



**HAL**  
open science

# Théorie des nombres et automates

Jean-Paul Allouche

► **To cite this version:**

Jean-Paul Allouche. Théorie des nombres et automates. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1983. tel-00343206

**HAL Id: tel-00343206**

**<https://theses.hal.science/tel-00343206>**

Submitted on 30 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H È S E

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS SCIENCES

par

Jean-Paul ALLOUCHE

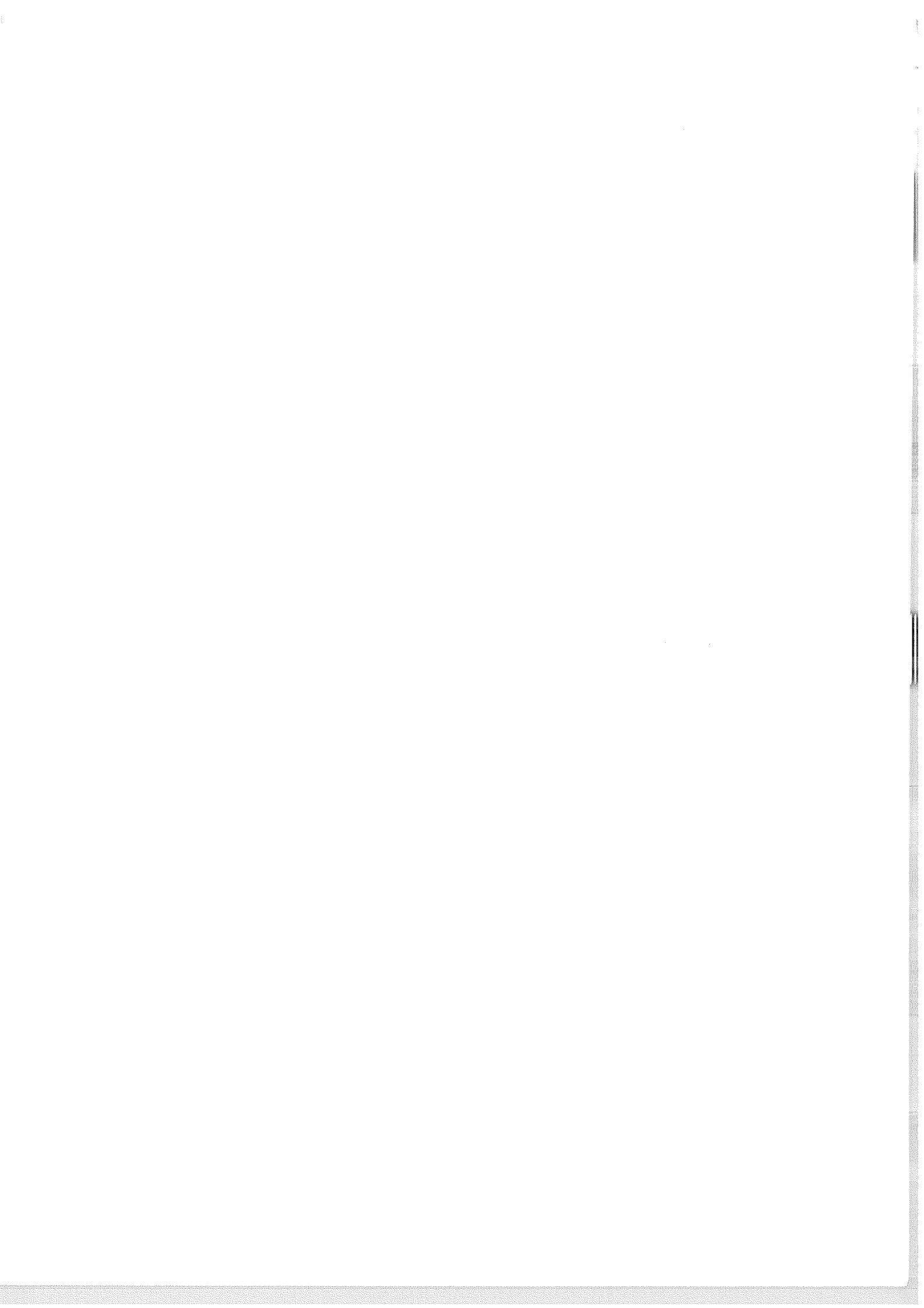
---

THÉORIE DES NOMBRES ET AUTOMATES

---

soutenu le 16 juin 1983 devant la Commission d'examen :

MM. J.-M. DESHOUILLERS .....	Président
Cl. LOBRY .....	} Examineurs
M. MENDÈS FRANCE .....	
G. RAUZY .....	
Y. MEYER .....	



L'usage est de commencer une thèse par des remerciements ; je vais d'autant moins déroger à cette tradition que c'est pour moi la première occasion d'exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui ont permis, dans des relations autant professionnelles que d'amitié, la réalisation de ce travail :

- Michel Mendès France a assuré la fonction officielle de directeur de recherche, non comme "patron", mais de façon beaucoup plus subtile, me proposant, au cours de longues conversations tant mathématiques que non-mathématiques, de très nombreuses directions à explorer et des suggestions efficaces.

- Jean-Marc Deshouillers a été pour moi comme un second directeur de recherche, s'intéressant à mes résultats, avançant des idées fécondes, minimisant l'importance des inévitables périodes de doute. De plus il est le coauteur de l'une des parties de ce travail et me fait l'honneur de présider ce jury.

- Claude Lobry a su m'encourager quand ce travail n'était encore qu'un projet très vague et très lointain. J'ai eu de plus avec lui, sur des thèmes de mathématiques dites appliquées comme l'analyse non-standard, de très fructueuses discussions qui ont sans conteste influencé ma vision des mathématiques.

- Gérard Rauzy s'est beaucoup intéressé à mes travaux, me posant à leur sujet de nombreuses questions pertinentes... dont certaines sont encore ouvertes.

- Yves Meyer m'a proposé un intéressant second sujet, et m'a beaucoup aidé à le comprendre, en choisissant judicieusement la bibliographie et en répondant patiemment à mes questions.

- Christine Reder et Michel Cosnard sont chacun coauteur d'un des articles repris dans ce travail ; ils m'ont appris de nombreuses choses dans leurs domaines mathématiques respectifs.

- Madeleine Neau a tapé ce texte avec une patience et une compétence jamais démenties.

- Mauricette Jaubert et Philippe Texier se sont chargés du tirage et de la reliure de cette thèse avec le plus grand soin.

- Les membres enseignants et non-enseignants de l'U. E. R. de Mathématiques et d'Informatique de Bordeaux, les "quasi-bordelais", et ceux du département informatique de l'I. U. T. de Bordeaux m'ont toujours manifesté beaucoup de gentillesse et de chaleur humaine.

- Enfin toutes les personnes qui travaillent à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay et plus particulièrement la Directrice, Jacqueline Bonnamour et les enseignantes de mathématiques, Nicole El Karoui et Michelle Chauve m'ont accueilli avec beaucoup d'amitié au département de mathématiques de l'Ecole, où j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail.

## SOMMAIRE

- p. VII à X : Introduction
- p. 1 à 16 : Première partie, Somme des chiffres et suites automatiques
- p. 17 à 61 : Deuxième partie, Itérations de fonctions et suites automatiques
- p. 63 à 90 : Troisième partie, Suites  $q$ -miroirs et répartition modulo 1
- p. 91 à 101 : Quatrième partie, Oscillations temporelles d'un automate cellulaire
- p. 103 à 121 : Cinquième partie, Répartition de la suite des puissances d'une série formelle automatique
- p. 123 et 124 : Conclusion



## INTRODUCTION

A la question de savoir si une suite infinie de 0 et de 1 est "au hasard", (ou simule le hasard), plusieurs réponses peuvent être données qui dépendent de la définition mathématique de la notion de hasard. Quelles propriétés exiger d'une telle définition ? On conviendra aisément que la suite constante 1 1 1 ... ne devrait pas être qualifiée de suite au hasard, pas plus une suite périodique comme 1 0 1 0 1 0 ... , ni même une suite périodique à partir d'un certain rang comme 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 ... .

Plus généralement, s'il existe un "algorithme" (au sens naïf du terme) permettant de construire une suite de 0 et de 1, on refusera à cette suite le caractère de suite au hasard.

Pour une étude comparative de diverses notions de suites au hasard on pourra se reporter à l'intéressant travail de C. P. Schnorr (A unified approach to the definition of random sequences, Math. Syst. Theory, 5 (1971)) ; nous nous proposons ici d'étudier des suites engendrées par "automates" (un automate apparaissant comme un type particulier d'algorithme), et donc pas "au hasard" au sens vague ci-dessus : une grande partie de ce travail est consacrée à l'étude de propriétés arithmétiques et dynamiques remarquables des suites engendrées par automates finis ; nous nous intéressons ensuite aux automates cellulaires et plus particulièrement aux propriétés arithmétiques de l'un d'entre eux.

Ce travail est composé de cinq parties, chacune d'elles comprend une introduction, une conclusion et une bibliographie propres.

Résumons rapidement chacune de ces parties :

1) Dans la première partie nous commençons par rappeler la notion de  $p$ -automate, puis nous étudions des suites en rapport avec la somme des chiffres en base  $p$ . Plus précisément, notons  $s_p(n)$  la somme des chiffres de l'entier  $n$  en base  $p$  ; il est connu que la suite  $(s_p(n))_n$  réduite modulo  $p$  est engendrée par  $p$ -automate.



- Nous montrons d'abord que, si  $P$  est un polynôme à coefficients rationnels et qui prend des valeurs entières sur les entiers, alors la suite  $(s_p(P(n)))_n$  réduite modulo  $p$  est reconnue par  $p$ -automate si et seulement si  $P$  est de degré inférieur ou égal à 1. Ce résultat signifie qu'une transformation affine sur  $n$  ne "perturbe pas trop les chiffres de  $n$ ", contrairement à une transformation du type  $n \rightarrow n^2$ , en particulier la suite  $(s_p(n^2))_n$  réduite modulo  $p$ , bien que donnée par un "algorithme" n'est pas  $p$ -automatique.

- De la même façon, les itérées de  $s_p$  sont plus "complexes" que  $s_p$  : nous montrons en effet que la suite  $(s_p^{(k)}(n))_n$  modulo  $p$  est engendrée par  $p$ -automate si et seulement si  $k$  vaut 0 ou 1.

2) Dans la seconde partie, nous étudions les itérations des fonctions continues unimodales (c'est-à-dire croissantes puis décroissantes) de l'intervalle  $[0, 1]$  dans lui-même. Si  $f$  est une telle fonction, une technique intéressante est d'associer à chaque suite  $(f^{(n)}(x))_n$  une suite à valeurs dans un ensemble fini  $\mathcal{A}$  par un "codage" qui permet de ramener une partie de l'étude des propriétés des itérées à l'étude de suites particulières à valeurs dans  $\mathcal{A}$ . Nous montrons qu'un codage convenablement interprété introduit naturellement l'ensemble

$$\Gamma = \{A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} ; A(0) = A(1) = 1 ; \forall k \geq 0, \bar{A} \leq d^k A \leq A\},$$

où  $d$  est le shift (décalage),  $\leq$  l'ordre lexicographique induit par  $0 < 1$  et  $\bar{A}$  la suite conjuguée de  $A$  (obtenue en remplaçant les 1 par des 0 et les 0 par des 1).

- Le premier résultat que nous obtenons fait apparaître la suite de Thue-Morse 01101001100101... qui est reconnue par 2-automate ; soit  $L$  la première décalée de cette suite ( $L = 1101001100101 \dots$ ), alors  $L$  est dans  $\Gamma$  et :  $\Gamma \cap [0^{\omega}, L[$  est discret dénombrable, et même constitué uniquement de suites périodiques qui croissent vers  $L$ ,  $\Gamma \cap [L, X]$  a la puissance du continu pour toute suite  $X$  strictement supérieure à  $L$ .

- Une généralisation des méthodes de démonstration fait apparaître une classe intéressante de suites baptisées  $q$ -miroirs, qui sont engendrées par 2-automates ; ces suites sont telles que :

il existe à gauche d'une suite  $q$ -miroir de  $\Gamma$  un intervalle de  $\Gamma$  discret dénombrable,

tout intervalle non vide de  $\Gamma$  d'extrémité gauche une suite  $q$ -miroir de  $\Gamma$  a la puissance du continu.

- Nous montrons d'autres résultats sur  $\Gamma$ , en particulier les suites périodiques de  $\Gamma$  sont denses dans  $\Gamma$ , et  $\Gamma$  a une structure "fractale".

Nous indiquons enfin les conséquences de ces résultats en théorie des itérations (notamment pour les cascades de Feigenbaum).

3) Dans la troisième partie, nous donnons d'abord une interprétation arithmétique des résultats de la partie précédente : si on associe à une suite binaire le nombre réel compris entre 0 et 1 dont le développement en base 2 a pour chiffres après la virgule les termes de cette suite, l'ensemble  $\Gamma$  de la deuxième partie est associé à  $\tilde{\Gamma}$ , où :

$$\tilde{\Gamma} = \{x \in [0, 1] ; \forall k \geq 0 \quad 1-x \leq \{2^k x\} \leq x\} ,$$

(  $\{y\}$  désigne la partie fractionnaire de  $y$  ).

Cet ensemble contient des nombres  $q$ -miroirs (dont le nombre de Morse) qui sont transcendants et tels que :

- à gauche d'un tel nombre il existe un intervalle de  $\tilde{\Gamma}$  discret dénombrable (et même ne contenant que des rationnels),

- tout intervalle non vide de  $\tilde{\Gamma}$  dont l'extrémité gauche est un tel nombre a la puissance du continu.

On est alors tenté d'étudier l'ensemble

$$F(\lambda) = \{x \in [0, 1] ; \forall k \geq 0 \quad 1-x \leq \{\lambda^k x\} \leq x\} .$$

Nous montrons, dans le cas où  $\lambda$  est entier, que cet ensemble a des propriétés analogues à celles de  $\tilde{\Gamma}$  (qui n'est autre que  $F(2)$ ) au prix d'une généralisation de la notion de suite  $q$ -miroir au cas d'un alphabet à plusieurs lettres, (généralisation qui préserve le caractère automatique de ces suites).

4) Dans la quatrième partie nous étudions l'automate cellulaire introduit par Greenberg et Hastings et qui est un modèle discret de réaction-diffusion en milieu excitable : on quadrille régulièrement le plan, on appelle cellule chaque carré élémentaire, chaque cellule peut prendre un nombre fini de valeurs appelées états, et des "règles de transition" permettent de passer d'une "génération" de cellules à la génération suivante.

Greenberg et Hastings ont montré que, sous certaines hypothèses, la suite des états d'une partie bornée du plan est, après un régime transitoire, périodique et de période indépendante du borné. Nous montrons que, sauf dans un cas, cette période est aussi indépendante de la génération initiale.

5) La cinquième partie est plus arithmétique ; elle est un peu à part car les automates finis n'y apparaissent (tout au moins dans la version rédigée ici) que de façon sous-jacente. L'une des motivations de l'étude de la répartition modulo 1 des suites à éléments dans le corps des séries formelles  $\mathbb{F}_q((X))$ , où  $\mathbb{F}_q$  est un corps fini, et plus précisément des suites du type  $(\theta^n)_n$ , est l'analogie parfois constatée entre des résultats sur  $\mathbb{R}$  et des résultats sur le corps  $\mathbb{F}_q((X))$ . Reprenant les méthodes de J.-M. Deshouillers qui montrent que, si  $\theta$  est une fraction rationnelle (c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{F}_q(X)$ ), la suite  $(\theta^n)_n$  n'est pas équirépartie modulo 1, nous généralisons ce cas où  $\theta$  est "automatique", c'est-à-dire plus précisément au cas où  $\theta$  est un élément de  $\mathbb{F}_q((X))$  algébrique sur  $\mathbb{F}_q(X)$ .

\*

\* \*

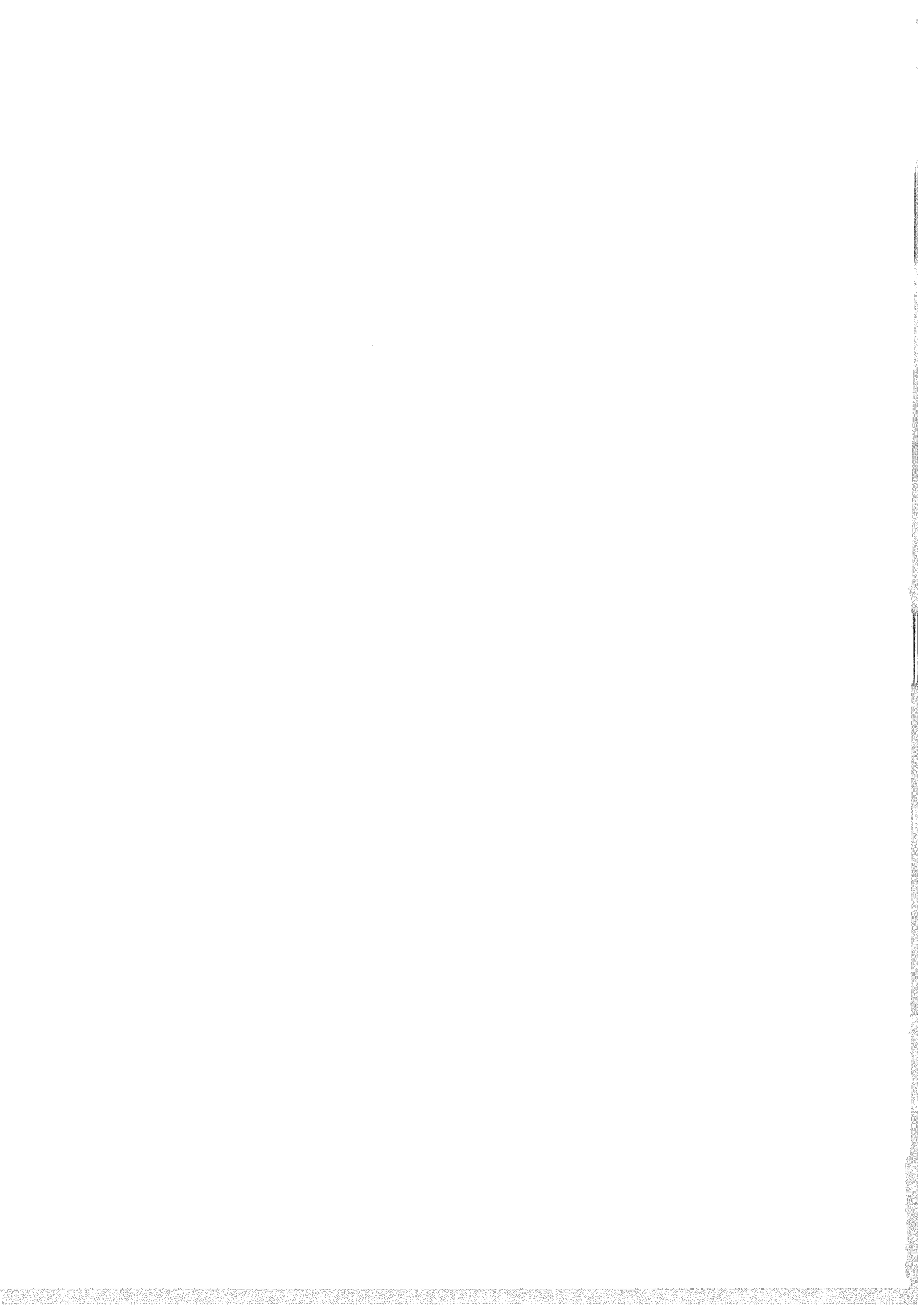
La deuxième partie de ce travail est extraite d'un article avec Michel Cosnard (en préparation), la quatrième d'un article avec Christine Reder (à paraître dans *Discrete Applied Math.*), la dernière d'un article avec Jean-Marc Deshouillers (en préparation).

PREMIÈRE PARTIE

---

SOMME DES CHIFFRES ET SUITES AUTOMATIQUES

---



## Introduction

Dans cette partie, après avoir rappelé la définition des suites reconnues par automates finis, nous étudions sous cet angle des suites liées à la somme des chiffres des nombres entiers dans une base donnée.

### I. - Quelques rappels (voir [Chr 2] et [Eil] ou [Con])

On appelle alphabet tout ensemble fini  $\mathcal{A}$ , et on note  $\mathcal{A}^p$  l'ensemble des  $p$ -uples sur  $\mathcal{A}$  (encore appelés mots de longueur  $p$ ), un  $p$ -uple  $(x_1, \dots, x_p)$  est aussi noté  $x_1 \dots x_p$ .

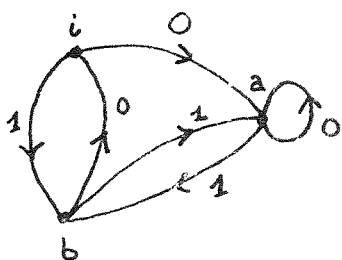
On convient que  $\mathcal{A}^0$  est réduit au mot vide, encore noté  $\mathbb{1}$ , et on munit l'ensemble  $\mathcal{A}^*$ , défini comme la réunion de tous les  $\mathcal{A}^p$ , de la loi de concaténation, qui en fait un monoïde libre.

On appelle  $p$ -automate la donnée :

. d'un ensemble fini  $S = \{i, a_1, \dots, a_r\}$  appelé ensemble des états, l'état  $i$  étant dit état initial,

. de  $p$  applications de  $S$  dans lui-même, notées  $0 \dots p-1$ , de sorte que l'on peut représenter un  $p$ -automate par un graphe orienté comme ci-dessous :

$$S = \{i, a, b\} \quad p = 2$$



$$\begin{aligned} 0i &= a, & 0a &= a, & 0b &= i, \\ 1i &= b, & 1a &= b, & 1b &= a; \end{aligned}$$

Intuitivement un tel objet est un "automate sans mémoire" : lorsqu'un tel automate "lit" un mot, par exemple ici le mot  $1101$ , de droite à gauche, il "bascule" successivement de l'état  $i$  en  $b$ , puis en  $i$ , puis en  $b$ , puis en  $a$  et s'y "immobilise" :

$$(1101)i = 110(1i) = 110b = 11(0b) = 11i = 1(1i) = 1b = a.$$

Une suite  $(\varepsilon_n)_n$  à valeurs dans l'alphabet  $\{0, \dots, p-1\}$  est dite reconnue par  $p$ -automate s'il existe un  $p$ -automate d'ensemble d'états  $S$ , d'état initial  $i$ , et une application  $\varphi$  de  $S$  dans  $\{0, \dots, p-1\}$ , tels que, si  $n$  s'écrit  $e_k \dots e_0$  en base  $p$ , on ait :

$$\varepsilon_n = \varphi(e_k \dots e_0 i),$$

où l'on a identifié les chiffres  $0, \dots, p-1$  et les applications de  $S$  dans lui-même notées  $0, \dots, p-1$ . Remarquons qu'à partir de l'automate et de  $\varphi$ , on peut calculer un terme de la suite sans connaître les précédents.

On appelle  $p$ -substitution  $\sigma$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  une application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}^p$ ; on appelle encore  $\sigma$  le morphisme induit sur  $\mathcal{A}^*$  par  $\sigma$ .

Enfin pour une suite  $A = (a_n)_n$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , on note  $\sigma A$  la suite  $(\sigma a_n)_n$ , autrement dit la suite  $(b_n)_n$  définie par :

$$\forall k \geq 0 \quad b_{kp} \dots b_{(k+1)p-1} = \sigma a_k.$$

Une suite  $(\varepsilon_n)_n$  à valeurs dans  $\{0, \dots, p-1\}$  est dite image d'un point fixe d'une  $p$ -substitution, s'il existe un alphabet  $\mathcal{A}$ , une  $p$ -substitution  $\sigma$  sur  $\mathcal{A}$ , une suite  $A = (a_n)_n$ , à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , point fixe de  $\sigma$  (c'est-à-dire telle que  $\sigma A = A$ ) et une application  $\varphi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\{0, \dots, p-1\}$  tels que :

$$\forall n \geq 0 \quad \varepsilon_n = \varphi(a_n).$$

## II. - Le théorème fondamental de Chritol, Kamae, Mendès France et Rauzy

Énonçons ce théorème (voir [Chr 2]) :

Soit  $p$  un nombre premier, soit  $(\varepsilon_n)_n$  une suite à valeurs dans l'ensemble  $\{0, \dots, p-1\}$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(\varepsilon_n)_n$  est reconnue par un  $p$ -automate,
- (ii)  $(\varepsilon_n)_n$  est l'image d'un point fixe d'une  $p$ -substitution,
- (iii) La série formelle  $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n X^n$  est algébrique sur le corps  $\mathbb{F}_p(X)$  des fractions rationnelles modulo  $p$ .

L'équivalence entre (i) et (ii) n'utilise pas le fait que  $p$  est premier et est prouvée dans [Cob 2], le reste du théorème est démontré dans [Chr 2] (voir aussi [Chr 1] pour l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i)).

On peut montrer (voir [Chr 2]) que de telles suites sont déterministes, c'est-à-dire d'entropie nulle ([Rau]); mais une suite reconnue par automate fini n'est pas nécessairement presque-périodique au sens de Besicovitch.

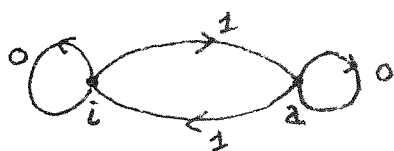
Une suite reconnue par automate qui a été abondamment étudiée est la suite de Thue-Morse; disons quelques mots de cette suite (que nous verrons apparaître aussi dans la deuxième partie de ce travail) :

### III. - La suite de Thue-Morse

Cette suite  $(f_n)$  est définie par :

$$\begin{cases} f_n = 0 & \text{si la somme des chiffres de } n \text{ en base } 2 \text{ est paire,} \\ f_n = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite est reconnue par le 2-automate suivant :



$$\varphi(i) = 0, \quad \varphi(a) = 1.$$

C'est aussi le point fixe commençant par 0 de la 2-substitution définie sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  par :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 01 \\ 1 &\longrightarrow 10. \end{aligned}$$

Enfin la série formelle  $F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n X^n$  est solution de l'équation

$$(1+X)^3 F^2(X) + (1+X)^2 F(X) + X = 0.$$

Un certain nombre d'auteurs ont étudié cette suite sous différents aspects, on pourra consulter [Ber], [Chr 2], [Cob 2], [Coq], [Dek], [Fif], [Got], [Hed] [Kak], [Kar], [Kea], [Kle], [Mah], [Mar], [Mor], [Que], [Sal], [Thu], [Wie], ainsi que les deuxième et troisième parties de ce travail.



IV. - Somme des chiffres et transcendance

Notons  $s_p(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en base  $p$ . La suite  $(s_p(n))_n$  réduite modulo  $p$  est reconnue par  $p$ -automate ; on peut se poser la question de l'étude de  $(s_p(f(n)))_n$  où  $f$  est à valeurs entières. Par exemple, si  $f(n) = p^n$ , alors la suite  $(s_p(f(n)))_n$  est constante et égale à 1.

Dans ce qui suit nous nous intéressons d'une part à  $(s_p(P(n)))_n$  où  $P$  est un polynôme à valeurs entières, d'autre part à la suite  $(s_p^{(k)}(n))_n$  où  $s_p^{(k)}$  est la  $k^{\text{ème}}$  itérée de  $s_p$ .

*Bull. Soc. math. France.*  
110, 1982, p. 279-285.

## SOMME DES CHIFFRES ET TRANSCENDANCE

PAR

JEAN-PAUL ALLOUCHE (\*)

RÉSUMÉ. — Soit  $p$  un nombre premier, et soit  $s_p(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en base  $p$ .

Nous montrons les résultats suivants :

Si  $R$  est un polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  tel que  $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ , la série formelle  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si le degré de  $R$  est inférieur ou égal à 1.

Soit  $s_p^{(k)}$  la  $k$ -ième itérée de  $s_p$ , alors la série formelle  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si  $k=0$  ou  $k=1$ .

ABSTRACT. — Let  $p$  be a prime number, and let  $s_p(n)$  be the sum of the digits of  $n$  in the  $p$ -adic expansion.

We prove the following results:

Let  $R$  be a polynomial in  $\mathbb{Q}[X]$  with  $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ . The formal series  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(R(n)) X^n$  is algebraic over  $\mathbb{F}_p(X)$  if and only if the degree of  $R$  is less than or equal to 1.

Let  $s_p^{(k)}$  be the iterates of  $s_p$ , then the formal series  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$  is algebraic over  $\mathbb{F}_p(X)$  if and only if  $k=0$  or  $k=1$ .

Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite d'entiers relatifs; on note  $\mathbb{F}_p$  le corps à  $p$  éléments et  $\mathbb{F}_p(X)$  le corps des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ . Un résultat récent de G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDIÈS FRANCE et G. RAUZY (cf. [1]) établit notamment que la série formelle  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si la suite  $(\varepsilon_n)$  réduite modulo  $p$  est reconnue par un  $p$ -automate, ce qui est une façon de concevoir que la suite  $(\varepsilon_n)$  n'est pas répartie « au hasard ».

Si l'on note  $s_p(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en base  $p$ , on sait que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ ; il est donc intéressant de considérer par exemple les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(n^2) X^n$  ou  $\sum_{n=0}^{\infty} s_p^{(2)}(n) X^n$  (où  $s_p^{(k)}$  est la  $k$ -ième itérée de  $s_p$ ): les suites  $(s_p(n^2))$  et  $(s_p^{(2)}(n))$  sont données par des calculs effectifs (algorithmes?) mais nous allons démontrer qu'elles sont réparties « au

(\*) Texte reçu le 17 mars 1981, révisé le 25 janvier 1982.

Jean-Paul ALLOUCHE, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Université de Bordeaux-I, 33405 Talence Cedex.

hasard » au sens défini plus haut; ces suites sont donc plus « complexes » que  $(s_p(n))$ ; est-ce la raison qui rend difficile la question posée par Gelfond dans [2] : soit  $R$  un polynôme à coefficients entiers, estimer :

$$\text{card} \{ n \leq x, s_p(R(n)) \equiv l \pmod{m} \} ?$$

Cet article est divisé en cinq parties; dans la première nous étudions la série  $\sum_0^x s_p(\alpha n + \beta) X^n$ ; dans la seconde nous établissons un lemme fondamental sur les propriétés de la suite  $(\varepsilon_n)$  lorsque la série  $\sum_0^x \varepsilon_n X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ ; dans la troisième, nous montrons que, si le polynôme  $R$  est dans  $\mathbb{N}[X]$  et si la série  $\sum_0^x s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , alors « il y a des relations » entre les sommes des chiffres de certains coefficients de  $R$ ; dans la quatrième nous montrons que la série  $\sum_0^x s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si le degré du polynôme  $R$  est inférieur ou égal à 1; dans la dernière partie nous prouvons que la série  $\sum s_p^{(k)}(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si  $k$  vaut 0 ou 1.

### 1. Étude de la série formelle $\sum_0^x s_p(\alpha n + \beta) X^n$

1. THÉORÈME. — Soit  $(\varepsilon(n))$  une suite d'entiers telle que la série  $\sum_0^x \varepsilon(n) X^n$  soit algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , alors quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}$ , la série  $\sum_0^x \varepsilon(\alpha n + \beta) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ .

Posons d'abord  $\beta = \alpha q + r$ ,  $0 \leq r < \alpha$ , alors  $\varepsilon(\alpha n + \beta) = \varepsilon(\alpha(n+q) + r)$ , et la série  $\sum_0^x \varepsilon(\alpha n + \beta) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$  si et seulement si la série  $\sum \varepsilon(\alpha n + r) X^n$  l'est.

On pose alors  $t(n) = \varepsilon(\alpha n + r)$  et on va montrer qu'il y a un nombre fini de suites  $t_{k,a}(n) = t(p^k n + a)$  modulo  $p$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq a \leq p^k - 1$  ce qui montrera le résultat d'après [1].

Écrivons  $\alpha a + r = up^k + v$ , avec  $0 \leq v \leq p^k - 1$ , alors  $u$  appartient à  $[0, \alpha - 1]$  et  $t(p^k n + a) = \varepsilon((\alpha n + u)p^k + v) = \varepsilon_{k,v}(\alpha n + u)$ . Comme la série  $\sum_0^x \varepsilon(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , il y a un nombre fini de suites  $\varepsilon_{k,v}(n) = \varepsilon(p^k n + v)$  modulo  $p$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq v \leq p^k - 1$ , donc un nombre fini de suites  $\varepsilon_{k,v}(\alpha n + u)$  pour chaque  $u$ .

Mais  $u$  décrit  $[0, \alpha - 1]$ , il y a donc un nombre fini de suites  $t_{k,a}(n)$  modulo  $p$ ,  $0 \leq k$ ,  $0 \leq a \leq p^k - 1$  et le résultat est démontré.

2. COROLLAIRE. — Soit  $R(X)$  un polynôme du premier degré dans  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $R(X) = aX + b$ , tel que  $R(\mathbb{N})$  soit contenu dans  $\mathbb{N}$ , alors la série  $\sum_0^x s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur le corps  $\mathbb{F}_p(X)$ .

L'hypothèse  $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$  implique facilement  $a, b \in \mathbb{N}$ . Il suffit donc de montrer que  $\sum_0^{\prime} s_p(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ ; rappelons une démonstration de ce résultat :

$$\begin{aligned} G(X) &= \sum_0^{\prime} s_p(n) X^n = \sum_{a=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\prime} s_p(pn+a) X^{pn+a} \\ &= \sum_{a=0}^{p-1} X^a \sum_{n=0}^{\prime} (s_p(n) + a) X^{np} \\ &= \sum_{a=0}^{p-1} X^a (G(X))^p + \sum_{a=0}^{p-1} a X^a \sum_{n=0}^{\prime} X^{np}, \end{aligned}$$

d'où :

$$G(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} G^p(X) + \frac{X}{(X - 1)^2}.$$

## 2. Propriétés des coefficients d'une série algébrique

LEMME FONDAMENTAL. — Soit  $\varepsilon(n)$  une suite d'entiers telle que la série  $\sum_0^{\prime} \varepsilon(n) X^n$  soit algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ ; alors il existe  $n_0 \geq 1$  et  $T \geq 1$  tels que :

$$\forall j \geq 1, \quad \forall i \in [1, p], \quad \forall n \geq n_0,$$

$$\varepsilon\left(p^n \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) \equiv \varepsilon\left(p^{n+T} \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) \pmod{p}.$$

La série  $\sum_0^{\prime} \varepsilon(n) X^n$  étant algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , il en est de même de la série  $\sum_0^{\prime} \varepsilon(n+1) X^n$ .

D'après [1] il existe un alphabet  $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ , une  $p$ -substitution  $\sigma$  sur  $Y$ , une suite  $(\lambda(n))_{n \geq 1}$  d'éléments de  $Y$ , et une application  $\varphi$  de  $Y$  vers  $\{0, \dots, p-1\}$  tels que :

- la suite  $(\lambda(n))$  est point fixe de  $\sigma$ ;
- pour  $n \geq 1$ ,  $\varphi(\lambda(n)) \equiv \varepsilon(n) \pmod{p}$ .

Il suffit donc de montrer le résultat annoncé dans le lemme pour la suite  $\lambda(n)$  (avec  $\equiv$  au lieu de  $\equiv$ ).

Soit  $\sigma = (\tau_1, \dots, \tau_p)$ , où les  $\tau_j$  sont des applications de  $Y$  dans lui-même, c'est-à-dire  $\sigma(y) = \tau_1(y)\tau_2(y) \dots \tau_p(y)$ . Dire que  $\lambda(n)$  est point fixe de  $\sigma$ , c'est dire que les suites  $\lambda(1) \dots \lambda(n) \dots$  et  $\tau_1(\lambda(1)) \dots \tau_p(\lambda(1)) \tau_1(\lambda(2)) \dots \tau_p(\lambda(2)) \dots$  sont égales, autrement dit :

$$\forall i \in [1, p], \quad \forall j \geq 1, \quad \tau_i(\lambda(j)) = \lambda(i + p(j-1)),$$

d'où en itérant  $\tau_i$  :

$$\tau_i^a(\lambda(j)) = \lambda\left(p^a \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right).$$

Comme  $\tau_i$  est une application de  $Y$  dans  $Y$  et que  $Y$  a  $l$  éléments, il existe une période  $T_{ij} \leq l$  telle que :

$$\forall a \geq l + 1, \quad \tau_i^a(\lambda(j)) = \tau_i^{a+T_{ij}}(\lambda(j)).$$

Posons  $T = \text{ppcm}(1, 2, \dots, l)$ , alors  $T_{ij}$  divise  $T$ , d'où :

$$\begin{aligned} &\forall i \in [1, p], \quad \forall j \geq 1, \quad \forall n \geq n_0 = l + 1, \\ &\lambda\left(p^n \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) = \lambda\left(p^{n+T} \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right). \end{aligned}$$

**3. Relations entre les coefficients de  $R$  si la série  $\sum_0^{\infty} s_p(R(n)) X^n$  est algébrique**

PROPOSITION. — Soit  $R(X) = \sum_0^d a_k X^k$ , avec  $a_k \in \mathbb{N}$ ,  $a_d \neq 0$ ,  $d \geq 2$ . Si la série  $\sum_0^{\infty} s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , alors :

$$s_p(a_{d-1} + (d+1)a_d) \equiv s_p(a_{d-1} + da_d) + s_p(a_d) \pmod{p}.$$

Appliquons en effet le lemme de la deuxième partie, avec  $i=1$ ,  $j = p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n} + 1$ , à la suite  $s_p(R(n))$  : il existe  $n_0 \geq 1$  et  $T \geq 1$  tels que :

$$\forall n \geq n_0,$$

$$s_p(R(p^n(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n}) + 1)) \equiv s_p(R(p^{n+T}(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n}) + 1)).$$

Posons  $b_{j,l} = \sum_{k=j}^d \binom{k}{j} \binom{j}{l} a_k$ .

