numériques en comparaison avec ceux obtenus en utilisant une re-initialisation sont présentés à ce sujet dans [23]. Le modèle 2D considéré est une membrane circulaire transportée dans un écoulement créé par un vortex, et dont on contrôle la longueur. Le résultat de référence est obtenu par une méthode de suivi d'interface avec un grand nombre de marqueurs. Si les résultats dépendent de la résolution utilisée pour les calculs, ces tests montrent que la méthode de renormalisation représente une alternative efficace et peu coûteuse aux méthodes de re-initialisation.

En pratique, cette méthode consiste à remplacer numériquement l'approximation (1.53) par

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon|\nabla\phi|}\right) \simeq \delta_{\{\phi=0\}} \tag{1.57}$$

Force élastique en formulation level-set

Avec (1.50) et (1.53) on peut écrire l'approximation suivante de la force apparaissant en second membre de (1.25) :

$$\frac{1}{|\gamma_s|}F_e\delta_{\Gamma_e(t)} \simeq \frac{1}{|\nabla\phi|}F_e|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \simeq F_e\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

Et en utilisant (1.52), la forme régularisée de la force élastique apparaissant en second membre des équations du fluide est alors :

$$F_e = \left(\nabla\left(E_e'(|\nabla\phi|)\right) - \nabla.\left(E_e'(|\nabla\phi|)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{1.58}$$

On peut également obtenir cette expression en la dérivant directement d'une énergie élastique régularisée. On introduit l'énergie élastique régularisée suivante :

$$\mathcal{E}_e(\phi) = \int_\Omega E_e(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)dx \tag{1.59}$$

En dérivant cette expression de l'énergie par rapport au temps, on obtient [21] :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_e(\phi) = \int_\Omega\left(\nabla.\left(E_e'(|\nabla\phi|)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} - \nabla\left(E_e'(|\nabla\phi|)\right)\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)udx \tag{1.60}$$

En utilisant le fait que la variation en temps de l'énergie élastique est l'opposé de la puissance des forces élastiques, i.e. que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_e(\phi) = -\int_\Omega F_e(t,x)udx \tag{1.61}$$

On retrouve alors (1.58). Enfin, une expression équivalente est calculée dans [22] :

$$F_e = \mathrm{div}\left(E_e'(|\nabla\phi|)\left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) \tag{1.62}$$

Expression des variables continues

Soit la fonction encore notée H définie par :

$$\begin{cases} H(r) = \displaystyle\int_r^\infty \zeta(s)ds \text{ si } -1 \leq r \leq 1, \\ H(r) = 1 \text{ si } r < -1,\ H(r) = 0 \text{ si } r > 1 \end{cases} \tag{1.63}$$

C'est une régularisation de la fonction H définie précédemment par (1.43).
Ainsi toute variable α du milieu continu, de valeurs α_1 (resp. α_2) à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de $\Gamma(t)$, peut être régularisée en utilisant H :

$$\alpha_\varepsilon(\phi) = \alpha_2 + H\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{1.64}$$

En particulier, on note ρ_1 et ρ_2 les densités à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane. Avec (1.53) on peut écrire l'approximation suivante de la densité de masse apparaissant dans (1.25) :

$$\frac{1}{|\gamma_s|}\Lambda_e\delta_{\Gamma_e(t)} \simeq \frac{1}{|\nabla\phi|}\Lambda_e|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \simeq \Lambda_e\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

On définit alors une densité sur l'ensemble du milieu continu par :

$$\rho_\varepsilon(\phi) = \rho_2 + H\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(\rho_1 - \rho_2) + \Lambda_e\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{1.65}$$

Avec cette définition la densité $\rho_\varepsilon(\phi)$ vérifie bien l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho_\varepsilon(\phi)}{\partial t} + (u.\nabla)\rho_\varepsilon(\phi) = 0 \tag{1.66}$$

De même, avec μ_1 et μ_2 les viscosités à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane, on définit la viscosité du milieu continu par :

$$\mu_\varepsilon(\phi) = \mu_2 + H\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(\mu_1 - \mu_2) \tag{1.67}$$

Modèle continu : formulation level-set de la méthode de frontière immergée pour le couplage fluide-membrane élastique en 2D

En conclusion, on a la formulation suivante [21] :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon(\phi)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon(\phi)D(u)) = \\ \left[\nabla\left(E_e'(|\nabla\phi|)\right) - \nabla.\left(E_e'(|\nabla\phi|)\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right]|\nabla\phi|\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \phi_t + u\cdot\nabla\phi = 0 \end{cases}$$

Egalité d'énergie

En multipliant l'équation de conservation des moments par u, et en intégrant sur Ω et sur $[0,T]$, on obtient l'égalité d'énergie suivante [21] :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon(\phi)u^2(T,x)dx &+ \int_0^T\int_\Omega \mu_\varepsilon(\phi)D(u)^2dxdt + \int_\Omega E_e(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(T,x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon(\phi_0(x))u_0^2(x)dx + \int_\Omega E_e(|\nabla\phi_0|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi_0}{\varepsilon}\right)(x)dx\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{E}_c(T) + \mathcal{E}_e(T) + \int_0^T\int_\Omega \mu_\varepsilon(\phi)D(u)^2dxdt = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_e(0) \tag{1.68}$$

c'est-à-dire que modulo de la dissipation visqueuse, l'énergie totale du système, constituée des énergies cinétique $\mathcal{E}_c$ et élastique $\mathcal{E}_e$, est conservée. La régularisation de la force élastique utilisant la formulation level-set n'induit donc pas de dissipation d'énergie supplémentaire dans le système.
Cette égalité d'énergie est notamment utilisée dans [22] afin de montrer l'existence locale de solutions fortes en 3D du modèle couplé.

1.3 Résolution de Navier Stokes

Nous présentons enfin les méthodes numériques que nous utilisons pour la résolution des équations de Navier-Stokes, dans les différents problèmes de couplage étudiés. On suppose qu'il n'y a pas de force extérieure.

Méthode de projection

Lors de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, une difficulté majeure est la résolution de manière couplée de la vitesse et de la pression. En effet, la résolution simultanée de l'équation des moments et de la condition d'incompressibilité fait apparaitre une matrice non creuse et non symétrique. Afin de résoudre ce problème, nous utilisons une méthode à pas fractionnaire, dite méthode de projection de Chorin-Temam, qui, en séparant les effets visqueux et convectifs de l'incompressibilité, permet d'obtenir deux problèmes elliptiques indépendants. Nous rappelons ici le schéma numérique correspondant, utilisé dans les simulations présentées dans la suite.

Dans le premier pas du schéma la pression est complètement ignorée, et on calcule seulement les termes de convection C et diffusion D. Le deuxième pas, ou pas de projection, permet de projeter la vitesse sur l'espace des vitesses à divergence nulle. L'équation de conservation de la masse est enfin résolue afin de calculer la densité.

Etant donné ρ^n, u^n, p^n, f^n, l'algorithme est le suivant :

1-Calcul des termes de convection-diffusion On calcule le terme convectif C de manière explicite, en utilisant par exemple un schéma WENO comme pour la fonction level-set.
D'autre part, on traite le terme diffusif D implicitement, par différences finies centrées.

Enfin, en utilisant un schéma d'Euler en temps, on résout

$$\rho^n \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{dt} + \rho^n C^n - D^{n+1} = 0 \tag{1.69}$$

2-Résolution de la pression et projection de la vitesse Le deuxième pas, ou pas de projection, permet de projeter la vitesse sur l'espace des vitesses à divergence nulle.
On résout

$$\begin{cases} \rho^n \dfrac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{dt} + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \\ u^{n+1}.n_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.70}$$

avec la pression solution de l'équation elliptique suivante

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{1}{\rho^n}\nabla p^{n+1}\right) = \operatorname{div} \tilde{u}^{n+1} \\ \nabla p^{n+1}.n_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.71}$$

Lorsque ρ^n est constant, il s'agit d'une équation de Poisson, pour laquelle de nombreux solveurs par différences finies existent, sur grille centrée ou décalée. On cite notamment la librairie Fortran FISHPACK
(http ://www.cisl.ucar.edu/css/software/fishpack/).
Les tests numériques que nous présentons dans la suite se situent soit dans ce cas, soit dans le cas de faibles gradients de densité. On peut alors faire une approximation de type Boussinesq sur la densité pour la résolution de la pression et la projection. Par exemple, pour le couplage fluide-solide rigide on utilise $\overline{\rho} = \dfrac{\rho_s + \rho_f}{2}$ dans (1.70) et (1.71).

La condition aux bords sur u^{n+1} impose la condition $\nabla p^{n+1}.n_{|\partial\Omega} = 0$ sur la pression. Cette condition aux bords artificielle entraine une couche limite numérique qui empêche le schéma d'être complètement d'ordre 1 sur la vitesse en norme H^1 et sur la pression en norme L^2.
D'autre part l'erreur de partitionnement (splitting) est d'ordre $\mathcal{O}(dt)$, donc le schéma est lui aussi au mieux d'ordre $\mathcal{O}(dt)$, quelque soit le schéma en temps utilisé pour le premier pas.

Grille décalée

On utilise une grille décalée de type MAC (marker-and-cell) pour la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes par différences finies : la pression est définie aux noeuds (i, j), alors que les vitesses (horizontale et verticale si on se place en 2D) sont définies sur les faces des mailles en $(i + 1/2, j)$ et $(i, j + 1/2)$. De manière générale tous les champs scalaires (densité, viscosité, pression, fonction level-set lorsque l'on fait le couplage) sont définis aux nœuds.
L'utilisation d'une telle grille permet d'une part d'obtenir une précision d'ordre 2 pour le calcul de la pression, car les dérivées des vitesses sont directement obtenues aux nœuds de pression, et d'autre part d'imposer au niveau discret la contrainte d'incompressibilité de manière exacte aux points de calcul des vitesses lors de l'étape de projection (1.70).

1.4 Conclusion

Après une revue des méthodes numériques pour le couplage fluide - structure, nous avons présenté dans ce chapitre les modèles mathématiques décrivant un fluide visqueux incompressible, une membrane élastique, et un solide rigide, d'abord de manière indépendante, et dans des formulations classiques. Puis nous nous sommes concentrés sur la description d'un modèle complètement eulérien pour le couplage fluide -membrane élastique, utilisant la méthode de Frontière Immergée avec une localisation de la membrane par la méthode Level-Set.
Le chapitre suivant est consacré à une étude numérique de ce modèle, notamment en ce qui concerne sa stabilité numérique.

Chapitre 2

Stabilité numérique du couplage eulérien fluide-membrane élastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la stabilité numérique du modèle eulérien de Frontière Immergée introduit dans le chapitre précédent pour le couplage fluide-membrane élastique en 2D.
En effet, de manière générale dans la méthode de Frontière Immergée, il est reconnu que l'application de la force portée par la structure induit une forte restriction sur le pas de temps, dès lors que cette force est traitée explicitement. Cet aspect de la méthode est d'ailleurs évoqué par Peskin dans [63] comme l'un des axes de reherche à privilégier pour la méthode de Frontière Immergée.

Afin de lever la restriction sur le pas de temps, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de méthodes implicites en temps ([80], [54], [73], [74], [56]). Cependant en pratique les algorithmes proposés sont très coûteux car le calcul de chaque pas de temps correspond à la résolution d'un problème non linéaire couplé par une méthode itérative, dont la convergence peut être de plus difficile à obtenir, notamment lorsque la densité de la structure est proche de celle du fluide. On perd alors le bénéfice de l'utilisation de grands pas de temps.
La définition de couplage semi-implicite ou approximativement implicite permet d'obtenir des schémas plus réalistes du point de vue de leur mise en oeuvre et de leur efficacité. Dans [80], [73], [74] et [8] un schéma traitant implicitement la convection-diffusion mais explicitement la force élastique est étudié. Un schéma approximativement implicite est également proposé dans [80] en considérant une approximation de la position de la structure en fin de pas de temps pour le calcul de la force. Le schéma proposé dans [27] permet enfin de garantir la stabilité pour un large choix de paramètres, en traitant seulement les effets de masse ajoutée de manière implicite, ce qui permet de conserver une certaine

efficacité. Les effets de masse ajoutée caractérisant l'action du fluide sur la structure deviennent importants dès lors que la densité du fluide et de la structure sont proches. Une condition de stabilité mettant en jeu le rapport des densités et ne dépendant pas du pas de temps est calculée dans [14]. Cette condition indique que quelque soit le pas de temps ou le schéma de couplage en temps utilisés, les calculs peuvent demeurer instables si l'effet de masse ajoutée est trop important.

L'étude de la stabilité des schémas de couplage peut être abordée de plusieurs manières. En effet, outre l'approche numérique consistant à observer la stabilité éventuelle des calculs lorsqu'on augmente le pas de temps et/ou la raideur de la structure, donc la force élastique, il est possible d'anticiper ce genre de comportement en étudiant l'énergie discrète du système fluide-structure. Physiquement l'énergie totale du système doit être conservée, donc la vérification de cette propriété au niveau discret doit permettre d'assurer la stabilité. Dans [8] il est montré pour une formulation en éléments finis que les schémas semi-implicite et implicite de [80] sont en ce sens respectivement conditionnellement et inconditionnellement stables. C'est également l'approche employée dans [56] dans une formulation semi-discrète en temps pour l'étude de divers schémas implicites. L'étude menée dans ([73], [74]) suit une approche différente. Une analyse linéaire permet d'isoler les modes d'oscillation d'une fibre élastique soumis à une petite perturbation afin de tirer des conclusions sur une méthodologie de couplage à adopter pour obtenir la stabilité. Il est notamment montré que la combinaison faible viscosité du fluide/grande force élastique est source d'instabilité. Cela explique que numériquement pour certaines applications comme la simulation de l'écoulement sanguin dans les artères, la viscosité du fluide est parfois choisie bien plus grande que sa valeur physique, afin de conserver des pas de temps raisonnables.

Nous présentons tout d'abord le test de relaxation d'une membrane élastique immergée dans un fluide incompressible sur lequel nous effectuons les validations numériques dans la suite, et nous donnons quelques précisions sur le lien entre la discrétisation spatiale de la force élastique et certaines instabilités numériques, afin de limiter dans la suite notre étude aux instabilités liées au couplage en temps.
Grâce à une analyse de stabilité d'un modèle 1D linéarisé, nous calculons ensuite des conditions de stabilité sur le pas de temps, pour des schémas traitant le couplage entre le fluide et la membrane de manière explicite, semi-implicite ou implicite. Ces conditions liant les effets visqueux et élastiques sont comparées avec des conditions de la littérature, et on valide ensuite numériquement la condition obtenue avec l'analyse 1D pour le schéma semi-implicite, sur le test de relaxation en 2D.
La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude d'un schéma de couplage en temps conservant l'énergie discrète du système.

2.2 Modèle

Soit T>0. Nous considérons une membrane élastique sans masse $\Gamma_e(t)$, $t \in [0,T]$, immergée dans un fluide visqueux incompressible homogène contenu dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Soit u le champ de vitesse fluide. On considère la fonction level-set ϕ initialisée comme la distance signée à $\Gamma_e(0)$ et telle que :

$$\Gamma_e(t) = \{x \in \Omega, \phi(t,x) = 0\},\ \forall t \in [0,T]$$

2.2.1 Modèle eulérien de couplage fluide-membrane élastique

On rappelle le modèle eulérien de couplage défini au chapitre précédent :

$$\begin{cases} \rho\,(u_t + u.\nabla u) + \nabla p - \mu\Delta u = F_e \\ F_e = \left[\left(\nabla(E_e'(|\nabla\phi|)) \cdot \dfrac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|}\right) \cdot \dfrac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|} - E_e'(|\nabla\phi|)\kappa(\phi)\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right]\dfrac{|\nabla\phi|}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \phi_t + u\cdot\nabla\phi = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

avec la loi de comportement

$$E_e'(r) = \nu_e(r-1) \tag{2.2}$$

où ν_e est le coefficient de raideur de $\Gamma_e(t)$.

Rappelons également que la force élastique peut s'écrire de manière équivalente sous la forme

$$F_e = \operatorname{div}\left(E_e'(|\nabla\phi|)\left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) \tag{2.3}$$

2.2.2 Relaxation d'une membrane élastique

Dans la suite nous validons numériquement la stabilité du schéma de couplage sur un problème couramment utilisé dans la littérature ([48], [8], [56], [37]), dans lequel une membrane élastique étirée de forme initiale elliptique relaxe vers sa forme d'équilibre, un cercle.
La membrane est immergée dans un fluide visqueux incompressible homogène, initialement au repos, donc le volume qu'elle délimite reste constant. Les oscillations autour de la forme d'équilibre sont plus ou moins nombreuses en fonction de la viscosité du fluide et de la raideur de la membrane.
Nous choisissons une ellipse initiale d'axe horizontal $a = 0.75$ et vertical $b = 0.5$. L'étirement initial constant appliqué est $e = 1.2526$. Dans ces conditions, la forme d'équilibre est un cercle de rayon $R = \sqrt{0.5\times 075} = \sqrt{0.375} \simeq 0.6125$, ce qui correspond à un cercle

de rayon 0.5 (état au repos) étiré avec $e = 1.2526$. Les différents états de la membrane sont présentés sur la figure 2.1.

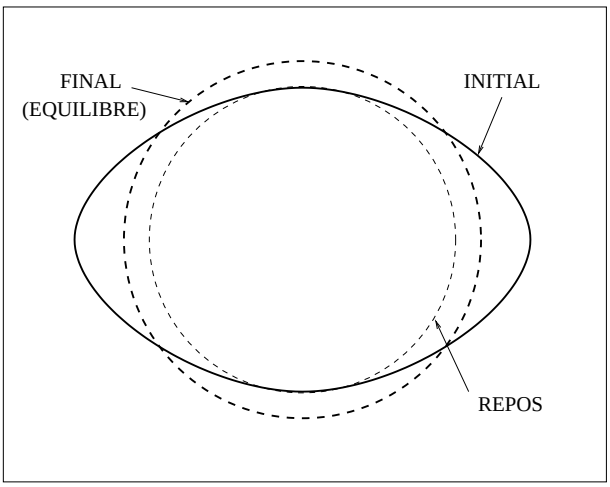


FIG. 2.1 – Formes de la membrane élastique à l'état initial, final, et au repos

Afin de préciser la dynamique du système on montre l'évolution des axes de l'ellipse, et le profil de pression pour quelques valeurs de la raideur de la membrane et de la viscosité du fluide.

Sur les figures (2.2-2.5) on présente les résultats obtenus avec $\nu_e = 1$ et $\mu = 0.01$. Les oscillations des rayons sont amorties jusqu'à atteindre un état stationnaire correspondant au cercle.
La force élastique imposée par la membrane est plus forte aux endroits où la courbure est importante, ce qui induit une pression plus forte à ces endroits-là. Les profils de pression de 2.3-2.4 montrent ces surpressions lorsque la membrane a la forme d'une ellipse, à $t = 0.2$ et $t = 2.2$. Le dernier profil, sur la figure 2.5, correspond à l'état d'équilibre à $t = 30$, avec une pression constante à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

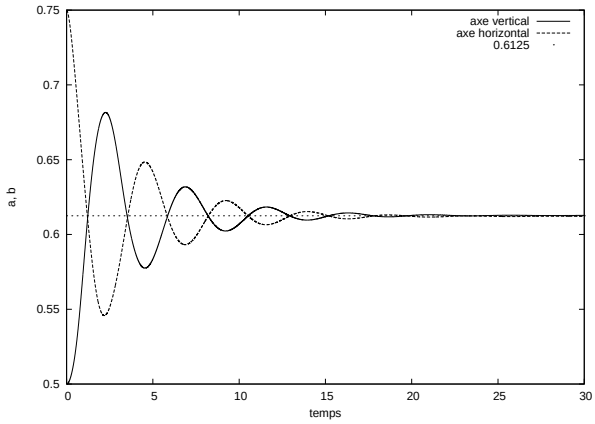


FIG. 2.2 – Evolution des axes de l'ellipse

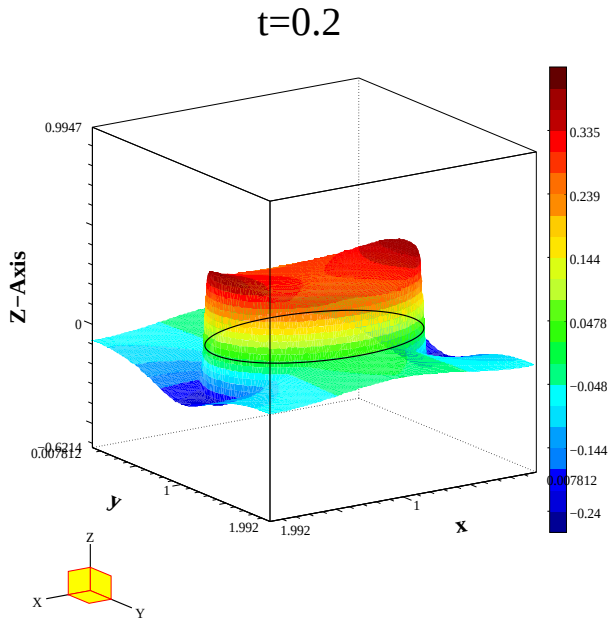


FIG. 2.3 – Profils de pression à $t = 0.2$

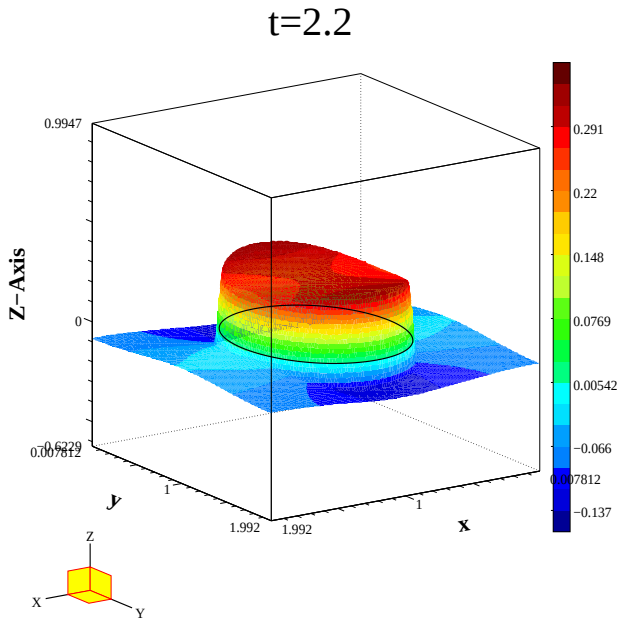


FIG. 2.4 – Profils de pression à $t = 2.2$

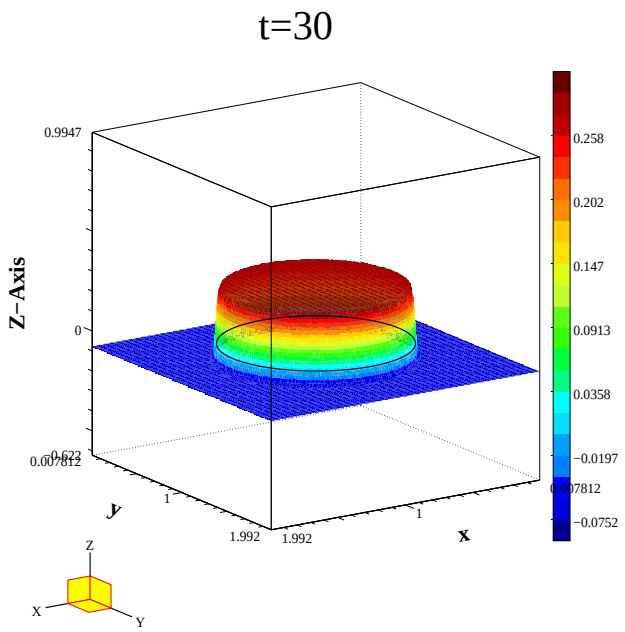


FIG. 2.5 – Profils de pression à $t = 30$

D'autre part en faisant varier la raideur ν_e de la membrane, on change la dynamique de la relaxation. En effet, le nombre d'oscillations avant d'atteindre l'état stationnaire est d'autant plus grand que la membrane est raide. Les oscillations des axes obtenues pour $\nu_e = 0.1$ et $\nu_e = 10$ avec $\mu = 0.01$ sont présentées sur la figure 2.6.

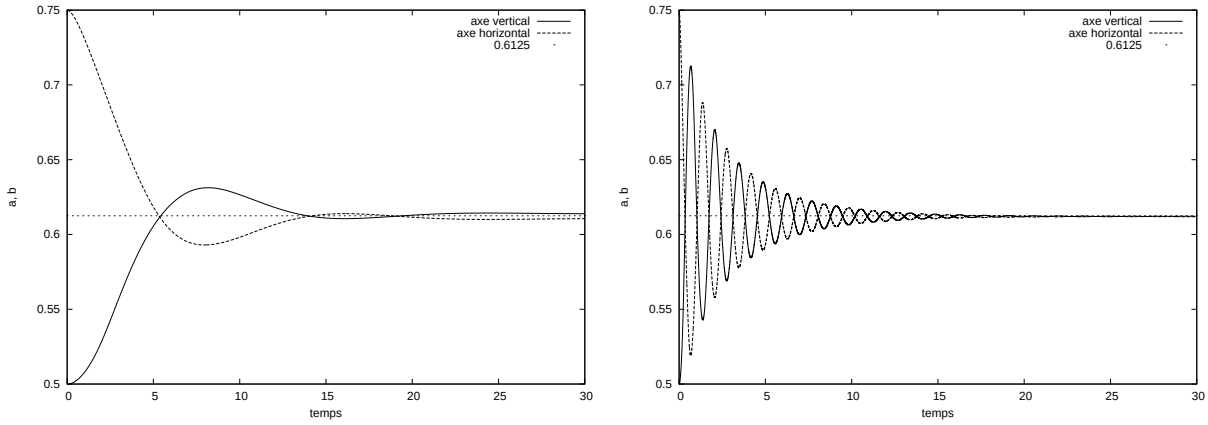


FIG. 2.6 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 0.1$ (gauche) et $\nu_e = 10$ (droite), avec $\mu = 0.01$

Enfin plus la viscosité du fluide est grande plus les oscillations sont amorties. On présente les résultats obtenus pour $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.001$ avec $\nu_e = 1$ sur la figure 2.7.

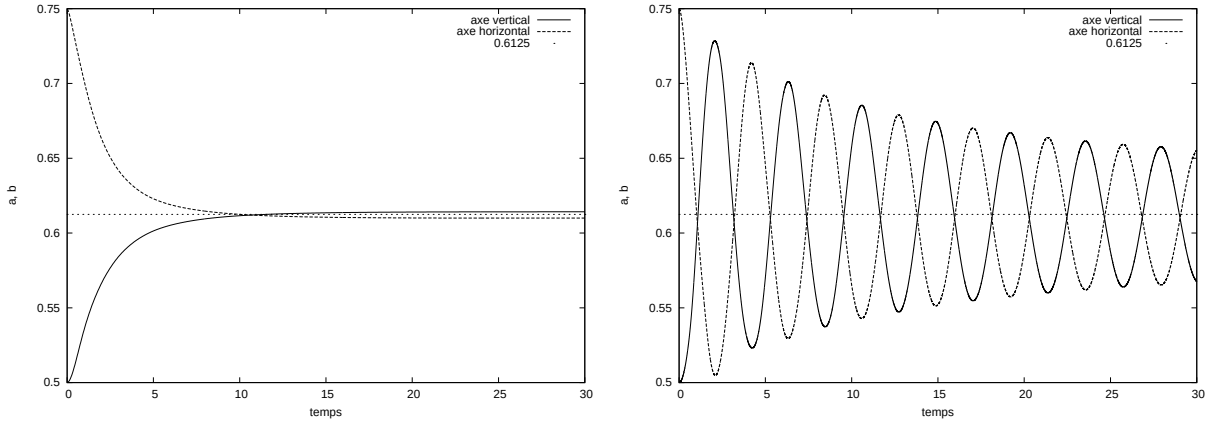


FIG. 2.7 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\mu = 0.1$ (gauche) et $\mu = 0.001$ (droite), avec $\nu_e = 1$

2.2.3 Calcul numérique de la force élastique

Avant de nous consacrer à l'étude de stabilité du couplage en temps, quelques remarques doivent être faites en ce qui concerne la discrétisation spatiale de la force élastique.
En effet une attention particulière doit être apportée à la discrétisation des termes comportant des dérivées d'ordre élevé de ϕ.

C'est notamment le cas de la courbure définie par

$$\kappa(\phi) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) \tag{2.4}$$

On a observé qu'une discrétisation de cette expression non développée cause des instabilités numériques au niveau de l'interface, et en pratique on discrétise donc plutôt l'expression

$$\kappa(\phi) = \frac{\phi_{xx}(\phi_y)^2 + \phi_{yy}(\phi_x)^2 - 2\phi_{xx}\phi_x\phi_y}{|\nabla\phi|^3} \tag{2.5}$$

D'autre part, pour la composante tangentielle de la force le développement

$$\nabla(E_e'(|\nabla\phi|)) = E_e''(|\nabla\phi|)\frac{\nabla^2\phi\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{2.6}$$

avant discrétisation permet d'obtenir de meilleurs résultats.

Remarquons enfin que l'on peut aussi gagner en régularité en transportant l'étirement de la membrane. En effet le modèle 2.1 écrit au niveau continu utilise la propriété $e = |\nabla\phi|$, or au niveau discret son approximation peut entraîner aussi des instabilités numériques.

Si l'on souhaite calculer explicitement l'étirement de la membrane, alors il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} e_t + u \cdot \nabla e = e\dfrac{[Du]\nabla\times\phi\cdot\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|^2} \\ e = e_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Et on remplace l'expression de la force élastique en fonction de ϕ :

$$F_e = \left[\left(\nabla(E_e'(|\nabla\phi|)) \cdot \frac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|}\right) \cdot \frac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|} - E_e'(|\nabla\phi|)\kappa(\phi)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right]\frac{|\nabla\phi|}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{2.8}$$

par l'expression suivante en e et ϕ :

$$F_e = \left[\left(\nabla(E_e'(e)) \cdot \frac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|}\right) \cdot \frac{\nabla\times\phi}{|\nabla\phi|} - E_e'(e)\kappa(\phi)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right]\frac{e}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{2.9}$$

La figure 2.8 montre un exemple d'évolution des axes de l'ellipse sans développement du terme $\nabla(E_e'(|\nabla\phi|))$ ni transport de l'étirement, en comparaison avec le résulat obtenu si l'on applique l'un de ces deux traitements.

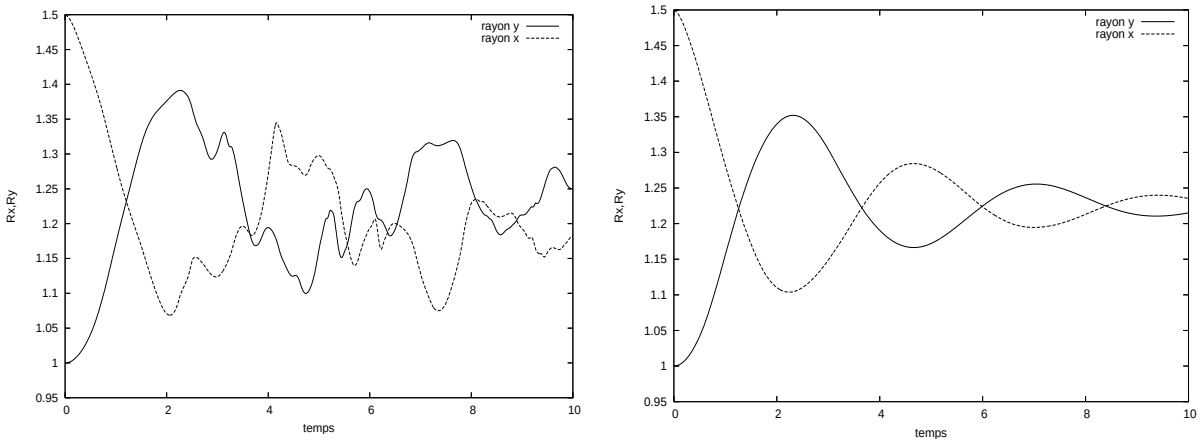


FIG. 2.8 – Evolution des axes de l'ellipse - A gauche, sans développement de $\nabla(E_e'(|\nabla\phi|))$ et avec $e = |\nabla\phi|$. A droite, avec développement de $\nabla(E_e'(|\nabla\phi|))$ ou avec transport de e

Les remarques précédentes permettent d'envisager les difficultés numériques induites par l'utilisation de la forme conservative de la force définie par (2.3). En effet cette expression est fortement incompatible avec les méthodes citées ci-dessus afin d'améliorer la stabilité, et par ailleurs la dérivation de la fonction ζ qui est une masse de Dirac régularisée ajoute une difficulté.

En conclusion, une attention particulière doit être apportée à la discrétisation de la force élastique, afin d'éviter certaines instabilités numériques. Ces instabilités ne doivent pas en l'occurence être confondues avec l'instabilité des calculs que nous étudions dans la suite, liée au choix du pas de temps et du schéma de couplage en temps.

2.3 Calcul d'une condition de stabilité

De la même manière que pour les termes inertiels, le traitement explicite de la force élastique induit une condition sur le pas de temps si l'on veut assurer la stabilité des calculs. Cette condition peut d'ailleurs être bien plus restrictive que celle relative aux termes inertiels, dès lors que la raideur des structures considérées devient importante.
Le but de cette partie est donc de calculer une condition sur Δt, du même type que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) pour la convection, et faisant intervenir la raideur ν_e de la membrane.
On présente d'abord des conditions de stabilité disponibles dans la littérature pour des problèmes de couplage relativement proches de celui que l'on étudie, à savoir des problèmes multi-fluide avec prise en compte de la tension de surface à l'interface entre les deux fluides. Puis, sur une version $1D$ linéarisée de notre modèle, on étudie l'existence d'une condition de stabilité pour différents schémas traitant le couplage (u, ϕ) de manière explicite, semi-

implicite, ou implicite.
Enfin, on présente les tests numériques illustrant sur le problème $2D$ les résultats de l'analyse $1D$.

2.3.1 Conditions de stabilité existantes

En ce qui concerne les problèmes de couplage multi-fluides avec prise en compte de la tension de surface, nous présentons deux conditions de stabilité disponibles dans la littérature.
Ces problèmes sont caractérisés par la présence d'une force localisée au niveau de l'interface entre les deux fluides, définie par

$$F = -\nu_e \kappa n$$

avec ν_e le coefficient de tension de surface, κ et n la courbure et la normale à l'interface. Cela correspond donc à choisir en particulier $E'(r) = \nu_e$ dans (2.1).

