



HAL
open science

Modélisation, simulation numérique et contrôle optimal de l'évolution de la configuration du plasma pour le Tokamak NET et pour la génération future de réacteurs de fusion

Fabienne Bourbon

► **To cite this version:**

Fabienne Bourbon. Modélisation, simulation numérique et contrôle optimal de l'évolution de la configuration du plasma pour le Tokamak NET et pour la génération future de réacteurs de fusion. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1993. Français. NNT: . tel-00343468

HAL Id: tel-00343468

<https://theses.hal.science/tel-00343468>

Submitted on 1 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

BOURBON Fabienne

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de l'**UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1**

Titre de la thèse :

**Modélisation, simulation numérique et contrôle optimal
de l'évolution de la configuration du plasma pour le Tokamak
NET et pour la génération future de réacteurs de fusion.**

soutenue le 25 Mars 1993

devant le jury composé de :

M. Patrick WITOMSKI, président
M. Jacques BLUM
M. Oreste De BARBIERI, rapporteur
M. François Xavier Le DIMET
M. Bernard SARAMITO, rapporteur

Thèse préparée au sein de l'équipe NET de Garching (Allemagne)

A mes parents

A Nathalie, Sandra,
Pierre et Vincent.

Je désire ici adresser de sincères remerciements à Monsieur J.BLUM pour l'enseignement de qualité et les conseils pertinents qu'il m'a prodigués durant mes années d'études en Mathématiques Appliquées et de préparation de thèse.

Je suis reconnaissante à Messieurs C.MAISONNIER, directeur du programme Fusion pour les Communautés Européennes, R.TOSCHI, directeur du projet NET de Garching, F.ENGELMANN et E.SALPIETRO, membres de l'équipe de direction de NET, de m'avoir permis d'entreprendre et de mener à bien ce travail de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur O.De BARBIERI de l'équipe NET, pour m'avoir fait découvrir le domaine de la physique des plasmas, m'avoir aidée et encadrée durant la préparation de cette thèse, et fait partager, avec patience et bonne humeur, ses connaissances et ses méthodes de travail.

Je remercie Messieurs P.WITOMSKI, F.X.Le DIMET et B.SARAMITO de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury.

Je remercie tous mes collègues de l'équipe NET de Garching pour leur accueil et en particulier P.LALOUSIS pour son aide précieuse, B.ESSER et G.STROHMAYER qui m'ont permis de disposer d'outils informatiques importants.

Résumé

La présente thèse traite de la modélisation, de la simulation numérique et du contrôle optimal de l'équilibre et de l'évolution de la configuration du plasma dans un Tokamak.

Dans le premier chapitre, on établit les équations aux dérivées partielles régissant le comportement du plasma dans un Tokamak.

Dans le deuxième chapitre, on résout tout d'abord le problème de l'équilibre du plasma par la méthode des éléments finis et un algorithme de Newton. On s'intéresse ensuite au problème du contrôle de l'équilibre : il s'agit de déterminer des courants dans les circuits du Tokamak de façon à ce que le plasma ait une configuration donnée. On introduit pour cela un Lagrangien, et on dérive un système d'optimalité que l'on résout par un algorithme de gradient conjugué. Trois exemples typiques illustrent cette deuxième partie.

Dans le troisième chapitre, on développe un modèle pour l'évolution de la configuration du plasma au cours d'une décharge. On résout ce problème par un algorithme de Newton; deux exemples de simulation numérique sont présentés.

Enfin dans le quatrième chapitre, on traite le problème du contrôle de l'évolution de la configuration du plasma. Il s'agit de déterminer des lois d'évolution pour les courants ou les tensions dans les circuits du Tokamak de manière à réaliser une évolution donnée de la configuration du plasma. Ce problème est résolu en introduisant un Lagrangien de manière analogue à ce qui est fait dans le deuxième chapitre. Enfin, on cherche une loi de feed-back de type PID qui asservisse la forme du plasma.

Mots clefs

Physique des plasmas - Fusion nucléaire

Tokamak

Contrôle optimal - Optimisation

Lagrangien

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : TOKAMAK - MODELE MHD

Introduction	p.1
I.Fusion et Tokamak	p.1
II.Equations fondamentales du modèle <i>MHD</i>	p.5
III.Equations pour le flux magnétique	p.11

CHAPITRE II : EQUILIBRE DU PLASMA - CONTROLE DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction	p.19
I.Equations	p.20
II.Formulation faible	p.21
III.Résolution du problème (\mathcal{P}'_E)	p.25
IV.Contrôle statique du bord du plasma par des courants externes	p.31
V.Résultats numériques	p.48

CHAPITRE III : EVOLUTION DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction	p.59
I.Le modèle physique	p.62
II.Résolution numérique du problème évolutif	p.73
III.Résultats	p.87

CHAPITRE IV : CONTROLE DE L'EVOLUTION DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction	p.97
I.Contrôle de l'évolution à chaque instant	p.99
II.Contrôle d'une décharge	p.111
III.Commande feed-back	p.126

ANNEXE 1	p.133
ANNEXE 2	p.135
BIBLIOGRAPHIE	p.137

INTRODUCTION

La thèse présentée ci-après concerne la modélisation, la simulation numérique et le contrôle optimal de l'évolution de l'équilibre du plasma pour le Tokamak *NET*.

Le Tokamak est un dispositif expérimental dont le but est de produire de l'énergie en contrôlant des réactions de fusion de noyaux de deutérium et de tritium (isotopes de l'hydrogène). En portant un mélange de deutérium et de tritium à de très hautes températures, on obtient un gaz ionisé appelé plasma.

Le plasma est maintenu en équilibre à l'intérieur de l'enceinte du Tokamak grâce à des courants dans des bobines externes. Il est important de contrôler la position du plasma dans cette enceinte car les hautes températures auxquelles est soumis le plasma, et l'intensité du courant plasma excluent tout contact avec les parois matérielles du Tokamak, sous peine de créer des dommages irréversibles. Ce contrôle est réalisé en calculant les courants des circuits du Tokamak de manière à optimiser la configuration du plasma.

Dans le premier chapitre, on construit un modèle pour l'équilibre axisymétrique du plasma. A partir des équations de la *MHD* et en faisant l'hypothèse de symétrie axiale, on écrit les équations satisfaites par le flux magnétique poloïdal $\psi(r, z, t)$ dans une section poloïdale du Tokamak :

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{sur l'axe } Oz \text{ et à l'infini} \\ L\psi = -\frac{\sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \sum_{n=1}^{N_c} j_m 1_{S_{c,m}} + \frac{1}{\mu_o} j_{pl,\varphi}(r, \psi, t) 1_{\Omega_p} \\ I_p = \int_{\Omega_p} j_{pl,\varphi}(r, \psi, t) dS \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\} \\ \mathcal{D} &= \{M \in \Omega_{cv}^i / \overline{P_a M} \cdot \overline{\nabla} \psi(M) < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \overline{\nabla} \psi(X) = \overline{0}\} \\ L. &= -\frac{1}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

où Ω_{cv} est l'ensemble des parois internes Ω_{cv}^i et externes Ω_{cv}^e de la chambre à vide, de conductivité σ_v . $S_{c,m}$ est le $m^{i\grave{e}me}$ circuit ($m = 1, \dots, N_c$) composé de bobines de champ poloïdal et

de leurs connexions, avec une densité de courant j_m homogène ; Ω_p est la région du plasma dans laquelle circule le courant plasma I_p défini à partir de la composante toroïdale de la densité de courant $j_{pl,\varphi}$; Ω_A est la région de la chambre à vide accessible au plasma et P_a est l'axe magnétique.

On dérive aussi des équations pour les circuits :

$$V_i = 2\pi \int_{S_{c,i}} q_i \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \sum_{k=1}^{N_c} \left[M_{ik} \frac{dI_k}{dt} + R_{ik} I_k \right] \quad i = 1, \dots, N_c$$

où M est la matrice des inductions mutuelles entre les parties non axisymétriques des circuits, et R est la matrice des résistances mutuelles.

Dans le deuxième chapitre, on traite le problème de l'équilibre du plasma, et pour cela on résout le système d'équations du premier chapitre, en discrétisant par une méthode d'éléments finis et en appliquant un algorithme de Newton.

Puis on résout le problème du contrôle de l'équilibre du plasma. Ce problème consiste à déterminer les courants dans les circuits de façon à ce que le plasma ait une configuration donnée. Pour cela, on cherche à minimiser une fonction-coût de la forme :

$$J(I, \psi) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_a} [\psi(M) - \psi(M_o)]^2 dl + \frac{1}{2} [\psi(S) - \psi_S]^2 + \frac{K}{2} \sum_{i=1}^m I_i^2$$

où Γ_a est le bord du plasma désiré et M_o un point particulier de Γ_a ; S est un point de la région du vide pour lequel on souhaite que le flux ait la valeur ψ_S ; le dernier terme représente le coût énergétique de la configuration.

Le problème de contrôle consiste à déterminer un ensemble de m courants et le flux magnétique poloïdal ψ tels que les équations d'état soient satisfaites et que la fonction-coût soit minimale. Pour résoudre ce problème, on introduit un Lagrangien et on dérive des équations pour l'adjoint du système, ainsi qu'une condition d'optimalité, qui constituent, avec les équations d'état, le système d'optimalité à résoudre.

La résolution se fait par une méthode quadratique séquentielle qui consiste à résoudre une suite de problèmes de contrôle avec des équations d'état non linéaires et une fonction-coût quadratique.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à l'évolution de l'équilibre du plasma. Une des caractéristiques d'un Tokamak est que la valeur du flux sur l'axe magnétique décroît

au cours de la décharge (les lois d'Ohm et de Faraday doivent donner le même champ électrique), et il est donc nécessaire de déterminer le champ du transformateur qui a pour effet de modifier la valeur du flux magnétique sans changer la configuration du plasma. On complète donc le modèle du premier chapitre par des équations traduisant la dynamique du système. On écrit la densité de courant plasma toroïdale comme :

$$j_{p1,\varphi} = i_p (r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}))$$

On dérive alors une équation pour le coefficient C_p à partir de l'expression de beta poloïdal ; une équation pour le coefficient C_f à partir des expressions du champ électrique sur l'axe magnétique (lois d'Ohm et de Faraday) ; une équation pour le courant plasma réduit $i_p = \mu_o I_p$ à partir de l'expression de la puissance dissipée dans le plasma.

On discrétise le système d'équations de manière implicite en temps et par une méthode d'éléments finis en espace, et on résout le problème discrétisé par un algorithme de Newton.

Dans le quatrième chapitre, on traite le problème du contrôle de l'évolution de l'équilibre du plasma. Dans le troisième chapitre les courants dans les circuits étaient donnés de façon empirique et l'évolution du plasma n'était pas contrôlée. Or il est nécessaire, pour des raisons essentiellement matérielles, de contrôler cette évolution.

Deux approches sont proposées : contrôler les courants dans les circuits de façon à optimiser la trajectoire du plasma sur un ensemble discret d'instant, ou alors contrôler les tensions aux bornes des circuits de façon à optimiser globalement l'évolution du plasma sur un intervalle de temps. Dans les deux cas, on résout un problème de contrôle pour des équations d'état non linéaires et une fonction-coût quadratique.

Les courants ou tensions obtenus par une de ces deux méthodes peuvent être utilisés pour réaliser une préprogrammation du système, mais lors du fonctionnement réel du Tokamak il peut être nécessaire d'ajuster ces courants ou tensions et dans la dernière partie de ce chapitre est décrit un principe de régulation par un feed-back *P.I.D.*

CHAPITRE I

TOKAMAK

MODELE MHD

Introduction

Le plasma constitue le quatrième état de la matière. Il est obtenu à partir de réactions de fusion de noyaux de deutérium et de tritium. Ces réactions de synthèse produisent de l'énergie et des recherches sont actuellement menées pour contrôler les réactions notamment grâce à des dispositifs expérimentaux tels que les Tokamaks.

Les équations gouvernant le comportement du plasma dans un Tokamak sont les équations de la *MHD* (magnétohydrodynamique) : équation du mouvement, équation de conservation de la masse, loi d'Ohm et équations de Maxwell. Dans ce chapitre on va définir ce que l'on appelle le flux magnétique poloïdal ψ , et dériver des équations d'état décrivant le comportement de ψ dans chacune des régions du Tokamak.

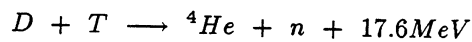
I. Fusion et Tokamak

Dans la nature, il existe une source d'énergie qui utilise des réactions de synthèse à partir de noyaux d'hydrogène ou de ses isotopes, le deutérium et le tritium.

L'énergie produite par ces réactions de fusion a d'abord été utilisée pour la réalisation de la bombe à hydrogène (bombe H, 1951). On a aussi cherché à reproduire ces réactions de fusion de manière contrôlée, lente et progressive en laboratoire et deux

voies de recherche restent actuellement ouvertes : le confinement inertiel (travaux publiés en 1972) et le confinement magnétique (premiers travaux en 1958). Le but de ces dispositifs expérimentaux est d'obtenir un taux de réaction suffisamment élevé pour que le bilan énergétique soit positif.

La méthode la plus prometteuse consiste à chauffer un mélange de deutérium et de tritium (D-T) à une température suffisamment élevée afin de produire les réactions de fusion. Cette très haute température est nécessaire pour que les vitesses thermiques des noyaux soient suffisamment grandes pour vaincre la répulsion électrostatique qui s'oppose à leur rapprochement. La fusion réalisée de cette manière est appelée fusion thermonucléaire et la réaction D-T est la suivante :



La température nécessaire est de l'ordre de 100 millions de degrés centigrade, ce qui correspond à une énergie cinétique d'environ 10 KeV. A cette température, le gaz neutre est totalement ionisé. Cet état de la matière est appelé plasma.

On pourrait envisager des réactions de fusion de deux noyaux de deutérium, mais la température de chauffage serait alors beaucoup plus élevée.

Une première étape vers le contrôle de la fusion est d'atteindre le break-even (ou faisabilité scientifique) pour lequel la puissance libérée par les réactions de fusion doit être égale à la puissance nécessaire pour chauffer le plasma. Ce régime ne correspond pas encore à celui d'un réacteur en fonctionnement. Pour cela, il faut que le plasma soit en ignition, c'est-à-dire que les réactions de fusion soient suffisamment nombreuses et fréquentes pour entretenir la réaction sans apport extérieur d'énergie. Plus précisément, la puissance cédée au plasma compense la puissance perdue. Cette puissance est liée au temps de confinement τ . Le domaine d'ignition est atteint lorsque le critère de Lawson est satisfait (cf J.Wesson) :

$$n \tau T > 5 \text{ à } 6.10^{21} \text{ KeV.s.m}^{-3}$$

où n est la densité de particules et T la température.

Ce critère peut simplement s'interpréter de la façon suivante : il faut maintenir une densité de noyaux assez forte pendant un temps suffisamment long et à une température suffisamment élevée pour réaliser les conditions nécessaires au fonctionnement du réacteur.

Le break-even correspond au produit :

$$n \tau T \simeq 8.10^{20} \text{ KeV.s.m}^{-3} .$$

Revenons maintenant aux deux dispositifs expérimentaux envisagés pour réaliser la fusion nucléaire :

confinement inertiel : un mélange D-T est contenu dans une capsule sphérique ($r \simeq 60\mu m$) appelée cible. Cette capsule est soumise à un fort rayonnement (lasers ou faisceaux d'ions) de manière à comprimer très rapidement le mélange qu'elle contient. A la fin de la compression, les réactions de fusion fournissent l'énergie nécessaire au chauffage du combustible et permettent de maintenir pendant la durée τ ($\simeq 10^{-11}s$) de l'implosion les conditions de fonctionnement du réacteur. La densité est donc très élevée ($> 10^{31}m^{-3}$) de façon à satisfaire le critère de Lawson.

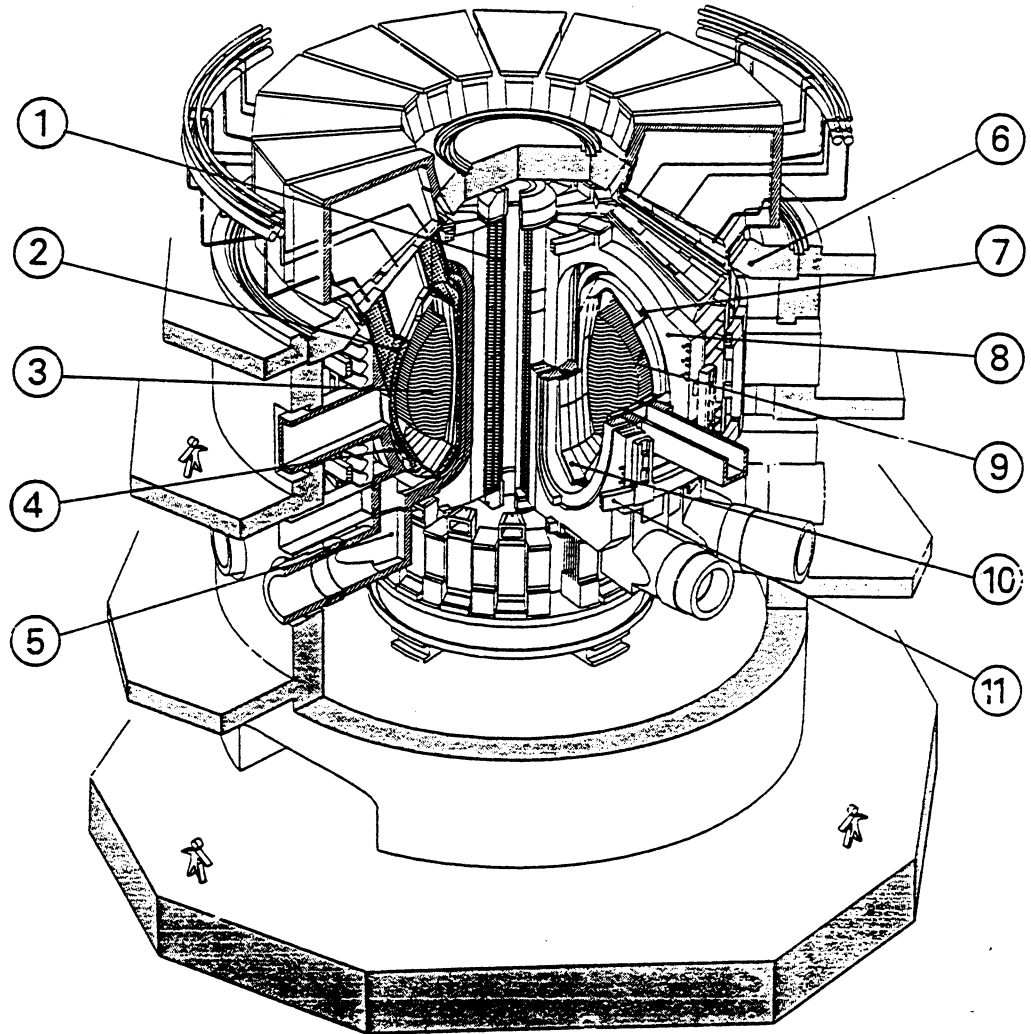
confinement magnétique : un gaz composé de deutérium et de tritium est introduit dans une enceinte à vide où il est ionisé par un champ électrique et produit ainsi un plasma. Ce plasma est alors amené et maintenu à très haute température, et ces hautes températures excluant tout contact avec des parois matérielles, le plasma est confiné grâce à un champ magnétique. Le temps de confinement ($\sim 1s$) est alors plus long que lors du confinement inertiel et la densité plus faible ($\sim 10^{20}m^{-3}$). Ce confinement peut être réalisé par des dispositifs tels que les 'stellarators', les miroirs magnétiques et les Tokamaks (de l'acronyme russe pour chambre magnétique torique).

