

Sur quelques modèles asymptotiques dans la théorie des ondes hydrodynamiques

Youcef Mammeri

Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1

Directeur: Nikolay Tzvetkov

Soutenance de thèse

17 Juillet 2008

Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Petite amplitude de surface

(Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, 1974)



Les quantités suivantes sont négligeables:

$$\alpha = \frac{a}{h} \quad , \quad \beta = \frac{h^2}{k^2} \quad , \quad \gamma = \frac{k^2}{l^2}.$$

Equations de Kadomtsev-Petviashvili

Sous ces conditions, on trouve les équations de Kadomtsev-Petviashvili:

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha uu_x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \sigma\right)\beta u_{xxx} + \frac{1}{2}\gamma\partial_x^{-1}u_{yy} = 0,$$

appelées KP-I si $\sigma > \frac{1}{3}$ et KP-II si $\sigma < \frac{1}{3}$, où $\sigma > 0$ désigne le nombre de Bond lié à la tension de surface, et

$$\widehat{\partial_x^{-1}u}(k, l) := \frac{\hat{u}(k, l)}{ik}.$$

La version Benjamin-Bona-Mahony

Comme $u_t + u_x = O(\alpha + \beta + \gamma)$, on obtient les équations de KP-BBM:

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha uu_x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \sigma \right) \beta u_{xxt} + \frac{1}{2} \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

appelées KP-BBM-I si $\sigma > \frac{1}{3}$ et KP-BBM-II si $\sigma < \frac{1}{3}$.

KP-BBM-I linéaire est un problème mal posé dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Problème de Cauchy

(Bona, Pritchard, Scott, A comparison of solutions of two model equations for long waves, 1983)

On considère les problèmes de Cauchy

$$\begin{aligned}u_t + u_x + \alpha uu_x + \alpha u_{xxx} + \alpha \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 \\v_t + v_x + \alpha vv_x - \alpha v_{xxt} + \alpha \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 \\u(x, y, 0) = v(x, y, 0) &= f(x, y).\end{aligned}$$

Problème linéaire

Conjecture

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors $\exists 0 < \delta < 1$ tel que, pour $|t| \leq \alpha^{-1-\delta}$, on a

$$\|u(.,., t) - v(.,., t)\|_{\infty} \leq C\alpha^2 |t|.$$

Elle est vraie pour les problèmes linéaires.

Problème non linéaire

- On effectue le changement de fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= u(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \\ \tilde{v}(x, y, t) &= v(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).\end{aligned}$$

Problème non linéaire

- On effectue le changement de fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= u(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \\ \tilde{v}(x, y, t) &= v(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).\end{aligned}$$

- On montre que pour $|t| \leq T_0$, avec T_0 indépendant de α ,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) \leq C\alpha |t|^{1/2},$$

Problème non linéaire

- On effectue le changement de fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= u(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \\ \tilde{v}(x, y, t) &= v(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).\end{aligned}$$

- On montre que pour $|t| \leq T_0$, avec T_0 indépendant de α ,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) \leq C\alpha |t|^{1/2},$$

- Ce qui implique que pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$,

$$\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(\alpha t) \leq C\alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

Problème non linéaire

- On effectue le changement de fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= u(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \\ \tilde{v}(x, y, t) &= v(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).\end{aligned}$$

- On montre que pour $|t| \leq T_0$, avec T_0 indépendant de α ,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) \leq C\alpha |t|^{1/2},$$

- Ce qui implique que pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$,

$$\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(\alpha t) \leq C\alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

- Les résultats se généralisent au cas périodique.