La première condition est celle calculée par Brackbill, Kothe et Zemach [10] par une méthode heuristique. Cette condition est en effet obtenue en imposant au pas de temps de permettre la résolution des ondes capillaires se propageant sur l'interface :

$$\frac{c\Delta t_B}{\Delta x} < \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

avec c la vitesse de phase d'une onde capillaire, et le facteur $\frac{1}{2}$ permettant de traiter le cas de deux ondes de directions opposées entrant dans la même maille de largeur Δx.
En notant k le nombre d'onde, la vitesse de phase c peut être estimée de la manière suivante :

$$c = \left(\frac{\nu_e k}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

avec ρ_1 et ρ_2 les densités respectives des deux fluides.

Comme la vitesse de phase maximale $c_{\max}$ est obtenue pour le nombre d'onde $k_{\max} = \frac{\pi}{\Delta x}$ correspondant à la longeur d'onde minimale $2\Delta x$ que l'on puisse détecter avec des mailles de taille Δx, en injectant (2.11) dans (2.10), on obtient

$$\Delta t_B < \left(\frac{\hat{\rho}(\Delta x)^3}{2\pi\nu_e}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

où $\hat{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

Cette condition de stabilité couramment utilisée met donc en relation les effets d'inertie et la tension de surface. L'exposant $\frac{3}{2}$ sur Δx en fait en pratique une condition assez restrictive, notamment par rapport à la condition CFL classique sur les termes inertiels.

La seconde condition, proposée par Vigneaux [81], concerne quant à elle le rapport des effects visqueux avec la tension de surface :

$$\Delta t_V \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \text{ avec } \Delta t_1 = c_1 \frac{\Delta x}{\|u\|_{L^\infty}} \text{ et } \Delta t_2 = c_2 \frac{\mu \Delta x}{\nu_e} \tag{2.13}$$

La condition sur Δt_1 est la condition CFL classique pour le terme d'inertie, avec c_1 dépendant du schéma de discrétisation spatiale utilisé.
La condition sur Δt_2 est obtenue par une étude mathématique du problème continu, en supposant que le schéma numérique l'approche de manière consistante.
Des estimations sur la perturbation de vitesse induite par une perturbation de l'interface permettent de déterminer un pas de temps Δt_2 tel que le déplacement de l'interface en un pas de temps soit suffisamment petit par rapport à la perturbation, évitant ainsi les oscillations de l'interface. La constante c_2 est ensuite déterminée numériquement.

Pour l'étude qui suit, nous nous plaçons dans le contexte de la seconde condition, avec une étude du rapport entre effets visqueux et élastiques, en négligeant les effets inertiels.

2.3.2 Etude de stabilité de Von Neumann sur un modèle 1D linéarisé

On réalise une étude de stabilité de Von Neumann sur une linéarisation du modèle de couplage en 1D. Pour simplifier, on réduit la force élastique à une tension de surface, ce qui revient à choisir $E'(r) = \nu_e$ dans le modèle (2.1).

Définition du modèle $1D$ linéarisé

On considère le modèle de couplage 2D suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = -\nu_e \kappa(\phi) \nabla \phi \dfrac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u.\nabla \phi = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

obtenu en prenant $E'(r) = \nu_e$ dans (2.1), et on introduit pour l'étude de stabilité le modèle 1D suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\nu_e \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) \text{ sur } [0,T]\times\mathbb{R} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ sur } [0,T]\times\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.15}$$

On souhaite étudier la stabilité autour de la solution stationnaire $(\overline{u}, \overline{\phi})$ définie par :

$$\begin{cases} \overline{u}(x) = 0 \\ \overline{\phi}(x) = x \end{cases} \tag{2.16}$$

On considère donc une solution $(u, \phi) = (\overline{u} + \widetilde{u}, \overline{\phi} + \widetilde{\phi})$ de (2.15), où $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi})$ est une petite perturbation. On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{u}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} - \mu\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = -\nu_e \dfrac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\left(1 + \dfrac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x}\right)\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\overline{\phi} + \widetilde{\phi}}{\varepsilon}\right) \\ \dfrac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} + \widetilde{u}\dfrac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} + \tilde{u} = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Donc, en ne gardant que les termes linéaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = -\nu_e \dfrac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\overline{\phi}}{\varepsilon}\right) \\ \dfrac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} + \widetilde{u} = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

En effet,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\left(1 + \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x}\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\overline{\phi} + \widetilde{\phi}}{\varepsilon}\right) \simeq \frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\overline{\phi} + \widetilde{\phi}}{\varepsilon}\right) \simeq \frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\frac{1}{\varepsilon}\left[\zeta\left(\frac{\overline{\phi}}{\varepsilon}\right) + \frac{\widetilde{\phi}}{\varepsilon}\zeta'\left(\frac{\overline{\phi}}{\varepsilon}\right)\right] \simeq \frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\overline{\phi}}{\varepsilon}\right)$$

Pour simplifier les calculs qui suivent on choisit l'expression suivante pour ζ :

$$\begin{cases} \zeta(r) = 1 \text{ si } |r| \leq \dfrac{1}{2}, \\ \zeta(r) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2.19}$$

Remarquons que pour $\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) = 0$, i.e. loin de l'interface fluide-membrane, le système (2.18) est non couplé. On choisit donc de se restreindre pour l'étude qui suit au cas $\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right) = 1$, ce qui revient à se placer dans le voisinage de l'interface, même s'il n'est pas

évident que la présence de la membrane n'influence pas la stabilité des calculs dans tout le domaine, et inversement que les calculs dans le reste du domaine n'aient pas d'effet stabilisant sur les calculs à l'interface.

On étudie donc la stabilité sur le modèle 1D linéarisé suivant (auquel on a ajouté des conditions initiales) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\nu_e}{\varepsilon} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u = 0 \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\ \phi(0,x) = g(x) \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.20}$$

avec $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ et $\nu_e > 0$. (Le cas $\nu_e = 0$ est exclu afin de conserver le système (2.20) couplé.)
Ce modèle trés simplifié n'est pas supposé décrire de manière générale le couplage fluide-membrane élastique, puisqu'il n'inclut pas les non-linéarités de la force élastique par exemple, ou encore les effets inertiels. Cependant il permet d'exhiber la relation entre les effets visqueux et la tension de surface, pour certains régimes d'écoulement.

Stabilité et analyse de Fourier

On note $u_j^n = u(t_n, x_j)$ et $\phi_j^n = \phi(t_n, x_j)$, $j = 0, ..., M+1$, et on étudie la stabilité numérique de plusieurs schémas de couplage en temps pour le modèle $1D$, c'est-à-dire que l'on souhaite détecter les oscillations non bornées de la solution numérique (u_j^n, ϕ_j^n) lorsque les paramètres physiques (μ, ν_e) et numériques (Δx, Δt) varient.

Commençons par rappeler le principe de l'analyse de Fourier pour l'étude de stabilité d'un modèle.

On considère la solution numérique $(V_j^n)_{j=1,M}$ définie par

$$V_j^n = \begin{pmatrix} u_j^n \\ \phi_j^n \end{pmatrix}$$

En définissant la norme suivante :

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2M} \Delta x |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

étudier la stabilité d'un schéma de couplage par rapport à cette norme revient à déterminer l'existence d'une constante $K > 0$ indépendante de Δx et Δt telle que

$$\|V^n\|_2 \leq K \|V^0\|_2$$

pour tout $n \geq 0$, quelle que soit la donnée initiale V^0 et les paramètres physiques du modèle.

D'autre part pour chacun des schémas étudiés, on peut calculer une matrice d'itération A telle que

$$V^{n+1} = AV^n$$

ou encore

$$V^n = A^n V^0$$

Par conséquent, la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|A^n\|_2 = \sup_{V \in \mathbb{R}^{2M}, V \neq 0} \frac{\|A^n V\|_2}{\|V\|_2} \leq K, \ \forall n \geq 0$$

On décompose les solutions u_j^n et ϕ_j^n en sommes de modes de Fourier :

$$u_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi^n(k) e^{2i\pi kj\Delta x}$$
$$\phi_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi^n(k) e^{2i\pi kj\Delta x}$$

En injectant dans le schéma un mode de Fourier pour chacune des variables, on peut alors déterminer une matrice d'amplification $A(k)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \xi^n(k) \\ \chi^n(k) \end{pmatrix} = (A(k))^n \begin{pmatrix} \xi^0(k) \\ \chi^0(k) \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire pour la stabilité du schéma (i.e. $\|A^n\|_2 \leq K$), appelée condition de Von Neumann, est alors

$$\rho(A(k)) \leq 1$$

où $\rho(A(k))$ est le rayon spectral de $A(k)$.

Si en particulier $A(k)$ est une matrice normale ($AA^* = A^*A$ avec A^* adjointe de A), alors $\|A(k)\|_2 = \rho(A(k))$, et la condition précédente est également suffisante. Dans le cas général on a seulement $\|A(k)\|_2 \geq \rho(A(k))$ et il faut alors envisager la diagonalisation de $A(k)$ si l'on souhaite obtenir une condition suffisante.

Dans la suite on utilise l'analyse de Fourier afin d'obtenir des conditions nécessaires de stabilité sur différents schémas. L'étude est menée sur un modèle très simplifié, et les conclusions que l'on en tire sont plutôt qualitatives. On se contente donc de conditions nécessaires de stabilité.

Etude de stabilité

On rappelle le modèle étudié :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\nu_e}{\varepsilon} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u = 0 \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\ \phi(0,x) = g(x) \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.21}$$

On choisit ici de se restreindre à un traitement implicite de la diffusion. On définit trois schémas de couplage en temps :

- Schéma 1 : Couplage (u, ϕ) explicite :

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \mu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = -\dfrac{\nu_e}{\varepsilon} \dfrac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ \dfrac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_j^n = 0 \\ u_j^0 = f_j,\ \phi_j^0 = g_j \end{cases} \tag{2.22}$$

- Schéma 2 : Couplage (u, ϕ) semi-implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \mu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = -\dfrac{\nu_e}{\varepsilon} \dfrac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ \dfrac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_j^{n+1} = 0 \\ u_j^0 = f_j,\ \phi_j^0 = g_j \end{cases} \tag{2.23}$$

- Schéma 3 : Couplage (u, ϕ) implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \mu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = -\dfrac{\nu_e}{\varepsilon} \dfrac{\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ \dfrac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u_j^{n+1} = 0 \\ u_j^0 = f_j,\ \phi_j^0 = g_j \end{cases} \tag{2.24}$$

En pratique le schéma 1 dans lequel le couplage (u, ϕ) est explicite n'est pas utilisé, car après résolution de l'équation sur u on dispose naturellement de u^{n+1} pour transporter

ϕ^n. Donc on peut utiliser facilement le schéma 2. Cependant ce schéma est étudié pour établir une comparaison avec la condition (2.13).

On détaille dans la suite les calculs permettant d'obtenir les conditions de stabilité présentées dans le tableau 2.1.

Schéma	Couplage (u, ϕ)	Condition de stabilité
1	Explicite	$\Delta t_A \leq \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}$
2	Semi-Implicite	$\Delta t_A < \dfrac{(\mu\varepsilon + \max(\mu\varepsilon, \sqrt{\nu_e\varepsilon}\Delta x))}{\nu_e}$
3	Implicite	inconditionnellement stable

TAB. 2.1 – Conditions de Von Neumann pour les schémas explicite/semi-implicite/implicite, calculées sur le modèle 1D linéarisé

Schéma 1 : Couplage (u, ϕ) explicite Soit $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant u_j^n par $\xi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ et ϕ_j^n par $\chi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ dans (2.22), et en omettant la dépendance en k de χ^n et ξ^n pour des raisons de lisibilité, on obtient

$$\begin{cases} \left(1 + \dfrac{4\mu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)\right)\xi^{n+1} = \xi^n + \dfrac{4\nu_e\Delta t}{\varepsilon(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)\,\chi^n \\ \chi^{n+1} = \chi^n - \Delta t\xi^n \end{cases} \tag{2.25}$$

En notant $\beta(k) = \dfrac{4\nu_e\Delta t}{\varepsilon(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)$ et $\delta(k) = 1 + \dfrac{4\mu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)$, on a

$$\begin{cases} \delta(k)\xi^{n+1} = \xi^n + \beta(k)\chi^n \\ \chi^{n+1} = \chi^n - \Delta t\xi^n \end{cases} \tag{2.26}$$

i.e. sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \xi^{n+1} \\ \chi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta(k)} & \dfrac{\beta(k)}{\delta(k)} \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix} = A(k) \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $m^{\pm}$ de $A(k)$ sont les solutions de l'équation

$$\frac{\delta(k)}{1 + \Delta t\beta(k)}m^2 - \frac{\delta(k) + 1}{1 + \Delta t\beta(k)}m + 1 = 0$$

Or $\delta(k) = 1 + \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)$ donc on peut résoudre de manière équivalente l'équation

$$\frac{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{1+\Delta t\beta(k)}m^2 - \frac{2+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{1+\Delta t\beta(k)}m + 1 = 0$$

dont le discriminant est donné par :

$$\Delta(k) \quad = \quad \frac{\beta(k)}{(1+\Delta t\beta(k))^2}\left[\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - 4\Delta t\right)\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) - 4\Delta t\right]$$

Remarquons que pour $k = 0$, $\beta(k) = 0$ et on résout alors l'équation $m^2 - 2m + 1 = 0$ dont la racine double est 1. On suppose donc dans la suite que $k \neq 0$, i.e. $\beta(k) > 0$ car $\nu_e > 0$.

En utilisant le fait que $\dfrac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}$ représente le carré des modules des racines complexes lorsque $\Delta(k) < 0$, on distingue trois cas :

- Pour $\Delta t > \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}$ (i.e. $\dfrac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} > 1$), alors nécessairement $\Delta(k) < 0$ et l'on obtient deux valeurs propres complexes, conjuguées l'une de l'autre, et de module $\sqrt{\dfrac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}} > 1$. La condition de Von Neumann n'est donc pas respectée.
- Pour $\Delta t < \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}$ (i.e. $\dfrac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} < 1$),
  - Si $\Delta(k) < 0$, on obtient deux valeurs propres complexes, conjuguées l'une de l'autre, et de module $\sqrt{\dfrac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}} < 1$.
  - Si $\Delta(k) > 0$, on obtient deux valeurs propres réelles distinctes, données par

$$m^{\pm} \quad = \quad \frac{2+\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) \pm \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - 4\Delta t\right)\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) - 4\Delta t}}{2+2\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}$$

Donc

$$\frac{2+\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) - \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2\beta(k)}}{2+2\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} \leq m^{\pm} \leq \frac{2+\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) + \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2\beta(k)}}{2+2\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}$$

i.e.

$$0 < \frac{2}{2+2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} \leq m^{\pm} \leq \frac{2+2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{2+2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} = 1$$

Donc $|m^{\pm}| \leq 1$.

– Enfin si $\Delta(k) = 0$ on obtient la racine double

$$m = \frac{2+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{2+2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}$$

Donc $|m| < 1$.

Dans le cas $\Delta t < \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}$ la condition de Neumann est donc toujours respectée.

– Enfin pour $\Delta t = \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}$ (i.e. $\frac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} = 1$), alors

$$\Delta = \frac{\beta(k)}{(1+\Delta t\beta(k))^2}\left[-3\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2\beta(k) - 4\Delta t\right] < 0,$$

et on obtient deux valeurs propres complexes de module $\sqrt{\frac{1+\Delta t\beta(k)}{1+\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}} = 1$. D'où la condition de Neumann est respectée.

En conclusion, une condition nécessaire pour la stabilité du schéma 1 est

$$\boxed{\Delta t_A \leq \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}} \tag{2.27}$$

Remarquons que dans le cas où $\mu = 0$, ce schéma est donc inconditionnellement instable.

Schéma 2 : Couplage (u, ϕ) semi-implicite Soit $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant u_j^n par $\xi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ et ϕ_j^n par $\chi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ dans (2.23), et en omettant la dépendance en k de χ^n et ξ^n pour des raisons de lisibilité, on obtient

$$\begin{cases} \delta(k)\xi^{n+1} = \xi^n + \beta(k)\chi^n \\ \chi^{n+1} = \chi^n - \Delta t\xi^{n+1} \end{cases} \tag{2.28}$$

i.e.

$$\begin{cases} \xi^{n+1} = \dfrac{1}{\delta(k)}\xi^n + \dfrac{\beta(k)}{\delta(k)}\chi^n \\ \chi^{n+1} = \left(1 - \dfrac{\Delta t\beta(k)}{\delta(k)}\right)\chi^n - \dfrac{\Delta t}{\delta(k)}\xi^n \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \xi^{n+1} \\ \chi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta(k)} & \dfrac{\beta(k)}{\delta(k)} \\ -\dfrac{\Delta t}{\delta(k)} & \dfrac{\delta(k) - \Delta t\beta(k)}{\delta(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix} = B(k) \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $m^{\pm}$ de $B(k)$ sont les solutions de l'équation

$$\delta(k)m^2 - (\delta(k) + 1 - \Delta t\beta(k))\, m + 1 = 0$$

Or $\delta(k) = 1 + \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)$ donc on peut résoudre de manière équivalente l'équation

$$\left(1 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)\right) m^2 - \left(2 + \left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k)\right) m + 1 = 0$$

dont le discriminant est donné par :

$$\Delta(k) = \beta(k)\left(\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)^2 \beta(k) - 4\Delta t\right) = 4\Delta t\beta(k)\left(\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)^2 \frac{\nu_e}{\varepsilon(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x) - 1\right)$$

On exclut le cas $k = 0$ pour lequel l'équation a une racine double 1, et on remarque que

$$\frac{1}{1 + \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} < 1$$

Posons $w = \left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)^2 \dfrac{\nu_e}{\varepsilon(\Delta x)^2}$. On distingue plusieurs cas :

- Si $w \leq 1$, i.e. $\Delta t \in \left[\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}; \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \dfrac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}\right]$, alors $\Delta(k) \leq 0$.

  Lorsque $\Delta(k) < 0$ on obtient donc deux valeurs propres complexes, conjuguées l'une de l'autre, et de module $\sqrt{\dfrac{1}{1 + \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}} < 1$.

  Si $\Delta(k) = 0$ la racine double est

$$m = \frac{2 + \left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k)}{2 + 2\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}$$

Donc $0 \leq m \leq 1$.

D'où la condition de Neumann est respectée pour $\Delta t \in \left[\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}; \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}\right]$.

– Si $w > 1$ et $\Delta t < \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}$, alors il existe des valeurs de k pour lesquelles $\Delta(k) > 0$.

Pour k tel que $\Delta(k) \leq 0$ on obtient la stablitié par le même raisonnement que précédemment.

Si $\Delta(k) > 0$, les deux valeurs propres sont telles que leur produit et leur somme sont positifs, donc $m^{\pm} \geq 0 > -1$. Comme $m^- \leq m^+$, il suffit de montrer que $m^+ \leq 1$:

$$m^+ \leq \frac{1 + \left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k)}{1 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} \leq 1$$

Donc la condition de Neumann est respectée pour $w > 1$ et $\Delta t < \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}$.

– Si $w > 1$ et $\Delta t > \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}$, comme $m^- \leq m^+$ il suffit de montrer $m^+ \leq 1$ et $m^- \geq -1$.

On a facilement $m^+ \leq \frac{2}{2 + 2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)} \leq 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} m^- \geq -1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + \left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k) - \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)^2\beta(k) - 4\Delta t} \geq -2 - 2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) \\ &\Leftrightarrow \quad 4 + \left(\frac{3\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k) > \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)^2\beta(k) - 4\Delta t} \geq 0 \end{aligned}$$

En élevant au carré on obtient

$$m^- \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\left(\frac{2\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta^2(k) + \left(\frac{6\mu\varepsilon}{\nu_e} - \Delta t\right)\beta(k) + 4 \geq 0 \quad (2.29)$$

Rappelons que $\beta(k) \geq 0$ et étudions le trinôme en $\beta(k)$. Son discriminant est :

$$\Delta = \left(\frac{2\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)^2 > 0$$

Ses racines sont donc $\beta_1 = -\frac{\nu_e}{\mu\varepsilon}$ et $\beta_2 = \frac{4}{\Delta t - \frac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}}$.

Si $\Delta t < \frac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}$ alors les deux racines sont négatives, et comme le trinôme est positif

en dehors de ses racines, alors (2.29) est toujours vérifiée.
Si au contraire $\Delta t > \dfrac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}$ alors $\beta_1 < 0$ et $\beta_2 > 0$. Le trinôme est positif pour $\beta(k) < \beta_2$. Or on peut vérifier que cela est impossible.
Enfin pour $\Delta t = \dfrac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}$, (2.29) se réduit à $\dfrac{4\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) + 4 \geq 0$, ce qui est toujours vérifié.
On en conclut donc que (2.29) est vérifiée si et seulement si $\Delta t \leq \dfrac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}$.
Si $w > 1$ et $\Delta t > \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \dfrac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}}$, la condition de Neumann est donc respectée ssi $\Delta t \leq \dfrac{2\mu\varepsilon}{\nu_e}$.

Au total, on en conclut donc qu'une condition nécessaire pour que le schéma 2 soit stable est

$$\boxed{\Delta t_A < \frac{\mu\varepsilon + \max(\mu\varepsilon, \sqrt{\nu_e\varepsilon}\Delta x)}{\nu_e}} \tag{2.30}$$

Remarque : Dans le cas $\mu = 0$, on peut réécrire le système (2.23) sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \dfrac{\nu_e}{\varepsilon}\dfrac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \\ \phi_j^0 = g_j,\ \phi_j^1 = g_j - \Delta t f_j \end{cases} \tag{2.31}$$

qui constitue une discrétisation de l'équation d'onde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \dfrac{\nu_e}{\varepsilon}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } [0,T]\times\mathbb{R} \\ \phi(0,x) = g(x),\ \dfrac{\partial\phi(0,x)}{\partial t} = -f(x) \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.32}$$

avec un schéma explicite centré en temps et en espace.

Or la condition sur le pas de temps pour la stabilité du schéma (2.31) est (voir [2] par exemple) :

$$\Delta t < \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta x}{\sqrt{\nu_e}} \tag{2.33}$$

On vérifie qu'en prenant $\mu = 0$ dans la condition (2.30), on obtient (2.33).

Schéma 3 : Couplage (u, ϕ) implicite Soit $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant u_j^n par $\xi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ et ϕ_j^n par $\chi^n(k)e^{2i\pi kj\Delta x}$ dans (2.24), et en omettant la dépendance en k de χ^n et ξ^n pour des raisons de lisibilité, on obtient

$$\begin{cases} \delta(k)\xi^{n+1} = \xi^n + \beta(k)\chi^{n+1} \\ \chi^{n+1} = \chi^n - \Delta t\xi^{n+1} \end{cases} \tag{2.34}$$

i.e.

$$\begin{cases} \xi^n = \delta(k)\xi^{n+1} - \beta(k)\chi^{n+1} \\ \chi^n = \chi^{n+1} + \Delta t\xi^{n+1} \end{cases} \tag{2.35}$$

i.e. sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \xi^{n+1} \\ \chi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(k) & -\beta(k) \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta(k) + \beta(k)\Delta t} \begin{pmatrix} 1 & \beta(k) \\ -\Delta t & \delta(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix} = C(k) \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $m^{\pm}$ de $C(k)$ sont les solutions de l'équation

$$(\delta(k) + \Delta t\beta(k))m^2 - (\delta(k) + 1)\, m + 1 = 0$$

Or $\delta(k) = 1 + \dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)$ donc on peut résoudre de manière équivalente l'équation

$$\left(1 + \left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)\right) m^2 - \left(2 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)\right) m + 1 = 0$$

dont le discriminant est donné par :

$$\Delta(k) = \underbrace{\beta(k)}_{\geq 0}\left(\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2 \beta(k) - 4\Delta t\right)$$

On exclut le cas $k = 0$ pour lequel l'équation a une racine double 1, et on remarque que

$$\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)} < 1$$

Lorsque $\Delta(k) < 0$ on obtient donc deux valeurs propres complexes, conjuguées l'une de l'autre, et de module $\sqrt{\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)}} < 1$.

Dans le cas où $\Delta(k) > 0$, les deux valeurs propres réelles s'ecrivent

$$m^{\pm} = \frac{2 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) \pm \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2 \beta(k) - 4\Delta t}}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)}$$

Donc

$$\frac{2 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) - \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2 \beta(k)}}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)} \leq m^{\pm} \leq \frac{2 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k) + \sqrt{\beta(k)}\sqrt{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\right)^2 \beta(k)}}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)}$$

i.e.

$$0 \leq \frac{2}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)} \leq m^{\pm} \leq \frac{2 + 2\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)} \leq 1$$

Donc $|m^{\pm}| \leq 1$.

Enfin dans le cas $\Delta(k) = 0$ la racine double est

$$m = \frac{2 + \frac{\mu\varepsilon}{\nu_e}\beta(k)}{2 + 2\left(\frac{\mu\varepsilon}{\nu_e} + \Delta t\right)\beta(k)}$$

Donc $|m| \leq 1$.

En conclusion la condition de Neumann est toujours respectée.

Conclusion

L'étude de stabilité de Von Neumann sur les schémas explicite, semi-implicite, et implicite montre d'une part que les deux premiers schémas sont conditionnellement stables, et on vérifie d'autre part que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

Les conditions (2.27) et (2.30) sont seulement des conditions nécessaires de stabilité, étant donné que les matrices $A(k)$ et $B(k)$ ne sont pas normales. Cependant, ces conditions illustrent bien l'importance du rapport des effets visqueux et élastiques. En effet, les

restrictions les plus fortes sur le pas de temps sont obtenues pour une faible viscosité et une grande raideur de la membrane. Ces conditions sont en ce sens comparables avec la condition (2.13).
Plus précisément le paramètre ε apparaissant dans (2.27) et (2.30) représente une largeur de voisinage de l'interface fluide-membrane sur lequel est appliquée la force, et on le choisit en pratique de l'ordre du pas d'espace Δx. En prenant $\varepsilon = \Delta x$ dans (2.27) et (2.30) on obtient

$$\boxed{\Delta t_A \leq \frac{\mu \Delta x}{\nu_e}} \tag{2.36}$$

pour le schéma explicite, et

$$\boxed{\Delta t_A < \frac{\mu \Delta x + \max(\mu, \sqrt{\nu_e \Delta x})\Delta x}{\nu_e}} \tag{2.37}$$

pour le schéma semi-implicite.
On retrouve donc pour le schéma explicite la condition (2.13), et le traitement semi-implicite du couplage (u, ϕ) dans le schéma 2 permet facilement d'obtenir une relaxation de cette condition. En effet à Δx et μ fixés, à partir d'une certaine valeur de ν_e, on obtient une dépendance du pas de temps en $1/\sqrt{\nu_e}$ au lieu de $1/\nu_e$, ce qui est beaucoup moins restrictif lorsque ν_e est grand. Cette relaxation de la contrainte peut être expliquée par le fait que l'analyse mathématique sur le modèle continu dans [81] ne tire pas profit du couplage semi-implicite entre u et ϕ. Cette hypothèse est appuyée par la condition calculée pour le schéma explicite.

D'autre part, lorsque la viscosité du fluide est faible, la condition (2.37) est approchée par

$$\Delta t_A < \sqrt{\frac{\Delta x^3}{\nu_e}} \tag{2.38}$$

On se trouve alors dans le cadre de la condition (2.12), avec une dépendance en Δx à l'ordre $\frac{3}{2}$.

Pour le schéma semi-implicite, la condition de stabilité calculée est donc à rapprocher de (2.12) ou (2.13) en fonction du régime de l'écoulement. Lorsque les effets visqueux sont importants, on est dans le contexte de l'étude mathématique de [81]. Sinon le choix du pas de temps est conditionné essentiellement par le rapport entre le pas d'espace et la raideur, ce qui rejoint le résultat de [10] obtenu par une méthode heuristique.

On présente dans la suite une validation numérique de la condition de stabilité pour le schéma semi-implicite calculée précédemment, sur un modèle 2D de couplage fluide-membrane élastique.

2.3.3 Etude numérique du schéma semi-implicite

Dans cette partie, on étudie numériquement la stabilité du schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + u^n.\nabla u^n - \mu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} - F(\phi^n) = 0 \\ F(\phi^n) = \left[\left(E"(|\nabla\phi^n|)\dfrac{\nabla^2\phi^n\nabla\phi^n}{|\nabla\phi^n|}\dfrac{\nabla\times\phi^n}{|\nabla\phi^n|}\right)\dfrac{\nabla\times\phi^n}{|\nabla\phi^n|}\right. \\ \left. -E'(|\nabla\phi^n|)\kappa(\phi^n)\nabla\phi^n\right]\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi^n}{\varepsilon|\nabla\phi^n|}\right) \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0 \\ u^{n+1}_{\partial\Omega} = 0 \\ \dfrac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} + u^{n+1}\nabla\phi^n = 0 \\ +\text{C.I.} \end{cases}$$

C'est une version 2D non linéaire du schéma semi-implicite de la partie précédente.
On impose une condition limite Dirichlet homogène sur la vitesse.

Dans l'étude précédente, on a calculé la condition de stabilité suivante pour le modèle 1D linéarisé :

$$\Delta t_A < \frac{(\mu + \max(\mu, \sqrt{\nu_e\Delta x}))\Delta x}{\nu_e} \tag{2.39}$$

Pour le modèle 2D non linéaire on impose la condition suivante :

$$\Delta t_A \leq C\frac{(\mu + \max(\mu, \sqrt{\nu_e\Delta x}))\Delta x}{\nu_e} \tag{2.40}$$

avec C une constante positive déterminée numériquement.

Le but de l'étude numérique est de vérifier que sous cette condition sur Δt les calculs sont stables pour différentes valeurs des paramètres ν_e, μ et Δx. On souhaite en particulier valider la dépendance en $1/\sqrt{\nu_e}$ de la condition de stabilité.

On effectue les calculs sur le cas test de la relaxation d'une membrane élastique dans un fluide incompressible, et on se place proche de l'équilibre, en choisissant l'état initial $(\tilde{a} = 0.65, \tilde{b} = 0.575)$, avec un étirement $e = 1.2526$, ce qui correspond à l'état d'équilibre $R \simeq 0.6113$, avec un écart d'environ 6% entre le rayon final et chacun des axes de l'ellipse. Le domaine de calcul est $[0,2]\times[0,2]$ et on définit $M = 2/\Delta x$.

Cas d'une grande viscosité

On étudie d'abord un écoulement à faible nombre de Reynolds, en prenant $\mu = 1$. On calcule cependant les termes d'inertie car lorsque la raideur de la membrane augmente, ils deviennent non négligeables. Leur traitement explicite induit l'ajout d'une condition CFL classique sur le pas de temps, même si en pratique cette condition est moins sévère que la condition sur la raideur, et n'est donc pas activée.

La constante C apparaissant dans (2.40) est déterminée numériquement. On utilise la valeur $C = 0.2$ pour les calculs qui suivent.

Dépendance de la condition de stabilité par rapport à la raideur ν_e On fait varier ν_e de 1 à 10^6 avec $\Delta x = 0.03125$ ($M = 64$) et $\mu = 1$, et on contrôle l'évolution des axes de l'ellipse lors de sa relaxation vers un cercle. Pour chaque raideur, le temps de simulation est choisi égal à $200/\sqrt{\nu_e}$.

On présente dans le tableau 2.2 les pas de temps utilisés pour les simulations (Δt_A), ainsi que les pas de temps Δt_V et Δt_B obtenus en utilisant les conditions (2.13) et (2.12). On choisit la même constante ($C = 0.2$) pour la condition (2.13), même si on pourrait eventuellement l'ajuster, mais c'est surtout la dépendance par rapport à ν_e que l'on veut mettre en évidence, pour de grandes raideurs.

