



HAL
open science

Contribution à l'étude de la réduction formelle des systèmes différentiels méromorphes linéaires

Hassane Abbas

► **To cite this version:**

Hassane Abbas. Contribution à l'étude de la réduction formelle des systèmes différentiels méromorphes linéaires. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1993. Français. NNT: . tel-00343445

HAL Id: tel-00343445

<https://theses.hal.science/tel-00343445>

Submitted on 1 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

ABBAS Hassane

Pour obtenir le grade de **DOCTEUR**
de l'**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 30 Mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA REDUCTION FORMELLE
DES SYSTEMES DIFFERENTIELS MEROMORPHES LINEAIRES**

Date de soutenance : 1 Septembre 1993

Composition du jury : **E. TOURNIER** Président
 J. DELLA DORA Directeur de la thèse
 A. DUVAL Rapporteur
 A. HILALI Rapporteur

Thèse préparée au sein du **Laboratoire de Modélisation et Calcul**



Président de l'Université :

M. NEMOZ Alain

ANNEE UNIVERSITAIRE 1990 - 1991

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ERE CLASSE

ADIBA Michel	Informatique
ANTOINE Pierre	Géologie I.R.I.G.M.
ARVIEU Robert	Physique Nucléaire I.S.N.
AURIAULT Jean Louis	Mécanique
BARRA Jean René	Statistiques - Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BLANCHI Jean Pierre	A.P.S.
BOEHLER Jean Paul	Mécanique
BOITET Christian	Informatique et Mathématiques Appliquées
BORNAREL Jean	
BRUANDET Jean François	Physique
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEMAILLY Jean Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FINKE Gerde	Informatique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques
GUITTON Jacques	Chimie

statis.

PAUTOU Guy
PECHER Arnaud
PELLETIER Guy
PERRIN Claude
PFISTER Claude
PIBOULE Michel
PORTESEIL Jean Louis
PUECH Laurent
RAYNAUD Hervé
REGNARD Jean René
ROBERT Claudine
ROBERT Danielle
ROBERT Gilles
SAJOT Gérard
SARROT REYNAULD Jean
SAYETAT Françoise
SERVE Denis
STOECKEL Frédéric
SCHOLL Pierre Claude
SUBRA Robert
TEMPERVILLE André
TISSUT Michel
TOURNIER Evelyne
VALLADE Marcel
VALLON Michel
VICAT Jean
VINCENS Maurice
VINCENT Gilbert
VIVIAN Robert
VOTTERO Philippe
WITOMSKI Patrick

Biologie
Géologie
Astrophysique
Sciences Nucléaires I.S.N.
Biologie
Géologie
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Physique
Didactique des disciplines scientifiques
Chimie
Mathématiques Pures
Physique
Géologie
Physique
Chimie
Physique
Mathématiques Appliquées
Chimie
Mécanique
Biologie
Informatique et Mathématiques appliquées
Physique
Glaciologie
Physique
Chimie
Physique
Géographie
Chimie

PRESIDENT DE L'INSTITUT
Monsieur Maurice RENAUD



Année 1993

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

BARIBAUD	Michel	ENSERG
BARRAUD	Alain	ENSIEG
BARTHELEMY	Alain	ENSHMG
BAUDELET	Bernard	ENSPG
BAUDIN	Gérard	UFR PGP
BEAUFILS	Jean-Pierre	ENSIEG/ILL
BOIS	Philippe	ENSHMG
BOUVIER	Gérard	ENSERG
BRINI	Jean	ENSERG
BRUNET	Yves	CUEFA
CAVAIGNAC	Jean-François	ENSPG
CHARTIER	Germain	ENSPG
CHENEVIER	Pierre	ENSERG
CHERUY	Arlette	ENSIEG
CHOVET	Alain	ENSERG
COGNET	Gérard	ENSGI
COLINET	Catherine	ENSEEG
COMMAULT	Christian	ENSIEG
CORNUT	Bruno	ENSIEG
COULOMB	Jean-Louis	ENSIEG
COUTRIS	Nicole	ENSPG
CROWLEY	James	ENSIMAG
DALARD	Francis	ENSEEG
DARVE	Félix	ENSHMG
DELLA DORA	Jean	ENSIMAG
DEPEY	Maurice	ENSERG
DEPORTES	Jacques	ENSPG
DEROO	Daniel	ENSEEG
DESRE	Pierre	ENSEEG
DIARD	Jean-Paul	ENSEEG
DOLMAZON	Jean-Marc	ENSERG
DURAND	Francis	ENSEEG
DURAND	Jean-Louis	ENSPG
FAUTRELLE	Yves	ENSHMG
FOGGIA	Albert	ENSIEG
FORAY	Pierre	ENSHMG
FOULARD	Claude	ENSIEG
GALERIE	Alain	ENSEEG
GANDINI	Alessandro	UFR/PGP
GAUBERT	Claude	ENSPG
GENTIL	Pierre	ENSERG
GENTIL	Sylviane	ENSIEG
GUERIN	Bernard	ENSERG
GUYOT	Pierre	ENSEEG
IVANES	Marcel	ENSIEG
JACQUET	Paul	ENSIMAG
JALLUT	Christian	ENSEEG
JANOT	Marie-Thérese	ENSERG

JAULENT	Patrick	ENSGI
JAUSSAUD	Pierre	ENSIEG
JOST	Rémy	ENSPG
JOUBERT	Jean-Claude	ENSPG
JOURDAIN	Geneviève	ENSIEG
KUENY	Jean-Louis	ENSHMG
LACHENAL	Dominique	UFR PGP
LACOUME	Jean-Louis	ENSIEG
LADET	Pierre	ENSIEG
LE NEST	Jean-François	UFR/PGP
LESIEUR	Marcel	ENSHMG
LESPINARD	Georges	ENSHMG
LIENARD	Joël	ENSIEG
LONGEQUEUE	Jean-Pierre	ENSPG
LORET	Benjamin	ENSHMG
LOUCHET	François	ENSEEG
LUCAZEAU	Guy	ENSEEG
LUX	Augustin	ENSIMAG
MASSE	Philippe	ENSPG
MASSELOT	Christian	ENSIEG
MAZARE	Guy	ENSIMAG
MICHEL	Gérard	ENSIMAG
MOHR	Roger	ENSIMAG
MOREAU	René	ENSHMG
MORET	Roger	ENSIEG
MOSSIERE	Jacques	ENSIMAG
OBLED	Charles	ENSHMG
OZIL	Patrick	ENSEEG
PANANAKAKIS	Georges	ENSERG
PAULEAU	Yves	ENSEEG
PERRET	Robert	ENSIEG
PERRIER	Pascal	ENSERG
PIAU	Jean-Michel	ENSHMG
PIC	Etienne	ENSERG
PLATEAU	Brigitte	ENSIMAG
POUPOT	Christian	ENSERG
RAMEAU	Jean-Jacques	ENSEEG
REINISCH	Raymond	ENSPG
RENAUD	Maurice	UFR/PGP
RIMET	Roger	ENSERG
ROBERT	François	ENSIMAG
ROGNON	Jean-Pierre	ENSIEG
ROSSIGNOL	Michel	ENSPG
ROYE	Daniel	ENSIEG
SABONNADIERE	Jean-Claude	ENSIEG
SAGUET	Pierre	ENSERG
SAUCIER	Gabrièle	ENSIMAG
SCHLENKER	Claire	ENSPG
SCHLENKER	Michel	ENSPG
SILVY	Jacques	UFR/PGP
SOHM	Jean-Claude	ENSEEG
SOLER	Jean-Louis	ENSIMAG
SOUQUET	Jean-Louis	ENSEEG
TICKIEWITCH	Serge	ENSHMG
TROMPETTE	Philippe	ENSHMG
TRYSTRAM	Denis	ENSGI
VEILLON	Gérard	ENSIMAG
VERJUS	Jean-Pierre	ENSIMAG
VINCENT	Henri	ENSPG

SITUATION PARTICULIERE
PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

BLOCH Daniel
BONNET Guy
BRECHET Yves
CAILLERIE Denis
GREVEN H el ene
LATOMBE Jean-Claude
PIERRARD Jean-Marie

ENSPG
ENSPG
ENSEEG
ENSHMG
CUEFA
ENSIMAG
ENSHMG

DIRECTEURS DE RECHERCHE CNRS

ABELLO	Louis
ALDEBERT	Pierre
ALEMANY	Antoine
ALLIBERT	Colette
ALLIBERT	Michel
ANSARA	Ibrahim
ARMAND	Michel
AUDIER	Marc
AUGOYARD	Jean-François
AVIGNON	Michel
BERNARD	Claude
BINDER	Gilbert
BLAISING	Jean-Jacques
BONNET	Roland
BORNARD	Guy
BOUCHERLE	Jean-Xavier
CAILLET	Marcel
CARRE	René
CHASSERY	Jean-Marc
CHATILLON	Christian
CIBERT	Joël
CLERMONT	Jean-Robert
COURTOIS	Bernard
CRIQUI	Patrick
CRISTOLOVEANU	Sorin
DAVID	René
DION	Jean-Michel
DOUSSIÈRE	Jacques
DRIOLE	Jean
DUCHET	Pierre
DUGARD	Luc
DURAND	Robert
ESCUDIER	Pierre
EUSTATHOPOULOS	Nicolas
FINON	Dominique
FRUCHARD	Robert
GARNIER	Marcel
GIROD	Jacques
GLANGEAUD	François
GUELIN	Pierre
HOPFINGER	Emil
JORRAND	Philippe
JOUD	Jean-Charles
KAMARINOS	Georges
KLEITZ	Michel
KOFMAN	Walter
LACROIX	Claudine
LANDAU	Ioan
LAULHERE	Jean-Pierre
LEGRAND	Michel
LEJEUNE	Gérard
LEPROVOST	Christian
MADAR	Roland
MARTIN	Jean-Marie
MERMET	Jean

MEUNIER	Gérard
MICHEL	Jean-Marie
NAYROLLES	Bernard
PASTUREL	Alain
PEUZIN	Jean-Claude
PHAM	Antoine
PIAU	Monique
PIQUE	Jean-Paul
POINSIGNON	Christiane
PREJEAN	Jean-Jacques
RENOUARD	Dominique
SENATEUR	Jean-Pierre
SIFAKIS	Joseph
SIMON	Jean-Paul
SUERY	Michel
TEODOSIU	Christian
VACHAUD	Georges
VAUCLIN	Michel
WACK	Bernard
YAVARI	Ali-Reza
YONNET	Jean-Paul

PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME
D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BALESTRA	Francis
BALME	Louis
BECKER	Monique
BIGEON	Jean
BINDER	Zdeneck
BOE	Louis-Jean
BRECHET	Yves
CADOZ	Claude
CANUDAS DE WIT	Carlos
CHAMPENOIS	Gérard
CHOLLET	Jean-Pierre
COEY	Jean-Pierre
CORNUEJOLS	Gerard
COURNIL	Michel
CRASTES DE PAULET	Michel
DALLERY	Yves
DESCOTES-GENON	Bernard
DUGARD	Luc
DURAND	Madeleine
FERRIEUX	Jean-Paul
FEUILLET	René
FORAY	Pierre
FREIN	Yannick
GAUTHIER	Jean-Paul
GHIBAUDO	Gérard
GUILLEMOT	Nadine
GUYOT	Alain
HAMAR	Sylviane
HAMAR	Roger
HORAUD	Patrice
JACQUET	Paul
LATOMBE	Claudine
LE HUY	Hoang
LE GORREC	Bernard
LOZANO-LEAL	Rogelio
MACOVSKI	Mihaïl
MAHEY	Philippe
METAIS	Olivier
MONMUSSON-PICQ	Georgette
MORY	Mathieu
MULLER	Jean
MULLER	Jean-Michel
NGUYEN TRONG	Bernadette
NIEZ	Jean-Jacques
PERRIER	Pascal
PLA	Fernand
RECHENMANN	François
ROGNON	Jean-Pierre
ROUGER	Jean
ROUX	Jean-Claude
SKOTNICKI	Tomasz
TCHUENT	Maurice
THOMAS	Olivier
VAHLAS	Constantin

PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME

DE DOCTEUR D'ETAT INPG

ABDEL-RAZEK	Adel
AKSAS	Haris
ALLA	Hassane
AMER	Ahmed
ANCELLE	Bernard
ANGENIEUX	Gilbert
ATMANI	Hamid
AYEDI	Hassine Feri
A.BADR	Osman
BACHIR	Aziz
BALANZAT	Emmanuel
BALTER	Roland
BARDEL	Robert
BARRAL	Gérard
BAUDON	Yves
BAUSSAND	Patrick
BEAUX	Jacques
BEGUINOT	Jean
BELLISSANT née FUNEZ	Marie-Claire
BELLON	Catherine
BEN RAIS	Abdejettah
BERGER-SABBATEL	Gilles
BERNACHE-ASSOLANT	Didier
BEROVAL	Abderrahmane
BERTHOD	Jacques
BILLARD	Dominique
BLANC épouse FOULETIER	Mireille
BOCHU	Bernard
BOJO	Gilles
BOKSENBAUM	Claude
BOLOPION	Alain
BONNARD	Bernard
BORRIONE	Dominique
BOUCHACOURT	Michel
BRION	Bernard
CAIRE	Jean-Pierre
CAMEL	Denis
CAPERAN	Philippe
CAPLAIN	Michel
CAPOLINO	Gérard
CASPI	Paul
CHAN-TUNG	Nam
CHASSANDE	Jean-Pierre
CHATAIN	Dominique
CHEHIKIAN	Alain
CHIRAMELLA	Yves
CHILO	Jean
CHUPIN	Jean-Claude
COLONNA	Jean-François
COMITI	Jacques
CORDET	Christian
COUDURIER	Lucien
COUTAZ	Jean-Louis

CREUTIN	Jean-Dominique
DAO	Trongtich
DARONDEAU	Philippe
DAVID	Bertrand
DE LA SEN	Manuel
DELACHAUME	Jean-Claude
DENAT	André
DESCHIZEAUX née CHERUY	Marie-Noëlle
DIJON	Jean
DOREMUS	Pierre
DUPEUX	Michel
EL ADHAM	Karim
EL OMAR	Fovaz
EL-HENNAWY	Adel
ETAY	Jacqueline
FABRE	Suzanne
FAURE-BONTE	Mireille
FAVIER	Denis
FAVIER	Jean-Jacques
FELIACHI	Movloud
FERYAL	Haj Hassan
FLANDRIN	Patrick
FOREST	Bernard
FORESTIER	Michel
FOSTER	Panayolis
FRANC	Jean-Pierre
GADELLE	Patrice
GARDAN	Yvon
GENIN	Jacques
GERVASON	Georges
GILORMINI	Pierre
GINOUX	Jean-Louis
GOUMIRI	Louis
GROC	Bernard
GROSJEAN	André
GUEDON	Jean-Yves
GUERIN	Jean-Claude
GUESSOUS	Anas
GUIBOUD-RIBAUD	Serge
HALBWACHS	Nicolas
HAMMOURI	Hassan
HEDEIROS SILIVEIR	Hamilton
HERAULT	Jeanny
HONER	Claude
HUECKEL	Tomasz
IGNAT	Michel
ILIADIS	Athanasios
JANIN	Gérard
JERRAYA	Ahmed Amine
JUTTEN	Christian
KAHIL	Hassan
KHUONGQUANG	Dong
KILLIS	Andreas
KONE	Ali
LABEAU	Michel
LACAZE	Alain
LACROIX	Jean-Claude
LANG	Jean-Claude
LATHUILLERE	Chantal
LATY	Pierre

LAUGIER	Christian
LE CADRE	Jean-Pierre
LE GARDEVR	René
LE THIESSE	Jean-Claude
LEMAIGNAN	Clement
LEMUET	Daniel
LEVEQUE	Jean-Luc
LONDICHE	Henry
L'HERITIER	Philippe
MAGNIN	Thierry
MAISON	François
MAMWI	Abdullah
MANTEL épouse SIEBERT	Elisabeth
MARCON	Guy
MARTINEZ	Francis
MARTIN-GARIN	Lionel
MASSE	Dominique
MAZER	Emmanuel
MERCKEL	Gérard
MEUNIER	Jean
MILI	Ali
MOALLA	Mohamed
MODE	Jean-Michel
MONLLOR	Christian
MONTELLA	Claude
MORET	Frédéric
MRAYATI	Mohammed
M'SAAD	Mohammed
M'SIRDI	Kouider Nace
NEPOMIASTCHY	Pierre
NGUYEN	Trong Khoi
NGUYEN-XUAN-DANG	Michel
ORANIER	Bernard
ORTEGA MARTINEZ	Roméo
PAIDASSI	Serge
PASSERONE	Alberto
PEGON	Pierre
PIJOLAT	Christophe
POGGI	Yves
POIGNET	Jean-Claude
PONS	Michel
POU	Tong Eck
RAFINEJAD	Paiviz
RAGAIE	Harie Fikri
RAHAL	Salah
RAMA SEABRA SANTOS	Fernando
RAVAINE	Denis
RAZBAN-HAGHIGHI	Tchanguiz
RAZZOUK	Micham
REGAZZONI	Gilles
RIQUET	Jean-Pierre
ROBACH	Chantal
ROBERT	Yves
ROGEZ	Jacques
ROHMER	Jean
ROUSSEL	Claude
SAAD	Abdallah
SAAD	Youcef
SABRY	Mohamed Nabi
SALON	Marie-Christine

SAUBAT épouse MARCUS	Bernadette
SCHMITT	Jean-Hubert
SCHOELLKOPF	Jean-Pierre
SCHOLL	Michel
SCHOLL	Pierre-Claude
SCHOULER	Edmond
SCHWARTZ	Jean-Luc
SEGUIN	Jean
SIWY	Jacques
SKALLI	Abdellatif
SKALLI HOUSSEYNI	Abdelali
SOUCHON	Alain
SUETRY	Jean
TALLAJ	Nizar
TEDJAR	Farouk
TEDJINI	Smail
TEYSSANDIER	Francis
THEVENODFOSSE	Pascale
TMAR	Mohamed
TRIOILLIER	Michel
TUFFELIT	Denis
TZIRITAS	Georges
VALLIN	Didier
VELAZCO	Raoul
VERDILLON	André
VERMANDE	Alain
VIKTOROVITCH	Pierre
VITRANT	Guy
WEISS	François
YAZAMI	Rachid

*À ma chère grand-mère,
À ma femme et ma fille,
À ma mère et mon père,
À mes soeurs et à mes frères.*

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur J. DELLA DORA Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG) et directeur du Centre Inter-Universitaire de Calcul de Grenoble (CICG), qui en dépit d'un agenda trop chargé à toujours voulu et su prendre le temps de s'intéresser longuement à mes travaux de recherche, et de me prodiguer des encouragements quand nécessaire. Cette thèse doit beaucoup à son esprit de rigueur, à sa patience et surtout aux innombrables discussions que nous avons eues ensemble.

Je remercie Madame E. TOURNIER, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, Pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je voudrais remercier Madame A. DUVAL, Professeur à l'Université de Lille, qui m'a fait l'honneur d'être le rapporteur de ce travail. Ses conseils et suggestions ont contribué à l'amélioration du texte initial.

Mes remerciements vont également à Monsieur A. HILALI, Professeur à l'Institut National des Postes et Télécommunications (INPT) du Maroc, Pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour le temps qu'il m'a consacré. D'abord, l'intérêt avec lequel il a suivi ce travail et son encouragement amical ont été pour moi d'une importance décisive pour l'aboutissement de ce travail. D'autre part, je tiens à lui remercier pour se déplacer du Maroc pour assister à ce jury.

Que tous les membres du laboratoires de Modélisation et du Calcul (LMC) qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail soient vivement remerciés.

Que tous mes amis et collègues qui ont rendu mon séjour en France agréable soient sincèrement remerciés.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous les membres du service de la scolarité de l'INPG et du service de reprographie de l'Institut IMAG.

TABLE DE MATIERES

TABLE DE MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	5
CHAPITRE I. SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A SINGULARITE REGULIERE.....	11
1. Introduction.....	12
2. Solutions formelles au voisinage d'un point régulier.....	14
3. Solutions formelles au voisinage d'un point singulier régulier	17
3.1. Cas générique.....	19
3.2. Cas général.....	20
4. Réductibilité au sens de Moser.....	23
5. Exemples	34
6. Conclusion	36
CHAPITRE II. THEORIE DE DEFORMATIONS DE MATRICES DEPENDANTS DE PARAMETRES	37
1. Introduction.....	38
2. Définitions et concepts de base	39
2.1. Notations.....	40
2.2. Définitions	40
2.3. Exemples	41
3. Théorie générale de déformations verselles	43
3.1. Transversalité.....	44
3.2. Caractérisation du centralisateur d'une matrice	45

TABLE DE MATIERES

- 3.3. Construction d'une déformation miniverselle d'une matrice à l'aide de son centralisateur51
- 3.4. Forme générale des déformations miniverselles.....53
- 4. Algorithme pour construire la forme normale d'Arnold59
- 5. Forme induite de matrices dépendants d'un paramètre62
 - 5.1. Position du problème.....62
 - 5.2. Algorithme pour construire une forme induite.....64
- 6. Conclusion69

CHAPITRE III. CALCUL DE L'ORDRE EXPONENTIEL D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE : Nouvelle Approche Algorithmique71

- 1. Notations et terminologie.....72
- 2. Introduction73
- 3. Nouvelle approche algorithmique pour calculer l'ordre exponentiel77
 - 3.1. Indice rationnel d'irrégularité78
 - 3.2. Calcul de l'ordre exponentiel : cas non-nilpotent.....82
 - 3.3. Calcul de l'ordre exponentiel : cas général.....83
 - 3.3.1. Orbite d'une matrice84
 - 3.3.2. Forme générale de l'algorithme.....85
 - 3.3.3. Transformations utilisées86
 - 3.3.3.1. Mise sous forme de Jordan86
 - 3.3.3.2. Transformation de shearing.....87
 - 3.3.3.3. Transformation Déduire-zéro-en-bas.....90
 - 3.3.4. Exemples95
- 4. Méthode de *Turrittin-Wasow*99
- 5. Comparaison par un exemple entre les deux méthodes103
- 6. Conclusion105

TABLE DE MATIERES

CHAPITRE IV.	ALGORITHME DE RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES DE DIMENSION DEUX AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE	107
1.	Introduction	108
2.	Transformations préliminaires	110
3.	Cas où A_0 admet deux valeurs propres distinctes.....	112
4.	Cas où A_0 est formée d'un seul bloc de Jordan.....	120
5.	Exemple : équation d'Airy.....	124
6.	Conclusion	126
	CONCLUSION GENERALE	127
	BIBLIOGRAPHIE	129

INTRODUCTION GENERALE

Among all the disciplines of mathematics, the theory of differential equations is the most important one. All areas of physics pose problems which lead to the integration of differential equations. In fact, it is the theory of differential equations which shows the way to understanding all time-dependent natural phenomena. If, on the one hand, the theory of differential equations has extreme practical significance, then, on the other hand, it attains a corresponding theoretical importance because it leads in a rational way to the study of new functions or classes of functions.

Sophus Lie (1894)

INTRODUCTION GENERALE :

La théorie des équations différentielles ordinaires est importante dans plusieurs applications : Mathématique, Physique, Mécanique céleste, Mécanique quantique, Biologie et bien d'autres domaines.

Parmi les types d'équations différentielles fréquemment utilisés, on note les systèmes de la forme

$$(E.1) \quad \frac{d Y(x)}{dx} = A(x) Y(x) = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right\} Y(x)$$

où x est une variable complexe, les A_k sont des matrices carrées à coefficients dans \mathbf{IR} ou dans \mathbf{C} d'ordre n (n est un entier ≥ 1), q est un entier et Y est un vecteur colonne de n composantes.

Pour résoudre ces systèmes, des méthodes numériques classiques (Euler et Runge-Kutta) ont été proposées. Ces dernières ne sont pas applicables pour le calcul d'une solution du système (E.1) au voisinage d'un point singulier. Devant ce problème, on s'oriente vers le calcul exact ou formel qui permet, par l'utilisation des représentations exactes des nombres algébriques,

INTRODUCTION GENERALE

de surmonter la difficulté rencontrée. De plus, la résolution de ces systèmes par le calcul formel n'est pas un problème simple. Depuis les années 1877, plusieurs études ont été faites dans ce domaine. On peut noter les contributions de Thomé [Thom77], Poincaré [Poin85], Sauvage [Sauv86] et Horn [Horn92]. De nombreuses directions d'études sont possibles. Nous en retiendrons deux :

1. Méthode du vecteur cyclique : L'origine de cette méthode remonte aux travaux de Birkhoff [Birk30] sur les systèmes aux différences. Elle a été reprise par Cope [Cope36] pour les systèmes différentiels linéaires. Deligne [Deli70] a démontré ensuite que la résolution du système (E.1) peut se ramener à celle d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n grâce au lemme du vecteur cyclique. Les solutions de cette dernière peuvent être obtenues par les procédures algébriques développées par M.A.Barkatou, J.Della-Dora, C.Dicrescenzo, D.Duval et E.Tournier dans un logiciel de calcul formel général *DESIR* (voir [Bark89], [DDDT82] et [Tour87]). Cette méthode a les deux buts suivants :

- Classifier les singularités du système différentiel à partir de l'opérateur différentiel associé,
- Construire une matrice fondamentale de solutions du système différentiel.

Cette méthode s'avère coûteuse et donne des transformations compliquées (voir chapitre II dans la thèse de [Hila87]). Néanmoins, elle est d'une grande importance théorique et mériterait des études plus complètes.

2. Méthode directe : La méthode consiste à transformer le système (E.1), à l'aide de transformations analytiques (formelles), en une forme simplifiée, appelée *forme canonique*, qu'on peut résoudre. Birkhoff [Birk30] a proposé la méthode dans un cadre "générique". Gantmacher [Gant59] et Masani [Masa59] prouvent que dans le cas général (si on n'impose pas de conditions sur la partie la plus pôlaire A_0 de $A(x)$), il n'existe pas de transformations analytiques permettant de transformer le système (E.1) à une forme canonique. Ces observations n'altèrent en rien l'importance théorique des travaux de Birkhoff qui reste le coeur du problème de l'intégration des équations différentielles. A côté de ces travaux, il faut ajouter d'innombrables contributions de : Trjitzinsk [Trji34] et Ramis [Rami84] pour l'étude des convergences des solutions du systèmes (E.1) dans des secteurs bien choisis autour de la singularité. Hukuhara [Huku54] et Sibuya [Sibu62] se sont intéressés à l'étude des systèmes différentiels du type (E.1) avec paramètres. Turrittin [Turr55], Wasow [Waso65], Lutz [Lutz69], Katz [Katz70], Jurkat [Jurk71], Malgrange [Malg74-81] Gérard et Levelt [GéLe73]-[Leve75], Balser [Bals79], Babbitt et Varadarajan [BaVa82], Ramis

INTRODUCTION GENERALE

[Rami84], Schäfke [LuSc85] et Hilali [Hila87] se sont intéressés soit aux calculs des invariants soit à l'étude de solutions des systèmes (E.1) et leurs convergences. Ces personnes ont approfondi les approches existantes et ont ajouté de nouvelles méthodes. H.L.Turritin et W.Wasow ont démontré qu'une matrice fondamentale de solutions formelles du système (E.1) peut se représenter sous la forme ¹

$$(E.2) \quad \Phi(x) = S(x^{1/m}) x^R \exp\{ Q(x^{-1/m}) \}$$

où

- m est un entier positif convenablement choisi,
- R est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans C,
- $Q(x^{-1/m}) = Q_h x^{-h/m} + Q_{h-1} x^{-(h-1)/m} + \dots + Q_1 x^{-1/m}$ tel que les Q_i ($1 \leq i \leq h$) soient des matrices carrées d'ordre n diagonales à coefficients dans C et h est un entier $\leq m(q-1)$,

• $S(x^{1/m}) = x^{-k_0/m} \sum_{k=0}^{+\infty} S_k x^{k/m}$ où k_0 est un entier positif, S_k étant des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C.

Ils ont proposé une méthode pour calculer $\Phi(x)$, appelée, par la suite, méthode de *Turritin-Wasow*. Cette dernière, consiste à réduire le système (E.1), en plusieurs systèmes différentiels séparés, chacun étant :

- (1) soit une équation différentielle scalaire d'ordre 1,
- (2) soit un système différentiel sous forme (E.1) avec $q = 1$.

Dans ce deux cas, les solutions formelles peuvent être calculées.

Pour séparer le système (E.1) soit en (1) soit en (2), ils utilisent successivement les trois types des transformations :

- (i) une pour la mise sous forme de Jordan de la matrice A_0 ,
- (ii) une pour la mise sous forme normale d'Arnold de $A(x)$,
- (iii) une de shearing

En général, (ii) coûte très cher en calcul (voir [Waso65]). Devant ce fait, nous proposons une *nouvelle approche algorithmique*. Celle-ci utilise :

¹ $\exp\{M\}$ désigne la matrice exponentielle d'une matrice carrée M. I.e, $\exp\{M\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ (écriture formelle),
 $x^R = \exp\{R \log x\}$.

INTRODUCTION GENERALE

- (i') une transformation pour la mise sous forme de Jordan de la matrice A_0 ,
- (ii') une transformation de shearing,
- (iii') Dans le plus mauvais cas, une transformation plus simple que celle de (ii).

Cette approche nous permet de donner un algorithme constructif c'est-à-dire programmable grâce auquel le degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ défini en (E.2) est calculé à partir des coefficients A_i , $0 \leq i < n(q-1)$, de la matrice $A(x)$.

La résolution d'un système différentiel linéaire de dimension deux est important en pratique. Pour cela, dans le dernier chapitre, nous allons développer une méthode permettant de construire une matrice fondamentale de solutions au voisinage d'une singularité.

Organisation de la thèse :

Dans le **chapitre I**, on développe une procédure pour calculer une matrice fondamentale de solutions $\Phi(x)$ du système (E.1) au voisinage d'un point régulier. Ensuite, on étudie, dans le paragraphe 3, une méthode pour construire $\Phi(x)$ lorsque la matrice $A(x)$ admet un pôle simple en $x = 0$. Dans le cas où l'ordre pôlaire q de $A(x)$ est ≥ 2 , on étudie l'algorithme de réduction de Moser [Mose60] qui transforme le système (E.1) à une forme dite *M-irréductible* permettant de caractériser la nature de la singularité (régulière ou irrégulière) en $x = 0$. Dans le cas d'une singularité irrégulière, la méthode de Moser ne peut pas être un outil pour calculer $\Phi(x)$. Ce cas sera étudié en détail dans le chapitre III.

Dans le **chapitre II**, nous nous intéressons à la construction algorithmique de la forme normale d'Arnold de matrices dépendants de paramètres $A(x)$. Pour cela, on étudie les *déformations* d'une matrice carrée donnée A_0 . Se basant sur le théorème.3.1.1 et le *centralisateur* $Z(A_0)$ de A_0 , on a réussi à construire et à caractériser une déformation *miniverselle* de A_0 et la forme normale d'Arnold de $A(x)$; cette dernière constitue une étape clef dans la méthode de *Turrittin-Wasow*. Cette méthode n'est pas facile à programmer (voir [Chen90]). Devant ce problème, nous proposons une nouvelle forme de $A(x)$ que nous appelons *forme induite*. Cette forme a les avantages suivants :

- Elle est programmable et moins coûteuse en complexité de calcul que celle d'Arnold,
- Elle donne le même résultat que la forme d'Arnold sur les systèmes différentiels linéaires.

INTRODUCTION GENERALE

Grâce à cette forme, nous proposons, dans le chapitre III, une nouvelle approche algorithmique pour calculer le degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ défini dans (E.2).

Dans le **chapitre III**, nous nous intéressons au calcul du degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ défini dans (E.2). Lorsque le point $x = 0$ est singulier irrégulier, l'algorithme de Moser, étudié, dans le chapitre II, ne peut pas calculer h . Face à ce problème, nous allons proposer une nouvelle approche algorithmique. Celle-ci est constituée de :

- Trois types de transformations : Jordan, shearing et une transformation simple,
- Un test sur la dimension de l'*orbite* d'une matrice donnée (voir [Arno71]).

Dans cet algorithme, le calcul des transformations de shearing est essentiel. De ce fait, nous proposons une formule simple (voir lemme 3.3.1) pour les déterminer. Grâce à elle, le degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ se calcule à partir des coefficients A_i , $0 \leq i < n$ ($q-1$), de la matrice $A(x)$. Cette formule coïncide avec celle trouvée dans [BaVa82] pp. 32. A titre de comparaison, dans le paragraphe 5, nous présentons, brièvement, les quatre étapes de la méthode de *Turrittin-Wasow*, et nous montrons sur un exemple simple comment les deux méthodes se comportent.

Dans le **chapitre IV**, nous nous intéressons à la résolution des systèmes différentiels de dimension deux. La méthode développée ici permettant la construction d'une matrice fondamentale de solutions.

Enfin, la conclusion résume les idées essentielles illustrées dans ce document et met en lumière les directions de recherche qu'il nous paraît important d'explorer dans le futur.

