Vibrations de classe Cs/2 des tores plats Ts et théorie des nombres

Jean-Paul Allouche

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3E CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

JEAN-PAUL ALLOUCHE

SUJET : VIBRATIONS DE CLASSE $C^{s/2}$ DES TORES PLATS T^s ET THÉORIE DES NOMBRES

SOUTENUE LE LUNDI 8 MAI 1978 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	G. POITOU	PRÉSIDENT
	Y. MEYER	EXAMINATEURS
	M. MENDES FRANCE	

Je voudrais exprimer ici ma profonde gratitude à Yves Meyer sous la direction de qui j'ai réalisé ce travail et qui, après avoir fait naître mon intérêt pour les questions situées à la frontière de l'Analyse Harmonique et de la Théorie des Nombres, m'a encouragé dans les moments difficiles.

Qu'il me soit permis de remercier très sincèrement M. Georges Poitou qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury. J'adresse aussi ma reconnaissance à Michel Mendès France pour l'intérêt qu'il a porté à mes recherches.

Enfin, je voudrais remercier tout spécialement Mme Nicole Parvan qui a réalisé avec beaucoup de compétence et de gentillesse la tâche délicate de dactylographier un manuscrit pas toujours très lisible ni très attrayant.

VIBRATIONS DE CLASSE $C^{s/2}$ DES TORES PLATS $\mathbb{T}^s$ ET THEORIE DES NOMBRES

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier l'influence de la régularité d'une vibration d'un tore plat sur son comportement à l'infini : plus précisément, on note $T^s = (R/Z)^s$, avec $s \geq 2$, et on considère l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ (1), où $u(x,t)$ est définie sur $T^s \times R$, et où Δ est le laplacien associé à une structure euclidienne sur R^s, notée $|\ |$.

On sait que toute solution de (1) de classe $C^{s/2+\eta}_{loc}$ est presque-périodique en t, uniformément par rapport à x, (voir par exemple [3]).

On sait en outre, lorsque $|\ |$ est la structure euclidienne canonique $|x| = (x_1^2+\ldots+x_s^2)^{1/2}$, qu'il existe une solution de (1) de classe $C^{s/2}$ non presque-périodique par rapport au temps t, (voir [1]).

Nous allons examiner ici le cas où $|x| = \left(\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{x_s^2}{\alpha_s}\right)^{1/2}$, et où les α_j sont des réels strictement positifs. Pour certaines valeurs des α_j nous montrerons qu'il existe une solution de (1) de classe $C^{s/2}_{loc}$ non presque-périodique par rapport à t.

Il convient tout de suite d'exprimer un regret : on ne pourra pas conclure dans le cas général, c'est-à-dire montrer l'existence d'une solution de (1) de classe $C^{s/2}_{loc}$ non presque-périodique en t, quel que soit s supérieur ou égal à 2, et quels que soient les α_j strictement positifs. Un tel résultat global, bien que très vraisemblable, semble difficile à établir, et on s'attachera à montrer les possibilités de généralisation des méthodes employées, mais aussi leurs limites.

LA SERIE DE WAINGER. RAPPORTS AVEC LA THEORIE DES NOMBRES.

La "série de Wainger" est la série de Fourier $\Sigma' \gamma_n e^{2i\pi |n| t} e^{2i\pi n.x}$, où le signe ' signifie que la somme porte sur les n de $\mathbb{Z}^s$, tels que $|n|$ soit strictement supérieur à 1, et où, avec $d = d(\varepsilon)$, l'on a :

$$\gamma_n = e^{i|n|\log^d |n|} |n|^{-s} (\log |n|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} .$$

Rappelons que, si x et y sont dans $\mathbb{R}^s$, on pose $x.y = \sum_1^s \frac{x_j y_j}{\alpha_j}$, et $|x| = (\Sigma \frac{x_j^2}{\alpha_j})^{1/2}$, où les α_j sont des réels strictement positifs donnés, le laplacien Δ valant alors $\Sigma\, \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

La fonction représentée par cette série de Fourier, soit $u(x,t)$, est trivialement une solution de (1) au sens des distributions ; de plus, Wainger démontre que $u(x,t)$ appartient à $C^{s/2}_{loc}(\mathbb{T}^s \times \mathbb{R})$, (voir [20] ou [1]).

La difficulté réside alors dans l'étude du comportement de $u(x,t)$ pour les grandes valeurs de t. On peut se placer par exemple en $x = 0$, et on étudie alors la série trigonométrique apériodique en une variable réelle $\Sigma' \gamma_n e^{2i\pi|n|t}$, la fonction représentée par cette série, soit $f(t)$, étant de classe $C^{s/2}_{loc}$.

On sait, depuis Kronecker, que pour montrer qu'une telle série est bornée, il suffit d'étudier le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $|n|$. Remarquons d'ailleurs que des séries de ce type se rencontrent fréquemment en théorie des nombres, (par exemple $\zeta(z) = \Sigma\, n^{-z}$ pour $\mathcal{R}e\, z > 1$).

Si l'on somme cette série suivant les valeurs de $|n|$, il y aura deux approches distinctes suivant que l'application $(n_1,\ldots,n_s) \to |n|$ est injective ou non de $\mathbb{N}^s$ dans $\mathbb{R}$. C'est pourquoi, en dimension deux par exemple, on étudiera deux cas : $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ rationnel, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irrationnel.

Présentons le plan de la suite : pour montrer que $f(t)$ n'est pas presque-périodique, on montrera que $f(t)$ n'est pas bornée, successivement :

- En dimension 2, pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ rationnel.
- En dimension 2, pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irrationnel et vérifiant une condition supplémentaire de linéaire indépendance sur $\mathbb{Q}$, (par exemple $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ transcendant sur $\mathbb{Q}$).
- En dimension 3, pour $\alpha_1 = k/b^2$, $\alpha_2 = k/c^2$, et $\alpha_3 = k/(d^2+e^2)$, où k est un réel strictement positif, où b et c sont des rationnels strictement positifs, et où d et e sont des rationnels positifs tels que $(d,e) \neq (0,0)$.
- En dimension 3, pour $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
- En dimension 4, pour $\alpha_i^{-1} = k.U_i$, où k est un réel strictement positif, où les U_i sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, et où enfin, si l'on pose $U_i = u_i^2\,\theta_i$, (les θ_i sans facteurs carrés), les θ_i doivent vérifier ... une relation très compliquée, mais qui est assurée dès qu'ils sont premiers entre eux deux à deux, et que l'un d'entre eux est pair.
- En dimension 4, pour $\frac{\alpha_4}{\alpha_1}$, $\frac{\alpha_4}{\alpha_2}$, et $\frac{\alpha_4}{\alpha_3}$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
- En dimension supérieure ou égale à 5, si tous les rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ sont rationnels.
- En dimension supérieure ou égale à 5, si les nombres $\frac{\alpha_s}{\alpha_1}, \frac{\alpha_s}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_s}{\alpha_{s-1}}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Pourquoi un tel découpage ? Prenons par exemple le cas ou tous les α_j sont des entiers. Alors l'application $(n_1,\ldots,n_s) \to |n|$ n'est pas "injective", et, lorsque l'on va sommer suivant les valeurs de $|n|$, γ_n va être multiplié par le nombre de manières de décomposer un entier m sous la forme $m = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_s x_s^2$, (les x_i dans Z) ; ce dernier nombre n'a une expression asymptotique simple que pour s supérieur ou égal à 5.

Pour conclure, on donnera une liste des conjectures que ce travail a soulevées sans les résoudre entièrement.

PREMIERE PARTIE : $s = 2$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ EST RATIONNEL.

Remarquons d'abord que seul intervient le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$: en effet, si $f(x_1,x_2,t)$ est solution de $\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, alors $\varphi(x_1,x_2,t) = f(x_1,x_2,\frac{t}{\sqrt{\beta}})$ est solution de $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Sans restreindre la généralité du propos, on peut donc supposer ici que $\alpha_1 = \frac{1}{A^2 \ell}$, $\alpha_2 = \frac{1}{B^2 m}$, où A et B sont des entiers strictement positifs, et où ℓ et m sont des entiers strictement positifs sans facteur carré et premiers entre eux. On reprend alors l'étude de [1] ; pour montrer que $f(t) = \Sigma' \gamma_n e^{2i\pi|n|t}$ est non bornée, il suffit de montrer que la série $\sum_{q\,\mathrm{sfc} \geq 2} \left(\sum_{a \geq 1} \left(\frac{N_{\lambda,\mu}(a^2q)}{a^2q(\log a^2q)^{1/2+\epsilon}} \right)^2 \right)^{1/2}$ diverge pour ϵ assez petit, où sfc signifie sans facteur carré, où $N_{\lambda,\mu}(m)$ est le nombre de décompositions de $m = \lambda u^2 + \mu v^2$, avec u et v dans $\mathbb{Z}$, et où $\lambda = A^2 \ell$ et $\mu = B^2 m$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1. <u>Si ϵ est compris strictement entre 0 et $\frac{1}{2}$, alors la série</u>
$$\sum_{q\,\mathrm{sfc} \geq 2} \left(\sum_{a \geq 1} \left(\frac{N_{\lambda,\mu}(a^2q)}{a^2q(\log(a^2q))^{1/2+\epsilon}} \right)^2 \right)^{1/2}$$
<u>diverge</u>.

On va montrer que, si cette série converge, alors ϵ est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

On commence par remarquer que, si la série converge, alors pour tout a dans $\mathbb{N}^*$, $\sum_{q\,\mathrm{sfc} \geq 2} \frac{N_{\lambda,\mu}(a^2q)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} < \infty$. Montrons que pour tout $k = D^2 q_0$ fixé, avec q_0 sans facteur carré, l'on a $\sum_{q\,\mathrm{sfc} \geq 2} \frac{N_{\lambda,\mu}(kq)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} < +\infty$.

Il suffit de montrer que pour chaque δ qui divise q_o, la série $\Sigma^{\#} \dfrac{N_{\lambda,\mu}(kq)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ converge, où le signe $\Sigma^{\#}$ signifie que la sommation porte sur les q sfc, supérieurs ou égaux à 2 et tels que $\mathrm{pgcd}(q,q_o) = \delta$.