Calculons alors, pour  $x=n$ , puis  $x=n+T$ , la quantité :

$$\begin{aligned} f(x) &= s_p[R(p^x(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n}) + 1)] \\ &= s_p[R(p^{x+(d-2)n}(p^n + 1) + 1)] \\ &= s_p\left[\sum_{k=0}^d a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^{(x+(d-2)n)j} (p^n + 1)^j\right] \\ &= s_p\left[\sum_{k=0}^d \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j a_k \binom{k}{j} \binom{j}{l} p^{(x+(d-2)n)j+nl}\right] \\ &= s_p\left[\sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(x+(d-2)n)j+nl}\right] \end{aligned}$$

pour  $x=n$  :

$$f(n) = s_p\left(\sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(d-1)nj+nl}\right),$$

deux exposants  $(d-1)nj+nl$  et  $(d-1)nj'+nl'$ , avec  $(j, l) \neq (j', l')$  et par exemple  $l' \geq l$ , sont égaux si et seulement si  $(d-1)(j-j') = l'-l$ , avec  $0 \leq l \leq j \leq d$  et  $0 \leq l' \leq j' \leq d$ , ce qui donne l'unique solution  $l' = d-1$ ,  $l = 0$ ,  $j' = d-1$ ,  $j = d$ . Par conséquent,

$$f(n) = s_p \left[ \sum' b_{j,l} p^{(d-1)nj+nl} + (b_{d,0} + b_{d-1,d-1}) p^{(d-1)dn} \right],$$

où  $\sum'$  porte sur  $j, l$  avec  $0 \leq j \leq d$ ,  $0 \leq l \leq j$ ,  $(j, l) \notin \{(d, 0), (d-1, d-1)\}$  et où tous les exposants de  $p$  sont distincts donc différent d'au moins  $n$ ; si l'on choisit  $n$  assez grand ( $p^n > 2 \sup_{j,l} (b_{j,l})$ ), on a donc :

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum' s_p(b_{j,l}) + s_p(b_{d,0} + b_{d-1,d-1}) \\ &= \sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j s_p(b_{j,l}) - s_p(b_{d,0}) - s_p(b_{d-1,d-1}) + s_p(b_{d,0} + b_{d-1,d-1}). \end{aligned}$$

pour  $x = n + T$  :

$$f(n+T) = s_p \left[ \sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(d-1)(n+T)j+nl} \right].$$

Ici, tous les exposants de  $p$  sont distincts si  $T$  est convenablement choisi et si  $n$  est suffisamment grand : en effet, si

$$((d-1)n+T)j+nl = ((d-1)n+T)j'+nl',$$

alors

$$T(j'-j) = n((l-l') + (d-1)(j-j')).$$

Si le coefficient de  $n$  est nul, alors  $j' = j$  d'où  $l' = l$ ; si le coefficient de  $n$  est non nul, alors :

$$|T(j'-j) - n((l-l') + (d-1)(j-j'))| \geq n - |T(j'-j)| \geq n - Td \geq T$$

pour  $n$  assez grand.

Les exposants de  $p$  diffèrent ainsi d'au moins  $T$ ; comme on peut, quitte à remplacer  $T$  par un multiple, supposer  $p^T > \sup_{j,l} (b_{j,l})$ , on a donc :

$$f(n+T) = \sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j s_p(b_{j,l}).$$

Comme  $f(n) \equiv f(n+T) \pmod{p}$  pour  $n$  assez grand, on a par conséquent :

$$s_p(a_{d-1} + (d+1)a_d) \equiv s_p(a_{d-1} + da_d) + s_p(a_d) \pmod{p}.$$

#### 4. Fin de l'étude de la série $\sum_0' s_p(R(n)) X^n$

THÉORÈME. — Soit  $R$  un polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  tel que  $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ , et  $d^0 R \geq 2$ ; alors la série  $\sum_0' s_p(R(n)) X^n$  n'est pas algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ .

L'hypothèse  $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$  implique que le coefficient du terme de plus haut degré de  $R$  est positif et que le terme constant est entier positif.

Posons :

$$R(X) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

où  $a_k \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_d \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0 q^{-1} \in \mathbb{N}$ . Si la série formelle  $\sum_0^r s_p(R(n)) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , il en est de même, d'après la première partie, pour la série  $\sum_0^r s_p(R(qun + qv)) X^n$  quels que soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

On écrit alors :

$$\sum_0^r s_p(R(qun + qv)) X^n = \sum_0^r s_p \left( R(qv) + \sum_{k=1}^d (qu)^k \binom{R^{(k)}(qv)}{k!} n^k \right) X^n;$$

Si  $v$  est choisi assez grand, les  $q(R^{(k)}(qv)/k!)$  appartiennent à  $\mathbb{N}$ ; on applique alors le résultat de la troisième partie, et l'on obtient : quel que soit  $v$  assez grand,  $s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) = \delta$ , mod  $p$ , avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= da_d q^{d-1} u^{d-1}, \\ \beta &= a_{d-1} q^{d-2} u^{d-1} + (d+1) a_d q^{d-1} u^d, \\ \gamma &= a_{d-1} q^{d-2} u^{d-1} + da_d q^{d-1} u^d, \\ \delta &= s_p(a_d q^{d-1} u^d). \end{aligned}$$

Fixons alors  $u > d$ , ceci entraîne  $\beta - \gamma > \alpha$ , d'où une contradiction grâce au lemme suivant :

LEMME. — Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , trois entiers, tels que  $\beta - \gamma > \alpha$ . Alors  $s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma)$  n'est pas constant modulo  $p$  pour  $v$  voisin de  $+\infty$ .

Choisissons en effet un entier  $r$  tel que  $\gamma/\alpha < r < \beta/\alpha$  (c'est possible car  $\beta - \gamma > \alpha$ ), et soit  $v = p^t - r$  où  $t$  tend vers  $+\infty$ . Alors, pour  $t$  assez grand, on a :

$$\begin{aligned} s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) & \\ & \equiv s_p(\alpha p^t + \beta - \alpha r) - s_p(\alpha p^t + \gamma - \alpha r) \\ & \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p(\alpha p^t + \gamma - \alpha r). \end{aligned}$$

Fixons un  $s$  tel que  $p^s > \alpha r - \gamma$ , on en déduit donc :

$$\begin{aligned} s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) & \\ & \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p((\alpha - 1)p^t + p^t - p^s + p^s + \gamma - \alpha r) \\ & \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p(\alpha - 1) - s_p(p^t - p^s) - s_p(p^s + \gamma - \alpha r), \end{aligned}$$

on conclut en remarquant que :

$$s_p(p^t - p^s) = s_p(p^{t-s} - 1) = s_p((p-1)(1 + p + \dots + p^{t-s-1})) = (p-1)(t-s),$$

n'est pas constant modulo  $p$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

### 5. Étude de la série $\sum_0^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$

THÉORÈME. — Pour  $k \geq 2$ , la série formelle  $\sum_{n=0}^{+\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$  n'est pas algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ .

Il résulte du lemme ci-dessus que la suite  $s_p(n)$  n'est pas périodique à partir d'un certain rang (sinon pour  $n$  assez grand,  $s_p(n+T) - s_p(n) \equiv 0 \pmod{p}$  ce qui correspond avec les notations ci-dessus à  $\alpha=1$ ,  $\beta=T$ ,  $\gamma=0$ ), donc la série  $\sum_0^{\infty} s_p(n) X^n$  n'est pas dans  $\mathbb{F}_p(X)$ .

Pour montrer le résultat annoncé, il suffit donc de prouver que si la série  $\sum_0^{\infty} s_p^{(k+1)}(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , alors  $\sum_0^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$  est dans  $\mathbb{F}_p(X)$  :

Si la série  $\sum_0^{\infty} s_p^{(k+1)}(n) X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(X)$ , il en est de même de la série  $\sum_0^{\infty} \varepsilon(n) X^n$ , où  $\varepsilon(0)=0$  et  $\varepsilon(n) = s_p^{(k+1)}(n-1)$  pour  $n \geq 1$ .

On applique alors à la suite  $\varepsilon(n)$  le lemme fondamental de la deuxième partie, avec  $j=1$ ,  $i=2$ , donc il existe  $T \geq 1$  tel que, pour  $n$  assez grand :

$$\varepsilon\left(\frac{p^n-1}{p-1} + 1\right) \equiv \varepsilon\left(\frac{p^{n+T}-1}{p-1} + 1\right) \pmod{p},$$

soit :

$$s_p^{(k+1)}(1+p+\dots+p^{n-1}) \equiv s_p^{(k+1)}(1+p+\dots+p^{n+T-1}),$$

d'où :

$$s_p^{(k)}(n) \equiv s_p^{(k)}(n+T),$$

pour  $n$  assez grand, ce qui signifie que la série  $\sum_0^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$  est dans  $\mathbb{F}_p(X)$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAJEZY (G.). — Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. math. France*, vol. 108, fasc. 4, 1980, p. 401-420.
- [2] GELFOND (A. O.). — Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithmetica*, vol. XIII, 1968.

### Conclusion

Le lemme fondamental donné plus haut est une condition nécessaire pour qu'une suite soit reconnue par automate. Les démonstrations données pour l'étude de  $s_p(P(n))$  utilisent ce lemme et la  $p$ -additivité de  $s_p$ . On peut plus généralement étudier les suites  $\varepsilon(P(n))$  où  $\varepsilon$  est reconnue par  $p$ -automate, et  $P$  un polynôme à valeurs entières ; le cas où  $P(X)$  est égal à  $aX+b$  a été traité ci-dessus, pour le cas général il convient de faire des hypothèses supplémentaires sur  $\varepsilon$  :

Prenons pour  $\varepsilon$  une suite reconnue par 2-automate telle que  $\varepsilon(2n+1)$  soit constamment égal à 1 (on peut se convaincre facilement qu'une telle suite existe, et peut être obtenue par exemple en "intercalant" des 1 aux places impaires d'une suite automatique), alors si  $P$  est le polynôme  $2X^2+2X+1$ , la suite  $\varepsilon(P(n))$  est constante et égale à 1.

De sorte qu'une conjecture raisonnable serait : soit  $\varepsilon$  une suite automatique telle qu'aucune des sous-suites  $\varepsilon(an+b)$  ne soit ultimement périodique, soit  $P$  un polynôme rationnel qui prend des valeurs entières sur les entiers et de degré au moins égal à 2, alors  $(\varepsilon(P(n)))_n$  n'est pas reconnue par automate.

Il serait aussi intéressant d'obtenir des résultats sur  $\varepsilon(f(n))$  suivant la "complexité" de l'application  $f$ , une telle notion restant à définir dans ce cadre.



## BIBLIOGRAPHIE

- [Ber 1] J. BERSTEL, Sur les mots sans carré définis par un morphisme, Springer Lecture Notes in Computer Science 71 (1979), 16-25.
- [Ber 2] J. BERSTEL, Mots sans carrés et morphismes itérés, Discrete Math. 29 (1980), 235-244.
- [Chr 1] G. CHRISTOL, Ensembles presque-périodiques k-reconnaissables, Theoretical Computer Science, t. 9 (1979), 141-145.
- [Chr 2] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401-419.
- [Cob 1] A. COBHAM, On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, Mathem. Syst. Theory, t. 3 (1969), 186-192.
- [Cob 2] A. COBHAM Uniform tag sequences, Mathem. Syst. Theory, t. 6 (1972), 164-192.
- [Con] J. H. CONWAY, Regular Algebra and finite machines, Chapman and Hall, 1971.
- [Coq] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDES FRANCE, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, t. 105 (1977), 369-384.
- [Dek 1] M. DEKKING, Transcendance du nombre de Thue-Morse, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 (1977), série A, 157-160.
- [Dek 2] M. DEKKING, The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 41 (1978), 221-239.
- [Eil] S. EILENBERG, Automata, Languages and Machines, vol. A, 1974, Academic Press.
- [Fif] Earl D. FIFE, Binary sequences which contain no BBb, Trans. Am. Math. Soc., vol. 261, 1, sept. 1980.
- [Got 1] W. H. GOTTSCHALK and G. A. HEDLUND, Topological dynamics, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, t. 36, 1955.
- [Got 2] W. H. GOTTSCHALK and G. A. HEDLUND, A characterization of the Morse minimal set, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 70-74.
- [Hed] G. A. HEDLUND. Remarks on the work of Axel Thue on sequences, Nordisk. Mat. Tidskr., t. 15 (1967), 148-150.

- [Kak 1] S. KAKUTANI, Ergodic theory of shift transformations, Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, (1965, Berkeley), p. 405-414, Berkeley, University of California Press.
- [Kak 2] S. KAKUTANI, Strictly ergodic symbolic dynamical systems, Proceedings of the 6th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, (1970, Berkeley), vol. 2, p. 319-326, Berkeley, University of California Press.
- [Kar 1] J. KARHUMÄKI, On strongly cube-free  $w$ -words generated by binary morphisms, Springer Lecture Notes in Computer Science 117 (1981), 182-189.
- [Kar 2] J. KARHUMÄKI, On cube-free  $w$ -words generated by binary morphisms, Discrete Applied Math. 5 (1983), 279-297.
- [Kea] M. KEANE, Generalized Morse sequences, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 10 (1968), 335-353.
- [Kle] B. G. KLEIN, Homomorphisms of symbolic dynamical systems, Math. Systems Theory 6 (1972), 107-122.
- [Mah] K. MAHLER, On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, J. Math. and Phys., t. 6 (1927), 158-163.
- [Mar 1] J. MARTIN, Generalized Morse sequences on  $n$  symbols, Proc. Am. Math. Soc., t. 54 (1976), 379-383.
- [Mar 2] J. MARTIN, The structure of generalized Morse minimal sets on  $n$  symboles, Trans. Am. Math. Soc., t. 232 (1977), 343-355.
- [Mor 1] M. MORSE, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Am. Math. Soc., t. 22 (1921), 84-100.
- [Mor 2] M. MORSE and G. A. HEDLUND, Symbolic dynamics, Amer. J. Math. 60 (1938), 815-866.
- [Mor 3] M. MORSE and G. A. HEDLUND, Unending Chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups, Duke math. J., 11 (1944), 1-7.
- [Que] M. QUEFFELEC, Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, t. 107 (1979), 385-421.
- [Rau] G. RAUZY, Propriétés statistiques de suites arithmétiques, Collection SUP, le Mathématicien, t. 15, 1976, Presses Univ. de France.

- [Sal] A. SALOMAA, Jewels of formal language theory, Computer Science Press, 1981.
- [Thu 1] A. THUE, Über unendliche Zeichenreihen, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-naturv. Klasse, Kristiana (1906), 1-22.
- [Thu 2] A. THUE, Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-naturv. Klasse, Kristiana (1912), 1-67.
- [Wie] N. WIENER, Generalized Harmonic Analysis, Acta Math., t. 55 (1930), 117-258.

DEUXIÈME PARTIE

---

ITÉRATIONS DE FONCTIONS ET SUITES AUTOMATIQUES

---



## Introduction

Pour étudier le comportement des itérées d'une fonction unimodale, on dispose de deux techniques (voir le livre de P. Collet et J.-P. Eckmann, [6]) :

- définir sur l'ensemble des fonctions unimodales une relation d'équivalence, appelée conjugaison topologique :  $f$  et  $g$ , deux fonctions de l'intervalle  $[0,1]$  dans lui-même, sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme  $h$  de  $[0,1]$  tel que :

$$g = h^{-1} \circ f \circ h \quad (\text{voir par exemple [6]}),$$

A une orbite suivant  $f$ , c'est-à-dire à l'ensemble des itérés  $f^n(x)$  correspond une orbite suivant  $g$ , et l'on peut donc connaître les propriétés des orbites  $f$  si on connaît une application  $g$  topologiquement conjuguée de  $f$ , et "simple" ;

- une deuxième technique, que nous allons utiliser ici, est d'associer à chaque orbite une suite à valeurs dans un ensemble fini, de sorte que l'étude de ces suites permette de prouver certaines propriétés du comportement itératif de la fonction, on pourra, dans cette optique, consulter [3], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [17], [18] et [19].

Nous nous proposons de montrer le rôle particulier joué par certaines de ces suites, baptisées  $q$ -miroirs, et parmi elles par la suite de Thue-Morse ; toutes ces suites sont reconnues par automates finis.

Donnons quelques définitions :

Soit  $c$  un réel de  $]0,1[$ , une fonction  $f$  est dite unimodale si elle est continue de  $[0,1]$  dans lui-même, avec  $f(1)=0$ ,  $f(c)=1$ , et si elle est strictement croissante sur  $[0,c[$  et strictement décroissante sur  $]c,1]$ .

L'itinéraire d'un point, noté  $\sigma f(x)$  est un ensemble constitué d'une ou deux suites à valeurs dans  $\{0,1\}$ , (pour une définition précise on se reportera à [8]), en général le  $n^{\text{ème}}$  terme de la suite  $\sigma f(x)$  vaut 0 ou 1 suivant que  $f^n(x)$  est inférieur à  $c$  ou supérieur à  $c$ .

---

\* Ceci est la première version d'une partie d'un article avec Michel Cosnard ([4] en préparation, voir aussi [3]).

On munit  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  de l'ordre lexicographique, noté  $\leq$ , induit par  $0 < 1$  et de la topologie associée.

De la même façon, et pour chaque entier  $p$ , l'ensemble  $\{0,1\}^p$  est muni de l'ordre lexicographique induit par  $0 < 1$ , et encore noté  $\leq$ .

On identifie  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  et on définit pour une suite  $A$  à valeurs dans  $\{0,1\}$  :

$$dA(n) = A(n+1) ,$$

$$\tau A(n) = \sum_{0 \leq j \leq n} A(j) ,$$

$$\bar{A}(n) = 1 + A(n) .$$

On peut alors énoncer le théorème, (voir [8], [9] et [4]) :

**THÉORÈME.** - a) Soit  $A$  dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  telle que  $A(0) = 1$  ;  $A(1) = 0$  ; alors :  
il existe une fonction  $f$  unimodale telle que  $A = \sigma f(1)$  si et seulement si :

$$\forall k \geq 0 , \quad \overline{\tau A} \leq d^k(\tau A) \leq \tau A .$$

b) Si  $A$  et  $f$  sont comme ci-dessus et si  $B$  est dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , alors :  
il existe un  $x$  dans  $[0,1]$  tel que  $B$  appartienne à  $\sigma f(x)$  si et seulement si :

$$\forall k \geq 0 , \quad \overline{\tau A} \leq d^k(\tau B) \leq \tau A \quad \text{et} \quad d^k \overline{\tau A} \leq \tau B .$$

L'application  $\tau$  étant bijective, on est donc amené à étudier les ensembles suivants :

$$\Gamma = \{A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} ; A(0) = A(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0 \quad \overline{A} \leq d^k A \leq A\} ,$$

et, pour chaque  $A$  dans  $\Gamma$ ,

$$\Gamma_A = \{B \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} , \quad \forall k \geq 0 \quad \overline{A} \leq d^k B \leq A\} .$$

La définition de ces ensembles ne fait plus intervenir que  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , nous allons maintenant les étudier par des méthodes "combinatoires", et, après cette étude, déduire des résultats obtenus pour  $\Gamma$  et les  $\Gamma_A$  un certain nombre de propriétés du comportement itératif des fonctions unimodales.

I. - Les suites q-miroirs1°) Définition

Soit  $q$  un entier supérieur ou égal à 2 ; une suite  $Q$  dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est dite  $q$ -miroir si :

$$\begin{cases} \forall \ell \geq 0 & \forall j \in [0, q2^\ell - 2] & Q(q2^\ell + j) = \bar{Q}(j) \quad , \\ \forall \ell \geq 0 & Q(q2^\ell - 1) = 1 \quad . \end{cases}$$

Remarque. - Cette notion est généralisée dans [1] au cas d'un alphabet à plus de deux lettres. Dans le cas d'un alphabet à deux lettres, si  $Q$  est  $q$ -miroir, la suite  $OQ$  est une suite de Morse généralisée au sens de [15].

2°) Propriétés

a) Soit  $s(n)$  la suite définie par :

$$\begin{aligned} s(n) &= 0 \quad \text{si la somme des chiffres de } n \text{ en base } 2 \text{ est paire,} \\ s(n) &= 1 \quad \text{si cette somme est impaire,} \end{aligned}$$

(  $s(n)$  est la suite de Thue-Morse, voir par exemple [5] ).

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $Q$  est  $q$ -miroir,

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \forall n \geq 0, \quad \forall u \in [0, q-2] & \quad Q(qn+u) = s(n) + Q(u) \pmod{2} \\ & \quad Q(qn+q-1) = s(n+1) \quad . \end{aligned}$$

b) Si  $Q$  est une suite  $q$ -miroir, elle est reconnue par un 2-automate, et non ultérieurement périodique.

Plus précisément, la série formelle  $\sum_0^{\infty} Q(k) X^k$  est algébrique de degré 2 sur le corps  $\mathbb{F}_2(X)$ .

c) Si  $Q$  est  $q$ -miroir, alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d^{q2^k} Q = \bar{Q} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} d^{3q2^k} Q = Q \quad .$$



a) Supposons d'abord  $Q$   $q$ -miroir, et montrons par récurrence sur  $k$  que :

$$\forall j \in [0, 2^k - 1], \forall u \in [0, q-2], \quad Q(qj+u) = s(j) + Q(u).$$

La propriété est triviale pour  $k=0$ , supposons-la vraie pour  $k$ , et soit  $j$  appartenant à l'intervalle  $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ ; alors :  $j = 2^k + a$ ,  $0 \leq a \leq 2^k - 1$ ,

$$\begin{aligned} Q(qj+u) &= Q(q \cdot 2^k + qa + u) = 1 + Q(qa + u), \quad (\text{car } qa + u \leq q \cdot 2^k - 2), \\ &= 1 + s(a) + Q(u), \quad (\text{hypothèse de récurrence}), \end{aligned}$$

et

$$s(j) + Q(u) = s(2^k + a) + Q(u) = 1 + s(a) + Q(u), \quad (\text{car } a \leq 2^k - 1).$$

Montrons alors par récurrence sur  $k$  que :

$$\forall j \in [0, 2^k - 1] \quad Q(qj+q-1) = s(j+1).$$

La propriété est triviale pour  $0$ , supposons la vraie pour  $k$ , et soit  $j$  dans l'intervalle  $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ ; on pose :

$$j = 2^k + a, \quad \text{avec } 0 \leq a \leq 2^k - 1,$$

et on distingue deux cas :

1) si  $a$  est strictement inférieur à  $2^k - 1$  :

$$\begin{aligned} Q(qj+q-1) &= Q(q \cdot 2^k + qa + q - 1) = 1 + Q(qa + q - 1), \quad (\text{car } qa + q - 1 \leq q \cdot 2^k - 2) \\ &= 1 + s(a+1), \quad (\text{hypothèse de récurrence}), \end{aligned}$$

et

$$s(j+1) = s(2^k + a + 1) = 1 + s(a+1), \quad (\text{car } a+1 \leq 2^k - 1).$$

2) si  $a$  est égal à  $2^k - 1$  :

$$\begin{aligned} Q(qj+q-1) &= Q(2^{k+1} - 1) = 1, \\ s(j+1) &= s(2^{k+1}) = 1. \end{aligned}$$

Montrons la réciproque ; on suppose que  $Q$  vérifie (ii).

Calculons d'abord les  $Q(q \cdot 2^k + j)$ , avec  $j$  dans  $[0, q \cdot 2^k - 2]$  : on écrit  $j = aq + b$ , avec  $b$  dans  $[0, q-1]$  et donc :  $a \leq 2^k - 1$  ; on distingue alors deux cas :

1) si  $b$  est inférieur ou égal à  $q-2$  :

$$Q(q \cdot 2^k + j) = Q(q(2^k + a) + b) = s(2^k + a) + Q(b) = 1 + s(a) + Q(b),$$

et

$$\bar{Q}(j) = \bar{Q}(aq + b) = 1 + s(a) + Q(b).$$

2) Si  $b$  est égal à  $q-1$ , alors  $a$  est inférieur ou égal à  $2^k-2$  et :

$$Q(q2^k+j) = Q(q(2^k+a)+q-1) = s(2^k+a+1) = 1+s(a+1),$$

et

$$\bar{Q}(j) = \bar{Q}(aq+q-1) = 1+s(a+1).$$

Calculons enfin  $Q(q2^k-1)$  :

$$Q(q2^k-1) = Q(q(2^k-1)+q-1) = s(2^k) = 1.$$

b) Si  $Q$  était ultérieurement périodique, il en serait de même pour  $Q(qn)$  donc pour  $s(n)$ , ce qui n'est pas (voir par exemple [5]). Il suffit alors de montrer que la série formelle  $\sum_0^{+\infty} Q(k) X^k$  est racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans  $\mathbb{F}_2(X)$ , l'automaticité résultant alors de [5].

Posons :

$$F(X) = \sum_0^{\infty} Q(k) X^k,$$

$$A(X) = \sum_0^{q-2} Q(u) X^u,$$

$$M(X) = \sum_0^{\infty} s(n) X^n = \sum_0^{\infty} s(n+1) X^{n+1} \quad (\text{car } s(0) \text{ est nul}),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} F(X) &= \sum_{u=0}^{q-2} \sum_{n=0}^{+\infty} Q(qn+u) X^{qn+u} + \sum_{n=0}^{+\infty} Q(qn+q-1) X^{qn+q-1} \\ &= \sum_{u=0}^{q-2} X^u \sum_{n=0}^{+\infty} (s(n)+Q(u)) X^{qn} + X^{q-1} \sum_{n=0}^{+\infty} s(n+1) X^{qn} \\ &= \sum_{u=0}^{q-2} X^u M(X^q) + \frac{A(X)}{1+X^q} + \frac{1}{X} M(X^q). \end{aligned}$$

D'où :

$$M(X^q) = \frac{X(X+1)}{X^q+1} F(X) + \frac{X(X+1)}{(X^q+1)^2} A(X).$$

Comme d'après [5]  $M$  vérifie :

$$(1+Y)^3 M^2(Y) + (1+Y)^2 M(Y) + Y = 0,$$

on a finalement :

$$X(X+1) \left( F(X) + \frac{A(X)}{1+X^q} \right)^2 + \left( F(X) + \frac{A(X)}{1+X^q} \right) + \frac{X^{q-1}}{(1+X)(1+X^q)} = 0.$$

c) Quel que soit  $j$  dans l'intervalle  $[0, q2^k - 2]$ , on a :

$$d^{q2^k} Q(j) = Q(q2^k + j) = \bar{Q}(j) ,$$

et

$$d^{3q2^k} Q(j) = Q(q2^{k+1} + q2^k + j) = \bar{Q}(q2^k + j) = Q(j) ,$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d^{q2^k} Q = \bar{Q} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} d^{3q2^k} Q = Q .$$

## II. - Le théorème fondamental de structure de $\Gamma$

### 1°) Énoncé

Définissons sur les suites périodiques de la forme  $(m0)^\omega$ , où  $m$  est un mot sur  $\{0,1\}$ , l'application  $\varphi$  par :

$$\varphi((m0)^\omega) = (m1\bar{m}0)^\omega .$$

Soit  $Q$  une suite de  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $q$ -miroir ( $q \geq 2$ ), et telle que  $Q(0) = Q(1) = 1$ .

Notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$ , de sorte que :

$$|m| = q-1 \quad \text{et} \quad Q = m1\bar{m}1\bar{m}0m1\dots ,$$

alors :

a) Si  $q$  est égal à 2,  $Q$  est dans  $\Gamma$  et  $0Q$  est la suite de Thue-Morse.

Si  $q$  est supérieur ou égal à 3,  $Q$  est dans  $\Gamma$  si et seulement si  $(m0)^\omega$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période  $q$ .

b) Si  $Q$  est dans  $\Gamma$ , il existe un intervalle de  $\Gamma$  d'extrémité droite  $Q$  discret dénombrable (et même ne contenant que des suites périodiques).

Plus précisément :

Si  $q = 2$  :  $\Gamma \cap [0^\omega, Q[ = \{ \varphi^n((1100)^\omega) ; n \geq 0 \}$ ,

et  $n \rightarrow \varphi^n((1100)^\omega)$  croît vers  $Q$ .

Si  $q \geq 3$  :  $\Gamma \cap [(m0)^\omega, Q[ = \{ \varphi^n((m0)^\omega) ; n \geq 0 \}$ ,

et  $n \rightarrow \varphi^n((m0)^\omega)$  croît vers  $Q$ .

c) Si  $Q$  est dans  $\Gamma$ , tout intervalle de  $\Gamma$  d'extrémité gauche  $Q$ , c'est-à-dire de la forme  $\Gamma \cap ]Q, R[$ , a la puissance du continu (si  $Q \neq R$ ).

La démonstration de ce théorème est technique et comporte plusieurs étapes. L'idée sous-jacente dans la plupart des démonstrations est que la condition :

$$\forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k A \leq A,$$

interdit à la suite  $A$  d'avoir de "trop nombreux degrés de liberté". L'exemple le plus frappant de cette rigidité est le lemme 2b ci-dessous.

1°) LEMME 1

a) Soient  $r$  et  $s$  deux mots non vides sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  tels que :

$$rs = s\bar{r}.$$

Alors il existe un mot  $x$  non vide, et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$c \neq 0, \quad r = (x\bar{x})^c, \quad s = (x\bar{x})^d x.$$

b) Soient  $y$  et  $z$  deux mots non vides sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  tels que :

$$yz = \bar{z}\bar{y}.$$

Alors il existe un mot  $x$  non vide, et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que

$$y = (x\bar{x})^c x, \quad z = \bar{x}(x\bar{x})^d.$$

a) On a en effet :

$$r(s\bar{s}) = s\bar{r}\bar{s} = \overline{s\bar{r}} = (s\bar{s})r.$$

Il existe donc, (voir [13], p. 9 par exemple), un mot  $z$  non vide et deux entiers non nuls  $a$  et  $b$  tels que :

$$r = z^a, \quad s\bar{s} = z^b.$$

Comme on a  $2|s| = b|z|$ ,  $b$  ou  $|z|$  est pair. Or si  $b$  est pair, disons  $b = 2e$ , on a :

$$s\bar{s} = z^e z^e, \quad \text{d'où } s = \bar{s}, \quad \text{ce qui n'est pas.}$$

Donc  $|z|$  est pair, posons  $z = xy$  avec  $|x| = |y|$ , alors :

$$s \bar{s} = (xy)^b = (xy)^{(b-1)/2} xy (xy)^{(b-1)/2},$$

d'où :

$$s = (xy)^{(b-1)/2} x \text{ et } \bar{s} = y(xy)^{(b-1)/2}$$

ainsi  $y = \bar{x}$  et finalement :

$$r = (x \bar{x})^a, \quad s = (x \bar{x})^{(b-1)/2} x$$

b) De l'égalité  $yz = \bar{z}\bar{y}$  on tire :

$$y(z\bar{z}) = \bar{z}\bar{y}\bar{z} = \bar{z}\bar{y}\bar{z} = (\bar{z}z)y.$$

On applique alors le lemme ci-dessous à  $\bar{z}z$  et  $y$ , il existe un mot  $x$  non vide et deux entiers  $a$  et  $b$  tels que :

$$a \neq 0, \quad \bar{z}z = (x \bar{x})^a, \quad y = (x \bar{x})^b x.$$

Or  $a$  est impair, sinon  $a = 2e$  et  $\bar{z}z = (x \bar{x})^e (x \bar{x})^e$ , d'où  $\bar{z} = z$ , ce qui n'est pas.

Donc on a :

$$\bar{z}z = (x \bar{x})^{(a-1)/2} x \bar{x} (x \bar{x})^{(a-1)/2},$$

d'où finalement :

$$y = (x \bar{x})^b x \text{ et } z = \bar{x} (x \bar{x})^{(a-1)/2}.$$

2°) LEMME 2

a) Soient  $A$  et  $B$  deux suites sur  $\{0, 1\}$  telles qu'il existe un mot non vide  $u$  avec :

$$A = u \bar{u} \dots,$$

et

$$\forall k \geq 0, \quad \bar{A} \leq d^k B \leq A.$$

Alors :

$$\text{si } B = u \dots, \quad \text{on a } B = (u \bar{u})^{(0)},$$

$$\text{si } B = \bar{u} \dots, \quad \text{on a } B = (\bar{u} u)^{(0)}.$$

b) Soit  $A$  une suite de  $\Gamma$  telle qu'il existe un mot non vide  $u$  avec

$$A = u \bar{u} \dots$$

Alors on a :

$$A = (u \bar{u})^{(j)}$$

a) Comme les suites  $d^k \bar{B}$  et  $\overline{d^k B}$  sont égales, il y a équivalence entre :

$$\forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k B \leq A,$$

et

$$\forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k \bar{B} \leq A.$$

Il suffit donc de montrer la première assertion, et pour cela de prouver que si  $B$  est égale à  $(u \bar{u})^n u \dots$ , alors  $B$  est égale à  $(u \bar{u})^{n+1} u \dots$ , ceci quel que soit l'entier  $n$ . Posons  $B = (u \bar{u})^n u v w \dots$ , avec  $|v| = |w| = |u|$ , alors :

$$d^{2n} |u| B = u v \dots \leq A = u \bar{u} \dots, \quad \text{d'où } v \leq \bar{u},$$

$$d^{(2n+1)} |u| B = v \dots \geq \bar{A} = \bar{u} \dots, \quad \text{d'où } v \geq \bar{u},$$

donc  $v = \bar{u}$  ; puis :

$$d^{(2n+2)} |u| B = w \dots \leq A = u \dots, \quad \text{d'où } w \leq u,$$

$$d^{(2n+1)} |u| B = \bar{u} w \dots \geq \bar{A} = \bar{u} u \dots, \quad \text{d'où } w \geq u,$$

et donc  $w = u$ .

b) Le résultat découle immédiatement du a).

3°) LEMME 3. - Soit  $Q$  une suite q-miroir dans  $\Gamma$  ( $q \geq 2$ ). Notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$ .

Si on a  $m = u v$ , avec  $u$  non vide, alors :

$$\bar{v} 1 \bar{u} < u v 1,$$

$$v 1 \bar{u} < u v 1,$$

$$\bar{v} 0 u < u v 1,$$

$$v 0 u < u v 1.$$

On commence par remarquer que :

$$Q = m 1 \bar{m} 1 \bar{m} 0 m 1 \dots,$$

d'où :

$$\begin{aligned} Q &= u v 1 \bar{u} \bar{v} 1 \bar{u} \bar{v} 0 u v 1 \dots, \\ \bar{Q} &= \bar{u} \bar{v} 0 u v 0 u v 1 \bar{u} \bar{v} 0 \dots. \end{aligned}$$

Comme  $Q$  est dans  $\Gamma$ , on a en particulier :

$$\begin{aligned} d^{2|u|+|v|+1} Q &= \bar{v} 1 \bar{u} \dots \leq Q = u v 1 \dots, \\ d^{3|u|+2|v|+2} Q &= \bar{v} 0 u \dots \geq \bar{Q} = \bar{u} \bar{v} 0 \dots, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \bar{v} 1 \bar{u} &\leq u v 1, \\ \bar{v} 0 u &\geq \bar{u} \bar{v} 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad v 1 \bar{u} \leq u v 1. \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{v} 0 u &< \bar{v} 1 \bar{u} \leq u v 1, \\ v 0 u &< v 1 \bar{u} \leq u v 1. \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à montrer qu'aucune des égalités  $\bar{v} 1 \bar{u} = u v 1$  et  $v 1 \bar{u} = u v 1$  ne peut avoir lieu.

Si on a  $v 1 \bar{u} = u v 1$ , on obtient, en appliquant le lemme 1a à  $u$  et  $(v 1)$ , l'existence d'un mot  $x$  non vide et d'un entier  $c$  non nul tels que :

$$u = (x \bar{x})^c, \quad \text{d'où} \quad Q = x \bar{x} \dots;$$

$Q$  est alors égale à  $(x \bar{x})^{(c)}$  d'après le lemme 2b, ce qui est impossible car on a montré qu'une suite  $q$ -miroir n'est pas périodique.

Si on a  $\bar{v} 1 \bar{u} = u v 1$ , on remarque que :

$$d^{2|u|+|v|+1} Q = \bar{v} 1 \bar{u} \bar{v} 0 u \dots \leq Q = u v 1 \bar{u} \bar{v} 1 \dots,$$

d'où :

$$\bar{v} 1 \bar{u} \bar{v} 0 u \leq u v 1 \bar{u} \bar{v} 1,$$

et donc

$$\bar{v} 0 u \leq \bar{u} \bar{v} 1.$$

Cette dernière inégalité s'écrit  $v 1 \bar{u} \geq u v 0$  et comme on vient de montrer l'inégalité stricte  $v 1 \bar{u} < u v 1$ , on a donc nécessairement  $v 1 \bar{u} = u v 0$ .

Mais cette égalité est incompatible avec l'hypothèse  $\bar{v} 1 \bar{u} = u v 1$ , car la dernière lettre de  $\bar{u}$  ne peut être à la fois 0 et 1.