Problème non linéaire

- On effectue le changement de fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= u(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \\ \tilde{v}(x, y, t) &= v(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).\end{aligned}$$

- On montre que pour $|t| \leq T_0$, avec T_0 indépendant de α ,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) \leq C\alpha |t|^{1/2},$$

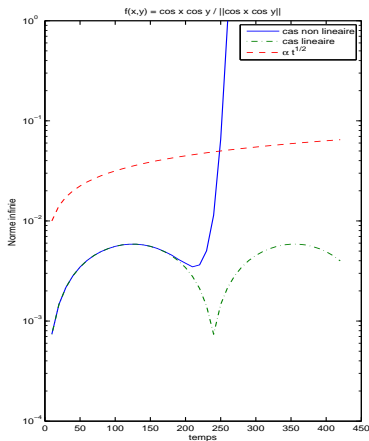
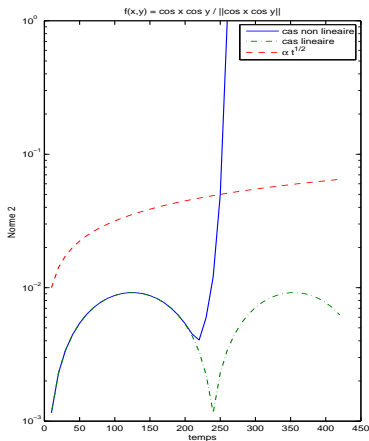
- Ce qui implique que pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$,

$$\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(t) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(\alpha t) \leq C\alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

- Les résultats se généralisent au cas périodique.
- Comparaison numérique (*Besse, A relaxation scheme for the nonlinear Schrödinger equation, 2004*)

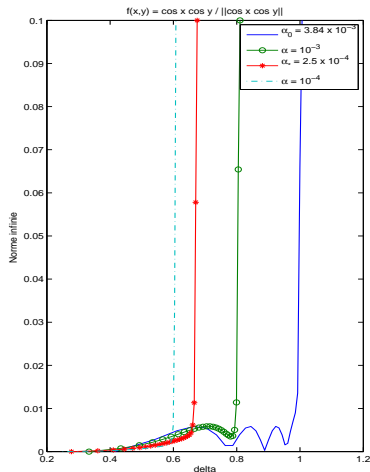
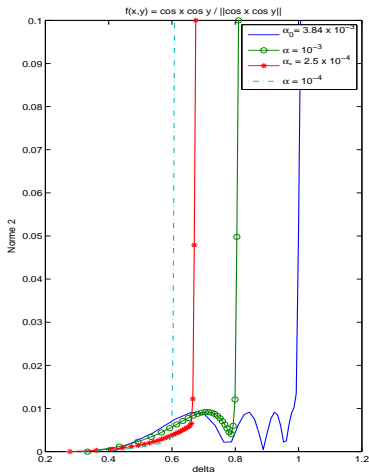
Comparaison des problèmes linéaires et non linéaires en fonction du temps

$$f(x, y) = \frac{\cos x \cos y}{\|\cos x \cos y\|}, \quad N_x = N_y = 128, \quad \delta t = 0.05, \quad \alpha = 10^{-3}.$$



Comparaison des problèmes non linéaires en fonction de δ

$\alpha = 10^{-3}$, 2.5×10^{-4} , 10^{-4} et $\alpha_0 = 3.84 \times 10^{-3}$



Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

Problème de Cauchy

On considère l'équation KP-BBM-II

$$\begin{aligned}v_t + v_x + \alpha v v_x - \beta v_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 \\v(x, y, 0) &= f(x, y).\end{aligned}$$

Théorème de Hardy

Théorème

Soient φ et ψ convexes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)| e^{\varphi(x)} dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}(k)| e^{\psi(k)} dk < +\infty,$$

alors $v \equiv 0$.

Théorème de Hardy

Théorème

Soient φ et ψ convexes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)| e^{\varphi(x)} dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}(k)| e^{\psi(k)} dk < +\infty,$$

alors $v \equiv 0$.

- Estimées de Carleman (*Kenig, Ponce, Vega, 2003. Saut, Scheurer, 1987*)

Théorème de Hardy

Théorème

Soient φ et ψ convexes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)| e^{\varphi(x)} dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}(k)| e^{\psi(k)} dk < +\infty,$$

alors $v \equiv 0$.

- Estimées de Carleman (*Kenig, Ponce, Vega, 2003. Saut, Scheurer, 1987*)
- Méthode de Bourgain (*Bourgain, On the compactness of the support of solutions of dispersive equations, 1997*)

Méthode de Bourgain

$\forall R > 0, \exists (k, l) \in \mathbb{R}^2$, avec $|k| + |l| > R$, tel que

$$|\partial_k \sigma(k, l)| \geq |f(k, l)|, \text{ avec } \lim_{|k|+|l| \rightarrow \infty} |f(k, l)| = +\infty,$$

où σ est le symbole de l'évolution linéaire.

