



HAL
open science

Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la méthode des éléments finis

Ludovic Chamoin

► **To cite this version:**

Ludovic Chamoin. Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la méthode des éléments finis. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2007. Français. NNT: . tel-00341845

HAL Id: tel-00341845

<https://theses.hal.science/tel-00341845>

Submitted on 26 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2007 n° 40



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par
LUDOVIC CHAMOIN

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :
**Encadrement *a posteriori* de quantités locales
dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus
par la Méthode des Éléments Finis**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 29 mai 2007 devant le jury composé de :

D. AUBRY	École Centrale de Paris	Président
A. HUERTA	Université Polytechnique de Catalogne	Rapporteur
N. MOËS	École Centrale de Nantes	Rapporteur
P. LADEVÈZE	ENS de Cachan	Directeur de thèse
P. BLANCHARD	EADS Astrium	Examineur
E. FLORENTIN	ENS de Cachan	Examineur
D. LEGUILLON	Université Pierre & Marie Curie	Examineur
S. PRUDHOMME	Université du Texas	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX

Ces trois années de thèse auront été marquées par de nombreuses rencontres enrichissantes autant sur le plan professionnel qu'humain.

La plus importante a sans aucun doute été celle de Pierre Ladevèze, et c'est par conséquent à lui que reviennent mes premiers remerciements. En me faisant confiance sur ce passionnant sujet de thèse, en me donnant des responsabilités et en m'offrant la possibilité de partir pour diverses conférences ou pour des séjours de recherche à l'étranger, il a sû me transmettre sa passion pour la recherche. Son génie et son humanisme m'ont en outre permis de mener à bien ce travail tout en restant optimiste et serein.

Éric Florentin est aussi une rencontre importante, à la fois pour la thèse et pour les moments plus festifs. Je le remercie chaleureusement pour son aide durant ces trois ans, pour ses conseils précieux ainsi que pour la joie de vivre permanente qui l'anime et qui fait plaisir à voir. Un clin d'œil également à Andréa pour ses diverses relectures pendant la phase de rédaction du manuscrit.

Je n'oublie évidemment pas les nombreux copains et collègues du LMT et du DGM. Un salut spécial à Nico, Séb, Delphine, Alain, Martin qui sont des rencontres un peu plus anciennes, à Didou, Mathilde, Frisou (notre grand chef de « l'équipe erreur »), Xavier, Raka, Julien, Olivier, PAB et PAG, Manu, David, Laurent, Rouchy, François, etc . . . pour la bonne ambiance qu'ils font régner au laboratoire, à Manuëla et Julien qui ont bien voulu de moi pour leur encadrement, et à toutes celles et ceux que j'ai eu l'honneur de côtoyer au centre de calcul ou au bar du LMT.

Un grand merci va également aux personnes du laboratoire ICES à Austin (USA), en particulier S. Prudhomme, J-T. Oden et L. Demkowicz, pour leur accueil durant mes différentes visites là-bas et pour les riches connaissances acquises avec eux. Je suis heureux et fier de les retrouver l'an prochain pour le post-doctorat.

Une dernière rencontre, plus près du cœur, est celle d'Agnès. Je la remercie vivement pour son support quotidien, en particulier durant ces derniers mois mouvementés, ainsi que pour sa tendresse et son dévouement.

C'est donc après ces différentes rencontres qu'est arrivée la soutenance de thèse, devant un jury à qui je tiens à témoigner ma reconnaissance : Denis Aubry pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury, Antonio Huerta et Nicolas Moës pour leur lourd travail de rapport du manuscrit, Dominique Leguillon et Serge Prudhomme pour leur œil d'examineur éclairé et Patrice Blanchard pour la dimension industrielle apportée à ces travaux de recherche.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mes parents, à ma sœur et à tous les membres de ma famille qui m'ont suivi et encouragé depuis cette enfance merveilleuse, beigné dans le monde agricole au milieu des vaches de la campagne bourguignonne, jusqu'à ces dernières années au cœur de la vie parisienne et un peu éloigné d'eux. Qu'ils voient en ce travail la récompense de leur soutien permanent.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xi
Introduction	1
1 État de l’art sur l’estimation d’erreur dans les calculs par éléments finis	5
1 Présentation générale de l’erreur de discrétisation	7
2 Estimation de l’erreur globale	9
2.1 Les méthodes relatives aux problèmes linéaires de statique	9
2.1.1 Méthodes basées sur les défauts d’équilibre	10
2.1.2 Méthodes basées sur les défauts de régularité	16
2.1.3 Méthodes basées sur l’erreur de comportement	17
2.1.4 Comparaison des estimateurs	22
2.2 Les méthodes relatives aux autres types de problèmes	23
2.2.1 Méthodes reprenant celles des résidus, de lissage ou de l’analyse duale	23
2.2.2 Méthodes basées sur l’erreur de comportement	24
3 Estimation de l’erreur locale	29
3.1 Estimation de l’erreur en pollution	29
3.1.1 Concept d’erreur en pollution	29
3.1.2 Mesure de l’erreur en pollution	30
3.2 Utilisation des techniques d’extraction	31
3.2.1 Cas des problèmes linéaires de statique	31
3.2.2 Extension aux autres types de problèmes	38
3.3 Encadrement direct de l’erreur locale	41
4 Bilan	42
2 Erreur en dissipation appliquée aux problèmes de viscoélasticité linéaire	45
1 Les problèmes de viscoélasticité linéaire	47

1.1	Qu'est-ce que la viscoélasticité	47
1.1.1	Mécanisme physique associé	47
1.1.2	Approche théorique de la viscoélasticité	48
1.1.3	Différents modèles de viscoélasticité	50
1.2	Formulation de la viscoélasticité par variables internes	53
1.2.1	Choix des variables	54
1.2.2	Les lois d'état	54
1.2.3	Les équations d'évolution	56
1.2.4	Quelques remarques	57
2	Le problème de référence	58
2.1	Écriture du problème	58
2.2	Résolution numérique du problème	59
2.3	Exemples	60
3	Mise en œuvre de l'erreur en dissipation pour le problème de référence . . .	63
3.1	Écriture de l'erreur en dissipation	63
3.2	Construction des champs admissibles	63
3.3	Calcul de l'erreur en dissipation et propriétés	65
3.3.1	Calcul	65
3.3.2	Propriétés	65
3.4	Résultats numériques	66
3.4.1	Convergence de l'erreur en dissipation	66
3.4.2	Influence de la technique de construction des champs admissibles	68
4	Bilan	70
3	La méthode d'estimation d'erreur locale pour les problèmes de visco-élasticité linéaire	71
1	Mise en place de la technique d'extraction	73
1.1	Traitement de la quantité d'intérêt	73
1.2	Le problème adjoint	74
1.2.1	Écriture du problème adjoint	74
1.2.2	Calcul d'une solution admissible	75
2	Estimation de l'erreur locale	76
2.1	Résultat fondamental	76
2.2	Premières bornes	77
3	Améliorations de l'encadrement	77
3.1	Restriction de l'intervalle temporel d'étude	77
3.2	Introduction de \hat{s}_h^m	78
3.3	Raffinement du maillage associé au problème adjoint	79
4	Résultats numériques	80
4.1	Performances dues à l'utilisation de \hat{s}_h^m	80
4.2	Encadrements en viscoélasticité 1D	83
4.3	Encadrements en viscoélasticité 2D	85

5	Bilan	89
4	Prise en compte des effets d’histoire dans l’estimation d’erreur locale	91
1	Mise en évidence des effets d’histoire	92
1.1	Classification des grandeurs physiques	92
1.2	Influence de l’histoire sur les bornes d’erreur locale	93
2	Modification de la méthode pour prendre en compte les effets d’histoire	95
2.1	Nouvelle méthode de majoration	95
2.2	Calcul de la fonction duale f	97
2.3	Choix de la fonction de pondération $a(t)$	99
3	Résultats numériques	101
4	Bilan	107
5	Approche non-intrusive pour la résolution du problème adjoint	109
1	Intérêts d’une méthode non-intrusive	110
2	Nouvelle résolution du problème adjoint	111
2.1	Mise en place de la technique « handbook »	111
2.2	Calcul des fonctions d’enrichissement	113
2.3	Écriture du problème à résoudre	114
3	Obtention des bornes associées	115
3.1	Construction d’une solution admissible	115
3.2	Calcul des bornes	116
4	Résultats numériques	117
4.1	Exemple 1D	117
4.2	Exemple 2D	121
4.2.1	Résultats obtenus avec l’enrichissement 1	124
4.2.2	Résultats obtenus avec l’enrichissement 2	125
5	Bilan	127
6	Extension de la méthode aux quantités d’intérêt ponctuelles en espace	129
1	Difficultés associées à l’étude de quantités d’intérêt ponctuelles	130
2	Calcul des fonctions « handbook »	131
2.1	Les fonctions de Green	131
2.2	Calcul pour les EDO et EDP simples en 2D	133
2.2.1	Application pour le laplacien et le double laplacien en 2D	133
2.2.2	Vérification des conditions limites	134
2.3	Calcul en élasticité 2D par les potentiels complexes	135
2.4	Méthode générale de calcul en élasticité 2D et 3D	136
2.4.1	Présentation	136
2.4.2	Cas particulier d’un milieu semi-infini	138
2.4.3	Généralisation de la méthode	140
3	Calcul des bornes d’encadrement	140
4	Résultats numériques	141

4.1	Estimation de l'erreur sur un déplacement ponctuel	141
4.2	Estimation de l'erreur sur une variable interne ponctuelle	144
4.3	Calcul d'un minorant/majorant d'une quantité sur une zone donnée	145
5	Bilan	146
7	Estimation de l'erreur de modèle	149
1	Présentation	150
2	Démarche d'estimation de l'erreur de modèle	152
2.1	Idée générale	152
2.2	Écriture du problème discret en espace	152
2.3	Calcul des indicateurs d'erreur de modèle	153
2.3.1	La quantité d'intérêt	153
2.3.2	Le problème adjoint	153
2.3.3	Construction des champs admissibles	154
2.3.4	Calcul des indicateurs d'erreur	154
3	Résultats numériques	155
4	Bilan	157
	Conclusion	159
	Bibliographie	161
	Annexe A : Démonstration des égalités fondamentales	175
	Annexe B : Dérivation du problème adjoint pour le problème de viscoélasticité linéaire de référence	177
	Annexe C : Expression de quelques fonctions de Green en élasticité 2D et 3D	179
	Annexe D : Paramètres utilisés pour les simulations numériques	185

Table des figures

1.1	Représentation de la structure et de son environnement	7
1.2	Représentation du patch Ω_i lié au nœud i	13
1.3	Interprétation géométrique de l'erreur en dissipation	27
1.4	Définition du problème de référence 1D	37
1.5	Définition et solution du problème adjoint	38
1.6	Structure étudiée : carte de contrainte de Von Mises (gauche) et zone d'étude ω (droite)	42
2.1	Essais de fluage (gauche) et de relaxation (droite)	47
2.2	Le modèle de Kelvin-Voigt	50
2.3	Le modèle de Maxwell	51
2.4	Le modèle de Maxwell généralisé	51
2.5	Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé	52
2.6	Les modèles de Zener	52
2.7	Variables internes du modèle de Maxwell généralisé.	54
2.8	Représentation de la structure et de son environnement	58
2.9	Poutre étudiée et évolution de son chargement avec le temps	61
2.10	Déplacement obtenu avec un schéma explicite, avec $N_p = 5$, $N_p = 20$ et $N_p = 50$	61
2.11	Déplacement obtenu avec un schéma implicite, avec $N_p = 5$, $N_p = 20$ et $N_p = 50$	61
2.12	Nouveau chargement sur la poutre	62
2.13	Évolution temporelle de l'effort N dans la poutre (gauche) et dissipation à chaque pas de temps (droite)	62
2.14	Convergence en espace (gauche) et en temps (droite) de l'erreur en dissipation.	67
2.15	Convergence des contributions d'erreur en espace (gauche) et en temps (droite)	67
2.16	Structure 2D étudiée et son chargement	68
2.17	Répartition sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation e_{diss}^2	68
3.1	Définition des zones ω et ω'	79

3.2	Structure considérée et répartition de l'erreur en relation de comportement associée à la solution approchée	81
3.3	Répartition de l'erreur en relation de comportement pour le problème adjoint avec le maillage initial et un maillage raffiné localement	82
3.4	Chargement du problème adjoint : en espace (gauche), en temps (droite)	83
3.5	Évolution temporelle de $I_{ex}(t)$ et $I_h(t)$	84
3.6	Répartition spatiale et temporelle du chargement du problème adjoint	84
3.7	Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)	85
3.8	Carte spatiale du champ $\epsilon_{1h_{yy}}^p$ (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)	85
3.9	Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) de la composante non nulle $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ de l'extracteur $\tilde{\sigma}_{\Sigma}$	86
3.10	Répartition sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{\tilde{e}}_h^p, \hat{s}_h)$	86
3.11	Densité spatiale d'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{\tilde{e}}_h^p, \hat{s}_h)$ avec $N_c = 1, N_c = 2$ et $N_c = 3$	87
3.12	Densité spatiale d'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{\tilde{e}}_h^p, \hat{s}_h)$ avec $r = 3, r = 4$ et $r = 5$	88
4.1	Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)	92
4.2	Répartition spatiale du champ $\epsilon_{1h_{yy}}^p$ et évolution temporelle de $I(t)$	93
4.3	Évolution de ΔI avec le nombre de cycles	93
4.4	Bornes d'encadrement $\bar{\chi}_{inf}$ et $\bar{\chi}_{sup}$ en fonction du numéro de cycle cy	94
4.5	Contributions à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation du problème de référence (gauche) et adjoint (droite)	94
4.6	Évolution temporelle du chargement du problème adjoint relatif à I_{t_7}	95
4.7	Évolution de la fonction $a_1(t)$	99
4.8	Évolution de la fonction $a_2(t)$	100
4.9	Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)	101
4.10	Distribution spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation e_{diss}^2	101
4.11	Carte du champ $\epsilon_{1h_{yy}}^p$ à $t = T$ (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)	102
4.12	Évolution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint	102
4.13	Répartition spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2	103
4.14	Distribution à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation e_{diss}^2 pondérée par $a_1(t)$	103
4.15	Bornes normées $\bar{\chi}_{inf}, \bar{\chi}_{sup}$ (+) et $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ (*) en fonction du temps	104
4.16	Encadrement garanti de I_{ex} au cours du temps avec les bornes χ_{inf}, χ_{sup} (gauche) et ξ_{inf}, ξ_{sup} (droite)	104
4.17	Carte du champ $\epsilon_{1h_{yy}}^p$ à $t = T$ (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)	105

4.18	Évolution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint	105
4.19	Répartition spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2	106
4.20	Distribution à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation e_{diss}^2 pondérée par $a_2(t)$	106
4.21	Bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$, $\bar{\chi}_{sup}$ (+) et $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ (*) en fonction du temps	107
5.1	Définition des zones introduites avec la partition d'unité	112
5.2	Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	113
5.3	Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu semi-infini avec condition de bord libre : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	114
5.4	Séparation du chargement non linéaire sur $\partial\Omega_1^{PUM}$ en deux parties	116
5.5	Structure considérée, avec zone locale ω (gauche) et évolution du chargement (droite)	118
5.6	Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint	118
5.7	Fonctions d'enrichissement introduites en espace et en temps : déplacement \tilde{u}^{hand} (haut) et effort \tilde{N}^{hand} (bas)	119
5.8	Nœuds enrichis par la PUM dans la méthode non-intrusive	119
5.9	Répartition spatiale des champs \tilde{u}_{PUM}^{hand} (gauche), \tilde{u}_h^r (centre) et \tilde{u}_h (droite)	120
5.10	Répartition spatiale des champs \tilde{N}_{PUM}^{hand} (gauche), \tilde{N}_h^r (centre) et \tilde{N}_h (droite)	120
5.11	Distributions spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation du problème adjoint	120
5.12	Carte du champ $\tilde{\epsilon}_{1h_{yy}}^p$ à l'instant final T et zone ω d'étude	121
5.13	Évolution spatiale de la solution quasi-exacte du problème adjoint à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{xx}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}$ (droite)	122
5.14	Allure de l'évolution temporelle de la solution quasi-exacte du problème adjoint	122
5.15	Évolution spatiale du champ de contrainte « handbook » $\tilde{\sigma}^{hand}$ utilisé : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	123
5.16	Nœuds enrichis par la PUM : enrichissement 1 (gauche), enrichissement 2 (droite)	123
5.17	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)	124
5.18	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)	124
5.19	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)	124

5.20	Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2	125
5.21	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)	125
5.22	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)	125
5.23	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)	126
5.24	Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2	126
5.25	Maillage déformé de la solution ($\tilde{e}^{hand}, \tilde{s}^{hand}$)	127
5.26	Maillage déformé de la solution ($\tilde{e}_{PUM}^{hand}, \tilde{s}_{PUM}^{hand}$) avec l'enrichissement 1 (gauche) et l'enrichissement 2 (droite)	127
6.1	Application d'une force ponctuelle sur un nœud du maillage	131
6.2	Structure considérée (gauche) et champs de contrainte σ_{xx} obtenu avec 4096 éléments (droite)	132
6.3	Non-convergence de l'énergie de la solution approchée (gauche) et répartition de cette énergie pour $N_e = 4096$ (droite)	132
6.4	Définition du domaine circulaire Ω et des points P_0 et P'_0	134
6.5	Plan complexe	135
6.6	Schématisation de l'effort ponctuel en 2D	136
6.7	Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une force ponctuelle en milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	138
6.8	Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une précontrainte ponctuelle en milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	138
6.9	Paramètres intervenant dans la méthode des images	139
6.10	Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une force ponctuelle en milieu semi-infini avec condition de bord libre : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)	140
6.11	Emplacement du point P où on estime la quantité d'intérêt	142
6.12	Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint	142
6.13	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)	143
6.14	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)	143
6.15	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)	143
6.16	Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ obtenu à l'instant final T après régularisation du chargement : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)	144
6.17	Emplacement du point P où on estime la quantité d'intérêt	144

6.18	Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint	145
6.19	Zone de recherche d'un minorant/majorant de la quantité d'intérêt ponctuelle	146
6.20	Points de Gauss utilisés pour le calcul des bornes sur E	146
7.1	Modèle de référence et modèle simplifié	151
7.2	Approximation de l'erreur de modèle	152
7.3	Carte du champ de contrainte approché $\sigma_{h,yy}^{elas}$ à l'instant T et définition de la zone d'intérêt ω	156
7.4	Évolutions temporelles du champ $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{xx}}$ (gauche) et $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ (droite)	156
7.5	Évolutions temporelles du champ $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{xx}}$ (gauche) et $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ (droite) pour une faible viscosité	157
7.6	Repère polaire utilisé pour exprimer les fonctions de Green	180
7.7	Repère de Mindlin	182
7.8	Paramétrage dans le repère de Mindlin	183

Liste des tableaux

2.1	Valeur de la viscosité dynamique pour quelques matériaux	48
2.2	Évolution de l'erreur en dissipation avec la discrétisation spatiale (gauche) et temporelle (droite)	66
2.3	Valeur de l'erreur en dissipation en fonction de la technique de construction du champ $\hat{\sigma}_h$	70
3.1	Bornes de I_{ex} obtenues par les deux méthodes	82
3.2	Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le nombre de couches N_c	87
3.3	Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le degré de raffinement r	88
3.4	Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le degré de raffinement temporel $\Delta t/\Delta t'$	88
7.1	Quelques exemples de simplification du modèle de référence	150

Introduction

Depuis l'arrivée des ordinateurs, les bureaux d'étude et les centres de recherche ont vécu une révolution dans leur manière d'appréhender le calcul de structures, faisant de plus en plus appel au numérique pour simuler un système matériel soumis à des sollicitations extérieures (efforts, déplacements) en vue de son dimensionnement. Cette démarche est maintenant devenue primordiale, non seulement parce qu'elle permet dans une atmosphère économique tendue de réduire le nombre d'essais réels donc les coûts et les temps de conception (politique du « Virtual Testing »), mais aussi parce que dans certains cas, on ne possède même plus de prototype sur lequel réaliser les essais : le premier produit fabriqué doit être le bon. Initialement limitée à des systèmes simples, la simulation a elle-même subi une évolution progressive au cours des ans. Nous en sommes arrivés à un point tel qu'il devient de nos jours tout à fait légitime, grâce aux performances informatiques actuelles, de vouloir mener de façon banale et quotidienne la simulation de phénomènes physiques toujours plus complexes qu'on tente de décrire par des modèles mathématiques toujours plus élaborés.

Néanmoins, il faut bien garder à l'esprit que le modèle traité réellement par ordinateur reste une version approchée du modèle mathématique initial pris comme référence. La version "numérique" du modèle de référence est obtenue après diverses étapes simplificatrices, dites de condensation, qui permettent une résolution par des méthodes adaptées à l'outil informatique. Une des méthodes les plus répandues, et c'est celle que nous considérerons par la suite, est la Méthode des Éléments Finis (MEF) qui fait intervenir des paramètres de discrétisation comme la taille ou le type des éléments, la durée des pas de temps, le nombre d'itérations, ...

C'est pourquoi, parallèlement à l'essor des simulations par ordinateur, des outils issus de la recherche ont été élaborés afin de contrôler la qualité des modèles numériques utilisés ; ces outils permettent en quelque sorte de donner un degré de confiance aux solutions approchées obtenues. L'ensemble des activités ayant pour finalité de contrôler ainsi le calcul se regroupe sous le nom de vérification ; il représente actuellement une préoccupation majeure tant au niveau industriel qu'au niveau de la recherche.

Dans le cadre de la MEF, les premiers travaux sur la vérification ont vu le jour dans les années 70 et visaient à estimer l'erreur commise de façon globale sur toute la structure. Tout d'abord dédiés aux problèmes linéaires de thermique et d'élasticité [Azziz et Babuška

1972, Ladevèze 1975, Babuška et Rheinboldt 1978a, Zienkiewicz et Zhu 1987], ils ont ensuite été adaptés pour traiter des problèmes plus complexes comme ceux non linéaires ou d'évolution [Babuška et Rheinboldt 1982, Ladevèze 1985, Johnson et Hansbo 1991, Rannacher et Suttmeier 1998, Ladevèze et Moës 1998]. Utilisés à présent dans les codes de calcul industriels, ils donnent des informations quantitatives fiables sur la qualité globale d'un modèle numérique, et permettent de l'améliorer si nécessaire grâce à des procédures d'adaptation adéquates. Une revue des différents outils mis en place pour estimer l'erreur globale peut être trouvée dans [Ladevèze et Oden 1998, Babuška et Strouboulis 2001, Stein 2003, Ladevèze et Pelle 2004, Wiberg et Diez 2006].

Cependant, une information globale sur l'erreur n'a qu'une utilité restreinte pour l'ingénieur-concepteur car celui-ci est plutôt intéressé par la précision du calcul sur des quantités locales telles qu'une moyenne de contrainte dans une zone, le déplacement en un point, ou toute autre quantité locale dimensionnante.

Le thème de recherche qui en découle, i.e. l'estimation de l'erreur commise sur des quantités d'intérêt locales, est d'actualité depuis une dizaine d'années. Les premiers travaux ont porté là encore sur les problèmes linéaires en statique [Becker et Rannacher 1996, Paraschivoiu *et al.* 1997, Cirak et Ramm 1998, Oden et Prudhomme 1999, Ladevèze *et al.* 1999b, Strouboulis *et al.* 2000b, Stein *et al.* 2001, Becker et Rannacher 2001, Pares *et al.* 2006a] et l'idée qui émergea alors était qu'une quantité locale pouvait être mise sous forme globale, à l'aide de techniques d'extraction ; ceci permet le réemploi des outils mis en place pour l'estimation d'erreur globale. Malheureusement, pour les problèmes non linéaires ou d'évolution, beaucoup moins d'outils ont été proposés [Eriksson *et al.* 1995, Maday *et al.* 1999, Becker et Rannacher 2001], et la majorité d'entre eux se ramène au cas statique linéaire à l'aide d'hypothèses simplificatrices (linéarisation du comportement, prise en compte approximative de l'erreur en temps, ...). Cela conduit à des encadrements d'erreur locale non garantis ou non pertinents et va donc à l'encontre de la politique actuelle des bureaux d'étude qui vise à utiliser des méthodes conservatrices et robustes.

L'objectif du présent travail, qui s'inscrit d'une part dans le cadre du programme européen « MUltiSCAle analysis » piloté par EADS-IW et d'autre part dans la Chaire de la fondation EADS attribuée à Pierre Ladevèze, est de montrer qu'il est possible, dans le cadre des problèmes mécaniques d'évolution, de mettre en place des estimations fiables et pratiques de l'erreur sur des quantités locales intervenant dans ce type de problème (moyenne locale de contrainte, de déformation anélastique cumulée, ...). Cette idée, encore peu admise à l'heure actuelle dans le milieu de la recherche, représente un véritable défi.

On se place pour cela dans le cadre des problèmes de viscoélasticité linéaire décrits par variables internes, sous l'hypothèse des petites perturbations (ces problèmes représentent donc nos problèmes d'évolution modèles). On s'appuie de plus sur une méthode développée récemment au LMT-Cachan [Ladevèze 2006 - 2007] qui fournit un encadrement strict de l'erreur sur des quantités d'intérêt, à la fois pour les problèmes linéaires et les problèmes non linéaires d'évolution. Cette méthode se base sur trois notions fondamentales :

- la première est l'erreur en dissipation, introduite dans [Ladevèze 1989]. Cet outil, associé à une construction de champs admissibles adaptés, permet de prendre en compte toutes les sources d'erreur. Il a montré toute son efficacité pour l'estimation d'erreur globale dans les problèmes non linéaires d'évolution [Ladevèze et Moës 1998, Ladevèze *et al.* 1999a];

- les propriétés de convexité des opérateurs matériau constituent une deuxième notion de base;

- la dernière notion est l'utilisation des techniques d'extraction, amenant à résoudre un problème complémentaire correspondant au problème adjoint classique dans le cas linéaire.

Le résultat de cette méthode conduit non seulement à une majoration stricte de l'erreur sur des quantités d'intérêt locales, mais aussi à une estimation plus fine de la valeur exacte de ces quantités, ceci grâce à un terme de correction.

Les contributions apportées dans le travail exposé ici visent à aboutir à une estimation d'erreur locale de qualité et simple à mettre en œuvre. Ces contributions sont variées :

- la première porte sur la prise en compte des effets d'histoire intervenant dans les problèmes d'évolution [Ladevèze et Rougée 1985]. Pour ce type de problème, il y a en effet une plus ou moins grande dépendance des quantités d'intérêt, suivant leur type, vis-à-vis de l'histoire du chargement. La prise en compte de cette dépendance est donc primordiale afin d'éviter des surmajorations et de conserver ainsi une estimation d'erreur locale pertinente au cours du temps [Chamoin et Ladevèze 2006];

- une deuxième contribution concerne la résolution du problème adjoint [Chamoin et Ladevèze 2007]. Celui-ci étant semblable au problème de référence mais avec un chargement différent, l'objectif a été de mettre en place une méthode de résolution non-intrusive permettant la conservation des paramètres (maillage spatio-temporel notamment) et des opérateurs utilisés pour la résolution du problème de référence. Le caractère non-intrusif est apporté par l'utilisation de solutions locales quasi-exactes introduites par la méthode de partition d'unité (techniques « handbook » [Strouboulis *et al.* 2000a]). Cette procédure permet une résolution très précise du problème adjoint et est une alternative aux techniques intrusives classiques de raffinement local du maillage spatio-temporel. La méthode d'estimation d'erreur locale est alors très efficace et pratique; elle peut être facilement implémentée dans un code de calcul existant, sous forme de boîte noire, et est perçue comme telle par l'utilisateur du code. Le coût de calcul associé reste en outre raisonnable;

- un troisième travail, qui est une application directe des techniques non-intrusives décrites précédemment, a été d'étendre l'estimation d'erreur pour des quantités d'intérêt véritablement locales, c'est-à-dire ponctuelles à la fois en espace et en temps. Des solutions correspondant à des chargements ponctuels de type Dirac en milieu infini ou semi-infini

sont alors utilisées, bien que pouvant être à énergie infinie. Une conséquence est l'obtention de minorants et majorants garantis, sur une zone donnée, de telles quantités ponctuelles ;

- une dernière étude a porté sur la quantification de l'erreur de modèle, c'est-à-dire celle liée au remplacement du modèle mathématique de référence par un autre modèle mathématique intermédiaire, plus pratique et moins coûteux, mais restant suffisamment précis pour l'objectif recherché ; le calcul numérique est alors mené à partir de ce dernier modèle. En se plaçant dans le cas typique où le modèle de référence est viscoélastique tandis que le modèle utilisé pour le calcul est élastique, on montre qu'on peut contrôler efficacement l'erreur de modèle avec la méthode générale d'estimation d'erreur locale mise en place pour les problèmes de viscoélasticité. On peut donc appliquer celle-ci à l'estimation d'erreur locale sur des calculs élastiques.

Ces différentes contributions aboutissent à un outil inédit qui permet un encadrement **strict**, **pertinent** et **pratique** de la valeur exacte de quantités pertinentes pour le dimensionnement, dans le cadre des problèmes de viscoélasticité linéaire.

Les études numériques illustrant et validant les concepts utilisés ont été effectuées à partir d'un code développé sous Matlab et valable en 1D et 2D. L'objectif de cette démarche a été non pas d'avoir en main un code optimisé du point de vue de la performance de calcul mais plutôt un outil entièrement maîtrisé permettant d'être réactif vis-à-vis d'une méthode qui a sans cesse évolué.

Le document se divise en sept parties. Dans la première, nous revisitons l'état de l'art sur l'estimation d'erreur, à la fois globale et locale, en passant en revue les principaux outils mis en place pour les problèmes linéaires et non linéaires. La deuxième partie introduit le problème de viscoélasticité linéaire qui sera pris comme référence dans toute la suite et aborde la notion d'erreur en dissipation appliquée à ce type de problème. Dans un troisième temps, on présente la méthode d'estimation d'erreur locale mise en place dans [Ladevèze 2006]. La quatrième partie traite de l'optimisation des bornes d'encadrement présentées dans la partie précédente, en mettant en place une technique permettant de gérer les effets d'histoire. Dans la cinquième partie, la méthode d'estimation d'erreur locale non-intrusive est présentée et illustrée sur plusieurs exemples, avant qu'elle ne soit appliquée dans une sixième partie à des quantités d'intérêt ponctuelles en espace et en temps. Enfin, la septième et dernière partie est réservée à la notion d'erreur de modèle et à son estimation.

État de l'art sur l'estimation d'erreur dans les calculs par éléments finis

Dans ce chapitre, nous passons en revue les principaux travaux réalisés jusqu'à présent sur l'estimation d'erreur, qu'elle soit considérée d'un point de vue global ou bien local, dans le cadre de la Méthode des Éléments Finis. La présentation est néanmoins limitée aux travaux relatifs à l'erreur de discrétisation ; les autres sources d'erreur (non respect de la géométrie, approximation des charges et des déplacements, erreurs numériques, ...), qui ont également fait l'objet de travaux, ne rentrent pas dans le cadre de notre étude et ne sont donc pas abordées.

Sommaire

1	Présentation générale de l'erreur de discrétisation	7
2	Estimation de l'erreur globale	9
2.1	Les méthodes relatives aux problèmes linéaires de statique	9
2.2	Les méthodes relatives aux autres types de problèmes	23
3	Estimation de l'erreur locale	29
3.1	Estimation de l'erreur en pollution	29

3.2	Utilisation des techniques d'extraction	31
3.3	Encadrement direct de l'erreur locale	41
4	Bilan	42

1 Présentation générale de l'erreur de discrétisation

La littérature relative à l'estimation de l'erreur de discrétisation étant très vaste, nous ne donnons ici que les aspects fondamentaux ainsi que les références permettant au lecteur d'obtenir tous les détails souhaités. Pour plus de clarté, les différentes méthodes présentées sont illustrées sur un problème général de Mécanique des Milieux Continus. Nous considérons pour cela une structure représentée par un domaine Ω , de frontière $\partial\Omega$ (Figure 1.1). Cette structure est soumise à un chargement donné et dépendant du temps i.e. une force volumique $\underline{f}_d(t)$ dans Ω , un déplacement $\underline{U}_d(t)$ sur une partie $\partial_1\Omega$ de $\partial\Omega$ et une densité d'effort $\underline{F}_d(t)$ sur la partie $\partial_2\Omega$ complémentaire de $\partial_1\Omega$ ($\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$, $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$).

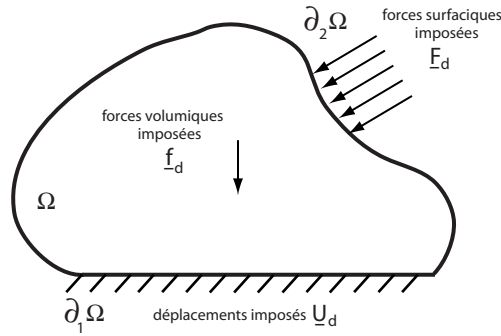


Figure 1.1: Représentation de la structure et de son environnement

Sous l'hypothèse des petites perturbations et d'un régime isotherme, le problème consiste à trouver sur l'intervalle temporel d'étude $[0, T]$ un champ de déplacement \underline{u} , ainsi que les champs de déformation ϵ et de contrainte σ associés, vérifiant :

- les liaisons cinématiques :

$$\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0, T]} ; \underline{u}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad \forall t \in [0, T] ; \epsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla(\underline{u}) + \nabla^T(\underline{u})) \quad (1.1)$$

- les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{S}^{[0, T]} ; \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \cdot \underline{u}^* \, d\Omega = & - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \epsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega \\ & + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1.2)$$

- la relation de comportement :

$$\sigma(M, t) = \mathcal{A}\left(\epsilon(\dot{\underline{u}}(M, \tau)), \tau \leq t\right) \quad \forall (M, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.3)$$

- les conditions initiales :

$$\underline{u}|_{t=0} = \underline{u}_0 ; \dot{\underline{u}}|_{t=0} = \underline{v}_0 ; \sigma|_{t=0} = \sigma_0 \quad (1.4)$$

$\mathcal{U}^{[0,T]}$ et $\mathcal{S}^{[0,T]}$ sont les espaces de Sobolev permettant de conserver une solution à énergie finie et \mathcal{U}_0 est l'espace vectoriel associé à $\mathcal{U}^{[0,T]}$. On note $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ la solution exacte du problème.

Malheureusement, la solution $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ est rarement accessible et nous avons alors recours à des méthodes d'approximation afin d'obtenir une solution numérique approchée. La Méthode des Éléments Finis (MEF) que nous considérons dans toute la suite est une de ces méthodes. Elle fournit une solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ contenue dans un espace d'approximation $\mathcal{U}_{h,\Delta t}^{[0,T]} \times \mathcal{S}_{h,\Delta t}^{[0,T]}$, à partir d'une discrétisation spatiale (maillage \mathcal{M}_h) et temporelle (maillage $\mathcal{M}_{\Delta t}$) du problème.

L'erreur de discrétisation que l'on souhaite estimer peut alors être définie par :

$$\underline{e}^u(M, t) = \underline{u}_{ex}(M, t) - \underline{u}_h(M, t) \quad \forall (M, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.5)$$

Néanmoins, cette fonction $\underline{e}^u(M, t)$ n'est pas exactement la grandeur que nous examinons dans l'estimation de l'erreur de discrétisation ; nous illustrons ce propos avec un problème simple d'élasticité linéaire en statique. Celui-ci se déduit du problème général précédent pris à l'instant $t = T$, sans terme d'accélération et avec la loi de comportement linéaire suivante :

$$\sigma(M) = \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}(M)) \quad \forall M \in \Omega \quad (1.6)$$

Le tenseur de Hooke \mathbf{K} , qui est linéaire, symétrique et défini positif, définit les produits scalaires (sur \mathcal{U} et \mathcal{S} respectivement) :

$$\begin{aligned} (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K}, \Omega} &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\bullet) \epsilon(\bullet)] d\Omega \\ (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega} &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}^{-1} \bullet \bullet] d\Omega \end{aligned}$$

Si on injecte l'erreur $\underline{e}^u(M) = \underline{u}_{ex}(M) - \underline{u}_h(M)$ dans l'équation d'équilibre (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\underline{e}^u) \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\underline{u}_h) \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

qui est une relation portant sur \underline{e}^u appelée *équation des résidus*. Il est alors illusoire de vouloir évaluer directement l'erreur \underline{e}^u en résolvant (1.7), car cela conduit à résoudre un problème aussi complexe et coûteux que le problème initial. Plutôt que l'erreur \underline{e}^u elle-même, il faut donc considérer des mesures de \underline{e}^u .

Une mesure globale couramment utilisée est la norme énergétique, car elle a un sens physique fort, elle est équivalente aux normes standards de Sobolev et peut facilement se restreindre pour donner des normes locales. Dans le cas de l'élasticité, la norme énergétique de l'erreur est définie par :

$$\|\underline{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\underline{\underline{u}}_{ex} - \underline{\underline{u}}_h\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}$$

avec

$$\|\bullet\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K},\Omega} ; \|\bullet\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}$$

Pour rendre compte de l'erreur commise lors d'un calcul éléments finis, on peut donc chercher à estimer la valeur de $\|\underline{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ (ou de toute autre norme globale de $\underline{\underline{e}}^u$) ; on parle alors d'estimation d'**erreur globale**.

Il est également possible de chercher à estimer une **erreur locale**, c'est-à-dire celle commise non pas sur toute la structure mais sur une quantité locale I donnée (déplacement en un point à un instant donné par exemple). L'erreur locale est alors définie par :

$$\Delta I = I(\underline{\underline{u}}_{ex}) - I(\underline{\underline{u}}_h) = I_{ex} - I_h$$

L'estimation de ces deux types d'erreur est discutée dans la suite de cette partie. Définissons alors les deux outils qui peuvent être fournis par les méthodes d'estimation d'erreur :

- le premier, basé principalement sur des considérations heuristiques, a un aspect plutôt qualitatif en donnant un ordre de grandeur de la mesure d'erreur : c'est l'**indicateur d'erreur** ;
- le second a quant à lui un aspect plus quantitatif : il approxime la mesure de l'erreur et tend vers la valeur exacte de cette mesure si la discrétisation éléments finis devient très fine : c'est l'**estimateur d'erreur**.

2 Estimation de l'erreur globale

Nous nous intéressons dans un premier temps aux travaux réalisés sur l'estimation de l'erreur globale, c'est-à-dire l'erreur de discrétisation portant sur l'intégralité de la structure étudiée. Les méthodes associées sont présentées en distinguant deux groupes : celles dédiées aux problèmes linéaires de statique (problèmes elliptiques) et celles conçues pour les autres types de problèmes.

2.1 Les méthodes relatives aux problèmes linéaires de statique

Historiquement, ce sont les premières méthodes qui ont vu le jour dans le domaine de la vérification des calculs éléments finis. Dédiées à des modèles décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques linéaires, elles s'appliquent donc à des problèmes physiques tels que ceux de thermique stationnaire ou d'élasticité linéaire. Les outils performants qu'elles ont fait apparaître sont maintenant largement reconnus et usités ; une

revue de ces outils est donnée dans [Verfürth 1996, Ainsworth et Oden 1997a, Babuška et Strouboulis 2001, Stein 2003, Ladevèze et Pelle 2004].

Pour illustrer les méthodes d'estimation d'erreur globale dans les problèmes linéaires de statique, on reprend le problème d'élasticité défini dans la partie précédente ; on s'intéresse donc à l'estimation de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$.

La première estimation de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ est apparue dans les années 70 [Azziz et Babuška 1972, Ciarlet 1978]. Elle a été qualifiée d'*a priori* car elle utilise uniquement les données du problème initial à résoudre (géométrie, paramètres de discrétisation . . .) et la régularité de la solution exacte inconnue $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$; elle n'utilise donc pas la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ calculée. Le résultat obtenu se met sous la forme :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} \leq Ch^q \tag{1.8}$$

avec :

- h : taille caractéristique du maillage spatial \mathcal{M}_h
- q : coefficient positif dépendant de la régularité de la solution exacte
- C : constante indépendante de h et q mais dépendant de la forme des éléments du maillage

Dans le cas d'une solution régulière, q est égal au degré maximal p d'interpolation des éléments finis. Dans le cas contraire, $q = \min(p, \alpha)$ où α est l'ordre de la singularité de la solution du problème ($\alpha = \frac{1}{2}$ dans le cas d'une fissure).

Ces estimateurs *a priori*, bien que donnant une bonne information sur le taux de convergence de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ en fonction des paramètres de discrétisation, restent néanmoins assez grossiers.

Par la suite, des méthodes *a posteriori* sont apparues, fournissant des estimateurs d'erreur plus précis et fiables. Ces méthodes se servent de la solution approchée calculée ; elles sont donc menées en post-traitement du calcul éléments finis. On distingue trois principaux types de méthodes *a posteriori* suivant le concept (relatif aux solutions approchées) sur lequel elles s'appuient : les défauts d'équilibre, les défauts de régularité et l'erreur sur le comportement.

2.1.1 Méthodes basées sur les défauts d'équilibre

Introduites par Babuška & Rheinboldt [Babuška et Rheinboldt 1978a], ces méthodes sont aussi appelées méthodes des résidus d'équilibre car elles s'appuient sur l'équation fondamentale (1.7) qui traduit le non-respect de l'équilibre. Cette dernière équation peut

être mise sous la forme :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{e}^u)\epsilon(\underline{u}^*)]d\Omega = \sum_E \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (1.9)$$

$$= \mathcal{R}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

où E et Γ désignent respectivement l'ensemble des éléments et des arêtes du maillage éléments finis utilisé, tandis que \mathcal{R} représente la fonctionnelle des résidus. Les termes de chargement \underline{r}_E et \underline{t}_{Γ} , entièrement connus, sont définis par :

$$\underline{r}_E = (\text{div}\sigma_h + \underline{f}_d)|_E$$

$$\underline{t}_{\Gamma} = \begin{cases} \sigma_{h|E_1} \underline{n}_{E_1} + \sigma_{h|E_2} \underline{n}_{E_2} & \text{si } \Gamma \text{ se trouve entre deux éléments } E_1 \text{ et } E_2 \\ \sigma_{h|E} \underline{n}_E - \underline{F}_d & \text{sinon} \end{cases}$$

Une propriété remarquable est :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0,h} \quad (1.10)$$

où $\mathcal{U}_{0,h}$ est l'espace vectoriel associé à \mathcal{U}_h . Cette propriété, qui traduit la condition d'orthogonalité de Galerkin, est très souvent utilisée dans les méthodes d'estimation d'erreur ; elle est en outre à l'origine du résultat :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 = \|\underline{u}_{ex}\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega}^2$$

2.1.1.1 Méthodes explicites Le premier indicateur proposé utilisait directement l'équation des résidus (1.9) : il a donc été qualifié d'explicite (« Global Explicit Residual Based Error Estimator » [Babuška et Rheinboldt 1978a]). Le point de départ du raisonnement consiste à remarquer que :

$$(\underline{e}^u, \underline{e}^u)_{\mathbf{K},\Omega} = \sum_E \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{e}^u dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot \underline{e}^u d\Gamma \quad (\text{cf. (1.9) avec } \underline{u}^* = \underline{e}^u \in \mathcal{U}_0)$$

$$= \sum_E \int_E \underline{r}_E \cdot (\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u) dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot (\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u) d\Gamma \quad (\text{cf. (1.10)})$$

où $\Pi \underline{e}^u$ est la projection de \underline{e}^u sur l'espace éléments finis. En utilisant alors l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$(\underline{e}^u, \underline{e}^u)_{\mathbf{K},\Omega} \leq \sum_E \|\underline{r}_E\|_E \cdot \|\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u\|_E + \sum_{\Gamma} \|\underline{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \cdot \|\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u\|_{\Gamma}$$

où on a introduit les normes L^2 sur \mathcal{U} :

$$\|\bullet\|_E^2 = \int_E \bullet \cdot \bullet dE \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \bullet \cdot \bullet d\Gamma$$

À l'aide des inégalités de Poincaré de la forme :

$$\begin{aligned} \|\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u\|_E &\leq C_1 h_E \|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},E} \\ \|\underline{e}^u - \Pi \underline{e}^u\|_\Gamma &\leq C_2 \sqrt{l_\Gamma} \|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Gamma} \end{aligned}$$

et en réutilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aboutit finalement à l'estimation :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} \leq \theta = C \left[\sum_E h_E^2 \|\underline{r}_E\|_E^2 + \sum_\Gamma l_\Gamma \|\underline{t}_\Gamma\|_\Gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

h_E et l_Γ sont des mesures respectives de E et Γ . Les constantes C_1 , C_2 et C sont quant à elles évaluées en partie analytiquement et en partie de façon numérique, en résolvant des petits problèmes annexes. Elles représentent cependant un point critique de la méthode car elles dépendent du problème de référence (de sa stabilité notamment), de la forme des éléments et des fonctions d'interpolation ; leur évaluation précise n'est par conséquent pas toujours possible.

L'estimateur θ peut être écrit comme une somme de contributions élémentaires θ_E telles que $\theta^2 = \sum_E \theta_E^2$. Dans ce cas, on prend :

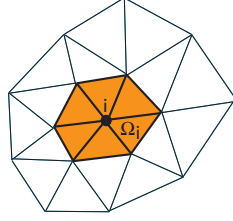
$$\theta_E^2 = a_E \|\underline{r}_E\|_E^2 + b_E \|\underline{t}_\Gamma\|_{\partial E}^2$$

où les paramètres a_E et b_E sont des constantes positives choisies de manière à se rapprocher au mieux de l'erreur exacte sur E .

Des détails complets sur la méthode des résidus explicite peuvent être trouvés par exemple dans [Verfürth 1996]. Les études menées montrent que cet estimateur tend à être assez pessimiste sur l'évaluation de l'erreur réelle.

2.1.1.2 Méthodes implicites Ces méthodes sont plus coûteuses que les méthodes explicites, mais elles donnent de meilleurs résultats. Elles se basent à nouveau sur (1.9) en essayant cette fois d'approximer l'erreur \underline{e}^u localement, par élément ou par groupe d'éléments (patches). Des problèmes locaux annexes, dont le coût de calcul est acceptable, sont alors résolus au préalable avant d'obtenir l'estimateur θ de l'erreur globale.

2.1.1.2.1 Problèmes locaux par patch d'éléments La première méthode des résidus implicite a été présentée par Babuška sous le nom de « Subdomain Residual Method » [Babuška et Rheinboldt 1978b, Babuška et Miller 1987]. L'approximation de \underline{e}^u y est faite sur des ensembles d'éléments ou patches, avec des conditions limites de Dirichlet homogènes. Chaque patch Ω_i est constitué par les éléments connectés au nœud i du maillage (Figure 1.2).

Figure 1.2: Représentation du patch Ω_i lié au nœud i

Les problèmes locaux associés consistent à chercher \underline{v}_i nul sur $\partial_0\Omega_i$ (partie de $\partial\Omega_i$ non incluse dans $\partial_2\Omega$) tel que pour tout champ \underline{u}^* nul sur $\partial_0\Omega_i$:

$$\int_{\Omega_i} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{v}_i)\epsilon(\underline{u}^*)]d\Omega = \sum_{E \subset \Omega_i} \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* dE - \sum_{\Gamma \subset \Omega_i} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (1.12)$$

On définit alors l'estimateur d'erreur globale θ par l'expression :

$$\theta^2 = \sum_i \int_{\Omega_i} \text{Tr}[\epsilon(\underline{v}_i)\mathbf{K}\epsilon(\underline{v}_i)]d\Omega$$

et on peut à nouveau faire intervenir des contributions élémentaires θ_E , telles que $\theta^2 = \sum_E \theta_E^2$, avec :

$$\theta_E^2 = \sum_{i \in E} \int_E \text{Tr}[\epsilon(\underline{v}_i)\mathbf{K}\epsilon(\underline{v}_i)]dE$$

Cette méthode utilisant des conditions limites de type Dirichlet au niveau des problèmes locaux (1.12) donne une sous-estimation de l'erreur réelle $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$. Elle a été revisitée par la suite pour obtenir des estimateurs qui soient des majorants de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$:

- dans [Strouboulis et Haque 1992], on applique des conditions de Neumann sur les problèmes locaux ;

- dans [Carstensen et Funken 2000, Morin *et al.* 2001, Prudhomme *et al.* 2004, Pares *et al.* 2006b], on utilise la partition d'unité de façon à résoudre des problèmes locaux auto-équilibrés. Les sauts d'effort \underline{t}_{Γ} entre les éléments n'ont alors pas besoin d'être calculés (« flux-free method »), ce qui est très avantageux du point de vue du coût de calcul ou lorsqu'on utilise des méthodes d'approximation sans maillage.

2.1.1.2.2 Problèmes locaux par élément En 1984, Demkowicz & al ont introduit la « Element Residual Method (ERM) », basée sur la résolution de problèmes locaux définis par élément avec des conditions limites de Neumann [Demkowicz *et al.* 1984].

Les problèmes locaux consistent à chercher, sur chaque élément, un champ \underline{v}_E nul sur $\partial_1 E = \partial E \cap \partial_1 \Omega$ tel que $\forall \underline{u}^*$ nul sur $\partial_1 E$:

$$\int_E \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\underline{v}_E) \epsilon(\underline{u}^*)] dE = \int_E \underline{L}_E \cdot \underline{u}^* dE + \int_{\partial E - \partial_1 E} \underline{R} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (1.13)$$

où \underline{R} est une densité d'effort donnée. L'estimateur d'erreur utilisé s'écrit alors :

$$\theta^2 = \sum_E \theta_E^2 = \sum_E \int_E \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\underline{v}_E) \epsilon(\underline{v}_E)] dE$$

L'inconvénient de cette méthode est que les problèmes élémentaires sont mal posés si les densités \underline{R} ne sont pas correctement choisies i.e. si elles ne respectent pas l'équilibre global de chaque élément.

Une première manière de contourner cette difficulté est de rechercher une solution \underline{v}_E dans un sous-espace régularisant. On se sert habituellement de l'espace des fonctions bulles i.e. l'espace des fonctions de degré $p + 1$ (avec p : degré maximal des fonctions éléments finis utilisées pour résoudre le problème de référence) privé des déplacements de corps rigide. On peut alors prendre :

$$\underline{R} = \begin{cases} -\underline{t}_\Gamma & \text{si } \Gamma \in \partial_2 E = \partial E \cap \partial_2 \Omega \\ -\frac{1}{2} \underline{t}_\Gamma & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette méthode est un bon compromis entre précision et efficacité, surtout en 3D. Il faut cependant noter que les résultats d'estimation dépendent du sous-espace régularisant choisi [Ainsworth et Oden 1997a].

Une autre façon de procéder consiste à construire les densités \underline{R} de façon à assurer l'équilibre des efforts appliqués sur chaque élément (méthode EqRM). Les densités peuvent par exemple être cherchées, sur chaque arête Γ du maillage \mathcal{M}_h , sous la forme :

$$\underline{R} = \eta_E \underline{A}_\Gamma - \frac{1}{2} \underline{t}_\Gamma \quad (\eta_E = \pm 1)$$

où \underline{A}_Γ est un champ vectoriel à trouver, affine sur Γ et nul sur $\partial_2 \Omega$. Tous les détails techniques sur cette approche sont donnés dans [Bank et Weiser 1985, Ainsworth et Oden 1993, Babuška *et al.* 1994].

Une dernière variante consiste à résoudre les problèmes définis sur les éléments avec des conditions limites de Dirichlet ; on obtient alors une sous-majoration de l'erreur sauf si on introduit dans l'estimateur un terme correctif prenant en compte les sauts d'effort entre les éléments et les effets de pollution [Huerta et Diez 2000].

2.1.1.2.3 Quelques remarques (i) Dans toutes ces méthodes implicites avec résolution de problèmes locaux, on obtient des résultats théoriques de la forme :

$$C\theta \leq \|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} \leq C'\theta$$

uniquement si les problèmes locaux (1.12) (ou (1.13)) sont résolus exactement. C'est particulièrement le cas pour les bornes garanties de l'erreur globale lorsque les problèmes locaux ont des conditions limites de Neumann. Cependant, en pratique, on ne trouve qu'une approximation \underline{v}_{ih} (resp. \underline{v}_{Eh}) de \underline{v}_i (resp. \underline{v}_E) donc les résultats théoriques ne sont vrais qu'asymptotiquement i.e. lorsque le maillage devient très fin.