Posons $q'_o = \dfrac{q_o}{\delta}$, alors :

$$\Sigma^{\#} \frac{N_{\lambda,\mu}(kq)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} = \Sigma^{\#} \frac{N_{\lambda,\mu}(D^2\delta^2 q'_o \frac{q}{\delta})}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} .$$

Or, si q est sfc supérieur ou égal à 2 et tel que $\mathrm{pgcd}(q,q_o) = \delta$, alors $\frac{q}{\delta}.q'_o$ est sans facteur carré (car q_o est sans facteur carré). D'où

$$\Sigma^{\#} \frac{N_{\lambda,\mu}(D^2\delta^2 q'_o \frac{q}{\delta})}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} \leq \sum_{r\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{\lambda,\mu}(D^2\delta^2 r)}{\frac{\delta r}{q'_o}(\log(\frac{\delta r}{q'_o}))^{1/2+\epsilon}} ;$$

Comme cette dernière série est de même nature que $\displaystyle\sum_{r\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{\lambda,\mu}((D\delta)^2 r)}{r(\log r)^{1/2+\epsilon}}$, elle converge par hypothèse, d'où le résultat :

$$\forall\, k \geq 1, \sum_{q\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{\lambda,\mu}(kq)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} < +\infty.$$

On en déduit facilement que, pour chaque k de $\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{q\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{\ell,m}(kq)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ converge : en effet, si $n = \ell x^2 + my^2$, alors $A^2B^2n = A^2\,\ell(Bx)^2 + B^2m(Ay)^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$, ce qui nous donne une injection des décompositions de $n = \ell x^2 + my^2$, dans les décomposition de $A^2B^2n = \lambda X^2 + \mu Y^2$, et l'inégalité $N_{\ell,m}(n) \leq N_{\lambda,\mu}(A^2B^2n)$.

Comme on ne connaît l'expression de $N_{\ell,m}(n)$ que pour certaines valeurs de ℓ et m, on va remplacer cette quantité par une moyenne prise sur les formes quadratiques entières de même discriminant que la forme $\ell x^2 + my^2$, moyenne dont on connaît une expression explicite.

On note $g(u,v,w)(n)$ le nombre de couples (x,y) dans $\mathbb{Z}^2$ tels que $n = ux^2 + vxy + wy^2$, en particulier $g(u,0,w) = N_{u,w}$. On remarque alors, que : si $q = x^2 + 4\alpha\beta y^2$, alors $\alpha q = \alpha x^2 + \beta(2\alpha y)^2$, d'où l'inégalité

$$N_{1,4\alpha\beta}(q) \leq N_{\alpha,\beta}(\alpha q),$$

si $q = ux^2 + vxy + wy^2$, avec $v^2 - 4uw = d$, alors $4uq = (2ux+vy)^2 + (4uw - v^2)y^2$, d'où l'inégalité
$$g(u,v,w)(q) \leq N_{1,-d}(4uq).$$

On en déduit facilement que, si l'on pose $d = -4\ell m$ et si $v^2 - 4uw = d$, alors : $g(u,v,w)(q) \leq N_{\ell,m}(4u\ell q)$, et donc la série $\sum\limits_{q\,\text{sfc}} \dfrac{g(u,v,w)(q)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ converge.

Si on considère alors un système représentatif de formes positives primitives entières de discriminant d, soit $(u_jx^2 + v_jyx + w_jy^2)$, $j = 1,2,\dots,r$, on a :

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{q\,\text{sfc}\geq 2} \frac{g(u_j,v_j,w_j)(q)}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} < +\infty ,$$

d'où :

$$\sum_{q\,\text{sfc}\geq 2} \Big(\sum_j g(u_j,v_j,w_j)(q)\Big) \frac{1}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} < +\infty .$$

Mais d'après L.E. Dickson ([7]p. 78), on a

$$\sum_j g(u_j,v_j,w_j)(q) = w \sum_{\mu | q} \left(\frac{d}{\mu}\right), \qquad \text{où} \qquad w = w(d),$$

pour q premier avec $|d|$, $\left(\frac{d}{\mu}\right)$ étant le symbole de Legendre. Ainsi

$\sum_1 \Big(\sum\limits_{\mu|q} \left(\frac{d}{\mu}\right)\Big) \dfrac{1}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ converge, où $\sum_1$ signifie que l'on somme sur les q sans facteur carré, supérieurs ou égaux à 2, et premiers avec $|d|$.

Appelons K l'ensemble des nombres sfc supérieurs ou égaux à 2 et dont tous les facteurs premiers sont premiers avec $|d|$, et vérifient $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. Il est clair que si q est dans K, $\sum\limits_{\mu|q} \left(\frac{d}{\mu}\right) = 2^{\omega(q)}$ où $\omega(q)$ est le nombre de facteurs premiers de q.

Pour finir la démonstration du théorème, il suffit de montrer que, si $\sum_{q \in K} \frac{2^{\omega(q)}}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ converge, alors ϵ est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Il suffit donc de prouver que $\sum_{q \in K} \frac{2^{\omega(q)}}{q \log q}$ diverge.

Pour cela, on va utiliser la méthode de H. Delange ([5] & [6]) :

Soit $\chi(n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\chi(n) = \begin{cases} 2^{\omega(n)} & \text{si } n \in K \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La série étudiée vaut donc $\sum_{n \geq 2} \frac{\chi(n)}{n \log n}$.

Posons, pour $s > 1$, $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Comme χ est multiplicative, c'est-à-dire pour m et n premiers entre eux $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, alors on a :

$$F(s) = \Pi\Big(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^r)}{p^{rs}}\Big), \qquad ([5] \text{ p. } 18),$$

le produit étant pris sur les nombres premiers p. D'où $F(s) = \Pi_1\big(1 + \frac{2}{p^s}\big)$, le produit Π_1 étant pris sur les nombres premiers p qui vérifient $\big(\frac{d}{p}\big) = 1$ et p ne divise pas $|d|$.

On écrit alors $F(s) = \Pi_1\big(1 + \frac{2}{p^s}\big)e^{-\frac{2}{p^s}} \times \exp\big(2\, \Sigma_1 \frac{1}{p^s}\big)$; lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures, on a $\Sigma_1 \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{s-1} + r(s)$ où r est une fonction holomorphe sur $\{\Re e\, s \geq 1\}$, ceci est une conséquence de la loi de réciprocité quadratique et du théorème de Dirichlet sur la densité analytique des premiers dans une progression arithmétique ([16]).

Par conséquent, lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures, $F(s)$ est équivalent à $\frac{C}{s-1}$.

Comme χ est positive, on peut alors appliquer le théorème de Hardy-

Littlewood ([12], th. 16, p. 190-191) : pour n tendant vers $+\infty$, $\sum_{1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}$ est

équivalent à $\frac{C}{r(2)} \log n = D \log n$.

On a alors, en posant $S_n = \sum_{1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}$:

$$\sum_{2}^{N} \frac{\chi(k)}{k \log k} = \sum_{2}^{N} \frac{S_k - S_{k-1}}{\log k} = \frac{S_N}{\log N} - \frac{S_1}{\log 2} + \sum_{2}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right).$$

Comme S_n est équivalent à $D \log n$ pour n tendant vers $+\infty$, et que

$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}$ est équivalent à $\frac{1}{n \log^2 n}$, on en déduit que $\sum_{2}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k \log k}$ diverge,

ce qui achève la démonstration du théorème.

DEUXIEME PARTIE : $s = 2$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ IRRATIONNEL.

Comme dans la partie précédente, on remarque que seul intervient le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

On se propose ici de montrer que, pour certaines valeurs du rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $f(t) = \Sigma' \gamma_n e^{2i\pi|n|t}$ précédemment définie est non bornée, et donc non-presque-périodique.

1°) THEOREME 2. S'il existe un ensemble fini $\mathcal{E}$ de rationnels strictement positifs, tels que les nombres $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + r^2}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, lorsque r décrit $Q^{+*} - \mathcal{E}$, alors $f(t)$ est non bornée pour $\varepsilon \in]0;\frac{1}{2}]$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ transcendant sur Q.

Remarque : L'hypothèse sur $\mathcal{E}$ signifie que le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + r^2}$ admet comme base $\left\{\sqrt{\theta+r^2}\,,\ r \in Q^{+*} - \mathfrak{F}\right\}$ où $\mathfrak{F}$ fini.

On notera $\mathcal{E} = \left\{\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}\right\}$ où les m et les n sont des entiers strictement positifs, tels que pour chaque j m_j et n_j soient premiers entre eux.

On conviendra de noter Σ_1 une somme portant sur m et n dans $\mathbb{N}$, tels que $\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2} > 1$, et que $\frac{m}{n}$ n'appartienne pas à $\mathcal{E}$ et Σ_2 une somme portant sur m et n dans $\mathbb{N}$, tels que $\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2} > 1$, et que $\frac{m}{n}$ soit dans $\mathcal{E}$.

On a alors $f(t) = \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} \gamma_n e^{2i\pi|n|t} = \sum'_{n \in \mathbb{N}^2} b_n e^{2i\pi|n|t}$ où

$b_n = \gamma(n_1,n_2) + \gamma(-n_1,n_2) + \gamma(n_1,-n_2) + \gamma(-n_1,-n_2)$, et, pour $n = (n_1,n_2)$, $\gamma(n_1,n_2) = \gamma_n$.

Posons aussi, toujours pour $n = (n_1, n_2)$, $b(n_1, n_2) = b_n$.

On écrit alors :

$$f(t) = \Sigma_1\, b_n\, e^{2i\pi |n| t} + \Sigma_2\, b_n\, e^{2i\pi |n| t} .$$

La seconde série de Fourier est égale à :

$$\sum_{j=1}^{k} \sideset{}{'}\sum_{\ell=1}^{+\infty} b(\ell m_j, \ell n_j) \exp\Big(2i\pi\, \ell t \sqrt{\frac{m_j^2}{\alpha_1} + \frac{n_j^2}{\alpha_2}}\Big) .$$

Or j décrit un ensemble fini, et, pour j fixé, on a :

$$|b(\ell m_j, \ell n_j)| \leq 4\, \ell^{-2} \Big(\frac{m_j^2}{\alpha_1} + \frac{n_j^2}{\alpha_2}\Big)^{-1} \Big(\log \ell \sqrt{\frac{m_j^2}{\alpha_1} + \frac{n_j^2}{\alpha_2}}\Big)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} ,$$

d'où $\sideset{}{'}\sum_{\ell} |b(\ell m_j, \ell n_j)| < +\infty$.

Par conséquent la fonction correspondant à cette série de Fourier est bornée.