Dans cette thèse, nous allons étudier le comportement du plasma dans un Tokamak (Tokamak NET sur la figure (I.1.1)).

La figure (I.1.2) représente le schéma de principe du Tokamak. Le principe de fonctionnement est le suivant : le plasma est confiné dans la chambre à vide grâce à un champ magnétique qui a des composantes poloïdale et toroïdale. Le champ magnétique poloïdal est dû au courant plasma induit par les courants circulant dans les bobines qui entourent l'axe de symétrie du tore ; le champ magnétique toroïdal est produit par un certain nombre de bobines disposées dans des plans poloïdaux.

On peut montrer que les lignes de champ magnétique doivent s'enrouler au moins une fois autour de l'axe vertical pendant qu'elles effectuent une révolution dans le sens poloïdal pour que le plasma ne soit pas sujet à une instabilité *MHD* extrêmement violente ; le champ magnétique toroïdal est alors nécessaire pour stabiliser le plasma.

Ces lignes de champ magnétique engendrent des surfaces magnétiques qui ont la topologie de tores emboîtés. On appelle axe magnétique la surface magnétique dégénérée réduite à une ligne fermée. Le bord du plasma correspond à une surface magnétique particulière définie comme la surface ayant un point de contact avec la première paroi de la chambre à vide (cas d'un limiter) ou comme la surface pour laquelle il existe un point où le gradient du flux magnétique poloïdal est nul (cas d'un X-point ou point hyperbolique) ; ces notions seront approfondies dans la suite de ce chapitre.



- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1- Transformateur | 7- Bobines de contrôle |
| 2- Couverture neutronique | 8- Bobines du champ toroïdal |
| 3- Plasma | 9- Première paroi |
| 4- Chambre à vide | 10- Parois du déflecteur |
| 5- Extraction du plasma | 11- Bobines du champ poloïdal |
| 6- Protection biologique - Cryostat | |

Figure (I.1.1) : Tokamak NET

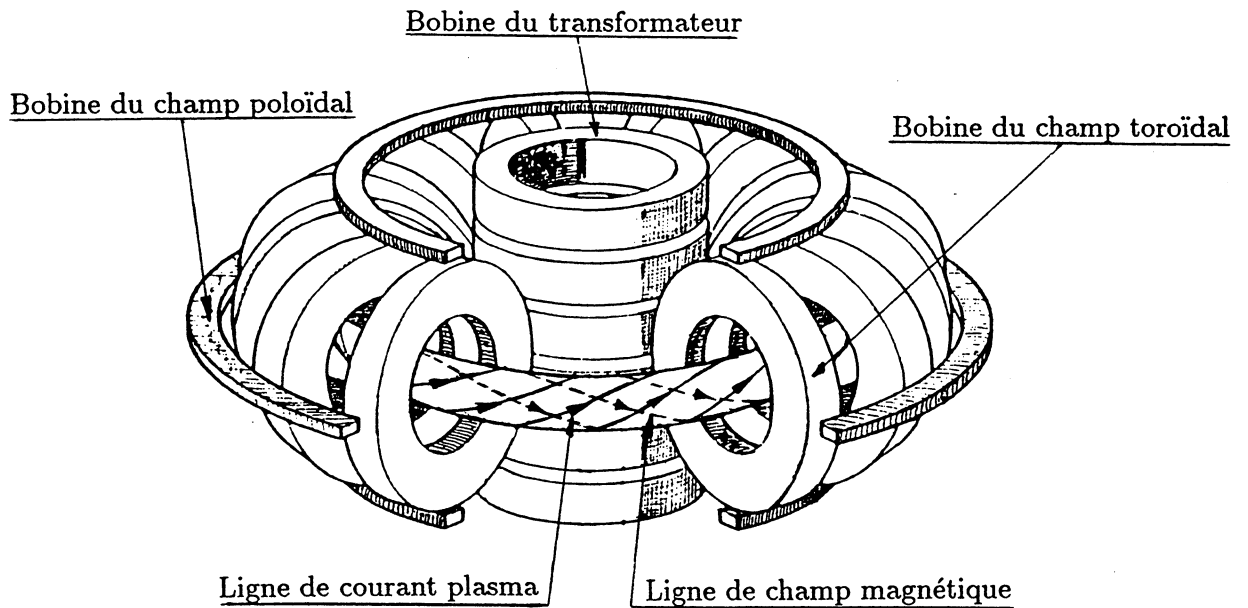


Figure (I.1.2) : Schéma de principe du Tokamak

II. Equations fondamentales du modèle MHD

Bien qu'un plasma chaud soit la forme la plus élémentaire de la matière, le libre parcours moyen de ses constituants, entre deux collisions, est très long et rend le problème du confinement magnétique très compliqué.

Comme cela a été dit dans le paragraphe précédent, on ne considère que des configurations fermées du type Tokamak, dans lesquelles les électrons et les ions peuvent rester confinés pendant un très grand nombre de 'temps de collision coulombienne τ_{coll} '. Si on appelle τ_V le temps de vie moyen du plasma, on a :

$$\tau_V \gg \tau_{coll}$$

Cette inégalité implique que dans le cas d'une machine fermée, la pression est un scalaire.

1. Les équations du modèle MHD

Dans le système d'unités internationales (*MKSI*), les équations fondamentales du modèle *MHD* sont :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \quad (\text{équation du mouvement}) \quad (I.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{conservation de la masse}) \quad (I.2.2)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \overline{\eta} \cdot \vec{j} \quad (\text{loi d'Ohm}) \quad (I.2.3)$$

auxquelles s'ajoutent les équations de Maxwell :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{conservation de } \vec{B}) \quad (I.2.4)$$

$$\vec{j} = \overline{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (\text{loi d'Ampère}) \quad (I.2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overline{\text{rot}}(\vec{E}) \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (I.2.6)$$

où \vec{E} et \vec{B} sont respectivement les champs électrique et magnétique, \vec{j} est la densité de courant, $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ est la densité de masse et $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ est la vitesse du fluide ; μ_0 est une constante représentant la perméabilité magnétique du vide ; $\overline{\eta}$ est le tenseur de résistivité qui peut aussi s'écrire sous la forme $\overline{\eta} = \eta_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{e}_{\perp} \vec{e}_{\perp}$ avec $\vec{e}_{\parallel} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ et \vec{e}_{\perp} vecteur unitaire orthogonal à \vec{B} .

Remarque

La loi d'Ampère (I.2.5) implique que $\text{div} \vec{j} = 0$.

Dans la suite, on montrera que pour les cas qui nous intéressent, η_{\perp} n'intervient pas et on admettra que η_{\parallel} est donné par ce qu'on appelle la résistivité de Spitzer.

2. Simplification de l'équation de conservation du moment

En faisant une analyse des ordres de grandeur, on va montrer qu'il est possible de négliger certains termes de l'équation du mouvement (I.2.1).

Soit \vec{v}_A la vitesse d'Alfvén (caractéristique des instabilités du plasma) :

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

Au moyen de la loi d'Ampère (I.2.5), on peut écrire :

$$[j] = \frac{[B]}{\mu_0 [L]}$$

où $[A]$ désigne la dimension de A dans le système d'unités internationales et L est la longueur caractéristique du système (pour un Tokamak du type *NET* ou *ITER*, L est de l'ordre du décimètre).

En faisant le rapport entre le membre de gauche de l'équation (I.2.1) et $\vec{j} \times \vec{B}$, on a :

$$Q = \frac{[\rho \frac{v^2}{L}]}{[j][B]} = \frac{[\rho] \frac{[v^2]}{[L]}}{\frac{[B^2]}{\mu_0 [L]}} = \frac{[v^2]}{\frac{[B^2]}{\mu_0 [\rho]}} = \frac{[v^2]}{[v_A^2]}$$

Typiquement v_A est de l'ordre de $10^6 \text{ m/s} = 10^3 \text{ km/s}$; or dans les Tokamaks considérés la vitesse v du plasma est beaucoup plus faible que la vitesse d'Alfvén v_A . On a alors

$$Q \ll 1$$

c'est-à-dire

$$[\rho \frac{v^2}{L}] \ll [j][B]$$

et on peut ainsi négliger le terme $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ dans l'équation (I.2.1) à tout instant si le système est stable du point de vue *MHD* (cette condition sera dorénavant admise).

L'équation du mouvement se réduit donc à :

$$\vec{\nabla} p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (I.2.7)$$

qui serait l'équation exacte dans le cas d'un équilibre.

3. Surfaces magnétiques

A partir de l'équation (I.2.7), on peut écrire :

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad (I.2.8)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad (I.2.9)$$

La relation (I.2.8) implique que les lignes de force du champ magnétique doivent être contenues sur des surfaces à pression constante (en admettant pour le moment que de telles surfaces existent).

Les surfaces constituées des lignes de force du champ magnétique \vec{B} sont appelées surfaces magnétiques.

D'après la relation (I.2.9), le vecteur densité de courant \vec{j} s'appuie aussi sur des isobares et donc sur les surfaces magnétiques. On peut écrire :

$$\vec{j} = \alpha \vec{B} + \frac{1}{B^2} \vec{B} \times \vec{\nabla} p \quad (I.2.10)$$

avec en général $\alpha \neq 0$.

Remarque

On peut montrer que les surfaces magnétiques existent dans le cas où elles ont la topologie d'un tore (cf M.D.Kruskal - R.M.Kulsrud). Cette topologie est réalisée dans le cas d'une décharge Tokamak.

4. Systèmes axisymétriques

Dès maintenant, on considère des systèmes axisymétriques, ce qui consiste à supposer que dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) , le champ magnétique \vec{B} est indépendant de l'angle toroïdal φ .

Dans un espace contractile l'équation (I.2.4) implique l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (cf H.Flanders). On a donc :

$$\begin{cases} B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \end{cases} \quad (I.2.11)$$

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon r centré sur l'axe $r = 0$ et s'appuyant sur un plan parallèle au plan équatorial $z = 0$ situé à une hauteur z ; soit \mathcal{D} le disque dont la circonférence est \mathcal{C} . On calcule le flux ψ^* de B à travers le disque \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \psi^* &= \int_{\mathcal{D}} B \, dS = \int_{\mathcal{D}} B_z \, dS \\ &= 2\pi \int_0^r r' B_z \, dr' = 2\pi \int_0^r \frac{\partial}{\partial r'} (r' A_\varphi) \, dr' \\ &= 2\pi r A_\varphi \end{aligned}$$

On définit alors le flux magnétique ψ par :

$$\psi = \frac{\psi^*}{2\pi} = r A_\varphi \quad (I.2.12)$$

Considérons maintenant la projection d'une ligne de force de \vec{B} sur un plan méridien $\varphi = c^{ste}$; cette projection est donnée par $dr/B_r = dz/B_z$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} r (B_z dr - B_r dz) &= 0 \\ \Leftrightarrow r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) dr + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} dz \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) dr + \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) dz &= 0 \\ \Leftrightarrow d (r A_\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que le flux magnétique $\psi = r A_\varphi$ est constant sur une surface magnétique.

Il est donc clair qu'une surface magnétique peut être identifiée soit au moyen du flux magnétique ψ , soit au moyen de la pression p . On choisit ψ pour identifier les surfaces magnétiques conformément à un grand nombre de travaux numériques en *MHD*.

On peut maintenant représenter le champ magnétique de la façon suivante :

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \times \vec{e}_\varphi + \frac{f}{r} \vec{e}_\varphi \quad (I.2.13)$$

où \vec{e}_φ est le vecteur unitaire dans la direction toroïdale et $f = r B_\varphi$.

A partir des expressions (I.2.5) et (I.2.13), on peut déduire l'expression de la densité de courant :

$$\vec{j} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \vec{e}_z \quad (I.2.14)$$

Soit M un point de l'axe $0r$; soit \mathcal{C}' le cercle de centre M situé dans le plan poloïdal $\varphi = c^{ste}$ et passant par le point (r, φ, z) , et \mathcal{D}' le disque ayant ce cercle pour circonférence. Le flux de la composante verticale de la densité de courant à travers le disque \mathcal{D}' est :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}'} j_z(r', z) dS' &= 2\pi \int_0^r r' j_z(r', z) dr' = 2\pi \int_0^r \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r'} (r' B_\varphi) dr' \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0} r B_\varphi = \frac{2\pi}{\mu_0} f(r, z) \end{aligned} \quad (I.2.15)$$

On retrouve ainsi que ce sont les courants dans un plan poloïdal qui engendrent le champ magnétique toroïdal.

A partir de l'équation (I.2.8) et de l'expression (I.2.13) du champ magnétique, on déduit que $\vec{\nabla} p$ est colinéaire à $\vec{\nabla} \psi$, et donc que la pression est constante sur chaque surface magnétique.

A partir de l'équation (I.2.9) et de l'expression (I.2.14) du vecteur densité de courant, on déduit que $\vec{\nabla} f$ est colinéaire à $\vec{\nabla} p$, et donc que f est aussi constante sur chaque surface magnétique, soit :

$$\begin{cases} p(r, z, t) = p(\psi(r, z, t), t) \\ f(r, z, t) = f(\psi(r, z, t), t) \end{cases} \quad (I.2.16)$$

5. Densité de courant

Revenons tout d'abord sur l'expression de la densité de courant \vec{j} .

On réécrit le système (I.2.11) à partir du flux magnétique ψ :

$$\begin{cases} B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

auquel vient s'ajouter l'expression de la composante toroïdale du champ magnétique : $B_\varphi = f/r$.

En reportant ces composantes dans l'expression (I.2.14) pour \vec{j} , on obtient :

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_r - \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_z$$

On définit l'opérateur L :

$$L. = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial .}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial .}{\partial z} \right) \right]$$

On obtient alors :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 r} \vec{\nabla} f \times \vec{e}_\varphi + L\psi \vec{e}_\varphi \quad (I.2.17)$$

Les expressions (I.2.13) et (I.2.17) sont vérifiées dans tout l'espace (air, plasma) puisqu'elles sont obtenues uniquement à partir des équations de Maxwell et de l'hypothèse de symétrie axiale.

III. Equations pour le flux magnétique ψ

Dans le paragraphe précédent, on a introduit l'hypothèse de symétrie axiale ; on considère donc une section poloïdale du Tokamak représentée par le demi-plan ($r > 0; z$) - Fig (I.3.1) - L'axe $0z$ est l'axe vertical du tore et l'axe $0r$ est la section du plan équatorial.

Le domaine Ω est constitué essentiellement de deux régions qui sont l'air Ω_a (contenant les bobines de champ poloïdal B_i), le plasma Ω_p et sa frontière Γ_p . La chambre à vide est délimitée par une paroi externe Ω_{cv}^e et une paroi interne Ω_{cv}^i qui elle-même délimite la région du vide accessible au plasma.

Nous allons maintenant écrire les équations pour le flux magnétique ψ dans les différentes régions, c'est-à-dire écrire $L\psi = j_\varphi$ et exprimer la composante toroïdale de la densité de courant dans chaque domaine de Ω .

1. L'air Ω_a

La région Ω_a contient les circuits électriques, les parois de la chambre à vide et la région du vide extérieure au plasma.

a. Parois de la chambre à vide

On note $\Omega_{cv} = \Omega_{cv}^i \cup \Omega_{cv}^e$.

D'après la loi d'Ohm (I.2.3), on a :

$$E_\varphi = \frac{1}{\sigma_v} j_\varphi \quad \text{dans } \Omega_{cv}$$

où σ_v est la conductivité des parois de la chambre à vide et E_φ est la composante toroïdale du champ électrique.