4°) LEMME 4. - Soient  $x$  et  $y$  deux mots sur  $\{0,1\}$  tels que l'un au moins soit non vide, soit  $\ell$  un entier supérieur ou égal à 1. Si la suite  $A = ((xy)^\ell x 0)^\omega$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période égale à  $\ell |xy| + |x| + 1$ , on a :

$$1 \bar{x} \bar{y} < y x 1 .$$

Nous allons distinguer trois cas suivant que  $y$  est vide, commence par 0, ou commence par 1 :

Si  $y$  est vide : il s'agit de prouver l'inégalité  $1 \bar{x} < x 1$  ; or  $x$  n'est pas vide et  $Q$  commence par  $x$ , donc on a  $x = 1$  ou  $x = 1 1 \dots$  et l'inégalité à prouver est clairement vérifiée.

Si  $y$  s'écrit  $0 t$  : alors  $A = ((x 0 t)^\ell x 0)^\omega$  ; on a alors :

$$\text{pour } k = (\ell - 1)(|x| + |t| + 1) + |x| + 1, \quad d^k A = t x 0 \dots \leq A = x 0 t \dots,$$

$$\text{pour } k = \ell(|x| + |t| + 1), \quad d^k A = x 0 x 0 t \dots \leq A = x 0 t x 0 \dots,$$

d'où :

$$t x 0 \leq x 0 t$$

et

$$x 0 x 0 t \leq x 0 t x 0, \quad \text{c'est-à-dire } x 0 t \leq t x 0 .$$

Ainsi  $t x 0$  et  $x 0 t$  sont égaux et il existe (toujours d'après [13], p. 9 par exemple) un mot  $z$  non vide et deux entiers  $a$  et  $b$  tels que

$$x 0 = z^a \quad \text{et} \quad t = z^b, \quad \text{d'où} \quad A = (z^{\ell(a+b)+a})^\omega = z^\omega,$$

ce qui contredit la minimalité de la période  $\ell |xy| + |x| + 1$ , car  $a \geq 1$ , donc  $\ell(a+b)+a \geq 2$ .

Si  $y$  s'écrit  $1 t$  : alors  $A = ((x 1 t)^\ell x 0)^\omega$  ;

$$\text{pour } k = (\ell - 1)(|x| + |t| + 1) + |x| + 1, \quad \text{on a } d^k A = t x 0 \dots \geq \bar{A} = \bar{x} 0 \bar{t} \dots,$$

d'où

$$t x 0 \geq \bar{x} 0 \bar{t}$$

et on en déduit :

$$1 \bar{x} \bar{y} = 1 \bar{x} 0 \bar{t} \leq 1 t x 0 < 1 t x 1 = y x 1 .$$



5°) LEMME 5. - Soit  $A = (m \ 0)^{(u)}$  une suite de  $\Gamma$ , de plus petite période  $|m|+1$ ; si  $m$  est égal à  $uv$  avec  $u$  non vide, on a :

$$v \ 1 \ \bar{u} < u \ v \ 1 ,$$

$$\bar{v} \ 0 \ u < u \ v \ 1 .$$

a) Montrons la première inégalité ; nous allons distinguer deux cas :

1er cas :  $|u| \geq |v|$

Posons  $u = xy$ , où  $|x| = |v|$ , alors :

$$A = (x \ y \ v \ 0)^{(u)} \quad \text{et} \quad d^{|xy|} A = v \dots \leq A = x \dots ,$$

on a donc

$$v \leq x .$$

Si  $v$  est strictement inférieur à  $x$ , alors :

$$v \ 1 \ \bar{u} = v \ 1 \ \bar{x} \ \bar{y} < x \ y \ v \ 1 = u \ v \ 1 .$$

Si  $v$  est égal à  $x$ , alors  $A$  est égale à  $(x \ y \ x \ 0)^{(u)}$ , et d'après le lemme 4 on a :

$$1 \ \bar{x} \ \bar{y} < y \ x \ 1 ,$$

d'où :

$$v \ 1 \ \bar{u} = x \ 1 \ \bar{x} \ \bar{y} < x \ y \ x \ 1 = u \ v \ 1 .$$

2e cas :  $|u| < |v|$

Posons  $v = x_1 \dots x_\ell y$  où  $|x_j| = |u|$  quel que soit  $j$  et  $|y| < |u|$ .

Alors :

$$A = (u \ x_1 \dots x_\ell \ y \ 0)^{(u)} .$$

En écrivant l'inégalité  $d^k A \leq A$  pour  $k = |u|, |u| + |x_1|, |u| + |x_1| + |x_2|, \dots$ ,

on obtient :

$$\forall j \in [1, \ell] , \quad x_j \leq u .$$

S'il existe un indice  $j$  pour lequel  $x_j < u$ , on définit  $i$  par :

si  $x_1 = u$ ,  $i = \inf \{ j ; x_j < u \}$ , autrement dit

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = u , \quad x_i < u ;$$

si tous les  $x_j$  sont strictement inférieurs à  $u$  on pose  $i = 1$ .

alors :

$$v \perp \bar{u} = x_1 \dots x_\ell \ y \perp \bar{u} = u^{i-1} x_1 \dots x_\ell \ y \perp \bar{u} < u^{i-1} u x_1 \dots x_\ell \ y \perp$$

et ce dernier mot n'est autre que  $u \vee v \perp$ .

Si au contraire tous les  $x_j$  sont égaux à  $u$ , alors on a :

$$A = (u^{\ell+1} \ y \ 0)^{\omega}, \quad \text{avec } |y| < |u|.$$

Posons  $u = st$ , avec  $|s| = |y|$ , d'où :

$$A = ((st)^{\ell+1} \ y \ 0)^{\omega}.$$

De l'inégalité  $d^{(\ell+1)}(|s|+|t|) A = y \dots \leq A = s \dots$ , on déduit  $y \leq s$  ;

si  $y$  est strictement inférieur à  $s$ , alors :

$$v \perp \bar{u} = (s \ t)^{\ell} \ y \ \perp \ \bar{s} \ \bar{t} < (s \ t)^{\ell} \ s \ t \ y \ \perp = u \vee v \perp$$

si  $y$  est égal à  $s$ , alors :

$$A = ((y \ t)^{\ell+1} \ y \ 0)^{\omega}, \quad \text{d'où } \perp \bar{y} \ \bar{t} < t \ y \ \perp \quad (\text{lemme 4})$$

et donc

$$v \perp \bar{u} = (y \ t)^{\ell} \ y \ \perp \ \bar{y} \ \bar{t} < (y \ t)^{\ell} \ y \ t \ y \ \perp = u \vee v \perp.$$

b) Montrons enfin la seconde inégalité :  $\bar{v} \ 0 \ u < u \vee v \perp$ . Nous allons encore distinguer deux cas :

1er cas :  $|u| \geq |v|$

Posons  $u = xy$  où  $|x| = |v|$ , alors :

$$A = (x \ y \ v \ 0)^{\omega} \quad \text{et} \quad d^{|xy|} A = v \dots \geq \bar{A} = \bar{x} \dots$$

d'où l'on déduit  $v \geq \bar{x}$  c'est-à-dire  $\bar{v} \leq x$ .

Si  $\bar{v}$  est strictement inférieur à  $x$ , on a :

$$\bar{v} \ 0 \ u = \bar{v} \ 0 \ x \ y < x \ y \ v \ \perp = u \vee v \perp.$$

Si  $\bar{v}$  est égal à  $x$ , alors :

$$A = (x \ y \ \bar{x} \ 0)^{\omega}.$$

Comme on a l'inégalité :

$$d^{|xy|} A = \bar{x} 0 \dots \geq \bar{A} = \bar{x} \bar{y} x \dots$$

et que  $y$  n'est pas vide (sinon  $x$  est non vide,  $A = x \bar{x} \dots$ , d'où  $A = (x \bar{x})^{(u)}$  d'après le lemme 2 et  $A$  serait de période  $2|x|$ , alors que sa plus petite période est par hypothèse  $|m|+1$  c'est-à-dire ici  $2|x|+1$ ), le mot  $y$  commence nécessairement par 1.

Posons  $y = 1z$ , on a donc :

$$\bar{v} 0 u = x 0 u = x 0 x 1 z \quad \text{et} \quad u v 1 = x 1 z \bar{x} 1,$$

d'où  $\bar{v} 0 u < u v 1$ .

2e cas :  $|u| < |v|$

Posons  $v = tz$ , avec  $|t| = |u|$ ; alors :

$$A = (u t z 0)^{(u)}, \quad d^{|u|} A = t \dots \geq \bar{A} = \bar{u} \dots,$$

d'où  $\bar{t} \leq u$ .

Si  $\bar{t}$  est strictement inférieur à  $u$ , alors :

$$\bar{v} 0 u = \bar{t} \bar{z} 0 u < u t z 1 = u v 1.$$

Si  $\bar{t}$  est égal à  $u$ , alors :

$$A = (u \bar{u} z 0)^{(u)} = u \bar{u} \dots, \quad \text{d'où} \quad A = (u \bar{u})^{(u)} \quad (\text{lemme 2}),$$

ce qui contredit la minimalité de la période de  $A$ .

6°) PROPOSITION 1.- Soit  $Q$  une suite de  $\Gamma$  q-miroir, avec  $q \geq 3$ .

Notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$ .

Alors la suite  $(m 0)^{(u)}$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période  $|m|+1 = q$ .

Comme  $q$  est supérieur ou égal à 3, la suite  $A = (m 0)^{(u)}$  commence par 1 1 comme  $Q$ . Comme  $A$  est  $q$ -périodique, il suffit de prouver les inégalités :

$$\forall k \in [1, q-1] \quad \bar{A} \leq d^k A < A.$$

Or, si  $k$  est compris entre 1 et  $q-1$ , il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que :

$$u \neq \emptyset, \quad m = uv, \quad d^k A = v0(uv0)^{(m)}.$$

D'après le lemme 3 on a  $v0u < uv1$ , d'où  $v0u \leq uv0$ . Si cette inégalité est stricte, on a bien :

$$d^k A = v0u \dots < A = uv0 \dots.$$

Si au contraire on a l'égalité  $v0u = uv0$ , les mots  $(v0)$  et  $u$  commutent, et il existe un mot non vide  $z$  et deux entiers non nuls  $a$  et  $b$  tels que :

$$u = z^a, \quad v0 = z^b.$$

Mais alors  $z$  se termine par 0, soit  $z = x0$ , et donc :

$$u = (x0)^a, \quad v = (x0)^{b-1}x, \quad \text{d'où} \quad Q = (x0)^{a+b-1}x1 \dots,$$

ceci est impossible car on aurait alors, pour  $j = (|x| + 1)(a+b-1)$ ,

$$d^j Q = x1 \dots > Q = x0 \dots.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3, on a :

$$\bar{v}1\bar{u} < uv1, \quad \text{et donc} \quad \bar{v}1\bar{u} \leq uv0, \quad \text{ou encore} \quad v0u \geq \bar{u}\bar{v}1.$$

Si cette dernière inégalité est stricte, on a bien :

$$d^k A = v0u \dots > \bar{A} = \bar{u}\bar{v}1 \dots.$$

Si au contraire on a l'égalité  $(v0)u = \bar{u}(\bar{v}1)$ , il existe, d'après le lemme 1b, un mot  $x$  non vide et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$v0 = (x\bar{x})^c x, \quad u = \bar{x}(x\bar{x})^d,$$

d'où

$$uv0 = (\bar{x}x)^{c+d+1} = (\bar{x}x)^{c+d} \bar{x}x.$$

Si  $c+d$  n'est pas nul, alors  $uv$  commence par  $\bar{x}x$  donc  $Q$  aussi et  $Q$  est égale à  $(\bar{x}x)^{(m)}$  (lemme 2) ce qui n'est pas.

Donc  $c$  et  $d$  sont nuls, d'où  $v0 = \bar{u}$  et par conséquent :

$$A = (u\bar{u})^{(m)}, \quad d^k A = \bar{u}(u\bar{u})^{(m)} = \bar{A}, \quad \text{ce qui achève la démonstration de}$$

cette proposition.

7°) PROPOSITION 2. - Soit  $A = (m\ 0)^{\omega}$  une suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $|m| + 1$ , alors :

- quel que soit  $n$ , la suite  $\varphi^n(A)$  est dans  $\Gamma$ , et de plus petite période  $2^n(|m| + 1)$  ;
- la suite  $n \rightarrow \varphi^n(A)$  croît vers une limite  $Q$  qui est  $q$ -miroir (pour  $q = |m| + 1$ ) et dans  $\Gamma$  ;
- quel que soit  $n$ , on a :

$$\Gamma \cap [\varphi^n(A), \varphi^{n+1}(A)] = \{\varphi^n(A), \varphi^{n+1}(A)\} .$$

Pour prouver la première assertion, il suffit de la montrer pour  $n$  égal à 1 . Comme on a  $d^{|m|+1} \varphi(A) = d^{|m|+1} (m\ 1\ \bar{m}\ 0)^{\omega} = \overline{\varphi(A)}$ , il suffit de montrer :

$$\forall k \in [1, |m|] \quad \overline{\varphi(A)} < d^k \varphi(A) < \varphi(A) .$$

Pour un tel  $k$  il existe deux mots  $u$  et  $v$ , tels que :

$$u \neq \emptyset, \quad m = uv, \quad \varphi(A) = (uv\ 1\ \bar{u}\ \bar{v}\ 0)^{\omega}$$

et

$$d^k \varphi(A) = v\ 1\ (\bar{u}\ \bar{v}\ 0\ uv\ 1)^{\omega} .$$

D'après le lemme 5 on a :

$$\bar{u}\ \bar{v}\ 0 < v\ 1\ \bar{u} < uv\ 1$$

d'où :

$$\overline{\varphi(A)} = \bar{u}\ \bar{v}\ 0 \dots < d^k \varphi(A) = v\ 1\ \bar{u} \dots < \varphi(A) = uv\ 1 \dots .$$

La croissance de la suite  $n \rightarrow \varphi^n(A)$  est claire. Par ailleurs on vérifie aisément par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall j \in [0, q\ 2^n - 2] \quad \varphi^n A(j) = \varphi^{n+1} A(j) .$$

Donc la suite  $n \rightarrow \varphi^n(A)$  tend vers une limite  $Q$ .  $Q$  commence par  $m$  comme  $A$  donc par  $1\ 1$ , de plus les applications  $d$  et  $\bar{\phantom{x}}$  sont continues, donc  $Q$  est dans  $\Gamma$  ; enfin  $Q$  est  $(|m| + 1)$ -miroir par construction.

Montrons enfin la dernière assertion :

Il suffit de prouver que si  $B$  est une suite de  $\Gamma$ ,  $m$  un mot non vide, avec :

$$(m\ 0)^{\omega} \leq B \leq (m\ 1\ \bar{m}\ 0)^{\omega} ,$$

alors  $B$  est égale à  $(m\ 0)^{\omega}$  ou à  $(m\ 1\ \bar{m}\ 0)^{\omega}$ .

Nous allons distinguer deux cas suivant que  $B$  commence par  $m 0$  ou par  $m 1$  :

Si  $B$  commence par  $m 0$ , montrons que :

$$t \geq 1 \text{ et } B = (m 0)^t \dots \Rightarrow B = (m 0)^{t+1} \dots,$$

(ce qui impliquera que  $B$  est égale à  $(m 0)^{\omega}$ ).

Posons :  $B = (m 0)^t x a \dots$  où  $|x| = |m|$ ,  $a \in \{0, 1\}$ . On écrit alors successivement :

$$(m 0)^{\omega} \leq B = (m 0)^t x a \dots, \quad \text{d'où } m 0 \leq x a,$$

$$d^{t(|m|+1)} B = x a \dots \leq B = m 0 \dots, \quad \text{d'où } x a \leq m 0,$$

donc  $x a$  est égal à  $m 0$  et  $B$  à  $(m 0)^{t+1} \dots$ .

Si  $B$  commence par  $m 1$ , posons  $B = m 1 x a \dots$ ,  $|x| = |m|$ ,  $b \in \{0, 1\}$ .

On écrit alors :

$$B = m 1 x a \dots \leq (m 1 \bar{m} 0)^{\omega}, \quad \text{d'où } x a \leq \bar{m} 0,$$

$$d^{(|m|+1)} B = x a \dots \geq \bar{B} = \bar{m} 0 \dots, \quad \text{d'où } x a \geq \bar{m} 0,$$

donc  $x a$  est égal à  $\bar{m} 0$ , et  $B$  à  $m 1 \bar{m} 0 \dots$ ; d'après le lemme 2,  $B$  est donc égale à  $(m 1 \bar{m} 0)^{\omega}$ .

8°) PROPOSITION 3. - Soit  $Q$  une suite  $q$ -miroir de  $\Gamma$ ,  $q \geq 2$ . Alors, quelle que soit la suite  $R$  strictement supérieur à  $Q$ , l'intersection de  $\Gamma$  et de l'intervalle  $]Q, R[$  a la puissance du continu.

Nous allons montrer que, pour une suite  $Q$   $q$ -miroir de  $\Gamma$  ( $q \geq 2$ ), il existe une infinité continue de suites de  $\Gamma$  strictement supérieures à  $Q$ , et qui coïncident avec  $Q$  sur  $[0, 3q-2]$ , ce qui impliquera le résultat puisqu'une suite  $q$ -miroir est aussi  $2^a q$ -miroir, pour tout entier  $a$ . Soit donc  $Q$   $q$ -miroir dans  $\Gamma$ , notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$  de sorte que :

$$|m| = q-1 \quad \text{et} \quad Q = m 1 \bar{m} 1 \bar{m} 0 m 1 \dots$$

Pour toute suite d'entiers  $a_i$  valant chacun 1 ou 2, on définit  $A$  par :

$$A = m 1 (\bar{m} 1)^3 (\bar{m} 0 m 1 (\bar{m} 1)^{a_1}) (\bar{m} 0 m 1 (\bar{m} 1)^{a_2}) (\bar{m} 0 m 1 (\bar{m} 1)^{a_3}) \dots$$

Pour chaque choix de la suite  $(a_i)$ , on définit ainsi une suite  $A$  strictement supérieure à  $Q$  ( $A$  commence par  $m 1 \bar{m} 1 \bar{m} 1$  et  $Q$  par  $m 1 \bar{m} 1 \bar{m} 0$ ), qui coïncide avec  $Q$  sur  $[0, 3q-2]$ , et qui commence par  $1 1$ ; l'ensemble de ces suites a la puissance du continu, il suffit de prouver que pour une telle suite :

$$\forall k \geq 1 \quad \bar{A} \leq d^k A \leq A .$$

On va distinguer deux cas :

1) Si  $k$  est un multiple non nul de  $q$  : alors  $A$  commence par  $\bar{m} 1$  ou  $\bar{m} 0 m 1$  ou  $m 1 (\bar{m} 1)^{a_i} \bar{m} 0$ , où  $a_i$  vaut 1 ou 2 ; or  $A$  commence par  $m 1 (\bar{m} 1)^3$  et  $\bar{A}$  par  $\bar{m} 0 m 0$  ; on a donc dans tous les cas :

$$\bar{A} < d^k A < A .$$

2) Si  $k$  n'est pas multiple de  $q$  : il existe alors deux mots  $u$  et  $v$  tels que  $u \neq \emptyset$ ,  $m = uv$ ,  $d^k A$  commence par  $v 1 \bar{u}$  ou  $\bar{v} 1 \bar{u}$  ou  $\bar{v} 0 u$ . Or  $A$  commence par  $u v 1$  et  $\bar{A}$  par  $\bar{u} \bar{v} 0$ .

D'après le lemme 3 on a les inégalités :

$$\bar{u} \bar{v} 0 < \bar{v} 0 u < \bar{v} 1 \bar{u} < u v 1 ,$$

et

$$\bar{u} \bar{v} 0 < v 1 \bar{u} < u v 1 ,$$

d'où dans tous les cas :

$$\bar{A} < d^k A < A .$$

### 9°) Fin de la preuve du théorème fondamental

Pour  $q$  supérieur ou égal à 3, le théorème se déduit immédiatement des propositions 1, 2, 3 ci-dessus.

Pour  $q$  égal à 2,  $Q$  est égale à  $1 1 0 1 0 0 1 1 \dots$  et  $0 Q$  est la suite de Thue-Morse (c'est une conséquence facile de I.2° a). Or le plus petit élément de  $\Gamma$  est la suite  $(1 1 0 0)^{\omega}$  (les mots de quatre lettres commençant par  $1 1$  sont supérieurs à  $1 1 0 0$ , si une suite de  $\Gamma$  commence par  $1 1 0 0$ , elle vaut  $(1 1 0 0)^{\omega}$  d'après le lemme 2, enfin  $(1 1 0 0)^{\omega}$  est bien un élément de  $\Gamma$ ).

Donc :

$$\Gamma \cap [0^{\omega}, Q[ = \Gamma \cap [(1 1 0 0)^{\omega}, Q[ .$$

On remarque alors que  $Q$  est la suite 4-miroir définie par  $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n((1\ 1\ 0\ 0)^w)$ ,  $Q$  est donc dans  $\Gamma$  et le théorème se déduit du cas  $q$  supérieur ou égal à 3.

### III. - Le théorème fondamental de structure des $\Gamma_A$

#### 1°) Énoncé

Soit  $Q$  une suite de  $\Gamma$   $q$ -miroir, avec  $q \geq 3$ . On note  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$ .

a) Si  $A$  est une suite de  $\Gamma$  dans l'intervalle  $[(m\ 0)^w, Q[$ , et si  $B$  est dans  $\Gamma_A$  alors :

- ou bien  $B$  est dans  $\Gamma_{(m\ 0)^w}$ ,

- ou bien il existe un entier positif  $j$  et un entier  $\ell$  supérieur ou égal à 1

tels que :

$$d^j B = \varphi^\ell((m\ 0)^w)$$

(en particulier  $B$  est ultérieurement périodique de période  $2^\ell(|m|+1)$ ).

b) Quelle que soit la suite  $R$  strictement inférieure à  $Q$ , l'ensemble  $\Gamma_Q \cap ]R, Q[$  a la puissance du continu.

COROLLAIRE. - Soit  $L$  la suite 2-miroir de  $\Gamma$  (rappelons que  $OL$  est la suite de Thue-Morse), alors quelle que soit la suite  $A$  de  $\Gamma$  :

- si  $A$  est strictement inférieure à  $L$ ,  $\Gamma_A$  est dénombrable (et même toute suite de  $\Gamma_A$  est ultérieurement périodique) ;

- si  $A$  est supérieure ou égale à  $L$ ,  $\Gamma_A$  a la puissance du continu.

#### 2°) Démonstration de la partie a) du théorème

Supposons que  $B$  n'appartienne pas à  $\Gamma_{(m\ 0)^w}$ .

Soit  $\mathcal{E} = \{d^k B ; k \geq 0\} \cup \{d^\ell \bar{B} ; \ell \geq 0\}$  et soit  $S = \sup \mathcal{E}$ .

Il existe une suite  $n_k$  d'entiers et une suite de suites  $E_k$  valant chacune  $0^w$  ou  $1^w$  telles que :



$$S = \lim_{k \rightarrow +\infty} d^{n_k}(E_k + B)$$

(si  $S$  est dans  $\mathcal{E}$ ,  $(n_k)$  est une suite constante ainsi que la suite  $k \rightarrow E_k$ ).

Alors :

$$\forall \ell \geq 0 \quad d^\ell S = d^\ell \lim_k d^{n_k}(E_k + B) = \lim_k d^{\ell+n_k}(B + E_k) \leq \sup \mathcal{E} = S,$$

$$d^\ell \bar{S} = d^\ell \overline{\lim_k d^{n_k}(E_k + B)} = \lim_k d^{\ell+n_k}(B + \bar{E}_k) \leq \sup \mathcal{E} = S;$$

de plus  $S$  commence par  $11$  : en effet,  $B$  n'est pas dans  $\Gamma_{(m\ 0)^w}$ , donc ou bien il existe un entier  $k$  tel que  $d^k B > (m\ 0)^w$ , d'où  $d^k B = 11\dots$ , ou bien il existe un entier  $k$  tel que  $d^k B < (\bar{m}\ 1)^w$ , d'où  $d^k B = 00\dots$  et  $d^{k+\bar{m}} = 11\dots$ ; par conséquent  $S$  est dans  $\Gamma$ , de plus quel que soit  $k$  on a  $d^k B \leq S$  et  $d^k \bar{B} \leq S$ , d'où  $\bar{S} \leq d^k B \leq S$ , et donc  $B$  est dans  $\Gamma_S$ .

Enfin on a  $(m\ 0)^w < S \leq A < Q$ , car  $B$  n'appartient pas à  $\Gamma_{(m\ 0)^w}$  et appartient à  $\Gamma_A$ .

On déduit alors du théorème fondamental de structure de  $\Gamma$  (II, 1°) qu'il existe un entier  $\ell$  supérieur ou égal à 1 tel que :  $S = \varphi^\ell((m\ 0)^w)$ ; il existe donc un mot non vide  $x$  tel que :  $S = (x\ 1\ \bar{x}\ 0)^w$ .

Comme  $d^{n_k}(E_k + B)$  tend vers  $S$ , il existe un entier  $j$  tel que  $d^{n_j}(E_j + B)$  commence par  $x\ 1\ \bar{x}\ 0$ ; or il est clair que

$$\forall r \geq 0, \quad \bar{S} \leq d^r(d^{n_j}(E_j + B)) \leq S.$$

D'après le lemme 2a du paragraphe II ci-dessus, on a :

$$d^{n_j}(E_j + B) = (x\ 1\ \bar{x}\ 0)^w = S = \varphi^\ell((m\ 0)^w),$$

donc :

$$\text{si } E_j \text{ est égale à } 0^w : \quad d^{n_j} B = \varphi^\ell((m\ 0)^w),$$

$$\text{si } E_j \text{ est égale à } 1^w : \quad d^{n_j} \bar{B} = (x\ 1\ \bar{x}\ 0)^w,$$

$$\text{d'où } d^{n_j} B = (\bar{x}\ 0\ x\ 1)^w,$$

$$\text{donc } d^{n_j + |x| + 1} B = (x\ 1\ \bar{x}\ 0)^w = \varphi^\ell((m\ 0)^w).$$

3°) LEMME 7. - Définissons les mots  $P_\ell$  par :

$$P_0 = m, \quad \text{et} \quad \forall \ell \geq 0 \quad P_{\ell+1} = P_\ell \ 1 \ \overline{P_\ell}.$$

Alors si  $Q$  est  $q$ -miroir et  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$  :

quel que soit  $\ell$  positif, on a :

$$|P_\ell| = q \ 2^\ell - 1 \quad \text{et} \quad Q = P_\ell \ 1 \ \dots \ ;$$

la suite  $\overline{Q}$  est égale à  $\overline{m} \ 0 \ P_0 \ 0 \ P_1 \ 0 \ P_2 \ 0 \ \dots$  .

La première assertion se montre par récurrence sur  $\ell$ , en utilisant le caractère  $q$ -miroir de la suite  $Q$ .

Pour démontrer la seconde assertion, on écrit :

$$\forall \ell \geq 0, \quad \forall j \in [0, q \ 2^\ell - 2], \quad d^{q \ 2^\ell} \overline{Q}(j) = \overline{Q}(q \ 2^\ell + j) = Q(j)$$

d'où  $d^{q \ 2^\ell} \overline{Q}$  commence par  $P_\ell \ \dots$  .

De plus :  $d^{q \ 2^\ell} \overline{Q}(q \ 2^\ell - 1) = \overline{Q}(q \ 2^{\ell+1} - 1) = 0$ , donc :  $d^{q \ 2^\ell} \overline{Q}$  commence par  $P_\ell \ 0 \ \dots$  .

On en déduit immédiatement l'égalité :

$$\overline{Q} = \overline{m} \ 0 \ P_0 \ 0 \ P_1 \ 0 \ P_2 \ 0 \ \dots$$

4°) Démonstration de la partie b) du théorème

Nous allons montrer que si  $Q$  est  $q$ -miroir dans  $\Gamma$ , avec  $q$  supérieur ou égal à 3, alors il existe une infinité continue de suites  $A$  dans  $\Gamma_Q$ , qui coïncident avec  $Q$  sur  $[0, q-2]$  et strictement inférieures à  $Q$ .

Le résultat annoncé se déduit alors du fait qu'une suite  $q$ -miroir est aussi  $2^a q$ -miroir, pour tout entier  $a$ . Pour toute suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'entiers tels que

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots,$$

on définit la suite  $A$  par :

$$A = P_{n_0} \ 0 \ P_{n_1} \ 0 \ P_{n_2} \ 0 \ \dots$$

Cette suite coïncide avec  $Q$  sur  $[0, q-2]$ , et est strictement inférieure à  $Q$ . Il suffit alors de montrer qu'une telle suite est dans  $\Gamma_Q$  puisque l'ensemble des suites d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , strictement croissantes et telles que  $n_0$  soit nul a la puissance du continu.

Montrons d'abord :  $\forall k \geq 0, d^k A \leq Q$

Si  $k$  est dans l'intervalle  $[0, q-1]$ , on remarque que

$$A = P_0 0 \dots, Q = P_0 1 \dots, \text{ et } |P_0| = q-1$$

donc :

$$\forall k \in [0, q-1], d^k A < d^k Q \leq Q.$$

Si  $k$  est supérieur ou égal à  $q$ , il existe un  $r$  supérieur ou égal à 1 tel que  $k$  appartienne à  $[c(r-1), c(r)-1]$ , où l'on a posé

$$c(r) = q(2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_r}).$$

Or :

$$d^{c(r-1)} A = P_{n_r} 0 \dots, Q = P_{n_r} 1 \dots, \text{ et } |P_{n_r}| = q2^{n_r} - 1.$$

Ainsi, quel que soit  $j$  dans  $[0, q2^{n_r}-1]$ , on a :

$$d^{c(r-1)+j} A < d^j Q < Q, \text{ d'où } d^k A < Q.$$

Montrons alors :  $\forall k \geq 0, d^k A \geq \bar{Q}$

La propriété est triviale pour  $k = 0$ .

Si  $k$  appartient à  $[1, q-1]$ , il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que  $u \neq \emptyset, m = uv, d^k A = v 0 u \dots$ ; d'après le lemme 3 du II ci-dessus, on a :

$$\bar{v} 1 \bar{u} < u v 1, \text{ d'où } v 0 u > \bar{u} \bar{v} 0,$$

d'où l'on tire :

$$d^k A = v 0 u \dots > \bar{Q} = \bar{u} \bar{v} 0 \dots$$

Si  $k$  est supérieur ou égal à  $q$ , il existe un entier  $r$  supérieur ou égal à 1 tel que  $k$  appartienne à  $[c(r-1), c(r)-1]$ , où comme précédemment on a posé :

$$c(r) = q(2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_r}).$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- si on a  $d^{c(r-1)} A = d^{q2^{n_r}} \bar{Q}$  :

alors  $d^k A = d^{q2^{r+k-c(r-1)}} \bar{Q} \geq \bar{Q}$ , car  $Q$  est dans  $\Gamma$ .

- Si on a  $d^{c(r-1)} A \neq d^{q2^{n_r}} \bar{Q}$  :

alors  $d^{c(r-1)} A = P_{n_r}^0 P_{n_{r+1}}^0 \dots$ , et  $d^{q2^{n_r}} \bar{Q} = P_{n_r}^0 P_{n_{r+1}}^0 \dots$ .

Comme la suite  $(n_j)_j$  est strictement croissante et que les suites  $(n_{r+j})_j$  et  $(n_{r+j})_j$  sont distinctes, il existe un entier  $\ell$  tel que :

$$\forall j \in [0, \ell], \quad n_{r+j} = n_r + j \quad \text{et} \quad n_{r+\ell+1} > n_r + \ell + 1.$$

Notons  $Z$  le mot  $P_{n_r}^0 P_{n_{r+1}}^0 \dots P_{n_{r+\ell}}^0$ , alors :

$$d^{c(r-1)} A = Z P_{n_{r+\ell+1}}^0 \dots \quad \text{et} \quad d^{q2^{n_r}} \bar{Q} = Z P_{n_{r+\ell+1}}^0 \dots$$

Comme  $n_{r+\ell+1}$  est strictement supérieur à  $n_r + \ell + 1$ , le mot  $P_{n_{r+\ell+1}}^0$  commence par  $P_{n_r + \ell + 1}^0 a$ , où :

$$a = Q(q 2^{n_r + \ell + 1} - 1) = 1.$$

On en déduit facilement que, quel que soit  $j$  dans  $[0, q2^{n_r} - 1]$ , on a :

$$d^{c(r-1)+j} A > d^{q2^{n_r+j}} \bar{Q} \geq \bar{Q} \quad (\text{car } \bar{Q} \text{ est dans } \Gamma),$$

et donc  $d^k A \geq \bar{Q}$ .

### 5°) Preuve du corollaire

Comme  $L$  est aussi la suite 4-miroir telle que le mot  $m = L(0) L(1) L(2)$  soit égal à  $110$ , on déduit du théorème pour le cas où  $q$  est supérieur ou égal à 3 :

Si  $A$  est une suite de  $\Gamma$  telle que  $A \geq L$ , alors comme  $\Gamma_A$  contient  $\Gamma_L$ ,  $\Gamma_A$  a la puissance du continu.

Si  $A$  est une suite de  $\Gamma$  dans l'intervalle  $[(1100)^u]$ ,  $L[$  et si  $B$  est dans  $\Gamma_A$ , alors :

- ou bien  $B$  est dans  $\Gamma_{(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}}$ ,

- ou bien il existe un entier  $j$ , et un entier  $\ell$  supérieur ou égal à 1 tel que :

$$d^j B = \varphi^\ell((1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}).$$

Comme on l'a vu  $(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}$  est la plus petite suite de  $\Gamma$ , donc :

$$A \in \Gamma \cap [(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}, L[ \Leftrightarrow A \in \Gamma \text{ et } A < L.$$

Il suffit donc pour conclure de prouver que  $\Gamma_{(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}}$  est constitué uniquement de suites ultérieurement périodiques. Soit donc  $B$  une suite telle que :

$$\forall k \geq 0 \quad (0\ 0\ 1\ 1)^{\omega} \leq d^k B \leq (1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}.$$

Supposons  $B$  différente de  $(1\ 0)^{\omega}$  et de  $(0\ 1)^{\omega}$ , alors il existe un entier  $k$  tel que  $d^k B = 1\ 1\ \dots$ , ou un entier  $\ell$  tel que  $d^\ell B = 0\ 0\ \dots$ . Posons  $F = d^k B$  dans le premier cas, et  $F = d^\ell \bar{B}$  dans le second cas ; il est clair que  $F$  est dans  $\Gamma_{(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}}$  et commence par  $1\ 1$ . D'après le lemme 2a du paragraphe II ci-dessus  $F$  est égale à  $(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}$ , autrement dit, soit il existe  $k$  tel que  $d^k B$  soit égale à  $(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}$ , soit il existe  $\ell$  tel que  $d^\ell B$  soit égale à  $(0\ 0\ 1\ 1)^{\omega}$  et donc  $d^{\ell+2} B$  est égale à  $(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}$ , et le corollaire est démontré.

#### IV. - Précisions sur la structure de $\Gamma$ : densité des suites périodiques et structure fractale de $\Gamma$

1°) THÉORÈME DE DENSITÉ. - L'ensemble des suites périodiques de  $\Gamma$  est dense dans  $\Gamma$ . Plus précisément :

Soit  $A$  une suite de  $\Gamma$  non périodique ; alors quel que soit l'entier  $a$ ,  $a \geq 2$ , il existe une suite  $B$  périodique de la forme  $(x\ 1\ \bar{x}\ 0)^{\omega}$ , qui coïncide avec  $A$  sur  $[0, a]$ , telle que sa plus petite période  $2|x|+2$ , soit supérieure ou égale à  $a+2$ , et strictement inférieure à  $A$ .

Soit en effet,  $A$  une suite de  $\Gamma$  non périodique ; elle ne peut pas être de la forme  $m\ 1^{\omega}$  où  $m$  est un mot sur  $\{0, 1\}$ , car alors :

$$d^{|m|} A = 1^{\omega} \leq A \text{ et donc } A = 1^{\omega} \text{ ce qui n'est pas.}$$

Par conséquent  $A$  comprend une infinité de 0, et donc quel que soit l'entier  $a$ ,  $a \geq 2$ , il existe un mot  $m$  de longueur supérieure ou égale à  $a$  tel que :

$$A = m 0 \dots ;$$

comme  $m$  commence par 1, l'ensemble des mots non vides  $\alpha$ , tels qu'il existe un mot  $\beta$  vérifiant :  $\alpha \beta \bar{\alpha} = m 0$ , n'est pas vide. Soit  $s$  un mot dans cet ensemble de longueur maximale, et soit  $t$  tel que :

$$s t \bar{s} = m 0 .$$

On remarque que  $s$  n'est pas vide ; de plus  $t$  est aussi non vide (sinon  $A = s \bar{s} \dots$ , d'où  $A = (s \bar{s})^{(w)}$  d'après le lemme 2b du II). Posons alors  $B = (s t \bar{s} \bar{t})^{(w)}$ .