Une première façon de remédier à ce problème est de ne pas estimer l'erreur vraie $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ mais une approximation de celle-ci [Huerta et Diez 2000]. L'approximation consiste à prendre pour solution de référence \underline{u}_{ex} la solution $\underline{u}_{\tilde{h}}$ obtenue à partir d'un maillage $\mathcal{M}_{\tilde{h}}$ très fin. En effet, l'estimateur *a priori* (1.8) nous donne l'information :

$$\|\underline{u}_{\tilde{h}} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega} \approx \left[1 - \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{2q}\right]^{1/2} \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega}$$

ce qui montre qu'une approximation de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ par $\|\underline{u}_{\tilde{h}} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega}$ peut être très bonne si le maillage utilisé $\mathcal{M}_{\tilde{h}}$ est suffisamment fin. On obtient alors une vraie borne supérieure de l'erreur approchée $\|\underline{u}_{\tilde{h}} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega}$ en résolvant les problèmes locaux avec le même maillage fin $\mathcal{M}_{\tilde{h}}$.

Une autre façon de procéder est d'avoir recours à des techniques itératives [Babuška *et al.* 1999]. Celles-ci permettent d'obtenir des bornes garanties de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ avec la méthode des résidus implicite par éléments (ERM), en estimant l'erreur faite sur la résolution des problèmes locaux. Cette dernière estimation peut être menée à l'aide d'une seconde analyse par la méthode ERM ou bien en utilisant un estimateur explicite (dans ce cas, la constante C intervenant dans (1.11) peut être évaluée de façon précise car on reste sur un élément).

(ii) Lorsque les problèmes locaux (1.12) ou (1.13) sont posés avec des conditions de Dirichlet, la solution approchée doit forcément être cherchée avec un maillage plus fin que \mathcal{M}_h pour garder une estimation pertinente. Dans le cas contraire, les résidus locaux (donc les termes de chargement des problèmes locaux) sont nuls (cf. (1.10)) ...

(iii) Le calcul d'une borne inférieure pertinente de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ est également possible [Prudhomme et Oden 1999, Oden et Prudhomme 1999, Diez *et al.* 2003]. Pour cela, on se sert de la propriété :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} = \sup_{\underline{v} \in \mathcal{U}_0/\{0\}} \frac{|\mathcal{R}(\underline{v})|}{\|\underline{v}\|_{\mathbf{K},\Omega}} \quad (1.14)$$

qui traduit que toute fonction $\underline{\chi} \in \mathcal{U}_0/\{0\}$ donne une borne inférieure de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$ de la forme :

$$\frac{|\mathcal{R}(\underline{\chi})|}{\|\underline{\chi}\|_{\mathbf{K},\Omega}}$$

On construit généralement $\underline{\chi}$ à partir des fonctions locales \underline{v}_i (ou \underline{v}_e) calculées pour obtenir l'estimateur d'erreur θ . Ces dernières fonctions étant souvent incompatibles à l'interface des éléments puisqu'elles sont calculées indépendamment, on définit une fonction continue à partir des \underline{v}_i (ou \underline{v}_e). Par exemple, dans le cas où on résout des problèmes locaux par sous-domaine (patch) dans la méthode d'estimation d'erreur, on peut prendre [Prudhomme *et al.* 2004] :

$$\underline{\chi} = \sum_i \phi_i \underline{v}_i$$

où ϕ_i est la fonction de base éléments finis associée au nœud i .

2.1.2 Méthodes basées sur les défauts de régularité

Également appelées méthodes de lissage, elles sont dues aux travaux de Zienkiewicz & Zhu [Zienkiewicz et Zhu 1987 - 1992]. Ces méthodes consistent à construire une solution en contrainte σ^* plus régulière que celle obtenue par la MEF. Cette démarche est légitime car σ_h présente des discontinuités et ne converge pas en tout point avec le même taux vers la solution exacte σ_{ex} . Si la solution lissée σ^* est de meilleure qualité que la solution calculée σ_h i.e. :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma^*\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \leq A \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \quad ; \quad 0 \leq A \leq 1$$

on obtient le résultat :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \leq C \|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1-A} \geq 1$$

et la quantité calculable $\|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}$ peut alors être prise comme estimateur de l'erreur globale (cet estimateur est d'autant meilleur que la constante A est petite). Néanmoins, on n'obtient souvent qu'un indicateur d'erreur avec cette méthode car la valeur de A est rarement connue de façon précise.

Remarque : Le lissage est ici montré sur la contrainte, mais on peut le faire de la même façon sur le déplacement. On prend dans ce cas $\|\underline{u}^* - u_h\|_{\mathbf{K},\Omega}$ comme estimateur de $\|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}$.

Nous voyons donc que la pertinence des méthodes de lissage repose dans la façon de construire la solution lissée. Dans la première version proposée (version « ZZ1 » [Zienkiewicz et Zhu 1987]), on cherche σ^* sous la forme :

$$\sigma^* = \sum_i \mathbb{A}_i \phi_i$$

où les termes \mathbb{A}_i sont des tenseurs constants symétriques, associés au nœud i , interpolés par les fonctions de base ϕ_i pour former la solution lissée σ^* . Différentes techniques ont été employées pour déterminer les \mathbb{A}_i :

- projection globale, avec minimisation de la fonctionnelle aux moindres carrés $\|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2$; cette minimisation conduit à la résolution d'un système linéaire global qui peut être assez coûteux;
- moyenne locale aux nœuds du maillage, en prenant en compte les contributions du champ de contrainte σ_h sur les éléments qui entourent le nœud considéré.

Ces méthodes simples ne sont malheureusement pas très performantes, en particulier lorsque le maillage est assez grossier ou lorsque les éléments sont d'ordre élevé. Elles sont pourtant très répandues et populaires dans l'ingénierie, car le coût de calcul qu'elles engendrent est très faible et elles peuvent s'appliquer à tout type de problème.

Dans la méthode « ZZ2 » [Zienkiewicz et Zhu 1992], on apporte des améliorations dans le calcul des termes \mathbb{A}_i . On recherche tout d'abord, sur chaque patch d'éléments Ω_j , une fonction σ^{Ω_j} appartenant à un espace de fonctions polynômiales Π qui minimise l'écart aux moindres carrés avec la solution σ_h sur un ensemble de points de contrôle P :

$$\min_{\tilde{\sigma} \in \Pi} \sum_P \text{Tr} \left[(\tilde{\sigma}(P) - \sigma_h(P)) \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}(P) - \sigma_h(P)) \right] \quad (1.15)$$

Les points P sont confondus avec les points de superconvergence du maillage \mathcal{M}_h lorsque ceux-ci sont connus (points de Gauss en 1D).

On reconstruit ensuite, par extrapolation de σ^{Ω_j} , les termes $\mathbb{A}_k^{\Omega_j}$ sur chaque nœud d'évaluation du patch Ω_j . Les tenseurs \mathbb{A}_i sont finalement déterminés en moyennant les contributions des différents patches :

$$\mathbb{A}_i = \frac{1}{m} \sum_{\Omega_j} \mathbb{A}_i^{\Omega_j}$$

avec m : nombre de patches contenant le nœud i comme nœud d'évaluation.

Cette dernière méthode, notée « Superconvergence Patch Recovery » (SPR), est plus coûteuse que la méthode « ZZ1 » mais elle donne d'excellents résultats.

Quelques variantes ont été apportées à la méthode « ZZ2 » initiale. Nous pouvons citer par exemple celle de Wiberg [Wiberg *et al.* 1994] dans laquelle on cherche à vérifier partiellement l'équilibre en faisant intervenir dans la fonctionnelle (1.15) à minimiser un terme de pénalisation de la forme :

$$\beta \int_{\Omega_j} (\underline{\text{div}} \tilde{\sigma} + \underline{f}_d)^2 d\Omega$$

.

2.1.3 Méthodes basées sur l'erreur de comportement

Ces méthodes, qui rentrent dans le groupe des méthodes implicites, donnent des bornes garanties de l'erreur globale. Elles ont été initiées par Ladevèze [Ladevèze 1975] et utilisées

dans un premier temps pour les problèmes de thermique et d'élasticité linéaire en 2D [Ladevèze *et al.* 1991, Ladevèze 1995] avant d'être étendues à l'élasticité incompressible [Ladevèze *et al.* 1992] et 3D [Coorevits *et al.* 1997].

L'idée est de déterminer, à partir de la solution approchée du problème de référence calculée, une nouvelle solution $\hat{\underline{u}}$ cinématiquement admissible (CA) et $\hat{\sigma}$ statiquement admissible (SA) avant de mesurer l'erreur commise par le couple $(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma})$ au niveau de la relation de comportement. Ces méthodes ont donc un fort contenu mécanique car elles font porter le doute sur la relation de comportement qui est l'équation la moins fiable du problème de référence.

2.1.3.1 Définition et propriétés La mesure de l'erreur en relation de comportement $e_{rdc}(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma})$ s'écrit :

$$e_{rdc}^2(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \|\hat{\sigma} - \mathbf{K}\epsilon(\hat{\underline{u}})\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2 \quad (1.16)$$

Remarque : Une définition plus générale de e_{rdc} , faisant intervenir les potentiels thermodynamiques duaux φ et φ^* , est :

$$e_{rdc}^2(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) = \int_{\Omega} \left[\varphi(\epsilon(\hat{\underline{u}})) + \varphi^*(\hat{\sigma}) - \text{Tr}[\hat{\sigma}\epsilon(\hat{\underline{u}})] \right] d\Omega$$

Dans notre cas, $\varphi(\bullet) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{K} \bullet \bullet]$ et $\varphi^*(\bullet) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{K}^{-1} \bullet \bullet]$.

On peut interpréter l'erreur e_{rdc} de façon énergétique. Pour cela, notons :

$$\begin{aligned} \epsilon(\hat{\underline{u}}) &= \hat{\epsilon}_0 + \epsilon^* \\ \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}_0 + \sigma^* \end{aligned}$$

où $\hat{\epsilon}_0$ (resp. $\hat{\sigma}_0$) est une solution CA (SA) particulière tandis que ϵ^* (resp. σ^*) est une solution CA₀ (resp. SA₀). On a alors :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma^* \epsilon^*] d\Omega = \langle \sigma^*, \epsilon^* \rangle = 0 \quad (1.17)$$

et on obtient :

$$e_{rdc}^2(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) = J_1(\hat{\underline{u}}) + J_2(\hat{\sigma})$$

où J_1 et J_2 sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire globales de la structure. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} J_1(\hat{\underline{u}}) &= \Phi(\epsilon(\hat{\underline{u}})) - \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\epsilon}_0 \rangle - \langle \hat{\sigma}_0, \epsilon(\hat{\underline{u}}) - \hat{\epsilon}_0 \rangle \\ J_2(\hat{\sigma}) &= \Phi^*(\hat{\sigma}) - \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\epsilon}_0 \rangle - \langle \hat{\sigma} - \hat{\sigma}_0, \hat{\epsilon}_0 \rangle \end{aligned}$$

avec $\Phi(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi(\bullet) d\Omega$ et $\Phi^*(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi^*(\bullet) d\Omega$.

L'erreur en relation de comportement vérifie en outre les propriétés :

$$e_{rdc}(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) = 0 \iff (\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) = (\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex}) \quad (1.18)$$

et

$$\|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}\|_{\mathbf{K}, \Omega}^2 + \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2 = 2 \cdot e_{rdc}^2(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma}) \quad (1.19)$$

Cette deuxième relation, connue sous le nom de théorème de Prager-Synge [Prager et Synge 1947] découle de (1.17) en prenant $\epsilon^* = \epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}})$ et $\sigma^* = \sigma_{ex} - \hat{\sigma}$. C'est une relation fondamentale car elle permet d'obtenir une majoration directe de $\|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}\|_{\mathbf{K}, \Omega}$ et $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}$.

2.1.3.2 Construction des champs admissibles La construction d'une solution admissible $(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma})$ est le point-clé de la méthode; sa qualité va définir la performance de l'estimation d'erreur associée.

L'idée suivie est de reconstruire une solution $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ admissible de la façon la plus simple possible, à partir de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et des données du problème. Sauf dans le cas particulier de l'incompressibilité où une technique particulière est utilisée, le fait de travailler avec la MEF en déplacement permet de prendre $\hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_h$.

La construction d'un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ vérifiant l'équilibre est par contre plus technique. La méthode générale de construction d'un tel champ $\hat{\sigma}_h$ a été développée dans [Ladevèze 1975, Ladevèze et Leguillon 1983]. Elle consiste dans un premier temps à calculer sur les bords de chaque élément du maillage éléments finis \mathcal{M}_h , de façon explicite et en utilisant les propriétés de σ_h , des densités d'effort $\hat{\underline{F}}$ en équilibre avec le chargement. Pour cela on utilise une condition de prolongement forte (lien énergétique entre $\hat{\sigma}_h$ et σ_h) et on détermine localement les projections des densités $\hat{\underline{F}}$ sur les fonctions de base ϕ_i , par les relations :

$$\int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}} \phi_i dS = \int_{\partial E} \sigma_h \underline{n} \phi_i dS - \int_E \underline{f}_d \phi_i dE \quad (1.20)$$

Si on suppose qu'elles se décomposent uniquement sur ces fonctions de base ϕ_i , les densités $\hat{\underline{F}}$ sont complètement déterminées en résolvant des problèmes locaux au niveau de chaque nœud du maillage.

Dans un deuxième temps, on construit le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ en résolvant sur chaque élément E du maillage \mathcal{M}_h un problème d'équilibre dans lequel les densités $\hat{\underline{F}}$ constituent le chargement de bord :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{h|E} &\in \mathcal{S} \\ \text{div} \hat{\sigma}_{h|E} + \underline{f}_{d|E} &= \underline{0} \quad \text{dans } E \\ \hat{\sigma}_{h|E} \underline{n} &= \eta_E \hat{\underline{F}}_{|E} \quad \text{sur } \partial E \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le champ $\hat{\sigma}_{h|E}$ peut par exemple être cherché analytiquement, sous forme polynomiale [Rougeot 1989, Ladevèze et Maunier 1996].

La procédure générale de construction de $\hat{\sigma}_h$ a été légèrement modifiée ces dernières années, de façon à donner un caractère plus robuste et performant à la méthode.

Tout d'abord, au niveau de la construction des densités \hat{F} , la condition de prolongement a été affaiblie pour permettre plus de souplesse dans le choix des densités [Ladevèze et Rougeot 1997]. Le prolongement (faible) est alors appliqué uniquement sur les nœuds qui ne sont pas sommets. On note de ce fait \underline{H} la partie de \hat{F} correspondant aux fonctions de base des nœuds non sommets (fonctions de plus haut degré) et \underline{R} la partie complémentaire :

$$\hat{F} = \underline{R} + \underline{H}$$

La partie \underline{H} peut être déterminée complètement en utilisant la condition de prolongement affaiblie et les techniques classiques. Quant à la partie \underline{R} restante, elle est calculée en minimisant l'énergie complémentaire de la structure complète, tout en respectant l'équilibre avec les charges extérieures. Le problème de minimisation sous contrainte associé est résolu par une méthode de gradients conjugués, en initialisant avec les densités données par la méthode standard.

Cette nouvelle méthode de construction des densités \hat{F} est plus coûteuse que la précédente mais elle est aussi beaucoup plus performante, en particulier en présence de singularités ou dans le cas de maillages anisotropes. Par conséquent, on l'utilise en pratique dans les zones non régulières de la structure ou du maillage.

Des améliorations ont également été apportées au niveau du calcul de $\hat{\sigma}_{h|E}$ sur chaque élément ; ce calcul est à présent mené de façon numérique, en minimisant l'énergie complémentaire (donc l'énergie potentielle par dualité) à l'aide d'une MEF en déplacement. Pour cela, on conserve le maillage \mathcal{M}_h initial mais on utilise des fonctions de forme de degré élevé. Le problème d'équilibre sur E est donc résolu avec un seul élément, qui est E lui-même, et avec des fonctions éléments finis de degré $p + k$. Cette p-version de l'enrichissement de l'espace d'approximation éléments finis initial est préférée à une h-version car elle présente un taux de convergence plus grand (des études menées dans [Babuška *et al.* 1994] montrent qu'on obtient de très bons résultats à partir de $k = 3$) et elle évite de générer un nouveau maillage.

La comparaison sur des cas-tests [Ladevèze et Pelle 2004] a montré que la reconstruction numérique de $\hat{\sigma}_{h|E}$ s'avère être plus efficace que celle faite analytiquement, principalement lorsque les éléments sont distordus ou aplatis [Florentin *et al.* 2002]. Ceci est dû au fait que la construction analytique nécessite un sous-découpage des éléments pour respecter la symétrie du champ de contrainte, contrairement à la construction numérique basée sur une formulation en déplacement régularisante.

Remarque : Signalons que bien que le champ $\hat{\sigma}_{h|E}$ obtenu numériquement ne soit pas rigoureusement en équilibre, la comparaison avec une solution théorique $\hat{\sigma}_{|E}^{theo}$ (utilisant la

solution exacte du problème dual sur E) montre que peu d'erreur est commise i.e. que les contraintes $\hat{\sigma}_h|_E$ et $\hat{\sigma}_E^{theo}$, bien qu'a priori différentes, ont des normes semblables.

La reconstruction améliorée présentée succinctement ici est expliquée de façon plus détaillée dans [Ladevèze et Rougeot 1997]. Elle sera également abordée dans le Chapitre 3, en s'appuyant sur des exemples numériques concrets.

2.1.3.3 Estimateur associé Une erreur en relation de comportement peut être calculée à partir de la solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ construite précédemment. D'après (1.19), on peut donc prendre comme estimateur de l'erreur globale :

$$\theta = \sqrt{2} e_{rdc}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$$

Cet estimateur est un majorant garanti de l'erreur vraie et peut aisément se diviser en contributions élémentaires, sous la forme $\theta^2 = \sum_E \theta_E^2$ avec :

$$\theta_E^2 = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K}\epsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\mathbf{K}^{-1}, E}^2$$

On peut par ailleurs montrer qu'il existe C tel que :

$$e_{rdc}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \leq C \|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h\|_{\mathbf{K}, \Omega}$$

où C est une constante indépendante du maillage [Ladevèze et Pelle 2004] ; ceci donne une borne inférieure de l'erreur et montre que l'erreur en relation de comportement converge comme l'erreur vraie.

2.1.3.4 Généralisation à travers une approche duale Les méthodes basées sur une approche duale sont assez anciennes et sont parmi les premières méthodes utilisées pour estimer l'erreur de discrétisation globale : elles reposent sur la comparaison de deux solutions, la première obtenue à partir d'un modèle cinématiquement admissible et la seconde issue d'un modèle statiquement admissible (approche de type équilibre). Un exemple d'approche duale a été donné par E. Trefftz en 1926 (prélude aux méthodes de Trefftz). En utilisant ses résultats et ceux fournis par une approche primale de Ritz, il obtient des bornes inférieure et supérieure de la solution exacte du problème de référence.

Dans le cadre de la MEF, l'approche duale a été initiée par Fraeijns de Veubeke [de Veubeke 1965] ; elle fournit un estimateur se mettant sous la forme :

$$\theta = \sqrt{2(J_1(\hat{\underline{u}}_h) + J_2(\hat{\sigma}_h))}$$

où J_1 (resp. J_2) représente l'énergie potentielle (resp. complémentaire) de la structure, tandis que $\hat{\underline{u}}_h$ (resp. $\hat{\sigma}_h$) est une solution approchée du problème obtenue par une approche primale (resp. duale).

La nécessité d'une double analyse a longtemps été un obstacle au développement de ce genre de méthode; c'est aussi ce qui la différencie de l'approche de Ladevèze. On observe à présent un regain pour cette méthode [Debongnie *et al.* 1995, Beckers et Kempeneers 2002] car les puissances de calcul permettent de mener les deux analyses en parallèle. Il reste cependant beaucoup à explorer dans le domaine des modèles équilibre (méthodes hybrides, utilisation de fonctions polynômiales, méthodes de reconnaissance systématique des modes cinématiques internes, ...).

On peut par ailleurs noter que les résultats obtenus par l'approche duale sont très proches de ceux obtenus par l'erreur en relation de comportement associée à une construction optimisée des champs admissibles.

2.1.4 Comparaison des estimateurs

Plusieurs critères permettent d'analyser la qualité d'une méthode d'estimation d'erreur. Un critère largement utilisé est l'indice d'efficacité i^{eff} défini (globalement ou localement) par :

$$i^{eff} = \frac{\theta}{\|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega}} \quad ; \quad i_E^{eff} = \frac{\theta_E}{\|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{K},E}}$$

Une méthode d'estimation d'erreur est d'autant plus pertinente que l'indice i^{eff} se rapproche de 1. Elle est de plus conservative si cet indice reste supérieur à 1 (ce qui est utile en dimensionnement).

D'autres critères existent comme :

- la convergence asymptotique de l'estimateur i.e. sa convergence vers la mesure de l'erreur exacte lorsque la taille h du maillage tend vers 0;
- la stabilité de l'estimateur en fonction du maillage et du problème à résoudre;
- le coût de la méthode, qui doit raisonnablement rester inférieur ou égal à celui nécessaire pour obtenir la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$.

Une étude des différents estimateurs a été menée dans [Babuška *et al.* 1994]. Il en ressort :

- que la qualité d'un estimateur dépend de la topologie du maillage, de la solution exacte, de l'aplatissement des éléments et de l'anisotropie;
- que la convergence asymptotique des estimateurs n'arrive que pour certains types de maillages uniformes.

Dans [Ladevèze et Rougeot 1997], on compare la méthode de l'erreur en relation de comportement optimisée avec la méthode « SPR » de Zienkiewicz & Zhu. Il est montré que bien que très performant au niveau global, ce dernier estimateur ne donne pas des indices d'efficacité locaux conservatifs. L'estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement, avec construction optimisée du champ $\hat{\sigma}_h$, est quant à lui conservatif en contrepartie d'un coût de calcul plus important (des techniques de construction par patch ont été développées pour réduire ce coût).

2.2 Les méthodes relatives aux autres types de problèmes

Jusqu'au début des années 90, les méthodes d'estimation d'erreur globale étaient principalement dédiées aux problèmes linéaires de statique. Elles ont été par la suite étendues à d'autres types de problèmes rencontrés en mécanique tels que les équations de Stokes [Ainsworth et Oden 1997b, Verfürth 1989], les problèmes non linéaires [Babuška et Rheinboldt 1982], les équations de Helmholtz en acoustique [Bouillard et Ihlenburg 1999, Irimie et Bouillard 2001] ou d'autres problèmes dépendant du temps [Babuška et Ohmnius 2001]. Nous présentons ces extensions en les divisant en deux groupes :

- celles basées sur l'erreur en relation de comportement, permettant d'obtenir des bornes pratiques et garanties de l'erreur pour un ensemble de problèmes assez large ;
- celles qui reprennent les autres méthodes présentées précédemment (résidus d'équilibre, lissage, analyse duale).

2.2.1 Méthodes reprenant celles des résidus, de lissage ou de l'analyse duale

Ces méthodes sont en fait des généralisations directes des estimateurs dédiés au cas linéaire en statique. Cependant, beaucoup d'entre elles se servent de propriétés qui ne sont valables qu'en linéaire ; l'extension de ces propriétés n'étant pas démontrée, elles ne fournissent que des indicateurs d'erreur. Elles peuvent être classées en deux catégories selon qu'elles sont conçues pour des problèmes dépendants du temps ou non.

2.2.1.1 Pour les problèmes indépendants du temps Les méthodes des résidus d'équilibre ont été assez largement utilisées pour traiter les problèmes non linéaires indépendants du temps. Par exemple :

- Babuska & Rheinboldt [Babuška et Rheinboldt 1982] les ont mises en œuvre pour des problèmes d'élasticité non linéaire (géométrique et matériau) en considérant le cas du flambement d'un barreau ;
- Johnson & Hansbo [Johnson et Hansbo 1991] ont quant à eux considéré les problèmes de plasticité de type Hencky, dans lesquels des hypothèses sont faites sur le chargement (pris comme instantané) pour que l'histoire n'intervienne pas dans le comportement du matériau ; la déformation plastique est alors directement reliée à la contrainte. Les bornes obtenues dans ce dernier cas viennent d'une méthode explicite et supposent une régularisation de type visqueuse. Elles dépendent de constantes déterminées approximativement mais leur caractère garanti peut cependant être démontré [Verfürth 1996] ;
- d'autres travaux ont traité des grandes déformations [Brink et Stein 1998].

Dans ces différents cas, le comportement est linéarisé en considérant l'erreur petite. En d'autres termes, on fait l'approximation :

$$\mathcal{A}(\epsilon(\underline{u}_{ex})) - \mathcal{A}(\epsilon(\underline{u}_h)) = \mathcal{A}_{T, \underline{u}_h} \epsilon(\underline{e}^u) \quad (1.22)$$

où \mathcal{A} est l'opérateur définissant le comportement non linéaire du matériau, tandis que $\mathcal{A}_{T, \underline{u}_h}$ est l'opérateur tangent de \mathcal{A} pris en \underline{u}_h . Cette procédure permet de se ramener au

cas d'un problème linéaire.

Les méthodes de lissage ont également été étendues au cas non linéaire ; citons par exemple les travaux de Peric, Yu & Owen [Peric *et al.* 1994] qui s'intéressent à des problèmes de plasticité avec localisation traités par une théorie de Cosserat. Cependant, les méthodes de lissage ne sont pas très robustes dans ce genre de problème car elles ne sont basées que sur la solution approchée du problème, indépendamment de la nature de celui-ci.

Enfin, pour ce qui est des méthodes utilisant l'approche duale, elles utilisent dans le cas non linéaire des propriétés qui ne sont valides que dans le cas linéaire.

2.2.1.2 Pour les problèmes dépendants du temps Dans ce cas, la principale difficulté réside dans le fait que l'erreur se propage avec le temps. Il est alors par exemple difficile de calculer une valeur pertinente de la constante de stabilité intervenant dans l'estimateur *a priori* (1.8). Avec des méthodes *a posteriori* de type résidus ou lissage, différents problèmes d'évolution ont été abordés. On peut citer par exemple :

- la plasticité avec un modèle de Prandtl-Reuss [Johnson et Hansbo 1991] ;
- la plasticité/viscoplasticité [Bass et Oden 1987, Rannacher et Suttmeier 1998] ;
- la plasticité non associée pour laquelle des déformations localisées peuvent apparaître [Aubry et Tie 1991 - 1992] ;
- les problèmes de mise en forme en vitesse [Zienkiewicz *et al.* 1988].

Dans toutes ces méthodes, le problème de référence est celui discrétisé en temps. Chaque pas de temps est alors traité séparément comme un problème de statique, en supposant que la solution du problème au début du pas de temps (valeur initiale du problème associé au pas de temps) est exacte. À chaque piquet de temps, on applique donc les estimateurs définis pour les problèmes indépendants du temps. Cette procédure ne prenant pas vraiment en compte l'erreur en temps (elle est estimée au mieux par des techniques *a priori*), les méthodes restent heuristiques.

En conclusion, ces différentes méthodes reposent sur des considérations heuristiques et ne fournissent qu'une indication sur l'erreur qui peut s'avérer être insuffisante dans une démarche de conception robuste. Néanmoins, les indicateurs d'erreur par élément qu'elles fournissent peuvent être utilisés dans des procédures d'adaptation de maillage.

2.2.2 Méthodes basées sur l'erreur de comportement

Ces méthodes font à nouveau porter le doute sur les relations de comportement. Leur caractéristique majeure est qu'elles prennent en compte toutes les sources d'erreur de discrétisation (discrétisation en espace, discrétisation en temps et arrêt des processus itératifs). Elles permettent aussi, grâce à des indicateurs spécifiques, d'évaluer la part des différentes sources d'erreur dans l'erreur totale.

Deux principales familles de méthodes ont été proposées : celles basées sur l'erreur au sens de Drucker et celles basées sur l'erreur en dissipation.

2.2.2.1 Erreur au sens de Drucker Cette erreur, définie dans [Ladevèze 1985] et mise en œuvre pour la première fois dans [Ladevèze *et al.* 1986], est une extension de l'erreur en relation de comportement introduite pour les problèmes linéaires. Utilisant la formulation fonctionnelle (1.3) de la relation de comportement, elle est fondée sur la condition de stabilité de Drucker [Drucker 1964] :

$$\int_0^t \text{Tr}[(\sigma - \sigma')(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}')] d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

valable pour des couples (σ, ϵ) et (σ', ϵ') vérifiant (1.3) et égaux entre eux à $t = 0$.

Après avoir calculé des champs $\epsilon_{CA} = \epsilon(\underline{u}_{CA})$ et σ_{SA} vérifiant respectivement (1.1) et (1.2), on associe les champs complémentaires σ_{CA} et ϵ_{SA} par la relation de comportement. On définit alors l'erreur au sens de Drucker e_{dru} par la formule :

$$e_{dru}^2(\epsilon_{CA}, \sigma_{SA}) = \sup_t \int_{\Omega} \eta(M, t) d\Omega$$

avec

$$\eta(M, t) = \int_0^t \text{Tr}[(\sigma_{SA} - \sigma_{CA})(\dot{\epsilon}_{SA} - \dot{\epsilon}_{CA})] d\tau$$

Une application de l'erreur au sens de Drucker pour les problèmes élastoplastiques est donnée dans [Gallimard *et al.* 1996]. Une extension à la dynamique a par ailleurs été faite dans [Combe *et al.* 1999] à partir d'une formulation mixte du problème. La quantité $\underline{\Gamma}$ telle que :

$$\underline{\Gamma} = \rho \ddot{\underline{u}} \tag{1.23}$$

est introduite dans cette formulation et la relation (1.23) est vue comme une relation de comportement supplémentaire. On sépare alors clairement la quantité cinématique \underline{u}_{CA} vérifiant les contraintes cinématiques (1.1) et les conditions initiales (1.4) des champs dynamiques $(\sigma_{DA}, \underline{\Gamma}_{DA})$ satisfaisant l'équilibre (1.2). On obtient finalement la mesure d'erreur :

$$\eta(M, t) = \gamma \int_0^t (\underline{\Gamma}_{DA} - \underline{\Gamma}_{CA}) \cdot (\dot{\underline{u}}_{DA} - \dot{\underline{u}}_{CA}) d\tau + (1 - \gamma) \int_0^t \text{Tr}[(\sigma_{DA} - \sigma_{CA})(\dot{\epsilon}_{DA} - \dot{\epsilon}_{CA})] d\tau$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est un paramètre permettant de pondérer chacun des deux termes (une valeur typique est $\gamma = 0,5$).

2.2.2.2 Erreur en dissipation Cette erreur, introduite dans [Ladevèze 1989 - 1995], exploite la formulation de la relation de comportement par variables internes [Halphen et Nguyen 1975]. Dans ce cas, le comportement se découple en deux parties :

- les lois d'état ;
- les équations d'évolution de la forme :

$$\dot{x} = \mathbf{B}(y) \quad (1.24)$$

où x représente l'ensemble des variables internes liées aux aspects dissipatifs et y l'ensemble des variables duales (la dissipation s'écrit $d = y \cdot \dot{x}$).

L'opérateur \mathbf{B} est défini positif pour vérifier le second principe de la thermodynamique ; une démarche courante pour l'explicitier consiste à utiliser un pseudo-potentiel de dissipation φ tel que :

$$\varphi \text{ convexe} \quad \varphi \geq 0 \quad \varphi(0) = 0$$

et son dual défini au sens de Legendre-Fenchel par :

$$\varphi^*(y) = \sup_{\dot{x}} (y \cdot \dot{x} - \varphi(\dot{x}))$$

On parle alors de matériau standard [Moreau 1966, Halphen et Nguyen 1975, Lemaître et Chaboche 1994, Ladevèze 1999] et les équations d'évolution s'écrivent :

$$\dot{x} = \partial_y \varphi^* \quad \text{ou} \quad y = \partial_{\dot{x}} \varphi$$

Remarque : Une grande majorité des relations de comportement utilisées en mécanique des structures (viscoélasticité, (visco)plasticité, ...) ont une formulation standard.

De cette formulation dérivent les deux résultats importants suivants :

Résultat 1 : Inégalité de Legendre-Fenchel :

$$\forall (\dot{x}, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} \quad \varphi(\dot{x}) + \varphi^*(y) - y \cdot \dot{x} \geq 0 \quad (1.25)$$

Résultat 2 : Il y a équivalence entre :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \varphi(\dot{x}) + \varphi^*(y) - y \cdot \dot{x} = 0 \\ (ii) \quad & \dot{x} = \partial_y \varphi^* \\ (iii) \quad & y = \partial_{\dot{x}} \varphi \end{aligned} \quad (1.26)$$

Dans le contexte de l'erreur en dissipation, la notion d'admissibilité est redéfinie en associant les lois d'état aux conditions classiques d'admissibilité. Une solution admissible (\hat{x}, \hat{y}) vérifie donc toutes les équations du problème de référence excepté les équations d'évolution (1.24) associées aux effets dissipatifs.

L'erreur en dissipation e_{diss} , qui mesure le non-respect de (1.24), se définit alors par la formule :

avec

$$e_{diss}^2(\dot{x}, \hat{y}) = \int_0^T \eta_t(\dot{x}, \hat{y}) dt$$

$$\eta_t(\dot{x}, \hat{y}) = \int_{\Omega} \left[\varphi(\dot{x}) + \varphi^*(\hat{y}) - \hat{y} \cdot \dot{x} \right]_{|t} d\Omega$$

et on a les propriétés (provenant de (1.25) et (1.26)) :

$$e_{diss}^2(\dot{x}, \hat{y}) \geq 0$$

$$e_{diss}(\dot{x}, \hat{y}) = 0 \iff (\dot{x}, \hat{y}) = (x_{ex}, y_{ex}) \quad (1.27)$$

Dans [Moës 1996], on donne une interprétation géométrique à l'erreur en dissipation.

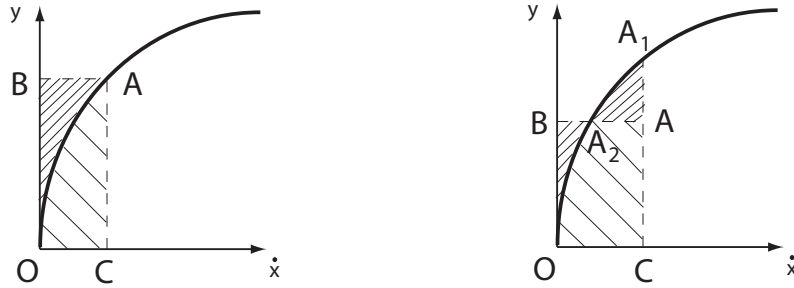


Figure 1.3: Interprétation géométrique de l'erreur en dissipation

- si (\dot{x}, \hat{y}) appartient à la courbe de comportement (point A sur la Figure 1.3 à gauche), on a $\varphi(\dot{x}) = |OCA|$, $\varphi^*(\hat{y}) = |OBA|$ et $\hat{y} \cdot \dot{x} = |OCAB|$, donc :

$$\varphi(\dot{x}) + \varphi^*(\hat{y}) - \hat{y} \cdot \dot{x} = 0$$

- si (\dot{x}, \hat{y}) n'appartient pas à la courbe de comportement (point A sur la Figure 1.3 à droite), on a $\varphi(\dot{x}) = |OCA_1|$, $\varphi^*(\hat{y}) = |OBA_2|$ et $\hat{y} \cdot \dot{x} = |OCAB|$, donc :

$$\varphi(\dot{x}) + \varphi^*(\hat{y}) - \hat{y} \cdot \dot{x} = |AA_1A_2|$$

L'erreur mesurée est ainsi l'aire de la zone comprise entre la courbe du comportement et les segments de droites parallèles aux axes reliant la courbe au point (\dot{x}, \hat{y}) considéré.

L'erreur en dissipation présente divers avantages par rapport à l'erreur au sens de Drucker introduite précédemment :

- tout d'abord, le coût de calcul qu'elle entraîne est moins élevé. En effet, pour calculer l'erreur au sens de Drucker, des sous-pas de calcul sont souvent nécessaires pour faire l'intégration directe et inverse du comportement. Cette intégration n'a pas lieu dans le calcul de l'erreur en dissipation ;

- ensuite, l'erreur en dissipation intègre plus de contenu mécanique que l'erreur au sens de Drucker qui reste une généralisation directe de l'erreur élastique.

- enfin, et surtout, l'erreur en dissipation permet, contrairement à l'erreur au sens de Drucker, d'avoir un lien fort avec la solution exacte (x_{ex}, y_{ex}) du problème au travers de la relation fondamentale :

$$e_{diss}^2(\dot{\hat{x}}, \hat{y}) = \int_0^T [\eta_t(\dot{\hat{x}}, y_{ex}) + \eta_t(\dot{x}_{ex}, \hat{y})] dt + E_F(\hat{y} - y_{ex})|_T \quad (1.28)$$

où E_F est l'énergie libre globale de la structure. Cette équation, qui peut être vue comme une généralisation du théorème de Prager-Synge (1.19), est démontrée dans [Ladevèze 1999].

L'erreur en dissipation a été largement utilisée et analysée pour les problèmes de (visco)plasticité [Moës 1996, Ladevèze et Moës 1998, Ladevèze *et al.* 1999a]. On y montre en particulier que son comportement asymptotique dépend du caractère différentiable (au sens classique) des pseudo-potentiels de dissipation au niveau de la solution exacte du problème.

Des généralisations basées sur l'erreur en dissipation existent également :

- en utilisant le concept de bipotentiel introduit par De Saxcé [Saxcé 1992], on peut traiter des problèmes incluant des matériaux non standards tels que le contact avec frottement [Louf *et al.* 2003] ou la plasticité avec écrouissage cinématique non linéaire de Chaboche ;

- pour les matériaux plastiques et viscoplastiques tels que le comportement reliant le taux de déformation et de contrainte peut s'exprimer avec des potentiels convexes duaux (modèle de Prandtl-Reuss par exemple), on peut utiliser une erreur associée au problème en vitesse de la forme [Ladevèze *et al.* 1986] :

$$e^2(t) = \int_{\Omega} (\varphi(\dot{\epsilon}) + \varphi^*(\dot{\sigma}) - \text{Tr}[\dot{\sigma}\dot{\epsilon}])|_t d\Omega$$

- des erreurs en relation de comportement adaptées aux problèmes en grandes transformations [Bussy *et al.* 1985] ou avec endommagement [Ladevèze 2001] ont également été mises en place.

L'erreur en dissipation est un outil de base pour la suite de ce travail. Nous l'étudierons en détail dans le Chapitre 2, en l'appliquant aux problèmes de viscoélasticité.

3 Estimation de l'erreur locale

L'intérêt d'avoir des estimations de l'erreur locale vient des besoins des ingénieurs-concepteurs de bureau d'étude. En effet, pour le dimensionnement, une information sur l'erreur globale reste très insuffisante, les critères dimensionnants faisant le plus souvent appel à des valeurs locales (de contrainte, de déplacement, ...). Dans le cadre de la MEF, différentes méthodes ont été proposées ces dernières années pour l'estimation d'erreur locale. Ces méthodes sont exposées dans cette section.

3.1 Estimation de l'erreur en pollution

3.1.1 Concept d'erreur en pollution

Le concept d'erreur en pollution a été l'un des premiers à faire intervenir la notion d'erreur locale. Introduit par Babuška [Babuška *et al.* 1995] pour les problèmes elliptiques linéaires, il postule que l'erreur de discrétisation dans une zone ω donnée de la structure provient de deux sources distinctes :

- une source locale qui est l'erreur de troncature produite dans ω ;
- une source occasionnée par la discrétisation dans le reste du domaine. Cette dernière erreur, transportée jusqu'à la zone ω , est appelée erreur de pollution.

L'erreur de pollution peut être introduite de façon plus conceptuelle. Pour cela, considérons le problème d'élasticité linéaire de la Section 1, et rappelons l'équation (1.9) vérifiée par \underline{e}^u :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{e}^u)\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \mathcal{R}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{e}^u)\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \sum_E \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

où les termes \mathcal{R}_E^{eq} sont les résidus définis sur chaque élément E et obtenus après équilibrage. En considérant un patch d'éléments ω_h couvrant la région d'intérêt ω , on peut séparer l'erreur en deux composantes :

$$\underline{e}^u = \underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h} + \underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}$$

où $\tilde{\omega}^h$ correspond à ω_h plus quelques couches d'éléments (en pratique, les résultats restent inchangés après deux couches d'éléments).

$\underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h}$ et $\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}$ sont solutions de :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h})\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \sum_{E \in \tilde{\omega}^h} \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h})\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \sum_{E \notin \tilde{\omega}^h} \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

La restriction $\underline{v}_{1|\omega^h}^{\tilde{\omega}^h}$ représente l'erreur locale sur ω^h . Elle est équivalente à l'erreur de discrétisation par éléments finis dans $\tilde{\omega}^h$ lorsqu'on a sur $\partial\tilde{\omega}^h$ des conditions limites de Dirichlet égales à la solution exacte \underline{u}_{ex} .

La restriction $\underline{v}_{2|\omega^h}^{\tilde{\omega}^h}$ représente l'erreur en pollution sur ω^h . Elle est égale à la solution exacte sur $\tilde{\omega}^h$ du problème de référence avec des conditions limites de Dirichlet sur $\partial\tilde{\omega}^h$ égales à l'erreur exacte \underline{e}^u .

La maîtrise de l'erreur de pollution est primordiale dans un calcul éléments finis. En effet :

- dans une procédure de réanalyse locale, le raffinement ne donne pas la convergence d'erreur en h^q (cf. (1.8)) si le maillage grossier \mathcal{M}_H en dehors de la zone d'intérêt apporte une erreur de pollution importante (qui évolue elle en H^q);
- dans [Babuška *et al.* 1995], on montre que l'erreur en pollution joue un grand rôle dans la qualité des dérivées post-traitées (contrainte par exemple). Si la pollution n'est pas maîtrisée (erreur en pollution non négligeable par rapport à l'erreur locale), la qualité des contraintes obtenues par un schéma "recovery" (ZZ-SPR par exemple) n'est pas meilleure que celle des contraintes directement obtenues à partir de la solution éléments finis elle-même.

3.1.2 Mesure de l'erreur en pollution

Il est possible d'estimer *a posteriori* l'erreur en pollution, et plus particulièrement la façon dont elle se propage. Nous donnons ici les concepts fondamentaux de la méthode proposée par Babuška et liée aux fonctions de Green qui décrivent l'interaction entre différents points du domaine. La pollution en certains points est estimée avec l'erreur d'approximation de la fonction de Green associée. Pour illustrer cela, notons $\tilde{\underline{e}}_E^u$ la fonction indicateur d'erreur sur l'élément E définie comme la solution exacte du problème :

$$\int_E \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\tilde{\underline{e}}_E^u)\epsilon(\underline{u}^*)]dE = \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0,E}$$

On introduit, pour $P \in \Omega$, les fonctions de Green $\underline{G}_i^{(P)}$ solutions du problème :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{K}\epsilon(\underline{G}_i^{(P)})) &= \frac{\partial \delta}{\partial \underline{x}_i}(P) \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{G}_i^{(P)} &= \underline{0} \quad \text{sur } \partial_1\Omega \\ \mathbf{K}\epsilon(\underline{G}_i^{(P)})\underline{n} &= \underline{0} \quad \text{sur } \partial_2\Omega \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}}{\partial \underline{x}_i} \Big|_P = \sum_{E \notin \tilde{\omega}^h} \int_E \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\tilde{\underline{e}}_E^u)\epsilon(\underline{G}_i^{(P)} - \underline{\omega}_E)]dE$$

où $\underline{\omega}_E$ est la meilleure approximation éléments finis de $\underline{G}_i^{(P)}$ sur E . Une majoration de $|\frac{\partial \underline{v}_2^h}{\partial x_i}|$ est ainsi accessible en employant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par élément et en majorant le produit d'erreurs obtenu à l'aide des méthodes de majoration données dans la Section 2.

D'autres méthodes d'estimation de l'erreur en pollution ont par ailleurs été employées (voir par exemple [Huerta et Diez 2000] où on résout de façon approchée le problème définissant \underline{v}_2^h).

3.2 Utilisation des techniques d'extraction

Les techniques d'extraction sont particulièrement adaptées à l'estimation de l'erreur sur une quantité locale I intéressante pour le dimensionnement ; la quasi-totalité des méthodes d'estimation d'erreur locale repose sur ces techniques. Tout comme pour l'estimation de l'erreur en pollution, l'idée est à nouveau de faire intervenir des opérateurs de Green et de se ramener à des estimations d'erreur globale.

Les premiers travaux mettant en œuvre les techniques d'extraction remontent à plus de cinquante ans [Greenberg 1948, Washizu 1953] mais ils ne rentraient alors pas dans le cadre de la MEF. Les techniques d'extraction ont été insérées dans ce cadre pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte [Babuška et Miller 1984] avant d'être étendues pour l'estimation d'erreur sur des quantités locales [Becker et Rannacher 1996]. Nous ne donnons ici que les grands principes sur ces techniques, en séparant deux cas :

- celui où on traite l'erreur locale pour des problèmes linéaires de statique (premiers travaux réalisés) ;
- celui où on traite l'erreur locale pour des problèmes plus complexes.

Une mise en œuvre complète des techniques d'extraction sera en outre exposée dans le Chapitre 3 pour les problèmes de viscoélasticité linéaire.

3.2.1 Cas des problèmes linéaires de statique

De la même façon que pour l'erreur globale, c'est pour ce type de problème que la littérature est la plus riche [Becker et Rannacher 1996, Peraire et Patera 1998, Ladevèze *et al.* 1999b, Prudhomme et Oden 1999, Strouboulis *et al.* 2000b, Stein *et al.* 2001]. Nous rappelons les principes généraux qui ressortent de ces travaux, en nous plaçant dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire.

3.2.1.1 Notion d'extracteur Le point de départ des méthodes utilisant les techniques d'extraction est l'écriture de façon globale de la quantité locale I considérée. En

d'autres termes, on met I sous la forme :

$$I = \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \tilde{\epsilon}_{\Sigma}] d\Omega \quad \text{ou} \quad I = \int_{\Omega} \text{Tr}[\tilde{\sigma}_{\Sigma} \epsilon] d\Omega \quad (1.29)$$

où $\tilde{\epsilon}_{\Sigma}$ et $\tilde{\sigma}_{\Sigma} = \mathbf{K} \tilde{\epsilon}_{\Sigma}$ sont des opérateurs, implicites ou explicites, appelés opérateurs d'extraction ou extracteurs.

Remarque 1 : Pour une quantité d'intérêt I donnée, l'extracteur associé n'est pas unique. En effet, tout opérateur $\hat{\sigma}$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\sigma} \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\tilde{\sigma}_{\Sigma} \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

peut servir d'extracteur.

Remarque 2 : Si une quantité I s'écrit comme une combinaison de plusieurs quantités locales élémentaires, il vaut mieux prendre l'extracteur associé à cette combinaison plutôt que de traiter séparément l'estimation d'erreur sur les quantités locales élémentaires ; l'estimation de l'erreur sur I dans ce dernier cas est trop approximative car on cumule les intervalles d'erreur.

À titre d'exemple, les extracteurs intervenant pour l'estimation d'une moyenne de contrainte sur un élément E du maillage \mathcal{M}_h en 2D sont :

$$\tilde{\epsilon}_{\Sigma}^1 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\epsilon}_{\Sigma}^2 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\epsilon}_{\Sigma}^3 = \frac{1}{2|E|} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Par contre pour estimer sur E la partie affine de la contrainte, de la forme :

$$[\sigma]_L = \mathbb{A}^1 \lambda_1 + \mathbb{A}^2 \lambda_2 + \mathbb{A}^3 \lambda_3 \quad (\text{si } E \text{ est un élément triangulaire à 3 nœuds})$$

on a besoin des 9 opérateurs $\tilde{\epsilon}_{\Sigma}^i \lambda_j$. En effet, la minimisation de $\|\sigma - [\sigma]_L\|_{\mathbf{K}^{-1}, E}$ donne le système en \mathbb{A}^i :

$$\sum_{j=1}^3 \mathbb{A}^j \int_E \lambda_i \lambda_j dE = \int_E \sigma \lambda_i dE \quad \forall i \in \{1, 3\}$$

Ces exemples sont des cas simples mais l'opérateur d'extraction, qui permet de représenter *a priori* n'importe quelle quantité d'intérêt, peut être plus difficile à obtenir. Citons quelques exemples :

- si la quantité d'intérêt I est une composante du déplacement \underline{u} , l'opérateur d'extraction σ_{Σ} est implicite. Dans ce cas précis, il est plus judicieux de mettre I sous la forme :

$$I = \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u} d\Omega$$

Cette remarque est également valable pour des quantités intégrales telles que la résultante des efforts sur un bord.

- dans le cas où I représente les facteurs d'intensité de contrainte en Mécanique de la Rupture, on peut se servir des solutions asymptotiques de la forme $K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx}$; on peut aussi considérer un extracteur basé sur une intégrale de contour [Babuška et Miller 1984, Gallimard et Panetier 2006].

Études pour finir la nature de l'extracteur en fonction de la quantité d'intérêt I considérée. Le cas le plus répandu (le plus simple également) est celui des quantités I dépendant linéairement du déplacement. Dans ce cas, l'extracteur ne dépend pas de la solution (\underline{u}, σ) du problème de référence et on a :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) = I(\underline{e}^u) = \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \epsilon(\underline{e}^u)] d\Omega$$

Si la quantité I ne dépend pas linéairement du déplacement, l'extracteur est fonction de la solution du problème de référence. On a :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) \neq I(\underline{e}^u)$$

et l'idée est alors de linéariser la fonction I autour de \underline{u}_h en utilisant l'opérateur tangent I_T :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) \approx I_{T|\underline{u}_h}(\underline{e}^u) = \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma|\underline{u}_h} \epsilon(\underline{e}^u)] d\Omega$$

Ce dernier cas se rencontre aussi lorsqu'on utilise les techniques d'extraction pour l'estimation de l'erreur globale. Dans [Johnson et Hansbo 1992], l'exemple de l'erreur globale en norme L^2 i.e. $\|\underline{e}^u\|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \underline{e}^u \cdot \underline{e}^u d\Omega}$ est traité. Cette erreur peut aussi être écrite :

$$\|\underline{e}^u\|_{\Omega} = \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{e}^u d\Omega \quad \text{avec} \quad \tilde{f}_{\Sigma} = \frac{\underline{e}^u}{\|\underline{e}^u\|_{\Omega}}$$

et l'extracteur \tilde{f}_{Σ} , qui dépend de l'erreur elle-même, est en pratique approximé par :

$$\tilde{f}_{\Sigma} \approx \frac{\underline{u}_h - \underline{u}_H}{\|\underline{u}_h - \underline{u}_H\|_{\Omega}} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_{\Sigma} \approx \frac{\underline{u}_{hh} - \underline{u}_h}{\|\underline{u}_{hh} - \underline{u}_h\|_{\Omega}}$$

avec :

- \underline{u}_H : solution calculée sur un maillage \mathcal{M}_H plus grossier que \mathcal{M}_h
- \underline{u}_{hh} : solution calculée sur un maillage \mathcal{M}_{hh} plus fin que \mathcal{M}_h

3.2.1.2 Définition du problème adjoint Dénommé aussi problème dual, il est entièrement défini par la nature du problème de référence et l'opérateur d'extraction. Il a été introduit de différentes façons dans la littérature (dualité de l'énergie, théorème de réciprocité de Betti, « Aubin-Nitsche trick », ...) mais est en tout cas basé sur des propriétés

de dualité des opérateurs intervenant dans la formulation faible du problème de référence. Il consiste dans le cas de l'élasticité linéaire à trouver la solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$ vérifiant :

- les liaisons cinématiques : $\tilde{\underline{u}} \text{ CA}_0$

$$\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{U} ; \tilde{\underline{u}}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{0} ; \epsilon(\tilde{\underline{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla(\tilde{\underline{u}}) + \nabla^T(\tilde{\underline{u}})) \quad (1.30)$$

- les équations d'équilibre : $\tilde{\sigma} - \sigma_\Sigma \text{ SA}_0$

$$\tilde{\sigma} \in \mathcal{S} ; \int_{\Omega} \text{Tr}[(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_\Sigma)\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (1.31)$$

- la relation de comportement :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{K}\epsilon(\tilde{\underline{u}}) \quad (1.32)$$

Notons que l'extracteur $\tilde{\sigma}_\Sigma$ apparaît dans ce problème adjoint comme une précontrainte.