A partir de la loi de Faraday (I.2.5) et du potentiel vecteur \vec{A} , on peut écrire la composante toroïdale du champ électrique

$$E_\varphi = - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

et on obtient finalement

$$L\psi = - \frac{\sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_{cv} \quad (I.3.1)$$

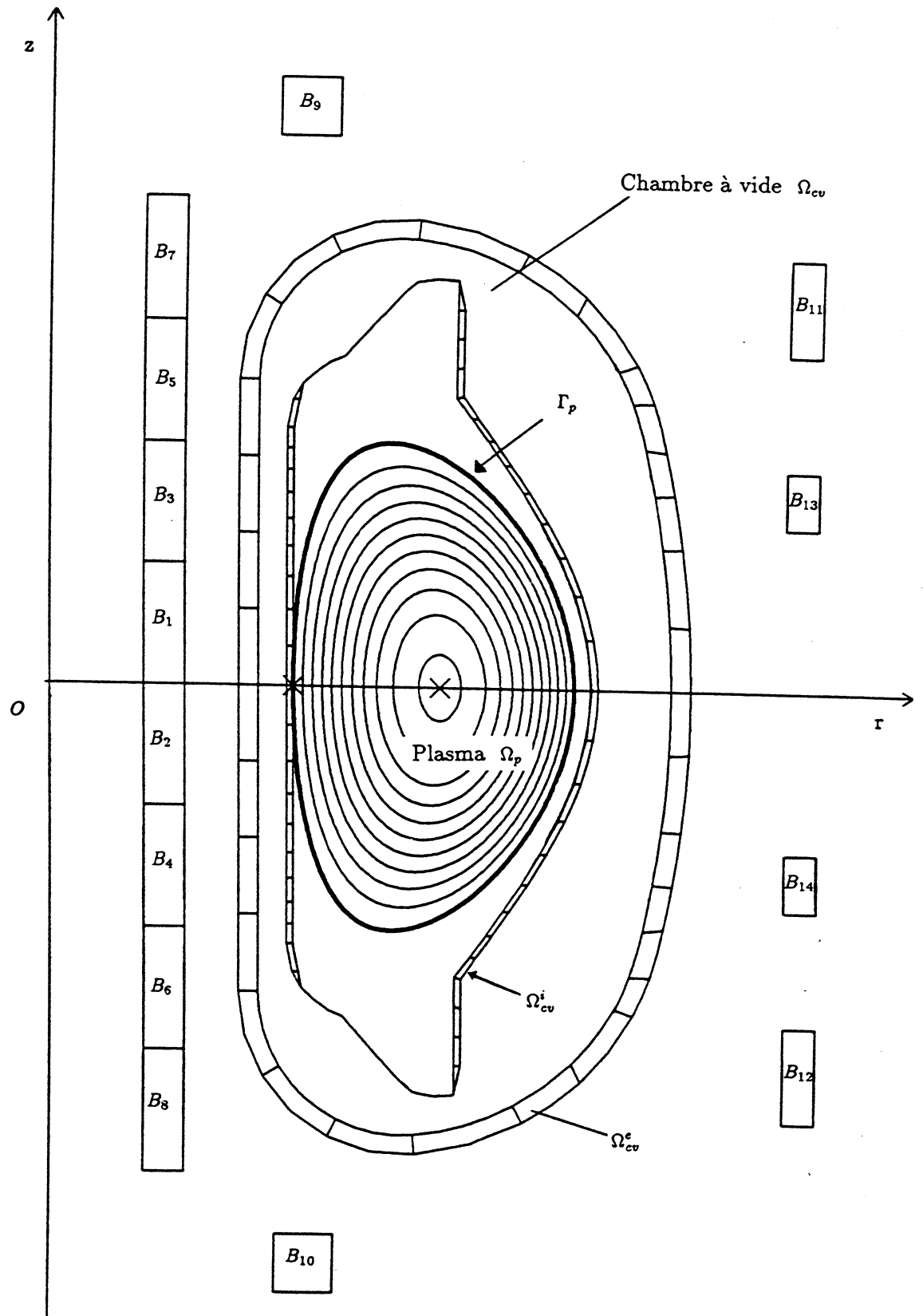


Figure (I.3.1) : Section poloidale du Tokamak

b. Les circuits électriques

Un circuit électrique se compose de bobines de champ poloïdal et de leurs connexions. On définit ainsi N_c circuits indépendants $S_{c,m}$, $m = 1, \dots, N_c$. On suppose que la densité de courant est homogène dans chaque circuit et on note j_m , sa composante toroïdale dans le $m^{\text{ième}}$ circuit. On a alors :

$$L\psi = j_m \quad m = 1, \dots, N_c \quad (I.3.4)$$

On définit le courant I_m circulant dans le $m^{\text{ième}}$ circuit :

$$I_m = \int_{S_{c,m}} j_m dS \quad (I.3.2)$$

On peut maintenant s'intéresser à ce qui se passe dans chaque circuit afin de dériver ce que l'on appelle des lois de comportement.

Soit $\vec{\mathcal{J}}_k(r, \varphi, z, t)$ la densité de courant correspondant à un courant unitaire circulant dans le $k^{\text{ième}}$ circuit (la dépendance en φ est introduite car il peut exister des branches non axisymétriques) et soit $q_k(r, z, t)$, la valeur moyenne sur φ de la composante toroïdale de $\vec{\mathcal{J}}_k$:

$$q_k(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\mathcal{J}}_k \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi \quad (I.3.3)$$

On suppose que le champ électrique total \vec{E} est la somme d'un champ électrique \vec{E}_1 engendré par le champ magnétique \vec{B} , et d'un champ électrique extérieur \vec{E}_2 . D'après la loi d'Ohm, on a :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \eta \vec{j} \quad \text{pour les circuits électriques}$$

A partir de la loi de Faraday et l'expression du champ magnétique en fonction du potentiel vecteur \vec{A} , on peut écrire le champ électrique \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_1 = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

où Φ est le potentiel scalaire.

On a alors

$$\vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \Phi + \eta \vec{j}$$

En multipliant scalairement cette équation par $\vec{\mathcal{J}}_m$ et en intégrant sur tout l'espace U occupé par les circuits, on obtient :

$$\int_U \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \vec{E}_2 dV = \int_U \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV + \sum_{k=1}^{N_c} \int_U \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \vec{j}_k dV$$

On pose

$$V_m = \int_U \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \vec{E}_2 dV \quad \text{F.E.M dans le } m^{\text{ième}} \text{ circuit}$$

$$R_{mk} = \sum_{k=1}^{N_c} \int_U \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \vec{\mathcal{J}}_k dV \quad \text{matrice des résistances mutuelles}$$

On décompose l'espace U en $U' + U''$ où U' est la région de l'espace contenant les parties axisymétriques des circuits et U'' est la région restante. Dans U' la composante toroïdale du potentiel vecteur est $A_\varphi = \psi/r$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_{U'} \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV &= \int_{S_{c,m}} \int_0^{2\pi} \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \vec{e}_\varphi \frac{\partial A}{\partial t} r d\varphi dS \\ &= 2\pi \int_{S_{c,m}} q_m(r, z, t) \frac{\partial \psi}{\partial t} dS \end{aligned}$$

Pour la région U'' (branches non axisymétriques), on obtient :

$$\int_{U''} \vec{\mathcal{J}}_m \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV = \sum_{k=1}^{N_c} M_{mk} \frac{dI_k}{dt}$$

où $M_{mk} = M_{km}$ est l'élément de matrice des inductions mutuelles entre les parties non axisymétriques des $m^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ circuits.

Cette formulation est vraie si les branches non axisymétriques ne contiennent pas de matériaux ferro-magnétiques ; dans le cas contraire, il faudrait ajouter un terme modélisant les courants de surface alors non nuls.

On obtient finalement l'équation suivante pour le $m^{\text{ième}}$ circuit :

$$V_m = 2\pi \int_{S_{c,m}} q_m \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \sum_{k=1}^{N_c} \left[M_{mk} \frac{dI_k}{dt} + R_{mk} I_k \right] \quad m = 1, \dots, N_c \quad (I.3.5)$$

$$c. \underline{\Omega_a - \Omega_{cv} - \bigcup S_{c,m}}$$

Dans la région de l'air privée des parois de la chambre à vide et des circuits électriques, la densité de courant est nulle :

$$L\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega_a - \Omega_{cv} - \bigcup_{i=m}^{N_c} S_{c,m} \quad (I.3.6)$$

2. Le plasma

On considère à présent la région du plasma. Il a été montré dans le paragraphe précédent que sur chaque surface magnétique, p et f sont constantes.

Dans la relation d'équilibre (I.2.7), on remplace \vec{B} et \vec{j} par leurs expressions (I.2.13) et (I.2.17) respectivement et on obtient :

$$\vec{\nabla} p = \frac{L\psi}{r} \vec{\nabla} \psi - \frac{f}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla} f \quad (I.3.7a)$$

Si on note

$$\frac{\nabla p}{\nabla \psi} = \frac{\partial p}{\partial \psi} \quad \text{et} \quad \frac{\nabla f}{\nabla \psi} = \frac{\partial f}{\partial \psi}$$

on peut écrire (I.3.7a) sous la forme :

$$L\psi = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu_0 r} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \quad (I.3.7)$$

Cette équation est appelée l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov.

On va donner une autre formulation de l'équation (I.3.7). Pour cela on écrit $\frac{\partial p}{\partial \psi}$ et $f \frac{\partial f}{\partial \psi}$ comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{c_p^*(t)}{\mu_0} \mathcal{F}_p(\bar{\psi}, t) \\ f \frac{\partial f}{\partial \psi} = c_f^*(t) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}, t) \end{cases} \quad (I.3.8)$$

où c_p^* et c_f^* sont des coefficients tels que le courant plasma I_p vérifie :

$$\begin{aligned} I_p(t) &= \int_{\Omega_p} j_\varphi dS \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_p} \left[r c_p^*(t) \mathcal{F}_p(\bar{\psi}, t) + \frac{c_f^*(t)}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}, t) \right] dS \end{aligned}$$

et où \mathcal{F}_p et \mathcal{F}_f sont des fonctions données du flux normalisé $\bar{\psi}$, lequel est défini à partir du flux magnétique ψ , de sa valeur ψ_a sur l'axe magnétique et de sa valeur ψ_b sur le bord du plasma :

$$\bar{\psi} = \frac{\psi_a - \psi}{\psi_a - \psi_b}$$

Dans les configurations traitées, ψ croît du bord du plasma jusqu'à l'axe magnétique, et on a donc $\bar{\psi} \in [0, 1]$.

L'équation de Grad-Shafranov devient donc :

$$L\psi = r \frac{c_p^*(t)}{\mu_0} \mathcal{F}_p(\bar{\psi}, t) + \frac{c_f^*(t)}{\mu_0 r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}, t) \quad \text{dans } \Omega_p \quad (I.3.9)$$

3. Conditions aux limites

a. Conditions aux limites du domaine Ω

Le domaine Ω n'est borné que par l'axe Oz . Par définition du flux poloïdal -(I.2.12)-, ψ est nul sur l'axe Oz et à l'infini. Les conditions aux limites sont donc :

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{sur } Oz \\ \psi = 0 & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (I.3.10)$$

b. Le bord du plasma Γ_p

Le bord du plasma est défini comme étant la ligne de flux la plus externe qui est à l'intérieur de la région délimitée par la première paroi de la chambre à vide. Dans une configuration de type limiter, Γ_p est l'équipotentielle de ψ tangente intérieurement à la première paroi de la chambre à vide. Dans une configuration de type X-point, Γ_p est l'équipotentielle de ψ passant par un point hyperbolique de la région accessible au plasma et pour lequel $\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$; dans ce cas Γ_p et la première paroi de la chambre à vide n'ont pas obligatoirement un point de contact.

On peut définir le bord du plasma Γ_p comme :

$$\Gamma_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) = \sup_{\mathcal{D}} \psi\} \quad (I.3.11)$$

avec

$$\mathcal{D} = \{M \in \Omega_{cv}^i / \vec{P}_a \vec{M} \cdot \vec{\nabla}\psi(M) < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \vec{\nabla}\psi(X) = \vec{0}\} \quad (I.3.12)$$

où P_a est l'axe magnétique et Ω_A est la région du vide accessible au plasma.

L'ensemble \mathcal{D} est l'ensemble des points de la région du vide accessible au plasma pouvant être des points limiters ou des points hyperboliques (ou X-point). \mathcal{D} peut s'écrire comme l'union des deux sous-ensembles : le premier est constitué des points de la paroi interne de la chambre à vide pour lesquels le gradient du flux magnétique est dirigé vers l'intérieur du plasma, et il représente l'ensemble des points limiters possibles ; le second est constitué des points de la région du vide accessible au plasma pour lesquels le gradient du flux magnétique est nul, et il représente l'ensemble des points hyperboliques possibles.

On suppose que la densité de courant de surface sur le bord du plasma est nulle. On peut alors écrire les conditions de continuité à l'interface plasma-vide :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_i = \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_e \\ (\psi)_i = (\psi)_e \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_p \quad (I.3.13)$$

où les indices i et e désignent des quantités calculées respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du plasma, et $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale sur Γ_p dans la direction sortante au plasma.

Ces conditions de continuité sont aussi satisfaites sur toutes les autres interfaces, à savoir air-parois, air-bobines et vide-parois de la chambre à vide.

On peut maintenant définir la région Ω_p du plasma :

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\} \quad (I.3.14)$$

avec \mathcal{D} donné par (I.3.12).

Les équations (I.3.1), (I.3.6) et (I.3.7), et les conditions aux limites (I.3.10) et (I.3.13) constituent l'équation du flux magnétique ψ dans le domaine Ω . Dans le deuxième chapitre, on étudiera le cas de l'équilibre (cas statique) pour lequel le terme d'évolution du flux, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, est nul. Dans les chapitres suivants, on s'intéressera à l'évolution du plasma au cours d'une décharge; à l'équation du flux magnétique viendront s'ajouter les équations (I.3.5) pour les circuits, ainsi qu'une équation d'évolution pour le courant plasma.

CHAPITRE II

EQUILIBRE DU PLASMA

CONTROLE DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction

Dans le chapitre I, on a dérivé les équations décrivant le comportement du flux poloïdal ψ à tout instant de la décharge. Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à l'équilibre, c'est-à-dire que dans le modèle que nous allons étudier, on ne prend pas en compte les termes évolutifs.

On va tout d'abord écrire le système d'équations à résoudre, composé de l'équation pour le flux magnétique poloïdal ψ , d'une équation pour le courant plasma total I_p et de deux équations pour le flux magnétique poloïdal ψ_a sur l'axe magnétique et le flux ψ_b au bord du plasma. A partir de ce système d'équations, on va donner la formulation faible du problème, définir un problème discret et mettre en oeuvre une méthode de résolution utilisant un algorithme de type Newton.

La seconde partie de ce chapitre sera consacrée au problème inverse stationnaire. Il consiste à calculer les courants dans les circuits de façon à réaliser une configuration d'équilibre donnée. Ce problème peut être formulé comme un problème de contrôle avec des paramètres de contrôle, des équations d'état et une fonction-coût. Il est résolu en introduisant un Lagrangien et en dérivant des équations pour l'adjoint du système. On résoudra le problème discret grâce à un algorithme composé d'itérations externes de Newton, chaque itération consistant à définir et minimiser une fonction-coût via des itérations internes de Gradient Conjugué.

Enfin on illustrera la résolution du problème inverse stationnaire par trois cas typiques.

I. Equations

1. Expression de j_φ dans le plasma

L'expression générale de j_φ dans le plasma est donnée par :

$$j_\varphi = r \frac{c_p^*}{\mu_0} \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{c_f^*}{r \mu_0} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \quad \text{dans } \Omega_p \quad (II.1.1)$$

On pose $c_p^* = \lambda \bar{c}_p$ et $c_f^* = \lambda \bar{c}_f$, où le coefficient de normalisation λ est calculé de sorte que le courant plasma :

$$I_p = \int_{\Omega_p} j_\varphi dS \quad (II.1.2)$$

ait une valeur fixée, et où \bar{c}_p et \bar{c}_f sont des coefficients donnés.

On a donc l'équation suivante pour λ :

$$I_p = \frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) dS \quad (II.1.3)$$

avec

$$g(r, \bar{\psi}) = r \bar{c}_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{\bar{c}_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \quad (II.1.4)$$

2. Equation pour ψ dans Ω

Dans le premier chapitre, on a donné les équations satisfaites par ψ dans tout l'espace et à chaque instant. Dans le cas d'un équilibre, ces équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\psi = j_i & \text{dans le circuit } S_{c,i}, i = 1, \dots, N_c \\ L\psi = 0 & \text{dans } \Omega_a - \bigcup_{i=1}^{N_c} S_{c,i} \\ L\psi = \frac{\lambda}{\mu_0} \left[r \bar{c}_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{\bar{c}_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right] & \text{dans } \Omega_p \end{array} \right.$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$L\psi = \sum_{i=1}^{N_c} j_i 1_{S_{c,i}} + \frac{\lambda}{\mu_0} g(r, \bar{\psi}) 1_{\Omega_p} \quad (II.1.5)$$

où $1_{S_{c,i}}$ et 1_{Ω_p} sont les fonctions caractéristiques pour $S_{c,i}$ et Ω_p respectivement.

Pour écrire les équations (II.1.4) et (II.1.5), il est nécessaire de pouvoir calculer le flux normalisé $\bar{\psi}$ et donc le flux ψ_a sur l'axe magnétique et le flux ψ_b au bord du plasma; on les définit par :

$$\psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi \quad (II.1.6)$$

$$\psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi \quad (II.1.7)$$

avec

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\}$$

$$\mathcal{D} = \{M \in \Omega_{cv}^i / \overrightarrow{P_a M} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi}(M) < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \overrightarrow{\nabla \psi}(X) = \overrightarrow{0}\}$$

On définit le problème (\mathcal{P}_E) de la façon suivante : étant donnés la fonction $g(r, \bar{\psi})$, les courants I_i dans les circuits $S_{c,i}$ et le courant plasma I_p , trouver $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda)$ satisfaisant les équations (II.1.3) – (II.1.7), (I.3.10) – (I.3.11) et (I.3.13) – (I.3.14).

II. Formulation faible

Soit Ω_s un sous-ensemble de R^2 . L'espace $L^2(\Omega_s)$ (respectivement $L^2(\Omega_s; r dr dz)$) est l'espace des fonctions de Ω_s , qui sont de puissance 2 intégrables par rapport à la mesure de Lebesgues $dr dz$ (respectivement $r dr dz$) :

$$L^2(\Omega_s) = \{\phi \text{ à valeurs réelles} / \int_{\Omega_s} |\phi|^2 dr dz < \infty\}$$

$$L^2(\Omega_s; r dr dz) = \{\phi \text{ à valeurs réelles} / \int_{\Omega_s} |\phi|^2 r dr dz < \infty\}$$

Soit l'espace de Hilbert :

$$H^1(\Omega_s; r dr dz) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega_s) / \frac{1}{r} \nabla \phi \in [L^2(\Omega_s; r dr dz)]^2 \right\} \quad \text{avec} \quad \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}; \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

On définit l'espace :

$$V^o(\Omega) = \left\{ \phi \in H^1(\Omega; r dr dz) \cap C^o(\Omega) / \phi = 0 \text{ sur } Oz \text{ et } \phi = 0 \text{ à l'infini} \right\} \quad (II.2.1)$$

où $C^o(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions continues sur le domaine Ω .

On cherche $\psi \in V^o(\Omega)$ qui vérifie l'équation d'état (II.1.5).

Le domaine Ω étant un demi-plan, c'est-à-dire un domaine infini, il semble vain de vouloir résoudre l'équation d'état (II.1.5) dans tout Ω . On va donc se ramener à un domaine borné Ω_i de R^2 et donner l'expression du flux magnétique poloidal à l'extérieur de ce domaine en fonction de ses valeurs sur le bord du domaine Ω_i . Pour cela on va utiliser la méthode décrite par R.Albanese, J.Blum et O.De Barbieri.