$B$  coïncide avec  $A$  sur  $[0, |s t \bar{s}| - 1]$  donc sur  $[0, a]$  ;  $B$  est strictement inférieure à  $A$  :

posons en effet  $A = s t \bar{s} w \dots$  avec  $|w| = |t|$ , alors on écrit :

$$d^{|s|+|t|} A = \bar{s} w \dots \geq \bar{A} = \bar{s} \bar{t} \dots , \text{ d'où } w \geq \bar{t} ;$$

on ne peut avoir égalité entre  $w$  et  $\bar{t}$ , sinon  $A$  commence par  $s t \bar{s} \bar{t}$  donc est égale à  $(s t \bar{s} \bar{t})^{(w)}$  (toujours le lemme 2b du II). Ainsi :

$$B = s t \bar{s} \bar{t} \dots < A = s t \bar{s} w \dots .$$

Par ailleurs  $\bar{t}$  a pour dernière lettre 0 (sinon  $d^{2|s|+2|t|-1} B$  commence par plus de 1 que  $B$ ),  $B$  est périodique de période  $2(|s|+|t|)$  et l'on a :  $d^{|s|+|t|} B = \bar{B}$  ; pour conclure il suffit donc de prouver :

$$\forall k \in [1, |s|+|t|-1] \quad \bar{B} < d^k B < B .$$

Nous allons distinguer deux cas suivant la place de  $k$  par rapport à  $|s|$ .

1er cas :  $1 \leq k \leq |s|$

Alors il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que :

$$u \neq \emptyset , \quad s = u v , \quad B = (u v t \bar{u} \bar{v} \bar{t})^{(w)} \quad \text{et} \quad d^k B = v t (\bar{u} \bar{v} \bar{t} u v t)^{(w)} .$$

De plus  $A$  est égale à  $u v t \bar{u} \bar{v} \dots$  ;

de l'inégalité :

$$\bar{A} \leq d^{|u|} A \leq A,$$

on tire :

$$\bar{u} \bar{v} \bar{t} \leq v t \bar{u} \leq u v t.$$

Ces deux inégalités sont strictes ; en effet :

- si  $\bar{u} \bar{v} \bar{t} = v t \bar{u}$ , il existe d'après le lemme 1 un mot  $x$  non vide et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$c \neq 0, \quad v t = (x \bar{x})^c, \quad \bar{u} = (x \bar{x})^d x,$$

on en déduit :

$$u v t = (\bar{x} x)^{c+d} \bar{x}, \quad \text{d'où } A = \bar{x} x \dots, \quad \text{donc } A = (\bar{x} x)^{(c)}$$

ce qui n'est pas.

- si  $v t \bar{u} = u v t$ , il existe d'après le lemme 1 un mot non vide  $x$  et un entier non nul  $c$  tels que  $u = (x \bar{x})^c$ , donc  $A$  commence par  $x \bar{x}$  et est donc égal à  $(x \bar{x})^{(c)}$  ce qui n'est pas.

Ainsi on a bien :

$$\bar{B} = \bar{u} \bar{v} \bar{t} \dots < d^k B = v t \bar{u} \dots < B = u v t \dots$$

2e cas :  $|s| + 1 \leq k \leq |s| + |t| - 1$  :

Si  $t$  est de longueur 1, il n'y a rien à prouver, sinon  $t$  est de longueur supérieure ou égale à 2 et il existe alors deux mots  $u$  et  $v$  non vides tels que :

$$t = u v, \quad B = (s u v \bar{s} \bar{u} \bar{v})^{(k)}, \quad d^k B = v(\bar{s} \bar{u} \bar{v} s u v)^{(k)},$$

et  $A = s u v \bar{s} \dots$ .

Posons  $A = s u v \bar{s} x \dots$  où  $|x| = |u|$ .

On a :  $d^{|s| + |u| + |v|} A = \bar{s} x \dots \geq \bar{A} = \bar{s} \bar{u} \dots$ , d'où  $x \geq \bar{u}$ .

- Supposons d'abord  $x$  égal à  $\bar{u}$  : alors  $A = s u v \bar{s} \bar{u} \dots$ , et on écrit :

$$\bar{A} = \bar{s} \bar{u} \bar{v} \dots \leq d^{|s u|} A = v \bar{s} \bar{u} \dots \leq A = s u v \dots,$$

d'où :

$$\bar{s} \bar{u} \bar{v} \leq v \bar{s} \bar{u} \leq s u v.$$

Si  $v \bar{s} \bar{u}$  est égal à  $s u v$ , il existe d'après le lemme 1 un mot  $x$  non vide et un entier  $c$  non nul tels que :

$$s u v = (x \bar{x})^c, \text{ d'où } A = x \bar{x} \dots, \text{ d'où } A = (x \bar{x})^{\omega} \text{ ce qui n'est pas.}$$

De même si  $v \bar{s} \bar{u}$  est égal à  $\bar{s} \bar{u} \bar{v}$ , il existe d'après le lemme 1 un mot  $x$  non vide et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$c \neq 0, v = (x \bar{x})^c, \bar{s} \bar{u} = (x \bar{x})^d x, \text{ d'où } s u v = (\bar{x} x)^{d+c} \bar{x}$$

donc  $A = x \bar{x} \dots$ , ce qui est impossible.

Ainsi on a :

$$\bar{s} \bar{u} \bar{v} < v \bar{s} \bar{u} < s u v$$

et donc :

$$\bar{B} < d^k B < B.$$

- Supposons au contraire qu'on ait l'inégalité stricte  $x > \bar{u}$  :

on écrit d'abord :

$$d^{|s|+|u|} A = v \bar{s} x \dots \leq A = s u v \dots,$$

d'où

$$v \bar{s} \bar{u} < v \bar{s} x \leq s u v,$$

et donc

$$d^k B = v \bar{s} \bar{u} \dots < B = s u v \dots.$$

Pour montrer l'inégalité  $d^k B > \bar{B}$ , on va distinguer deux cas :

Si  $|u| \geq |v|$  : on pose  $u = y z$ , avec  $|y| = |v|$ , d'où  $A = s y z v \bar{s} \dots$   
ainsi  $B = s y z v \dots$ ,  $d^k B = v \bar{s} \bar{y} \bar{z} \dots$ .

Or on a :

$$d^{|s|+|y|+|z|} A = v \bar{s} \dots \geq \bar{A} = \bar{s} \bar{y} \dots, \text{ d'où } v \bar{s} \geq \bar{s} \bar{y}.$$

S'il y a égalité entre  $v \bar{s}$  et  $\bar{s} \bar{y}$ , alors  $A$  commence par  $s y z \bar{s} \bar{y}$ , or  $s y z \bar{s} \bar{y} = s y z v \bar{s} = s t \bar{s} = m 0$  et la maximalité de  $|s|$  implique que  $y$  est vide, donc  $v$  est vide ce qui n'est pas.

Ainsi :

$$v \bar{s} > \bar{s} \bar{y} \text{ et donc } d^k B = v \bar{s} \dots > \bar{B} = \bar{s} \bar{y} \dots.$$



Si  $|u| < |v|$  : on pose  $\bar{u}\bar{v} = yz$  où  $|y| = |v|$  et donc  $|z| = |u|$ .

Il existe alors un mot  $\alpha$  tel que  $y = \bar{u}\alpha$ , d'où  $\bar{v} = \alpha z$ . De

$$d^{|s|+|u|} A = v\bar{s}x \dots \geq \bar{A} = \bar{s}\bar{u}\bar{v}s\bar{x} = \bar{s}yzs\bar{x} \dots,$$

on tire :

$$v\bar{s} \geq \bar{s}y.$$

S'il y a égalité entre  $v\bar{s}$  et  $\bar{s}y$ , on a :

$$A = suv\bar{s} \dots = su\bar{s}y \dots = su\bar{s}\bar{u}\alpha \dots,$$

d'où  $A = (su\bar{s}\bar{u})^{(u)}$  ce qui n'est pas.

On a donc :

$$v\bar{s} > \bar{s}y,$$

d'où :

$$d^k B = v\bar{s} \dots > \bar{B} = \bar{s}\bar{u}\bar{v} \dots = \bar{s}yz \dots.$$

## 2°) Théorème : la structure fractale de $\Gamma$

a) Soit  $(m0)^{(u)}$  une suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $|m|+1$ , alors la suite  $m1(\bar{m}1)^{(u)}$  est dans  $\Gamma$ , et il existe une bijection croissante de  $\Gamma \cap ](m1\bar{m}0)^{(u)}, m1(\bar{m}1)^{(u)}[$  sur  $\Gamma$ .

b) Tout intervalle ouvert de  $\Gamma$  qui contient une suite non périodique (en particulier tout intervalle ouvert de  $\Gamma$  non dénombrable) contient un sous-intervalle de  $\Gamma$  isomorphe à  $\Gamma$  en tant qu'ensemble ordonné.

Remarque. - Le b) signifie que  $\Gamma$  est à homothétie interne, ou encore que  $\Gamma$  a une "structure fractale" (voir [16] par exemple).

Montrons d'abord comment on déduit b) de a) :

Soit  $S$  une suite non périodique dans  $\Gamma \cap ]X, Y[$ . D'après le théorème de densité ci-dessus, quel que soit l'entier  $a$  supérieur ou égal à 2, il existe une suite  $(m1\bar{m}0)^{(u)}$  de  $\Gamma$  qui coïncide avec  $S$  sur  $[0, a]$  et de plus petite période  $2|m|+2$  supérieure ou égale à  $a+2$ .

Pour  $a$  assez grand, comme la longueur de  $m1$  est supérieure ou égale à  $1 + \frac{a}{2}$ , toutes les suites commençant par  $m1$  sont dans  $]X, Y[$  et donc en particulier :

$$\Gamma \cap ](m1 \bar{m} 0)^{\omega}, m1(\bar{m} 1)^{\omega}[ \subset \Gamma \cap ]X, Y[ .$$

Comme  $(m1 \bar{m} 0)^{\omega}$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période  $2|m| + 2$ , avec  $|m| \geq 2$ , la suite  $(2|m| + 2)$ -miroir  $Q = \lim_n \varphi^n((m1 \bar{m} 0)^{\omega}) = m1 \bar{m} 1 \bar{m} 0 m1 \dots$  est dans  $\Gamma$  d'après le II, mais cette suite est aussi  $(|m| + 1)$ -miroir, donc  $(m0)^{\omega}$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période  $|m| + 1$ , d'où le résultat en appliquant a).

Nous allons démontrer le a) en plusieurs étapes qui sont détaillées ci-dessous sous forme de lemmes :

3°) LEMME 1. - Soit  $(m0)^{\omega}$  une suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $q = |m| + 1$ .

Posons :

$$A = (m1 \bar{m} 0)^{\omega} \quad \text{et} \quad B = m1(\bar{m} 1)^{\omega} .$$

Alors :

a) la suite  $B$  est dans  $\Gamma$ , et on a l'inégalité  $A < B$  ;

b) si  $C$  est une suite de  $\Gamma \cap ]A, B[$ , il existe deux suites d'entiers  $(a_i)_i$  et  $(b_i)_i$  telles que :

$$a_1 \geq 1, \quad \forall i \quad \sup(a_i, b_i) \leq a_1 ,$$

et

$$C = (m1(\bar{m} 1)^{a_1} \bar{m} 0 (m0)^{b_1})(m1(\bar{m} 1)^{a_2} \bar{m} 0 (m0)^{b_2}) \dots$$

a)  $B$  commence par  $m$  comme  $A$  donc par  $11$ , montrons alors les inégalités :

$$\forall k \geq 0, \quad \bar{B} \leq d^k B \leq B .$$

Pour  $k$  multiple entier de  $q$ , c'est clair. Supposons que  $k$  ne soit pas divisible par  $q$ , alors il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que :

$$u \neq \emptyset, \quad m = uv, \quad B = uv1(\bar{u}\bar{v}1)^{\omega} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d^k B = v1(\bar{u}\bar{v}1)^{\omega} \\ \text{ou} \\ d^k B = \bar{v}1(\bar{u}\bar{v}1)^{\omega} . \end{cases}$$

D'après le théorème fondamental du paragraphe II, la suite  $\lim_n \varphi^n((m0)^{\omega})$  est dans  $\Gamma$ , et donc d'après le lemme 3 de ce même paragraphe, on a :

$$\bar{u} \bar{v} 0 < v 1 \bar{u} < u v 1 \quad \text{et} \quad \bar{u} \bar{v} 0 < \bar{v} 1 \bar{u} < u v 1 ,$$

d'où :

$$\bar{B} < d^k B < B .$$

Quant à l'inégalité  $A < B$  , elle est évidente.

b) Nous allons montrer par récurrence sur  $i$  que  $C$  commence par  $X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots X_i Y_i$  , où  $X_j$  est de la forme  $m 1 (\bar{m} 1)^{a_j}$  ,  $Y_j$  de la forme  $\bar{m} 0 (m 0)^{b_j}$  , avec  $a_1 \geq 1$  ,  $\forall j \leq i \sup(a_j, b_j) \leq a_1$  , et  $b_i$  maximal.

Pour  $i = 1$  :

Comme on a la double inégalité :

$$(m 1 \bar{m} 0)^w < C < m 1 (\bar{m} 1)^w ,$$

on voit que  $C$  commence par  $m 1 \bar{m}$  .

Or  $C$  ne peut commencer par  $m 1 \bar{m} 0$  , sinon  $C$  est égale à  $A$  (lemme 2b du II) , donc  $C$  commence par  $m 1 \bar{m} 1$  ; de plus comme  $C$  est strictement inférieure à  $B$  , il existe un exposant maximal  $a_1$  tel que

$$C = m 1 (\bar{m} 1)^{a_1} \dots , \quad a_1 \geq 1 .$$

(autrement dit  $C$  commence par  $m 1 (\bar{m} 1)^{a_1}$  mais pas par  $m 1 (\bar{m} 1)^{a_1+1}$  ) .

Ecrivons alors  $C = m 1 (\bar{m} 1)^{a_1} x e y f$  , où  $|x| = |y| = m$  et  $|e| = |f| = 1$  .

On a successivement :

$$C < B , \quad \text{d'où} \quad x e \leq \bar{m} 1 ,$$

$a_1$  maximal, d'où  $x e \neq \bar{m} 1$  ,

$$d^{q(a_1+1)} C \geq \bar{C} , \quad \text{d'où} \quad x e \geq \bar{m} 0 ,$$

ainsi on a

$$x e = \bar{m} 0 .$$

On écrit alors :

$$d^{q(a_1+1)} C = \bar{m} 0 y f \dots \geq \bar{C} = \bar{m} 0 m 0 \dots \quad \text{d'où} \quad y f \geq m 0$$

$$d^{q(a_1+2)} C = y f \dots \leq C = m 1 \dots \quad \text{d'où} \quad y f \leq m 1 .$$

Ainsi  $y$  est égal à  $m$  ; si  $f$  est égal à  $1$  on pose  $b_1 = 0$  , et on a bien  
 $C = m \cdot 1 \cdot (\overline{m-1})^{a_1} \cdot m \cdot 0 \cdot (\overline{m-0})^{b_1} \dots$  avec  $b_1 \leq a_1$  ; si  $f$  est égal à  $0$  , il existe  
 un entier  $b_1$  supérieur ou égal à  $1$  tel que :

$$C = m \cdot 1 \cdot (\overline{m-1})^{a_1} \cdot \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{b_1} \dots$$

De la condition :

$$d^{\frac{q(a_1+1)}{d}} C = \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{b_1} \dots \geq \overline{C} = \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{a_1} \cdot m \cdot 1 \dots ,$$

on tire :

$$b_1 \leq a_1 .$$

L'ensemble des  $b_1$  est donc borné et on peut supposer que  $b_1$  a été choisi maximal, on a bien  $b_1 \leq a_1$  , et le résultat est prouvé pour  $i = 1$  .

Supposons alors que l'on ait :

$$C = (X_1 Y_1 \ X_2 Y_2 \ \dots \ X_i Y_i) \dots$$

avec

$$X_j = m \cdot 1 \cdot (\overline{m-1})^{a_j} , \quad Y_j = \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{b_j} ,$$

$$a_1 \geq 1 \text{ et } \forall j \leq i \quad \sup(a_j, b_j) \leq a_1 , \text{ et } b_i \text{ maximal.}$$

Ecrivons alors :

$$C = X_1 Y_1 \ X_2 Y_2 \ \dots \ X_i Y_i \cdot x \cdot e \quad \text{où } |x| = |m| \text{ et } |e| = 1 ;$$

de l'inégalité :

$$d^{\frac{\sum |X_j| + \sum |Y_j|}{d}} C = x \dots \leq C = m \dots ,$$

on tire

$$x \leq m ;$$

$$\text{comme } d^{\frac{\sum |X_j| + \sum |Y_j| - q(b_i+1)}{d}} C = \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{b_i} \cdot x \dots \geq C = \overline{m-0} \cdot (m \cdot 0)^{a_1} \cdot m \dots$$

et que  $b_i$  est au plus égal à  $a_1$  , on a nécessairement :

$$x \geq m , \text{ et donc } x = m .$$

Enfin, comme  $b_i$  est maximal,  $e$  vaut nécessairement  $1$  .

Posons alors :

$$C = X_1 Y_1 \ \dots \ X_i Y_i \cdot m \cdot 1 \cdot y \cdot f \dots , \text{ avec } |y| = |m| , |f| = 1 .$$

Si  $f$  est nul, on pose  $a_{i+1} = 0$  (on a bien  $a_{i+1} \leq a_1$ ), si  $f$  vaut 1, il existe un  $a_{i+1}$  supérieur ou égal à 1 tel que :

$$C = X_1 Y_1 \dots X_\ell Y_\ell m 1 (\overline{m} 1)^{a_{i+1}} \dots,$$

de la condition :

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| C \geq \overline{C}, \text{ on tire } a_{i+1} \leq a_1,$$

on peut donc supposer que l'on a choisi  $a_{i+1}$  maximal.

Posons alors :

$$C = X_1 Y_1 \dots X_i Y_i m 1 (\overline{m} 1)^{a_{i+1}} z g u h \dots, \text{ où } |z| = |u| = |m| \text{ et } |g| = |h| = 1.$$

on a successivement :

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| + q(a_{i+1} + 1) C \geq \overline{C}, \text{ d'où } z g \geq \overline{m} 0,$$

$$a_{i+1} \text{ est maximal, d'où } z g \neq \overline{m} 1,$$

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| C \leq C < B, \text{ d'où } z g \leq \overline{m} 1,$$

donc  $z g = \overline{m} 0$ .

De plus :

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| + q(a_{i+1} + 1) C \geq \overline{C}, \text{ d'où } \overline{m} 0 u \dots \geq \overline{m} 0 m, \text{ donc } u \geq m,$$

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| + q(a_{i+1} + 2) C \leq C, \text{ d'où } u \leq m,$$

et donc  $u$  est égal à  $m$ .

Si  $h$  vaut 1, on pose  $b_{i+1} = 0$  (on a bien  $b_{i+1} \leq a_1$ ), si  $h$  vaut 0, il existe un entier  $b_{i+1}$  supérieur ou égal à 1 tel que :

$$C = X_1 Y_1 \dots X_i Y_i m 1 (\overline{m} 1)^{a_{i+1}} \overline{m} 0 (m 0)^{b_{i+1}} \dots$$

De la condition

$$\sum_d |X_j| + \sum |Y_j| + q(1 + a_{i+1}) C \geq \overline{C},$$

on tire  $b_{i+1} \leq a_1$ .

On peut alors supposer  $b_{i+1}$  maximal et le résultat est acquis pour l'indice  $i+1$ .

4°) LEMME 2. - Si  $X$  est de la forme  $m 1 (\overline{m} 1)^a$ , on pose  $T(X) = 1^{a+1}$ ; si  $Y$  est de la forme  $\overline{m} 0 (m 0)^b$ , on pose  $T(Y) = 0^{b+1}$ ; soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des mots de la forme  $m 1 (\overline{m} 1)^a$ , où  $a$  est un entier.

Soit  $\Xi$  l'ensemble de suites défini par :

$$\Xi = \{B\} \cup \{X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots ; X_i \in \mathcal{A}, \overline{Y}_i \in \mathcal{A}\} \cup \{X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots ; \overline{X}_i \in \mathcal{A}, Y_i \in \mathcal{A}\}$$

on prolonge alors  $T$  à  $\Xi$  en posant :

$$\begin{cases} T(B) = 1^{\omega} \\ T(X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots) = T(X_1) T(Y_1) T(X_2) T(Y_2) \dots \end{cases}$$

alors  $T$  est une application strictement croissante de  $\Xi$  dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Soient  $C$  et  $D$  deux suites de  $\Xi$  telles que  $C < D$ ; si  $D$  est égale à  $B$ , on a clairement  $T(C) < T(D) = 1^{\omega}$ . Sinon trois cas sont possibles; appelons provisoirement suites de type (1) les suites  $X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots$ , où  $X_i$  est dans  $\mathcal{A}$  et  $\overline{Y}_i$  dans  $\mathcal{A}$ , et suites de type (2) les suites  $X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots$ , où  $\overline{X}_i$  est dans  $\mathcal{A}$  et  $Y_i$  dans  $\mathcal{A}$  :

- Si  $C$  est du type (2) et  $D$  du type (1), on a évidemment :

$$T(C) < T(D),$$

- Si  $C$  et  $D$  sont du type (2), alors  $\overline{C}$  et  $\overline{D}$  sont du type (1) on a

$$\overline{D} < \overline{C} \text{ et } T(\overline{D}) = T(\overline{D}), \quad T(\overline{C}) = T(\overline{C}),$$

on est donc ramené au cas ci-dessous ;

- Si  $C$  et  $D$  sont du type (1), posons :

$$C = X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots \text{ avec } X_i = m 1 (\overline{m} 1)^{a_i}, \quad Y_i = \overline{m} 0 (m 0)^{b_i},$$

$$D = Z_1 S_1 Z_2 S_2 \dots \text{ avec } Z_i = m 1 (\overline{m} 1)^{c_i}, \quad S_i = \overline{m} 0 (m 0)^{d_i},$$

soit  $j$  le plus petit indice tel que  $(X_j, Y_j)$  soit distinct de  $(Z_j, S_j)$ .

Notons  $W$  le mot  $X_1 Y_1 X_2 Y_2 \dots X_{j-1} Y_{j-1} = Z_1 S_1 \dots Z_{j-1} S_{j-1}$  ( $W$  est vide si  $j$  est égal à 1) et  $W'$  le mot  $T(X_1) T(Y_1) \dots T(X_{j-1}) T(Y_{j-1})$ .

Si  $X_j$  est distinct de  $Z_j$ , on a nécessairement  $a_j < c_j$ , d'où :

$$T(C) = W' 1 \overset{1+a_j}{j} 0 \dots < T(D) = W' 1 \overset{1+c_j}{j} 0 \dots ;$$

si  $X_j$  est égal à  $Z_j$  (donc  $a_j = c_j$ ), et  $Y_j$  distinct de  $S_j$ , on a nécessairement  $b_j > d_j$ , d'où :

$$T(C) = W' 1 \overset{1+a_j}{j} 0 \overset{1+b_j}{j} 1 \dots < T(D) = W' 1 \overset{1+c_j}{j} 0 \overset{1+d_j}{j} 1 \dots .$$

5°) LEMME 3. - Soit  $(m \ 0)^{(j)}$  une suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $q = |m| + 1$ .  
Soient  $A = (m \ 1 \ \bar{m} \ 0)^{(j)}$  et  $B = m \ 1 \ (\bar{m} \ 1)^{(j)}$ .

Alors  $T$  est une injection de  $\Gamma \cap ]A, B]$  dans  $\Gamma$ , où  $T$  est l'application  
définie au lemme 2.

D'après le lemme 1, on a :

$$\Gamma \cap ]A, B] \subset E ;$$

donc  $T$  est bien définie sur  $\Gamma \cap ]A, B]$ , et injective car elle est strictement croissante.

Il est clair que  $T(B)$ , qui vaut  $1^{(j)}$ , est dans  $\Gamma$ .

Il s'agit donc de montrer que si :

$$C = (m \ 1 \ (\bar{m} \ 1)^{a_1} \ \bar{m} \ 0 \ (m \ 0)^{b_1}) (m \ 1 \ (\bar{m} \ 1)^{a_2} \ \bar{m} \ 0 \ (m \ 0)^{b_2}) \dots ,$$

avec  $a_1 \geq 1$ ,  $\forall i \sup (a_i, b_i) \leq a_1$ , alors :

$$T(C) = 1 \overset{1+a_1}{1} 0 \overset{1+b_1}{1} 1 \overset{1+a_2}{2} 0 \overset{1+b_2}{2} \dots$$

est un élément de  $\Gamma$ .

Comme  $T(C)$  commence par  $1 \overset{1+a_1}{1}$  et  $\overline{T(C)}$  par  $0 \overset{1+a_1}{1}$ , il est clair que, si  $k$  n'est ni de la forme  $\sum_1^n (a_i + b_i + 2)$ , ni de la forme  $\sum_1^n (a_i + b_i + 2) + 1 + a_{n+1}$ , la suite  $d^k T(C)$  commence par  $1^\alpha 0$  ou  $0^\alpha 1$ , avec  $\alpha < a_1 + 1$  (tous les  $a_i$  et  $b_i$  sont majorés par  $a_1$ ) et donc que :

$$\overline{T(C)} < d^k T(C) < T(C) .$$

Si  $k$  est de la forme  $\sum_1^n (a_i + b_i + 2)$ , ou de la forme  $\sum_1^n (a_i + b_i + 2) + 1 + a_{n+1}$ , on commence par écrire :

$$\bar{C} \geq d^{kq} C \leq C,$$

d'où  $\overline{T(C)} = T(\bar{C}) \leq T(d^{kq} C) \leq T(C)$ , (croissance de  $T$ ), et on remarque que, pour de tels  $k$ , on a :

$$T(d^{kq} C) = d^k T(C),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.

6°) LEMME 4. - Avec les notations et les hypothèses du lemme 3,  $T$  est une surjection de  $\Gamma \cap ]A, B[$  sur  $\Gamma$ .

Soit en effet  $D$  une suite de  $\Gamma$ , si  $D$  est égale à  $1^{\omega}$ ,  $D$  est égale à  $T(B)$ ; on peut donc supposer :  $D < 1^{\omega}$ . Posons alors :

$$D = 1 \overset{1+a_1}{1} \underset{0}{1} \overset{1+b_1}{1} \underset{1}{1} \overset{1+a_2}{2} \underset{0}{2} \overset{1+b_2}{2} \dots,$$

où les  $a_i$  et  $b_i$  sont positifs ou nuls, et  $a_1$  supérieur ou égal à 1 ( $D$  est dans  $\Gamma$ , donc commence par 1 1).

Posons :

$$C = (m \ 1 \ (\bar{m} \ 1) \overset{a_1}{1} \ \bar{m} \ 0 \ (m \ 0) \overset{b_1}{1}) (m \ 1 \ (\bar{m} \ 1) \overset{a_2}{2} \ \bar{m} \ 0 \ (m \ 0) \overset{b_2}{2}) \dots,$$

il est clair que  $C$  est dans l'intervalle  $]A, B[$ , que  $T(C) = D$ , et que  $C$  est un élément de  $\Xi - \{B\}$  (la condition  $\sup(a_i, b_i) \leq a_1$  résulte du fait que  $D$  est dans  $\Gamma$ ).

Il reste à prouver que  $C$  est dans  $\Gamma$  :

. si  $k$  n'est pas de la forme  $q \sum_1^n (a_j + b_j + 2)$ , ni de la forme  $q \sum_1^n (a_j + b_j + 2) + q(a_{n+1} + 1)$ , deux cas peuvent se présenter :

- ou bien  $d^k C$  commence par  $\bar{m} \ 1$  ou  $m \ 0$ , et comme  $C$  commence par  $m \ 1$  et  $\bar{C}$  par  $\bar{m} \ 0$ , on a bien :

$$\bar{C} \leq d^k C \leq C$$

ou bien il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que :  $u \neq \emptyset$ ,  $m = uv$ ,  $d^k C$  commence par  $(v \ 1 \ \bar{u})$  ou  $(\bar{v} \ 1 \ \bar{u})$  ou  $(\bar{v} \ 0 \ u)$  ou  $(v \ 0 \ u)$ , comme la suite  $\lim_n \varphi^n((m \ 0)^{\omega})$



est  $q$ -miroir et dans  $\Gamma$  d'après le théorème fondamental du II, on a d'après le lemme 3 du II :

$$\bar{u} \bar{v} 0 < v 0 u < v 1 \bar{u} < u v 1 ,$$

et

$$\bar{u} \bar{v} 0 < \bar{v} 0 u < \bar{v} 1 \bar{u} < u v 1 ,$$

d'où l'on déduit :

$$\bar{C} = \bar{u} \bar{v} 0 \dots < d^k C < C = u v 1 \dots .$$

. Si  $k$  est de la forme  $q \sum_1^n (a_j + b_j + 2)$  ou de la forme  $q \sum_1^n (a_j + b_j + 2) + q(a_{n+1} + 1)$ , on écrit :

$$T(\bar{C}) = \overline{T(C)} = \bar{D} \leq d^{k/q} D \leq D = T(C) .$$

Or

$$d^{k/q} D = d^{k/q} T(C) = T(d^k C) ,$$

d'où

$$T(\bar{C}) \leq T(d^k C) \leq T(C) ,$$

et comme  $T$  est strictement croissante, on a :

$$\bar{C} \leq d^k C \leq C ,$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme et du théorème d'homothétie interne de  $\Gamma$ .

#### V. - Complément : les plus petites suites de $\Gamma$ périodiques, de période donnée

Nous nous proposons de retrouver ici les plus petites suites de  $\Gamma$  de plus petite période  $T$ , où  $T$  est donnée, (voir aussi [9] et [20]).

Définissons pour une suite  $A$  dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  la suite  $tA$  par :

$$\begin{aligned} tA(0) &= 1 , \\ tA(2n) &= 1 + A(n-1) , \quad \forall n \geq 1 , \\ tA(2n+1) &= A(n) , \quad \forall n \geq 0 . \end{aligned}$$

On peut alors énoncer le théorème :

1°) THÉORÈME. - Si une suite est dans  $\Gamma$  et de période 1 ou 2, c'est la suite  $1^{\omega}$ .

Quel que soit  $n$  supérieur ou égal à 2, la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2^n$  est la suite  $t^{n-2}((1100)^{\omega})$ .

Quels que soient  $n$  positif et  $r$  supérieur ou égal à 1, la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2^n(2r+1)$  est la suite  $t^n((1(10)^r)^{\omega})$ .

Si l'on note  $A_k$  la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $k$ , on a :

$$A_3 > A_5 > A_7 > \dots > A_6 > A_{10} > A_{14} > \dots > A_{3 \cdot 2^n} > A_{5 \cdot 2^n} > \dots \\ \dots > A_{2^{n+1}} > A_{2^n} > \dots > A_4 .$$

La première assertion est évidente, la seconde résulte de la structure de  $\Gamma \cap [0^{\omega}, L[$  où  $0L$  est la suite de Thue-Morse (voir plus haut) ; la dernière assertion résulte de l'avant-dernière, de la croissance de  $t$  (voir [2]) et des inégalités immédiates :

$$(110)^{\omega} > (11010)^{\omega} > \dots > (1(10)^n)^{\omega} > \dots ,$$

et

$$(1(10)^n)^{\omega} > t((110)^{\omega}) = (110100)^{\omega} , \quad \forall n \geq 1 .$$

Nous allons montrer la troisième assertion en plusieurs étapes :

2°) LEMME 1. - a) Soit  $A$  dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , alors on a l'équivalence :

$$A \in \Gamma \Leftrightarrow tA \in \Gamma \text{ et } tA \neq (1100)^{\omega} .$$

b) Soit  $D$  une suite de  $\Gamma$  telle que :

$$D \leq 1(10)^{\omega} \text{ et } D \neq (1100)^{\omega} ,$$

alors il existe une suite  $C$  dans  $\Gamma$  telle que

$$D = tC .$$

Dans a) l'implication  $\Rightarrow$  a été montrée dans [2], l'implication réciproque se prouve de la même manière (ou encore comme la fin de la démonstration du lemme IV.4 ci-dessus).

Quant au b), sa démonstration est calquée sur celle du lemme IV.4.

3°) LEMME 2 et fin de la démonstration du théorème

a) Si A est périodique et dans  $\Gamma$ , et si on a l'inégalité  $A \leq 1(1\ 0)^{\omega}$ , alors la plus petite période de A est paire.

b) Si A et  $tA$  sont dans  $\Gamma$ , alors on a l'équivalence :  
A périodique de plus petite période  $T \Leftrightarrow tA$  périodique de plus petite période  $2T$ .

c) La plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2r+1$ , ( $r \geq 1$ ), est  $(1(1\ 0)^r)^{\omega}$ .

d) Soient n et r deux entiers, avec  $n \geq 0$ ,  $r \geq 1$ , la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2^n(2r+1)$  est la suite  $t^n(1(1\ 0)^r)^{\omega}$ .

a) Si A est égale à  $(1\ 1\ 0\ 0)^{\omega}$ , c'est clair; sinon A est égale à  $tC$ , où C est dans  $\Gamma$  (lemme 2b ci-dessus).

Posons :

$$A = 1(1\ 0)^{n_1}(0\ 1)^{m_1} \dots (1\ 0)^{n_k}(0\ 1)^{m_k} \dots$$

On a  $d^T A = 1\ 1 \dots$ , donc il existe un  $\ell$  tel que

$$T = 2 \sum_1^{\ell} (n_j + m_j),$$

en particulier T est pair.

b) En effet :

- si A est périodique et si T est une période de A, alors :

$$tA(2n+2T) = 1 + A(n+T-1) = 1 + A(n-1) = A(2n), \quad \forall n \geq 1,$$

$$tA(2T) = 1 + A(T-1) = 1 = tA(0),$$

(si A est égale à  $(x\ b)^{\omega}$  où  $|x| = T-1$  et  $b = 0$  ou  $1$ , l'inégalité  $d^{|x|} A < A$  entraîne que b est nul, c'est-à-dire  $A(T-1) = 0$ ),

$$t A (2n+1+2T) = A(n+T) = A(n) = t A (2n+1) ,$$

autrement dit  $2T$  est une période de  $tA$ .

- Si  $tA$  est périodique et  $X$  une période de  $tA$ , comme on a :

$$t A \leq t 1^{(w)} = 1 (1 0)^{(w)} \quad (\text{croissance de } t) ,$$

il résulte du a) que  $X$  est pair, soit  $X = 2T$ .

On a alors :

$$A(n+T) = t A (2n+2T+1) = t A(2n+1) = A(n)$$

et donc  $T = X/2$  est une période de  $A$ .

c) Soit  $A$  la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2r+1$ , ( $r \geq 1$ ); d'après le a) on a :

$$A > 1 (1 0)^{(w)} .$$

Comme la suite  $(1 (1 0)^r)^{(w)}$  est clairement dans  $\Gamma$  et de plus petite période  $2r+1$ , on a donc :

$$1 (1 0)^r (1 0)^{(w)} = 1 (1 0)^{(w)} < A \leq (1 (1 0)^r)^{(w)} .$$

Donc :

$$A = 1 (1 0)^r \dots ,$$

d'où

$$A = (1 (1 0)^r)^{(w)} .$$

d) Nous fixons  $r$  et montrons le résultat par récurrence sur  $n$  : le résultat est acquis pour  $n = 0$  d'après le c), supposons le résultat vrai pour  $n$  et soit  $B$  la plus petite suite de  $\Gamma$  de plus petite période  $2^{n+1}(2r+1)$ , d'après b) et c) la suite  $t^{n+1} (1 (1 0)^r)^{(w)}$  est dans  $\Gamma$  et de plus petite période

$$2^{n+1} (2r+1) .$$

Donc :

$$B \leq t^{n+1} (1 (1 0)^r)^{(w)} .$$

Mais  $B$  est alors inférieure ou égale à la suite  $t(1^{(w)}) = 1 (1 0)^{(w)}$ , donc il existe une suite  $C$  dans  $\Gamma$  telle que  $B = t C$  ( $B$  est différente de  $(1 1 0 0)^{(w)}$  car de période impaire), et  $C$  est de plus petite période  $2^n (2r+1)$ .

On a :

$$t C \leq t^{n+1} (1 (1 0)^r)^{(w)},$$

d'où

$$C \leq t^n (1 (1 0)^r)^{(w)},$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$C = t^n (1 (1 0)^r)^{(w)},$$

et l'on en déduit :

$$B = t^{n+1} (1 (1 0)^r)^{(w)}.$$

### Conclusion

Les résultats que nous venons d'obtenir présentent un intérêt "intrinsèque" en combinatoire des mots sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , ils ont aussi une signification arithmétique que nous expliciterons et généraliserons dans la troisième partie de ce travail. Indiquons quand même les applications en théorie des itérations des fonctions continues qu'on peut en déduire et dont on trouvera le détail et les démonstrations dans [4].

### Premier exemple d'application

Soit  $f$  une fonction unimodale, et soit  $\alpha$  la suite  $\sigma f(1)$ , élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , alors, ( $0L$  est toujours la suite de Thue-Morse),

a) Si  $\tau\alpha < L$ , pour chaque  $x$  de  $[0, 1]$ , la suite  $f^n(x)$  est asymptotiquement périodique.

Plus précisément, si  $\tau\alpha$  est de période  $2^k$ , alors  $f$  admet au moins un cycle d'ordre  $2^i$  pour  $i < k$ , éventuellement un cycle d'ordre  $2^k$ , et aucun cycle d'un autre ordre. Pour chaque  $x$ , la suite  $f^n(x)$  converge vers l'un de ces cycles.

b) Si  $\tau\alpha = L$ ,  $f$  admet des cycles d'ordre  $2^i$  pour tout  $i$ , et au moins un Cantor invariant minimal.

Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f^n(x)$  converge soit vers un cycle d'ordre  $2^i$  soit vers un Cantor.

c) Si  $\tau\alpha > L$ ,  $f$  admet d'autres cycles, et une infinité non dénombrable de suites turbulentes.

### Deuxième exemple d'application

Soit  $f_\mu$ ,  $\mu \in [0, 1]$ , une famille complète de fonctions unimodales de classe  $C^1$ , telles que l'application  $\mu \rightarrow f_\mu$  soit continue pour la convergence uniforme et que l'application  $\mu \rightarrow \tau(\sigma f_\mu(1))$  soit monotone transverse.

a) Pour toute valeur  $\mu_0$  telle que  $\tau(\sigma f_{\mu_0}(1))$  soit égale à  $(m\ 0)^{\omega}$  et de plus petite période  $|m|+1$ , il existe une valeur  $\mu_\infty$  telle que, lorsque  $\mu$  croît de  $\mu_0$  à  $\mu_\infty$ ,  $f_\mu$  admette une cascade de doublements de périodes (cycles d'ordre  $q2^i$ , où  $q = |m|+1$ ).

$\tau(\sigma f_\mu(1))$  décrit dans l'ordre l'ensemble  $\Gamma \cap [(m\ 0)^{\omega}, Q[$ , où  $Q$  est la suite  $q$ -miroir associée à  $(m\ 0)^{\omega}$  par  $Q = \lim_n \varphi^n((m\ 0)^{\omega})$ , et  $\tau(\sigma f_{\mu_\infty}(1)) = Q$ .

b) Si  $\mu$  est tel que  $\tau(\sigma f_\mu(1))$  n'est pas périodique, alors dans tous les voisinages à droite (sauf si  $\mu$  est égal à 1) et à gauche de  $\mu$ , il existe des valeurs  $\mu'$  pour lesquelles  $f_{\mu'}$  admet un cycle superstable.

c) L'ensemble des valeurs de bifurcations de  $f_\mu$  possède une structure fractale.

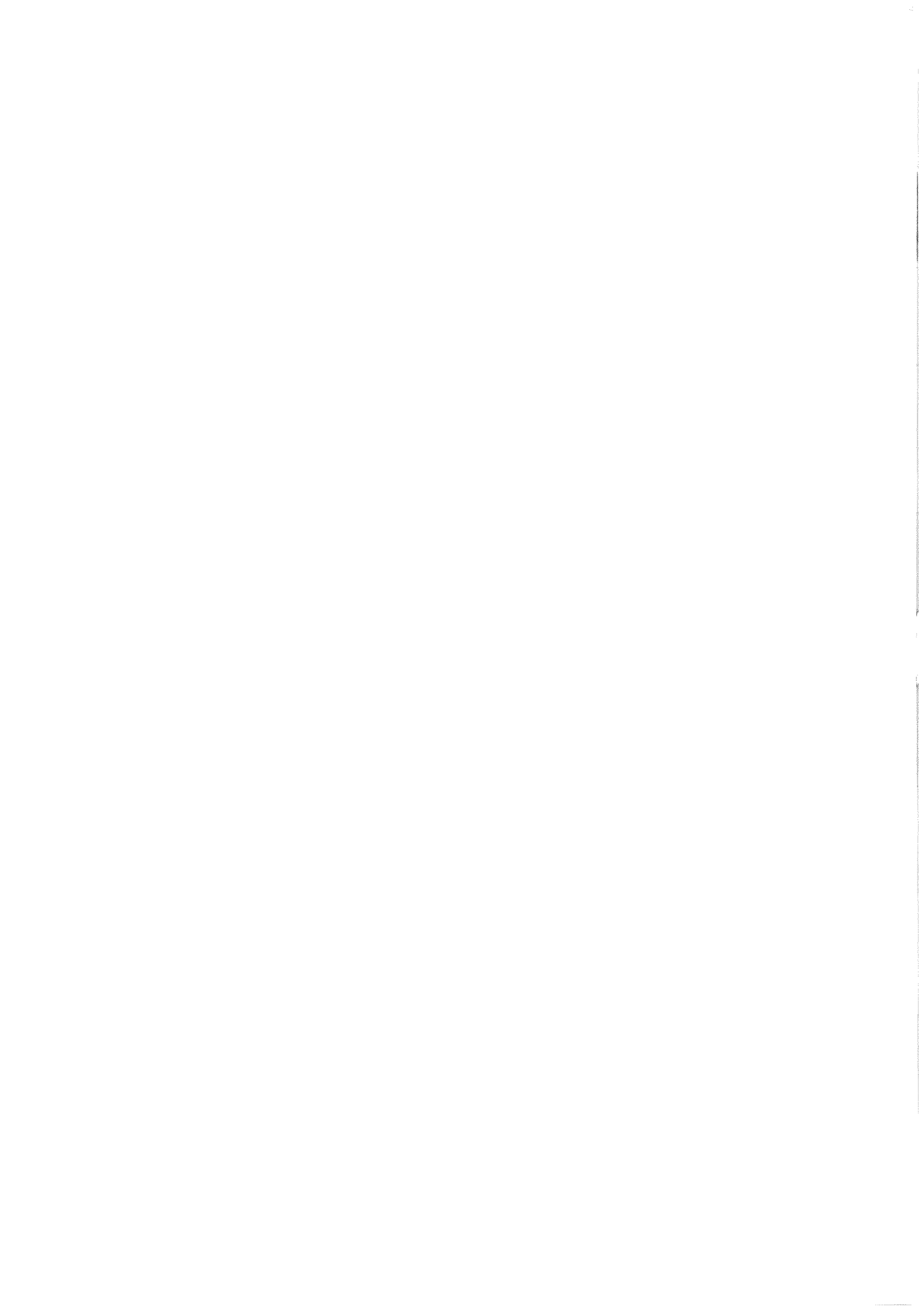
Nous reviendrons dans [4] sur le caractère "universel" de la suite de Thue-Morse dans les cascades de Feigenbaum (alors que la constante dite de Feigenbaum n'est universelle que pour une classe plus restreinte de fonctions).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. ALLOUCHE, en préparation.
- [2] J.-P. ALLOUCHE et M. COSNARD, Une propriété extrême de la suite de Thue-Morse en rapport avec les cascades de Feigenbaum, Sémin. Théorie des Nombres, 1981-1982, exposé n° 26, Bordeaux.
- [3] J.-P. ALLOUCHE et M. COSNARD, Itérations de fonctions unimodales et suites engendrées par automates, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 296, 1983.
- [4] J.-P. ALLOUCHE et M. COSNARD, en préparation.
- [5] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401-419.
- [6] P. COLLET and J.-P. ECKMANN, Iterated maps on the interval as dynamical systems, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [7] M. COSNARD, Siam. J. Num. Anal. 16, n° 2 (1979), p. 300.
- [8] M. COSNARD, Rapp. Rech. I. M. A. G. (à paraître).
- [9] M. COSNARD, Contributions à l'étude du comportement itératif des transformations unimodales, Thèse d'Etat, Grenoble 1983.
- [10] B. DERRIDA, A. GERVOIS et Y. POMEAU, Iterations of endomorphisms on the real axis and representation of numbers, Ann. Inst. H. Poincaré, 29 (1978), 305-356.
- [11] J. GUCKENHEIMER, Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps, Comm. Math. Phys. 70 (1979), 133-160.
- [12] I. GUMOWSKI et C. MIRA, Dynamique chaotique, CEPADUES, Toulouse, 1980.
- [13] M. A. HARRISON, Introduction to formal language theory, Addison and Wesley.
- [14] L. JONKER, Periodic orbits and kneading invariants, Proc. London Math. Soc. 3 (1979), 428-450.
- [15] M. KEANE, Generalized Morse sequences, Z - Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 10 (1968), 335-353.

- [16] B. B. MANDELBROT, The fractal geometry of nature, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982.
- [17] N. METROPOLIS, M. L. STEIN, P. R. STEIN, On finite limit sets for transformations on the unit interval, J. Comb. Theory, A 15 (1973), 25-44.
- [18] J. MILNOR, P. THURSTON, On iterated maps of the interval I and II, Preprint, Princeton, 1977.
- [19] G. RAUZY, Itérations des endomorphismes d'un intervalle, Sémin. de Théorie des Nombres, D. P. P. 1979-1980, Birkhäuser.
- [20] A. N. SHARKOVSKI, Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself, Ukrainian Math. J., 16, 1 (1964), 61-71.



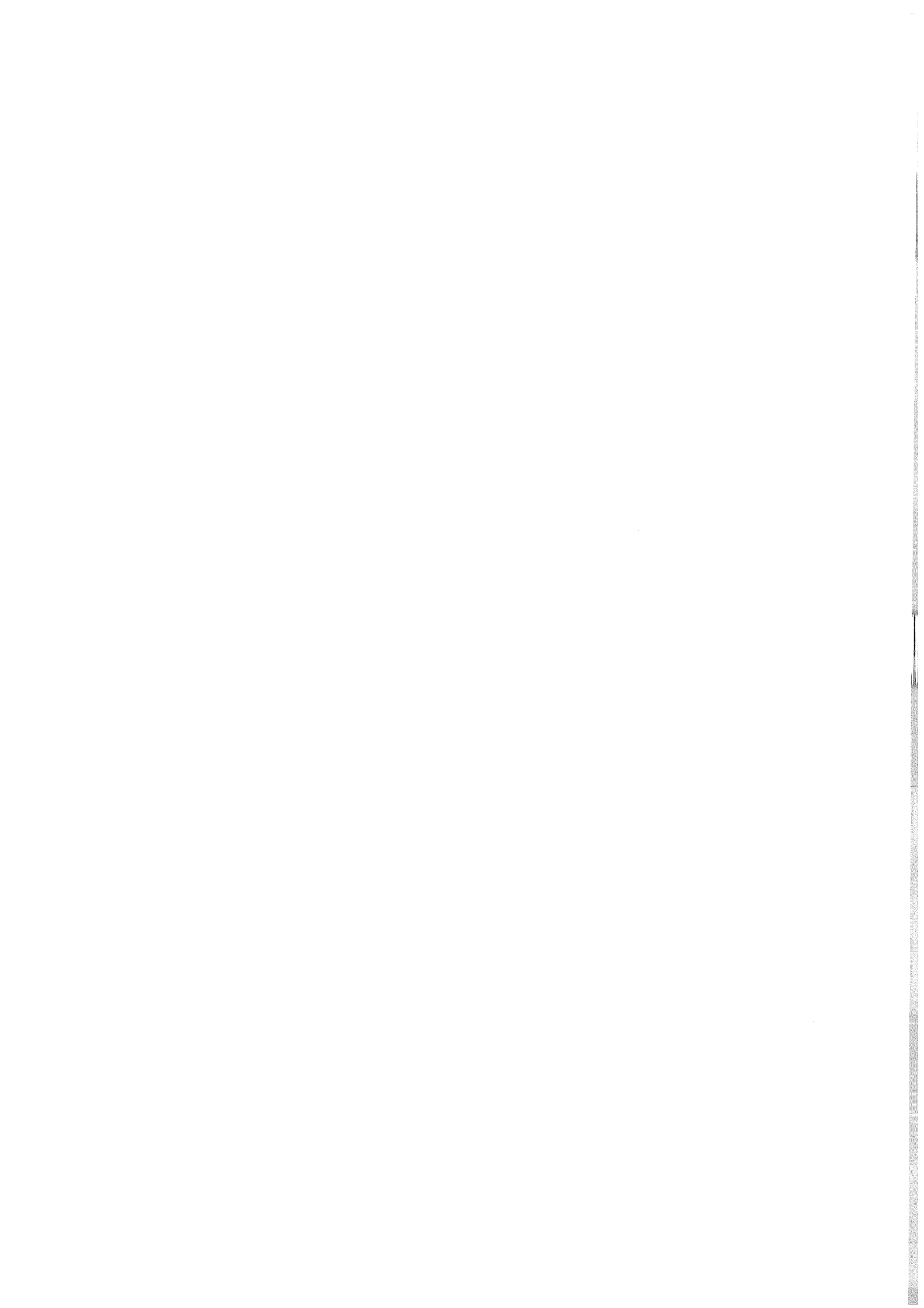


TROISIÈME PARTIE

---

SUITES Q-MIROIRS ET RÉPARTITION MODULO 1

---



## Introduction

Nous pouvons interpréter la structure de l'ensemble de suites appelé  $\Gamma$  dans la partie précédente en un résultat de théorie des nombres : rappelons la définition de  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \{A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}; A(0) = A(1) = 1; \forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k A \leq A\}.$$

Notons  $\tilde{\Gamma}$  l'ensemble suivant :

$$\tilde{\Gamma} = \{x \in [0,1]; \forall k \geq 0 \quad 1-x \leq \{2^k x\} \leq x\},$$

où  $\{y\}$  désigne la partie fractionnaire de  $y$ .

Il est clair que pour une suite  $A$  dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  et le nombre réel associé  $x = \sum_0^{\infty} A(n)/2^{n+1}$ , on a l'équivalence :  $x$  est dans  $\tilde{\Gamma}$  si et seulement si la suite  $A$  est dans  $\Gamma$  ou égale à  $(10)^{\omega}$ .

Les résultats de la partie précédente se traduisent alors :

- Soit  $\ell$  le nombre de Morse ( $\ell = \sum_0^{\infty} L(n)/2^{n+1}$ , où  $0L$  est la suite de Thue-Morse), alors l'ensemble  $\tilde{\Gamma} \cap [0, \ell[$  est discret dénombrable, plus précisément :

$$\tilde{\Gamma} \cap [0, \ell[ = \{r_1, r_2, \dots\}$$

où les  $r_i$  sont rationnels ( $r_1 = 2/3$ ,  $r_2 = 4/5$ ,  $r_3 = 14/17$ , ...) et  $\lim_i r_i = \ell$ ; l'ensemble  $\Gamma \cap [\ell, m]$  où  $m$  est un réel quelconque dans  $]\ell, 1[$  a la puissance du continu.

- Soit  $\alpha$  un nombre  $q$ -miroir ( $\alpha = \sum_0^{\infty} Q(n)/2^{n+1}$ , où  $Q$  est  $q$ -miroir); si  $\alpha$  est dans  $\tilde{\Gamma}$ , il existe un intervalle  $[\beta, \alpha[ \cap \tilde{\Gamma}$  qui ne contient que des rationnels, et tout intervalle  $\tilde{\Gamma} \cap [\alpha, \gamma]$ , où  $\gamma$  est strictement supérieur à  $\alpha$  a la puissance du continu. Ces nombres  $\alpha$  sont transcendants, (voir [4] et [3]).

- Les rationnels de  $\tilde{\Gamma}$  sont denses dans  $\tilde{\Gamma}$ .

-  $\tilde{\Gamma}$  a une structure fractale.

Nous nous proposons ici d'étudier de façon plus générale les ensembles  $F(\lambda)$  définis par :

$$F(\lambda) = \{x \in [0, 1]; \forall k \geq 0 \quad 1-x \leq \{\lambda^k x\} \leq x\} .$$

Comme la suite  $(\lambda^k x)_k$  est équirépartie modulo 1 pour presque tout  $x$  (voir par exemple [8]), il est clair que  $F(\lambda)$  est de mesure de Lebesgue nulle.

Nous nous proposons de montrer des propriétés de  $F(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  est entier, qui généralisent celles obtenues pour  $\tilde{\Gamma} = F(2)$ , au prix d'une extension de la notion de suite  $q$ -miroir au cas d'un alphabet à plus de deux lettres.

#### A - Définition et étude des ensembles $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$

Dans cette partie,  $\beta$  est un entier supérieur ou égal à 2,  $\mathcal{A}$  est un alphabet de  $\beta$  lettres :

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_{\beta-1}\} .$$

Notons  $\mathcal{A}^k$  l'ensemble des mots de  $k$  lettres sur  $\mathcal{A}$ , on munit chaque  $\mathcal{A}^k$  d'une part,  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  d'autre part, de l'ordre lexicographique noté  $\leq$ , induit par :

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{\beta-1} .$$

De plus  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  est muni de la topologie associée à cet ordre.

Si  $A$  est une suite à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , on note  $dA$  la suite donnée par :

$$dA(n) = A(n+1) ,$$

et  $d^k$  les itérés de  $d$ .

On définit sur  $(\cup \mathcal{A}^k) \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  un morphisme noté  $f$  ou  $\overline{\quad}$  par :

$$f(a_i) = \overline{a_i} = a_{\beta-1-i}$$

Enfin si  $m$  est un mot dans  $\cup \mathcal{A}^k$ , on note  $|m|$  le nombre de ses lettres.

I. - Définition de  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  ; lien avec les  $F(\lambda)$

1) DÉFINITION. - Soit  $\Gamma(\beta, \mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} ; A(0) = a_{\beta-1} ; \forall k \geq 0 \quad \overline{A} \leq d^k A \leq A\}$  .

Le lien entre les ensembles  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  et  $F(\lambda)$  est donné par la proposition suivante de vérification immédiate :

2) PROPOSITION. - Soit  $\lambda$  un entier supérieur ou égal à 2 ; soit  $x$  un réel dans  $[0, 1[$  .

Notons  $x = \sum_0^{\infty} A(k) / \lambda^{k+1}$  le développement  $\lambda$ -adique propre de  $x$  (c'est-à-dire tel qu'une infinité de  $A(k)$  soient distincts de  $\lambda-1$ ).

Notons, pour  $j$  tel que :  $\frac{\lambda-1}{2} \leq j \leq \lambda-1$  ,  $\mathcal{B}_j$  l'alphabet

$$\mathcal{B}_j = \{\lambda-1-j, \lambda-j, \dots, j\} = \{a_0, \dots, a_{2j+1-\lambda}\} ,$$

muni de l'ordre habituel sur les entiers.

Alors :  $x$  est dans  $F(\lambda) \cap [\frac{1}{\lambda}, \frac{j+1}{\lambda}[$  si et seulement si la suite  $A$  est dans  $\Gamma(2j+2-\lambda, \mathcal{B}_j)$  .

II. - Les suites  $q$ -miroirs ; premières propriétés

1) DÉFINITION. - Soit  $q$  un entier supérieur ou égal à 2 ; une suite  $Q$  sur  $\mathcal{A}$  est dite  $q$ -miroir si et seulement si :

$$\forall k \geq 0, \forall j \in [0, q2^k - 2], Q(q2^k + j) = f Q(j) \\ \exists i \neq 0, \forall k \geq 0, Q(q2^{2k} - 1) = a_i \quad \text{et} \quad Q(q2^{2k+1} - 1) = a_{\beta-i} .$$

Cette définition généralise celle donnée dans [2] où  $\beta$  vaut 2 et  $\mathcal{A}$  est l'alphabet  $\{0, 1\}$ , (voir aussi la deuxième partie de ce travail).

2) DÉFINITION ÉQUIVALENTE. - Notons  $(s(n))_n$  la suite de Thue-Morse :  $s(n)$  vaut 0 ou 1 suivant que le développement binaire de  $n$  comprend un nombre pair ou impair de 1 .

Soit  $q$  un entier,  $q \geq 2$ ,  $Q$  une suite sur  $\mathcal{A}$ , et  $G$  la suite définie par  $G(n) = Q(qn + q - 1)$  ; alors :

Q est q-miroir si et seulement si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- a)  $\forall u \in [0, q-2], \forall n \geq 0, Q(qn+u) = f^{s(n)} Q(u)$  ,  
 b)  $\exists i \neq 0$  avec  $G(0) = a_i, G(1) = a_{\beta-i}$  ,  
 c)  $\forall k \geq 0, \forall x \in [0, 2^k-2], \forall n \geq 0, G(2^k n+x) = f^{s(n)} G(x)$  ,  
 d)  $\forall k \geq 0, \forall n \geq 0, G(2^{k+2} n + 2^{k+2} - 1) = G(2^k n + 2^k - 1)$  .

Preuve. - Supposons d'abord que Q est q-miroir.

a) Nous allons montrer par récurrence sur k que

$$\forall j \in [0, 2^k-1], Q(qj+u) = f^{s(j)} Q(u) .$$

Pour k égal à zéro, c'est clair ; supposons le résultat prouvé pour k et soit j dans  $[2^k, 2^{k+1}-1]$ , on écrit :

$$j = 2^k + \ell, \text{ avec } 0 \leq \ell \leq 2^k - 1, \text{ puis :}$$

$$\begin{aligned} Q(qj+u) &= Q(q2^k + q\ell + u) = f Q(q\ell + u), \quad (q\ell + u \leq q2^k - q + u \leq q2^k - 2) \\ &= f^{1+s(\ell)} Q(u), \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= f^{s(j)} Q(u) . \end{aligned}$$

b) Cette propriété est claire.

c) Montrons alors par récurrence sur  $\ell$  que

$$\forall n \in [0, 2^\ell-1], \forall k \geq 0, \forall x \in [0, 2^k-2], G(2^k n+x) = f^{s(n)} G(x) .$$

Pour  $\ell = 0$ , c'est clair.

$$\begin{aligned} \text{Pour } \ell = 1 : G(2^k + x) &= Q(q2^k + qx + q-1) \\ &= f Q(qx + q-1), \quad (qx + q-1 \leq q2^k - q - 1 \leq q2^k - 2) \\ &= f G(x) . \end{aligned}$$

Supposons alors le résultat acquis pour  $\ell, \ell \geq 1$ , et soient k positif, x dans  $[0, 2^k-2]$  et n dans  $[2^\ell, 2^{\ell+1}-1]$ .

On pose  $n = 2^\ell + b$ , avec  $0 \leq b \leq 2^\ell - 1$ , et l'on a :

$$\begin{aligned} G(2^k n+x) &= G(2^{k+\ell} + 2^k b+x) = f G(2^k b+x), \quad (2^k b+x \leq 2^{k+\ell} - 2^k + x \leq 2^{k+\ell} - 2) \\ &= f^{1+s(b)} G(x), \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= f^{s(n)} G(x) . \end{aligned}$$

d) Montrons enfin la dernière condition ; nous allons procéder en deux temps :

- si  $n$  est de la forme  $2^\ell - 1$ , alors :

$$G(2^{k+2}n + 2^{k+2} - 1) = G(2^{k+2+\ell} - 1) = Q(q 2^{k+2+\ell} - 1) = Q(q 2^{k+\ell} - 1) ,$$

et

$$G(2^k n + 2^k - 1) = G(2^{k+\ell} - 1) = Q(q 2^{k+\ell} - 1) ;$$

- procédons alors par récurrence sur  $\ell$ , pour montrer que :

$$\forall n \in [0, 2^\ell - 1], \forall k \geq 0 \quad G(2^{k+2}n + 2^{k+2} - 1) = G(2^k n + 2^k - 1) .$$

Pour  $\ell$  égal à zéro, c'est clair :  $0 = 2^0 - 1$  ; supposons le résultat acquis pour  $\ell$ , et soit  $n$  dans  $[2^\ell, 2^{\ell+1} - 1]$  ; d'après ce qui précède on peut supposer que  $n$  est dans  $[2^\ell, 2^{\ell+1} - 2]$ , d'où, en écrivant  $n = 2^\ell + b$ , avec  $0 \leq b \leq 2^\ell - 1$  :

$$\begin{aligned} G(2^{k+2}n + 2^{k+2} - 1) &= G(2^{k+\ell+2} + 2^{k+2}b + 2^{k+2} - 1) \\ &= f G(2^{k+2}b + 2^{k+2} - 1), (2^{k+2}b + 2^{k+2} - 1 \leq 2^{k+\ell+2} - 2^{k+2} - 1 \leq 2^{k+\ell+2} - 2) \\ &= f G(2^k b + 2^k - 1) \quad , \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= G(2^{k+\ell} + 2^k b + 2^k - 1), (2^k b + 2^k - 1 \leq 2^{k+\ell} - 2^k - 1 \leq 2^{k+\ell} - 2) \\ &= G(2^k n + 2^k - 1) . \end{aligned}$$

- Réciproquement, supposons que  $Q$  vérifie les quatre conditions de l'énoncé ; on a d'une part, quel que soit  $k$  positif, d'après le d) avec  $n=0$ , et le b) :

$$Q(q 2^{2k} - 1) = G(2^{2k} - 1) = G(0) = a_i ,$$

$$Q(q 2^{2k+1} - 1) = G(2^{2k+1} - 1) = G(1) = a_{\beta-i} .$$

D'autre part, soit  $k$  positif, soit  $j$  dans  $[0, q 2^k - 2]$ , posons

$$j = a q + b , \text{ avec } 0 \leq b \leq q-1 , \text{ d'où } a \leq 2^k - 1$$

si  $b \leq q-2$  :

$$Q(q 2^k + j) = Q(q(2^k + a) + b) = f^{s(2^k + a)} Q(b) = f^{1+s(a)} Q(b) ,$$

et

$$f Q(j) = f Q(aq + b) = f^{1+s(a)} Q(b) ;$$



si  $b = q-1$  : alors on a l'inégalité  $a \leq 2^k - 2$ , d'où :

$$Q(q2^k + j) = Q(q(2^k + a) + q-1) = G(2^k + a) = f G(a) ,$$

et

$$fQ(j) = fQ(aq+q-1) = fG(a) .$$

### 3) Premières propriétés des suites q-miroirs

a) Si  $Q$  est une suite q-miroir sur l'alphabet  $\mathcal{A}$ , alors  $Q$  est reconnue par 2-automate, et non ultimement périodique.

b) Si  $Q$  est une suite q-miroir, alors :

$$\forall n \in [0, q2^k - 2] \quad d^{q2^k} Q(n) = fQ(n)$$

$$\forall n \in [0, q2^{k+1} - 2] \quad d^{3q2^k} Q(n) = Q(n) .$$

En particulier,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d^{q2^k} Q = fQ$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d^{3q2^k} Q = Q$ .

a) Nous utiliserons ici les deux lemmes suivants :

LEMME 1 (voir [6] ou [3]). - Soit  $g$  un entier supérieur ou égal à 2 ; une suite  $\varepsilon(n)$  sur un alphabet  $\mathcal{A}$  est reconnue par un  $g$ -automate si et seulement si l'ensemble de suites  $\{n \rightarrow \varepsilon(g^k n + \ell), k \geq 0 ; 0 \leq \ell \leq g^k - 1\}$  est fini.

LEMME 2. - Soit  $q$  un entier supérieur ou égal à 2 ; la suite  $\varepsilon(n)$  est reconnue par  $g$ -automate si et seulement s'il en est de même pour les  $q$ -suites  $\varepsilon(qn+u)$ , où  $u$  décrit  $[0, q-1]$ .

Ce lemme découle facilement du précédent :

Si  $\varepsilon(n)$  est reconnue par  $g$ -automate, il est montré dans [1] qu'il en est de même pour  $\varepsilon(an+b)$ , quels que soient  $a$  et  $b$  entiers.

Supposons à rebours que, pour chaque  $u$  de  $[0, q-1]$ , la suite  $\varepsilon(qn+u)$  soit reconnue par  $g$ -automate.

Notons, pour chaque  $u$ ,  $A_u$  et  $B_u$  les ensembles de suites :

$$A_u = \{n \rightarrow \varepsilon(q(g^k n + \ell) + u) ; k \geq 0 ; 0 \leq \ell \leq g^k - 1\}$$

$$B_u = \{n \rightarrow \varepsilon(g^k(qn+u) + \ell) ; k \geq 0 ; 0 \leq \ell \leq g^k - 1\} .$$

L'hypothèse signifie que  $A_u$  est fini, pour  $u$  dans  $[0, q-1]$ .

Par ailleurs, si  $u$  est fixé, posons pour  $k$  positif et  $\ell$  dans  $[0, g^k-1]$ ,  $g^k u + \ell = \alpha q + \beta$ , avec  $0 \leq \beta \leq q-1$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de  $k$  et  $\ell$ . La condition sur  $\beta$  implique l'inégalité  $\alpha \leq g^k - 1$ , et donc la suite :

$$n \rightarrow \varepsilon(g^k(qn+u)+\ell) = \varepsilon(q(g^k n + \alpha) + \beta)$$

est un élément de  $A_\beta$  donc de  $\bigcup_{v=0}^{q-1} A_v$ . Ainsi

$$\text{Card } B_u \leq \sum_{v=0}^{q-1} \text{Card } A_v.$$

Par conséquent, chaque  $B_u$  est fini, et comme on a :

$$\text{Card } \{n \rightarrow \varepsilon(g^k n + \ell) ; k \geq 0 ; 0 \leq \ell \leq g^k - 1\} \leq \prod_{u=0}^{q-1} \text{Card } B_u,$$

la suite  $\varepsilon$  est reconnue par  $g$ -automate.

Prouvons alors le a).

Soit  $Q$  une suite  $q$ -miroir sur l'alphabet  $\Omega$ , nous allons montrer que, pour chaque  $u$  dans  $[0, q-1]$ , l'ensemble  $A_u$  est fini, où :

$$A_u = \{n \rightarrow Q(q(2^k n + \ell) + u) ; k \geq 0 ; 0 \leq \ell \leq 2^k - 1\}.$$

Si  $u \leq q-2$ , on a d'après le 2) :

$$Q(q(2^k n + \ell) + u) = f^{s(2^k n + \ell)} Q(u) = f^{s(n) + s(\ell)} Q(u),$$

donc

$$A_u = \{(f^{s(n)} Q(u))_n, (f^{s(n)+1} Q(u))_n\}.$$

Si  $u = q-1$ , on a, d'après le 2) :

$$\text{pour } \ell \text{ dans } [0, 2^k - 2]: \quad Q(q(2^k n + \ell) + q-1) = f^{s(n)} Q(q\ell + q-1)$$

$$\text{pour } \ell \text{ égal à } 2^k - 1: \quad Q(q(2^k n + \ell) + q-1) = \begin{cases} Q(qn + q-1) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ Q(2qn + 2q-1) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'où :

$$A_u \subset \left( \bigcup_{i=0}^{\beta-1} \{(f^{s(n)} a_i)_n\} \right) \cup \{(Q(qn + q-1))_n, (Q(2qn + 2q-1))_n\}.$$

Les  $A_u$  sont donc finis et par conséquent  $Q$  est reconnue par 2-automate.

Enfin  $Q$  n'est pas ultimement périodique ; en effet, si c'était le cas il en serait de même avec les notations de 2) des suites

$$n \rightarrow Q(2qn+q-1) = G(2n) = f^{s(n)} G(0) = f^{s(n)} a_i,$$

et

$$n \rightarrow Q(2qn+2q-1) = G(2n+1) = f^{s(n)} G(1) = f^{s(n)} a_{\beta-i}.$$

Comme  $(s(n))_n$  n'est pas ultimement périodique (voir [1] par exemple), on aurait donc :

$$a_i = f(a_i) \quad \text{et} \quad a_{\beta-i} = f(a_{\beta-i}),$$

soit  $i = \beta - 1 - i$  et  $\beta - i = i - 1$  ce qui est impossible.

Prouvons enfin le b) :

Si  $n$  est dans  $[0, q2^k - 2]$ , on a :

$$d^q 2^k Q(n) = Q(q2^k + n) = f Q(n)$$

$$d^{3q} 2^k Q(n) = Q(3q2^k + n) = Q(q2^{k+1} + q2^k + n) = f Q(q2^k + n) = Q(n).$$

Si  $n$  vaut  $q2^k - 1$ , on a :

$$d^{3q} 2^k Q(n) = Q(4q2^k - 1) = Q(q2^{k+2} - 1) = Q(q2^k - 1) = Q(n).$$

Si  $n$  est dans  $[q2^k, q2^{k+1} - 2]$ , posons  $n = q2^k + \ell$ , avec  $0 \leq \ell \leq q2^k - 2$ , alors :

$$d^{3q} 2^k Q(n) = Q(q2^{k+2} + \ell) = f Q(\ell) = Q(q2^k + \ell) = Q(n).$$

### III. - Les suites q-miroirs sur $\mathcal{A}$ et les ensembles $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$

#### 1) Enoncé du théorème fondamental

THÉORÈME. - Soit  $Q$  une suite q-miroir sur l'alphabet  $\mathcal{A}$ ,  $q \geq 2$  ; notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$  et  $a_i = Q(q-1)$  ( $i \neq 0$ ).

Supposons de plus que  $Q(0)$  soit égal à  $a_{\beta-1}$  et posons  $A = (m a_{i-1})^{\omega}$   
alors :

a)  $Q$  est dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  si et seulement si  $A$  est dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  et de plus petite période  $q$ .

b) Si  $Q$  est dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , alors  $\Gamma(\beta, \alpha) \cap [A, Q[$  est discret dénombrable, plus précisément définissons  $\varphi$  par :

si  $B = (x a_j)^{\omega}$  où  $x$  est un mot sur  $\alpha$  et  $j$  différent de  $\beta-1$ , alors  
 $\varphi(B) = (x a_{j+1} \bar{x} a_{\beta-j-2})^{\omega}$  ; on peut alors écrire :

$$\Gamma(\beta, \alpha) \cap [A, Q[ = \{ \varphi^n(A) ; n \geq 0 \} .$$

De plus la suite  $n \rightarrow \varphi^n(A)$  croît vers  $Q$  .

c) Si  $Q$  est dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , quelle que soit  $R$  strictement supérieur à  $Q$  ,  $\Gamma(\beta, \alpha) \cap ]Q, R[$  a la puissance du continu.

## 2) Cinq lemmes techniques

LEMME 1. - a) Soient  $r$  et  $s$  deux mots non vides sur  $\alpha$  tels que

$$rs = s \bar{r} ,$$

alors il existe un mot  $x$  non vide, et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$c \neq 0 , \quad r = (x \bar{x})^c \quad \text{et} \quad s = (x \bar{x})^d x .$$

b) Soient  $y$  et  $z$  deux mots non vides sur  $\alpha$  tels que

$$yz = \bar{z} \bar{y} ,$$

alors il existe un mot  $x$  non vide et deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$y = (x \bar{x})^c x \quad \text{et} \quad z = \bar{x}(x \bar{x})^d .$$

LEMME 2. - a) Soient  $A$  et  $B$  deux suites sur  $\alpha$  telles qu'il existe un mot  $u$  non vide avec  $A = u \bar{u} \dots$  et que :

$$\forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k B \leq A .$$

Alors : si  $B = u \dots$  , on a  $B = (u \bar{u})^{\omega}$

si  $B = \bar{u} \dots$  , on a  $B = (\bar{u} u)^{\omega}$  .

b) Soit  $A$  une suite de  $\Gamma(\beta, \alpha)$  telle qu'il existe un mot  $u$  non vide avec  
 $A = u \bar{u} \dots$  , alors nécessairement

$$A = (u \bar{u})^{\omega} .$$

LEMME 3. - Soit  $Q$  une suite  $q$ -miroir dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$ , ( $q \geq 2$ ), soit  $m = Q(0) \dots Q(q-2)$  et  $a_i = Q(q-1)$ , ( $i \neq 0$ ), alors :

si  $m = uv$  où  $u$  est un mot non vide, on a :

$$\bar{u} \bar{v} \bar{a}_i < \bar{v} \bar{a}_i u < \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} < u v a_i .$$

LEMME 4. - Soit  $A$  une suite dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$ , de la forme  $A = ((xy)^\ell x a_j)^\omega$ , où  $\ell \geq 1$ ,  $|xy| \geq 1$ ,  $j \neq \beta-1$  et de plus petite période  $\ell(|xy|) + |x| + 1$ , alors :

$$a_{j+1} \bar{x} \bar{y} < y x a_{j+1} .$$

LEMME 5. - Soit  $A$  une suite de  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  telle que  $A = (m a_j)^\omega$ , de période minimale  $|m| + 1$ , avec  $a_j$  différent de  $a_{\beta-1}$ . Soit  $m = uv$ , où  $u$  et  $v$  sont deux mots, tels que  $u$  soit non vide, alors :

$$\bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2} < v a_{j+1} \bar{u} < u v a_{j+1} .$$

Preuve du lemme 1. - a) L'hypothèse implique :

$$r s \bar{s} = s \bar{r} \bar{s} = s (\bar{s} r) = (s \bar{s}) r$$

donc  $r$  et  $s \bar{s}$  commutent ; il existe par conséquent un mot  $z$  non vide et deux entiers  $a$  et  $b$  non nuls tels que

$$r = z^a, \quad s \bar{s} = z^b \quad (\text{voir [7], p. 9 par exemple}),$$

en particulier  $b|z| = 2|s|$  .

- Si  $b$  est pair, soit  $b = 2e$ , on a donc  $s \bar{s} = z^e z^e$  d'où  $s = \bar{s}$  ce qui implique que  $\beta$  est impair et que  $s = (a_{(\beta-1)/2})^c$  pour un certain entier  $c$ . On en déduit que  $z$  lui-même est une puissance de  $a_{(\beta-1)/2}$ , il en est alors de même pour  $r$  et le résultat est acquis.