ν_e	Δt_A avec $C = 0.2$	Δt_V avec $C = 0.2$	Δt_B
1	1.25×10^{-2}	6.25×10^{-3}	$C \times 5.52427 \times 10^{-3}$
10^2	1.72985×10^{-4}	6.25×10^{-5}	$C \times 5.52427 \times 10^{-4}$
10^4	1.16735×10^{-5}	6.25×10^{-7}	$C \times 5.52427 \times 10^{-5}$
10^6	1.1111×10^{-6}	6.25×10^{-9}	$C \times 5.52427 \times 10^{-6}$

TAB. 2.2 – Pas de temps pour $\mu = 1$, $M = 64$ et ν_e variable, calculés avec les conditions de stabilité (2.37), (2.13) et (2.12)

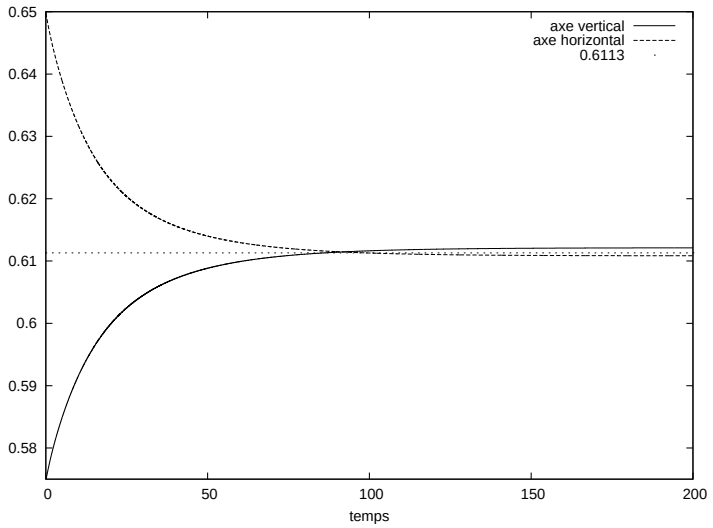


FIG. 2.9 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 1$, $M = 64$

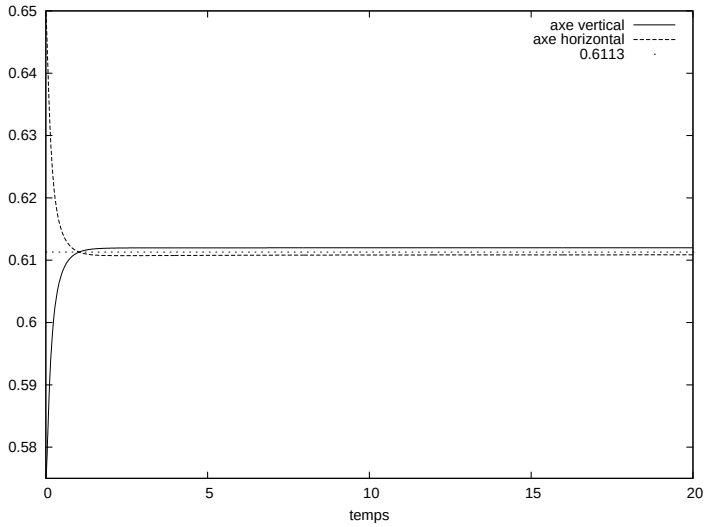


FIG. 2.10 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^2$, $\mu = 1$, $M = 64$

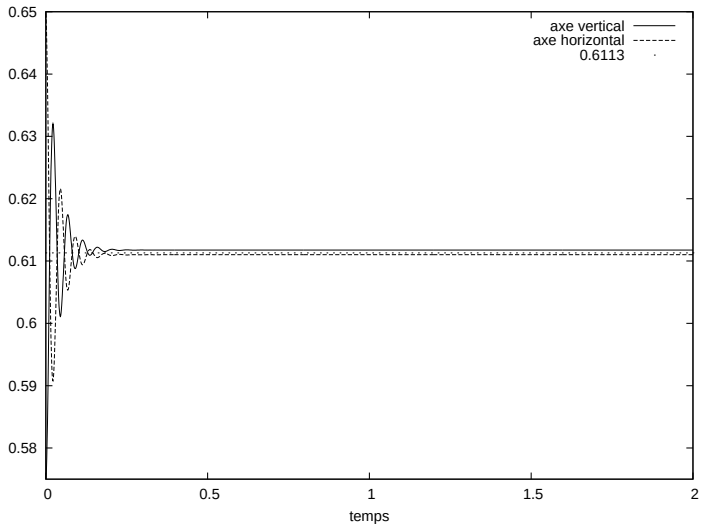


FIG. 2.11 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^4$, $\mu = 1$, $M = 64$

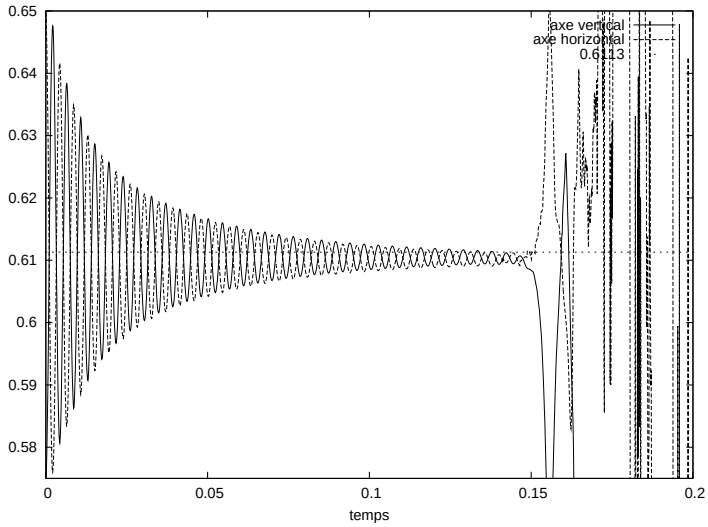


FIG. 2.12 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$

Les figures 2.9-2.11 montrent que la condition (2.30), moins restrictive que la condition (2.13) lorsque ν_e augmente, semble suffir pour garantir la stabilité pour une certaine gamme de raideur. Cependant pour $\nu_e = 10^6$, la relaxation totale n'est pas atteinte. Or pour une telle valeur de ν_e de fortes instabilités non linéaires peuvent apparaître et ainsi mettre à défaut l'analyse linéaire précédemment menée. D'autre part, on rappelle que les tests numériques sont effectués avec un pas d'espace $\Delta x = 0.03125$, donc la taille des oscillations devient assez rapidement inférieure au pas d'espace, et il n'est pas clair que

l'on puisse alors contrôler les oscillations dans ces conditions.
Enfin il semble que le choix du pas de temps ne soit pas la seule cause de l'instabilité. La figure 2.13 montre que les résultats obtenus avec un pas de temps dix fois plus petit ne sont pas améliorés du point de vue de la stabilité.

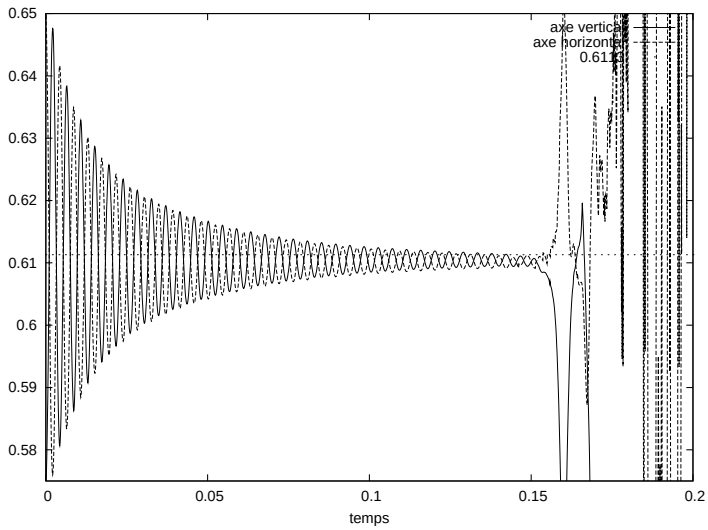


FIG. 2.13 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$, et $C = 0.02$

Remarque : Le fait que la stabilité des calculs ne soit pas améliorée lorsque l'on choisit un pas de temps plus petit suggère que la mise en place d'un schéma implicite sur ce modèle ne pourrait éventuellement pas prévenir contre les instabilités observées avec le schéma semi-implicite. D'autre part les calculs sont réalisés avec une membrane sans masse, c'est-à-dire que l'on impose partout la densité du fluide $\rho_f = 1$. On se trouve donc dans une situation dans laquelle les effets de masse ajoutée, représentant les interactions entre les variations du champ de pression dans le fluide et la membrane, sont importants. Or il est montré dans [42] que dans ce cas la convergence de la méthode itérative utilisée pour résoudre l'algorithme implicite peut être difficile à obtenir, à moins d'utiliser une sous-relaxation dont le coefficient dépend fortement du problème considéré.

Afin d'appréhender la part des effets de masse ajoutée dans l'instabilité des calculs, on peut affecter une masse à la membrane élastique. On définit alors la densité du milieu continu de la manière suivante :

$$\rho(\phi) = \rho_f + \frac{\Lambda_e}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

avec Λ_e la densité linéique de masse de la membrane.

On présente le résultat obtenu avec $\Lambda_e = 1$ pour $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$ sur la figure 2.14.

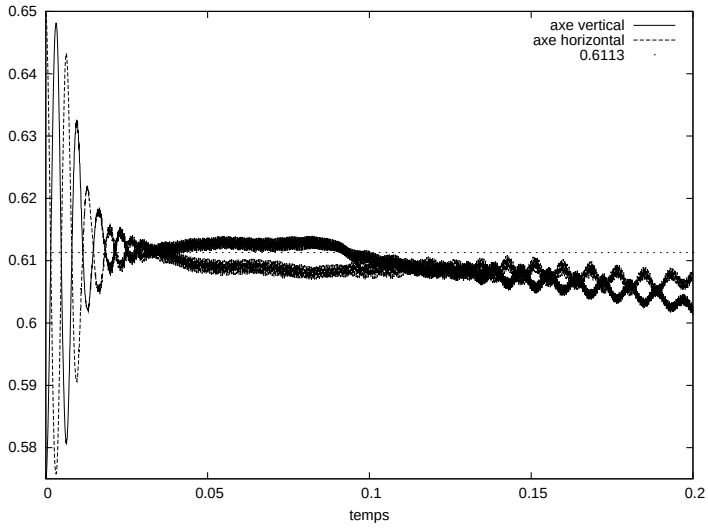


FIG. 2.14 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\Lambda_e = 1$, $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$, et $C = 0.2$

Si de nouvelles petites oscillations apparaissent, l'ajout de la masse pour la membrane permet néanmoins de contrôler les calculs sur un temps plus long. D'autre part le temps de relaxation semble plus cohérent viv-à-vis des résultats obtenus pour les autres raideurs.

Une étude plus approfondie des effets de masse ajoutée sur la stabilité, ainsi que la mise en place d'un schéma implicite (dans le cas éventuellement d'une membrane avec masse afin de prévenir les problèmes de convergence) constituent donc deux axes de recherche à envisager pour ce modèle.

Dépendance de la condition de stabilité par rapport à Δx D'autre part en faisant varier Δx à $\mu = 1$ et $\nu_e = 1$ fixés on peut vérifier la dépendance en Δx de la condition. Les pas de temps calculés avec les trois conditions sont présentés dans le tableau 2.3.

M	Δt_A avec $C = 0.2$	Δt_V avec $C = 0.2$	Δt_B
64	1.25×10^{-2}	6.25×10^{-3}	$C \times 1.10485 \times 10^{-3}$
128	6.25×10^{-3}	3.125×10^{-3}	$C \times 3.90625 \times 10^{-4}$
256	3.125×10^{-3}	1.5625×10^{-3}	$C \times 1.38107 \times 10^{-4}$

TAB. 2.3 – Pas de temps pour $\mu = 1$, $\nu_e = 1$ et Δx variable, calculés avec les conditions de stabilité (2.37), (2.13) et (2.12)

L'évolution des axes de l'ellipse pour $M = 64$, 128, et 256 est présentée sur la figure 2.15.

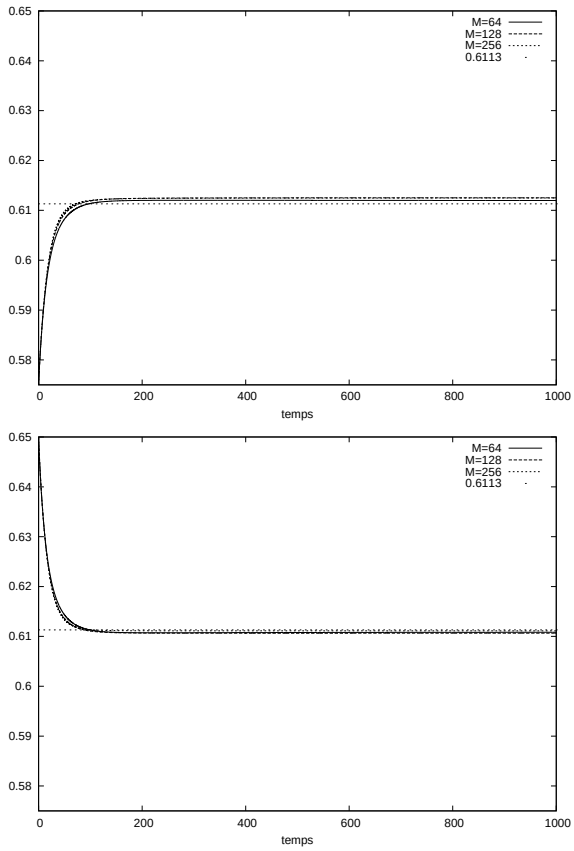


FIG. 2.15 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 1$ et Δx variable

On vérifie que les calculs restent stables pour les différentes valeurs de Δx.

Cas d'une viscosité faible

On choisit maintenant $\mu = 10^{-2}$ et on fait varier ν_e de 1 à 10^4 avec $\Delta x = 0.03125$ ($M = 64$). Pour chaque raideur, le temps de simulation est choisi égal à $100/\sqrt{\nu_e}$.

On présente dans le tableau 2.4 les pas de temps utilisés pour les simulations (Δt_A), ainsi que les pas de temps Δt_V et Δt_B obtenus en utilisant les conditions (2.13) et (2.12).

ν_e	Δt_A avec $C = 0.2$	Δt_V avec $C = 0.2$	Δt_B
1	1.16735×10^{-3}	6.25×10^{-5}	$C \times 1.10485 \times 10^{-3}$
10^2	1.1111×10^{-4}	6.25×10^{-7}	$C \times 1.10485 \times 10^{-4}$
10^4	1.10548×10^{-5}	6.25×10^{-9}	$C \times 1.10485 \times 10^{-5}$

TAB. 2.4 – Pas de temps pour $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$ et ν_e variable, calculés avec les conditions de stabilité (2.37), (2.13) et (2.12)

Dans ce contexte la condition sur Δt_V est beaucoup trop restrictive du fait de la faible valeur de la viscosité. Il est d'ailleurs noté dans [81] que dans le cas d'une faible viscosité la condition (2.13) n'a plus lieu d'être et que l'on peut plutôt utiliser (2.12).
Les résultats pour $\nu_e = 1$, 10^2, et 10^4 sont présentés sur les figures 2.16, 2.17 et 2.18.

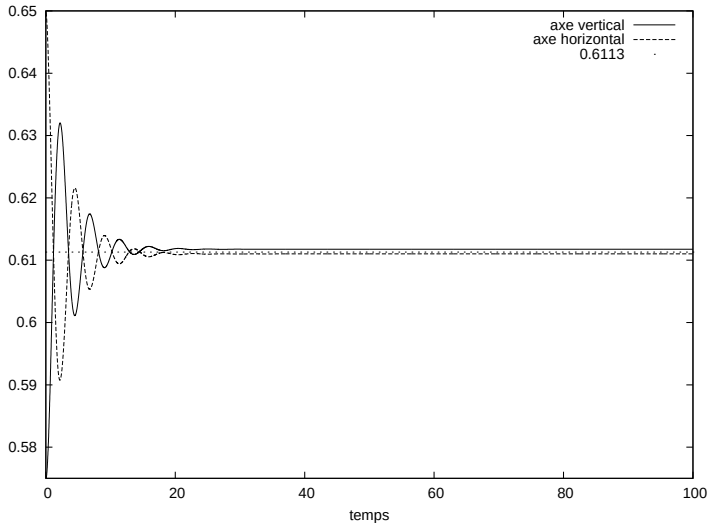


FIG. 2.16 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$

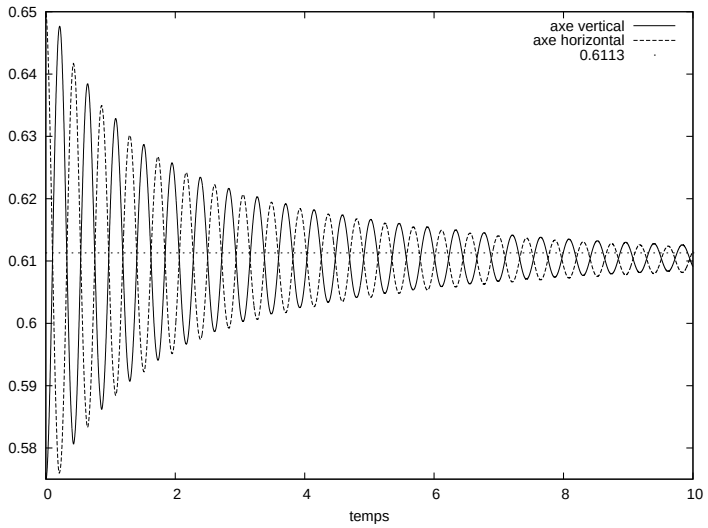


FIG. 2.17 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^2$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$

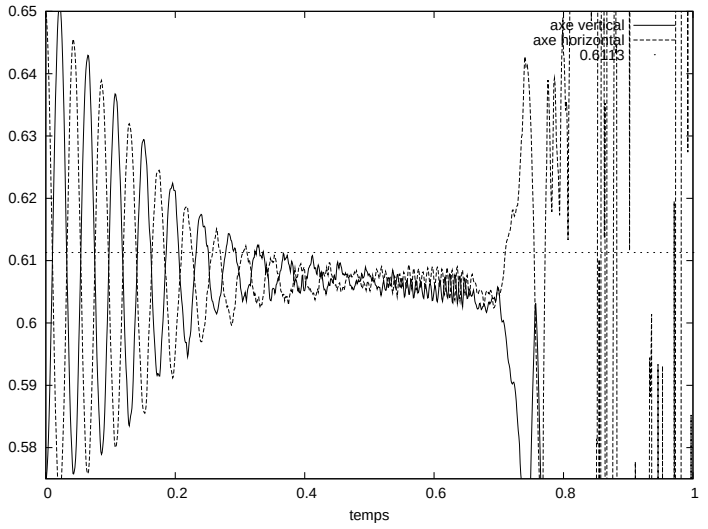


FIG. 2.18 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 10^4$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$

On peut tirer les mêmes conclusions que dans le cas $\mu = 1$, sauf que l'instabilité apparaît à partir d'une raideur plus faible que précédemment.

On peut aussi faire varier Δx. On présente dans le tableau 2.5 les pas de temps obtenus avec les trois conditions.

M	Δt_A avec $C = 0.2$	Δt_V avec $C = 0.2$	Δt_B
64	1.16735×10^{-3}	6.25×10^{-5}	$C \times 1.10485 \times 10^{-3}$
128	4.21875×10^{-4}	3.125×10^{-5}	$C \times 3.90625 \times 10^{-4}$
256	1.53732×10^{-4}	1.5625×10^{-5}	$C \times 1.38107 \times 10^{-4}$

TAB. 2.5 – Pas de temps pour $\mu = 10^{-2}$, $\nu_e = 1$ et Δx variable, calculés avec les conditions de stabilité (2.37), (2.13) et (2.12)

L'évolution des axes de l'ellipse pour $M = 64$, 128, et 256 est présentée sur la figure 2.19.

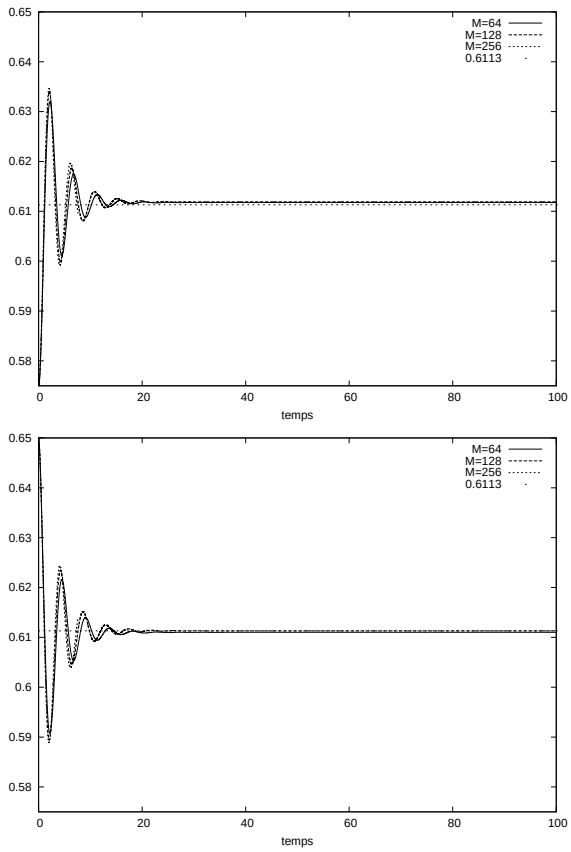


FIG. 2.19 – Evolution des axes de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 10^{-2}$ et Δx variable

On vérifie que les calculs restent stables pour les différentes valeurs de Δx.

Conclusion

Les tests numériques permettent de valider la condition de stabilité (2.37) calculée par analyse d'un modèle 1D linéarisé, pour le schéma semi-implicite sur un modèle 2D non linéaire. En effet, pour une gamme relativement large de raideur, on vérifie bien la dépendance en Δx et $1/\sqrt{\nu_e}$ de la condition, qui est moins restrictive que (2.13) sur l'ordre en ν_e, même pour une grande viscosité. De plus la mise en place du schéma semi-implicite ne demande aucun effort par rapport à celle du schéma explicite, puisque l'on dispose naturellement de la nouvelle valeur du champ de vitesse pour transporter la fonction level-set. D'autre part, les pas de temps calculés avec (2.37) et (2.12) sont du même ordre.

Cependant pour $(\mu = 1, \nu_e = 10^6)$ et $(\mu = 10^{-2}, \nu_e = 10^4)$ la condition ne semble plus valide. Or pour ces valeurs des paramètres les instabilités non-linéaires sont renforcées, les effets inertiels ne peuvent être négligés, et on sort du cadre de l'analyse 1D. D'autre part lorsque l'on diminue le pas de temps on n'améliore pas la stabilité.

On finit ce chapitre par une étude d'un schéma de couplage en temps permettant de conserver l'énergie totale discrète du système. La conservation de l'énergie est en effet un critère que l'on peut utiliser pour étudier la stabilité des calculs.

2.4 Conservation de l'énergie discrète

Pour le modèle (2.1), on rappelle que l'on dispose de l'estimation d'énergie suivante au niveau continu :

$$\mathcal{E}_c(T) + \mathcal{E}_e(T) + \int_0^T \int_\Omega \mu D(u)^2 dxdt = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_e(0) \quad \forall T > 0 \tag{2.41}$$

avec $\mathcal{E}_c(T)$ et $\mathcal{E}_e(T)$ les énergies cinétique et élastique au temps T, c'est-à-dire que modulo dissipation visqueuse, l'énergie totale du système est conservée.

On souhaite être en mesure d'établir le même type d'estimation après discrétisation en temps. Cette partie est donc consacrée à l'étude d'un schéma de couplage en temps conservant l'énergie discrète [8].

2.4.1 Schéma de couplage en temps conservatif

Comme le schéma proposé dans la suite utilise la forme conservative de la force élastique avec transport de l'étirement, on présente rapidement sa dérivation à partir de l'énergie.

Dérivation au niveau continu de la forme conservative de la force élastique à partir de l'énergie

On considère l'énergie élastique $\mathcal{E}_e$, définie par :

$$\mathcal{E}_e = \int_\Omega E_e(e)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)dx \tag{2.42}$$

On a

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = \int_\Omega E_e'(e)e_t\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + E_e(e)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t dx$$

Or e et ϕ sont solution de

$$\begin{cases} e_t + u\cdot\nabla e = -e\dfrac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} : \nabla u \\ \phi_t + u\cdot\nabla\phi = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} &= -\int_\Omega \left(E_e'(e)u\cdot\nabla e + E_e'(e)e\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} : \nabla u\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + E_e(e)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)u\cdot\nabla\phi dx \\
&= -\int_\Omega -\operatorname{div}\left(E_e'(e)e\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)u + \left(E_e'(e)\nabla e\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + E_e(e)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\nabla\phi\right)udx \\
&= -\int_\Omega -\operatorname{div}\left(E_e'(e)e\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)u + \nabla\left(E_e(e)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)udx
\end{aligned}$$

D'où

$$F_e = \nabla\left(E_e(e)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) - \operatorname{div}\left(E_e'(e)e\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) \tag{2.43}$$

Schéma de couplage

On considère le schéma de couplage suivant :

$$\rho \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + \rho(u^{n+1}.\nabla)u^{n+1} - \mu\Delta u^{n+1} + \nabla P^{n+1} = F^{n+1} & (2.44) \\ F^{n+1} = \nabla\left(E_e(e^{n+1})\zeta^n\right) - \operatorname{div}\left[E_e'(e^{n+1})e^{n+1}\dfrac{\nabla\phi^n\otimes\nabla\phi^n}{|\nabla\phi^n|^2}\zeta^n\right] & (2.45) \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0 & (2.46) \\ u^{n+1}_{\partial\Omega} = 0 & (2.47) \\ \dfrac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} + u^{n+1}\nabla\phi^{n+1} = 0 & (2.48) \\ \dfrac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t} + u^{n+1}\nabla e^{n+1} = -e^{n+1}\dfrac{\nabla\phi^n\otimes\nabla\phi^n}{|\nabla\phi^n|^2} : \nabla u^{n+1} & (2.49) \\ e^0 = |\nabla\phi^0| & (2.50) \\ \dfrac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\Delta t} + u^{n+1}\nabla\zeta^n = 0 & (2.51) \\ \zeta^0 = \dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi^0}{\varepsilon}\right) & (2.52) \end{cases}$$

On utilise la forme conservative de la force élastique car elle permet d'obtenir les estimations d'énergie dans la suite, et on traite ce terme de force de manière semi-implicite, dans le sens où certains termes (e et ϕ) sont implicites, et ζ est explicite. Ce choix est encore justifié par la recherche d'estimations d'énergie.
On ajoute deux équations d'advection scalaires, sur e et ζ. Ces deux équations sont obtenues à partir de l'équation d'advection sur ϕ. e représente l'étirement de la membrane, et on exprime donc la force et l'énergie élastique en fonction de e plutôt que de $|\nabla\phi|$, même si au niveau continu ces deux quantités sont égales.
En ce qui concerne le couplage en temps, le traitement implicite de certains termes nécessite en pratique la mise en place d'une méthode itérative pour la résolution de chaque pas de temps.

On note $\mathcal{E}_c^n$ l'énergie cinétique discrète au temps t^n, définie par :

$$\mathcal{E}_c^n = \frac{\rho}{2}\int_\Omega (u^n)^2 dx \tag{2.53}$$

et $\mathcal{E}_e^n$ l'énergie élastique discrète au temps t^n, définie par :

$$\mathcal{E}_e^n = \int_\Omega E_e(e^n)\zeta^n dx \tag{2.54}$$

avec

$$E_e(r) = \frac{\nu_e}{2}(r-1)^2 \tag{2.55}$$

En multipliant (2.44) par u^{n+1} et en intégrant sur Ω, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\Delta t}\left(\int_\Omega (u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega u^n.u^{n+1}dx\right) &+ \rho\int_\Omega u^{n+1}.\nabla u^{n+1}.u^{n+1}dx - \mu\int_\Omega \Delta u^{n+1}.u^{n+1}dx \\ &+ \int_\Omega \nabla P^{n+1}.u^{n+1}dx - \int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = 0\end{aligned}$$

En utilisant la relation $a^2 - ab = \frac{1}{2}[a^2 - b^2 + (a-b)^2]$, on obtient :

$$\frac{\rho}{\Delta t}\left(\int_\Omega (u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega u^n.u^{n+1}dx\right) = \frac{\rho}{2\Delta t}\left(\int_\Omega (u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega (u^n)^2 dx + \int_\Omega (u^{n+1}-u^n)^2 dx\right)$$

De plus, avec (2.46) et (2.47) :

$$\rho\int_\Omega u^{n+1}.\nabla u^{n+1}.u^{n+1}dx = \frac{\rho}{2}\int_\Omega u^{n+1}.\nabla((u^{n+1})^2)dx = 0$$

et

$$\int_\Omega \nabla P^{n+1}.u^{n+1}dx = 0$$

Enfin, en intégrant par parties et avec (2.47) :

$$\mu\int_\Omega \Delta u^{n+1}.u^{n+1}dx = -\mu\int_\Omega (\nabla u^{n+1})^2 dx$$

Au total on a :

$$\frac{\rho}{2\Delta t}\left(\int_\Omega (u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega (u^n)^2 dx + \int_\Omega (u^{n+1}-u^n)^2 dx\right) + \mu\int_\Omega (\nabla u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = 0 \tag{2.56}$$

Or comme $\int_\Omega (u^{n+1}-u^n)^2 dx \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathcal{E}_c^{n+1} - \mathcal{E}_c^n\right) + \mu\int_\Omega (\nabla u^{n+1})^2 dx - \int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx \leq 0 \tag{2.57}$$

Dans le cas continu, on peut conclure facilement car $\dfrac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -\int_\Omega F.udx$, ce qui permet donc de faire apparaître la dérivée de l'énergie élastique dans l'estimation.

Ici on a avec (2.46) et (2.47) :

$$-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = \int_\Omega \mathrm{div}\left[E_e'(e^{n+1})e^{n+1}\frac{\nabla\phi^n\otimes\nabla\phi^n}{|\nabla\phi^n|^2}\zeta^n\right].u^{n+1}dx \tag{2.58}$$

En intégrant par parties, on obtient donc

$$-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = -\int_\Omega E_e'(e^{n+1})e^{n+1}\frac{\nabla\phi^n\otimes\nabla\phi^n}{|\nabla\phi^n|^2} : \nabla u^{n+1}\zeta^n dx$$

Or avec (2.49)

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx &= \int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx + \int_\Omega E_e'(e^{n+1})u^{n+1}.\nabla e^{n+1}\zeta^n dx \\
&= \int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx + \int_\Omega u^{n+1}.\nabla(E_e(e^{n+1}))\zeta^n dx \\
&= \int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx + \int_\Omega u^{n+1}.\nabla(E_e(e^{n+1})\zeta^n)dx \\
&- \int_\Omega E_e(e^{n+1})u^{n+1}.\nabla\zeta^n dx
\end{aligned}$$

De plus avec (2.46) et (2.47)

$$-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = \int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx - \int_\Omega E_e(e^{n+1})u^{n+1}.\nabla\zeta^n dx$$

Enfin avec (2.51)

$$-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx = \int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx + \int_\Omega E_e(e^{n+1})\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\Delta t}dx$$

Or comme E est convexe,

$$\int_\Omega E_e'(e^{n+1})\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}\zeta^n dx \geq \int_\Omega \frac{E_e(e^{n+1})-E_e(e^n)}{\Delta t}\zeta^n dx$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega F^{n+1}.u^{n+1}dx &\geq \int_\Omega \frac{E_e(e^{n+1})-E_e(e^n)}{\Delta t}\zeta^n dx + \int_\Omega E_e(e^{n+1})\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\Delta t}dx \\
&\geq \frac{1}{\Delta t}\left(\int_\Omega E_e(e^{n+1})\zeta^{n+1}dx - \int_\Omega E_e(e^n)\zeta^n dx\right) \\
&\geq \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{E}_e^{n+1}-\mathcal{E}_e^n)
\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathcal{E}_c^{n+1}-\mathcal{E}_c^n\right) + \mu\int_\Omega(\nabla u^{n+1})^2dx + \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{E}_e^{n+1}-\mathcal{E}_e^n) \leq 0 \tag{2.59}$$

Cette inégalité montre que le schéma est dissipatif. On perd donc la conservation de l'énergie par rapport au niveau continu. Cependant, ce schéma semi-discret en temps a la bonne proriété de ne pas créer d'énergie, et c'est cette propriété qui nous intéresse en ce qui concerne la stabilité du modèle.

L'obtention de l'inégalité (2.59) suppose d'une part que l'on utilise la forme conservative de la force, ce qui permet d'intégrer par partie dans (2.58), et d'autre part que l'on transporte ζ et e, ce qui permet de conclure en faisant apparaître les énergies élastiques aux temps t^n et t^{n+1}.
Or numériquement la discrétisation de la force élastique sous cette forme est délicate car il faut calculer des dérivées spatiales de ζ, qui est une masse de Dirac régularisée (voir partie 2.2.3). D'autre part le transport de ζ suppose d'utiliser un schéma très peu diffusif, par exemple WENO5, et de régulariser suffisamment l'interface, i.e. de choisir ε relativement grand.
Du fait des difficultés liées à la discrétisation spatiale, l'intérêt de l'utilisation de ce schéma n'a pas vraiment été mis en évidence par les tests numériques réalisés. D'autre part la convergence de la méthode itérative pour la résolution de chaque pas de temps peut être difficile à obtenir.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité numérique d'un modèle eulérien de Frontière Immergée pour le couplage fluide-membrane élastique en 2D.

L'analyse de Von Neumann d'une version 1D linéarisée de ce modèle dans le cas d'une tension de surface a permis de calculer une condition de stabilité sur le pas de temps mettant en relation les effets visqueux et la tension de surface. Selon le régime de l'écoulement, cette condition peut être rapprochée des conditions proposées dans [81] et [10]. En effet, pour un écoulement relativement visqueux on se place dans le contexte de l'étude mathématique de [81]. Avec un couplage complètement explicite du fluide et de la membrane on retrouve alors la condition (2.13), alors qu'un traitement semi-implicite, naturellement mis en œuvre numériquement, permet de relaxer cette condition du point de vue de sa dépendance par rapport à la raideur de la membrane. D'autre part, lorsque la viscosité est plus faible, la condition calculée met l'accent sur le rapport entre la tension de surface et le pas de discrétisation spatiale, et l'on obtient alors un condition très proche de (2.12), avec une dépendance en Δx à l'ordre 3/2.

Les tests numériques réalisés sur le cas de la relaxation d'une membrane élastique dans un fluide visqueux incompressible en 2D avec le schéma semi-implicite permettent de valider cette condition dans une situation plus complexe, pour une certaine gamme de raideurs

de la membrane. Au delà d'une certaine raideur le modèle 1D linéarisé semble cependant être mis à défaut par l'apparition de fortes instabilités non-linéaires, non détectées dans l'analyse de stabilité.
L'etude des effets de masse ajoutée et la mise en place d'un schéma implicite en temps constituent deux perspectives de recherche en ce qui concerne l'étude de stabilité de ce modèle.

Enfin, la stabilité des calculs pouvant être abordée via le critère physique de conservation de l'énergie, nous avons présenté un schéma de couplage permettant d'assurer cette propriété au niveau semi-discret en temps. La mise en œuvre numérique de ce schéma reste à approfondir du fait des difficultés liées à la discrétisation spatiale des expressions utilisées pour l'obtention des estimations, et aussi du point de vue de la convergence de la méthode itérative inhérente au traitement implicite de certains termes.

Chapitre 3

Méthode de pénalisation pour le couplage fluide-solide rigide

3.1 Introduction

On considère dans ce chapitre un modèle de couplage fluide visqueux incompressible - solide rigide en dimension d ($d = 2$ ou 3).
On se place dans le cadre de la simulation numérique directe de l'écoulement, c'est-à-dire que l'on résout de manière exacte les forces hydrodynamiques mises en jeu. De plus, la définition d'un domaine fictif comprenant les domaines fluide et solide permet d'étudier ce modèle couplé sur un maillage fixe et régulier.
Afin d'imposer la contrainte rigide dans le domaine solide transporté par l'écoulement fluide, on considère enfin une extension de la méthode de pénalisation L^2 proposée dans [5] au cas où le domaine solide évolue.

La méthode que l'on étudie consiste à calculer la vitesse rigide du solide par projection de la vitesse fluide, et à imposer ensuite cette vitesse par pénalisation des équations du fluide. D'un point de vue numérique, elle apparait donc comme une généralisation de la méthode de projection proposée dans [59], qui correspond au cas particulier d'un couplage explicite en temps d'ordre 1, avec un paramètre de pénalisation égal au pas de temps. Elle constitue donc une solution efficace pour le couplage fluide-solide rigide car le calcul de la vitesse rigide par projection est simple à implémenter et peu coûteux, et un traitement implicite du terme de pénalisation permet d'atteindre une bonne précision pour de grands coefficients de pénalisation.
Une formulation vorticité de cette méthode est étudiée dans [18] pour l'étude d'écoulements fluide-solides rigides en $2D$ et $3D$, avec collisions.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir la convergence des solutions du problème pénalisé défini par cette méthode vers celles d'une formulation faible du couplage. D'un

point de vue théorique on se place dans le contexte des méthodes de pénalisation pour lesquelles des résultats d'analyse numérique ont déjà été obtenus. Une étude de convergence est en effet réalisée pour un modèle 2D fluide-obstacle rigide fixe dans [4] et [5]. Le cas de plusieurs solides rigides en mouvement dans un fluide est également traité dans [52], pour une méthode de pénalisation H^1 en $2D$.