Pour montrer que $\tilde{f}(t) = \Sigma_1\, b(m,n) \exp\Big(2i\pi \sqrt{\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}}\Big)$ est non bornée, on va utiliser la même méthode que Y. Meyer dans [17] :

Soit h une fonction positive, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, à support compact, et d'intégrale égale à 1.

On pose, pour t réel, $v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t-s)\, h(s)\, ds$, ce qui entraîne :

$$v(t) = \Sigma_1\, b_h(m,n) \exp\Big(2i\pi \sqrt{\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}}\Big),$$

où $b_h(m,n) = b(m,n).\hat{h}\Big(\sqrt{\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}}\Big)$.

La série de Fourier de v est absolument convergente. On groupe alors les termes, en écrivant :

$$v(t) = \Sigma_3\, S_{m,n,h}(t),$$

où Σ_3 porte sur m et n dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}} > 1$, $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$, et tels que $\frac{m}{n}$ n'appartienne pas à $\mathcal{E}$, et où

$$S_{m,n,h}(t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} b_h(\ell m, \ell n) \exp\left(\frac{2i\pi \ell t}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \sqrt{\alpha_1 n^2 + \alpha_2 m^2}\right).$$

Si f est bornée par M sur $\mathbb{R}$, on a $\|v\|_\infty \le M\|h\|_1 = M$.

En reprenant la démonstration des lemmes 1 et 4 de [10], et en utilisant la Q-linéaire indépendance des $\sqrt{\alpha_1 n^2 + \alpha_2 m^2}$ lorsque m et n décrivent $\mathbb{N}^*$ et sont tels que $\operatorname{pgcd}(m,n) = 1$ et $\frac{m}{n} \notin \mathcal{E}$, (ce qui résulte trivialement de l'hypothèse sur $\mathcal{E}$), on obtient :

$$\Sigma_4 \|S_{m,n,h}(t)\|_\infty \le 4\|\Sigma_4 S_{m,n,h}(t)\|_\infty \le 4M,$$

où Σ_4 porte sur $\left\{m,n \in \mathbb{N}^* ; \operatorname{pgcd}(m,n) = 1 ; \frac{m}{n} \notin \mathcal{E} ; \sqrt{\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}} > 1\right\}$. Mais :

$\|S_{m,n,h}(t)\|_\infty^2 \ge \|S_{m,n,h}(t)\|_2^2 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} |b_h(\ell m, \ell n)|^2$ d'où $\|S_{m,n,h}(t)\|_\infty^2 \ge |b_h(m,n)|$.

On a donc en définitive : $\Sigma_4 \, |b_h(m,n)| \le 4M$.

Comme M ne dépend pas de h, en faisant tendre h vers la masse de Dirac en 0, et en appliquant le lemme de Fatou, on obtient $\Sigma_4 \, |b(m,n)| < +\infty$, c'est-à-dire :

$$\Sigma_4 \left(\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}\right)^{-1} \left(\log\left(\frac{m^2}{\alpha_1} + \frac{n^2}{\alpha_2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} < +\infty .$$

Ceci implique facilement la convergence de la série

$$\Sigma_o (m^2+n^2)^{-1} (\log(m^2+n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon},$$

la somme Σ_o portant sur m et n dans $\mathbb{N}^*$ et premiers entre eux.

Or, on a successivement :

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} (m^2+n^2)^{-1}(\log(m^2+n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \Sigma_o \frac{(\log(\ell^2 m^2 + \ell^2 n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon}}{m^2+n^2}$$

$$\le \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2}\right)\left(\Sigma_o \frac{(\log(m^2+n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon}}{m^2+n^2}\right).$$

Pour conclure, on remarque alors que, pour ϵ dans $]0,\frac{1}{2}]$, la série

$\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*}(m^2+n^2)^{-1}(\log(m^2+n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ diverge, (par exemple par comparaison avec une intégrale), donc que la série $\Sigma_o\,(\log(m^2+n^2))^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(m^2+n^2)^{-1}$ diverge, et ainsi f ne saurait être bornée.

Montrons alors que les hypothèses du théorème sont satisfaites pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ transcendant sur $\mathbb{Q}$:

Pour cela, nous allons montrer, en utilisant une méthode inspirée de celle de Y. Pourchet dans [10], que les nombres $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+r^2}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})$ lorsque r décrit $\mathbb{Q}^{+*}$, (autrement dit on peut prendre $\mathcal{S}=\emptyset$).

Posons $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\theta$, et $K=\mathbb{Q}(\theta)$.

Supposons que l'on ait une relation $\sum_1^n \lambda_i\sqrt{\theta+r_i^2}=0$, où les λ_i sont dans K, et les r_i des rationnels strictement positifs distincts.

Si l'un des λ, par exemple λ_1, est non nul, on écrit :

$$-\lambda_1=\sum_2^n \lambda_i\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r^2}}\,.$$

Soit $K_i=K(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r^2}})$ et soit $L=K(\bigcup_2^n K_i)$. On a donc :

$$\sum_2^n \lambda_i\,Tr_{L/K}(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}})=Tr_{L/K}(-\lambda_1)=-\lambda_1\,[L:K],$$

soit

$$\sum_2^n \lambda_i\,Tr_{K_i/K}(Tr_{L/K_i}(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}))=-\lambda_1\,[L:K],$$

d'où

$$\sum_2^n \lambda_i\,[L:K_i]\,Tr_{K_i/K}(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}})=-\lambda_1\,[L:K]\neq 0.$$

Pour arriver à une contradiction, il suffit donc de montrer que, pour tout i différent de 1, on a $Tr_{K_i/K}(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}})=0$.

On remarque d'abord que $\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}$ n'est pas dans K, sinon il existerait deux polynômes A et B, dans $\mathbb{Q}[X]$, premiers entre eux, tels que $A(\theta) \neq 0$, $B(\theta) \neq 0$, et $B^2(\theta)(\theta+r_1^2) = A^2(\theta)(\theta+r_i^2)$. On en déduit que $A^2(X)$ divise $X+r_1^2$, donc A^2 est de degré au plus 1, donc A est constant, de même pour B.

Bref il existe ξ dans $\mathbb{Q}^*$ tel que $(X+r_1^2) = \xi^2(X+r_i^2)$, d'où $\xi^2 = 1$ et $r_i = r_1$; ce qui n'est pas.

Par conséquent, le polynôme minimal de $\sqrt{\dfrac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}$ sur K est $X^2-(\dfrac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2})$, d'où $Tr_{K_i/K}(\sqrt{\dfrac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

2°) <u>Deux propositions subsidiaires</u> :

Soit $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$, tel que les $\sqrt{\theta+r^2}$ ne soient pas $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants lorsque r décrit $\mathbb{Q}^{+*}$. Un tel θ est nécessairement algébrique sur $\mathbb{Q}$, on se demande si on peut contrôler son degré :

a) PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$, <u>tel que les</u> $\sqrt{\theta+r^2}$ <u>ne soient pas</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants pour</u> $r \in \mathbb{Q}^{+*}$.

<u>Soit</u> $\sum_1^k \lambda_j\sqrt{\theta+r_j^2} = 0$ <u>une relation de liaison non triviale, de longueur minimale</u>.

<u>Alors</u> θ <u>est algébrique sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>et</u> $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] \geq k-1$.

COROLLAIRE. <u>Si</u> θ <u>est algébrique sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>et si les nombres</u> $\sqrt{\theta+r^2}$ <u>ne sont pas linéairement indépendants sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>pour</u> $r \in \mathbb{Q}^{+*}$, <u>alors il existe</u> $m+1$ <u>rationnels</u> $r_j > 0$ (<u>où</u> $m = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$) <u>et des nombres rationnels</u> λ_j

<u>non tous nuls, tels que</u> $\sum_{1}^{m+1} \lambda_j \sqrt{\theta+r_j^2} = 0$.

Soit donc $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$; on suppose que les $\sqrt{\theta+r^2}$ ne sont pas linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*}$, donc θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Soit $\sum_{1}^{k} \lambda_j \sqrt{\theta+r_j^2} = 0$, une relation de longueur minimale. En particulier : $\forall\ j,\ \lambda_j \neq 0$.

On écrit la relation sous la forme $\lambda_1 + \sum_{2}^{k} \lambda_j \sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}} = 0$.

On pose comme précédemment $K_j = Q(\sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1}})$ pour $j = 2, \ldots k$, $L = Q(\cup K_j)$, $K = Q(\theta)$, d'où $K \subset K_j \subset L$.

D'où :

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1[L:K] &= \sum_{2}^{k} \lambda_j \operatorname{Tr}_{L/K}\left(\sqrt{\frac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}\right) \\
&= \sum_{2}^{k} \lambda_j \operatorname{Tr}_{K_j/K}\left(\operatorname{Tr}_{L/K_j} \sqrt{\frac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}\right) \\
&= \sum_{2}^{k} \lambda_j [L:K_j] \operatorname{Tr}_{K_j/K}\left(\sqrt{\frac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}\right).
\end{aligned}
$$

Soit $A = \{j\ ;\ 2 \leq j \leq k\ ;\ \sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}} \notin K\}$, et soit $B = \{j\ ;\ 2 \leq j \leq k\ ;\ \sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}} \in K\}$.

Si j est dans A, $\sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}$ a, comme on l'a vu, pour polynôme minimal sur K, $X^2 - (\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2})$, d'où $\operatorname{Tr}_{K_j/K}(\sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}) = 0$.

Si j est dans B, $\operatorname{Tr}_{K_j/K}(\sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}) = \sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}$. B est non vide, sinon λ_1 serait nul ; on a alors :

$$-\lambda_1[L:K] = \sum_{j\in B} \lambda_j [L:K_j] \sqrt{\frac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}\ ,\quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\lambda_1[L:K]\sqrt{\theta+r_1^2} + \sum_{j\in B} \lambda_j [L:K_j]\sqrt{\theta+r_j^2} = 0.$$

Ceci est une relation de liaison non triviale entre les $\sqrt{\theta+r^2}$, elle est donc de longueur supérieure ou égale à k, bref A est vide et B est égal à $\{2,\dots,k\}$.

Les $k-1$ nombres $\sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}}$, $j=2,\dots k$, sont donc dans K, en outre, ils sont libres sur Q, sinon il existerait des μ non tous nuls tels que $\sum_2^k \mu_j \sqrt{\dfrac{\theta+r_j^2}{\theta+r_1^2}} = 0$, c'est-à-dire $\sum_2^k \mu_j \sqrt{\theta+r_j^2} = 0$, ce qui est impossible car cette relation est de longueur strictement inférieure à k.