Pour KP-BBM-II, $\sigma(k, l) = \frac{k + \gamma l^2/k}{1 + \beta k^2}$, et

$$\partial_k \sigma(k, l) = \frac{(1 - \beta k^2)k^2 - \gamma l^2(1 + 3\beta k^2)}{k^2(1 + \beta k^2)^2}.$$

Résultat

(Constantin, Finite propagation speed for the Camassa-Holm equation, 2005)

Théorème

Soient $s > 2$ et $v \in C([-T, T]; X^s(\mathbb{R}^2))$ solution de KP-BBM-II.

On suppose qu'il existe $0 < B < +\infty$ et $C > D$ dans \mathbb{R} , avec

$\frac{|D - C|}{\sqrt{\beta\gamma}} < \pi$, tels que $\forall t \in [-T, T]$,

$\text{supp } v(t) \subseteq [-B, B] \times [D, C]$. Alors v est identiquement nulle.

Idée de la preuve:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y) (v - \beta v_{xx}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y) (v_x + \alpha v v_x + \gamma \partial_x^{-1} v_{yy}) = 0,$$

si $g(y) + \beta\gamma g''(y) = 0$ et $g(y) > 0$.

Plan

1 Modélisation et Comparaison

- Modélisation
- Comparaison des solutions

2 Propriétés qualitatives

- Prolongement unique des solutions
- Prolongement en temps des bornes H^s
- Sur la décroissance en temps des solutions

3 Etude numérique 3D

- Données localisées
- Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
- Instabilité transversale dans la direction O_z

Problème de Cauchy

On considère l'équation KP-II

$$\begin{aligned}u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y).\end{aligned}$$

Existence et Unicité globale

Théorème

(Bourgain, On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation, 1993)

Soit $s \geq 0$. Pour tout $f \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$, il existe une solution globale en temps u de KP-II avec pour donnée initiale f , unique dans une classe convenable. Pour $s > 2$, $C(\mathbb{R}; H_0^s(\mathbb{T}^2))$ peut être pris comme unique classe.

Conséquence de l'existence et l'unicité

- On déduit que pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, la norme $\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2}$ est conservée.

Conséquence de l'existence et l'unicité

- On déduit que pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, la norme $\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2}$ est conservée.
- D'autre part, pour $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ and $s > 2$, il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que si la donnée initiale f vérifie $\|f\|_{H_0^s} \leq \varepsilon$, alors pour $|t| \leq C_2 \varepsilon^{-1} \frac{1}{\alpha}$, la solution u satisfait

$$\|u(t)\|_{H_0^s} \leq C_1 \varepsilon.$$

Résultat

(Tzvetkov, Long time bounds for the periodic KP-II equation, 2004)

Théorème

Soient $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ et $s > 1$. Il existe $0 < \varepsilon_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telle que si $f \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$ avec $\|f\|_{H_0^s} \leq \varepsilon$, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, alors l'unique solution u du problème de Cauchy associé à KP-II de donnée initiale f , satisfait pour $|t| \leq C_2 \left(\varepsilon^{-1} \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} \right)^2$,

$$\|u(t)\|_{H_0^s} \leq C_1 \varepsilon.$$

Idée de la preuve

- On réécrit KP-II sous forme normale

$$w_t + L(w) = F(w),$$

où L est un opérateur linéaire et F multilinéaire.

Idée de la preuve

- On réécrit KP-II sous forme normale

$$w_t + L(w) = F(w),$$

où L est un opérateur linéaire et F multilinéaire.

- Notons, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2, k \neq 0$, $\sigma(k, l) = i \left(k - \beta k^3 + \gamma \frac{l^2}{k} \right)$.