Dans ce chapitre nous introduisons tout d'abord une formulation faible du modèle de couplage et définissons le problème pénalisé L^2. Nous montrons ensuite la convergence des solutions de ce problème vers la formulation faible lorsque le paramètre de pénalisation tend vers 0.
Nous envisageons ensuite la convergence d'un problème de pénalisation H^1 défini à partir du problème L^2 vers une formulation découplée du modèle.
Nous présentons enfin des tests numériques effectués avec la méthode de pénalisation L^2 sur un exemple de sédimentation afin de valider numériquement sa convergence, notamment au niveau de la prise en compte de la contrainte rigide.

3.2 Formulation faible et méthode de pénalisation L^2

Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$. On considère un domaine Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ constitué de

- $\Omega_f(t) \neq \emptyset$: fluide visqueux incompressible newtonien homogène, de densité $\rho_f > 0$ et viscosité $\mu_f > 0$
- $\Omega_s(t) \neq \emptyset$: solide rigide homogène, de densité $\rho_s > 0$, de centre de gravité $x_G(t)$, de masse M_s, et de matrice d'inertie $J_s(t)$, avec

$$x_G(t) = \frac{1}{M_s} \int_{\Omega_s(t)} \rho_s x dx,\ M_s = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s dx,\ J_s(t) = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s (r^2 \mathbb{I}_3 - r \otimes r) dx \quad (3.1)$$

où $r(t, x) = x - x_G(t)$, $\mathbb{I}_3$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_3$, et $\otimes$ représente le produit tensoriel.

On suppose que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_s(t)} \cup \overline{\Omega_f(t)}$ et $\Omega_s(t) \cap \Omega_f(t) = \emptyset$ pour tout $t \in [0, T]$.
$\Omega_s(t)$ est un domaine rigide dont la régularité est donc celle de la donnée initiale $\Omega_s(0)$, choisissons-là $\mathcal{C}^2$.
La seule force extérieure considérée est la gravité g.

Ce problème de couplage est décrit classiquement dans la formulation suivante :

Etant données

$$\begin{cases} u_f(0) = u_f^0 \\ x_G(0) = \frac{1}{M_s} \displaystyle\int_{\Omega_s(0)} \rho_s x dx \\ x_G^{'}(0) = u_G^0 \\ \omega(0) = \omega^0 \\ \Omega_s(0) = \Omega_s^0 \\ X_s(0,x) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

Trouver $(t,x) \to (u_f(t,x), p(t,x), x_G(t), \omega(t))$ tel que :

- Dans le domaine fluide $\Omega_f(t)$: (u_f, p) solution des équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\rho_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f.\nabla u_f \right) - \operatorname{div} \Sigma_f = \rho_f g \text{ dans } \Omega_f(t) \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div} u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \tag{3.4}$$

  avec $\Sigma_f = -p\mathbb{I}_3 + 2\mu_f D(u_f)$ le tenseur des contraintes du fluide newtonien.

- Dans le domaine solide $\Omega_s(t)$: (x_G, ω) solution des équations de conservation des moments linéaire et angulaire :

  La vitesse du solide rigide est donnée par $u_s(t,x) = x_G^{'}(t) + \omega(t) \times r(t,x)$. Dans ce modèle, le solide est immergé dans le fluide, donc les forces surfaciques agissant sur celui-ci sont les contraintes du fluide, et la seule force volumique considérée est la gravité. La conservation des moments établie en (1.19) et (1.20) s'écrit donc dans ce cas :

$$M_s x_G^{''} = M_s g + \int_{\partial\Omega_s(t)} \Sigma_f.n ds \tag{3.5}$$

$$J_s \omega^{'} = \int_{\partial\Omega_s(t)} r \times (\Sigma_f.n) ds - \omega \times (J_s.\omega) \tag{3.6}$$

  avec n la normale sortante à $\partial\Omega_s(t)$, $x_G^{'}$ et ω les vitesses linéaire et angulaire du solide (voir figure 3.1).
- Le domaine solide $\Omega_s(t)$ est transporté par la vitesse rigide u_s :

$$\Omega_s(t) = X_s(t, \Omega_s^0) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial X_s}{\partial t} = x_G^{'} + \omega \times r(t, X_s) \tag{3.8}$$

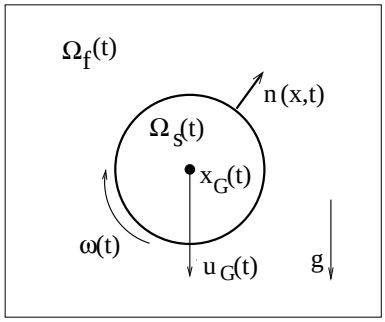


FIG. 3.1 – Modèle fluide-solide rigide

– Sur les bords de $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$ on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_f = x_G^{'} + \omega \times r \text{ sur } \partial\Omega_s(t) \\ u_f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_f(t) \end{cases} \tag{3.9}$$

Cette formulation du modèle fluide-solide rigide fait donc apparaitre deux problèmes distincts, définis sur chacun des domaines $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$, couplés par des conditions à l'interface fluide-solide, et complétés par des conditions aux limites et initiales. On étudie dans la suite l'approximation de ces problèmes couplés par un unique problème défini sur Ω tout entier, obtenu par une méthode de pénalisation.
Pour cela on commence par introduire une formulation faible du problème de couplage.

3.2.1 Formulation faible

On note $Q =]0, T[\times\Omega$, et on définit les espaces fonctionnels suivants :
– $\mathcal{V} = \{u \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$,
– $\mathcal{H} = \{u \in L^2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u.n_{|\partial\Omega} = 0\}$,
– $\mathcal{K}(t) = \{u \in \mathcal{V}, \exists (V_u, \omega_u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, u_{|\Omega_s(t)} = V_u + \omega_u \times (x - x_G(t))\}$.

Les éléments de $\mathcal{K}(t)$ sont donc les vitesses rigides dans $\Omega_s(t)$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *L'espace $\mathcal{K}(t)$ est défini de manière équivalente par*

$$\mathcal{K}(t) = \{u \in \mathcal{V}, D(u) = 0 \text{ dans } \Omega_s(t)\} \tag{3.10}$$

Preuve On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [55], p.65.
S'il existe $(V_u, \omega_u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tel que $u_{|\Omega_s(t)} = V_u + \omega_u \times (x - x_G(t))$ alors

$$\nabla u_{|\Omega_s(t)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u^3 & \omega_u^2 \\ \omega_u^3 & 0 & -\omega_u^1 \\ -\omega_u^2 & \omega_u^1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) = 0$ dans $\Omega_s(t)$.

Réciproquement, si on suppose $D(u) = 0$ dans $\Omega_s(t)$, alors

$$\nabla u_{|\Omega_s(t)} = D(u) + \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial_2 u^1 - \partial_1 u^2 & \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 & 0 & \partial_3 u^2 - \partial_2 u^3 \\ \partial_1 u^3 - \partial_3 u^1 & \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\omega_u = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix}$. Alors pour $i, j = 1, 2, 3$ on a $\partial_j \omega_u^i = 0$. En effet, pour $i = 1$ par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_j(\partial_2 u^3 - \partial_3 u^2) &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_2 u^3 - \partial_j\partial_3 u^2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_2 u^3 + \partial_2\partial_3 u^j - \partial_2\partial_3 u^j - \partial_j\partial_3 u^2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_2(\partial_j u^3 + \partial_3 u^j) - \partial_3(\partial_2 u^j + \partial_j u^2)) \\ &= \partial_2(D(u))_{j,3} - \partial_3(D(u))_{j,2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\nabla u_{|\Omega_s(t)}$ est constant en espace et s'exprime par :

$$\nabla u_{|\Omega_s(t)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u^3 & \omega_u^2 \\ \omega_u^3 & 0 & -\omega_u^1 \\ -\omega_u^2 & \omega_u^1 & 0 \end{pmatrix}$$

En intégrant, on obtient donc

$$\exists (V_u, \omega_u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, u_{|\Omega_s(t)} = V_u + \omega_u \times (x - x_G(t))$$

□

On introduit maintenant une formulation globale du problème de couplage, proposée dans [24] et [33].
Soit $\chi_{\Omega_s(t)}$ la fonction caractéristique de $\Omega_s(t)$, définie par

$$\chi_{\Omega_s(t)}(t, x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \Omega_s(t) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors on considère la formulation variationnelle suivante :

Etant données $\rho^0 = \rho_s \chi_{\Omega_s^0} + \rho_f(1 - \chi_{\Omega_s^0})$, $u^0 \in \mathcal{K}(0)$, et $H^0 = \chi_{\Omega_s^0}$, trouver $(t,x) \to (\rho(t,x), u(t,x), H(t,x))$ tel que

$$(P_{\text{faible}}) \begin{cases} \rho, H \in \mathcal{C}(0,T;L^q(\Omega)) \quad \forall q \geq 1, \\ u \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \cap L^2(0,T,\mathcal{V}), \quad u(t) \in \mathcal{K}(t) \text{ pour } t \in (0,T) \text{ p.p.}, \\ \Omega_s(t) = \{x \in \Omega, H(t,x) = 1\}, \\ \forall \xi \in \mathcal{H}^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}(t)), \\ \displaystyle\int_\Omega [\rho u \partial_t \xi + (\rho u \otimes u - 2\mu D(u)) : D(\xi) + \rho g \xi]\, dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \xi dx \\ \forall \psi \in \mathcal{C}^1(Q), \quad \psi(T) = 0, \\ \displaystyle\int_0^T \int_\Omega H \frac{\partial \psi}{\partial t} + H u \nabla \psi dx dt + \int_\Omega H^0 \psi(0) dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho u \nabla \psi dx dt + \int_\Omega \rho^0 \psi(0) dx = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Cette formulation est analogue à la formulation faible de Navier-Stokes, avec la contrainte de rigidité prise en compte dans les espaces de fonctions. D'autre part l'équation de transport sur ρ peut se déduire de celle de H et de la définition de ρ^0 ; elle est ajoutée pour le passage à la limite dans le problème de pénalisation.

On justifie d'abord l'introduction de cette formulation faible à partir de la formulation forte dans laquelle les équations du fluide et du solide sont découplées. On montre le lemme suivant :

Lemme 3.2.2 *Soit $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega))$ telle que*

$$u = \begin{cases} u_s \ \textit{dans } \Omega_s(t) \\ u_f \ \textit{dans } \Omega_f(t) \end{cases} \tag{3.12}$$

avec u_f solution de (3.3, 3.4, 3.9) et $u_s = x_G' + \omega \times r$ solution de (3.5-3.6).
Soit $\rho \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0,T;L^q(\Omega))$, $\forall q \geq 1$, telle que

$$\rho = \begin{cases} \rho_s \ \textit{dans } \Omega_s(t) \\ \rho_f \ \textit{dans } \Omega_f(t) \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$H = \chi_{\Omega_s(t)} \tag{3.14}$$

On définit enfin μ en prolongeant la viscosité μ_f du fluide sur tout le domaine Ω.
Alors (ρ, u, H) est solution de (P_{faible}).

Preuve Par définition de H on a immédiatement $\Omega_s(t) = \{x \in \Omega, H(t,x) = 1\}$ avec $H \in \mathcal{C}(0,T;L^q(\Omega))$ $\forall q \geq 1$, et $\forall \psi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\psi(T) = 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega H \frac{\partial \psi}{\partial t} + Hu\nabla\psi dxdt + \int_\Omega H^0 \psi(0) dx = 0$$

D'autre part, par conservation de la masse, ρ est solution d'une équation de transport par u, d'où $\rho \in \mathcal{C}(0,T;L^q(\Omega))$ $\forall q \geq 1$ et $\forall \psi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\psi(T) = 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho u\nabla\psi dxdt + \int_\Omega \rho^0 \psi(0) dx = 0 \tag{3.15}$$

Enfin $u \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \cap L^2(0,T,\mathcal{V})$ et $u(t) \in \mathcal{K}(t)$ car $u = u_s = x_G^{'} + \omega \times r$ dans $\Omega_s(t)$, avec $x_G^{'}$ et ω les vitesses linéaire et angulaire du solide ; et $u = u_f$ solution de Navier-Stokes dans $\Omega_f(t)$. On pose $V_u = x_G^{'}$ et $\omega_u = \omega$.

Il reste à obtenir l'équation de conservation des moments.

Soit $\xi \in \mathcal{H}^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}(t))$, alors $\exists (V_\xi, \omega_\xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tel que

$$\xi(t,x) = V_\xi(t) + \omega_\xi(t) \times (x - x_G) \quad \forall (t,x) \in \bigcup_{t\in[0,T]} (\{t\} \times \Omega_s(t)) \tag{3.16}$$

On utilise ξ comme fonction test sur chacun des domaines $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$.

En multipliant l'équation (3.3) par ξ et en intégrant sur $\Omega_f(t)$, on a :

$$\underbrace{\int_{\Omega_f(t)} (\rho(\partial_t u + u.\nabla u))\xi dx}_{(a)} = \underbrace{\int_{\Omega_f(t)} \operatorname{div} \Sigma_f \xi dx}_{(b)} + \int_{\Omega_f(t)} \rho g \xi dx \tag{3.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
(a) \quad &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)} \rho u \xi dx - \int_{\Omega_f(t)} \frac{d\rho}{dt} u\xi dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \frac{d\xi}{dt} dx \\
&\overset{(3.15)}{=} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)} \rho u \xi dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \frac{\partial \xi}{\partial t} dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \otimes u : \nabla\xi dx \\
&\overset{u\otimes u \text{ symétrique}}{=} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)} \rho u \xi dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \frac{\partial \xi}{\partial t} dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \otimes u : D(\xi) dx \\
&\overset{\text{Lemme } 3.2.1}{=} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)} \rho u \xi dx - \int_{\Omega_f(t)} \rho u \frac{\partial \xi}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \rho u \otimes u : D(\xi) dx
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(b) \quad &= -\int_{\partial\Omega}(\Sigma_f.n)\xi ds - \int_{\partial\Omega_s(t)}(\Sigma_f.n)\xi ds - \int_{\Omega_f(t)}\Sigma_f : \nabla\xi dx \\
&\overset{\xi(t)\in\mathcal{K}(t)}{=} -V_\xi\int_{\partial\Omega_s(t)}(\Sigma_f.n)ds - \omega_\xi\int_{\partial\Omega_s(t)}(x-x_G)\times(\Sigma_f.n)ds - \int_{\Omega_f(t)}2\mu D(u) : \nabla\xi dx \\
&\overset{(3.5),(3.6)}{=} V_\xi\int_{\Omega_s(t)}\rho g dx - V_\xi M_s\frac{dV_u}{dt} - \omega_\xi J_s\frac{d\omega_u}{dt} + \omega_\xi\int_{\Omega_s(t)}(x-x_G)\times\rho g dx \\
&- \omega_\xi(\omega_u\times(J_s.\omega_u)) - \int_{\Omega_f(t)}2\mu D(u) : \nabla\xi dx \\
&\overset{D(u)\text{ symétrique}}{=} V_\xi\int_{\Omega_s(t)}\rho g dx - V_\xi M_s\frac{dV_u}{dt} - \omega_\xi J_s\frac{d\omega_u}{dt} + \omega_\xi\int_{\Omega_s(t)}(x-x_G)\times\rho g dx \\
&- \omega_\xi(\omega_u\times(J_s.\omega_u)) - \int_{\Omega_f(t)}2\mu D(u) : D(\xi) dx \\
&\overset{\xi(t)\in\mathcal{K}(t)}{=} \int_{\Omega_s(t)}\xi\rho g dx - V_\xi M_s\frac{dV_u}{dt} - \omega_\xi J_s\frac{d\omega_u}{dt} - \int_{\Omega}2\mu D(u) : D(\xi) dx - \omega_\xi(\omega_u\times(J_s.\omega_u))
\end{aligned}
$$

Au total on a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)}\rho u\xi dx &- \int_{\Omega_f(t)}\rho u\frac{\partial\xi}{\partial t}dx - \int_{\Omega}\rho u\otimes u : D(\xi)dx = -V_\xi M_s\frac{dV_u}{dt} - \omega_\xi J_s\frac{d\omega_u}{dt} \\
&+ \int_{\Omega_s(t)}\xi\rho g dx - \omega_\xi(\omega_u\times(J_s.\omega_u)) - \int_{\Omega}2\mu D(u) : D(\xi)dx + \int_{\Omega_f(t)}\xi\rho g dx
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_f(t)}\rho u\xi dx + V_\xi M_s\frac{dV_u}{dt} + \omega_\xi J_s\frac{d\omega_u}{dt} &= \int_{\Omega_f(t)}\rho u\frac{\partial\xi}{\partial t}dx \\
&+ \int_{\Omega}((\rho u\otimes u - 2\mu D(u)) : D(\xi) + \xi\rho g)dx \\
&- \omega_\xi(\omega_u\times(J_s.\omega_u)) \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

D'autre part, sur $\Omega_s(t)$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_s(t)}\rho u\xi dx &= \int_{\Omega_s(t)}\rho\frac{du}{dt}\xi dx + \int_{\Omega_s(t)}\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}u dx + \int_{\Omega_s(t)}\rho u\otimes u : D(\xi)dx \\
&\overset{\xi(t)\in\mathcal{K}(t)}{=} \underbrace{\int_{\Omega_s(t)}\rho\frac{du}{dt}\xi dx}_{(c)} + \int_{\Omega_s(t)}\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}u dx
\end{aligned}
$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &\overset{u(t)\in\mathcal{K}(t)}{=} \frac{dV_u}{dt} + \frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) + \omega_u \times \frac{d(x - x_G)}{dt} \\
&\overset{V_u = x'_G,\ \omega_u = \omega}{=} \frac{dV_u}{dt} + \frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) + \omega_u \times (u - V_u) \\
&\overset{u(t)\in\mathcal{K}(t)}{=} \frac{dV_u}{dt} + \frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) + \omega_u \times (\omega_u \times (x - x_G))
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(c) &= \int_{\Omega_s(t)} \rho \left[\frac{dV_u}{dt} + \frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) + \omega_u \times (\omega_u \times (x - x_G)) \right] [V_\xi + \omega_\xi \times (x - x_G)]\, dx \\
&\overset{(3.19),\ (3.20)}{=} \int_{\Omega_s(t)} \rho \frac{dV_u}{dt} V_\xi dx + \int_{\Omega_s(t)} \rho \left(\frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) \right) . V_\xi dx \\
&+ \int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u \times (\omega_u \times (x - x_G))).V_\xi dx + \int_{\Omega_s(t)} \rho \frac{dV_u}{dt}.(\omega_\xi \times (x - x_G)) dx \\
&+ \int_{\Omega_s(t)} \rho \left(\frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G) \right) . (\omega_\xi \times (x - x_G))\, dx \\
&+ \int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u \times (\omega_u \times (x - x_G))).(\omega_\xi \times (x - x_G)) dx \\
&= M_s \frac{dV_u}{dt} V_\xi + V_\xi . \left(\frac{d\omega_u}{dt} \times \int_{\Omega_s(t)} \rho(x - x_G) dx \right) \\
&+ V_\xi .(\omega_u \times (\omega_u \times \int_{\Omega_s(t)} \rho(x - x_G) dx)) + \frac{dV_u}{dt} . \left(\omega_\xi \times \int_{\Omega_s(t)} \rho(x - x_G) dx \right) \\
&+ \frac{d\omega_u}{dt} J_s \omega_\xi + \omega_\xi .(\omega_u \times (J_s.\omega_u))
\end{aligned}$$

Or par définition du centre de gravité, $\int_{\Omega_s(t)} \rho(x - x_G) dx = 0$, donc

$$(c) = M_s \frac{dV_u}{dt} V_\xi + \frac{d\omega_u}{dt} J_s \omega_\xi + \omega_\xi .(\omega_u \times (J_s.\omega_u))$$

Dans ces calculs on a utilisé les égalités suivantes (avec $r(t,x) = x - x_G(t)$) :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u \times (\omega_u \times (x - x_G))).(\omega_\xi \times (x - x_G))dx &= \int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u \times (\omega_u \times r)).(\omega_\xi \times r)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho((\omega_u.r)\omega_u - |\omega_u|^2 r)(\omega_\xi \times r)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u.r)\omega_u.(\omega_\xi \times r)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho(\omega_u.r)\omega_\xi.(r \times \omega_u)dx \\
&= -\int_{\Omega_s(t)} \rho\omega_\xi.(\omega_u.r).(\omega_u \times r)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho\omega_\xi.(\omega_u \times (r^2\omega_u - (r.\omega_u)r))dx \\
&= \omega_\xi.(\omega_u \times (J_s.\omega_u)) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s(t)} \rho\left(\frac{d\omega_u}{dt} \times (x - x_G)\right).(\omega_\xi \times (x - x_G))\,dx &= \int_{\Omega_s(t)} \rho\left(\frac{d\omega_u}{dt} \times r\right).(\omega_\xi \times r)\,dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho\left(\left(\frac{d\omega_u}{dt}.\omega_\xi\right)|r|^2 - \left(\frac{d\omega_u}{dt}.r\right).(r.\omega_\xi)\right)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho\left(\frac{d\omega_u}{dt}|r|^2\mathbb{I}\omega_\xi - \frac{d\omega_u}{dt}(r \otimes r)\omega_\xi\right)dx \\
&= \frac{d\omega_u}{dt}.\int_{\Omega_s(t)} \rho\left(|r|^2\mathbb{I} - (r \otimes r)\right)dx.\omega_\xi \\
&= \frac{d\omega_u}{dt}(J_s.\omega_\xi) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Au total sur $\Omega_s(t)$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_s(t)} \rho u\xi dx - M_s\frac{dV_u}{dt}V_\xi - \frac{d\omega_u}{dt}J_s\omega_\xi = \int_{\Omega_s(t)} \rho\frac{\partial\xi}{\partial t}udx + \omega_\xi.(\omega_u \times (J_s.\omega_u)) \qquad (3.21)$$

En sommant (3.18) et (3.21), on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u\xi dx = \int_\Omega \left(\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}u + (\rho u \otimes u - 2\mu D(u)) : D(\xi) + \xi\rho g\right)dx \qquad (3.22)$$

□

On montre ensuite que les solutions suffisamment régulières de la formulation (P_{faible}) sont solutions de (3.2-3.9), à condition d'imposer le bon mouvement rigide à l'intérieur du solide. On montre le lemme suivant :

Lemme 3.2.3 *Soit*

$$\rho \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.23}$$

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega)) \tag{3.24}$$

$$H \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.25}$$

solution de (P_{faible}) avec $u_{|\Omega_s(t)} = u_s$, $u_{|\Omega_f(t)} = u_f$, $\rho_{|\Omega_s(t)} = \rho_s$, $\rho_{|\Omega_f(t)} = \rho_f$. Alors si u_s est définie par

$$u_s = x_G' + \omega \times r \text{ dans } \Omega_s(t), \quad x_G \in H^2(0,T), \quad \omega \in H^1(0,T), \tag{3.26}$$

il existe $p \in L^2(0,T;H^1(\Omega_f(t)))$ telle que (u_f, p, x_G, ω) soit solution de (3.2-3.9).

Preuve Soit (ρ, u, H) vérifiant les hypothèses de régularité (3.23-3.25) et solution de (P_{faible}). Alors $\forall \xi \in \mathcal{H}^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}(t))$,

$$\int_\Omega [\rho u \partial_t \xi + (\rho u \otimes u - 2\mu D(u)) : D(\xi) + \rho g \xi]\, dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \xi dx$$

i.e. en soustrayant de chaque coté $\int_\Omega \rho u \dfrac{d\xi}{dt} dx$,

$$\int_\Omega \left[\frac{d(\rho u)}{dt}\xi + 2\mu D(u) : D(\xi) - \rho g \xi\right] dx = 0 \tag{3.27}$$

<u>Obtention de (3.3), (3.4) et (3.9) dans $\Omega_f(t)$:</u>

Comme u est solution de (P_{faible}), alors $u \in L^2(0,T;\mathcal{V})$, donc l'équation (3.4) est vérifiée et u est nulle sur le bord de Ω.
De plus, avec (3.26) la condition (3.9) sur le bord de $\Omega_s(t)$ est aussi vérifiée.
Enfin, en choisissant en particulier $\xi \in L^2(0,T,\mathcal{V}(\Omega_f(t))$ prolongée par 0 dans $\Omega_s(t)$, alors $\xi \in L^2(0,T,\mathcal{K}(t))$ et on a avec (3.27) :

$$\int_{\Omega_f(t)} \left[\rho_f \frac{du_f}{dt}\xi + 2\mu D(u_f) : D(\xi) - \rho_f g \xi\right] dx = 0 \quad \forall \xi \in L^2(0,T,\mathcal{V}(\Omega_f(t)) \tag{3.28}$$

C'est une forme variationnelle de Navier-Stokes dans $\Omega_f(t)$. Il existe donc $p \in L^2(0,T;H^1(\Omega_f(t)))$ telle que (u_f, p) soit solution de Navier-Stokes au sens faible dans $\Omega_f(t)$.

Et avec les hypothèses de régularité (3.23-3.25) on peut alors en conclure que

$$\frac{d(\rho_f u_f)}{dt} - 2\mu \operatorname{div}(D(u_f)) + \nabla p - \rho_f g = 0 \text{ p.p. dans } [0,T] \times \Omega_f(t) \tag{3.29}$$

Obtention de (3.5-3.6) :

En choisissant maintenant $\xi \in \mathcal{H}^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}(t))$, (3.27) s'écrit

$$\int_{\Omega_f(t)} \left[\frac{d(\rho_f u_f)}{dt}\xi + 2\mu D(u_f) : D(\xi) - \rho_f g \xi\right] dx + \int_{\Omega_s(t)} \left[\frac{d(\rho_s u_s)}{dt}\xi + 2\mu D(u_s) : D(\xi) - \rho_s g \xi\right] dx = 0$$

En intégrant par partie dans le premier membre, et en utilisant (3.29) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_f(t)} \left[\frac{d(\rho_f u_f)}{dt}\xi + 2\mu D(u_f) : D(\xi) - \rho_f g \xi\right] dx &= \int_{\Omega_f(t)} \left[\frac{d(\rho_f u_f)}{dt} - 2\mu \operatorname{div}(D(u_f)) - \rho_f g\right] \xi dx \\
&- \int_{\partial\Omega_s(t)} 2\mu (D(u_f).n)\xi ds \\
&= \int_{\Omega_f(t)} -\nabla p \xi dx - \int_{\partial\Omega_s(t)} 2\mu (D(u_f).n)\xi ds \\
&= \int_{\partial\Omega_s(t)} (p.n)\xi ds - \int_{\partial\Omega_s(t)} 2\mu (D(u_f).n)\xi ds \\
&= -\int_{\partial\Omega_s(t)} (\Sigma_f.n)\xi ds
\end{aligned}$$

avec n la normale sortante à $\Omega_s(t)$.

On obtient donc

$$-\int_{\partial\Omega_s(t)} (\Sigma_f.n)\xi ds + \int_{\Omega_s(t)} \left[\frac{d(\rho_s u_s)}{dt}\xi + 2\mu D(u_s) : D(\xi) - \rho_s g \xi\right] dx = 0$$

i.e., comme $D(\xi) = 0$ dans $\Omega_s(t)$,

$$-\int_{\partial\Omega_s(t)} (\Sigma_f.n)\xi ds + \int_{\Omega_s(t)} \left[\frac{d(\rho_s u_s)}{dt} - \rho_s g\right] \xi dx = 0$$

Afin d'obtenir (3.5) on suppose d'abord $\xi_{|\Omega_s(t)} = V_\xi(t)$ avec $V_\xi \in H^1(0,T)$.
Avec (3.26), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s(t)} \rho \frac{du}{dt} V_\xi dx &= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \frac{du_s}{dt} V_\xi dx = x''_G \int_{\Omega_s(t)} \rho_s dx V_\xi + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \frac{d(\omega \times r)}{dt} V_\xi dx \\
&= M_s x''_G V_\xi + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\frac{d\omega}{dt} \times r\right) V_\xi dx + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right) V_\xi dx \\
&= M_s x''_G V_\xi + \left(\frac{d\omega}{dt} \times \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx\right) V_\xi + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s (\omega \times (\omega \times r)) V_\xi dx \\
&= M_s x''_G V_\xi + \left(\omega \times \left(\omega \times \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx\right)\right) V_\xi \\
&= M_s x''_G V_\xi
\end{aligned}$$

car $\int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx = 0$,

et

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho g V_\xi dx = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s dx g V_\xi = M_s g V_\xi$$

D'où

$$M_s x_G'' \cdot V_\xi = \left[\int_{\partial\Omega_s(t)} (\Sigma_f.n) ds + Mg \right] \cdot V_\xi \quad \forall V_\xi \in H^1(0,T)$$

ce qui est une formulation variationnelle de (3.5).

Afin d'obtenir (3.6) on suppose ensuite $\xi_{|\Omega_s(t)} = \omega_\xi(t) \times r(x,t)$ avec $\omega_\xi \in H^1(0,T)$. Avec (3.26), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s(t)} \rho_s \frac{du_s}{dt} (\omega_\xi \times r) dx &= x_G'' \left(\omega_\xi \times \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx \right) + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) (\omega_\xi \times r) dx \\
&+ \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\omega \times (\omega \times r) \right) (\omega_\xi \times r) dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) (\omega_\xi \times r) dx + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s \left(\omega \times (\omega \times r) \right) (\omega_\xi \times r) dx
\end{aligned}$$

car $\int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx = 0$.

En utilisant (3.19) et (3.20) on obtient donc

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho_s \frac{du_s}{dt} (\omega_\xi \times r) dx = \left(J_s . \frac{d\omega}{dt} \right) \omega_\xi + (\omega \times (J_s.\omega)) \omega_\xi$$

De plus

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho_s g (\omega_\xi \times r) dx = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r \times g dx \omega_\xi$$

et

$$\int_{\partial\Omega_s(t)} (\Sigma_f.n)(\omega_\xi \times r) ds = \int_{\partial\Omega_s(t)} r \times (\Sigma_f.n) ds \omega_\xi$$

On en conclut donc que

$$\left(J_s . \frac{d\omega_u}{dt} \right) \omega_\xi = \left[\int_{\partial\Omega_s(t)} (r \times (\Sigma_f.n)) ds + \int_{\Omega_s(t)} \rho_s r \times g dx - (\omega \times (J_s.\omega)) \right] \omega_\xi \quad \forall \omega_\xi \in H^1(0,T)$$

ce qui est une formulation variationnelle de (3.6).

<u>Obtention de (3.7-3.8) :</u>

Ces deux équations sont obtenues par définition de H dans (P_{faible}) et en utilisant (3.26).
□

3.2.2 Méthode de pénalisation L^2

D'après le Lemme 3.2.1, une vitesse rigide u_s peut être caractérisée de deux manières équivalentes :

$$\exists (u_G, \omega) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, u_s(t,x) := u_G(t) + \omega(t) \times r(t,x) \Longleftrightarrow D(u_s) = 0 \tag{3.30}$$

Ces deux caractérisations suggèrent deux manières possibles de traiter la contrainte de rigidité :

- En faisant agir la pénalisation sur le tenseur des déformations $D(u_s)$, on s'oriente vers des méthodes de pénalisation H^1, car on agit sur les dérivées de la vitesse. Ce type de pénalisation est notamment utilisé dans [52] pour construire des solutions approchées, en vue de démontrer l'existence de solutions.

- En pénalisant plutôt l'écart entre la vitesse et une vitesse rigide bien définie, on agit sur la vitesse elle-même, et on parle donc de pénalisation L^2.

La pénalisation que nous étudions dans la suite est une pénalisation L^2. Le but de cette méthode est d'imposer à un champ de vitesse global u d'être égal à $u_s := u_G + \omega \times r$ dans $\Omega_s(t)$. Deux questions se posent alors :

- Comment imposer $u = u_s$ dans $\Omega_s(t)$?
- Comment calculer les composantes u_G et ω de la vitesse rigide u_s ?

Pour imposer $u = u_s$ dans $\Omega_s(t)$, on ajoute dans les équations modélisant le fluide un terme exprimé en fonction de la différence entre u et u_s, et localisé sur le solide.
En ce qui concerne la vitesse rigide, ce n'est pas une donnée du problème, elle résulte au contraire des forces hydrodynamiques mises en jeu par l'écoulement fluide. On présente dans la partie suivante son calcul par la méthode de projection de [59].

Calcul de la vitesse rigide

Pour le calcul de la vitesse rigide, on utilise la méthode de projection de [59]. Cette méthode suppose que si l'on dispose dans tout le domaine Ω de la solution (ρ, u) du problème bi-fluide suivant :

$$\begin{cases} \rho \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right) - \operatorname{div} \Sigma = \rho g \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla \rho = 0 \\ u(0) = u^0 \\ \rho(0) = \rho_s \chi_{\Omega_s^0} + \rho_f (1 - \chi_{\Omega_s^0}) \end{cases} \tag{3.31}$$

avec $\Sigma = -p\mathbb{I}_3 + 2\mu D(u)$, alors la définition suivante de $u_s := u_G + \omega \times r$:

$$u_s = \frac{1}{M_s}\int_{\Omega_s(t)} \rho u \cdot dx + \left(J_s^{-1}. \int_{\Omega_s(t)} r \times \rho u \cdot dx \right) \times r \tag{3.32}$$

permet de vérifier la conservation des moments linéaire et angulaire du solide :

$$\frac{d(M_s u_G)}{dt} = \int_{\Omega_s(t)} \rho_s g dx + \int_{\partial\Omega_s(t)} \Sigma.n ds$$

et

$$\frac{d(J_s \omega)}{dt} = \int_{\partial\Omega_s(t)} r \times (\Sigma.n) ds$$

En effet, si

$$u_G = \frac{1}{M_s}\int_{\Omega_s(t)} \rho u \cdot dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d(M_s u_G)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_s(t)} \rho u dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{d}{dt}(\rho u) dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho g dx + \int_{\Omega_s(t)} \operatorname{div} \Sigma dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \rho_s g dx + \int_{\partial\Omega_s(t)} \Sigma.n ds
\end{aligned}$$

On obtient donc la conservation du moment linéaire.