- Si  $b$  est impair, alors  $|z|$  est pair, écrivons  $z = xy$  où  $x$  et  $y$  sont de même longueur. On a :

$$s \bar{s} = (xy)^{(b-1)/2} xy (xy)^{(b-1)/2} ,$$

d'où :

$$s = (xy)^{(b-1)/2} x \quad \text{et} \quad \bar{s} = y (xy)^{(b-1)/2}$$

on en déduit alors facilement :

$$y = \bar{x}, \quad s = (x \bar{x})^{(b-1)/2} x, \quad r = (x \bar{x})^a .$$

b) L'hypothèse implique :

$$y(z \bar{z}) = (\bar{z} \bar{y}) \bar{z} = \bar{z}(\bar{y} \bar{z}) = \bar{z}(z y) = (\bar{z} z) y .$$

On peut alors appliquer le a) et l'on obtient l'existence d'un mot  $x$  non vide et de deux entiers  $a$  et  $b$  tels que :

$$a \neq 0, \quad \bar{z} z = (x \bar{x})^a \quad \text{et} \quad y = (x \bar{x})^b x .$$

- Si  $a$  est pair, soit  $a = 2e$ , alors :

$$\bar{z} z = (x \bar{x})^e (x \bar{x})^e, \quad \text{d'où} \quad z = \bar{z} ;$$

donc  $\beta$  est impair et  $z$  est une puissance de  $a_{(\beta-1)/2}$ , donc  $x$  aussi, donc  $y$  aussi et le résultat est acquis.

- Si  $a$  est impair, on a alors :

$$\bar{z} z = (x \bar{x})^{(a-1)/2} x \bar{x} (x \bar{x})^{(a-1)/2},$$

d'où :

$$z = \bar{x} (x \bar{x})^{(a-1)/2},$$

ce qui prouve le résultat.

Preuve du lemme 2. - a) Comme il y a égalité entre  $d^k \bar{B}$  et  $\overline{d^k B}$ , il y a clairement équivalence entre :

$$\bar{A} \leq d^k B \leq A,$$

et

$$\bar{A} \leq d^k \bar{B} \leq A.$$

Il suffit donc de montrer la première assertion, et pour cela de montrer que si  $B$  est égale à  $(u \bar{u})^n u \dots$ , alors  $B$  est égale à  $(u \bar{u})^{n+1} u \dots$ , ceci quel que soit  $n$  entier ; posons donc  $B = (u \bar{u})^n u v w \dots$ , où  $|v| = |w| = |u|$ . On a alors :

$$d^{2n} |u|_B = u v \dots \leq A = u \bar{u} \dots \quad \text{d'où} \quad v \leq \bar{u},$$

$$d^{(2n+1)} |u|_B = v \dots \geq \bar{A} = \bar{u} \dots \quad \text{d'où} \quad v \geq \bar{u},$$

donc :

$$v = \bar{u} ;$$

puis

$$d^{(2n+2)} |u|_B = w \dots \leq A = u \dots \quad \text{d'où} \quad w \leq u,$$

$$d^{(2n+1)} |u|_B = \bar{u} w \dots \geq \bar{A} = \bar{u} u \dots \quad \text{d'où} \quad w \geq u,$$

et donc

$$w = u .$$

b) Le résultat découle immédiatement du a).

Preuve du lemme 3. - Comme  $Q$  est égale à  $m a_i \bar{m} a_{\beta-i} \bar{m} \bar{a}_i m \dots$ , on a :

$$Q = u v a_i \bar{u} \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i u v \dots ,$$

$$\bar{Q} = \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i u v a_{i-1} u v a_i \bar{u} \bar{v} \dots .$$

Comme  $Q$  est dans  $\Gamma(\beta, Q)$ , on a en particulier :

$$d^{3|u|+2|v|+2} Q = \bar{v} \bar{a}_i u \dots \geq \bar{Q} = \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i \dots ,$$

$$d^{2|u|+|v|+1} Q = \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \dots \leq Q = u v a_i \dots ,$$

d'où l'on tire respectivement :

$$\bar{v} \bar{a}_i u \geq \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i \quad \text{et} \quad \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \leq u v a_i .$$

Comme par ailleurs  $\bar{a}_i$  est égal à  $a_{\beta-1-i}$  donc strictement inférieur à  $a_{\beta-i}$ , on a donc :

$$\bar{u} \bar{v} \bar{a}_i \leq \bar{v} \bar{a}_i u < \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \leq u v a_i .$$

Il reste à prouver que les deux inégalités extrêmes sont strictes :

Si  $\bar{u}(\bar{v} \bar{a}_i) = (\bar{v} \bar{a}_i)u$ , on obtient, en appliquant le lemme 1, l'existence d'un mot non vide  $x$  et de deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$c \neq 0, \quad \bar{u} = (x \bar{x})^c, \quad (\bar{v} \bar{a}_i) = (x \bar{x})^d x .$$

Mais alors  $Q = u \dots = (\bar{x} x)^c \dots$ , donc d'après le lemme 2,  $Q$  est la suite  $(\bar{x} x)^w$  ce qui est impossible (on a montré qu'une suite  $q$ -miroir n'est pas périodique).

Si  $\bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} = u v a_i$ , on remarque que :

$$d^{2|u|+|v|+1} Q = \bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i u \dots \leq Q = u v a_i \bar{u} \bar{v} a_{\beta-i} \dots ,$$

d'où :

$$\bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i u \leq u v a_i \bar{u} \bar{v} a_{\beta-i} ,$$

et donc :

$$\bar{v} \bar{a}_i u \leq \bar{u} \bar{v} a_{\beta-i} .$$

Mais on vient de prouver l'inégalité stricte  $\bar{v} \bar{a}_i u > \bar{u} \bar{v} \bar{a}_i$ , comme les lettres  $\bar{a}_i = a_{\beta-1-i}$  et  $a_{\beta-i}$  sont consécutives, on a donc  $\bar{v} \bar{a}_i u = \bar{u} \bar{v} a_{\beta-i}$ . Mais cette dernière égalité est incompatible avec l'hypothèse  $\bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} = u v a_i$ , en effet, on a simultanément :

$$\bar{v} a_{\beta-i} \bar{u} = u v a_i \quad \text{et} \quad v a_i \bar{u} = u v a_{i-1}.$$

Comme  $\bar{u}$  est non vide, sa dernière lettre est donc à la fois égale à  $a_i$  et à  $a_{i-1}$ , ce qui est impossible.

Preuve du lemme 4. - On va distinguer deux cas suivant que  $y$  est vide ou non ;

- Si  $y$  est vide, il s'agit de prouver l'inégalité :  $a_{j+1} \bar{x} < x a_{j+1}$ .

Comme  $x$  commence par  $A(0) = a_{\beta-1}$  ( $|xy|$  est supérieur à 1 donc  $x$  n'est pas vide), le résultat est acquis si  $j$  est strictement inférieur à  $\beta-2$ . Supposons

$j$  égal à  $\beta-2$ , posons  $x = a_{\beta-1} z$ , il s'agit de prouver :  $a_0 \bar{z} < z a_{\beta-1}$ .

Si  $z$  est vide, c'est clair ; sinon  $z$  commence nécessairement par une lettre

distincte de  $a_0$  (si  $z$  commence par  $a_0$ , alors  $a_{\beta-1} a_0 = a_{\beta-1} \overline{a_{\beta-1}}$ ,

d'où  $A = a_{\beta-1} \overline{a_{\beta-1}} \dots$  et donc par le lemme 2,  $A$  est la suite  $(a_{\beta-1} \overline{a_{\beta-1}})^{\omega}$

de période 2 alors que la plus petite période de  $A$  est  $\ell|x| + |x| + 1$ , donc supérieure ou égale à 3) et l'inégalité proposée est bien vérifiée.

- Si  $y$  est non vide ; appelons  $a_k$  la première lettre de  $y$  et posons :

$y = a_k t$ , alors :

$$A = ((x a_k t)^{\ell} x a_j)^{\omega}.$$

De l'inégalité :

$$d^{\ell(|x|+|t|+1)} A = x a_j \dots \leq A = x a_k \dots,$$

on tire :

$$a_j \leq a_k.$$

Si l'on avait égalité entre  $a_j$  et  $a_k$ , cela impliquerait  $A = ((x a_j t)^{\ell} x a_j)^{\omega}$ .

Des deux inégalités :

$$d^{\ell(|x|+|t|+1)} A = x a_j x a_j t \dots \leq A = x a_j t x a_j \dots,$$

et

$$d^{(\ell-1)(|x|+|t|+1)+|x|+1} A = t x a_j \dots \leq A = x a_j t \dots,$$



on tire respectivement :

$$x a_j t \leq t x a_j \text{ et } t x a_j \leq x a_j t, \text{ d'où } x a_j t = t x a_j.$$

Mais alors les mots  $t$  et  $x a_j$  qui commutent sont des puissances d'un même mot  $z$  :

$$t = z^\alpha, \quad x a_j = z^\beta, \text{ d'où } A = (z^{\ell(\alpha+\beta)+\beta})^\omega$$

ce qui contredit la minimalité de la période  $|z^{\ell(\alpha+\beta)+\beta}|$  car  $\ell(\alpha+\beta)+\beta$  est au moins égal à 2.

Ainsi on a nécessairement :

$$a_j < a_k, \text{ et donc } a_{j+1} \leq a_k.$$

De l'inégalité :

$$d^{(\ell-1)(|x|+|t|+1)+|x|+1} A = t x a_j \dots \geq \bar{A} = \bar{x} \bar{a}_k \bar{t} \dots,$$

on tire, successivement :

$$t x a_j \geq \bar{x} \bar{a}_k \bar{t},$$

puis :

$$a_{j+1} \bar{x} \bar{y} = a_{j+1} \bar{x} \bar{a}_k \bar{t} \leq a_{j+1} t x a_j \leq a_k t x a_j = y x a_j < y x a_{j+1}.$$

Preuve du lemme 5. - a) Montrons l'inégalité :  $v a_{j+1} \bar{u} < u v a_{j+1}$ .

Nous allons distinguer deux cas.

Premier cas :  $|u| \geq |v|$

Posons  $u = x y$ , avec  $|x| = |v|$ , alors :  $A = (u v a_j)^\omega = (x y v a_j)^\omega$ . Comme on a :  $d^{(|x|+|y|)} A = v \dots \leq A = x \dots$ , on en déduit l'inégalité  $v \leq x$ .

- Si  $v$  est strictement inférieur à  $x$ , alors :

$$v a_{j+1} \bar{u} = v a_{j+1} \bar{x} \bar{y} < x y v a_{j+1} = u v a_{j+1}.$$

- Si  $v$  est égal à  $x$ , alors :

$$A = (x y x a_j)^\omega,$$

et donc d'après le lemme 4 :

$$v a_{j+1} \bar{u} = v(a_{j+1} \bar{x} \bar{y}) < v(y x a_{j+1}) = x y x a_{j+1} = u v a_{j+1}.$$

Deuxième cas :  $|u| < |v|$

Posons  $v = x_1 \dots x_\ell y$ , où  $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_\ell| = |u|$  et  $|y| < |u|$ .  
Alors  $A = (u x_1 \dots x_\ell y)^\omega$ .

Des inégalités  $d^k A \leq A$ , pour  $k = |u|, 2|u|, \dots, \ell|u|$ , on tire :

$$\forall j \in [1, \ell] \quad x_j \leq u.$$

- S'il existe un indice  $j$  pour lequel  $x_j$  soit strictement inférieur à  $u$ , on définit  $i$  par :

$$x_1 = \dots = x_{i-1} = u, \quad x_i < u \quad \text{si } x_1 = u,$$

$$i = 1 \quad \text{si tous les } x_j \text{ sont strictement inférieurs à } u.$$

Alors :

$$v a_{j+1} \bar{u} = x_1 \dots x_\ell y a_{j+1} \bar{u} = u^{i-1} x_i \dots x_\ell y a_{j+1} \bar{u}$$

$$< u^{i-1} u x_i \dots x_\ell y a_{j+1} = u v a_{j+1}.$$

- Si tous les  $x_j$  sont égaux à  $u$ , alors  $v$  est égal à  $u^\ell y$ , donc

$$A = (u^{\ell+1} y a_j)^\omega, \quad \text{avec } |y| < |u|.$$

On pose alors  $u = st$ , avec  $|s| = |y|$ , d'où :

$$A = ((st)^{\ell+1} y a_j)^\omega.$$

De l'inégalité  $d^{(\ell+1)}(|s|+|t|) A = y \dots \leq A = s \dots$ , on tire  $y \leq s$ .

Si  $y$  est strictement inférieur à  $s$ , alors :

$$v a_{j+1} \bar{u} = (st)^\ell y a_{j+1} (\bar{s} \bar{t}) < (st)^\ell s t y a_{j+1} = u v a_{j+1};$$

si  $y$  est égal à  $s$ , alors :

$$A = ((y t)^{\ell+1} y a_j)^\omega$$

et le lemme 4 donne :

$$v a_{j+1} \bar{u} = (y t)^\ell y (a_{j+1} \bar{y} \bar{t}) < (y t)^\ell y t y a_{j+1} = u v a_{j+1}.$$

b) Montrons enfin l'inégalité :

$$\bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2} < v a_{j+1} \bar{u},$$

autrement dit :

$$\bar{v} a_{\beta-j-2} u < u v a_{j+1}.$$

Nous allons ici aussi distinguer deux cas :

Premier cas :  $|u| \geq |v|$

Posons  $u = xy$ , avec  $|x| = |v|$ , alors  $A = (x y v a_j)^{\omega}$ .

L'inégalité  $d^{|x|+|y|} A = v \dots \geq \bar{A} = \bar{x} \dots$ , implique  $v \geq \bar{x}$ , c'est-à-dire  $\bar{v} \leq x$ .

- Si  $\bar{v}$  est strictement inférieur à  $x$ , alors :

$$\bar{v} a_{\beta-j-2} u < x y v a_{j+1} = u v a_{j+1};$$

- Si  $\bar{v}$  est égal à  $x$ , alors :

$$A = (x y \bar{x} a_j)^{\omega}.$$

$y$  ne peut être vide, sinon  $A$  serait égal à  $(x \bar{x} a_j)^{\omega}$  donc à  $(x \bar{x})^{\omega}$  d'après le lemme 2 ;  $A$  serait alors de période  $2|x|$ , alors que la période minimale de  $A$  vaut par hypothèse  $|m| + 1 = 2|x| + 1$ .

Soit alors  $a_{\ell}$  la première lettre de  $y$ , et posons  $y = a_{\ell} z$ ; de l'inégalité :

$$d^{|x|+|y|} A = \bar{x} a_j \dots \geq \bar{A} = \bar{x} \bar{a}_{\ell} \dots$$

on tire  $a_j \geq \bar{a}_{\ell}$ , c'est-à-dire  $j \geq \beta - 1 - \ell$ . On a donc :

$$\beta - 2 - j < \ell$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{v} a_{\beta-j-2} u &= x a_{\beta-j-2} x a_{\ell} z \\ &< x a z \bar{x}_{\ell} a_{j+1} = u v a_{j+1}. \end{aligned}$$

Deuxième cas :  $|u| < |v|$

Posons  $v = tz$ , avec  $|t| = |u|$ , alors  $A = (u t z a_j)^{\omega}$ . De la condition  $d^{|u|} A = t \dots \geq \bar{A} = \bar{u} \dots$ , on tire  $t \geq \bar{u}$ , d'où  $\bar{t} \leq u$ .

- Si  $\bar{t}$  est strictement inférieur à  $u$ , alors :

$$\bar{v} a_{\beta-j-2} u = \bar{t} \bar{z} a_{\beta-j-2} u < u t z a_{j+1} = u v a_{j+1}.$$

- Si  $\bar{t}$  est égal à  $u$ , alors  $A$  est égal à  $u\bar{u} \dots$  donc à  $(u\bar{u})^{\omega}$  d'après le lemme 2, donc de période  $2|u|$ , alors que la plus petite période de  $A$  vaut  $|u| + |v| + 1$  qui est strictement supérieur à  $2|u| + 1$ .

### 3) Preuve du théorème fondamental

Nous allons maintenant prouver le théorème fondamental de cette partie en trois étapes intitulées proposition 1, 2, 3, dont la réunion est le théorème annoncé.

a) PROPOSITION 1. - Soit  $Q$  une suite dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$ ,  $q$ -miroir ( $q \geq 2$ ). Notons  $m$  le mot  $Q(0) \dots Q(q-2)$  et  $a_j$  la valeur de  $Q(q-1)$  ( $a_j \neq a_0$ ). Soit enfin  $A$  la suite  $(m a_{j-1})^{\omega}$ , alors :

$A$  est dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  et de plus petite période  $q = |m| + 1$ .

Pour montrer cette assertion, il suffit de montrer que :

$$\forall k \in [1, q-1] \quad \bar{A} \leq d^k A < A.$$

Soit donc  $k$  compris entre 1 et  $q-1$ , il existe deux mots  $u$  et  $v$  sur  $\mathcal{A}$  tels que :

$$u \neq \emptyset, \quad m = uv, \quad A = (u v a_{j-1})^{\omega}, \quad d^k A = v a_{j-1} (u v a_{j-1})^{\omega}.$$

D'après le lemme 3, on a l'inégalité :

$$\bar{v} a_{\beta-j} \bar{u} > \bar{u} \bar{v} \bar{a}_j, \quad \text{soit } v a_{j-1} u < u v a_j$$

ce qui s'écrit aussi :

$$v a_{j-1} u \leq u v a_{j-1}.$$

Si cette inégalité est stricte, on a bien :

$$d^k A = v a_{j-1} u \dots < u v a_{j-1} \dots = A.$$

Montrons donc qu'il ne peut y avoir égalité : si  $(v a_{j-1})u$  et  $u(v a_{j-1})$  sont égaux, il existe (toujours d'après [7], p. 9) un mot  $z$  non vide, deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  non nuls tels que :

$$u = z^{\alpha}, \quad v a_{j-1} = z^{\beta}.$$

Ainsi  $z$  est terminé par  $a_{j-1}$ , soit  $z = x a_{j-1}$ , alors :

$$m = uv = (x a_{j-1})^{\alpha+\beta-1} x \quad \text{et} \quad Q = (x a_{j-1})^{\alpha+\beta-1} x a_j \dots$$

ce qui est impossible, car on aurait alors :

$$d^{(\alpha+\beta-1)(|x|+1)} Q = x a_j \dots > Q = x a_{j-1} \dots$$

Montrons enfin l'inégalité :  $d^k A \geq \bar{A}$  ; d'après le lemme 3, on a :

$$\bar{v} a_{\beta-j} \bar{u} < u v a_j, \text{ c'est-à-dire } \bar{v} a_{\beta-j} \bar{u} \leq u v a_{j-1},$$

soit :

$$\bar{u} \bar{v} a_{\beta-j} \leq v a_{j-1} u.$$

Si cette dernière inégalité est stricte, alors :

$$d^k A = v a_{j-1} u \dots > \bar{A} = \bar{u} \bar{v} a_{\beta-j}.$$

Si au contraire il y a égalité entre  $\bar{u}(\bar{v} a_{\beta-j})$  et  $(v a_{j-1})u$ , la deuxième partie du lemme 1 implique l'existence d'un mot  $y$  non vide et de deux entiers  $c$  et  $d$  tels que :

$$v a_{j-1} = (y \bar{y})^c y \text{ et } u = \bar{y} (y \bar{y})^d.$$

Donc :

$$u v a_{j-1} = (\bar{y} y)^{c+d+1}.$$

Si  $c+d$  est non nul,  $uv$  commence par  $\bar{y}y$  donc  $Q$  aussi, et d'après le lemme 2,  $Q$  serait égale à  $(\bar{y}y)^w$  ce qui est impossible. Par conséquent  $c$  et  $d$  sont nuls d'où :

$$v a_{j-1} = y, \quad u = \bar{y},$$

$$\text{et donc } A = (\bar{y}y)^w \text{ et } d^k A = y(\bar{y}y)^w = (y\bar{y})^w = \bar{A}.$$

b) PROPOSITION 2. - Soit  $A = (m a_k)^w$  une suite de  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , de plus petite période  $|m|+1$  et telle que  $m$  soit non vide, alors :

- $a_k$  est distinct de  $a_{\beta-1}$ ,
- $\varphi^n(A)$  est dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$  et de plus petite période  $2^n(|m|+1)$ ,
- $(\varphi^n(A))_n$  tend en croissant vers une suite  $Q$ ,  $q$ -miroir où  $q$  est égal à  $|m|+1$ , et dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$ ,
- quel que soit  $n$  positif, on a :

$$\Gamma(\beta, \alpha) \cap [\varphi^n(A), \varphi^{n+1}(A)] = \{\varphi^n(A), \varphi^{n+1}(A)\}.$$

Pour montrer que  $a_k$  est distinct de  $a_{\beta-1}$ , on remarque que  $m$  commence, comme  $A$ , par  $a_{\beta-1}$ , on pose :  $m = (a_{\beta-1})^\alpha z$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $z$  vide ou commençant par une lettre distincte de  $a_{\beta-1}$ , d'où :

$$A = ((a_{\beta-1})^\alpha z a_{\beta-1})^\omega .$$

De l'inégalité :

$$d^{|m|} A = a_{\beta-1}^{\alpha+1} z a_{\beta-1} \dots \leq A = (a_{\beta-1})^\alpha z a_{\beta-1} \dots ,$$

on déduit :

$$z = \emptyset \text{ et } A = (a_{\beta-1})^\omega .$$

Ceci est impossible car la période minimale de  $A$  est  $|m| + 1$  qui est supérieur ou égal à 2 .

Pour montrer que  $\varphi^n(A)$  est dans  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  et de plus petite période  $2^n(|m| + 1)$ , il suffit de le démontrer pour  $n$  égal à 1, et comme  $d^{|m|+1} \varphi(A)$  est égal à  $\overline{\varphi(A)}$ , il suffit de prouver :

$$\forall k \in [1, |m|], \quad \overline{\varphi(A)} < d^k \varphi(A) < \varphi(A) .$$

Pour un tel  $k$ , il existe deux mots  $u$  et  $v$ , tels que :

$$u \neq \emptyset, \quad m = uv, \quad \varphi(A) = (u v a_{j+1} \bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2})^\omega ,$$

et

$$d^k \varphi(A) = v a_{j+1} (\bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2} u v a_{j+1})^\omega .$$

D'après le lemme 5, on a :

$$\bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2} < v a_{j+1} \bar{u} < u v a_{j+1} ,$$

d'où :

$$\overline{\varphi(A)} = \bar{u} \bar{v} a_{\beta-j-2} \dots < d^k \varphi(A) = v a_{j+1} \bar{u} \dots < \varphi(A) = u v a_{j+1} .$$

Que la suite  $n \rightarrow \varphi^n(A)$  soit croissante, c'est clair ; comme on le vérifie facilement par récurrence sur  $n$ , on a :

$$\forall j \in [0, q 2^n - 2] \quad (\varphi^n A)(j) = (\varphi^{n+1} A)(j) ,$$

il est clair que la suite  $(\varphi^n A)_n$  tend vers une limite  $Q$ .

Comme  $Q(0)$  vaut  $a_{\beta-1}$  comme  $A(0)$ , et que les applications  $d$  et  $\bar{\phantom{x}}$  sont continues,  $Q$  appartient bien à  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  ; de plus  $Q$  est  $q$ -miroir par construction pour  $q = |m| + 1$ .

Montrons enfin la dernière assertion : il suffit de prouver que si  $m$  est un mot non vide,  $a_k$  une lettre distincte de  $a_{\beta-1}$ , et  $B$  une suite de  $\Gamma(\beta, \mathcal{A})$  telle que :

$$(m a_k)^{|m|} \leq B \leq (m a_{k+1} \overline{m} a_{\beta-k-2})^{(|m|)},$$

alors  $B$  est égale à  $(m a_k)^{(|m|)}$  ou à  $(m a_{k+1} \overline{m} a_{\beta-k-2})^{(|m|)}$ .

Nous allons distinguer deux cas suivant que  $B$  commence par  $m a_k$  ou  $m a_{k+1}$ .

- Si  $B$  commence par  $m a_k$ , montrons que :

$$B = (m a_k)^r \dots \Rightarrow B = (m a_k)^{r+1} \dots,$$

ce qui impliquera que  $B$  est égale à  $(m a_k)^{(|m|)}$ .

Pour cela on pose  $B = (m a_k)^r x a_\ell \dots$ , où  $|x| = |m|$ .

Des inégalités :

$$(m a_k)^{(|m|)} = (m a_k)^r m a_k \dots \leq B = (m a_k)^r x a_\ell \dots,$$

et

$$d^{r(|m|+1)} B = x a_\ell \dots \leq B = m a_k \dots,$$

on tire respectivement :

$$m a_k \leq x a_\ell, \quad x a_\ell \leq m a_k;$$

donc

$$m a_k = x a_\ell \quad \text{et} \quad B = (m a_k)^{r+1} \dots$$

- Si  $B$  commence par  $m a_{k+1}$ , posons  $B = m a_{k+1} x a_\ell$  où  $|x| = |m|$  ;

des inégalités :

$$B = m a_{k+1} x a_\ell \dots \leq (m a_{k+1} \overline{m} a_{\beta-k-2})^{(|m|)}$$

et

$$d^{(|m|+1)} B = x a_\ell \dots \geq \overline{B} = \overline{m} a_{\beta-k-2} \dots,$$

on tire respectivement :

$$x a_\ell \leq \overline{m} a_{\beta-k-2} \quad \text{et} \quad x a_\ell \geq \overline{m} a_{\beta-k-2},$$

d'où :

$$B = m a_{k+1} \overline{m} a_{\beta-k-2} \dots,$$

et donc :

$$B = (m a_{k+1} \overline{m} a_{\beta-k-2})^{(|m|)}, \quad \text{d'après le lemme 2.}$$

c) PROPOSITION 3. - Soit Q une suite q-miroir dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$  ( $q \geq 2$ ) ; pour toute suite R strictement supérieure à Q, l'ensemble  $\Gamma(\beta, \alpha) \cap ]Q, R[$  a la puissance du continu.

Quels que soient q supérieur ou égal à 2 et n positif, si une suite Q est q-miroir, elle est aussi  $2^n$  q-miroir. Il suffit donc de montrer :

Soit Q une suite r-miroir,  $r \geq 3$ , dans  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , alors il existe un ensemble ayant la puissance du continu de suites de  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , qui commencent toutes par  $Q(0) \dots Q(r-1)$ , et qui sont supérieures à Q.

Soit donc Q une telle suite, notons m le mot  $Q(0) \dots Q(r-2)$ , et  $a_j$  la valeur de  $Q(r-1)$ , ( $j \neq 0$ ), de sorte que l'on a :

$$Q = m a_j \bar{m} a_{\beta-j} \bar{m} a_{\beta-1-j} m a_j \dots$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} A &= (m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^3) (\bar{m} a_{\beta-1-j} m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^{\alpha_1}) (\bar{m} a_{\beta-1-j} m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^{\alpha_2}) \dots \\ &= M M_1 M_2 M_3 \dots \end{aligned}$$

où  $M = m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^3$ ,  $M_i = \bar{m} a_{\beta-1-j} m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^{\alpha_i}$  et où  $\alpha_i$  vaut 1 ou 2.

Ceci définit un ensemble ayant la puissance du continu de suites supérieures à Q et commençant par  $m a_j = Q(0) \dots Q(r-1)$ . En particulier, A commence par  $a_{\beta-1}$ , et, pour montrer les inégalités :

$$\forall k \geq 0 \quad \bar{A} \leq d^k A \leq A,$$

on va distinguer trois cas :

. Si  $k = 0$  : on a clairement  $A > \bar{A}$ .

. Si k est congru à 0 modulo q et non nul : alors  $d^k A$  commence par  $\bar{m} a_{\beta-j}$  ou  $\bar{m} a_{\beta-1-j} m a_j$  ou  $m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^{\alpha_i} \bar{m} a_{\beta-1-j}$ , avec  $\alpha_i$  égal à 1 ou 2.

Or A commence par  $m a_j (\bar{m} a_{\beta-j})^3$  et  $\bar{A}$  par  $\bar{m} a_{\beta-1-j} m a_{j-1}$ , et l'on a donc bien :

$$\bar{A} < d^k A < A.$$



. Si  $k$  n'est pas congru à 0 modulo  $q$ , il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que :  $u \neq \emptyset$ ,  $m = uv$  et  $d^k A$  commence par  $v a_j \bar{u}$  ou  $\bar{v} a_{\beta-j} \bar{u}$  ou  $\bar{v} a_{\beta-1-j} u$ , alors que  $A$  commence par  $u v a_j$  et  $\bar{A}$  par  $\bar{u} \bar{v} a_{\beta-1-j}$ .

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3 pour conclure à l'inégalité :

$$\bar{A} < d^k A < A .$$

## B - Retour aux $F(\lambda)$

Soit  $\lambda$  un entier supérieur ou égal à 2, on note toujours

$$F(\lambda) = \{x \in [0, 1], \forall k \geq 0 \quad 1-x \leq \{\lambda^k x\} \leq x\} .$$

Un nombre  $\alpha$  dans  $[0, 1]$  est dit  $q$ -miroir si et seulement si son développement  $\lambda$ -adique propre  $\alpha = \sum_0^{\infty} (Q(n)/\lambda^{n+1})$  est associé à une suite  $Q$   $q$ -miroir sur l'alphabet  $\{\lambda-1-j, \lambda-j, \dots, j\} = \{a_0, \dots, a_{2j+1-\lambda}\}$  pour un  $j$  tel que  $\frac{\lambda-1}{2} \leq j \leq \lambda-1$ .

## I. - Énoncé du théorème principal

**THÉORÈME.** - Soit  $\alpha$  un nombre  $q$ -miroir,  $\alpha = \sum_0^{\infty} (Q(n)/\lambda^{n+1})$ , alors :

.  $\alpha$  est dans  $F(\lambda)$  si et seulement si le nombre rationnel

$$\alpha_0 = \left( \sum_0^{q-2} \frac{Q(n)}{\lambda^{n+1}} + \frac{Q(q-1)-1}{\lambda^q} \right) \left( \frac{\lambda^q}{\lambda^q-1} \right) \text{ est dans } F(\lambda) .$$

. Si  $\alpha$  est dans  $F(\lambda)$ , alors l'intervalle  $F(\lambda) \cap [\alpha_0, \alpha[$  est discret dénombrable, plus précisément :

$$F(\lambda) \cap [\alpha_0, \alpha[ = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$$

où les  $\alpha_i$  sont des rationnels au développement  $\lambda$ -adique purement périodique et où la suite  $\alpha_i$  croît vers  $\alpha$ .

. Si  $\alpha$  est dans  $F(\lambda)$ , et quel que soit  $\beta$  strictement supérieur à  $\alpha$ , l'intervalle  $F(\lambda) \cap [\alpha, \beta]$  a la puissance du continu.

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition I.2 et du théorème III.1 du A.

Remarques. - 1) D'après la conjecture énoncée dans [3] et qui n'est que partiellement démontrée dans [9] (voir aussi [10] et [5]), les nombres  $q$ -miroirs sont transcendants puisque leurs décimales sont engendrées par automates finis, et non ultimement périodiques.

2) Nous ne savons démontrer la densité des nombres rationnels de  $F(\lambda)$  dans  $F(\lambda)$  que pour  $\lambda$  égal à 2, mais nous conjecturons que le résultat subsiste pour tout  $\lambda$  entier.

3) En revanche, la situation est moins claire pour la généralisation de la structure fractale de  $F(2)$ , la proposition ci-dessous donne un autre résultat "d'emboîtement" pour les  $F(\lambda)$ .

## II. - Une proposition d' "emboîtement" des $F(\lambda)$

PROPOSITION. - a) Si  $\mu$  est une puissance entière de  $\lambda$ , on a l'inclusion :

$$F(\lambda) \subset F(\mu) .$$

b) Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux entiers de même parité tels que  $\lambda < \mu$ , alors :  
 $F(\mu)$  contient un sous-ensemble isomorphe à  $F(\lambda)$  en tant qu'ensemble ordonné.

Le a) est trivial.

Pour montrer le b) il suffit de le prouver pour le cas où  $\mu = \lambda + 2$ .

Pour cela on écrit :

$$F(\lambda + 2) = \bigcup_{\frac{\lambda+1}{2} \leq j \leq \lambda+1} (F(\lambda+2) \cap [\frac{j}{\lambda+2}, \frac{j+1}{\lambda+2}[ ) \cup \{1\} ,$$

et on note  $G$  le sous-ensemble :

$$G = \bigcup_{\frac{\lambda+1}{2} \leq j \leq \lambda} (F(\lambda+2) \cap [\frac{j}{\lambda+2}, \frac{j+1}{\lambda+2}[ ) \cup \{1\} .$$

D'après la proposition I.2 du A, chacune des parties  $F(\lambda+2) \cap [\frac{j}{\lambda+2}, \frac{j+1}{\lambda+2}[$  est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à  $F(\lambda) \cap [\frac{j-1}{\lambda}, \frac{j}{\lambda}[$ .

En "recollant" convenablement ces isomorphismes, on obtient un isomorphisme d'ensemble ordonné entre  $G$  et

$$\frac{\lambda+1}{2} \cup_{\frac{\lambda+1}{2} \leq j \leq \lambda} (F(\lambda) \cap [\frac{j-1}{\lambda}, \frac{j}{\lambda}[) \cup \{1\}) = \frac{\lambda-1}{2} \cup_{\frac{\lambda-1}{2} \leq j \leq \lambda-1} (F(\lambda) \cap [\frac{j}{\lambda}, \frac{j+1}{\lambda}[) \cap \{1\})$$

c'est-à-dire  $F(\lambda)$ .

### Conclusion

Nous avons pu démontrer, en généralisant la notion de suite  $q$ -miroir, qu'un certain nombre des curieuses propriétés de  $F(2)$  sont aussi vraies pour les  $F(\lambda)$  où  $\lambda$  est un entier.

En revanche, nous ne savons rien dire des  $F(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  est réel quelconque, il semble pourtant raisonnable d'espérer des résultats du même type lorsque  $\lambda$  est un nombre de Pisot.

Une autre question intéressante est la suivante : l'étude de  $F(2)$  montre que le nombre de Thue-Morse est le plus petit point d'accumulation de  $F(2)$ , ce qui donne une définition arithmétique de ce nombre. Peut-on caractériser de la même manière une classe de suites automatiques comme points extrémaux de certains ensembles ? (ce qui ajouterait une quatrième caractérisation aux trois données dans [3] et rappelées dans l'introduction de la première partie de ce travail).

Nous avons seulement obtenu deux résultats dans cette voie pour le moment :

1) Identifions  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ , ce qui permet de munir l'ensemble des suites binaires d'une addition ; remarquons que  $d(A+B)$  est égal à  $dA + dB$  et posons :

$$\Gamma_J = \{A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} ; \forall k \geq 0, \bar{A} \leq d^k (\sum_{j \in J} d^j A) \leq A\},$$

où  $J$  est un ensemble fini ( $\Gamma$  correspond au cas  $J = \{0\}$ ), alors si  $A$  est dans  $\Gamma_J$  et strictement inférieure à  $L$  (où  $0L$  est la suite de Thue-Morse),  $A$  est nécessairement ultimement périodique.

2) Soit  $a$  un entier, et soit

$$\Delta = \{x \in [0, 1] ; \forall k \geq 0 \quad 1 - x \leq \{ a 2^k x \} \leq x \} ,$$

alors si  $x$  est dans  $\Delta$  et strictement inférieur au nombre  $\ell$  de Thue-Morse,  $x$  est nécessairement rationnel.

Enfin, pour des résultats d'un type assez différent sur la répartition des suites  $\{a^k x\}$ , on pourra se reporter à [11].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. ALLOUCHE, Somme des chiffres et transcendance, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 279-285.
- [2] J.-P. ALLOUCHE et M. COSNARD, en préparation.
- [3] G. CRHISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France, 108 (1980), 401-419.
- [4] M. DEKKING, Transcendance du nombre de Thue-Morse, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 (1977), série A, 157-160.
- [5] M. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE and A. J. van der POORTEN, Folds !, The Mathematical Intelligencer, 4, 3 (1982), 130-138 et 4, 4 (1982), 173-181 et 190-195.
- [6] S. EILENBERG, Automata, Languages and Machines, vol. A (1974), Academic Press.
- [7] M. A. HARRISON, Introduction to formal language theory, Addison and Wesley.
- [8] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distributions of sequences, Wiley (Interscience), 1974.
- [9] J. H. LOXTON and A. J. van der POORTEN, Arithmetic properties of a class of functional equations, J. reine u. angewandte Math., 330 (1982), 159-172.
- [10] A. J. van der POORTEN, Substitution automata, functional equations and functions "algebraic over a finite field", Macquarie Mathematics Reports, Macquarie University, may 1981.
- [11] P. SZÜSZ and B. VOLKMANN, On numbers containing each bloch infinitely often, J. reine u. angewandte Math., 339 (1983), 199-206.

QUATRIÈME PARTIE

---

OSCILLATIONS TEMPORELLES D'UN AUTOMATE CELLULAIRE

---



## Introduction

Commençons par rappeler les règles du célèbre "Jeu de la Vie". (voir par exemple [Ber]) :

On considère un quadrillage régulier du plan, chaque carré élémentaire est appelé "cellule", et une cellule peut être "vivante" ou "morte". Au départ, (instant 0 ou génération 0), il y a un nombre fini de cellules vivantes ; on passe ensuite d'une génération à la génération suivante grâce à la règle de transition décrite ci-dessous :

- appelons voisines de la cellule  $c$  les huit cellules qui ont un sommet ou un côté commun avec  $c$  ;

- règle de "naissance" : une cellule morte à l'instant  $t$  est vivante à l'instant  $t+1$  si et seulement si trois exactement de ses huit voisines sont vivantes à l'instant  $t$  ;

- règle de "mort par surpopulation" : une cellule vivante à l'instant  $t$ , et qui a quatre voisines ou plus vivantes à l'instant  $t$ , est morte à l'instant  $t+1$  ;

- règle de "mort par isolement" : une cellule vivante à l'instant  $t$ , et qui a zéro ou une de ses voisines vivante à l'instant  $t$ , est morte à l'instant  $t+1$  ;

- en dehors de ces cas, une cellule vivante (respectivement morte) à l'instant  $t$  reste vivante (respectivement morte) à l'instant  $t+1$ .