Remarque : L'équation d'équilibre du problème adjoint peut parfois être avantageusement écrite différemment, en particulier lorsque l'extracteur $\tilde{\sigma}_\Sigma$ n'est connu qu'implicitement. Par exemple, lorsque la quantité d'intérêt se met sous la forme $I = \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_\Sigma \cdot \underline{u}^ d\Omega$ (composante de déplacement), l'équation d'équilibre du problème adjoint s'écrit aussi :*

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\tilde{\sigma}\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_\Sigma \cdot \underline{u}^* d\Omega$$

et l'extracteur $\tilde{\underline{f}}_\Sigma$ est vu comme une force extérieure.

L'introduction du problème adjoint permet d'aboutir au résultat fondamental :

$$\begin{aligned} I(\underline{e}^u) &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\tilde{\underline{u}})\epsilon(\underline{e}^u)] d\Omega \quad ((1.31) \text{ avec } \underline{u}^* = \underline{e}^u) \\ &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{e}^u)\epsilon(\tilde{\underline{u}})] d\Omega \quad (\text{par réciprocity, } \mathbf{K} \text{ étant auto-adjoint}) \\ &= \mathcal{R}(\tilde{\underline{u}}) \quad (\text{cf. (1.9)}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

ce qui montre que la solution $\tilde{\underline{u}}$ représente une fonction d'influence qui capte l'effet des résidus d'équilibre du problème de référence sur l'erreur locale. La méthode est par conséquent appelée "Dual-Weighted Residual (DWR)".

La réciprocity de Betti intervient ici dans le sens que l'erreur locale correspond au travail des résidus d'équilibre avec le déplacement $\tilde{\underline{u}}$, ou à celui de l'extracteur avec \underline{e}^u .

Terminons cette partie par quelques remarques relatives au problème adjoint. Dans certains cas particuliers le problème adjoint peut être mal posé. Voici quelques exemples :

- si on veut estimer l'erreur sur la résultante des forces sur une ligne appartenant à $\partial_2\Omega$, les conditions limites du problème adjoint sur $\partial_2\Omega$ sont à la fois un déplacement nul et non nul. Dans ce cas, on régularise le problème en considérant l'erreur sur la résultante des forces proches de $\partial_2\Omega$.

- si on veut estimer l'erreur sur le déplacement dans un problème contenant des mouvements de corps rigide (donc n'ayant pas une solution en déplacement unique), le chargement du problème adjoint ne vérifie pas forcément l'équilibre global ; il n'y a alors pas de solution au problème adjoint, ce qui est normal car les valeurs de I_{ex} et I_h ne sont pas uniques.

D'autre part, un cas particulier est celui de l'estimation du déplacement sur un bord $\partial_1\Omega$; la solution du problème adjoint correspondant est alors la solution nulle. On retrouve ainsi que l'erreur locale sur le déplacement est nulle, ce qu'on pouvait prévoir car la MEF en déplacement respecte les conditions limites en déplacement.

3.2.1.3 Obtention de l'estimateur d'erreur locale En pratique, la solution exacte $(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ du problème adjoint ne peut être obtenue que de façon approchée. On utilise pour cela généralement le même maillage \mathcal{M}_h que celui utilisé pour la résolution approchée du problème de référence et on obtient la solution approchée $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$. Avec la propriété d'orthogonalité (1.10), on a alors :

$$\begin{aligned} I(\underline{\epsilon}^u) &= \mathcal{R}(\tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h) \\ &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K}\epsilon(\underline{\epsilon}^u)\epsilon(\tilde{\underline{\epsilon}}^u)] d\Omega \end{aligned} \quad (1.34)$$

où $\tilde{\underline{\epsilon}}^u = \tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h$ est la fonction d'erreur relative au problème adjoint. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur (1.34), on obtient :

$$|I(\underline{\epsilon}^u)| \leq \|\underline{\epsilon}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} \cdot \|\tilde{\underline{\epsilon}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega} \quad (1.35)$$

ou encore :

$$|I(\underline{\epsilon}^u)| \leq \sum_E \|\underline{\epsilon}^u\|_{\mathbf{K},E} \cdot \|\tilde{\underline{\epsilon}}^u\|_{\mathbf{K},E} \quad (1.36)$$

ce qui montre qu'une majoration de l'erreur locale peut être donnée par les méthodes d'estimation d'erreur globale, bien connues et éprouvées, présentées dans la Section 2.1. Cette caractéristique est très intéressante pour l'incorporation d'une méthode d'estimation d'erreur locale dans un code éléments finis existant : les transformations à réaliser dans le code sont minimales si celui-ci possède déjà une méthode d'estimation d'erreur globale.

On obtient en conclusion l'estimation d'erreur locale :

$$\begin{aligned} |I(\underline{e}^u)| &\leq \theta \tilde{\theta} \quad (\text{cf. (1.35)}) \\ \text{ou } |I(\underline{e}^u)| &\leq \sum_E \theta_E \tilde{\theta}_E \quad (\text{cf. (1.36)}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Notons que la majoration utilisant (1.36) est plus précise que celle basée sur (1.35), mais elle nécessite d'avoir des majorants de l'erreur globale sur chaque élément E du maillage \mathcal{M}_h .

Une variante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz a été apportée dans [Prudhomme et Oden 1999]. Elle consiste à utiliser l'égalité du parallélogramme :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{K} \epsilon(\underline{e}^u) \epsilon(\tilde{\underline{e}}^u)] d\Omega = \frac{1}{4\gamma} [\|\underline{e}^u + \gamma \tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 - \|\underline{e}^u - \gamma \tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2] \quad (1.38)$$

dans laquelle γ est une constante positive. En notant η_{inf}^- , η_{inf}^+ , η_{sup}^- et η_{sup}^+ les bornes telles que :

$$\begin{aligned} \eta_{inf}^- &\leq \|\underline{e}^u - \gamma \tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 \leq \eta_{sup}^- \\ \eta_{inf}^+ &\leq \|\underline{e}^u + \gamma \tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 \leq \eta_{sup}^+ \end{aligned}$$

on obtient alors l'encadrement :

$$\frac{1}{4\gamma} [\eta_{inf}^+ - \eta_{sup}^-] \leq I(\underline{e}^u) \leq \frac{1}{4\gamma} [\eta_{sup}^+ - \eta_{inf}^-] \quad (1.39)$$

qui peut être optimisé par le choix de γ .

Le calcul des quantités η_{inf}^- , η_{inf}^+ , η_{sup}^- et η_{sup}^+ nécessite une méthode fournissant à la fois des bornes inférieure et supérieure de l'erreur globale. Ce calcul est alors mené en faisant jouer les propriétés de linéarité.

Remarque 1 : *Du fait que beaucoup d'estimateurs d'erreur globale ne donnent pas des bornes garanties, il en est de même pour les estimateurs d'erreur locale : peu d'entre eux sont garantis [Ladevèze et al. 1999b, de Almeida et Pereira 2006]. C'est pourquoi, dans beaucoup de cas, on remplace l'erreur vraie $\tilde{\underline{e}}^u$ du problème adjoint par une erreur calculée qu'on sait majorer strictement [Becker et Rannacher 1996 - 2001]. En pratique, on approxime la solution exacte $\underline{\tilde{u}}$ par une solution très fine $\underline{\tilde{u}}_{\tilde{h}}$ obtenue par divers moyens (MEF avec enrichissement de l'espace d'approximation par exemple) :*

$$\tilde{\underline{e}}^u \approx \underline{\tilde{u}}_{\tilde{h}} - \underline{\tilde{u}}_h$$

Remarque 2 : Dans la majorité des méthodes d'estimation d'erreur locale, la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.10) est utilisée ce qui signifie qu'on ne peut pas choisir un maillage quelconque pour la résolution approchée du problème adjoint. Nous verrons par la suite que ceci est un inconvénient majeur.

Dans [Ladevèze 2006], une méthode d'estimation d'erreur locale n'utilisant pas cette propriété d'orthogonalité est présentée. Elle est reproduite dans l'Annexe A de ce document.

3.2.1.4 Un exemple particulier : erreur sur un déplacement en 1D On considère la poutre de longueur L représentée sur la Figure 1.4. Elle est encastree à son extrémité $x = 0$ et soumise à une sollicitation de traction représentée par un effort F_d à l'autre extrémité $x = L$ ainsi qu'une densité linéique f_d .

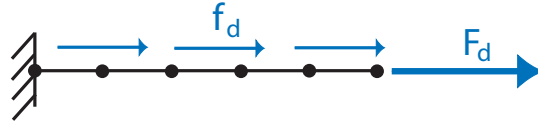


Figure 1.4: Définition du problème de référence 1D

Le problème de référence, posé en déplacement, consiste à trouver $u \in H^1(]0, L[)$ tel que :

$$\begin{aligned} ES \frac{d^2 u}{dx^2} + f_d &= 0 \quad \text{sur } [0, L] \\ u(0) &= 0 \\ ES \frac{du}{dx}(L) &= F_d \end{aligned}$$

Ce problème est résolu de façon approchée par la MEF qui, associée à des fonctions d'interpolation linéaires classiques, donne une solution u_h . Si on s'intéresse à l'estimation de l'erreur sur le déplacement en un point $x_0 \in [0, L]$, on peut écrire la quantité d'intérêt I sous la forme :

$$I = u(x_0) = \int_0^L \delta_{x_0} u(x) dx$$

et l'extracteur associé δ_{x_0} correspond à une distribution de Dirac en x_0 . Le problème adjoint qui en découle (problème de Green) s'écrit :

$$\begin{aligned} ES \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \delta_{x_0} &= 0 \quad \text{sur } [0, L] \\ \tilde{u}(0) &= 0 \\ ES \frac{d\tilde{u}}{dx}(L) &= 0 \end{aligned}$$

Notons que la solution \tilde{u} est aussi vue au sens des distributions et que l'extracteur δ_{x_0} peut être interprété comme une force ponctuelle en $x = x_0$ (Figure 1.5).

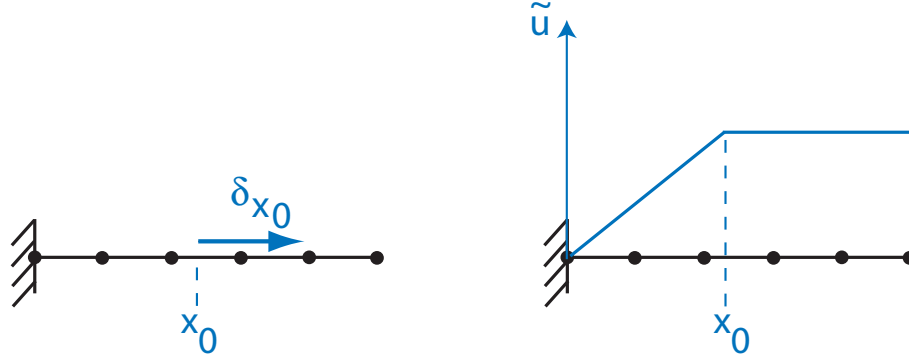


Figure 1.5: Définition et solution du problème adjoint

On obtient alors :

$$u_{ex}(x_0) - u_h(x_0) = \int_0^L ES \frac{d(u_{ex} - u_h)}{dx} \frac{d\tilde{u}_{ex}}{dx} dx$$

Il faut remarquer que si x_0 est la coordonnée d'un nœud du maillage, la solution exacte \tilde{u}_{ex} du problème adjoint (donnée sur la Figure 1.5) appartient à l'espace d'approximation éléments finis \mathcal{U}_h . Dans ce cas particulier, l'orthogonalité de Galerkin s'applique et on obtient le résultat suivant :

$$u_{ex}(x_0) - u_h(x_0) = 0$$

On retrouve par cette étude le phénomène de superconvergence du champ de déplacement éléments finis u_h observé aux nœuds du maillage d'un problème 1D.

3.2.2 Extension aux autres types de problèmes

L'estimation d'erreur locale pour les problèmes d'évolution et/ou non linéaires s'appuie également sur les méthodes d'estimation d'erreur globale mises en place pour ces types de problème (Section 2.2), en ayant recours à une procédure d'extraction. Nous développons ici les aspects nouveaux qui apparaissent lorsqu'on étend la technique générale d'estimation de l'erreur locale, dédiée en premier lieu aux problèmes linéaires de statique, à d'autres types de problèmes.

3.2.2.1 Obtention du problème adjoint Une procédure systématique pour dériver le problème adjoint a été proposée par Becker & Rannacher dans le cadre de la méthode « Optimal Control » [Becker et Rannacher 2001]. Cette procédure unifie les techniques

qui étaient jusqu'alors utilisées et s'applique à tout type de problème (linéaire ou non, avec évolution en temps ou non, ...).

L'idée consiste à écrire la quantité d'intérêt I comme le résultat de la minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes. En d'autres termes, en écrivant la formulation variationnelle du problème de référence :

$$\mathcal{B}(\underline{u}; \underline{u}^*) = \mathcal{F}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (1.40)$$

où $\mathcal{B}(\bullet; \bullet)$ est une forme semi-linéaire et $\mathcal{F}(\bullet)$ est une forme linéaire, la quantité d'intérêt I est solution du problème :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}$ tel que :

$$I(\underline{u}) = \inf_{\underline{p} \in \mathcal{C}} I(\underline{p}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = \{\underline{p} \in \mathcal{U}, \mathcal{B}(\underline{p}; \underline{v}) = \mathcal{F}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_0\} \quad (1.41)$$

La solution du problème (1.41) correspond au point-selle $(\underline{p}_0, \underline{v}_0)$ du lagrangien $\mathcal{L}(\underline{p}; \underline{v})$ défini par :

$$\mathcal{L}(\underline{p}; \underline{v}) = I(\underline{p}) - [\mathcal{B}(\underline{p}; \underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v})] \quad \forall (\underline{p}, \underline{v}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}_0$$

Dès lors :

- la dérivation par rapport à \underline{v} redonne le problème de référence :

$$D_{\underline{v}}\mathcal{L} = 0 \implies \mathcal{B}(\underline{p}_0; \underline{v}^*) = \mathcal{F}(\underline{v}^*) \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (1.42)$$

- la dérivation par rapport à \underline{p} définit le problème adjoint :

$$D_{\underline{p}}\mathcal{L} = 0 \implies \mathcal{B}'(\underline{p}; \underline{p}^*, \underline{v}_0) = I'(\underline{p}; \underline{p}^*) \quad \forall \underline{p}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (1.43)$$

Quelques remarques :

- Les dérivées des fonctionnelles considérées dans (1.43) sont prises au sens de Gâteaux, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'(\underline{p}; \underline{p}^*, \underline{v}_0) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [\mathcal{B}(\underline{p} + \theta \underline{p}^*; \underline{v}_0) - \mathcal{B}(\underline{p}; \underline{v}_0)] \\ I'(\underline{p}; \underline{p}^*) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [I(\underline{p} + \theta \underline{p}^*) - I(\underline{p})] \end{aligned}$$

- Dans toutes les expressions écrites précédemment, les fonctionnelles sont non linéaires par rapport à toutes les variables situées à gauche du « ; » et linéaires par rapport aux autres variables ; on voit donc que le problème adjoint linéarise automatiquement les opérateurs \mathcal{B} (lié au comportement) et I (lié à l'extracteur) ;

- Pour les problèmes d'évolution, la formulation variationnelle (1.40) doit être écrite de façon globale en espace et en temps (intégrales spatio-temporelles) pour incorporer les conditions limites en temps du problème de référence ; celles relatives au problème adjoint

se déduisent alors directement de (1.43) ;

- Cette approche du problème adjoint est similaire à celle définissant l'état adjoint utilisé pour calculer le gradient de fonctionnelles non linéaires dans les problèmes inverses [Groetsch 1993].

Des exemples d'application de la méthode générale « Optimal Control » peuvent être trouvés par exemple dans [Becker et Rannacher 2001] (problèmes élastoplastiques de type Hencky et Prandtl-Reuss) ou [Oden *et al.* 2003] (estimation de l'erreur sur le calcul des fréquences propres en élasticité).

3.2.2.2 Majoration de l'erreur locale Là encore, la majoration repose sur un calcul approché de la solution du problème adjoint. Celui-ci étant toujours linéaire (contrairement au problème de référence), le coût de calcul d'une solution approchée $\tilde{\underline{u}}_h$ par éléments finis ne représente généralement qu'une petite fraction du coût total.

On aboutit alors à une nouvelle représentation de l'erreur locale de la forme [Becker et Rannacher 2001, Oden et Prudhomme 2002] :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) = \mathcal{R}(\tilde{\underline{u}}_{ex}) + \Delta_{\mathcal{B}} + \Delta_I = \mathcal{R}(\tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h) + \Delta_{\mathcal{B}} + \Delta_I \quad (1.44)$$

où les termes $\Delta_{\mathcal{B}}$ et Δ_I , liés à la linéarisation de \mathcal{B} et I autour de \underline{u}_h , font intervenir les dérivées seconde et troisième de \mathcal{B} et I respectivement ; ce sont donc des quantités du deuxième et troisième ordre de l'erreur \underline{e}_u . On a bien entendu :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{B}} &= 0 & \text{si } \mathcal{B}(\bullet; \bullet) \text{ est une forme bilinéaire} \\ \Delta_I &= 0 & \text{si } I(\bullet) \text{ est une forme linéaire} \end{aligned}$$

et en pratique, les termes $\Delta_{\mathcal{B}}$ et Δ_I sont négligés en considérant l'erreur petite. On aboutit alors à l'expression de l'erreur locale :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) \approx \mathcal{R}(\tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h)$$

et on réutilise les méthodes d'estimation de l'erreur globale données dans la Section 2.2.

Détaillons cependant le cas des problèmes d'évolution qui conduisent à un problème adjoint non seulement dépendant du temps mais aussi inverse en temps.

Si le problème de référence est de plus non linéaire, le problème adjoint dépend de la solution de ce problème de référence. Il est donc intéressant de le résoudre avec un schéma temporel implicite, de façon à augmenter au maximum la taille des pas de temps et par conséquent ne pas avoir à stocker trop de données relatives au problème de référence [Fuentes *et al.* 2006].

Pour ce qui est de la partie de l'erreur locale due à l'approximation en temps, elle n'est prise en compte qu'approximativement. Dans la majorité des cas, elle n'est même

pas prise en compte du tout ; l'estimation d'erreur est faite sur chaque pas de temps, en considérant une erreur nulle au début du pas de temps [Eriksson *et al.* 1995, Becker et Rannacher 1996, Rannacher et Suttmeier 1998].

Pour illustrer, l'erreur sur la quantité I prise à un instant t_m peut être décomposée sous la forme :

$$I_{ex}(t_m) - I_h^m = e_I^m + \tilde{e}_I^m + e_{I,h}^m \quad (1.45)$$

avec :

- $e_I^m = I_{ex}(t_m) - I_{ex}^m$: différence entre la solution exacte et la solution discrétisée en temps \implies erreur due au chargement incrémental ;

- $\tilde{e}_I^m = I_{ex}^m - \tilde{I}_{ex}^m$: différence entre I_{ex}^m et la solution continue en espace correspondant à la valeur initiale $I_h^{m-1} \implies$ erreur due à une mauvaise valeur initiale au début du pas de temps ;

- $e_{I,h}^m = \tilde{I}_{ex}^m - I_h^m$.

C'est uniquement cette dernière erreur $e_{I,h}^m$ qu'on estime habituellement. On peut montrer à partir d'estimateurs *a priori* que les autres composantes d'erreur peuvent être négligées dans un premier temps. En effet :

$$|e_I^m| \leq |e_I^0| + \sum_{n=1}^m \Delta t_n \int_{\Delta t_n} |\ddot{I}| dt$$

donc l'erreur due au chargement incrémental croît au plus linéairement avec le temps si la solution exacte reste bornée. De plus, on montre que :

$$|\tilde{e}_I^m| \leq |I_{ex}^{m-1} - I_h^{m-1}| \leq |\tilde{e}_I^{m-1}| + |e_I^{m-1}|$$

Au final, l'erreur $e_I^m + \tilde{e}_I^m$ peut être contrôlée en gérant la taille des pas de temps utilisés, et on suppose qu'elle est négligeable en prenant des pas de temps suffisamment petits. Dans [Pares *et al.* 2006b] par exemple, on néglige l'erreur en temps sur un problème parabolique en faisant l'hypothèse que l'erreur due au schéma en temps (Galerkin discontinu dans ce cas) est beaucoup plus faible que celle due à l'approximation en espace. On a alors à chaque piquet de temps des bornes strictes uniquement pour l'erreur en espace locale.

3.3 Encadrement direct de l'erreur locale

Cette technique heuristique a été développée par Ladevèze [Ladevèze *et al.* 1999b] dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire pour estimer à moindre coût, et sans utilisation d'un problème adjoint, l'erreur sur des quantités d'intérêt reliées directement au champ de contrainte σ . La méthode, qui est dans la continuité des démarches utilisant l'erreur en relation de comportement, repose sur l'amélioration des techniques de construction des champs admissibles présentée dans la Section 2.1.3. Cette amélioration fournit un champ

de contrainte admissible $\hat{\sigma}$ qui vérifie en pratique la majoration heuristique locale sur chaque élément E du maillage :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},E} \leq C \|\hat{\sigma} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},E}$$

où C est une constante supérieure à 1 (mais de l'ordre de 1 tout de même). On obtient alors directement un majorant de l'erreur locale sur E .

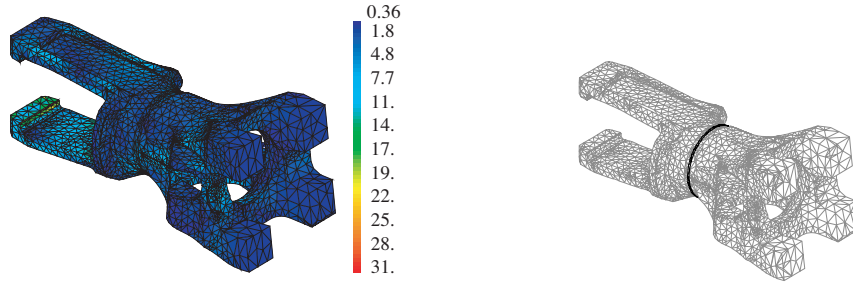


Figure 1.6: Structure étudiée : carte de contrainte de Von Mises (gauche) et zone d'étude ω (droite)

La méthode a été analysée et appliquée dans [Florentin *et al.* 2002] pour l'estimation de l'erreur sur la contrainte de Von Mises dans une zone locale ω d'une structure 3D (Figure 1.6), en se servant de la propriété :

$$|\sigma_{ex}^{VM} - \sigma_h^{VM}|_{\omega} \leq \sqrt{\frac{3k}{2|\omega|}} \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\omega}$$

avec k : plus grande valeur propre de l'opérateur \mathbf{K} .

4 Bilan

Nous venons de donner une vision non-exhaustive des travaux réalisés jusqu'à aujourd'hui dans le domaine de la vérification. Nous avons en particulier abordé l'estimation de l'erreur locale qui donne des informations pertinentes sur la qualité d'un calcul éléments finis et est une thématique de recherche majeure depuis une dizaine d'années. Nous avons par contre laissé volontairement de côté une autre thématique forte de la vérification qui est l'adaptation de maillage, car nous ne nous y intéresserons pas par la suite. Il faut noter que des extensions ont par ailleurs été faites récemment au niveau de l'estimation d'erreur, par exemple en abordant le cadre stochastique [Ghanem et Spanos 1991, Ladevèze 2003, Oden *et al.* 2005] ou l'erreur de modèle [Vemaganti et Oden 2001]. Cette dernière erreur sera abordée dans le Chapitre 7 de ce document.

Il ressort de ce chapitre que même si de nombreux estimateurs sont asymptotiquement exacts, peu sont garantis. Il reste donc de nombreuses questions ouvertes, en particulier

celle de l'estimation d'erreur locale dans les problèmes d'évolution qui nous intéressent dans ce travail. En effet, les méthodes qui s'y rapportent donnent des estimations trop approximatives de l'erreur cumulée avec le temps et peuvent difficilement être utilisées dans une démarche de conception robuste.

C'est cette question qui est traitée dans la suite de ce travail. Pour cela, nous allons utiliser la notion d'erreur en dissipation qui, ayant montré de nombreux avantages pour l'estimation d'erreur globale (bornes garanties, prise en compte de toutes les sources d'erreur, fort contenu mécanique . . .), semble adaptée à notre objectif. Les techniques d'extraction sont aussi une notion que nous conservons car elles permettent très avantageusement de traiter l'estimation d'erreur locale à partir des outils utilisés pour l'estimation d'erreur globale. Notons enfin que nous ferons en sorte de ne pas utiliser les propriétés d'orthogonalité afin de pouvoir garder plus de liberté sur la discrétisation du problème adjoint ; nous verrons que cette démarche évitera en particulier d'avoir recours aux procédures classiques d'adaptation de maillage.

Erreur en dissipation appliquée aux problèmes de viscoélasticité linéaire

Dans ce second chapitre, on présente le problème de viscoélasticité linéaire qui sera pris comme référence dans la suite de l'étude. Après l'avoir écrit à l'aide des variables internes, on applique sur ce problème la notion d'erreur en dissipation, en détaillant quelques points techniques.

Sommaire

1	Les problèmes de viscoélasticité linéaire	47
1.1	Qu'est-ce que la viscoélasticité	47
1.2	Formulation de la viscoélasticité par variables internes	53
2	Le problème de référence	58
2.1	Écriture du problème	58
2.2	Résolution numérique du problème	59
2.3	Exemples	60
3	Mise en œuvre de l'erreur en dissipation pour le problème de référence	63
3.1	Écriture de l'erreur en dissipation	63
3.2	Construction des champs admissibles	63
3.3	Calcul de l'erreur en dissipation et propriétés	65
3.4	Résultats numériques	66

4	Bilan	70
---	-----------------	----

1 Les problèmes de viscoélasticité linéaire

1.1 Qu'est-ce que la viscoélasticité

1.1.1 Mécanisme physique associé

D'un point de vue physique, on dit d'un matériau qu'il est viscoélastique lorsqu'il présente, outre un caractère élastique, un caractère visqueux provoquant une évolution mécanique du matériau dépendant du temps. Le double caractère élastique et visqueux peut être associé à une interprétation énergétique :

- l'élasticité est associée à l'énergie emmagasinée par le corps. Il s'agit de son aptitude à retrouver une partie de sa forme initiale après avoir été déformé ;
- la viscosité est associée quant à elle à l'énergie dissipée (sous forme de chaleur) par le matériau après sollicitation. Elle représente la faculté du corps à s'écouler de façon irréversible.

Le matériau viscoélastique se retrouve donc dans un état intermédiaire entre le solide de Hooke (purement élastique) et le liquide de Newton (purement visqueux). Il peut être différencié du modèle élastoviscoplastique par le fait que la présence d'écoulement anélastique n'est pas liée à un seuil (le comportement peut ainsi rester linéaire).

La viscosité permet d'observer expérimentalement différents phénomènes :

- du fluage pour une sollicitation à contrainte constante σ_0 ;
- de la relaxation pour une sollicitation à déformation constante ϵ_0 ;
- de l'hystérésis pour une sollicitation cyclique.

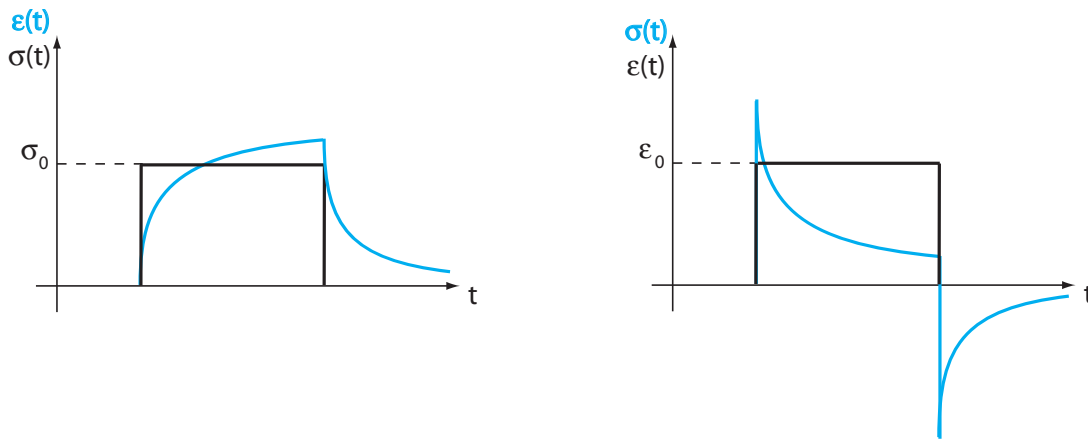


Figure 2.1: Essais de fluage (gauche) et de relaxation (droite)

En pratique, on retrouve un comportement viscoélastique dans les polymères réticulés à haute température, dans l'industrie alimentaire (gels, pâtes) ou la biomécanique (salive, collagène). La viscosité est liée aux mouvements des chaînes de polymère au sein du

matériau, qui se réarrangent au cours de la déformation. Elle est fortement dépendante de la température, dépendance traduite par l'indice de viscosité (d'autant plus grand que la dépendance est faible). Elle dépend dans une moindre mesure de la pression, pour les gaz.

Lorsque le comportement du matériau respecte le principe de superposition, on parle de viscoélasticité linéaire. C'est généralement le cas lorsque le matériau est soumis à des sollicitations de faible amplitude. Le domaine de la viscoélasticité non linéaire est quant à lui celui des matériaux fortement sollicités.

Pour rendre compte de la viscosité d'un matériau, on définit sa viscosité dynamique η exprimée en $Pa.s$ (ou Poiseuille = 10 Poises) et déterminée par exemple par l'expérience classique d'écoulement entre deux plaques. On définit aussi une viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ exprimée en m^2/s . Quelques valeurs de viscosité dynamique sont données dans le Tableau 2.1 à la température $T = 20^\circ C$ et à une pression $P = 1$ bar.

matériau	$\eta(Pa.s)$
air	$18,5 \cdot 10^{-6}$
eau	10^{-3}
huile	1
miel	10
gels	100 – 1000
résines	10^5
bitume	10^8
granit	10^{20}

Tableau 2.1: Valeur de la viscosité dynamique pour quelques matériaux

1.1.2 Approche théorique de la viscoélasticité

1.1.2.1 Formulation fonctionnelle du comportement La théorie de la viscoélasticité, remontant au 19ème siècle, associe une relation de comportement entre la contrainte σ et la déformation ϵ . Celle-ci s'écrit sous la forme générale :

$$\sigma_{ij} + \sum_{l=1}^{n_1} \mathbf{A}_{ijkh}^{(l)} \frac{\partial^l \sigma_{kh}}{\partial t^l} = \sum_{l=0}^{n_2} \mathbf{a}_{ijkh}^{(l)} \frac{\partial^l \epsilon_{kh}}{\partial t^l}$$

où les opérateurs $\mathbf{A}^{(l)}$ et $\mathbf{a}^{(l)}$ sont des tenseurs d'ordre 4 à identifier. Cette expression se résume cependant bien souvent à :

$$\sigma_{ij} + \mathbf{A}_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} = \mathbf{a}_{ijkh}^{(0)} \epsilon_{kh} + \mathbf{a}_{ijkh}^{(1)} \dot{\epsilon}_{kh}$$

et une classification des modèles de viscoélasticité peut être menée en fonction des valeurs des tenseurs \mathbf{A} , $\mathbf{a}^{(0)}$ et $\mathbf{a}^{(1)}$ (cf. Section 1.1.3). Ces tenseurs déterminent d'autre part le caractère linéaire ou non de la viscoélasticité.

En général, une représentation fonctionnelle du comportement entre ϵ et σ est possible en utilisant le produit de convolution.

On peut écrire d'une part :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t-s)\dot{\epsilon}(s)ds = \mathbf{G}(t) * \dot{\epsilon}(t) \quad \text{avec } \mathbf{G}(t) : \text{tenseur de relaxation}$$

Cette écriture est adaptée à l'expérience de relaxation (passage instantané de 0 à ϵ_0 pour la déformation : $\dot{\epsilon} = \delta\epsilon_0$) et à celle d'effacement (passage instantané de ϵ_0 à 0 pour la déformation).

On a d'autre part :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t-s)\dot{\sigma}(s)ds = \mathbf{J}(t) * \dot{\sigma}(t) \quad \text{avec } \mathbf{J}(t) : \text{tenseur de fluage}$$

Cette écriture est adaptée à l'expérience de fluage (passage instantané de 0 à σ_0 pour la contrainte : $\dot{\sigma} = \delta\sigma_0$) et à celle de recouvrance (passage instantané de σ_0 à 0 pour la contrainte).

1.1.2.2 Notion de mémoire Dans les cas particuliers du fluide visqueux et de l'élasticité, le tenseur des contraintes σ est directement relié, sous forme d'une fonction simple et non d'une véritable fonctionnelle, au tenseur de déformation ϵ ; cela vient du caractère très sélectif de la mémoire de ces milieux; elle est infiniment courte pour les fluides car la contrainte ne dépend que de la vitesse de déformation à l'instant considéré; elle est excessive pour les matériaux élastiques qui se souviennent d'un état privilégié initial.

Les matériaux viscoélastiques sont au contraire généralement doués d'une mémoire continue, l'état des contraintes à l'instant t dépendant de l'histoire des déformations subies par le matériau.

- Lorsque $\mathbf{A}_{ijkl} = 0$, le milieu est dit à mémoire courte. Les coefficients \mathbf{a}_{ijkh}^0 et \mathbf{a}_{ijkh}^1 jouent respectivement le rôle de coefficients d'élasticité et de viscosité.

- Pour les matériaux à mémoire longue, la loi de comportement peut s'écrire encore :

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbf{a}_{ijkh}\epsilon_{kh}(t) + \int_0^t \mathbf{b}_{ijkh}(t-s)\epsilon_{kh}(s)ds$$

et l'état des contraintes à l'instant t dépend de la déformation à l'instant t mais aussi des déformations aux instants antérieurs. Le premier terme du second membre représente un effet élastique instantané. Les coefficients \mathbf{b}_{ijkh} rendent compte quant à eux des effets de mémoire du matériau; ils s'écrivent souvent à l'aide d'exponentielles à exposants négatifs, traduisant la décroissance plus ou moins rapide de la mémoire avec la progression dans le

temps.

Une liste non-exhaustive des modèles de viscoélasticité généralement rencontrés est donnée dans la section suivante.

1.1.3 Différents modèles de viscoélasticité

Des modèles viscoélastiques ont été très tôt proposés ; au départ empiriques, ils se sont vite basés sur la rhéologie du système et ont permis de faire de nettes avancées dans la théorie de la viscoélasticité [Shapery 1969, Ferry 1970, Lemaître et Chaboche 1994]. Ces modèles à une dimension sont généralement constitués à partir de deux éléments linéaires de base :

- le ressort (de raideur E) représentatif des solides de Hooke ;
- l'amortisseur (de viscosité η) représentatif des fluides de Newton.

1.1.3.1 Modèle de Kelvin-Voigt C'est un modèle à mémoire courte constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (Figure 2.2) ; il est donc régi par l'équation différentielle :

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$$

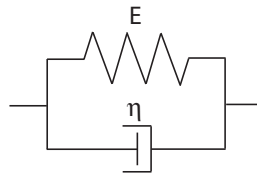


Figure 2.2: Le modèle de Kelvin-Voigt

C'est le modèle le plus simple de solide viscoélastique. Il permet de reproduire l'élasticité retardée, mais pas l'élasticité instantanée, et la réversibilité de ce modèle n'intervient qu'après un temps infini. Sa réponse au test de fluage est en notant $\tau = \frac{\eta}{E}$:

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Ce modèle s'applique pour les polymères organiques, le caoutchouc ou le bois (si la sollicitation n'est pas trop élevée).

1.1.3.2 Modèle de Maxwell Ce modèle à mémoire longue est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série (Figure 2.3) ; il est donc régi par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma = \dot{\epsilon}$$



Figure 2.3: Le modèle de Maxwell

C'est un modèle simple de fluide viscoélastique, car il y a écoulement pour toute valeur de contrainte σ . Il permet de reproduire l'élasticité instantanée mais pas l'élasticité retardée. Sa réponse au test de relaxation est :

$$\sigma(t) = G(t)\epsilon_0 \quad \text{avec } G(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ce modèle s'applique pour les solides mous : polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion, béton frais en négligeant son vieillissement, nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

1.1.3.3 Modèles généralisés Ils sont construits à partir d'un groupement quelconque d'éléments de type ressort ou amortisseur et conduisent à une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\sigma + \sum_{l=1}^{N_1} a_l \frac{\partial^l \sigma}{\partial t^l} = E\epsilon + \sum_{l=1}^{N_2} b_l \frac{\partial^l \epsilon}{\partial t^l}$$

Citons les deux principales classes de modèles généralisés :

- le *modèle de Maxwell généralisé* (Figure 2.4) qui met en parallèle des ensembles de Maxwell.

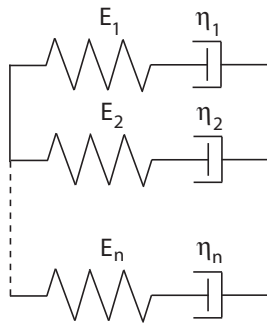


Figure 2.4: Le modèle de Maxwell généralisé

Pour ce modèle, on a pour fonction de relaxation (en notant $\tau_k = \frac{\eta_k}{E_k}$) :

$$G(t) = \sum_{k=1}^n E_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} \geq 0$$

Ce modèle est aussi appelé modèle exponentiel simple.

- le *modèle de Kelvin-Voigt généralisé* (Figure 2.5) qui met en série des ensembles de Kelvin-Voigt.

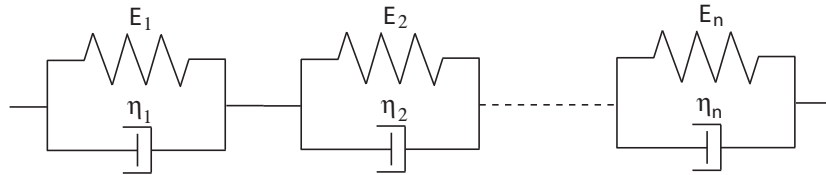


Figure 2.5: Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Pour ce modèle, on a pour fonction de fluage (en notant $\tau_k = \frac{\eta_k}{E_k}$) :

$$J(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_k} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}})$$

Remarque : Pour le calcul des structures, il est pratique d'avoir des modèles de viscoélasticité capables de prendre en compte à la fois l'élasticité instantanée (déformation élastique initiale) et l'élasticité différée (comportement asymptotique élastique). On utilise donc souvent des modèles généralisés particuliers appelés modèles de Zener (Figure 2.6).

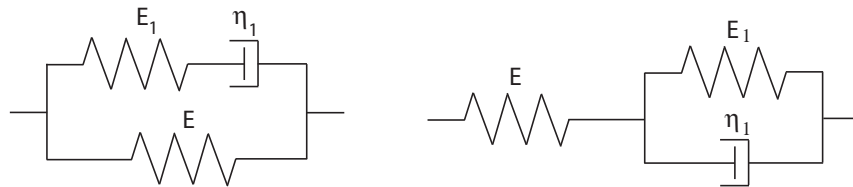


Figure 2.6: Les modèles de Zener

1.1.3.4 Autres modèles D'autres modèles viscoélastiques existent. On peut citer par exemple :

- le modèle de Kohlraush, Williams et Watt (modèle KWW) dont la fonction de relaxation est de la forme $G(t) = e^{-(\frac{t}{\tau})^b}$ avec $0 \leq b \leq 1$;

- les modèles avec dépendance en temps des coefficients ;

- les modèles fractionnaires dans lesquels l'amortisseur « classique » est remplacé par un système dont le comportement est donné par :

$$\sigma(t) = bD^\alpha \epsilon(t) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

où D^α est une dérivée, par rapport au temps, d'ordre fractionnaire. C'est en d'autres termes une dérivée non entière définie par :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

Enfin, bien que les modèles linéaires soient suffisants pour représenter la plupart des comportements de viscoélasticité rencontrés, on peut aussi construire des modèles non linéaires de la forme $\sigma = \eta(\dot{\epsilon}^p)^{1/n}$.

1.1.3.5 Choix d'un modèle Le choix d'un modèle de viscoélasticité est souvent fait à partir de résultats d'expériences. J'y ai été confronté au cours d'une collaboration avec une équipe du laboratoire ICES d'Austin (Texas, USA) dans laquelle on cherchait à définir un modèle viscoélastique pour rendre compte des phénomènes vibratoires dans les câbles de bateaux servant à sonder les fonds marins. Partant d'un modèle très simple, on l'a transformé en un modèle généralisé afin d'aboutir, après identification des coefficients, à une modélisation de la propagation d'ondes dans la structure cohérente avec celle observée expérimentalement (amplitude, phase, fréquence).

1.2 Formulation de la viscoélasticité par variables internes

Dans toute cette partie et les chapitres qui suivent, on se focalise sur le modèle de Maxwell généralisé, constitué par n ensembles {ressort+amortisseur} en parallèle et représenté sur la Figure 2.4. On introduit ici une description du comportement de ce modèle à l'aide de variables internes ; cette description, initiée dans [Moreau 1966 - 1974, Halphen et Nguyen 1975], est celle que nous adopterons dans toute la suite de ce document. Pour cela, on utilise la Thermodynamique des Milieux Continus (TMC) qui dégage un cadre conceptuel pour ordonner les lois de comportement et apporter des restrictions fonctionnelles sur les lois constitutives postulées. Nous faisons les hypothèses classiques de l'état local, des petites perturbations (HPP) et d'un régime isotherme. L'inégalité de Clausius-Duhem, qui découle des équations du premier principe (conservation de l'énergie) et du second principe (principe d'évolution), s'écrit alors :

$$d = \text{Tr}[\sigma \dot{\epsilon}] + \rho \left(T \frac{ds_v}{dt} - \frac{de_v}{dt} \right) \geq 0$$

avec

d : dissipation intrinsèque

σ : tenseur des contraintes de Cauchy

ϵ : tenseur des déformations linéarisées

e_v : densité d'énergie interne

s_v : densité d'entropie

Elle est souvent écrite, en mécanique des solides, en utilisant l'énergie libre de Helmholtz (ou énergie de déformation) telle que :

$$\psi = e_v - T s_v$$

On doit alors respecter l'inégalité :

$$\text{Tr}[\sigma \dot{\epsilon}] - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.1)$$

1.2.1 Choix des variables

Les variables décrivant l'état d'un matériau sont d'une part la variable observable $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})$ et d'autre part les variables internes nécessaires pour décrire les comportements dissipatifs. Le choix des variables internes n'est pas unique ; dans notre cas, on choisit comme variables internes les parties élastique ϵ_i^e et anélastique ϵ_i^p de la déformation totale ϵ , qui réalisent dans chaque ensemble $i \in \{1, n\}$ une partition de ϵ (Figure 2.7).

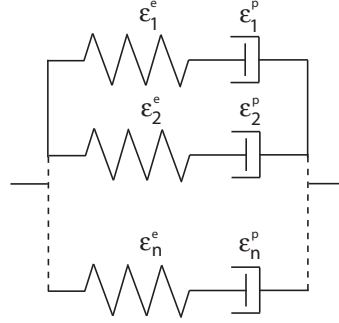


Figure 2.7: Variables internes du modèle de Maxwell généralisé.

On a donc :

$$\epsilon_i^e + \epsilon_i^p = \epsilon \quad \forall i \in \{1, n\}$$

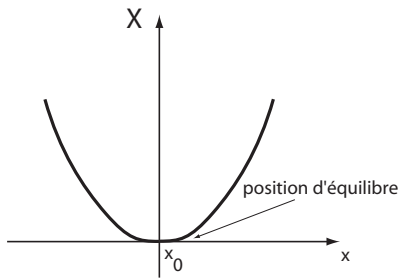
et on adopte la notation synthétique des variables généralisées, représentées par les n-vecteurs :

$$e^e = \begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ \vdots \\ \epsilon_n^e \end{bmatrix} \quad e^p = \begin{bmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_2^p \\ \vdots \\ \epsilon_n^p \end{bmatrix} \quad e = e^e + e^p$$

Remarque : Contrairement aux modèles elastoplastiques, on ne peut pas réellement parler d'une déformation élastique et anélastique dans les modèles généraux de viscoélasticité. Certains d'entre eux privilégient même une partition autre que celle sur la déformation.

1.2.2 Les lois d'état

Dans le contexte général de la TMC et sous l'hypothèse des petites perturbations, on postule l'existence d'un potentiel X , dépendant des variables d'état, qui permet de donner le sens d'évolution spontanée possible d'un système à partir d'un état donné :



$dX < 0$ pour une évolution spontanée
 $dX = 0$ à l'équilibre

On peut travailler d'une manière équivalente avec différents potentiels, mais on choisit ici l'énergie libre spécifique ψ i.e. l'énergie de déformation élastique définie par :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\epsilon_i^e \mathbf{K}_i \epsilon_i^e]$$

avec \mathbf{K}_i : tenseur symétrique linéaire de Hooke associé au ressort i .

L'inégalité de Clausius-Duhem (2.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\sigma \dot{\epsilon}] - \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\sigma_i \dot{\epsilon}_i^e] &\geq 0 \quad \text{avec } \sigma_i = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \epsilon_i^e} \\ \text{soit } \text{Tr} \left[\left(\sigma - \sum_{i=1}^n \sigma_i \right) \dot{\epsilon} \right] + \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\sigma_i \dot{\epsilon}_i^p] &\geq 0 \end{aligned}$$

Les variables σ_i sont les variables associées aux variables internes ϵ_i^e ($i \in \{1, n\}$). En considérant une transformation réversible ne modifiant pas les déformations anélastiques ϵ_i^p , on aboutit à l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma$$

Au final, on a donc les relations :

$$\sigma_i = \mathbf{K}_i \epsilon_i^e \quad \forall i \in \{1, n\} \quad ; \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma$$

Ces relations, liées au caractère élastique du matériau, constituent les **lois d'état**.

En définissant la variable généralisée :

$$s = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \cdot \\ \sigma_n \end{bmatrix}$$

les lois d'état s'écrivent sous la forme synthétique :

$$e^e = \mathbf{\Lambda}(s) \quad ; \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma$$

où l'opérateur linéaire $\mathbf{\Lambda}$ est défini à partir des tenseurs \mathbf{K}_i . On obtient ainsi une formulation normale [Ladevèze 1989].

1.2.3 Les équations d'évolution

Avec ce qui a été vu dans la partie précédente, on doit à présent vérifier :

$$\sum_{i=1}^n \text{Tr}[\sigma_i \dot{\epsilon}_i^p] = s \cdot \dot{e}^p \geq 0 \quad (2.2)$$

Cette inégalité traduit que la dissipation intrinsèque $d = s \cdot \dot{e}^p$, généralement dissipée sous forme de chaleur, est positive (second principe).

Pour décrire les processus dissipatifs i.e. l'évolution de la variable généralisée e^p , il faut un formalisme supplémentaire. C'est l'objet du potentiel de dissipation $\varphi(\dot{e}^p)$ utilisé dans le cadre des matériaux standards tels que ceux que nous considérons [Moreau 1974, Halphen et Nguyen 1975, Lemaître et Chaboche 1994, Ladevèze 1999]. φ est une fonction telle que :

$$\varphi \text{ convexe} \quad \varphi \geq 0 \quad \varphi(0) = 0$$

Elle a pour fonction duale (au sens de la transformée de Legendre-Fenchel) la fonction convexe φ^* telle que :

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathcal{E}} (x \cdot y - \varphi(x)) \quad \forall y \in \mathcal{F}$$

On vérifie alors (2.2) en prenant, pour $i \in \{1, n\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_i^p} \\ \dot{\epsilon}_i^p &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma_i} \end{aligned}$$

Dans notre cas, on choisit des pseudo-potentiels de dissipation de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\sigma_i \mathbf{B}_i \sigma_i] = \frac{1}{2} s \cdot \mathbf{B}(s) \\ \varphi(\dot{e}^p) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr}[\dot{\epsilon}_i^p \mathbf{B}_i^{-1} \dot{\epsilon}_i^p] = \frac{1}{2} \dot{e}^p \cdot \mathbf{B}^{-1}(\dot{e}^p) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où les \mathbf{B}_i sont des opérateurs symétriques, linéaires et définis positifs tandis que \mathbf{B} est un opérateur défini à partir des \mathbf{B}_i . On obtient alors les **équations d'évolution** :

$$\dot{\epsilon}_i^p = \mathbf{B}_i \sigma_i \quad \forall i \in \{1, n\} \quad \implies \quad \dot{e}^p = \mathbf{B}(s)$$

1.2.4 Quelques remarques

1.2.4.1 Remarque 1 Revenons plus en détail sur l'expression des tenseurs \mathbf{K}_i et \mathbf{B}_i , en nous plaçant dans le cas isotrope 3D.

Pour décrire le comportement élastique linéaire définissant les tenseurs de Hooke \mathbf{K}_i , on a besoin de deux coefficients indépendants E_i et ν_i (correspondant respectivement au module de Young et au coefficient de Poisson). On définit alors de façon classique la relation :

$$\epsilon_i^e = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \sigma_i - \frac{\nu_i}{E_i} \text{Tr}[\sigma_i] \mathbf{I}$$

De la même façon, on a besoin de deux coefficients $\tau_{1,i}$ et $\tau_{2,i}$ caractéristiques de la viscosité pour décrire les tenseurs \mathbf{B}_i . On obtient alors le comportement :

$$\dot{\epsilon}_i^p = \frac{1 + \nu_i}{E_i \tau_{1,i}} \sigma_i - \frac{\nu_i}{E_i \tau_{2,i}} \text{Tr}[\sigma_i] \mathbf{I}$$

Les temps caractéristiques $\tau_{1,i}$ et $\tau_{2,i}$, qui correspondent respectivement au temps de relaxation de cisaillement et au temps de dilatation uniforme, sont identifiés avec des essais unidimensionnels de traction et de cisaillement.

Dans toute la suite, on considérera que $\tau_{1,i} = \tau_{2,i} = \tau_i$; cela revient à prendre :

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{\tau_i} \mathbf{K}_i^{-1}$$

L'extension au cas $\tau_{1,i} \neq \tau_{2,i}$ ne pose cependant aucune difficulté de traitement.

1.2.4.2 Remarque 2 Nous avons développé la formulation par variables internes pour le modèle de Maxwell généralisé, car c'est celui auquel nous nous intéressons dans la suite. On obtient de ce fait une partition de la déformation de la forme :

$$\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^p = \mathbf{\Lambda}(\dot{s}) + \mathbf{B}(s)$$

Si on considère au contraire le cas du modèle de Kelvin-Voigt généralisé, on obtient une partition différente i.e. une partition de la contrainte de la forme :

$$s = s^e + s^p = \mathbf{\Lambda}^*(e) + \mathbf{B}^*(\dot{e})$$

Là encore, cette formulation ne remet pas en cause la méthode que nous allons développer par la suite.

2 Le problème de référence

On considère un domaine Ω représentant une structure, de frontière $\partial\Omega$ (Figure 2.8). En se plaçant en HPP, avec un régime quasi-statique et isotherme, on cherche la réponse de cette structure soumise sur l'intervalle de temps d'étude $[0, T]$ à diverses sollicitations mécaniques imposées : une force de volume $\underline{f}_d(t)$ dans Ω ; un déplacement $\underline{U}_d(t)$ sur une partie $\partial_1\Omega \neq \emptyset$ de la frontière $\partial\Omega$; une densité surfacique d'effort $\underline{F}_d(t)$ sur la partie de $\partial\Omega$ complémentaire de $\partial_1\Omega$, telle que $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$ et $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$.

Nous faisons de plus les hypothèses peu restrictives que le chargement $(\underline{f}_d, \underline{U}_d, \underline{F}_d)$ est nul à $t = 0$ et que son évolution en temps est linéaire par morceaux. De ce fait, toute quantité physique définissant l'état du matériau est initialement nulle.