" Il y a deux sortes de gens qui n'auront jamais assez :

ceux qui envient les riches et ceux qui sont avides de savoir "

CHAPITRE I

SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A SINGULARITE REGULIERE

- 1. Introduction**
- 2. Solutions formelles au voisinage d'un point régulier**
- 3. Solutions formelles au voisinage d'un point singulier régulier**
 - 3.1. Cas générique
 - 3.2. Cas général
- 4. Réductibilité au sens de Moser**
- 5. Exemples**
- 6. Conclusion**

SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A SINGULARITE REGULIERE

1. INTRODUCTION

Considérons, le système différentiel linéaire homogène

$$(1.1) \quad \dot{Y} = A(x) Y(x)$$

où

- x est dans \mathbb{C} ,
- $Y(x)$ est un vecteur (fonction de la variable x) ayant n composantes,
- $\dot{Y} = \frac{dY}{dx}$,
- A est un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}(\mathbb{C}))$ où $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}(\mathbb{C}))$ désigne l'anneau des matrices carrées $A(x)$ de la forme

$$(1.2) \quad A(x) = x^{-q} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

avec q est entier ≥ 0 et les A_k , $k \geq 0$, sont des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Historiquement, le problème d'intégration des systèmes différentiels dans le champ complexe est extrêmement ancien et a été étudié par des nombreux mathématiciens. Parmi eux, on peut noter les travaux connus de Poincaré [Poin85] et celui de Birkhoff [Birk09]. Ce dernier a donné une technique généralisant la théorie développée par Poincaré. En particulier, il a déterminé la forme des solutions d'un système (1.1) au voisinage de la *singularité*. D'autre part, il est connu que Sauvage [Sauv86] et Birkhoff [Birk30] ont introduit, pour la première fois, la notion analogue de points *réguliers*, *singuliers réguliers* et *singuliers irréguliers* pour un système différentiel linéaire. En plus, ils ont démontré que la nature des solutions en un point quelconque dépend, comme dans le cas des équations différentielles scalaires, du comportement des coefficients de la matrice $A(x)$ du système différentiel (1.1).

La résolution du système (1.1) dépend de la nature de la matrice $A(x)$. En effet, si A appartient à $\mathcal{M}(n, C[[x]])$ où $C[[x]]$ désigne l'algèbre des séries formelles, nous verrons, dans le paragraphe 2, que toutes les solutions du système (1.1), au voisinage de l'origine, sont dans $\mathcal{M}(n, C[[x]])$. Ces dernières peuvent être calculées à partir de formules de récurrences. D'autre part, si A est un élément de $\mathcal{M}(n, C((x)))$ ayant un pôle simple en $x = 0$ ($x = 0$ s'appelle, dans ce cas, point *singulier régulier*) alors on sait, d'après le théorème fondamental de l'existence (voir [Was65] p.3) qu'il existe formellement une matrice fondamentale de solutions du système (1.1) de la forme

$$(1.3) \quad \Phi(x) = S(x) x^R$$

où $S(x)$ est une matrice carrée d'ordre n uniforme (c'est-à-dire $S(x) = S(xe^{2i\pi})$) dans un voisinage de l'origine.

Lorsqu'on veut résoudre le système (1.1) au voisinage de l'origine pour un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x)))$ ayant un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2, on doit distinguer les deux points essentiels suivants :

- (i) On peut, par changement de variables qui ne modifie pas la nature de la singularité et qui permet de diminuer l'ordre polaire de $A(x)$ jusqu'à avoir un pôle simple auquel cas on a une solution matricielle sous la forme (1.3).
- (ii) On ne peut pas diminuer l'ordre polaire de $A(x)$ jusqu'à avoir un pôle simple. C'est un cas très difficile à traiter [Hila87]. Dans ce contexte, l'origine est une *singularité irrégulière* du système (1.1).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à résoudre, au voisinage de l'origine, un système différentiel du type (1.1) vérifiant le point (i) ci-dessus. Le choix de $x = 0$ n'exclut pas la généralité de l'intégration d'un tel système au voisinage d'un point quelconque $x = x_0$. En effet, une translation de la forme $x - x_0$ ou $1/x_0$ si $x_0 = \infty$, peut nous ramener à l'origine. Dans tout ce qui suit, nous supposons que l'étude du système (1.1) se fera au voisinage de l'origine. Dans la littérature, plusieurs algorithmes existent permettant de résoudre le système (1.1) dans les conditions du point (i) (voir par exemple [Mose60], [Malg81], [Katz70], [Leve75] et [JuLu71]). Sur les idées de Horn [Horn92], Moser a obtenu un critère donnant une condition nécessaire et suffisante pour la réduction de l'ordre polaire q du système (1.1). Se basant sur ce critère un algorithme a été donné, dans le cas d'une singularité régulière, pour construire des transformations simples permettant d'écrire le système (1.1) avec un ordre polaire $q = 1$ (voir [Diet78] et [Hila87]). IL a l'avantage d'être le plus simple à comprendre parmi

les autres algorithmes existants. D'autre part, il a la possibilité de construire les transformations nécessaires conduisant à la résolution directe du système (1.1). De ce fait, nous préférons adopter une telle méthode dans la suite de ce chapitre.

Contenu du chapitre : dans le prochain paragraphe, nous allons donner un algorithme pour construire les solutions du système différentiel (1.1) au voisinage de l'origine ayant A comme élément de $\mathcal{M}(n, C[[x]])$. Puis, nous consacrons, dans le paragraphe 3, à la construction algorithmique d'une matrice de solutions $\Phi(x)$ définie par (1.3) du système (1.1) tel que A soit un élément de $\mathcal{M}(n, C((x)))$ ayant un pôle simple en $x = 0$. Dans le paragraphe 4, nous nous intéressons à résoudre le système (1.1) pour une matrice $A(x)$ ayant en $x = 0$ un pôle d'ordre $q \geq 2$. Pour cela, on va développer un algorithme de *réduction* se basant sur le critère de Moser [Mose60]. Cette dernière permet de transformer le système différentiel (1.1) sous forme dite *M-irréductible*. Dans le paragraphe 5, nous illustrons l'algorithme par des exemples. Et finalement, nous concluons dans le paragraphe 6.

2. SOLUTIONS FORMELLES AU VOISINAGE D'UN POINT REGULIER

Considérons le système différentiel linéaire

$$(2.1) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x)$$

où A est un élément de $\mathcal{M}(n, C[[x]])$.

Pour calculer toutes les solutions du système (2.1), il suffit, de calculer une *matrice fondamentale de solutions* du système (2.1) (on appelle *matrice fondamentale de solutions* du système (2.1), une matrice carrée $\Phi(x)$ formée de n vecteurs $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ linéairement indépendants solutions du système (2.1)). L'objectif est de calculer une matrice fondamentale de solutions $\Phi(x)$ du (2.1) au voisinage de l'origine. Pour cela, on tente de calculer $\Phi(x)$ sous la forme

$$(2.2) \quad \Phi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Phi_i x^i$$

où les $\Phi_i, i \geq 0$, sont des matrices constantes carrées d'ordre n à coefficients complexes à calculer. Pour spécifier les Φ_i , nous adoptons la méthode des coefficients indéterminés bien que

d'autres méthodes de calcul plus puissantes que celle-ci (telle de Newton [KuTr78]) peuvent se trouver dans la littérature. La méthode s'exprime comme suit : substituons l'équation (2.1) dans le système (1.1). Ceci étant fait, on identifie les coefficients de x^i de chaque membre. On obtient la formule matricielle de récurrence :

$$\Phi_1 = A_0 \Phi_0$$

(2.3)

$$\Phi_i = \frac{1}{i} \{ A_0 \Phi_{i-1} + A_1 \Phi_{i-2} + \dots + A_{i-1} \Phi_0 \}, \quad (i = 2, 3, \dots)$$

Si on choisit la matrice Φ_0 inversible, en particulier $\Phi_0 = I_n$, alors tous les coefficients de l'équation (2.2) peuvent être calculés, successivement, par cette formule. Et donc, la matrice obtenue par l'équation (2.2), de cette façon, est une matrice fondamentale des solutions du système différentielle (2.1).

Remarque 2.1 : Dans cette thèse, on n'étudie pas le problème de la convergence de solutions des systèmes différentiels linéaires.

Maintenant, nous présentons la procédure "*resolution-point-régulier* ($A(x), n, m$)" permettant de calculer une matrice fondamentale tronquée jusqu'à l'ordre m désiré, solution du système différentiel (2.1).

resolution-point-régulier ($A(x)$, n , m) :

entrée : $A(x)$ un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$, m un entier ≥ 1 .

sortie : $\Phi(x)$ matrice carrée d'ordre n , tronquée jusqu'à l'entier m désiré,
solution de $\dot{Y} = A(x) Y$

début

$$\Phi_0 := I_n$$

$$\Phi(x) := 0 \quad \{ 0 \text{ est la matrice carrée nulle d'ordre } n \}$$

pour $i=2$ jusqu'à m faire

début

$$S := 0$$

pour $j=0$ jusqu'à $(i-1)$ faire

début

$$S := S + A_j \Phi_{(i-1-j)}$$

fin

$$\Phi_i := \frac{1}{i} S$$

$$\Phi(x) := \Phi(x) + \Phi_i x^i$$

fin

fin.

Ce paragraphe était consacré à l'étude des systèmes différentiels linéaires de la forme (1.1) ayant comme matrice $A(x)$ un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$. Si on remplace maintenant l'ensemble $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$ par un autre plus grand par exemple celui de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}((x)))$ et si on prend A un élément de cet ensemble ayant au moins un pôle en $x = 0$, alors il est tout à fait naturel de poser les questions suivantes :

- Est-ce que, dans ce cas, une matrice fondamentale des solutions du système (1.1) appartient aussi à $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$?
- Sinon, quelle est sa forme ?
- Y a-t-il des méthodes constructives pour la calculer ?

Dans ce qui suit, on se consacre à étudier le système différentiel (1.1) avec $A(x)$ une matrice ayant un pôle *simple* en $x = 0$.

3. SOLUTIONS FORMELLES AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE REGULIERE

Considérons un système différentiel linéaire de la forme

$$(3.1) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x) \quad \text{avec} \quad A(x) = x^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

L'objectif de ce paragraphe est de calculer $\Phi(x)$, une matrice fondamentale formelle de solutions de ce système. En général, on sait (voir chapitre I) que $\Phi(x)$ est de la forme

$$\Phi(x) = S(x) x^R$$

Puisque $A(x)$ est supposé avoir un pôle simple en $x = 0$, nous allons voir que $S(x)$ peut s'exprimer sous la forme

$$S(x) = \sum_{k=-v}^{+\infty} S_k x^k \quad \text{avec } v \text{ entier } \geq 0.$$

Le coeur de l'algorithme qui construit $\Phi(x)$ consiste à calculer un élément T de $GL(n, C[[x]])$: groupe des matrices carrées $T(x)$ d'ordre n à coefficients dans $C[[x]]$ défini par

$$T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i x^i \quad \text{avec} \quad \det T_0 \neq 0$$

de telle façon qu'en faisant le changement de variable

$$Y(x) = T(x) Z(x)$$

le système (3.1) se ramène au

$$(3.2) \quad \dot{Z}(x) = B(x) Z(x)$$

tel que $B(x)$ puisse s'écrire

$$(3.3) \quad B(x) = x^{-1} B_0$$

où B_0 est une matrice carrée constante.

Considérons les développements formels des matrices $A(x)$ et $B(x)$ comme suit :

$$A(x) = x^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} A_i x^i \quad \text{et} \quad B(x) = x^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} B_i x^i$$

En multipliant à gauche les deux termes de l'égalité (3.3) par la matrice $T(x)$, on obtient l'équation

$$\dot{T}(x) = A(x) T(x) - T(x) B(x)$$

Substituons les développements précédents de A , B et T dans cette relation, nous obtenons formellement

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i T_i x^{i-1} = x^{-1} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=0}^i (A_{i-k} T_k - T_k B_{i-k}) \right\} x^i \right]$$

et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i T_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=0}^i (A_{i-k} T_k - T_k B_{i-k}) \right\} x^i$$

En identifiant les termes en x^i dans les deux membres de cette égalité, nous obtenons le système d'équations matricielles ci-dessous :

$$A_0 T_0 - T_0 B_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$(A_0 - i I_n) T_i - T_i B_0 = - \sum_{k=0}^{i-1} (A_{i-k} T_k - T_k B_{i-k}) \quad i \geq 1$$

Choisissons maintenant pour B_0 la forme de Jordan de A_0 et T_0 la matrice de passage. Le système (3.4) s'écrit :

$$T_0^{-1} A_0 T_0 = B_0 \quad (3.5)$$

$$(A_0 - i I_n) T_i - T_i B_0 = H_i \quad \text{où} \quad H_i = - \sum_{k=0}^{i-1} A_{i-k} T_k \quad i \geq 1$$

La matrice H_i ne dépend que de T_0, T_1, \dots, T_{i-1} .

Pour que le système (3.5) admette une solution unique en T_i , il suffit que l'équation homogène

$$(A_0 - i I_n) T_i - T_i (T_0^{-1} A_0 T_0) = 0 \quad (3.6)$$

admette, pour tout $i \geq 1$, comme seule et unique solution la solution triviale $T_i = 0$. Le théorème suivant, démontré dans [Gant59], permet de résoudre cette équation

Théorème.3.1 [Gant59] *L'équation matricielle $A X - X B = 0$, où A et B sont des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C , admet pour unique solution, la solution triviale $X = 0$ si et seulement si A et B n'ont pas une valeur propre commune.*

A partir de ce théorème, deux cas importants sont à considérer :

Cas 1 : Il n'existe pas deux valeurs propres de A_0 qui diffèrent entre elles d'un entier. Ce cas s'appellera *cas générique*.

Cas 2 : Il existe au moins deux valeurs propres de A_0 qui diffèrent entre elles d'un entier. Ce cas s'appellera *cas général*.

D'abord, étudions le cas générique :

3.1. Cas générique

Le théorème suivant permet de calculer une matrice fondamentale des solutions du système différentiel (3.1).

Théorème.3.2 [CoLe55] *Si les valeurs propres de la matrice A_0 ne diffèrent pas entre elles d'un entier, alors le système (3.1) admet comme matrice fondamentale de solutions la matrice*

$$\Phi(x) = T(x) x^{B_0}$$

où $T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i x^i$ est un élément de $GL(n, C[[x]])$ tel que $T_0^{-1} A_0 T_0 = B_0$ soit la forme de Jordan de A_0 et les matrices T_k , pour $k \geq 1$, se calculent par la relation de récurrence précédente (3.5).

Preuve : En effet, puisque les valeurs propres de la matrice A_0 ne diffèrent pas entre elles d'un entier alors on a vu, précédemment, qu'une transformation de la forme

$$T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i x^i$$

avec $A_0 T_0 - T_0 B_0 = 0$, peut être déterminée d'une façon unique telle que le changement de variable $Y(x) = T(x) Z(x)$ réduit le système différentiel (3.1) à la forme

$$\dot{Z}(x) = x^{-1} B_0 Z(x).$$

Or, il est évident que ce système admet x^{B_0} comme matrice fondamentale de solutions ¹. Par conséquent,

$$\Phi(x) = T(x) x^{B_0}$$

est une matrice fondamentale de solutions du système (3.1). D'autre part, de l'équation

$$A_0 T_0 - T_0 B_0 = 0$$

on peut choisir pour B_0 la forme de Jordan de A_0 et T_0 une matrice de passage. Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

3.2. Cas général

Maintenant, on suppose que A_0 admette au moins deux valeurs qui diffèrent entre elles d'un entier. Le but est de construire une matrice fondamentale de solutions du système (3.1). La méthode développée ici, est due à Wasow [Waso65] bien qu'on puisse trouver son idée dans l'article de Turrittin [Turr55]. L'idée de base de la méthode consiste à former une transformation $T(x)$ de $GL(n, C((x)))$ permettant de se ramener au cas générique précédent. Autrement dit, si l'on désigne par $B(x)$, la matrice

$$B(x) = T^{-1}(x) A(x) T(x) - T^{-1}(x) \dot{T}(x) = x^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^k \right\}$$

Alors les valeurs propres distinctes de la matrice de tête B_0 de $B(x)$, ne diffèrent pas entre elles d'un entier.

Principe de la méthode :

Le premier pas consiste à mettre la matrice A_0 sous forme de Jordan. Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_t$ les valeurs propres de A_0 qui diffèrent entre elles d'entiers et par μ_1, \dots, μ_r les autres valeurs propres qui ne diffèrent pas entre elles d'entiers. Soit n_i la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i et m_j celle de la valeur propre μ_j . On a alors, l'égalité

$$n = (n_1 + n_2 + \dots + n_t) + M \quad \text{où} \quad M = m_1 + m_2 + \dots + m_r.$$

¹ Le calcul de x^{B_0} fait l'objet des plusieurs sujet de recherche [MoVL78], [GoVL90], [Ozel87] et [Gil92].

Sans perte de généralité, on peut supposer que les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_t$ sont données par

$$\lambda_i = \lambda_1 + k_i \quad (i = 2, \dots, t)$$

où les entiers k_i sont ordonnés comme suit

$$0 < k_1 < k_2 < \dots < k_t .$$

Donc, A_0 peut s'écrire sous la forme

$$A_0 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

où

- J_1 est la matrice diagonale par blocs correspondant aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_r ,
- J_2 est la matrice diagonale par blocs correspondant à la valeur propre λ_1 ,
- J_3 est la matrice diagonale par blocs correspondant aux valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_t$.

Effectuons maintenant sur le système (3.1) la transformation

$$Y(x) = S(x) Z(x) \quad \text{avec} \quad S(x) = \text{diag}(I_M, I_{n_1}, x I_{n-(M+n_1)})$$

on obtient le système

$$\dot{Z}(x) = x^{-1} B(x) Z(x)$$

où nous avons posé :

$$(3.7) \quad B(x) = x \{ S^{-1}(x) A(x) S(x) - S^{-1}(x) \dot{S}(x) \}.$$

Pour vérifier si le cas générique se présente, on doit calculer la matrice $B_0 = B(0)$ c'est-à-dire

$$(3.8) \quad B_0 = B(0) = [x \{ S^{-1}(x) A(x) S(x) - S^{-1}(x) \dot{S}(x) \}]_{x=0}$$

Pour cela, on partitionne la matrice A_1 en blocs suivant la même décomposition que A_0 . On trouve la forme ci-dessous

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{bmatrix}$$

où

- A_{11}^1, A_{12}^1 et A_{13}^1 désignent les blocs d'ordre respectives $M \times M, M \times n_1$ et

$M \times \{n - (M + n_1)\}$.

- A_{21}^1 , A_{22}^1 et A_{23}^1 désignent les blocs d'ordre respectives $n_1 \times M$, $n_1 \times n_1$ et $n_1 \times \{n - (M + n_1)\}$.
- A_{31}^1 , A_{32}^1 et A_{33}^1 désignent les blocs d'ordre respectives $\{n - (M + n_1)\} \times M$, $\{n - (M + n_1)\} \times n_1$ et $\{n - (M + n_1)\} \times \{n - (M + n_1)\}$.

A l'aide de ces notations, on trouve

$$B_0 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & J_3 - I_{n - (M + n_1)} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont

$$\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \dots, \lambda_t - 1.$$

De plus, chacune de ces valeurs propres admet la même multiplicité algébrique initiale. D'où, en répétant le même procédé k_1 fois, les valeurs propres de la matrice de tête du système final sont

$$\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_1, [\lambda_2 - k_1 = \lambda_1], \lambda_3 - k_1, \dots, \lambda_t - k_1.$$

Par conséquent, on peut ainsi ramener toutes les valeurs propres qui diffèrent entre elles d'un entier à être égales. Ce procédé s'arrête au bout de $(k_1 + k_2 + \dots + k_t)$ pas pour nous fournir un système

$$\dot{Y} = x^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k \right\} Y$$

où les valeurs propres de la matrice C_0 ne diffèrent pas entre elles d'un entier. Nous sommes dans le cas générique et donc, une matrice fondamentale de solutions $\Phi(x)$ de système (3.1) est donnée par

$$\Phi(x) = T(x) F(x) x^{C_0}$$

où la matrice $F(x)$ est calculée à partir du théorème.3.1.

Remarque.3.1 : En pratique la complexité de cet algorithme est importante (voir [Hila87], [Chen90] et [Gil93]) parce que :

- 1- Tester si les valeurs propres de la matrice A_0 sont différentes ou non d'entiers n'est pas un problème facile au moins, dans le cas numérique.
- 2- L'algorithme transforme $(k_1 + k_2 + \dots + k_t)$ fois A_0 sous forme de Jordan et modifie $(k_1 + k_2 + \dots + k_t)$ fois le système (3.1). Ce qui est coûteux en complexité (voir [Gil93]).

Jusqu'à ici, on a étudié les systèmes différentiels linéaires au voisinage de l'origine de la forme $\dot{Y}(x) = A(x) Y(x)$ où A est un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}(\!(x)\!))$ ayant au plus un pôle simple en $x = 0$. Maintenant, il s'agit de traiter le cas où la matrice $A(x)$ admet en $x=0$ un pôle d'ordre strictement supérieur à 1. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

4. REDUCTIBILITE AU SENS DE MOSER

Considérons le système différentiel

$$(4.1) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x) = \left\{ x^{-q} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \right\} Y(x)$$

où

- q est un entier ≥ 2 ,
- A_k est matrice constante carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{C} ,
- la matrice de tête A_0 de A est supposée non nulle.

Tout d'abord, on sait (voir paragraphe précédent) que si $q = 1$ alors l'origine est une singularité régulière du système (4.1). Mais, cela peut être vrai aussi lorsque $q \geq 2$. D'où, l'intérêt de caractériser les systèmes différentiels de la forme (4.1) ayant en $x = 0$ une singularité régulière. Il était prouvé par Horn [Horn92] que dans le cas d'une singularité régulière, on peut transformer le système (4.1) par une transformation $Y(x) = T(x) Z(x)$ où T est un élément de $GL(n, \mathbb{C}(\!(x)\!))$, en un nouveau système

$$(4.2) \quad \dot{Z}(x) = B(x) Z(x)$$

tel que la matrice

$$B(x) = T^{-1}(x)A(x) T(x) - T^{-1}(x) \dot{T}(x)$$

admet un pôle simple en $x = 0$. Bien que ce critère donne une condition nécessaire et suffisante pour caractériser une singularité régulière, il ne peut pas être utilisé pour décider à propos de la nature de la singularité pour un système différentiel linéaire donné. De plus, on ne connaît pas une méthode constructive pour calculer $T(x)$ c'est-à-dire il n'est pas facile de connaître le nombre

de termes de la transformation $T(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} T_i x^i$ nécessaires pour la réduction précédente (4.2).

A cet effet, nous allons voir le caractère pratique du critère de Moser [Hila87]. Ce critère conduira à la construction de l'algorithme de M -réductible qui sera présenté plus tard.

Moser a démontré que si on associe à tout système différentiel (1.1), les deux nombres rationnels suivants :

$$(4.3) \quad m(A) = q - 1 + \frac{r}{n} \quad \text{où } r = \text{rang}(A_0) \leq n$$

et

$$(4.4) \quad \mu(A) = \text{Inf} \left\{ m(T^{-1}A(x)T - T^{-1}\dot{T}) / T \in \text{GL}(n, C((x))) \right\}$$

On a alors la caractérisation

$$x = 0 \text{ est un point singulier régulier du système (4.1) } \Leftrightarrow \mu(A) \leq 1$$

Dans la suite, on appellera $\mu(A)$ l'invariant de Moser associé au système (4.1) (ou à la matrice A). Le reste de ce paragraphe sera consacré au calcul de cet invariant. On commence d'abord, par définir les significations des trois mots suivants (M -irréductible, M -réductible et équivalentes).

Définition.4.1 *Considérons les nombres de Moser $m(A)$ et $\mu(A)$ définis par (4.3) et (4.4). On dira que le système différentiel (4.1) (ou la matrice $A(x)$) est M -irréductible (au sens de Moser) si on a $m(A) = \mu(A)$. Sinon, on dira que le système différentiel (4.1) (ou la matrice $A(x)$) est M -réductible*

Définition.4.2 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}(\mathbb{x}))$. On dira que A et B sont équivalents s'il existe un élément T de $GL(n, \mathbb{C}(\mathbb{x}))$ tel que

$$B(x) = T^{-1}(x)A(x)T(x) - T^{-1}(x)\dot{T}(x)$$

Les systèmes différentiels linéaires associés à A et B sont dits aussi équivalents par T .

Nous supposons dans la suite que $m(A) > 1$. On va examiner dans quelles conditions, le système différentiel (4.1) est M -réductible. Ceci sera donné par le théorème suivant qui conduira à un algorithme calculant l'invariant $\mu(A)$.

Théorème.4.1 [Mose60] Si $m(A) > 1$ alors le système différentiel (4.1) est M -réductible si et seulement si le polynôme $p(\lambda)$ défini par

$$(4.5) \quad p(\lambda) = [x^r \det(x^{q-1}A(x) + \lambda I_n)]|_{x=0}$$

où r est le rang de la matrice A_0 , est identiquement nul en λ .

De ce théorème, on déduit la remarque essentielle.

Remarque.4.1 : Le polynôme $p(\lambda)$ peut s'écrire aussi sous la forme

$$p(\lambda) = x^r \det\left(\frac{A_0}{x} + A_1 + \lambda I_n\right)|_{x=0}.$$

Donc, $p(\lambda)$ ne dépend que de A_0 et A_1 .

On rappelle que le but est le calcul de l'invariant de Moser $\mu(A)$ défini par (4.4). En fait, celui-ci est lié au calcul de $m(T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T})$ pour tout T dans $GL(n, \mathbb{C}(\mathbb{x}))$. Donc, la question est de savoir si parmi toutes les matrices T , il y a des transformations *spéciales* pour diminuer $m(A)$. Le théorème suivant répond affirmativement.

Théorème.4.2 [Mose60] Si A est un élément M -réductible de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}(\mathbb{x}))$ tel que $m(A) > 1$ alors la réduction de $m(A)$ peut être obtenue à l'aide d'une matrice $T(x)$ de la forme

$$T(x) = (P_0 + xP_1)D(x)$$

où

- $P_0 \in GL(n, \mathbb{C})$ et $P_1 \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$,
- $D(x) = \text{diag}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$ tel que les α_i sont des entiers relatifs ordonnés de la

manière suivante : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.

Maintenant, nous allons donner une condition nécessaire pour que le rationnel $m(A)$ du système (4.1) diminue.

Proposition.4.1 *Considérons A et B deux éléments de $\mathcal{M}(n, C((x)))$ tels que :*

$$A(x) = x^{-q} \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \text{ avec } q > 1 \text{ et } A_0 \neq 0$$

et

$$B(x) = x^{-q'} \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \text{ avec } q' < q \text{ et } B_0 \neq 0.$$

Si A et B sont équivalents dans $\mathcal{M}(n, C((x)))$ et si $q' < q$ alors, la matrice A_0 est nilpotente.

Preuve : La démonstration de cette proposition est un cas particulier de celle du théorème.3.1.1 du chapitre III. ■

Maintenant, on peut donner l'algorithme de M-réductibilité [Hila87].

Algorithme de M-réductibilité

Cet algorithme construit une transformation $T(x)$ de $GL(n, C((x)))$ telle que

$$m(T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T}) = \mu(A).$$

L'algorithme est constitué des trois étapes suivantes :

Etape.1 Cette étape consiste à construire une matrice constante (que l'on notera par la suite $P_r(A_0)$) de manière que le changement de variable

$$Y(x) = P_r(A_0) Z(x)$$

transforme le système différentiel (4.1) en un nouveau système de la forme

$$\dot{Z}(x) = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(1)} x^k \right\} Z(x)$$

tel que :

- les r premières colonnes de la matrice $A_0^{(1)}$ sont linéairement indépendantes et les $n-r$ colonnes suivantes sont toutes nulles.
- les matrices $A_k^{(1)}$, $k \geq 0$ sont données par la formule de récurrence

$$A_k^{(1)} = P_r^{-1}(A_0) A_k P_r(A_0) \quad k = 0, 1, \dots, \infty.$$

La matrice $P_r(A_0)$ se calcule comme suit : Puisque le rang de la matrice A_0 est r alors, il est connu qu'il existe $n-r$ vecteurs colonnes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-r}$ linéairement indépendants tels que

$$(4.6) \quad A_0 \omega_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-r$$

On peut donc compléter la famille des vecteurs ω_i ($i = 1, 2, \dots, n-r$) de manière à avoir une base de \mathbb{C}^n . Appelons

$$(4.7) \quad \Sigma = (e'_1, e'_2, \dots, e'_r, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-r})$$

cette nouvelle base. $P_r(A_0)$ est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^n à la base Σ définie ci-dessus. Comme les vecteurs ω_i , $i = 1, 2, \dots, n-r$, ont été choisis dans le noyau de la matrice A_0 (voir l'équation (4.6)), en appliquant $P_r(A_0)$ à la matrice A_0 , on trouve que les $n-r$ dernières colonnes de la matrice

$$(4.8) \quad A_0^{(1)} = P_r^{-1}(A_0) A_0 P_r(A_0)$$

sont toutes nulles.

Etape.2 . On peut écrire la matrice A_0 comme suit :

$$(4.9) \quad A_0 = \begin{bmatrix} A_0^{11} & 0 \\ A_0^{21} & 0 \end{bmatrix}$$

où A_0^{11} est une matrice carrée d'ordre r et A_0^{21} une matrice à $n-r$ lignes et r colonnes. Partitionnons ensuite la matrice A_1 de la même manière que celle de A_0 , on obtient

$$(4.10) \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_1^{11} & A_1^{12} \\ A_1^{21} & A_1^{22} \end{bmatrix}$$

où A_1^{11} et A_1^{22} sont deux matrices carrées d'ordres r et $n-r$ respectivement.

Maintenant, introduisons les matrices :

$$(4.11) \quad D_r(x) = \text{diag} (x I_r, I_{n-r}),$$

$$R_1(\lambda, x) = \lambda I_n + \frac{A_0}{x} + A_1$$

Avec ces notations, le polynôme $p(\lambda)$ défini par l'équation (4.5) devient

$$(4.12) \quad p(\lambda) = [(\det R_1(\lambda, x)) (\det D_r(x))]_{|x=0} = 0$$

En utilisant les décompositions (4.9) et (4.10) de A_0 et A_1 , on obtient tout simplement

$$(4.13) \quad p(\lambda) = \det G(A, \lambda)$$

où $G(A, \lambda)$ désigne la matrice

$$(4.14) \quad G(A, \lambda) = [R_1(\lambda, x) D_r(x)]_{|x=0} = \begin{bmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} + \lambda I_{n-r} \end{bmatrix}$$

D'où, le résultat suivant

$$\text{la matrice } A(x) \text{ est } M\text{-réductible} \Leftrightarrow \det G(A, \lambda) \equiv 0$$

Il est clair, d'après la forme de $G(A, \lambda)$, qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que $A(x)$ soit M -réductible est que les vecteurs lignes de la matrice

$$(4.15) \quad L = \begin{bmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \end{bmatrix}$$

soient linéairement dépendants.

L'idée maintenant est de prouver que suivant le rang de la matrice L , nous pouvons construire des transformations $T(x)$ de $GL(n, C((x)))$ permettant de réduire la quantité $m(A)$. Pour cela, nous nous intéressons à étudier les deux possibilités suivantes :

$$\text{rang}(L) < r \quad \text{et} \quad \text{rang}(L) = r.$$

Traisons la première possibilité.

Possibilité.1 : rang (L) < r

La proposition suivante nous indique quelle genre de transformations nous utiliserons pour diminuer le nombre rationnel $m(A)$.

Proposition.4.2 [Hila87] Si A est M -réductible et si $\text{rang} (L) < r$, alors la réduction s'obtient à l'aide de la transformation diagonale

$$(4.16) \quad T(x) = D_r(x) \quad \text{où} \quad D_r(x) = \text{diag} (x I_r, I_{n-r})$$

Preuve : Soit $B(x)$ la matrice

$$(4.17) \quad B(x) = D_r^{-1}(x) A(x) D_r(x) - D_r(x)^{-1} \dot{D}_r(x)$$

alors

$$m(B) < m(A).$$

En effet, développons l'expression (4.17), on obtient

$$B(x) = x^{-q} \sum_{i=0}^{+\infty} B_i x^i - \frac{1}{x} \text{diag} (I_r, 0_{n-r})$$

avec

$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $q > 1$ et $\text{rang}(B_0) = \text{rang} ([A_0^{11} \ A_1^{12}]) = \text{rang} (L) < r$, on a alors

$$m(B) = q - 1 + \frac{\text{rang}(B_0)}{n} < q - 1 + \frac{r}{n} = m(A).$$

Ceci conclut la démonstration. ■

Remarque.4.3 : Lorsque $\text{rang}(B_0) = 0$ alors l'entier q est réduit d'une unité au moins.

Il nous reste maintenant à étudier soigneusement la deuxième possibilité : celle où $\text{rang} (L) = r$.

Possibilité.2 : rang (L) = r

Étape.3 Dans cette étape, on suppose que la matrice $G(A, \lambda)$ définie par l'équation(4.14) est singulière identiquement en λ et que $\text{rang} (L) = r$. Nous allons procéder comme suit :

- (i.1) On étudie le cas où $G(A, 0)$ admet une forme particulière dite *s-triangulaire* avec condition de dépendance (s.t.c.d en abrégé) et on donne la transformation de réduction correspondante (voir [Hila87]).
- (i.2) Lorsque $G(A, 0)$ admet une forme quelconque, on démontrera que par une transformation constante, on peut toujours se ramener à un système différentiel dont la matrice $G(A, 0)$ est s.t.c.d.

Tout d'abord, on aborde le cas (i.1) en commençant par la définition de la forme s.t.c.d.