Lemme

Ce symbole de Fourier σ satisfait pour tout k et k_1 dans \mathbb{Z}^ , avec $k \neq k_1$,*

$$|\sigma(k_1, l_1) + \sigma(k - k_1, l - l_1) - \sigma(k, l)| \geq 3\beta |kk_1(k - k_1)| \geq 3\beta.$$

Remarque sur KP-BBM-II

On considère

$$v_t + v_x + \alpha v v_x - \beta v_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} v_{yy} = 0$$

Notons, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2, k \neq 0$, $\sigma(k, l) = i \frac{k + \gamma \frac{l^2}{k}}{1 + \beta k^2}$. On remarque que, pour tout k et k_1 dans \mathbb{Z}^* , avec $k \neq k_1$, $|\sigma(k_1, l_1) + \sigma(k - k_1, l - l_1) - \sigma(k, l)|$ peut s'annuler.

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

Problème de Cauchy

On considère l'équation KP-BBM-II généralisée

$$\begin{aligned}v_t + v_x + v^\rho v_x - v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 \\v(x, y, 0) &= f(x, y),\end{aligned}$$

avec $\rho \geq 1$ entier.

Lemme de Van der Corput

Lemme

$\forall a \leq b$, $\lambda > 0$, $t \neq 0$ et $h \in C^\infty([a, b])$ satisfaisant pour $k \in [a, b]$, $|h''(k)| \geq \lambda$, on a

$$\left| \int_a^b e^{-ith(k)} dk \right| \leq \frac{10}{(\lambda|t|)^{1/2}}.$$

En 1D, l'évolution linéaire est donnée par

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith(k)} \hat{f}(k) dk,$$

avec $h(k) = \frac{k}{1+k^2} - \frac{x}{t}k$.

Résultat

Théorème

Soit $\rho \geq 3$. Pour $0 < \delta < \frac{1}{5} - \frac{8}{15\rho}$, on pose $m = \frac{1}{2\delta} - 2$. On

choisit $1 < p < 2$ et $q > 2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et

$$0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-5\delta)}.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $\forall f \in X^{m+1, 7-\frac{4}{p}, p}(\mathbb{R}^2)$, avec $\|f\|_{X^{m+1, 7-\frac{4}{p}, p}} \leq \varepsilon$, il existe une unique solution globale en temps $u \in C\left(\mathbb{R}; X^{m+1, 7-\frac{4}{p}, p}(\mathbb{R}^2)\right)$ de gKP-BBM-II avec pour donnée initiale f .

De plus, il existe $C = C(m, p) > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\|_{L^q} + \|u_x(t)\|_{L^q} \leq C\varepsilon(1 + |t|)^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{5\delta}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)}.$$

Idée de la preuve

- Formule de Duhamel pour $t \geq 0$

$$\Phi u(t) = S_t f - \frac{1}{\rho+1} \int_0^t S_{t-\tau} \left(\frac{D_x}{1+D_x^2} u^{\rho+1} \right) (\tau) d\tau,$$

$$\text{où } S_t f := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikx+ily} e^{-it\left(\frac{k}{1+k^2} + \frac{l^2}{k(1+k^2)}\right)} \hat{f}(k, l) dk.$$

Idée de la preuve

- Formule de Duhamel pour $t \geq 0$

$$\Phi u(t) = S_t f - \frac{1}{\rho+1} \int_0^t S_{t-\tau} \left(\frac{D_x}{1+D_x^2} u^{\rho+1} \right) (\tau) d\tau,$$

$$\text{où } S_t f := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikx+ily} e^{-it\left(\frac{k}{1+k^2} + \frac{l^2}{k(1+k^2)}\right)} \hat{f}(k, l) dk.$$

- Méthode de Strauss (*Dispersion of low-energy waves for two conservative equations, 1974*): pour $m \geq 0$ et $1 < p < +\infty$,

$$\begin{aligned} \|D^m (u^{\rho+1})\|_{L^p}(t) &\leq C \|D^m u\|_{L^p}(t) \|u\|_{\infty}^{\rho}(t) \\ &\leq C \text{ Sobolev} \times (N_T(u)(1+|t|)^{-\theta})^{\rho}. \end{aligned}$$

Idée de la preuve

- Formule de Duhamel pour $t \geq 0$

$$\Phi u(t) = S_t f - \frac{1}{\rho+1} \int_0^t S_{t-\tau} \left(\frac{D_x}{1+D_x^2} u^{\rho+1} \right) (\tau) d\tau,$$

$$\text{où } S_t f := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikx+ily} e^{-it\left(\frac{k}{1+k^2} + \frac{l^2}{k(1+k^2)}\right)} \hat{f}(k, l) dk.$$