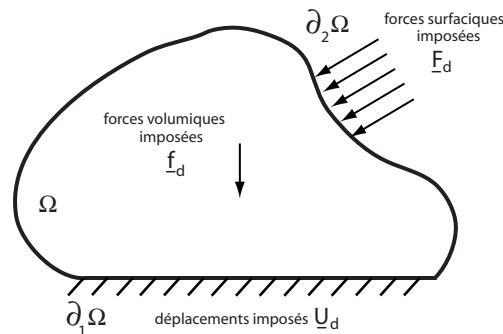


Figure 2.8: Représentation de la structure et de son environnement

Le matériau choisi obéit au modèle de comportement de Maxwell généralisé étudié dans la Section 1.2 ; ce modèle a une formulation normale standard classique.

2.1 Écriture du problème

Le problème de référence s'écrit, en utilisant la notation par variables généralisées introduite dans la Section 1.2 :

Trouver la solution (e, s) qui vérifie :

- les liaisons cinématiques : e est Cinématiquement Admissible (e CA)

$$\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0,T]}; \quad \underline{u}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d(t) \quad \forall t \in [0, T]; \quad e = e^e + e^p \quad (2.4)$$

- les équations d'équilibre : s est Statiquement Admissible (s SA)

$$\sigma \in \mathcal{S}^{[0,T]}; \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d(t) \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d(t) \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.5)$$

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T]$$

- les relations de comportement :

$$e^e = \mathbf{A}(s); \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma \quad (\text{lois d'état}) \quad (2.6)$$

$$\dot{e}^p = \mathbf{B}(s) \quad (\text{équations d'évolution}) \quad (2.7)$$

- les conditions initiales :

$$e^p|_{t=0} = 0 \quad (2.8)$$

Les espaces $\mathcal{U}^{[0,T]}$ et $\mathcal{S}^{[0,T]}$, définis sur $\Omega \times [0, T]$, sont choisis de façon à garder des solutions à énergie finie [Duvaut et Lions 1976]. \mathcal{U}_0 est l'espace des déplacements imposés nuls.

On rappelle que les opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont constants, symétriques, linéaires et définis positifs.

La solution exacte de ce problème est notée (e_{ex}, s_{ex}) . Son unicité est assurée par la monotonie des opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} qui permet de vérifier la condition de stabilité de Drucker au sens strict [Ladevèze 1999].

2.2 Résolution numérique du problème

Le calcul de la solution exacte du problème de référence étant généralement hors d'atteinte, on recherche une solution approchée par les techniques classiques i.e. par la MEF associée à un schéma incrémental en temps.

Bien que des schémas temporels plus évolués existent (schéma de Gear par exemple), nous prenons ici le schéma simple d'Euler (implicite ou explicite), après avoir divisé l'intervalle d'étude $[0, T]$ en N pas de temps $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, N - 1$).

Schéma d'Euler explicite

$$\frac{e_{k+1}^p - e_k^p}{\Delta t} = \mathbf{B}(s_k) \implies s_{k+1} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \left(e_{k+1} - \Delta t \mathbf{B}(s_k) - e_k^p \right)$$

Schéma d'Euler implicite

$$\frac{e_{k+1}^p - e_k^p}{\Delta t} = \mathbf{B}(s_{k+1}) \implies s_{k+1} = \left[\mathbf{\Lambda} + \Delta t \mathbf{B} \right]^{-1} \left(e_{k+1} - e_k^p \right)$$

Pour la discrétisation spatiale, on travaille sur la formulation variationnelle en déplacement. Le domaine Ω est décomposé en éléments et le déplacement est interpolé par les fonctions de forme classiques. Le champ de déplacement se met alors sous la forme :

$$\underline{U}_h(\underline{M}) = \mathbf{N}(\underline{M})\mathbf{q}(t)$$

et on aboutit à un système à résoudre à chaque piquet de temps k pour trouver le vecteur inconnu \mathbf{q}_k . Il faut noter que le problème restant linéaire, il n'y a pas d'itération sur chaque pas de temps.

Au final, on obtient à chaque piquet de temps t_k une solution approchée discrète notée $(e_{h,k}, s_{h,k})$. Elle peut être interpolée linéairement pour donner une solution approchée (e_h, s_h) sur $[0, T]$.

Remarque : Le calcul de la solution d'un problème de viscoélasticité linéaire peut se ramener, dans le cas où le type de conditions limites sur la frontière $\partial\Omega$ ne varie pas au cours du temps, à la résolution d'un problème d'élasticité classique. Ceci est rendu possible grâce au calcul symbolique, en utilisant par exemple la transformée de Laplace-Carson qui transforme le produit de convolution intervenant dans la formulation fonctionnelle du comportement en un produit ordinaire. Néanmoins, nous ne nous plaçons pas dans ce cadre et gardons une résolution incrémentale en temps classique.

2.3 Exemples

Nous considérons le problème 1D présenté sur la Figure 2.9. La structure est une poutre soumise à des sollicitations de traction i.e. une densité linéique de force $f_d(t)$ le long de la poutre et une force $F_d(t)$ en bout de poutre.

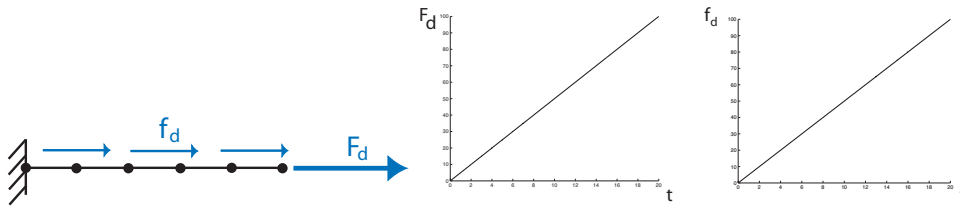
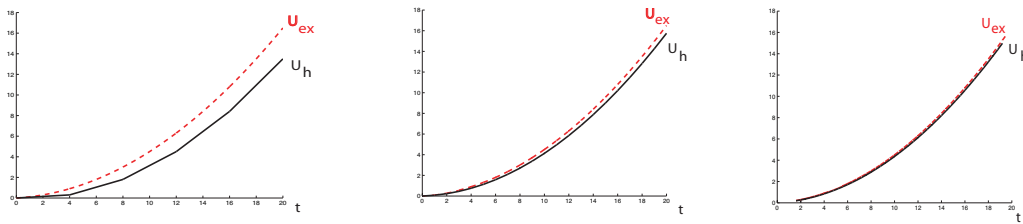
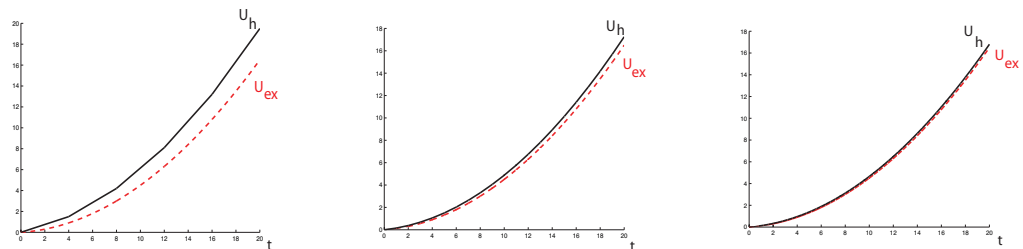


Figure 2.9: Poutre étudiée et évolution de son chargement avec le temps

Le modèle rhéologique du matériau utilisé est constitué d'un seul ensemble de Maxwell {ressort+amortisseur}; nous avons donc un modèle de Maxwell simple. Pour ce qui est des paramètres de calcul, ils sont référencés dans l'Annexe D.

On trace ci-dessous l'évolution temporelle du déplacement exact (connu analytiquement) et du déplacement approché en bout de poutre, en fonction du schéma temporel choisi et du nombre N_p de pas de temps utilisés.

Figure 2.10: Déplacement obtenu avec un schéma explicite, avec $N_p = 5$, $N_p = 20$ et $N_p = 50$ Figure 2.11: Déplacement obtenu avec un schéma implicite, avec $N_p = 5$, $N_p = 20$ et $N_p = 50$

Néanmoins, dans ce cas précis, on observe que la dissipation obtenue numériquement ne dépend pas du schéma temporel utilisé.

Considérons maintenant la même poutre mais avec pour seule sollicitation un déplacement imposé (Figure 2.12).

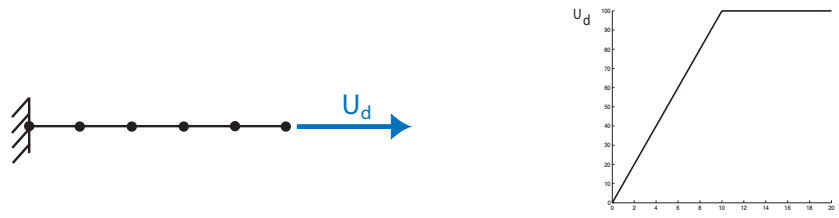


Figure 2.12: Nouveau chargement sur la poutre

Dans ce cas typique de relaxation (Figure 2.13) la dissipation globale :

$$D = \int_0^T \int_{\Omega} d \, d\Omega dt$$

donnée par le schéma explicite est plus grande que celle donnée par le schéma implicite :

$$D^{exp} = 4,83 \cdot 10^4$$

$$D^{imp} = 4,28 \cdot 10^4$$

alors que la dissipation exacte est $D^{exa} = 4,51 \cdot 10^4$.

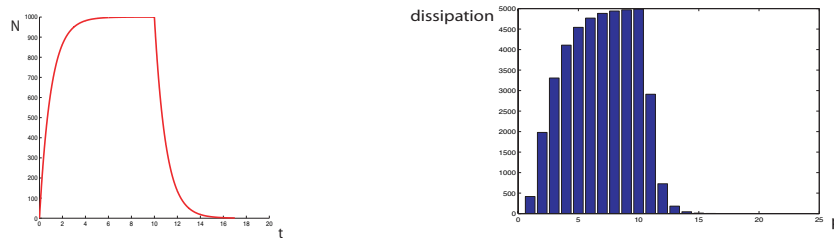


Figure 2.13: Évolution temporelle de l'effort N dans la poutre (gauche) et dissipation à chaque pas de temps (droite)

On conservera par la suite un schéma implicite.

3 Mise en œuvre de l'erreur en dissipation pour le problème de référence

Dans cette partie, on applique la notion d'erreur en dissipation présentée dans la Section 2.2.2 du Chapitre 1.

3.1 Écriture de l'erreur en dissipation

Nous repartons de l'expression de base de l'erreur en dissipation appliquée à une solution admissible $(\hat{e}, \hat{s}) \in \mathcal{E}^{ad} \times \mathcal{F}^{ad}$:

$$e_{diss}^2(\dot{e}^p, \hat{s}) = \int_0^T \int_{\Omega} [\varphi(\dot{e}^p) + \varphi^*(\hat{s}) - \hat{s} \cdot \dot{e}^p] d\Omega dt$$

En utilisant l'expression des pseudo-potentiels de dissipation donnée dans (2.3), on aboutit à :

$$e_{diss}^2(\dot{e}^p, \hat{s}) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \|\dot{e}_i^p - \mathbf{B}_i \hat{\sigma}_i\|_{\mathbf{B}_i^{-1}, \Omega}^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T \|\dot{e}^p - \mathbf{B}(\hat{s})\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}^2 dt$$

où $\|\bullet\|_{\mathbf{B}_i^{-1}, \Omega}$ et $\|\bullet\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}$ sont des normes spatiales définies par :

$$\begin{aligned} \|\bullet\|_{\mathbf{B}_i^{-1}, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\bullet \mathbf{B}_i^{-1}(\bullet)] d\Omega \\ \|\bullet\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} \bullet \cdot \mathbf{B}^{-1}(\bullet) d\Omega \end{aligned}$$

L'erreur en dissipation correspond donc à une norme spatio-temporelle de l'erreur sur les équations d'évolution (2.7).

3.2 Construction des champs admissibles

Nous rappelons que dans le cadre de l'erreur en dissipation, une solution admissible (\hat{e}, \hat{s}) doit vérifier les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.8) du problème de référence. Les seules équations qui ne sont pas vérifiées sont donc les lois d'évolution (2.7) liées aux aspects dissipatifs.

La construction d'une solution approchée admissible (\hat{e}_h, \hat{s}_h) suit la méthode générale donnée dans [Ladevèze et Pelle 2004]. Elle est menée à partir de la solution éléments finis (e_h, s_h) calculée dans la Section 2.2 et généralement non admissible.

À chaque piquet de temps t_k :

- on prend $\hat{e}_{h,k} = e_{h,k}$ car la résolution approchée du problème de référence étant menée avec la MEF en déplacement, le champ $u_{h,k}$ est CA. La détermination de $\hat{e}_{h,k}$ nécessite cependant l'utilisation d'une technique plus élaborée lorsqu'on travaille sous l'hypothèse

d'incompressibilité [Ladevèze *et al.* 1992] ;

- on construit un champ de contrainte $\hat{\sigma}_{h,k}$ SA i.e. en équilibre avec les forces extérieures en utilisant les techniques développées au LMT-Cachan [Ladevèze et Rougeot 1997, Ladevèze et Pelle 2004] et présentées dans la Section 2.1.3 du Chapitre 1. Ces techniques utilisent les propriétés du champ éléments finis $\sigma_{h,k}$ et nécessitent la résolution de problèmes locaux définis sur chaque élément du maillage ;

- on choisit parmi l'ensemble des champs admissibles $\hat{s}_{h,k}$ (et $\hat{e}_{h,k}^e = \mathbf{\Lambda}(\hat{s}_{h,k})$) celui qui minimise l'erreur en dissipation. Ayant construit $\hat{s}_{h,k-1}$ au piquet de temps précédent t_{k-1} , on construit $\hat{s}_{h,k}$ de façon à minimiser la contribution de l'erreur en dissipation sur $[t_{k-1}, t_k]$. En pratique, cela revient à résoudre des problèmes locaux de minimisation sous contraintes (voir la remarque ci-après) ;

- la quantité $\hat{e}_{h,k}^p$ est alors obtenue par la relation :

$$\hat{e}_{h,k}^p = \hat{e}_{h,k} - \mathbf{\Lambda}(\hat{s}_{h,k})$$

Entre les piquets de temps, on fait une interpolation linéaire des solutions admissibles calculées aux piquets de temps. Cette interpolation est valable car le chargement évolue également de façon linéaire entre les piquets de temps.

Par conséquent, on obtient une solution admissible (\hat{e}_h, \hat{s}_h) sur $[0, T]$; elle représente une autre approximation de la solution du problème de référence.

Remarque : La contribution de l'erreur en dissipation sur $[t_{k-1}, t_k]$ est :

$$\frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\hat{e}}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h)\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}^2 dt \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{\hat{s}}_h) - \mathbf{B}(\hat{s}_h)\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}^2 dt$$

Le comportement étant local en espace, la minimisation de cette contribution peut se faire en chaque point de Gauss. Le problème de minimisation à résoudre pour calculer $\hat{s}_{h,k}$ s'écrit donc :

Trouver $\hat{s}_{h,k}$ minimisant la fonctionnelle :

$$\frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{\hat{s}}_h) - \mathbf{B}(\hat{s}_h)|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 dt \quad \left(|\bullet|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 = \bullet \cdot \mathbf{B}^{-1}(\bullet) \right)$$

$$\text{avec } \hat{s}_h = \hat{s}_{h,k-1} \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} + \hat{s}_{h,k} \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_{i_{h,k}} = \hat{\sigma}_{h,k}$$

Cette minimisation sous contrainte conduit à une définition analytique de $\hat{s}_{h,k}$.

3.3 Calcul de l'erreur en dissipation et propriétés

3.3.1 Calcul

À partir de la solution admissible (\hat{e}_h, \hat{s}_h) calculée, on peut mesurer l'erreur en dissipation à l'instant t :

$$\eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) = \frac{1}{2} \|\dot{e}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h)\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega|t}^2$$

et l'erreur en dissipation totale :

$$e_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) = \int_0^T \eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) dt$$

3.3.2 Propriétés

Un résultat prouvé dans [Ladevèze 1999] lie l'erreur en dissipation calculée à l'instant t avec une erreur en solution faisant intervenir la solution exacte (e_{ex}, s_{ex}) du problème de référence. Ce résultat s'écrit :

$$\Phi_{|t}(\dot{e}_{ex}^p - \dot{e}_h^p) + \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h) + \frac{d}{dt} E_F(s_{ex} - \hat{s}_h) = \eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) \quad (2.9)$$

avec :

$$E_F(s) = \int_{\Omega} \rho \psi d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s \cdot \mathbf{\Lambda}(s) d\Omega : \text{énergie libre globale de la structure}$$

$$\Phi(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi(\bullet) d\Omega \quad ; \quad \Phi^*(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi^*(\bullet) d\Omega$$

L'introduction de la quantité $\hat{s}_h^m = \frac{1}{2}(\hat{s}_h + \mathbf{B}^{-1}(\dot{e}_h^p))$ donne en outre :

$$\Phi_{|t}(\dot{e}_{ex}^p - \dot{e}_h^p) + \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h) = 2 \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) + \frac{1}{2} \eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h)$$

et en remplaçant dans la relation (2.9), on obtient la nouvelle égalité :

$$2 \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) + \frac{d}{dt} E_F(s_{ex} - \hat{s}_h) = \frac{1}{2} \eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) \quad (2.10)$$

L'intégration des relations (2.9) et (2.10) sur l'intervalle $[0, T]$ aboutit finalement aux relations fondamentales :

$$\int_0^T [\Phi_{|t}(\dot{e}_{ex}^p - \dot{e}_h^p) + \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h)] dt + E_F(s_{ex} - \hat{s}_h)|_T = e_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) \quad (2.11)$$

et

$$2 \int_0^T \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) dt + E_F(s_{ex} - \hat{s}_h)|_T = \frac{1}{2} e_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) \quad (2.12)$$

Ces relations, qui peuvent être vues comme une extension du théorème de l'hypercercle de Prager-Synge en élasticité, sont des points-clés pour la dérivation de bornes strictes dans la méthode d'estimation d'erreur locale présentée dans le Chapitre 3.

Remarque : On peut observer que les membres de gauche de (2.11) et (2.12), qui représentent une erreur en solution sur $[0, T]$, sont constitués de deux parties :

- une partie liée à l'élasticité, qui ne dépend que de l'état à l'instant final T ;
- une partie qui fait intervenir toute l'histoire du matériau.

3.4 Résultats numériques

3.4.1 Convergence de l'erreur en dissipation

Nous reprenons ici l'exemple de la poutre chargée en effort (Figure 2.9). Nous étudions la convergence de l'erreur en dissipation avec les paramètres de discrétisation (nombre d'éléments N_e et nombre de pas de temps N_p). Les maillages spatio-temporels utilisés sont uniformes, et le raffinement se fait à partir du maillage de base : $N_e = 5$, $N_p = 20$.

N_e	e_{diss}^2	N_p	e_{diss}^2
5	3,2278	20	3,2278
10	2,2653	40	1,7715
15	2,0870	60	1,5019
20	2,0247	80	1,4075
25	1,9958	100	1,3638
40	1,9706	200	1,3055
50	1,9573	300	1,2947
100	1,9477	400	1,2910

Tableau 2.2: Évolution de l'erreur en dissipation avec la discrétisation spatiale (gauche) et temporelle (droite)

La représentation graphique donne, en notant h la taille des éléments et Δt celle des pas de temps :

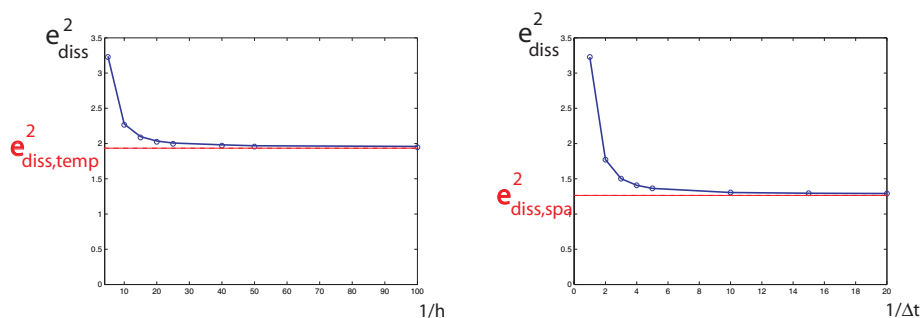


Figure 2.14: Convergence en espace (gauche) et en temps (droite) de l'erreur en dissipation.

On peut observer que l'erreur en dissipation dans chaque cas converge vers une valeur limite qui correspond respectivement à l'erreur en dissipation spatiale $e_{diss,spa}^2$ et temporelle $e_{diss,temp}^2$ (Figure 2.14). On peut alors écrire :

$$e_{diss}^2(h, \Delta t) = e_{diss,spa}^2(h) + e_{diss,temp}^2(\Delta t)$$

Remarque : Les valeurs de $e_{diss,spa}^2$ et $e_{diss,temp}^2$ peuvent être obtenues de façon précise, par exemple en prenant des éléments de degré 2 en espace ; dans ce cas, le problème 1D de référence est parfaitement résolu en espace donc $e_{diss,spa}^2 = 0$ et $e_{diss,temp}^2 = e_{diss}^2$. On obtient pour cet exemple :

$$\begin{aligned} e_{diss,spa}^2 &= 1,2834 \\ e_{diss,temp}^2 &= 1,9444 \end{aligned}$$

On peut d'autre part étudier la convergence de $e_{diss,spa}^2$ (resp. $e_{diss,temp}^2$) en fonction de h (resp. Δt). Les courbes de convergence obtenues sont reproduites sur la Figure 2.15 :

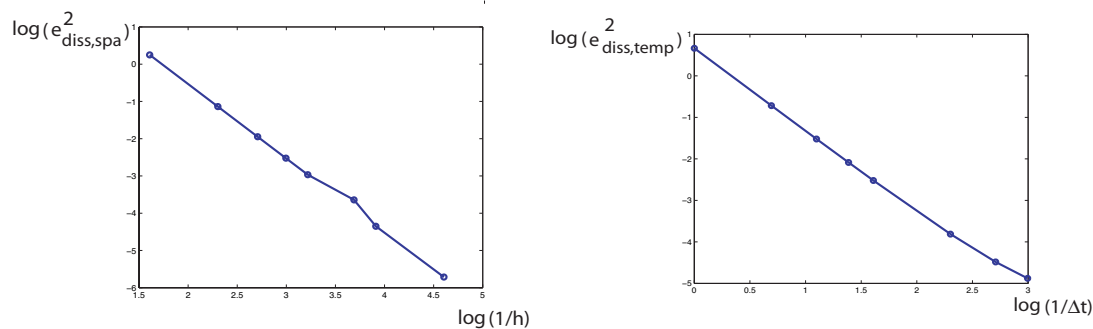


Figure 2.15: Convergence des contributions d'erreur en espace (gauche) et en temps (droite)

et on en déduit les formules de convergence :

$$e_{diss,spa}(h) = C_1 h^\alpha \quad e_{diss,temp}(\Delta t) = C_2 \Delta t^\beta$$

Numériquement, on obtient ici $\alpha = 0,99$ et $\beta = 0,94$.

3.4.2 Influence de la technique de construction des champs admissibles

On considère maintenant une structure 2D carrée, encastée à sa base et soumise à un déplacement tangentiel \underline{U}_d sur sa partie supérieure (Figure 2.16).

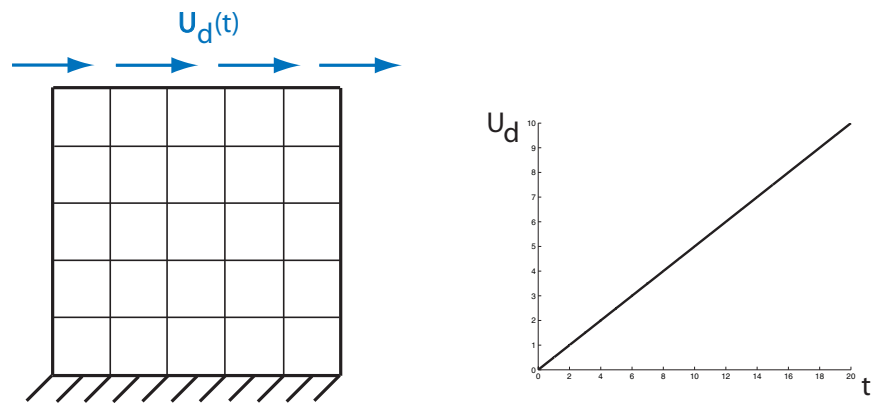


Figure 2.16: Structure 2D étudiée et son chargement

On observe l'influence de la construction du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}$ sur la valeur de l'erreur en dissipation e_{diss} .

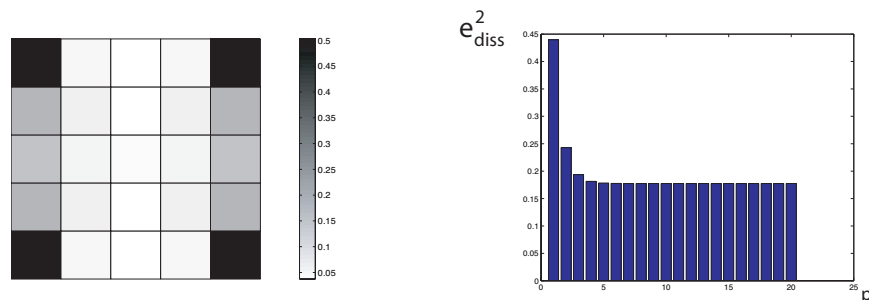


Figure 2.17: Répartition sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation e_{diss}^2

Une première construction possible consiste à utiliser les fonctions de contrainte ; elle donne un champ $\hat{\sigma}$ admissible au sens strict et de grande qualité. Dans ce cas, on construit

$\hat{\sigma}|_E$ sur chaque élément à partir d'une fonction polynomiale de degré q de la forme (en 2D) :

$$\Psi_E(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j \leq q}} \alpha_{ij} x^i y^j$$

On obtient alors le champ $\hat{\sigma}|_E$, de composantes :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx|E} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \\ \hat{\sigma}_{yy|E} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ \hat{\sigma}_{xy|E} &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

qui vérifie l'équilibre local.

Remarque : *En présence de forces volumiques découlant d'un potentiel, de la forme $\underline{f}_d = -\underline{\text{grad}} w$, il faut prendre $\hat{\sigma}_{xx|E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + w$ et $\hat{\sigma}_{yy|E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + w$.*

La continuité de la contrainte normale à l'interface entre chaque élément ainsi que le respect des conditions limites sur $\partial_2 \Omega$ aboutit à un système global (assez coûteux) à résoudre pour obtenir les valeurs des coefficients α_{ij} .

On obtient par cette méthode, en prenant des fonctions polynomiales de degré $q = 3$:

$$e_{diss}^2 = 4,22$$

Cependant, nous n'utiliserons pas cette méthode dans la suite de ce travail car elle s'adapte difficilement au 3D et engendre un coût de calcul trop important.

Les méthodes de construction que nous testons à présent suivent la procédure générale développée au LMT-Cachan (cf. Section 2.1.2 du Chapitre 1). Elles s'appuient sur une construction analytique standard de densités \hat{F} , mais elles diffèrent entre elles par la technique utilisée pour calculer numériquement $\hat{\sigma}_h|_E$ dans chaque élément du maillage \mathcal{M}_h :

- les quatre premières méthodes utilisent une construction basée sur un raffinement de la forme $p + k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) sur chaque élément E ; on calcule alors une solution en déplacement des problèmes locaux (1.21) en conservant un seul élément mais en augmentant de k le degré d'interpolation des fonctions de forme éléments finis, avec des éléments de Serendip ;

- la dernière méthode utilise un h-raffinement de chaque élément E , sans changer le degré des fonctions de forme. En pratique, chaque élément est subdivisé en 5^2 sous-éléments.

Les valeurs de l'erreur en dissipation obtenues avec chacune de ces méthodes sont regroupées dans le Tableau 2.3.

méthode	e_{diss}^2
$p + 1$	4,56
$p + 2$	5,25
$p + 3$	5,37
$p + 4$	5,39
h	5,33

Tableau 2.3: Valeur de l'erreur en dissipation en fonction de la technique de construction du champ $\hat{\sigma}_h$

On remarque que l'erreur en dissipation est faible quand k est petit ; ceci vient du fait que le champ $\hat{\sigma}_h$ n'est alors pas vraiment équilibré sur chaque élément. Par contre, lorsque k augmente, $\hat{\sigma}_h$ converge vers un champ réellement en équilibre et l'erreur en dissipation tend vers une valeur limite.

On prendra en conclusion une méthode de construction numérique de la forme $p + 3$ qui réalise un bon compromis entre qualité et coût de calcul.

4 Bilan

Nous venons de voir qu'une mesure d'estimation d'erreur globale par l'erreur en dissipation, prenant en compte à la fois les erreurs d'approximation spatiale et temporelle, peut être mise en place pour les problèmes de viscoélasticité linéaire. On se place pour cela dans le cadre d'une description thermodynamique par variables internes afin de séparer les relations de comportement en lois d'état et équations d'évolution. On utilise ensuite les techniques de construction de champs admissibles adaptées.

Nous possédons par conséquent un outil performant pour aborder l'estimation d'erreur locale, et son lien fort avec la solution exacte du problème est un atout majeur pour l'obtention de bornes strictes.

La méthode d'estimation d'erreur locale pour les problèmes de viscoélasticité linéaire

Dans ce chapitre, nous explicitons la méthode qui, à partir des techniques d'extraction et des propriétés de l'erreur en dissipation, aboutit à une majoration garantie de l'erreur sur une quantité locale.

Sommaire

1	Mise en place de la technique d'extraction	73
1.1	Traitement de la quantité d'intérêt	73
1.2	Le problème adjoint	74
2	Estimation de l'erreur locale	76
2.1	Résultat fondamental	76
2.2	Premières bornes	77
3	Améliorations de l'encadrement	77
3.1	Restriction de l'intervalle temporel d'étude	77
3.2	Introduction de \hat{s}_h^m	78
3.3	Raffinement du maillage associé au problème adjoint	79
4	Résultats numériques	80

4.1	Performances dues à l'utilisation de \hat{s}_h^m	80
4.2	Encadrements en viscoélasticité 1D	83
4.3	Encadrements en viscoélasticité 2D	85
5	Bilan	89

Le problème de référence ainsi que les notations par variables généralisées qui s'y rapportent restent semblables à ceux présentés dans la Section 2 du Chapitre 2.

1 Mise en place de la technique d'extraction

Nous appliquons ici la technique classique d'extraction et détaillons les étapes conduisant à la définition du problème adjoint.

1.1 Traitement de la quantité d'intérêt

Le point de départ des techniques d'extraction est de noter la quantité d'intérêt sous une forme globale [Paraschivoiu *et al.* 1997, Strouboulis *et al.* 2000b, Stein *et al.* 2001]. Dans notre cas, on s'intéresse aux quantités locales en espace et en temps qui peuvent se mettre sous la forme :

$$I = \int_0^T \int_{\Omega} s \cdot \dot{\tilde{e}}_{\Sigma} \, d\Omega \, dt = \langle \langle s, \dot{\tilde{e}}_{\Sigma} \rangle \rangle \quad \left(\dot{\tilde{e}}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_{\Sigma_1} \\ \dot{\tilde{e}}_{\Sigma_2} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{e}}_{\Sigma_n} \end{bmatrix} \right) \quad (3.1)$$

Le n-vecteur $\dot{\tilde{e}}_{\Sigma}$, connu analytiquement donc ne comportant aucune erreur, est appelé fonction d'extraction (ou extracteur). Nous nous intéressons donc uniquement à des quantités d'intérêt qui dépendent linéairement de composantes de s ; le cas des quantités non linéaires, qui aboutit à une approximation de l'extracteur (cf. Section 3.2.1 du Chapitre 1), n'est pas traité ici.

Résultat 1

Si on considère les couples de fonctions (e, s) et (\tilde{e}, \tilde{s}) vérifiant :

$$\dot{e} = \mathbf{\Lambda}(\dot{s}) + \mathbf{B}(s) ; s|_{t=0} = 0$$

$$\dot{\tilde{e}} = \mathbf{\Lambda}(\dot{\tilde{s}}) - \mathbf{B}(\tilde{s}) ; \tilde{s}|_{t=T} = 0$$

alors :

$$\langle \langle s, \dot{\tilde{e}} \rangle \rangle = -\langle \langle \dot{e}, \tilde{s} \rangle \rangle \quad (3.2)$$

Ce résultat s'obtient par intégration par parties, en utilisant la symétrie des opérateurs $\mathbf{\Lambda}$ et \mathbf{B} . Il montre qu'on peut aussi écrire la quantité d'intérêt I sous la forme :

$$I = -\langle \langle \dot{e}, \tilde{s}_{\Sigma} \rangle \rangle \quad \left(\tilde{s}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\Sigma_1} \\ \tilde{\sigma}_{\Sigma_2} \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}_{\Sigma_n} \end{bmatrix} \right) \quad (3.3)$$

avec l'extracteur \tilde{s}_{Σ} défini par la relation :

$$\dot{\tilde{e}}_{\Sigma} = \mathbf{\Lambda}(\dot{\tilde{s}}_{\Sigma}) - \mathbf{B}(\tilde{s}_{\Sigma}) ; \tilde{s}_{\Sigma}|_{t=T} = 0 \quad (3.4)$$

La notation (3.1) (ou (3.3)) permet de considérer de nombreuses quantités d'intérêt, comme par exemple la moyenne, dans une région locale $\omega \in \Omega$, d'une composante de la contrainte σ , d'une variable interne ϵ_i^p ou de son taux $\dot{\epsilon}_i^p$ à un instant $t \in [0, T]$. Notons que dans le cas où on s'intéresse à une quantité s'écrivant sous la forme $\langle e, \tilde{\mathbb{A}}_\Sigma \rangle$, on obtient :

$$\tilde{s}_\Sigma = - \int_t^T \tilde{\mathbb{A}}_\Sigma d\tau$$

D'autre part, si la quantité d'intérêt implique directement le déplacement \underline{u} , les extracteurs $\dot{\tilde{e}}_\Sigma$ et \tilde{s}_Σ sont implicites. On peut cependant écrire I de façon globale sous la forme :

$$I = - \int_0^T \int_\Omega \underline{\tilde{f}}_\Sigma \cdot \dot{\underline{u}} \, d\Omega dt$$

où l'extracteur $\underline{\tilde{f}}_\Sigma$ est homogène à une force volumique.

Notons enfin que les extracteurs sont en fait des distributions en espace et en temps, pouvant faire intervenir des fonctions Dirac, Heavyside, ... Les dérivées en temps qui sont menées sur ces extracteurs sont donc vues au sens des distributions [Schwartz 1957] :

$$\frac{dT_g}{dt} = T_{g'} + [g(a^+) - g(a^-)] \delta_a$$

La résolution de (3.4) est de ce fait menée avec la transformée de Laplace sur les distributions, en considérant l'espace des temps rétrogrades $\tau = T - t$ de façon à garder des fonctions à support borné à gauche.

1.2 Le problème adjoint

1.2.1 Écriture du problème adjoint

Il est dérivé à partir du problème de référence et de l'écriture globale de la quantité d'intérêt, en utilisant la procédure générale donnée dans la Section 3.2.2 du Chapitre 1. Cette procédure, complètement développée dans l'Annexe B, aboutit à un problème adjoint qui s'écrit :

Trouver (\tilde{e}, \tilde{s}) vérifiant :

- les équations de liaison : \tilde{e} CA-0

$$\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{U}^{[0,T]}; \quad \tilde{\underline{u}}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{0} \quad \forall t \in [0, T]; \quad \tilde{e} = \tilde{e}^e + \tilde{e}^p \quad (3.5)$$

- les équations d'équilibre : $\tilde{s} - \tilde{s}_\Sigma$ SA-0

$$\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}^{[0,T]}; \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_\Sigma)\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T] \quad (3.6)$$

- les relations de comportement :

$$\tilde{e}^e = \mathbf{A}(\tilde{s}); \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma} \quad (\text{lois d'état}) \quad (3.7)$$

$$\dot{\tilde{e}}^p = -\mathbf{B}(\tilde{s}) \quad (\text{équations d'état}) \quad (3.8)$$

- les conditions finales :

$$\tilde{e}^p|_{t=T} = 0 \quad (3.9)$$

Ce problème, inverse en temps, garde cependant la même structure que le problème de référence en faisant le changement de variable $\tau = T - t$. Le chargement est constitué par la précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma$ qui provient de l'extracteur \tilde{s}_Σ . Elle est telle que :

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_{\Sigma_i}$$

On note $(\tilde{e}_{ex}, \tilde{s}_{ex})$ la solution exacte du problème adjoint et $(\tilde{e}_h, \tilde{s}_h)$ une solution approchée donnée par une méthode d'approximation (ici, la MEF avec un schéma temporel d'Euler implicite). Notons que la discrétisation spatio-temporelle utilisée peut être différente de celle servant à calculer la solution approchée (e_h, s_h) du problème de référence.

1.2.2 Calcul d'une solution admissible

La notion d'erreur en dissipation peut être également appliquée au problème adjoint. Pour cela, on construit une solution admissible $(\hat{\tilde{e}}_h, \hat{\tilde{s}}_h)$ vérifiant (3.5), (3.6), (3.7) et (3.9) en employant les mêmes techniques que pour le problème de référence.

Le fait que le chargement (précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma$) du problème adjoint ne soit pas forcément linéaire par morceaux en temps ne constitue pas un obstacle. On peut en effet chercher $\hat{\tilde{\sigma}}_h$ sous la forme $\tilde{\sigma}_\Sigma + \hat{\tilde{\sigma}}_{h0}$ où $\hat{\tilde{\sigma}}_{h0}$ est une contrainte SA-0 construite avec les techniques classiques à partir du champ $\tilde{\sigma}_h - \tilde{\sigma}_\Sigma$ linéarisé en temps. On voit ainsi tout l'intérêt de mettre l'extracteur sous la forme d'une précontrainte.

Remarque : Une linéarisation en temps (par morceaux) du chargement $\tilde{\sigma}_\Sigma$ est également possible afin de se ramener au cas classique d'un chargement linéaire par morceaux. Ceci ne change que sensiblement les résultats de la méthode d'estimation d'erreur qu'on va présenter, mais on perd le caractère garanti de cette estimation car le champ $\hat{\tilde{\sigma}}_h$ ainsi

reconstruit n'est pas en parfait équilibre avec le chargement $\tilde{\sigma}_\Sigma$ à chaque instant.

En conclusion, on possède une erreur en dissipation pour le problème adjoint :

$$\tilde{e}_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^T \|\dot{\hat{e}}_h^p + \mathbf{B}(\hat{s}_h)\|_{\mathbf{B}^{-1}, \Omega}^2 dt}$$

2 Estimation de l'erreur locale

Nous donnons ici le résultat d'estimation de l'erreur sur une quantité d'intérêt I . On note I_{ex} la valeur exacte de la quantité d'intérêt et I_h la valeur donnée par la solution éléments finis (e_h, s_h) .

2.1 Résultat fondamental

Ce résultat, démontré dans l'Annexe A, provient de [Ladevèze 2006]. Il s'écrit :

$$I_{ex} - I_h - I_{hh} = -\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{e}}_h^p \rangle \rangle \quad (3.10)$$

avec

$$I_h = \langle \langle s_h, \dot{\hat{e}}_\Sigma \rangle \rangle$$

$$I_{hh} = \langle \langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h - \tilde{s}_\Sigma \rangle \rangle + \langle \langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{e}}_h - \dot{\hat{e}}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle$$

Ce dernier terme I_{hh} , entièrement calculable, peut être vu comme une correction de I_h ; la quantité $I_h + I_{hh}$ est donc une nouvelle approximation de I_{ex} .

L'égalité (3.10) est la base de notre méthode d'estimation de l'erreur locale. Un des ses avantages est qu'elle n'implique pas l'utilisation de propriétés d'orthogonalité et reste donc valable si les maillages des problèmes de référence et adjoint sont différents ; cela est particulièrement appréciable si on souhaite (dé-)raffiner localement le problème adjoint. De plus, cette caractéristique permet à l'égalité (3.10) de rester vraie dans le cas où les solutions approchées $(e_h, s_h, \hat{e}_h, \hat{s}_h)$ et $(\tilde{e}_h, \tilde{s}_h, \hat{\tilde{e}}_h, \hat{\tilde{s}}_h)$ proviennent d'une méthode d'approximation autre que la MEF (méthode des volumes finis, méthodes sans maillage, ...).

Remarque : Dans le cas où la quantité d'intérêt I implique une composante du déplacement \underline{u} , on utilise l'extracteur \tilde{f}_Σ et l'équation d'équilibre du problème adjoint s'écrit :

$$\int_\Omega \text{Tr}[\tilde{\sigma}\epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_\Omega \tilde{f}_\Sigma \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T]$$

Le résultat (3.10) est alors encore valable avec :

$$I_h = - \int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_\Sigma \cdot \dot{\underline{u}}_h d\Omega dt$$

$$I_{hh} = \langle \langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h \rangle \rangle + \langle \langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{e}}_h - \dot{\hat{e}}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle$$

Nous n'avons donc jamais besoin de l'expression implicite de \tilde{s}_Σ dans ce cas.

2.2 Premières bornes

On peut obtenir un encadrement simple de I_{ex} à partir de l'égalité (3.10) précédente. En effet, cette égalité se met sous la forme :

$$I_{ex} - I_h - I_{hh} = -\langle\langle s_{ex} - \hat{s}_h, \mathbf{B}(\hat{s}_h + \mathbf{B}^{-1}\dot{\hat{e}}_h^p) \rangle\rangle$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient directement :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \sqrt{\int_0^T \|s_{ex} - \hat{s}_h\|_{\mathbf{B},\Omega|t}^2 dt} \sqrt{\int_0^T \|\hat{s}_h + \mathbf{B}^{-1}(\dot{\hat{e}}_h^p)\|_{\mathbf{B},\Omega|t}^2 dt}$$

Or

$$\int_0^T \|\hat{s}_h + \mathbf{B}^{-1}(\dot{\hat{e}}_h^p)\|_{\mathbf{B},\Omega|t}^2 dt = 2 e_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h)$$

et (2.11) donne :

$$\int_0^T \|s_{ex} - \hat{s}_h\|_{\mathbf{B},\Omega|t}^2 dt = 2 \int_0^T \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h) dt \leq 2 e_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h)$$

Au final, on obtient donc la borne supérieure garantie :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq 2 e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \quad (3.11)$$

à partir de laquelle on peut définir des bornes de la valeur exacte I_{ex} de la quantité d'intérêt considérée :

$$\zeta_{inf} \leq I_{ex} \leq \zeta_{sup} \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_{inf} &= I_h + I_{hh} - 2 e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \\ \zeta_{sup} &= I_h + I_{hh} + 2 e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \end{aligned}$$

Ces bornes, dont tous les termes sont calculables, peuvent être utilisées pour donner un encadrement strict de l'erreur locale $I_{ex} - I_h$.

3 Améliorations de l'encadrement

3.1 Restriction de l'intervalle temporel d'étude

Très souvent, la quantité d'intérêt I considérée n'implique la solution du problème de référence que jusqu'à un temps $t_K < T$. Dans ce cas, il est inutile de définir le problème

adjoint sur l'intervalle d'étude complet $[0, T]$, l'intervalle $[0, t_K]$ étant suffisant (de toute façon la solution du problème adjoint est nulle sur $[t_K, T]$). L'expression des résultats d'encadrement précédents reste inchangée, mais on prend cette fois :

$$\langle\langle \cdot \rangle\rangle = \int_0^{t_K} \int_{\Omega} \cdot \, d\Omega \, dt$$

De ce fait, l'erreur en dissipation du problème de référence n'est calculée que sur $[0, t_K]$, ce qui améliore la qualité des bornes d'encadrement.

3.2 Introduction de \hat{s}_h^m

En introduisant la quantité $\hat{s}_h^m = \frac{1}{2}(\hat{s}_h + \mathbf{B}^{-1}(\dot{\hat{e}}_h^p))$ dans (3.10), on obtient :

$$I_{ex} - I_h - I_{hh} = -\langle\langle s_{ex} - \hat{s}_h^m, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{e}}_h^p \rangle\rangle \quad (3.13)$$

avec

$$I_{hh} = \langle\langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h - \tilde{s}_\Sigma \rangle\rangle + \langle\langle s_h - \hat{s}_h^m, \dot{\hat{e}}_h^p + \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle\rangle + \langle\langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{e}}_h \rangle\rangle$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat venant de (2.12) :

$$\int_0^T \|s_{ex} - \hat{s}_h^m\|_{\mathbf{B}, \Omega|_t}^2 dt = 2 \int_0^T \Phi_t^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) dt \leq \frac{1}{2} e_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h)$$

on obtient la nouvelle majoration :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \quad (3.14)$$

et les nouvelles bornes de I_{ex} associées :

$$\chi_{inf} \leq I_{ex} \leq \chi_{sup} \quad (3.15)$$

avec

$$\chi_{inf} = I_h + I_{hh} - e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h)$$

$$\chi_{sup} = I_h + I_{hh} + e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^p, \hat{s}_h)$$

La majoration (3.14) est plus précise que la majoration (3.11), l'intervalle d'encadrement étant divisé par deux. Nous conserverons donc les bornes χ_{inf} et χ_{sup} dans la suite. Leur performance sera en outre étudiée dans la Section 4.1.

3.3 Raffinement du maillage associé au problème adjoint

Le résultat d'encadrement (3.15) montre que les bornes de I_{ex} peuvent être rendues aussi précises qu'on le souhaite en minimisant le terme :

$$e_{diss}(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h) \cdot e_{diss}(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h)$$

La solution du problème de référence étant donnée, c'est donc le terme $e_{diss}(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h)$ qu'il faut diminuer en optimisant la résolution approchée du problème adjoint. Ceci peut être fait en raffinant localement la discrétisation spatio-temporelle utilisée pour calculer $(\tilde{e}_h, \tilde{s}_h)$; on obtient alors des bornes de grande qualité. Des illustrations sont données dans la Section 4.3.

Notons qu'au niveau spatial, on procède plutôt à une réanalyse locale qu'à un raffinement de maillage proprement dit. Cette technique multi-échelle permet de garder les informations du calcul sur le maillage grossier et ne confère pas à la méthode un caractère complètement intrusif. Nous illustrons ce propos en considérant le schéma de la Figure 3.1 où ω est la zone sur laquelle la quantité d'intérêt I est définie tandis que ω' est une région contenant ω dans laquelle on va appliquer la réanalyse locale.

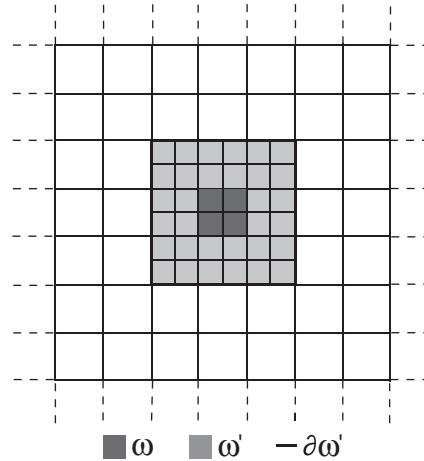


Figure 3.1: Définition des zones ω et ω'

La réanalyse locale consiste à trouver une nouvelle approximation en déplacement de \tilde{u} sous la forme :

$$\tilde{v}_{hh} = \tilde{u}_h + \tilde{u}_{hh}$$

où \tilde{u}_h est la solution approchée obtenue sur le maillage spatial grossier \mathcal{M}_h et \tilde{u}_{hh} est un terme supplémentaire à calculer, défini uniquement sur ω' et nul sur $\partial_1\omega' = \partial\omega' - \partial_2\Omega$.

On doit alors chercher sur $\omega' \times [0, T]$ la solution $(\tilde{e}_{hh}, \tilde{s}_{hh})$ vérifiant :

- les équations de liaison :

$$\tilde{\underline{u}}_{hh} \in \mathcal{U}^{[0, T]} ; \quad \tilde{\underline{u}}_{hh}|_{\partial_1 \omega'} = \underline{0} \quad \forall t \in [0, T] ; \quad \tilde{e}_{hh} = \tilde{e}_{hh}^e + \tilde{e}_{hh}^p$$

- les équations d'équilibre :

$$\tilde{\sigma}_{hh} \in \mathcal{S}^{[0, T]} ; \quad \int_{\omega'} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_{hh} \epsilon(\underline{u}_{hh}^*)] d\omega = \int_{\omega'} \text{Tr} [(\tilde{\sigma}_\Sigma - \tilde{\sigma}_h) \epsilon(\underline{u}_{hh}^*)] d\omega \quad \forall \underline{u}_{hh}^* \in \mathcal{U}_{hh,0}, \forall t \in [0, T]$$

- les relations de comportement :

$$\tilde{e}_{hh}^e = \mathbf{\Lambda}(\tilde{s}_{hh}) ; \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_{hh,i} = \tilde{\sigma}_{hh} \quad (\text{lois d'état})$$

$$\dot{\tilde{e}}_{hh}^p = -\mathbf{B}(\tilde{s}_{hh}) \quad (\text{équations d'état})$$

- les conditions finales :

$$\tilde{e}_{hh}^p|_{t=T} = 0$$

Pour ce qui est de la construction du champ admissible $\hat{\tilde{\sigma}}$ sur ω' , on se sert également du calcul sur le maillage grossier \mathcal{M}_h en reprenant les densités d'effort \hat{F}_h définies sur $\partial\omega'$ et relatives à \mathcal{M}_h .

Contrairement à ce qui peut se passer pour le problème de référence, une réanalyse locale pour le problème adjoint donne de bons résultats car ce dernier problème présente peu de phénomènes de pollution (principe de St-Venant). Les conditions limites sur $\partial\omega'$ données par un premier calcul grossier sont alors assez bonnes.

4 Résultats numériques

Dans les exemples numériques de cette section et des autres chapitres, la valeur de I_{ex} est calculée analytiquement lorsque ceci est possible (en 1D particulièrement). Dans le cas contraire, elle est calculée à partir d'une solution obtenue avec un maillage spatio-temporel très fin (*overkill solution*).

4.1 Performances dues à l'utilisation de \hat{s}_h^m

Les performances apportées par l'introduction de \hat{s}_h^m sont étudiées sur un exemple d'estimation d'erreur locale en élasticité, en utilisant le concept d'erreur en relation de comportement e_{rdc} . La structure considérée est représentée sur la Figure 3.2 ; il s'agit d'une plaque trouée soumise à un effort normal sur sa partie supérieure.

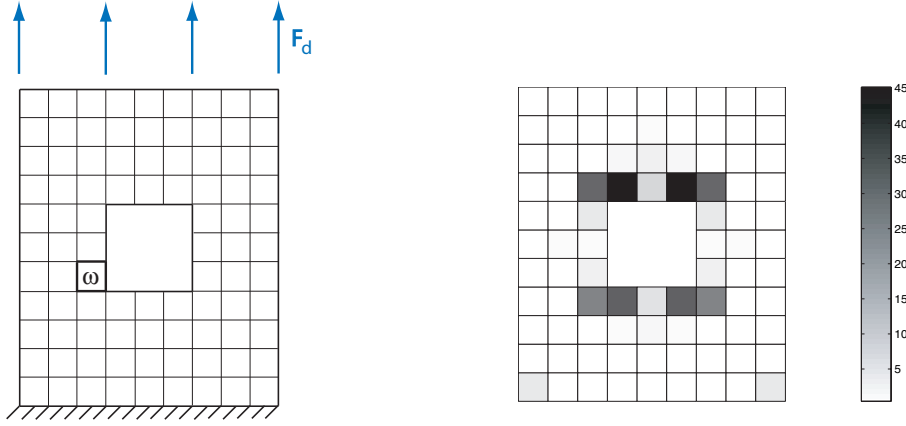


Figure 3.2: Structure considérée et répartition de l'erreur en relation de comportement associée à la solution approchée

La quantité estimée est la moyenne dans la zone locale ω de la composante σ_{yy} du champ de contrainte.