Définition.4.3 La matrice $G(A, 0)$ est dite s.t.c.d si elle est de la forme

$$(4.18) \quad G(A, 0) = \begin{bmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}$$

où

- U_1 et U_2 sont respectivement de dimensions $r \times (n-r-s)$ et $r \times s$,
- V_1 est de dimension $(n-r-s) \times r$ avec $1 \leq s \leq n-r$,
- W_1 et W_2 sont de dimensions respectives $(n-r-s) \times (n-r-s)$ et $(n-r-s) \times s$,
- W_3 est une matrice carrée d'ordre s triangulaire supérieure à diagonale nulle,

vérifiant la condition de dépendance

$$(4.19) \quad \text{rang}(A_0^{11} \ U_1) < r.$$

Dans le cas où $G(A, 0)$ est s.t.c.d, nous allons déterminer une transformation $T(x)$ de $GL(n, C((x)))$ permettant de réduire le rationnel $m(A)$. Ceci est donnée par

Proposition.4.3 [Hila87] Si A est M -réductible et si $G(A, 0)$ est s.t.c.d alors la réduction s'obtient à l'aide de la transformation

$$(4.20) \quad T(x) = \text{diag}(x I_r, I_{n-r-s}, x I_s).$$

Preuve : Soit

$$B(x) = T(x)^{-1} A(x) T(x) - T(x)^{-1} \dot{T}(x) = x^{-q} \sum_{i=0}^{+\infty} B_i x^i - \frac{1}{x} \text{diag}(I_r, 0_{n-r-s}, I_s)$$

alors

$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0^{11} & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Or, d'après la condition (4.19), $\text{rang}(B_0) = \text{rang}([A_0^{11} \ U_1]) < r$. Donc

$$m(B) = q - 1 + \frac{\text{rang}(B_0)}{n} < q - 1 + \frac{r}{n} = m(A).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Pour terminer cette dernière étape, il suffit de prouver le cas (i.2) c'est-à-dire on peut toujours se ramener à un système différentiel dont la matrice $G(A, 0)$ est s.t.c.d où s est un entier compris entre 1 et $n-r$. En effet, considérons de nouveau la matrice $G(A, 0)$. Soit

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \\ w_{r+1} \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

un vecteur du noyau de la matrice transposée de $G(A, 0)$ c'est-à-dire

$$(4.24) \quad {}^tG(A, 0) w = 0.$$

Le fait que $\text{rang}(L) = r$, cela permet de déduire qu'au moins une de composantes w_i ($r < i \leq n$) du vecteur w est non nulle. En appliquant éventuellement à la matrice $A(x)$ une permutation sur ses $n-r$ dernières lignes, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $w_n \neq 0$.

Soit P_1 la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est formée par le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Si $i \neq n$ et la $n^{\text{ème}}$ ligne est formée par le vecteur w , i.e.

$$P_1 = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, w)$$

Appliquons alors au système (4.1) la transformation $Y = P_1^{-1} Z$, on obtient le système

$$\dot{Z} = A^{(1)}(x) Z \quad \text{avec} \quad A^{(1)}(x) = P_1 A(x) P_1^{-1}$$

Remarquons que $A_0^{(1)} = P_1 A_0 P_1^{-1}$ a la même forme (4.9) que A_0 puisque P_1 et A_0 sont deux

matrices triangulaires inférieures par blocs et le deuxième bloc diagonal de A_0 est nul. D'autre part, la $n^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $G(A^{(1)}, 0)$ est nulle parce que le vecteur w a été choisi dans le noyau de ${}^tG(A, 0)$. Donc, $G(A^{(1)}, 0)$ est de la forme (4.18) avec $s \geq 1$. En réitérant le même procédé k fois, on obtient un système différentiel dont la matrice G est de la forme

$$(4.22) \quad G(A^{(k)}, \lambda) = \begin{bmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-k} & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 + \lambda I_k \end{bmatrix}$$

où W_3 est une matrice carrée d'ordre k , triangulaire supérieure à diagonale nulle. En développant $\det G(A^{(k)}, \lambda)$ par rapport aux k dernières colonnes, on obtient

$$(4.23) \quad \det G(A^{(k)}, \lambda) = \lambda^k \det \begin{bmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-k} \end{bmatrix}$$

Si les vecteurs lignes de la matrice $G(A^{(k)}, 0)$ ne vérifient pas la condition (4.19) alors on applique de nouveau à la matrice $A^{(k)}$ l'inverse de

$$P_k = (e_1, e_2, \dots, e_{n-r-k-1}, w, e_{n-r-k+1}, \dots, e_n)$$

où, cette fois, le vecteur w est un vecteur du noyau de la transposée de la matrice $G(A^{(k)}, 0)$.

Au cours de cette procédure, soit la condition (4.19) est vérifiée pour un $k < n-r$, soit elle l'est pour $k = n-r$ auquel cas la condition (4.19) est nécessairement vérifiée car

$$\det G(A^{(k)}, \lambda) = \lambda^{n-r} \det A_0^{11} \equiv 0.$$

Après avoir donné explicitement les étapes de l'algorithme, résumons-le comme suit :

Algorithme de M-réductibilité

début

$q^* := q$ { q l'ordre polaire de $A(x)$ }

$\det G(A, \lambda) : \neq 0$

tant que ($q^* > 1$ et $\det G(A, \lambda) = 0$) **faire**

{ calcul du rang de A_0 par la méthode de Gauss. Cette méthode

$r := \text{rang}(A_0)$ donne par la même occasion une matrice P telle $P^{-1}A_0 P$ soit sous la forme (4.9) }

calcul de la matrice $G(A, \lambda)$

si $\det G(A, \lambda)$ n'est pas identiquement nul en λ alors arrêt de l'algorithme

sinon

mettre $G(A, 0)$ sous forme s.t.c.d { voir définition.4.3 }

appliquer la transformation diagonale : $T(x) = \text{diag} (x I_r, I_{n-r-s}, x I_s)$

fin-tant que

retourner q^*

fin-algorithme.

Cet algorithme caractérise les systèmes différentiels à singularités régulières. En effet, si le système différentiel de départ est à singularité régulière, en calculant successivement les transformations T_0, T_1, \dots, T_k , permettant à chaque pas de réduire le nombre rationnel de Moser

$$m(A) = q - 1 + \frac{r}{n}$$

on peut ramener ainsi l'entier q à 1 en au plus $(n-1)(q-1)$ pas (voir [Diet78] et [Hila87]).

En général, la transformation donnée par l'algorithme

$$T(x) = T_0(x) T_1(x) \dots, T_k(x)$$

conduit à un système différentiel de la forme

$$\dot{Y}(x) = x^{-q^*} \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} A_i^* x^i \right\} Y(x)$$

où q^* est la valeur minimale de l'entier q lorsqu'on applique à (4.1) toutes les transformations de $GL(n, C((x)))$. Par conséquent, l'invariant de Moser est immédiat

$$\mu(A) = q^* - 1 + \frac{\text{rang}(A_0^*)}{n}$$

et on a la caractérisation

$$x = 0 \text{ est un point singulier régulier du système (4.1)} \Leftrightarrow q^* = 1$$

4. EXEMPLES

1. Exemple où $x = 0$ est une singularité régulière sans utiliser la forme s.t.c.d : Soit la matrice

$$A(x) = x^{-2} \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 1-x & x^3 & 2x \\ x^2 & 0 & x^2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$q = 2, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r = \text{rang}(A_0) = 1 \text{ et } G(A, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matrice $G(A, \lambda)$ est singulière identiquement en λ , A est donc M-réductible. La première ligne de $G(A, \lambda)$ est nulle, en vertu de la proposition.4.2, on applique à $A(x)$ la transformation

$$T(x) = \text{diag} (x, 1, 1)$$

On obtient alors

$$A^{(1)} = T^{-1} A T - T^{-1} \dot{T} = x^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-x & x^2 & 2 \\ x^2 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Donc $x = 0$ est un point singulier régulier du système $\dot{Y}(x) = A(x) Y(x)$. Une matrice fondamentale de ce système est donnée par

$$\Phi(x) = T(x) \Psi(x)$$

où $\Psi(x)$ est une matrice fondamentale du système $\dot{Y}(x) = A^{(1)}(x) Y(x)$ que l'on sait calculer par le paragraphe.3.

2. Exemple où $x = 0$ est une singularité régulière avec l'utilisation de la forme s.t.c.d. Soit la matrice

$$A(x) = x^{-2} \begin{bmatrix} x^2 & x^2 & x \\ 1-x & 0 & x+x^2 \\ x^2 & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$q = 2, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r = \text{rang}(A_0) = 1 \text{ et } G(A, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matrice $G(A, \lambda)$ est singulière identiquement en λ , A est donc M -réductible sans que la première ligne de $G(A, \lambda)$ soit nulle. Donc, on doit mettre $G(A, 0)$ sous une forme s.t.c.d (voir définition 4.3). Or, $G(A, 0)$ est déjà sous forme s.t.c.d avec $s = 1$. Donc, en vertu de la proposition.4.3, on applique à $A(x)$ la transformation

$$T(x) = \text{diag} (x, 1, x)$$

On obtient alors

$$A^{(1)} = T^{-1} A T - T^{-1} \dot{T} = x^{-1} \begin{bmatrix} -1+x & 1 & 1 \\ 1 & -x & x+x^2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc $x = 0$ est un point singulier régulier du système $\dot{Y}(x) = A(x) Y(x)$.

3. Exemple où $x = 0$ est une singularité irrégulière : Soit $A(x)$ la matrice

$$A(x) = x^{-2} \begin{bmatrix} x & x+x^2 & x \\ 1 & x & x+x^2 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

On a :

$$q = 2, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r = \text{rang}(A_0) = 1 \text{ et } G(A, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Comme $\det G(A, \lambda) = -(1+\lambda)$ n'est pas identiquement nul en λ , la matrice $A(x)$ est M -irréductible. Donc, $x = 0$ est une singularité irrégulière de $A(x)$.

5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons voulu calculer une matrice fondamentale de solutions au voisinage de l'origine d'un système différentiel linéaire de la forme

$$(E) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x) \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}(n, C((x))).$$

Pour réaliser ceci, d'abord, dans le paragraphe 2, on a donné une procédure qui calcule une matrice fondamentale de solutions de (E) au voisinage d'un point régulier $x = 0$.

Dans le cas où $x = 0$ est un point singulier régulier de (E), on a développé un algorithme permettant de calculer une matrice fondamentale des solutions lorsque $A(x)$ admet un pôle simple en $x = 0$. Par contre, pour les systèmes ayant la forme (E) et tel que $A(x)$ admette un pôle $q \geq 2$ en $x=0$, nous avons donné un algorithme permettant de caractériser d'une part, la nature de la singularité, d'autre part, de calculer successivement les transformations T_0, T_1, \dots, T_k telles que la transformation produit $T(x) = T_0(x) T_1(x) \dots T_k(x)$ conduit à un système différentiel de la forme $\dot{Y}(x) = A^*(x) Y(x)$ où $A^*(x)$ admet un pôle q^* en $x = 0$. q^* est la valeur minimale de l'entier q lorsqu'on applique à (E) toutes les transformations de $GL(n, C((x)))$.

Si $q^* = 1$, alors on a pu calculer une matrice fondamentale $\Phi^*(x)$ de solutions du système $\dot{Y}(x) = A^*(x) Y(x)$. Par conséquent $T(x) \Phi^*(x)$ est une matrice fondamentale de solutions du système initial (E).

Dans le cas où $x = 0$ est un point singulier irrégulier du système (E) (c'est le cas où $q^* > 1$) on n'a pas pu calculer, moyennant l'algorithme de Moser, une matrice fondamentale des solutions de (E). Pour cette raison, dans le chapitre III, nous allons proposer *un nouvel algorithme* pour calculer une matrice fondamentale de solutions de (E) dans un voisinage de l'origine sans avoir à connaître la nature (régulière ou irrégulière) de la singularité. Pour cela, on doit, d'abord, passer par l'étude de la théorie de déformations de matrices dépendants de paramètres.

" Le mérite appartient à celui qui commence, même si le suivant fait mieux "

CHAPITRE II

THEORIE DE DEFORMATIONS DE MATRICES DEPENDANT DE PARAMETRES

1. Introduction

2. Définitions et concepts de base

2.1. Notations

2.2. Définitions

2.3. Exemples

3. Théorie générale de déformations verselles

3.1. Transversalité

3.2. Caractérisation du centralisateur d'une matrice

3.3. Construction d'une déformation miniverselle d'une matrice à l'aide
de son centralisateur

3.4. Forme générale des déformations miniverselles

4. Algorithme pour construire la forme normale d'Arnold

5. Forme induite de matrices dépendants de paramètres

5.1. Position du problème

5.2. Algorithme pour construire une forme induite

6. Conclusion

THEORIE DE DEFORMATIONS DES MATRICES DEPENDANT DE PARAMETRES

1. INTRODUCTION

Soit A une matrice carrée d'ordre n (n est un entier ≥ 2) à coefficients dans le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Supposons que A admette une valeur propre multiple et que nous voulions réduire A à sa forme de Jordan. Ce processus n'est pas une opération numériquement stable parce que par une perturbation aussi petite que l'on veut de la matrice A , on peut détruire complètement la structure de la forme de Jordan de A . Ainsi, si la matrice A n'est connue qu'approximativement alors cette procédure de réduction peut donner, dans certains cas, des absurdités. Traitons l'exemple suivant :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

La forme de Jordan de $A(\lambda)$ est

$$J(\lambda) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad \text{et } P(\lambda) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

est la matrice de passage de $A(\lambda)$. La matrice $P(\lambda)$, en tant qu'une fonction de λ , est discontinue en $\lambda = 0$.

Pourtant si les valeurs propres multiples peuvent constituer une situation instable (numériquement) pour une matrice seule, elle est stable pour une famille des matrices paramétrées i.e., en perturbant la famille, on ne supprime pas les valeurs propres multiples de la matrice de cette famille. Nous voulons réduire chaque membre de la famille à la forme de Jordan. En général, la transformation, qui est définie par la matrice de passage, va dépendre discontinûment du paramètre (comme indique l'exemple précédent). Il se pose donc la question suivante :

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

Quelle est la forme la " plus simple " à laquelle on puisse réduire, d'une façon régulière toutes les matrices proches d'une matrice donnée ? Ces familles s'appelleront, dans la suite, *forme normale d'Arnold*. Cette forme joue un rôle essentiel dans la théorie de réduction des systèmes différentiels linéaires au voisinage des singularités. En particulier, elle constitue une étape importante dans l'algorithme de *Turrittin-Wasow*, présenté dans le chapitre IV.

Dans ce chapitre, nous verrons que la construction de la forme normale d'Arnold n'est pas un problème facile à réaliser sur ordinateur (voir [Chen90]). Pour cela, nous nous sommes amenés à construire une nouvelle forme appelée, par la suite, *forme induite* ayant les avantages suivantes :

- 1- elle sera calculable et moins coûteuse en calcul que la forme normale de Arnold,
- 2- elle aura le même effet sur les systèmes différentiels linéaires à singularités que celle de la forme normale de Arnold (pour cela voir l'algorithme proposé dans le chapitre IV).

Contenu du chapitre : le prochain paragraphe est consacré aux définitions et aux concepts de base qui seront utilisés par la suite, en particulier, la définition des déformations *verselles et miniverselles*. Puis, la théorie générale de déformations verselles sera détaillée dans le paragraphe 3. Pour cela, nous allons commencer par définir la *transversalité* de deux sous-espaces vectoriels. on donnera, dans la section 3.1, le théorème 3.1.1. Celui-ci nous permet de caractériser le *centralisateur* d'une matrice donnée A_0 . Ce dernier, à son tour, nous aide à construire d'une part, une déformation miniverselle de A_0 , d'autre part, de donner sa forme explicite. Dans le paragraphe 4, nous nous intéressons à la construction algorithmique de la forme normale de Arnold. Puis, le paragraphe 5 se consacre à la construction de la forme induite des matrices dépendants d'un paramètre. Et finalement, on conclue dans le paragraphe 6.

2. DEFINITIONS ET CONCEPTS DE BASE

Ce paragraphe est consacré aux notations et définitions utiles qu'on aura besoin pour étudier la théorie des déformations verselles de Arnold [Arno71-72-80] et [Wigg90].

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

2.1. Notations

IR : le corps des nombres réels,

C : le corps des nombres complexes,

C[[x]] : l'algèbre des séries formelles à coefficient dans C,

C((x)) : le corps de fractions de C[[x]] (corps des séries méromorphes formelles à l'origine).

Soit **E** un anneau commutatif unitaire quelconque. Notons :

M(n, E) : l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans E,

GL(n, E) : le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans E.

2.2. Définitions [Arno80] :

Dans cette section, nous donnons une série de définitions concernant la famille de matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C.

Soit U un voisinage de l'origine des coordonnées dans un espace (de paramètres C^r), où r est un entier ≥ 1 .

Définition.2.2.1 On appelle *famille de matrices carrées d'ordre n, une application holomorphe*

$$A : U \longrightarrow \mathcal{M}(n, C)$$

$$\lambda \longrightarrow A(\lambda)$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in U$.

Définition.2.2.2 Considérons A_0 un élément de $\mathcal{M}(n, C)$. On appelle *déformation de A_0 toute famille de matrice $A(\lambda)$ vérifiant*

$$A(0) = A_0.$$

Définition.2.2.3 Soient $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux déformations de A_0 . On dit que $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont *équivalentes* s'il existe une déformation $C(\lambda)$ de la matrice unité telle que

$$B(\lambda) = C^{-1}(\lambda) A(\lambda) C(\lambda)$$

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Définition.2.2.4 Soit U' un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^m (m entier donné ≥ 1) et soit Φ une application holomorphe définie par

$$\begin{aligned} \Phi : U' &\longrightarrow U \\ \mu &\longrightarrow \lambda = \Phi(\mu) \quad \text{avec} \quad \Phi(0)=0 \end{aligned}$$

1- On appelle **famille induite** par l'application Φ , la famille Φ^*A définie comme suit :

$$(\Phi^*A)(\mu) = A(\Phi(\mu)), \quad \mu \in U'.$$

2- On déduit la définition d'une **déformation induite** Φ^*A de A_0 comme étant :

$$(\Phi^*A)(\mu) = A(\Phi(\mu)), \quad \mu \in U'$$

avec

$$(\Phi^*A)(0) = A(\Phi(0)) = A(0) = A_0.$$

Définition.2.2.5 Soit $A(\lambda)$ une déformation de A_0 . On dit que $A(\lambda)$ est une **déformation verselle** si toute déformation $B(\mu)$ de A_0 est équivalente à une déformation induite par $A(\lambda)$. Autrement dit, il existe une application holomorphe Φ d'un ouvert U' de \mathbb{C}^m dans un ouvert U vérifiant :

$$B(\mu) = C(\mu)^{-1} (\Phi^*A)(\mu) C(\mu), \quad \mu \in U \quad \text{et} \quad \Phi(0) = 0.$$

Définition.2.2.6 Une déformation verselle $A(\lambda)$ de A_0 est dite **universelle** si l'application induite Φ est déterminée uniquement par la déformation $B(\mu)$.

Définition.2.2.7 Une déformation est **miniverselle** si elle est verselle et si la dimension de l'espace des paramètres est la plus petite possible parmi toutes les déformations verselles possibles.

On clarifie ces définitions par les exemples suivants :

3.1. Exemples

1- **déformation universelle.** Soit $A_0 = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une matrice diagonale ayant sur la diagonale les nombres complexes a_1, a_2, \dots, a_n . Supposons que les a_i soient distincts, l'application définie sur un ouvert U de 0 dans \mathbb{C}^n de la manière suivante :

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

$$A : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$$

$$\lambda \longrightarrow A(\lambda) = \text{diag}(a_1 + \lambda_1, \dots, a_n + \lambda_n)$$

est une déformation universelle de A_0 . (voir dans [Arno80] page 226).

2- déformation verselle et non-universelle. Soit, pour $n = 2$, la déformation

$$A(\lambda) : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longrightarrow A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$A(\lambda)$ est manifestement une déformation verselle de la matrice nulle. En effet, il suffit d'identifier \mathbb{C}^4 et $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ et de prendre $\Phi(\lambda) = \lambda$ et $C(\lambda) = I_2$ (I_2 désigne la matrice unité d'ordre 2). Mais elle n'est pas universelle parce que si nous prenons la déformation

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix} \text{ avec } \mu_1 \neq -1,$$

et si on pose

$$D(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Psi(\mu) = (\mu_1, (1 + \mu_1)\mu_2, \frac{\mu_3}{1 + \mu_1}, \mu_4)$$

on trouve que

$$(Eq.1) \quad B(\mu) = D(\mu)^{-1} A(\Psi(\mu)) D(\mu).$$

D'où, il existe deux fonctions Φ et Ψ non identiques si $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ telles que la relation (Eq.1) soit vérifiée. Ceci prouve que $A(\lambda)$ n'est pas une déformation universelle (voir définition 2.2.7)

3- déformation non-verselle. La déformation

$$A(\lambda) : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longrightarrow A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas verselle sinon toute matrice voisine de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ serait semblable à une matrice $A(\lambda)$, donc serait de trace nulle, ce qui est absurde.

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

4- déformation universelle. La déformation

$$A(\lambda) : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longrightarrow A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

est universelle. En effet soit

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 + \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}$$

une déformation de la matrice $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B(\mu)$ s'écrit sous forme

$$B(\mu) = C(\mu)^{-1} A(\Phi(\mu)) C(\mu)$$

avec $C(\mu) = \frac{1}{(1+\mu_2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu_1 & 1+\mu_2 \end{bmatrix}$ et $\Phi(\mu) = (-\det B(\mu), \text{Tr } B(\mu))$ où $\det B(\mu)$ et $\text{Tr } B(\mu)$ désignent respectivement le déterminant et la trace de $B(\mu)$. Puisque Φ dépend uniquement de $B(\mu)$, $A(\lambda)$ est une déformation universelle.

Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier, en détails, la théorie générale des déformations verselles [Arno72].

3. THEORIE GENERALE DE DEFORMATIONS VERSELLES

D'abord, nous commençons, ce paragraphe, par définir la *transversalité* de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné. Puis, on démontrera (théorème 3.1.1) qu'il y a deux sous-espaces vectoriels *spéciaux* transverses dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Ce théorème sera important dans la construction de la forme normale d'Arnold et la théorie de réduction des systèmes différentiels linéaires à singularités qui sera explicitée plus tard (voir les chapitres suivants). Ensuite, on considère un élément A_0 de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ et on caractérise une déformation miniveselle de A_0 . Et finalement, on constate qu'on pourra construire les déformations miniverselles de A_0 à l'aide d'un sous-espace vectoriel noté $Z(A_0)$, le *centralisateur* de A_0 .

3.1. Transversalité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et soient S_1 et S_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

Définition.3.1.1 [Arno80] On dit que S_1 et S_2 sont *transverses* si on a

$$E = S_1 + S_2.$$

En particulier dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\dim E \leq \dim S_1 + \dim S_2$$

où $\dim E$ désigne la dimension de l'espace vectoriel E .

Exemple : Considérons deux plans S_1 et S_2 de $E = \mathbb{R}^3$ qui se coupent suivant un angle non nul (voir figure.1 ci-dessous)

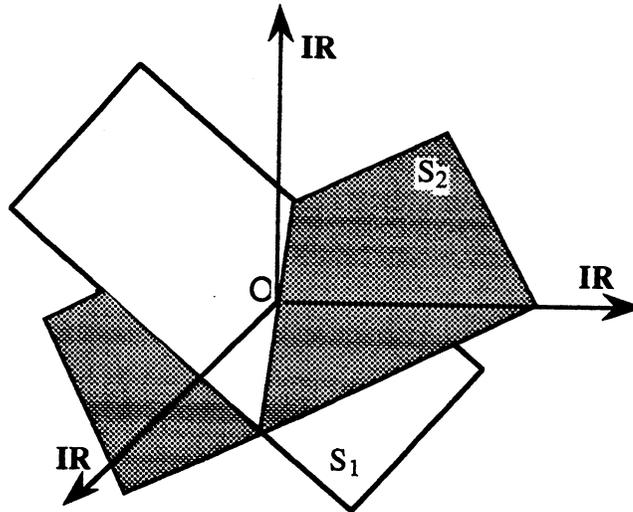


Figure. 1 : S_1 et S_2 sont transverses dans \mathbb{R}^3

alors S_1 et S_2 sont transverses dans \mathbb{R}^3

Maintenant, considérons A_0 un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, $U \subseteq \mathbb{C}^r$, un voisinage de 0 où r est un entier ≥ 1 et A une déformation de A_0 . Le théorème 3.1.1 suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que la déformation A de A_0 soit verselle.

On désigne par $C(A_0)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ définie comme suit :

$$(3.1.1) \quad C(A_0) = \{A_0 B - B A_0 / B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})\}$$

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Théorème.3.1.1 ([Arno80], [Wigg90]) *Si A est une déformation de A_0 définie sur un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{C}^r on a alors :*

A est verselle si et seulement si les deux sous-espaces vectoriels $\text{Im } A'(0)$ et $C(A_0)$ sont transverses. Autrement dit

$$(3.1.2) \quad \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = \text{Im } A'(0) + C(A_0)$$

où $A'(0) : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ est la différentielle de A en 0 et $\text{Im } A'(0)$ désigne l'image de l'opérateur $A'(0)$.

Remarque.3.1.1 : D'après l'équation (3.1.2), on peut minorer la dimension r de l'espace de paramètres \mathbb{C}^r comme suit :

$$(3.1.3) \quad r \geq \dim \text{Im } A'(0) \geq n^2 - \dim C(A_0).$$

Dans la suite, nous nous intéressons à caractériser une déformation miniverselle d'une matrice donnée A_0 . Pour réaliser ceci, on doit, d'abord caractériser ce qu'on appelle le centralisateur $Z(A_0)$ de la matrice A_0 . Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

3.2. Caractérisation du centralisateur d'une matrice

Le but de ce paragraphe est de calculer la dimension du centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 . En effet, nous verrons, dans le paragraphe 3.3, qu'on pourra construire une déformation miniverselle de A_0 à partir de $Z(A_0)$. De plus, le nombre de paramètres d'une telle déformation n'est autre que la dimension du sous-espace vectoriel $Z(A_0)$. Pour déterminer la dimension de $Z(A_0)$, nous allons considérer les deux cas suivants :

Cas 1 : A_0 admet une unique valeur propre,

Cas 2 : A_0 admet aux moins deux valeurs propres distinctes.

Soit A_0 un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Commençons par la définition de $Z(A_0)$.

Définition 3.2.1 On appelle *centralisateur* de A_0 , noté $Z(A_0)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$

$$(3.2.1) \quad Z(A_0) = \{B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \mid A_0 B - B A_0 = 0\}.$$

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

Désignons par $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ une suite d'entiers positifs ordonnée de la façon suivante

(3.2.2)
$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 1.$$

Et notons aussi

(3.2.3)
$$|\bar{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_m.$$

Remarquons déjà que pour tout P dans $GL(n, C)$, $Z(A_0)$ et $Z(P^{-1}A_0P)$ sont isomorphes par $B \rightarrow P^{-1}B P$. On ramène l'étude de $Z(A_0)$ au cas où A_0 est sous forme de Jordan

(3.2.4)
$$A_0 = \text{diag}(J_1(a_1, \bar{k}_1), J_2(a_2, \bar{k}_2), \dots, J_s(a_s, \bar{k}_s))$$

où

- a_1, a_2, \dots, a_s sont les valeurs propres distinctes de A_0 ,
- $J_i(a_i, \bar{k}_i)$ désigne le bloc de Jordan généralisé d'ordre $|\bar{k}_i|$ associé à l'unique valeur propre a_i défini par

$$\bar{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{is_i}) \quad \text{et} \quad J_i(a_i, \bar{k}_i) = a_i I_{n_i} + \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{is_i})$$

avec J_{ij} est le bloc de Jordan de dimension k_{ij} ayant la forme

$$J_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad k_{ij} = 1 \quad \text{ou} \quad J_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad k_{ij} > 1,$$

- $n = |\bar{k}_1| + |\bar{k}_2| + \dots + |\bar{k}_s|.$

Cas 1 : A_0 admet une unique valeur propre

Ici, l'objectif est de calculer la dimension de $Z(A_0)$ où A_0 est une matrice ayant une unique valeur propre a . Comme on l'a déjà dit, nous pouvons supposer que

$$A_0 = J(a, \bar{k})$$

où $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ est une suite d'entiers vérifiant (3.2.2). Le lemme suivant permet de déterminer la dimension de $Z(A_0)$.

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

Lemme.3.2.1 [Gant59] La dimension du centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 est donnée par la formule

$$(3.2.5) \quad \dim Z(A_0) = \sum_{i=1}^s (2i-1) k_i$$

Preuve : D'abord, il n'est pas difficile de constater que

$$Z(A_0) = Z(A_0 - aI_n).$$

Par conséquent, il suffit de prouver ce lemme pour une matrice A_0 ayant comme unique valeur propre la valeur propre zéro. On suppose donc que

$$A_0 = J(0, \bar{k}) \text{ avec } \bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s), \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s \geq 1 \text{ et } n = k_1 + k_2 + \dots + k_s.$$

Remarquons que la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de C^n peut s'écrire :

$$f_1, {}^tA_0 f_1, \dots, {}^tA_0^{k_1-1} f_1; f_2, {}^tA_0 f_2, \dots, {}^tA_0^{k_2-1} f_2; \dots; f_s, {}^tA_0 f_s, \dots, {}^tA_0^{k_s-1} f_s$$

où

- tA_0 désigne la matrice transposée de A_0 ,
- $f_1 = e_1, f_2 = e_{k_1+1}, \dots, f_s = e_{k_{s-1}+k_{s-2}+\dots+k_2+k_1+1}$,
- ${}^tA_0^{k_i} f_i = 0, 1 \leq i \leq s$.

Soit B un élément de $Z({}^tA_0)$ et soit $\varepsilon_i = B f_i, i = 1, 2, \dots, s$. On a alors

$${}^tA_0^{k_i} \varepsilon_i = {}^tA_0^{k_i} B f_i = B {}^tA_0^{k_i} f_i = 0, \quad \text{donc,} \quad \varepsilon_i \in \text{Ker } {}^tA_0^{k_i}.$$

Considérons Ψ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \Psi : Z({}^tA_0) &\longrightarrow \prod_{i=1}^s \text{Ker } {}^tA_0^{k_i} \\ B &\longrightarrow \Psi(B) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s) \end{aligned}$$

Ψ est un isomorphisme. En effet :

Ψ est injective: Si $\Psi(B) = 0$ alors les ε_i sont nuls et on a,

$$B {}^tA_0^j f_i = {}^tA_0^j B f_i = {}^tA_0^j \varepsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq s \text{ et } 0 \leq j \leq k_i-1$$

donc

$$B = 0.$$

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Ψ est surjective : Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$; $\varepsilon_i \in \text{Ker } {}^tA_0^{k_i}$, et définissons $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ sur la base canonique par

$$B {}^tA_0^j f_i = {}^tA_0^j \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, s; \quad j = 0, 2, \dots, k_i-1.$$

Ceci implique que $B \in \mathcal{Z}({}^tA_0)$. En effet, pour $0 \leq j \leq k_i-2$, on a

$$(B {}^tA_0)({}^tA_0^j f_i) = B {}^tA_0^{j+1} f_i = {}^tA_0^{j+1} \varepsilon_i = {}^tA_0 {}^tA_0^j \varepsilon_i = ({}^tA_0 B)({}^tA_0^j f_i).$$

Pour $j = k_i-1$, on a

$$({}^tA_0 B)({}^tA_0^{k_i-1} f_i) = {}^tA_0^{k_i} \varepsilon_i = 0 \quad \text{parce que } \varepsilon_i \in \text{Ker } {}^tA_0^{k_i}$$

et

$$(B {}^tA_0)({}^tA_0^{k_i-1} f_i) = B {}^tA_0^{k_i} f_i = 0.$$

On déduit que $\Psi(B) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$, d'où Ψ est surjective. Donc, Ψ est un isomorphisme.

Par conséquent, on a

$$(Eq.1) \quad \dim \mathcal{Z}({}^tA_0) = \sum_{i=1}^s \dim \text{Ker } {}^tA_0^{k_i}.$$

Calculons maintenant $\dim \text{Ker } {}^tA_0^{k_i}$. En effet, remarquons que si $J(m)$ (m étant un entier ≥ 1) est le bloc de Jordan d'ordre m ci-dessous

$$J(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

on a alors

$$\dim \text{Ker } {}^tJ(m)^k = \begin{cases} k & \text{si } k \leq m \\ m & \text{si } k > m \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } {}^tA_0^{k_i} &= \sum_{j=1}^{k_i} \dim \text{Ker } {}^tJ(k_j)^{k_i} \\ &= (k_i + k_i + \dots + k_i) + k_{i+1} + \dots + k_s \\ &= i k_i + k_{i+1} + \dots + k_s \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation (Eq.1) devient

$$\dim \mathcal{Z}({}^tA_0) = \sum_{i=1}^s (i k_i + k_{i+1} + \dots + k_s) = \sum_{i=1}^s (2i-1)k_i.$$

Le fait que $\mathcal{Z}({}^tA_0)$ et $\mathcal{Z}(A_0)$ sont isomorphes achève la démonstration du lemme. ■

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

Cas 2 : A_0 admet aux moins deux valeurs propres distinctes

Reprenons les notations de (3.2.4) :

$$A_0 = \text{diag}(J_1(a_1, \bar{k}_1), J_2(a_2, \bar{k}_2), \dots, J_s(a_s, \bar{k}_s))$$

où

- a_1, a_2, \dots, a_s sont les valeurs propres distinctes de A_0 ,
- $J_i(a_i, \bar{k}_i)$ désigne le bloc de Jordan généralisé d'ordre $|\bar{k}_i|$ associé à l'unique valeur propre a_i défini par

$$\bar{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{is_i}) \text{ et } J_i(a_i, \bar{k}_i) = a_i I_{n_i} + \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{is_i})$$

avec J_{ij} est le bloc de Jordan de dimension k_{ij} ayant la forme

$$J_{ij} = 0 \text{ si } k_{ij} = 1 \text{ ou } J_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ si } k_{ij} > 1,$$

- $n = |\bar{k}_1| + |\bar{k}_2| + \dots + |\bar{k}_s|$.