Soit \mathcal{C} un demi-cercle de centre O , de rayon ρ_c délimitant un domaine Ω_i ; \mathcal{C} est construit de manière à ce que les structures passives et les circuits du Tokamak soient dans le domaine Ω_i . On définit le domaine extérieur Ω_e par $\Omega_e = \Omega - \Omega_i$. On peut déterminer le flux ψ en tout point (r_e, z_e) de Ω_e à partir de ses valeurs sur le contour \mathcal{C} au moyen de la formule de Green :

$$\psi(r_e, z_e) = - \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mu_o r} \frac{\partial G^*}{\partial n} \psi dl$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale dans la direction sortante de Ω_i , et G^* est la fonction de Green définie par :

$$LG^* = \delta(P - P_e)$$

$$G^* = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}, \text{ en } r = 0 \text{ et à l'infini}$$

G^* peut être déterminée en plaçant une source unitaire au point $P_e = (r_e, z_e)$ et une source image d'intensité $-\rho_e/\rho_c$, avec $\rho_e = \sqrt{r_e^2 + z_e^2}$, située au point $P_i = (r_i, z_i)$ avec $r_i = r_e(\rho_c/\rho_e)^2$, $z_i = z_e(\rho_c/\rho_e)^2$. Son expression est :

$$G^*(P | P_e) = \frac{\mu_o}{\pi} \sqrt{r_e r} [F(k_{pp_e}) - F(k_{pp_i})]$$

avec

$$F(k) = \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad k_{p_1 p_2} = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

où K et E sont les intégrales elliptiques respectivement de première et de seconde espèce.

On peut ainsi se ramener au domaine Ω_i et résoudre l'équation d'état (II.1.5) dans ce domaine.

On définit l'espace :

$$V(\Omega_i) = \left\{ \phi \in H^1(\Omega_i; r dr dz) \cap C^0(\Omega_i) / \phi = 0 \text{ sur } Oz \right\} \quad (II.2.2)$$

Notre problème se réduit maintenant à trouver $\psi \in V(\Omega_i)$ tel que l'équation (II.1.5) soit vérifiée.

On multiplie l'équation (II.1.5) par une fonction $\phi \in V(\Omega_i)$ et on intègre sur Ω_i . On obtient alors :

$$- \int_{\Omega_i} \frac{\phi}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dS = \sum_{i=1}^{N_c} \int_{S_{c,i}} \phi j_i dS + \frac{\lambda}{\mu_o} \int_{\Omega_p} \phi g(r, \bar{\psi}) dS \quad (II.2.3)$$

$\frac{1}{r}\nabla\psi$ et $\frac{1}{r}\nabla\phi$ appartenant à $[L^2(\Omega_i, r dr dz)]^2$, on en déduit que $\frac{1}{r}\nabla\psi \cdot \nabla\phi$ appartient à $L^1(\Omega_i)$. On peut donc intégrer par parties le membre de gauche de l'équation (II.2.3) :

$$-\int_{\Omega_i} \frac{\phi}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dS = \int_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_o r} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi dS - \oint_{\partial\Omega_i} \frac{\phi}{\mu_o r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl$$

Le bord $\partial\Omega_i$ du domaine Ω_i est constitué du contour \mathcal{C} et du segment $[-\rho_c, \rho_c]$ de l'axe Oz sur lequel la fonction ϕ est nulle. On a donc :

$$-\int_{\Omega_i} \frac{\phi}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dS = \int_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_o r} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi dS - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\phi}{\mu_o r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl$$

On peut écrire l'intégrale sur le contour \mathcal{C} sous forme auto-adjointe d'après R. Albanese, J. Blum et O. De Barbieri :

$$\begin{aligned} -\oint_{\mathcal{C}} \frac{\phi}{\mu_o r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl &= \frac{1}{\mu_o} \oint_{\mathcal{C}} \phi \tilde{N} \psi dl \\ &+ \frac{1}{2\mu_o} \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} [\phi(P_1) - \phi(P_2)] \tilde{M}(P_1, P_2) [\psi(P_1) - \psi(P_2)] dl_1 dl_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{M}(P_1, P_2) &= \frac{U(P_1, P_2)}{2\pi(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \\ U(P_1, P_2) &= k_{p_1 p_2} \left[\frac{2 - k_{p_1 p_2}^2}{2 - 2k_{p_1 p_2}^2} E(k_{p_1 p_2}) - K(k_{p_1 p_2}) \right] \\ \tilde{N} &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \rho_c)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \rho_c)^2}} - \frac{1}{\rho_c} \right] \end{aligned}$$

On note $C(\psi, \phi)$ la forme auto-adjointe écrite ci-dessus. On a finalement :

$$-\int_{\Omega_i} \frac{\phi}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dS = \int_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_o r} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi dS + C(\psi, \phi)$$

En reprenant les définitions (I.3.3) – (I.3.4) pour le courant I_i et pour q_i dans le $i^{\text{ème}}$ circuit, on peut écrire :

si le $i^{\text{ème}}$ circuit est une bobine de champ poloïdal (ou circuit étendu) :

$$\int_{S_{c,i}} \phi j_i dS = I_i \int_{S_{c,i}} \phi q_i dS ; \quad (II.2.4)$$

si le $i^{\text{ème}}$ circuit est réduit à un courant filamenteux situé au point P_i de Ω_i :

$$\int_{S_{c,i}} \phi j_i dS = I_i \phi(P_i) . \quad (II.2.5)$$

En reportant les expressions (II.2.3) – (II.2.5) dans (II.2.2) et en multipliant par μ_o , on obtient la formulation faible pour l'équation du flux magnétique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \phi dS + C(\psi, \phi) - \lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \phi dS \\ - \sum_{m=1}^{N_1} \mu_0 I_m \int_{S_{c,m}} q_m \phi dS - \sum_{m=N_1+1}^{N_c} \mu_0 I_m \phi(P_m) = 0 \quad \forall \phi \in V(\Omega_i) \end{aligned}$$

A cette équation viennent s'ajouter les équations (II.1.6), (II.1.7) et (II.1.3) pour ψ_a, ψ_b et λ respectivement.

On peut maintenant définir le problème (\mathcal{P}'_E) de la façon suivante : étant donné la fonction $g(r, \bar{\psi})$, les courants I_i et I_p , trouver $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) \in V(\Omega_i) \times \mathbb{R}^3$ tel que le système suivant soit satisfait :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \phi dS + C(\psi, \phi) - \lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \phi dS \\ - \sum_{i=1}^{N_1} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi dS - \sum_{i=N_1+1}^{N_c} \mu_0 I_i \phi(P_i) = 0 \quad \forall \phi \in V(\Omega_i) \\ \psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi \\ \psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi \\ I_p = \frac{\lambda}{\mu_o} \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) dS \end{aligned} \right. \quad (II.2.6)$$

où N_1 est le nombre de circuits de champ poloïdal et $N_c - N_1$ est le nombre de circuits filamenteux.

Remarque (II.2.1)

L'équivalence des problèmes (\mathcal{P}_E) et (\mathcal{P}'_E) peut être démontrée de manière analogue à ce qui a été fait par J.Blum (cf /1/ Chap.1).

III. Résolution du problème (\mathcal{P}'_E)

Afin de résoudre numériquement le problème non linéaire (\mathcal{P}'_E), non linéaire du fait de l'expression de la densité de courant dans le plasma et de la frontière libre Γ_p du plasma, on discrétise tout d'abord les équations du problème (\mathcal{P}'_E) par une méthode d'éléments finis, et on résout le problème discrétisé grâce à un algorithme de Newton ou de quasi-Newton.

1. La méthode des éléments finis

Soit \mathcal{T}_i , une triangulation de $\bar{\Omega}_i$ obtenue à partir d'éléments triangulaires courbes T de diamètre inférieur à l ; par définition on a :

$$\bar{\Omega}_i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_i} T$$

avec la condition que pour deux éléments distincts T_1 et T_2 , leur intersection est soit vide, soit réduite à un sommet, soit réduite à un côté.

On utilise des éléments triangulaires courbes afin de suivre exactement le contour \mathcal{C} délimitant le domaine Ω_i , ainsi que les parois de la chambre à vide.

On associe à la triangulation \mathcal{T}_i , l'espace V_i défini par :

$$V_i = \left\{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}) / \forall T \in \mathcal{T}_i, \phi|_T \in P_2 \text{ et } \phi = 0 \text{ sur } Oz \right\}$$

où P_2 désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Dans chaque élément T , on définit 6 noeuds : 3 noeuds sont les sommets de l'élément et les 3 autres noeuds sont les 'milieux' des côtés de l'élément. Soit S_i l'ensemble des noeuds du maillage, de cardinal N_i ; en tout point $M_j \in S_i$ on définit la fonction $\varphi_i \in L_i$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_i(M_j) = \delta_{ij} & \text{si } M_j \in S_i - Oz \\ \varphi_i(M_j) = 0 & \text{si } M_j \in Oz \end{array} \right.$$

L'ensemble des N_i fonctions φ_i constitue une base de V_i .

On peut maintenant définir le problème discret (\mathcal{P}'_i) : trouver $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) \in V_i \times R^3$ satisfaisant le système discret :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \overrightarrow{\nabla} \psi \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi \, dS + C(\psi, \phi) - \lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \phi \, dS \\ - \sum_{i=1}^{N_1} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi \, dS - \sum_{i=N_1+1}^{N_c} \mu_0 I_i \phi(P_i) = 0 \quad \forall \phi \in V_i \\ \psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi \\ \psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi \\ I_p = \frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \, dS \end{array} \right. \quad (II.3.1)$$

Le système discret (II.3.1) est une approximation du système (II.2.6).

Puisqu'on utilise des fonctions de V_i qui sont quadratiques sur chaque élément de la triangulation, le maximum ψ_a du flux dans le plasma Ω_p et le maximum ψ_b du flux sur le bord du plasma Γ_p ne sont pas nécessairement atteints en des noeuds du maillage.

Pour calculer l'intégrale sur Ω_i (respectivement $S_{c,i}$ et Ω_p), on calcule la somme des intégrales sur chaque triangle $T \in \Omega_i$ (respectivement $S_{c,i}$ et Ω_p) où l'intégrale sur un triangle $T \in \mathcal{T}_i$ est calculée par la méthode d'intégration numérique de Gauss (cf G.Strang - G.J.Fix).

Pour résoudre le problème discret non linéaire (\mathcal{P}'_i), on utilise la méthode de Newton qui consiste à résoudre une suite de problèmes linéaires.

2. La méthode de Newton

Dans le système (II.3.1) les équations pour ψ_a et ψ_b font intervenir le calcul du maximum du flux sur le plasma et sur le bord du plasma. Afin d'utiliser la méthode de Newton, il est nécessaire de faire deux hypothèses sur l'unicité de ces maximums.

Hypothèse 1

Le $\text{Sup } \psi$ sur Ω_p est atteint en un unique point P_a , qui est un point à l'intérieur de Ω_p et est appelé l'axe magnétique. Le voisinage de ce point est supposé étoilé.

Hypothèse 2

Le *Sup* ψ sur \mathcal{D} est atteint en un unique point P_b , qui est soit l'unique point de contact entre le bord du plasma Γ_p et la première paroi de la chambre à vide Ω_{cv}^i , soit le point où le gradient du flux est nul (point hyperbolique).

Ces deux hypothèses nous permettent d'écrire les équations (II.1.6) et (II.1.7) sous la forme :

$$\psi_a = \psi(P_a)$$

$$\psi_b = \psi(P_b)$$

L'ensemble des fonctions φ_j constituant une base de V_i , on peut décomposer ψ dans cette base ; en tout point $M \in \Omega_i$:

$$\psi(M) = \sum_{k=1}^{N_i} \psi(M_k) \varphi_k(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(M) = \sum_{k=1}^{N_i} \psi_k \varphi_k(M)$$

On note $x = (\psi_1, \dots, \psi_{N_i}, \psi_a, \psi_b, \lambda)$; le système d'équations (II.3.1) devient alors :

$$E(x) = 0.$$

L'algorithme de Newton pour un tel système s'écrit :

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{n+1} = x^n - [E'(x^n)]^{-1} E(x^n) \end{cases}$$

où l'exposant n indique l'itéré n et où $E'(x^n)$ est la matrice de Newton donnée par la proposition suivante :

Proposition (II.3.1)

Les éléments non nuls $A_{j,k}$ de la matrice $E'(x^n)$ sont :

$$A_{j,k} = \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{\nabla} \phi_k}{r} dS + C(\phi_j, \phi_k) - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \psi} k_\psi^n \phi_k dS \quad 1 \leq j, k \leq N_i$$

$$A_{j, N_i+1} = - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \psi} k_a^n dS$$

$$A_{j, N_i+2} = - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \psi} k_b^n dS$$

$$A_{j, N_i+3} = - \int_{\Omega_p^n} \phi_j g(r, \bar{\psi}^n) dS$$

$$A_{N_i+1,k} = -\phi_k(P_a^n) \quad 1 \leq k \leq N_i$$

$$A_{N_i+1,N_i+1} = 1$$

$$A_{N_i+2,k} = -\phi_k(P_b^n) \quad 1 \leq k \leq N_i$$

$$A_{N_i+2,N_i+2} = 1$$

$$A_{N_i+3,k} = \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_\psi^n \phi_k dS \quad 1 \leq k \leq N_i$$

$$A_{N_i+3,N_i+1} = \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_a^n dS$$

$$A_{N_i+3,N_i+2} = \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_b^n dS$$

$$A_{N_i+3,N_i+3} = \int_{\Omega_p^n} g(r, \bar{\psi}^n) dS$$

avec

$$k_\psi^n = \frac{-1}{\psi_a^n - \psi_b^n} \quad k_a^n = \frac{1 - \bar{\psi}^n}{\psi_a^n - \psi_b^n} \quad k_b^n = \frac{\bar{\psi}^n}{\psi_a^n - \psi_b^n}$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, on rappelle la définition de la dérivée au sens de Gâteaux et on démontre un lemme.

Définition (II.3.1)

Soit l'espace de Hilbert V et la fonction $f : V \rightarrow R$. On appelle Gâteaux-dérivée de f en ψ dans la direction ϕ , la limite, si elle existe, de :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi \right) = f'(\psi; \phi) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\psi + \theta \phi) - f(\psi)}{\theta}$$

Lemme (II.3.2)

La Gâteaux-dérivée de $\int_{\Omega_p} Q(\psi) dS$ en ψ dans la direction ϕ est :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\Omega_p} Q(\psi) dS; \phi \right) = \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi}; \phi \right) dS + \oint_{\Gamma_p} \frac{Q(\psi)}{|\nabla \psi|} \phi dl$$

La dérivée de $\int_{\Omega_p} Q(\psi) dS$ par rapport à ψ_b est :

$$\frac{\partial}{\partial \psi_b} \int_{\Omega_p} Q(\psi) dS = \int_{\Omega_p} \frac{\partial Q}{\partial \psi_b} dS - \oint_{\Gamma_p} \frac{Q(\psi)}{|\nabla \psi|} dl$$

Démonstration

Le premier terme de chacune des expressions est évident.

Le second terme vient du fait qu'une variation $\tilde{\psi} = \theta \phi$ de ψ dans le plasma entraîne une variation de la frontière libre du plasma.

Considérons un élément de longueur dl sur le contour du plasma. Cet élément est déplacé selon la direction $d\vec{\tau}$ lorsque ψ subit la variation $\tilde{\psi}$ et on a :

$$\tilde{\psi} + \overline{\nabla \psi} \cdot d\vec{\tau} = \widetilde{\psi_b} \quad (1)$$

Soit \vec{n} la normale sortante à la surface de flux $\psi = \psi_b$, c'est-à-dire la frontière du plasma :

$$\vec{n} = - \frac{\overline{\nabla \psi}}{|\nabla \psi|}$$

On obtient donc en remplaçant $\overline{\nabla \psi}$ dans (1) par son expression en fonction de \vec{n}

$$\vec{n} \cdot d\vec{\tau} = \frac{\tilde{\psi} - \widetilde{\psi_b}}{|\nabla \psi|}$$

La variation de surface dS due à la variation de flux $\tilde{\psi}$ est alors :

$$dS = \vec{n} \cdot d\vec{\tau} dl = \frac{\tilde{\psi} - \widetilde{\psi_b}}{|\nabla \psi|} dl$$

et donc :

$$\int_{\tilde{\Omega}_p} Q(\psi) dS = \oint_{\Gamma_p} Q(\psi) \frac{\tilde{\psi}}{|\nabla \psi|} dl - \widetilde{\psi_b} \oint_{\Gamma_p} \frac{Q(\psi)}{|\nabla \psi|} dl \quad (cqfd)$$

Démonstration de la proposition (II.3.1)

On écrit tout d'abord la première équation du système $E(x) = 0$ pour chaque fonction de base $\phi_j \in V_l$. Le système devient alors un système de $N_l + 3$ équations à $N_l + 3$ inconnues.