L'estimation de référence est celle obtenue par la méthode de Oden-Prudhomme (cf. équations (1.38) et (1.39)). Pour cela, on a besoin de bornes inférieure η_{inf} et supérieure η_{sup} de $\|\underline{e}^u \pm \gamma \tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2$; elles sont déterminées en utilisant la propriété (1.19) qui donne :

$$0 \leq 2.e_{rdc}^2(\underline{u}_h, \hat{\sigma}_h) - 2.e_{rdc}^2(\underline{u}_{hh}, \hat{\sigma}_h) \leq \|\underline{e}^u\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 \leq 2.e_{rdc}^2(\underline{u}_h, \hat{\sigma}_h)$$

où \underline{u}_{hh} est un champ de déplacement (admissible) obtenu avec un maillage plus fin que le maillage \mathcal{M}_h initial.

On obtient donc, par linéarité :

$$\frac{1}{4\gamma} [\eta_{inf}^+ - \eta_{sup}^-] \leq I_{ex} - I_h \leq \frac{1}{4\gamma} [\eta_{sup}^+ - \eta_{inf}^-] \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_{inf}^- &= 2. [e_{rdc}^2(\underline{u}_h - \gamma \tilde{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h - \gamma \hat{\sigma}_h) - e_{rdc}^2(\underline{u}_h - \gamma \tilde{\underline{u}}_{hh}, \hat{\sigma}_h - \gamma \hat{\sigma}_h)] \\ \eta_{sup}^- &= 2.e_{rdc}^2(\underline{u}_h - \gamma \tilde{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h - \gamma \hat{\sigma}_h) \\ \eta_{inf}^+ &= 2. [e_{rdc}^2(\underline{u}_h + \gamma \tilde{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h + \gamma \hat{\sigma}_h) - e_{rdc}^2(\underline{u}_h + \gamma \tilde{\underline{u}}_{hh}, \hat{\sigma}_h + \gamma \hat{\sigma}_h)] \\ \eta_{sup}^+ &= 2.e_{rdc}^2(\underline{u}_h + \gamma \tilde{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h + \gamma \hat{\sigma}_h) \end{aligned}$$

γ est par ailleurs une constante à optimiser.

Détaillons ce que donne notre méthode avec les mêmes données $(\underline{u}_h, \hat{\sigma}_h)$, $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$ et $(\tilde{\underline{u}}_{hh}, \tilde{\sigma}_{hh})$. En introduisant $\hat{\sigma}_h^m = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_h + \sigma_h)$ dans le résultat de l'Annexe A et en utilisant

l'inégalité [Ladevèze et Pelle 2004] :

$$2 \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2 \leq \frac{1}{2} e_{rdc}^2(\underline{u}_h, \hat{\sigma}_h)$$

on obtient la majoration :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq e_{rdc}(\underline{u}_h, \hat{\sigma}_h) \cdot e_{rdc}(\tilde{\underline{u}}_{hh}, \hat{\sigma}_{hh}) \quad (3.17)$$

avec

$$I_{hh} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \mathbf{K}^{-1}(\hat{\sigma}_{hh} + \tilde{\sigma}_{hh})] d\Omega$$

Remarque : Les bornes données par (3.17) sont deux fois plus précises que celles données de façon classique par (1.35).

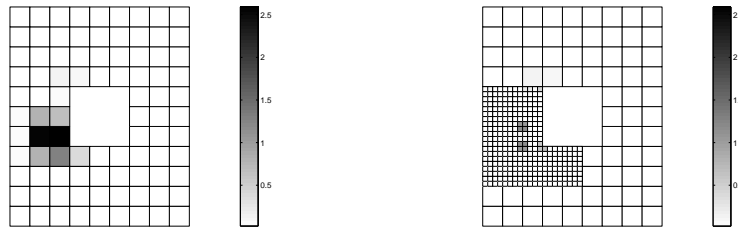


Figure 3.3: Répartition de l'erreur en relation de comportement pour le problème adjoint avec le maillage initial et un maillage raffiné localement

On a pour cet exemple $I_{ex} = 101,12$. Les bornes I^- et I^+ de I_{ex} obtenues par les 2 méthodes sont regroupées dans le Tableau 3.1.

Méthode	I^-	I^+
méthode de Oden	96,34	104,43
méthode avec $\hat{\sigma}_h^m$	96,27	104,33

Tableau 3.1: Bornes de I_{ex} obtenues par les deux méthodes

Notons que les bornes optimales avec la méthode de Oden sont obtenues avec $\gamma = 0,14$.

Nous voyons donc que l'introduction de $\hat{\sigma}_h^m$ apporte de bonnes performances au niveau de l'encadrement. Dans nos estimations d'erreur futures, nous utiliserons donc \hat{s}_h^m ainsi que les bornes χ_{inf} et χ_{sup} associées.

4.2 Encadrements en viscoélasticité 1D

Nous considérons à nouveau le problème de poutre présenté sur la Figure 2.9.

- Estimation d'un déplacement en un nœud

Nous cherchons dans un premier temps à encadrer la valeur exacte du déplacement u au nœud n du maillage (nous prenons $n = 4$ ici) et à l'instant T .

$$I = u_n|_T$$

Le chargement du problème adjoint correspondant consiste en une force \tilde{f}_Σ ponctuelle en espace (au nœud n) et constante en temps sur $[0, T]$ (Figure 3.4).

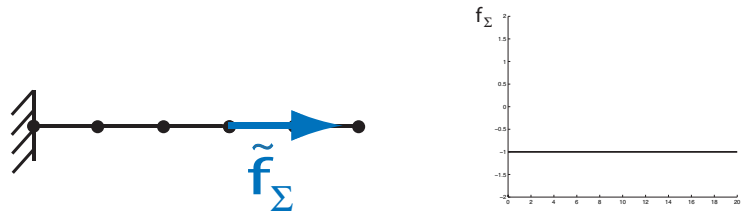


Figure 3.4: Chargement du problème adjoint : en espace (gauche), en temps (droite)

Pour ce problème nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= 16,50 \quad (\text{valeur calculée analytiquement}) \\ I_h &= 17,25 \end{aligned}$$

La méthode d'estimation d'erreur fournit quant à elle les bornes :

$$\begin{aligned} \chi_{inf} &= 16,50 \\ \chi_{sup} &= 16,50 \end{aligned}$$

qui correspondent à la valeur exacte de I . Ceci est dû au fait que, dans ce cas particulier, le problème adjoint est résolu de façon exacte avec la discrétisation spatio-temporelle du problème de référence. Nous avons alors $\tilde{e}_{diss} = 0$ et le terme correctif I_{hh} est égal à l'erreur de discrétisation $I_{ex} - I_h$. Ce résultat montre tout l'intérêt de bien résoudre le problème adjoint ...

Remarque : *Le résultat précédent peut être vu comme une extension de la propriété de superconvergence du déplacement aux nœuds du maillage présentée, dans le cadre de l'élasticité linéaire, dans la Section 3.2.1 du Chapitre 1.*

- Estimation d'une moyenne locale de la déformation anélastique

On reprend à présent l'exemple de la poutre soumise à un déplacement imposé U_d de la Figure 2.12. On s'intéresse à la quantité d'intérêt :

$$I(t) = \frac{1}{E} \int_E \epsilon_{|t}^p dx$$

où E est l'élément 3 du maillage spatial. La Figure 3.5 montre l'évolution en temps de I_{ex} et I_h .

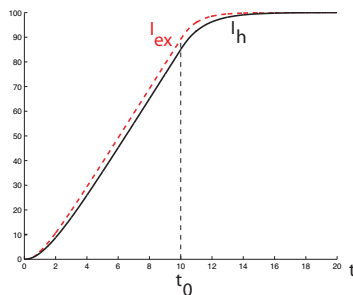


Figure 3.5: Évolution temporelle de $I_{ex}(t)$ et $I_h(t)$

Nous faisons l'estimation pour $t = t_0 = 10$. Le chargement du problème adjoint consiste en un pré-effort local \tilde{N}_Σ , représenté sur la Figure 3.6 :

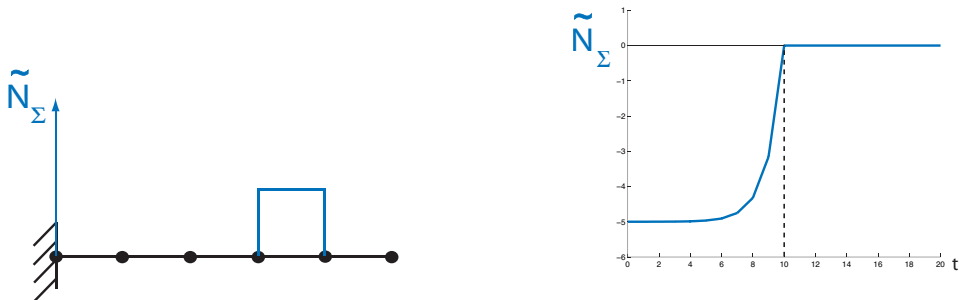


Figure 3.6: Répartition spatiale et temporelle du chargement du problème adjoint

On obtient :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= 89,18 \\ I_h &= 85,01 \\ \chi_{inf} &= 88,99 \\ \chi_{sup} &= 91,01 \end{aligned}$$

Ce résultat de très bonne qualité est obtenu sans raffinement du maillage du problème adjoint. Ceci n'est cependant qu'une spécificité des problèmes 1D qui sont assez faciles à résoudre en espace.

4.3 Encadrements en viscoélasticité 2D

On s'intéresse ici à la structure en forme de L schématisée sur la Figure 3.7.

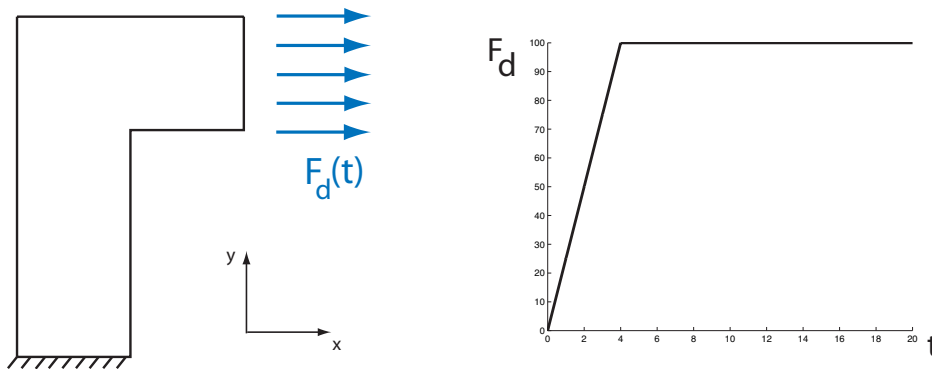


Figure 3.7: Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)

On prend pour quantité d'intérêt :

$$I(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \epsilon_{1yy}^p |t| d\omega$$

où ω est un élément du maillage \mathcal{M}_h correspondant à une des zones les plus chargées de la structure (Figure 3.8).

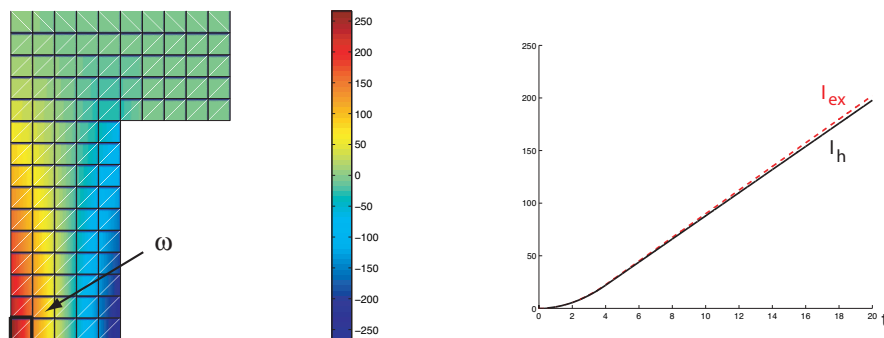


Figure 3.8: Carte spatiale du champ ϵ_{1yy}^p (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)

L'estimation est faite sur $I(T)$ dont la valeur exacte est $I_{ex} = 204$. On doit alors résoudre un problème adjoint dont le chargement (précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma$) est représenté sur la Figure 3.9.

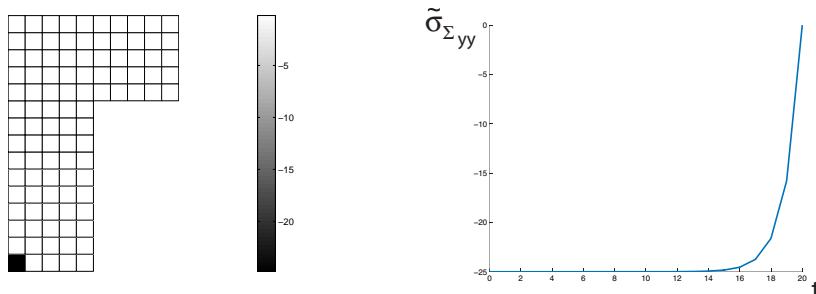


Figure 3.9: Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) de la composante non nulle $\tilde{\sigma}_{\Sigma yy}$ de l'extracteur $\tilde{\sigma}_\Sigma$

L'erreur en dissipation qu'on obtient pour le problème adjoint, en gardant le même maillage que celui du problème de référence, est représentée sur la Figure 3.10. Elle vaut $\tilde{e}_{diss}^2 = 0,422$.

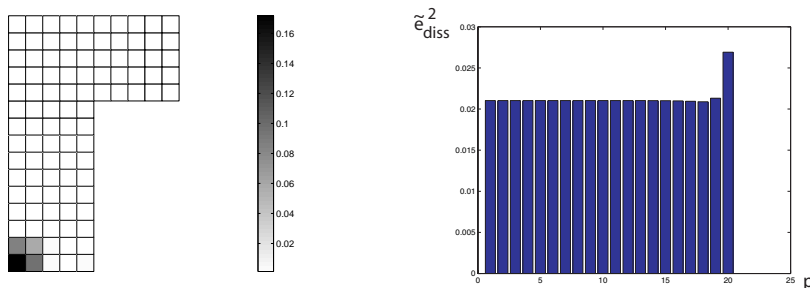


Figure 3.10: Répartition sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h)$

On obtient alors les bornes :

$$\begin{aligned} \chi_{inf} &= 169 \\ \chi_{sup} &= 242 \end{aligned}$$

On peut chercher à améliorer ces bornes en raffinant le maillage spatio-temporel du problème adjoint. La distribution de l'erreur en dissipation relative à ce problème montre qu'une réanalyse spatiale locale en espace peut être faite, dans une zone locale ω' située

autour de la zone d'intérêt ω .

On note $r = \frac{h'}{h}$ le degré de raffinement spatial et N_c le nombre de couches d'éléments raffinés autour de ω pour former ω' . Pour l'instant, le nombre de pas de temps N_p reste inchangé.

- Dans une première étude, on prend $r = 2$ et on fait varier N_c i.e. la taille de la zone ω' . La nouvelle répartition d'erreur en dissipation est donnée sur la Figure 3.11 et les nouvelles bornes obtenues sont reproduites dans le Tableau 3.2.

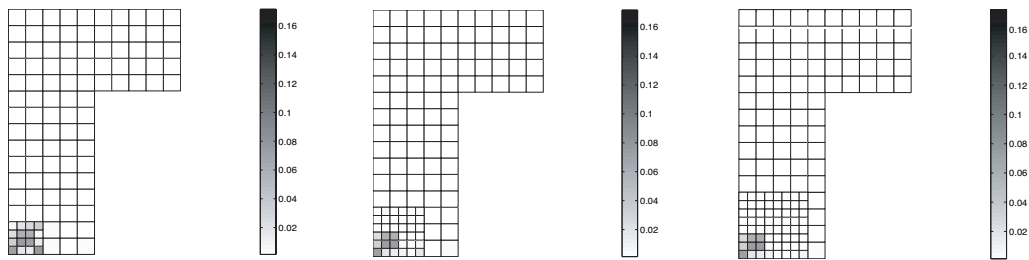


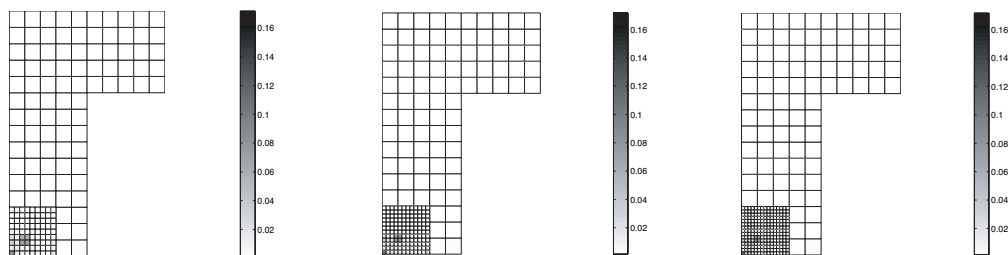
Figure 3.11: Densité spatiale d'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h)$ avec $N_c = 1$, $N_c = 2$ et $N_c = 3$

N_c	\tilde{e}_{diss}^2	χ_{inf}	χ_{sup}
1	0,171	180	227
2	0,137	184	225
3	0,130	184	225

Tableau 3.2: Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le nombre de couches N_c

On voit ainsi qu'il est inutile de faire une réanalyse sur une zone ω' trop importante. À partir d'un moment, la taille de ω' n'a pratiquement plus d'influence sur la qualité des bornes car le chargement et l'erreur en dissipation du problème adjoint sont très localisés en espace (principe de St-Venant).

- Dans une seconde étude, on garde $N_c = 2$ et on fait varier le degré de raffinement r du maillage spatial. La nouvelle répartition d'erreur en dissipation est donnée sur la Figure 3.12 et les nouvelles bornes obtenues sont reproduites dans le Tableau 3.3.


 Figure 3.12: Densité spatiale d'erreur en dissipation $e_{diss}^2(\hat{\epsilon}_h^p, \hat{\sigma}_h)$ avec $r = 3$, $r = 4$ et $r = 5$

r	\tilde{e}_{diss}^2	χ_{inf}	χ_{sup}
2	0,137	184	225
3	0,081	188	220
4	0,058	190	217
5	0,046	192	216

 Tableau 3.3: Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le degré de raffinement r

Cette étude montre que plus le degré r est élevé, meilleures sont les bornes. Cependant, l'erreur en dissipation converge vers une valeur non nulle correspondant à l'erreur due à la discrétisation en temps. Un raffinement des pas de temps est donc également nécessaire.

En gardant $r = 4$ et $N_c = 2$, on peut chercher à diminuer uniformément les pas de temps. On note Δt la taille des pas de temps initiaux et $\Delta t'$ celle des nouveaux pas de temps, après raffinement. Les bornes obtenues sont données dans le Tableau 3.4.

$\Delta t/\Delta t'$	\tilde{e}_{diss}^2	χ_{inf}	χ_{sup}
2	0,034	194	211
3	0,028	196	209
4	0,025	197	208

 Tableau 3.4: Évolution de l'erreur en dissipation du problème adjoint et des bornes d'encadrement de I_{ex} avec le degré de raffinement temporel $\Delta t/\Delta t'$

Des bornes précises peuvent donc être obtenues en raffinant suffisamment le maillage

spatio-temporel du problème adjoint. Le raffinement n'est cependant nécessaire que dans les zones à fort gradient où l'erreur en dissipation est concentrée.

5 Bilan

Les techniques d'extraction, associées aux propriétés de l'erreur en dissipation, permettent d'avoir des bornes sur I_{ex} garanties et de la qualité souhaitée en raffinant localement le problème adjoint. On obtient alors non seulement une majoration de l'erreur mais aussi une nouvelle approximation de I_{ex} .

Cependant, nous allons voir dans le Chapitre 4 que ces bornes doivent encore être améliorées afin de prendre en compte des phénomènes liés à l'histoire. L'objectif est d'avoir des bornes qui restent pertinentes pour tout type de quantité d'intérêt et à tout instant.

Prise en compte des effets d'histoire dans l'estimation d'erreur locale

Dans ce chapitre, nous apportons une modification à la méthode générale d'estimation d'erreur locale afin de prendre en compte les effets d'histoire rencontrés dans les problèmes d'évolution.

Sommaire

1	Mise en évidence des effets d'histoire	92
1.1	Classification des grandeurs physiques	92
1.2	Influence de l'histoire sur les bornes d'erreur locale	93
2	Modification de la méthode pour prendre en compte les effets d'histoire	95
2.1	Nouvelle méthode de majoration	95
2.2	Calcul de la fonction duale f	97
2.3	Choix de la fonction de pondération $a(t)$	99
3	Résultats numériques	101
4	Bilan	107

1 Mise en évidence des effets d'histoire

1.1 Classification des grandeurs physiques

On peut montrer que pour les problèmes d'évolution (viscoélasticité, viscoplasticité, ...) décrits par variables internes, les grandeurs physiques impliquées dépendent plus ou moins, selon leur type, de l'histoire du chargement [Ladevèze et Rougée 1985]. Un point important est que certaines d'entre elles deviennent asymptotiquement indépendantes de l'histoire, et de ce fait ne dépendent que du chargement à l'instant t après une phase transitoire. Prenant pour exemple le cas viscoplastique avec un chargement cyclique, les auteurs montrent que diverses solutions, provenant de conditions initiales différentes, présentent asymptotiquement des caractères communs i.e. certaines quantités propres à ces solutions évoluent selon le même cycle limite.

Pour les problèmes de viscoélasticité linéaire que nous considérons, les quantités ne dépendant pas asymptotiquement de l'histoire du chargement sont par exemple la contrainte σ ou le taux de variation $\dot{\epsilon}_i^p$ des variables internes ϵ_i^p . Par contre, les quantités ϵ_i^p dépendent de l'histoire. Nous illustrons cela sur l'exemple donné sur la Figure 4.1 ; il s'agit d'une structure en L soumise à un déplacement imposé cyclique \underline{U}_d .

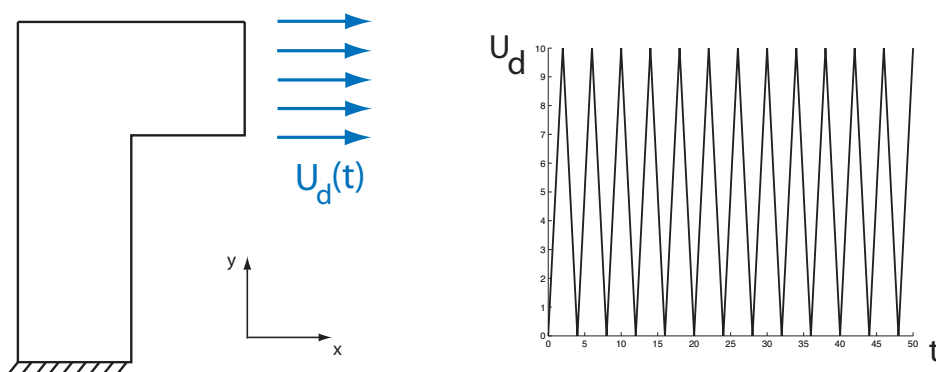


Figure 4.1: Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)

On s'intéresse à la quantité d'intérêt :

$$I(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \dot{\epsilon}_{1yy}^p dt d\omega$$

où ω est la même zone que celle donnée sur la Figure 3.8. On observe alors l'évolution temporelle de I qui montre la convergence vers un cycle limite (Figure 4.2) : I est une quantité asymptotiquement indépendante de l'histoire.

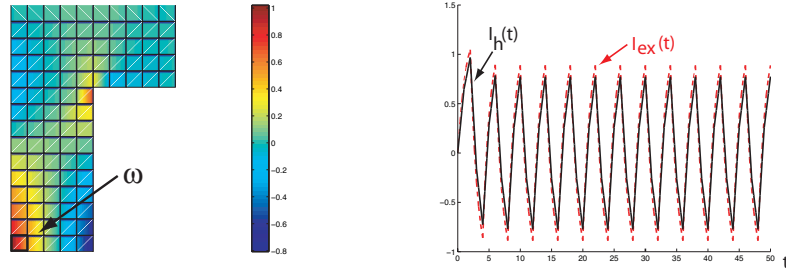


Figure 4.2: Répartition spatiale du champ $\dot{\epsilon}_{1hyy}^p$ et évolution temporelle de $I(t)$

1.2 Influence de l'histoire sur les bornes d'erreur locale

Les effets d'histoire vont jouer un rôle important dans la qualité des bornes d'encadrement de l'erreur locale. Regardons pour cela l'estimation de l'erreur ΔI à différents instants t_{cy} correspondant aux pics positifs de chaque cycle cy du chargement. On peut observer sur la Figure 4.3 que l'erreur vraie $\Delta I|_{t_{cy}}$ tend à devenir constante lorsque le numéro de cycle cy augmente.

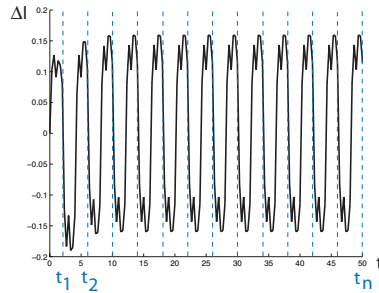


Figure 4.3: Évolution de ΔI avec le nombre de cycles

Les bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$ et $\bar{\chi}_{sup}$ de I_{ex} obtenues par la méthode du Chapitre 3 et définies par :

$$\bar{\chi}_{inf} = \frac{\chi_{inf}}{I_{ex}} \quad \bar{\chi}_{sup} = \frac{\chi_{sup}}{I_{ex}} \quad (4.1)$$

sont données en fonction de cy sur la Figure 4.4. Elles sont déterminées en raffinant le problème adjoint localement : on raffine 2 couches d'éléments ($N_c = 2$) autour de la zone d'intérêt ω , avec un degré de raffinement $r = 3$, et on raffine uniformément en temps avec $\Delta t / \Delta t' = 3$.

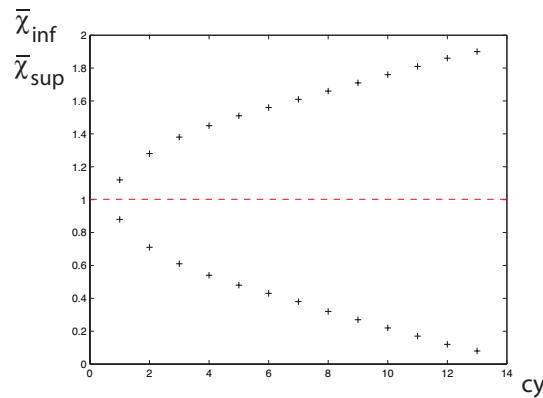


Figure 4.4: Bornes d'encadrement $\bar{\chi}_{inf}$ et $\bar{\chi}_{sup}$ en fonction du numéro de cycle cy

En regardant les contributions temporelles de l'erreur en dissipation des problèmes de référence et adjoint (Figure 4.5), pour une estimation de I au cycle 7 ($cy = 7$), on peut voir que la dégradation des bornes avec t_{cy} vient de l'augmentation du produit $e_{diss} \cdot \tilde{e}_{diss}$ avec le temps, alors que l'erreur $\Delta I|_{t_{cy}}$ n'évolue pratiquement pas avec le nombre de cycles.

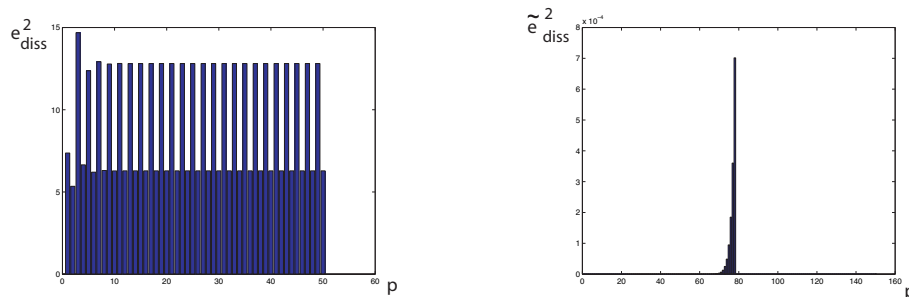


Figure 4.5: Contributions à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation du problème de référence (gauche) et adjoint (droite)

L'utilisation brute des erreurs en dissipation, qui sont des estimateurs globaux, apporte des sur-majorations et n'est donc pas adaptée aux quantités d'intérêt qui dépendent peu de l'histoire. Il faut par conséquent modifier l'encadrement donné dans le Chapitre 3 afin de prendre en compte les effets d'histoire et éviter des bornes qui, bien que restant garanties, ne sont plus pertinentes donc n'ont plus d'intérêt pratique.

Remarque : La dépendance d'une quantité d'intérêt I vis-à-vis de l'histoire peut être appréhendée par l'évolution temporelle de la solution du problème adjoint associé, solution qui montre l'influence de l'erreur globale sur l'erreur sur I . Dans le cas précédent,

l'évolution temporelle du chargement du problème adjoint est celle représentée sur la Figure 4.6. On voit donc que seule une infime portion temporelle de l'erreur globale e_{diss} , au voisinage de la date d'estimation t_{cy} , va jouer sur l'erreur locale $\Delta I|_{t_{cy}}$. L'histoire a alors peu d'influence sur la valeur de $\Delta I|_{t_{cy}}$.

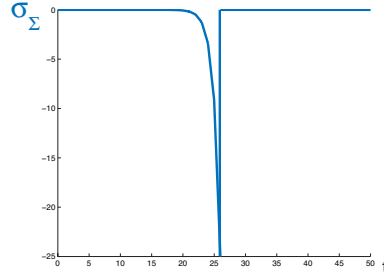


Figure 4.6: Évolution temporelle du chargement du problème adjoint relatif à I_{t_7}

2 Modification de la méthode pour prendre en compte les effets d'histoire

2.1 Nouvelle méthode de majoration

Nous commençons par changer sensiblement l'égalité (2.12). Pour cela, nous introduisons une fonction du temps $a(t)$ arbitraire telle que :

$$a(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad ; \quad a(T) = 0$$

En multipliant l'égalité (2.10) par cette fonction et en intégrant sur $[0, T]$, on obtient la nouvelle relation :

$$\int_0^T \left[2 a(t) \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) - \dot{a}(t) E_F(s_{ex} - \hat{s}_h)_{|t} \right] dt = \frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) \quad (4.2)$$

où le terme

$$E_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) = \int_0^T a(t) \eta_t(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) dt$$

peut être vu comme une erreur en dissipation pondérée. Le choix de $a(t)$ va nous permettre de prendre en compte, par exemple, seulement une contribution temporelle locale de l'erreur en dissipation totale e_{diss} relative au problème de référence.

Remarque : Si on considère une fonction $a(t)$ telle que $a(T) \neq 0$, le résultat (4.2) devient :

$$\int_0^T \left[2 a(t) \Phi_{|t}^*(s_{ex} - \hat{s}_h^m) - \dot{a}(t) E_F(s_{ex} - \hat{s}_h)_{|t} \right] dt + a(T) E_F(s_{ex} - \hat{s}_h)_{|T} = \frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h)$$

Ceci ne pose pas de difficulté majeure pour ce qu'on va faire, mais la relation est moins pratique à manipuler. On gardera donc $a(T) = 0$.

On peut observer que le terme de gauche de (4.2) a la forme :

$$\int_0^T \int_{\Omega} g(y, \Delta_h) d\Omega dt$$

avec

$$\begin{aligned} y &= s_{ex} - \hat{s}_h^m \\ \Delta_h &= \hat{s}_h - \hat{s}_h^m \\ g(y, \Delta_h) &= 2 a(t) \varphi_{|t}^*(y) - \dot{a}(t) e_F(y - \Delta_h)_{|t} \end{aligned}$$

g est une fonction quadratique (cf. Section 2.2) qui peut s'écrire :

$$g(y, \Delta_h) = g_2(y) + g_1(y, \Delta_h) + g_0(\Delta_h)$$

On introduit alors la fonction duale de g , notée $f(x, \Delta_h)$ et définie au sens de Legendre-Fenchel par :

$$f(x, \Delta_h) \equiv \sup_{y \in \mathcal{Y}} [x \cdot y - g(y, \Delta_h)] \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

f est aussi une fonction quadratique, de la forme :

$$f(x, \Delta_h) = f_2(x) + f_1(x, \Delta_h) + f_0(\Delta_h)$$

On obtient de ce fait l'inégalité de Legendre-Fenchel :

$$x \cdot y \leq f(x, \Delta_h) + g(y, \Delta_h) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$$

qui peut aussi être écrite, pour tout $\mu > 0$:

$$x \cdot y = \frac{1}{\mu} (\mu x \cdot y) \leq \frac{1}{\mu} [f(\mu x, \Delta_h) + g(y, \Delta_h)] \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$$

La minimisation par rapport à μ donne :

$$\begin{aligned} \langle\langle x, y \rangle\rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} x \cdot y d\Omega dt \\ &\leq 2 [G(y, \Delta_h) + F_0(\Delta_h)]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(x)]^{\frac{1}{2}} + F_1(x, \Delta_h) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y} \end{aligned} \tag{4.3}$$

avec $F = \int_0^T \int_{\Omega} f d\Omega dt$ et $G = \int_0^T \int_{\Omega} g d\Omega dt$. La démonstration de (4.3), qui est assez simple, est donnée dans [Ladevèze 2006].

En appliquant alors (4.3) avec :

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}_h = -\mathbf{B}(\hat{s}_h) - \dot{\hat{e}}_h^p \\ y &= y_h = s_{ex} - \hat{s}_h^m \end{aligned}$$

et en se servant du résultat (4.2), on obtient l'inégalité suivante :

$$-\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h^m, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{c}}_h^p \rangle \rangle - F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) \leq 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{c}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}}$$

De même, en utilisant (4.3) avec :

$$\begin{aligned} x &= -\tilde{x}_h \\ y &= y_h \end{aligned}$$

on obtient l'inégalité :

$$-\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h^m, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{c}}_h^p \rangle \rangle - F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) \geq -2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{c}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, il suffit de remplacer dans l'égalité fondamentale (3.10) pour obtenir la nouvelle borne supérieure :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh} - F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h)| \leq 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{c}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Les nouvelles bornes garanties de I_{ex} sont alors :

$$\xi_{inf} \leq I_{ex} \leq \xi_{sup} \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_{inf} &= I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) - 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{c}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \\ \xi_{sup} &= I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) + 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{c}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Remarque : Cette fois, c'est la quantité $I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h)$ qui peut être vue comme une nouvelle approximation de I_{ex} .

Les bornes d'encadrement font maintenant intervenir une erreur en dissipation pondérée E_{diss} du problème de référence. Celle-ci va permettre de prendre en compte les effets d'histoire.

2.2 Calcul de la fonction duale f

La fonction g se réécrivant sous la forme :

$$\begin{aligned} g(y, \Delta_h) &= a(t)y \cdot \mathbf{B}(y) - \frac{1}{2} \dot{a}(t)(y - \Delta_h) \cdot \mathbf{\Lambda}(y - \Delta_h) \\ &= y \cdot \left[a(t)\mathbf{B} - \frac{1}{2} \dot{a}(t)\mathbf{\Lambda} \right](y) + \dot{a}(t)y \cdot \mathbf{\Lambda}(\Delta_h) - \frac{1}{2} \dot{a}(t)\Delta_h \cdot \mathbf{\Lambda}(\Delta_h) \end{aligned}$$

il faut d'abord remarquer que le calcul de la fonction duale f n'est possible que si on garde une fonction g convexe i.e. si l'opérateur :

$$a(t)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\dot{a}(t)\mathbf{\Lambda} \quad (4.6)$$

conserve toutes ses valeurs propres positives. La vérification de ce critère que nous appellerons critère de convexité se ramène à un problème aux valeurs propres. Elle apporte quelques restrictions dans le choix de la fonction $a(t)$ (cf. Section 2.3).

Une fois le critère de convexité vérifié, le calcul de la fonction duale se fait analytiquement. En effet, par définition :

$$\begin{aligned} f(x, \Delta_h) &= \sup_y [x \cdot y - g(y, \Delta_h)] \\ \implies x - 2a(t)\mathbf{B}(y) + \dot{a}(t)\mathbf{\Lambda}(y) - \dot{a}(t)\mathbf{\Lambda}(\Delta_h) &= 0 \\ \implies y &= \mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{C} = [2a(t)\mathbf{B} - \dot{a}(t)\mathbf{\Lambda}]^{-1}$ et $\mathbf{D} = -\dot{a}(t)\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x, \Delta_h) &= x \cdot [\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] - a(t)[\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] \cdot \mathbf{B}[\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{a}(t)[\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] \cdot \mathbf{\Lambda}[\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{a}(t)\Delta_h \cdot \mathbf{\Lambda}(\Delta_h) - \dot{a}(t)[\mathbf{C}(x) + \mathbf{D}(\Delta_h)] \cdot \mathbf{\Lambda}(\Delta_h) \\ &= f_2(x) + f_1(x, \Delta_h) + f_0(\Delta_h) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x \cdot \left[\mathbf{C} - a(t)\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C} + \frac{1}{2}\dot{a}(t)\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C} \right] (x) \\ &= x \cdot \mathbf{F}_2(x) \\ f_1(x, \Delta_h) &= x \cdot \left[\mathbf{D} - 2a(t)\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{D} + \dot{a}(t)\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D} - \dot{a}(t)\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} \right] (\Delta_h) \\ &= x \cdot \mathbf{F}_1(\Delta_h) \\ f_0(\Delta_h) &= \Delta_h \cdot \left[-a(t)\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\dot{a}(t)\mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\dot{a}(t)\mathbf{\Lambda} - \dot{a}(t)\mathbf{D}\mathbf{\Lambda} \right] (\Delta_h) \\ &= \Delta_h \cdot \mathbf{F}_0(\Delta_h) \end{aligned}$$

Remarque : Nous faisons ici le calcul de la fonction duale sur la fonction g qui est locale en espace et en temps. Une autre façon de procéder est de dualiser la fonction globale en temps et/ou en espace i.e. la fonction :

$$G = \int_0^T g \, dt \quad \text{ou} \quad G = \int_0^T \int_{\Omega} g \, d\Omega dt$$

Ceci fournit généralement des bornes plus précises (d'autant plus précises que la fonction à dualiser est globale) même si la fonction duale est alors plus difficile à obtenir. Un bon compromis, que nous préconisons, est de dualiser la fonction G globale en temps mais locale en espace.

Cependant, dans notre cas précis, dualiser la fonction locale ou globale en temps donne le même résultat. En effet, la fonction g ne faisant pas intervenir de dérivées temporelles de y , la fonction y éventuellement discontinue en temps et réalisant en tout point la borne supérieure de $x \cdot y - g(y, \Delta_h)$ peut être approchée par une suite de fonctions continues en temps. On a donc :

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \int_0^T [x \cdot y - g(y, \Delta_h)] dt = \int_0^T \sup_{y \in \mathcal{Y}} [x \cdot y - g(y, \Delta_h)] dt \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

2.3 Choix de la fonction de pondération $a(t)$

Le choix d'une fonction $a(t)$ telle que $a(t) \geq 0$, $a(T) = 0$ et vérifiant le critère de convexité est assez vaste, et il est toujours possible de trouver une fonction optimale en fonction de la quantité d'intérêt I considérée. Cependant, pour les applications numériques, nous nous limiterons à deux types de fonctions $a(t)$:

- pour les quantités d'intérêt qui ne dépendent pas asymptotiquement de l'histoire, nous prenons (Figure 4.7) :

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \exp [k(t - T')] \quad \forall t \in [0, T'] \\ &= \frac{T - t}{T - T'} \quad \forall t \in [T', T] \end{aligned}$$

où k et $T' \in [0, T]$ sont des paramètres à fixer.

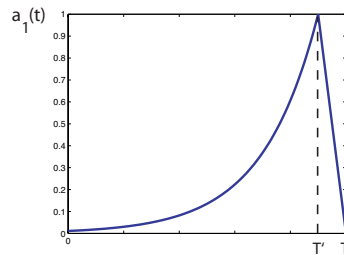


Figure 4.7: Évolution de la fonction $a_1(t)$

Afin de respecter le critère de convexité, on doit avoir k inférieur à une valeur critique

k_0 . Dans notre cas, avec $\mathbf{B}_i = \frac{1}{\tau_i} \mathbf{K}_i^{-1}$, on obtient :

$$k_0 = \min_{i \in \{1, n\}} \frac{2}{\tau_i}$$

Remarque : *Ce résultat montre que la valeur de k est limitée par le temps caractéristique de viscosité le plus long dans le modèle viscoélastique.*

Une étude paramétrique a été menée par M. Wynant lors de son stage de Master II au LMT-Cachan [Wynant 2006]. En regardant l'impact de k et T' sur les performances de l'encadrement d'erreur sur des quantités d'intérêt ne dépendant pas asymptotiquement de l'histoire, il en ressort que :

- bien que les résultats ne soient pas très sensibles à la valeur de k sur une large plage de valeurs, une valeur optimale de k semble être :

$$k_{opti} = \min_{i \in \{1, n\}} \frac{1}{\tau_i}$$

- les bornes sont d'autant meilleures que T' est proche de T .

Nous prendrons donc dans la suite :

$$k = \min_{i \in \{1, n\}} \frac{1}{\tau_i} \quad \text{et} \quad T' = T - \Delta t$$

• pour les quantités d'intérêt dépendantes de l'histoire, nous prenons (Figure 4.8) :

$$a_2(t) = 1 - \frac{t}{T} \quad \forall t \in [0, T]$$

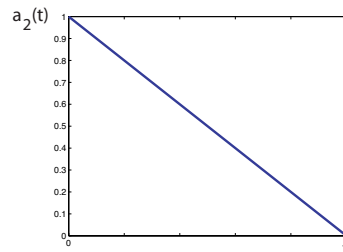


Figure 4.8: Évolution de la fonction $a_2(t)$

3 Résultats numériques

Nous reprenons l'exemple de la Figure 4.1, avec une évolution temporelle du déplacement donnée sur la Figure 4.9.

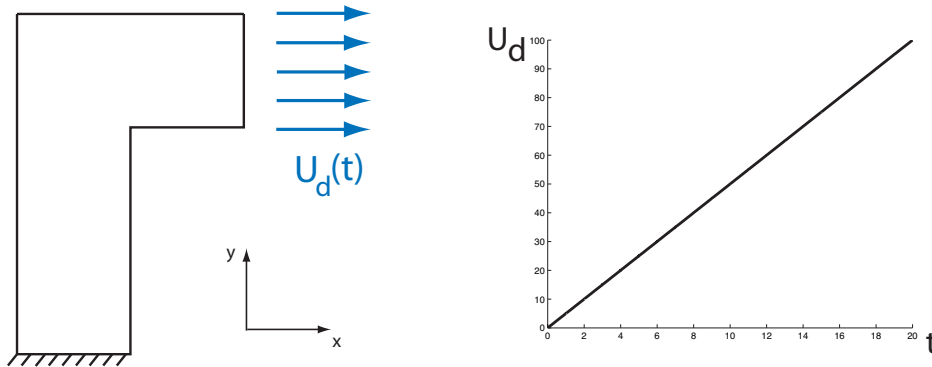


Figure 4.9: Structure 2D étudiée (gauche) et évolution de son chargement (droite)

L'erreur en dissipation associée est représentée sur la Figure 4.10.

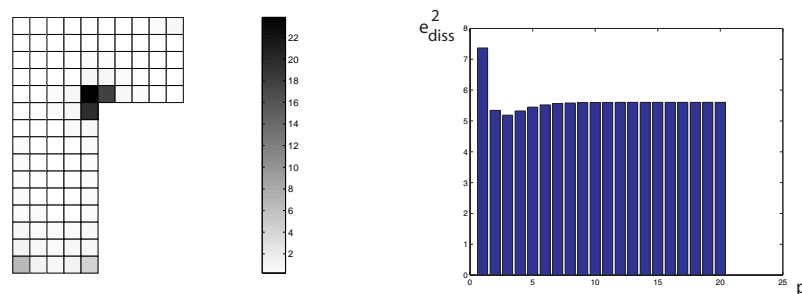


Figure 4.10: Distribution spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation e_{diss}^2

- Estimation d'une quantité d'intérêt indépendante de l'histoire

On s'intéresse dans un premier temps à la quantité d'intérêt :

$$I(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \dot{\epsilon}_{1yy}^p|_t d\omega$$

qui est asymptotiquement indépendante de l'histoire. La Figure 4.11 montre d'une part la localisation de ω , qui correspond à un des éléments les plus chargés de la structure, et d'autre part l'évolution temporelle de $I(t)$.

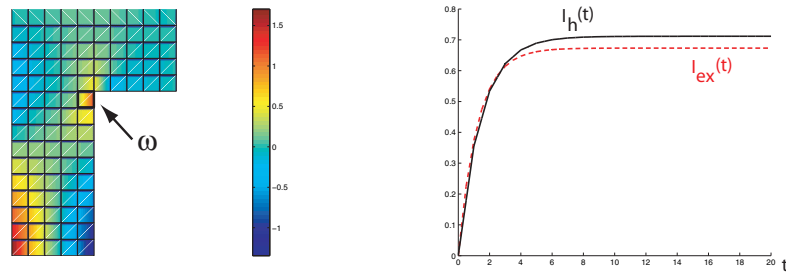


Figure 4.11: Carte du champ $\dot{\epsilon}_{1h_{yy}}^p$ à $t = T$ (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)

Le chargement du problème adjoint qui en résulte consiste en une précontrainte $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}(t)$ dans la zone ω comme le montre la Figure 4.12 dans le cas où on estime l'erreur sur I à $t = 14$.

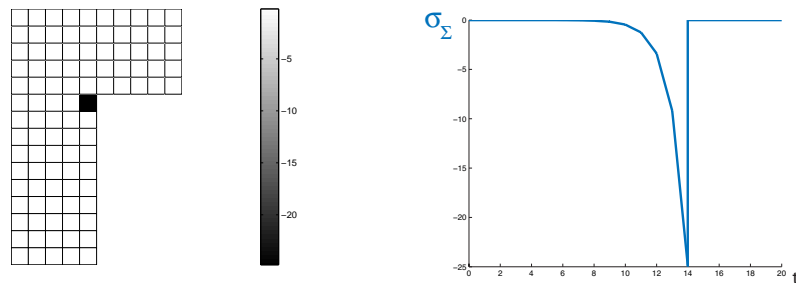


Figure 4.12: Évolution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

Après résolution du problème adjoint par réanalyse locale, avec $N_c = 2$, $r = 3$ et $\Delta t / \Delta t' = 3$, on aboutit à une erreur en dissipation \tilde{e}_{diss} qui se distribue spatialement et temporellement comme illustré sur la Figure 4.13.

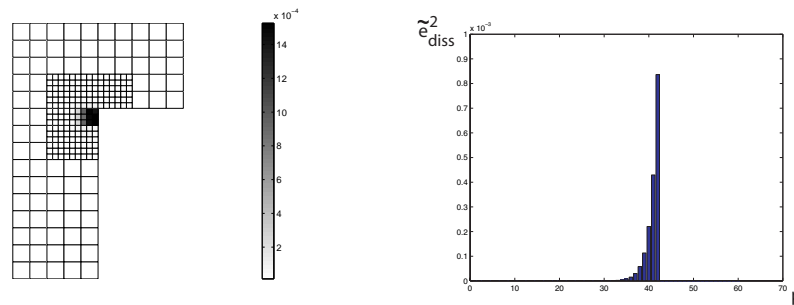


Figure 4.13: Répartition spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2

On compare alors les bornes classiques χ_{inf} et χ_{sup} données dans le Chapitre 3 avec les bornes ξ_{inf} et ξ_{sup} que nous venons de mettre en place. Dans ce dernier cas, on utilise la fonction de pondération $a_1(t)$ qui donne la nouvelle erreur E_{diss} pour le problème de référence (Figure 4.14).

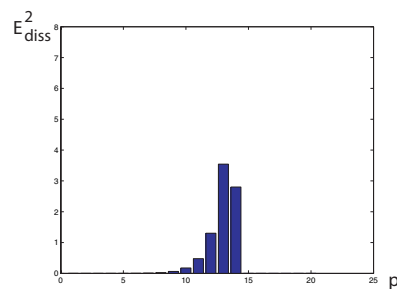


Figure 4.14: Distribution à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation e_{diss}^2 pondérée par $a_1(t)$

Les bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$, $\bar{\chi}_{sup}$, $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ sont représentées sur la Figure 4.15 en fonction de la date t d'estimation de la quantité d'intérêt I :

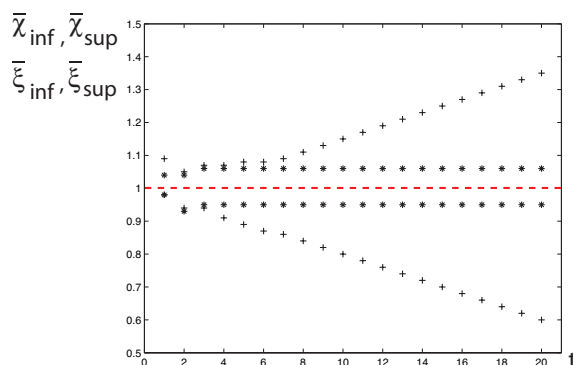


Figure 4.15: Bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$, $\bar{\chi}_{sup}$ (+) et $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ (*) en fonction du temps

La Figure 4.16 donne quant à elle l'encadrement garanti de $I_{ex}(t)$ qui résulte des bornes χ_{inf} , χ_{sup} ou ξ_{inf} , ξ_{sup} .

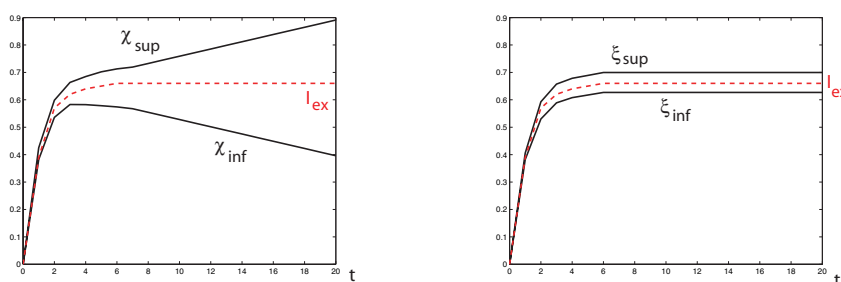


Figure 4.16: Encadrement garanti de I_{ex} au cours du temps avec les bornes χ_{inf} , χ_{sup} (gauche) et ξ_{inf} , ξ_{sup} (droite)

On voit donc que les nouvelles bornes permettent de tenir compte efficacement des effets d'histoire.

- Estimation d'une quantité d'intérêt dépendante de l'histoire

On s'intéresse maintenant à la quantité d'intérêt :

$$I(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \epsilon_{1_{yy}|t}^p d\omega$$

qui est une quantité dépendante de l'histoire (Figure 4.17). La zone ω reste la même que précédemment.

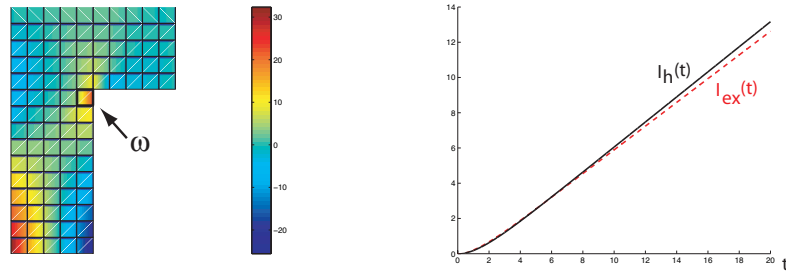


Figure 4.17: Carte du champ $\epsilon_{1h_{yy}}^p$ à $t = T$ (gauche) et évolution temporelle de $I(t)$ (droite)

Le chargement du problème adjoint qui en résulte consiste à nouveau en une précontrainte $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}(t)$ dans la zone ω mais l'évolution en temps de celle-ci est différente (Figure 4.18 dans le cas où on estime l'erreur sur I à $t = 14$).