Alors, la dimension de $Z(A_0)$ se calcule par

Théorème.3.2.2 [Arno72] La dimension du centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 est donnée par la formule

$$(3.2.6) \quad \dim Z(A_0) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{s_i} (2j-1)k_{ij}$$

Preuve : Notons d'abord que

$$(Eq.1) \quad Z(J(a_i, \bar{k}_i)) = Z(J(0, \bar{k}_i)), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Désignons par $E_i = \text{Ker } \iota(A_0 - a_i I_n)^{|\bar{k}_i|}$. On sait que

$$(Eq.2) \quad C^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_s.$$

Si B est un élément de $Z(\iota A_0)$, on a $B(E_i) \subseteq E_i$ (Ici, B est l'opérateur linéaire de C^n dans C^n). En effet, comme B commute avec ιA_0 , il commute avec $\iota(A_0 - a_i I_n)$, $1 \leq i \leq s$. Donc, pour tout

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

$x \in E_i$, on a

$${}^t(A_0 - a_i I_n)^{\overline{k}_i} B x = B {}^t(A_0 - a_i I_n)^{\overline{k}_i} x = 0, \quad \text{d'où } Bx \in E_i$$

ceci prouve que $B(E_i) \subseteq E_i$.

Notons

$$(Eq.3) \quad B_i = B|_{E_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

on a donc

$$\begin{aligned} {}^tA_0|_{E_i} = {}^tJ(a_i, \overline{k}_i), \quad i = 1, 2, \dots, s &\Rightarrow B_i {}^tJ(a_i, \overline{k}_i) = {}^tJ(a_i, \overline{k}_i) B_i \\ &\Rightarrow B_i \in Z({}^tJ(a_i, \overline{k}_i)) = Z({}^tJ(0, \overline{k}_i)). \end{aligned}$$

Soit Ψ l'application

$$\begin{aligned} \Psi : Z({}^tA_0) &\xrightarrow{\hspace{2cm}} \prod_{i=1}^s Z({}^tJ(0, \overline{k}_i)) \\ B &\xrightarrow{\hspace{2cm}} \Psi(B) = (B_1, B_2, \dots, B_s) \end{aligned}$$

où les B_i sont définis par (Eq.3). Il est clair que Ψ est un isomorphisme. Par conséquent

$$(Eq.4) \quad \dim Z({}^tA_0) = \sum_{i=1}^s \dim Z({}^tJ(0, \overline{k}_i))$$

Mais d'après le lemme 3.2.1, on a

$$\dim Z({}^tJ(0, \overline{k}_i)) = \sum_{j=1}^{s_i} (2j-1)k_{ij}$$

Substituons cette équation dans (Eq.4), nous obtenons

$$\dim Z(A_0) = \dim Z({}^tA_0) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{s_i} (2j-1)k_{ij}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Remarque.3.2.1 : Il est clair que pour $j \geq 1$, on a $2j - 1 \geq 1$, d'où de l'équation (3.2.6), on peut minorer $\dim Z(A_0)$ comme suit :

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} \dim Z(A_0) &\geq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{s_i} k_{ij} \geq \sum_{i=1}^s \overline{k}_i \\ &\quad \downarrow \\ \dim Z(A_0) &\geq n. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $s_i = 1$ pour tout i , donc si chaque suite \overline{k}_i est réduite à un seul

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

élément k_{i1} . Dans ce cas, on a

$$A_0 = \text{diag} (J(a_i, k_{i1})), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

De même, $\dim Z(A_0) = n$ lorsque A_0 est formé d'un seul bloc de Jordan, ou, à l'opposé, lorsque la matrice A_0 admet n valeurs propres distinctes.

Nous allons voir, dans le prochain paragraphe, comment à partir de la formule (3.2.6), on peut connaître le nombre de paramètres d'une déformation miniverselle de A_0 .

3.3. Construction d'une déformation miniverselle d'une matrice à l'aide de son centralisateur

Etant donnée A_0 un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. On veut construire une déformation miniverselle de A_0 . Pour cela, nous allons utiliser essentiellement les propriétés précédentes du centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 . Sans perte de généralité, on peut supposer que la matrice A_0 est sous forme de Jordan. Considerons l'application

$$(3.3.1) \quad \begin{array}{l} A : Z(A_0^*) \text{ -----} \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \\ B \text{ -----} \rightarrow A(B) = A_0 + B \end{array}$$

où A_0^* désigne la matrice adjointe de A_0 et $Z(A_0^*)$ le centralisateur de A_0^* (voir définition 3.2.1). Avec ces notations, on a

Théorème.3.3.1 *L'application A, définie par l'équation (3.3.1), est une déformation miniverselle de A_0*

Preuve : Pour prouver que l'application A, définie ci-dessus, est une déformation miniverselle de A_0 , on doit démontrer que :

- (i) A est verselle,
- (ii) A a un nombre minimal de paramètres.

Pour prouver le premier point (i) il suffit, d'après le théorème 3.1.1 de démontrer que

$$\mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = \text{Im } A'(0) + C(A_0)$$

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Pour cela, on définit sur l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ le produit scalaire hermitien suivant :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \langle M, N \rangle = \text{Tr}(M N^*)$$

où par $\text{Tr}(M)$, on désigne la trace de la matrice M .

Maintenant prouvons les égalités suivantes :

$$\text{Im } A'(0) = Z(A_0^*) = C(A_0)^\perp$$

où $C(A_0)^\perp$ désigne le sous-espace orthogonal de $C(A_0)$. En effet, la valeur de la dérivée en zéro de l'application A est l'identité. Donc

$$\text{Im } A'(0) = Z(A_0^*)$$

Prouvons ensuite que

$$C(A_0)^\perp = Z(A_0^*)$$

En effet :

$$\begin{aligned} B \in C(A_0)^\perp &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \langle (M A_0 - A_0 M), B \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \text{Tr}((M A_0 - A_0 M) B^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \text{Tr}(M A_0 B^*) - \text{Tr}(A_0 M B^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \text{Tr}(M A_0 B^*) - \text{Tr}(M B^* A_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \text{Tr}(M(A_0 B^* - B^* A_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \text{Tr}(M(BA_0^* - A_0^* B)^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}), \langle M, (BA_0^* - A_0^* B) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Le fait que le produit scalaire précédent est non dégénéré : $\langle M, X \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \Rightarrow M = 0$ nous permet d'obtenir les équivalences

$$B \in C(A_0)^\perp \Leftrightarrow A_0^* B = B A_0^* \Leftrightarrow B \in Z(A_0^*)$$

D'où

$$C(A_0)^\perp = Z(A_0^*).$$

Pour le reste de la démonstration du point (i), on utilise la relation classique

$$\mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = C(A_0)^\perp \oplus C(A_0).$$

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

Or, $C(A_0)^\perp = Z(A_0^*) = \text{Im } A'(0)$. On a donc

$$(*) \quad \mathcal{M}(n, C) = \text{Im } A'(0) \oplus C(A_0).$$

Ceci signifie exactement que l'application A ainsi définie par (3.3.1) est une déformation verselle de A_0 (voir théorème 3.1.1). Pour finir la démonstration de ce théorème, il nous reste à vérifier que la déformation A a un nombre minimal de paramètres. En effet, de l'équation (*), on conclut que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(n, C) &= \dim \text{Im } A'(0) + \dim C(A_0) \\ \Leftrightarrow n^2 &= \dim Z(A_0^*) + \dim C(A_0) \\ \Leftrightarrow \dim Z(A_0^*) &= n^2 - \dim C(A_0). \end{aligned}$$

Donc, $\dim Z(A_0^*) = n^2 - \dim C(A_0)$ est bien un minimum (voir l'équation (3.1.3)). Ceci conclut la démonstration du théorème. ■

D'après l'étude faite précédemment, on sait construire une déformation miniverselle (théorème 3.3.1). La question est alors : *Quelle est la structure matricielle de cette déformation miniverselle ?* La réponse fait l'objet du prochain paragraphe.

3.4. Forme générale des déformations miniverselles

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à construire la forme de la déformation miniverselle suivante

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{l} A : Z(A_0^*) \text{ -----} \rightarrow \mathcal{M}(n, C) \\ B \text{ -----} \rightarrow A(B) = A_0 + B \end{array}$$

Pour cela, il suffit de donner la structure des éléments du centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 . Dans tout ce paragraphe, la matrice A_0 est supposée être sous forme de Jordan. Faisons, de plus, l'hypothèse suivante :

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

(H.1) A_0 ne possède qu'une seule valeur propre a et une série de blocs de Jordan tels que :

$$A_0 = J(a, \bar{k}) = \text{diag} (J_1(a, k_1), J_2(a, k_2), \dots, J_s(a, k_s))$$

avec

- $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_s)$,
- $J_1(a, k_i)$ est le bloc de Jordan d'ordre k_i ,
- $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m > k_{m+1} = k_{m+2} = \dots = k_s = 1$.

Notons par ρ l'entier

(3.4.2)
$$\rho = k_{m+1} + \dots + k_s.$$

Avec tout ce qui précède, la structure des éléments de $Z(A_0)$ est donnée par

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Proposition.3.4.1 [Gant59] *Les matrices représentées sur la figure.2 ci-dessous sont les seules qui commutent avec la matrice A_0 (dans la figure.2, m est choisi égale à 3)*

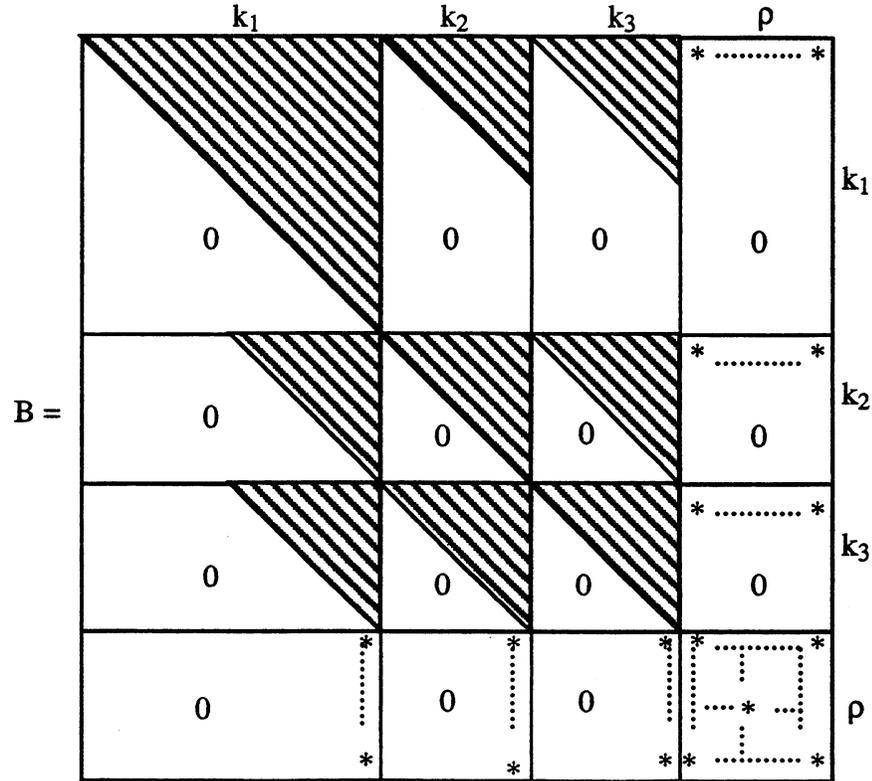


Figure. 2 : B commute avec la matrice A_0

*Dans cette figure, sur chaque segment oblique parallèle à la diagonale les nombres sont égaux mais ils diffèrent entre les divers diagonales. Les * représentent les endroits où l'on peut trouver des éléments non nuls de \mathbb{C} (remarquons que le bloc (ρ, ρ) est une matrice quelconque).*

Preuve : En résolvant l'équation matricielle

$$A_0 B - B A_0 = 0$$

on obtient la forme recherchée (voir chapitre VIII de[Gant59]). ■

Par analogie avec la figure.2, on déduit que les matrices représentées dans la figure.3 sont les seules qui commutent avec la matrice A_0^* .

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

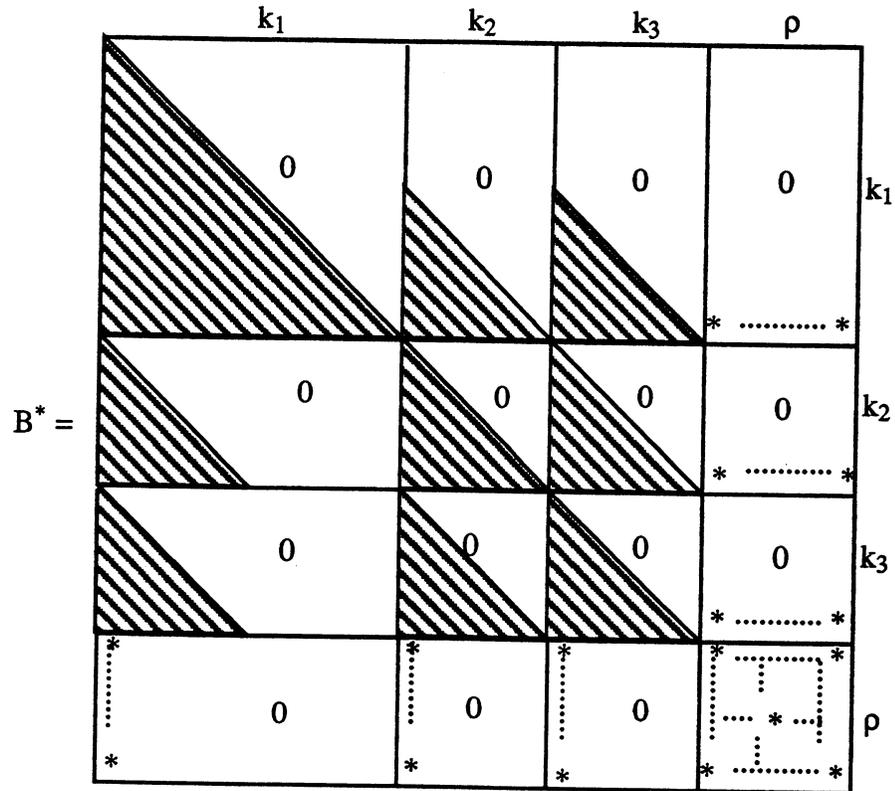


Figure. 3 : B^* commute avec la matrice A_0^*

Remarque.3.4 :

- La dimension de $Z(A_0^*)$ (qui est la dimension de $Z(A_0)$) est égale au nombre de segments obliques dans la figure.3.
- Dans le cas où la matrice A_0 possède plusieurs valeurs propres distinctes, on écrit A_0 sous la forme de Jordan comme en (3.2.4). Alors, les matrices commutant avec la matrice A_0 seront diagonales par blocs, et de plus à chaque valeur propre correspondra un bloc de la forme décrite sur la Figure 2 ci-dessus. Et donc, d'après la proposition 3.4.1, on conclut qu'une déformation miniverselle de A_0 est $A_0 + B^*$ où B^* est une matrice diagonale par blocs telle que chaque bloc diagonal est de la forme décrite dans la figure.3 ci-dessus.

On motive la proposition 3.4.1 par l'exemple suivant :

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

Exemple :

1- Soit $A_0 = J(a, \bar{k})$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $\bar{k} = (3, 2)$. On a :

$$B \in \mathbf{Z}(A_0) \iff B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & b_8 \end{bmatrix} \quad \text{où } b_i \in \mathbb{C}.$$

2- Soit $A_0 = \text{diag}(J_1(a_1, \bar{k}_1), J_2(a_2, \bar{k}_2))$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$, $\bar{k}_1 = (2, 1)$ et $\bar{k}_2 = (2)$.

On a :

$$B \in \mathbf{Z}(A_0) \iff B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \quad \text{où } b_i \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, nous allons définir la forme normale d'Arnold. Pour cela, d'abord, nous choisissons une base de l'espace vectoriel $\mathbf{Z}(A_0^*)$ de la manière suivante :

A chaque segment oblique de la figure.3, on associe une matrice composée de zéros et d'unités de telle sorte que les unités soient situées sur ce segment oblique.

Ensuite, d'après la structure des éléments de $\mathbf{Z}(A_0^*)$, nous constatons que ce dernier est isomorphe à un espace vectoriel, noté $\Delta(A_0^*)$ défini comme suit :

$\Delta(A_0^*)$: l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ ayant la forme

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

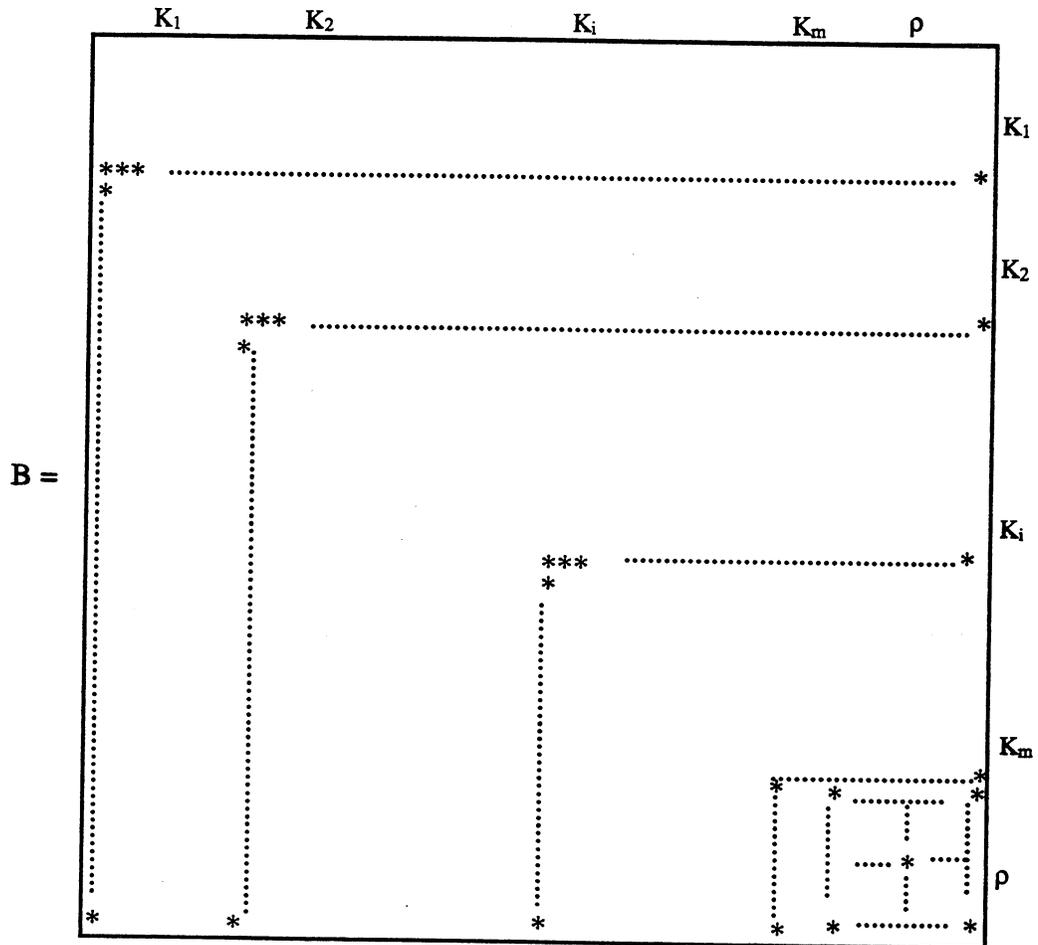


Figure. 4

où les * représentent les endroits où l'on peut trouver des éléments non nuls de C. D'où

(3.4.3)

$$Z(A_0^*) \text{ est isomorphe à } \Delta(A_0^*)$$

Maintenant grâce à tout ce qui précède, on peut définir la forme normale d'Arnold de la matrice A_0 comme suit :

Définition.3.4.1 On appelle forme normale d'Arnold de A_0 une matrice $A_0 + B$ telle que B soit un élément de $\mathcal{M}(n, C)$ ayant une forme similaire à celle décrite dans la figure.4 ci-dessus

Le paragraphe suivant est consacré à la construction algorithmique de la forme normale

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

$$n_i = |\bar{k}_i| = k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{is_i} \quad \text{et} \quad k_{i1} \geq k_{i2} \geq \dots \geq k_{is_i} \geq 1$$

• $J_i(\lambda_i, \bar{k}_i) = \lambda_i I_{n_i} + \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{is_i})$ avec

$$\text{pour } j = 1, 2, \dots, s_i, \text{ on a } J_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ est d'ordre } k_{ij}.$$

Le théorème suivant est en quelque sorte une *procédure* pour construire la forme normale d'Arnold de la matrice $A(x)$.

Théorème.4.1 *Avec les notations précédentes, il existe un T dans $GL(n, C[[x]])$ tel que si*

$$B(x) = T^{-1}(x) A(x) T(x) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i B_i$$

Alors on a :

$$B_0 = A_0 \text{ et } B_i \in Z(A_0^*) \quad (i \geq 1).$$

Preuve : Définissons une série d'éléments de $\mathcal{M}(n, C[[x]])$

$$A = A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(m+1)}, \dots$$

on définit $A^{(1)}$ de la façon suivante :

$$A^{(1)} = T^{(1)-1} A^{(0)} T^{(1)}, \quad T^{(1)} = I + x T_1^{(1)}$$

où l'élément $T_1^{(1)}$ de $\mathcal{M}(n, C)$ est choisi de sorte que $A_1^{(1)} \in Z(A_0^*)$. Cette condition nous donne

$$(3.2.2) \quad A_1^{(1)} = A_1^{(0)} + A_0 T_1^{(1)} - T_1^{(1)} A_0$$

En effet, le théorème 3.3.1 nous affirme qu'il existe un $T_1^{(1)}$ dans $\mathcal{M}(n, C)$ tel que

$$A_1^{(0)} + A_0 T_1^{(1)} - T_1^{(1)} A_0 \in Z(A_0^*).$$

Maintenant, on suppose que $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ sont construits de la façon suivante :

$$A^{(k)} = T^{(k)-1} A^{(k-1)} T^{(k)}, \quad T^{(k)} = I + x^k T_k^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq m$$

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

tels que les coefficients de $A^{(k)}$ satisfassent

$$A_i^{(k)} \in Z(A_0^*), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Alors, on construit $A^{(m+1)}$ de la façon suivante :

$$A^{(m+1)} = T^{(m+1)^{-1}} A^{(m)} T^{(m+1)}, \quad T^{(m+1)} = I + x^{m+1} T_{m+1}^{(m+1)}$$

De cette équation, on déduit les relations de récurrence :

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} A_0^{(m+1)} &= A_0, \quad A_k^{(m+1)} = A_k^{(m)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m \\ A_{m+1}^{(m+1)} &= A_{m+1}^{(m)} + A_0 T_{m+1}^{(m+1)} - T_{m+1}^{(m+1)} A_0 \\ A_{m+1+i}^{(m+1)} &= A_{m+1+i}^{(m)} + A_i^{(m)} T_{m+1}^{(m+1)} - T_{m+1}^{(m+1)} A_i^{(m+1)}, \quad i \geq 1 \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $T_{m+1}^{(m+1)}$ dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ de sorte que

$$A_{m+1}^{(m+1)} \in Z(A_0^*).$$

D'après l'équation (3.2.3), nous remarquons que la transformation $T^{(m+1)}(x)$ ne change pas les coefficients $A_k^{(m)}$, $1 \leq k \leq m$ de la matrice $A^{(m)}(x)$. Donc si nous définissons une transformation $T_A(x)$ par

$$(3.2.4) \quad T_A(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (I + x^k T_k^{(k)})$$

(On ne s'intéresse pas à la question de convergence de ce produit formel),

Et si nous appliquons la transformation T_A sur la matrice $A(x)$, nous obtenons

$$B = T_A^{-1} A T_A$$

une matrice vérifie les propriétés demandées. Ceci conclut notre démonstration. ■

Remarque.4.1 : Pour tout $m \geq 0$, $T_{m+1}^{(m+1)}$ dépend de A_i , $1 \leq i \leq m+1$. De plus $A_m^{(m+1)}$ dépend seulement de A_i , $1 \leq i \leq m$.

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

5. FORME INDUITE DE MATRICES DEPENDANTS DE PARAMETRES

5.1. Position du problème

Parmi les matrices dépendant des paramètres, on s'intéresse, comme on l'a déjà dit dans le paragraphe précédent, à $A(x)$ où A est un élément de $\mathcal{M}(n, C[[x]])$. Soit A un élément de $\mathcal{M}(n, C[[x]])$. A peut s'écrire

$$(5.1.1) \quad A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i x^i$$

On suppose, dans ce paragraphe, que la matrice A_0 est sous la forme de Jordan. De plus, elle admet une unique valeur propre λ c'est-à-dire :

$$(5.1.2) \quad A_0 = J(a, \bar{k}) = \text{diag} (J(a, k_1), J(a, k_2), \dots, J(a, k_s))$$

où

$$\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_s), \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m > k_{m+1} = k_{m+2} = \dots = k_s = 1$$

et

$$n = |\bar{k}|$$

Notons aussi

$$(5.1.3) \quad \rho = k_{m+1} + \dots + k_s.$$

Le but est de construire *une forme induite* de $A(x)$ telle que celle-ci soit programmable et moins coûteuse en complexité de calcul que celle d'Arnold. De plus, l'avantage essentielle de cette nouvelle forme est *qu'elle aura le même effet que la forme normale d'Arnold sur les systèmes différentiels linéaires à singularités*. Grâce à une telle forme, on propose, dans le chapitre III, *une nouvelle approche algorithmique pour la résolution des systèmes différentiels linéaires à singularités*.

Commençons par donner la définition d'une forme induite de $A(x)$.

Définition.5.1 On dit que la matrice $A(x)$ est sous une forme induite si $A(x)$ peut s'écrire

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

(5.4)
$$A(x) = A_0 + A_{inf}(x) + A_{sup}(x)$$

avec

- $A_{sup}(x)$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle,
- $A_{inf}(x)$ est une matrice triangulaire inférieure ayant la forme suivante :

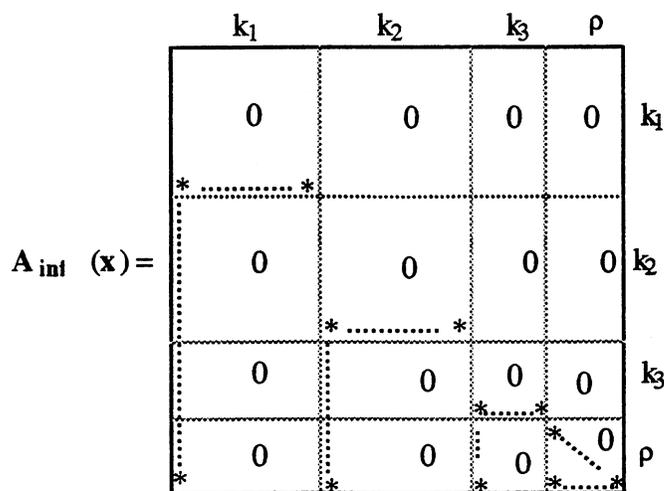


Figure. 5

où les étoiles représentent les endroits où l'on peut trouver des éléments non nuls de $C[[x]]$. Dans cette figure, m est choisi égale à 3.

Exemple : La matrice carrée d'ordre 5

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1+x & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 1 & x^2 & x \\ x^2 & x^3 & x & x^2 & x \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^3 & 0 & 0 & x^2 & x \end{bmatrix}$$

est une forme induite (ici $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ et $\rho = 0$).

5.2. Algorithme pour construire une forme induite

Dans ce paragraphe, nous allons prouver que pour tout élément A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$,

$$(5.2.1) \quad A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i x^i$$

il existe un T dans $GL(n, \mathbb{C}[[x]])$ tel que $T^{-1}(x) A(x) T(x)$ soit une forme induite. Pour cela, nous définirons une transformation *Déduire-zéro-en-bas* dans la matrice A_i comme suit :

Définition.5.2 Une matrice *Déduire-zéro-en-bas* dans A_i est une matrice de la forme

$$\zeta_i(x) = I + x^i T_i$$

où I est la matrice unité et T_i est une matrice carrée d'ordre n triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent zéro et telle que si

$$(5.2.2) \quad B(x) = \zeta_i(x)^{-1} A(x) \zeta_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} x^k A_k + x^i B_i + \sum_{k=i+1}^{+\infty} x^k B_k$$

alors B_i est une matrice ayant la forme spéciale suivante :

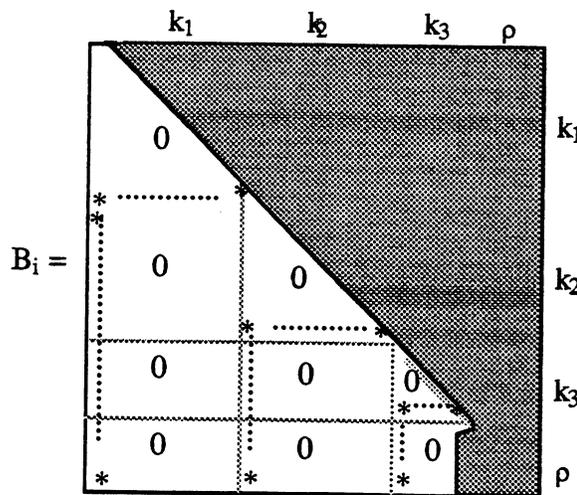


Figure. 6

où les étoiles et les parties hachurées représentent les endroits où l'on peut trouver des éléments non nuls de \mathbb{C} .

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

L'algorithme proposé ici, pour calculer une forme induite de $A(x)$, consiste de construire, à chaque étape, une transformation $\zeta_i(x) = I + x^i T_i$ Déduire-zéro-en-bas dans A_i . Autrement dit il faut construire une matrice T_i triangulaire inférieure à diagonale nulle telle que la matrice B_i définie par

$$(5.2.3) \quad B(x) = \zeta_i(x)^{-1} A(x) \zeta_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} x^k A_k + x^i \boxed{B_i} + \sum_{k=i+1}^{+\infty} x^k B_k$$

soit de la forme spéciale explicitée par la figure.6. En effet, cette équation peut s'écrire

$$A(x) \zeta_i(x) = \zeta_i(x) \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} x^k A_k + x^i B_i + \sum_{k=i+1}^{+\infty} x^k B_k \right\}$$

Donc moyennant l'équation (5.2.1) et $\zeta_i(x) = I + x^i T_i$, on a

$$\left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i x^i \right\} \{ I + x^i T_i \} - \{ I + x^i T_i \} \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} x^k A_k + x^i B_i + \sum_{k=i+1}^{+\infty} x^k B_k \right\} = 0$$

D'où, cette équation nous permet de trouver que

$$(5.2.4) \quad \boxed{A_0 T_i - T_i A_0 + A_i = B_i}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la résolution de cette équation c'est-à-dire nous allons donner un algorithme pour construire une T_i matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle telle que la matrice B_i ait de la forme spéciale explicitée par la figure.6. D'abord, nous commençons par simplifier l'écriture, notons

$$J(a, k_u) = J_u \quad \text{pour } u = 1, 2, \dots, s$$

Et on décompose en blocs les matrices constantes T_i , A_i et B_i suivant la même décomposition que A_0 donnée par (5.1.2). Ces blocs seront notés respectivement par

$$T_i^{uv}, A_i^{uv} \text{ et } B_i^{uv} \quad \text{avec } u, v = 1, 2, \dots, s.$$

où M^{uv} désigne le bloc qui se trouve à la position (u, v) de la décomposition ci-dessus.

De même, on note les éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne de ces blocs respectivement

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

par

$$t_{jk}^{uv}, a_{jk}^{uv} \text{ et } b_{jk}^{uv} \quad \text{avec } j = 1, \dots, n_u \text{ et } k = 1, \dots, n_v.$$

Avec ces notations, l'équation (5.2.4) s'écrit

$$(5.2.5) \quad \boxed{J_u T_i^{uv} - T_i^{uv} J_v + A_i^{uv} = B_i^{uv}} \quad \text{où } u, v = 1, 2, \dots, s.$$

Pour résoudre ces équations c'est-à-dire calculer T_i^{uv} et B_i^{uv} , nous devons procéder comme suit :

1) Si $u < v$ alors prenons

$$B_i^{uv} = A_i^{uv}$$

Cela nous permet de choisir

$$T_i^{uv} = 0.$$

2) Si $u > v$ alors l'équation (5.2.5) s'écrit

$$\boxed{t_{j+1,k}^{uv} - t_{j,k-1}^{uv} + a_{jk}^{uv} = b_{jk}^{uv}}$$

avec

$$t_{n_u+1,k}^{uv} = t_{j,0}^{uv} = 0; \quad j = 1, \dots, n_u \text{ et } k = 1, \dots, n_v.$$

choisissons T_i^{uv} de la manière suivante :

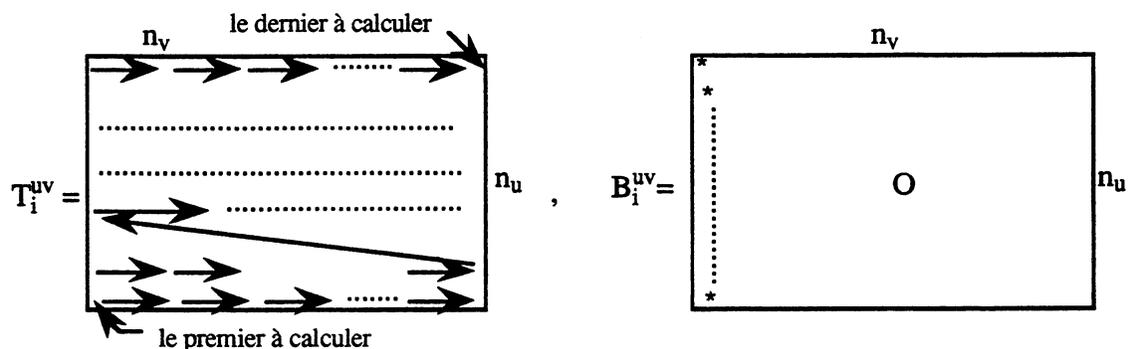
- $t_{n_u,k}^{uv} = a_{n_u,k+1}^{uv}, \quad 1 \leq k \leq n_v - 1,$
- $t_{j,k-1}^{uv} = t_{j+1,k}^{uv} + a_{jk}^{uv}, \quad j = n_u, \dots, 1 \text{ et } 2 \leq k \leq n_v,$

Cela nous permet de construire le bloc B_i^{uv} par

- $b_{jk}^{uv} = 0, \quad 1 \leq j \leq n_u \text{ et } 2 \leq k \leq n_v,$
- $b_{j1}^{uv} = t_{j+1,1}^{uv} + a_{j1}^{uv}, \quad 1 \leq j \leq n_u.$

Explicitons la construction de T_i^{uv} : d'abord, on construit la dernière ligne. Puis, on procède de bas en haut dans les lignes qui restent en suivant la flèche sur la figure ci-dessous (le calcul de $t_{j,k-1}^{uv}$ nécessite d'abord le calcul de $t_{j+1,k}^{uv}$)

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*



où les étoiles représentent les endroits où on peut trouver des éléments non nuls de C . Dans ce cas, nous n'avons pas donné la forme du bloc T_i^{uv} parce qu'elle est, à priori, pleine.