De même, si

$$\omega = J_s^{-1}. \int_{\Omega_s(t)} r \times \rho u \cdot dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d(J_s\omega)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_s(t)} r\times\rho u dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{d}{dt}(r\times\rho u)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt}\times\rho u dx + \int_{\Omega_s(t)} r\times\frac{d}{dt}(\rho u)dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt}\times\rho u dx + \int_{\Omega_s(t)} r\times\operatorname{div}\Sigma dx + \int_{\Omega_s(t)} r\times\rho g dx \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt}\times\rho u dx + \int_{\Omega_s(t)} r\times\operatorname{div}\Sigma dx + \left(\int_{\Omega_s(t)} \rho_s r dx\right)\times g \\
&= \int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt}\times\rho u dx + \int_{\Omega_s(t)} r\times\operatorname{div}\Sigma dx
\end{aligned}$$

Or, en posant $\mathbb{T}.e_i = r\times(\Sigma.e_i)$, on a pour la première composante par exemple

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathbb{T})_1 &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(r_2\Sigma_{3j} - r_3\Sigma_{2j}) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(r_2\frac{\partial\Sigma_{3j}}{\partial x_j} - r_3\frac{\partial\Sigma_{2j}}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_j}\Sigma_{3j} - \frac{\partial r_3}{\partial x_j}\Sigma_{2j}\right) \\
&= (r\times\operatorname{div}\Sigma)_1 + (\Sigma_{32} - \Sigma_{23})
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{div}\mathbb{T} = r\times\operatorname{div}\Sigma + \begin{pmatrix}\Sigma_{32}-\Sigma_{23}\\ \Sigma_{13}-\Sigma_{31}\\ \Sigma_{21}-\Sigma_{12}\end{pmatrix} \overset{\Sigma \text{ symétrique}}{=} r\times\operatorname{div}\Sigma$$

Et

$$\int_{\Omega_s(t)} r\times\operatorname{div}\Sigma dx = \int_{\Omega_s(t)}\operatorname{div}\mathbb{T}dx \overset{Green}{=} \int_{\partial\Omega_s(t)}\mathbb{T}.n ds = \int_{\partial\Omega_s(t)} r\times(\Sigma.n)ds$$

D'autre part,

$$r(t,x) = x - x_G(t)$$

Donc

$$\frac{dr(t,x)}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u(t,x).\nabla x - \frac{dx_G(t)}{dt} \quad = \quad u(t,x) - u_G(t)$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt} \times \rho u dx &= \int_{\Omega_s(t)} (u - u_G) \times \rho u dx \\ &= \int_{\Omega_s(t)} u \times \rho u dx - \int_{\Omega_s(t)} u_G \times \rho u dx\end{aligned}$$

Comme $u \times \rho u = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_s(t)} \frac{dr}{dt} \times \rho u dx &= \frac{1}{M_s} \int_{\Omega_s(t)} u \times \left(\int_{\Omega_s(t)} \rho u dx \right) dx \\ &= \frac{1}{M_s} \int_{\Omega_s(t)} u dx \times \int_{\Omega_s(t)} \rho u dx \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d(J_s \omega)}{dt} = \int_{\partial\Omega_s(t)} r \times (\Sigma.n) ds$$

On obtient ainsi la conservation du moment angulaire.

La méthode de pénalisation que l'on étudie utilise cette projection, sauf que le champ de vitesse défini sur Ω et que l'on projette pour calculer la vitesse rigide n'est pas exactement un champ fluide, mais la solution d'un problème fluide pénalisé.

Définition du problème pénalisé

On peut maintenant définir le problème de pénalisation. Soit $\eta > 0$ le paramètre de pénalisation. C'est un petit paramètre que l'on fait tendre vers 0 pour approcher le modèle de couplage classique.
On définit alors de nouvelles variables globales $(\rho_\eta, u_\eta, p_\eta, u_{\eta,s}, H_\eta)$ dépendant de η.

La contrainte de rigidité est imposée en ajoutant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes un terme de pénalisation, localisé sur le domaine solide, et dépendant du paramètre η :

$$\frac{1}{\eta} \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s})$$

La pénalisation n'est pas seulement appliquée sur le bord du domaine solide, mais dans tout ce domaine, on parle donc de pénalisation volumique.

D'autre part, la présence de ρ_η dans ce terme n'est pas nécessaire du point de vue de la modélisation mais permet d'obtenir ensuite le Lemme 3.3.2 utilisé lors des estimations a priori.

On obtient alors la formulation suivante :

Etant données $(\rho_\eta(0) = \rho_\eta^0, u_\eta(0) = u_\eta^0, H_\eta(0) = \chi_{\Omega_s^0})$ trouver $(\rho_\eta, u_\eta, p_\eta, H_\eta)$ tel que

$$\rho_\eta, H_\eta \in L^\infty(Q), \quad u_\eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \cap L^2(0,T,\mathcal{V}), \quad p_\eta \in L^2(Q)$$

solution dans $]0,T[\times\Omega$ de

$$P_\eta \begin{cases} \rho_\eta \left(\dfrac{\partial u_\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\eta \otimes u_\eta) \right) - \mu \operatorname{div}(D(u_\eta)) + \nabla p_\eta + \dfrac{1}{\eta} \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s}) = \rho_\eta g & (3.33) \\ \operatorname{div} u_\eta = 0 & (3.34) \\ u_{\eta,s} = \dfrac{1}{M_\eta} \displaystyle\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \cdot H_\eta dx + \left(J_\eta^{-1}. \displaystyle\int_\Omega \rho_\eta r_\eta \times u_\eta \cdot H_\eta dx \right) \times r_\eta & (3.35) \\ \rho_{\eta t} + u_\eta . \nabla \rho_\eta = 0 & (3.36) \\ H_{\eta t} + u_{\eta,s} . \nabla H_\eta = 0 & (3.37) \end{cases}$$

avec

$$r_\eta = x - x_{G\eta}, \quad x_{G\eta} = \frac{1}{M_\eta} \int_\Omega \rho_\eta H_\eta x dx \tag{3.38}$$

$$M_\eta = \int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx \tag{3.39}$$

et

$$J_\eta = \int_\Omega \rho_\eta (r_\eta^2 \mathbb{I}_3 - r_\eta \otimes r_\eta) H_\eta dx \tag{3.40}$$

et la condition limite suivante pour u_η :

$$u_\eta = 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \tag{3.41}$$

On pose $\Omega_{\eta s}(t) = \{x \in \Omega, \quad H_\eta(t,x) = 1\}$.

Les équations (3.33) et (3.34) correspondent à un problème de Navier-Stokes pénalisé par la différence dans $\Omega_{\eta s}(t)$ entre u_η et la vitesse rigide $u_{\eta,s}$ calculée dans (3.35) par projection explicite sur l'espace des fonctions rigides de $L^2(\Omega_{\eta s}(t))$.

La densité ρ_η est transportée avec u_η, donc, au terme de pénalisation près, les estimations sur (3.33), (3.34) et (3.36) sont les mêmes que pour les équations de Navier-Stokes.

Cependant avec ce choix $M_\eta = \int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx$ ne reste pas constant.

Enfin la fonction caractéristique H_η (donc le solide) est transporté avec la vitesse rigide $u_{\eta,s}$, ce qui garantit que $\Omega_{\eta s}(t)$ n'est pas déformé. On a

$$|\Omega_{\eta s}(t)| = \int_\Omega H_\eta dx = |\Omega^0_{\eta s}|$$

Remarquons cependant que $u_{\eta,s}$ ne s'annule pas au bord, donc en toute rigueur, il faudrait imposer une condition limite sur H_η pour traiter les cas dans lesquels $u_{\eta,s}$ est entrante. Si on suppose que le solide ne touche pas le bord du domaine, cette condition est 0, ce qui revient à résoudre (3.37) sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, puis à prendre sa restriction sur Ω.

ρ_η et H_η n'étant pas transportées par le même champ de vitesse, on n'a donc pas $\rho_\eta H_\eta = \rho_s$ en général.

Enfin, d'un point de vue numérique (voir section 3.5), le calcul explicite de la vitesse rigide permet de transporter le solide avec une vitesse régulière.

On souhaite montrer dans la suite que lorsque le paramètre η tend vers 0, la solution du problème P_η converge vers celle de la formulation faible P_{faible} décrite précédemment.

3.3 Analyse numérique de la méthode de pénalisation L^2

Cette partie est consacrée à l'étude de convergence du problème pénalisé P_η vers la formulation faible P_{faible} du problème couplé. On fait donc tout d'abord des estimations a priori sur les différentes variables du problème pénalisé, afin d'obtenir les convergences nécessaires au passage à la limite en η.
L'obtention de ces convergences est réalisée en deux temps. On obtient d'abord des convergences faibles sur les vitesses u_η et $u_{\eta,s}$ par des estimations classiques sur Navier-Stokes et à partir de l'équation définissant la vitesse rigide, ainsi que la convergence forte de H_η et ρ_η, en utilisant un résultat de compacité de Di Perna et Lions ([50], p.41).
Le point central de l'étude consiste ensuite en l'obtention de la convergence forte de u_η dans $L^2(Q)$. Cette convergence est en effet nécessaire pour passer à la limite dans le terme non linéaire $\mathrm{div}(u_\eta \otimes u_\eta)$ de Navier-Stokes, et nous utilisons des outils introduits dans [52] pour l'obtenir.

Le but de cette partie est donc de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses de régularité établies précédemment, soit* $(\rho_\eta, u_\eta, p_\eta, H_\eta)$ *solution de* P_η*. Si* $\forall t \in [0,T]$, $\overline{\Omega_s(t)} \cap \partial\Omega = \emptyset$*, alors il existe une sous-suite de* $(\rho_\eta, u_\eta, H_\eta)$ *et des fonctions* (ρ, u, H) *telles que*

$$\rho_\eta \to \rho, H_\eta \to H \text{ fort dans } \mathcal{C}(0,T;L^q(\Omega)) \quad \forall q \geq 1,$$

$$u_\eta \to u \text{ fort dans } L^2(Q) \text{ et faible dans } L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \cap L^2(0,T,\mathcal{V})$$

et telles que (ρ, u, H) *est une solution de* (P_{faible})*.*

3.3.1 Lemme de projection

On montre tout d'abord dans cette partie une propriété liée à la caractérisation d'une vitesse rigide, et qui constitue un argument essentiel à l'obtention des premières estimations a priori pour l'étude de convergence. Le Lemme 3.3.2 montre que la vitesse $u_{\eta,s}$ définie dans P_η est la projection de u_η dans $L^2(\Omega_{s,\eta}(t))$ sur l'ensemble des vitesses rigides :

Lemme 3.3.2 *Soit* ξ *un champ de vitesse rigide, i.e. tel que* $\xi(x) = V_\xi + \omega_\xi \times r_\eta(x)$ *avec* $V_\xi \in \mathbb{R}^3$ *et* $\omega_\xi \in \mathbb{R}^3$*. Si* $u_{\eta,s}$ *est définie par*

$$u_{\eta,s} = \frac{1}{M_\eta}\int_\Omega \rho_\eta H_\eta u_\eta dx + \left(J_\eta^{-1}.\int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta \times u_\eta dx\right) \times r_\eta,$$

Alors

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s})\xi dx = 0 \tag{3.42}$$

Si de plus H_η *a pour support* $\Omega_{\eta,s}(t)$*, le résultat peut être généralisé au cas d'un champ* ξ *dépendant du temps, et rigide dans* $\Omega_{\eta,s}(t)$*.*

Preuve On pose

$$V_{u_\eta} = \frac{1}{M_\eta}\int_\Omega \rho_\eta H_\eta u_\eta dx$$

$$\omega_{u_\eta} = J_\eta^{-1}.\int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta \times u_\eta dx$$

avec M_η et J_η définis par (3.39) et (3.40).
Ainsi

$$u_{\eta,s}(x) = V_{u_\eta} + \omega_{u_\eta} \times r_\eta(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s})\xi dx &= \int_\Omega \rho_\eta H_\eta \left[u_\eta - \left(V_{u_\eta} + \omega_{u_\eta} \times r_\eta\right)\right]\left[V_\xi + \omega_\xi \times r_\eta\right] dx \\
&= V_\xi \int_\Omega \rho_\eta H_\eta u_\eta dx + \omega_\xi \int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta \times u_\eta dx - V_{u_\eta} V_\xi \int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx \\
&- V_{u_\eta}\left(\omega_\xi \times \int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta dx\right) - V_\xi \left(\omega_{u_\eta} \times \int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta dx\right) \\
&- \int_\Omega \rho_\eta H_\eta (\omega_{u_\eta} \times r_\eta)(\omega_\xi \times r_\eta) dx \\
&= V_\xi M_\eta V_{u_\eta} + \omega_\xi (J_\eta . \omega_{u_\eta}) - V_{u_\eta} V_\xi M_\eta \\
&- V_{u_\eta}\left(\omega_\xi \times \int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta dx\right) - V_\xi \left(\omega_{u_\eta} \times \int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta dx\right) \\
&- \int_\Omega \rho_\eta H_\eta (\omega_{u_\eta} \times r_\eta)(\omega_\xi \times r_\eta) dx
\end{aligned}$$

Or $(\omega_{u_\eta} \times r_\eta)(\omega_\xi \times r_\eta) = (\omega_\xi \omega_{u_\eta}) r_\eta^2 - (r_\eta . \omega_\xi)(r_\eta . \omega_{u_\eta})$, donc $\int_\Omega \rho_\eta H_\eta (\omega_{u_\eta} \times r_\eta)(\omega_\xi \times r_\eta) dx = \omega_\xi (J_\eta . \omega_{u_\eta})$.
Et par définition de r_η, $\int_\Omega \rho_\eta H_\eta r_\eta dx = 0$. Au total on obtient donc

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s})\xi dx = \omega_\xi (J_\eta . \omega_{u_\eta}) - \omega_\xi (J_\eta . \omega_{u_\eta}) = 0$$

□

En particulier, on a donc par définition de $u_{\eta,s}$:

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s}) u_{\eta,s} dx = 0$$

3.3.2 Estimations sur les équations de transport et de Navier-Stokes

Les majorations effectuées pour obtenir les estimations font apparaitre une constante positive toujours notée C, et dont la valeur est éventuellement modifiée dans les étapes de calcul.

Estimations sur les équations de transport : convergences faibles de ρ_η et H_η

Avec (3.36) et (3.37) on montre grâce à des estimations classiques

$$\rho_\eta \text{ bornée dans } L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega)) \tag{3.43}$$

et

$$H_\eta \text{ bornée dans } L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega)) \tag{3.44}$$

Plus précisément, pour $t \in]0,T[$,

$$\rho_{min} := \min(\rho_s,\rho_f) \leq \rho_\eta(t,x) \leq \max(\rho_s,\rho_f), \quad H_\eta(t,x) \in \{0,1\} \tag{3.45}$$

Donc il existe des sous-suites de ρ_η et H_η, encore notées ρ_η et H_η telles que

$$\rho_\eta \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega)) \text{ faible*}, \tag{3.46}$$

et

$$H_\eta \rightharpoonup H \text{ dans } L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega)) \text{ faible*}, \tag{3.47}$$

avec les mêmes bornes sur les limites ρ et H.

L'existence de la limite faible H nous permet alors de poser

$$\Omega_s(t) = \{x \in \Omega, H(t,x) = 1\} \tag{3.48}$$

Estimations sur les équations de Navier-Stokes

En multipliant l'équation (3.33) par u_η et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\eta \otimes u_\eta)\right) u_\eta dx - \mu \int_\Omega \operatorname{div}(D(u_\eta)) u_\eta dx + \int_\Omega \nabla p_\eta u_\eta dx \\ + \quad &\frac{1}{\eta} \int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s}) u_\eta dx = \int_\Omega \rho_\eta g u_\eta dx \end{aligned}$$

Or, avec (3.34) et (3.41),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\eta \otimes u_\eta)\right) u_\eta dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\eta \otimes u_\eta)\right) dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial(\rho_\eta u_\eta)}{\partial t} u_\eta + \operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta) u_\eta dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\rho_\eta |u_\eta|^2 u_\eta) dx + \int_\Omega \frac{\partial(\rho_\eta |u_\eta|^2)}{\partial t} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\eta |u_\eta|^2 \operatorname{div}(u_\eta) dx + \int_\Omega u_\eta.\nabla(\rho_\eta |u_\eta|^2) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{\partial(\rho_\eta |u_\eta|^2)}{\partial t} dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial(\rho_\eta |u_\eta|^2)}{\partial t} dx
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega u_\eta.\nabla p_\eta dx = 0$$

Comme d'autre part, avec le Lemme 3.3.2

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s}) u_\eta dx = \int_\Omega \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s})^2 dx$$

on a donc au total, avec $\sqrt{H_\eta} = H_\eta$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_\eta} u_\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|D(u_\eta)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\eta}\|\sqrt{\rho_\eta} H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\sqrt{\rho_\eta} u_\eta\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(Q)} \|\rho_\eta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(Q)}$$

i.e. en utilisant (3.43) et $\|g\|_{L^\infty(Q)} \leq C$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_\eta} u_\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|D(u_\eta)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\eta}\|\sqrt{\rho_\eta} H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\sqrt{\rho_\eta} u_\eta\|_{L^2(\Omega)}$$

D'où en intégrant en temps sur $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\rho_\eta}(t) u_\eta(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ 2\mu \|D(u_\eta)\|^2_{L^2(Q)} + \frac{2}{\eta}\|\sqrt{\rho_\eta} H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s})\|^2_{L^2(Q)} \\
&\leq \|\sqrt{\rho_{\eta 0}} u_{\eta 0}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^T \|\sqrt{\rho_\eta}(s) u_\eta(s)\|_{L^2(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} y(t) = \|\sqrt{\rho_\eta}(t) u_\eta(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ y_0 = \|\sqrt{\rho_{\eta 0}} u_{\eta 0}\|_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

On a alors

$$y^2(t) \leq y_0^2 + C \int_0^T y(s)ds$$

Donc en appliquant Gronwall ([9] p.84), on a

$$y(t) \leq y_0 + \frac{C}{2}$$

i.e.

$$\|\sqrt{\rho_\eta}(t)u_\eta(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\sqrt{\rho_{\eta 0}}u_{\eta 0}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{2} \leq C$$

Ensuite, en utilisant Korn ([9], p.329), on a

$$\|\nabla u_\eta\|_{L^2(Q)} \leq C\|D(u_\eta)\|_{L^2(Q)} \leq C$$

Enfin, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}}\|\sqrt{\rho_\eta}H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s})\|_{L^2(Q)} \leq C$$

On obtient donc

$$u_\eta \text{ bornée dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)), \tag{3.49}$$

$$\sqrt{\rho_\eta}u_\eta \text{ et } u_\eta \text{ bornées dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)), \tag{3.50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{\rho_\eta}H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s}) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\eta}}H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s}) \text{ bornées dans } L^2(Q). \tag{3.51}$$

Donc il existe des sous-suites de ρ_η, u_η, $u_{\eta,s}$ et H_η, encore notées ρ_η, u_η, $u_{\eta,s}$ et H_η, telles que

$$u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \text{ faible}, \tag{3.52}$$

$$\sqrt{\rho_\eta}u_\eta \rightharpoonup w \text{ et } u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \text{ faible*}, \tag{3.53}$$

$$\sqrt{\rho_\eta}H_\eta u_\eta - \sqrt{\rho_\eta}H_\eta u_{\eta,s} \to 0 \text{ et } H_\eta u_\eta - H_\eta u_{\eta,s} \to 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}. \tag{3.54}$$

L'identification de la limite w avec $\sqrt{\rho}u$ est déduite de la convergence forte de ρ_η, obtenue en utilisant des résultats de compacité de DiPerna-Lions ([61]) sur les équations de transport.
En effet, avec ([61], théorème II.4), la convergence faible (3.52), et (3.34), on obtient

$$\rho_\eta \to \rho \text{ dans } \mathcal{C}(0,T,L^q(\Omega)) \text{ fort } \forall q \in [1,+\infty[\tag{3.55}$$

avec ρ solution de

$$\begin{cases} \rho_t + u.\nabla\rho = 0 \text{ sur }]0,T[\times\Omega \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

Cette convergence forte permet alors de passer à la limite dans le produit $\sqrt{\rho_\eta}u_\eta$.
En effet soit $v \in L^q(0,T,L^r(\Omega))$ avec $q > 2$ et $r > \frac{6}{5}$. On a

$$\int_0^T \int_\Omega (\sqrt{\rho_\eta}u_\eta - \sqrt{\rho}u)v dxdt = \int_0^T \int_\Omega (u_\eta - u)\sqrt{\rho}v dxdt + \int_0^T \int_\Omega (\sqrt{\rho_\eta} - \sqrt{\rho})u_\eta v dxdt$$

Or en dimension inférieure ou égale à trois H^1 s'injecte dans L^6, donc de (3.52) on déduit

$$u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T,L^6(\Omega)) \text{ faible,}$$

et comme ρ est bornée dans $L^\infty(Q)$,

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (u_\eta - u)\sqrt{\rho}v dxdt = 0$$

D'autre part de la convergence forte (3.55) on peut déduire la convergence forte de $\sqrt{\rho_\eta}$ dans le dual de l'espace dans lequel on choisit $u_\eta v$, $\forall q > 2$ et $\forall r > \frac{6}{5}$, et on obtient donc

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (\sqrt{\rho_\eta} - \sqrt{\rho})u_\eta v dxdt = 0$$

En conclusion on a

$$\sqrt{\rho_\eta}u_\eta \rightharpoonup \sqrt{\rho}u \text{ dans } L^q(0,T,L^r(\Omega)) \text{ faible, avec } q < 2 \text{ et } r < 6. \tag{3.56}$$

3.3.3 Passage à la limite dans la vitesse rigide

La vitesse rigide est définie par

$$u_{\eta,s}(t,x) = u_{\eta,G}(t) + \omega_\eta(t) \times r_\eta(t,x)$$

avec

$$u_{\eta,G}(t) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \cdot H_\eta dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx}$$

et

$$\omega_\eta(t) = \left(\int_\Omega \rho_\eta(r_\eta^2\mathbb{I} - r_\eta \otimes r_\eta)H_\eta dx\right)^{-1} . \int_\Omega \rho_\eta r_\eta \times u_\eta \cdot H_\eta dx$$

et r_η bornée dans $L^\infty(Q)$.

On montre tout d'abord que cette vitesse converge faiblement, puis que sa limite s'exprime de manière analogue en fonction des limites de ρ_η, u_η et H_η. On a besoin pour cela

de la convergence forte de H_η.

D'une part on a

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx \geq \rho_{min} \int_\Omega H_\eta dx = \rho_{min} |\Omega_s^0| > 0$$

donc avec les bornes établies précédemment sur ρ_η, u_η et H_η, on obtient

$$u_{\eta,G}(t) \text{ bornée dans } L^\infty(0,T)$$

D'autre part, on vérifie que chaque composante de $J_\eta^{-1} = \left(\int_\Omega \rho_\eta (r_\eta^2 \mathbb{I} - r_\eta \otimes r_\eta) H_\eta dx \right)^{-1}$ est bornée indépendamment de η et t.

En effet, pour $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned}
a^T J_\eta a &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i \left(\int_{\Omega_s(t)} \rho_\eta (|r_\eta|^2 \delta_{ij} - r_{\eta,i} r_{\eta,j}) dx \right) a_j \\
&\geq \rho_{min} \left(\int_{\Omega_s(t)} |r_\eta|^2 \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} a_i a_j dx - \int_{\Omega_s(t)} \sum_{i,j=1}^{3} (r_{\eta,i}.a_i)(r_{\eta,j}.a_j) dx \right) \\
&\geq \rho_{min} \int_{\Omega_s(t)} (|r_\eta|^2 |a|^2 - |r_\eta.a|^2) dx \\
&\geq \rho_{min} \int_{\Omega_s(t)} |r_\eta \times a|^2 dx > 0
\end{aligned}$$

De plus, comme le domain rigide $\Omega_{\eta s}(t)$ ne se déforme pas, il contient pour tout t une boule de centre $x_{\eta G}(t)$ et de rayon $R > 0$. Ainsi on a

$$a^T J_\eta a \geq \rho_{min} \int_{B(x_{\eta G}(t),R)} |r_\eta \times a|^2 dx = \rho_{min} \int_{B(0,R)} |x \times a|^2 dx \geq C(R)|a|^2$$

avec $C(R) = \frac{2R^5\pi}{15} > 0$. En prenant $a = J_\eta^{-\frac{1}{2}} b$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$,

$$b^T J_\eta^{-1} b = |J_\eta^{-\frac{1}{2}} b|^2 \leq \frac{1}{C(R)} |b|^2$$

d'où chaque composante de J_η^{-1} est bornée indépendamment de η et t.
Avec les bornes établies précédemment sur ρ_η, u_η et H_η, on a donc

$$\omega_\eta(t) \text{ bornée dans } L^\infty(0,T)$$

Au total, il existe donc une sous suite encore notée $u_{\eta,s}$ de $u_{\eta,s}$ telle que

$$u_{\eta,s} \rightharpoonup u_s := u_G + \omega \times r \text{ dans } L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega)) \text{ faible*} \tag{3.57}$$

En calculant le gradient de $u_{\eta,s}$:

$$\nabla u_{\eta,s} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_\eta^3 & \omega_\eta^2 \\ \omega_\eta^3 & 0 & -\omega_\eta^1 \\ -\omega_\eta^2 & \omega_\eta^1 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $\nabla u_{\eta,s}$ est aussi bornée dans $L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))$. D'où la convergence

$$u_{\eta,s} \rightharpoonup u_s \text{ dans } L^\infty(0,T,W^{1,\infty}(\Omega)) \text{ faible*} \tag{3.58}$$

Reste à identifier la limite u_s avec la projection de u dans l'espace des champs rigides dans $\Omega_s(t)$. If faut pour cela pouvoir passer à la limite dans les expressions de $u_{\eta,G}$ et ω_η, ce qui requiert la convergence forte de H_η. Elle est obtenue en appliquant de nouveau les résultats de compacité de DiPerna-Lions [61] :

$$H_\eta \to H \text{ dans } \mathcal{C}(0,T,L^p(\Omega)) \text{ fort } \forall p \in [1,+\infty[\tag{3.59}$$

avec H solution de

$$\begin{cases} H_t + u_s.\nabla H = 0 \text{ sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n \\ H(0,x) = H_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Le problème ci-dessus est posé dans $\mathbb{R}^n$, car u_s ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Cependant en supposant que le solide rigide ne touche jamais le bord de Ω, alors on peut imposer $H = 0$ sur $\partial\Omega$. D'autre part on montre dans la suite (Lemme 3.3.5) qu'à la limite $Hu = Hu_s$, donc H est aussi solution du problème suivant pour lequel on dispose d'une condition pour la vitesse sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} H_t + u.\nabla H = 0 \text{ sur }]0,T[\times\Omega \\ H(0,x) = H_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

Cette convergence nous permet alors d'obtenir la convergence forte de r_η vers r dans $\mathcal{C}(0,T,L^p(\Omega))$, $\forall p \geq 1$. En effet, avec (3.59) et (3.55) on peut passer à la limite dans M_η et obtenir $M = \displaystyle\int_\Omega \rho H dx$. Ainsi,

$$r_\eta - r = x_G - x_{G\eta} = \frac{1}{M}\int_\Omega \rho H dx - \frac{1}{M_\eta}\int_\Omega \rho_\eta H_\eta dx \to 0 \text{ dans } \mathcal{C}(0,T,L^p(\Omega)) \quad \forall p \geq 1 \tag{3.60}$$

Finalement, les convergences (3.52), (3.59), (3.55), et (3.60) nous permettent de passer à la limite dans $u_{\eta,G}$ et ω_η et d'obtenir $u_s = u_G + \omega \times r$ avec

$$u_G(t) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \rho u \cdot H dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho H dx}, \ \omega(t) = \left(\int_\Omega \rho(r^2\mathbb{I} - r \otimes r) H dx\right)^{-1} . \int_\Omega \rho r \times u \cdot H dx, \text{ et } r = x - x_G$$

où $x_G = \dfrac{\displaystyle\int_\Omega \rho H x dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho H dx}$.

3.3.4 Convergence forte de u_η dans $L^2((0,T) \times \Omega)$

Afin de passer à la limite dans le terme d'inertie de Navier-Stokes, on doit disposer en plus des convergences faibles précédentes de la convergence forte de u_η dans $L^2(Q)$.

Lorsque l'on étudie les équations de Navier-Stokes, avec les mêmes estimations que celles obtenues ci-dessus, et avec des données (conditions initiales, force extérieure) de même régularité, on peut obtenir cette convergence forte en estimant la dérivée en temps fractionnaire d'ordre $\gamma > 0$ de u_η définie par

$$\mathcal{F}^{-1}((2i\pi\tau)^\gamma \mathcal{F}(u_\eta)(\tau))$$

avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ les opérateurs de transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse. Voir par exemple [78] p.285 pour la démonstration.

C'est également la méthode employée dans [5] dans le cas d'un obstacle rigide fixe afin d'étudier des méthodes de pénalisation L^2 et H^1. Cependant, l'ajout du terme de pénalisation dans Navier Stokes ne permet pas l'utilisation de cette méthode. En effet, ce terme est localisé (par l'intermédiaire de la fonction H_η) sur le domaine solide qui dépend du temps, ce qui impose de calculer une transformée de Fourier de produit de fonctions dépendant du temps lors de l'obtention de l'estimation.

La méthode que nous avons choisi d'utiliser ici est adaptée de celle proposée dans [52]. Dans cet article les auteurs étudient la convergence d'un problème de pénalisation de type H^1 vers la formulation faible d'un modèle fluide-solides rigides en 2D. Cette méthode consiste à faire intervenir un opérateur de projection orthogonale sur des espaces de vitesses rigides dans des domaines légèrement plus grands que le domaine solide étudié, et ne dépendant pas du paramètre de pénalisation. On adapte d'une part les résultats de [52] au cas de la dimension 3, d'autre part la spécificité du problème de pénalisation que

l'on étudie ici résidant dans le calcul explicite de la vitesse rigide, par projection du champ fluide, nous montrons donc la convergence forte sur u_η en utilisant cette expression de la vitesse rigide.

Dans les calculs qui suivent, σ représente une épaisseur de voisinage du domaine solide, et r un ordre de régularité des champs de vitesse.

On démontre tout d'abord quelques résultats intermédiaires, puis en faisant intervenir l'opérateur de projection on conclut en obtenant la convergence forte de u_η dans $L^2(Q)$.

Notations

Soit $\sigma > 0$ et $r \in [0,1]$. On note :
- $\Omega_{s,\sigma}(t) = \{x \in \Omega, \mathrm{dist}(x, \Omega_s(t)) < \sigma\}$
- $\mathcal{V}^0 = \{v \in L^2(\Omega), \mathrm{div}\, v = 0, v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$
- $\mathcal{V}^r = \{v \in H^r(\Omega), \mathrm{div}\, v = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, pour $r > 0$
- $\mathcal{K}^r_\sigma(t) = \{v(t) \in \mathcal{V}^r, D(v(t)) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_{s,\sigma}(t))\}$
- $P^r_\sigma(t)$ la projection orthogonale de $\mathcal{V}^r$ sur $\mathcal{K}^r_\sigma(t)$

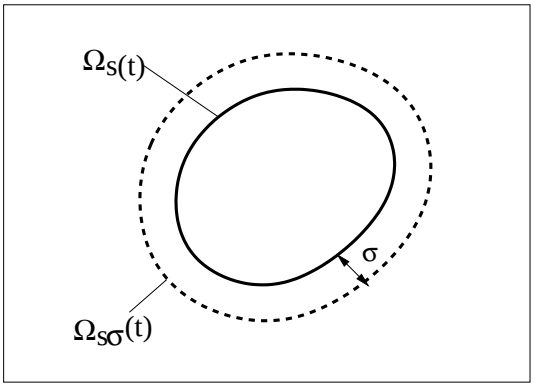


FIG. 3.2 – Domaine rigide agrandi

Afin de montrer la convergence forte de u_η dans $L^2((0,T)\times\Omega)$, on effectue la décomposition suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega |u_\eta - u|^2 dxdt \leq \frac{1}{\rho_{min}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\rho(u_\eta^2 - u^2)| dxdt + \int_0^T \int_\Omega |2\rho u(u - u_\eta)| dxdt \right)$$

Avec (3.53) la seconde intégrale du terme de droite tend vers 0, donc

$$\int_0^T \int_\Omega |u_\eta - u|^2 dxdt \leq \frac{1}{\rho_{min}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\rho_\eta u_\eta^2 - \rho u^2| dxdt + \int_0^T \int_\Omega |(\rho_\eta - \rho) u_\eta^2| dxdt \right)$$

De plus avec (3.49) et (3.55) la seconde intégrale du terme de droite tend vers 0, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |u_\eta - u|^2 dxdt &\leq \frac{1}{\rho_{min}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\rho_\eta u_\eta P_\sigma^r(u_\eta) - \rho u P_\sigma^r(u)| dxdt \right. \\
&+ \left. \int_0^T \int_\Omega |\rho_\eta u_\eta (u_\eta - P_\sigma^r(u_\eta))| dxdt + \int_0^T \int_\Omega |\rho u (P_\sigma^r(u) - u)| dxdt \right) \\
&\leq \frac{1}{\rho_{min}} (\|\rho_\eta u_\eta P_\sigma^r(u_\eta) - \rho u P_\sigma^r(u)\|_{L^1(Q)} \\
&+ \|\rho_\eta\|_{L^\infty(Q)} \|u_\eta\|_{L^2(Q)} \|P_\sigma^r(u_\eta) - u_\eta\|_{L^2(Q)} \\
&+ \|\rho\|_{L^\infty(Q)} \|u\|_{L^2(Q)} \|P_\sigma^r(u) - u\|_{L^2(Q)})
\end{aligned}$$

Enfin avec (3.49) et (3.43), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |u_\eta - u|^2 dxdt &\leq \frac{1}{\rho_{min}} (\|\rho_\eta u_\eta P_\sigma^r(u_\eta) - \rho u P_\sigma^r(u)\|_{L^1(Q)} \\
&+ C \|P_\sigma^r(u_\eta) - u_\eta\|_{L^2(Q)} \\
&+ C \|P_\sigma^r(u) - u\|_{L^2(Q)})
\end{aligned} \tag{3.61}$$

On observe que pour obtenir la convergence forte souhaitée, il faut donc montrer les convergences suivantes :

$$\lim_{\sigma \to 0} \|P_\sigma^r(u) - u\|_{L^2(Q)} = 0 \tag{3.62}$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \lim_{\eta \to 0} \|P_\sigma^r(u_\eta) - u_\eta\|_{L^2(Q)} = 0 \tag{3.63}$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \lim_{\eta \to 0} \|\rho_\eta u_\eta P_\sigma^r(u_\eta) - \rho u P_\sigma^r(u)\|_{L^1(Q)} = 0 \tag{3.64}$$

Commençons par établir quelques lemmes techniques.