Les termes $A_{j,k}, 1 \leq j \leq N_l + 3, 1 \leq k \leq N_l$ sont obtenus en calculant la Gâteaux-dérivée de $E_j(x)$ en ψ dans la direction ϕ_k . Cette dérivée est évidente pour tous les termes linéaires ; le seul terme non linéaire en ψ est :

$$\int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS$$

On applique le lemme (II.3.2) à ce terme et on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS; \phi_k \right) = \int_{\Omega_p} \phi_j \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}; \phi_k \right) dS + \oint_{\Gamma_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) \frac{\phi_k}{|\nabla \bar{\psi}|} dl$$

L'intégrale sur le bord Γ_p du plasma est nulle car on ne considère ici que des fonctions $g(r, \bar{\psi})$ qui s'annulent pour $\bar{\psi} = 0$. g étant une fonction de $\bar{\psi}$ on a :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}; \phi_k \right) = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\psi}}; \phi_k \right) = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \frac{-1}{\psi_a - \psi_b} \phi_k$$

soit en posant :

$$k_\psi = \frac{-1}{\psi_a - \psi_b},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS; \phi_k \right) = \int_{\Omega_p} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_\psi \phi_k dS$$

Les éléments de matrice A_{j, N_i+1} , $1 \leq j \leq N_i+3$, (respectivement A_{j, N_i+2} et A_{j, N_i+3}) sont obtenus en calculant la dérivée de $E_j(x)$ par rapport à ψ_a (respectivement ψ_b et λ). Tous les termes linéaires sont évidents à calculer ; le seul terme non linéaire (en ψ_a et ψ_b) est :

$$\int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS$$

Sa dérivée par rapport à ψ_a est obtenue en dérivant g par rapport à ψ_a . Sa dérivée par rapport à ψ_b est obtenue en appliquant le lemme (II.3.2). On calcule d'abord la dérivée de g par rapport à ψ_a et ψ_b :

$$\frac{\partial g}{\partial \psi_a} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_a} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \frac{1 - \bar{\psi}}{\psi_a - \psi_b} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_a$$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi_b} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_b} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \frac{\bar{\psi}}{\psi_a - \psi_b} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_b$$

La fonction $g(r, \bar{\psi})$ étant nulle sur le bord du plasma, le second terme de l'expression de la dérivée par rapport à ψ_b dans le lemme (II.3.2) est nul. On a finalement

$$\frac{\partial}{\partial \psi_a} \left(\int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS \right) = \int_{\Omega_p} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_a dS$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_b} \left(\int_{\Omega_p} \phi_j g(r, \bar{\psi}) dS \right) = \int_{\Omega_p} \phi_j \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} k_b dS \quad (cqfd)$$

On peut remarquer que la matrice $E'(x)$ est constituée d'une sous-matrice $N_i \times N_i$ symétrique. Pour inverser la matrice $E'(x)$ on met la sous-matrice symétrique sous forme triangulaire grâce à la méthode de Crout (cf A.Jennings) et on fait l'inversion de la matrice entière grâce à la méthode de Woodbury (cf G.H.Golub - C.F.Von Loan).

Résultats numériques

La méthode de Newton converge quadratiquement pourvu que la donnée initiale x^0 ne soit pas trop éloignée de la solution cherchée. Dans le code *PROTEUS*, x^0 est calculé de manière à avoir un plasma circulaire.

3. Algorithme de quasi-Newton

La méthode de Newton a l'avantage de converger de manière quadratique, mais elle nécessite l'inversion de la matrice $E'(x^n)$ à chaque itération ce qui est coûteux en temps de calcul. On peut améliorer cela en utilisant la méthode de quasi-Newton qui consiste à calculer la matrice $E'(x^0)$ pour la première itération et à garder cette matrice pour les itérations suivantes :

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{n+1} = x^n - [E'(x^0)]^{-1} E(x^n) \end{cases}$$

IV. Contrôle statique du bord du plasma par des courants externes

Dans le début de ce chapitre, le problème était de trouver la configuration d'équilibre et la frontière libre du plasma lorsque les courants dans les circuits étaient donnés. On va maintenant résoudre le problème inverse qui consiste à calculer les courants dans les circuits de façon à obtenir une configuration magnétique donnée.

L'approche présentée, qui tient compte des non-linéarités du problème, est celle proposée par J. Blum /1/ et consiste à formuler le problème comme un problème de contrôle optimal pour le système d'équations aux dérivées partielles (II.1.5) – (II.1.7) , (II.1.3).

1. Le problème de contrôle

On désire déterminer les courants dans les circuits de façon à ce que le plasma ait certaines caractéristiques telles que la forme ou la valeur du flux en certains points.

Ce problème est formulé en termes de contrôle optimal avec des paramètres de contrôle, des équations d'état et une fonction- coût.

a. Les paramètres de contrôle

Parmi les N_c circuits du Tokamak (typiquement $N_c = 7$ pour *NET*), on distingue 2 catégories :

- les m circuits $S_{c,1}, \dots, S_{c,m}$ pour lesquels les courants I_i sont les paramètres de contrôle ; on suppose que les m_1 premiers courants sont des courants étendus (dans les bobines de champ poloïdal) et que les $m - m_1$ autres courants sont des courants filamenteux.

- les $N_c - m$ circuits restants pour lesquels les courants I_j sont donnés et gardés fixes au cours de l'optimisation.

Le vecteur $I = (I_1, \dots, I_m) \in R^m$ est appelé vecteur de contrôle et ses m composantes sont les paramètres de contrôle. Ce vecteur peut être sujet à des contraintes telles que la positivité de ses composantes ou une borne supérieure pour sa norme, aussi note-t-on U_{ad} le sous-ensemble de R^m constitué des contrôles admissibles. Dans les cas étudiés, on a $U_{ad} = R^m$ (cas sans contraintes).

b. Les équations d'état

Le vecteur d'état $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) \in V(\Omega_i) \times R^3$, où $V(\Omega_i)$ est défini par (II.2.2), satisfait le système d'équations (II.2.6), qui peut être réécrit en distinguant les circuits dont les courants sont des paramètres de contrôle et ceux dont les courants sont donnés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \phi \, dS + C(\psi, \phi) - \lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \phi \, dS - \sum_{i=1}^{m_1} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi \, dS \\ - \sum_{i=m_1+1}^m \mu_0 I_i \phi(P_i) - \sum_{i=m+1}^{N_c} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi \, dS = 0 \quad \forall \phi \in V(\Omega_i) \\ \psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi \\ \psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi \\ I_p = \frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \, dS \end{array} \right. \quad (II.4.1)$$

avec

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\}$$

$$\mathcal{D} = \{M \in \Omega_{cv}^i / P_a \bar{M} \cdot \nabla \bar{\psi}(M) < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \nabla \bar{\psi}(X) = \vec{0}\}$$

c. La fonction-coût

Suivant les caractéristiques demandées pour le plasma, on définit différents problèmes de contrôle.

Contrôle de la forme du plasma

On veut que la frontière libre du plasma Γ_p soit aussi près que possible d'un contour désiré Γ_d qui peut être tangent à la première paroi de la chambre à vide dans le cas où la configuration désirée est de type limiter, ou qui peut n'avoir aucun point de contact avec la première paroi de la chambre à vide dans le cas où la configuration souhaitée est de type X-point.

Pour rendre Γ_p aussi proche que possible de Γ_d , on minimise la fonction-coût J_1 :

$$J_1 = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\psi(M) - \psi(M_0)]^2 dl$$

où M_0 est un point de référence situé sur le contour Γ_d et $\alpha(M)$ sont des coefficients (ou poids) permettant de moduler le degré de précision pour certains points du contour. La nécessité d'introduire ces poids se justifie par la façon dont le contour Γ_d est donné dans le code *PROTEUS* ; dans la dernière partie de ce chapitre consacrée aux résultats numériques, on explicitera comment donner Γ_d .

Si J_1 est nulle, alors Γ_d est la ligne de flux passant par M_0 .

Si la configuration désirée est de type X-point on peut imposer une condition supplémentaire, à savoir qu'au point hyperbolique le gradient du flux magnétique est nul. On minimise alors la fonction-coût J_2 :

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{\omega_X} \frac{|\overline{\nabla \psi}|^2}{r} dS$$

où $\omega_X \subset \Omega_A$ est un voisinage du point hyperbolique (Ω_A désignant la région du vide accessible au plasma).

La nécessité de minimiser la norme du gradient du flux magnétique sur un voisinage du point hyperbolique, et non simplement d'imposer que ce gradient est nul en ce point, vient du fait que le flux magnétique est une fonction L^2 et donc son gradient est défini presque partout sur Ω .

Cette condition seule n'impose pas qu'alors la configuration est de type X-point, mais ajoutée à la fonction-coût J_1 elle assure une plus grande précision sur la localisation du point hyperbolique.

Contrôle de la valeur du flux ψ

On désire que le flux magnétique ψ ait une valeur donnée en certains points du domaine Ω_i , tels que l'axe magnétique ou un point de la frontière du plasma.

Soit S un point quelconque de Ω_i et soit ψ_S la valeur souhaitée pour le flux au point S . On minimise la fonction-coût J_3 :

$$J_3 = \frac{1}{2} [\psi(S) - \psi_S]^2$$

Dans le cas de l'axe magnétique, on veut que le flux ψ_a sur l'axe soit égal au flux fixé ψ_A . Or on ne connaît pas à priori la position de cet axe. On minimise alors la fonction-coût J_4 :

$$J_4 = \frac{1}{2} [\psi_a - \psi_A]^2$$

Enfin dans le cas du bord du plasma, on veut que le flux ψ_b au bord soit égal au flux désiré ψ_B . De même que pour l'axe magnétique, on ne sait pas à priori où se situe cette frontière. On minimise alors la fonction-coût J_5 :

$$J_5 = \frac{1}{2} [\psi_b - \psi_B]^2$$

Lorsque la fonction-coût J_3 (respectivement J_4 et J_5) est nulle, le flux magnétique est exactement celui souhaité au point fixé S (respectivement sur l'axe magnétique et sur le bord du plasma).

Contrôle d'une ligne de flux particulière

Dans le cas d'une configuration X-point, certaines quantités ne peuvent pas être calculées sur la dernière surface magnétique (bord du plasma) aussi est-il habituel en physique des plasmas de calculer ces quantités sur une surface de flux particulière qui est généralement la surface contenant 95% du flux total contenu dans le plasma. Il est donc intéressant de pouvoir imposer une ligne de flux quelconque du plasma.

On repère une ligne de flux par le flux normalisé $\bar{\psi}$ car on ne peut pas connaître à priori le flux en tout point du plasma. Soit donc Γ_θ la ligne de flux pour laquelle $\bar{\psi} = \theta$ avec $0 < \theta < 1$. On minimise la fonction-coût J_6 :

$$J_6 = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(N) [\psi(N) - \psi(N_0)]^2 dl$$

où N_0 est un point de référence sur Γ_θ et où $\alpha_\theta(N)$ sont des poids introduits pour moduler l'importance de certains points de Γ_θ .

Cas général

On ne considère maintenant qu'une fonction-coût $J(I, \psi)$:

$$\begin{aligned} J(I, \psi) = & \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_a} \alpha(M) [\psi(M) - \psi(M_0)]^2 dl + \frac{\alpha_X}{2} \int_{\omega_X} \frac{|\nabla \bar{\psi}|^2}{r} dS \\ & + \frac{\alpha_S}{2} [\psi(S) - \psi_S]^2 + \frac{\alpha_A}{2} [\psi_a - \psi_A]^2 + \frac{\alpha_B}{2} [\psi_b - \psi_B]^2 \\ & + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(N) [\psi(N) - \psi(N_0)]^2 dl + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i I_i^2 \end{aligned} \quad (II.4.2)$$

Les coefficients $\alpha(M)$, α_X , α_S , α_A , α_B , $\alpha_\theta(N)$ et k_i peuvent être pris égaux à zéro suivant le problème considéré. En particulier, il est possible en théorie de fixer le bord du

plasma Γ_d et une ligne de flux particulière Γ_θ , mais en pratique cela ne peut pas être correctement réalisé du fait du nombre limité des paramètres de contrôle ; on choisira donc $\alpha(M) = 0$ lorsque l'on voudra fixer la ligne de flux Γ_θ et $\alpha_\theta(N) = 0$ lorsque l'on voudra fixer la frontière du plasma Γ_d .

Le dernier terme de la fonction-coût représente le coût énergétique de la configuration.

d. Le problème de contrôle

Le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_I) peut être formulé de la façon suivante : trouver $I \in \mathcal{U}_{ad}$ et $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) \in V(\Omega_i) \times R^3$ qui satisfassent les équations (II.4.1) et tels que :

$$\begin{aligned} J(I, \psi) &= \text{Inf } J(I', \psi') \\ I' &\in \mathcal{U}_{ad} \\ (\psi', \psi'_a, \psi'_b, \lambda') &\in V(\Omega_i) \times R^3 \text{ solution de (II.4.1)} \end{aligned}$$

Des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution au problème du contrôle de la forme du plasma pour un modèle simplifié sont données par J.Blum /1/.

2. Lagrangien et système d'optimalité

Puisque les équations d'état ne sont pas linéaires, on doit définir un Lagrangien afin de dériver formellement les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (\mathcal{P}_I). On définit le Lagrangien \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)) &= J(I, \psi) + \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \overline{\nabla \psi} \cdot \overline{\nabla \chi} dS + C(\psi, \chi) - \lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \chi dS \\ &- \sum_{i=1}^{m_1} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \chi dS - \sum_{i=m_1+1}^m \mu_0 I_i \chi(P_i) - \sum_{i=m+1}^{N_c} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \chi dS \\ &+ \nu_1 \left[\psi_a - \sup_{\Omega_p} \psi \right] + \nu_2 \left[\psi_b - \sup_{\mathcal{D}} \psi \right] + \nu_3 \left[\lambda \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) dS - \mu_0 I_p \right] \end{aligned} \quad (II.4.3)$$

pour $I \in \mathcal{U}_{ad}$, $(\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) \in V(\Omega_i) \times R^3$ et $(\chi, \nu) \in V(\Omega_i) \times R^3$. (χ, ν) est appelé multiplicateur de Lagrange.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda))$ soit solution du problème de contrôle (\mathcal{P}_I) est que $(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu))$ soit point-selle pour le Lagrangien \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi', \nu')) &\leq \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)) \leq \mathcal{L}(I', (\psi', \psi'_a, \psi'_b, \lambda'), (\chi, \nu)) \\ \forall (I', (\psi', \psi'_a, \psi'_b, \lambda'), (\chi', \nu')) &\in \mathcal{U}_{ad} \times V(\Omega_i) \times R^3 \times V(\Omega_i) \times R^3 \end{aligned} \quad (II.4.4)$$

En développant l'inégalité de gauche de (II.4.4), on retrouve les équations (II.4.1) pour le flux magnétique. L'inégalité de droite nous permet d'écrire les équations pour l'adjoint du système, ainsi que la condition d'optimalité.

Proposition (II.4.1)

L'adjoint $(\chi, \nu) \in V(\Omega_i) \times R^3$ satisfait les équations :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{1}{r} \overline{\nabla \chi} \cdot \overline{\nabla \phi} \, dS + C(\chi, \phi) - \lambda \int_{\Omega_p} \chi \frac{\partial g}{\partial \psi} k_{\psi} \phi \, dS \\
& \quad - \nu_1 \phi(P_a) - \nu_2 \phi(P_b) - \nu_3 \lambda \int_{\Omega_p} \frac{\partial g}{\partial \psi} k_{\psi} \phi \, dS \\
& = - \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\psi(M) - \psi(M_0)] [\phi(M) - \phi(M_0)] \, dl - \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla \psi} \cdot \overline{\nabla \phi}}{r} \, dS \\
& \quad - \alpha_S \phi(S) [\psi(S) - \psi_S] - \alpha_A \phi(P_a) [\psi_a - \psi_A] - \alpha_B \phi(P_b) [\psi_b - \psi_B] \\
& \quad - \oint_{\Gamma_0} \alpha_{\theta}(N) [\psi(N) - \psi(N_0)] [\phi(N) - \phi(N_0)] \, dl \quad \forall \phi \in V(\Omega_i) \\
& - \lambda \int_{\Omega_p} \chi \frac{\partial g}{\partial \psi} k_a \, dS + \nu_1 + \nu_3 \lambda \int_{\Omega_p} \frac{\partial g}{\partial \psi} k_a \, dS = 0 \\
& - \lambda \int_{\Omega_p} \chi \frac{\partial g}{\partial \psi} k_b \, dS + \nu_2 + \nu_3 \lambda \int_{\Omega_p} \frac{\partial g}{\partial \psi} k_b \, dS = 0 \\
& - \int_{\Omega_p} \chi g(r, \bar{\psi}) \, dS + \nu_3 \int_{\Omega_p} g(r, \bar{\psi}) \, dS = 0
\end{aligned} \tag{II.4.5}$$

La condition d'optimalité pour le vecteur de contrôle I est :

$$\begin{cases} k_i I_i - \mu_o \int_{S_{e,i}} q_i \chi \, dS = 0 & i = 1, \dots, m_1 \\ k_i I_i - \mu_o \chi(P_i) = 0 & i = m_1 + 1, \dots, m \end{cases} \tag{II.4.6}$$

Démonstration

L'inégalité de gauche de (II.4.4) peut aussi s'écrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)); \phi \right) = 0 \quad \forall \phi \in V(\Omega_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_a} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_b} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial I} \mathcal{L}(I, (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda), (\chi, \nu)); I' - I \right) \geq 0 \quad \forall I' \in \mathcal{U}_{ad}$$

En développant les 4 premières égalités de manière analogue à ce qui a été fait pour le calcul de la matrice de Newton (proposition (II.3.1)), on obtient le système d'équations pour l'état adjoint.

En développant la 5^{ième} inégalité du système ci-dessus, on obtient la condition d'optimalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{m_1} (I'_i - I_i) \left[k_i I_i - \mu_o \int_{S_{c,i}} \chi q_i dS \right] + \sum_{i=m_1+1}^m (I'_i - I_i) \left[k_i I_i - \mu_o \chi(P_i) \right] \geq 0 \quad \forall I' \in \mathcal{U}_{ad}$$

Or dans notre problème $\mathcal{U}_{ad} = R^m$; il s'agit donc d'une optimisation sans contraintes. L'inégalité précédente devient alors une égalité, et on obtient la condition d'optimalité donnée dans la proposition.

(cqfd)

Remarque

Les quantités

$$\begin{aligned} G_i &= k_i I_i - \mu_o \int_{S_{c,i}} q_i \chi dS \\ G_i &= k_i I_i - \mu_o \chi(P_i) \end{aligned} \quad (II.4.7)$$

sont les composantes du gradient de la fonction-coût pour respectivement $i = 1, \dots, m_1$ et $i = m_1 + 1, \dots, m$.

Le système d'optimalité pour le problème (P_I) est le système constitué par les équations d'état (II.4.1), par les équations pour l'adjoint (II.4.5) et par la condition d'optimalité (II.4.6).

Interprétation de l'adjoint en termes d'équation aux dérivées partielles

L'adjoint $(\chi, \nu) \in V(\Omega_i) \times R^3$ est l'inconnue du système d'équations (II.4.5). La première équation de ce système est une formulation faible de l'équation pour l'adjoint et on peut écrire l'équation aux dérivées partielles correspondante.