On en déduit donc $k-1 \leq [K:Q]$.

b) PROPOSITION 2. <u>Soit</u> (λ_n) <u>une suite de rationnels</u>, <u>et</u> (r_n) <u>une suite de rationnels strictement positifs</u>.

<u>Alors, si</u> $\sum_1^k \lambda_j \sqrt{\theta+r_j^2} = 0$, <u>on a</u> : $[Q(\theta):Q] \leq k\, 2^{k-1}$.

<u>Ceci sera un corollaire du théorème plus général suivant</u> :

<u>soit</u> $\varphi_k(x) = \sum_1^k \lambda_j \sqrt{x+r_j^2}$; <u>si</u> A <u>est un polynôme de</u> $Q[X,Y]$ <u>tel que</u> $A(x,\varphi_k(x)) = 0$, <u>avec</u> $d^o_X A \leq a$ <u>et</u> $d^o_Y A \leq b$, <u>alors il existe un polynôme</u> B <u>de</u> $Q[X]$, <u>tel que</u> $B(x) = 0$ <u>et</u> $d^o B \leq 2^k a + k\, 2^{k-1} b$.

Ceci se démontre par récurrence sur k, en développant une idée de J.M. Trepreau [19] :

Pour $k=1$, si $A(x,\varphi_1(x)) = 0$, posons $A(X,Y) = C(X,Y^2) + YD(X,Y^2)$, d'où les inégalités :

$$d^o_X C \leq a,\ d^o_X D \leq a,\ d^o_Y C \leq \frac{b}{2},\ d^o_Y D \leq \frac{b-1}{2}.$$

On a alors : $$C(x,\varphi_1^2(x)) + \varphi_1(x) D(x,\varphi_1^2(x)) = 0,$$

d'où $$C^2(x,\varphi_1^2(x)) - \varphi_1^2(x) D^2(x,\varphi_1^2(x)) = 0,$$

c'est-à-dire $B(x) = 0$ où B est défini par

$$B(X) = C^2(X,\lambda_1^2(X+r_1^2)) - \lambda_1^2(X+r_1^2)\, D^2(X,\lambda_1^2(X+r_1^2))\ ;$$

on remarque alors que :

$$d^o_X B \leq \sup(2(a+\tfrac{b}{2}),\ 1+2(a+\tfrac{b-1}{2})) = 2a+b.$$

Supposons le résultat vrai pour k-1, et soit A un polynôme de $Q[X,Y]$ tel que $A(x,\varphi_k(x)) = 0$, avec

$$d^o_X A \leq a,\quad d^o_Y A \leq b.$$

Ceci s'écrit $A(x, \varphi_{k-1}(x) + \lambda_k\sqrt{x+r_k^2}\,) = 0$, soit $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha}(\varphi_{k-1}(x)+\lambda_k\sqrt{x+r_k^2})^{\beta} = 0$, avec $\alpha \leq a$ et $\beta \leq b$. D'où :

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} \sum_{j\leq\beta} C^j_{\beta}\, \varphi^{\beta-j}_{k-1}\, \lambda^j_k\, (x+r_k^2)^{j/2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} \sum_{j\leq\beta/2} C^{2j}_{\beta}\, \varphi^{\beta-2j}_{k-1}\, \lambda^{2j}_k (x+r_k^2)^j) \\ \displaystyle + (\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} \sum_{j\leq\beta-1/2} C^{2j+1}_{\beta}\, \varphi^{\beta-2j-1}_{k-1}\, \lambda^{2j+1}_k (x+r_k^2)^j)\sqrt{x+r_k^2} \end{array}\right\} = 0$$

ce qui entraîne :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} \sum_{j\leq\beta/2} C^{2j}_{\beta}\, \varphi^{\beta-2j}_{k-1}\, \lambda^{2j}_k (x+r_k^2)^j)^2 \\ \displaystyle - (x+r_k^2)(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} \sum_{j\leq\beta-1/2} C^{2j+1}_{\beta}\, \varphi^{\beta-2j-1}_{k-1}\lambda^{2j+1}_k (x+r_k^2)^j)^2 \end{array}\right\} = 0$$

c'est-à-dire $E(x,\varphi_{k-1}(x)) = 0$, où E est un polynôme de $Q[X,Y]$, et :

$$d^o_X E \leq \sup(2(a+\tfrac{b}{2}),\ 1+2(a+\tfrac{b-1}{2})) = 2a+b$$

$$d^o_Y E \leq 2b.$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme F de $Q[X]$, tel que $F(x) = 0$, et :

$$d^oF \leq 2^{k-1}(2a+b) + (k-1)\,2^{k-2}(2b) = 2^k a + 2^{k-1} k b,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

3°) <u>Remarques et contre-exemples pour le cas $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$.</u>

Ce cas semble plus difficile ; en effet, j'ignore si pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irrationnel algébrique, il existe un ensemble fini $\mathcal{E}$ tel que les $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+r^2}$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants pour $r \in \mathbb{Q}^{+*} - \mathcal{E}$, j'ignore même s'il existe un seul algébrique $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ qui vérifie cette propriété.

Le but de ce numéro est de montrer qu'il existe des nombres θ algébriques, de degré 2, 3 ou 4, tels que les $\sqrt{\theta+r^2}$ ne soient pas $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants lorsque r décrit $\mathbb{Q}^{+*}$, en indiquant comment ces nombres ont été construits.

a) <u>Un contre-exemple de degré 2.</u>

<u>Si</u> $\theta = 4\sqrt{2}-5$, <u>alors</u> $3\sqrt{\theta+9} - 5\sqrt{\theta+\frac{1}{25}} = 4\sqrt{\theta+1}$.

Si l'on reprend la démonstration ci-dessus, dans le cas où $\theta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ est transcendant, en prenant cette fois-ci les traces sur $\mathbb{Q}$ et non sur $K = \mathbb{Q}(\theta)$, on voit que la linéaire indépendance est assurée lorsque pour r_i et $r_1 \in \mathbb{Q}^{+*}$, $r_i \neq r_1$, on a $Tr_{K_i/Q}\left(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}\right) = 0$, où $K_i = \mathbb{Q}\left(\theta, \sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r^2}}\right)$. Par conséquent, pour bâtir ce contre-exemple il faut faire en sorte que $\sqrt{\frac{\theta+r_i^2}{\theta+r_1^2}}$ soit dans $Q(\theta)$, et que sa trace sur Q soit non nulle.

On choisit alors $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Le nombre $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ est un carré de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dont la trace sur $\mathbb{Q}$ est 3.

On définit alors θ par $\sqrt{\frac{\theta+9}{\theta+1}} = 1+\sqrt{2}$, d'où $\theta = 4\sqrt{2}-5$. Il suffit alors de trouver un rationnel positif r, tel que $\sqrt{\frac{\theta+r^2}{\theta+1}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

On vérifie qu'on ne peut pas prendre pour r un entier "petit", on cherche alors r comme inverse d'un entier "petit", et on trouve

$$\sqrt{\frac{\theta+\frac{1}{25}}{\theta+1}} = \sqrt{\frac{19-6\sqrt{2}}{25}} = \frac{3\sqrt{2}-1}{5},$$

d'où $3\sqrt{\frac{\theta+9}{\theta+1}} - 5\sqrt{\frac{\theta+\frac{1}{25}}{\theta+1}} = 4$, d'où le résultat.

b) Un second contre-exemple de d° 2.

Si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8\sqrt{241}-68}{15} = \theta$, alors : $2\sqrt{\theta+9} - \sqrt{\theta+4} = 2\sqrt{\theta+1}$.

Ici, on choisit arbitrairement les carrés 1, 4, 9. Quant aux coefficients 2, −1, 2, ils sont choisis de manière que la fonction $x \to 2\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+1}$ ait des signes opposés en 0 et $+\infty$, d'où l'existence d'un θ strictement positif, qui annule cette fonction. On sait, a priori, qu'un tel θ est algébrique, il reste à le calculer ; on écrit $2\sqrt{\theta+9} - \sqrt{\theta+4} = 2\sqrt{\theta+1}$.

Pour θ positif, les deux membres sont clairement positifs, d'où en élevant au carré :

$$\theta + 36 = 4\sqrt{\theta^2 + 13\theta + 36}.$$

Les deux membres étant positifs pour θ positif, on élève à nouveau au carré et l'on obtient : $15\theta^2 + 136\theta - 720 = 0$, équation dont la racine positive est $\frac{-68+8\sqrt{241}}{15}$, d'où le résultat.

c) Un contre-exemple de degré 4.

Le polynôme $P(X) = 735X^4 + 18340X^3 - 134974X^2 + 82324X + 48279$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

Il admet une seule racine dans l'intervalle $]1 ; 1{,}5[$. Si l'on note θ cette racine, on a :

$$\sqrt{\theta+25} + 4\sqrt{\theta+1} = \sqrt{\theta+16} + 3\sqrt{\theta+4}.$$

Ici on s'est donné arbitrairement les carrés 25, 1, 16, 4 et l'on a choisi les coefficients 1, 4, 1, 3 de manière que la fonction $x \to \sqrt{x+25}+4\sqrt{x+1}-\sqrt{x+16}-3\sqrt{x+4}$ ait des signes opposés en 0 et $+\infty$, d'où l'existence d'un θ strictement positif qui annule cette fonction. On sait, a priori, qu'un tel θ est algébrique, il reste à calculer son degré :

on écrit $\sqrt{\theta+25}+4\sqrt{\theta+1} = \sqrt{\theta+16}+3\sqrt{\theta+4}$.

Les deux membres sont positifs pour θ positif, d'où, en élevant au carré :

$7\theta-11 = 6\sqrt{\theta^2+20\theta+64} - 8\sqrt{\theta^2+26\theta+25}$.

D'où en élevant au carré :

une condition de signe $(7\theta-11)(6\sqrt{\theta^2+20\theta+64}-8\sqrt{\theta^2+26\theta+25}) > 0$,

et $51\theta^2+2538\theta+3783 = 96\sqrt{\theta^4+46\theta^3+609\theta^2+2164\theta+1600}$, c'est-à-dire :

$$17\theta^2+846\theta+1261 = 32\sqrt{\theta^4+46\theta^3+609\theta^2+2164\theta+1600}\ .$$

Les deux membres étant positifs pour θ positif, on élève une dernière fois au carré, et l'on obtient :

$$735\theta^4+18340\theta^3-134974\theta^2+82324\theta+48279 = 0$$

c'est-à-dire $P(\theta)=0$.