On peut alors se poser par exemple les questions suivantes :

- une configuration initiale étant donnée, comment va-t-elle évoluer dans le temps ? (autoreproduction, mort de toutes les cellules après un certain temps, modifications de la forme géométrique de la population...).

- Existe-t-il une configuration initiale telle que le nombre d'individus dans les générations successives soit non borné ?

- Existe-t-il des configurations sans antécédent ? (une telle configuration est appelée "Jardin d'Eden"...).

---

\* Les résultats cités dans cette partie sont extraits d'un travail avec Christine Reder (voir [All]).



Un tel objet est appelé automate cellulaire (on parle aussi de "réseaux d'automates", de "neural networks", de "tessellation automata", "tessellation structures", "iterative circuit computers"). A l'origine de cette notion se trouvent deux types de questions :

- il semble, intuitivement ou dans la pratique, qu'un "robot" en fabriquant d'autres, ne puisse fabriquer que des robots de "complexité" moindre. Est-il possible de ne pas perdre en complexité ? Autrement dit, peut-on imaginer des robots qui puissent s'autoreproduire ? John von Neumann répondit positivement à cette question en construisant un modèle mathématique du type "automate cellulaire" (voir [Neu] et [Bur]) ;

- peut-on modéliser certains phénomènes chimiques ou biologiques autrement que par des systèmes d'équations aux dérivées partielles (pour lesquels on ne sait démontrer le plus souvent que peu de résultats) en introduisant des modèles discrets par exemple ? (voir [Win] et l'abondante bibliographie qu'il contient).

Nous ne donnerons pas ici de définition générale de la notion d'automate cellulaire (voir par exemple [Arb], [Bur], [Cod], [Rob]), nous nous proposons seulement d'étudier l'automate cellulaire introduit par Greenberg et Hastings (voir [Gre 1], [Gre 2], [Gre 3], [Cip]) : cet automate est un mécanisme de diffusion-réaction en milieu excitable, au même titre que certains phénomènes concrets propagation de l'influx nerveux, réaction chimique oscillante de Belousov-Zhabotinski-Zafkin), ou que certains objets mathématiques (systèmes de réaction-diffusion du type Hodgkin-Huxley ou Fitz Hugh-Nagumo) ; pour ces questions nous renvoyons le lecteur à [Win] par exemple.

Nous allons étudier le comportement temporel de cet automate (pour le comportement spatio-temporel on pourra se reporter à [All 1] et [All 2]), grâce à des outils à la fois combinatoires (graphes) et topologiques ; le détail des démonstrations est donné dans [All 2].

**AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — Période des oscillations d'un automate cellulaire.**  
 Note (\*) de **Jean-Paul Allouche** et **Christine Reder**, transmise par **Robert Fortet**.

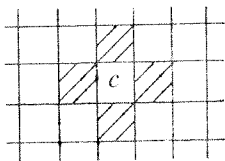
Pour une condition initiale à support borné, la suite des états d'un borné du plan engendrée par l'automate cellulaire étudié ici est périodique ou stationnaire. Nous montrons qu'en général, il n'y a qu'une valeur possible pour la période et que ce résultat ne subsiste pas dans le cas où l'automate agit sur le tore.

**AUTOMATION (THEORETICAL).** — Period of the Oscillations of a Cellular Automaton.

For an initial condition with bounded support, the sequence of the states of a bounded part of the plan generated by the cellular automaton that we study here, is either periodic or stationary. Except an exceptional case, there is only one admissible period. This result does not hold for an automaton defined on the torus.

**INTRODUCTION.** — L'automate cellulaire que nous étudions ici a été proposé dans [2], puis [1], [3] et [4], car c'est un modèle simple de générateur de solitons et de « trains de solitons » qui présente beaucoup d'analogies de comportement avec des équations aux dérivées partielles du type FitzHugh-Nagumo ou des phénomènes concrets comme la réaction de Belousov-Zhabotinski (voir [6] par exemple).

**Règle du jeu.** — Après avoir quadrillé le plan  $P$  (ou éventuellement le tore), on appelle traditionnellement *cellule* chaque carré élémentaire. Une cellule  $c$  a quatre voisines (hachurées sur la figure).



On se donne un ensemble d'états :

$$S = \{0, 1, \dots, e, e+1, \dots, N-1\} \quad (1 \leq e \leq N-2),$$

comprenant :

- l'ensemble des états excitateurs :  $E = \{1, \dots, e\}$ ;
- l'ensemble des états réfractaires :  $R = \{e+1, \dots, N-1\}$ ;
- l'état neutre : 0.

Si  $B$  est un ensemble de cellules du plan, on note  $S(B)$  l'ensemble des états de  $B$  c'est-à-dire l'ensemble des applications de  $B$  dans  $S$ .

Un automate cellulaire sur  $B$  est une application de  $S(B)$  dans lui-même. Celui que nous considérons (et que nous noterons  $\mathcal{B}$ ) est défini de la façon suivante :

Si  $U$  est un état de  $B$  et  $c$  une cellule de  $B$ , on pose :

- si  $1 \leq U(c) \leq N-2$  :  $\mathcal{B}(U)(c) = U(c) + 1$ ;
- si  $U(c) = N-1$  :  $\mathcal{B}(U)(c) = 0$ ;
- si  $U(c) = 0$  : ● si  $c$  a au moins une voisine  $d$  dans  $B$  telle que  $U(d) \in E$  alors  $\mathcal{B}(U)(c) = 1$ , ● sinon  $\mathcal{B}(U)(c) = 0$ .

Étant donné un état  $U$  de  $B$  appelé état initial on dit que  $U$  engendre une structure vivante si  $B$  contient une cellule  $c$  telle que la suite  $(\mathcal{B}^n(U)(c))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas identiquement nulle à partir d'un certain rang; on appelle *support* de  $U$  l'ensemble des cellules  $c$  de  $B$  telles que  $U(c)$  soit non nul et on dit que ce support est borné s'il ne contient qu'un nombre fini de cellules.

Dans cette Note, nous définissons la notion de squelette d'un état  $U$  de  $S(B)$  (c'est un graphe partiel du graphe de connexion associé à  $\mathcal{B}$ ). Cette notion permet de visualiser certaines propriétés de « continuité discrète » de l'état  $U$  et ainsi de mieux comprendre le rôle important joué par la topologie de l'espace des cellules dans le comportement de l'automate. Nous utilisons les propriétés du squelette pour prouver en particulier le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Supposons  $N$  supérieur ou égal à 5,  $e$  supérieur ou égal à 2. Soit  $U$  un état initial de  $P$  à support borné engendrant une structure vivante. Alors, quelle que soit la cellule  $c$  de  $P$ , la suite  $(\mathcal{P}^n(U)(c))_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période  $N$  à partir d'un certain rang ( $\mathcal{P}$  désignant l'automate défini sur  $P$ ).*

Dans [4] il est prouvé qu'il existe un entier  $T$  tel que les suites  $(\mathcal{P}^n(U)(c))_{n \in \mathbb{N}}$  sont périodiques de période  $T$  à partir d'un certain rang, mais  $T$  peut dépendre de l'état initial et il n'est donné aucun résultat sur les valeurs admissibles de  $T$ .

**1. SQUELETTE D'UN ÉTAT.** — Soit  $U$  un état de  $S(B)$ ,  $c$  et  $d$  deux cellules de  $B$  voisines. On définit la distance de  $U(c)$  à  $U(d)$  (ou distance de  $c$  et  $d$  dans  $U$ ) par :

$$\delta(U(c); U(d)) = \min(|U(c) - U(d)|; N - |U(c) - U(d)|).$$

On dira que  $c$  et  $d$  sont reliées dans  $U$  si leur distance dans  $U$  est inférieure ou égale à  $e$ , et plus précisément que  $c$  et  $d$  sont :

- fortement reliées dans  $U$  si :  $\delta(U(c); U(d)) \leq 1$ ;
- faiblement reliées dans  $U$  si :  $2 \leq \delta(U(c); U(d)) \leq e$ .

**DÉFINITION.** — On appelle squelette de  $U$  le graphe partiel du graphe de connexion de  $\mathcal{B}(^1)$ , bicolorié par les arêtes ainsi défini : entre deux cellules  $c$  et  $d$  de  $B$  voisines, on trace :

- une arête double  $c=d$  si  $c$  et  $d$  sont fortement reliées dans  $U$ ;
- une arête simple  $c-d$  si  $c$  et  $d$  sont faiblement reliées dans  $U$ .

**PROPOSITION 1.** — *Les squelettes des états  $\mathcal{B}^n(U)$  forment une suite croissante. Plus précisément, si  $c$  et  $d$  sont deux cellules de  $B$  voisines :*

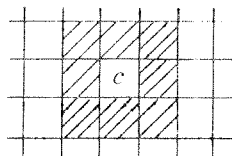
- si elles sont fortement reliées dans  $\mathcal{B}^n(U)$ , elles le sont dans  $\mathcal{B}^{n+1}(U)$ ;
- si elles sont reliées dans  $\mathcal{B}^n(U)$ , elles le sont dans  $\mathcal{B}^{n+1}(U)$ ;
- de plus, si elles sont faiblement reliées dans  $\mathcal{B}^n(U)$ , leur distance dans  $\mathcal{B}^{n+1}(U)$  est inférieure ou égale à leur distance dans  $\mathcal{B}^n(U)$ .

Pour poursuivre, il nous faut introduire quelques définitions supplémentaires :

— une chaîne de cellules est un ensemble  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  de cellules tel que  $c_i$  et  $c_{i+1}$  sont voisines distinctes pour  $i$  dans  $\{0, 1, \dots, n-1, \dots\}$  (c'est un chemin dans le graphe de connexion);

— on dira qu'un ensemble  $B$  de cellules du plan est à coupes connexes si son intersection avec toute ligne ou colonne du plan est connexe. On dira que  $B$  est un c. c. c. si  $B$  est connexe (par chaîne) et à coupes connexes;

— si  $B$  est un ensemble de cellules du plan, on note  $\bar{V}(B)$  l'ensemble constitué des cellules de  $B$  et de leurs voisines au sens large (les voisines au sens large de la cellule  $c$  sont hachurées sur la figure).



La proposition 1 permet de prouver le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — Soit  $N$  supérieur ou égal à 5,  $U$  un état du plan et  $K$  son support.

Soit  $A$  un c. c. c. contenant  $\overline{V(K)}$ . Quel que soit l'entier  $n$  et la cellule  $c$  de  $A$ , on a :

$$\mathcal{A}^n(U|_A(c)) = \mathcal{P}^n(U)(c),$$

où  $\mathcal{A}$  est l'automate défini sur  $A$ ,  $\mathcal{P}$  l'automate défini sur  $P$ , et  $U|_A$  désigne la restriction de l'état  $U$  de  $S(P)$  à  $A$ .

PROPOSITION 3. — Soit  $U$  un état initial du plan à support borné. Alors, il existe une période  $T$  telle que, quel que soit le borné  $B$  du plan, la suite des restrictions des  $\mathcal{P}^n(U)$  à  $B$  est périodique de période  $T$  à partir d'un certain rang. De plus, la suite des squelettes des  $\mathcal{P}^n(U)$  est constante à partir d'un certain rang.

Remarques. — La proposition 2 permet de justifier des études numériques sur les écrans (bornés!) d'une console et également de prouver la proposition 3.

Un cas particulier de la proposition 2 et de la proposition 3 ont été énoncés sous une forme différente dans [4].

Par abus de langage, on dira dans la suite « périodique » pour « périodique à partir d'un certain rang ».

## 2. PÉRIODES ADMISSIBLES DE L'AUTOMATE.

### PRÉLIMINAIRES.

LEMME 1. — Si  $N$  est supérieur ou égal à 3, et s'il existe une cellule périodique de période  $N$ , toute cellule est périodique de période  $N$ .

LEMME 2. — Si  $U$  est un état initial du plan à support borné, et si dans le squelette limite des  $\mathcal{P}^n(U)$ , il existe deux cellules faiblement reliées, toute cellule est périodique de période  $N$ .

LEMME 3. — Supposons  $N$  supérieur ou égal à 5. Soit  $U$  un état initial du plan à support borné engendrant une structure vivante. Si le squelette limite des  $\mathcal{P}^n(U)$  ne contient pas d'arête simple, il existe quatre cellules disposées en carré ainsi reliées :

119

120

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \text{---} & c_2 \\ & & \parallel \\ c_4 & \text{---} & c_3 \end{array} \quad (c_1 \text{ et } c_4 \text{ sont voisines mais non reliées}).$$

Pour prouver le lemme 3, on utilise les propriétés des courbes de Jordan du plan pour construire par « rétrécissement » d'une chaîne fermée continue d'indice non nul <sup>(2)</sup> une chaîne fermée  $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}, c_p = c_0$ , d'intérieur vide, telle que  $c_i$  et  $c_{i+1}$  sont reliées dans le squelette limite ( $i=0, \dots, p-2$ ),  $c_0$  et  $c_{p-1}$  ne l'étant pas. Une telle chaîne contient nécessairement quatre cellules vérifiant les conclusions du lemme.

RÉSULTATS. — Cas  $e \geq 2$ . — Le théorème énoncé dans l'introduction se déduit immédiatement du lemme 3 quand  $e$  est égal à 2. Quand  $e$  est supérieur ou égal à 3, ce même lemme prouve qu'on est dans les hypothèses du lemme 2.

Cas  $e=1$ . — Dans ce cas, toujours sous les hypothèses du théorème, et pour  $n$  assez grand, on peut prouver grâce au lemme 3 qu'il existe au moins une cellule du plan ne pouvant pas être plus de deux fois consécutivement dans l'état 0 dans les  $\mathcal{P}^n(U)$ . Par un argument topologique de même nature, on montre que n'importe quelle cellule du plan ne peut pas être plus de  $N-5$  fois consécutivement en l'état 0 dans les  $\mathcal{P}^n(U)$ . De plus le

nombre de fois où une cellule passe par l'état 1 durant un intervalle de longueur la période ne dépend pas de la cellule.

On a construit des contre-exemples dans les cas  $N=8$  ou 9 qui prouvent que ces résultats ne peuvent pas être améliorés : le nombre de périodes admissibles peut être très grand. Le cas  $e=1$  apparaît donc comme parasite et il est surprenant que l'irrégularité observée ne dépende pas du rapport entre  $e$  et  $N$ , mais de la valeur de  $e$ , si on considère l'automate comme la discrétisation d'un phénomène continu.

*Cas de l'automate agissant sur le tore.* — Les résultats précédents sont une conséquence de la structure topologique du plan. En effet, sur le tore, on montre que quel que soit  $e$ , il existe une structure périodique de période  $T$  dès que  $T$  est égal à  $N$ , ou  $T$  supérieur ou égal à  $N+1$  et divisant la longueur ou la largeur du tore.

CONCLUSION. — Nous ne nous sommes pas intéressés ici au régime transitoire. On peut se demander par exemple si pour un automate sur un borné  $B$ , on ne pourrait pas obtenir une meilleure majoration de la longueur de ce régime que le nombre  $N^{\text{card } B}$  des états de  $B$ . De plus, nous ne savons pas quelle est la probabilité d'obtenir une structure vivante ni quel est le nombre de cycles.

Cette question nous a parue liée à un problème du type « coloriage de graphe » : étant donné un graphe partiel du graphe de connexion de  $\mathcal{B}$  bicolorié par les arêtes, existe-t-il un ou plusieurs couples  $(e, N)$  et un état  $U$  tel que ce graphe soit le squelette de  $U$ ?

Enfin, nous nous demandons si ce type d'automate peut vraiment être considéré comme une discrétisation d'un phénomène continu ou s'il ne vaut pas mieux l'envisager lui-même comme un modèle à part entière.

(<sup>1</sup>) Contrairement à [5] par exemple, nous omettons dans le graphe de connexion les arêtes joignant une cellule à elle-même.

(<sup>2</sup>) Une chaîne est dite continue si c'est un chemin du squelette. L'indice ou nombre de tours d'une chaîne fermée continue se définit de façon analogue à celui d'une application continue d'une courbe fermée du plan dans le cercle (des états). Pour des définitions précises, on peut se reporter à [4], p. 36.

(\*) Remise le 21 septembre 1981, acceptée après révision le 19 avril 1982.

[1] P. CIPRIER, C. LOBRY et C. REDER, *A propos de réactions chimiques oscillantes*, Publ. A.A.I., Bordeaux, n° 7914, octobre 1979.

[2] J. M. GREENBERG et S. P. HASTINGS, *S.I.A.M., J. Appl. Math.*, 34, mai 1978.

[3] J. M. GREENBERG, B. D. HASSARD et S. P. HASTINGS, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84, n° 6, novembre 1978.

[4] J. M. GREENBERG, C. GREENE et S. P. HASTINGS, *S.I.A.M., J. Alg. Disc. Math.*, 1, n° 1, mars 1980.

[5] F. ROBERT, *Itérations discrètes : une étude métrique*, I.N.P., Grenoble.

[6] M. L. SMOES, *Chemical Waves in the Oscillatory Zhabotinskii System: a Transition from Temporal to Spatio-Temporal Organization*, Springer Series in Synergetics, 6.

U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 33405, Talence Cedex.

## Conclusion

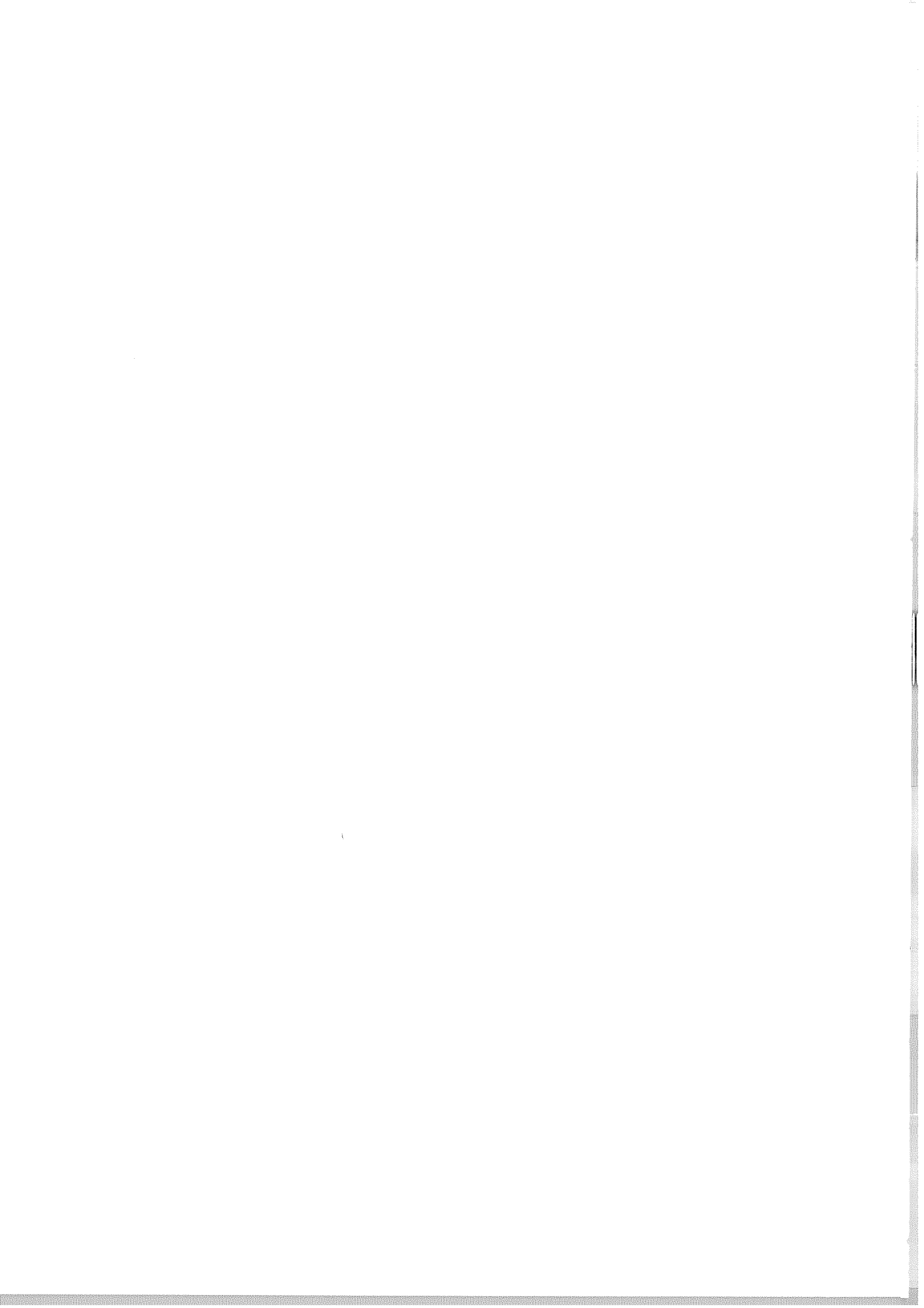
On peut obtenir pour cet automate cellulaire d'autres résultats (voir [All 2] où on trouvera aussi... beaucoup d'autres questions), certains d'entre eux peuvent être généralisés à une classe plus vaste d'automates (voir [Leg]) ; enfin des automates cellulaires de type voisin posent des problèmes intéressants (voir [Shi], [Tch], [Gol]). Nous concluons cependant en revenant à des motivations énoncées au début : est-il possible d'établir un lien entre certaines équations aux dérivées partielles et l'automate que nous étudions ? (l'automate comme discrétisation d'un modèle continu ? l'automate et les idées de l'analyse non standard ? etc...). Pour cet aspect de la théorie, nous renvoyons le lecteur à [Lob 1] et [Lob 2].

## BIBLIOGRAPHIE

- [All 1] J.-P. ALLOUCHE et Ch. REDER, Spatio-temporal oscillations of a cellular automaton in excitable media, Actes du Colloque sur les rythmes en biologie, chimie, physique et autres champs d'application, Luminy 1981, à paraître dans Lecture Notes in Biomathematics.
- [All 2] J.-P. ALLOUCHE et Ch. REDER, Oscillations spatio-temporelles engendrées par un automate cellulaire, à paraître dans Discrete applied mathematics.
- [Arb] M. A. ARBIB, Theories of abstract automata, 1969, Prentice Hall, Inc.
- [Ber] E. R. BERLEKAMP, J. H. CONWAY and R. K. GUY, Wining ways for your mathematical plays, vol. 2 (1982), 817-850, Academic Press London.
- [Bur] A. W. BURKS, Essays on cellular automata, 1970, University of Illinois Press.
- [Cip] P. CIPIÈRE, Thèse de troisième cycle, 1980, Bordeaux.
- [Cod] E. F. CODD, Cellular Automata, 1968, Academic Press, New York and London.
- [Gol] E. GOLES et J. OLIVOS, Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications, Discrete applied math. 3, 2 (1981), 93-105.
- [Gre 1] J.-M. GREENBERG and S. P. HASTINGS, Spatial patterns for discrete models in excitable media, S. I. A. M. J. Appl. Math., vol. 34, may 1978.
- [Gre 2] J.-M. GREENBERG, B. D. HASSARD and S. P. HASTINGS, Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction-diffusion equations, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 84, nov. 1978.
- [Gre 3] J.-M. GREENBERG, C. GREENE and S. P. HASTINGS, A combinatorial problem arising in the study of reaction-diffusion equations, S. I. A. M. J. Alg. Disc. Meth., vol. 1, mar. 1980.
- [Leg] M. LEGENDRE, Analyse et simulation d'un réseau d'automates, Thèse de Docteur-Ingénieur, 1982, Grenoble.
- [Lob 1] Cl. LOBRY et Ch. REDER, Micro-compartmental systems, Actes du Colloque International sur les problèmes mathématiques rencontrés dans l'étude des phénomènes naturels, à paraître, 1982, Luminy.
- [Lob 2] Cl. LOBRY et Ch. REDER, en préparation.

- [Neu] J. von NEUMANN, Theory of self reproducing automata, 1966, University of Illinois Press.
- [Rob] F. ROBERT, Itérations discrètes, une étude métrique, I. N. P. G., Grenoble.
- [Shi] R. SHINGAI, Maximum period of 2 dimensional uniform neural networks, Information and Control, 41 (1979), 324-341.
- [Tch] M. TCHUENTE, Evolution de certains automates cellulaires uniformes binaires à seuil, Séminaire d'Analyse numérique, n° 265, (IRMA, Grenoble, 1977).
- [Win] A. T. WINFREE, The geometry of biological time, Biomathematics, vol. 8, Springer.

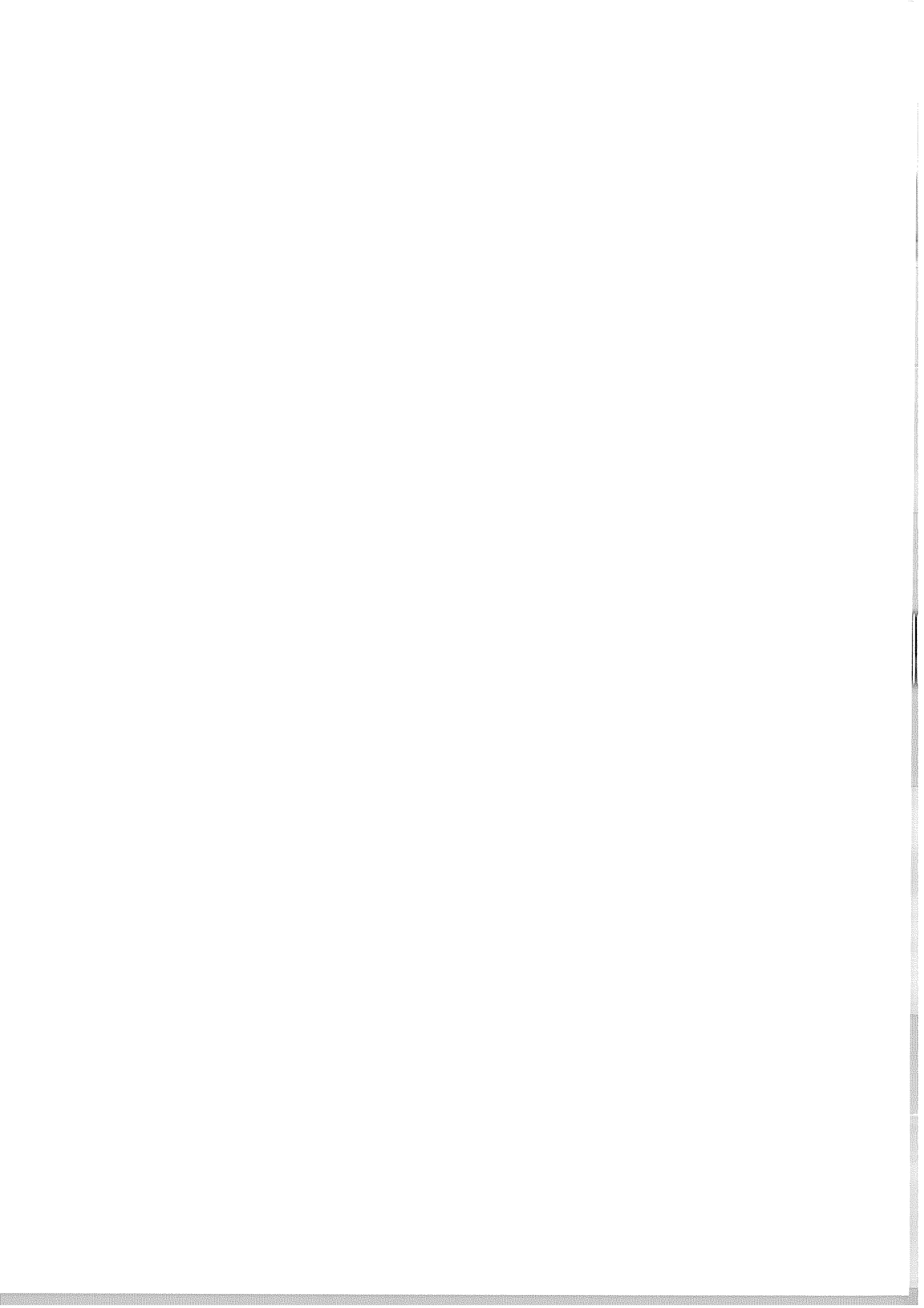




CINQUIÈME PARTIE

RÉPARTITION DE LA SUITE DES PUISSANCES  
D'UNE SÉRIE FORMELLE AUTOMATIQUE

---



Résumé. - Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps fini et soit  $\mathbb{F}_q((X))$  l'anneau des séries formelles sur  $\mathbb{F}_q$ . Si  $\theta$  est un élément de  $\mathbb{F}_q((X))$ , algébrique sur le corps des fractions rationnelles  $\mathbb{F}_q(X)$ , nous montrons que la suite  $(\theta^n)$  admet une loi logarithmique de répartition modulo 1, et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $\overline{\{\theta^n\}; n \in \mathbb{N}}$  est nulle : en particulier la suite  $(\theta^n)$  n'est pas équirépartie modulo 1.

Abstract. - Let  $\mathbb{F}_q$  be a finite field and  $\mathbb{F}_q((X))$  be the ring of formal series over  $\mathbb{F}_q$ . If  $\theta$  belongs to  $\mathbb{F}_q((X))$  and is algebraic over the field of rational functions  $\mathbb{F}_q(X)$ , we prove that the sequence  $(\theta^n)$  admits a logarithmic distribution modulo 1 and that the Hausdorff dimension of the set  $\overline{\{\theta^n\}; n \in \mathbb{N}}$  is equal to zero : as a corollary the sequence  $(\theta^n)$  is not uniformly distributed modulo one.

### Introduction

L'analogie parfois constatée entre des résultats sur les nombres réels et des résultats sur les éléments de  $\mathbb{F}_q((X))$ , l'anneau des séries formelles sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , a conduit de nombreux auteurs à étudier le problème de la répartition modulo 1 dans  $\mathbb{F}_q((X))$ , en particulier celui de la répartition modulo 1 des puissances d'une série formelle, (voir les travaux de L. Carlitz [3], A. Dijkstra [6], [7], [8], [9], [10], J. H. Hodges [14], [15], [16], B. de Mathan [20], [21], [22], H. G. Meijer [23] et G. Rhin [24], [25], [26] ; voir aussi le livre de L. Kuipers et H. Niederreiter [18]).

On sait que, comme pour le cas réel, pour presque tout  $\theta$ , (au sens de la mesure de Haar sur le groupe compact  $\mathbb{F}_q((X))/\mathbb{F}_q[X^{-1}]$ ), la suite  $(\theta^n)$  admet une loi de répartition uniforme modulo 1. Pour certains  $\theta$ , analogues aux nombres de Pisot-Vijayaragavan,  $\theta^n$  tend vers zéro modulo 1 (voir les travaux de P. Bateman et A. Duquette [2] et de M. Grandet-Hugot [12], [13], voir aussi

---

\* Ce travail est la première version d'un article avec Jean-Marc Deshouillers ([1]).

l'article de P. Liardet [19]), ce qui implique que la suite  $(\theta^n)$  admet une loi de répartition modulo 1 qui est la mesure de Dirac à l'origine.

En 1979, V. Houndonoubo a démontré que, si  $m$  et  $\ell$  sont des entiers positifs, la suite  $(X^m + X^{-\ell})^n$  admet une loi de répartition modulo 1 qui est encore la mesure de Dirac à l'origine ([17]).

Enfin un article de J.-M. Deshouillers, ([4]), étudie complètement le cas d'un  $\theta$  "rationnel décimal" (c'est-à-dire pour lequel il existe un entier  $\ell$  tel que  $X^\ell \theta$  soit un polynôme).

Nous nous proposons ici, en reprenant les méthodes de [4] et [5] d'étudier les séries formelles  $\theta$  algébriques sur  $\mathbb{F}_q[X]$ . Dans la suite, pour permettre une présentation plus aisée, on supposera  $q$  égal à 2 (le cas général demande seulement des notations ennuyeuses et de se souvenir que  $\mathbb{F}_q^*$  est cyclique). L'idée essentielle de [4] est de construire un 2-automate qui permette de calculer un bloc de chiffres de  $\theta^n$  en lisant le nombre  $n$  en binaire, nous allons généraliser cette idée ici (pour une présentation un peu plus simple qui utilise d'une part un tel automate, d'autre part un automate qui engendre les décimales de  $\theta$ , on pourra se reporter à [1]).

### Préliminaires

Si  $\eta$  est dans  $\mathbb{F}_2((X))$ , on note :

$$\eta = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_k(\eta) X^k$$

où  $e_k(\eta)$  est nul pour  $k$  assez voisin de  $-\infty$ .

On dit qu'une suite  $(\eta_n)$  de  $(\mathbb{F}_2((X)))^{\mathbb{N}}$  admet une loi de répartition (respectivement une loi logarithmique de répartition) modulo 1 si, pour tout entier  $s$  et tout élément  $B$  de  $\mathbb{F}_2^s$ , la suite

$$\{n \in \mathbb{N} ; (e_1(\eta_n), e_2(\eta_n), \dots, e_s(\eta_n)) = B\}$$

admet une densité naturelle (respectivement une densité logarithmique). En particulier, on dit que la suite  $(\eta_n)$  est équirépartie modulo 1 si la densité naturelle de l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} ; (e_1(\eta_n), e_2(\eta_n), \dots, e_s(\eta_n)) = B\}$$

existe et vaut  $2^{-s}$  pour tout  $s$  et tout  $B$  de  $\mathbb{F}_2^s$ .

Rappelons enfin que si la densité naturelle d'un ensemble  $A$  existe, il en est de même de la densité logarithmique de  $A$ , mais que la réciproque est fautive et que si les deux densités existent, elles sont égales, (où la densité naturelle de  $A$  est  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1$  et la densité logarithmique  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} \frac{1}{n}$ ).

### I. - Existence d'une loi logarithmique de répartition

THÉORÈME 1. - Soit  $\theta$  un élément de  $\mathbb{F}_2((X))$  algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$ , alors  $(\theta^n)$  admet une loi logarithmique de répartition.

Pour démontrer ce théorème nous allons prouver trois propositions qui permettent de généraliser les démonstrations de [4] et [5].

PROPOSITION 1. - Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{F}_2((X))$ , algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$ , de degré  $w$ , alors il existe  $a_1, \dots, a_w, b_1, \dots, b_w$  dans  $\mathbb{F}_2(X)$  tels que :

$$\begin{aligned} \theta^{2w+1} &= \sum_{j=1}^w a_j(X) \theta^{2j} \\ \theta &= \sum_{j=1}^w b_j(X) \theta^{2j} \end{aligned}$$

En effet, notons provisoirement  $\mathbb{F}_2(X) = K$ ;  $K(\theta)$  est de dimension  $w$  sur  $K$ , il suffit donc de prouver que  $\theta^2, \theta^4, \dots, \theta^{2w}$  est un système libre sur  $K$ .

Supposons que  $\sum_{j=1}^w \lambda_j(X) \theta^{2j} = 0$ , où les  $\lambda_j$  sont dans  $\mathbb{F}_2[X]$ , et posons  $\lambda_j(X) = p_j(X^2) + X q_j(X^2)$  où les  $p_j$  et  $q_j$  sont dans  $\mathbb{F}_2[X]$ .

On a donc :

$$\left( \sum_{j=1}^w p_j(X^2) \theta^{2j} \right) + X \left( \sum_{j=1}^w q_j(X^2) \theta^{2j} \right) = 0.$$

Comme  $\theta^2 = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(\theta) X^k \right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(\theta) X^{2k}$  est dans  $\mathbb{F}_2((X^2))$ , on a :

$$\sum_{j=1}^w p_j(X^2) \theta^{2j} = \sum_{j=1}^w q_j(X^2) \theta^{2j} = 0,$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^w p_j(X) \theta^j = \sum_{j=1}^w q_j(X) \theta^j = 0;$$

comme  $\theta$  est de degré  $w$  sur  $K$ , on en déduit  $p_j = q_j = 0$  pour chaque  $j$ ,

d'où  $\lambda_j = 0$ .

Il existe alors un entier, que l'on peut supposer pair,  $T$  tel que :

$$a_j(X) = \sum_{k=-T}^T \alpha_{j,k} X^k + \sum_{k=T+1}^{+\infty} \beta_{j,k} X^k$$

$$b_j(X) = \sum_{k=-T}^T \gamma_{j,k} X^k + \sum_{k=T+1}^{\infty} \delta_{j,k} X^k,$$

où  $\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}, \gamma_{j,k}, \delta_{j,k}$  sont dans  $\mathbb{F}_2$ , et :

$$\forall j \in [1, w] \quad \forall k \geq T+1 \quad \begin{cases} \beta_{j,k} = \beta_{j, T+k} \\ \delta_{j,k} = \delta_{j, T+k} \end{cases}.$$

PROPOSITION 2. - Soit  $\eta = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r(\eta) X^r$  un élément de  $\mathbb{F}_2((X))$  ( $e_r(\eta)$  est nul pour  $r$  assez proche de  $-\infty$ ) ; on pose :

$$m(\eta, s, t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-\ell t}(\eta)$$

(la somme est finie).

a)  $a_j(X)\eta = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e_s(a_j(X)\eta) X^s$ , avec :

$$e_s(a_j(X)\eta) = \sum_{r=s-T}^{s+T} \alpha_{j, s-r} e_r(\eta) + \sum_{n=1}^T \beta_{j, n+T} m(\eta, s-n, T)$$

et un résultat analogue pour  $b_j(X)\eta$ .

b) Soit  $u$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $v = \lfloor \frac{-u}{T} \rfloor$ , alors :

$$\text{si } u > 0 : \quad m(\eta, u+vT, T) = m(\eta, u, T) - \sum_{k=1}^{-v} e_{u-kT}(\eta),$$

$$\text{si } u \leq 0 : \quad m(\eta, u+vT, T) = m(\eta, u, T) + \sum_{k=0}^{v-1} e_{u+kT}(\eta).$$

Les démonstrations sont immédiates.