Résultats préliminaires

On montre tout d'abord le résultat d'intégration suivant :

Lemme 3.3.3 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f_n(t) \to 0 \ p.p. \ sur \ [0,T] \ (i) \\ \displaystyle\int_0^T (f_n(t))^p dt \leq C, p > 2 \ (ii) \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^T (f_n(t))^2 dt \to 0$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Avec le théorème d'Egorov ([11], p.75) et (i), il existe $A_\varepsilon \subset [0,T]$ telle que

$$\begin{cases} |[0,T] \backslash A_\varepsilon| < \varepsilon \\ f_n \to 0 \text{ uniformément sur } A_\varepsilon \end{cases}$$

D'où

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall t \in A_\varepsilon, |f_n(t)|^2 < \varepsilon$$

Donc

$$\int_{A_\varepsilon} (f_n(t))^2 dt \leq \varepsilon |A_\varepsilon| \leq \varepsilon T$$

D'autre part, avec (ii),

$$\int_{[0,T]\backslash A_\varepsilon} (f_n(t))^2 dt \leq \int_{[0,T]\backslash A_\varepsilon} 1^q dt \int_{[0,T]} (f_n(t))^p dt \leq \varepsilon^q C$$

avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$.
On obtient donc

$$\int_0^T (f_n(t))^2 dt \leq \varepsilon T + \varepsilon^q C$$

D'où

$$\int_0^T (f_n(t))^2 dt \to 0$$

□

Le lemme qui suit permet d'estimer la solution d'un problème de Stokes dans le domaine $\Omega \backslash \overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)$ en fonction du prolongement dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$ de la condition sur le bord $\partial\Omega_{s,\sigma}(t)$:

Lemme 3.3.4 *Soit $u(t) \in H^1(\Omega_{s,\sigma}(t))$ telle que $u_{|\partial\Omega_{s,\sigma}(t)}(t) = g(t)$, $f(t) \in L^2(\partial\Omega)$ et $((w(t), p(t)) \in H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)) \times L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$ solution du problème de Stokes linéaire*

$$\begin{cases} -\Delta w(t) + \nabla p(t) = 0 \ \textit{sur}\ \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} w(t) = 0 \ \textit{sur}\ \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ w(t) = g(t) \ \textit{sur}\ \partial\Omega_{s,\sigma}(t) \\ w(t) = f(t) \ \textit{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

Alors il existe $\sigma_0 > 0$ tel que pour tout $\sigma < \sigma_0$,

$$\exists C > 0, \quad \|w(t)\|_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \leq C \left(\|u(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} \|\nabla u(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} + \|f(t)\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)$$

Preuve Soit $\phi(t) \in L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$. Alors il existe $(v(t), q(t)) \in H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)) \times L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$ solution du problème de Stokes linéaire

$$\begin{cases} -\Delta v(t) + \nabla q(t) = \phi(t) \text{ sur } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} v(t) = 0 \text{ sur } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ v(t) = 0 \text{ sur } \partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)) \end{cases}$$

Alors, comme on a supposé une régularité $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega\backslash\Omega_s^0$, elle est conservée lors du mouvement rigide, donc pour $\Omega\backslash\Omega_s(t)$; et pour σ suffisamment petit ($\sigma < \sigma_0$) pour $\Omega\backslash\Omega_{s,\sigma}(t)$. On obtient donc le résultat de régularité suivant ([78], prop 2.3., p.35) :

$$(v(t), q(t)) \in H^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)) \times H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$$

et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} + \|q(t)\|_{H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \leq C\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \tag{3.65}$$

La constante C dépend de la géométrie de $\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$ mais peut être choisie indépendamment de σ grâce à la régularité du mouvement rigide.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\phi(t)dx &= -\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\Delta v(t)dx + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\nabla q(t)dx \\ &= -\int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n}ds + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} \nabla w(t)\nabla v(t)dx \\ &+ \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)q(t).nds - \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} \operatorname{div} w(t)q(t)dx \end{aligned}$$

Or $\operatorname{div} w(t) = 0$, donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\phi(t)dx &= -\int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n}ds + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} \frac{\partial w(t)}{\partial n}v(t)ds \\ &- \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} \Delta w(t)v(t)dx + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)q(t).nds\end{aligned}$$

De plus avec $v = 0$ sur $\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))$ et $\Delta w(t) = \nabla p(t)$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\phi(t)dx &= -\int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n}ds \\ &+ \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} \nabla p(t)v(t)dx + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}})(t)} w(t)q(t).nds\end{aligned}$$

Enfin, comme $w(t) = g(t)$ sur $\partial\Omega_{s,\sigma}(t)$, $w(t) = f(t)$ sur $\partial\Omega$ et $\operatorname{div} v(t) = 0$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\phi(t)dx &= -\int_{\partial\Omega_{s,\sigma}(t)} g(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n}ds + \int_{\partial\Omega_{s,\sigma}(t)} g(t)q(t).nds \\ &- \int_{\partial\Omega} f(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n}ds + \int_{\partial\Omega} f(t)q(t).nds \\ &\leq \|g(t)\|_{L^2(\partial\Omega_{s,\sigma}(t))}\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\partial\Omega_{s,\sigma}(t))} + \|q(t)\|_{L^2(\partial\Omega_{s,\sigma}(t))}\right) \\ &+ \|f(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|q(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\end{aligned}$$

En utilisant des théorèmes de trace sur les espaces de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t)} w(t)\phi(t)dx &\leq C\|g(t)\|_{L^2(\partial\Omega_{s,\sigma}(t))}\left(\|v(t)\|_{H^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} + \|q(t)\|_{H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}\right) \\ &+ C\|f(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}\left(\|v(t)\|_{H^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} + \|q(t)\|_{H^1(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}\right) \\ &\overset{(3.65)}{\leq} C\left(\|g(t)\|_{L^2(\partial\Omega_{s,\sigma}(t))} + \|f(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \\ &\leq C\left(\|u(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}\|\nabla u(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} + \|f(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On montre ensuite qu'à la limite $\eta \to 0$, la solution u du problème fluide pénalisé est rigide dans $\Omega_s(t)$:

Lemme 3.3.5 *Les limites H, u et u_s définies dans (3.59), (3.52) et (3.57) vérifient*

$$Hu = Hu_s \tag{3.66}$$

Preuve On montre tout d'abord que

$$H_\eta u_\eta \rightharpoonup Hu \text{ dans } L^q(0,T,L^r(\Omega)) \text{ faible, avec } q<2 \text{ et } r<6 \tag{3.67}$$

En effet soit $v \in L^q(0,T,L^r(\Omega))$ avec $q>2$ et $r>\frac{6}{5}$. On a

$$\int_0^T \int_\Omega (H_\eta u_\eta - Hu) v dxdt = \int_0^T \int_\Omega (u_\eta - u) H v dxdt + \int_0^T \int_\Omega (H_\eta - H) u_\eta v dxdt$$

Or en dimension inférieure ou égale à trois H^1 s'injecte dans L^6, donc de (3.52) on déduit

$$u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T,L^6(\Omega)) \text{ faible,}$$

et comme H est bornée dans $L^\infty(Q)$,

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (u_\eta - u) H v dxdt = 0$$

D'autre part de la convergence forte (3.59) on peut déduire la convergence forte de H_η dans le dual de l'espace dans lequel on choisit $u_\eta v$, et on obtient donc

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (H_\eta - H) u_\eta v dxdt = 0$$

On montre ensuite que

$$H_\eta u_{\eta,s} \rightharpoonup Hu_s \text{ dans } L^p(0,T,L^p(\Omega)) \text{ faible, } \forall p \in [1,+\infty[\tag{3.68}$$

En effet soit $v \in L^p(0,T,L^p(\Omega))$ avec $p>1$. On a

$$\int_0^T \int_\Omega (H_\eta u_{\eta,s} - Hu_s) v dxdt = \int_0^T \int_\Omega (u_{\eta,s} - u_s) H v dxdt + \int_0^T \int_\Omega (H_\eta - H) u_{\eta,s} v dxdt$$

Comme H est bornée dans $L^\infty(Q)$, on a avec (3.57) :

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (u_{\eta,s} - u_s) H v dxdt = 0$$

D'autre part de la convergence forte (3.59) on peut déduire la convergence forte de H_η dans le dual de l'espace dans lequel on choisit $u_{\eta,s} v$, et on obtient donc

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^T \int_\Omega (H_\eta - H) u_{\eta,s} v dxdt = 0$$

Les convergences (3.67) et (3.68) nous permettent de déduire que

$$H_\eta u_\eta - H_\eta u_{\eta,s} \rightharpoonup Hu - Hu_s \text{ dans } L^q(0,T,L^r(\Omega)) \text{ faible, avec } q<2 \text{ et } r<6 \tag{3.69}$$

On rappelle enfin que

$$H_\eta u_\eta - H_\eta u_{\eta,s} \to 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort.} \tag{3.70}$$

En identifiant les limites dans (3.69) et (3.70) on obtient le résultat.
□

Enfin on justifie l'utilisation des espaces "légèrement agrandis" par rapport à $\Omega_s(t)$ en montrant que lorsque l'on passe à la limite en η, on a les inclusions suivantes :

Lemme 3.3.6

$$\forall \sigma>0,\ \exists \eta_0>0,\ \forall \eta<\eta_0,\ \Omega_{\eta s}(t)\subset \Omega_{s,\sigma}(t) \ \textit{et}\ \Omega_s(t)\subset \Omega_{\eta s,\sigma}(t)\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.71}$$

Preuve D'après la convergence forte de H_η avec $p=1$, on a

$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists \eta_0>0,\quad \forall \eta<\eta_0,\quad \forall t\in[0,T],\quad \int_\Omega |H_\eta(t,x)-H(t,x)|dx<\varepsilon$$

ce qui signifie

$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists \eta_0>0,\quad \forall \eta<\eta_0,\quad \forall t\in[0,T],\quad |\Omega_{\eta s}(t)-\Omega_s(t)|+|\Omega_s(t)-\Omega_{\eta s}(t)|<\varepsilon \tag{3.72}$$

Par l'absurde supposons qu'il existe $\sigma_0>0$ tel que pour tout $\eta_0>0$, on puisse trouver un $\eta<\eta_0$ et un $t\in[0,T]$ tels que les inclusions de (3.71) ne soient pas toutes deux réalisées. Cela revient à dire que l'on peut trouver un $x_\eta(t)\in\Omega_{\eta s}(t)$ tel que $d(x_\eta(t),\Omega_s(t))>\sigma_0$. D'autre part le domaine $\Omega_{\eta s}(t)$ est une déformation rigide du domaine initial donc possède la même régularité $\mathcal{C}^2$. Par conséquent, indépendamment de η, il existe un ρ assez petit de sorte que pour tout point de $\Omega_{\eta s}(t)$ il existe une boule de rayon $\rho>0$ contenant ce point et incluse dans $\Omega_{\eta s}(t)$. Alors il existe aussi une boule de rayon $\bar\rho:=\min(\rho,\sigma_0/3)$ contenant le point et incluse dans $\Omega_{\eta s}(t)$. Cette dernière est plus précisément incluse dans $\Omega_{\eta s}(t)\setminus\Omega_s(t)$. En effet elle contient un point à distance supérieure à σ_0 de $\Omega_s(t)$ et son diamètre est inférieur à $2\sigma_0/3$. On a donc montré que

$$\exists \sigma_0,\ \forall \eta_0>0,\ \exists \eta>0,\ \exists t\in[0,T],\ |\Omega_{\eta s}(t)-\Omega_s(t)|>\pi\bar\rho^2$$

avec $\bar\rho$ indépendant de η et t. Ceci contredit (3.72).

Lemmes de convergence

Afin de montrer (3.62-3.64), on établit maintenant trois lemmes de convergence faisant intervenir l'opérateur de projection P_σ^r. Par définition, cet opérateur possède les propriétés suivantes :

$$P_\sigma^r \text{ auto adjoint} \tag{3.73}$$

$$\forall u \in \mathcal{K}_\sigma^r(t), \quad P_\sigma^r(u) = u \tag{3.74}$$

$$\forall u \in \mathcal{V}^r, \quad \forall v_\sigma \in \mathcal{K}_\sigma^r(t), \quad \|P_\sigma^r u - u\|_{\mathcal{V}^r} \leq \|v_\sigma - u\|_{\mathcal{V}^r} \tag{3.75}$$

Pour la démonstration du premier (resp. deuxième) lemme, on construit d'abord une vitesse $v_\sigma(.,t)$ (resp. $v_{\eta\sigma}(.,t)$) dans $\mathcal{K}_\sigma^r(t)$ permettant d'obtenir une convergence en espace sur $v_\sigma - u$ (resp. $v_{\eta\sigma} - u_\eta$) en utilisant entre autres les Lemmes 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.6, puis la propriété (3.75) nous permet de prolonger le résultat à $P_\sigma^r u(.,t) - u(.,t)$ (resp. $P_\sigma^r u_\eta(.,t) - u_\eta(.,t)$). La convergence en temps est alors obtenue en utilisant le Lemme 3.3.3.
Remarquons que les vitesses v_σ et $v_{\eta\sigma}$ doivent entre autre être à divergence nulle dans tout Ω. Une manière d'obtenir de telles fonctions est d'introduire une fonction de courant ψ_σ (resp. $\psi_{\eta\sigma}$) telle que $v_\sigma = \nabla \times \psi_\sigma$ (resp. $v_{\eta\sigma} = \nabla \times \psi_{\eta\sigma}$) car on a alors $\operatorname{div} v_\sigma = \operatorname{div}(\nabla \times \psi_\sigma) = 0$ (resp. $\operatorname{div} v_{\eta\sigma} = \operatorname{div}(\nabla \times \psi_{\eta\sigma}) = 0$). L'inconvénient de cette méthode est que l'on obtient des fonctions v_σ et $v_{\eta\sigma}$ non nulles au bord de Ω, et qu'une convolution est alors nécessaire afin d'obtenir une condition de Dirichlet homogène. L'introduction de problèmes de Stokes dont v_σ et $v_{\eta\sigma}$ sont les solutions nous permet d'éviter la convolution évoquée précédemment.

Pour le Lemme 3.3.9, on utilise un résultat de compacité d'Aubin-Simon pour obtenir la convergence.

Lemme 3.3.7

$$\lim_{\sigma \to 0} \|P_\sigma^r(u) - u\|_{L^2(0,T,\mathcal{V}^r(\Omega))} = 0, \ \forall r \in [0,1[\tag{3.76}$$

Preuve Etape 1 : Soit $t \in]0,T[$ fixé. On construit $v_\sigma(.,t) \in \mathcal{K}_\sigma^r(t)$ tel que

$$\lim_{\sigma \to 0} \|v_\sigma(.,t) - u(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[$$

Soit $\sigma > 0$ fixé et $v_\sigma(.,t)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta v_\sigma(.,t) + \nabla p(.,t) = -\Delta u(.,t) \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} v_\sigma(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ v_\sigma(.,t) = u_s(.,t) \text{ sur } \partial\Omega_{s,\sigma}(t) \\ v_\sigma(.,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec

$$u_s = \frac{1}{M}\int_\Omega \rho u \cdot H dx + \left(J^{-1}.\int_\Omega \rho r \times u \cdot H dx\right) \times r$$

D'après le Lemme 3.3.5, $u(.,t) = u_s(.,t)$ dans $\Omega_s(t)$. Donc en prolongeant $v_\sigma(.,t)$ par $u_s(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$, on a $v_\sigma(.,t) \in \mathcal{K}^r_\sigma(t)$.

On note $e_\sigma(.,t) = v_\sigma(.,t) - u(.,t)$. Ainsi $e_\sigma(.,t)$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta e_\sigma(.,t) + \nabla p(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} e_\sigma(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ e_\sigma(.,t) = u_s(.,t) - u(.,t) \text{ sur } \partial\Omega_{s,\sigma}(t) \\ e_\sigma(.,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De même on prolonge $e_\sigma(.,t)$ par $u_s(.,t) - u(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$. On a alors $e_\sigma(.,t) \in \mathcal{K}^r_\sigma(t)$, et $e_\sigma(.,t) = 0$ dans $\Omega_s(t)$.

a) On montre que

$$\lim_{\sigma\to 0} \|e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.77}$$

En effet,

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_s(t))} + \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))} + \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}$$

Or

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_s(t))} = \|\nabla e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_s(t))} = 0 \tag{3.78}$$

donc

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))} + \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}$$

D'après le Lemme 3.3.6, l'épaisseur du domaine $\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\Omega_s(t)$ est inférieure à σ, donc en utilisant la preuve du Lemme 5.10 de [28], on a p.p. sur $]0,T[$:

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))} \leq C\left(\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\partial\Omega_s(t))} + \sigma^2\|\nabla e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))}\right)$$

Et, en utilisant un théorème de trace ([9], p.249)

$$\begin{aligned} \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))} &\leq C\Big(\|e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_s(t))}\|\nabla e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_s(t))} \\ &\quad +\sigma^2\|\nabla e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))}\Big) \\ &\overset{(3.78)}{\leq} C\sigma^2\|\nabla e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_s}(t))} \end{aligned}$$

Or $e_\sigma(.,t) = u_s(.,t) - u(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$. Donc, comme $u(.,t)$ et $u_s(.,t)$ sont dans $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|\nabla e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\setminus\overline{\Omega_s}(t))} \leq \|\nabla e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} \leq \|\nabla e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

avec C ne dépendant pas de σ.
D'où

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\setminus\overline{\Omega_s}(t))} \leq C\sigma^2$$

D'où

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} \leq C\sigma^2$$

On peut maintenant faire l'estimation suivante

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \overset{\text{Lemme } 3.3.4}{\leq} C\|e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}\|\nabla e_\sigma(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} \leq C\sigma$$

D'où

$$\lim_{\sigma\to 0} \|e_\sigma(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

b) On a d'autre part

$$\|e_\sigma(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|e_\sigma(.,t)\|^2_{H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} + \|e_\sigma(.,t)\|^2_{H^1(\Omega_{s,\sigma}(t))}$$

avec $\|e_\sigma(.,t)\|^2_{H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \leq C$ grâce à des estimations sur le problème de Stokes dont $e_\sigma(.,t)$ est solution ([78], prop 2.3., p.35), et $\|e_\sigma(.,t)\|^2_{H^1(\Omega_{s,\sigma}(t))} \leq C$ car $u(.,t)$ et $u_s(.,t)$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

Donc

$$\|e_\sigma(.,t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.79}$$

c) On en déduit que

$$\lim_{\sigma\to 0} \|e_\sigma(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \ \forall r \in [0,1[\text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.80}$$

En effet, en utilisant une inégalité d'interpolation ([1] p. 135)

$$\|e_\sigma(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} \leq \|e_\sigma(.,t)\|^{1-r}_{L^2(\Omega)}\|e_\sigma(.,t)\|^r_{H^1(\Omega)} \tag{3.81}$$

On obtient alors le résultat en utilisant (3.77) et (3.79).

Etape 2 : Par définition de la projection P^r_σ sur $\mathcal{K}^r_\sigma(t)$,

$$\|P^r_\sigma u(.,t) - u(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} \leq \|v_\sigma(.,t) - u(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)}$$

Donc

$$\lim_{\sigma\to 0} \|P_\sigma^r u(.,t) - u(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.82}$$

Etape 3 : La fonction $f_\sigma : t \mapsto \|P_\sigma^r u(.,t) - u(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)}$ est mesurable sur $[0,T]$ et comme $0 \in \mathcal{K}_\sigma^r(t)$

$$\begin{aligned}
\|f_\sigma\|^{\frac{2}{r}}_{L^{\frac{2}{r}}(0,T)} = \int_0^T \|P_\sigma^r u(.,t) - u(.,t)\|^{\frac{2}{r}}_{\mathcal{V}^r(\Omega)} dt &\overset{(3.75)}{\leq} \int_0^T \|0 - u(.,t)\|^{\frac{2}{r}}_{\mathcal{V}^r(\Omega)} dt \\
&\overset{(3.81)}{\leq} C \int_0^T \|u(.,t)\|^{\frac{2(1-r)}{r}}_{L^2(\Omega)} \|u(.,t)\|^2_{\mathcal{V}^1(\Omega)} dt \\
&\leq C \|u\|^{\frac{2(1-r)}{r}}_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \|u\|^2_{L^2(0,T,\mathcal{V}^1(\Omega))} \\
&\overset{(3.49)(3.50)}{\leq} C
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} \lim_{\sigma\to 0} f_\sigma(t) = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\\ f_\sigma \text{ mesurable sur } [0,T] \\ \|f_\sigma\|_{L^{\frac{2}{r}}(0,T)} \leq C \text{ avec } r < 1 \end{cases}$$

D'où, d'après le Lemme 3.3.3,

$$\lim_{\sigma\to 0} \|f_\sigma\|_{L^2(0,T)} = 0$$

i.e.

$$\lim_{\sigma\to 0} \|P_\sigma^r u - u\|_{L^2(0,T,\mathcal{V}^r(\Omega))} = 0$$

□

Le lemme suivant est l'analogue du Lemme 3.3.7 adapté à u_η. La preuve suit le même plan, sauf qu'au lieu d'avoir $u - u_s = 0$ dans $\Omega_s(t)$, on a seulement l'estimation 3.51 pour la différence $u_\eta - u_{\eta,s}$.

Lemme 3.3.8

$$\lim_{\sigma\to 0} \lim_{\eta\to 0} \|P_\sigma^r(u_\eta) - u_\eta\|_{L^2(0,T,\mathcal{V}^r(\Omega))} = 0, \ \forall r \in [0,1[\tag{3.83}$$

Preuve Etape 1 : Soit $t \in]0,T[$ fixé. On construit $v_{\eta\sigma}(.,t) \in \mathcal{K}_\sigma^r(t)$ tel que

$$\lim_{\sigma\to 0} \lim_{\eta\to 0} \|v_{\eta\sigma}(.,t) - u_\eta(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[$$

Soit $\sigma > 0$ fixé et $v_{\eta\sigma}(.,t)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta v_{\eta\sigma}(.,t) + \nabla p(.,t) = -\Delta u_\eta(.,t) \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} v_{\eta\sigma}(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ v_{\eta\sigma}(.,t) = u_{\eta,s}(.,t) \text{ sur } \partial\Omega_{s,\sigma}(t) \\ v_{\eta\sigma}(.,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En prolongeant $v_{\eta\sigma}(.,t)$ par $u_{\eta,s}(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$, on a $v_{\eta\sigma}(.,t) \in \mathcal{K}^r_\sigma(t)$.

On note $e_{\eta\sigma}(.,t) = v_{\eta\sigma}(.,t) - u_\eta(.,t)$. Ainsi $e_{\eta\sigma}(.,t)$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta e_{\eta\sigma}(.,t) + \nabla p(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ \operatorname{div} e_{\eta\sigma}(.,t) = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t) \\ e_{\eta\sigma}(.,t) = u_{\eta,s}(.,t) - u_\eta(.,t) \text{ sur } \partial\Omega_{s,\sigma}(t) \\ e_{\eta\sigma}(.,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De même on prolonge $e_{\eta\sigma}(.,t)$ par $u_{\eta,s}(.,t) - u_\eta(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$.

a) On montre que

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0} \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.84}$$

Pour $\sigma > 0$ fixé, avec le Lemme 3.3.6 il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\forall \eta < \eta_0$,

$$\Omega_{\eta s}(t) \subset \Omega_{s,\sigma}(t) \text{ et } \Omega_s(t) \subset \Omega_{\eta s,\sigma}(t) \tag{3.85}$$

Soit $\eta < \eta_0$ fixé. On a donc

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))} + \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_{\eta s}}(t))} + \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega\backslash\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}$$

Or comme $\Omega_{\eta s}(t) \subset \Omega_{s,\sigma}(t)$, on a avec l'estimation (3.51)

$$\int_0^T \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))} dt \leq C\eta \tag{3.86}$$

D'autre part, avec (3.85) $\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_{\eta s}}(t)$ a une épaisseur inférieure à 2σ, et on a de nouveau avec la preuve du Lemme 5.10 de [28] et un théorème de trace de ([9], p.249) :

$$\begin{aligned} \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_{\eta s}}(t))} &\leq C\left(\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\partial\Omega_{\eta s}(t))} + \sigma^2\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_{\eta s}}(t))}\right) \\ &\leq C\left(\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))}\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))}\right. \\ &+ \left.\sigma^2\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\backslash\overline{\Omega_{\eta s}}(t))}\right) \\ &\leq C\left(\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))}\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))}\right. \\ &+ \left.\sigma^2\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}\right) \end{aligned} \tag{3.87}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} &\leq C\Big(\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))} + \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))}\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{\eta s}(t))} \\ &+ \sigma^2\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}\Big) \qquad (3.88)\end{aligned}$$

Enfin pour le dernier terme on utilise le Lemme 3.3.4 :

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \leq C\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}\|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))} \qquad (3.89)$$

Il reste à intégrer en temps les estimations (3.87), (3.88) et (3.89).
Comme $e_{\eta\sigma}(.,t) = u_{\eta,s}(.,t) - u_\eta(.,t)$ dans $\Omega_{s,\sigma}(t)$, avec $u_{\eta(.,t)}$ et $u_{\eta,s(.,t)}$ bornées dans $L^2(0,T,H^1_0(\Omega))$ on a

$$\int_0^T \|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}dt \leq C \qquad (3.90)$$

Avec (3.86) et (3.90) on peut donc intégrer en temps les estimations (3.87), (3.88) et (3.89), et on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^T \|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))}dt \leq C\left(\int_0^T \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t))}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\eta+\eta^{\frac{1}{2}}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\int_0^T \|\nabla e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega_{s,\sigma}(t)\setminus\overline{\Omega_{\eta s}}(t))}dt \leq C(\eta^{\frac{1}{2}}+\sigma^2)$$

D'où au total

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\eta+\eta^{\frac{1}{2}}+\sigma^2+(\eta+\eta^{\frac{1}{2}}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

D'où

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\int_0^T \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt = 0$$

De cette convergence forte dans L^2 on déduit alors la convergence p.p. sur $]0,T[$:

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\qquad (3.91)$$

b) On a d'autre part

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} + \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{H^1(\Omega_{s,\sigma}(t))}$$

avec $\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_{s,\sigma}}(t))} \leq C$ grâce à des estimations sur le problème de Stokes dont $e_{\eta\sigma}(.,t)$ est solution ([78], prop 2.3., p.35), et $\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^2_{H^1(\Omega_{s,\sigma}(t))} \leq C$ car $u_\eta(.,t)$ et $u_{\eta,s}(.,t)$

sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

Donc

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.92}$$

c) On en déduit que

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \ \forall r \in [0,1[\text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.93}$$

En effet, en utilisant une inégalité d'interpolation ([1] p. 135)

$$\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} \leq \|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^{1-r}_{L^2(\Omega)}\|e_{\eta\sigma}(.,t)\|^{r}_{H^1(\Omega)} \tag{3.94}$$

On obtient alors le résultat en utilisant (3.91) et (3.92).

Etape 2 : Par définition de P^r_σ,

$$\|P^r_\sigma u_\eta(.,t) - u_\eta(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} \leq \|v_{\eta\sigma}(.,t) - u_\eta(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)}$$

Donc

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|P^r_\sigma u_\eta(.,t) - u_\eta(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)} = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\tag{3.95}$$

Etape 3 : La fonction $f_{\eta\sigma} : t \mapsto \|P^r_\sigma u_\eta(.,t) - u_\eta(.,t)\|_{\mathcal{V}^r(\Omega)}$ est mesurable sur $[0,T]$ et comme $0 \in \mathcal{K}^r_\sigma(t)$

$$\begin{aligned}
\|f_{\eta\sigma}\|^{\frac{2}{r}}_{L^{\frac{2}{r}}(0,T)} = \int_0^T \|P^r_\sigma u_\eta(.,t) - u_\eta(.,t)\|^{\frac{2}{r}}_{\mathcal{V}^r(\Omega)}dt &\overset{(3.75)}{\leq} \int_0^T \|0 - u_\eta(.,t)\|^{\frac{2}{r}}_{\mathcal{V}^r(\Omega)}dt \\
&\overset{(3.94)}{\leq} C\int_0^T \|u_\eta(.,t)\|^{\frac{2(1-r)}{r}}_{L^2(\Omega)}\|u_\eta(.,t)\|^2_{\mathcal{V}^1(\Omega)}dt \\
&\leq C\|u_\eta\|^{\frac{1-r}{r}}_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\|u_\eta\|^2_{L^2(0,T,\mathcal{V}^1(\Omega))} \\
&\overset{(3.49),(3.50)}{\leq} C
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases}
\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0} f_{\eta\sigma}(t) = 0 \text{ p.p. sur }]0,T[\\
f_{\eta\sigma} \text{ mesurable sur } [0,T], \\
\|f_{\eta\sigma}\|_{L^{\frac{2}{r}}(0,T)} \leq C
\end{cases}$$

D'où, d'après le Lemme 3.3.3,

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|f_{\eta\sigma}\|_{L^2(0,T)} = 0$$

i.e.

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|P^r_\sigma(u_\eta)-u_\eta\|_{L^2(0,T,\mathcal{V}^r(\Omega))}=0$$

□

Lemme 3.3.9

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|\rho_\eta u_\eta P^r_\sigma(u_\eta)-\rho u P^r_\sigma(u)\|_{L^1(Q)}=0,\ \ \forall r\in]0,1[\tag{3.96}$$

Preuve Soit $r\in]0,1[$ et $\sigma>0$. Avec le Lemme 3.3.6, il existe $\eta_0>0$ tel que $\forall\eta<\eta_0$

$$\Omega_{\eta s}(t)\subset\Omega_{s,\sigma/3}(t)\ \forall t\in[0,T].$$

Soit $\eta<\eta_0$ fixé.
On divise l'intervalle $[0,T]$ en N_T sous-intervalles $I_k=[(k-1)\tau,k\tau]$, $\tau=T/N_T$, $k=1,..,N_T$. On choisit N_T suffisamment grand (dépendant de σ) tel que

$$\Omega_{s,\sigma/2}(k\tau)\subset\Omega_{s,\sigma}(t)\text{ et }\Omega_{s,\sigma/3}(t)\subset\Omega_{s,\sigma/2}(k\tau),\quad\forall t\in I_k\quad\forall k=1,..,N_T \tag{3.97}$$

Cela est possible car $\Omega_{s,\sigma}(t)$ est transporté par la vitesse rigide u_s L^∞ en temps (L^2 suffit) et par construction régulière en espace. Donc la solution X_s du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=u_s(t,X(t))\\ X(0,x)=x\end{cases}$$

est continue en temps et régulière en espace. Or comme $\Omega_{s,\sigma}(t)=X_s(t,\Omega^0_{s,\sigma})$, en prenant t suffisamment proche de $k\tau$ on a les inclusions (3.97).