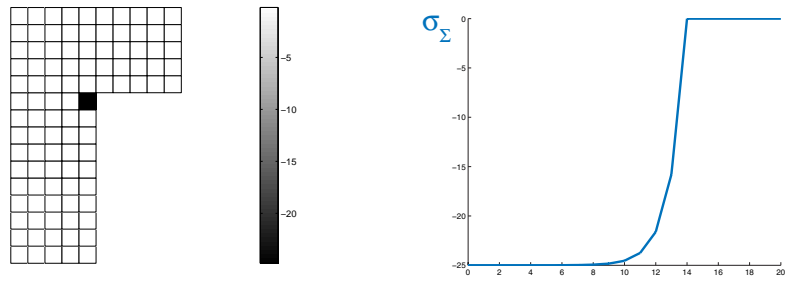


Figure 4.18: Évolution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

En gardant le même raffinement de maillage que précédemment, on obtient la distribution d'erreur en dissipation donnée sur la Figure 4.19.

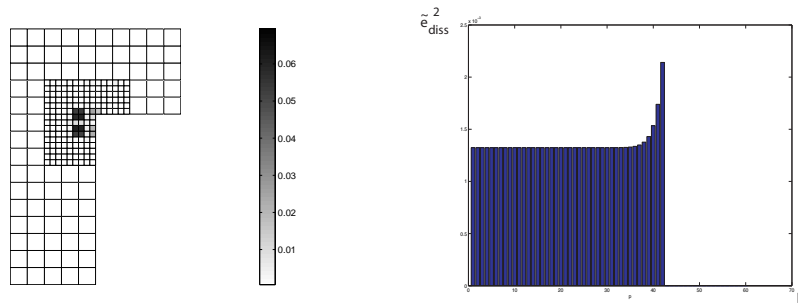


Figure 4.19: Répartition spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2

On compare à nouveau les bornes χ_{inf} , χ_{sup} et ξ_{inf} , ξ_{sup} en utilisant cette fois la fonction de pondération $a_2(t)$ qui donne l'erreur E_{diss} pour le problème de référence (Figure 4.20).

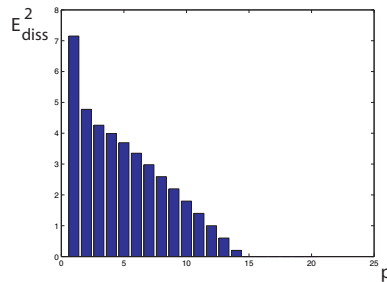


Figure 4.20: Distribution à chaque pas de temps de l'erreur en dissipation e_{diss}^2 pondérée par $a_2(t)$

Les bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$, $\bar{\chi}_{sup}$, $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ sont représentées sur la Figure 4.21 en fonction de la date t d'estimation de la quantité d'intérêt I :

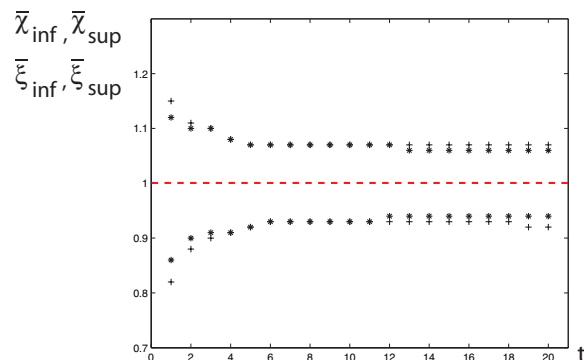


Figure 4.21: Bornes normées $\bar{\chi}_{inf}$, $\bar{\chi}_{sup}$ (+) et $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$ (*) en fonction du temps

Les nouvelles bornes apportent donc dans ce cas une amélioration moindre. Notons que celles faisant intervenir $a_1(t)$ sont inappropriées ici et donnent des résultats très mauvais. Cela est dû au fait que la fonction de pondération $a_1(t)$ est très faible loin du temps d'estimation de la quantité d'intérêt. La fonction duale f comprend alors des opérateurs (\mathbf{F}_2 notamment) très grands qui ne sont pas compensés par une faible valeur de \tilde{x}_h , l'erreur en dissipation du problème adjoint ayant dans cet exemple des contributions non négligeables à chaque pas de temps (Figure 4.19).

4 Bilan

Nous avons mis en place une technique permettant de ne pas cumuler inutilement l'erreur en temps, particulièrement pour les quantités d'intérêt dépendant peu de l'histoire. L'emploi de l'inégalité de Legendre-Fenchel apporte en outre une majoration qui est beaucoup plus efficace que celles classiquement obtenues par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; il faut cependant veiller à garder des propriétés de convexité.

Nous avons donc à notre disposition une méthode d'estimation d'erreur locale efficace et qui s'adapte à chaque quantité d'intérêt. Cette méthode reste cependant intrusive car elle nécessite un raffinement local en espace et en temps pour résoudre suffisamment finement le problème adjoint et avoir ainsi des encadrements pertinents.

Dans le chapitre suivant, nous montrons comment améliorer de manière non-intrusive la qualité du calcul associé au problème adjoint, ce qui donne plus de souplesse à la méthode.

Approche non-intrusive pour la résolution du problème adjoint

Nous mettons en place dans ce chapitre une procédure de résolution du problème adjoint restant non-intrusive dans le but d'avoir une méthode d'estimation d'erreur locale à la fois précise et pratique.

Sommaire

1	Intérêts d'une méthode non-intrusive	110
2	Nouvelle résolution du problème adjoint	111
2.1	Mise en place de la technique « handbook »	111
2.2	Calcul des fonctions d'enrichissement	113
2.3	Écriture du problème à résoudre	114
3	Obtention des bornes associées	115
3.1	Construction d'une solution admissible	115
3.2	Calcul des bornes	116
4	Résultats numériques	117
4.1	Exemple 1D	117
4.2	Exemple 2D	121
5	Bilan	127

1 Intérêts d'une méthode non-intrusive

Les différents exemples donnés dans les Chapitres 3 et 4 ont montré que les bornes d'erreur sur une quantité locale I pouvaient être rendues de très bonne qualité si le problème adjoint était correctement résolu. Cette résolution n'est pas si évidente à mener en 2D/3D car le chargement localisé du problème adjoint conduit généralement à une solution présentant de forts gradients en espace et en temps.

Une première façon de remédier à ce problème a été étudiée précédemment ; elle consiste à raffiner localement (i.e. dans la zone de forts gradients) le maillage spatio-temporel utilisé. Cependant cette méthode est intrusive car elle nécessite un remaillage et le calcul de nouveaux opérateurs pour la résolution.

Nous développons ici une technique non-intrusive pour la résolution du problème adjoint [Chamoin et Ladevèze 2007]. Nous entendons par « non-intrusive » que cette résolution va s'appuyer sur le même maillage spatio-temporel $\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_{\Delta t}$ que celui utilisé pour la résolution approchée du problème de référence ; ainsi, les mêmes opérateurs pourront être utilisés. Cet objectif est motivé par le fait que le problème adjoint est semblable au problème de référence dans le sens des temps rétrogrades (cf. Section 1.2 du Chapitre 3). Les seules données qui sont modifiées entre les résolutions des deux problèmes concernent le chargement.

L'idée générale suivie pour mettre en place une méthode efficace et non-intrusive de résolution du problème adjoint consiste à introduire la partie à forts gradients de la solution à l'aide d'un enrichissement de l'espace d'approximation classique éléments finis. De nombreuses méthodes d'enrichissement existent. Citons par exemple :

- les méthodes sans maillage (« Element Free Galerkin » (Belytschko), « hp-clouds method » (Duarte), « RKPM » (Liu)) dont une revue est donnée dans [Huerta *et al.* 2004]. Les problèmes associés à ces méthodes sont essentiellement liés à l'intégration et aux conditions limites, imposées par des multiplicateurs de Lagrange.
- les méthodes de Trefftz : pour les composites par exemple, on introduit des fonctions spéciales de problèmes locaux qui reflètent la solution. L'inconvénient est qu'on assure la continuité par des multiplicateurs de Lagrange qui apportent des problèmes de stabilité.

La méthode d'enrichissement que nous allons utiliser ici s'inspire de la « Generalized Finite Element Method (GFEM) » initiée par Strouboulis [Strouboulis *et al.* 2000a]. Dans cette méthode, on introduit des fonctions d'enrichissement dans la base de fonctions d'approximation, à l'aide d'une partition de l'unité associée généralement aux fonctions de forme éléments finis [Melenk et Babuška 1997] ; ceci permet de garder une solution conforme en déplacement. Dans la GFEM, les fonctions d'enrichissement sont construites numériquement en résolvant à l'échelle fine un panel de problèmes locaux ; cette technique fournit une bibliothèque de fonctions « handbook » permettant de traiter des détails structuraux comme les inclusions ou les trous.

Une méthode similaire à la GFEM a été introduite dans [Moës *et al.* 1999] : c'est

la « eXtended Finite Element Method (XFEM) ». Là encore, des fonctions d'enrichissement sont introduites au travers de la PUM mais ces fonctions, données sous une forme analytique [Leguillon et Sanchez-Palencia 1987], sont plus dédiées à la représentation de singularités géométriques telles que les discontinuités ou les pointes de fissures.

La mise en œuvre de la méthode d'enrichissement pour la résolution du problème adjoint est détaillée dans la suite de ce chapitre.

2 Nouvelle résolution du problème adjoint

2.1 Mise en place de la technique « handbook »

On prend comme partition d'unité les fonctions ϕ_i correspondant aux fonctions de forme éléments finis classiques associées aux nœuds i du maillage spatial \mathcal{M}_h ($i \in \{1, nno\}$) avec nno : nombre total de nœuds du maillage \mathcal{M}_h). Ces fonctions ϕ_i , qui ont pour support les patches Ω_i , sont telles que :

$$\begin{aligned} \phi_i &= \delta_{ij} \quad \text{au nœud } j \quad (i, j \in \{1, nno\}) \\ \sum_{i=1}^{nno} \phi_i &= 1 \end{aligned}$$

On montre alors [Strouboulis *et al.* 2000a], en notant $\|\bullet\|_{L^2(A)}$ la norme L^2 sur l'espace A , que si une fonction \underline{u} peut être approchée sur chaque patch Ω_i par une autre fonction \underline{v}_i telle que :

$$\|\underline{u} - \underline{v}_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_{1_i} ; \quad \|\nabla \underline{u} - \nabla \underline{v}_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_{2_i}$$

alors la fonction \underline{u}^h définie par :

$$\underline{u}^h(x) = \sum_{i=1}^{nno} \phi_i(x) \underline{v}_i(x)$$

satisfait :

$$\begin{aligned} \|\underline{u} - \underline{u}^h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 \left(\sum_{i=1}^{nno} \varepsilon_{1_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}^h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left[\sum_{i=1}^{nno} \left(\frac{C_1}{|\Omega_i|} \right)^2 \varepsilon_{1_i}^2 + C_2^2 \varepsilon_{2_i}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dans notre cas, on ne va apporter l'enrichissement \underline{v}_i par la PUM que dans les régions où cela est nécessaire i.e. dans un voisinage de la zone de chargement du problème adjoint, l'objectif étant de bien capter la partie à forts gradients de la solution. La PUM n'est donc appliquée que sur un ensemble de nœuds du maillage ; on note ces nœuds n_j^{PUM} ($j \in \{1, nno^{PUM}\}$ avec nno^{PUM} : nombre total de nœuds concernés par l'enrichissement avec la PUM).

On note de plus Ω^{PUM} la partie de Ω impliquée par l'enrichissement par la PUM. Ω^{PUM} est séparée en deux zones (Figure 5.1) :

- une zone Ω_1^{PUM} telle que :

$$\sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}}(M) = 1 \quad \forall M \in \Omega_1^{PUM}$$

contenant en pratique la partie de la structure sur laquelle le chargement du problème adjoint est appliqué ;

- une zone Ω_2^{PUM} qui est la partie complémentaire de Ω_1^{PUM} dans Ω^{PUM} :

$$\begin{aligned} \Omega_1^{PUM} \cup \Omega_2^{PUM} &= \Omega^{PUM} \\ \Omega_1^{PUM} \cap \Omega_2^{PUM} &= \emptyset \end{aligned}$$

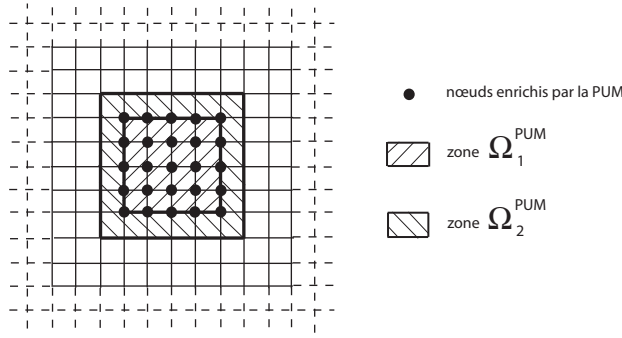


Figure 5.1: Définition des zones introduites avec la partition d'unité

En notant $(\tilde{e}^{hand}, \tilde{s}^{hand})$ la solution d'enrichissement « handbook » (son calcul est détaillé dans la Section 2.2), l'approximation complète du champ de déplacement relatif au problème adjoint s'écrit alors :

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{u}}^r + \sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}} \tilde{\underline{u}}^{hand} \quad (5.1)$$

où $\tilde{\underline{u}}^r$ est un champ de déplacement résiduel à chercher. La solution approchée du problème adjoint est donc constituée de deux parties :

- une solution « handbook » qui représente localement une solution « quasi-exacte » du chargement du problème adjoint. Cependant, cette solution ne vérifie généralement pas les conditions limites du problème ;

- une solution résiduelle à calculer qui assure la vérification de toutes les conditions limites du problème. Cette solution est en pratique très lisse donc peut être convenablement calculée avec la MEF classique.

Remarque : Les singularités rencontrées dans la solution du problème adjoint sont dues au chargement et non pas à la géométrie. Leur intensité étant parfaitement connue, on n'a pas besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaires pour l'enrichissement. On évite ainsi les problèmes de dépendance des fonctions de base qui sont un souci majeur dans les méthodes GFEM/XFEM.

2.2 Calcul des fonctions d'enrichissement

Le chargement du problème adjoint étant parfaitement connu, on calcule une solution précise représentant les singularités dues à ce chargement. Deux options sont alors possibles :

- dans de nombreux cas, on résout des problèmes locaux sur un domaine fini avec pour conditions limites celles venant d'un calcul sur le maillage grossier \mathcal{M}_h . Cette démarche nécessite un premier calcul avec le maillage grossier ; ce n'est pas ce que nous souhaitons.

- on peut aussi résoudre des problèmes en milieu infini i.e. numériquement sur un domaine suffisamment grand pour que les conditions limites n'influent pas sur la solution d'enrichissement ; c'est cette option que nous choisissons.

D'autre part, on se ramène par la transformée de Laplace à la résolution numérique d'un problème d'élasticité en milieu infini. La fonction « handbook » introduite est donc analytique en temps et numérique en espace.

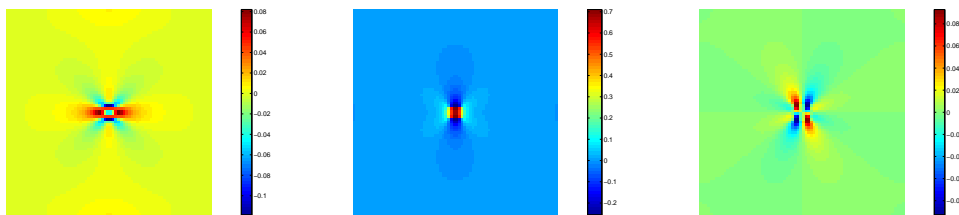


Figure 5.2: Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

Notons qu'on peut chercher les fonctions « handbook » dans un milieu semi-infini pour mieux représenter la réalité, dans le cas où la zone d'intérêt ω est proche d'un bord libre

par exemple.

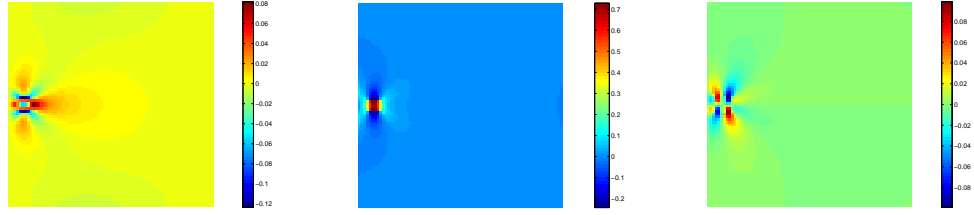


Figure 5.3: Répartition spatiale du champs de contrainte « handbook » correspondant à une précontrainte locale $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu semi-infini avec condition de bord libre : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

2.3 Écriture du problème à résoudre

D'après (5.1), les variables généralisées s'écrivent maintenant :

$$\tilde{e} = \tilde{e}^r + \tilde{e}_{PUM}^{hand} \quad ; \quad \tilde{s} = \tilde{s}^r + \tilde{s}_{PUM}^{hand} \quad (5.2)$$

et le problème adjoint consiste alors à trouver une solution résiduelle $(\tilde{e}^r, \tilde{s}^r)$ qui vérifie :

- les équations de liaison :

$$\tilde{\underline{u}}^r \in \mathcal{U}^{[0,T]} \quad ; \quad \tilde{\underline{u}}^r|_{\partial_1\Omega} = - \sum_{j=1}^{nno^{PUM}} \phi_{n_j^{PUM}} \tilde{\underline{u}}|_{\partial_1\Omega}^{hand} \quad \forall t \in [0, T] \quad ; \quad \tilde{e}^r = \tilde{e}^{r,e} + \tilde{e}^{r,p} \quad (5.3)$$

- les équations d'équilibre :

$$\tilde{\sigma}^r \in \mathcal{S}^{[0,T]} \quad ; \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\tilde{\sigma}^r \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[(\tilde{\sigma}_\Sigma - \tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}) \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T] \quad (5.4)$$

- les relations de comportement :

$$\tilde{e}^{r,e} = \mathbf{\Lambda}(\tilde{s}^r) \quad ; \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^r = \tilde{\sigma}^r \quad (\text{lois d'état}) \quad (5.5)$$

$$\dot{\tilde{e}}^{r,p} = -\mathbf{B}(\tilde{s}^r) \quad (\text{équations d'évolution}) \quad (5.6)$$

- les conditions finales :

$$\tilde{e}^{r,p}|_{t=T} = 0 \quad (5.7)$$

Remarque 1 : En pratique, la condition limite dans (5.3) se réduit à :

$$\tilde{\underline{u}}^r|_{\partial_1\Omega} = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

car dans le cas où $\exists j \in \{1, nno^{PUM}\}$ tel que $\phi_{n_j^{PUM}}|_{\partial_1\Omega} \neq 0$ (i.e. lorsque le chargement est proche de la frontière $\partial_1\Omega$), on peut construire la solution « handbook » de façon à assurer $\tilde{\underline{u}}|_{\partial_1\Omega}^{hand} = 0$.

Remarque 2 : La solution résiduelle $(\tilde{\epsilon}^r, \tilde{s}^r)$ est régulière dans chaque élément de \mathcal{M}_h et ne présente que de possibles discontinuités sur la frontière de certains éléments. En effet, vu que $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand} = \tilde{\sigma}^{hand}$ sur Ω_1^{PUM} et que $\tilde{\sigma}^{hand}$ est en équilibre avec $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans un milieu (semi-)infini, le second membre de l'équation d'équilibre se réécrit :

$$- \int_{\partial\Omega_1^{PUM}} \tilde{\sigma}^{hand} \underline{n}_{12} \cdot \underline{u}^* d\Omega - \int_{\Omega_2^{PUM}} Tr[\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand} \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad (5.8)$$

avec \underline{n}_{12} : normale sortante de Ω_1^{PUM} . Ce second membre ne contient donc plus de termes singuliers.

Grâce à son caractère très régulier, une solution approchée $(\tilde{\epsilon}_h^r, \tilde{s}_h^r)$ de la partie résiduelle $(\tilde{\epsilon}^r, \tilde{s}^r)$ peut être correctement obtenue avec le même maillage que celui utilisé pour résoudre le problème de référence. On emploie de ce fait les mêmes opérateurs (notamment la matrice de rigidité factorisée) entre les deux résolutions. Seul le nouveau chargement (5.8) a besoin d'être introduit pour la résolution du problème adjoint.

En pratique, les résolutions du problème de référence et adjoint sont réalisées en même temps.

On obtient par conséquent la résolution non-intrusive du problème adjoint souhaitée. Celle-ci donne la solution approchée $(\tilde{\epsilon}_h, \tilde{s}_h)$, constituée d'une solution d'enrichissement $(\tilde{\epsilon}_{PUM}^{hand}, \tilde{s}_{PUM}^{hand})$ prédéfinie et d'une solution résiduelle $(\tilde{\epsilon}_h^r, \tilde{s}_h^r)$ calculée par éléments finis :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_h &= \tilde{\epsilon}_h^r + \tilde{\epsilon}_{PUM}^{hand} \\ \tilde{s}_h &= \tilde{s}_h^r + \tilde{s}_{PUM}^{hand} \end{aligned}$$

3 Obtention des bornes associées

3.1 Construction d'une solution admissible

La construction d'une solution admissible $(\hat{\epsilon}_h, \hat{s}_h)$, nécessaire pour le calcul de l'erreur en dissipation du problème adjoint, est classique et utilise les mêmes techniques que celles décrites dans le Chapitre 2. En pratique, on doit calculer une solution résiduelle admissible $(\hat{\epsilon}_h^r, \hat{s}_h^r)$ vérifiant les équations (5.3), (5.4), (5.5) et (5.7).

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_h &= \hat{\epsilon}_h^r + \hat{\epsilon}_{PUM}^{hand} \\ \hat{s}_h &= \hat{s}_h^r + \hat{s}_{PUM}^{hand} \end{aligned}$$

Le seul point technique est la construction du champ $\hat{\sigma}_h^r$. Il doit satisfaire l'équation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\sigma}_h^r \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega &= - \int_{\partial\Omega_1^{PUM}} \tilde{\sigma}^{hand} \underline{n}_{12} \cdot \underline{u}^* d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_2^{PUM}} \text{Tr}[\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand} \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Cette construction reprend les procédures classiques données dans [Ladevèze et Pelle 2004] et s'appuie sur les propriétés de $\tilde{\sigma}_h^r$. La seule petite variante concerne le calcul des densités \hat{F}^r sur $\partial\Omega_1^{PUM}$. En effet, cette frontière est soumise à un chargement linéique de la forme $\underline{F} = -\tilde{\sigma}^{hand} \underline{n}_{12}$ qui n'est pas linéaire en espace. On sépare alors le chargement sur $\partial\Omega_1^{PUM}$ en une partie linéaire \underline{F}_0 et une partie complémentaire \underline{F}^* à résultante et moment nuls comme l'illustre la Figure 5.4.

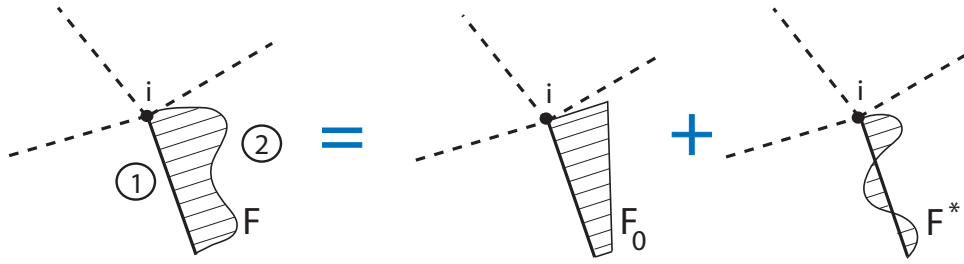


Figure 5.4: Séparation du chargement non linéaire sur $\partial\Omega_1^{PUM}$ en deux parties

On calcule dès lors de façon classique, sur le bord de chaque élément, des densités \hat{F}^r équilibrées et linéaires en ne faisant intervenir que la partie \underline{F}_0 du chargement linéique \underline{F} . En d'autres termes, on écrit dans la procédure générale, au niveau de chaque nœud i inclus dans $\partial\Omega_1^{PUM}$, une relation de la forme :

$$\underline{b}_1(i) - \underline{b}_2(i) = \underline{Q}_{E_1}(i) - \int_{\Gamma_{E_2}} \underline{F}_0 \phi_i d\Gamma \quad (\text{cf. (1.20)})$$

La partie non linéaire de \underline{F} , qui ne modifie en rien l'équilibre, est rajoutée à la fin aux densités équilibrées \hat{F}^r .

3.2 Calcul des bornes

Les bornes d'encadrement de I_{ex} restent les mêmes que celles données dans (4.5) :

$$\begin{aligned} \xi_{inf} &= I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) - 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \\ \xi_{sup} &= I_h + I_{hh} + F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h) + 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\dot{e}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_{hh} &= \langle \langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h - \tilde{s}_\Sigma \rangle \rangle + \langle \langle s_h - \hat{s}_h^m, \dot{\hat{e}}_h^p + \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle + \langle \langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{e}}_h \rangle \rangle \\
\tilde{x}_h &= -\mathbf{B}(\hat{s}_h) - \dot{\hat{e}}_h^p \\
\Delta_h &= \hat{s}_h - \hat{s}_h^m \\
F_0, F_1, F_2 &: \text{fonctionnelles connues analytiquement}
\end{aligned}$$

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il n'y a pas d'erreur de comportement au niveau des termes d'enrichissement \tilde{e}_{PUM}^{hand} et \tilde{s}_{PUM}^{hand} . On a en particulier :

$$\dot{\tilde{e}}_{PUM}^{hand,p} = -\mathbf{B}(\tilde{s}_{PUM}^{hand})$$

et par conséquent :

$$\mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{e}}_h^p = \mathbf{B}(\hat{s}_h^r) + \dot{\hat{e}}_h^{r,p}$$

De ce fait :

$$\tilde{x}_h = -\mathbf{B}(\hat{s}_h^r) - \dot{\hat{e}}_h^{r,p}$$

ce qui montre que le calcul de l'erreur en dissipation du problème adjoint ne porte que sur les termes résiduels réguliers calculés par la MEF.

L'intégration des termes présents dans l'expression de I_{hh} et faisant intervenir explicitement la partie singulière des fonctions d'enrichissement est faite par sur-discrétisation du maillage. En pratique, on prend en espace la discrétisation utilisée pour le calcul de $(\tilde{e}_{PUM}^{hand}, \tilde{s}_{PUM}^{hand})$, ce qui permet d'avoir une intégration spatiale exacte.

4 Résultats numériques

4.1 Exemple 1D

On montre dans cet exemple simple les avantages d'un enrichissement local. On considère le problème de la Figure 5.5 dans lequel on souhaite estimer l'erreur sur la quantité locale :

$$I = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \epsilon_{|T}^p dx$$

où ω est une région très localisée correspondant au deuxième tiers de l'élément 3.

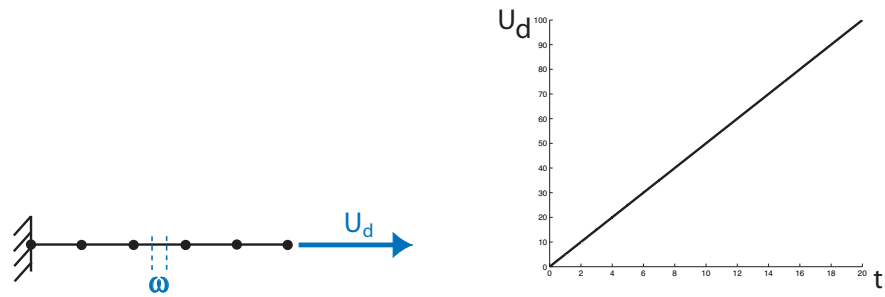


Figure 5.5: Structure considérée, avec zone locale ω (gauche) et évolution du chargement (droite)

Le chargement du problème adjoint consiste en un pré-effort \tilde{N}_Σ dans la zone ω comme l'illustre la Figure 5.6.

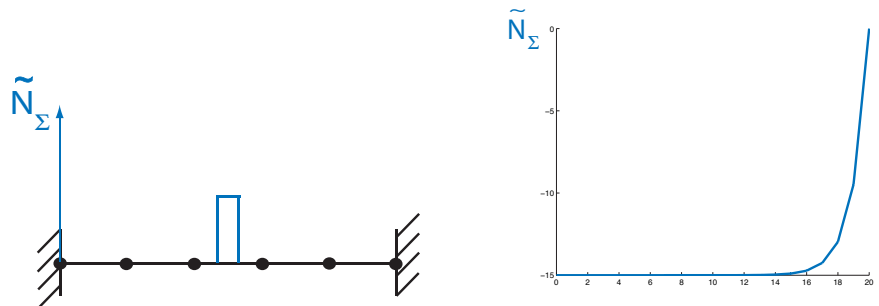


Figure 5.6: Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

On voit que pour bien capter ce chargement avec des fonctions éléments finis classiques, un raffinement du maillage spatio-temporel est nécessaire. Dans notre méthode non-intrusive, on introduit au contraire l'enrichissement donné sur la Figure 5.7 et correspondant à la solution du chargement \tilde{N}_Σ appliqué sur une poutre infinie.

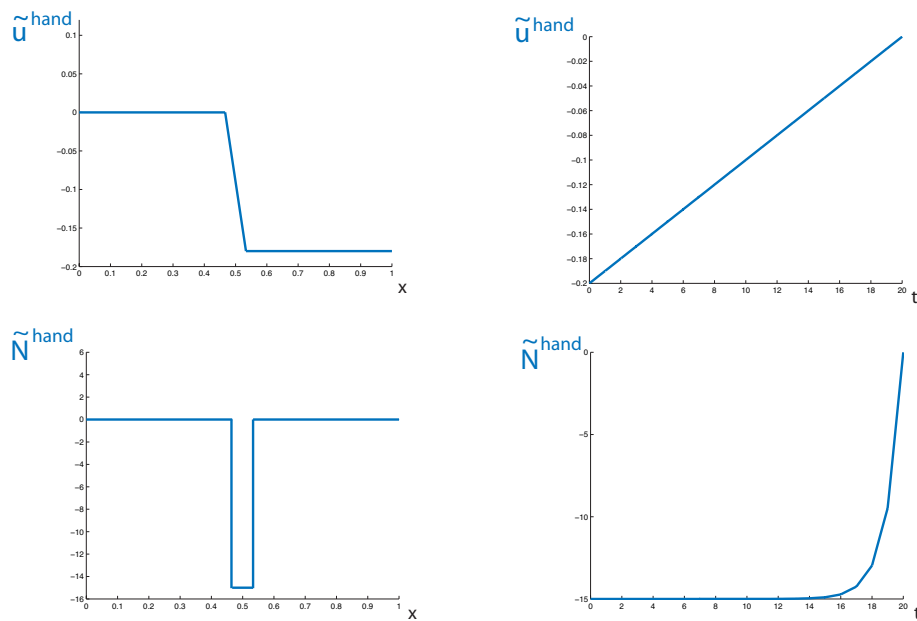


Figure 5.7: Fonctions d'enrichissement introduites en espace et en temps : déplacement \tilde{u}^{hand} (haut) et effort \tilde{N}^{hand} (bas)

L'enrichissement est apporté au travers de la PUM qu'on applique sur les nœuds 3 et 4 du maillage (Figure 5.8).

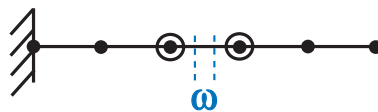


Figure 5.8: Nœuds enrichis par la PUM dans la méthode non-intrusive

On obtient alors les champs donnés sur les Figures 5.9 et 5.10, où seules les évolutions spatiales sont représentées.

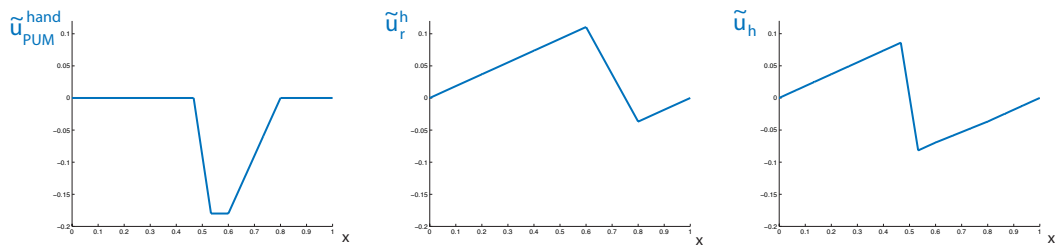


Figure 5.9: Répartition spatiale des champs \tilde{u}_{PUM}^{hand} (gauche), \tilde{u}_r^h (centre) et \tilde{u}_h (droite)

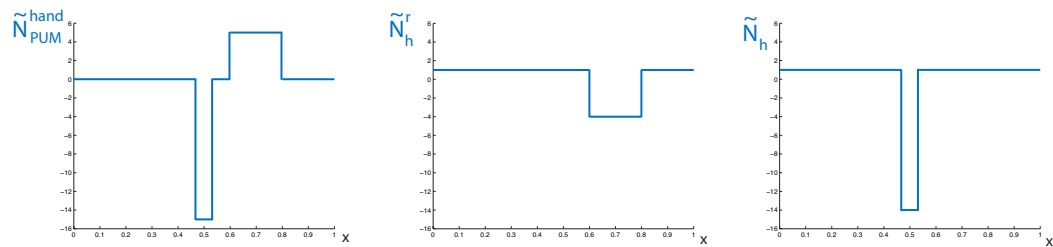


Figure 5.10: Répartition spatiale des champs \tilde{N}_{PUM}^{hand} (gauche), \tilde{N}_r^h (centre) et \tilde{N}_h (droite)

L'erreur en dissipation du problème adjoint, qui ne porte que sur les champs résiduels, est alors très faible; la Figure 5.11 montre les distributions spatiale et temporelle de celle-ci.

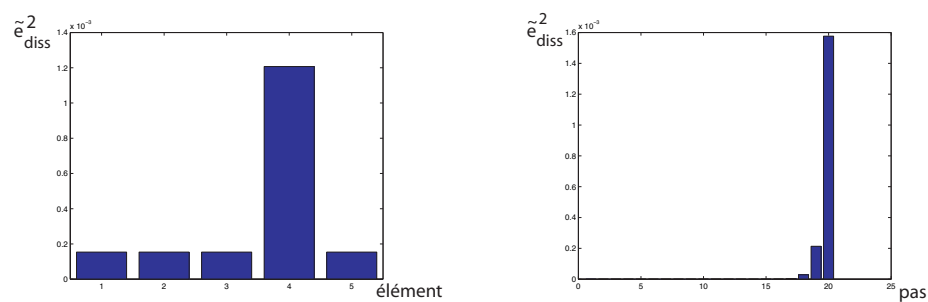


Figure 5.11: Distributions spatiale sur chaque élément (gauche) et temporelle à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation du problème adjoint

Cette erreur est principalement située dans l'élément 4 qui est l'élément de raccordement du déplacement par la PUM.

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} I_h &= 92,500 \\ \xi_{inf} &= 94,579 \\ \xi_{sup} &= 94,602 \end{aligned}$$

alors que la valeur de I_{ex} , donnée analytiquement, est 94,592. On a donc un encadrement d'erreur extrêmement précis sans procéder à aucun raffinement du maillage spatio-temporel.

4.2 Exemple 2D

Nous considérons maintenant le cas-test du portique donné sur la Figure 4.9. La quantité d'intérêt choisie est :

$$I = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \dot{\xi}_{1yy}^p|_T d\omega$$

où ω correspond au quart supérieur droit de l'élément situé dans l'angle de la structure (Figure 5.12).

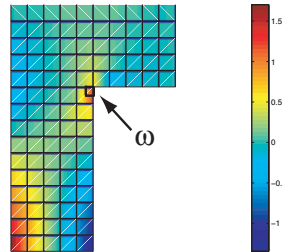


Figure 5.12: Carte du champ $\dot{\xi}_{1yy}^p$ à l'instant final T et zone ω d'étude

La solution quasi-exacte du problème adjoint correspondant, tracée sur les Figures 5.13 et 5.14, présente de forts gradients en espace et en temps, autour de la zone d'estimation de I . On voit donc qu'un fort raffinement est nécessaire si on veut calculer une solution approchée de ce problème suffisamment précise pour obtenir un encadrement d'erreur locale pertinent.

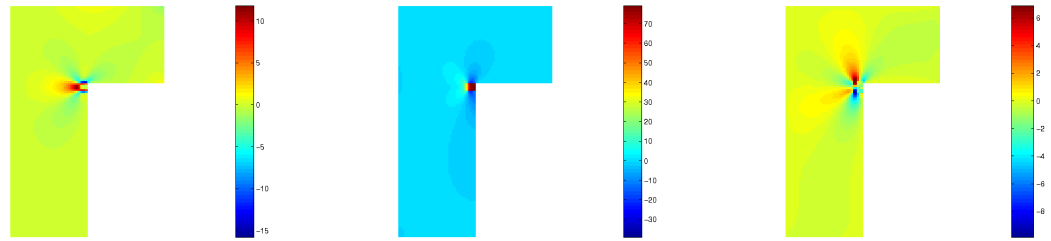


Figure 5.13: Évolution spatiale de la solution quasi-exacte du problème adjoint à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{xx}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}$ (droite)

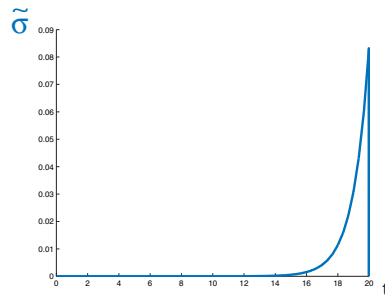


Figure 5.14: Allure de l'évolution temporelle de la solution quasi-exacte du problème adjoint

On introduit alors la fonction d'enrichissement associée au chargement du problème adjoint (l'évolution spatiale est donnée sur la Figure 5.15 et l'évolution temporelle est semblable à celle donnée sur la Figure 5.14). Cette fonction prend en compte la géométrie locale (coin) et les conditions limites proches de la zone ω (bords libres). On peut observer qu'elle est très localisée en espace (principe de Saint-Venant).

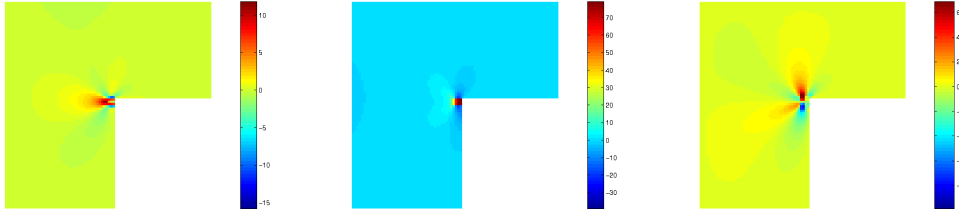


Figure 5.15: Évolution spatiale du champ de contrainte « handbook » $\tilde{\sigma}^{hand}$ utilisé : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

On considère deux enrichissements différents (Figure 5.16) : le premier, noté « enrichissement 1 », est réalisé en appliquant la PUM sur les 4 nœuds de l'élément de coin tandis que le deuxième, noté « enrichissement 2 », considère une couche de nœuds supplémentaire.

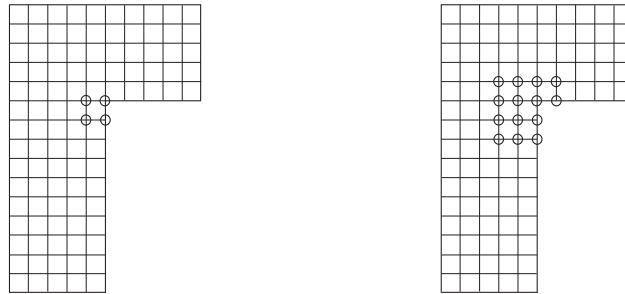


Figure 5.16: Nœuds enrichis par la PUM : enrichissement 1 (gauche), enrichissement 2 (droite)

Nous présentons les résultats obtenus avec ces deux enrichissements. Dans chaque cas, on montre l'évolution spatiale des champs de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$, $\tilde{\sigma}_h^r$ et $\tilde{\sigma}_h = \tilde{\sigma}_{PUM}^{hand} + \tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant $t = T$, l'erreur en dissipation relative au problème adjoint, avant de donner l'encadrement obtenu sur I à travers les bornes normées $\bar{\xi}_{inf}$ et $\bar{\xi}_{sup}$.

4.2.1 Résultats obtenus avec l'enrichissement 1

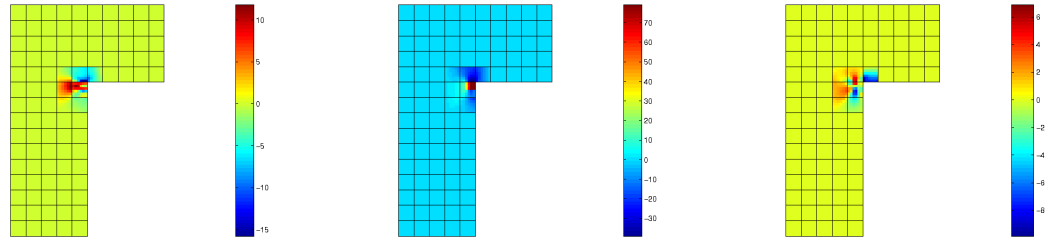


Figure 5.17: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)

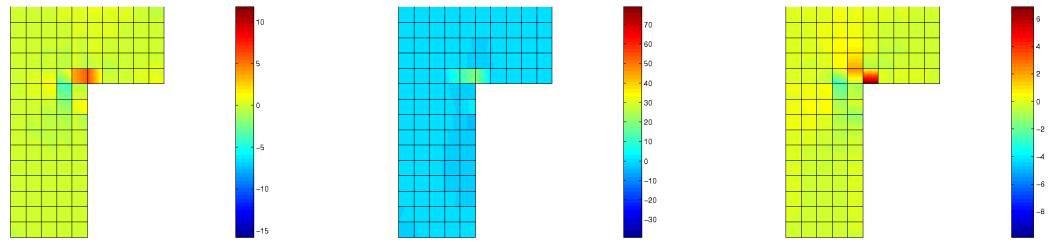


Figure 5.18: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)

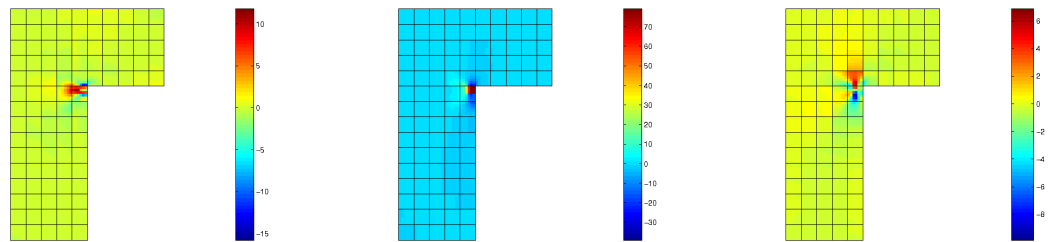


Figure 5.19: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)

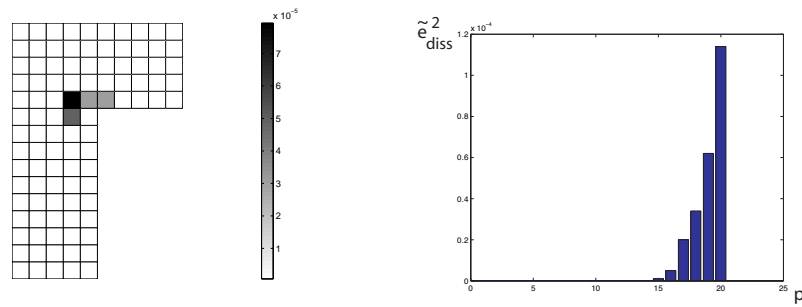


Figure 5.20: Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2

On obtient alors l'encadrement :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,94 \quad \bar{\xi}_{sup} = 1,07$$

4.2.2 Résultats obtenus avec l'enrichissement 2

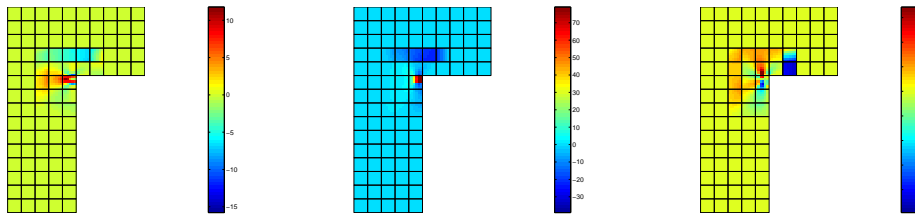


Figure 5.21: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)

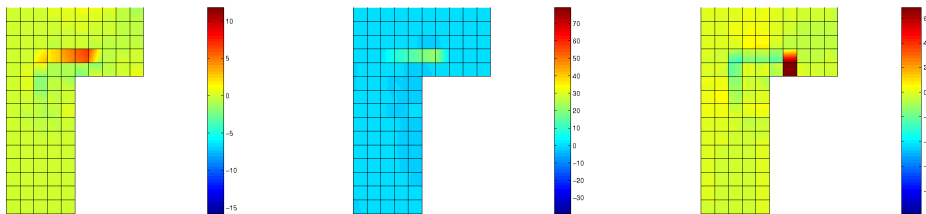


Figure 5.22: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)

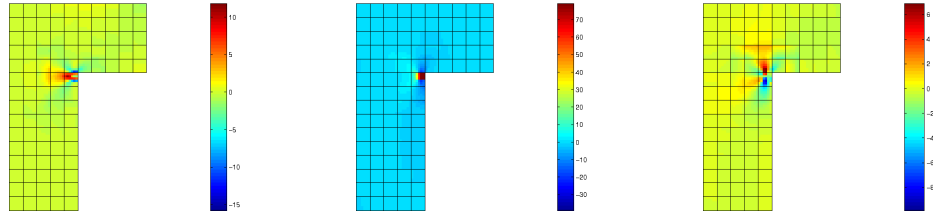


Figure 5.23: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)

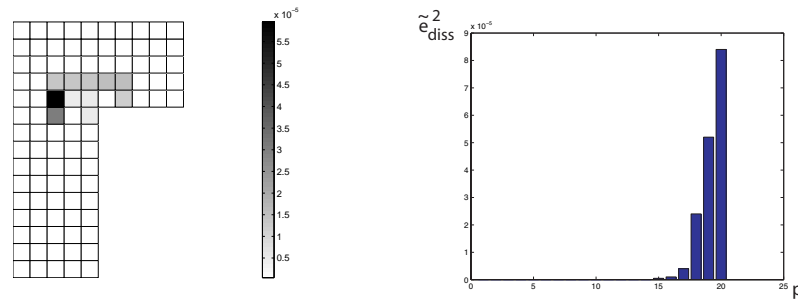


Figure 5.24: Distribution sur chaque élément (gauche) et à chaque pas de temps (droite) de l'erreur en dissipation \tilde{e}_{diss}^2

On obtient alors l'encadrement :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,97 \quad \bar{\xi}_{sup} = 1,02$$

Nous voyons donc que des bornes très précises peuvent être obtenues sur I_{ex} . Pour cela, seuls quelques nœuds situés dans la zone d'application du chargement singulier du problème adjoint ont besoin d'être enrichis. L'erreur en dissipation du problème adjoint est alors très faible.

Finissons par une remarque concernant les effets observés au niveau des éléments situés dans la zone Ω_2^{PUM} (Figures 5.17 et 5.21). Ces effets viennent du fait que le champ de déplacement \tilde{u}_{PUM}^{hand} est nul sur $\partial\Omega^{PUM}$ alors que le déplacement \tilde{u}^{hand} venant de la solution « handbook » est généralement non nul sur cette zone $\partial\Omega^{PUM}$ (Figure 5.25).

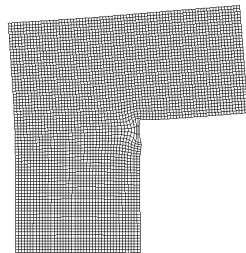


Figure 5.25: Maillage déformé de la solution $(\tilde{e}^{hand}, \tilde{s}^{hand})$

On observe alors de forts gradients de déplacement près de $\partial\Omega^{PUM}$ i.e. dans la zone de raccordement entre la solution enrichie et la solution éléments finis (Figure 5.26).

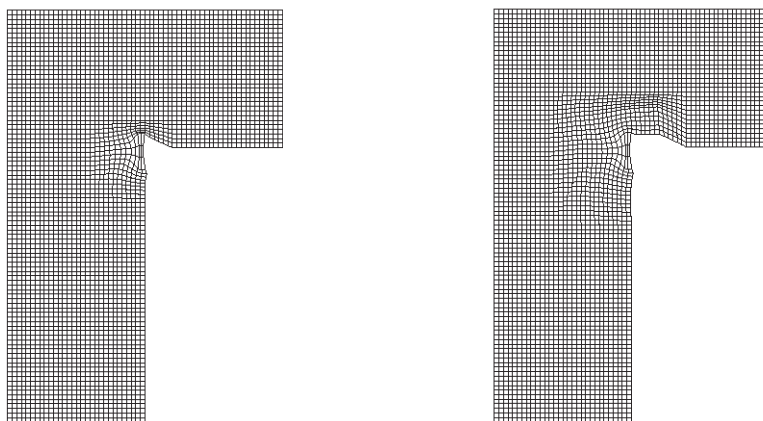


Figure 5.26: Maillage déformé de la solution $(\tilde{e}_{PUM}^{hand}, \tilde{s}_{PUM}^{hand})$ avec l'enrichissement 1 (gauche) et l'enrichissement 2 (droite)

Cependant, ces forts gradients sont correctement repris par la solution résiduelle $(\tilde{e}_h^r, \tilde{s}_h^r)$.

5 Bilan

Nous avons mis en place une technique de résolution du problème adjoint non-intrusive i.e. qui s'appuie sur la discrétisation spatio-temporelle utilisée pour le problème de référence. Les deux problèmes étant semblables, on garde ainsi les mêmes opérateurs lors de

la recherche de solutions approchées. La qualité des bornes est assurée par l'introduction de fonctions d'enrichissement, singulières mais entièrement connues, dans la solution approchée du problème adjoint.

D'un point de vue pratique, la méthode d'estimation d'erreur locale peut, par son caractère non-intrusif, être implantée plus aisément dans un code éléments finis. Il n'est pas nécessaire de modifier le maillage initial, et les problèmes de référence et adjoint sont résolus en même temps. Seule une sur-discrétisation reste nécessaire pour intégrer les quelques termes singuliers intervenant dans l'expression des bornes. Les fonctions d'enrichissement sont quant à elles pré-calculées et stockées dans une bibliothèque de fonctions ; elles sont appelées dans le code selon la quantité d'intérêt qui est considérée.

Extension de la méthode aux quantités d'intérêt ponctuelles en espace

Dans ce chapitre, on montre comment la méthode non-intrusive décrite dans le chapitre précédent permet de considérer des quantités d'intérêt ponctuelles non seulement en temps mais aussi en espace.

Sommaire

1	Difficultés associées à l'étude de quantités d'intérêt ponctuelles .	130
2	Calcul des fonctions « handbook »	131
2.1	Les fonctions de Green	131
2.2	Calcul pour les EDO et EDP simples en 2D	133
2.3	Calcul en élasticité 2D par les potentiels complexes	135
2.4	Méthode générale de calcul en élasticité 2D et 3D	136
3	Calcul des bornes d'encadrement	140
4	Résultats numériques	141
4.1	Estimation de l'erreur sur un déplacement ponctuel	141
4.2	Estimation de l'erreur sur une variable interne ponctuelle	144
4.3	Calcul d'un minorant/majorant d'une quantité sur une zone donnée	145
5	Bilan	146

1 Difficultés associées à l'étude de quantités d'intérêt ponctuelles

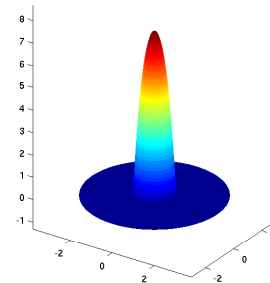
Pour les quantités d'intérêt ponctuelles (resp. linéiques) en espace en 2D (resp. 3D), la solution du problème adjoint correspondant n'est généralement pas à énergie finie. Ceci est dû au fait que pour de telles quantités, le chargement du problème adjoint (force, précontrainte, ...) est lui aussi ponctuel ou linéique ; la théorie du premier gradient aboutit alors à une solution \tilde{u} n'appartenant pas aux espaces de régularité classiques [Duvaut et Lions 1976, Germain et Nayroles 1976]. Il est ainsi difficile d'approximer la solution exacte du problème adjoint et de la manipuler ...