On établit alors : $P(1,1) > 0$, $P(1,2) < 0$,

$P(-1) < 0$, $P(0) > 0$,

$P(5) < 0$, $P(7) > 0$,

$P(-7) > 0$, $P(-6) < 0$,

d'où un encadrement pour chacune des quatre racines réelles de P. On s'intéresse alors à la condition de signe ci-dessus :

$$7x-11 < 0 \iff x < \frac{11}{7}\ .$$

Puis $6\sqrt{x^2+20x+64} - 8\sqrt{x^2+26x+25} < 0$

$\Longleftrightarrow \quad 9(x^2+20x+64) < 16(x^2+26x+25)$

$\Longleftrightarrow \quad 7x^2+236x-176 > 0$, ce qui est assuré dès que $x > 1$.

Par conséquent le θ cherché est la racine de P qui est dans l'intervalle $]1{,}1 \,;\, 1{,}2[$. Pour conclure, il reste donc seulement à montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Pour cela, on pose $R(X) = \frac{1}{16} P(2X+1)$, d'où :

$$R(X) = 735X^4 + 10640X^3 - 18886X^2 - 16208X + 919 \;;$$

l'intérêt de cette transformation est que 919 est un nombre premier.

Pour montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il suffit évidemment de montrer que $R(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et même que $R(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Montrons d'abord que $R(X)$ n'a pas de racines rationnelles : si $\frac{p}{q}$ est l'une d'entre elles, alors p divise 919 et q divise 735, (où p et q sont dans $\mathbb{Z}^*$ et premiers entre eux). Par conséquent $q \not\equiv 0 (13)$, et donc cela impliquerait l'existence d'une racine dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$.

On a $R(X) \equiv 7X^4 + 6X^3 + 3X^2 + 3X + 9 \quad (13)$.

On calcule alors successivement :

$$\begin{array}{llll}
R(0) \equiv 9 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(1) \equiv 2 \not\equiv 0 & (13) \;; \\
R(2) \equiv 5 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(3) \equiv 7 \not\equiv 0 & (13) \;; \\
R(4) \equiv 9 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(5) \equiv 11 \not\equiv 0 & (13) \;; \\
R(6) \equiv 12 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(-1) \equiv 10 \not\equiv 0 & (13) \;; \\
R(-2) \equiv 1 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(-3) \equiv 3 \not\equiv 0 & (13) \;; \\
R(-4) \equiv 10 \not\equiv 0 & (13) \;; & R(-5) \equiv 2 \not\equiv 0 & (13) \;;
\end{array}$$

et enfin $R(-6) \equiv 10 \neq 0 \quad (13)$.

Bref, R n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$, et donc, d'après ce qui précède, R n'a pas de racines rationnelles.

Montrons alors que R n'est pas le produit de deux polynômes du second degré de $\mathbb{Z}[X]$.

Si c'était le cas, comme 919 est premier, et quitte à changer les signes des deux polynômes en question, on aurait : $\exists$ a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$ tels que,

$$R(X) = 735X^4 + 10640X^3 - 18886X^2 - 16208X + 919$$
$$= (aX^2 + bX + 919)(cX^2 + dX + 1).$$

D'où

$$* \left\{ \begin{array}{l} ac = 735 \\ bc + ad = 10640 \\ 919c + a + bd = -18886 \\ 919d + b = -16208 \end{array} \right.$$

de $735 \equiv 0 \ (5)$ et $735 \not\equiv 0 \ (25)$, on tire que : $(5 \mid a$ et $5 \nmid c)$ ou $(5 \nmid a$ et $5 \mid c)$.

<u>1^{er} cas</u> : $5 \mid a$ et $5 \nmid c$.

De $bc + ad = 10640$, on tire : 5 divise b.

De $919c + a + bd = -18886$, on déduit : $4c \equiv -1 \ (5)$, c'est-à-dire $c \equiv 1 \ (5)$.

Posons $a = 5\lambda$, d'où $\lambda c = 147$, d'où

$$\lambda \in \{\pm 147 ; \pm 1 ; \pm 3 ; \pm 49 ; \pm 7 ; \pm 21\},$$

d'où $\quad a \in \{\pm 735 ; \pm 5 ; \pm 15 ; \pm 245 ; \pm 35 ; \pm 105\}$

et $\quad c \in \{\pm 147 ; \pm 1 ; \pm 3 ; \pm 49 ; \pm 7 ; \pm 21\}$.

De $ac = 735$ et $c \equiv 1 \ (5)$, on déduit que, nécessairement :

$$(a,c) \in \{(735, 1) ; (-15, -49) ; (35, 21)\}.$$

. Si $(a,c) = (735,1)$, alors, $*$ donne :

$$\begin{cases} b + 735\,d = 10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

. Si $(a,c) = (-15,-49)$, alors, $*$ donne :

$$\begin{cases} 49\,b + 15\,d = -10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

. Si $(a,c) = (35,21)$, alors, $*$ donne :

$$\begin{cases} 21\,b + 35\,d = 10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 3b + 5\,d = 1520 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

<u>2ème cas</u> : $5 \nmid a$ et $5 \mid c$.

De $bc+ad = 10640$, on tire : 5 divise d ; de $919\,c+a+bd = -18886$, on tire alors $a \equiv 4 \pmod{5}$.

Posons $c = 5\mu$, d'où $a\mu = 147$, d'où

$$\mu \in \{\pm 147 \; ; \pm 1 \; ; \pm 3 \; ; \pm 49 \; ; \pm 7 \; ; \pm 21\}.$$

D'où $\quad c \in \{\pm 735 \; ; \pm 5 \; ; \pm 15 \; ; \pm 245 \; ; \pm 35 \; ; \pm 105\}$,

et $\quad a \in \{\pm 1 \; ; \pm 147 \; ; \pm 49 \; ; \pm 3 \; ; \pm 21 \; ; \pm 7\}$.

De $ac = 735$ et $a \equiv 4 \pmod{5}$, on déduit que, nécessairement :

$$(a,c) \in \{(-1 \; ; -735), (+49 \; ; +15), (-21 \; ; -35)\}.$$

. Si $(a,c) = (-1\ ;\ -735)$, alors $*$ donne :

$$\begin{cases} 735\,b + d = -10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

. Si $(a,c) = (49\ ;\ 15)$, alors $*$ donne :

$$\begin{cases} 15\,b + 49\,d = 10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

. Si $(a,c) = (-21, -35)$, alors $*$ donne

$$\begin{cases} 35\,b + 21\,d = -10640 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 5\,b + 3\,d = -1520 \\ b + 919\,d = -16208, \end{cases}$$

ce qui est impossible, car ce système n'a pas de solution (b,d) dans $\mathbb{Z}^2$.

Bref R est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, donc P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ et la démonstration est terminée.

d) <u>Un contre exemple de degré 3</u>.

<u>Le polynôme</u> $\pi(X)$ <u>défini par</u> :

$$\pi(X) = \begin{cases} 7203840\,X^3 + 149636416\,X^2 \\ - 3014136000\,X - 118079775 \end{cases}$$

<u>est irréductible sur</u> $\mathbb{Q}[X]$.

<u>Il admet une seule racine positive. Si l'on note</u> θ <u>cette racine, on a</u>

$$2\sqrt{\theta+16}+6\sqrt{\theta+1}=5\sqrt{\theta+9}+\sqrt{\theta+4}\ .$$

Ici, on s'est donné arbitrairement les carrés 16, 1, 9, 4, et l'on a choisi les coefficients 2, 6, 5, 1, d'une part pour que la fonction $x \to 2\sqrt{x+16}+6\sqrt{x+1}-5\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}$ ait des signes opposés en 0 et $+\infty$, d'autre part pour que les termes de degré 4 disparaissent à la dernière élévation au carré.

L'existence de θ est donc assurée, on sait qu'il est algébrique, il reste à calculer son degré.

On écrit : $2\sqrt{\theta+16}+6\sqrt{\theta+1}=5\sqrt{\theta+9}+\sqrt{\theta+4}$.

Les deux membres sont positifs, pour θ positif, d'où, en élevant au carré :

$$14\,\theta-129 = 10\sqrt{\theta^2+13\,\theta+36}-24\sqrt{\theta^2+17\,\theta+16}\ .$$

Ceci donne une condition de signe $*$ et, en élevant au carré :

$$480\,\theta^2+14704\,\theta-3825 = 480\sqrt{\theta^4+30\,\theta^3+273\,\theta^2+820\,\theta+576}$$

d'où, une seconde condition de signe $**$, et, en élevant au carré :

$$7203840\,\theta^3+149636416\,\theta^2-301413600\,\theta-118079775=0,$$

soit $\Pi(\theta)=0$.

Posons alors $S(X)=\frac{1}{2025}\,\Pi\left(\frac{45X}{8}\right)$. D'où,

$$S(X)=633150X^3+2338069X^2-837260X-58311.$$

Pour montrer que Π n'a qu'une racine réelle positive, et que Π est irréductible sur $\mathbb{Q}$, il suffit de montrer que S n'a qu'une racine réelle positive, et que cette racine n'est pas rationnelle (car S est de degré 3).

On remarque alors que : $\begin{cases} S(0)<0 \\ S(1)>0 \\ S(-1)>0 \end{cases}$ et que : $\begin{cases} S(-4)>0 \\ S(-\infty)<0 \end{cases}$.

Ainsi S a trois racines réelles, dont une seule est positive. Si cette racine était rationnelle, soit $\frac{p}{q}$, p et q dans $\mathbb{Z}^*$ et premiers entre eux, alors p diviserait 58311, et q diviserait 633150. Donc $q \not\equiv 0$ (13), et par conséquent S aurait une racine dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$. Comme $S(X) \equiv 11X^3 + 6X^2 - 8X - 6$ (modulo 13), il ne reste plus qu'à calculer $S(0), S(1), \ldots, S(12)$, pour vérifier que ce polynôme n'a pas en fait de racine dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$, d'où le résultat.

TROISIEME PARTIE : $s = 3$. ETUDE D'UN PREMIER CAS.

Dans cette partie, on posera $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\gamma = \alpha_3$.