On rappelle que δ_M désigne la mesure de Dirac au point $M \in \Omega$, et que δ_Γ est la mesure sur le contour Γ définie par :

$$(\delta_\Gamma, f) = \oint_\Gamma f \, dl$$

L'équation aux dérivées partielles satisfaite par l'adjoint est obtenue de la façon suivante : dans la première équation de (II.4.5), on considère une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ ($\mathcal{D}(\Omega_i)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans Ω_i) et on applique la formule de Green à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\chi}{r} \, dS + C(\phi, \chi) \\ &= \int_{\Omega_i - \bar{\omega}_X} \frac{\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\chi}{r} \, dS + \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\chi}{r} \, dS - \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{r} \phi \frac{\partial\chi}{\partial n} \, dl \\ &= \int_{\Omega_i - \bar{\omega}_X} \mu_o L\chi \phi \, dS + \oint_{\partial(\Omega_i - \bar{\omega}_X)} \frac{1}{r} \phi \frac{\partial\chi}{\partial n} \, dl \\ &\quad + \int_{\omega_X} \mu_o L\chi \phi \, dS + \oint_{\partial\omega_X} \frac{1}{r} \phi \frac{\partial\chi}{\partial n} \, dl - \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{r} \phi \frac{\partial\chi}{\partial n} \, dl \\ &= \int_{\Omega_i} \mu_o L\chi \phi \, dS + \oint_{\partial\omega_X} \frac{1}{r} \phi \left[\frac{\partial\chi}{\partial n} \right] \, dl \end{aligned}$$

où $\partial(\Omega_i - \bar{\omega}_X)$ désigne le bord du domaine $\Omega_i - \bar{\omega}_X$ qui comprend le contour \mathcal{C} , un segment de l'axe Oz et du bord $\partial\omega_X$ du domaine ω_X ; $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée selon la normale sortante au domaine Ω_i ou ω_X ; $\left[\frac{\partial\chi}{\partial n} \right] = \frac{\partial\chi_{int}}{\partial n} - \frac{\partial\chi_{ext}}{\partial n}$ est le saut de la dérivée normale de χ sur le bord $\partial\omega_X$ (χ_{int} et χ_{ext} sont respectivement les valeurs de χ à l'intérieur et à l'extérieur de ω_X). L est l'opérateur défini au premier chapitre.

D'autre part, en appliquant la formule de Green à :

$$\int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi}{r} \, dS = \int_{\omega_X} \mu_o L\psi \phi \, dS + \oint_{\partial\omega_X} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} \phi \, dl$$

On obtient alors la formulation forte pour l'adjoint :

$$\begin{aligned}
& \mu_o L\chi - \lambda (\chi - \nu_3) \frac{\partial g}{\partial \psi} k_\psi 1_{\Omega_p} - \nu_1 \delta_{P_a} - \nu_2 \delta_{P_b} \\
& = - \left(\delta_{\Gamma_a}, \alpha(\psi - \psi(M_o)) \right) + \delta_{M_o} \oint_{\Gamma_a} \alpha(M) (\psi(M) - \psi(M_o)) dl \\
& \quad - \alpha_X \mu_o L\psi 1_{\omega_X} - \alpha_S \delta_S (\psi(S) - \psi_S) \\
& \quad - \alpha_A \delta_{P_a} (\psi_a - \psi_A) - \alpha_B \delta_{P_b} (\psi_b - \psi_B) \\
& \quad - \left(\delta_{\Gamma_o}, \alpha_\theta(\psi - \psi(N_o)) \right) + \delta_{N_o} \oint_{\Gamma_o} \alpha_\theta(N) (\psi(N) - \psi(N_o)) dl \\
& \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\omega_X \\
& \chi_{ext} = \chi_{int} \quad \text{sur } \partial\omega_X
\end{aligned}$$

Les trois autres équations de (II.4.5) restent les mêmes.

3. Résolution numérique

Le problème (\mathcal{P}_I) est un problème de contrôle optimal avec des équations d'état non linéaires et une fonction-coût quadratique. Pour résoudre ce problème on utilise une méthode séquentielle quadratique dérivée de la méthode de Newton dans laquelle le vecteur de contrôle I est modifié à chaque itération de façon à minimiser la fonction-coût.

Le but de la méthode utilisée est de résoudre le problème discret dans l'espace $V_i \times R^3$; elle se compose d'itérations externes dont la $n^{ième}$ consiste à définir un problème de contrôle (\mathcal{P}_I^n) pour le système linéarisé en $(\psi^n, \psi_a^n, \psi_b^n, \lambda^n) \in V_i \times R^3$; ce problème est lui-même résolu par des itérations internes de Gradient Conjugué et $(I^{n+1}, \psi^{n+1}, \psi_a^{n+1}, \psi_b^{n+1}, \lambda^{n+1})$ est alors l'optimum pour le problème (\mathcal{P}_I^n).

Dans la suite on utilisera les notations du paragraphe III de ce chapitre; on posera en particulier $x = (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda)$.

a. Le problème (\mathcal{P}_I^n)

Soit $(I^0, \psi^0, \psi_a^0, \psi_b^0, \lambda^0) \in R^m \times V_i \times R^3$.

La $n + 1^{ième}$ itération de Newton consiste à trouver x solution de :

$$[E'(x^n)] x = [E'(x^n)] x^n - E(x^n)$$

où la matrice $E'(x^n)$ est donnée par la proposition (II.3.1).

En simplifiant le second membre on peut réécrire ce système sous la forme :

$$[E'(x^n)] x = E_1(I_{(m)}) + E_0(I) \quad (II.4.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0j} = \sum_{i=m+1}^{N_c} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi_j dS \quad j = 1, \dots, N_l \\ E_{0N_i+1} = 0 \\ E_{0N_i+2} = 0 \\ E_{0N_i+3} = \mu_0 I_p \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1j} = \sum_{i=1}^{m_1} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi_j dS + \sum_{i=m_1+1}^m \mu_0 I_i \phi_j(P_i) \quad j = 1, \dots, N_l \\ E_{1N_i+1} = 0 \\ E_{1N_i+2} = 0 \\ E_{1N_i+3} = 0 \end{array} \right.$$

Le problème (\mathcal{P}_I^n) est alors le suivant : trouver $(I^{n+1}, x^{n+1}) \in R^m \times V_l \times R^3$ solution de (II.4.8) et tel que :

$$\begin{aligned} J(I^{n+1}, \psi^{n+1}) &= \text{Inf } J(I, \psi) \\ I &\in \mathcal{U}_{ad} \\ (\psi, \psi_a, \psi_b, \lambda) &\in V_l \times R^m \text{ solution de (II.4.8)} \end{aligned}$$

De même que pour le cas continu, on peut écrire le système d'optimalité pour (\mathcal{P}_I^n) :

Etat du système

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \overline{\nabla} \psi^{n+1} \cdot \overline{\nabla} \phi \, dS + C(\psi^{n+1}, \phi) - \lambda^{n+1} \int_{\Omega_p^n} g(r, \bar{\psi}^n) \phi \, dS \\
 & - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \phi \left[k_\psi^n \psi^{n+1} + k_a^n \psi_a^{n+1} + k_b^n \psi_b^{n+1} \right] \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) \, dS \\
 & = \sum_{i=1}^{m_1} \mu_0 (I^{n+1})_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi \, dS + \sum_{i=m_1+1}^m \mu_0 (I^{n+1})_i \phi(P_i) \\
 & + \sum_{i=m+1}^{N_c} \mu_0 I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi \, dS \quad \forall \phi \in V_i \\
 \\
 & \psi_a^{n+1} = \sup_{\Omega_p^n} \psi^{n+1} \\
 & \psi_b^{n+1} = \sup_{\mathcal{D}} \psi^{n+1} \\
 \\
 & \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \phi \left[k_\psi^n \psi^{n+1} + k_a^n \psi_a^{n+1} + k_b^n \psi_b^{n+1} \right] \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) \, dS \\
 & + \lambda^{n+1} \int_{\Omega_p^n} g(r, \bar{\psi}^n) \phi \, dS = \mu_0 I_p
 \end{aligned} \right.$$

(II.4.9a)

Etat adjoint

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \frac{1}{r} \overline{\nabla} \psi^{n+1} \cdot \overline{\nabla} \phi \, dS + C(\chi^{n+1}, \phi) - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \chi \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) k_\psi^n \phi \, dS \\
 & - \nu_1^{n+1} \phi(P_a^n) - \nu_2^{n+1} \phi(P_b^n) - \nu_3^{n+1} \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) k_\psi^n \phi \, dS \\
 & = - \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) \left[\psi^{n+1}(M) - \psi^{n+1}(M_0) \right] \left[\phi(M) - \phi(M_0) \right] \, dl \\
 & - \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla} \psi^{n+1} \cdot \overline{\nabla} \phi}{r} \, dS - \alpha_S \phi(S) \left[\psi^{n+1}(S) - \psi_S \right] \\
 & - \alpha_A \phi(P_a^{n+1}) \left[\psi_a^{n+1} - \psi_A \right] - \alpha_B \phi(P_b^{n+1}) \left[\psi_b^{n+1} - \psi_B \right] \\
 & - \oint_{\Gamma_0} \alpha_\theta(N) \left[\psi^{n+1}(N) - \psi^{n+1}(N_0) \right] \left[\phi(N) - \phi(N_0) \right] \, dl \quad \forall \phi \in V_i \\
 \\
 & - \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \chi^{n+1} \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) k_a^n \, dS + \nu_1^{n+1} + \nu_3^{n+1} \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial}{\partial \psi} g(r, \bar{\psi}^n) k_a^n \, dS = 0
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} -\lambda^n \int_{\Omega_p^n} \chi^{n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} g(r, \bar{\psi}^n) k_b^n dS + \nu_2^{n+1} + \nu_3^{n+1} \lambda^n \int_{\Omega_p^n} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} g(r, \bar{\psi}^n) k_b^n dS = 0 \\ -\int_{\Omega_p^n} \chi^{n+1} g(r, \bar{\psi}^n) dS + \nu_3^{n+1} \int_{\Omega_p^n} g(r, \bar{\psi}^n) dS = 0 \end{cases} \quad (II.4.10a)$$

Conditions d'optimalité

$$\begin{cases} k_i (I^{n+1})_i - \mu_o \int_{S_{c,i}} q_i \chi^{n+1} dS = 0 & i = 1, \dots, m_1 \\ k_i (I^{n+1})_i - \mu_o \chi^{n+1}(P_i) = 0 & i = m_1 + 1, \dots, m \end{cases} \quad (II.4.11a)$$

On peut simplifier les systèmes d'équations en les écrivant comme :

$$[E'(x^n)] x^{n+1} = E_1(I^{n+1}) + E_0(I) \quad (II.4.9)$$

$$[E'(x^n)]^T (\chi^{n+1}, \nu^{n+1}) = E_2(x^{n+1}) \quad (II.4.10)$$

$$G^{n+1} = 0 \quad (II.4.11)$$

où E_1, E_0 et E_2 sont les vecteurs de R^{N_i+3} , de composantes :

$$\begin{cases} E_{0j} = \sum_{i=m+1}^{N_c} \mu_o I_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi_j dS & j = 1, \dots, N_l \\ E_{0N_i+1} = 0 \\ E_{0N_i+2} = 0 \\ E_{0N_i+3} = \mu_o I_p \\ E_{1j} = \sum_{i=1}^{m_1} \mu_o (I^{n+1})_i \int_{S_{c,i}} q_i \phi_j dS + \sum_{i=m_1+1}^m \mu_o (I^{n+1})_i \phi_j(P_i) & j = 1, \dots, N_l \\ E_{1N_i+1} = 0 \\ E_{1N_i+2} = 0 \\ E_{1N_i+3} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
E_{2j} = - \oint_{\Gamma_a} \alpha(M) [\psi^{n+1}(M) - \psi^{n+1}(M_0)] [\phi(M) - \phi(M_0)] dl \\
\quad - \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla} \psi^{n+1} \cdot \vec{\nabla} \phi}{r} dS - \alpha_S \phi(S) [\psi^{n+1}(S) - \psi_S] \\
\quad - \alpha_A \phi(P_a^{n+1}) [\psi_a^{n+1} - \psi_A] - \alpha_B \phi(P_b^{n+1}) [\psi_b^{n+1} - \psi_B] \\
\quad - \oint_{\Gamma_o} \alpha_\theta(N) [\psi^{n+1}(N) - \psi^{n+1}(N_0)] [\phi(N) - \phi(N_0)] dl \quad j = 1, \dots, N_l \\
E_{2N_l+1} = 0 \\
E_{2N_l+2} = 0 \\
E_{2N_l+3} = 0
\end{array} \right.$$

et où les composantes du vecteur G sont données par (II.4.7).

b. Algorithme de Gradient Conjugué

On résout ce problème de contrôle optimal par des itérations internes de Gradient Conjugué. Avant de donner l'algorithme de Gradient Conjugué appliqué au problème (\mathcal{P}_I^n), on rappelle en quoi il consiste et on pourra ensuite faire le parallèle avec notre problème.

Soit I un vecteur de R^m et $J(I)$ une fonctionnelle quadratique :

$$J(I) = \frac{1}{2} I^T A I - B^T I + D$$

avec A matrice ($m \times m$) symétrique définie positive, B vecteur de R^m et D scalaire réel. La matrice A étant définie positive, on peut définir le produit scalaire :

$$(I, I')_A = I^T A I' \quad I, I' \in R^m$$

On cherche $\bar{I} \in R^m$ tel que \bar{I} minimise la fonctionnelle $J(I)$.

L'algorithme de Gradient Conjugué s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
I_0 \quad \text{donné} \\
I_{k+1} = I_k - \rho_k \omega_k \quad \text{pour } k \geq 0
\end{array} \right.$$

où la direction de descente ω_k est donnée par :

$$\begin{cases} \omega_0 = J'(I_0) \\ \omega_k = J'(I_k) + \beta_k \omega_{k-1} & \text{pour } k > 0 \end{cases}$$

avec β_k tel que les directions ω_k et ω_{k-1} soient conjuguées pour le produit scalaire associé à A , soit $(\omega_k, \omega_{k-1})_A = 0$,

et où le pas de descente ρ_k vérifie :

$$J(I_k - \rho_k \omega_k) = \inf_{\rho > 0} J(I_k - \rho \omega_k)$$

L'algorithme de gradient conjugué converge théoriquement en m itérations.

Revenons à présent au problème (\mathcal{P}_I^n) ; la fonction-coût à minimiser est la fonction $J(I, \psi)$ donnée par (II.4.2) et on cherche \bar{I} qui réalise ce minimum. On applique donc la méthode du Gradient Conjugué décrite précédemment pour réaliser cette minimisation en ayant soin de noter que le flux magnétique ψ dépend linéairement des courants dans les circuits du Tokamak.

On repère par l'indice j le $j^{\text{ème}}$ itéré de Gradient Conjugué. L'algorithme est le suivant ; initialiser le vecteur de contrôle :

$$I_0^n = I^n$$

Calculer x_0^n en résolvant :

$$[E'(x^n)] x_0^n = E_1(I_0^n) + E_0(I^0) \quad (\text{II.4.12})$$

Calculer l'adjoint (χ_j^n, ν_j^n) en résolvant :

$$[E'(x^n)]^T (\chi_j^n, \nu_j^n) = E_2(x_j^n) \quad (\text{II.4.13})$$

Calculer le gradient de la fonction-coût :

$$\begin{cases} (G_j^n)_i = k_i (I_j^n)_i - \mu_o \int_{S_{c,i}} q_i \chi_j^n dS & i = 1, \dots, m_1 \\ (G_j^n)_i = k_i (I_j^n)_i - \mu_o \chi_j^n(P_i) & i = m_1 + 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{II.4.14})$$

Calculer le vecteur de contrôle I_{j+1}^n et le vecteur d'état x_{j+1}^n :

$$\begin{cases} I_{j+1}^n = I_j^n - \rho_j^n \omega_j^n \\ x_{j+1}^n = x_j^n - \rho_j^n \hat{x}_j^n \end{cases} \quad (II.4.15)$$

Cette écriture se justifie à partir de (II.4.9) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x(I_{j+1}^n) &= [E'(x^n)]^{-1} E_1(I_{j+1}^n) + [E'(x^n)]^{-1} E_0(I^0) \\ \Leftrightarrow x(I_{j+1}^n) &= [E'(x^n)]^{-1} E_1(I_j^n) - \rho_j^n [E'(x^n)]^{-1} E_1(\omega_j^n) + [E'(x^n)]^{-1} E_0(I^0) \\ \Leftrightarrow x(I_{j+1}^n) &= x(I_j^n) - \rho_j^n \hat{x}_j^n \\ \Leftrightarrow x_{j+1}^n &= x_j^n - \rho_j^n \hat{x}_j^n \end{aligned}$$

Dans (II.4.15) la direction de descente ω_j^n (et \hat{x}_j^n) est obtenue par :

$$\begin{cases} \omega_j^n = G_j^n + \beta_j^n \omega_{j-1}^n \\ \hat{x}_j^n = \tilde{x}_j^n + \beta_j^n \hat{x}_{j-1}^n \end{cases} \quad (II.4.16)$$

où \tilde{x}_j^n correspond simplement à $\hat{x}(G_j^n)$ et où $\beta_j^n = -\beta_{num}/\beta_{den}$ avec :

$$\begin{aligned} \beta_{num} &= \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\tilde{\psi}_j^n(M) - \tilde{\psi}_j^n(M_0)] [\hat{\psi}_{j-1}^n(M) - \hat{\psi}_{j-1}^n(M_0)] dl \\ &+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla} \tilde{\psi}_j^n \cdot \overline{\nabla} \hat{\psi}_{j-1}^n}{r} dS + \alpha_S \tilde{\psi}_j^n(S) \hat{\psi}_{j-1}^n(S) \\ &+ \alpha_A (\tilde{\psi}_a)_j^n (\hat{\psi}_a)_{j-1}^n + \alpha_B (\tilde{\psi}_b)_j^n (\hat{\psi}_b)_{j-1}^n \\ &+ \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(M) [\tilde{\psi}_j^n(N) - \tilde{\psi}_j^n(N_0)] [\hat{\psi}_{j-1}^n(N) - \hat{\psi}_{j-1}^n(N_0)] dl \\ &+ \sum_{i=1}^m k_i (G_j^n)_i (\omega_{j-1}^n)_i \\ \beta_{den} &= \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\hat{\psi}_{j-1}^n(M) - \hat{\psi}_{j-1}^n(M_0)]^2 dl + \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{|\overline{\nabla} \hat{\psi}_{j-1}^n|^2}{r} dS \\ &+ \alpha_S [\hat{\psi}_{j-1}^n(S)]^2 + \alpha_A [(\hat{\psi}_a)_{j-1}^n]^2 + \alpha_B [(\hat{\psi}_b)_{j-1}^n]^2 \\ &+ \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(N) [\hat{\psi}_{j-1}^n(N) - \hat{\psi}_{j-1}^n(N_0)]^2 dl + \sum_{i=1}^m k_i (\omega_{j-1}^n)_i^2 \end{aligned} \quad (II.4.17)$$