- Méthode de Strauss (*Dispersion of low-energy waves for two conservative equations, 1974*): pour $m \geq 0$ et $1 < p < +\infty$,

$$\begin{aligned} \|D^m (u^{\rho+1})\|_{L^p}(t) &\leq C \|D^m u\|_{L^p}(t) \|u\|_{\infty}^{\rho}(t) \\ &\leq C \text{ Sobolev} \times (N_T(u)(1+|t|)^{-\theta})^{\rho}. \end{aligned}$$

- $\frac{D_x}{1+D_x^2} \in L^p(\mathbb{R}^2)$, pour $1 < p < +\infty$.

Equation de Benjamin-Ono

Résultats similaires pour les équations BO

$$u_t + u_x + \alpha uu_x - \beta H(u_{xx}) = 0,$$

et BO-BBM

$$u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta H(u_{xt}) = 0,$$

où la transformée de Hilbert H dans la direction Ox est définie de telle sorte que $\widehat{H(u)}(k) := -i \operatorname{sgn}(k) \widehat{u}(k)$.

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

Equations de 3D-KP généralisées

On applique l'argument de Kadomtsev-Petviashvili pour trouver:

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + a \partial_x^{-1} u_{yy} + b \partial_x^{-1} u_{zz} = 0 ,$$

où $p \geq 1$, a , b normalisées à ± 1 .

Résultats connus

- Pour $a = b = -1$ et $p \geq 2$, explosion en temps fini (*Saut, Recent results on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, 1995*)

Résultats connus

- Pour $a = b = -1$ et $p \geq 2$, explosion en temps fini (*Saut, Recent results on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, 1995*)
- Etendu à $1 \leq p < 4/3$, pour solution initialement proche d'une onde solitaire instable (*Liu, Strong instability of solitary-wave solutions to a Kadomtsev-Petviashvili equation in three dimensions, 2002*)

Résultats connus

- Pour $a = b = -1$ et $p \geq 2$, explosion en temps fini (*Saut, Recent results on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, 1995*)
- Etendu à $1 \leq p < 4/3$, pour solution initialement proche d'une onde solitaire instable (*Liu, Strong instability of solitary-wave solutions to a Kadomtsev-Petviashvili equation in three dimensions, 2002*)
- But: explosion en temps fini pour les autres choix de a, b en fonction de p ?

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

Données localisées

On considère pour données initiales

$$u_0(x, y, z) = \alpha(1 - 2sx^2) e^{-s(x^2+y^2+z^2)},$$

avec $\alpha, s > 0$.

$$p = 2, \alpha = 5$$

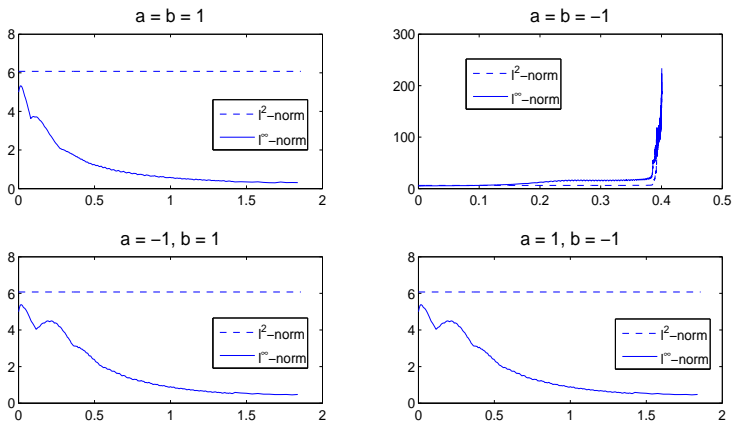


Figure: Evolutions des normes l^2 (---) et l^∞ (—) pour $p = 2, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