3) Si $v = u$ alors l'équation (5.2.5) devient

$$t_{j+1,k}^{uu} - t_{j,k-1}^{uu} + a_{jk}^{uu} = b_{jk}^{uu}$$

avec

$$t_{n_u+1,k}^{uu} = t_{j,0}^{uu} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n_u.$$

Choisissons T_i^{uu} de la manière suivante :

- $t_{jk}^{uu} = 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq n_u,$
- $t_{j+1,k}^{uu} = t_{j,k-1}^{uu} - a_{jk}^{uu}, \quad 1 \leq k \leq j \leq n_u - 1,$

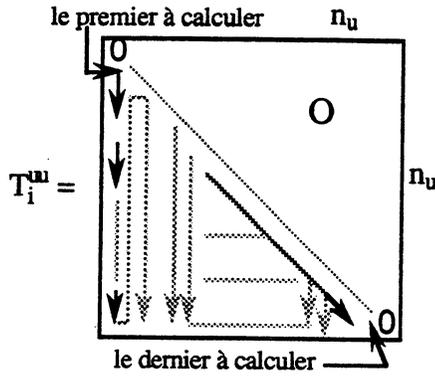
Cela permet de construire le bloc B_i^{uu} à partir des équations suivantes :

- $b_{jk}^{uu} = a_{jk}^{uu}, \quad 1 \leq j < k \leq n_u,$
- $b_{jk}^{uu} = 0, \quad 1 \leq k \leq j \leq n_u - 1,$
- $b_{n_u,k}^{uu} = a_{n_u,k}^{uu} - t_{n_u,k-1}^{uu}, \quad 1 \leq k \leq n_u.$

Explicitons la construction de T_i^{uu} : d'abord, on annule la partie supérieure de T_i^{uu} . Ensuite, dans la partie strictement inférieure, on commence, d'abord par construire les éléments de la première colonne de T_i^{uu} de haut en bas, puis pour le calcul des colonnes qui restent de T_i^{uu} , on procède de

CHAPITRE II *Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres*

gauche à droite et en suivant la flèche de la figure ci-dessous (le calcul de $t_{j+1,k+1}^{uu}$ nécessite d'abord le calcul de $t_{j,k}^{uu}$).



Donc, T_i^{uu} et B_i^{uu} sont de la forme :

$$T_i^{uu} = \begin{array}{|c|} \hline \text{O} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad B_i^{uu} = \begin{array}{|c|} \hline \text{O} \\ \hline \end{array}$$

(The first matrix has a shaded lower triangular region. The second matrix has a shaded upper triangular region and asterisks in the bottom-right corner.)

les parties hachurées et les étoiles représentent les endroits où on peut trouver des éléments non nuls de C .

Finalement, si on résoud toutes les équations du type (5.6), on obtient T_i une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle et B_i a la forme recherchée (voir la figure.6). D'où le théorème

Théorème.5.1 *Avec les notations précédentes, il existe T une matrice carrée d'ordre n triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent 1 à coefficients dans $C[[x]]$ telle que $T^{-1}(x) A(x) T(x)$ soit une forme induite.*

Remarque.5.1 :

- Il est clair qu'une forme induite de $A(x)$ moins coûteuse en calcul que celle d'Arnold car la construction de la forme d'Arnold nécessite l'utilisation de l'inverse d'une matrice pleine $\zeta(x)$. Tandis que dans la construction d'une forme induite, on utilise l'inverse d'une matrice $\zeta(x) = I + T(x)$ où $T(x)$ est triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent zéro c'est-à-dire nilpotente.

CHAPITRE II Théorie de déformations de matrices dépendant de paramètres

• Nous verrons, dans le chapitre suivant, que la forme normale d'Arnold et la forme induite d'un opérateur différentiel linéaire, associé à une matrice $A(x)$ de la forme

$$A(x) = x^{-q} \{ A_0 + \sum_{i \geq 1} A_i x^i \} \text{ avec } q \text{ entier } \geq 2 \text{ et } A_0 \neq 0,$$

peuvent être calculées comme dans le cas des deux théorèmes 4.1 et 5.1 sauf qu'on ajoutera à la matrice $\zeta^{-1}(x) A(x) \zeta(x)$ le terme $\zeta^{-1}(x) \frac{d\zeta(x)}{dx}$.

6. CONCLUSION

Les objectifs principaux de ce chapitre étaient la construction algorithmique de la forme normale d'Arnold et de la forme induite d'un élément A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}[[x]])$. Pour cela, nous nous sommes intéressés d'abord, aux déformations d'une matrice donnée A_0 de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Puis, à l'aide du théorème 3.1.1 et de la notion de centralisateur $Z(A_0)$ de A_0 , on a pu réussir à construire et caractériser une déformation miniverselle de A_0 . On en a déduit la forme normale d'Arnold de $A(x)$ (voir théorème 4.1). Cette forme n'est pas facile à programmer (voir [Chen90]). De ce fait, nous avons proposé une nouvelle forme de $A(x)$ appelée forme induite ayant les avantages suivantes :

- 1- Elle est programmable et moins coûteuse au point de vue de la complexité des calculs que celle d'Arnold.
- 2- Elle aura le même effet que la forme d'Arnold sur les systèmes différentiels linéaires à singularités (Pour cela voir l'algorithme proposé dans le chapitre suivant).

" La beauté est demi-faveur du ciel, l'intelligence est un don "

CHAPITRE III

CALCUL DE L'ORDRE EXPONENTIEL D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE : Nouvelle Approche Algorithmique

- 1. Notations et terminologie**
- 2. Introduction**
- 3. Nouvelle approche algorithmique pour calculer l'ordre exponentiel**
 - 3.1. Indice Rationnel d'Irrégularité
 - 3.2. Calcul de l'ordre exponentiel : cas non-nilpotent.
 - 3.3. Calcul de l'ordre exponentiel : cas général
 - 3.3.1. Orbite d'une matrice
 - 3.3.2. Forme générale de l'algorithme
 - 3.3.3. Transformations utilisées
 - 3.3.3.1. Mise sous forme de Jordan
 - 3.3.3.2. Transformation de shearing
 - 3.3.3.3. Transformation Déduire-zéro-en-bas
 - 3.3.4. Exemples
- 4. Méthode de *Turritin-Wasow***
- 5. Comparaison par un exemple entre les deux méthodes**
- 6. Conclusion**

**CALCUL DE L'ORDRE EXPONENTIEL D'UN
SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE AU VOISINAGE D'UNE
SINGULARITE : Nouvelle Approche Algorithmique**

1. NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler et introduire les notations et la terminologie nécessaire pour notre étude. Soient :

Z : l'anneau des entiers relatifs.

Q : le corps des nombres rationnels.

C : le corps des nombres complexes.

Soit b un entier tel que $b \geq 1$. On note :

$C[[x^{1/b}]]$: l'algèbre des séries formelles à une indéterminée $x^{1/b}$ c'est-à-dire

$$(1.1) \quad f \in C[[x^{1/b}]] \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^{i/b} \quad \text{où } f_i \in C.$$

$C((x^{1/b}))$: le corps de fractions de $C[[x^{1/b}]]$. Il se caractérise comme suit :

$$(1.2) \quad f \in C((x^{1/b})) \Leftrightarrow f(x) = x^{\gamma/b} \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^{i/b}$$

où γ appartient à Z , les f_i sont des nombres complexes et $f_0 \neq 0$. Dans la suite, γ/b s'appellera l'ordre de f et on le notera :

$$(1.3) \quad \text{ord}(f) = \gamma/b \quad (\text{avec la convention } \text{ord}(0) = +\infty).$$

$C((x))^* = \bigcup_{b \geq 1} C((x^{1/b}))$: le corps des séries formelles de Puiseux.

Soit E un anneau commutatif unitaire. On note :

$\mathcal{M}(n, E)$: l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients dans E .

$GL(n, E)$: le groupe des matrices d'ordre n inversibles à coefficients dans E .

Si $E = C((x^{1/b}))$ pour un entier $b \geq 1$ et si A est un élément de $\mathcal{M}(n, C((x^{1/b})))$ alors A peut s'écrire

$$(1.4) \quad A(x) = x^{\gamma/b} \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^{i/b}$$

où

- A_i est un élément de $\mathcal{M}(n, C)$,
- $A_0 \neq 0$,
- γ appartient à Z .

Dans la suite, γ/b s'appellera l'ordre de A et sera noté $\text{ord}(A) = \gamma/b$.

On peut constater que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(n, C((x))^*) &= \bigcup_{b \geq 1} \mathcal{M}(n, C((x^{1/b}))), \\ GL(n, C((x))^*) &= \bigcup_{b \geq 1} GL(n, C((x^{1/b}))). \end{aligned}$$

2. INTRODUCTION

On considère le système différentiel linéaire

$$(2.1) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x) = \left\{ x^{\text{ord}(A)} \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^{i/b} \right\} Y(x)$$

où

- b est un entier ≥ 1 ,
- $\text{ord}(A)$ appartient à Q ,
- x appartient à C ,
- Y est un vecteur colonne $n \times 1$ fonction de x ,
- $\dot{Y} = \frac{dY}{dx}$,
- les A_i sont dans $\mathcal{M}(n, C)$.

D'après les travaux du Turrittin [Turr55], il est bien connu que le système (2.1) possède, dans un voisinage de l'origine, une matrice fondamentale de solutions formelles ayant la représentation suivante :

$$(2.2) \quad \Phi(x^{1/b}) = S(x^{1/bm}) x^R \exp\{ Q(x^{-1/bm}) \}$$

où

- m est un entier positif convenablement choisi,
- R appartient à $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$,
- $Q(x^{-1/bm}) = Q_h x^{-h/bm} + Q_{h-1} x^{-(h-1)/bm} + \dots + Q_1 x^{-1/bm}$ tel que les Q_i ($1 \leq i \leq h$) soient des matrices diagonales de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ et h est un entier $\leq -bm(\text{ord}(A)+1)$,
- $S(x^{1/bm}) = x^{-k_0/bm} \sum_{k=0}^{+\infty} S_k x^{k/bm}$ où k_0 est un entier positif, S_k appartiennent à $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ et $\det S(x^{1/bm}) \neq 0$ si $x \neq 0$.

La matrice $Q(x^{-1/bm})$, qui est invariante à une permutation près par les transformations appartenant à $GL(n, \mathbb{C}((x))^*)$, est importante à étudier. En effet, elle joue un rôle principal dans, la construction asymptotique des solutions, les calculs des *lignes de Stokes* [Waso65], ainsi que dans la théorie de *k-sommabilités* et *multisommabilité* [Rami85]. En particulier, $Q(x^{-1/bm})$ détermine le comportement asymptotique de toutes les solutions du système (2.1) dans un secteur convenablement choisi. Une quantité essentiellement importante à regarder est le degré h/bm du polynôme matriciel $Q(x^{-1/bm})$. Cette quantité gouverne la croissance ou la décroissance des solutions formelles du système (2.1) proche de l'origine. Ceci à son tour contrôle le développement asymptotique des solutions du système différentiel (2.1). Mais grâce aux travaux du Trjitzinsky [Trji34], on sait que la matrice (2.2) est un développement asymptotique d'une *vraie* matrice fondamentale de solutions si on restreint $x^{1/b}$ au secteur Σ défini par

$$0 < |x^{1/b}| < \delta_1 \text{ et } |\arg(x^{1/b}) - \theta| < \delta_2 .$$

De ce fait, la connaissance du rationnel h/bm nous permet d'étudier le comportement des vraies solutions dans des secteurs bien choisis centrés à l'origine ayant comme ouverture des petits angles. Dans tout ce qui suit, l'invariant h/bm s'appellera **ordre exponentiel** du système (2.1) et sera noté par $OE(A)$.

Position du problème. Comment peut-on calculer effectivement l'ordre exponentiel du système (2.1) ?

Ce problème a été posé (au moins dans le cas scalaire) au siècle dernier. On peut noter les contributions de Thomé [Thom77], Poincaré [Poin85], Sauvage [Sauv86] et Horn [Horn92]. Et depuis, deux directions ont été suivies :

1. Les méthode indirectes : On peut citer parmi celles-ci, la méthode du vecteur cyclique : elle consiste à transformer le système (2.1) en une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n grâce au lemme du vecteur cyclique (voir lemme II, 1.3 dans [Deli70]). On peut d'ailleurs par le biais de cette méthode donner une matrice fondamentale de solutions du système (2.1). En utilisant le code *DESIR* réalisé par l'équipe *Calcul Formel de Grenoble* (voir [DDDT82], [Tour87] et [Bark89]). Cette méthode s'avère très coûteuse et donne des transformations très compliquées (voir chapitre II dans la thèse de [Hila82]). Néanmoins, elle est d'une grande importance théorique et mériterait des études complètes. Pour plus d'informations sur cette méthode, on peut consulter par exemple [Hila87], [Tour87], [Malgr79], [Katz70] et [Deli70]. Mais il est intéressant de pouvoir calculer l'ordre exponentiel directement sur le système sans avoir à utiliser la méthode du vecteur cyclique, d'autant plus que cet invariant est uniquement déterminé par la connaissance des valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. C'est ainsi que K. Kitagawa [Kita83] a remarqué que l'on peut lier cet invariant à la structure matricielle du système. Pour cela, il considère au lieu du nombre $\text{ord}(A)$ dans (2.1), l'ordre du pôle de $A(x)$ au sens de Volevic [Volev60], appelé le poids formel P_f du pôle du système (2.1). Cette définition lui permet d'avoir un calcul direct de l'ordre r des solutions (voir [Kita83] p.434), par une méthode n'utilisant que les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice $A(x)$. Dans le même ordre d'idées, une méthode similaire est donnée dans [HiWa87] pour le calcul de l'invariant de Katz, lorsque le système étudié est écrit sous une forme irréductible (au sens de Moser [Mose60]). On peut citer aussi la méthode utilisée par [Lutz72] et [LuSc85] qui consiste à calculer l'ordre exponentiel en faisant un recurrence sur la matrice $A(x)$ du système (2.1).

2. Méthodes directes : Parmi ces méthodes, on s'intéressera essentiellement à la méthode de *Turrittin-Wasow*. S'inspirant des idées de Birkhoff [Birk30] qui consiste à transformer le système (2.1), à l'aide de transformations analytiques, en une forme simplifiée, appelée *forme canonique*, plus facile à étudier, Turrittin [Turr55] et Wasow [Waso65] ont proposé une méthode pour calculer une matrice fondamentale de solutions du système (2.1). Cette dernière, consiste à réduire le système (2.1), en plusieurs systèmes différentiels séparés chacun étant :

- (1) soit une équation différentielle scalaire d'ordre 1,
- (2) soit un système différentiel sous forme (E.1) avec $q = 1$.

Ceci se fait en utilisant successivement les trois types des transformations :

- (i) une pour la mise sous forme de Jordan de la matrice A_0 ,
- (ii) une pour la mise sous forme normale d'Arnold de $A(x)$,
- (iii) une de shearing

En général, (ii) coûte très chère en calcul (voir [Chen90]). Devant ce fait, nous proposons, dans ce chapitre, une *nouvelle approche algorithmique*. Celle-ci utilise :

- (i') une transformation pour la mise sous forme de Jordan de la matrice A_0 ,
- (ii') une transformation de shearing,
- (iii') Dans le plus mauvais cas, une transformation plus simple que celle de (ii).

Cette approche nous permet de donner un algorithme constructif c'est-à-dire programmable et qui permet le calcul du degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ défini en (2.2). Ce calcul se fait à partir des coefficients A_i , $0 \leq i < bn(-\text{ord}(A)-1)$, de la matrice $A(x)$.

Contenu du chapitre : Dans le prochain paragraphe, on commence par rappeler les définitions d'un : Point *régulier*, point *singulier régulier* et point *singulier irrégulier*. Ensuite, dans le paragraphe 3.1, on définit l'*Indice Rationnel d'Irrégularité*, noté dans la suite $\text{IRI}(A)$, d'un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ tel que $\text{ord}(A) \leq -1$. Ce dernier joue un rôle important dans la détermination de $\text{OE}(A)$. Dans le paragraphe 3.2, nous nous intéressons au calcul de l'ordre exponentiel du système (2.1) lorsque la matrice de tête A_0 de $A(x)$ est non-nilpotente. Dans ce cas, la proposition 3.2.1 nous permet de déterminer l' $\text{OE}(A)$. Le cas général sera étudié dans le paragraphe 3.3. Dans ce cas, nous allons procéder comme suit : dans la section 3.3.1, nous montrerons, brièvement, un certain nombre de résultats relatifs aux *Orbites* dont un usage important sera fait dans la suite de ce chapitre. Ensuite, la section 3.3.2 sera consacrée à la *forme générale de l'algorithme*. Nous allons expliciter, dans le paragraphe 3.3.3, les transformations utilisées par cet algorithme. Parmi elles, on détaillera les trois types de transformations "**Jordan, shearing et Déduire-zéro-en-bas**". Dans le paragraphe 3.3.4, nous illustrerons notre algorithme sur quelques exemples. Dans, le paragrphe 4, on résume les quatre étapes de la méthode de *Turrittin-Wasow*. Puis, dans le paragraphe.5, nous comparons les deux méthodes sur un exemple simple. Une conclusion est donnée dans le paragraphe 6.

3. NOUVELLE APPROCHE ALGORITHMIQUE POUR CALCULER L'ORDRE EXPONENTIEL

Pour calculer $OE(A)$, on commence d'abord, par rappeler la nature de la singularité en zéro (voir [Turr55] et [Waso65]) du système (2.1) :

1- Si $ord(A) > -1$, on dit que $x = 0$ est un point régulier du système (2.1). Et dans ce cas, dans la représentation (2.2), on a :

$$R = 0, m = 1 \text{ et } Q(x^{-1/b}) = 0.$$

2- Si $ord(A) = -1$, on dit que le point $x = 0$ est singulier régulier du système (2.1) et on a :

$$m = 1, R \neq 0 \text{ et } Q(x^{-1/b}) = 0.$$

3- Si $ord(A) < -1$, la singularité en $x = 0$ peut être régulière. Ceci vient du fait que $ord(A)$ peut, dans certains cas, être diminué par des changements de variables appliqués sur $Y(x)$. Dans le cas où on ne peut pas réduire $ord(A)$ jusqu'à -1 , on dit que $x = 0$ est un point singulier irrégulier du système (2.1) et on a

$$Q(x^{-1/bm}) \neq 0$$

Dans les cas 1 et 2, on a

$$(3.1) \quad OE(A) = 0.$$

De ce fait, notre problème se ramène, dans tout ce qui suit, à celui du calcul de l'ordre exponentiel du système (2.1) dans le cas

$$ord(A) < -1.$$

Dans le cas d'une singularité régulière, la croissance ou la décroissance des solutions du système (2.1) est de l'ordre de $O(x^{|R|})^1$ où R est la matrice définie par l'équation (2.2). Par contre, lorsque $x = 0$ est une singularité irrégulière, il n'y a pas de critère simple pour mesurer les comportements des solutions du système (2.1). De ce fait, le but de ce chapitre est de donner une méthode constructive pour calculer l'ordre exponentiel du système (2.1) au voisinage d'une singularité irrégulière. Pour cela, nous définissons, dans le prochain

¹⁾ Par $\|M\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$, on désigne la norme d'une matrice $M = (m_{ij})$ carrée d'ordre n à coefficients dans C .

paragraphe, l'Indice Rationnel d'Irrégularité de $A(x)$. Celui-ci est lié à l'OE(A) par une relation simple.

3.1. Indice Rationnel d'Irrégularité

Dans ce paragraphe, nous définissons l'équivalence entre deux éléments A et B de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$. Puis, à l'aide de cette équivalence, on définira l'Indice Rationnel d'Irrégularité d'un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$. Ceci étant fait, on démontrera (théorème 3.1.1) une condition nécessaire pour que l'ordre d'un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$. augmente. Ce théorème jouera un rôle clef dans la suite.

Définition.3.1.1 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$.. On dit que A et B sont équivalents s'il existe un élément T dans $GL(n, C((x))^*)$ tel que

$$(3.1.1) \quad B = T^{-1} A T - T^{-1}\dot{T}.$$

Pour simplifier l'écriture, dans la suite, on désigne par T [A] l'expression suivante :

$$(3.1.2) \quad T[A] = T^{-1} A T - T^{-1}\dot{T}.$$

Etant donné A un élément de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$, la définition de l'Indice Rationnel d'Irrégularité de A est :

Définition.3.1.2 On appelle *Indice Rationnel d'Irrégularité de A*, noté $IRI(A)$, le rationnel

$$(3.1.3) \quad IRI(A) = \sup_{T \in GL(n, C^*((x)))} [\min \{ -1, ord(T [A]) \}]$$

Remarque.3.1 :

- $IRI(A)$ est visiblement invariant par les transformations T de $GL(n, C((x))^*)$ c'est-à-dire $IRI(A) = IRI(T[A])$.
- $IRI(A) = -1$ si et seulement si $x = 0$ est un point régulier ou singulier régulier du système (2.1). En effet, si $IRI(A) = -1$ alors il existe T dans $GL(n, C((x))^*)$ tel que

$$\text{ord}(T[A]) \geq -1.$$

Si $\text{ord}(T[A]) > -1$ alors $x = 0$ devient un point régulier du système (2.1). Sinon $x = 0$ est un point singulier régulier du système (2.1).

(i) si $x = 0$ est un point régulier du système (2.1), on a $\text{ord}(A) > -1 \Rightarrow \text{IRI}(A) = -1$.

(ii) si $x = 0$ est un point singulier régulier du système (2.1) alors il existe T dans $\text{GL} (n, C((x))^*)$ tel que $\text{ord}(T[A]) = -1 \Rightarrow \text{IRI}(A) = -1$.

D'où dans les deux cas, on a $\text{IRI}(A) = -1$.

Dans le cas où $x = 0$ est un point régulier ou singulier régulier, on a donc démontré la relation

$$(3.1.4) \quad \text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1.$$

Celle-ci sera démontrée, en toute généralité, dans le paragraphe 3.3.3.3 (proposition 3.3.2). De ce fait, la détermination de $\text{IRI}(A)$ nous permet de calculer automatiquement $\text{OE}(A)$. Dans la suite, nous nous intéressons à calculer $\text{IRI}(A)$. Pour cela, commençons par démontrer une condition nécessaire pour augmenter l'ordre d'un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ vérifiant $\text{ord}(A) < -1$. Cette condition est donnée par le théorème suivant.

Théorème.3.1.1 Soient A et B deux éléments équivalents de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ tels que $\text{ord}(A) < -1$ et $\text{ord}(A) < \text{ord}(B)$. Alors la matrice de tête A_0 de $A(x)$ est nilpotente.

preuve : Puisque A et B sont équivalents, d'après la définition 3.1.1, il existe T dans $\text{GL} (n, C((x))^*)$ tel que :

$$(Eq.1) \quad B = T[A] = T^{-1} A T - T^{-1} \dot{T}$$

Grâce au lemme suivant, décrivant la décomposition d'un élément T de $\text{GL} (n, C((x))^*)$ sous forme normale de Smith (voir [Mose60] et [MacD33]) :

Chaque T de $\text{GL}(n, C((x^{1/b})))$, b est un entier ≥ 1 , peut se décomposer sous la forme

$$T(x) = P(x) D(x) Q(x)$$

où

• P et Q sont dans $\text{GL}(n, C[[x^{1/b}]])$ tels que $\det P(x) = 1$ et $\det Q(0) \neq 0$,

- $D(x) = \text{diag}(x^{r_1/b}, x^{r_2/b}, \dots, x^{r_n/b})$ tels que les $r_i, 1 \leq i \leq n$, sont des entiers relatifs ordonnés de la façon suivante : $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$.

Décomposons T sous la forme de Smith

$$T(x) = P(x) D(x) Q(x)$$

où P(x), D(x) et Q(x) sont définis précédemment. De ce fait, l'équation (Eq.1) devient

$$B = (Q^{-1} D^{-1} P^{-1}) A (P D Q) - (Q^{-1} D^{-1} P^{-1}) \{ \dot{P} D Q + P \dot{D} Q + P D \dot{Q} \}$$

↓

$$(Eq.2) \quad B = Q^{-1} \{ D^{-1} (P^{-1} A P - P^{-1} \dot{P}) D - D^{-1} \dot{D} \} Q - Q^{-1} \dot{Q}.$$

Posons maintenant

$$(Eq.3) \quad \tilde{A} = P [A] \quad \text{et} \quad \tilde{B} = Q^{-1} [B].$$

Donc, l'expression définie par (Eq.2) devient

$$\tilde{B} = D [\tilde{A}].$$

P et Q appartiennent à $GL(n, C[[x^{1/b}]])$. Donc, elles peuvent s'écrire sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^{i/b} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i x^{i/b}$$

où P_0 et Q_0 sont dans $GL(n, C)$. Par conséquent, d'après l'équation (Eq.3), on obtient les deux relations :

$$\tilde{A}_0 = P_0^{-1} A_0 P_0 \quad \text{et} \quad \tilde{B}_0 = Q_0 B_0 Q_0^{-1}$$

où \tilde{A}_0 et \tilde{B}_0 désignent les matrices de tête de \tilde{A} et \tilde{B} respectivement. On a donc :

$$\tilde{A}_0 \text{ nilpotente} \quad \Leftrightarrow \quad A_0 \text{ nilpotente},$$

$$\text{ord}(\tilde{A}) = \text{ord}(A) \quad \text{et} \quad \text{ord}(\tilde{B}) = \text{ord}(B).$$

Le problème se ramène donc à prouver que \tilde{A}_0 est nilpotente. En effet, on a déjà $\tilde{B} = D [\tilde{A}]$. Il n'est pas difficile de vérifier, en utilisant le fait que $\dot{D} D^{-1} + D \dot{D}^{-1} = 0$, que

$$(Eq.4) \quad \tilde{A} = D^{-1} [\tilde{B}] = D \tilde{B} D^{-1} - D \dot{D}^{-1}.$$

Notons maintenant

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}(x)) \quad \text{et} \quad \tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}(x))$$

Ceci permet d'écrire l'équation (Eq.4) sous la forme

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b} + r_i/b \delta_{ij} x^{-1}$$

où $1 \leq i, j \leq n$ et δ_{ij} est le symbol de Kronecker.

De cette équation, nous allons prouver que la matrice \tilde{A}_0 est nilpotente. En effet, d'après la définition de $\text{ord}(\tilde{B})$, on a

$$\text{ord}(\tilde{B}) = \min_{1 \leq i, j \leq n} \text{ord}(\tilde{b}_{ij})$$

donc

$$\text{ord}(\tilde{B}) \leq \text{ord}(\tilde{b}_{ij}) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n$$

Si nous supposons maintenant que $i \geq j$ alors, d'après la forme normale de Smith, on a

$$r_i \geq r_j \Rightarrow \text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b}) \geq \text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x))$$

donc

$$\text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b}) \geq \text{ord}(\tilde{B})$$

d'où

$$\text{ord}(\tilde{a}_{ij}(x)) = \text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b} + r_i/b \delta_{ij} x^{-1}) \geq \min \{ \text{ord}(\tilde{B}), -1 \}$$

Mais

$$\text{ord}(B) = \text{ord}(\tilde{B})$$

on a donc

$$\text{ord}(\tilde{a}_{ij}(x)) = \text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b} + r_i/b \delta_{ij} x^{-1}) \geq \min \{ \text{ord}(B), -1 \}$$

Mais d'après les hypothèses du théorème, on a

$$\text{ord}(A) < -1 \text{ et } \text{ord}(A) < \text{ord}(B)$$

d'où

$$\text{ord}(A) < \min \{ \text{ord}(B), -1 \}$$

De ce fait, on conclut que

$$\text{ord}(\tilde{a}_{ij}(x)) = \text{ord}(\tilde{b}_{ij}(x) x^{(r_i - r_j)/b} + r_i/b \delta_{ij} x^{-1}) > \text{ord}(A)$$

Ceci permet d'écrire $\tilde{a}_{ij}(x)$ sous forme

$$\tilde{a}_{ij}(x) = x^{\text{ord}(A)} \tilde{a}_{ij}^*(x)$$

où \tilde{a}_{ij}^* est dans $\bigcup_{b \geq 1} C[[x^{1/b}]]$ tel que $\tilde{a}_{ij}^*(0) \neq 0$. De cette équation, on déduit que la matrice \tilde{A}_0 est

triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc nilpotente. Mais le fait que $\tilde{A}_0 = P_0^{-1} A_0 P_0$, nous permet de conclure que A_0 est aussi nilpotente. Ce qui achève la démonstration. ■

De ce théorème, on déduit que si A est dans $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ tel que $\text{ord}(A) < -1$ et si sa matrice de tête A_0 est non-nilpotente, alors on ne peut pas augmenter l'ordre de A par équivalence. Par conséquent, l'étape de base, dans ce qui suit, consiste à transformer par

équivalence la matrice $A(x)$ en une autre matrice $B(x)$ telle que cette dernière ait une matrice de tête B_0 non-nilpotente. De ce fait, nous allons étudier, dans le prochain paragraphe, le cas d'un élément A de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ ayant une matrice de tête A_0 non-nilpotente. Nous verrons, plus tard, que le cas général se ramène au calcul de $IRI(B)$ où B est un élément de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ ayant une matrice de tête B_0 non-nilpotente.

3.2. Calcul de l'ordre exponentiel : cas non-nilpotent

Soit A un élément de $\mathcal{M}(n, C((x))^*)$ tel que $ord(A) < -1$, de matrice de tête A_0 non-nilpotente. Dans ce cas, on a

Proposition.3.2.1 Avec les notations précédentes, si A_0 est non-nilpotente et $ord(A) < -1$ alors

$$IRI(A) = ord(A).$$

Preuve : Considérons T un élément quelconque de $GL(n, C((x))^*)$. Soit

$$B = T [A].$$

Le théorème 3.1.1 nous permet de supposer que $ord(B) \leq ord(A)$ car sinon A_0 serait nilpotente. Par conséquent, pour tout entier $b \geq 1$, on a les inégalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} ord(T[A]) &\leq ord(A) < -1 \\ \Downarrow \\ \min(-1, ord(T[A])) &\leq ord(T[A]) \leq ord(A) \\ \Downarrow \\ \sup_{T \in GL(n, C((x))^*} \min\{-1, ord(T[A])\} &\leq ord(A) \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ IRI(A) \leq ord(A).$$

Mais, d'après la définition de $IRI(A)$, on a évidemment $IRI(A) \geq ord(A)$. D'où,

$$\mathbf{IRI}(A) = \text{ord}(A).$$

Ceci conclut la démonstration. ■

Exemple : Soit A un élément de $\mathcal{M}(2, \mathbf{C}((x)))$ tel que

$$A(x) = x^{-3} \{ A_0 + xA_1 \} = x^{-3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Calculons $\mathbf{IRI}(A)$. Tout d'abord :

$$\text{ord}(A) = -3 \quad \text{et} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ est nilpotente.}$$

Prenons maintenant pour transformation $T(x)$, la matrice suivante :

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C}((x^{1/2}))).$$

Donc la matrice définie par

$$B = T[A] = x^{-5/2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x^{1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x^{3/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

a une matrice de tête $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ non-nilpotente. Par conséquent, la proposition 3.2.1 nous permet de déduire la relation

$$\mathbf{IRI}(B) = \mathbf{IRI}(A) = -5/2$$

Cet exemple nous conduit à poser la question suivante :

Si A est un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbf{C}((x))^)$ tel que $\text{ord}(A) < -1$ et A_0 est nilpotente. Existe-t-il une méthode permettant de construire une transformation T de $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C}((x))^*)$ telle que la matrice de tête de $T[A]$ soit non-nilpotente ?*

La réponse affirmative à cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

3.3. Calcul de l'ordre exponentiel : cas général

Considérons A un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbf{C}((x))^*)$ tel que $\text{ord}(A) < -1$ de matrice de tête A_0 nilpotente. Comment calculer $\mathbf{IRI}(A)$? A cet effet, nous proposerons, dans le paragraphe 3.3.2, un *algorithme* permettant de calculer $\mathbf{IRI}(A)$. Ce dernier utilisera, d'une manière

essentielle, les propriétés de l'orbite de A_0 .