Soit alors  $\theta = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e_s(\theta) X^s$ , algébrique sur  $\mathbb{F}_2((X))$ , de degré  $w$ .

Pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on note :

$$M(\lambda) = (m(\theta^{(2w+1)\lambda+1}, -T+1, T), m(\theta^{(2w+1)\lambda+1}, -T+2, T), \dots, m(\theta^{(2w+1)\lambda+1}, 0, T), \\ \dots, m(\theta^{(2w+1)(\lambda+1)}, -T+1, T), \dots, m(\theta^{(2w+1)(\lambda+1)}, 0, T))$$

$$B_{\ell}(\lambda) = (e_{-T+1}(\theta^{(2w+1)\lambda+1}), \dots, e_{\ell-T}(\theta^{(2w+1)\lambda+1}), \dots, \\ e_{-T+1}(\theta^{(2w+1)(\lambda+1)}), \dots, e_{\ell-T}(\theta^{(2w+1)(\lambda+1)})).$$

$M(\lambda)$  est dans  $\mathbb{F}_2^{T(2w+1)}$  et  $B_{\ell}(\lambda)$  dans  $\mathbb{F}_2^{\ell(2w+1)}$ .

On peut alors énoncer la proposition fondamentale :

PROPOSITION 3. - Soit  $L$  un entier fixé, supérieur ou égal à  $2T$ , alors il existe deux applications  $\sigma$  et  $\tau$ , de  $\mathbb{F}_2^{(2w+1)T} \times \mathbb{F}_2^{(2w+1)L}$  dans lui-même, telles que :

$$\sigma(M(\lambda), B_L(\lambda)) = (M(2\lambda), B_L(2\lambda))$$

$$\tau(M(\lambda), B_L(\lambda)) = (M(2\lambda+1), B_L(2\lambda+1)).$$

L'idée est la suivante : la connaissance de  $\theta^{(2w+1)\lambda+1}, \dots, \theta^{(2w+1)(\lambda+1)}$  implique celle de  $\theta^{(2w+1)2\lambda+2}, \dots, \theta^{(2w+1)(2\lambda+2)}$ , puisque

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} e_r(\eta) X^r\right)^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} e_r(\eta) X^{2r}.$$

A partir des puissances paires de  $\theta$  écrites ci-dessus, et en utilisant les propositions 1 et 2, on peut calculer les puissances impaires de  $\theta$  :

d'une part l'égalité  $\theta^{2w+1} = \sum_{j=1}^w a_j(X) \theta^{2j}$  implique

$$\theta^{(2w+1)(2\lambda+1)+2k} = \sum_{j=1}^w a_j(X) \theta^{2j+2\lambda(2w+1)+2k}$$

d'où le calcul de  $\theta^{(2w+1)(2\lambda+1)+2k}$  pour  $k$  dans  $[0, w]$  ;

d'autre part l'égalité  $\theta = \sum_{j=1}^w b_j(X) \theta^{2j}$  implique

$$\theta^{(2w+1)2\lambda+2k+1} = \sum_{j=1}^w b_j(X) \theta^{2j+2k+2\lambda(2w+1)},$$

d'où le calcul de  $\theta^{(2w+1)2\lambda+2k+1}$  pour  $k$  dans  $[0, w]$ .

Détaillons le calcul qui permet de construire  $\tau$ , la construction de  $\sigma$  s'effectuant de manière analogue.



A - Calcul de  $m(\theta^u, s, T)$  où  $u \in [(2w+1)(2\lambda+1)+1, (2w+1)(2\lambda+2)]$ ;  $s \in [-T+1, 0]$

Premier cas :  $u$  pair

Alors  $u = 2x$  où  $x \in [(2w+1)\lambda + w + 1, (2w+1)(\lambda + 1)]$ .

$$m(\theta^{2x}, s, T) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-\ell T}(\theta^{2x})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ est impair (se souvenir que } T \text{ est pair)} \\ \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s/2 - \ell T/2}(\theta^x) & \text{si } s \text{ est pair.} \end{cases}$$

On écrit alors :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s/2 - \ell T/2}(\theta^x) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s/2 - \ell T}(\theta^x) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s/2 - (2\ell+1)T/2}(\theta^x) \\ + e_{s/2 - T/2}(\theta^x) \end{cases}$$

$$= m(\theta^x, s/2, T) + m(\theta^x, \frac{s-T}{2}, T) + e_{s/2 - T/2}(\theta^x),$$

et on remarque que ces quantités sont connues dès lors que  $M(\lambda)$  et  $B_L(\lambda)$  sont connues.

Deuxième cas :  $u$  impair

Alors  $u = (2w+1)+2y$  où  $y \in [1+(2w+1)\lambda, w+(2w+1)\lambda]$ .

$$m(\theta^u, s, T) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-\ell T}(\theta^{2w+1+2y}).$$

Comme  $\theta^{2w+1+2y} = \sum_{j=1}^w a_j(X) \theta^{2(j+y)}$ , on a :

$$e_{s-\ell T}(\theta^{2w+1+2y}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^w \sum_{r=s-\ell T-T}^{s-\ell T+T} \alpha_{j, s-\ell T-r} e_r(\theta^{2(j+y)}) \\ + \sum_{j=1}^w \sum_{n=1}^T \beta_{j, n+T} m(\theta^{2(j+y)}, s-\ell T-n, T) \end{cases}$$

d'où :

$$m(\theta^u, s, T) = S_1 + S_2$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=1}^w \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{r=s-\ell T-T}^{s-\ell T+T} \alpha_{j, s-\ell T-r} e_r(\theta^{2(j+y)})$$

et

$$S_2 = \sum_{j=1}^w \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^T \beta_{j, n+T} m(\theta^{2(j+y)}, s-\ell T-n, T).$$

Commençons par  $S_1$  :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^w \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{q=-T}^T \alpha_{j,q} e^{s-\ell T-q} (\theta^{2(j+y)}) \\ &= \sum_{j=1}^w \sum_{q=-T}^T \alpha_{j,q} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e^{s-\ell T-q} (\theta^{2(j+y)}) \\ &\quad q \equiv s(2) \\ &= \sum_{j=1}^w \sum_{q=-T}^T \alpha_{j,q} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e^{(s-q)/2-\ell T/2} (\theta^{j+y}) . \\ &\quad q \equiv s(2) \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e^{(s-q)/2-\ell T/2} (\theta^{j+y}) &= \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e^{(s-q)/2-\ell T} (\theta^{j+y}) \\ + \sum_{\ell=1}^{+\infty} e^{(s-q)/2-(2\ell-1)T/2} (\theta^{j+y}) \end{cases} \\ &= m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2}, T) + m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2}, T) . \end{aligned}$$

On calcule  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2}, T)$  en utilisant la proposition 2 b) :

. si  $\frac{s-q}{2} > 0$ , soit  $v = [\frac{q-s}{2T}]$ , alors :

$$m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2}, T) = m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2} + vT, T) + \sum_{k=1}^{-v} e^{(s-q)/2-kT} (\theta^{j+y}) .$$

On remarque que  $\frac{s-q}{2} + vT$  est dans  $[-T+1, 0]$  et que, pour  $k=1, 2, \dots, -v$ ,  $\frac{s-q}{2} - kT$  est dans  $[-T+1, -T/2]$ , donc  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2}, T)$  se calcule à partir de  $M(\lambda)$  et  $B_L(\lambda/2)$ .

. si  $\frac{s-q}{2} \leq 0$ , comme  $\frac{s-q}{2} \geq \frac{-T+1-T}{2}$ , d'où  $\frac{s-q}{2} \geq -T+1$ ,  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q}{2}, T)$  figure dans  $M(\lambda)$ .

On calcule pareillement  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2}, T)$  :

. si  $\frac{s-q+T}{2} > 0$ , soit  $v = [\frac{-s+q-T}{2T}]$ , alors :

$$m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2}, T) = \begin{cases} m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2} + vT, T) \\ + \sum_{k=1}^{-v} e^{(s-q+T)/2-kT} (\theta^{j+y}) . \end{cases}$$

On remarque que  $\frac{s-q+T}{2} + vT$  est dans  $[-T+1, 0]$  et que, si  $k=1, 2, \dots, -v$ ,  $\frac{s-q+T}{2} - kT$  est dans  $[-T+1, 0]$ , donc  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2}, T)$  se calcule à partir de  $M(\lambda)$  et  $B_L(\lambda)$ .

. si  $\frac{s-q+T}{2} \leq 0$ , comme  $\frac{s-q+T}{2} \geq \frac{-T+1+T-T}{2} > -T$ ,  $m(\theta^{j+y}, \frac{s-q+T}{2}, T)$  figure dans  $M(\lambda)$ .

Passons alors à  $S_2$  :

$$S_2 = \sum_{j=1}^w \sum_{n=1}^T \beta_{j, n+T} \sum_{\ell=1}^{+\infty} m(\theta^{2(j+y)}, s-\ell T-n, T).$$

On s'intéresse donc aux sommes  $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{\ell'=1}^{+\infty} e^{s-\ell T-n-\ell' T} (\theta^{2(j+y)})$ , où  $s$  est dans  $[-T+1, 0]$  et  $n$  dans  $[1, T]$ .

Si  $s-n$  est impair, une telle somme double est nulle, si  $s-n$  est pair, elle vaut :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{\ell'=1}^{+\infty} e^{(s-n)/2 - \ell T/2 - \ell' T/2} (\theta^{j+y}),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{r=2}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{\ell, \ell' \geq 1 \\ \ell + \ell' = r}} 1 \right) e^{(s-n)/2 - rT/2} (\theta^{j+y}).$$

Comme  $\sum_{\substack{\ell, \ell' \geq 1 \\ \ell + \ell' = r}} 1 = r-1 = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } r \text{ est pair,} \end{cases}$

la somme qui nous intéresse vaut donc :

$$\sum_{r=1}^{+\infty} e^{(s-n)/2 - rT} (\theta^{j+y}) = m(\theta^{j+y}, \frac{s-n}{2}, T).$$

Cette quantité est connue dès qu'on connaît  $M(\lambda)$  et  $B_L(\lambda)$  d'après le calcul fait pour  $S_1$  (remplacer  $q \in [-T, T]$  par  $n$  qui appartient à  $[1, T]$ ).

B - Calcul de  $e_s(\theta^u)$ , où  $u \in [(2w+1)(2\lambda+1)+1, (2w+1)(2\lambda+2)]$ ;  $s \in [-T+1, L-T]$

Premier cas : u pair

Alors  $u = 2x$  où  $x$  est dans  $[(2w+1)\lambda+w+1, (2w+1)(\lambda+1)]$ .

$$e_s(\theta^u) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ est impair} \\ e_{s/2}(\theta^x) & \text{si } s \text{ est pair.} \end{cases}$$

La connaissance de  $B_L(\lambda)$  permet donc de calculer les  $e_s(\theta^u)$ .

Deuxième cas : u impair

Alors  $u = 2w+1+2y$  où  $y$  est dans  $[(2w+1)\lambda+1, (2w+1)\lambda+w]$ .

$$\theta^u = \sum_{j=1}^w a_j(X) \theta^{2(j+y)},$$

d'où :

$$e_s(\theta^u) = S_3 + S_4,$$

où :

$$S_3 = \sum_{j=1}^w \sum_{r=s-T}^{s+T} \alpha_{j, s-r} e_r(\theta^{2(j+y)}),$$

et

$$S_4 = \sum_{n=1}^T \beta_{j, n+T} m(\theta^{2(j+y)}, s-n, T).$$

Commençons par  $S_3$  :

$S_3$  ne dépend que des  $e_r(\theta^{2(j+y)})$  où  $r$  est dans  $[s-T, s+T]$ .

$$e_r(\theta^{2(j+y)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair} \\ e_{r/2}(\theta^{j+y}) & \text{si } r \text{ est pair.} \end{cases}$$

On remarque alors que  $r/2$  appartient à  $[-T+1, \frac{L}{2}]$  qui est inclus dans  $[-T+1, L-T]$  puisque  $L$  est supérieur ou égal à  $2T$ ;  $S_3$  se calcule donc à partir de  $B_L(\lambda)$ .

Calculons alors  $S_4$  :

On s'intéresse aux sommes  $\sum_{\ell=+1}^{+\infty} e_{s-n-\ell T}(\theta^{2j+2y})$  où  $n$  est dans  $[1, T]$ .

Si  $s-n$  est impair, une telle somme vaut 0 ; si  $s-n$  est pair, elle vaut  $\sum_{\ell=+1}^{+\infty} e_{(s-n)/2-\ell T/2}(\theta^{j+y})$  et il suffit alors de se reporter aux calculs faits pour  $S_1$  (remplacer  $q$  qui décrit  $[-T, T]$  par  $n$  qui décrit  $[1, T]$ ) pour conclure que  $S_4$  se calcule à partir de  $M(\lambda)$  et  $B_L(\lambda)$ .

Nous sommes alors en mesure de démontrer le théorème 1.

Soient  $C_1, \dots, C_U$ , où  $U = 2^{(2w+1)(L+T)}$  les éléments de  $\mathbb{F}_2^{T(2w+1)} \times \mathbb{F}_2^{L(2w+1)}$  rangés dans l'ordre lexicographique.

On note :

$$a_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(C_v) \neq C_u \text{ et } \tau(C_v) \neq C_u \\ 1 & \text{si } \sigma(C_v) = C_u \text{ et } \tau(C_v) = C_u \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sigma(C_v) = C_u \text{ et } \tau(C_v) \neq C_u \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sigma(C_v) \neq C_u \text{ et } \tau(C_v) = C_u \end{cases} .$$

Soit  $A$  la matrice  $(a_{u,v})$ , élément de  $\mathcal{M}_U(\mathbb{C})$ .

Si  $u$  est dans  $[1, U]$ ; et  $k$  dans  $[0, 2^K]$ , on note

$$\mathcal{Q}_u = \{ \lambda \in \mathbb{N}^* ; (M(\lambda), B_L(\lambda)) = C_u \}$$

et

$$N(u, K, k, j) = \frac{1}{2^{j-K}} \text{Card} \{ \lambda \in \mathcal{Q}_u \cap [2^{j+k} 2^{j-K}, 2^{j+(k+1)} 2^{j-K}] \}$$

où  $j > K$ .

On se convainc alors facilement des résultats suivants :

La matrice  $A$  est stochastique, c'est-à-dire à coefficients réels positifs ou nuls et telle que la somme des éléments de chaque colonne vaille 1.

Quels que soient  $K, k, j$  avec  $j > K$ , on a :

$$\begin{bmatrix} N(1, K, k, j+1) \\ \vdots \\ N(U, K, k, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} N(1, K, k, j) \\ \vdots \\ N(U, K, k, j) \end{bmatrix} .$$

La suite  $\mathcal{Q}_u$  admet une densité logarithmique si et seulement si la limite suivante existe :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{J \rightarrow +\infty} \frac{1}{J} \sum_{K \leq j < J} \sum_{0 \leq k < 2^K} \frac{1}{2^{K+k}} N(u, K, k, j) ;$$

(si cette limite vaut  $\alpha$ , la densité logarithmique de  $\mathcal{Q}_u$  vaut  $\alpha / \text{Log } 2$ ).

Comme  $A$  est stochastique, ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1 et ses valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité, (voir [11]).

Il existe donc  $R$  tel que, quels que soient  $u, K, k, r$ , avec  $r$  dans  $[0, R[$ , la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $N(u, K, k, nR+r)$  existe.

Soit :

$$L(u, K, k) = \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} N(u, K, k, nR+r),$$

alors la limite de  $\frac{1}{J} \sum_{K \leq j < J} \sum_{0 \leq k < 2^K} \frac{1}{2^{K+k}} N(u, K, k, j)$  existe et vaut

$$L_K = \sum_{0 \leq k < 2^K} \frac{1}{2^{K+k}} L(u, K, k).$$

De la relation évidente  $N(u, K, k, j) = \frac{1}{2}(N(u, K+1, 2k, j) + N(u, K+1, 2k+1, j))$ , on tire  $L(u, K, k) = \frac{1}{2}(L(u, K+1, 2k) + L(u, K+1, 2k+1))$ ; donc  $L_K$  vérifie :

$$L_{K+1} = L_K + \sum_{0 \leq k < 2^K} \left( \frac{1}{2^{K+1+2k+1}} - \frac{1}{2^{K+1+2k}} \right) L(u, K+1, 2k+1)$$

d'où

$$|L_{K+1} - L_K| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{2^K} \sum_{0 \leq k < 2^K} \frac{L(u, K+1, 2k+1)}{2^{K+k}},$$

d'où

$$|L_{K+1} - L_K| \leq \frac{1}{2^K} \frac{L_K}{2}.$$

On en déduit que la suite  $L_K$  est de Cauchy et donc que la suite  $\mathcal{Q}_u$  admet une **densité logarithmique**.

Comme une réunion finie de suites disjointes admettant chacune une densité logarithmique admet une densité logarithmique, on en déduit que, pour chaque  $B$  dans  $\mathbb{F}_2^s$ , pour chaque  $j$  dans  $[1, 2w+1]$ , la suite des  $\lambda$  tels que

$$(e_1(\theta^{(2w+1)\lambda+j}), \dots, e_s(\theta^{(2w+1)\lambda+j})) = B$$

admet une densité logarithmique.

Il est alors facile d'en conclure que la suite des  $\lambda$  tels que  $(e_1(\theta^\lambda), \dots, e_s(\theta^\lambda)) = B$  admet aussi une densité logarithmique, et le théorème 1 est démontré.

II. - Dimension de Hausdorff de l'ensemble  $\overline{\{\theta^n\}}; n \in \mathbb{N}$

THEOREME 2. - Soit  $\theta$  un élément de  $\mathbb{F}_2((X))$  algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$ , alors l'ensemble  $\overline{\{\theta^n\}}; n \in \mathbb{N}$  est de dimension de Hausdorff nulle ; en particulier  $(\theta^n)$  n'est pas équirépartie modulo 1 .

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord prouver une proposition qui généralise la proposition 1 :

PROPOSITION 4. - Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{F}_2((X))$ , algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$ , de degré  $w$  ; soit  $x$  un entier supérieur ou égal à 1 , alors :

$$\{\theta^{2^x}, \theta^{2 \cdot 2^x}, \theta^{3 \cdot 2^x}, \dots, \theta^{w \cdot 2^x}\}$$

est une base de  $\mathbb{F}_2(X)(\theta)$  sur  $\mathbb{F}_2(X)$ .

En effet, soit  $K = \mathbb{F}_2(X)$ , la démonstration de la proposition 1 établit que  $K(\theta) = K(\theta^2)$ , d'où en itérant :

$$K(\theta) = K(\theta^2) = K(\theta^4) = \dots = K(\theta^{2^x}) .$$

Notons alors pour  $\eta = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r(\eta) X^r$  dans  $\mathbb{F}_2((X))$ ,  $S$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $L \geq 1$ ,  $B(\eta, S, L) = (e_{S+1}(\eta), \dots, e_{S+L}(\eta))$ , élément de  $\mathbb{F}_2^L$  ; nous allons montrer qu'il n'y a "pas beaucoup de blocs"  $B(\theta^m, S, L)$  lorsque  $\theta$  est algébrique :

PROPOSITION 5. - Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{F}_2((X))$ , algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$ , de degré  $w$  . Soit  $x$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $i$  dans  $[1, 2^x]$ , alors il existe un entier  $T_i$  tel que pour  $((L+2T_i)/2^x + 1 + T_i)^w$  tout  $L \geq 1$  il existe une application  $\varphi_i$  de  $\mathbb{F}_2$  dans  $\mathbb{F}_2^L$  telle que :

$$\{B \in \mathbb{F}_2^L ; \exists m \geq 0 \quad m \equiv i(2^x), \exists S \in \mathbb{Z}, B(\theta^m, S, L) = B\} \subset \text{Im } \varphi_i .$$

COROLLAIRE. -  $\text{Card} \{B \in \mathbb{F}_2^L ; \exists m \geq 0, \exists S \in \mathbb{Z}, B(\theta^m, S, L) = B\} \leq 2^t$   
avec  $t = x + w \left( \frac{L+2T}{2^x} + 1 + T \right)$  et  $T = \sup \{T_i ; i \in [1, 2^x]\}$  .

En effet, d'après la proposition 4, il existe  $a_{i,j}(X)$   $j=1, 2, \dots, w$ , des éléments de  $\mathbb{F}_2(X)$  tels que

$$\theta^i = \sum_{j=1}^w a_{i,j}(X) \theta^{2^x j};$$

d'où, pour  $\lambda \geq 0$  quelconque,

$$\theta^{i+2^x \lambda} = \sum_{j=1}^w a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)}.$$

Comme les  $a_{i,j}(X)$  sont dans  $\mathbb{F}_2(X)$  pour  $j=1, 2, \dots, w$ , il existe un entier  $T_i$  et des éléments de  $\mathbb{F}_2$ ,  $\alpha_{i,j,k}$ ,  $\beta_{i,j,n}$  tels que :

$$a_{i,j}(X) = \sum_{k=-T_i}^{T_i} \alpha_{i,j,k} X^k + \sum_{n=1}^{T_i} \beta_{i,j,n} \sum_{\ell=1}^{+\infty} X^{\ell T_i + n};$$

d'où :

$$a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e_s(a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)}) X^s$$

avec :

$$e_s(a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)}) = \begin{cases} \sum_{r=s-T}^{s+T} \alpha_{i,j,s-r} e_r(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \\ + \sum_{k=1}^{T_i} \beta_{i,j,k} \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-k-\ell T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \end{cases}.$$

Pour calculer les  $e_s(a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)})$  pour  $s \in [S+1, S+L]$ , on doit donc connaître les  $e_r(\theta^{2^x(j+\lambda)})$  pour  $r \in [S+1-T, S+L+T]$  et les

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-k-\ell T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) = m(\theta^{2^x(j+\lambda)}, s-k, T) \text{ pour } s \in [S+1, S+L], k \in [1, T].$$

Or, pour  $(s,k) \in [S+1, S+L] \times [1, T]$ , posons  $v = \lceil \frac{s-k-S-1}{T} \rceil + 1$ , alors  $v \geq 0$  et  $S+1-T \leq s-k-vT < S+1$ ; de plus :

$$\begin{aligned} m(\theta^{2^x(j+\lambda)}, s-k, T) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} e_{s-k-\ell T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \\ &= \sum_{n=1-v}^{+\infty} e_{s-k-(v+n)T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} e_{s-k-vT-nT}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \\ + \sum_{n=1-v}^0 e_{s-k-(v+n)T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) \end{cases} \end{aligned}$$



autrement dit :

$$m(\theta^{2^x(j+\lambda)}, s-k, T) = \begin{cases} m(\theta^{2^x(j+\lambda)}, s-k-vT, T) \\ + \sum_{\ell=1}^v e_{s-k-\ell T}(\theta^{2^x(j+\lambda)}) . \end{cases}$$

Ainsi les  $e_s(a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)})$ , pour  $s \in [S+1, S+L]$ , se calculent à partir des  $e_r(\theta^{2^x(j+\lambda)})$  pour  $r \in [S+1-T, S+L+T]$  et des  $m(\theta^{2^x(j+\lambda)}, y, T)$  pour  $y \in [S+1-T, S+1[$ , c'est-à-dire  $y \in [S+1-T, S]$ .

On remarque alors que  $e_r(\theta^{2^x(j+\lambda)}) = 0$  si  $r \neq 0 (2^x)$ , pour connaître les  $e_r(\theta^{2^x(j+\lambda)})$  pour  $r \in [S+1-T, S+L+T]$ , il suffit donc de connaître

$[\frac{S+L+T}{2^x} - \frac{S+1-T}{2^x}] + 1 \leq \frac{L+2T}{2^x} + 1$  décimales ; quant aux  $m(\theta^{2^x(j+y)}, y, T)$

pour  $y \in [S+1-T, S]$ , ils représentent  $T$  éléments de  $\mathbb{F}_2$ , d'où la construction de l'application  $\varphi_i : \mathbb{F}_2^{((L+2T)/2^x + 1 + T)w} \longrightarrow \mathbb{F}_2^L$  telle que

$$\{B \in \mathbb{F}_2^L ; \exists m \geq 0 \quad m \equiv i(2^x), \exists S \in \mathbb{Z}, B(\theta^m, S, L) = B\} \subset \text{Im } \varphi_i$$

en ajoutant les  $a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)}$  :  $\theta^{i+2^x \lambda} = \sum_{j=1}^w a_{i,j}(X) \theta^{2^x(j+\lambda)}$ .

La proposition 5 est établie et le corollaire en résulte immédiatement.

Nous pouvons alors achever la démonstration du théorème 2 :

Soit  $G(L) = \text{Card} \{B \in \mathbb{F}_2^L ; \exists m \geq 0 ; \exists S \in \mathbb{Z} ; B(\theta^m, S, L) = B\}$ , il s'agit de prouver que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $G(L) = O_\varepsilon((1+\varepsilon)^L)$ .

Choisissons  $x = x(\varepsilon)$  tel que  $\frac{w \text{Log } 2}{2^x} \leq \text{Log}(1+\varepsilon)$ , alors, d'après le corollaire à la proposition 5, on a :

$$G(L) \leq 2^t, \text{ où } t = x + w \left( \frac{L+2T}{2^x} + 1 + T \right) \text{ et } T = \sup \{T_i ; 1 \leq i \leq 2^x\} .$$

Mais, par choix de  $x$ ,

$$\begin{aligned} \text{Log}(2^t (1+\varepsilon)^{-L}) &= t \text{Log } 2 - L \text{Log}(1+\varepsilon) \\ &\leq x \text{Log } 2 + w \left( \frac{2T}{2^x} + 1 + T \right) \text{Log } 2 = C(\varepsilon) \end{aligned}$$

d'où :

$$G(L) \leq 2^t \leq \exp(C(\varepsilon)) (1+\varepsilon)^L .$$

### Conclusion

Nous venons de prouver en particulier que pour une série formelle automatique sur un corps fini (voir la première partie de ce travail), la suite des puissances de cette série formelle n'est pas équirépartie modulo 1 .

Deux questions restent cependant ouvertes :

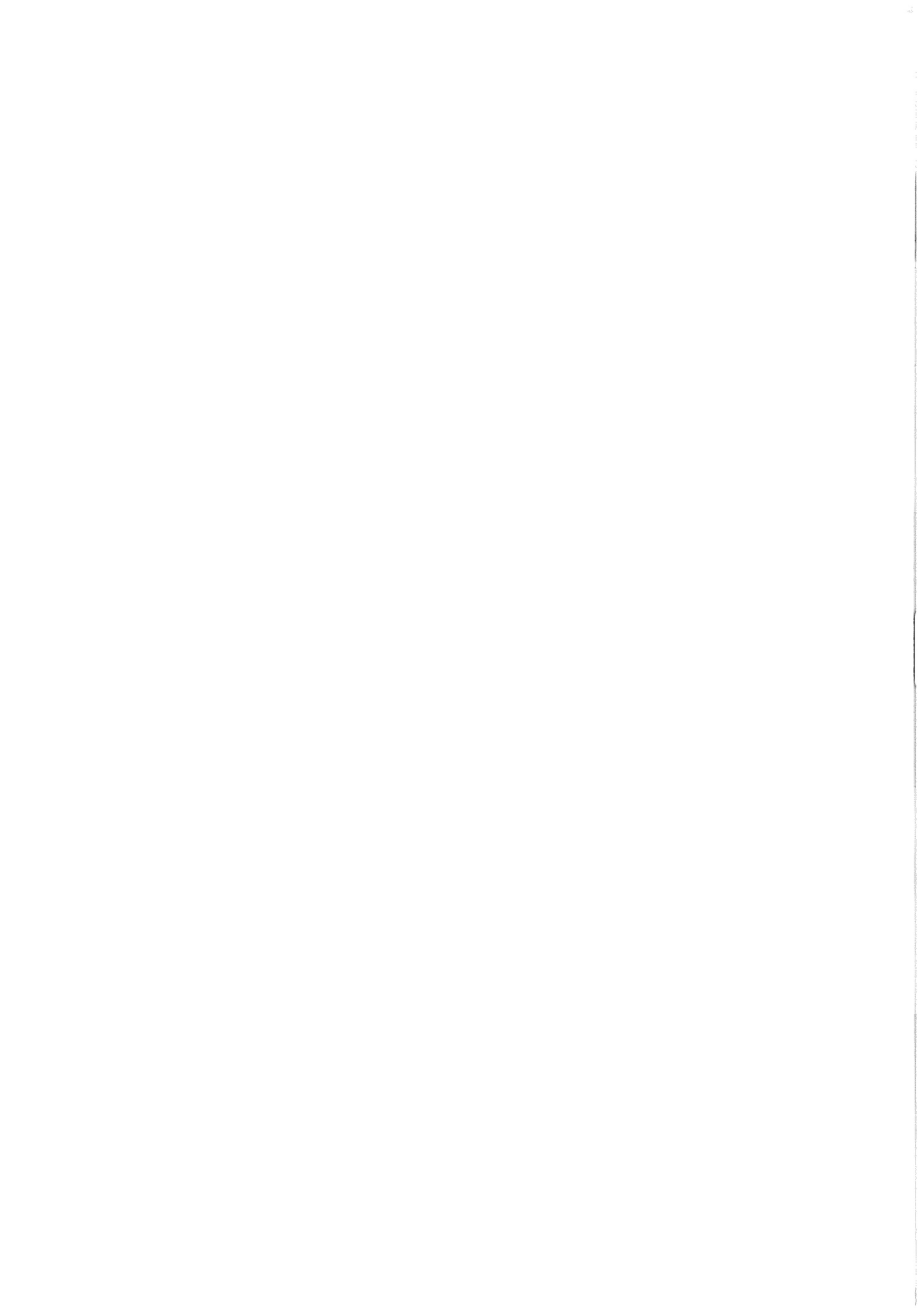
- Quelle est la nature de la mesure de répartition logarithmique dont nous avons prouvé l'existence ?

- La suite des puissances d'une telle série admet-elle en général une (vraie) mesure de répartition ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. ALLOUCHE et J.-M. DESHOUILLEERS, en préparation.
- [2] P. BATEMAN and A. DUQUETTE, The analogous of Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. Math. 6 (1962), 594-606.
- [3] L. CARLITZ, Diophantine approximation in fields of characteristic  $p$ , Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 187-208.
- [4] J.-M. DESHOUILLEERS, La répartition modulo 1 des puissances de rationnels dans l'anneau des séries formelles sur un corps fini, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1979-1980, exposé n° 5.
- [5] J.-M. DESHOUILLEERS, Ibid. (le cas d'un rationnel non décimal), non publié.
- [6] A. DIJKSMA, The measure theoretic approach to uniform distribution of sequences in  $GF[q, x]$ , Mathematica (Cluj.), 11 (1969), 221-240.
- [7] A. DIJKSMA, Uniform distribution of polynomials over  $GF\{q, x\}$  in  $GF[q, x]$ , Part I, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, 72 (1969), 376-383. ou Indag. Math. 31 (1969), 376-383.
- [8] A. DIJKSMA, Uniform distribution of polynomials over  $GF\{q, x\}$  in  $GF[q, x]$ , Part II, Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A, 73 (1970), 187-195, ou Indag. Math., 32 (1970), 187-195.
- [9] A. DIJKSMA, Metrical theorems concerning uniform distribution in  $GF[q, x]$  and  $GF\{q, x\}$ , Nieuw Arch. voor Wisk. (3), 18 (1970), 279-293.
- [10] A. DIJKSMA, Uniform distribution in  $GF\{q, x\}$  and  $GF[q, x]$ , Thesis, Technische Hogeschool Delft, 1971.
- [11] F. R. GANTMACHER, Théorie des matrices, tome 2, 1966, Dunod, Paris.
- [12] M. GRANDET-HUGOT, Une propriété des "nombres de Pisot" dans un corps de séries formelles, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 265 (1967), 39-41, errata p. 551.
- [13] M. GRANDET-HUGOT, Eléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles, Acta Arith. 14 (1967-1968), 177-184.

- [14] J. H. HODGES, Uniform distribution of sequences in  $GF[q, x]$ , Acta Arith. 12 (1966), 55-75.
- [15] J. H. HODGES, Uniform distribution of polynomial generated sequences in  $GF[q, x]$ , Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 82 (1969), 135-142.
- [16] J. H. HODGES, Uniform distribution of sequences in  $GF\{q, x\}$  and  $GF[q, x]$ , Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 85 (1970), 287-294.
- [17] V. HOUNDONUGBO, Mesure de répartition d'une suite  $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A-B, 288 (1979), n° 22, A 997-A 999.
- [18] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, 1974, Wiley and Sons.
- [19] P. LIARDET, Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1975-1976, exposé n° 8.
- [20] B. de MATHAN, Sur un théorème métrique d'équirépartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 265 (1967), 289-291.
- [21] B. de MATHAN, Théorème de Koksma dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1967-68, exp. n° 4.
- [22] B. de MATHAN, Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, 1970.
- [23] H. G. MEIJER and A. DIJKSMA, On uniform distribution of sequences in  $GF[q, x]$  and  $GF\{q, x\}$ , Duke Math. J. 37 (1970), 507-514.
- [24] G. RHIN, Quelques résultats métriques dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1967-68, exp. 21.
- [25] G. RHIN, Généralisation d'un théorème de I. M. Vinogradov à un corps de séries formelles sur un corps fini, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 272 (1971), 567-569.
- [26] G. RHIN, Répartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Dissertationes Math. 95, 1972.



## CONCLUSION

Nous espérons avoir montré dans ce travail l'intérêt que présentent les suites engendrées par automates, tant en théorie des nombres que dans d'autres domaines comme l'étude de l'itération des fonctions réelles, ou la réalisation de modèles discrets de phénomènes chimiques ou biologiques. Les propriétés de ces suites sont de type "combinatoire" mais permettent aussi une étude intéressante d'ensembles continus (ce qui apparaît par exemple dans les parties 2 et 3 de ce travail).

Naturellement nous ne pouvions qu'aborder ici le vaste sujet des liens entre la théorie des nombres et celle des automates ; nous donnons ci-dessous quelques références d'articles, récents pour la plupart, et non déjà indiqués dans les bibliographies des différentes parties de ce travail, qui contiennent d'autres développements possibles : suites engendrées par automates et objets fractals, suites de pliage de papier et suites de Rudin-Shapiro, substitutions aléatoires...

### Bibliographie complémentaire

- S. ARŠON, Démonstration de l'existence de suites asymétriques infinies, Mat. Sb. 44 (1937), 769-777.
- A. BLANCHARD et M. MENDÈS FRANCE, Symétrie et transcendance, Bull. Sci. Math. 106 (1982).
- N. G. de BRUIJN, Sequences of zeros and ones generated by special production rules, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 43 (1981), n° 1, 27-37.
- F. M. DEKKING, Constructies voor 0 - 1 -rijen met strikt ergodische afgelosten baan, Doktoraalscriptie, 1974.
- F. M. DEKKING, Replicating superfigures and endomorphisms of free groups, J. Combinatorial Th., Ser. A, 32 (1982), 315-320.
- F. M. DEKKING, Recurrent sets, Advances in Math. 44, 1 (1982), 78-104.

- F. M. DEKKING and M. MENDÈS FRANCE, Uniform distribution modulo one : a geometrical viewpoint, J. für die reine und angew. Math. 329 (1981), 143-153.
- R. K. GUY, Conway's prime producing machine, Math. Magazine, vol. 56, n° 1 (1983).
- M. MENDÈS FRANCE and A. J. van der POORTEN, Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences, Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), 123-131.
- M. MENDÈS FRANCE et G. TENENBAUM, Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 207-215.
- J. PEYRIÈRE, Processus de naissance avec interaction des voisins, C. R. Acad. Sc. Paris, 289 (1979), 223-224 et 557.
- J. PEYRIÈRE, Substitutions aléatoires itérées, Sémin. de Th. des Nombres de Bordeaux (1980-1981), exposé n° 17.
- J. PEYRIÈRE, Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes, Annales de l'Institut Fourier, 31, 4 (1981), 187-218.
- H. PRODINGER, Non repetitive sequences and Gray code, Discrete Math. 43 (1983), 113-116.
- G. RAUZY, Nombres algébriques et substitutions, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147-178.

## Résumé

Nous mettons en évidence un certain nombre de liens en théorie des nombres et celle des automates :

- étude de sous-suites de la suite "somme des chiffres" ; étude des itérées de cette suite ;
- utilisation de suites automatiques particulières (baptisées q-miroirs) dans le problème de l'itération des fonctions modales réelles ;
- étude d'un curieux ensemble de répartition modulo 1 des réels ;
- propriétés arithmétiques d'un automate cellulaire ;
- répartition modulo 1 des puissances d'une série formale.

## Mots clés

Automates cellulaires ; automates finis ; fractals ; itérations ; fonctions unimodales ; répartition modulo 1 ; somme des chiffres ; transcendance.