On se place sur l'un des I_k, $k=1,..,N_T$, et on considère l'équation

$$\frac{\partial(\rho_\eta u_\eta)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta)-\mu\operatorname{div}(D(u_\eta))+\nabla p_\eta+\frac{1}{\eta}\rho_\eta H_\eta(u_\eta-u_{\eta,s})-\rho_\eta g=0$$

En prenant une fonction test ξ nulle en dehors de I_k et telle que $\xi(.,t)\in\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau)$ pour $t\in I_k$, on obtient, avec la double inclusion $\Omega_{\eta s,\sigma}(t)\subset\Omega_{s,\sigma/3}(t)\subset\Omega_{s,\sigma/2}(k\tau)$ et le Lemme 3.3.2

$$\int_{I_k}\int_\Omega[(\rho_\eta u_\eta)\xi_t+(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta-\mu D(u_\eta)):D(\xi)+\rho_\eta g\xi]\,dxdt=0$$

On peut écrire les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_k}\int_\Omega D(u_\eta):D(\xi)dxdt\right| &\leq \|D(u_\eta)\|_{L^2(I_k,L^2(\Omega))}\|D(\xi)\|_{L^2(I_k,L^2(\Omega))}\\ &\overset{(3.49)}{\leq} C\|\xi\|_{L^2(I_k,H_0^1(\Omega))}\\ &\leq C\|\xi\|_{L^2(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}\\ &\leq C\|\xi\|_{L^4(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_k}\int_\Omega(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta):D(\xi)dxdt\right| &\leq \int_{I_k}\|\rho_\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\eta\otimes u_\eta\|_{L^2(\Omega)}\|D(\xi)\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &\leq \|\rho_\eta\|_{L^\infty(I_k,L^\infty(\Omega))}\int_{I_k}\|u_\eta\|^2_{L^4(\Omega)}\|\xi\|_{H_0^1(\Omega)}dt\end{aligned}$$

Donc avec (3.43) et [1] , p. 139,

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_k}\int_\Omega(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta):D(\xi)dxdt\right| &\leq C\int_{I_k}\|u_\eta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_\eta\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\xi\|_{H_0^1(\Omega)}dt\\ &\leq C\|u_\eta\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I_k,L^2(\Omega))}\int_{I_k}\|\nabla u_\eta\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\xi\|_{H_0^1(\Omega)}dt\end{aligned}$$

Avec (3.50) et l'inégalité de Hölder,

$$\left|\int_{I_k}\int_\Omega(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta):D(\xi)dxdt\right| \leq C\|\nabla u_\eta\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(I_k,L^2(\Omega))}\|\xi\|_{L^4(I_k,H_0^1(\Omega))}$$

Enfin, avec (3.49), on obtient

$$\left|\int_{I_k}\int_\Omega(\rho_\eta u_\eta\otimes u_\eta):D(\xi)dxdt\right| \leq C\|\xi\|_{L^4(I_k,H_0^1(\Omega))}\leq C\|\xi\|_{L^4(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}$$

On écrit enfin l'estimation suivante

$$\left|\int_{I_k}\int_\Omega\rho_\eta g\xi dxdt\right|\leq\|\rho_\eta\|_{L^\infty(I_k,L^\infty(\Omega))}\|\xi\|_{L^4(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}\leq C\|\xi\|_{L^4(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}$$

On obtient donc

$$\left|\int_{I_k}\int_\Omega\rho_\eta u_\eta\xi_t dxdt\right|\leq C\|\xi\|_{L^4(I_k,\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}$$

Or $\xi(.,t) \in \mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau)$, $\xi_t(.,t) \in \mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau) \subset \mathcal{K}^0_{\sigma/2}(k\tau)$; et on a

$$\begin{aligned} |\langle \rho_\eta u_\eta, \xi_t\rangle| &= |\langle \rho_\eta u_\eta, P^0_{\sigma/2}(k\tau)\xi_t\rangle| \\ &\overset{(3.73)}{=} |\langle P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta), \xi_t\rangle| \\ &= |\langle \frac{d}{dt} P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta), \xi\rangle| \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_{I_k} \langle \frac{d}{dt} P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta), \xi\rangle dt \right| \leq C\|\xi\|_{L^4(I_k, \mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta) \text{ bornée dans } L^{\frac{4}{3}}(I_k, (\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))^*) \tag{3.98}$$

Comme de plus $\rho_\eta u_\eta$ est bornée dans $L^2(I_k, L^2(\Omega))$,

$$P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta) \text{ bornée dans } L^2(I_k, \mathcal{K}^0_{\sigma/2}(k\tau)) \tag{3.99}$$

L'inclusion $\mathcal{K}^0_{\sigma/2}(k\tau) \subset (\mathcal{K}^r_{\sigma/2}(k\tau))^*$ étant compacte pour $r > 0$, et l'inclusion $(\mathcal{K}^r_{\sigma/2}(k\tau))^* \subset (\mathcal{K}^1_{\sigma/2}(k\tau))^*$ étant continue pour $r < 1$, en appliquant le théorème d'Aubin-Simon (voir [9], p.98) avec (3.98) et (3.99), on obtient que $P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta)$ est relativement compacte dans $L^2(I_k, (\mathcal{K}^r_{\sigma/2}(k\tau))^*)$ $\forall r \in]0,1[$.
Avec (3.52) on en déduit, quitte à extraire une sous-suite, que

$$\lim_{\eta \to 0} P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta) = P^0_{\sigma/2}(k\tau)\rho u \text{ dans } L^2(I_k, (\mathcal{K}^r_{\sigma/2}(k\tau))^*) \text{ fort } \forall r \in]0,1[\tag{3.100}$$

D'autre part, avec (3.97),

$$P^0_{\sigma/2}(k\tau)P^r_\sigma(t) = P^r_\sigma(t) \ \forall t \in I_k \ \forall r \in]0,1[\tag{3.101}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \langle \rho_\eta u_\eta, P^r_\sigma(t)(u_\eta)\rangle_{L^2(\Omega)} dt &\overset{(3.101)}{=} \int_{I_k} \langle \rho_\eta u_\eta, P^0_{\sigma/2}(k\tau)P^r_\sigma(t)u_\eta\rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &\overset{(3.73)}{=} \int_{I_k} \langle P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta), P^r_\sigma(t)u_\eta\rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_{I_k} \langle P^0_{\sigma/2}(k\tau)(\rho_\eta u_\eta), P^r_\sigma(t)u_\eta\rangle_{(\mathcal{K}^r_{\sigma/2})^*, \mathcal{K}^r_{\sigma/2}} dt \end{aligned}$$

Or u_η bornée dans $L^2(0,T,\mathcal{V}^r(\Omega))$ $\forall r \in]0,1[$. Donc $P^r_\sigma(t)u_\eta$ bornée dans $L^2(0,T,\mathcal{K}^r_{\sigma/2})$ $\forall r \in]0,1[$.
Et il existe une sous-suite de $P^r_\sigma(t)u_\eta$ encore notée $P^r_\sigma(t)u_\eta$ telle que

$$P^r_\sigma(t)u_\eta \rightharpoonup P^r_\sigma(t)u \text{ dans } L^2(0,T,\mathcal{K}^r_{\sigma/2}) \text{ faible} \tag{3.102}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0}\int_{I_k}\langle \rho_\eta u_\eta, P^r_\sigma(t)(u_\eta)\rangle_{L^2(\Omega)}dt &\overset{(3.100,3.102)}{=} \int_{I_k}\langle P^0_{\sigma/2}(k\tau)\rho u, P^r_\sigma(t)u\rangle_{L^2(\Omega)}dt \\
&\overset{(3.73)}{=} \int_{I_k}\langle \rho u, P^0_{\sigma/2}(k\tau)P^r_\sigma(t)u\rangle_{L^2(\Omega)}dt \\
&\overset{(3.101)}{=} \int_{I_k}\langle \rho u, P^r_\sigma(t)u\rangle_{L^2(\Omega)}dt
\end{aligned}$$

En sommant sur $k = 1, .., N_T$, on obtient

$$\lim_{\eta\to 0}\|\rho_\eta u_\eta P^r_\sigma(u_\eta) - \rho u P^r_\sigma(u)\|_{L^1(Q)} = 0$$

D'où

$$\lim_{\sigma\to 0}\lim_{\eta\to 0}\|\rho_\eta u_\eta P^r_\sigma(u_\eta) - \rho u P^r_\sigma(u)\|_{L^1(Q)} = 0$$

□

Conclusion

En passant à la limite dans chaque terme de la décomposition (3.61), on peut maintenant établir la convergence forte d'une sous-suite de u_η dans $L^2(Q)$:
Soit $\varepsilon > 0$.
Avec le Lemme 3.3.7,

$$\exists\sigma_0 > 0,\ \forall\sigma < \sigma_0,\ \|P^r_\sigma(u) - u\|_{L^2(Q)} < \varepsilon$$

Avec le Lemme 3.3.8,

$$\exists\sigma_0 > 0,\ \forall\sigma < \sigma_0,\ \exists\eta_0 > 0,\ \forall\eta < \eta_0,\ \|P^r_\sigma(u_\eta) - u_\eta\|_{L^2(Q)} < \varepsilon$$

Avec le Lemme 3.3.9,

$$\exists\sigma_0 > 0,\ \forall\sigma < \sigma_0,\ \exists\eta_0 > 0,\ \forall\eta < \eta_0,\ \|\rho_\eta u_\eta P^r_\sigma(u_\eta) - \rho u P^r_\sigma(u)\|_{L^1(Q)} < \varepsilon$$

On obtient donc pour une sous-suite u_η de u_η :

$$\exists\eta_0 > 0,\ \forall\eta < \eta_0,\quad \int_0^T\int_\Omega |u_\eta - u|^2 dxdt < C\varepsilon$$

D'où il existe une sous-suite de u_η encore notée u_η, et $u \in L^2(Q)$ telles que

$$u_\eta \to u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort} \tag{3.103}$$

On peut aussi en déduire, avec (3.46), que

$$\rho_\eta u_\eta \rightharpoonup \rho u \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible} \tag{3.104}$$

3.3.5 Passage à la limite

On montre qu'en passant à la limite en η une sous-suite $(\rho_\eta, u_\eta, H_\eta)$ de solution du problème pénalisé (P_η) converge vers une solution (ρ, u, H) de la formulation faible (P_{faible}) :

- $\rho \in L^\infty(Q)$:
  On a montré que
  $$\rho_\eta \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible*}$$
- $u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,\mathcal{V})$:
  On a montré que
  $$u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T,\mathcal{V}) \text{ faible,}$$
  $$\sqrt{\rho_\eta} u_\eta \text{ bornée dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$$
  et
  $$\rho_\eta \text{ bornée dans } L^\infty(Q)$$
  Donc
  $$u_\eta \text{ bornée dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$$
  u_η converge donc faiblement dans cet espace, et sa limite u est dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,\mathcal{V})$.

- $u(t) \in \mathcal{K}(t)$:
  Avec le Lemme 3.3.5, on a
  $$Hu = Hu_s = H(u_G + \omega \times r)$$
  et H est la fonction caractéristique de $\Omega_s(t)$, donc on a bien $u(t) \in \mathcal{K}(t)$.

- Transport de ρ et H :
  On a montré que ρ_η et H_η convergent fortement dans $\mathcal{C}(0,T,L^p(\Omega))$ $\forall p \in [1,+\infty[$, et que leurs limites ρ et H vérifient
  $$\begin{cases} \rho_t + u.\nabla\rho = 0 \text{ sur }]0,T[\times\Omega \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases}$$
  et
  $$\begin{cases} H_t + u_s.\nabla H = 0 \text{ sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n \\ H(0,x) = H_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$
  Donc pour $\psi \in \mathcal{C}(Q)$ telle que $\psi(T) = 0$, on a
  $$\int_0^T \int_\Omega \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho u \nabla \psi dx dt + \int_\Omega \rho^0 \psi(0) dx = 0$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega H\frac{\partial \psi}{\partial t} + Hu_s \nabla\psi dxdt + \int_\Omega H^0\psi(0)dx = 0$$

Or avec le Lemme 3.3.5, on a $Hu = Hu_s$, donc H vérifie aussi

$$\int_0^T \int_\Omega H\frac{\partial \psi}{\partial t} + Hu \nabla\psi dxdt + \int_\Omega H^0\psi(0)dx = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

  On considère l'equation

$$\frac{\partial(\rho_\eta u_\eta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta) - \mu \operatorname{div}(D(u_\eta)) + \nabla p_\eta + \frac{1}{\eta}\rho_\eta H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s}) - \rho_\eta g = 0$$

  En la multipliant par une fonction $\xi_\sigma \in H^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}^1_\sigma(t))$, et en intégrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial(\rho_\eta u_\eta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta) - \mu \operatorname{div}(D(u_\eta)) + \nabla p_\eta + \frac{1}{\eta}\rho_\eta H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s}) - \rho_\eta g\right]\xi_\sigma dx = 0$$

  Or avec les Lemmes 3.3.2 et 3.3.6 il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour $\eta < \eta_O$:

$$\int_\Omega \rho_\eta H_\eta(u_\eta - u_{\eta,s})\xi_\sigma dx = 0$$

$$\int_\Omega -\mu \operatorname{div}(D(u_\eta))\xi_\sigma dx = \int_\Omega \mu D(u_\eta) : D(\xi_\sigma)dx$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta)\xi_\sigma dx = \int_\Omega -(\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta) : D(\xi_\sigma)dx$$

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho_\eta u_\eta)}{\partial t}\xi_\sigma dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \xi_\sigma dx - \int_\Omega \rho_\eta u_\eta \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial t}dx$$

  Au total, on a

$$\int_\Omega \left[\rho_\eta u_\eta \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial t} + (\rho_\eta u_\eta \otimes u_\eta - \mu D(u_\eta)) : D(\xi_\sigma) + \rho_\eta g \xi_\sigma\right] dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \xi_\sigma dx$$

  Avec les convergences

$$u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T,H^1_0(\Omega)) \text{ faible}$$

$$u_\eta \to u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}$$

$$\rho_\eta u_\eta \rightharpoonup \rho u \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible}$$

$$\rho_\eta \to \rho \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}$$

On obtient donc à la limite $\eta \to 0$:

$$\int_\Omega \left[\rho u \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial t} + (\rho u \otimes u - \mu D(u)) : D(\xi_\sigma) + \rho g \xi_\sigma\right] dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \xi_\sigma dx$$

Ce résultat est obtenu pour $\xi_\sigma \in H^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}^1_\sigma(t))$, avec $\sigma > 0$ quelconque. Afin de passer à la limite en σ, on utilise une version 3D du Lemme 4.3. de [52]. Or ce lemme utilise le fait qu'en 2D la vitesse relative entre deux solides ou entre un solide et le bord du domaine est nulle lors d'un contact. Pour le cas 3D, il est cependant montré dans [36] qu'un mouvement rotationnel d'axe la normale au solide peut subsister. On distingue donc deux cas. Si pour tout $t \in [0,T]$ il n'y a pas contact entre le solide et le bord du domaine, i.e. si $\overline{\Omega_s(t)} \cap \partial\Omega = \emptyset$, on a alors $\forall \xi \in H^1(Q) \cap L^2(0,T,\mathcal{K}^1(t))$

$$\int_\Omega \left[\rho u \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\rho u \otimes u - \mu D(u)) : D(\xi) + \rho g \xi\right] dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \xi dx$$

Dans le cas où le solide entre en contact avec le bord du domaine, on ne peut guarantir la convergence.
Les points précédents montrent donc que l'on a bien le thérorème 3.3.1, i.e., dans le cas où le solide n'entre jamais en contact avec le bord,

$$\boxed{P_\eta \to P_{faible} \text{ quand } \eta \to 0} \tag{3.105}$$

3.4 Extension : méthode de pénalisation H^1

Tout en conservant le calcul explicite de la vitesse rigide par projection de la vitesse fluide, on peut définir une méthode de pénalisation H^1.
En effet, on peut aussi chercher à annuler $D(u)$ dans le domaine solide, ce qui revient à considérer d'un point de vue physique le solide rigide comme un fluide de viscosité infinie.

On obtient alors la formulation suivante :

Etant données $(\rho_\eta(0) = \rho^0_\eta, u_\eta(0) = u^0_\eta, H_\eta(0) = \chi_{\Omega^0_s})$ trouver $(\rho_\eta, u_\eta, p_\eta, H_\eta)$ telles que

$$\rho_\eta, H_\eta \in L^\infty(Q) \quad u_\eta \in L^\infty(0,T,\mathcal{H}) \cap L^2(0,T,\mathcal{V}), \quad p_\eta \in L^2(Q)$$

solution dans $]0,T[\times\Omega$ de

$$P_\eta \begin{cases} \rho_\eta \left(\dfrac{\partial u_\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\eta \otimes u_\eta) \right) - \mu \operatorname{div} \left(\left(1 + \dfrac{1}{\eta} H_\eta \right) D(u_\eta) \right) + \nabla p_\eta + \dfrac{1}{\eta} \rho_\eta H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s}) = \rho_\eta g & (3.106) \\ \operatorname{div} u_\eta = 0 & (3.107) \\ u_{\eta,s} = \dfrac{1}{M_\eta} \displaystyle\int_\Omega \rho_\eta u_\eta \cdot H_\eta dx + \left(J_\eta^{-1}. \int_\Omega \rho_\eta r_\eta \times u_\eta \cdot H_\eta dx \right) \times r_\eta & (3.108) \\ \rho_{\eta_t} + u_\eta . \nabla \rho_\eta = 0 & (3.109) \\ H_{\eta_t} + u_{\eta,s} . \nabla H_\eta = 0 & (3.110) \end{cases}$$

C'est une généralisation de la méthode de pénalisation H^1 de [5] pour le cas d'un obstacle rigide non fixe, et par rapport au problème étudié dans [52], on ajoute un terme pénalisant aussi la vitesse elle-même.
L'étude présentée dans la partie précédente et concernant la convergence en η de la pénalisation L^2 vers la formulation faible P_{faible} peut simplement être transposée au cas de la pénalisation H^1 (voir [52]), et on obtient ainsi la convergence de ce nouveau problème pénalisé vers la formulation faible définie en début de chapitre.

Cependant, l'ajout du terme de pénalisation H^1 permet d'obtenir l'estimation suivante en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par la fonction test u_η :

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\rho_\eta} H_\eta (u_\eta - u_{\eta,s}) \text{ bornée dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \tag{3.111}$$

Muni de cette nouvelle estimation, on peut chercher à obtenir la convergence du problème pénalisé vers une formulation du modèle dans laquelle les équations du fluide et du solide rigide apparaissent de manière découplée. Plus précisément, on espère montrer que la limite u de u_η vérifie :

- u solution faible de Navier-Stokes dans $\Omega_f(t)$
- $u = u_G + \omega \times r$ dans $\Omega_s(t)$ avec conservation des moments linéaire et angulaire

Cela suppose de pouvoir par exemple passer à la limite en η dans le terme

$$\int_\Omega \Delta u_\eta (1 - H_\eta) \phi dx, \quad \phi \in L^2(0,T,\mathcal{V})$$

et donc de disposer d'une estimation sur la norme H^2 de u_η sur Ω tout entier.

Or les seules estimations de la norme H^2 de u_η que l'on peut obtenir concernent les sous-domaines $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$, et on ne peut garantir la régularité de u_η à l'interface de ces deux domaines qui dépendent du temps. Le problème de Navier-Stokes pénalisé prend en effet la forme d'un problème bi-fluide à viscosité discontinue au niveau de $\partial\Omega_s(t)$.

L'obtention de la convergence du problème de pénalisation H^1 vers la formulation découplée des équations reste donc un problème ouvert.
D'autre part il est montré dans [5] pour le cas d'un obstacle rigide fixe que numériquement cette pénalisation n'améliore pas les résultats. La discrétisation spatiale du terme de pénalisation H^1 exprimé en fonction des dérivées de la vitesse peut en effet légèrement modifier la taille de l'obstacle, et ainsi la dynamique de l'écoulement calculé.

3.5 Résultats numériques

On présente ici les résultats numériques obtenus avec la méthode de pénalisation L^2 sur des modèles 2D et 3D couplant un solide rigide (cylindre ou sphère) et un fluide visqueux incompressible. Des tests concernant une formulation vorticité et une discrétisation par méthodes particulaires sont présentés dans [18] et [17].
On précise tout d'abord les méthodes de discrétisation et l'algorithme de couplage en temps utilisé pour la prise en compte du solide dans la résolution de ce modèle. Puis on présente les résultats numériques obtenus avec la méthode de pénalisation, notamment en ce qui concerne la prise en compte de la contrainte rigide dans le solide.

3.5.1 Mise en œuvre numérique

On utilise la méthode level-set pour localiser le solide et calculer la vitesse rigide, en prenant $\phi \leq 0$ dans $\Omega_s(t)$, et on initialise ϕ_0 comme la distance signée à $\partial\Omega_s^0$.
On introduit ensuite la fonction H définie par

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - y - \frac{1}{\pi}\sin(\pi y)\right) & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

En notant $\varepsilon > 0$ un petit paramètre numérique de l'ordre du pas d'espace, typiquement $\varepsilon = 1.5\Delta x$, $H\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right)$ représente alors une régularisation de la fonction caractéristique de $\Omega_s(t)$ (voir figure 3.3).

Les termes de convection sont calculés avec un schéma WENO d'ordre 5, et on utilise un schéma centré en espace pour le terme de diffusion.
La convection est traitée de manière explicite, la diffusion en implicite.
Les calculs sont effectués sur une grille décalée de type MAC.
On utilise une méthode de projection explicite de type Chorin-Temam pour la résolution du problème fluide, et la pression est calculée en utilisant le solver FISHPACK (fonction *hstcrt* sur grille décalée), en faisant une approximation sur la densité.

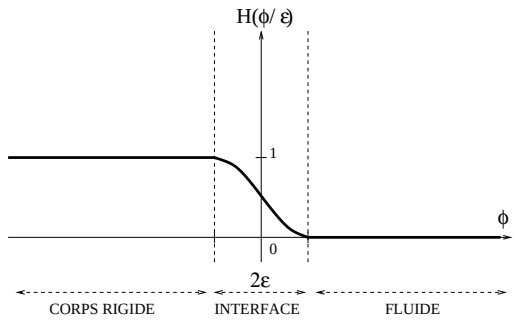


FIG. 3.3 – Fonction caractéristique régularisée

On discrétise l'intervalle de temps $[0, T]$ en $[t^n, t^{n+1}] = [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$, $n \in \{0, .., N\}$, et on note $u^n = u(t^n)$, $p^n = p(t^n)$, $\phi^n = \phi(t^n)$, $H^n = H\left(\frac{\phi^n}{\varepsilon}\right)$, $\rho^n = \rho(\phi^n)$.
Soit Δx le pas de discrétisation spatial et M le nombre de mailles.

Force de collision Bien que l'on ne traite pas le cas de plusieurs solides dans les tests qui suivent, on utilise un modèle de collision permettant de gérer le contact numérique entre le solide et le bord du domaine, dans le cas de conditions limites de Dirichlet. On introduit donc la force de collision f_{col} proposée dans [18] dans le cadre d'une formulation Level-set :

$$f_{col}(x) = \rho \sum_{ij} \frac{\kappa_{ij}}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi_i(x)}{\varepsilon}\right) \frac{\nabla \phi_j(x)}{\phi_j(x)} \exp\left(-\phi_j(x)/\varepsilon\right) \tag{3.112}$$

avec

$$\zeta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \text{ ou } y > 1 \\ \frac{1}{2}\left(-1 - \cos(\pi y)\right) & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

et ϕ_i, ϕ_j les fonctions Level-Set associées aux solides i et j, $\varepsilon = 1.5\Delta x$, et κ_{ij} un coefficient numérique.

Cette force, décrivant toutes les interactions possibles entre les solides du système, est dérivée à partir d'un modèle 1D de collision Hamiltonien à courte portée. Lors de la collision elle conserve l'énergie du système, à la dissipation visqueuse près.

Les fonctions Level-Set sont utilisées d'une part pour détecter le contact, d'autre part pour définir la direction (suivant $\nabla\phi$) et la portée de la force. Cette expression suppose que ces fonctions restent des distances, ce qui ne nécessite pas de renormalisation puisqu'elles sont tranportées par une vitesse rigide. Par définition de ϕ, chaque terme de la

somme est orienté vers l'extérieur du solide Ω_{sj}.
La fonction cut-off ζ permet de distribuer la force sur l'interface fluide-solide, et les coefficients κ_{ij} sont choisis proportionnels au carré des vitesses relatives des solides juste avant la collision. Ils sont réglés à la main dans les tests qui suivent.

Ce terme de force est ajouté dans le second membre de l'équation de conservation des moments du problème fluide.

On présente maintenant l'algorithme de couplage sous forme semi-discrète en temps.

Algorithme de couplage Etant donné u^n, p^n, et ϕ^n :

Etape 1 : Résolution d'un problème bi-fluide sur tout le domaine : calcul de $(\tilde{u}, p^{n+1})$:

- **[1a]** Calcul des termes de convection-diffusion et forces extérieures :

$$u^* = u^n - \Delta t(u^n.\nabla)u^n + \frac{\Delta t}{\rho^n}\mu\Delta u^* + \Delta t g$$

  avec

$$\rho^n = \rho_s.H^n + \rho_f.\,(1 - H^n)$$

- **[1b]** Incompressibilité - Calcul de la pression :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \dfrac{\bar{\rho}}{\Delta t}\operatorname{div} u^* \\ \tilde{u} = u^* - \dfrac{\Delta t}{\bar{\rho}}\nabla p^{n+1} \end{cases}$$

  avec $\bar{\rho} = \dfrac{\rho_f + \rho_s}{2}$.

Etape 2 : Prise en compte du solide :

- **[2a]** : Calcul et ajout de la force de collision

$$u_{col} = \tilde{u} + \Delta t f_{col}$$

- **[2b]** : Calcul de la vitesse linéaire u_G par projection de u_{col} :

$$u_G = \frac{\displaystyle\int_\Omega \rho^n u_{col} \cdot H^n dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho^n H^n dx}$$

- **[2c]** :Calcul de la vitesse angulaire ω par projection de $r^n \times u_{col}$:

$$\omega = J^{-1} \int_\Omega \rho^n r^n \times u_{col} \cdot H^n dx$$

avec $J = \left(\int_\Omega \rho^n |r^n|^2 H^n \mathbb{I} dx\right) \mathbb{I}$ et $r^n = r(\phi^n) = \dfrac{\text{Rayon} + \phi^n}{|\nabla \phi^n|} \nabla \phi^n$ dans le cas d'un cylindre (en 2D) ou d'une sphère (en 3D).

- **[2d]** :Calcul de la vitesse rigide u_s

$$u_s = u_G + w \times r^n$$

- **[2e]** :Correction du champ de vitesse - Pénalisation
  - Traitement explicite :

$$\frac{u^{n+1} - u_{col}}{\Delta t} = \frac{1}{\eta} H^n (u_s - u^n)$$

  - Traitement implicite :

$$\frac{u^{n+1} - u_{col}}{\Delta t} = \frac{1}{\eta} H^n (u_s - u^{n+1}) \Leftrightarrow u^{n+1} = \frac{u_{col} + \frac{\Delta t}{\eta} H^n u_s}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} H^n}$$

avec η le paramètre de pénalisation.
Le traitement implicite du terme de pénalisation permet de prendre des coefficients de pénalisation beaucoup plus grands, donc on fait ce choix pour les tests qui suivent.

Etape 3 : Transport du solide

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \cdot u_s \cdot \nabla \phi^n$$

Remarque 1 : On choisit de satisfaire la contrainte d'incompressibilité avant la contrainte de rigidité. En procédant de cette manière, les deux contraintes sont en théorie mieux traitées car

$$D(u) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} u = 0 \tag{3.113}$$

On vérifie que l'on a au total, pour un traitement implicite du terme de pénalisation,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - u_{col}}{\Delta t} + \frac{u_{col} - \tilde{u}}{\Delta t} + \frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = (u^n.\nabla)u^n - \frac{\mu}{\rho^n}\Delta u^* + g + f_{col} + \frac{1}{\eta} H^n (u_s - u^{n+1}) \tag{3.114}$$

Remarque 2 : Le calcul de la vitesse rigide par projection de la vitesse fluide est simple à implémenter, et peu coûteux. D'autre part le traitement implicite du terme de pénalisation ne nécessite pas de faire des itérations supplémentaires. Donc le traitement de la contrainte de rigidité induit un coût supplémentaire très faible par rapport à celui de la résolution du problème fluide. Le transport du solide revient enfin à la résolution d'une équation d'advection, avec un champ de vitesse rigide donc plus régulier que le champ fluide.

3.5.2 Lien avec la méthode de projection de [59] et [69]

En prenant $\eta = \Delta t$ dans l'étape **[2e]** avec traitement explicite du terme de pénalisation, on obtient la méthode de projection proposée dans [59] et [69]. Cette méthode consiste à alterner résolution d'un problème fluide et pas de projection pour imposer la rigidité dans le solide, dans le même esprit que la méthode de Chorin-Temam par exemple pour imposer l'incompressibilité d'un champ fluide. Cependant le traitement explicite de ce terme conditionne alors la stabilité du couplage, et on doit se limiter à des valeurs de η de l'ordre de Δt.
Le traitement implicite du terme de pénalisation permet de choisir des valeurs de η aussi petites que l'on veut, et donc d'améliorer la précision de la méthode. De ce point de vue la méthode de pénalisation étudiée peut être considérée comme une généralisation de la méthode de projection.

3.5.3 Test 2D : cylindre rigide en sédimentation

Modèle

On réalise un test de sédimentation d'un cylindre rigide dans un fluide visqueux incompressible, avec les données utilisées dans [29] pour l'étude d'une méthode de domaine fictif utilisant des multiplicateurs de Lagrange pour imposer la rigidité. Le domaine de calcul est le rectangle de dimension $[0, 2] \times [0, 6]$, et on choisit des conditions de Dirichlet homogène sur la vitesse. Le cylindre a un rayon de 0.125, et son centre se trouve initialement en $(1, 4)$.
On applique au système une force de gravité verticale g orientée vers le bas.

Le solide accélère tout d'abord sous l'effet de la gravité, puis cette accélération est compensée par les forces de friction et le solide atteint alors une vitesse stationnaire, avant de toucher le bord inférieur du domaine et de s'immobiliser.

On observe tout d'abord l'écoulement fluide/solide rigide d'un point de vue qualitatif, en traçant les iso-lignes de vorticité créées par le mouvement du solide.
On vérifie ensuite que la condition de rigidité est bien respectée dans le solide, en étudiant le tenseur des vitesses de déformation $D(u)$ dans le solide.
Enfin on trace les profils de vitesse et de vorticité lorsque $\Delta x \to 0$, et on vérifie la convergence de la méthode lorsque $\Delta x \to 0$.

Les paramètres rhéologiques de l'écoulement sont présentés dans le tableau 3.1 :

Les paramètres κ de la force de collision sont choisis égaux à 30, et on traite le terme de pénalisation de manière implicite.

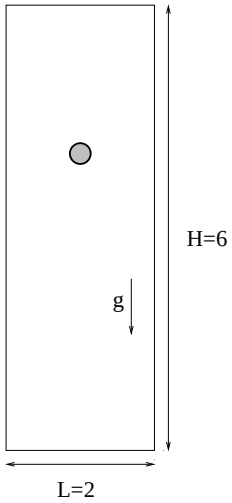


FIG. 3.4 – Cylindre 2D en sédimentation

ρ_f	ρ_s	μ_f	g
1	1.5	0.01	-980

TAB. 3.1 – Paramètres de l'écoulement 2D en sédimentation

Iso-lignes de vorticité

On définit la vorticité de l'écoulement par

$$w = \nabla \times u \tag{3.115}$$

avec $\times$ le produit vectoriel. En 2D, c'est un champ scalaire dont les lignes de niveau permettent d'étudier qualitativement l'écoulement, pour des paramètres rhéologiques donnés. Pour le jeu de paramètres précédemment cité, les iso-lignes de vorticité créées par l'écoulement sont présentées sur la figure 3.5 à différents instants. On vérifie la symétrie des deux vortex créés au niveau de l'interface fluide-solide.
Ces tests sont réalisés avec $\eta = 10^{-6}\Delta t$, $\Delta t = 10^{-5}$ et $M = 256$ (i.e. $\Delta x = 7.8125 \times 10^{-3}$).
Un zoom sur le solide au temps $t = 0.25$ est présenté sur la figure 3.6. On vérifie qu'il n'y a pas ou très peu de vorticité à l'intérieur du solide.

Respect de la contrainte de rigidité

Afin de vérifier que la contrainte de rigidité est correctement prise en compte dans le solide, on calcule la norme L^2 du tenseur des vitesses de déformation $D(u)$ dans $\Omega_s(t)$ en

fonction du paramètre η. On souhaite en effet estimer l'erreur de modélisation correspondant à l'utilisation du modèle pénalisé.

On pose

$$\|D(u)\|^2_{L^2(\Omega_s(t))} := \sum_{ij,\phi_{ij}<0} \left(D^2_{11}(u_{ij}) + 2D^2_{12}(u_{ij}) + D^2_{22}(u_{ij})\right)(\Delta x)^2$$

avec D_{11}, D_{12} et D_{22} les composantes de $D(u)$ (symétrique).

Les erreurs ainsi que leurs ordres de convergence numérique sont présentés dans le tableau 3.2 pour $M = 512$ (i.e. $\Delta x = 3.90625 \times 10^{-3}$), $\Delta t = 10^{-5}$, à $t = 0.1$.
Les ordres de convergence α sont calculés de la manière suivante, par exemple pour

η	$\|D(u)\|_{L^2(\Omega_s(t))}$	α pour $O(\eta^\alpha)$
10^{-4}	3.32311	-
10^{-6}	5.16197×10^{-2}	0.9044
10^{-8}	5.33934×10^{-4}	0.9927
10^{-10}	8.18427×10^{-6}	0.9073
10^{-12}	8.15739×10^{-8}	1.0007

TAB. 3.2 – Erreurs sur $\|D(u)\|_{L^2(\Omega_s(t))}$ et ordres de convergence à $t = 0.1$, $M = 512$

$\eta = 10^{-8}$:

$$\alpha = \frac{\ln(5.33934 \times 10^{-4}) - \ln(5.16197 \times 10^{-2})}{\ln(10^{-8}) - \ln(10^{-6})}$$

On obtient donc une convergence numérique de la méthode en $O(\eta)$.

Or la méthode de résolution du problème fluide est d'ordre 2 en espace, donc pour $\eta < 10^{-10} = 10^{-5}\Delta t$ l'erreur de modélisation devient inférieure à l'erreur de discrétisation ($\simeq 1.5\times10^{-5}$). En pratique on n'a donc pas besoin de prendre des valeurs trop petites de η.

On se place dans une coupe horizontale du domaine à travers le centre de gravité du solide. Les profils de vitesse correspondants aux valeurs précédentes de η (avec en plus la valeur $\eta = 10^{-2}$) sont présentés sur la figure 3.7.

Profils de vitesse verticale et de vorticité

On étudie la convergence de la méthode de pénalisation suivant Δx sur une solution stationnaire.
Les profils de vitesse verticale v et de vorticité w a $t = 0.1$ au niveau du centre de gravité du solide sont présentés sur les figures 3.8 et 3.9 pour $\eta = 10^{-6}\Delta t$, $\Delta t \in [10^{-5}, 10^{-4}]$.
On vérifie bien que la valeur de η est suffisamment petite pour obtenir une vitesse rigide dans le solide.

3.5.4 Test 3D : sphère rigide en sédimentation

L'utilisation de la méthode level-set pour la localisation du solide permet d'adapter facilement le code à la dimension 3. On réalise un test de sédimentation d'une sphère rigide de rayon de 0.1 dans un fluide visqueux incompressible infini. Le domaine de calcul est un cube de côté 1, et on choisit des conditions périodiques aux bords de ce domaine. On applique une force de gravité verticale orientée vers le bas au système.

Les paramètres rhéologiques de l'écoulement sont présentés dans le tableau 3.3.
En dimension 3 la vorticité W est un champ vectoriel, et on peut tracer les iso-surfaces

ρ_f	ρ_s	μ_f	g
1	2	0.001	-1

TAB. 3.3 – Paramètres de l'écoulement 3D en sédimentation

de sa norme L^2. Le résultat est présenté sur la figure 3.10.

3.6 Conclusion

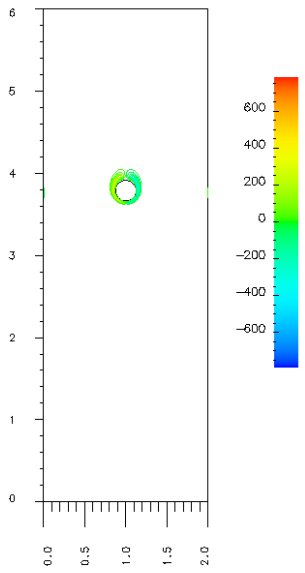
Dans ce chapitre nous avons étudié une méthode de pénalisation L^2 pour le couplage fluide-solide rigide en dimension 2 ou 3, généralisant la méthode de [5] au cas d'un obstacle rigide mobile, et calculant la vitesse rigide explicitement en utilisant la projection définie dans [59].
L'analyse numérique de cette méthode montre que les solutions du problème pénalisé convergent vers celles d'une formulation faible du couplage, introduite dans [24] et [33].
La convergence d'une méthode de pénalisation H^1 définie par extension de la méthode précédente vers une formulation découplée des équations du fluide et du solide reste cependant à établir.

Cette étude a donc permis de faire l'analyse d'une méthode qui numériquement correspond à une généralisation de la méthode de projection de [59], tout en tirant profit de la formulation pénalisation.