3.3.1. Orbite d'un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$

Soit M un élément non nul de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.

Définition.3.3.1 On appelle *orbite* de M , notée $OR(M)$, l'ensemble

$$(3.3.1) \quad OR(M) = \{ P^{-1} M P / P \in GL(n, \mathbb{C}) \}.$$

Nous désignons par ad_M l'opérateur linéaire défini de la façon suivante :

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \\ N & \longrightarrow & ad_M(N) = MN - NM \end{array}$$

Rappelons maintenant quelques propriétés importantes de $OR(M)$ (voir [Arno71]) :

- La dimension de l'orbite, en tant qu'une variété différentiable, est donnée par la formule

$$(3.3.3) \quad \dim OR(M) = \dim \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) - \dim \text{Ker } ad_M = n^2 - \dim \text{Ker } ad_M$$

Si M est nilpotente et écrite sous forme de Jordan

$$M = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_s)$$

où

- J_i est un bloc de Jordan d'ordre n_i ,
- les n_i sont supposés ordonnés comme suit : $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s \geq 1$,

on a alors l'égalité

$$(3.3.4) \quad \dim \text{Ker } ad_M = \sum_{i=1}^s (2i - 1) n_i$$

Donc, l'équation (3.3.3) devient

$$(3.3.5) \quad \dim OR(M) = n^2 - \sum_{i=1}^s (2i - 1) n_i.$$

En particulier, si M est formé d'un seul bloc de Jordan, on a :

$$(3.3.6) \quad \dim \text{OR}(M) = n^2 - n$$

● **Proposition [BaVa83]** : Soient M et N deux éléments nilpotents non nuls de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Si $N \neq M$ et $N \in M + \text{Ker ad}_M^*$ où M^* désigne la matrice adjointe de M . On a alors l'inégalité

$$(3.3.7) \quad \dim \text{OR}(N) > \dim \text{OR}(M).$$

Grâce à cette proposition, nous allons prouver que notre algorithme pour le calcul de $\text{IRI}(A)$, qui sera explicité dans le prochain paragraphe, s'arrêtera en un nombre fini de pas.

3.3.2. Forme générale de l'algorithme

Entrée : A un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}((x))^*)$ tel que $\text{ord}(A) < -1$ et la matrice de tête A_0 de A est nilpotente.

Sortie : $\text{IRI}(A)$.

Algorithme recherche- $\text{IRI}(A)$

début

tant que A_0 est nilpotente faire

transformer par équivalence A en B tel que

$$\text{ord}(B) > \text{ord}(A)$$

si B_0 est non-nilpotente alors $\text{IRI}(A) = \text{ord}(B)$

sinon si $\dim \text{OR}(B_0) > \dim \text{OR}(A_0)$ alors $A := B$

sinon transformer par équivalence A en C el que

$$\text{ord}(A) = \text{ord}(C)$$

$$A := C$$

fin tant que

fin début

Dans le reste de ce chapitre, nous nous intéressons à étudier explicitement cet algorithme.

3.3.3. Transformations utilisées

L'algorithme utilise les trois types de transformation suivants :

- Mise sous forme de **Jordan**
- Transformation de **shearing**
- Transformation **Déduire-zéro-en-bas**

Détaillons ces transformations en commençant par

3.3.3.1. Mise sous forme de Jordan

Le premier pas à faire est de mettre la matrice A_0 sous forme de Jordan ². En effet, il est bien connu ([Gant59] et [Gil93]) qu'il existe une matrice P de $GL(n, C)$ permettant de transformer la matrice A_0 sous forme de Jordan. De ce fait et sans perte de généralité, on suppose, dans la suite, que A_0 est sous forme :

$$(3.3.8) \quad A_0 = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_s)$$

où

- J_i est un bloc de Jordan de dimension n_i ,
- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$,
- les n_i sont supposés ordonnés de la manière suivante : $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s \geq 1$.

Notre algorithme utilise d'une façon essentielle une *transformation de shearing*.

2) *En général, la forme de Jordan joue un rôle principal dans la résolution des systèmes différentiels linéaires ou non-linéaires. En particulier, pour les systèmes différentiels linéaires, les méthodes existantes pour la résolution formelle sont, en quelque sorte, construites après la mise sous une forme de Jordan de la matrice de tête A_0 de ce système. Pour éclaircir le rôle essentiel d'une forme de Jordan, il suffit de traiter l'exemple simple suivant :*

$$\dot{Y}(x) = A_0 Y(x)$$

où A_0 est élément de $\mathcal{M}(n, C)$, qui admet $\Phi(x) = \exp(A_0 x)$ comme matrice fondamentale de solution.

Si A_0 est une matrice quelconque, il est impossible de calculer exactement la somme infinie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_0^i}{i!}$ sans transformer A_0 . Par contre, ceci est faisable en mettant soit A_0 sous forme de Jordan [Gil92] soit on utilise des approximations de Padé [Roch80].

3.3.3.2. Transformations de shearing

Historiquement, les transformations de shearing sont utilisées pour la première fois dans les travaux du Turrittin [Turr55]. Leurs intérêts ne sont pas négligeables, surtout dans la construction d'une matrice fondamentale de solutions des systèmes différentiels ordinaires [Waso65] ou dépendant de paramètres [Sibu62]. La définition d'une transformation de shearing est la suivante :

Définition.3.3.2 On appelle matrice de shearing, une matrice notée S_α définie comme suit :

$$(3.3.9) \quad S_\alpha(x) = x^{H_\alpha}$$

où

$$(3.3.10) \quad \alpha \in \mathbb{Q}_+^* \quad \text{et} \quad H_\alpha = \text{diag}(0, \alpha, 2\alpha, \dots, (n-1)\alpha).$$

Nous allons voir, plus tard, que le calcul de $\text{IRI}(A)$ est basé sur un choix convenable du paramètre α . D'abord, nous étudierons l'effet d'une transformation de shearing sur un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}((x))^*)$.

Effet d'une transformation de shearing :

Soit A un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}((x))^*)$ tel que $\text{ord}(A) < -1$, de matrice de tête A_0 nilpotente et supposée écrite sous forme de Jordan. Notons E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) la base canonique de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ c'est-à-dire E_{ij} est une matrice d'ordre n ayant 1 en position (i,j) et zéro ailleurs. $A(x)$ peut s'écrire

$$(3.3.11) \quad A(x) = x^{\text{ord}(A)} \left\{ A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^r E_{ij} \right) x^{r/b} \right\}$$

où b est un entier ≥ 1 et $a_{ij}^r \in \mathbb{C}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $r = 1, 2, \dots, \infty$.

Maintenant, effectuons sur l'équation (3.3.11) une transformation de shearing (3.3.9). On obtient la nouvelle matrice

$$(3.3.12) \quad B = S_\alpha [A] =$$

$$= x^{\text{ord}(A)+\alpha} \left\{ A_0 - H_\alpha x^{(-\text{ord}(A)-1-\alpha)_+} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^r E_{ij} \right) x^{r/b - (i-j+1)\alpha} \right\}.$$

L'objectif de la transformation de shearing (3.3.9) est, d'une part, d'augmenter l'ordre de $A(x)$ autant que possible, d'autre part, de choisir le paramètre α de façon à introduire des éléments non nuls, quand c'est possible, dans la matrice de tête A_0 de $A(x)$. On remarque :

$$i < j \Rightarrow i - j < 0 \Rightarrow i - j + 1 \leq 0 \Rightarrow (i - j + 1) \alpha \leq 0 \Rightarrow r/b - (i - j + 1) \alpha > 0.$$

Donc, il est impossible d'introduire un élément non nul dans la partie strictement supérieure de A_0 . Maintenant, on constate que si α prend la valeur

$$(3.3.13) \quad \alpha = \min \left\{ -\text{ord}(A) - 1, \frac{r/b}{i-j+1} / 1 \leq j \leq i \leq n, 1 \leq r \leq \infty \text{ et } a_{ij}^r \neq 0 \right\},$$

alors la matrice de tête B_0 de la matrice B , définie par l'équation (3.3.12), sera différente de A_0 . Le calcul de α est impossible à partir de cette formule parce que l'indice r varie de 1 à l'infini. Donc la question principale qui se pose alors est : *Peut-on borner r de façon que α atteigne la valeur définie dans (3.3.13) ?*

Dans la suite, nous proposons une borne de r qui répond à cette question. Cette borne est donnée par

Lemme.3.3.1 Soit $P = b n (-\text{ord}(A) - 1) - 1$ alors

$$(3.3.14) \quad \alpha = \min \left\{ -\text{ord}(A) - 1, \frac{r/b}{i-j+1} / 1 \leq j \leq i \leq n, 1 \leq r \leq P \text{ et } a_{ij}^r \neq 0 \right\}$$

Preuve : En effet,

$$r > P \Rightarrow \frac{r/b}{i-j+1} \geq \frac{r}{bn} \geq -\text{ord}(A) - 1 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n.$$

Donc

$$\min \left\{ \frac{r/b}{i-j+1} / 1 \leq j \leq i \leq n, r > P \text{ et } a_{ij}^r \neq 0 \right\} \geq -\text{ord}(A) - 1.$$

On déduit que

$$\alpha = \min \left\{ -\text{ord}(A) - 1, \frac{r/b}{i-j+1} / 1 \leq j \leq i \leq n, 1 \leq r \leq P \text{ et } a_{ij}^r \neq 0 \right\}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque.3.2 : Chaque fois qu'on aura besoin de calculer α , on utilisera la formule précédente (3.3.14). Il est clair d'après cette formule qu'on aura besoin de $O(-bn^3 \cdot \text{ord}(A))$ opérations élémentaires pour déterminer α .

Maintenant, nous résumons l'effet d'une transformation de shearing sur la matrice $A(x)$, définie par l'équation (3.3.11), par le théorème suivant :

Théorème.3.3.1 :

(I) Si $\alpha = -\text{ord}(A) - 1$ alors on a

$$B = S_\alpha [A] = x^{-1} \left\{ A_0 - H_\alpha + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^r E_{ij} \right) x^{r/b - (i-j+1)(-b \text{ord}(A) - 1)} \right\}$$

(II) Si $0 < \alpha < -\text{ord}(A) - 1$ alors on a

$$B = S_\alpha [A] = x^{\text{ord}(A) + \alpha} \left\{ A_0 - H_\alpha x^{-\text{ord}(A) - 1 - \alpha} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^r E_{ij} \right) x^{r/b - (i-j+1)\alpha} \right\}$$

où la matrice de tête B_0 de $B(x)$ s'exprime comme suit :

$$B_0 = A_0 + \sum_{k=1}^m a_{i_k, j_k}^{r_k} E_{i_k, j_k}$$

avec (r_k, i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, m$, étant tous les triplets qui vérifient :

$$\bullet \frac{r_1/b}{1+i_1-j_1} = \frac{r_2/b}{1+i_2-j_2} = \dots = \frac{r_m/b}{1+i_m-j_m} = \alpha$$

et

$$\bullet a_{i_k, j_k}^{r_k} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

En particulier, B_0 est déterminée uniquement par les

$$A_i, \quad 0 \leq i \leq P, \quad \text{où } P = b n(-\text{ord}(A) - 1) - 1.$$

Dans le cas (I), notre algorithme recherche-IRI(A) est terminée :

$$\text{IRI}(A) = -1 \quad \text{et} \quad \text{OE}(A) = 0.$$

Dans le cas (II), si la matrice B_0 est non-nilpotente, on peut encore conclure

$$\text{IRI}(A) = \text{IRI}(B) = \text{ord}(B) = \text{ord}(A) + \alpha.$$

Mais si B_0 est aussi nilpotente et si $\dim \text{OR}(B_0) \leq \dim \text{OR}(A_0)$, que doit-on faire ? Dans cette

situation, nous devons utiliser d'autres transformations que nous allons expliciter dans la suite

3.3.3.3. Transformation Déduire-zéro-en-bas

Etant donnée $A(x)$ une matrice de la forme

(3.3.15) $A(x) = x^{\text{ord}(A)} \{ A_0 + x^{1/b} A_1 + \dots + x^{i/b} A_i + \dots \}$

où

- b est un entier ≥ 1 ,
- $\text{ord}(A) < -1$,
- A_0 est nilpotente. De plus, A_0 est supposée écrite comme suit :

(3.3.16) $A_0 = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_s)$

avec

- J_i un bloc de Jordan d'ordre n_i ,
- les n_i supposés ordonnés de la manière suivante :

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m > n_{m+1} = n_{m+2} = \dots = n_s = 1.$$

Notons

$$\rho = n_{m+1} + n_{m+2} + \dots + n_s.$$

Nous rappelons la définition d'une transformation Déduire-zéro-en-bas dans la matrice A_i (voir définition.5.2 du chapitre II)

Définition.3.3.3 Une matrice *Déduire-zéro-en-bas* dans A_i est une matrice de la forme suivante ³ :

$$\zeta_i(x) = I + x^{i/b} T_i$$

où T_i est une matrice carrée d'ordre n triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent zéro et telle que si

(3.3.17) $B = \zeta_i[A] = x^{\text{ord}(A)} \{ \sum_{k=0}^{i-1} x^{k/b} A_k + x^{i/b} B_i + \sum_{k=i+1}^{+\infty} x^{k/b} B_k \}$

alors B_i est une matrice ayant la forme spéciale suivante (ici, la matrice A_0 est formée de trois blocs de Jordan d'ordre >1)

³) I est la matrice unité. Dans le cas où il est nécessaire d'indiquer son ordre n , nous écrivons I_n

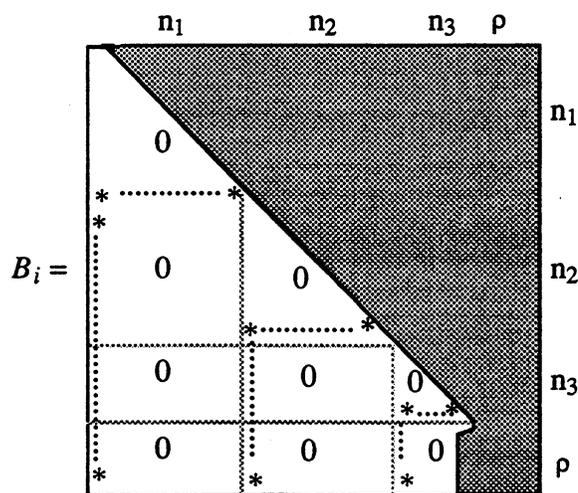


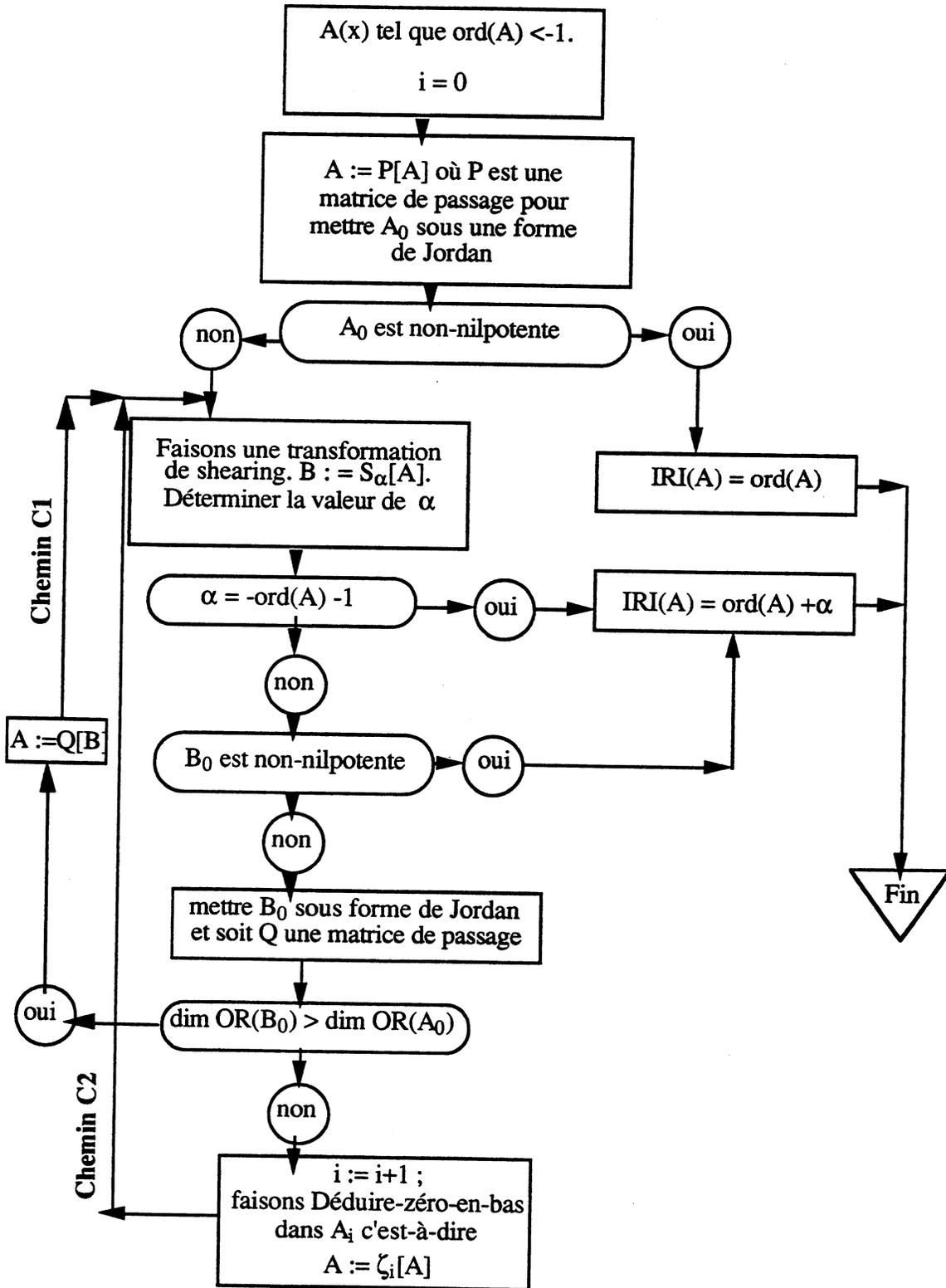
Figure. 1

où les étoiles et les parties hachurées représentent les endroits où l'on peut trouver des éléments non nuls de C .

Algorithme pour construire une matrice $\zeta_i(x)$:

Par analogie avec la méthode proposée dans la chapitre II page 62, on peut construire une matrice T_i triangulaire inférieure à diagonale nulle telle que la matrice B_i , définie par (3.3.18), soit de la forme spéciale explicité par la figure.1 ci-dessus.

Maintenant, on résume l'algorithme pour le calcul de $IRI(A)$ par l'organigramme suivant :



Il nous reste maintenant à prouver que la procédure **recherche-IRI(A)** s'arrêtera en un nombre fini de pas. Ceci est basé sur le résultat suivant :

Proposition.3.3.1 :

(I) *Le nombre K1 de parcours du chemin C1 dans l'algorithme recherche-IRI(A) est borné comme suit :*

$$K1 \leq \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

(II) *Le nombre K2 de parcours du chemin C2 avec une même matrice A(x) est bornée comme suit :*

$$K2 \leq bn(-ord(A) - 1) - 1.$$

Preuve :

(I) L'idée principale est de déterminer les matrices nilpotentes M de $\mathcal{M}(n, C)$ telles que la dimension de **OR(M)** soit maximale. En effet, soit M un élément de $\mathcal{M}(n, C)$ nilpotent. D'après l'équation (3.3.3), on a l'égalité suivante :

$$\dim \mathbf{OR}(M) = n^2 - \dim \text{Ker } \mathbf{ad}_M$$

D'où, $\dim \mathbf{OR}(M)$ est maximale si et seulement si $\dim \text{Ker } \mathbf{ad}_M$ est minimale. Or, d'après l'équation (3.3.4), et si M est déjà écrite sous forme de Jordan

$$M = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$$

avec J_i un bloc de Jordan de dimension n_i tel que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s \geq 1$, on a

$$\dim \text{Ker } \mathbf{ad}_M = \sum_{i=1}^s (2i-1)n_i$$

De ce fait, il est clair que cette dimension est minimale si et seulement si $s = 1$. Par conséquent, M est formée d'un seul bloc de Jordan. On a donc

$$\dim \text{Ker } \mathbf{ad}_M = n$$

On déduit que la dimension maximale de l'orbite d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}(n, C)$ est $(n^2 - n)$. D'autre part, la dimension de l'orbite d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}(n, C)$ est paire parce que si M est un élément de $\mathcal{M}(n, C)$ nilpotent, on a les égalités

$$\dim \mathbf{OR}(M) = n^2 - \dim \text{Ker } \mathbf{ad}_M = n^2 + n - 2 \sum_{i=1}^s in_i.$$

Par conséquent, le nombre de parcours du chemin C1 dans l'organigramme précédent est borné par

$$K1 \leq \frac{1}{2} (n^2 - n).$$

(II) Après avoir effectué P transformations (où $P = \text{bn}(-\text{ord}(A)-1)-1$) Déduire-zéro-en-bas sur la matrice $A(x)$, on trouve que les coefficients $A_i, i=1, \dots, P$ de la matrice

$$A := \zeta_P[\zeta_{P-1}[\dots \zeta_1[A]\dots]]$$

ont les formes spéciales (voir figure.1). Dans ce cas, effectuons en plus une transformation de shearing sur cette matrice $A(x)$

$$B = S_\alpha[A].$$

Si on a (B_0 est nilpotente et $\alpha \neq -\text{ord}(A) - 1$) alors $\dim \text{OR}(B_0) > \dim \text{OR}(A_0)$ parce que, d'après le théorème 3.3.1, la matrice B_0 est de la forme

$$B_0 = A_0 + \sum_{k=1}^m a_{ikjk}^{rk} E_{ikjk}$$

où les a_{ikjk}^{rk} proviennent de $A_r, r = 1, 2, \dots, P$. Donc, la matrice $\sum_{k=1}^m a_{ikjk}^{rk} E_{ikjk}$ appartient au $\text{Ker } \text{ad}_{A_0^*}$. Et par suite, les conditions de la proposition, énoncée dans la page 90, sont vérifiées :

$$B_0 \text{ est nilpotente, } B_0 \neq A_0 \text{ et } B_0 \in A_0 + \text{Ker } \text{ad}_{A_0^*}.$$

D'où

$$\dim \text{OR}(B_0) > \dim \text{OR}(A_0).$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Terminons en démontrant la relation entre $\text{OE}(A)$ et $\text{IRI}(A)$ annoncée en (3.1.4).

Proposition.3.3.2 Si A est un élément de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}((x))^*)$ alors on a :

$$\text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1$$

Preuve : En effet, d'après la définition de l' $\text{IRI}(A)$, deux cas sont à considérer :

Cas 1 : $\text{IRI}(A) = -1$. Dans ce cas, on a déjà dit que $x = 0$ est un point singulier régulier du système différentiel linéaire associé à $A(x)$. Par conséquent, on a :

$$\text{OE}(A) = 0 \text{ et } -\text{IRI}(A) - 1 = 0 \Rightarrow \text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1.$$

Cas 2 : $\text{IRI}(A) > -1$. Dans ce cas, l'algorithme précédent a permis de construire une matrice T de $\text{GL}(n, \mathbb{C}((x))^*)$ telle que

$$\text{IRI}(A) = \text{ord}(T[A]).$$

Notons $B = T[A]$. Alors, la matrice de tête B_0 de B est non-nilpotente. Dans ce cas, le calcul d'une matrice fondamentale de solutions formelles du système différentiel

$$\dot{Y}(x) = B(x) Y(x)$$

au voisinage de l'origine prouve que $\text{OE}(B) = -\text{ord}(B) - 1$ (voir [Waso65]). Mais, d'après la définition de l' $\text{OE}(A)$ et la proposition.3.2.1, on a :

$$\text{OE}(A) = \text{OE}(B) = -\text{ord}(B) - 1 \quad \text{et} \quad \text{IRI}(B) = \text{IRI}(A) = \text{ord}(B).$$

D'où

$$\text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1.$$

Ceci conclut notre démonstration. ■

Dans le prochain paragraphe, nous allons illustrer notre algorithme sur quelques exemples.

3.3.4. Exemples

a) Une seule transformation de shearing

Calculons $\text{IRI}(A)$ de la matrice $A(x)$ définie par :

$$(a.1) \quad A(x) = x^{\text{ord}(A)} \{ A_0 + x^{1/b} A_1 + x^{2/b} A_2 + \dots \}$$

où

- b est un entier ≥ 1 ,
- $\text{ord}(A) < -1$,
- A_0 est formée d'un seul bloc de Jordan c'est-à-dire

$$(a.2) \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

d'après la proposition 3.2.1, on obtient le résultat suivant:

$$\boxed{\text{IRI}(A) = \text{IRI}(B) = \text{ord}(A) + \alpha}$$

b) Mélange de shearing et Déduire-zéro-en-bas sans passer par le chemin C1

Ici, nous déterminons $\text{IRI}(A)$ d'une matrice $A(x)$ à l'aide des transformations de shearing et Déduire-zéro-en-bas sans passer par le chemin C1 défini sur l'organigramme précédent. Soit

$$(b.1) \quad A(x) = x^{-3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

D'abord, faisons une transformation de shearing sur $A(x)$, on obtient

$$B = S_{\alpha}[A]$$

où α est donné par la formule (3.3.14)

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \left\{ 2, \frac{r}{i-j+1} / 1 \leq r \leq 2, 1 \leq j \leq i \leq 3 \text{ et } a_{ij} \neq 0 \right\} \\ &= \min \{ 1, 1/2, 2/3, 2 \} = 1/2. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, la matrice de tête B_0 de $B(x)$ est

$$B_0 = A_0 + 3 E_{21} + (-3) E_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est clair que cette matrice est nilpotente et semblable à A_0 . Donc, $\text{OR}(B_0) = \text{OR}(A_0)$. De ce fait, nous commençons à simplifier $A(x)$ par une transformation $\zeta_1(x)$ Déduire-zéro-en-bas dans A_1 . On définit la matrice $A^{(1)}$ comme suit :

$$(b.2) \quad A^{(1)} := \zeta_1[A] \quad \text{où} \quad \zeta_1(x) = I + xT_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Après le développement de (b.2), on obtient

$$A^{(1)}(x) = \zeta_1^{-1}(x) A(x) \zeta_1(x) - \zeta_1^{-1}(x) \dot{\zeta}_1(x) =$$

$$x^{-3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} -9 & 1 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \\ -27 & 3 & 6 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + x^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Effectuons, de nouveau, une transformation de shearing sur cette matrice et désignons le résultat par C.

$$C = S_\alpha[A^{(1)}]$$

où

$$\alpha = \min \left\{ 2, \frac{r}{i-j+1} / 1 \leq r \leq 4, 1 \leq j \leq i \leq 3 \text{ et } a_{ij}^r \neq 0 \right\} \\ = \min \{ 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2 \} = 2/3$$

En calculant la matrice de tête C_0 de $C(x)$, on trouve que

$$C_0 = A_0 + a_{32}^2 E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice non-nilpotente. Donc, d'après la proposition.3.2.1, nous avons

$$\boxed{\text{IRI}(A) = \text{IRI}(C) = \text{ord}(C) = -3 + 2/3 = -7/3}.$$

c) Mélange des transformations de Jordan, shearing et Déduire-zéro-en-bas avec passage par le chemin C1

Ici, nous traitons un exemple où le **chemin C1** défini sur l'organigramme précédent, sera parcouru. Déterminons $\text{IRI}(A)$ pour le système différentiel suivant :

$$(c.1) \quad A(x) = x^{-3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

En effet, faisons une transformation de shearing sur cette matrice. On obtient

$$(c.2) \quad B = S_\alpha[A]$$

où α se calcule par

$$\alpha = \min \{ 1/3, 1/2, 1, 2 \} = 1/3.$$

Comme $0 < \alpha < -\text{ord}(A) - 1$, on regarde la matrice de tête B_0 de $B(x)$, on trouve

$$B_0 = A_0 + a_{31}^1 E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Faisons maintenant le test

$$\dim \text{OR}(B_0) = n^2 - n = 6 > \dim \text{OR}(A_0) = n^2 - 5 = 4. \quad (\text{Ici, } n = 3).$$

Donc, nous sommes dans la situation où on doit passer par le **chemin C1** décrite sur l'organigramme de la page 101. Autrement dit, on doit calculer $\text{IRI}(B)$ où $B(x)$ est défini par (c.2). En effet,

$$B(x) = S_{1/3}[A] = x^{-8/3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x^{1/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x^{2/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x^{5/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Mettons maintenant la matrice de tête de $B(x)$ sous forme de Jordan. Ceci se fait par le changement de variables

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Appliquons P sur la matrice $B(x)$. On obtient une nouvelle matrice $C(x)$:

$$C = P[B] = x^{-8/3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x^{1/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x^{2/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x^{5/3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Recommençons les mêmes calculs qu'avant pour calculer $\text{IRI}(C)$. On peut constater que

$\text{IRI}(A) = \text{IRI}(C) = -8/3 + 1/6 = -5/2$

4. METHODE DE Turrittin-Wasow

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à rappeler, brièvement, la méthode de *Turrittin-Wasow* pour le calcul d'une matrice fondamentale de solutions formelles $\Phi(x)$ du système (2.1) au voisinage de l'origine. Turrittin [Turr55] a proposé une méthode directe pour calculer la matrice $\Phi(x)$. Cette méthode a été améliorée plus tard par Wasow [Waso65]. De ce

fait, nous nommerons la méthode de *Turrittin-Wasow*.

Le principe de la méthode consiste à réduire le système différentiel (2.1), en plusieurs systèmes différentiels séparés chacun étant :

- (1) soit une équation différentielle scalaire d'ordre 1,
- (2) soit un système différentiel sous forme (1.1) avec $q = 1$.

Dans le cas (1), les solutions formelles peuvent-être calculées facilement (voir exemple 2 du chapitre I). Si le cas (2) se représente de nouveau alors la méthode étudiée, dans le paragraphe 3 du chapitre II, est utilisée pour calculer $\Phi(x)$.

La méthode de *Turrittin-Wasow* (voir [Turr55], [Waso65], [BaVa83] et [Chen90]) se résume par les étapes suivantes :

1. Etape. Cette étape consiste à mettre la matrice de tête A_0 de $A(x)$ donnée par (2.1) sous la forme de Jordan décrite comme suit :

$$(4.1) \quad A_0 = \text{diag}(J_1(\lambda_1, \bar{k}_1), J_2(\lambda_2, \bar{k}_2), \dots, J_s(\lambda_s, \bar{k}_s))$$

où

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de A_0 ,
- $\bar{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{is_i})$ est une suite d'entiers positifs ordonnée de la façon suivante :

$$(4.2) \quad k_{i1} \geq k_{i2} \geq \dots \geq k_{is_i} \geq 1,$$

et

$$(4.3) \quad |\bar{k}_i| = k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{is_i}$$

- $J_i(\lambda_i, \bar{k}_i)$ désigne le bloc de Jordan d'ordre $|\bar{k}_i|$ associé à la valeur propre λ_i c'est-à-dire

$J_i(\lambda_i, \bar{k}_i) = \lambda_i I_{|\bar{k}_i|} + \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{is_i})$ avec J_{ij} est le bloc de Jordan de dimension k_{ij} ayant la forme

$$J_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad k_{ij} = 1 \quad \text{ou} \quad J_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad k_{ij} > 1,$$

- $n = |\bar{k}_1| + |\bar{k}_2| + \dots + |\bar{k}_s|$.

Ceci étant fait, on fait les deux tests :

(Tes.1) si $s = 1$ c'est-à-dire admet une unique valeur propre alors aller à l'étape.2.

(Tes.2) si $s > 1$ alors il existe (voir théorème.11.1 dans [Waso65] pp.54) une matrice carrée d'ordre n

$$(4.4) \quad T(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (I + x^{k/b} T_k)$$

telle que $B = T[A]$ soit sous la forme

$$(4.5) \quad B = T[A] = x^{\text{ord}(A)} \text{diag} (B_1(x), B_2(x), \dots, B_s(x))$$

où B_i , $1 \leq i \leq s$, sont dans $\mathcal{M}(\overline{k}_i, C[[x^{1/b}]])$, \overline{k}_i est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i . La matrice $B_i(0)$ est le bloc de Jordan de la matrice A_0 correspondant à λ_i .

le système (2.1) se sépare donc en s systèmes différentiels linéaires de dimension $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots, \overline{k}_s$, chacun inférieur à n et tel que la matrice de tête de chacun de ces systèmes admet une unique valeur propre. Ceci étant faits, aller à l'étape 2 suivante.

2. Etape. Dans cette étape, on suppose que la matrice A_0 a une unique valeur propre λ . Le but est de transformer A_0 à une matrice nilpotente. En effet, la matrice exponentielle suivante

$$(4.6) \quad \exp \left\{ \frac{\lambda}{1+\text{ord}(A)} x^{1+\text{ord}(A)} I \right\}$$

permet d'annuler la valeur propre λ parce que ce changement de variable effectué sur (2.1) va remplacer A_0 par $A_0 - \lambda I$ et laisser les autres matrices inchangables. Maintenant aller à l'étape 3 suivante.