$$p = 3, \alpha = 5$$

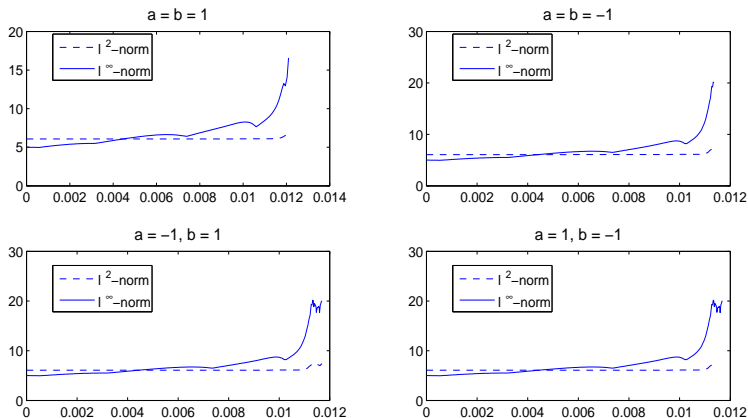


Figure: Evolutions des normes L^2 (---) et L^∞ (—) pour $p = 3, \alpha = 5, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

Résultat

Conjecture

Soit $p \geq 3$. Si $a = b = 1$ ou $ab = -1$, alors la solution de 3D-KP généralisée avec une donnée localisée explose en temps fini.

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

le line-soliton

Le line-soliton est défini par

$$\Phi_c(x, t) := \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} c \right)^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p} \left(\frac{p\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right).$$

On considère la donnée initiale

$$u_0(x, y, z) := \Phi_{c(y,z)}(x, 0),$$

où $c(y, z) := c \left(1 + \varepsilon \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} + \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \right)$, avec $\varepsilon > 0$ fixé petit.

$$p = 1, ab = -1$$

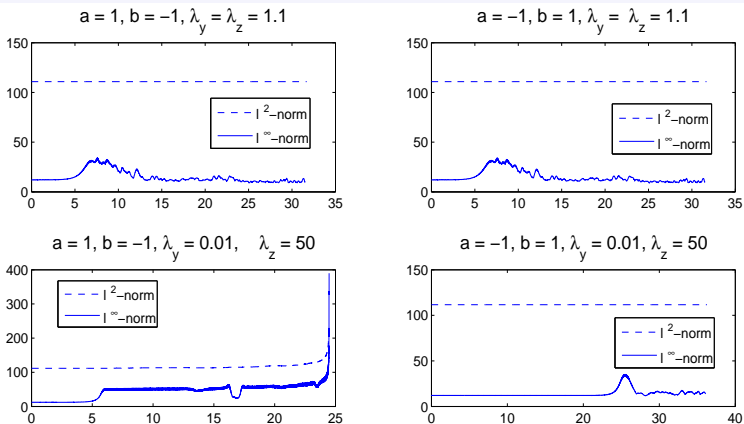


Figure: Evolutions des normes L^2 (---) et L^∞ (—) pour $p = 1$, $ab = -1$, $c = 4$, $K = 32$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $\lambda_y = 0.01, 1.1$, $\lambda_z = 1.1, 50$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

Résultat

Conjecture

Soient $p = 1$, et $a = 1$, $b = -1$, respectivement $a = -1$, $b = 1$. Il existe deux longueurs d'onde transversales critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, (avec $\lambda_c^1 \simeq \frac{4.2}{c}$), dépendant uniquement de c , telles que la solution de 3D-KP généralisée, avec pour donnée initiale le line-soliton perturbé u_0 , explose en temps fini si $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$, $\lambda_y < \lambda_c^1$ ou $\lambda_y > \lambda_c^2$, respectivement $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$, $\lambda_z < \lambda_c^1$ ou $\lambda_z > \lambda_c^2$.