Dans (II.4.15) le pas de descente ρ_j^n vérifie :

$$J(I_j^n - \rho_j^n \omega_j^n, \psi_j^n - \rho_j^n \widehat{\psi}_j^n) = \inf_{\rho > 0} J(I_j^n - \rho \omega_j^n, \psi_j^n - \rho \widehat{\psi}_j^n)$$

soit $\rho_j^n = \rho_{num} / \rho_{den}$ avec :

$$\begin{aligned} \rho_{num} &= \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\psi_j^n(M) - \psi_j^n(M_0)] [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_0)] dl \\ &+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla} \psi_j^n \cdot \vec{\nabla} \widehat{\psi}_j^n}{r} dS + \alpha_S [\psi_j^n(S) - \psi_S] \widehat{\psi}_j^n(S) \\ &+ \alpha_A [(\psi_a)_j^n - \psi_A] (\widehat{\psi}_a)_j^n + \alpha_B [(\psi_b)_j^n - \psi_B] (\widehat{\psi}_b)_j^n \\ &+ \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(M) [\psi_j^n(N) - \psi_j^n(N_0)] [\widehat{\psi}_j^n(N) - \widehat{\psi}_j^n(N_0)] dl \\ &+ \sum_{i=1}^m k_i (I_j^n)_i (\omega_{j-1}^n)_i \end{aligned} \tag{II.4.18}$$

$$\begin{aligned} \rho_{den} &= \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_0)]^2 dl + \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{|\vec{\nabla} \widehat{\psi}_j^n|^2}{r} dS \\ &+ \alpha_S [\widehat{\psi}_j^n(S)]^2 + \alpha_A [(\widehat{\psi}_a)_j^n]^2 + \alpha_B [(\widehat{\psi}_b)_j^n]^2 \\ &+ \oint_{\Gamma_\theta} \alpha_\theta(N) [\widehat{\psi}_j^n(N) - \widehat{\psi}_j^n(N_0)]^2 dl + \sum_{i=1}^m k_i (\omega_j^n)_i^2 \end{aligned}$$

Le nombre de paramètres de contrôle étant égal à m , l'algorithme de Gradient Conjugué converge théoriquement en au plus m itérations. On peut alors déduire :

$$\begin{cases} I^{n+1} = I_m^n \\ x^{n+1} = x_m^n \end{cases} \tag{II.4.19}$$

Les itérations externes se terminent lorsque le critère de convergence est satisfait. On note ε l'erreur maximale autorisée (erreur absolue) ; la convergence est obtenue lorsque :

$$|x^{n+1} - x^n| \leq \varepsilon.$$

Le schéma (II.4.20) représente le schéma de principe de l'algorithme décrit ci-dessus.

Dans le paragraphe suivant, des résultats obtenus avec cet algorithme sont présentés et commentés.

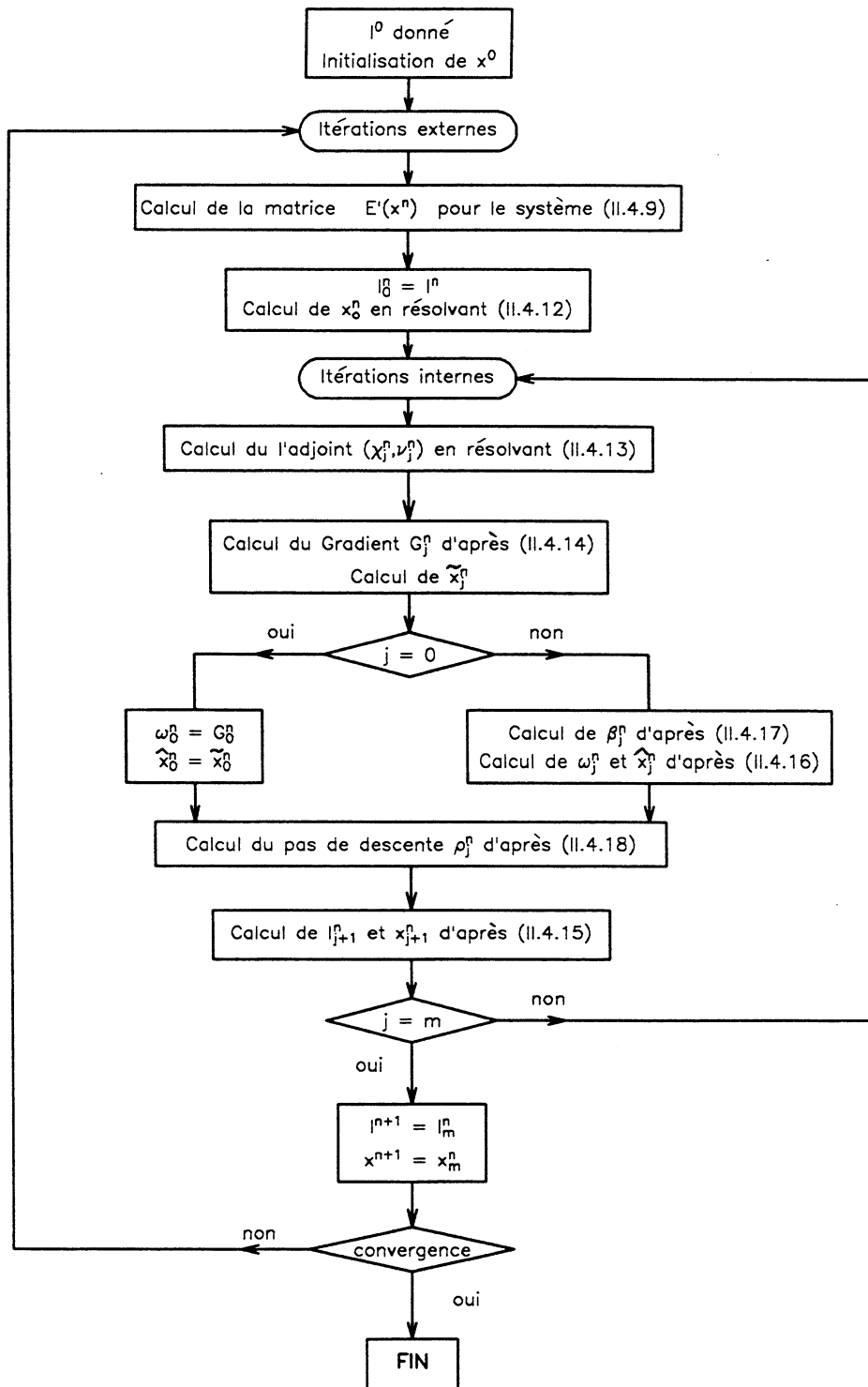


Schéma (II.4.20) : schéma de principe

V. Résultats numériques

Trois cas typiques vont illustrer la méthode de résolution du problème inverse statique décrite précédemment. Le premier exemple est celui d'une configuration de type limiter pour laquelle on impose la valeur du flux sur l'axe magnétique. Le deuxième exemple est celui d'une configuration avec un unique point hyperbolique dans la partie inférieure du plasma (ou single null). Le troisième exemple est celui d'une configuration X -point symétrique par rapport à l'axe horizontal Or , pour laquelle on impose une ligne de flux particulière Γ_θ pour $\theta = 0.90$, et la valeur du flux sur le bord du plasma.

La configuration limiter est la configuration naturelle pour une décharge Tokamak lorsque le plasma commence à se former. En effet, le plasma est alors relativement petit et le courant plasma relativement faible, et une configuration X -point nécessiterait de très forts courants dans les bobines de champ poloïdal B_9 et B_{10} (cf figure (I.3.1)).

Lorsque le chauffage du plasma devient important, le plasma ne peut plus toucher les parois du Tokamak car les matériaux ne résisteraient pas à de telles températures. On a alors une configuration X -point, avec soit un seul point hyperbolique (single null), soit deux points hyperboliques (double null). On a choisi de présenter un exemple avec un seul point hyperbolique afin d'illustrer un cas non symétrique par rapport à l'axe horizontal Or du tore, et un cas avec deux points hyperboliques pour lequel une ligne de flux particulière Γ_θ est imposée.

Avant de donner ces trois exemples, il est nécessaire d'expliquer la façon dont la frontière du plasma désirée Γ_d ou une ligne de flux particulière Γ_θ sont introduites.

1. Donnée des lignes de flux désirées

Dans la section poloïdale du tore, on définit les points du plasma P_1, P_2, P_3, P_4 tels que :

- $P_1 = (r_1, z_1)$: point du plasma dont l'abscisse est minimale (et positive)
- $P_2 = (r_2, z_2)$: point du plasma dont l'ordonnée est maximale
- $P_3 = (r_3, z_3)$: point du plasma dont l'abscisse est maximale (et positive)
- $P_4 = (r_4, z_4)$: point du plasma dont l'ordonnée est minimale

a. Cas $z_1 = z_3$

Dans le cas où les points P_1 et P_3 ont des ordonnées égales, on définit le rayon minimum a_o , le rayon maximum r_o , l'ellipticité supérieure e_s , et inférieure e_i , la triangularité

supérieure t_s , et inférieure t_i du plasma par :

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{r_3 - r_1}{2} & r_o &= \frac{r_3 + r_1}{2} \\ e_s &= \frac{z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2}}{a_o} & e_i &= \frac{-z_4 + \frac{z_1 + z_3}{2}}{a_o} \\ t_s &= \frac{r_o - r_2}{a_o} & t_i &= \frac{r_o - r_4}{a_o} \end{aligned}$$

Le bord désiré du plasma Γ_d est alors calculé à partir des quantités définies ci-dessus, comme étant une courbe continue passant par les points P_1 à P_4 .

Supposons que l'on désire une configuration avec un point hyperbolique dans la partie supérieure du plasma. On calcule alors deux morceaux d'ellipses, le premier passant par les points P_1, P_2 et de centre P_3 , le second passant par les points P_2, P_3 et de centre P_1 . Les points (r, z) de la courbe ainsi obtenue vérifient alors :

$$\begin{cases} r = r_o + a_o - \frac{4 - (t_s + 1)^2}{e_s^2} \sqrt{\frac{4e_s^2 a_o^2}{4 - (t_s + 1)^2} - (z - z_3)^2} \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{cases} \quad (II.5.1a)$$

$$\begin{cases} r = r_o - a_o + \frac{4 - (t_s - 1)^2}{e_s^2} \sqrt{\frac{4e_s^2 a_o^2}{4 - (t_s - 1)^2} - (z - z_1)^2} \\ z_3 \leq z \leq z_2 \end{cases} \quad (II.5.1b)$$

Supposons maintenant que l'on désire une configuration de type limiter dans la partie supérieure du plasma. On calcule alors la courbe paramétrique définie par :

$$\begin{cases} r = r_o + a_o \cos(\varphi + t_s \sin \varphi) \\ z = e_s \sin \varphi + \frac{z_1 + z_3}{2} \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (II.5.2)$$

On peut calculer de manière similaire une courbe représentant le bord désiré du plasma dans la partie inférieure du plasma à partir des points P_1, P_3, P_4 et de l'ellipticité et de la triangularité inférieures.

On obtient alors le bord désiré Γ_d du plasma comme étant l'union de la courbe de la partie supérieure du plasma et celle de la partie inférieure du plasma. On choisit

alors N_d points M_i de ce contour et on minimise la fonction-coût J'_1 définie par :

$$J'_1 = \sum_{i=1}^{N_d} \alpha(M_i) [\psi(M_i) - \psi(M_1)]^2 \quad (II.5.3)$$

b. Cas $z_1 \neq z_3$

Supposons maintenant que les points P_1 et P_3 aient des ordonnées non égales, l'utilisateur du code de calcul doit alors donner lui-même les coordonnées de N_d points sur le contour désiré Γ_d du plasma ; on minimisera ainsi la fonction-coût J'_1 définie par (II.5.3).

c. Ligne de flux Γ_θ

Le cas d'une ligne de flux Γ_θ désirée est traité de manière similaire : on définit 4 points $P_{1\theta}, P_{2\theta}, P_{3\theta}, P_{4\theta}$ de la ligne de flux désirée pour lesquels l'abscisse ou l'ordonnée est soit maximale soit minimale.

Si les ordonnées des points $P_{1\theta}$ et $P_{3\theta}$ sont égales, on définit les ellipticités et triangularités correspondant aux 4 points et on calcule le contour Γ_θ par une formule analogue à (II.5.2) ; on choisit alors N_θ points de ce contour.

Si les ordonnées des points $P_{1\theta}$ et $P_{3\theta}$ ne sont pas égales, l'utilisateur doit donner les coordonnées de N_θ points sur la ligne de flux désirée Γ_θ .

A partir de N_θ points N_i de cette ligne de flux souhaitée on minimise la fonction-coût J'_6 définie par :

$$J'_6 = \sum_{i=1}^{N_\theta} \alpha_\theta(N_i) [\psi(N_i) - \psi(N_1)]^2 \quad (II.5.4)$$

2. Présentation des résultats

Chaque sortie graphique représente le plasma dans un plan poloïdal. Outre la sortie graphique, on précise quelles sont les données utilisées et quels sont les résultats numériques obtenus.

a. Cas d'un limiter

Données :

Courant plasma total : $I_p = 10 \text{ MA}$

Coefficients : $\bar{c}_p = 0.0098 ; \bar{c}_f = 4.255$

Profil du courant plasma : $g(r, \bar{\psi}) = r \bar{c}_p (1 - \bar{\psi}^2) + r^{-1} \bar{c}_f (1 - \bar{\psi}^2)$

Nombre de circuits étendus : $N_1 = 4$
 Courants initiaux : $I_1 = I_2 = 5 \text{ MA}$
 $I_3 = I_4 = 10 \text{ MA}$
 Nombre de circuits filamenteux : 3
 Position et courants initiaux : $P_5 = (4.00, 9.0) ; I_5 = 5 \text{ MA}$
 $P_6 = (11.5, 6.0) ; I_6 = -2 \text{ MA}$
 $P_7 = (11.5, 3.0) ; I_7 = -2 \text{ MA}$

Nombre de points sur Γ_d : $N_d = 9$
 Poids : $\alpha(M_i) = 10^2 , i = 1, \dots, N_d$
 Ellipticités : $e_s = e_i = 1.41$
 Triangularités : $t_s = t_i = 0.075$
 Rayons minimum et maximum : $a_o = 2.12 \text{ (m)} ; R_o = 5.85 \text{ (m)}$
 Flux sur l'axe magnétique : $\psi_A = 126.5 \text{ (Wb)} ; \alpha_A = 10^1$
 Poids des courants : $k_i = 10^{-4} , i = 1, \dots, 4$
 $k_5 = 4.4 \cdot 10^{-4}$
 $k_6 = k_7 = 3.6 \cdot 10^{-3}$
 Erreur maximale autorisée : $\epsilon = 10^{-5}$

Résultats :

Le programme converge en 9 itérations externes.

L'erreur finale est $Res = 5.7 \cdot 10^{-6}$.

Courants dans les circuits : $I_1 = 5.44 \text{ MA}$
 $I_2 = 5.00 \text{ MA}$
 $I_3 = 11.65 \text{ MA}$
 $I_4 = 12.46 \text{ MA}$
 Courants filamenteux : $I_5 = 2.69 \text{ MA}$
 $I_6 = -0.98 \text{ MA}$
 $I_7 = -3.61 \text{ MA}$

Coefficient de normalisation : $\lambda = 1.27$
 Axe magnétique : $r_a = 5.965 \text{ (m)} ; z_a = 0.0 \text{ (m)}$
 Flux : $\psi_a = 126.5 \text{ (Wb)}$
 Point limiter : $r_b = 3.710 \text{ (m)} ; z_b = 0.0 \text{ (m)}$
 Flux : $\psi_b = 79.83 \text{ (Wb)}$
 Volume du plasma : $V_p = 726 \text{ (m}^3\text{)}$

L'erreur calculée est une erreur absolue portant sur des quantités qui sont de l'ordre de l'unité et cela explique donc la valeur de l'erreur maximale autorisée ϵ .

La figure (II.5.1) représente le plasma et les lignes de flux poloidal à l'intérieur de la chambre à vide.

Sur cette figure, les points de Γ_a sont repérés par des croix. Les positions de l'axe magnétique et du point limiter sont repérées par une croix.