3. Etape. Ici, on suppose que A_0 est sous la forme de Jordan et qu'elle est nilpotente. Cette étape consiste à mettre $A(x)$ sous la forme normale de Arnold en se basant sur le théorème suivant [Waso65] :

Il existe un élément T de $GL(n, C[[x^{1/b}]])$ tel que la matrice $B = T[A]$ s'écrit

$$(4.6) \quad B = T[A] = x^{\text{ord}(A)} \left\{ A_0 + \sum_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^d a_{ir} \Delta_i \right] x^{r/b} \right\}$$

où a_{ir} sont des constantes complexes, $d = \sum_{i=1}^s (2i-1)n_i$ et $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_d)$ forment une base de l'espace vectoriel $\Delta(A_0^*)$. ($\Delta(A_0^*)$ est déjà défini dans le chapitre II. page 58).

Ceci étant faits, on va à l'étape suivante.

4. Etape. Cette étape consiste à appliquer sur la matrice $B(x)$ définie par (4.6), une transformation de shearing S_α , on obtient

$$(4.7) \quad C = S_\alpha[B]$$

On calcule maintenant le paramètre α comme étant

$$\alpha = \min \left\{ -\text{ord}(A) - 1, \frac{r/b}{\mu_i - \nu_i + 1} \text{ où } 1 \leq i \leq d, 1 \leq r \leq +\infty \text{ tel que } a_{ir} \neq 0 \right\}$$

où μ_i et ν_i sont les numéros de la ligne et colonne du coefficient non nul de la matrice Δ_i .

- Si $\alpha = -\text{ord}(A) - 1$ alors $x = 0$ est une singularité régulière de (4.7). On peut donc calculer une matrice fondamentale de solutions formelles de (4.7). Par conséquent, une matrice fondamentale de solutions formelles du système (2.1) sera calculée.
- Sinon alors aller à l'étape 1 ensuite, faire le même procédé en remplaçant la matrice $A(x)$ du système (2.1) par la matrice $C(x)$ donnée par (4.7).

Remarque.4.1 : Il a été prouvé dans [Wasow65] pp. 103-110, qu'après un nombre fini de pas, la méthode de Turrittin-Wasow permet de calculer théoriquement une matrice fondamentale de solutions formelles du système (2.1) au voisinage de $x = 0$.

5. COMPARAISON PAR UN EXEMPLE ENTRE LES DEUX METHODES

Dans ce paragraphe, nous allons faire une comparaison par un exemple entre la méthode de *Turrittin-Wasow* et la notre (celle qui calcule l'ordre exponentiel d'une matrice fondamentale de solutions formelles). L'exemple étudié ici est déjà traité dans [Chen90]. Soit

$$A(x) = x^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ x^3+x^4 & -x^2 & x+x^4+x^5 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcul de OE(A) par la méthode de *Turrittin-Wasow* :

En effet, puisque la matrice de tête A_0 de $A(x)$ est déjà sous la forme de Jordan et elle est nilpotente, on doit alors regarder l'étape 3 de la méthode de *Turrittin-Wasow* ce celle où on doit mettre $A(x)$ sous la forme de Arnold. Ceci se fait par la matrice suivante :

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x^2 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient

$$B(x) = T[A] = x^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^3+x^4 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant, effectuons sur $B(x)$ la transformation de shearing $S_{1/2}(x)$, on obtient

$$C(x) = S_{1/2}[B] = x^{-3/2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x+x^2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} x^{1/2} \right\}$$

Remarquons que la matrice de tête

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de $C(x)$ a une valeur propre nulle de multiplicité 2 et deux valeurs propres simples ± 1 . Donc, elle est non-nilpotente. Donc

$$\text{IRI}(A) = -3/2 \implies \text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1 = 1/2.$$

Calcul de $\text{OE}(A)$ par notre méthode :

Puisque A_0 est sous forme de Jordan et nilpotente, on doit utiliser la transformation de shearing $S_{1/2}(x)$, on obtient

$$B(x) = S_{1/2}[A] = x^{-3/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2x^{5/2} & -x^2 \\ 0 & -3/2x^{1/2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x+x^2 & -x^{1/2} & 1+x^3+x^4 & -3/2x^{1/2} \end{bmatrix}$$

On constate aussi que la matrice de tête

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de $B(x)$ est non-nilpotente. Donc

$$\text{IRI}(A) = -3/2 \implies \text{OE}(A) = -\text{IRI}(A) - 1 = 1/2.$$

On déduit de cet exemple que le calcul de l'ordre exponentiel de $A(x)$ nécessite :

- Deux transformations $T(x)$ et $S_{1/2}(x)$ par la méthode de *Turritin-Wasow*
- Une seule transformation $S_{1/2}(x)$ par notre méthode

Remarque.4.2 : Notre approche algorithmique peut être étendue pour trouver une matrice fondamentale de solutions du système (2.1). En effet, une fois qu'on a calculé l'ordre exponentiel du système (2.1), on obtient un système différentiel du même type que celui de (2.1) et ayant une matrice de tête non-nilpotente. Dans ce cas, on fait les deux tests (Tes.1)-(Tes.2) de l'étape 1 de la méthode de *Turritin-Wasow*. On applique donc soit la transformation (4.4)

ou soit (4.6). Ensuite, suivant ces deux transformations, on réapplique la méthode pour le calcul de l'ordre exponentiel sur les systèmes obtenus.

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux solutions formelles du système différentiel linéaire suivant :

$$(E) \quad \dot{Y}(x) = A(x) Y(x) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}(n, C((x))^*).$$

Pour réaliser ceci, on est passé, d'abord, par la caractérisation de la nature de la singularité à l'origine (point régulier, singulier régulier et singulier irrégulier).

Dans le cas d'un point régulier ou singulier régulier, l'étude de comportement des solutions du système (E) est un problème classique [Waso65]. Par contre, dans le cas d'une singularité irrégulière, l'étude des solutions du système (E) devient beaucoup plus compliquée. Nous avons vu, dans l'introduction, que le comportement des solutions de (E) dépend d'une manière fondamentale du calcul de l'Ordre Exponentiel d'une matrice fondamentale des solutions du système (E). Nous avons proposé un algorithme pour calculer l'OE(A) du système (E). Cet algorithme est constitué de :

- Trois types de transformation (**Jordan, Shearing et Déduire-zéro-en-bas**),
- D'un test sur la dimension de l'orbite d'un élément M de $\mathcal{M}(n, C)$.

Dans notre algorithme, le calcul du paramètre α des transformations de shearing est capital. Nous avons proposé une formule simple (voir lemme 3.3.1) pour déterminer α . Grâce à elle, l'OE(A) du système (E) se détermine à partir des coefficients A_i , $0 \leq i < bn (- \text{ord}(A)-1)$, de $A(x)$.

Grâce à l'algorithme présenté dans ce chapitre on peut, en combinant avec la méthode de *Turriffin-Wasow*, résoudre le système différentiel linéaire (E). Ceci peut se faire de la manière suivante :

Pour chaque système différentiel admette une matrice de tête ayant plusieurs valeurs propres, en utilisant l'étape 1 de la méthode de *Turriffin-Wasow*, on sépare le système initial en plusieurs

systèmes. La matrice de tête de chacun de ces systèmes admet une unique valeur propre λ ($\lambda \neq 0$). Pour chacun de ces systèmes, on fait le changements de variables de type

$$Y(x) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{1 + \text{IRI}(A)} x^{1 + \text{IRI}(A)} I \right\} Z(x)$$

on obtient un nouveau système du même type que (E) et ayant une matrice de tête nilpotente. L'algorithme proposé dans ce chapitre permet de transformer en système ayant une matrice de tête non-nilpotente. Puis, on réitère ce procédé. A la fin on obtient une suite des systèmes

- Soit des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1
- Soit des systèmes différentiels linéaires tels que $\text{ord}(A) = -1$.

Dans ces deux cas, on sait résoudre le problème.

" Si tu connais tes limites et que tu trouves ton bonheur en les respectant, tu peux réussir toute une vie. Mais si la mauvaise lumière du désir t'attire toujours plus loin, d'une chose à l'autre, tu finiras dans le néant "

CHAPITRE IV

ALGORITHME DE RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES DE DIMENSION DEUX AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE

- 1. Introduction**
- 2. Transformations préliminaires**
- 3. Cas où la matrice A_0 admet deux valeurs propres distinctes**
- 4. Cas où A_0 est formée d'un seul bloc de Jordan**
- 5. Exemple : équation d'Airy**
- 6. Conclusion**

ALGORITHME DE RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES DE DIMENSION DEUX AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE

1. INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles linéaires, à coefficients séries formelles, du second ordre, joue un rôle essentiel dans plusieurs applications. Plusieurs équations spéciales de ce type ont été étudiées dans le grand détail parce qu'on les rencontre fréquemment dans des problèmes physiques et technologiques. Parmi elles, on cite l'équation d'*Airy*, l'équation de *Bessel*, l'équation de *Legendre*, l'équation de *Mathieu*, l'équation hypergéométrique et l'équation de *Van der pol*.

De ce fait, nous nous intéressons, dans ce chapitre, à la résolution, au voisinage de l'origine de C , des systèmes différentiels linéaires de dimension deux de la forme suivante :

$$(1.1) \quad \frac{dY(x)}{dx} = A(x) Y(x) = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \right\} Y(x)$$

où

- x appartient à C ,
- q est supposé un entier > 1 ,
- $Y(x)$ est un vecteur colonne à deux composantes,
- A_k est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans C .

Pourquoi ce système ? En effet, on sait que le problème de résolution d'une équation différentielle linéaire, à coefficients séries formelles, du second ordre de la forme :

$$(1.2) \quad a_2(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) y(x) = 0$$

où $a_i(x)$ sont deux séries formelles, peut être transformé au problème de résolution d'un système différentiel linéaire du type (1.1). Ceci peut être fait par le changement de variable

$$(1.3) \quad Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ \frac{dy(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

Si $y(x)$ est une solution de l'équation (1.2), alors ce vecteur $Y(x)$ est une solution du système différentiel

$$\frac{dY(x)}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \\ -a_2(x) & -a_2(x) \end{bmatrix} Y(x)$$

Réciproquement, si $Y(x)$ est une solution de ce système, alors la première composante $y_1(x)$ de $Y(x)$ satisfait l'équation (1.2).

Comme on a déjà dit, dans les chapitres précédents, parmi les approches existantes pour résoudre le système (1.1), il en a deux intéressantes :

Approche du vecteur cyclique et Approche directe.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approche directe. Cette dernière consiste, lorsque la matrice A_0 possède deux valeurs propres distinctes, à chercher une transformation formelle du type

$$(1.4) \quad Y(x) = T(x) Z(x)$$

avec

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k \quad \text{et} \quad \det T_0 \neq 0$$

conduisant en un nouveau système différentiel de la forme

$$(1.5) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = B(x) Z(x) \quad \text{avec} \quad B(x) = T^{-1}(x) A(x) T(x) - T^{-1}(x) \frac{dT(x)}{dx}$$

telle que $B(x)$ soit une matrice diagonale. Dans ce cas, on découple ce système en deux équations différentielles linéaires scalaires, chacune d'ordre 1. Dans ce cas, une matrice fondamentale de solutions formelles du système (1.5) peut déterminer facilement. Par conséquent, une matrice fondamentale de solutions du système (1.1) sera calculée.

A. Hilali, dans le chapitre 8 de sa thèse [Hila87], a pu modifier l'approche directe

pour construire une matrice fondamentale des solutions du système (1.1). Sa méthode consiste à transformer le système (1.1) en une forme dite *Super-irréductible*. Ceci étant fait, il démontre que le *polygone différentiel de Newton* de cette forme coïncide avec le *polygone algébrique de Newton* (pour les définitions des ces deux polygones (voir [Hila87] dans Journal of Symbolic Computation.4(3) p.335-349). Sur les critères de ce dernier, Hilali a proposé un algorithme pour résoudre le système (1.1).

Dans ce chapitre, nous proposons aussi, en modifiant l'approche directe, la mise en oeuvre d'un *algorithme* permettant la construction, d'une manière directe, d'une matrice fondamentale de solutions du système (1.1) au voisinage de $x = 0$, point singulier de (1.1). Cet algorithme utilisera des résultats du chapitre III.

Contenu du chapitre : Le prochain paragraphe est consacré à quelques transformations préliminaires nécessaires pour la suite. Dans le cas où la matrice A_0 admet deux valeurs propres distinctes, nous allons proposer, dans le paragraphe 3, une procédure de résolution pour calculer une solution du système (1.1). Puis, à l'aide d'une permutation simple, nous construisons une autre solution, linéairement indépendante avec la première. On termine ce paragraphe par un exemple illustratif. Dans le cas où A_0 admet une unique valeur propre, nous proposons, dans le paragraphe 4, *une technique* qui transforme le système (1.1) en un nouveau système du même type et tel que la nouvelle matrice A_0 admette deux valeurs propres distinctes. Par conséquent, nous appliquons l'algorithme du paragraphe 3 pour déterminer les solutions. Dans le paragraphe 5, nous appliquons l'algorithme sur l'équation d'Airy. Enfin, on conclura dans le paragraphe 6.

2. TRANSFORMATIONS PRELIMINAIRES

D'abord, rappelons que la structure d'une matrice fondamentale de solutions formelles $\Phi(x)$ du système (1.1), dans un voisinage de l'origine est donnée par

$$(2.1) \quad \Phi(x) = S(x^{1/m}) x^R \exp\{ Q(x^{-1/m}) \}$$

où dans cette représentation, on a :

- m est un entier positif convenablement choisi,
- R est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients complexes,
- $Q(x^{-1/m}) = \text{diag} (q_1(x^{-1/m}), q_2(x^{-1/m}))$ tel que $q_i(x^{-1/m})$ ($i = 1, 2$) soit un polynôme

de degré h ($h \leq 2(q-1)$) en $x^{-1/m}$ sans terme constant,

• $S(x^{1/m}) = x^{-k_0/m} \sum_{k=0}^{+\infty} S_k x^{k/m}$ où k_0 est un entier positif, les S_k appartiennent à $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$.

Comme, on l'a déjà dit l'objectif est la construction *effectif* de la matrice $\Phi(x)$ donnée par (2.1). Pour cela, on transforme la matrice de tête A_0 de $A(x)$ sous la forme de Jordan. Ceci se fait par une matrice P carrée d'ordre 2 constante inversible. De ce fait et sans perte de généralité, on suppose, dans la suite, que la matrice A_0 soit sous forme de Jordan. Donc, la matrice A_0 admet l'une de trois formes suivantes :

$$\text{Forme.a} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad \text{Forme.b} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Forme.c} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

où $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{C}$ et $\lambda_0 \neq \mu_0$.

Remarquons que si la matrice A_0 a la forme "Forme.c" alors un changement de variable du type exponentiel

$$(2.2) \quad Y(x) = \exp\left[\frac{\lambda_0}{1-q} x^{1-q} I_2\right] Z(x)$$

appliquée au système (1.1), permet d'annuler (bien, sûr lorsque $\lambda_0 \neq 0$) la matrice A_0 . Ceci va diminuer l'ordre polaire q d'une unité. Et donc, on obtient le système différentiel

$$(2.3) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = x^{-(q-1)} \{ A_1 + xA_2 + x^2A_3 + \dots \} Z(x).$$

Comme précédemment, sur ce système, nous appliquons une matrice P inversible constante pour transformer la matrice A_1 sous forme de Jordan. Si de nouveau la matrice A_1 est de la forme "Forme.c", alors on réapplique un changement de variable du type (2.2). On obtient, de nouveau, un système différentiel ayant cette fois-ci un ordre polaire $q-2$. Si à chaque fois ce phénomène se reproduit, alors on aura à la fin $q = 1$. Et donc, le point $x = 0$ est une singularité régulière du système différentiel (1.1). Par conséquent, on sait (voir chapitre II) que le système (1.1) admet une matrice fondamentale de solutions formelles

$$\Phi(x) = S(x) x^R$$

où $S(x)$ et R sont deux matrices définies comme dans (2.1).

Ceux-ci nous ramènent donc à supposer, dans la suite, que la matrice A_0 soit de la forme :

"Forme.a" ou "Forme.b".

Pour chacun de ces deux cas, nous allons proposer une procédure calculant une matrice $\Phi(x)$. Commençons par étudier le premier cas.

3. CAS OÙ A_0 ADMET DEUX VALEURS PROPRES DISTINCTES

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à calculer une solution du système

$$(3.1) \quad \frac{dY(x)}{dx} = x^{-q} \left\{ \begin{bmatrix} a_0^{11} & 0 \\ 0 & a_0^{22} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_k^{11} & a_k^{12} \\ a_k^{21} & a_k^{22} \end{bmatrix} x^k \right\} Y(x)$$

où $a_k^{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq 2$ et $k \geq 1$ tels que $a_0^{11} \neq a_0^{22}$. Pour cela, nous allons procéder comme suit :

- 1- D'abord, nous nous intéressons à construire une solution d'un système différentiel linéaire vérifiant une propriété (P_{q-2}) définie ci-dessous.
- 2- Ensuite, nous démontrons que le système (3.1) peut être transformé à l'aide des transformations inversibles en un nouveau système différentiel vérifiant la propriété (P_{q-2}) .

Définissons la propriété (P_{q-2}) comme suit :

On dit qu'un système différentiel linéaire du type (1.1) vérifie (P_{q-2}) si on a :

- A_0 est une matrice diagonale et admet deux valeurs propres distinctes
- A_k , $k = 1, 2, \dots, q-2$ sont des matrices triangulaires supérieures.

Si maintenant un système différentiel linéaire du type (1.1) vérifie la propriété (P_{q-2}) . La proposition suivante nous permet alors de construire une solution.

Proposition.3.1 *Si le système (3.1) vérifie la propriété (P_{q-2}) alors une solution $Y(x)$ de (3.1) est obtenue par la formule*

$$(3.2) \quad Y(x) = \exp\left\{q_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\} x^\mu U(x)$$

où

- $q_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0^{11}}{1-q} x^{1-q} + \frac{a_1^{11}}{2-q} x^{2-q} + \dots + \frac{a_{q-3}^{11}}{-2} x^{-2} + \frac{a_{q-2}^{11}}{-1} x^{-1}$
- $\mu = a_{q-1}^{11}$
- $U(x)$ est un vecteur série formelle solution du système

$$(3.3) \quad \frac{dU(x)}{dx} = x^{-q} B(x) U(x)$$

avec

- $B_k = A_k - a_k^{11} I_2, \quad 0 \leq k \leq q-1,$
- $B_k = A_k, \quad k > q-1.$

Preuve : En effet, dérivons $Y(x)$ par rapport à x , on obtient

$$\frac{dY(x)}{dx} = \exp\left\{q_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\} x^\mu \left\{ \frac{d q_1\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} U(x) + \mu x^{-1} U(x) + \frac{dU(x)}{dx} \right\}.$$

Substituons cette expression dans le système (3.1) et simplifions ensuite par $\exp\left\{q_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\} x^\mu$, nous aurons

$$(3.4) \quad \frac{d q_1\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} U(x) + \mu x^{-1} U(x) + \frac{dU(x)}{dx} = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0} A_k x^k \right\} U(x).$$

Or,

$$\frac{d q_1\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = x^{-q} \left\{ a_0^{11} + a_1^{11} x + \dots + a_{q-3}^{11} x^{q-3} + a_{q-2}^{11} x^{q-2} \right\} \quad \text{et} \quad \mu = a_{q-1}^{11}.$$

Donc, l'équation (3.4) devient

$$\frac{dU(x)}{dx} = x^{-q} \left\{ \sum_{k \geq 0} A_k x^k - \sum_{i=0}^{q-1} a_i^{11} I_2 \right\} U(x)$$

En posant

$$B(x) = \sum_{k \geq 0} A_k x^k - \sum_{i=0}^{q-1} a_i^{11} I_2$$

nous obtenons

$$(3.5) \quad \frac{dU(x)}{dx} = x^{-q} B(x) U(x)$$

avec

- $B_k = A_k - a_k^{11} I_2, \quad 0 \leq k \leq q-1,$
- $B_k = A_k, \quad k > q-1.$

Pour terminer cette démonstration, il nous reste à prouver que le système (3.5) admet une

solution $U(x)$ série formelle. En effet, nous allons chercher une solution $U(x)$ du système (3.5) de la forme

$$(3.6) \quad U(x) = U_0 + xU_1 + \dots + x^k U_k + \dots$$

où les U_k sont des vecteurs colonnes à 2 composantes dans \mathbb{C} avec $U_0 \neq 0$. Pour cela, substituons formellement l'expression (3.6) dans l'équation (3.5) et multiplions chaque membre par x^q , nous obtenons la relation

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) U_{k+1} x^{q+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k B_{k-i} U_i \right) x^k$$

En identifiant, terme à terme, les deux membres de cette égalité, on obtient les deux relations :

$$(3.7) \quad \sum_{i=0}^k B_{k-i} U_i = 0, \quad k = 0, 1, \dots, q-1,$$

$$(3.8) \quad \sum_{i=0}^k B_{k-i} U_i = (k-q+1)U_{k-q+1}, \quad k = q, q+1, \dots, +\infty$$

Nous nous intéressons maintenant résoudre ces équations (les inconnus sont les U_i). En effet : Pour $k = 0$, on a l'équation

$$B_0 U_0 = 0.$$

Comme le coefficient $b_0^{11} = a_0^{22} - a_0^{11}$ de la matrice B_0 est supposé non nul (parce que le système (3.1) vérifie (P_{q-2})) alors une solution non triviale de cette équation est donnée par

$$(3.9) \quad U_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où α_0 est une constante complexe non nulle arbitraire.

Pour $k = 1$, l'équation (3.7) se réduit à

$$B_0 U_1 + B_1 U_0 = 0.$$

Celle-ci admet $U_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme solution où α_1 est une constante arbitraire.

En général, grâce à la structure matricielle des matrices B_1, B_2, \dots, B_{q-2} (la première colonne de chaque matrice est nulle) et au choix de U_0 , on peut choisir les vecteurs U_1, U_2, \dots, U_{s-1} ($s \leq q-2$) de la même forme que U_0 . On obtient, pour $k=s$, l'équation

$$B_0 U_s + \sum_{i=0}^{s-1} B_{s-i} U_i = 0 .$$

Celle-ci a comme solution générale

$$(3.10) \quad U_s = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, q-2$$

où les α_s sont des constantes complexes, pour l'instant, arbitraires.

Maintenant, considérons le cas où $k = q-1$. L'équation (3.6) devient donc

$$(3.11) \quad B_0 U_{q-1} + \sum_{i=1}^{q-2} B_{q-1-i} U_i + B_{q-1} U_0 = 0 .$$

Or, de l'équations (3.8) et (3.10), nous avons

$$B_{q-1-s} U_s = 0 \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, q-2 .$$

Donc, l'équation (3.11) peut s'écrire

$$(3.12) \quad \boxed{B_0 U_{q-1} + B_{q-1} U_0 = 0} .$$

Ceci peut s'écrire, encore, sous la forme d'un système linéaire homogène

$$(3.13) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{q-1}^{21} & a_0^{22} - a_0^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_{q-1} \end{bmatrix} = 0$$

où β_{q-1} est la deuxième composante de U_{q-1} et α_0 étant le paramètre défini dans (3.9). Nous pouvons donc considérer que β_{q-1} est déterminé à partir du système (3.13) en fonction du paramètre α_0 . On a l'égalité

$$\beta_{q-1} = -\frac{a_{q-1}^{21}}{a_0^{22} - a_0^{11}} \alpha_0 \quad \text{et} \quad U_{q-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{q-1} \\ -\frac{a_{q-1}^{21}}{a_0^{22} - a_0^{11}} \alpha_0 \end{bmatrix}$$

où α_{q-1} est une constante arbitraire pour l'instant.

D'une manière générale, nous allons montrer comment nous déterminerons les autres vecteurs U_k pour $k \geq q$. Pour cela, posons d'abord :

$$U_{q+s} = \begin{bmatrix} \alpha_{q+s} \\ \beta_{q+s} \end{bmatrix}, \quad s \geq 0.$$

Remplaçons k par $q+s$ dans (3.8), on obtient

$$(3.14) \quad B_0 U_{q+s} + \Sigma_1 + B_{q-1} U_{s+1} + \Sigma_2 = (s+1) U_{s+1}$$

où

- $\Sigma_1 = B_1 U_{q+s-1} + B_2 U_{q+s-2} + \dots + B_{q-2} U_{s+2}$,
- $\Sigma_2 = B_q U_s + B_{q+1} U_{s-1} + \dots + B_{q+s} U_0$.

Comme la première colonne de chaque matrice B_k , $k \leq q-2$ est nulle alors la somme Σ_1 ne dépend que de β_{q+s-1} , β_{q+s-2} , ..., β_{s+2} supposés connus. Et par suite, les deux sommes Σ_1 et Σ_2 sont indépendantes des α_k , $k > s$. Donc, l'équation (3.14) s'écrit comme suit :

$$B_0 U_{q+s} + [B_{q-1} - (s+1)I_2] U_{s+1} = -(\Sigma_1 + \Sigma_2).$$

Cette équation s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} -(s+1) & 0 \\ a_{q-1}^{21} & a_0^{22} - a_0^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{s+1} \\ \beta_{q+s} \end{bmatrix} = -(\Sigma_1 + \Sigma_2).$$

Or, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est un vecteur connu. Ce système linéaire admet donc une solution unique parce que la matrice

$$\begin{bmatrix} -(s+1) & 0 \\ a_{q-1}^{21} & a_0^{22} - a_0^{11} \end{bmatrix}$$

est toujours inversible pour tout $s \geq 0$. Par conséquent, les constantes α_{s+1} et β_{q+s} sont déterminées d'une manière unique. D'où, $U(x)$ est construite par cette méthode. Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Jusqu'au ici, nous avons développé une méthode pour construire une solution d'un système différentiel linéaire du type (1.1) vérifiant la propriété (P_{q-2}) . Pour terminer ce paragraphe, il nous reste à prouver qu'en général le système (3.1) peut se transformer en un autre système différentiel vérifiant (P_{q-2}) . Cela se démontre par la proposition suivante.

Proposition.3.2 Il existe ζ une matrice carrée d'ordre 2 triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent 1 et à coefficients dans $C[[x]]$ telle que $Y(x) = \zeta(x) Z(x)$ transforme le système (3.1) en un nouveau système

$$\frac{dZ(x)}{dx} = B(x) Z(x) \quad \text{avec} \quad B(x) = \zeta^{-1}(x)A(x)\zeta(x) - \zeta^{-1}(x) \frac{d\zeta(x)}{dx}$$

vérifiant la propriété (P_{q-2}).

Preuve : Définissons une série de systèmes différentiels linéaires

$$\frac{dY^{(i)}}{dx} = A^{(i)}(x) Y^{(i)} = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} a_k^{11(i)} & a_k^{12(i)} \\ a_k^{21(i)} & a_k^{22(i)} \end{bmatrix} x^k \right\} Y^{(i)}$$

comme suit :

$$A^{(i)} = \zeta_i^{-1} A^{(i-1)} \zeta_i - \zeta_i^{-1} \frac{d\zeta_i}{dx}$$

avec

- $A^{(0)} = A$,
- $\zeta_0 = I_2$,
- $\zeta_i(x) = I_2 + x^i T_i$ où T_i est choisie de telle façon que la matrice $A_i^{(i+1)}$ définie par

$$(3.15) \quad A_0 T_i - T_i A_0 + A_i^{(i)} = A_i^{(i+1)}$$

soit triangulaire inférieure. Pour que ceci soit valable, nous choisissons T_i comme suit :

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a_i^{21(i)}}{a_0^{11(0)} - a_0^{22(0)}} & 0 \end{bmatrix}$$

Itérons cette procédure de $i=0$ jusqu'au $i = q-2$, on obtient la matrice inversible suivante :

$$(3.16) \quad \zeta_A(x) = \prod_{i=1}^{q-2} (I_2 + x^i T_i).$$

Donc, le changement de variable $Y(x) = \zeta_A(x) Z(x)$ transforme le système (3.1) en un nouveau système

$$(3.17) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = B(x) Z(x)$$

vérifiant la propriété (P_{q-2}). Ceci conclut notre démonstration. ■

Remarque.3.1 : D'après la proposition.3.1, le système (3.17) admet une solution de la forme $U(x) = \exp\{q_1(\frac{1}{x})\}x^\mu U(x)$. Donc, le système (3.1) aura $\zeta_A(x)U(x)$ comme solution.

Maintenant, nous résumons la méthode pour construire une solution du système différentiel (3.1) par la procédure suivante.

Calcul-d'une-solution-Forme.a ($A(x)$, q)

Entrée : $A(x)$ matrice du système différentiel (3.1) et l'entier $q > 1$.

Sortie : une solution du système (3.1).

début

$i := 0$

si le système(3.1) ne vérifie pas la propriété (P_{q-2}) alors

tant que $i \leq q-2$ faire

si $a_i^{21} = 0$ alors $i := i+1$

si $a_i^{21} \neq 0$ alors $A^{(i)} := \zeta_i^{-1} A^{(i-1)} \zeta_i - \zeta_i^{-1} \frac{d\zeta_i}{dx}$

{ Ce changement de variable utilisé pour annuler l'élément a_i^{21} }

fin tant que

- calculer le polynôme $q_1(\frac{1}{x})$ par

$$q_1(\frac{1}{x}) = \frac{a_0^{11}}{1-q} x^{1-q} + \frac{a_1^{11}}{2-q} x^{2-q} + \dots + \frac{a_{q-3}^{11}}{-2} x^{-2} + \frac{a_{q-2}^{11}}{-1} x^{-1}$$

- calculer $\mu = a_{q-1}^{11}$

- calculer $U(x)$ à partir des relations des récurrences (3.7) et (3.8)

- une solution du système (3.1) devient

$$Y(x) = \exp\{q_1(\frac{1}{x})\}x^\mu U(x)$$

fin début.

Remarque.3.2 : Pour calculer une autre solution linéairement indépendante avec celle calculée par cette procédure, il suffit de faire d'abord une permutation $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sur le système (3.1). Ensuite, nous réappliquons la même procédure sur le système différentiel obtenu.

Exemple : Construisons une solution du système différentiel

$$\frac{dY}{dx} = A(x) Y(x) = x^{-4} \begin{bmatrix} 2+x+x^2 & 2x+2x^2 \\ 2x^2 & 1+3x+3x^2 \end{bmatrix} Y(x)$$

Puisque la matrice $A_0 = A(0) = \text{diag}(2,1)$ est sous forme "Forme.a", alors pour calculer une solution de ce système, il suffit d'utiliser la procédure précédente. Dans cet exemple, on doit varier $i = 0, 1, 2$ (parce que, dans ce cas, $q = 4$).

Pour $i=0$, on a :

$a_0^{21} = 0$ alors i devient 1 et on recommence la boucle de nouveau.

Pour $i=1$, on a :

$a_1^{21} = 0$ alors i devient 2 et on recommence la boucle de nouveau.

Pour $i=2$, on a :

$a_2^{21} = 2 \neq 0$. Faisons le changement de variable

$$\zeta_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$A(x) := \zeta_2^{-1} A \zeta_2 - \zeta_2^{-1} \frac{d\zeta_2}{dx} = x^{-4} \begin{bmatrix} 2 + x + x^2 + 4x^3 + 4x^4 & 2x + 2x^2 \\ 4x^3 + 4x^4 - 12x^5 - 8x^6 & 1 + 3x + 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 \end{bmatrix}.$$

D'où, une solution du système différentiel associé à cette matrice $A(x)$ est donnée par :

$$Y(x) = \exp\left[q\left(\frac{1}{x}\right) \right] x^\mu U(x)$$

avec

- $q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0^{11}}{-3} x^{-3} + \frac{a_1^{11}}{-2} x^{-2} + \frac{a_2^{11}}{-1} x^{-1} = \boxed{\frac{-2}{3} x^{-3} - \frac{1}{2} x^{-2} - x^{-1}}$

- $\mu = a_3^{11} = 4$

- $U(x)$ est un vecteur série formelle calculé à partir des relations de recurrences (3.7) et (3.8).

Par suite, une solution $Y(x)$ du système différentiel initial est égale à

$$Y(x) = \exp\left\{ \frac{-2}{3} x^{-3} - \frac{1}{2} x^{-2} - x^{-1} \right\} x^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x^2 & 1 \end{bmatrix} U(x).$$

On a terminé complètement l'étude du premier cas (A_0 est de la forme "Forme.a"), il nous reste à traiter le cas où A_0 est de la forme "Forme.b" c'est-à-dire la matrice A_0 est formée d'un seul bloc de Jordan. Ceci s'aborde dans le paragraphe suivant.

4. CAS OÙ A_0 EST FORMÉE D'UN SEUL BLOC DE JORDAN

Dans ce paragraphe, nous supposons que notre système est de la forme

$$(4.1) \quad \frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) = x^{-q} \{ A_0 + x A_1 + x^2 A_2 + \dots \} Y(x)$$

où

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}.$$

Comme on l'a déjà dit une solution d'un tel système peut s'exprimer comme suit :

$$(4.2) \quad Y(x) = \exp\left\{q\left(\frac{1}{t}\right)\right\} t^\mu U(t)$$

où

- t est une variable liée par x par une ramification de la forme $x = t^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$),
- μ est une constante complexe,
- $q\left(\frac{1}{t}\right)$ est un polynôme en $\frac{1}{t}$ sans terme constant de degré au plus $2q-2$,
- $U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}$ et les $U_i(t)$, $i=1,2$, sont dans $\mathbb{C}((t))$.