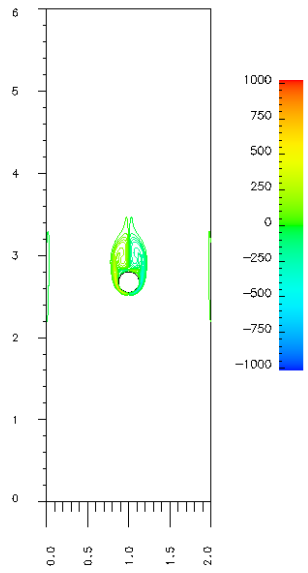
L'algorithme numérique correspondant permet comme la méthode de projection de calculer simplement et à moindre coût la vitesse rigide puis de transporter le solide avec cette vitesse régulière, et d'autre part, grâce au traitement implicite du terme de pénalisation, on peut espérer obtenir une bonne précision des calculs.

Les tests numériques présentés permettent de valider la prise en compte de la contrainte rigide dans le solide, ainsi que la convergence numérique en espace de la méthode. Ces tests confirment donc les résultats obtenus avec une formulation vorticité et une discrétisation par méthodes particulaires dans [18] et [17].

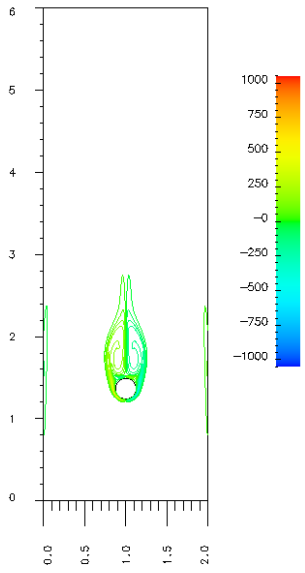
$t = 0.05$



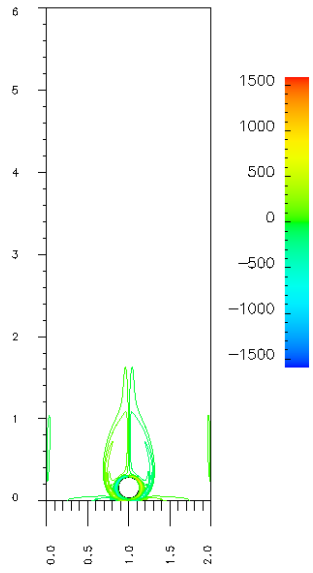
$t = 0.15$



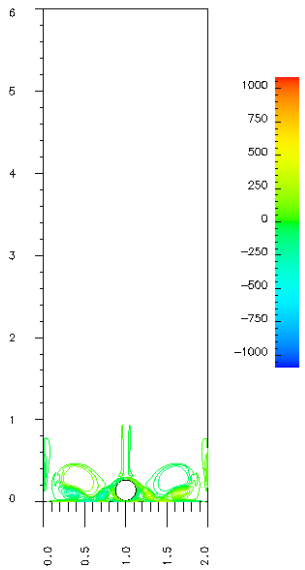
$t = 0.25$



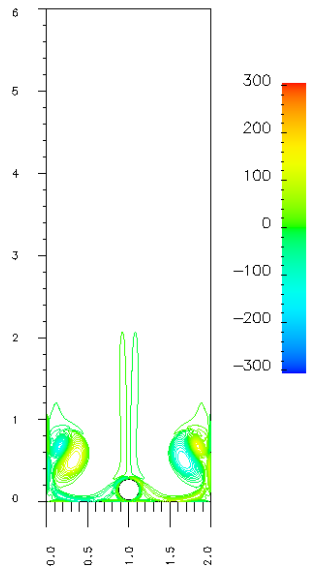
$t = 0.35$



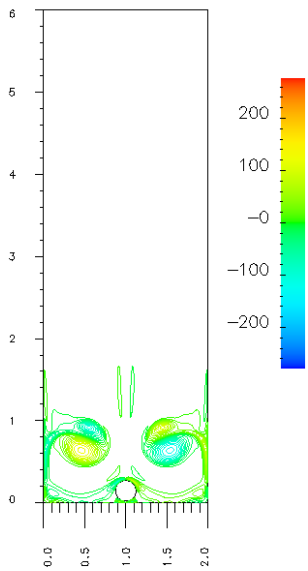
$t = 0.45$



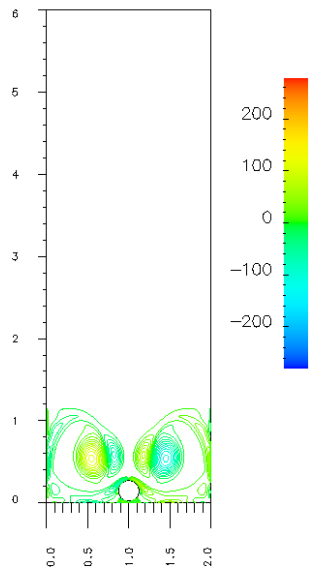
$t = 0.55$



$t = 0.65$



$t = 0.75$



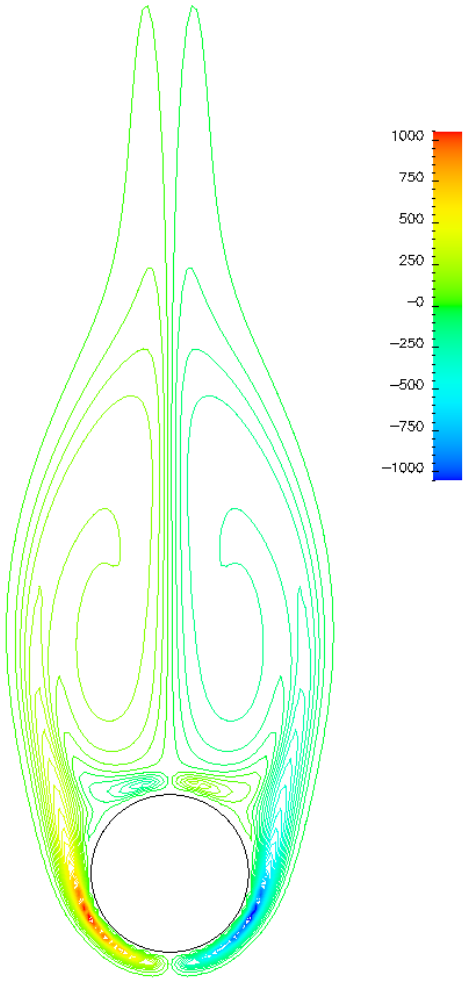


FIG. 3.6 – Iso-lignes de vorticité à $t = 0.25$

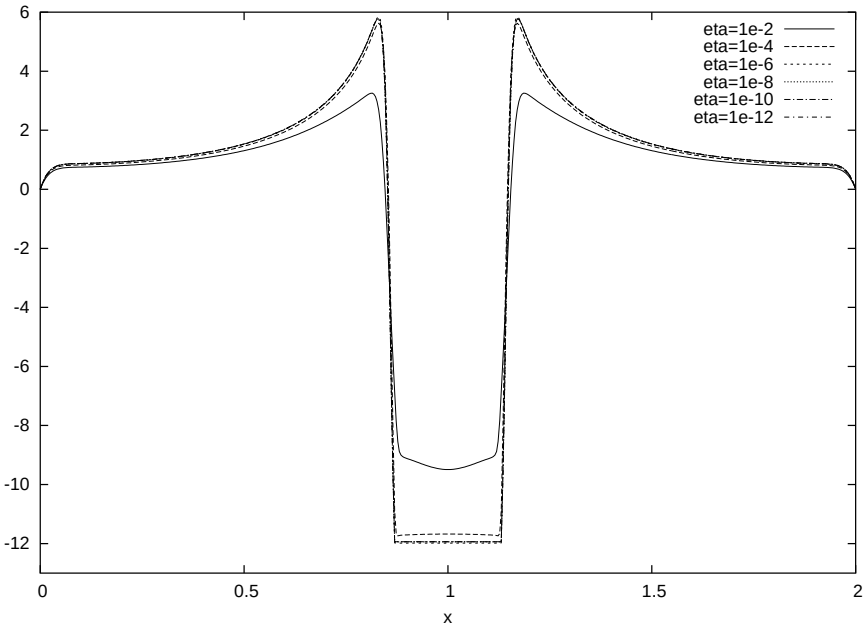


FIG. 3.7 – Profil de vitesse verticale à $t = 0.1$, $M = 512$

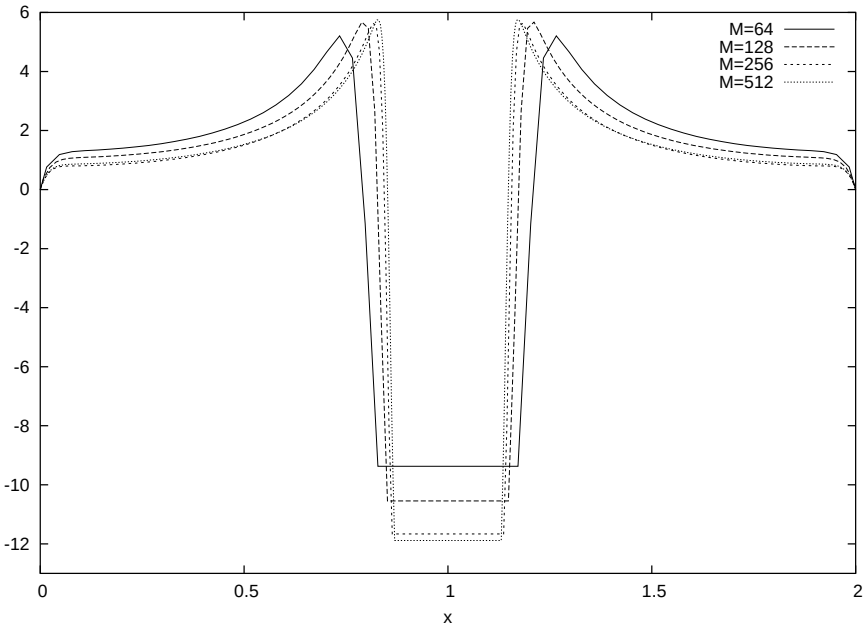


FIG. 3.8 – Profil de vitesse verticale à $t = 0.1$, $\eta = 10^{-6}\Delta t$

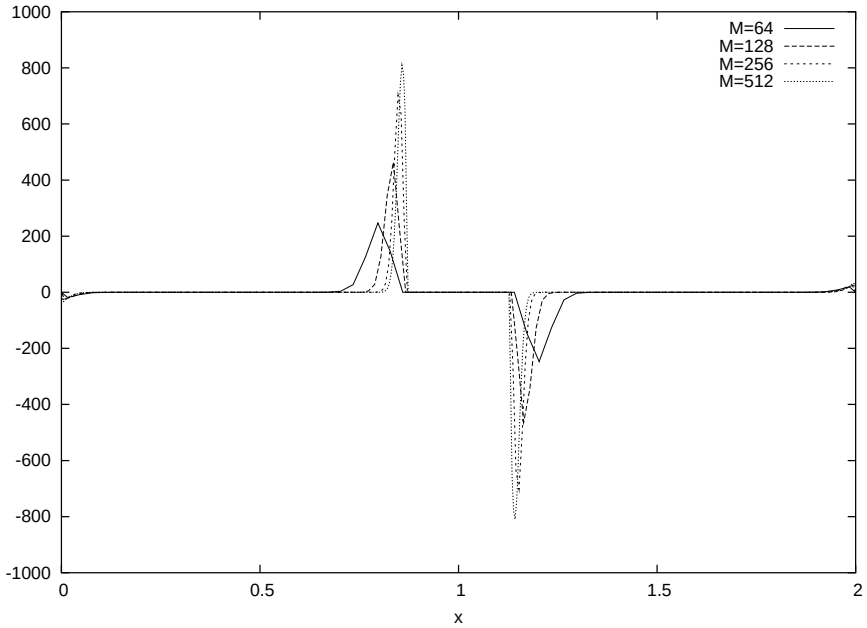


FIG. 3.9 – Profil de vorticité à $t = 0.1$, $\eta = 10^{-6}\Delta t$

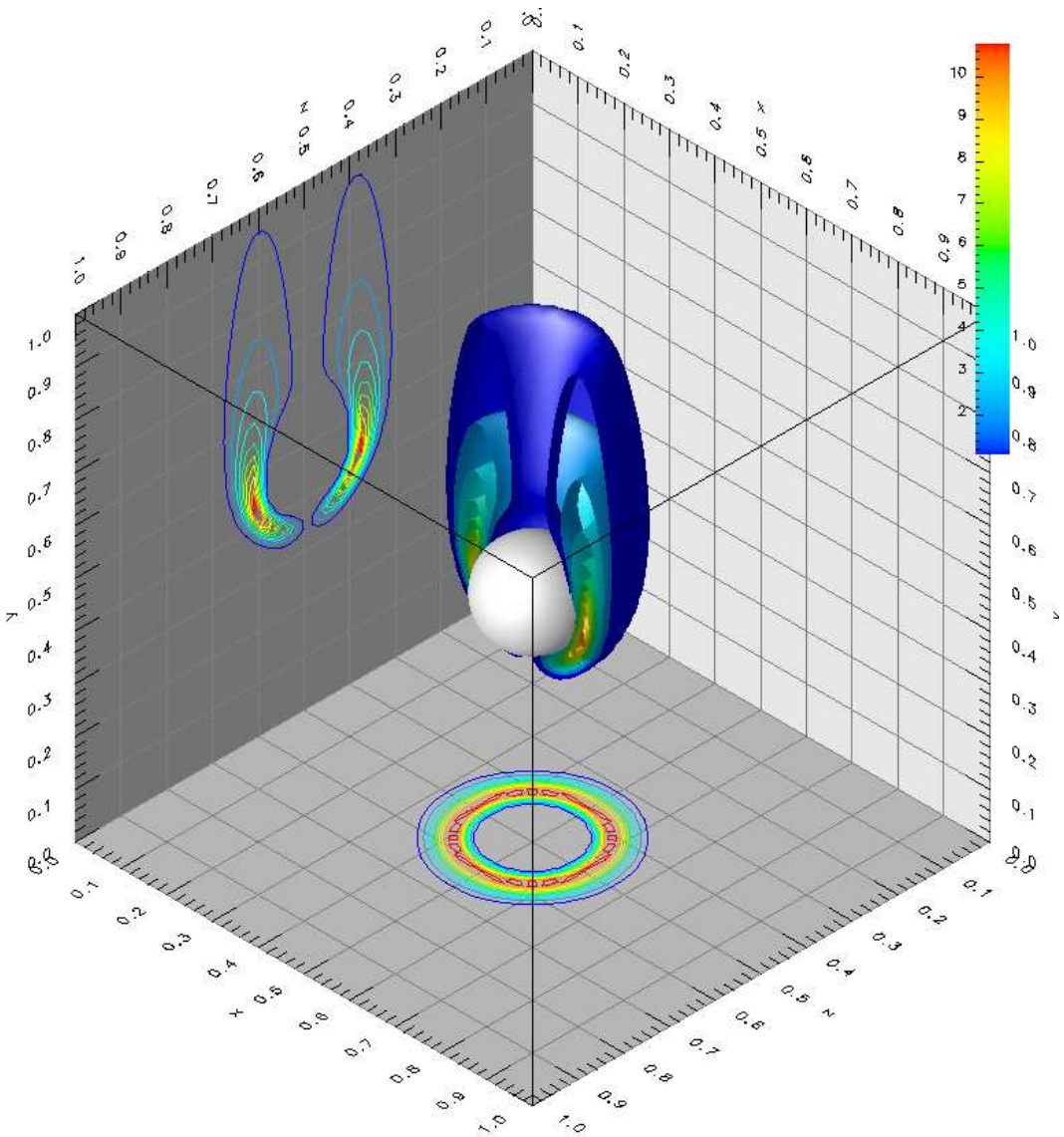


FIG. 3.10 – Surfaces de vorticité

Conclusion

Nous nous sommes intéressés à deux modèles de couplage fluide-structure, dans lesquels un fluide visqueux incompressible interagit avec soit une membrane élastique soit un solide rigide.

Stabilité numérique du couplage eulérien fluide-membrane élastique en dimension 2

Dans le chapitre 2, nous avons étudié la stabilité numérique d'un modèle eulérien proposé dans [20] pour le couplage fluide-membrane élastique en dimension 2, obtenu par une formulation level-set de la méthode de frontière immergée.
Afin d'identifier les sources d'ordre paramétrique de l'instabilité numérique observée lors du couplage explicite ou semi-implicite du fluide et de la membrane (mais aussi éventuellement avec un couplage implicite), nous avons effectué une analyse linéaire d'un modèle de couplage 1D. Nous avons calculé une condition de stabilité reliant les effets visqueux et élastiques. Lorsque la viscosité du fluide est grande, cette condition est très proche de celle établie dans [81] à l'aide d'une étude mathématique du problème continu, mais avec une dépendance moins restrictive par rapport à la raideur. En pratique ce gain peut devenir important pour de fortes raideurs. Le lien avec la condition obtenue dans [10] par une approche heuristique apparait pour des viscosités plus faibles. Dans ce cas la condition met en relation la raideur et le pas de dicrétisation spatiale. Nous avons donc obtenu une condition qui selon le régime de l'écoulement, donc du poids des effets visqueux, peut être comparée avec les conditions de [81] ou [10].
A la lumière des résultats numériques obtenus sur un problème 2D, cette condition constitue une première étape vers la compréhension du problème. Cependant cette condition exclut un certain nombre d'effets non linéaires qu'il apparaît nécessaire de considérer pour une étude plus approfondie. Les effets de masse ajoutée, reconnus pour être source d'instabillité lorsque les densités du fluide et la structure sont proches, sont notamment une piste éventuelle. D'un point de vue numérique, la mise en œuvre de schémas implicites ou semi-implicites raisonnables en coût de calcul et robustes du point de vue de la convergence reste un objectif majeur. Enfin nous avons étudié un schéma de couplage en temps conservant l'énergie au niveau discret. L'implémentation d'un tel schéma est envisageable

afin d'attaquer le problème de l'instabilité sous un angle un peu différent, en utilisant ce critère physique.

Méthode de pénalisation pour le couplage fluide-solides rigides

Le chapitre 3 a été consacré à l'étude d'une méthode de pénalisation pour le couplage fluide-solide rigide.
L'analyse numérique a montré la consistance de la méthode en établissant la convergence des solutions du problème pénalisé vers celles d'une formulation faible du couplage admise dans la littérature ([24],[33],...). Nous avons utilisé pour cela des outils introduits dans [52] pour l'analyse d'une méthode H^1 en dimension 2.
Cette méthode L^2 qui pénalise la vitesse elle-même et qui s'applique au cas d'un solide mobile représente une approche alternative aux pénalisations H^1 agissant sur le tenseur des vitesses de déformation.
Numériquement, elle s'inscrit dans le cadre des méthodes de domaine fictif qui permettent de travailler sur un maillage fixe régulier, et d'utiliser ainsi certains solveurs existants, quelle que soit la géométrie des domaines fluides et solides. D'autre part le calcul explicite de la vitesse rigide permet de disposer en pratique d'un champ de vitesse régulier pour transporter le solide. On peut enfin espérer obtenir une bonne précision numérique grâce au traitement implicite presque naturel du terme de pénalisation.
La méthode a été implémentée pour la sédimentation d'un cylindre (2D) et d'une sphère rigide (3D). Les premiers tests numériques montrent que la contrainte de rigidité est correctement prise en compte dans le solide, et que la méthode converge numériquement. D'autres tests en dimension 2 et 3 sont envisagés pour une validation plus complète, avec notamment un contrôle de la vitesse de sédimentation, dans le cas d'un ou plusieurs solides, en tirant profit au maximum de la formulation level-set pour la gestion des collisions.

Bibliographie

[1] R.A. Adams and J. Fournier. *Sobolev spaces.* second edition, Elsevier, 2003.

[2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation.* Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.

[3] S.M. Allen and J.W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall. Mater.*, 27 :1085 – 1095, 1979.

[4] P. Angot. Analysis of singular perturbations on the brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows. *M^2AS Math. Meth. Appl. Sci.*, 22(16) :1395 – 1412, 1999.

[5] P. Angot, C.H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497 – 520, 1999.

[6] V.E. Badalassi, H.D. Ceniceros, and S. Banerjee. Computation of multiphase systems with phase field models. *J. Comp. Phys.*, 190 :371 – 397, 2003.

[7] R.P. Beyer and R.J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(2) :332 – 364, 1992.

[8] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. Numerical stability of the finite element immersed boundary method. *M3AS Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17 :1479 – 1505, 2007.

[9] F. Boyer and P. Fabrie. *Elements d'analyse pour l'étude de quelques modèles découlements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52. Mathématiques & Applications, 1992.

[10] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modelling surface tension. *J. Comp. Phys.*, 100 :335 – 354, 1992.

[11] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, 1992.

[12] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28 :258– 267, 1958.

[13] M. Carlson, P.J. Mucha, and G. Turk. Rigid fluid : animating the interplay between rigid bodies and fluid. *ACM Transactions on Graphics*, 23 :377– 384, 2004.

[14] P. Causin, J.F. Gerbeau, and F. Nobile. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Rapport de recherche INRIA*, 5084, 2004.

[15] Y.C. Chang, T.Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher. A level-set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *J. Comp. Phys.*, 124 :449 – 464, 1996.

[16] C. Conca, J. San Martin, and M. Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Comm. Partial Differential Equations*, 25 :1019 – 1042, 2000.

[17] M. Coquerelle. *Calcul d'interaction fluide-structure par méthode de vortex et application en synthèse d'images.* PhD thesis, Université Grenoble 1, 2008.

[18] M. Coquerelle and G.-H. Cottet. A vortex level-set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. J. Comp. Phys. 2008, in press.

[19] G.H. Cottet. *Multi-physics and particle methods, in Computational Fluid and Solid Mechanics.* K.J. Bathe (ed.), Elsevier, 2003.

[20] G.H. Cottet and E. Maitre. A level set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 338 :581 – 586, 2004.

[21] G.H. Cottet and E. Maitre. A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *M3AS*, 16(3) :415 – 438, 2006.

[22] G.H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level-set models for incompressible fluid-structure interaction. soumis à M2AN.

[23] G.H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. An eulerian method for fluid-structure coupling with biophysical applications. ECCOMAS CFD, 2006.

[24] B. Desjardins and M.J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 146 :59 – 71, 1999.

[25] J. Du, B. Fix, J. Glimm, X. Jia, X. Li, and Y. Li. A simple package for front tracking. *J. Comp. Phys.*, 213 :613 – 628, 2006.

[26] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, and I. Mitchell. A hybrid particle level set method for imrpoved interface capturing. *J. Comp. Phys.*, 183 :83 – 116, 2002.

[27] M.A. Fernandez, J.F. Gerbeau, and C. Grandmont. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *Rapport de recherche INRIA*, 5700, 2005.

[28] H. Fujita and N. Sauer. On existence of weak solutions of the navier-stokes equations in regions with moving boundaries. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A (devenu depuis 1993 Journal of mathematical sciences, the University of Tokyo)*, 17 :403 – 420, 1970.

[29] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past

moving rigid bodies : Application to particulate flow. *J. Comp. Phys.*, 169 :363 – 426, 2001.

[30] B.E. Griffith and C.S. Peskin. On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *J. Comp. Phys.*, 208 :75 – 105, 2005.

[31] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. *J. Comp. Phys.*, 71(2) :231 – 303, 1987.

[32] S.E. Hieber and P. Koumoutsakos. A lagrangian particle level set method. *J. Comp. Phys.*, 210(1) :342 – 367, 2005.

[33] M. Hillairet. Lack of collision between solid bodies in a 2d constant density incompressible viscous flow. Accepté pour publication à *Comm. Part. Diff. Eq.*.

[34] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all speeds. *J. Comp. Phys.*, 14 :227 – 253, 1974.

[35] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39 :201 – 225, 1981.

[36] K-H. Hoffmann and V.N. Starovoitov. Zur bewegung einer kugel in einer z´ahen fl´ussigkeit. *Doc. Math.*, 5 :15 – 21, 2000.

[37] T.Y. Hou and Z. Shi. Removing the stiffness of elastic force from the immersed boundary method for the 2d stokes equations. Soumis.

[38] H.H. Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *Int. J. Multiphase Flow*, 22(2) :335 – 352, 1996.

[39] H.H. Hu, D.D. Joseph, and M.J. Crochet. Direct simulation of fluid particle motion. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3 :285 – 306, 1992.

[40] H.H. Hu, N.A. Patankar, and M.Y. Zhu. Direct numerical simulations of fluid-solid systems using the arbitrary lagrangian-eulerian technique. *J. Comp. Phys.*, 169 :427 – 462, 2001.

[41] J.M. Hyman. Numerical methods for tracking interfaces. *Physica 12D*, pages 396 – 407, 1984.

[42] F. Sotiropoulos I. Borazjani, L. Ge. Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction with complex 3d rigid bodies. *J. Comp. Phys.*, 277 :7587 – 7620, 2008.

[43] D. Jacqmin. Calculation of two-phase navier-stokes flows using phase-field modeling. *J. Comp. Phys.*, 155 :96 – 127, 1999.

[44] J. Janela, A. Lefevre, and B. Maury. A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction. *In E. Cances and F. Gerbeau, editors, ESSAIM Proceedings*, 14 :115 – 123, 2005.

[45] A.A. Johnson and T.E. Tezduyar. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134 :351 – 373, 1996.

[46] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J.P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34 :651 – 684, 2000.

[47] A.J.C. Ladd. Numerical simulation of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. ii. numerical results. *J. Fluid. Mech.*, 271 :311 – 339, 1994.

[48] L. Lee. *Immersed interface methods for incompressible flow with moving interfaces.* PhD thesis, University of Washington, 2002.

[49] R.J. Leveque and Z. Li. Immersed interface method for stokes flow with elastic boundaries or surface tension. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18 :709 – 735, 1997.

[50] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics.* Oxford Science Publications, 1996.

[51] J.A. San Martin, J.F. Scheid, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Convergence of the lagrange-galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 :1536 – 1571, 2005.

[52] J.A. San Martin, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 161 :113 – 147, 2002.

[53] B. Maury. Direct simulation of 2d fluid-particle flows in biperiodic domains. *J. Comp. Phys.*, 156 :325 – 351, 1999.

[54] A.A. Mayo and C.S. Peskin. An implicit numerical method for fluid dynamics problems with immersed elastic boundaries. *Contemporary Mathematics*, 141 :261 – 277, 1993.

[55] A. Miranville and R. Temam. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus.* Springer, 2003.

[56] E. Newren. *Enhancing the Immersed Boundary Method : stability, volume conservation, and implicit solvers.* PhD thesis, University of Utah, 2007.

[57] S. Osher and R.P. Fedkiw. *Level set methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer, 2003.

[58] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependant speed, algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comp. Phys.*, 79 :12 – 49, 1988.

[59] N.A. Patankar. A formulation for fast computations of rigid particulate flows. *Center Turbul. Res.,Ann. Res. Briefs*, pages 185 – 196, 2001.

[60] N.A. Patankar, P. Singh, D.D. Joseph, R. Glowinski, and T.W. Pan. A new formulation for the distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 26 :1509 – 1524, 2000.

[61] R.J. Di Perna and P-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Invent. math.*, 98 :511 – 547, 1989.

[62] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.*, 25 :220 – 252, 1977.

[63] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479 – 517, 2002.

[64] C.S. Peskin and B.F. Printz. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed boundaries. *J. Comp. Phys.*, 105 :33 – 46, 1993.

[65] T.N. Randrianarivelo, G. Pianet, S. Vincent, and J.P. Caltagirone. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47 :1245 – 1251, 2005.

[66] J.B. Ritz and J.P. Caltagirone. A numerical continuous model for the hydrodynamics of fluid particle systems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30 :1067 – 1090, 1999.

[67] A. Sarthou, S. Vincent, J.P. Caltagirone, and P. Angot. Eulerian-lagrangian grid coupling and penalty methods for the simulation of multiphase flows interacting with complex objects. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2007.

[68] J.A. Sethian and P. Smereka. Level-set methods for fluid interfaces. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 35 :341 – 372, 2003.

[69] N. Sharma and N.A. Patankar. A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows. *J. Comp. Phys.*, 205 :439 – 457, 2005.

[70] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J. Comp. Phys.*, 77 :439 – 471, 1988.

[71] A. Smolianski. Finite-element/level-set/operator-splitting (felsos) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 48 :231 – 269, 2005.

[72] J. Stockie. *Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibres*. PhD thesis, Institute of Applied Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, 1997.

[73] J.M. Stockie and B.R. Wetton. Stability analysis for the immersed fiber problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55(6) :1577 – 1591, 1995.

[74] J.M. Stockie and B.R. Wetton. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *J. Comp. Phys.*, 154 :41 – 64, 1999.

[75] M. Sussman. A second order coupled level set and volume-of-fluid method for computing growth and collapse of vapor bubbles. *J. Comp. Phys.*, 187 :110 – 136, 2003.

[76] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 114 :146 – 159, 1994.

[77] P. Le Tallec and J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3039 – 3067, 2001.

[78] R. Temam. *Navier-Stokes equations and numerical analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[79] A.K. Tornberg and B. Engquist. Numerical approximations of singular source termsin differential equations. *J. Comp. Phys.*, 200 :462 – 488, 2004.

[80] C. Tu and C.S. Peskin. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : a comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(6) :1361 – 1376, 1992.

[81] P. Vigneaux. *Méthodes Level Set pour des problèmes d'interface en microfluidique.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2007.

[82] X. Yang, A.J. James, J. Lowengrub, X. Zheng, and V. Cristini. An adaptive coupled level-set/volume-of-fluid interface capturing method for unstructured traingular grids. *J. Comp. Phys.*, 217 :364 – 394, 2006.

[83] H.K. Zhao, T. Chan, B. Merriman, and S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comp. Phys.*, 127 :179 – 195, 1996.

Table des figures

2.1 Formes de la membrane élastique à l'état initial, final, et au repos 48
2.2 Evolution des axes de l'ellipse 49
2.3 Profils de pression à $t = 0.2$ 49
2.4 Profils de pression à $t = 2.2$ 50
2.5 Profils de pression à $t = 30$ 51
2.6 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 0.1$ et 10 , $\mu = 0.01$ 52
2.7 Relaxation de l'ellipse pour $\mu = 0.1$ et 0.001, $\nu_e = 1$ 52
2.8 Relaxation de l'ellipse, avec ou sans dév. de $\nabla(E'_e(|\nabla\phi|))$ et transport de e 54
2.9 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 1$, $M = 64$ 72
2.10 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^2$, $\mu = 1$, $M = 64$ 72
2.11 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^4$, $\mu = 1$, $M = 64$ 73
2.12 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$ 73
2.13 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$, et $C = 0.02$ 74
2.14 Relaxation de l'ellipse pour $\Lambda_e = 1$, $\nu_e = 10^6$, $\mu = 1$, $M = 64$, et $C = 0.2$. 75
2.15 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 1$ et Δx variable 76
2.16 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$ 77
2.17 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^2$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$ 78
2.18 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 10^4$, $\mu = 10^{-2}$, $M = 64$ 78
2.19 Relaxation de l'ellipse pour $\nu_e = 1$, $\mu = 10^{-2}$ et Δx variable 79

3.1 Modèle fluide-solide rigide 90
3.2 Domaine rigide agrandi 115
3.3 Fonction caractéristique régularisée 138
3.4 Cylindre 2D en sédimentation 142
3.5 Iso-lignes de vorticité 147
3.6 Iso-lignes de vorticité à $t = 0.25$ 148
3.7 Profil de vitesse verticale à $t = 0.1$, $M = 512$ 149
3.8 Profil de vitesse verticale à $t = 0.1$, $\eta = 10^{-6}\Delta t$ 149
3.9 Profil de vorticité à $t = 0.1$, $\eta = 10^{-6}\Delta t$ 150
3.10 Surfaces de vorticité 151

MÉTHODES LEVEL-SET ET PÉNALISATION POUR LE CALCUL D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE

RÉSUMÉ : Ce travail est consacré à l'étude de problèmes de couplage fluide-structure par des méthodes de frontière immergée et de pénalisation. Dans une première partie nous abordons les différents aspects de la simulation numérique de modèles couplant un fluide et une structure (formulation de l'écoulement, localisation de la structure et prise en compte des interactions), puis nous présentons les modèles sur lesquels nous nous concentrons dans la suite : fluide incompressible/membrane élastique et fluide incompressible/solide rigide. Dans la deuxième partie nous étudions la stabilité numérique d'une formulation level-set de la méthode de frontière immergée pour le couplage fluide/membrane élastique. Une nouvelle condition de stabilité pour ce modèle est calculée par analyse d'un modèle linéarisé 1D, puis validée numériquement en 2D. Enfin la troisième partie est consacrée à l'analyse numérique d'une méthode de pénalisation pour le couplage fluide/solide rigide, dans laquelle la vitesse rigide est calculée par projection, et pour laquelle un traitement implicite naturel du terme de pénalisation permet de satisfaire la contrainte de rigidité avec précision dans le solide. Nous montrons la convergence du problème pénalisé vers une formulation faible du couplage, et illustrons ce résultat sur des tests numériques en sédimentation.
MOTS-CLEFS : frontière immergée, level-set, pénalisation, interaction fluide-structure, membrane élastique , solide rigide, Navier-Stokes, condition de stabilité

LEVEL-SET METHOD AND PENALIZATION FOR FLUID STRUCTURE INTERACTIONS

ABSTRACT : This dissertation is dedicated to the study of fluid structure interaction problems with either the immersed boundary method or a penalization method. The first part describes the numerical methods dedicated to the simulation of fluid-structure interaction models (flow formulation, structure localization, interactions treatment), then details the models we are dealing with in particular : incompressible fluid/elastic membrane and incompressible fluid/rigid solid. In the second part we study the numerical stability of a level-set formulation of the immersed boundary method applied to fluid-elastic membrane coupling. A new stability condition for this model is derived from the linear analysis of a 1D model, and then validated numerically on a membrane relaxation test case. Finally, in the third part we focus on the numerical analysis of a penalization method for fluid/solid coupling. In this method the rigid velocity is computed by a projection method, and the implicit treatment of the penalization term gives good precision reults. We prove the convergence of the penalized problem toward a weak formulation. Then we propose some numerical evidence of the good behavior of our numerical method on a sedimentation test case.
KEY WORDS : immersed boundary, level-set, penalization, fluid-structure interaction, elastic membrane, rigid solid, Navier-Stokes equations, stability condition