La procédure généralement utilisée pour s'affranchir de ce problème consiste à régulariser la quantité d'intérêt de façon à borner l'énergie de (\tilde{e}, \tilde{s}) . Pour cela, on peut par exemple remplacer la quantité d'intérêt ponctuelle au point \underline{x}_0 par une moyenne de cette quantité d'intérêt dans une région localisée autour de \underline{x}_0 . Dans [Prudhomme et Oden 1999] par exemple, la quantité d'intérêt ponctuelle est mise sous la forme :

$$I(\underline{x}_0) \approx \int_{\Omega} I(\underline{x}) k_{\varepsilon}(\underline{x} - \underline{x}_0) d\Omega$$

où k_{ε} est une fonction de pondération (*mollification function*) définie par :

$$k_{\varepsilon}(\underline{x}) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\underline{x}|^2}\right) & \text{si } |\underline{x}| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



La constante C est choisie pour normaliser la fonction k_{ε} ($\int_{\Omega} k_{\varepsilon} d\Omega = 1$ par exemple) et la valeur de ε est prise de l'ordre de la taille des éléments du maillage au voisinage de \underline{x}_0 .

De ce fait, le chargement du problème adjoint est maintenant réparti sur une petite zone Ω_{ε} ; l'erreur faite sur la quantité d'intérêt reste en outre en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Remarque : Dans le cas où la quantité d'intérêt ponctuelle concerne le déplacement sur un nœud i du maillage, une régularisation directe consiste à prendre la force ponctuelle constituant le chargement du problème adjoint comme une force nodale (Figure 6.1).

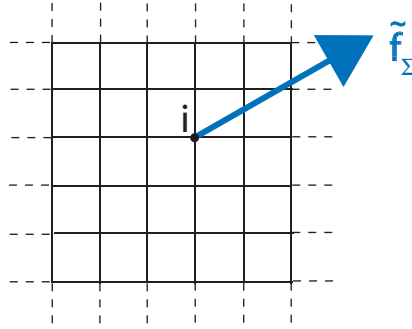


Figure 6.1: Application d'une force ponctuelle sur un nœud du maillage

Cette procédure ne donne cependant qu'une solution approximative du problème adjoint (cf. Section 4.1).

Nous montrons ici qu'avec la méthode non-intrusive décrite dans le chapitre précédent, les quantités d'intérêt ponctuelles (ou linéiques) en espace peuvent être pleinement considérées, sans procéder à aucune régularisation. Nous nous limiterons ici aux quantités d'intérêt ponctuelles.

2 Calcul des fonctions « handbook »

2.1 Les fonctions de Green

Pour les quantités d'intérêt ponctuelles en espace, les fonctions d'enrichissement à apporter dans la méthode non-intrusive correspondent aux fonctions de Green [Greenberg 1948, Washizu 1953] (les fonctions d'enrichissement calculées dans le Chapitre 5 peuvent être vues quant à elles comme des fonctions de Green généralisées). Les fonctions de Green ont été introduites par Georges Green en 1828 pour l'électromagnétisme. Elles ont été dénommées ainsi par Riemann en 1869 qui les a utilisées pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace 2D. Elles ont aussi été utilisées par Kirchhoff pour la propagation d'onde en 3D ou Helmholtz en acoustique. Elles ont vu une expansion rapide dans les années 60 due à leur utilisation dans la Méthode des Équations Intégrales.

Les fonctions de Green sont les solutions d'équations aux dérivations ordinaires (EDO) ou d'équations aux dérivées partielles (EDP) ayant pour second membre un chargement de type Dirac. Il existe en général plusieurs fonctions de Green pour la même équation, en fonction des conditions limites du problème. Une fonction de Green est donc entièrement définie par l'EDO (ou EDP) et les conditions limites.

Cependant, ces fonctions sont généralement à énergie infinie, comme l'illustre l'exemple de la Figure 6.2 dans lequel une structure carrée élastique est encastrée à sa base et soumise

à une effort ponctuel en son centre.

En augmentant le nombre N_e d'éléments du maillage de façon à trouver une solution approchée de plus en plus fine à ce problème, on observe le champ de contrainte singulier décrit sur la Figure 6.2 et une non-convergence de l'énergie de déformation élastique W^{el} (Figure 6.3).

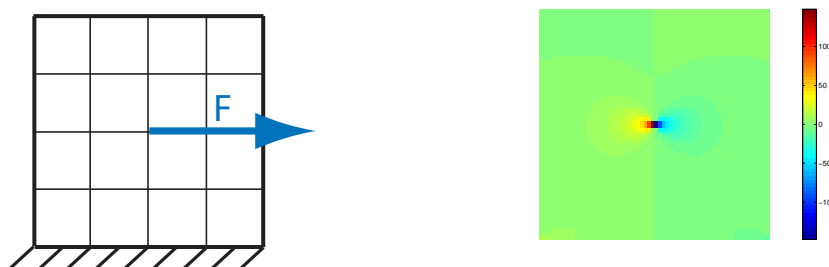


Figure 6.2: Structure considérée (gauche) et champs de contrainte σ_{xx} obtenu avec 4096 éléments (droite)

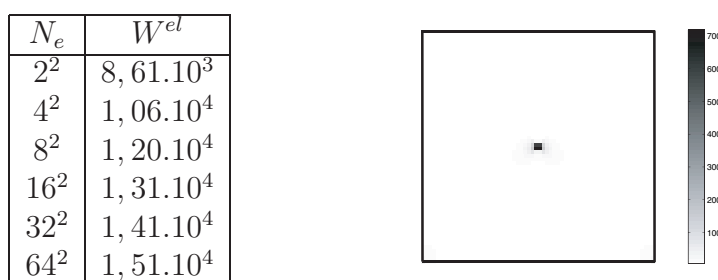


Figure 6.3: Non-convergence de l'énergie de la solution approchée (gauche) et répartition de cette énergie pour $N_e = 4096$ (droite)

Pour notre étude, les fonctions de Green sont déterminées de façon analytique. Elles sont calculées dans un milieu élastique infini ou semi-infini.

Nous détaillons dans la suite de ce chapitre les méthodes de la littérature dédiées au calcul analytique des fonctions de Green. Celles-ci seront cherchées dans tous les cas sous la forme générale :

$$\underline{K}(M, t) = \underline{K}_S(M, t) + \underline{\gamma}(M, t)$$

où $\underline{K}_S(M, t)$ est une fonction singulière, pouvant être à énergie infinie, et $\underline{\gamma}(M, t)$ est une solution régulière de l'EDO (EDP) homogène qui permet de vérifier les conditions limites du problème.

2.2 Calcul pour les EDO et EDP simples en 2D

Pour les simples EDO et EDP, les fonctions de Green associées sont bien connues et faciles à obtenir. Dans [Courant et Hilbert 1953], on donne leur expression analytique $K(x, y)$ en 2D, pour des EDP à une inconnue scalaire de la forme :

$$L[u] = -\varphi(x, y)$$

et pour des problèmes simples (laplacien, double laplacien). Il faut noter que les fonctions de Green, solutions de :

$$L[u] = -\delta(\xi_0, \eta_0)$$

vérifient l'EDP homogène (elles sont donc continues ainsi que leurs dérivées) partout sauf au point $P_0(\xi_0, \eta_0)$ d'application du Dirac.

Le terme K_S prenant en compte la singularité due au Dirac peut être déterminé en cherchant la solution de l'EDP lorsque le second membre est une densité de force φ_ϵ contenue dans un cercle C (ou une sphère S en 3D) de rayon ϵ centré autour du point source $P_0(\xi_0, \eta_0)$, et telle que :

$$\iint_C \varphi_\epsilon(x, y) dx dy = 1$$

2.2.1 Application pour le laplacien et le double laplacien en 2D

Dans ce cas, la solution de $\Delta K_\epsilon = -\varphi_\epsilon$ vérifie :

$$\iint_C \Delta K_\epsilon dx dy = -1$$

soit, en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\partial C} \frac{\partial}{\partial r} K_\epsilon ds = -1$$

où s est la longueur d'arc mesurée sur la frontière de ∂C et $r = \sqrt{(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2}$ est la distance par rapport au point source P_0 .

En faisant tendre ϵ vers 0, on montre facilement que la solution de $\Delta K = -\delta(\xi_0, \eta_0)$ est de la forme :

$$K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi_0, \eta_0)$$

Remarque : En 3D, la fonction de Green associée au laplacien s'écrit :

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi r} + \gamma(x, y, z; \xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

avec $r = \sqrt{(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2}$ distance par rapport au point source P_0 .

Dans le cas du double laplacien, on applique la même méthode et on trouve que la solution de $\Delta\Delta K = -\delta(\xi_0, \eta_0)$ est de la forme (en 2D) :

$$K(x, y) = -\frac{1}{8\pi}r^2 \log r + \gamma(x, y; \xi_0, \eta_0)$$

2.2.2 Vérification des conditions limites

La vérification des conditions limites par les fonctions de Green K est assurée par le choix de la fonction γ . La technique générale consiste à ajouter la contribution de singularités placées en dehors du domaine Ω . Nous donnons une illustration dans le cas du problème du laplacien en 2D, dans un domaine Ω circulaire de rayon unité, avec des conditions de Dirichlet ($u = 0$) sur le bord $\partial\Omega$ du domaine (Figure 6.4).

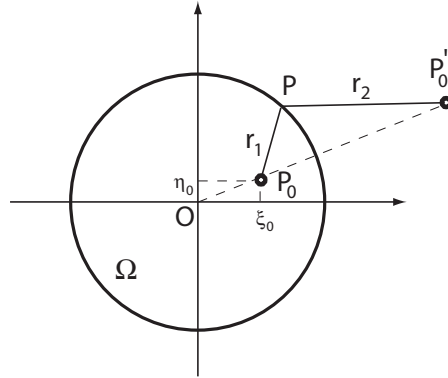


Figure 6.4: Définition du domaine circulaire Ω et des points P_0 et P'_0

Soit $P_0(\xi_0, \eta_0)$ le point d'application du Dirac, avec $\xi_0^2 + \eta_0^2 \leq 1$. Si $\xi_0 = \eta_0 = 0$ (P_0 confondu avec le centre du cercle), la fonction de Green vérifiant les conditions limites est très simple à écrire :

$$K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log r$$

Sinon, on considère le point P'_0 , de coordonnées $(\frac{\xi_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \frac{\eta_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2})$, appelé point de réflexion de P_0 . Pour un point P de Ω , on note r_1 la distance entre P et P_0 ($r_1 = \overline{PP_0}$) et r_2 la distance entre P et P'_0 ($r_2 = \overline{PP'_0}$).

Dès lors, pour tout point P du bord $\partial\Omega$, le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ reste constant et égal à $\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$ (propriété des ellipses). L'expression complète de la fonction de Green, vérifiant les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, s'écrit alors :

$$K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$$

Remarque : On peut vérifier que la fonction γ , qui s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \log r_2 + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$$

est solution de l'équation homogène i.e. $\Delta\gamma = 0$ dans Ω .

2.3 Calcul en élasticité 2D par les potentiels complexes

Une méthode assez classique pour déterminer des solutions analytiques (et notamment les fonctions de Green) en élasticité 2D consiste à utiliser les potentiels complexes de Kolossov-Muskhelishvili. On montre en effet que la vérification des équations d'équilibre et de compatibilité en élasticité 2D se ramène à la recherche de deux potentiels holomorphes Φ et Ψ fonctions de la variable complexe $z = x + iy$ (Figure 6.5) :

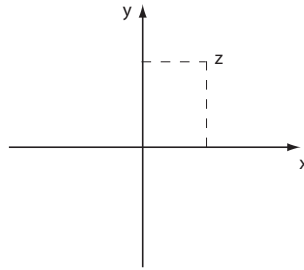


Figure 6.5: Plan complexe

Les champs de contrainte et de déplacement se déduisent alors dans le cas homogène isotrope par les relations (équations de Kolossov) :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi' + \bar{\Phi}'] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'' + \Psi'] \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= K\Phi - z\bar{\Phi}' - \bar{\Psi}\end{aligned}$$

où $\bar{\bullet}$ est le conjugué de \bullet et K est une constante définie par :

$$K = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

De façon générale, les potentiels Φ et Ψ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \alpha_1\Phi_0(z) + \Phi^*(z) \\ \Psi(z) &= \alpha_2\Psi_0(z) + \Psi^*(z)\end{aligned}$$

où α_1 et α_2 sont des constantes complexes, Φ_0 et Ψ_0 sont des potentiels prenant en compte le chargement singulier tandis que Φ^* et Ψ^* assurent la vérification des conditions limites.

Si on considère par exemple le cas d'un domaine semi-infini avec une force concentrée F en $z_0 = x_0 + iy_0$ (Figure 6.6), on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{F e^{i\beta}}{2\pi} \log(z - z_0) + \Phi^*(z) \\ \Psi(z) &= \frac{F e^{-i\beta}}{2\pi} \log(z - z_0) + \frac{F e^{i\beta}}{2\pi} \frac{\bar{z}_0}{z - z_0} + \Psi^*(z)\end{aligned}$$

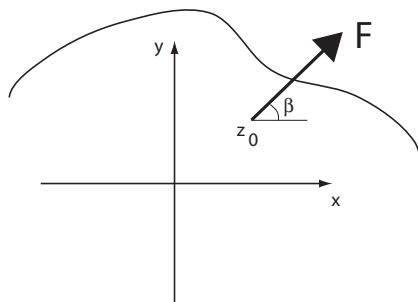


Figure 6.6: Schématisation de l'effort ponctuel en 2D

Tous les détails sur la méthode des potentiels complexes (et son utilisation sur des géométries variées grâce aux transformations conformes) peuvent être trouvés dans [Muskhelishvili 1953, Sneddon 1969].

2.4 Méthode générale de calcul en élasticité 2D et 3D

C'est cette méthode que nous appliquons pour dériver les expressions des fonctions de Green que nous utilisons par la suite. Certaines de ces expressions sont par ailleurs reproduites dans l'Annexe C.

2.4.1 Présentation

La méthode que nous utilisons, dite de Mindlin, est assez ancienne [Love 1944, Mindlin et Cheng 1950]. Valable à la fois en 2D et 3D, nous la détaillons ici dans le cas homogène et isotrope. Le point de départ est l'équation de Navier, vérifiée par le champ de déplacement :

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu} \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{u}) + \underline{\Delta}(\underline{u}) + \frac{1}{\mu} \underline{f} = \underline{0} \quad (6.1)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé tandis que \underline{f} regroupe les forces volumiques appliquées dans le domaine Ω (on peut y ajouter les termes d'accélération en dynamique).

L'équation (6.1) étant couplée à cause du terme $\underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{u})$, l'idée consiste à la découpler en notant que sa solution générale peut être cherchée sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{\Delta}(\underline{B}) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{B}) \quad (6.2)$$

où \underline{B} , appelé vecteur de Galerkin, est solution de l'équation biharmonique :

$$\underline{\Delta}(\underline{\Delta}(\underline{B})) = -\frac{1}{\mu} \underline{f} \quad (6.3)$$

Par conséquent, la détermination des fonctions de Green revient à la résolution de la simple EDO (6.3) en remplaçant \underline{f} par le chargement ponctuel singulier.

Dans le cas général, le vecteur de Galerkin \underline{B} définissant la fonction de Green s'écrit :

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}^*$$

avec :

- \underline{B}_0 : solution particulière de (6.3), connue analytiquement en 2D et 3D ;
- \underline{B}^* : fonction biharmonique permettant de satisfaire les conditions limites.

Par exemple, pour une charge ponctuelle située à l'origine d'un milieu matériel, on a $\underline{f} = \underline{F}\delta(r)$ (avec r : distance par rapport à l'origine) et la solution particulière \underline{B}_0 , qui doit vérifier :

$$\Delta\Delta(\underline{B}_0) = -\frac{1}{\mu} \underline{F}\delta(r)$$

s'écrit :

$$\underline{B}_0 = -\frac{r^2 \log r}{8\pi\mu} \underline{F} \quad \text{en dimension 2}$$

$$\underline{B}_0 = \frac{r}{8\pi\mu} \underline{F} \quad \text{en dimension 3}$$

Pour ce qui est du terme \underline{B}^* , il existe une infinité de solutions biharmoniques. On garde celle qui permet de vérifier les conditions limites, comme illustré dans la Section 2.4.2. Notons que $\underline{B}^* = \underline{0}$ dans le cas de fonctions de Green dans un domaine infini.

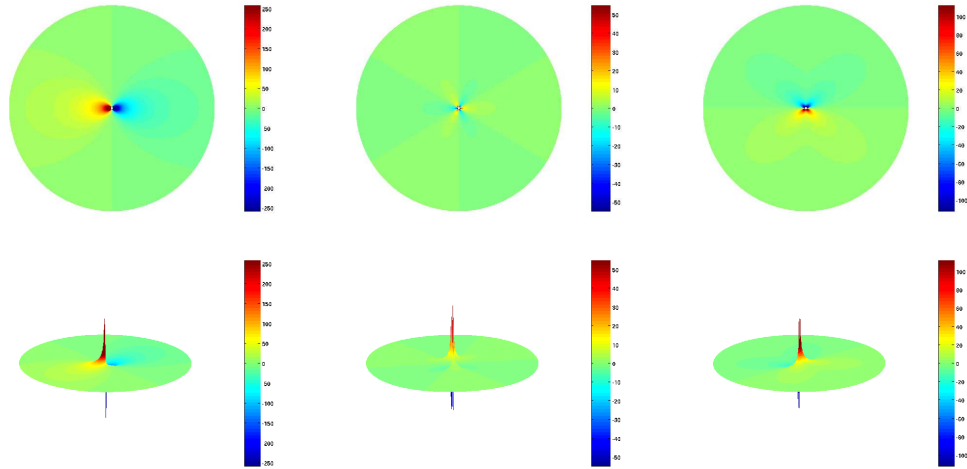


Figure 6.7: Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une force ponctuelle en milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

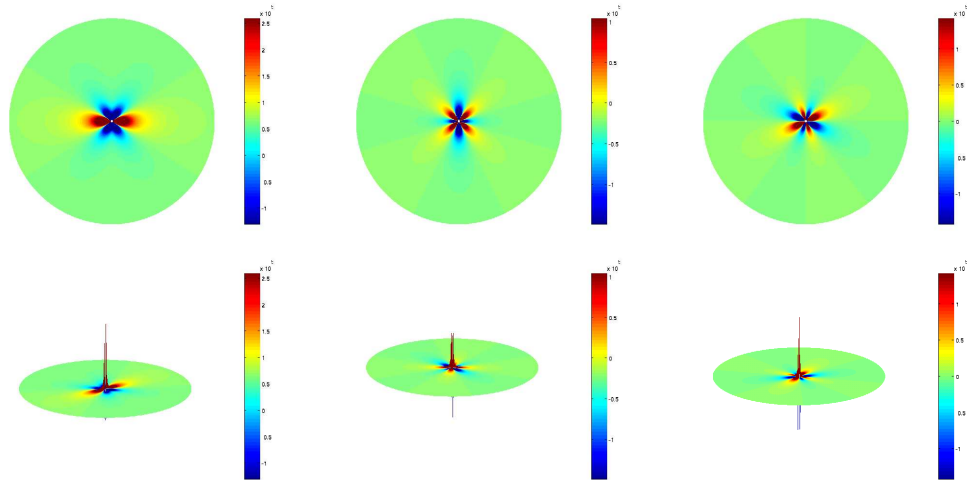


Figure 6.8: Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une pré-contrainte ponctuelle en milieu infini : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

2.4.2 Cas particulier d'un milieu semi-infini

Dans ce cas, le terme \underline{B}^* doit permettre de vérifier les conditions limites. Pour cela, la méthode générale consiste à faire intervenir différentes contributions, appelées *noyaux de*

déformation, venant de chargements singuliers situés en dehors du domaine matériel. En pratique, ces chargements sont appliqués au point I image du point objet O où se trouve le chargement ponctuel initial (Figure 6.9), et leurs amplitudes sont calculées de façon à vérifier les conditions limites. Cette méthode est appelée *méthode des images* [Mindlin 1936].

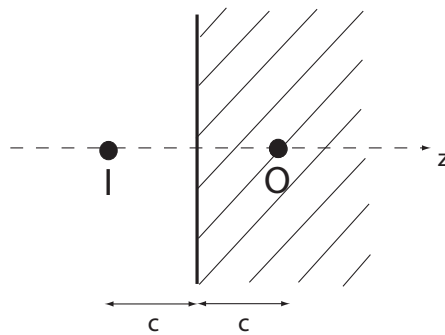


Figure 6.9: Paramètres intervenant dans la méthode des images

La distance c entre le point objet O et le bord du domaine apparaît alors comme un paramètre dans l'expression de la fonction de Green.

Un exemple, traité dans l'Annexe C, est celui d'une force ponctuelle dans un milieu semi-infini 3D avec une condition de bord libre. On montre qu'il faut alors cinq noyaux de déformation supplémentaires, en plus de celui correspondant à la force ponctuelle en O , pour assurer les conditions limites de bord libre.

Des détails complets ainsi que d'autres exemples peuvent être trouvés dans [Mindlin et Cheng 1950, Sneddon et Hill 1964].

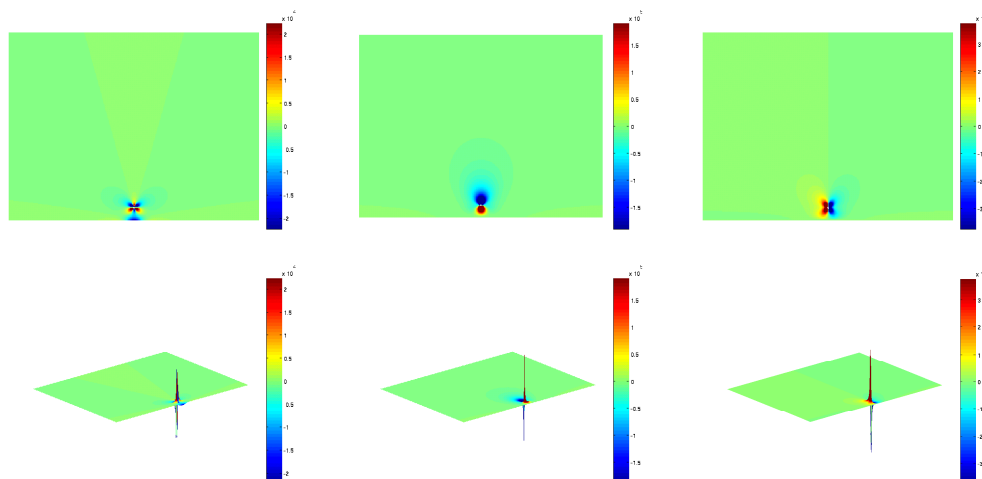


Figure 6.10: Champ de contrainte issu de la fonction de Green correspondant à une force ponctuelle en milieu semi-infini avec condition de bord libre : $\tilde{\sigma}_{xx}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{yy}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{xy}^{hand}$ (droite)

2.4.3 Généralisation de la méthode

Des généralisations ont été apportées à la méthode précédente de façon à traiter tout type de chargement ou des matériaux non-isotropes. Harding & Sneddon [Harding et Sneddon 1945] ont en particulier présenté une méthode d'analyse à l'aide de fonctions potentiels de type Love. L'utilisation de la transformée de Hankel permet d'avoir une solution analytique des potentiels à l'aide de fonctions de Bessel, sous forme de série.

Cette dernière méthode, initialement limitée aux problèmes axisymétriques, a été par la suite généralisée au cas asymétrique [Sneddon et Hill 1964], et pour les problèmes isotropes transverses [Dahan et Predeleanu 1980]. Citons aussi le travail fait dans [Vijayakumar et Cormack 1987] où le cas des bi-matériaux est abordé.

Cependant, dans le cas complètement anisotrope, des expressions explicites des fonctions de Green ne sont pas encore accessibles à ce jour et restent un sujet de recherche majeur.

3 Calcul des bornes d'encadrement

Faisons tout d'abord une remarque concernant la valeur approchée I_h d'une quantité d'intérêt ponctuelle en un point P . Il y a des cas où celle-ci n'est pas forcément définie, par exemple lorsque P se trouve sur la frontière entre deux éléments ; une discontinuité des champs éléments finis peut alors être observée. On peut cependant donner un encadrement

de I_{ex} à partir de la solution \hat{I}_h calculée à partir des champs admissibles (\hat{I}_h est définie en tout point).

Les résultats (3.13) et (4.4) peuvent en effet se réécrire :

$$I_{ex} - \hat{I}_h = -\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h^m, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \hat{e}_h^p \rangle \rangle + \hat{I}_{hh} \quad (6.4)$$

$$|I_{ex} - \hat{I}_h - \hat{I}_{hh} - F_1(\tilde{x}_h, \Delta_h)| \leq 2 \left[\frac{1}{2} E_{diss}^2(\hat{e}_h^p, \hat{s}_h) + F_0(\Delta_h) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [F_2(\tilde{x}_h)]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

où \hat{I}_h et \hat{I}_{hh} sont des quantités définies par :

$$\begin{aligned} \hat{I}_h &= \langle \langle \hat{s}_h, \dot{e}_\Sigma \rangle \rangle \\ \hat{I}_{hh} &= \langle \langle \hat{s}_h - \hat{s}_h^m, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \hat{e}_h^p \rangle \rangle + \langle \langle \dot{e}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h), \hat{s}_h - \tilde{s}_\Sigma \rangle \rangle \end{aligned}$$

On peut donc en théorie encadrer une quantité ponctuelle quel que soit l'endroit où elle est localisée. On ne considérera par contre pas les quantités d'intérêt ponctuelles au voisinage d'une zone singulière (bord rentrant, pointe de fissure). En effet, la valeur de I_{ex} peut tendre vers l'infini quand on se rapproche de la singularité ; l'intérêt de l'estimation d'erreur sur I n'a alors pas beaucoup de sens et il est plus utile de s'intéresser aux facteurs d'intensité de contrainte dans ce cas.

La méthode de construction des champs admissibles et le calcul des bornes restent les mêmes que dans le Chapitre 5. Le fait que la solution « handbook » soit à énergie infinie ne pose aucun souci dans le calcul des bornes car cette solution n'intervient pas dans l'expression de \tilde{x}_h . Pour ce qui est de l'intégration numérique des termes correctifs intervenant dans l'expression de \hat{I}_{hh} , on procède à nouveau par sur-discrétisation.

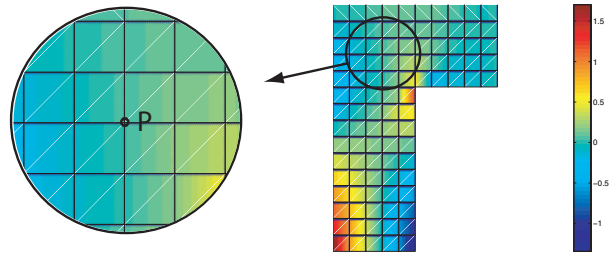
4 Résultats numériques

4.1 Estimation de l'erreur sur un déplacement ponctuel

On considère la quantité d'intérêt :

$$I = u_x(P)|_T$$

où P est un point interne de la structure (Figure 6.11).

Figure 6.11: Emplacement du point P où on estime la quantité d'intérêt

Le chargement du problème adjoint associé est schématisé sur la Figure 6.12 : il consiste en un effort ponctuel en P et constant en temps sur $[0, T]$.

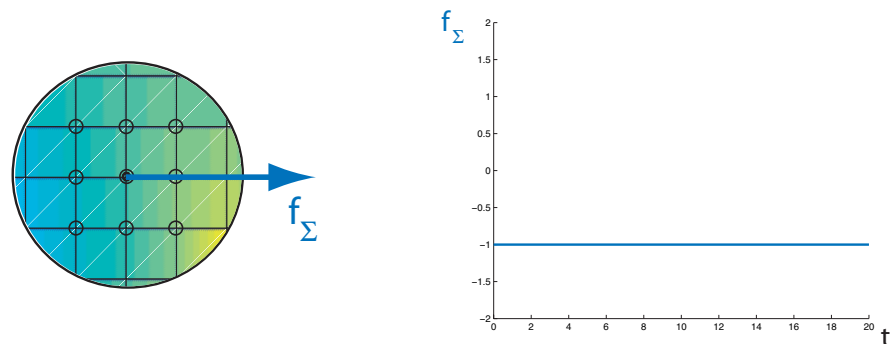


Figure 6.12: Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

La fonction d'enrichissement introduite est semblable à celle donnée sur la Figure 6.7. Nous la faisons intervenir dans la solution au travers de la PUM appliquée sur les 9 nœuds au voisinage de P (nœuds encerclés sur la Figure 6.12).

L'évolution spatiale des champs de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$, $\tilde{\sigma}_h^r$ et $\tilde{\sigma}_h$ obtenus à l'instant $t = T$ est représentée ci-dessous.

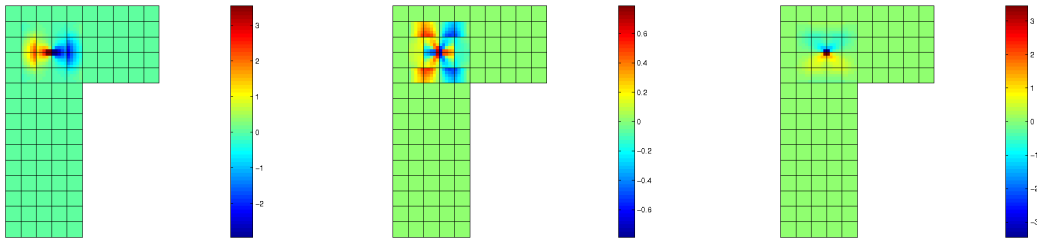


Figure 6.13: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_{PUM}^{hand}$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{PUM_{xx}}^{hand}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{PUM_{yy}}^{hand}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{PUM_{xy}}^{hand}$ (droite)

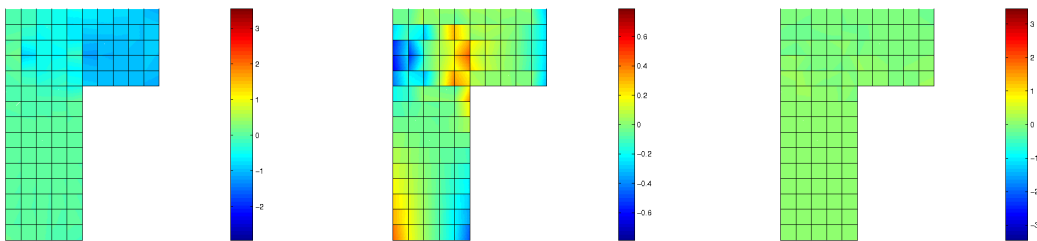


Figure 6.14: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h^r$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}^r$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}^r$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}^r$ (droite)

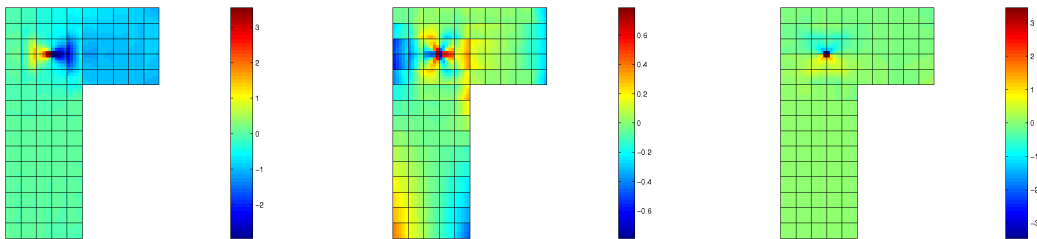


Figure 6.15: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ à l'instant final T : $\tilde{\sigma}_{h_{xx}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{h_{yy}}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{h_{xy}}$ (droite)

On obtient alors les bornes normées :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,97 \quad \bar{\xi}_{sup} = 1,04$$

Remarque : On peut voir que la partie résiduelle de la solution n'est pas localisée dans cet exemple, contrairement à ce qu'on avait sur les Figures 5.18 ou 5.22. Cela vient du fait que le chargement du problème adjoint n'est pas auto-équilibré donc occasionne des effets non locaux compensés par cette partie résiduelle.

Nous donnons ci-dessous la solution en contrainte obtenue en régularisant le chargement du problème adjoint (la force ponctuelle f_Σ est alors vue comme une force nodale). Cette solution, beaucoup moins précise que celle obtenue avec le même maillage en introduisant l'enrichissement par les fonctions « handbook », donne des bornes de qualité médiocre.

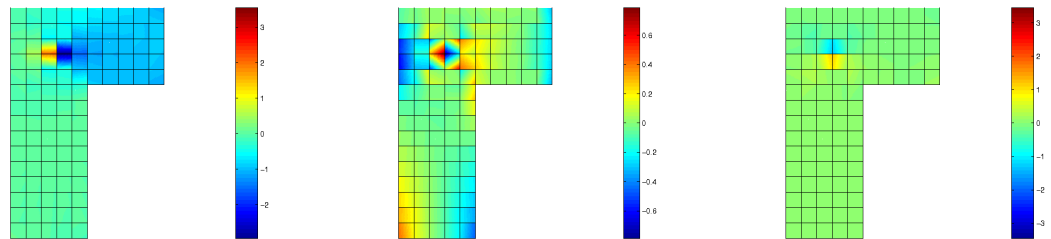


Figure 6.16: Évolution spatiale du champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ obtenu à l'instant final T après régularisation du chargement : $\tilde{\sigma}_{hxx}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_{hyy}$ (centre), $\tilde{\sigma}_{hxy}$ (droite)

4.2 Estimation de l'erreur sur une variable interne ponctuelle

On considère la quantité d'intérêt :

$$I = \dot{\epsilon}_{1yy}(P)|_T$$

où P est un point interne de la structure (Figure 6.17).

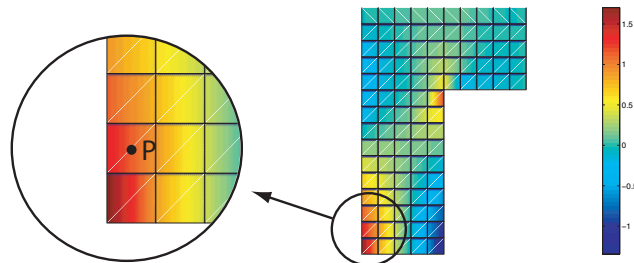


Figure 6.17: Emplacement du point P où on estime la quantité d'intérêt

Le chargement du problème adjoint associé est schématisé sur la Figure 6.18 : il consiste en une précontrainte ponctuelle en P dont la valeur évolue sur $[0, T]$.

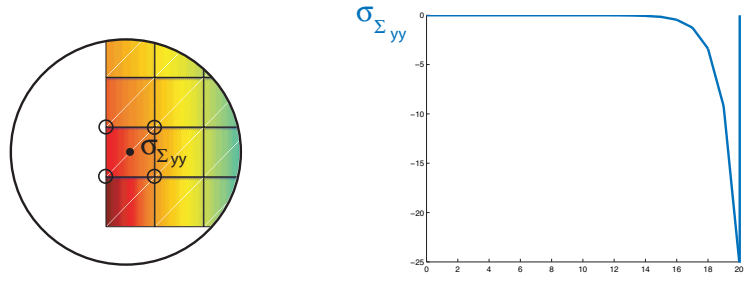


Figure 6.18: Distribution spatiale (gauche) et temporelle (droite) du chargement du problème adjoint

La fonction d'enrichissement introduite est semblable à celle donnée sur la Figure 6.8, en prenant en compte les conditions de bord libre. Nous appliquons la PUM sur les 4 nœuds au voisinage de P (nœuds encerclés sur la Figure 6.18).

On obtient alors les bornes normées :

$$\bar{\xi}_{inf} = 0,97 \quad \bar{\xi}_{sup} = 1,05$$

4.3 Calcul d'un minorant/majorant d'une quantité sur une zone donnée

On reprend la structure et la quantité d'intérêt ponctuelle I de la section précédente, mais on cherche cette fois un minorant et un majorant de I sur une zone donnée correspondant dans notre cas à un élément E du maillage \mathcal{M}_h (Figure 6.19). En d'autres termes, on cherche des bornes d'encadrement ξ_{inf}^E et ξ_{sup}^E telles que :

$$\xi_{inf}^E \leq I(P) \leq \xi_{sup}^E \quad \forall P \in E$$

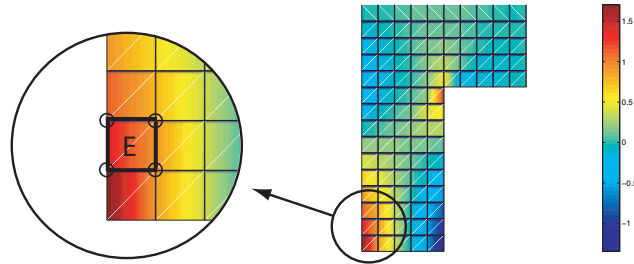
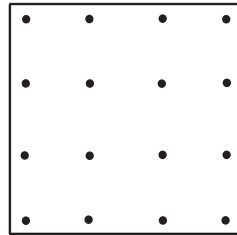


Figure 6.19: Zone de recherche d'un minorant/majorant de la quantité d'intérêt ponctuelle

La démarche utilisée alors consiste à calculer des bornes garanties de $I(P)$ en tout point P correspondant à un point de Gauss de l'élément E , avant de procéder à une interpolation de ces bornes sur la zone E entière.

Figure 6.20: Points de Gauss utilisés pour le calcul des bornes sur E .

Les bornes obtenues par cette méthode sont :

$$\xi_{inf}^E = 0,94 \quad \xi_{sup}^E = 1,32$$

tandis que les bornes vraies de $I(P)$ sur E , obtenues avec un calcul très fin, sont :

$$I_{inf} = 0,99 \quad I_{sup} = 1,26$$

Le minorant et le majorant de I sur une zone donnée sont donc de très bonne qualité même s'ils ne sont pas complètement garantis à cause de l'interpolation.

5 Bilan

La méthode d'estimation d'erreur locale peut être étendue sans difficulté majeure aux quantités d'intérêt ponctuelles en espace. Il suffit pour cela de prendre les véritables fonctions de Green comme fonctions d'enrichissement dans la technique « handbook ». L'idée

développée ici consiste donc à obtenir une solution fine d'un problème en introduisant des fonctions analytiques décrivant les singularités de la solution et en ajoutant une solution résiduelle calculée par éléments finis. Notons que cette idée se retrouve dans d'autres domaines ; on peut citer par exemple le domaine de la Mécanique de la Rupture, avec l'utilisation de la XFEM pour décrire finement les fissures [Moës *et al.* 1999, Belytschko *et al.* 2001], ou le domaine de la Dynamique des Dislocations Discrètes « DDD » dans lequel un enrichissement analytique est mis en œuvre pour la description précise des dislocations [Needleman et Giessen 2001].

Nous avons finalement accès à un encadrement à la fois garanti, précis et simple à mettre en œuvre sur des quantités ponctuelles. Il est de plus possible de donner des bornes inférieure et supérieure de ces quantités sur une zone donnée.

CHAPITRE **7**

Estimation de l'erreur de modèle

Dans ce dernier chapitre, nous mettons en œuvre une procédure simple permettant d'apprécier la contribution d'une éventuelle erreur de modèle dans l'erreur locale.

Sommaire

1	Présentation	150
2	Démarche d'estimation de l'erreur de modèle	152
2.1	Idée générale	152
2.2	Écriture du problème discret en espace	152
2.3	Calcul des indicateurs d'erreur de modèle	153
3	Résultats numériques	155
4	Bilan	157

1 Présentation

Lorsqu'on remplace un modèle mathématique de référence par un modèle simplifié à partir duquel le calcul numérique d'une solution approchée est effectué, on commet une erreur : c'est l'erreur de modèle. Cette notion est devenue à la mode depuis quelques années car les modèles matériaux étant maintenant très sophistiqués (prise en compte d'hétérogénéités ou d'effets locaux, échelle atomique ...), on est de plus en plus amené à les remplacer par des modèles plus adaptés aux codes de calcul actuels mais restant tout de même suffisamment précis pour l'étude envisagée. On n'a donc plus un modèle unique mais une cascade de modèles hiérarchisés d'après leur degré de complexité [Oden *et al.* 1999]; le point-clé lorsqu'on aborde l'erreur de modèle est alors de savoir quel est le modèle pris comme référence. Quelques cas typiques de modèles de référence et de modèles simplifiés associés sont donnés dans le Tableau 7.1 :

modèle de référence	modèle simplifié
modèle hétérogène	modèle homogène
modèle atomique	modèle continu
modèle 3D	modèle 2D (plaque, coque)

Tableau 7.1: Quelques exemples de simplification du modèle de référence

De nombreux travaux ont été menés ces dernières années sur l'estimation de l'erreur de modèle, erreur pouvant être considérée aussi bien d'un point de vue global [Oden et Zohdi 1997, Ainsworth 1998] que sur une quantité d'intérêt [Cho et Oden 1997, Vemaganti et Oden 2001, Oden et Prudhomme 2002, Oden *et al.* 2005].

Dans notre cas, on s'intéresse à l'estimation de l'erreur de modèle commise sur une quantité d'intérêt et due au remplacement d'un modèle viscoélastique linéaire par un modèle élastique linéaire. Ce remplacement est légitime par exemple pour l'étude de polymères à basse température, la viscosité étant alors très importante.

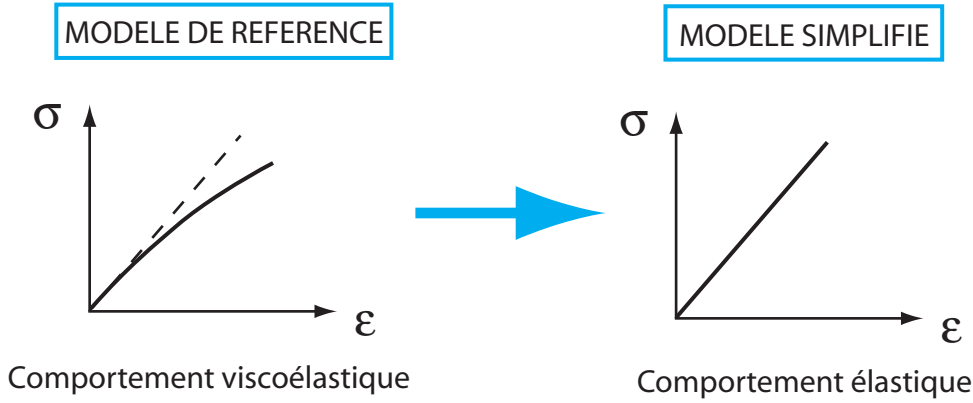


Figure 7.1: Modèle de référence et modèle simplifié

Le modèle de référence viscoélastique reste celui étudié dans les précédents chapitres. La solution exacte associée est notée (e_{ex}, s_{ex}) .

Pour ce qui est du modèle simplifié, c'est un modèle élastique obtenu à partir du modèle de référence en considérant $\mathbf{B} = 0$. De ce fait, on a $e = e^e$ et les seules relations de comportement sont celles liées à l'élasticité (i.e. les lois d'état faisant intervenir l'opérateur Λ). Pour différencier par rapport aux notations utilisées pour le modèle viscoélastique, on note $(e_{ex}^{elas}, s_{ex}^{elas})$ la solution exacte associée au modèle élastique et (e_h^{elas}, s_h^{elas}) une solution approchée obtenue par la MEF.

L'erreur locale sur une quantité d'intérêt I s'écrit alors :

$$\Delta I = I_{ex} - I_h^{elas} = \Delta I^{dis} + \Delta I^{mod}$$

avec :

$$\Delta I^{dis} = I_{ex}^{elas} - I_h^{elas} : \text{source d'erreur due à la discrétisation éléments finis}$$

$$\Delta I^{mod} = I_{ex} - I_{ex}^{elas} : \text{source d'erreur due à l'approximation du modèle de référence}$$

Bien entendu, l'erreur de modèle ΔI^{mod} est prise en compte dans la méthode générale d'estimation d'erreur locale décrite dans le Chapitre 3, car celle-ci donne une majoration garantie de ΔI .

On cherche cependant à extraire la contribution de l'erreur de modèle ΔI^{mod} dans ΔI . Cette contribution correspond en pratique à l'erreur restante lorsque le maillage spatial \mathcal{M}_h utilisé pour trouver la solution numérique approchée (e_h^{elas}, s_h^{elas}) devient très fin :

$$\Delta I^{mod} = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta I$$

2 Démarche d'estimation de l'erreur de modèle

2.1 Idée générale

Ne connaissant pas la valeur exacte I_{ex}^{elas} , on ne peut pas directement estimer l'erreur de modèle en appliquant la méthode mise en place dans les chapitres précédents.

L'idée retenue alors est semblable à celle utilisée dans [Moës 1996] pour la construction d'indicateurs d'erreur en espace, en temps et en itération.

On fait l'hypothèse :

$$I_{ex} - I_{ex}^{elas} \approx I_h^{[0,T]} - I_h^{elas} \quad (7.1)$$

où la quantité d'intérêt $I_h^{[0,T]}$ est définie par rapport au modèle viscoélastique de référence discrétisé en espace avec le même maillage \mathcal{M}_h que celui utilisé pour calculer I_h^{elas} (Figure 7.2).

Nous postulons donc que la discrétisation spatiale des problèmes viscoélastique et élastique modifie peu l'erreur de modèle ; ceci est motivé par le fait que l'erreur de modèle est due à une non-prise en compte de la viscosité qui est un phénomène temporel.

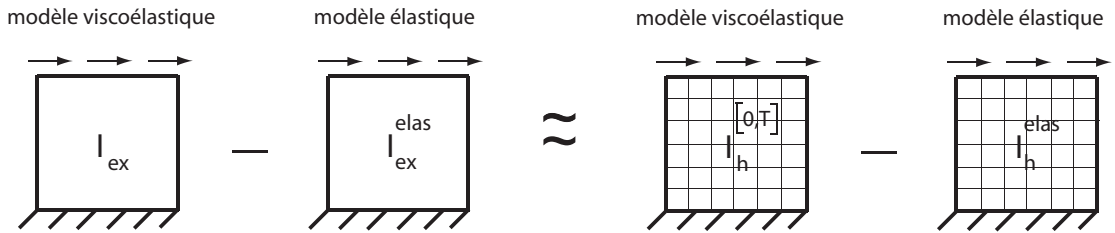


Figure 7.2: Approximation de l'erreur de modèle

On peut dès lors utiliser notre méthode d'estimation d'erreur avec pour nouveau modèle de référence le modèle de viscoélasticité continu en temps mais déjà discrétisé en espace avec le maillage \mathcal{M}_h . On aura alors un encadrement garanti de l'erreur approchée :

$$\Delta I^{mod,app} = I_h^{[0,T]} - I_h^{elas}$$

2.2 Écriture du problème discret en espace

On désigne par $\mathcal{U}_h^{[0,T]}$ l'ensemble des déplacements de type éléments finis définis sur $[0, T] \times \Omega$ et par $\mathcal{S}_h^{[0,T]}$ l'ensemble des contraintes définies sur $[0, T] \times \Omega_h$, Ω_h représentant l'ensemble des points d'intégration du maillage \mathcal{M}_h qui discrétise spatialement la structure.

Le nouveau problème de référence s'écrit :

Trouver sur $[0, T] \times \Omega_h$ une solution $(e_h^{[0,T]}, s_h^{[0,T]})$ vérifiant :

- les liaisons cinématiques :

$$\underline{u}_h^{[0,T]} \in \mathcal{U}_h^{[0,T]} ; \quad \underline{u}_h^{[0,T]}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{U}_d(t) \quad \forall t \in [0, T] ; \quad e_h^{[0,T]} = e_h^{e[0,T]} + e_h^{p[0,T]} \quad (7.2)$$

- les équations d'équilibre (au sens des éléments finis)

$$\sigma_h^{[0,T]} \in \mathcal{S}_h^{[0,T]} ; \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma_h^{[0,T]} \epsilon(\underline{u}_h^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d(t) \cdot \underline{u}_h^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d(t) \cdot \underline{u}_h^* dS \quad (7.3)$$

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_{h_0}, \forall t \in [0, T]$$

- les relations de comportement (aux points d'intégration) :

$$e_h^{e[0,T]} = \mathbf{\Lambda}(s_h^{[0,T]}); \quad \sum_{i=1}^n \sigma_{i_h}^{[0,T]} = \sigma_h^{[0,T]} \quad (\text{lois d'état}) \quad (7.4)$$

$$\dot{e}_h^{p[0,T]} = \mathbf{B}(s_h^{[0,T]}) \quad (\text{équations d'évolution}) \quad (7.5)$$

- les conditions initiales (aux points d'intégration) :

$$e_h^{p[0,T]}|_{t=0} = 0 \quad (7.6)$$

2.3 Calcul des indicateurs d'erreur de modèle

Le problème de référence étant défini, on applique rigoureusement la méthode d'estimation d'erreur locale présentée dans le Chapitre 3.

2.3.1 La quantité d'intérêt

La nouvelle quantité d'intérêt exacte de référence, notée $I_h^{[0,T]}$, est définie par l'expression :

$$I_h^{[0,T]} = \langle \langle s_h^{[0,T]}, \dot{\tilde{e}}_{\Sigma} \rangle \rangle = - \langle \langle \dot{e}_h^{[0,T]}, \tilde{s}_{\Sigma} \rangle \rangle$$

Il faut prendre quelques précautions ici, car $I_h^{[0,T]}$ est définie par rapport à une solution $(e_h^{[0,T]}, s_h^{[0,T]})$ pouvant être discontinue en espace; certaines quantités ponctuelles ne sont alors pas définies. Dans toute la suite, nous ne considérerons donc que des quantités locales qui sont des moyennes de grandeurs physiques sur une zone locale ω correspondant au moins à un élément du maillage \mathcal{M}_h .

2.3.2 Le problème adjoint

Il correspond lui aussi à une structure déjà discrétisée en espace; il s'écrit :

Trouver sur $[0, T] \times \Omega_h$ une solution $(\tilde{e}_h^{[0,T]}, \tilde{s}_h^{[0,T]})$ vérifiant :

- les liaisons cinématiques :

$$\tilde{\underline{u}}_h^{[0,T]} \in \mathcal{U}_h^{[0,T]} ; \quad \tilde{\underline{u}}_h|_{\partial_1\Omega} = \underline{0} \quad \forall t \in [0, T] ; \quad \tilde{e}_h^{[0,T]} = \tilde{e}_h^{e[0,T]} + \tilde{e}_h^{p[0,T]} \quad (7.7)$$

- les équations d'équilibre (au sens des éléments finis)

$$\tilde{\sigma}_h^{[0,T]} \in \mathcal{S}_h^{[0,T]} ; \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[(\tilde{\sigma}_h^{[0,T]} - \tilde{\sigma}_{\Sigma})\epsilon(\underline{u}_h^*)] d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_{h_0}, \forall t \in [0, T] \quad (7.8)$$

- les relations de comportement (aux points d'intégration) :

$$\tilde{e}_h^{e[0,T]} = \mathbf{\Lambda}(\tilde{s}_h^{[0,T]}); \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_{i_h}^{[0,T]} = \tilde{\sigma}_h^{[0,T]} \quad (\text{lois d'état}) \quad (7.9)$$

$$\dot{\tilde{e}}_h^{p[0,T]} = -\mathbf{B}(\tilde{s}_h^{[0,T]}) \quad (\text{équations d'évolution}) \quad (7.10)$$

- les conditions initiales (aux points d'intégration) :

$$\tilde{e}_h^{p[0,T]}|_{t=T} = 0 \quad (7.11)$$

2.3.3 Construction des champs admissibles

Une solution admissible pour les problèmes de référence et adjoint (discrets en espace) est une solution qui vérifie, sur tout l'intervalle de temps, les équations de liaison, l'équilibre au sens des éléments finis sur le maillage \mathcal{M}_h , ainsi que les lois d'état et les conditions limites aux points d'intégration de \mathcal{M}_h .

De tels champs sont directement donnés par la résolution éléments finis des deux problèmes faite pour estimer l'erreur locale ΔI . On prend donc (e_h^{elas}, s_h^{elas}) et $(\tilde{e}_h, \tilde{s}_h)$ pour solutions admissibles; aucun calcul supplémentaire n'est alors nécessaire.