Cependant, on n'aura que des résultats partiels : on se propose d'abord de démontrer le théorème :

THEOREME 3. *On suppose qu'il existe un réel* k *strictement positif, des nombres rationnels positifs* b, c, d, e, *tels que* $b \neq 0$, $c \neq 0$, $(d,e) \neq (0,0)$ *et tels que*

$$\alpha = \frac{k}{b^2}, \quad \beta = \frac{k}{c^2}, \quad \gamma = \frac{k}{d^2+e^2}.$$

Alors $f(t) = \Sigma' \, \gamma_n e^{2i\pi |n| t}$ *n'est pas bornée, donc n'est pas presque périodique.*

Quitte à changer la valeur de k, on peut d'abord supposer que b, c, d et e sont des entiers positifs. Puis, par homothétie pour la variable t, comme dans la première partie, on peut supposer que $k = 1$.

On reprend alors l'étude de [1], et, pour montrer que $f(t)$ n'est pas bornée, il suffira de montrer que la série

$$\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \left(\sum_{a \geq 1} \left(\frac{N_{b^2,c^2,d^2+e^2}(a^2q)}{(a^2q)^{3/2}(\log a^2q)^{1/2+\varepsilon}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{diverge,}$$

où $N_{\lambda,\mu,\nu}(n)$ est le nombre de décompositions $n = \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2$ avec u,v,w dans $\mathbb{Z}^*$, où sfc signifie toujours sans facteur carré, et où ε est assez petit.

Il suffit même de montrer que pour un certain a, la série

$$\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{b^2,c^2,d^2+e^2}(a^2q)}{q^{3/2}(\log q)^{1/2+\varepsilon}} \quad \text{diverge.}$$

Posons $d^2 + e^2 = \xi^2 q_o$ avec ξ dans $\mathbb{N}^*$ et q_o sfc, et montrons que

$$\sum_{q\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{b^2,c^2,d^2+e^2}((\xi^2 q_o bc)^2 q)}{q^{3/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}} \quad \text{diverge.}$$

On commence par remarquer que, si $q_o n = u^2+v^2+w^2$, où u, v, w dans $\mathbb{Z}$, alors :

$$(bc\,\xi^2 q_o)^2\, n = b^2(cd\,\xi u + ce\,\xi v)^2 + c^2(bd\xi v - be\xi u)^2 + (d^2+e^2)(bc\xi w)^2 .$$

De plus, ceci est une injection de l'ensemble des décompositions $q_o n = u^2+v^2+w^2$, dans l'ensemble des décompositions $(bc\xi^2 q_o)^2 n = b^2X^2+c^2Y^2+(d^2+e^2)Z^2$. D'où,

$$N_{1,1,1}(q_o n) \leq N_{b^2,c^2,d^2+e^2}((b\,c\,q_o\,\xi^2)^2\, n) \ ;$$

et il suffit donc de montrer que la série $\displaystyle\sum_{q\,\mathrm{sfc}\geq 2} \frac{N_{1,1,1}(q_o q)}{q^{3/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour ϵ assez petit, ou encore que la série $\displaystyle\Sigma^{\#} \frac{N_{1,1,1}(\ell)}{\ell^{3/2}(\log \ell)^{1/2+\epsilon}}$ diverge, la somme étant prise sur $\{\ell \,;\, \ell \geq 2 \,;\, \ell = q_o q,\ q \text{ sfc}\}$.

Or, d'après [8] vol. II p. 265, on a :

$$\begin{aligned} N_{1,1,1}(\ell) &= 12\,G(\ell) && \text{si } \ell \equiv 1 \text{ ou } 2 \ (4) \\ &= 0 && \text{si } \ell \equiv 7 \quad (8) \\ &= 6\,G(\ell) && \text{si } \ell \equiv 3 \ (8) \text{ et } \forall k \quad \ell \neq 3(2k+1)^2 \\ &= 6\,G(\ell) - 12 && \text{si } \ell \equiv 3 \ (8) \text{ et } \exists k \quad \ell = 3(2k+1)^2, \end{aligned}$$

où $G(\ell)$ est le nombre de classes de formes quadratiques linéaires de déterminant $-\ell$.

De plus, si $H(d)$ est le nombre de classes proprement primitives de formes quadratiques binaires de déterminant $-d$, alors : $H(d) \sim C\sqrt{d}$ $\quad d \to +\infty$ (voir [8] vol. III p. 120).

D'où finalement :

$$\exists C_1 > 0, \ \forall \ell \quad \ell \not\equiv 0 \ (4),\ \ell \not\equiv 7 \ (8),\ N_{1,1,1}(\ell) \geq C_1 \sqrt{\ell} .$$

Il s'agit donc de démontrer que la série $\displaystyle\Sigma^{\#\#} \frac{1}{\ell(\log \ell)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour ϵ assez petit, la somme étant prise sur $\{\ell \,;\, \ell \geq 2 \,;\, \ell = q_o q,\ q\,\mathrm{sfc} \,;\, \ell \not\equiv 0(4),\ \ell \not\equiv 7(8)\}$.

Si l'on appelle ℓ_n le n^e nombre de la forme $\ell \geq 2$, $\ell = q_o q$ avec q sfc, $\ell \not\equiv 0$ (4) et $\ell \not\equiv 7$ (8), il suffit de démontrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que : $\ell_n \leq \delta_n$, et donc il suffit de démontrer que :

$$\mathrm{Card}\{\ell/2 \leq \ell \leq x \; ; \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc}, \; \ell \not\equiv 0 \; (4), \; \ell \not\equiv 7 \; (8)\} \geq \frac{x}{\delta}.$$

. Si q_o est pair, $q_o q$ est pair donc $\not\equiv 7$ (8), et $q_o q \equiv 0$ (4) si et seulement si q est pair. Dans ce cas on étudie donc :

$$\mathrm{Card}\{\ell/2 \leq \ell \leq x \; ; \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc impair}\} = \begin{cases} \mathrm{Card}\{\ell/2 \leq \ell \leq x, \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc}\} \\ -\mathrm{Card}\{\ell/2 \leq \ell \leq x, \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc pair}\} \end{cases}$$

$$\geq \begin{cases} \mathrm{Card}\{q \text{ sfc}, \; 2 \leq q \leq \frac{x}{q_o}\} \\ -\mathrm{Card}\{n \text{ pair} \; ; \; n \leq \frac{x}{q_o}\}. \end{cases}$$

Cette dernière différence est équivalente * à $(\frac{6}{\pi^2 q_o} - \frac{1}{2q_o})x$, pour $x \to +\infty$, et comme $\frac{6}{\pi^2} > \frac{1}{2}$, on a l'existence d'un $\delta > 0$ dans ce cas. (* voir par exemple [8] vol.1,p.328).

. Si q_o est impair, $qq_o \not\equiv 0$ (4) car q est sfc, et $q_o q \equiv 7$ (8) si et seulement si $q \equiv 7\, q_o^{-1}$ (8) où q_o^{-1} est l'inverse de q_o modulo 8, (en fait $q_o^{-1} \equiv q_o$ (8)).

Dans ce cas, on étudie donc :

$$\mathrm{Card}\{\ell \; ; \; 2 \leq \ell \leq x \; ; \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc}, \; q \not\equiv 7q_o \; (8)\}$$

$$= \mathrm{Card}\{\ell \; ; \; 2 \leq \ell \leq x \; ; \; \ell = q_o q, \; q \text{ sfc}\} - \mathrm{Card}\{\ell ; \; 2 \leq \ell \leq x, \; \ell = q_o q \; ; q \text{ sfc}, \; q \equiv 7q_o \; (8)\}$$

$$\geq \mathrm{Card}\{q \; ; \; q \text{ sfc} \; ; \; 2 \leq q \leq \frac{x}{q_o}\} - \mathrm{Card}\{n \; ; \; n \leq \frac{x}{q_o}, \; n \equiv 7\, q_o \; (8)\}.$$

Cette différence équivaut, pour x tendant vers $+\infty$, à $\frac{x}{q_o}(\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{8})$, et comme $\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{8}$ est strictement positif, on a, dans ce cas aussi, l'existence d'un δ strictement positif convenable.

En conclusion la série initiale diverge par : $\epsilon \leq \frac{1}{2}$.

Remarque. La référence donnée dans [1] pour montrer que $H(d)$ tend vers $+\infty$ comme $\bar{d}$ est erronée, mais le résultat sur la série $\sum\limits_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{1,1,1}(q)}{q^{3/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ n'est pas modifié

QUATRIEME PARTIE : $s = 3$; ETUDE DU CAS $\frac{\alpha}{\beta}$ IRRATIONNEL.

On se propose ici d'établir le théorème suivant :

THEOREME 4. Si les nombres $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}u^2 + \frac{\gamma}{\beta}v^2 + w^2}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ lorsque (u,v,w) décrit $(\mathbb{N}^*)^3$, avec pgcd $(u,v,w) = 1$, alors $f(t) = \Sigma' \; \gamma_n \, e^{2i\pi |n| t}$ est non bornée, donc non presque-périodique.

Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées si $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

La démonstration est la même que celle correspondant au cas $s = 2$, (2^e partie, théorème 2).

Pour le cas $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ algébriquement indépendants sur Q, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3, en remplaçant $Q(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})$ par $Q(\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta})$ et $Q[X]$ par $Q[X,Y]$.

Remarque. L'hypothèse sur α, β, γ signifie que les nombres $\sqrt{\frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} + \frac{w^2}{\gamma}}$ où (u,v,w) décrit $(\mathbb{N}^*)^3$, avec pgcd$(u,v,w) = 1$, est une base du $\mathbb{Z}$-module engendré par $\left\{\sqrt{\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma}}\,,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$.

CINQUIEME PARTIE : s = 4. PREMIER CAS.

On notera ici $\sum_1^4 \alpha_i \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ l'équation des ondes.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 5. On suppose que $\alpha_i^{-1} = k\, U_i$, où k est un réel strictement positif, les U_i des entiers strictement positifs, et premiers entre eux dans leur ensemble. On pose alors $U_i = u_i^2\, \theta_i$, où u_i est entier, et θ_i sans facteur carré. Puis on définit les nombres $\varphi_i = \mathrm{pgcd}\left\{(\theta_j),\ j \neq i\right\}$, et $\lambda_i = \varphi_i \cdot \dfrac{\theta_i}{\prod_{j\neq i} \varphi_j}$, (on remarque que $\dfrac{\theta_i}{\prod_{j\neq i}\varphi_j}$ est entier, car les φ_i sont premiers entre eux deux à deux).