$$p = 1, a = b = -1$$

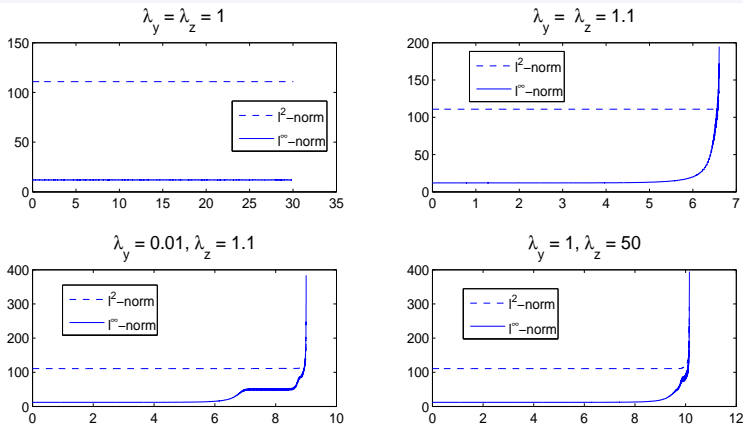


Figure: Evolutions des normes L^2 (---) et L^∞ (—) pour $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Ici, $\lambda_y = 0.01, 1, 1.1, \lambda_z = 1, 1.1, 50$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

Résultat

Conjecture

Soient $p \geq 1$, et $a = b = -1$ ($p \geq 2$ et $ab = -1$). Il existe deux longueurs d'onde transversales critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, dépendant uniquement de c , telles que la solution de 3D-KP généralisée, avec pour donnée initiale le line-soliton perturbé u_0 , explose en temps fini si $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ ou $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

Plan

- 1 **Modélisation et Comparaison**
 - Modélisation
 - Comparaison des solutions
- 2 **Propriétés qualitatives**
 - Prolongement unique des solutions
 - Prolongement en temps des bornes H^s
 - Sur la décroissance en temps des solutions
- 3 **Etude numérique 3D**
 - Données localisées
 - Instabilité transversale dans les directions O_y et O_z
 - Instabilité transversale dans la direction O_z

le soliton de Zaitsev

On suppose $p = 1$, $a = -1$ et on définit le soliton de Zaitsev par

$$\psi_c(x, y, t) := 12\alpha^2 \frac{1 - \beta \cosh(\alpha x - \Omega t) \cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x - \Omega t) - \beta \cos(\delta y))^2},$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{\delta^2 - 3\alpha^4}{\delta^2}}, \quad \Omega = \frac{\delta^2 + \alpha^4}{\alpha}, \quad 3\alpha^4 < \delta^2 \quad \text{and} \quad c = \frac{\Omega}{\alpha}.$$

On considère la donnée initiale

$$u_0(x, y, z) := \psi_{c(z)}(x, y, 0),$$

avec $c(z) := c \left(1 + \varepsilon \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \right)$.

$$b = -1$$

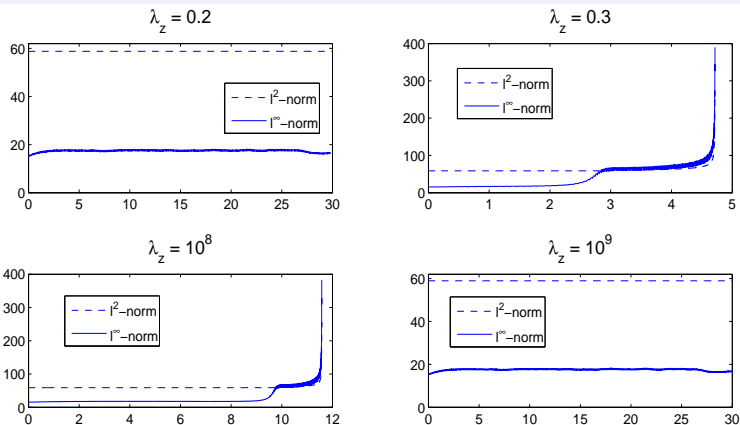


Figure: Evolutions des normes L^2 (---) et L^∞ (—) pour $b = -1$, $c = 2$, $K = 32$, $L = 12$, $M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = 32$, $N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Ici, $\lambda_z = 0.2, 0.3, 10^8, 10^9$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$b = -1$$

Conjecture

Soient $p = 1$, et $a = b = -1$. Il existe deux longueurs d'onde transversales critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, (avec $\lambda_c^1 \simeq \frac{0.6}{c}$), dépendant uniquement de c , telles que la solution de 3D-KP généralisée, avec pour donnée initiale le soliton de Zaitsev perturbé u_0 , explose en temps fini si $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.