2.3.4 Calcul des indicateurs d'erreur

On aboutit alors aux erreurs en dissipation :

$$e_{diss}^2(\dot{\hat{e}}_h^{p[0,T]}, \hat{s}_h^{[0,T]}) = \int_0^T \int_{\Omega_h} \eta_t(\dot{\hat{e}}_h^{p[0,T]}, \hat{s}_h^{[0,T]}) d\Omega_h dt$$

$$e_{diss}^2(\dot{\hat{\tilde{e}}}_h^{p[0,T]}, \hat{\tilde{s}}_h^{[0,T]}) = \int_0^T \int_{\Omega_h} \eta_t(\dot{\hat{\tilde{e}}}_h^{p[0,T]}, \hat{\tilde{s}}_h^{[0,T]}) d\Omega_h dt$$

L'intégration sur Ω_h signifie qu'on utilise les mêmes points d'intégration que ceux du calcul éléments finis.

Remarque : *L'erreur en dissipation relative au problème direct est un indicateur de l'erreur de modèle globale.*

Pour ce qui est de l'estimation de l'erreur locale, on reprend le résultat (3.14). On obtient alors un encadrement garanti de $I_h^{[0,T]}$ (donc de l'erreur $\Delta I^{mod,app}$) de la forme :

$$|I_h^{[0,T]} - I_h^{elas} - I_{hh}| \leq e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^{p[0,T]}, \hat{s}_h^{[0,T]}) \cdot e_{diss}(\dot{\hat{e}}_h^{p[0,T]}, \hat{s}_h^{[0,T]}) \quad (7.12)$$

et celui-ci peut être rendu aussi précis qu'on le souhaite en raffinant en temps le problème adjoint.

Remarque : *Nous n'utilisons pas ici les bornes prenant en compte les effets d'histoire car la viscosité étant très grande, la mémoire du matériau est très longue. De ce fait, les sources d'erreur locale ne sont pas localisées en temps (cf. chargement du problème adjoint sur la Figure 7.4).*

Notons que l'estimateur de $\Delta I^{mod,app}$ obtenu par l'encadrement (7.12) n'est qu'un indicateur de l'erreur de modèle ΔI^{mod} car il n'en donne pas un encadrement garanti (cf. approximation (7.1)) ; il est cependant asymptotiquement exact i.e. il converge vers ΔI^{mod} lorsque la discrétisation spatiale devient très fine.

3 Résultats numériques

On reprend l'exemple simple 2D de la Figure 2.16, en prenant cette fois des coefficients de viscosité très grands (cf. Annexe D). Nous nous intéressons à l'estimation de la quantité locale :

$$I = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{yy}|_T d\omega$$

où ω correspond à l'élément en bas à gauche qui est une des zones les plus chargées de la structure (Figure 7.3).

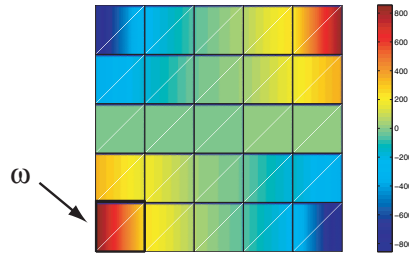


Figure 7.3: Carte du champ de contrainte approché $\sigma_{h,yy}^{elas}$ à l'instant T et définition de la zone d'intérêt ω

Pour ce problème, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= 472,45 & ; & & I_{ex}^{elas} &= 520,48 \\ I_h^{[0,T]} &= 488,91 & ; & & I_h^{elas} &= 539,41 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\Delta I = -66,96 \quad \Delta I^{mod} = -48,03 \quad \Delta I^{mod,app} = -50,60$$

On voit donc que l'hypothèse (7.1) est assez bien vérifiée et que la contribution de l'erreur de modèle n'est pas négligeable dans l'erreur totale.

Le chargement du problème adjoint, permettant d'estimer $\Delta I^{mod,app}$, consiste en une précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma$ dans la zone ω , dont les composantes $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{xx}}$ et $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ sont non nulles et ont une évolution temporelle, donnée sur la Figure 7.4, qui est assez lente sur $[0, T]$. Ceci est dû au fait que les temps de réponse caractéristiques de la viscosité τ_i sont très longs dans ce cas.

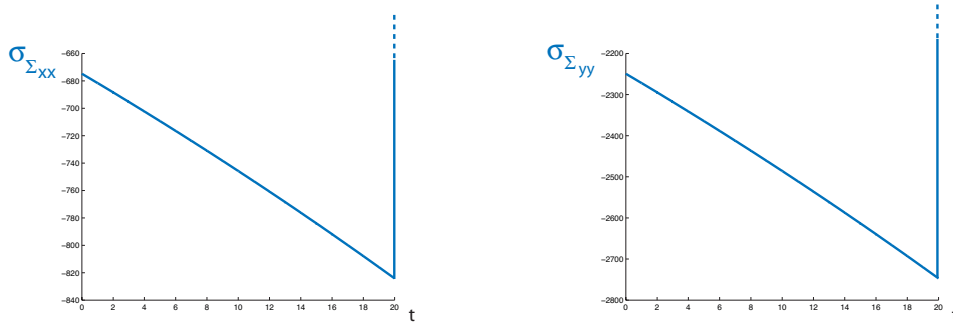


Figure 7.4: Évolutions temporelles du champ $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{xx}}$ (gauche) et $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ (droite)

On obtient alors, sans raffinement du problème adjoint :

$$488,85 \leq I_h^{[0,T]} \leq 488,95$$

et on en déduit l'encadrement de l'erreur de modèle approchée $\Delta I^{mod,app}$:

$$-50,56 \leq \Delta I^{mod,app} \leq -50,46$$

L'encadrement de $\Delta I^{mod,app}$ est très précis. Cela est dû au fait que le chargement du problème adjoint varie peu en temps donc l'erreur en dissipation associée à ce problème adjoint est très faible. Ce n'est pas le cas lorsque la viscosité est plus faible ; on a alors un chargement qui évolue comme sur la Figure 7.5 et on a besoin d'un fort raffinement du maillage temporel pour obtenir un encadrement pertinent.

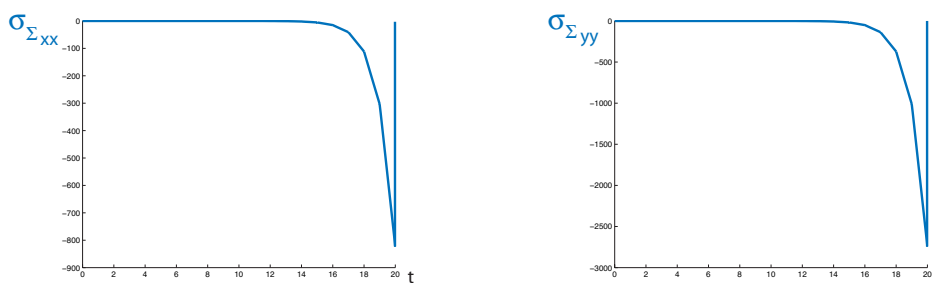


Figure 7.5: Évolutions temporelles du champ $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{xx}}$ (gauche) et $\tilde{\sigma}_{\Sigma_{yy}}$ (droite) pour une faible viscosité

4 Bilan

Une estimation simple de l'erreur de modèle, bien que non garantie, est possible à partir de la méthode d'estimation d'erreur locale mise en place dans les chapitres précédents. Il suffit pour cela de changer le modèle pris pour référence en considérant le problème discret en espace, et il n'est pas nécessaire de calculer une solution supplémentaire.

Nous avons considéré ici le cas où on remplace le modèle viscoélastique de référence par un modèle de calcul élastique. Nous pouvons également considérer le cas où le modèle de référence est un modèle élastique. On peut alors estimer l'erreur locale de discrétisation à partir de notre méthode générale, en prenant un modèle plus complexe de type viscoélastique et en contrôlant l'erreur de modèle occasionnée. La solution élastique est ainsi vue comme une approximation de la solution viscoélastique prise à l'instant final T .

Néanmoins, l'approximation de l'erreur de discrétisation est fiable si on maîtrise l'erreur de modèle i.e. si l'erreur de modèle reste négligeable par rapport à l'erreur totale. En

pratique, cela revient à prendre une viscosité très forte comparée à l'intervalle de temps d'étude.

Conclusion

Nous avons présenté, dans le cadre des problèmes de viscoélasticité linéaire, une méthode d'estimation d'erreur locale fournissant des bornes d'erreur à la fois garanties, précises et simples à calculer numériquement sur des quantités d'intérêt dimensionnantes. Ceci a été rendu possible en optimisant sur deux aspects la méthode générale, donnée dans [Ladevèze 2006], qui fournit des bornes d'erreur garanties en s'appuyant sur l'erreur en dissipation et les techniques d'extraction.

Le premier aspect concerne les effets d'histoire. Une procédure a été mise en place afin de ne pas cumuler inutilement les erreurs sur tout l'intervalle temporel ; on ne sélectionne au contraire que les contributions temporelles de l'erreur globale ayant un impact sur l'erreur sur la quantité d'intérêt considérée. Les bornes ainsi obtenues sont pertinentes à tout instant, principalement pour les quantités d'intérêt dépendant peu de l'histoire qui ont leur source d'erreur très localisée en temps. Il faut noter que dans cette démarche de prise en compte des effets d'histoire, une technique inédite de majoration, basée sur des propriétés de dualité, a été mise en œuvre.

Le deuxième aspect porte sur la résolution du problème adjoint qui doit être assez précise pour obtenir des encadrements d'erreur pertinents. Afin d'éviter un raffinement du maillage spatio-temporel utilisé, et ainsi rester non-intrusif, on a élaboré une technique de résolution qui fait intervenir des fonctions d'enrichissement représentant les parties à forts gradients de la solution du problème adjoint. Cet enrichissement, calculé numériquement ou analytiquement en résolvant des problèmes annexes, est introduit au travers de la PUM dans le calcul d'une solution approchée pour le problème adjoint ; on utilise donc une technique similaire aux techniques « handbook » rencontrées dans la GFEM. Les conséquences directes de cette démarche sont l'obtention de bornes très précises et une mise en œuvre simple de la méthode d'estimation d'erreur locale, tant dans son implémentation que dans le calcul des bornes d'encadrement. La méthode non-intrusive permet de plus de pouvoir aborder l'estimation de l'erreur sur des quantités d'intérêt très localisées en espace, voire ponctuelles, en faisant intervenir les véritables fonctions de Green.

En conclusion, nous possédons une méthode pratique et fiable qui d'une part peut être facilement implantée dans un code de calcul existant, et d'autre part sera vue sous forme

de boîte noire par l'utilisateur de ce code. Le coût de calcul associé à l'estimation d'erreur locale est en outre acceptable par rapport au coût total de l'analyse numérique.

Remarquons que dans notre approche d'estimation de l'erreur locale, le côté adaptatif disparaît car nous pouvons donner, à partir d'un unique calcul approché du problème de référence, un encadrement aussi précis que souhaité de la quantité d'intérêt considérée. Le calcul approché du problème de référence ne devra cependant pas être trop grossier afin d'obtenir une convergence assez rapide des bornes d'encadrement.

Les résultats numériques 1D et 2D exposés dans ce travail ont montré l'efficacité de la méthode proposée. Différents cas-tests ont été étudiés, et diverses quantités d'intérêt ont été choisies, dans le cadre des problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par éléments finis. Il faut cependant noter que la méthode d'estimation d'erreur locale développée ici peut s'adapter à d'autres problèmes paraboliques linéaires et à d'autres méthodes de résolution approchée.

Dans le Chapitre 7 du document, nous avons par ailleurs montré que la méthode pouvait être avantageusement utilisée pour estimer l'erreur de modèle, en changeant simplement le modèle de référence. Ce point représente un atout majeur car l'étude de l'erreur de modèle a pris une place considérable ces dernières années dans le domaine de la vérification.

Les perspectives à ce travail sont multiples :

- tout d'abord, les performances obtenues sur des premiers cas-tests numériques doivent être confirmées sur d'autres exemples en 2D et 3D, avec des maillages plus irréguliers. Pour le 3D, aucun obstacle théorique majeur ne semble se poser ;

- ensuite, les résultats obtenus sur les quantités d'intérêt ponctuelles pourraient être exploités afin de construire une procédure automatique de recherche de minorant/majorant de telles quantités sur une zone donnée ;

- enfin, il faut bien voir que cette étude n'est que le début d'une nouvelle vision de l'estimation d'erreur locale au LMT-Cachan. L'étape suivante est le passage à un comportement non linéaire (viscoplasticité par exemple) et à la dynamique ; des travaux sont menés actuellement dans ce sens. L'objectif dans ces travaux est de garder les caractères garanti et pertinent des bornes d'encadrement en réutilisant les outils efficaces utilisés ici ; citons par exemple l'erreur en dissipation ou un problème auxiliaire semblable au problème de référence (mais pouvant être différent du problème adjoint classique...).

Bibliographie

[Ainsworth 1998]

M. Ainsworth. A posteriori error estimation for fully discrete hierarchic models of elliptic boundary value problems on thin models. *Numerical Mathematics*, 80 : 325, 1998.

[Ainsworth et Oden 1993]

M. Ainsworth et J.T. Oden. A priori error estimators for second-order elliptic systems. part 2 : An optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes. *Computers and Mathematics with Applications*, 26 : 75–87, 1993.

[Ainsworth et Oden 1997]

M. Ainsworth et J.T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142 : 1–88, 1997.

[Ainsworth et Oden 1997]

M. Ainsworth et J.T. Oden. A posteriori estimates for stokes and oseen's equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34 : 228, 1997.

[Aubry et Tie 1991]

D. Aubry et B. Tie. A posteriori error analysis and h-adaptive refinement for the f.e.m in nonlinear structural computations. *Proc. of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics (Ladevèze and Zienkiewicz editors), Giens (France)*, pages 1–8, 1991.

[Aubry et Tie 1992]

D. Aubry et B. Tie. Error estimates, h-adaptive strategy and hierarchical concept for nonlinear finite element method. *Proc. of the First European Conference on Numerical Methods in Engineering (Hirsch, Zienkiewicz and Onate editors), Bruxelles*, pages 17–24, 1992.

[Azziz et Babuška 1972]

K. Azziz et I. Babuška. The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. *Academic Press, New York*, 33 : 1975–1996, 1972.

[Babuška et Miller 1984]

I. Babuška et A. Miller. The post-processing approach in the finite element method - part 2 : the calculation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 : 1111–1129, 1984.

[Babuška et Miller 1987]

I. Babuška et A. Miller. A feedback finite element method with a posteriori error estimation. part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 : 1–40, 1987.

[Babuška et Ohmnimus 2001]

I. Babuška et S. Ohmnimus. A posteriori error estimation for the semidiscrete finite element method of parabolic differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 4691, 2001.

[Babuška et Rheinboldt 1978]

I. Babuška et W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 15(4) : 736–754, 1978.

[Babuška et Rheinboldt 1978]

I. Babuška et W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12 : 1597, 1978.

[Babuška et Rheinboldt 1982]

I. Babuška et W.C. Rheinboldt. Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 34 : 895–937, 1982.

[Babuška et Strouboulis 2001]

I. Babuška et T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Oxford university press, 2001.

[Babuška et al. 1999]

I. Babuška, T. Strouboulis et S.K. Gangaraj. Guaranteed computable error bounds for the exact error in the finite element solution - part 1 - one dimensional model problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 51–80, 1999.

[Babuška et al. 1995]

I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay et S.K. Gangaraj. A posteriori estimation and adaptative control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 : 4207–4235, 1995.

[Babuška et al. 1994]

I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj et K. Copps. Validation of a

posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 1073–1123, 1994.

[Bank et Weiser 1985]

R.E. Bank et A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44 : 283, 1985.

[Bass et Oden 1987]

J.M. Bass et J.T. Oden. Adaptive finite element methods for a class of evolution problems in viscoplasticity. *International Journal of Engineering Science*, 25(6) : 623–653, 1987.

[Becker et Rannacher 1996]

R. Becker et R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 4 : 237–264, 1996.

[Becker et Rannacher 2001]

R. Becker et R. Rannacher. An optimal control approach to shape a posteriori error estimation in finite element methods. *A. Iserles (Ed.), Acta Numerica, Cambridge University Press*, 10 : 1–120, 2001.

[Beckers et Kempeneers 2002]

P. Beckers et M. Kempeneers. Development of an equilibrium tetrahedral finite element. *International Congress on Quality Assessment of Numerical Simulations in Engineering, Concepcion*, 2002.

[Belytschko et al. 2001]

T. Belytschko, N. Moës, S. Usui et C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4) : 993–1013, 2001.

[Bouillard et Ihlenburg 1999]

P. Bouillard et F. Ihlenburg. Error estimation and adaptivity for the finite element solution in acoustics : 2d and 3d applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) : 147–163, 1999.

[Brink et Stein 1998]

U. Brink et E. Stein. A posteriori error estimation in large strain elasticity using equilibrated local neumann problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161(1-2) : 77–101, 1998.

[Bussy et al. 1985]

P. Bussy, G. Coffignal et P. Ladevèze. Reliability and optimization of nonlinear finite element analyses. *Proc. of NUMETA '85, Swansea*, pages 559–667, 1985.

[Carstensen et Funken 2000]

C. Carstensen et S.A. Funken. Fully reliable localized error control in the fem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4) : 1465–1484, 2000.

[Chamoin et Ladevèze 2006]

L. Chamoin et P. Ladevèze. Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, online*, DOI : 10.1002/nme.1978, 2006.

[Chamoin et Ladevèze 2007]

L. Chamoin et P. Ladevèze. A non-intrusive method to compute strict and efficient upper bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Submitted*, 2007.

[Cho et Oden 1997]

J.R. Cho et J.T. Oden. Local a posteriori error estimates of hierarchical models for plate- and shell-like structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149 : 33, 1997.

[Ciarlet 1978]

P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.

[Cirak et Ramm 1998]

F. Cirak et E. Ramm. A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156 : 351–362, 1998.

[Combe *et al.* 1999]

J.P. Combe, P. Ladevèze et J.P. Pelle. Constitutive relation error estimator for transient finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) : 165–185, 1999.

[Coorevits *et al.* 1997]

P. Coorevits, J.P. Dumeau et J.P. Pelle. Error estimator and adaptativity for three-dimensional finite element analyses. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier, pages 443–458, 1997.

[Courant et Hilbert 1953]

R. Courant et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience publishers, New-York, 1953.

[Dahan et Predeleanu 1980]

M. Dahan et M. Predeleanu. Solutions fondamentales pour un milieu élastique à isotropie transverse. *ZAMP*, 31 : 413–424, 1980.

[de Almeida et Pereira 2006]

J.P. Moitinho de Almeida et O.J.B. Almeida Pereira. Upper bounds of the error in local quantities using equilibrated and compatible finite element solutions for linear elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) : 279–296, 2006.

[de Veubeke 1965]

B.M. Fraeijns de Veubeke. Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress Analysis, Zienkiewicz and Holister editors, Wiley, London, Chap. 9*, 1965.

[Debongnie et al. 1995]

J.F. Debongnie, H.G. Zhong et P. Beckers. Dual analysis with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122 : 183–192, 1995.

[Demkowicz et al. 1984]

L. Demkowicz, J.T. Oden et T. Strouboulis. Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part 1 : Variational principles and a posteriori error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46 : 217, 1984.

[Diez et al. 2003]

P. Diez, N. Pares et A. Huerta. Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10) : 1465–1488, 2003.

[Drucker 1964]

D.C. Drucker. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal of Mechanics*, 3(2) : 235–249, 1964.

[Duvaut et Lions 1976]

G. Duvaut et J.L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1976.

[Eriksson et al. 1995]

K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo et C. Johnson. Introduction to adaptive methods for partial differential equations. *Acta Numerica, A. Iserles ed, Cambridge University Press*, pages 105–159, 1995.

[Ferry 1970]

J. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley Editions, 1970.

[Florentin et al. 2002]

E. Florentin, L. Gallimard et J.P. Pelle. Evaluation of the local quality of stresses in 3d finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 4441–4457, 2002.

[Fuentes *et al.* 2006]

D. Fuentes, D. Littlefield, J.T. Oden et S. Prudhomme. Extensions of goal-oriented error estimation methods to simulations of highly-nonlinear response of shock-loaded elastomer-reinforced structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 : 4659–4680, 2006.

[Gallimard *et al.* 1996]

L. Gallimard, P. Ladevèze et J.P. Pelle. Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 : 189–217, 1996.

[Gallimard et Panetier 2006]

L. Gallimard et J. Panetier. Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(3) : 299–316, 2006.

[Germain et Nayroles 1976]

P. Germain et B. Nayroles. *Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics*. Springer-Verlag, 1976.

[Ghanem et Spanos 1991]

R. Ghanem et P. Spanos. *Stochastic Finite Element : a spatial approach*. Springer, 1991.

[Greenberg 1948]

H.J. Greenberg. The determination of upper and lower bounds for the solution of dirichlet problem. *Journal of Mathematical Physics*, 27 : 161–182, 1948.

[Groetsch 1993]

W.C. Groetsch. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, Wiesbaden, 1993.

[Halphen et Nguyen 1975]

B. Halphen et Q.S. Nguyen. On generalized standard materials (in french). *Journal de Mécanique*, 14 : 39–62, 1975.

[Harding et Sneddon 1945]

J.W. Harding et I.N. Sneddon. The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface by a rigid punch. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 41 : 16–26, 1945.

[Huerta *et al.* 2004]

A. Huerta, T. Belytschko, S. Fernandez-Mendez et T. Rabczuk. Meshfree methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 1(10) : 279–309, 2004.

[Huerta et Diez 2000]

A. Huerta et P. Diez. Error estimation including pollution assessment for nonlinear

finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 : 21–41, 2000.

[Irimie et Bouillard 2001]

S. Irimie et P. Bouillard. A residual a posteriori error estimation for the finite element solution of the helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 4027–4042, 2001.

[Johnson et Hansbo 1991]

C. Johnson et P. Hansbo. Adaptative finite element methods for small strain elastoplasticity. *Proc of IUTAM Conf. on Finite Inelastic Deformations Theory and applications, Hannover (Allemagne)*, 1991.

[Johnson et Hansbo 1992]

C. Johnson et P. Hansbo. Adaptative finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101 : 143–181, 1992.

[Ladevèze 1975]

P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse de doctorat, 1975.

[Ladevèze 1985]

P. Ladevèze. Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 300(II) : 41–44, 1985.

[Ladevèze 1989]

P. Ladevèze. The large time increments method for analysis of structures with nonlinear behavior described by internal variables (in french). *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 309(II) : 1095–1099, 1989.

[Ladevèze 1995]

P. Ladevèze. Les bases de la méthode des erreurs en relation de comportement pour le contrôle adaptatif des calculs éléments finis : les travaux des années 1975. *Rapport interne n° 163, LMT-Cachan (France)*, 1995.

[Ladevèze 1999]

P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer NY, 1999.

[Ladevèze 2001]

P. Ladevèze. Constitutive relation error estimations for finite element analyses considering (visco)-plasticity and damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(5-6) : 527–542, 2001.

[Ladevèze 2006]

P. Ladevèze. Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 334 : 399–407, 2006.

[Ladevèze 2007]

P. Ladevèze. Strict upper error bounds for computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics (to appear)*, 2007.

[Ladevèze 2003]

P. Ladevèze. Validation et vérification de modèles stochastiques en environnement incertain par la méthode de l'erreur en relation de comportement. *Rapport interne n° 258, LMT-Cachan*, juin 2003.

[Ladevèze et al. 1986]

P. Ladevèze, G. Coffignal et J.P. Pelle. Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (Babuska, Gago, Oliveira and Zienkiewicz Editors)*, Wiley, London, 11 : 181–203, 1986.

[Ladevèze et Leguillon 1983]

P. Ladevèze et D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(3) : 485–509, 1983.

[Ladevèze et al. 1992]

P. Ladevèze, P. Marin, J.P. Pelle et J.L. Gastine. Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3) : 303–314, 1992.

[Ladevèze et Maunder 1996]

P. Ladevèze et E.A.W Maunder. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137 : 111–151, 1996.

[Ladevèze et Moës 1998]

P. Ladevèze et N. Moës. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 : 45–68, 1998.

[Ladevèze et al. 1999]

P. Ladevèze, N. Moës et B. Douchin. Constitutive relation error estimations for (visco) plasticity finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 : 247–264, 1999.

[Ladevèze et Oden 1998]

P. Ladevèze et J.T. Oden. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. Elsevier, 1998.

[Ladevèze et Pelle 2004]

P. Ladevèze et J.P. Pelle. *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer NY, 2004.

[Ladevèze et al. 1991]

P. Ladevèze, J.P. Pelle et P. Rougeot. Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8 : 69–80, 1991.

[Ladevèze et Rougée 1985]

P. Ladevèze et P. Rougée. Plasticity and viscoplasticity under periodic loading : properties and computation of the limit cycle (in french). *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 301(II) : 891–894, 1985.

[Ladevèze et Rougeot 1997]

P. Ladevèze et P. Rougeot. New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150 : 239–249, 1997.

[Ladevèze et al. 1999]

P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard et J.P. Moreau. Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 : 231–246, 1999.

[Leguillon et Sanchez-Palencia 1987]

D. Leguillon et E. Sanchez-Palencia. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Son, New York and Masson, Paris, 1987.

[Lemaître et Chaboche 1994]

J. Lemaître et J.L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Press, 1994.

[Louf et al. 2003]

F. Louf, J.P. Combe et J.P. Pelle. Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 181 : 1759–1772, 2003.

[Love 1944]

A.E.H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. *Dover, New-York*, pages 186–213, 1944.

[Maday et al. 1999]

Y. Maday, A. Patera et J. Peraire. A general formulation for a posteriori bounds for outputs functionals of partial differential equations ; application to the eigenvalue problem. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 328 : 823, 1999.

[Melenk et Babuška 1997]

J.M. Melenk et I. Babuška. The partition of unity in the finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 : 289–314, 1997.

[Mindlin 1936]

R.D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Journal of Physics*, 7 : 195–202, 1936.

[Mindlin et Cheng 1950]

R.D. Mindlin et D.H. Cheng. Nuclei of strain in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, 21 : 926–930, 1950.

[Moës 1996]

N. Moës. *Une méthode de mesure d'erreur a posteriori pour les modèles de matériaux décrits par variables internes*. Thèse de doctorat, 1996.

[Moës et al. 1999]

N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 : 131–150, 1999.

[Moreau 1974]

J.J. Moreau. On unilateral constraints friction and plasticity. *New Variational Techniques in Mathematical Physics, edizioni Cremonese, Rome*, pages 175–322, 1974.

[Moreau 1966]

J.-J. Moreau. *Fonctionnelles convexes*. Cours du collège de France, Paris, 1966.

[Morin et al. 2001]

P. Morin, R.H. Nochetto et K.G. Siebert. Local problems on stars : A posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, 72(243) : 1067–1097, 2001.

[Muskhelishvili 1953]

N.I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff Ltd, Groningen, Holland, 1953.

[Needleman et Giessen 2001]

A. Needleman et E. Van Der Giessen. Discrete dislocation and continuum descriptions of plastic flow. *Materials Science and Engineering*, 309-310 : 1–13, 2001.

[Oden et al. 2005]

J.T. Oden, I. Babuška, F. Nobile, Y. Feng et R. Tempone. Theory and methodology for estimation and control of error due to modeling, approximation, and uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 : 195–204, 2005.

[Oden et Prudhomme 1999]

J.T. Oden et S. Prudhomme. Goal-oriented error estimation and adaptativity for the finite element method. *TICAM report, Austin (USA)*, 99 : 15, 1999.

[Oden et Prudhomme 2002]

J.T. Oden et S. Prudhomme. Estimation of modeling error in computational mechanics. *Journal of Computational Physics*, 182 : 496–515, 2002.

[Oden et al. 2003]

J.T. Oden, S. Prudhomme, T. Westermann, J. Bass et M.E. Botkin. Estimation of eigenfrequencies for elasticity and shell problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13(3) : 323–344, 2003.

[Oden et al. 1999]

J.T. Oden, K. Vemaganti et N. Moës. Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4) : 3–25, 1999.

[Oden et Zohdi 1997]

J.T. Oden et T.I. Zohdi. Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 : 367, 1997.

[Paraschivoiu et al. 1997]

M. Paraschivoiu, J. Peraire et A.T. Patera. A posteriori finite element bounds for linear functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150 : 289–312, 1997.

[Pares et al. 2006]

N. Pares, J. Bonet, A. Huerta et J. Peraire. The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) : 406–429, 2006.

[Pares et al. 2006]

N. Pares, P. Diez et A. Huerta. Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) : 297–323, 2006.

[Peraire et Patera 1998]

J. Peraire et A.T. Patera. Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations; local indicators and adaptive refinements. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier, pages 199–216, 1998.

[Peric et al. 1994]

D. Peric, J. Yu et D.R.J. Owen. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids : Application to the numerical simulation of strain localization in classical and cosserat continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 1351–1379, 1994.

[Prager et Synge 1947]

W. Prager et J.L. Synge. Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5 : 261–269, 1947.

[Prudhomme et al. 2004]

S. Prudhomme, F. Nobile, L. Chamoin et J.T. Oden. Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(2) : 165–192, 2004.

[Prudhomme et Oden 1999]

S. Prudhomme et J.T. Oden. On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 : 313–331, 1999.

[Rannacher et Suttmeier 1998]

R. Rannacher et F.T. Suttmeier. A posteriori error control and mesh adaptation for finite element models in elasticity and elasto-plasticity. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier*, pages 275–292, 1998.

[Rougeot 1989]

P. Rougeot. *Sur le contrôle de qualité des maillages éléments finis*. Thèse de doctorat, 1989.

[Saxce 1992]

G. De Saxce. Une généralisation de l'inégalité de fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 314(II) : 125–129, 1992.

[Schwartz 1957]

L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1957.

[Shapery 1969]

R.A. Shapery. On the characterization of non-linear viscoelastic materials. *Polymer Engineering and Science*, 9(4) : 259–310, 1969.

[Sneddon 1969]

I.N. Sneddon. *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. John Wiley & Sons, New York, 1969.

[Sneddon et Hill 1964]

I.N. Sneddon et R. Hill. *Progress in solid mechanics*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.

[Stein 2003]

E. Stein. *Error controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. J. Wiley, 2003.

[Stein et al. 2001]

E. Stein, S. Ohmnius et E. Walhorn. Local error estimates of fem for displacements and stresses in linear elasticity by solving local neumann problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 : 727–746, 2001.

[Strouboulis et al. 2000]

T. Strouboulis, I. Babuška et K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. 181 : 43–69, 2000.

[Strouboulis et al. 2000]

T. Strouboulis, I. Babuška, D. Datta, K. Copps et S.K. Gangaraj. A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest - part 1 : A posteriori estimation of the error in the von mises stress and the stress intensity factors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 : 261–294, 2000.

[Strouboulis et Haque 1992]

T. Strouboulis et K.A. Haque. Recent experiences with error estimation and adaptivity. part 1 : Review of error estimators for scalar elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97 : 339–436, 1992.

[Vemaganti et Oden 2001]

K. Vemaganti et J.T. Oden. Estimation of local modeling error and goal-oriented modeling of heterogeneous materials ; part 1 : Error estimates and adaptive algorithms. *Journal of Computational Physics*, 164 : 22, 2001.

[Verfürth 1989]

R. Verfürth. A posteriori error estimators for the stokes equations. *Numerical Mathematics*, 55 : 309, 1989.

[Verfürth 1996]

R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.

[Vijayakumar et Cormack 1987]

S. Vijayakumar et E.C. Cormack. Green's functions for the biharmonic equation : bonded elastic media. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 47(5), 1987.

[Washizu 1953]

K. Washizu. Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, 32 : 117–128, 1953.

[Wiberg et al. 1994]

N.E. Wiberg, F. Abdulwahab et S. Ziukas. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 3417–3440, 1994.

[Wiberg et Diez 2006]

N.E. Wiberg et P. Diez. Special issue. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6), 2006.

[Wynant 2006]

M. Wynant. Encadrement de quantités locales dans les problèmes d'évolution résolus par la méthode des éléments finis. *Mémoire de Master II TACS, ENS Cachan*, 2006.

[Zienkiewicz *et al.* 1988]

O.C. Zienkiewicz, Y. Liu et G. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25 : 23–42, 1988.

[Zienkiewicz et Zhu 1987]

O.C. Zienkiewicz et J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 : 337–357, 1987.

[Zienkiewicz et Zhu 1992]

O.C. Zienkiewicz et J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : the recovery technique - part 2 : error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 : 1331–1382, 1992.

Annexe A :

Démonstration des égalités fondamentales

Dans cette Annexe, on donne la démonstration des égalités fondamentales permettant d'écrire l'erreur locale sous une forme globale, en élasticité et viscoélasticité linéaires.

• Pour les problèmes d'élasticité linéaire

$$\begin{aligned}
I_{ex} - I_h &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\sigma_{ex} - \sigma_h) \tilde{\epsilon}_{\Sigma} \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\sigma_{ex} - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \tilde{\epsilon}_{\Sigma} \right] d\Omega + A_h \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \tilde{\sigma}_{\Sigma} \right] d\Omega + A_h \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \hat{\sigma}_h \right] d\Omega + A_h \quad (\hat{\sigma}_h \text{ SA et } \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h \text{ CA}_0) \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right] d\Omega + A_h \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\sigma_{ex} - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \epsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right] d\Omega + A_h \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega + B_h + A_h \quad (\hat{\sigma}_h \text{ SA et } \hat{\underline{u}}_h \text{ CA}_0)
\end{aligned}$$

où A_h et B_h sont des termes entièrement calculables définis par :

$$\begin{aligned}
A_h &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h) - \sigma_h) \tilde{\epsilon}_{\Sigma} \right] d\Omega \\
B_h &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \epsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right] d\Omega
\end{aligned}$$

On a donc au final :

$$I_{ex} - I_h - A_h - B_h = \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega$$

Si on prend $\hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_h$ et $\hat{\sigma}_h = \tilde{\sigma}_h$, on a $A_h = 0$.

Si de plus $\tilde{\underline{u}}_h$ est obtenu avec le même maillage \mathcal{M}_h que \underline{u}_h , on obtient $B_h = 0$ en utilisant l'orthogonalité de Galerkin. On retrouve alors le résultat classique :

$$\begin{aligned} I_{ex} - I_h &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h) (\tilde{\sigma}_h - \mathbf{K} \epsilon(\tilde{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\epsilon(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h) (\tilde{\sigma}_{ex} - \mathbf{K} \epsilon(\tilde{\underline{u}}_h)) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\mathbf{K} \epsilon(\underline{e}^u) \epsilon(\tilde{\underline{e}}^u) \right] d\Omega \end{aligned}$$

• Pour les problèmes de viscoélasticité linéaire

$$\begin{aligned} I_{ex} - I_h &= \langle \langle s_{ex} - s_h, \dot{\hat{e}}_{\Sigma} \rangle \rangle \\ &= -\langle \langle \dot{e}_{ex} - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \tilde{s}_{\Sigma} \rangle \rangle \quad (\text{cf. (3.2)}) \\ &= -\langle \langle \dot{e}_{ex} - \dot{\hat{e}}_h, \tilde{s}_{\Sigma} \rangle \rangle + A_h \\ &= -\langle \langle \dot{e}_{ex} - \dot{\hat{e}}_h, \hat{s}_h \rangle \rangle + A_h \quad (\hat{s}_h - \tilde{s}_{\Sigma} \text{ SA}_0 \text{ et } e_{ex} - \hat{e}_h \text{ CA}_0) \\ &= -\langle \langle \dot{e}_{ex} - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h \rangle \rangle + A_h + B_h \\ &= \langle \langle s_{ex} - s_h, \mathbf{\Lambda}(\dot{\hat{s}}_h) - \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle + A_h + B_h \quad (\text{cf. (3.2)}) \\ &= \langle \langle s_{ex} - s_h, \dot{\hat{e}}_h - \dot{\hat{e}}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle + A_h + B_h \\ &= -\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{e}}_h^p \rangle \rangle + A_h + B_h + C_h \quad (s_{ex} - \hat{s}_h \text{ SA}_0 \text{ et } \hat{e}_h \text{ CA}_0) \end{aligned}$$

où A_h, B_h sont des termes entièrement calculables définis par :

$$\begin{aligned} A_h &= -\langle \langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \tilde{s}_{\Sigma} \rangle \rangle \\ B_h &= \langle \langle \dot{\hat{e}}_h - \mathbf{\Lambda}(\dot{s}_h) - \mathbf{B}(s_h), \hat{s}_h \rangle \rangle \\ C_h &= \langle \langle \hat{s}_h - s_h, \dot{\hat{e}}_h - \dot{\hat{e}}_h^p - \mathbf{B}(\hat{s}_h) \rangle \rangle \end{aligned}$$

On a donc au final :

$$I_{ex} - I_h - A_h - B_h - C_h = -\langle \langle s_{ex} - \hat{s}_h, \mathbf{B}(\hat{s}_h) + \dot{\hat{e}}_h^p \rangle \rangle$$

Annexe B : Dérivation du problème adjoint pour le problème de viscoélasticité linéaire de référence

Dans cette Annexe, on déduit de façon rigoureuse le problème adjoint associé au problème de viscoélasticité linéaire de la Section 2 du Chapitre 2, en utilisant la technique « Optimal Control » donnée dans [Becker et Rannacher 2001].

La formulation variationnelle en déplacement du problème de référence, avec conditions initiales nulles, peut s'écrire de façon globale en espace et en temps sous la forme :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ tel que :

$$\int_0^T \int_{\Omega} s(\underline{u}) \cdot e(\dot{\underline{u}}^*) d\Omega dt = \int_0^T \left[\int_{\Omega} \underline{f}_d(t) \cdot \dot{\underline{u}}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d(t) \cdot \dot{\underline{u}}^* dS \right] dt \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

que l'on écrit sous la forme plus générique :

$$\mathcal{B}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) = \mathcal{F}(\dot{\underline{u}}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

D'autre part, la quantité d'intérêt I se met sous la forme (cf. (3.1) et (3.3)) :

$$I(\underline{u}) = \int_0^T \int_{\Omega} s(\underline{u}) \cdot \dot{\underline{e}}_{\Sigma} d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{u}}) \cdot \tilde{s}_{\Sigma} d\Omega dt$$

La technique générale consiste alors à écrire la quantité d'intérêt comme la solution du problème de minimisation sous contrainte :

$$I(\underline{u}) = \inf_{\underline{p} \in \mathcal{C}} I(\underline{p}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = \{ \underline{p} \in \mathcal{U}^{[0,T]}, \mathcal{B}(\underline{p}, \dot{\underline{v}}) = \mathcal{F}(\dot{\underline{v}}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_0^{[0,T]} \}$$

La solution de ce problème correspond au point-selle $(\underline{p}_0, \underline{v}_0)$ du lagrangien \mathcal{L} défini par :

$$\mathcal{L}(\underline{p}, \underline{v}) = I(\underline{p}) - [\mathcal{B}(\underline{p}, \dot{\underline{v}}) - \mathcal{F}(\dot{\underline{v}})] \quad \forall (\underline{p}, \underline{v}) \in \mathcal{U}^{[0,T]} \times \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

- la dérivation par rapport à \underline{v} redonne le problème de référence :

$$D_{\underline{v}}\mathcal{L} = 0 \implies \mathcal{B}(\underline{p}_0, \dot{\underline{v}}^*) = \mathcal{F}(\dot{\underline{v}}^*) \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

- la dérivation par rapport à \underline{p} définit le problème adjoint :

$$D_{\underline{p}}\mathcal{L} = 0 \implies \mathcal{B}(\underline{p}^*, \dot{\underline{v}}_0) = I(\underline{p}^*) \quad \forall \underline{p}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

Le problème adjoint peut ainsi s'écrire :

$$\int_0^T \int_{\Omega} s(\underline{p}^*) \cdot e(\dot{\underline{v}}_0) d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{p}}^*) \cdot \tilde{s}_{\Sigma} d\Omega dt \quad \forall \underline{p}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$$

ou encore, par dualité (cf. (3.2)) :

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{p}}^*) \cdot s(\underline{v}_0) d\Omega dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{p}}^*) \cdot \tilde{s}_{\Sigma} d\Omega dt \\ &\quad - \left[s(\underline{p}^*) \mathbf{\Lambda}(s(\underline{v}_0)) \right]_{|T} \quad \forall \underline{p}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]} \end{aligned}$$

avec $\dot{e}(\underline{v}_0) = \mathbf{\Lambda}(\dot{s}(\underline{v}_0)) - \mathbf{B}(s(\underline{v}_0))$.

On aboutit finalement à la formulation variationnelle définissant \underline{v}_0 :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{p}}^*) \cdot s(\underline{v}_0) d\Omega dt &= \int_0^T \int_{\Omega} e(\dot{\underline{p}}^*) \cdot \tilde{s}_{\Sigma} d\Omega dt \quad \forall \underline{p}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]} \\ s(\underline{v}_0)|_T &= 0 \end{aligned}$$

et on retombe sur le problème adjoint décrit dans la Section 1.2 du Chapitre 3.

Annexe C : Expression de quelques fonctions de Green en élasticité 2D et 3D

Tous les résultats donnés dans cette Annexe proviennent de la théorie développée dans [Mindlin 1936, Mindlin et Cheng 1950, Sneddon et Hill 1964]. Ils sont valables en élasticité linéaire, homogène et isotrope, sous l'hypothèse des petites perturbations. On note E le module de Young, ν le coefficient de Poisson et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement du matériau.

• **En élasticité 2D**

On fait l'hypothèse des contraintes planes et on se place dans le repère polaire de la Figure 7.6, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

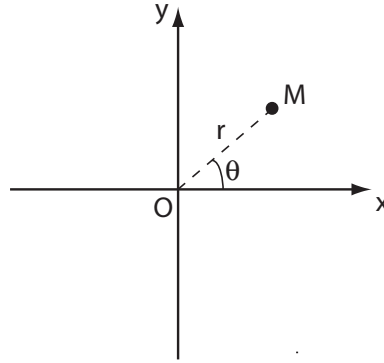


Figure 7.6: Repère polaire utilisé pour exprimer les fonctions de Green

Force ponctuelle selon \underline{x} appliquée en O dans un domaine infini

Le chargement est $\underline{f} = \delta(r)\underline{x}$.

Le vecteur de Galerkin correspondant est $\underline{B}_0 = -\frac{r^2 \log r}{8\pi G} \underline{x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_x^S(x, y) &= \frac{1}{8\pi G} \left[-(3 - \nu) \log r + (1 + \nu) \cos^2 \theta - \frac{7 - \nu}{2} \right] \\ u_y^S(x, y) &= \frac{1}{8\pi G} (1 + \nu) \cos \theta \sin \theta \\ \sigma_{xx}^S &= \frac{\cos \theta}{4\pi r} \left[-(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \cos^2 \theta \right] \\ \sigma_{yy}^S &= \frac{\cos \theta}{4\pi r} \left[(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \sin^2 \theta \right] \\ \sigma_{xy}^S &= \frac{\sin \theta}{4\pi r} \left[-(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \cos^2 \theta \right] \end{aligned}$$

Précontrainte ponctuelle selon \underline{x} appliquée en O dans un domaine infini

Le chargement est $\sigma = \begin{bmatrix} \delta(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\underline{x}, \underline{y}}$.

Le vecteur de Galerkin correspondant est $\underline{B}_0 = \frac{\underline{x}}{8\pi G} [2 \log r + 1] \underline{x}$.

On a alors :

$$u_x^S(x, y) = -\frac{\cos \theta}{4\pi r} \left[\frac{(1 + \nu)(3 - \nu)}{E} \cos^2 \theta + \frac{(1 + \nu)(1 - 3\nu)}{E} \sin^2 \theta \right]$$

$$u_y^S(x, y) = -\frac{\sin \theta}{4\pi r} \frac{(1 + \nu)^2}{E} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_{xx}^S = \frac{1}{4\pi r^2} \left[\frac{3 - 2\nu - \nu^2}{1 - \nu} \cos^4 \theta - 6(1 + \nu) \cos^2 \theta \sin^2 \theta - (1 - \nu) \sin^4 \theta \right]$$

$$\sigma_{yy}^S = \frac{1}{4\pi r^2} \left[-(1 - \nu) \cos^4 \theta + 6(1 + \nu) \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \frac{1 + 2\nu - 3\nu^2}{1 - \nu} \sin^4 \theta \right]$$

$$\sigma_{xy}^S = \frac{\cos \theta \sin \theta}{4\pi r^2} [(6 + 2\nu) \cos^2 \theta - (2 + 6\nu) \sin^2 \theta]$$

• **En élasticité 3D**

On donne les résultats dans le repère de Mindlin, avec $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

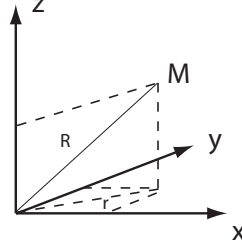


Figure 7.7: Repère de Mindlin

Force ponctuelle selon \underline{z} en O dans un domaine infini

Le chargement est $\underline{f} = \delta(R)\underline{z}$.

Le vecteur de Galerkin correspondant est $\underline{B}_0 = \frac{R}{8\pi G}\underline{z}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 u_x^S(x, y, z) &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{xz}{R^3} \\
 u_y^S(x, y, z) &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{yz}{R^3} \\
 u_z^S(x, y, z) &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \\
 \sigma_{xx}^S &= \frac{Fz}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5} \right] \\
 \sigma_{yy}^S &= \frac{Fz}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3y^2}{R^5} \right] \\
 \sigma_{zz}^S &= -\frac{Fz}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5} \right] \\
 \sigma_{xy}^S &= -\frac{3Fxyz}{8\pi(1-\nu)R^5} \\
 \sigma_{xz}^S &= -\frac{Fx}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5} \right] \\
 \sigma_{yz}^S &= -\frac{Fy}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5} \right]
 \end{aligned}$$

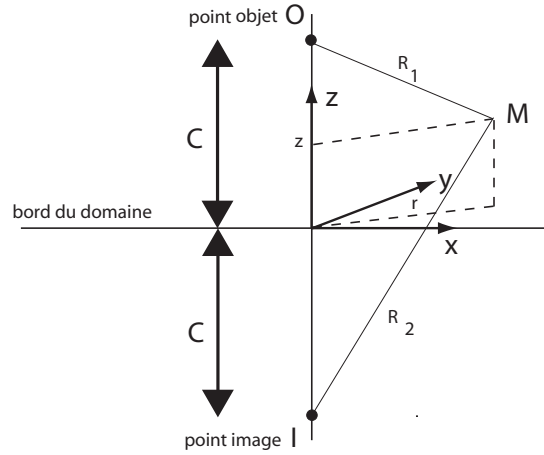


Figure 7.8: Paramétrage dans le repère de Mindlin

Force ponctuelle selon \underline{z} en O dans un domaine semi-infini

On considère les points objet O et image I avec les différentes longueurs données sur la Figure 7.8.

Cas d'un chargement normal (selon \underline{z})

Le chargement est $\underline{f} = \delta(R_1)\underline{z}$.

Les vecteurs de Galerkin utilisés sont de la forme, en notant $z_2 = z + c$:

$\underline{B}_0 = A_1 R_1 \underline{z}$: force ponctuelle en O suivant \underline{z}

$\underline{B}_1^* = A_2 R_2 \underline{z}$: force ponctuelle en I suivant \underline{z}

$\underline{B}_2^* = \frac{B z_2}{R_2} \underline{z}$: force double en I suivant \underline{z}

$\underline{B}_3^* = E \log(R_2 + z_2) \underline{z}$: centre de compression/dilatation en I suivant \underline{z}

$\underline{B}_4^* = F [z_2 \log(R_2 + z_2) - R_2] \underline{z}$: ligne de compression/dilatation sur l'axe \underline{z}
de $z_2 = 0$ à $z_2 = -\infty$

$\underline{B}_5^* = \frac{G}{R_2} \underline{z}$: double centre de compression/dilatation en I suivant \underline{z}

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 u_r^S &= \frac{P_Z r}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \\
 u_z^S &= \frac{P_Z}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right]
 \end{aligned}$$

Cas d'un chargement tangentiel (selon \underline{x})

Le chargement est $\underline{f} = \delta(R_1)\underline{x}$.

Les vecteurs de Galerkin utilisés sont de la forme, en notant $z_2 = z + c$:

$\underline{B}_0 = A_1 R_1 \underline{x}$: force ponctuelle en O suivant \underline{x}

$\underline{B}_1^* = A_2 R_2 \underline{x}$: force ponctuelle en I suivant \underline{x}

$\underline{B}_2^* = \frac{Cx}{R_2} \underline{z}$: force double suivant \underline{z} et moment suivant \underline{y} appliqués en I

$\underline{B}_3^* = Dx \log(R_2 + z_2) \underline{z}$: ligne de force double suivant \underline{z} et moment suivant \underline{y} appliqués sur l'axe \underline{z} entre $z_2 = 0$ et $z_2 = -\infty$

$\underline{B}_4^* = \frac{G}{R_2} \underline{x}$: double centre de compression/dilatation en I

$\underline{B}_6^* = H [z_2 \log(R_2 + z_2) - R_2] \underline{x}$: ligne de double centre de compression/dilatation sur l'axe \underline{z} de $z_2 = 0$ à $z_2 = -\infty$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 u_x^S &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)}\right) \right] \\
 u_y^S &= \frac{xy}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} + \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right] \\
 u_z^S &= \frac{x}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right]
 \end{aligned}$$

Annexe D : Paramètres utilisés pour les simulations numériques

Dans les différents exemples numériques, on considère un modèle rhéologique de Maxwell généralisé avec n ensembles {ressort + amortisseur}. Les paramètres matériau à fixer sont donc, pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

E_i	:	module de Young
ν_i	:	coefficient de Poisson
τ_i	:	temps caractéristique de viscosité

On prend $n = 1$ pour les simulations 1D sur des poutres; on a alors un modèle rhéologique de Maxwell simple.

On prend $n = 3$ pour les simulations en 2D.

• Réglage des paramètres de viscosité

Nous prenons des caractéristiques similaires à celles d'un gel. Bien que ces caractéristiques soient extrêmement variables (en fonction de la nature du gel, de la température, ...), elles sont souvent de l'ordre de $\eta \approx 1000$ Pa.s et $E \approx 1$ kPa. Ceci donne un ordre de grandeur pour le temps caractéristique de viscosité (temps de réponse) :

$$\tau = \frac{\eta}{E} \approx 1 \text{ s}$$

D'autre part, le temps d'étude est pris égal à 20 s pour que les effets visqueux aient le temps d'apparaître pleinement.

Dans le Chapitre 7, on prend des matériaux beaucoup plus visqueux, avec des temps de réponse τ de l'ordre de 100 s (pour le granit, on a $\eta \approx 10^{20}$ Pa.s et $E \approx 70$ GPa d'où $\tau \approx 10^9$ s!!!).

• **Réglage des paramètres de discrétisation**

Les éléments utilisés dans la discrétisation spatiale sont des éléments poutre (en 1D) et quadrilatère (en 2D) linéaires. On note N_e le nombre d'éléments du maillage spatial.

Pour la discrétisation temporelle, on prend un nombre N_p de pas de temps (longueur Δt) suffisamment grand de façon à représenter correctement les effets visqueux ($\Delta t \leq \tau$).

• **Paramètres utilisés dans chaque cas**

Poutre viscoélastique

N_e	5
N_p	20
E	1 kPa
τ	1 s

Plaque trouée élastique

N_e	90
E	1 Pa
ν	0,3

Structure carrée viscoélastique

N_e	25
N_p	20
E_1	1 kPa
E_2	1 kPa
E_3	1 kPa
ν_1	0,3
ν_2	0,3
ν_3	0,3
τ_1	1 s
τ_2	1,5 s
τ_3	2 s

Structure en L viscoélastique

N_e	100
N_p	20
E_1	1 kPa
E_2	1 kPa
E_3	1 kPa
ν_1	0,3
ν_2	0,3
ν_3	0,3
τ_1	1 s
τ_2	1,5 s
τ_3	2 s

**Structure carrée viscoélastique
(Chapitre 7)**

N_e	25
N_p	20
E_1	1 kPa
E_2	1 kPa
E_3	1 kPa
ν_1	0,3
ν_2	0,3
ν_3	0,3
τ_1	100 s
τ_2	150 s
τ_3	200 s