Si les λ_i vérifient les trois conditions suivantes :

a) il n'existe pas de permutation de $\{1,2,3,4\}$, ni de nombre premier impair ω tels que ω divise λ_{i_3} et λ_{i_4}, et que $\left(\dfrac{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}}{\omega}\right) = \left(\dfrac{\lambda'_{i_3}\lambda'_{i_4}}{\omega}\right) = (-1)^{\frac{\omega+1}{2}}$, où l'on a posé $\lambda'_j = \dfrac{\lambda_j}{\omega}$, si j est égal à i_3 ou i_4.

b) il n'existe pas de permutation de $\{1,2,3,4\}$ telle que l'on ait : $\lambda_{i_3} = 2\lambda'_{i_3}$, $\lambda_{i_4} = 2\lambda'_{i_4}$, où λ'_{i_3} et λ'_{i_4} sont dans $\mathbb{N}^*$, et

$$\left\{\begin{array}{ll} & \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} \equiv \lambda_{i_3} + \lambda_{i_4} \pmod 8 \\ \text{ou} & \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + 2\lambda_{i_3} \equiv \lambda_{i_3} + \lambda_{i_4} + 2\lambda_{i_1} \equiv 4 \pmod 8. \end{array}\right.$$

c) si les λ_i sont tous impairs, on n'a pas :

$$\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \equiv \lambda_4 \ (4) \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \equiv 4 \quad (8).$$

Alors $f(n) = \Sigma' \gamma_n e^{2i\pi |n| t}$ est non bornée.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si les θ_i sont premiers entre eux deux à deux, et si l'un d'eux est pair.

Quitte à effectuer une homothétie sur la variable t, on peut supposer que

$k = \prod_j \varphi_j$.

On reprend alors l'étude de [1], et on montre facilement qu'il suffit de prouver la divergence de la série $\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{kU_1,kU_2,kU_3,kU_4}(a^2q)}{q^2(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ pour un certain $a \in \mathbb{N}^*$, et pour ϵ assez petit, où $N_{kU_1,kU_2,kU_3,kU_4}(n)$ est le nombre de décompositions $n = \sum_1^4 kU_j x_j^2$ avec $x_j \in \mathbb{Z}$. On remarque alors que $kU_i = \prod_j \varphi_j u_i^2 \theta_i = (u_i \prod_{j\neq i} \varphi_j)^2 \lambda_i = \xi_i^2 \lambda_i$, puis, que si $n = \sum_1^4 \lambda_i x_i^2$, alors

$$\begin{aligned}(\prod_i \xi_i^2) n &= \sum_1^n (\lambda_i \, \xi_i^2)\, X_i^2 \\ &= \sum_1^n k\ U_i\, X_i^2 ,\end{aligned}$$

avec $X_i = (\prod_{j\neq i} \xi_j).x_i$; cette dernière remarque implique l'inégalité :

$$N_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(n) \leq N_{kU_1,kU_2,kU_3,kU_4}(\prod_i \xi_i^2 .n).$$

En choisissant le a ci-dessus égal à $\prod_i \xi_i$, il nous suffit donc de démontrer que

$\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(q)}{q^2(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour ϵ assez petit.

Or les λ_j sont sans facteurs carrés, car λ_j divise θ_j.

De plus les λ_j sont trois à trois premiers entre eux : montrons par exemple que $\operatorname{pgcd}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 1$; on commence par remarquer que $\operatorname{pgcd}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \varphi_4$, d'où $\operatorname{pgcd}(\frac{\theta_1}{\varphi_4}, \frac{\theta_2}{\varphi_4}, \frac{\theta_3}{\varphi_4}) = 1$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{pgcd}(\frac{\lambda_1}{\varphi_1}\varphi_2\varphi_3, \frac{\lambda_2}{\varphi_2}\ \varphi_1\varphi_3, \frac{\lambda_3}{\varphi_3}\ \varphi_1\varphi_2) = 1 ;$$

supposons alors que p premier divise chacun des λ_j, et posons $\lambda_j = \varphi_j \mu_j$, où

$$\mu_j = \frac{\theta_j}{\prod_{k\neq j} \varphi_k} \in \mathbb{N}^*, \ j = 1, 2, 3.$$

Si p divise φ_1, alors p ne peut diviser ni φ_2, ni φ_3 car $\operatorname{pgcd}(\mu_1\varphi_2\varphi_3, \mu_2\varphi_1\varphi_3, \mu_3\varphi_1\varphi_2) = 1$, donc p divise μ_2 et μ_3, mais alors p^2 divise $\theta_2 = \mu_2\varphi_1\varphi_3\varphi_4$, ce qui est absurde car θ_2 sfc.

De même p ne divise pas φ_2, ni φ_3 ; p divise donc nécessairement μ_1, μ_2 et μ_3, ce qui est absurde car $\text{pgcd}(\mu_1\varphi_2\varphi_3, \mu_2\varphi_1\varphi_3, \mu_3\varphi_1\varphi_2) = 1$.

Comme les λ_j sont sfc, 3 à 3 premiers entre eux, et qu'ils vérifient les hypothèses du théorème 5, on a :

$$\exists\ C > 0,\ \forall\ n \geq n_o,\ N_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(n) > \frac{Cn}{\log\log n}$$

ceci d'après [14] p. 453-454.

D'où $\displaystyle\sum_{q\,\text{sfc} \geq 2} \frac{N_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(q)}{q^2(\log q)^{1/2+\epsilon}} > C' \sum_{q\,\text{sfc} \geq 2} \frac{1}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}\log\log q}$

qui diverge pour $\epsilon \leq 1/2$ car le n^e sfc est équivalent pour $n \to +\infty$ à $\frac{\Pi^2 n}{6}$.

SIXIEME PARTIE : $s = 4$, DEUXIEME CAS.

THEOREME 6. Si les nombres $\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1} u^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_2} v^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} w^2 + \xi^2\right)^{1/2}$ sont Q-linéairement indépendants lorsque (u,v,w,ξ) décrit $(\mathbb{N}^*)^4$ avec $\mathrm{pgcd}(u,v,w,\xi) = 1$, alors $f(t) = \Sigma' \, \gamma_n \, e^{2i\pi |n| t}$ n'est pas bornée.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si les nombres $\frac{\alpha_4}{\alpha_1}, \frac{\alpha_4}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_3}$ sont algébriquement indépendants sur Q.

La démonstration se fait comme d'habitude, (voir le théorème 4, 4^e partie).

SEPTIEME PARTIE : $s \geq 5$. TOUS LES $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ SONT RATIONNELS.

Comme on l'a annoncé dans l'introduction, c'est à partir de la dimension 5 que les calculs deviennent plus simples, et les résultats plus généraux.

Montrons d'abord le théorème suivant :

THEOREME 7. Si tous les rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ sont rationnels, la fonction $f(t) = \Sigma' \gamma_n e^{2i\pi |n| t}$ est non bornée.

L'hypothèse sur les α_j implique l'existence d'un λ réel strictement positif, et de nombres $a_1, \ldots, a_s$ rationnels strictement positifs tels que $\alpha_j^{-1} = \lambda a_j$.

Quitte à changer la valeur de λ, on peut supposer que les a_j sont dans $\mathbb{N}^*$ et premiers entre eux dans leur ensemble, puis en effectuant une homothétie sur la variable t, on peut supposer que λ est égal à 1.

On reprend alors le raisonnement de [1] : pour montrer que $f(t)$ n'est pas bornée, il suffit de montrer que la série $\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{a_1, \ldots a_s}(a^2 q)}{q^{s/2} (\log q)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour un certain a, et pour ϵ assez petit, ($N_{a_1, \ldots, a_s}(n)$ est le nombre de décompositions $n = \sum_1^s a_j X_j^2$, avec X_j dans $\mathbb{Z}$).

On pose $a_j = b_j \theta_j^2$, où θ_j est entier et b_j sans facteur carré, et l'on remarque que les b_j sont premiers entre eux dans leur ensemble.

On va ensuite distinguer deux cas : trois au moins - resp. deux au plus - des b_j sont impairs.

1er cas, trois au moins des b_j sont impairs.

Quitte à renuméroter les a_j, on peut supposer que $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 1 \quad (2)$.

On choisit alors $a = \prod_1^s \theta_j$, et on remarque que :

$$q = \sum_1^s b_j x_j^2 \,,\ x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 q = \sum_1^s b_j \theta_j^2 \,(x_j \prod_{\ell \neq j} \theta_\ell)^2 = \sum_1^s a_j (y_j)^2 ,$$

d'où : $\forall\, q,\ N_{b_1,\dots,b_s}(q) \leq N_{a_1,\dots,a_s}(a^2 q)$.

Il suffit donc de démontrer que $\displaystyle\sum_{q\,\mathrm{sfc} \geq 2} \frac{N_{b_1,\dots b_k}(q)}{q^{s/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour ϵ assez petit.

Or, d'après [4] p. 52, si q est tel que l'équation $\sum_1^s b_j u_j^2 \equiv q\ (p^\tau)$ admet au moins une solution $(u_1,\dots,u_k)$ telle que : $(\exists r\ \ b_r u_r^2 \not\equiv 0\ (p))$, ceci pour p dans $\mathcal{S}$, ensemble fini de nombres premiers, et τ valant 1 pour $p \neq 2$ et 3 pour $p = 2$, alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de l'ensemble "convenable" décrit par q, telle que $N_{b_1,\dots,b_s}(q) \geq C q^{s/2-1}$. Montrons que, pour q convenablement choisi, une telle solution existe :

Pour chaque $p \neq 2$, p dans $\mathcal{S}$, il existe j_p tel que $b_{j_p} \not\equiv 0\,(p)$, car les b_j sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Si l'on impose $q \equiv b_{j_p}\ (p)$, il est clair qu'en posant : $(u_\ell \equiv 0\ (p)\quad \forall\ \ell \neq j_p$, et $u_{j_p} \equiv 1\ (p))$, on a, $\sum_1^s b_\ell u_\ell^2 \equiv b_{j_p} \equiv q\,(p)$, et $b_{j_p} u_{j_p}^2 \not\equiv 0\ \ (p)$.

Pour $p = 2$, on choisit d'abord $u_4,\dots,u_s \equiv 0\quad (8)$, et il faut donc résoudre $b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + b_3 u_3^2 \equiv q\ \ (8)$, où les b_j sont impairs, et où l'un des u_j doit être impair.