Dans ce paragraphe, nous proposons une technique pour construire une solution $Y(x)$ de système sans le mettre sous une forme *Super-irréductible* [Hila87]. L'idée consiste à effectuer des transformations inversibles sur (4.1) de manière à obtenir à la fin un système différentiel sous la forme (3.1) (voir paragraphe 3). Ceci étant fait, on peut donc construire, à l'aide de la procédure du paragraphe 3, une solution $Y(x)$. En effet, Pour réaliser ce travail, on commence à noter

$$A(x) = x^{-q} \begin{bmatrix} a^{11}(x) & a^{12}(x) \\ a^{21}(x) & a^{22}(x) \end{bmatrix}$$

avec

$$a^{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij} x^k, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \text{ et } a_k^{ij} \in \mathbb{C}.$$

D'après la structure de A_0 et avec ces notations, on a :

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_0^{11} & 1 \\ 0 & a_0^{11} \end{bmatrix}.$$

Si $a_0^{11} \neq 0$ alors effectuons sur le système (4.1) le changement de variable

$$(4.3) \quad Y(x) = \exp\left\{ \frac{a_0^{11}}{1-q} x^{1-q} \right\} Z(x).$$

Nous obtenons

$$(4.4) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = x^{-q} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & a_1^{22} \end{bmatrix} + x^2 A_2 + \dots \right\} Z(x).$$

Maintenant, suivant que a_1^{21} soit nul ou non, nous transformerons le système (4.4), soit en un nouveau système tel que la nouvelle matrice A_0 admette deux valeurs propres distinctes auquel cas une solution sera déterminée par le paragraphe 3, soit de diminuer l'ordre polaire q d'une unité. La proposition suivante fait le travail.

Proposition.4.1 [Hila87] :

- (i) Si $a_1^{21} \neq 0$ alors la matrice $S(x) = \text{diag}(1, x^{1/2})$ transforme le système (4.4) en un nouveau système tel que sa matrice A_0 possède deux valeurs propres distinctes $\pm 2\sqrt{a_1^{21}}$.
- (ii) Si $a_1^{21} = 0$ alors la matrice $D(x) = \text{diag}(1, x)$ transforme (4.4) en un nouveau système ayant $q-1$ comme ordre polaire.

Preuve : (i) La ramification $x = t^2$ change (4.4) en un nouveau système de la forme

$$\frac{dY}{dt} = B(t) Y(t) \quad \text{avec} \quad B(t) = 2t A(t^2).$$

Appliquons sur ce système la transformation

$$Y(t) = S(t^2) Z(t).$$

On obtient

$$\frac{dZ(t)}{dt} = C(t) Z(t) = t^{-(2q-2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \right\} Z(t)$$

où

$$C(t) = S^{-1}(t^2) B(t) S(t^2) - S^{-1}(t^2) \frac{dS(t^2)}{dt}.$$

Faisons le calcul de la matrice C_0 , on trouve que

$$C_0 = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $a_1^{21} \neq 0$ alors la matrice C_0 admet deux valeurs propres distinctes $\pm 2\sqrt{a_1^{21}}$. Ceci prouve la partie (i).

(ii) La matrice $D(x)$ change le système (4.4) en un nouveau système de la forme

$$(4.5) \quad \frac{dY(x)}{dx} = \left\{ D^{-1}A(x) D - D^{-1} \frac{dD}{dx} \right\} Y(x).$$

Par un simple calcul de $D^{-1}A(x) D - D^{-1} \frac{dD}{dx}$, nous obtenons :

$$D^{-1}A(x) D = x^{-(q-1)} \{A_0 + x^2A_1 + \dots\} \quad \text{et} \quad D^{-1} \frac{dD}{dx} = x^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où, l'équation (4.5) devient

$$\frac{dY(x)}{dx} = x^{-(q-1)} \left\{ (A_0 + xA_1 + \dots) - x^{q-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} Y(x).$$

Donc ce système a comme ordre polaire $(q-1)$. Ceci achève la démonstration de (ii). ■.

Remarque.4.1 : Si chaque fois, on obtient un système différentiel ayant A_0 nilpotente et vérifie la condition (ii) de cette proposition, nous arrivons à la fin à un système différentiel ayant $q=1$. C'est le cas d'une singularité régulière que l'on sait résoudre parfaitement (voir paragraphe 3 du chapitre II).

Résumons ce paragraphe par la procédure suivante :

5. EXEMPLE : équation d'Airy

Dans ce paragraphe, nous voulons chercher, par la méthode développée précédemment, une solution, au voisinage de l'infini, de l'équation d'Airy

$$(5.1) \quad \frac{d^2y(x)}{dx^2} - x y(x) = 0 \quad \text{où } y(x) \text{ est une fonction scalaire de } x.$$

En réalité, une solution de cette équation, au voisinage de l'infini, peut être bien sûr construite à l'aide de la théorie de l'intégrale de Laplace [Waso65] ou par le logiciel *DESIR* construite par l'équipe du Calcul Formel de Grenoble [DDDT82].

D'abord, on a vu (voir l'introduction) qu'on peut transformer, par la transformation (1.3), l'équation (5.1) au système différentiel linéaire suivant :

$$(5.2) \quad \frac{dY(x)}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{bmatrix} Y(x) \quad \text{où } Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ \frac{dy(x)}{dx} \end{bmatrix}.$$

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés par l'étude des systèmes différentiels linéaires au voisinage de l'origine. Au contraire ici, notre domaine d'étude est un voisinage de l'infini . Pour cela, on fait d'abord, le changement $t = x^{-1}$. Donc, (5.2) devient le système

$$(5.3) \quad \frac{dY(t)}{dt} = t^{-3} \begin{bmatrix} 0 & -t \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y(t) .$$

Pour obtenir un système différentiel linéaire de la forme "**Forme.b**", il suffit d'effectuer sur (5.3) le changement de variable

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Z(t),$$

on trouve

$$(5.4) \quad \frac{dZ(t)}{dt} = t^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix} Z(t).$$

Par conséquent, la procédure "**Calcul-d'une-solution-Forme.b**" nous permet de calculer une solution de ce système au voisinage de $t = 0$. En suivant bien les instructions de cette procédure, on constate que

$$q = 3 \quad \text{et} \quad A(t) = x^{-3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ c'est-à-dire } a_1^{21} = 1 \neq 0.$$

Donc, on doit faire la ramification $t = \tau^2$. On obtient le système

$$\frac{dZ(\tau)}{d\tau} = \tau^{-5} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2\tau^2 & 0 \end{bmatrix} Z(\tau).$$

Sur ce système, nous faisons la transformation

$$Z(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} U(\tau).$$

Nous aurons

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \tau^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -\tau^3 \end{bmatrix} U(\tau).$$

Effectuons sur ce système le changement constant

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} V(\tau).$$

On obtient

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} = \tau^{-4} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \tau^3 \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \right\} V(\tau).$$

Ce système est de la forme "**Forme.a**". Donc, nous appliquons la procédure du paragraphe 3 pour calculer une solution au voisinage de $\tau = 0$. D'où, une solution de ce système est donnée par

$$V(\tau) = \exp \{-2/3 \tau^{-3}\} \tau^{-1/2} W(\tau)$$

où $W(\tau) = \begin{bmatrix} W_1(\tau) \\ W_2(\tau) \end{bmatrix}$ est un vecteur série formelle qui se détermine par les formules de récurrences (3.7) et (3.8). Par conséquent, une solution du système (5.2) est

$$Y(x) = \exp \{-2/3 x^{3/2}\} x^{1/4} \begin{bmatrix} x^{-1/2} & -x^{-1/2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(x^{-1/2}) \\ W_2(x^{-1/2}) \end{bmatrix}.$$

D'où, une solution, au voisinage de $x = \infty$, de l'équation d'Airy (5.1) est donnée par

$$y(x) = \exp \{-2/3 x^{3/2}\} x^{-1/4} \{ W_1(x^{-1/2}) - W_2(x^{-1/2}) \}.$$

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés par la résolution des systèmes différentiels linéaires de dimension deux. Pour cela, nous avons développé une méthode de résolution en se basant sur l'approche directe proposée par Turrin [Turr55]. Cette dernière a consisté la mise en oeuvre d'un algorithme permettant la construction d'une manière directe une matrice fondamentale des solutions du système (1.1) au voisinage d'une singularité.

Dans le paragraphe 3, nous avons vu que les propositions 3.1 et 3.2 forment l'étape de base de notre algorithme parce que si la matrice A_0 du système (1.1) est formée d'un seul bloc de Jordan, nous transformons (voir la proposition 4.1) le système différentiel initial en un nouveau système du même type et tel que la nouvelle matrice A_0 ait deux valeurs propres distinctes.

La méthode nous a permis de construire une solution de l'équation d'Airy (5.1) au voisinage de l'infini.

La généralisation de la méthode, pour les systèmes différentiels linéaires de dimensions ≥ 3 , n'est pas, à présent, un problème facile.

CONCLUSION GENERALE

" L'homme prospère est comme l'arbre : il est entouré tant qu'il est couvert de fruits; Mais sitôt les fruits tombés, tous s'éloignent à la recherche d'un arbre meilleur "

CONCLUSION GENERALE :

Dans cette thèse, nous avons étudié les solutions formelles d'un système différentiel linéaire ordinaire, dans un voisinage de l'origine de C , de la forme suivante :

$$(E.1) \quad \frac{d Y(x)}{dx} = A(x) Y(x) = x^{-q} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right\} Y(x)$$

où x est une variable complexe, les A_k sont des matrices carrées, q est un entier et Y est un vecteur colonne de n composantes. Une matrice fondamentale de solutions formelles de ce système, au voisinage de l'origine, s'écrit sous forme

$$(E.2) \quad \Phi(x) = S(x^{1/m}) x^R \exp\{ Q(x^{-1/m}) \}$$

avec $Q(x^{-1/m}) = Q_h x^{-h/m} + Q_{h-1} x^{-(h-1)/m} + \dots + Q_1 x^{-1/m}$ et Q_i ($1 \leq i \leq h$) sont des matrices carrées diagonales à coefficients dans C et h est un entier $\leq m(q-1)$. L'ordre (h/m) joue un rôle très important dans l'étude du comportement asymptotique de solutions.

H.L. Turriffin et W. Wasow ont proposé une méthode algorithmique pour calculer $\Phi(x)$. Cette méthode coûte chère en calcul. Devant ce fait, nous avons proposé une nouvelle approche algorithmique pour trouver $\Phi(x)$. Cette approche a l'avantage d'utiliser des transformations simples et moins coûteuse en calcul. De plus, notre approche permet de donner un algorithme constructif (programmable) grâce auquel le degré h du polynôme $Q(x^{-1/m})$ défini en (E.2) se calcule à partir des coefficients A_i , $0 \leq i < n(q-1)$, de la matrice $A(x)$.

Vu l'importance pratique des systèmes différentiels de dimension deux, nous avons proposé, dans le dernier chapitre, une méthode (programmable) inspirée de l'approche générale pour calculer les solutions au voisinage d'une singularité

Une suite naturel de nos travaux est l'étude des solutions du système différentiel linéaire ordinaire dépendant des paramètres, de la k -sommabilité et la *multisommabilité*. D'autre part, il sera intéressant d'analyser les méthodes qui combinent notre approche

CONCLUSION GENERALE

algorithmique avec l'aspect calcul numérique. Nous voulons comparer notre approche avec la forme "Super-irréductible" de A. Hilali et la forme "Rationnelle" de R. Sommeling : travail récent qui vient d'être effectué. Nous aimerions trouver des méthodes probabilistes pour classifier les systèmes différentiels du type (E.1) ayant besoin des transformations Déduire-zéro-en-bas. Finalement, nous voudrions voir, dans un proche avenir, quelles sont les modifications à apporter à notre approche si on applique des techniques des Forme normale du Poincaré-Dulac.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE :

- [Abba93] Abbas H : *Calcul de l'ordre exponentiel d'un système différentiel linéaire au voisinage d'une singularité : Nouvelle Aproche Algorithmique*. RR909 -M-IMAG- (Février 1993).
- [Arno71] Arnold V.I : *On matrices depending on parameters*. Russ. Math.Surv, 26 N° 2 (1971). p.29-43.
- [Arno72] Arnold V.I : *Lectures on bifurcations in versal families*. Russian Math. Surveys. 27 (1972).p. 54-123.
- [Arno74] Arnold V.I : *Equations différentielles ordinaires*. Editions MIR.Moscou (1974).
- [Arno80] Arnold V.I : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Editions MIR.Moscou (1980).
- [Baid89] Baider A : *Unique normal forms for vector fields and Hamiltonians*. J. Diff. Equ.78 (1989).p. 33-52.
- [BaJL79] Balser W, Jurkat W.B, Lutz D.A : *A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I, II*. Funk. Ekva. 22 (1979).
- [BaJL80] Balser W, Jurkat W.B, Lutz D.A : *Invariants for reducible systems of meromorphic differential equations*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 23 (1980). p. 163-186.
- [BaJL81] Balser W, Jurkat W.B, Lutz D.A : *On the reduction of connection problems for differential equations with irregular singular point to ones with regular singularities, I*. SIAM J. Math. Anal. 12 (1981). p. 691-721
- [BaJL82] Balser W, Jurkat W.B, Lutz D.A : *Transfer of connection problems for meromorphic differential equations of rank $r \geq 2$ and representations of solutions*. J. Math. Anal. Appl. 85 (1982). p. 488-542.

BIBLIOGRAPHIE

- [BaJL84] Balser W, Jurkat W.B, Lutz D.A : *Characterization of first level formal solutions by means of growth of their coefficients*. J. Diff. Equ. 51 (1984). p. 48-77.
- [Bals85] Balser W : *A constructive existence proof for the first level formal solutions of meromorphic differential equations*. Hiroshima. Math. J. Vol 15 (1985). p. 411-428.
- [Bark89] Barkatou M.A : *Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe*. Thèse INP-Grenoble. (1989).
- [BaSt90] Bacciotti A, Stefani G : *Homogeneous vector fields, Stability, and Lie Algebras*. Bollettino U. M. I. (7) 4-B (1990).p. 245-253.
- [BaVa83] Babbitt G, Varadarajan V.S : *Formal reduction theory of meromorphic differential equations : A group theoretic view*. Pacific. J. of math. 109.Nº.1 (1983). p. 1-80.
- [BBRS91] Balser W, Braaksma B.L.J, Rami J.P, Sibuya Y : *Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations*. Asymptotic Analysis (1991).p. 27-45.
- [Birk09] Birkhoff G.D : *Singular points of ordinary differential equations*. Trans.A.M.S. 10 (1909). p. 463-470.
- [Birk11] Birkhoff G.D : *General theory of irregular linear difference equations*.Trans.A.M.S. 12 (1911). p. 243-284.
- [Birk13] Birkhoff G.D : *Equivalent singular points of ordinary linear differential equations*. Math.Ann. 74 (1913). p. 134-139.
- [Birk16] Birkhoff G.D : *Infinite products of analytic matrices*. T.A.M.S. 17 (1916). p. 386-404.
- [Birk30] Birkhoff G.D : *Formal theory of irregular linear difference equations*. Acta. Math. 54 (1930). p. 205-246.
- [Blum90] Bluman G : *A reduction algorithm for an ordinary differential equation admitting a solvable Lie groupe*. SIAM J. Appl. Math. (6) 50 December (1990) p. 1689-1705.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bylo70] *On the reduction of a system of linear equations to diagonal form.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) 89 (1970) .p. 51-59.
- [Chen90] Chen G : Solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires homogènes. Thèse, Université de Grenoble I. (1990).
- [Chen62] Chen K.T : *Decomposition of differential equations.* Math. Ann. 146 (1962). p. 263-278.
- [Chen92] Chenggui H : *Solutions of the matrix equation $X^m + A_1X^{m-1} + \dots + A_m = 0$.* Acta Mathematica Sinica, New Series 8 N°3 (1992). p. 225-235.
- [CoLe55] Coddington E.A, Levinson N : *Theory of ordinary differential equations.* Mac.Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [Cott11] Cotton M : *Les solutions asymptotiques des équations différentielles.* Ann. Ec. Norm. (3) Octobre (1911).
- [DDDT82] Della-Dora J, Dicrescenzo C, Tournier E : *An algorithm to obtain formal solutions of linear homogenous differential equations at an irregular singular point.* Lectures Notes in Computer Science (Springer 1982).
- [DDTo81] Della-Dora J, Tournier E : *Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers.* RR N° 239-IMAG (Février 1981).
- [Deni85] Denisov I.V : *Differential equations with a finite-meromorphic operator coefficient in Banach space.* Soviet Math. Dokl. 31 N° 3 (1985).p. 569-572.
- [Deli70] Deligne P : *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Lectures notes in Mathematics 163 (1970).
- [Diet78] Dietrich V : *Zur reduktion von linearen differentialgleichungssystemen.* Math. Ann. 237 (1978), p.79-95.
- [Evan54] Evans R.L : *Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954).p. 89-92.
- [FeSN67] Feshchenko S. F, Shkil N. I, Nikolenko L. D : *Asymptotic methods in the theory of linear differential equations.* New-York (1967).

BIBLIOGRAPHIE

- [Flis74] Fliss M : *Sur divers produits de séries formelles*. Bull. Soc. math. France. 102 (1974). p. 181-191.
- [Frie80] Friedland S : *On pointwise and analytic similarity of matrices*. Isr. Journal of Mathematics. 35. N° 1-2 (1980). p. 89-108.
- [Gant59] Gantmacher F : *Theory of matrices*. Vol. I, II. Chesela, New-York (1959).
- [GaPS92] Galiev V.I, Polupanov A.F, Shparlinski I.E : *On the construction of solutions of systems of linear ordinary differential equations in the neighborhood of a regular singularity*. J. of Comput. and Appl. Math. 39 (1992).p. 151-163.
- [Galin82] Galin D.M : *Versal deformations of linear Hamiltonian systems*. Amer. Math.Soc. Transl.(2). 118 (1982).p. 1-12.
- [GeLe73] Gerard R, Levelt A : *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires*. Ann. Inst. Fourier. 23 Fasc. 1 (1973). p. 157-195.
- [Gil92] Gil I : *Calcul de la forme de Jordan d'une matrice à coefficients rationnels*. RR882-M-IMAG- (avril 1992).
- [GoVL90] Golub G.H, Van Loan C.F : *Matrix computations*. Edition Johns Hopkins (1990).
- [GuMa85] Gurarri V.P, Matsaev V.I : *Stokes multipliers for systems of linear ordinary differential equations of first order*. Soviet. Math. Dokl. 31 N° 1 (1985).p. 52-56.
- [Hila82] Hilali A : *Contribution à l'étude des points singuliers de systèmes différentiels linéaires*. Thèse de 3° cycle, Université de Grenoble I (1982).
- [Hila87] Hilali A : *Solutions formelles de systèmes différentiels au voisinage d'un point singulier*. Thèse d'Etat, Université de Grenoble I, (1987).
- [Hila87] Hilali A : *On the algebraic and differential Newton-Puiseux polygons*. J. of Symbolic Computation. 4(3) (December-1987).p. 335-349.
- [HiWa87] Hilali A, Wazner A : *Formes super-irréductibles des systèmes différentielles linéaires*. Num. Math. 50 (1987).p. 429-449.

BIBLIOGRAPHIE

- [Horn92] Horn H : Zur der linearer differentialgleichunden mit einer unablängidenveränderlichen. II. Math. Annalen 40 (1892).p. 527-550
- [Huku40] Hukuhara M : *Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier.* Ann. Math. pura. Appl. 19 (1940). p. 35-44.
- [Huku54] Hukuhara M : *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques et contenant un paramètre.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, I. 7 (1954).p. 69-85.
- [Ince56] Ince E.L: Ordinary differential equations. Dover Publications. New-York, Inc (1956).
- [Immi83] Immink G.K : Asymptotics of analytic difference equations. Thèse de l'Université de Groningen. (1983).
- [Ishi85] Ishimura R : *Sur les équations différentielles dans l'espace des polynômes et dans l'espace des séries formelles.* Mem. of the Faculty of science, Kyush Uni. Ser. A, (2) 37 (1983). p. 87-97.
- [Ishi85] Ishimura R : *Existence local de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini.* Ann. Ins. Fourier. Grenoble. 35, 2 (1985).p. 49-57.
- [Iwan58] Iwano M : *Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire linéaire du nième ordre.* J. Fac. Sci. Univ. Tokoy 7, N°.1 (1958), p.343-351.
- [Jaco51] Jacobson N : *Completely reducible Lie algebras of linear transformations.* Proc. of Amer. Math. Soc. Vol. 2 (1951). p. 105-133.
- [JuLu71] Jurkat W.B, Lutz D.N : *On the order of solutions of analytic linear differential equations.* Proc. London. Math. Soc.(3) 22 (1971).p. 465-482.
- [JuLP76] Jurkat W.B, Lutz D.N, Peyerimhoff : *A Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphe linear differential equations : Part I.* J. Math. Anal.Appl. 53 (1976).p. 438-470; Part II. Houston J. Math. 2 (1976).p. 207-238.

BIBLIOGRAPHIE

- [KåPo89] Kågström B, Poromaa P : *Distributed block algorithms for the triangular Sylvester equation with condition estimator*. Hypercube and Distributed Computers. F. André and J.P. Verjus (Editors). Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland). (1989). 233-246.
- [Katz70] Katz N : *Nilpotent connections and the monodromy theorem*. IHES. Publ. Math. 39 (1970). p. 176-232.
- [Kita83] Kitagawa K : *L'irregularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1*. J. Math.Kyoto. Univ.23-3 (1983). p. 427-440.
- [Kocç84] Kocçak.H : *Normal forms and versal deformations of linear hamiltonian systems*. Diff.Equ.51 (1984).p.359-407.
- [Kohn79] Kohno M : *An extended Airy function of the first kind*. Hiroshima Math. J. 9 (1979).p. 473-489.
- [Kohn84] Kohno M : *Derivatives of stokes multipliers*. Hiroshima Math.J. 14 (1984).p. 247-256
- [KoOH97] Kohno M, Ohkohchi S : *On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter*. Hiroshima Math.J. 9 (1979).p. 747-767.
- [KoOK79] Koho M, Ohkonchi.S, Kohmoto T : *On full uniform simplification of even order linear differential equations*. Hiroshima Math. J. 9 (1979).p. 747-767
- [KoYo84] Koho M, Yokoyama T.A : *A central connection problem for a normal system of linear differential equations*. Hiroshima Math. J. 14 (1984).p. 257-263.
- [KoRB74] Kogan V.I, Rofe-Beketov F.S : *On the question of the deficiency indices of differential operators with complex coefficients*. Proc.R.S.E, (A), 72, 24, 1973/74.p. 281-298.
- [Kost59] Kostant B : *The principal three dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie groupe*. Amer. Jour.of Math. 81 (1959).p. 973-1032.
- [Kost63] Kostant B : *Lie groupe representations on polynomial rings*. Amer. J .Math. 85 (1963). 327-404.

BIBLIOGRAPHIE

- [KrTo91] Krein S.G, Tovbis A.I : *Linear singular differential equations in finite-dimensional spaces and Banach spaces*. Leningrad Math. J, Amer. math. Soc. (1991).p.931-985.
- [KuOs87] Kucherenko V.V, Osipov V : *Exact and asymptotic solutions of systems with turning points*. Math. USSR-Izv. 92 (1987).p. 355-370.
- [KuTr78] Kung H. T, Traub J. F : *All algebraic functions can be computed fast*. J. Association for Computing Machinery. (2) April 25 (1987).p. 245-260.
- [Lanc64] Lancaster.P : *On eigenvalues of matrices dependent on a parameter*. Numerische Mathematik. 6 (1964).p. 377-387.
- [Lanc70] Lancaster.P : *Explicit solutions of linear matrix equations*. SIAM Review. (4) 12 October (1970).p. 544-566.
- [Lang34] Langer R.E : *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to the Stokes phenomena*. Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934).p. 545-582.
- [Leav58] Leavitt W.G : *A normal form for matrices whose elements are holomorphic functions*. Duke. Math. J. 15 (1958).p. 463-472.
- [Lee69] Lee R.Y : *On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point*. J. Math. Anal. and Applic. 27 (1969).p. 501-510.
- [Leun76] Leung A : *A doubly asymptotic existence theorem and application to order reduction*. Proc. London. Math. Soc. (3) 33 (1976).p.151-176.
- [Leve75] Levelt A.H.M : *Jordan decomposition of class of singular differential operators*. Arkiv for Matematik 13 (1975). p. 1-22.
- [LoRi91] Loday-Richaud M : *Classification méromorphe local des systèmes différentiels linéaires méromorphes : Phénomène de Stokes et applications*. Thèse d'Etat de l'Université de Paris-Sud (1991).
- [Lu76] Lu Y.C : *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory*. Springer-Verlag. New York. (1976).

BIBLIOGRAPHIE

- [Lutz67] Lutz D.A : *On systems of linear differential equation having regular singular solutions.* J. Diff. Equ.3 (1967) p.311-322.
- [Lutz67] Lutz D.A : *Some characterizations of systems of linear differential equations having regular singular solutions.* Trans. Amer. Math.Soc. 126 (1967).p. 427-441.
- [Lutz69] Lutz D.A : *Asymptotic behavior of solutions of linear systems of ordinary differential equations near an irregular singular point.* Amer.J. Math. 91 (1969).p. 95-105.
- [Lutz70] Lutz D.A : *Perturbations of matrix differential equations in the neighbourhood.* Funk. Ekva. 13 (1970).p. 97-107.
- [Lutz72] Lutz D.A : *On the reduction of linear differential systems.* Pacif. J. of Math. 42. N° 1 (1972).p. 153-164.
- [LuSc85] Lutz D.A, Schäfke.R : *On the identification of formal invariants for singular differential equations.* Linear Algedra Appl. 72 (1985).p. 1-46.
- [Ma66] Ma E. C : *A finite series solution of the matrix equation $AX-XB = C$.* SIAM J. Appl. Math. (3) 14 May (1966).p. 490-495.
- [MacD33] MacDuffee C.C : *The theory of matrices.* Chelsea. New York (1933)
- [Malg70] Malgrange B : *Sur les points singuliers des équations différentielles.* L'enseignement Math. 20 (1970). p. 147-176.
- [Malg79] Malgrange B : *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers.* Equations différentielles et systèmes de Pfaff. Lectures Notes 712. Springer Verlag (1979).
- [Malg81] Malgrange B : *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières.* Preprint Institut. Fourier, Grenoble, (1981).
- [Malm73] Malmquist J : *Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point d'indétermination.* Acta. Math. 73 (1940).p. 87-129.

BIBLIOGRAPHIE

- [Masa59] Masani P : *On a resultat of G.D.Birkhoff on linear differential systems*. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959). p. 696-698.
- [Miya82] Miyake M : *On the irregularity for general system of differential equations in the complex domain*. TR-Nagoya University (Japan) N° 7 (1982).
- [Moro42] Morozov W.W : *On a nilpotent element of a semi-simple Lie algebra*. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 36 (1942). p. 83-86
- [Mose60] Moser J : *The order of singularity in Fuch's theory*. Math.Zeitschr.72 (1960). p.379-398.
- [MoVL78] Moler C, Van Loan C : *Nineteen dubious ways to compute the exponential of matrix*. SIAM Review. 20. N° 4 (October 1978),p.801-863.
- [Nish65] Nishimoto T : *On matching methods for linear ordinary differential equation containing a parameter, I,II*. Ködai Math. Sem. Rep. 17 (1965). p. 307-328; p.61-86.
- [Ohko85] Ohkohchi S : *Uniforme simplification in a full neighborhood of a turning point*. Hiroshima Math.J. 15 (1985).p. 493-580.
- [Okub63] Okubo K : *A grobal representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations*. J. Math. Soc. Japan 15 (3) (1963). p. 268-288.
- [Ozel87] Ozello P : *Calcul exacte des formes de Jordan et de Frobenius d'une matrice*. Thèse, Université de Grenoble I (1987).
- [Poin85] Poincaré H : *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*. Amer. J. Math. 7 (1885).p. 203-258.
- [Poin86] Poincaré H : *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*. Acta. Math. 8 (1886) 295-344.
- [Rami81] Ramis J.P : *Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*. Publ. IRAM Strasbourg (1981).
- [Rami84] Ramis J.P : *Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*. Memoirs of the Amer. Math. Soc. 48 N° 296, March (1984).

BIBLIOGRAPHIE

- [Rami85] Ramis J.P : *Equations différentielles : Phénomène de Stokes et resommation*. C.R.Acad.Sc.Paris. t.301. Série 1. N° 4 (1985).
- [RiJu91] Richard-Jung F : *Le phénomène de Stokes en image*. RT-65-IMAG. Avril 1991.
- [Robb80] Robba P : *Lemmes de Hensel pour les operateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles*. L'Enseignement Math. XXVI. Fasc.3-4.(1980) p. 279-311.
- [Roche80] Roche J.R : *Application des approximants de Padé au calcul de l'exponentielle d'une matrice*. Thèse INP-Grenoble (1980).
- [Sauv86] Sauvage L : *Sur les solutions régulières d'un systèmes d'équations différentielles*. Ann.de l'Ecole Norm. Sup.3 (1886). p. 391-404
- [Schä84] Schäfke R : *A connection problem for a regular and irregular singular point of complex ordinary differential equations*. SIAM J. Math. Anal. 15 (1984).p. 253-271.
- [ScVo90] Schäfke R, Volkmer H : *On the fundamental solution of differential equation depending on a parameter*. Funk. Ekva. 33 (1990).p. 1-17.
- [Seif87] Seifert P : *Computational experiments with algorithms for stiff ODEs*. Computing 38 (1987) .p. 163-176.
- [Sibu58] Sibuya Y : *Sur la réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires contenant un paramètre*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (1), 7 (1958). p. 527-540.
- [Sibu62] Sibuya Y : *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*. Funkcial. Ekvac.4 (1962). p. 83-113.
- [Siro71] Sirovich L : *Technique of asymptotic analysis*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag. (1971).
- [Siro88] Sirovich L : *Introduction to Applied Mathematics*. Springer-Verlag. (1988).
- [Somm93] Sommeling R : *Characteristic classes for irregular singularities*. Thèse Nederlands (1993).

BIBLIOGRAPHIE

- [Thom90] Thomann J : *Resommation des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières*. Numer.Math.58 (1990). p. 503-535.
- [Tour87] Tournier E : *Solutions formelles d'équations différentielles*. Thèse d'Etat de l'Univesité de Grenoble I. (1987).
- [Tovb85] Tovibs A.I : *On systems of linear differential equations with a small parameter on the derivative*. Soviet Math. Dokl. 32 N° 3 (1985).p. 748-751.
- [Tovb85] Tovibs A.I : *On a method of constructing Stokes matrices*. Soviet Math. Dokl. 35 N° 1 (1987).p. 202-206.
- [Trji34] Trjitzinsk W.J : *Analytic theory of linear differential equations*. Acta. Mathematica. Vol.62 (1934). p. 427-441.
- [Turr50] Turrittin H.L : *Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation*. Trans. Amer. Math. Soc.68. (1950). p. 304-329.
- [Turr55] Turrittin H.L : *Convergent solution of ordinary homogenous differential equation in the neighbourhood of a singular point*. Acta Math. 93 (1955).p. 27-66.
- [Turr63] Turrittin H.L : *Reduction of ordinary differential equations to Birkhoff Canonical form*. Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963).p. 485-507.
- [Vara68] Varadarajan V.S : *On the ring of invariant polynomials on a semi-simple Lie algebra*. Amer. J. Math. 90 (1968). p. 308-317.
- [Vara84] Varadarajan V.S : *Lie goupes, Lie algebras, and their representations*. Springer-Verlag (1984).
- [Vent66] Venti R.J : *Linear normal forms of differential equations*. J. Diff. Equ. 2 (1966) .p. 182194.
- [Volev60] Volevic L.P : *On general systems of differential equations*. Dokl. Acad. Nauk SSSR= Soviet. Math. Dokl. 1 (960). p. 458-461.
- [Wage83] Wagenführer E : *On the invariants measuring the irregularity of differential equations at a singular point*. Analysis. 3 (1983). p. 369-384.

BIBLIOGRAPHIE

- [Wage84] Wagenführer E : *On the regularity of systems of differential equations at a singular point.* Analysis. 4 (1984). p. 364-298.
- [Wata70-76] Watanabe S : *Formula manipulations solving linear ordinary differential equations (I and II).*I. Publ RIMS Kyoto univ.Vol. 6. (1970). p. 71-111. II. Publ RIMS Kyoto univ.Vol. 11. (1976). p. 297-337.
- [Waso61] Wasow W : *Turning point problems for systems of linear differential equations. Part I : The formal theory.* Comm. on Pure and Appl. Math. XIV. (1961). p. 657-673.
- [Waso62] Wasow W : *On holomorphically similar matrices.* J. Math. Anal.and Appl. 4 (1962). p. 202-206.
- [Waso65] Wasow W : *Asymptotic expansions for ordinary differential equation.* Interscience Publishers New-York (1965).
- [Waso66] Wasow W : *On the analytic validity of formal simplification of linear differential equation.* Funk. Ekva. 9 (1966). p. 83-91.
- [Waso77] Wasow W : *Arnold's canonical matrices and the asymptotic simplification of ordinary differential equation.* Linear. Alg. and App, 18 (1977).p. 163-170.
- [Waso85] Wasow W : *Linear Turning Point Theory.* Spring-Verlag New York Inc.(1985)
- [Wigg90] Wiggins S : *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.* Springer-Verlag (1990).
- [Wilk65] Wilkinson J.H : *The algebraic eigenvalue problem.* Oxford University Press. (1965).

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'Arrêté du 30 mars 1992 relatif aux Etudes doctorales

VU les rapports de présentation de

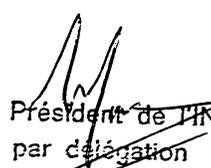
- . Madame DUVAL Anne , Professeur
- . Monsieur HILALI A. , Professeur

Monsieur ABBAS Hassane

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme
de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité
" Mathématiques Appliquées "

Fait à Grenoble, le 19 août 1993

/ BV.


Pour le Président de l'INPG
et par délégation
le Directeur de l'Ecole Doctorale
J.L. LACOUME