On vérifie, dans le tableau ci-dessous, qu'en imposant de surcroît la condition $q \equiv 2\ \ (8)$, ou $q \equiv 6\ \ (8)$, suivant les valeurs modulo 8 de b_j, une telle solution existe :

(toutes les valeurs sont prises modulo 8, et les b_j sont écrits à l'ordre près)

b_1	b_2	b_3	q	u_1	u_2	u_3
1	1	1	2	1	1	0
1	1	3	2	1	1	0
1	1	5	2	1	1	0
1	1	7	2	1	1	0
1	3	3	6	0	1	1
1	5	5	6	1	1	0
1	7	7	6	0	1	1
1	3	5	6	1	0	1
1	3	7	2	0	1	1
1	5	7	6	1	1	0
3	3	3	6	1	1	0
5	5	5	2	1	1	0
7	7	7	6	1	1	0
3	3	5	6	1	1	0
3	3	7	6	1	1	0
5	5	3	2	1	1	0
5	5	7	2	1	1	0
7	7	3	6	1	1	0
7	7	5	6	1	1	0
3	5	7	2	1	0	1

Ainsi, si l'on impose les conditions

$$\begin{cases} q \equiv b_{j_p} \ (p) & \forall\, p \in \mathcal{S} - \{2\}, \\ q \equiv \alpha \ (8) & \text{où } \alpha \text{ vaut 2 ou 6 suivant les cas,} \end{cases}$$

on a $N_{b_1,\dots,b_s}(q) \geq C_q^{s/2-1}$.

Toutes ces conditions sur q équivalent à

$$q \equiv B \ (A), \text{ où } A = 8 \prod_{p \in \mathcal{E} - \{2\}} p, \quad \text{(lemme chinois).}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{q \text{ sfc} \equiv B(A)} \frac{1}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}} \quad \text{diverge pour } \epsilon \text{ assez petit.}$$

Or pgcd(A,B) est sfc ; en effet, le seul premier dont le carré peut diviser B est 2, et si 4 divise B, comme $q \equiv B \ (A)$ et $A \equiv 0 \ (4)$, on aurait $q \equiv 0 \ (4)$, c'est-à-dire $\alpha \equiv 0 \ (4)$, ce qui n'est pas, car α vaut 2 ou 6 modulo 8 ; donc, d'après [15] p. 633-636, il existe un réel $\mu > 0$ tel que :

$$\text{Card}\{q \leq x / q \text{ sfc et } q \equiv B \ (A)\} \sim \mu x \text{ pour } x \to +\infty,$$

et donc la série $\displaystyle\sum_{q \text{ sfc} \equiv B(A)} \frac{1}{q(\log q)^{1/2+\epsilon}}$ diverge pour $\epsilon \leq 1/2$.

<u>2^e cas, deux au plus des b_j sont impairs</u>.

Quitte à renuméroter les a_j, on peut supposer que $b_1, \ldots, b_r$ sont pairs, avec $r \geq s-2$.

Posons $\forall \ j \in (1,r)$ $b_j = 2c_j$, d'où c_j impair car b_j est sfc.

On choisit alors $a = 2(\theta_1 \ \theta_2 \ \ldots \ \theta_s)$ et on remarque que :

si $2q = \sum_1^r c_j x_j^2 + \sum_{r+1}^s 2b_j x_j^2$ où $x_j \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} a^2 q &= 2(\theta_1 \ldots \theta_s)^2 \left(\sum_1^r c_j x_j^2 + \sum_{r+1}^s 2b_j x_j^2 \right) \\ &= \sum_1^r b_j \ \theta_j^2 \ (x_j \prod_{\ell \neq j} \theta_\ell)^2 + \sum_{r+1}^s b_j \ \theta_j^2 \ (2x_j \prod_{\ell \neq j} \theta_\ell)^2 \\ &= \sum_1^s a_j (y_j)^2 \ ; \end{aligned}$$

d'où : $\forall \ q, \ N_{c_1, \ldots, c_r, 2b_{r+1}, \ldots, 2b_s}(2q) \leq N_{a_1, \ldots, a_s}(a^2 q)$.

Il suffit donc de montrer que la série

$$\sum_{q \text{ sfc} \geq 2} \frac{N_{c_1,\ldots,c_r,2b_{c+1},\ldots,2b_s}(2q)}{q^{s/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}}$$

diverge pour ϵ assez petit.

Or : (q pair sfc $\Rightarrow$ $q = 2t$ avec t sfc), et il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{q \text{ sfc} \equiv 0(2)} \frac{N_{c_1,\ldots,c_r,2b_{c+1},\ldots,2b_s}(q)}{q^{s/2}(\log q)^{1/2+\epsilon}}$$

diverge pour ϵ assez petit.

On est donc ramené au premier cas, car $c_1,\ldots,c_r$ sont impairs ($r \geq s-2 \geq 3$), et car la condition $q \equiv 0(2)$ est impliquée par $q \equiv \alpha\ (8)$, où α vaut 2 ou 6 suivant la valeur des c_j.

HUITIEME PARTIE : $s \geq 5$, ETUDE D'UN DERNIER CAS.

THEOREME 8. Si les nombres $\left(\sum_{1}^{s-1} \frac{\alpha_s}{\alpha_j} u_j^2 + u_s^2\right)^{1/2}$ sont Q-linéairement indépendants lorsque $(u_1,\ldots,u_s)$ décrit $(\mathbb{N}^*)^s$, les u_j étant premiers entre eux dans leur ensemble, alors $f(t) = \Sigma' \gamma_n e^{2i\pi |n| t}$ n'est pas bornée.

Les hypothèses du théorème sont satisfaites si les nombres $\frac{\alpha_s}{\alpha_1}, \frac{\alpha_s}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_s}{\alpha_{s-1}}$ sont algébriquement indépendants sur Q.

La démonstration se fait comme d'habitude, (voir le théorème 4, 4[e] partie).

DERNIERE PARTIE - CONJECTURES ET PROBLEMES.

CONJECTURES I :

Dans cette rubrique sont classées des conjectures relatives au problème d'analyse harmonique initialement posé.

Conjecture I_1 : Pour chaque dimension s, et quelles que soient les valeurs des coefficients α_j $(\alpha_j > 0)$, il existe une solution u de l'équation des ondes, qui appartient à $C^{s/2}_{loc}(\mathbb{T}^s \times \mathbb{R})$, et qui n'est pas presque périodique.

(A cause des cas déjà résolus, de nature artihmétique souvent fort différente - par exemple pour $s = 2$, α_1/α_2 carré d'un rationnel, ou nombre transcendant - ce résultat me semble extrêmement vraisemblable).

Conjecture I_2 : Si u est une solution bornée de l'équation des ondes, dans $C^{s/2}_{loc}(\mathbb{T}^s \times \mathbb{R})$, alors u est presque-périodique.

(Un tel résultat serait du même type que le théorème de Bohr : si une fonction bornée a une dérivée presque-périodique, alors la fonction est presque-périodique.

Cependant, si cette conjecture est fausse, on peut se demander s'il existe un indice "critique" $j(s)$, tel que :

pour $k > j(s)$ toute solution de classe $C^k_{loc}(\mathbb{T}^s \times \mathbb{R})$ est bornée

pour $k < j(s)$, il existe une solution non bornée de classe $C^k_{loc}(\mathbb{T}^s \times \mathbb{R})$.

On aurait d'ailleurs $j(s) \leq s/2$).

<u>Problème</u> I_3 : Quel est le comportement "précis" à l'infini de la fonction f(t) étudiée dans ce travail.

(On sait déjà que $\overline{\lim_{t\to+\infty}} |f(t)| = +\infty$, on sait aussi, d'après M. Frisch, [9], que $f(t) = O(\log t)$.

<u>CONJECTURE II</u> :

Celle-ci est apparue lors de l'examen du cas $s = 2$, α_1/α_2 irrationnel

Il existe un ensemble fini $\mathcal{E}$ inclus dans les rationnels strictement positifs tel que lorsque r décrit $Q^{+*} - \mathcal{E}$, les $\sqrt{\theta+r^2}$ soient Q-linéairement indépendants

ou encore

Le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\{\sqrt{\theta+r^2}, r \in Q^{+*}\}$ admet une base de la forme $\{\sqrt{\theta+r^2}, r \in Q^{+*} - \mathfrak{F}\}$, où $\mathfrak{F}$ est un ensemble fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE J.P. et LABORDE M. : Vibrations du Tore T^k de classe $C^{k/2}$. Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay n° 77-77, 1976-1977, premier exposé.

[2] BAKER A. : Transcendental Number Theory. Cambridge University Press 1975.

[3] BOCHNER S. : Review of "On absolute convergence of multiples Fourier series" by Szasz and Minakshsundaram. Mathematical Reviews, 8, 1947, p. 376.

[4] DAVENPORT H. : Analytic Methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities. The University of Michigan, Fall Semester, 1962, 2nd Printing.

[5] DELANGE H. : Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1956, p. 15-74. Gauthier-Villars.

[6] DELANGE H.: Communication orale. Université d'Orsay, Paris-Sud.

[7] DICKSON L.E. : Introduction to the theory of numbers. Dover Publications, Inc. New York.

[8] DICKSON L.E. : History of the number theory. Vol. I, II, III. Carnegie Institution.

[9] FRISCH M. : Propriétés asymptotiques des vibrations du tore. Analyse Harmonique d'Orsay (1974).

[10] GRAMAIN F. et MEYER Y. : Ensemble de fréquences et fonctions presque-périodiques. Colloquium Mathematicum, vol. XXX, fasc. 2 (1974).

[11] HALL, NEWMAN A. : The number of representations function for binary quadratic forms. Amer. J. Math. 62, 589-598, (1940).

[12] HARDY G.H. and WRIGHT E.M. : An introduction to the theory of numbers. 4th Edition. Oxford at the Clarendon Press.

[13] HARDY G.H. and LITTLEWOOD J.E. : Proc. Lond. Math. Soc., série 2, vol. 13 (1914), p. 174-191.

[14] KLOOSTERMAN H.D. : On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Acta Mathematica (1926), 49, p. 407-464.

[15] LANDAU E. : Handbuch der lehre von der Verteilung der Primzahlen. Band II. Leipzig und Berlin 1909.

[16] LA VALLEE POUSSIN Ch. J. de : Recherches Analytiques sur la théorie des nombres premiers. 3e et 4e parties, Bruxelles 1897.

[17] MEYER Y. : Nombres premiers et vibrations.
Séminaire Delange-Pisot-Poitou, exposé 15 (1972).

[18] SMITH H.J.S. : Report on the theory of numbers.
Chelsea Publishing Company, Bronx, New-York.

[19] TREPREAU J.M. : Communication Orale.
Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[20] WAINGER S. : Special trigonometric series in k-dimensions.
Mem. Amer. Math. Soc. 59 (1965).

N° D'IMPRESSION 299
2EME TRIMESTRE 1978