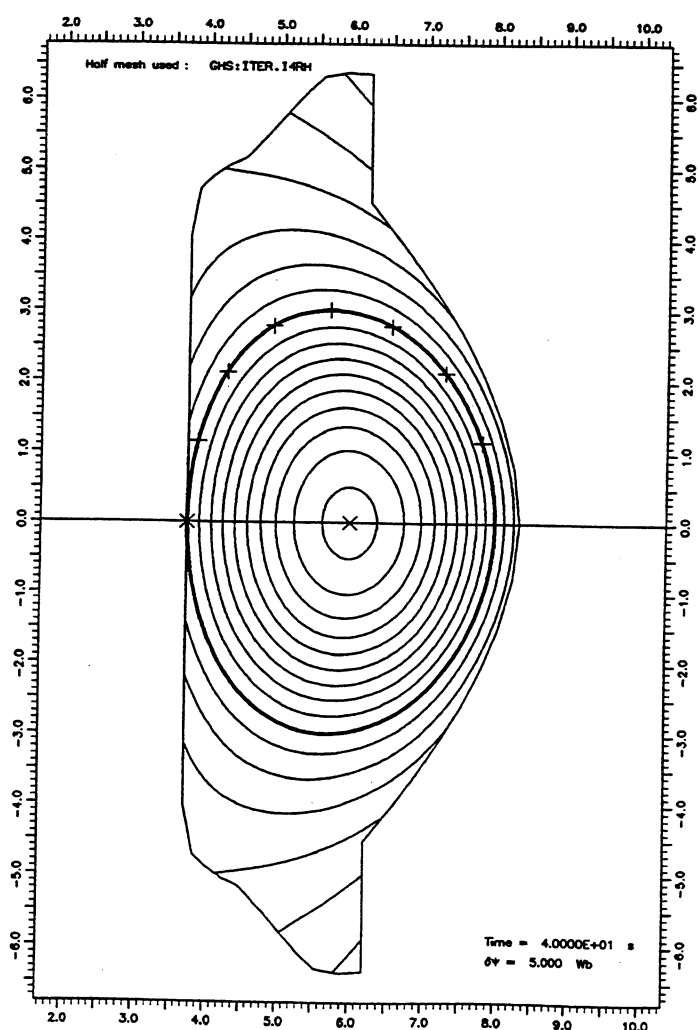


Figure (II.5.1) : Configuration limiter

b. Cas d'un 'single-null'

Données :

Courant plasma total : $I_p = 22 \text{ MA}$
Coefficients : $\bar{c}_p = 0.123$; $\bar{c}_f = 3.415$
Profil du courant plasma : $g(r, \bar{\psi}) = r \bar{c}_p (1 - \bar{\psi}^2) + r^{-1} \bar{c}_f (1 - \bar{\psi}^2)$

Nombre de circuits étendus : $N_1 = 14$
Courants initiaux : $I_1 = -16.87 \text{ MA}$ $I_2 = -13.99 \text{ MA}$
 $I_3 = -13.33 \text{ MA}$ $I_4 = -10.86 \text{ MA}$
 $I_5 = 4.59 \text{ MA}$ $I_6 = 13.61 \text{ MA}$
 $I_7 = -5.07 \text{ MA}$ $I_8 = 10.65 \text{ MA}$
 $I_9 = 12.30 \text{ MA}$ $I_{10} = 3.88 \text{ MA}$
 $I_{11} = -5.60 \text{ MA}$ $I_{12} = 11.87 \text{ MA}$
 $I_{13} = -4.96 \text{ MA}$ $I_{14} = -18.77 \text{ MA}$

Nombre de points sur Γ_d : $N_d = 16$
Poids : $\alpha(M_i) = 10^2$, $i = 1, \dots, 14$
 $\alpha(M_i) = 1.0$, $i = 15, 16$
Ellipticités : $e_s = 1.95$; $e_i = 2.58$
Triangularités : $t_s = 0.32$; $t_i = 0.53$
Rayons minimum et maximum : $a_o = 1.9 \text{ (m)}$; $R_o = 5.80 \text{ (m)}$
Ordonnée : $z_1 = 0.90 \text{ (m)}$
Point hyperbolique : $r_X = 4.80 \text{ (m)}$; $z_X = -4.00 \text{ (m)}$
Poids : $\alpha_X = 10^4$
Poids des courants : $k_i = 10^{-4}$, $i = 1, \dots, 14$
Erreur maximale autorisée : $\epsilon = 10^{-4}$

Résultats :

Le programme converge en 29 itérations externes.

L'erreur finale est $Res = 7.01 \cdot 10^{-5}$.

Courants dans les circuits : $I_1 = -16.10 \text{ MA}$ $I_2 = -13.57 \text{ MA}$
 $I_3 = -13.00 \text{ MA}$ $I_4 = -9.80 \text{ MA}$
 $I_5 = 5.96 \text{ MA}$ $I_6 = 12.68 \text{ MA}$
 $I_7 = -5.75 \text{ MA}$ $I_8 = 14.57 \text{ MA}$
 $I_9 = 12.97 \text{ MA}$ $I_{10} = 3.17 \text{ MA}$
 $I_{11} = -5.64 \text{ MA}$ $I_{12} = 12.14 \text{ MA}$
 $I_{13} = -4.92 \text{ MA}$ $I_{14} = -18.90 \text{ MA}$

Coefficient de normalisation :	$\lambda = 1.63$	
Axe magnétique :	$r_a = 6.00 \text{ (m)}$; $z_a = 0.83 \text{ (m)}$
Flux :	$\psi_a = 119.3 \text{ (Wb)}$	
Point hyperbolique :	$r_b = 4.78 \text{ (m)}$; $z_b = -3.95 \text{ (m)}$
Flux :	$\psi_b = 26.58 \text{ (Wb)}$	
Volume du plasma :	$V_p = 853 \text{ (m}^3\text{)}$	

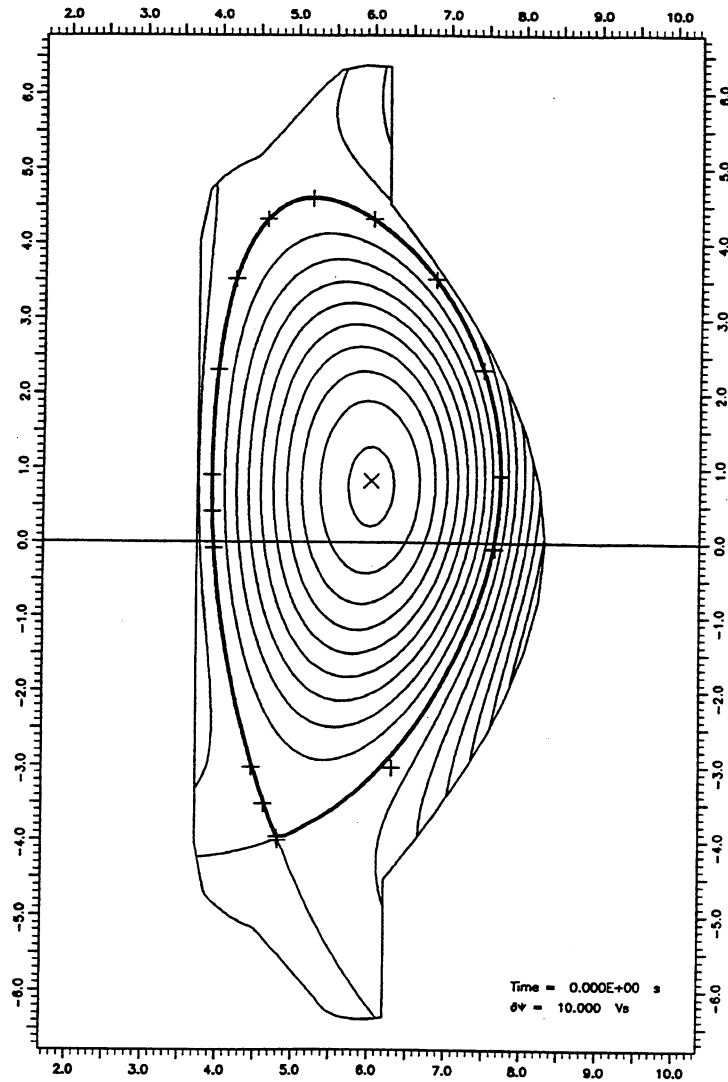


Figure (II.5.2) : 'Single-null'

La figure (II.5.2) représente le plasma et les lignes de flux poloïdal à l'intérieur de la chambre à vide.

Sur cette figure, les points de la frontière désirée du plasma sont repérés par des croix. On peut remarquer que tous les points marqués se situent sur la ligne de flux représentant le bord du plasma Γ_p , sauf le point en bas à droite. Cette localisation est dûe au poids affecté à ce point (voir les données).

Les positions de l'axe magnétique et du point hyperbolique sont repérées par une croix.

c. Cas d'un 'double-null'

Données :

Courant plasma total : $I_p = 22 \text{ MA}$
 Coefficients : $\bar{c}_p = 0.123$; $\bar{c}_f = 3.415$
 Profil du courant plasma : $g(r, \bar{\psi}) = r \bar{c}_p (1 - \bar{\psi}^2) + r^{-1} \bar{c}_f (1 - \bar{\psi}^2)$

Nombre de circuits étendus : $N_c = 7$
 Courants initiaux : $I_1 = I_2 = -20.00 \text{ MA}$
 $I_3 = -10.00 \text{ MA}$
 $I_4 = 0.00 \text{ MA}$
 $I_5 = 5.00 \text{ MA}$
 $I_6 = I_7 = -5.00 \text{ MA}$

Ligne de flux désirée pour : $\theta = 0.9$
 Nombre de points sur Γ_θ : $N_\theta = 9$
 Poids : $\alpha(N_i) = 10^2$, $i = 1, \dots, N_\theta$
 Ellipticités : $e_{s\theta} = e_{i\theta} = 1.95$
 Triangularités : $t_{s\theta} = t_{i\theta} = 0.39$
 Rayons minimum et maximum : $a_{o\theta} = 1.98 \text{ (m)}$; $R_o = 5.95 \text{ (m)}$
 Point hyperbolique : $r_X = 4.59 \text{ (m)}$; $z_X = 4.80 \text{ (m)}$
 Poids : $\alpha_X = 10^2$
 Flux sur le bord du plasma : $\psi_B = 48.85 \text{ (Wb)}$; $\alpha_B = 10^1$
 Nombre de paramètres de contrôle : $m = 6$
 Poids : $k_i = 10^{-4}$, $i = 1, \dots, 3$
 $k_5 = 4.4 \cdot 10^{-4}$
 $k_6 = k_7 = 3.6 \cdot 10^{-3}$
 Erreur maximale autorisée : $\epsilon = 10^{-5}$

Résultats :

Le programme converge en 9 itérations externes.

L'erreur finale est $Res = 6.7 \cdot 10^{-7}$.

Courants dans les circuits :

$I_1 = -10.76 \text{ MA}$
$I_2 = -3.83 \text{ MA}$
$I_3 = 11.33 \text{ MA}$
$I_5 = 19.91 \text{ MA}$
$I_6 = -8.45 \text{ MA}$
$I_7 = -3.96 \text{ MA}$

Coefficient de normalisation : $\lambda = 1.31$

Axe magnétique : $r_a = 6.148 \text{ (m)}$; $z_a = 0.0 \text{ (m)}$

Flux : $\psi_a = 141.8 \text{ (Wb)}$

Point hyperbolique : $r_b = 4.59 \text{ (m)}$; $z_b = 4.81 \text{ (m)}$

Flux : $\psi_b = 48.82 \text{ (Wb)}$

Volume du plasma : $V_p = 1012 \text{ (m}^3\text{)}$

La figure (II.5.3) représente le plasma et les lignes de flux à l'intérieur de la chambre à vide.

Sur cette figure, les points de la ligne de flux désirée sont repérés par des cercles. On peut remarquer que 16 points sont marqués alors que $N_\theta = 9$; cela vient du fait que l'on a supposé que la configuration magnétique était symétrique par rapport à l'axe horizontal Or ; les calculs n'ont été faits que dans la partie supérieure ($z > 0$) et les résultats ont été étendus dans la partie inférieure par symétrie par rapport à l'axe horizontal.

Les positions de l'axe magnétique et des 2 points hyperboliques sont repérées par une croix.

d. Caractéristiques des résultats

Dans les trois cas présentés le comportement de la fonction-coût est identique. Pendant les 3 premières itérations externes, la fonction-coût a une valeur élevée au début des itérations de Gradient Conjugué ($\sim 10^4$), et atteint une valeur relativement petite à la fin de ces itérations (~ 1). Puis la fonction-coût continue à diminuer au cours des itérations externes jusqu'à atteindre une valeur minimale ($\sim 10^{-1}$).

Enfin, les temps de calcul sur *CRAY - Y MP 8.32* sont de 35 s.CPU pour les configurations limiter et 'double-null', et de 300 s.CPU pour la configuration 'single-null'.

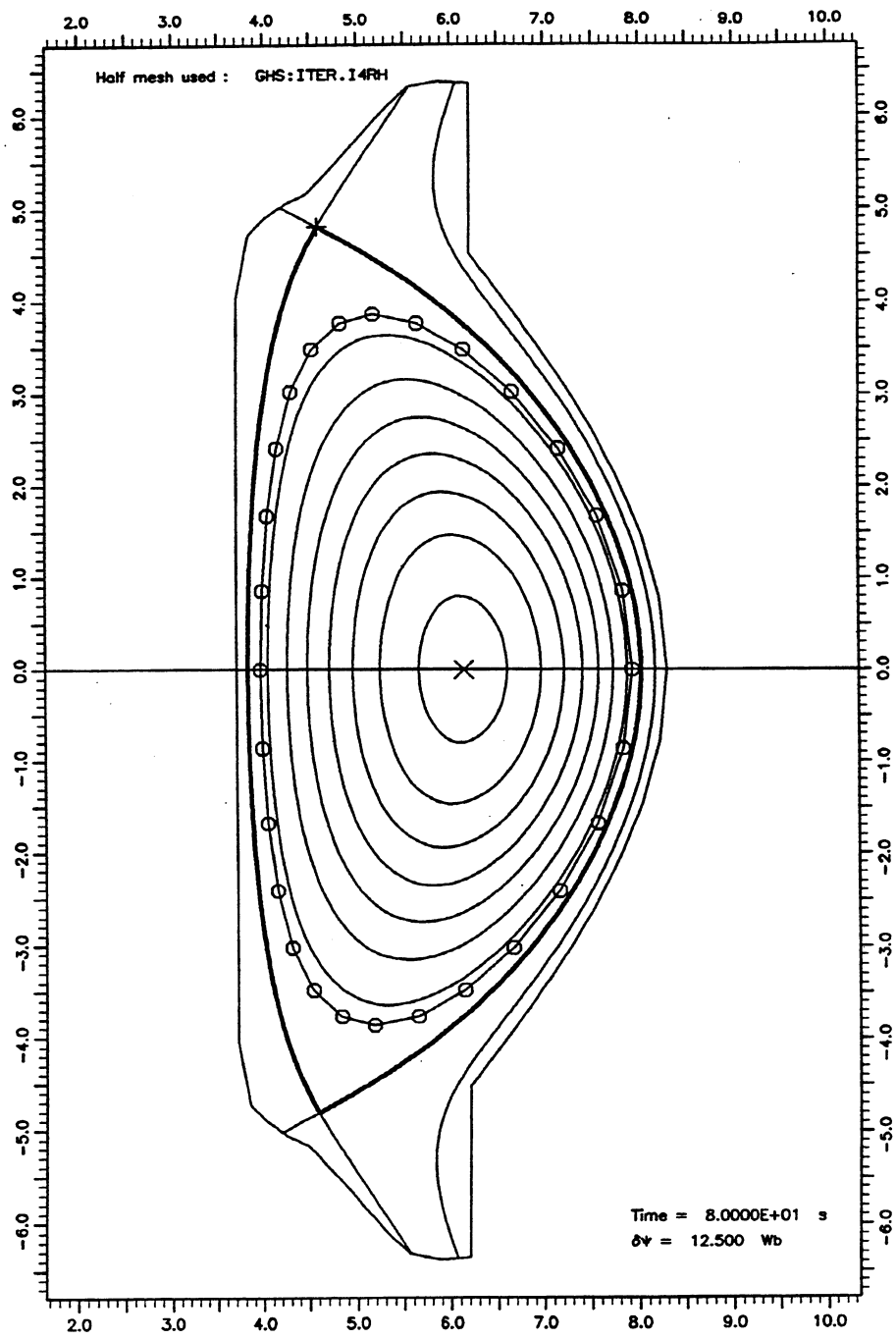


Figure (II.5.3) : 'Double-null'

CHAPITRE III

EVOLUTION

DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction

On pourrait considérer le problème de la dynamique du courant plasma dans un Tokamak comme celui de l'évolution d'un transformateur non linéaire, c'est-à-dire que les courants dans les bobines de champ poloïdal varient de façon donnée, génèrent un courant plasma (qui est chauffé par chauffage ohmique), et font varier la forme et la position du plasma à l'intérieur de la chambre à vide.

Au début de la décharge, il n'existe pas de courant plasma dans un Tokamak mais seulement un vide de base et quelques électrons libres dans la chambre à vide dont la présence s'explique par l'action des rayons cosmiques. A ce moment, on fait varier rapidement le courant dans le solénoïde central ce qui engendre, par effet inductif, un très grand champ électrique \vec{E} (plusieurs dizaines de Volts / cm) dirigé selon l'axe toroïdal \vec{e}_φ . Ce champ électrique accélère très rapidement le peu d'électrons existants ; le champ magnétique étant uniforme, les électrons ont une trajectoire circulaire autour des lignes de flux de ce champ avec un rayon de Larmor inversement proportionnel à l'intensité du champ magnétique. Par effet avalanche, le nombre d'électrons augmente rapidement du fait des collisions inélastiques entre les électrons existants et le peu d'atomes présents dans la chambre à vide. Ce processus engendre un courant plasma qui est au début uniquement dirigé selon l'axe \vec{e}_φ . A son tour ce courant crée un champ magnétique poloïdal qui agit sur le courant plasma, le dévie et crée ainsi un courant poloïdal. A un certain moment, il se crée des surfaces magnétiques qui contiennent les lignes de force du champ magnétique \vec{B} et celles du courant plasma. Une fois les surfaces magnétiques créées commence alors la phase de la décharge à laquelle nous nous intéressons.

Le problème que nous allons maintenant résoudre est celui d'établir la relation entre l'évolution du courant plasma, la résistivité, la position et le profil du plasma, et la valeur des courants dans les bobines de champ poloidal dès que les surfaces magnétiques existent.

Tout d'abord, on va examiner les conséquences de l'équation de Grad-Shafranov et plus particulièrement de la simplification faite dans l'équation du mouvement en négligeant la vitesse.

En combinant l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{j} \times \vec{B} \quad \text{où} \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

avec les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \vec{j} = \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \end{cases}$$

où le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \vec{\nabla}\psi \times \vec{e}_\varphi + \frac{f}{r} \vec{e}_\varphi$$

on obtient la composante toroïdale de la densité de courant plasma :

$$\begin{aligned} j_\varphi &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 r} \vec{\nabla}\psi \right) \\ &= r \left[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\nabla}p + \frac{f}{\mu_0 r^2} \vec{\nabla}f \right] \cdot \frac{\vec{\nabla}\psi}{|\nabla\psi|^2} \end{aligned}$$

Si l'on considère des échelles de temps plus longues que le temps de Alfvén $\tau_A = L/v_A$, où L est la longueur caractéristique du système et v_A est la vitesse de Alfvén définie par $\vec{v}_A = \vec{B}/\sqrt{\mu_0\rho}$, on peut négliger le terme $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$ et on obtient, dans le plasma, l'équation de Grad-Shafranov classique.

En d'autres termes, l'équation de Grad-Shafranov nous permet bien de considérer des phénomènes variables dans le temps, mais du fait de la simplification, on ne connaît rien sur le champ des vitesses dans le plasma. Ceci engendre évidemment une difficulté non négligeable lorsque l'on veut modéliser l'évolution dans le temps d'un milieu déformable comme c'est le cas pour le plasma.

On peut aussi observer que l'équation de Grad-Shafranov ne contient pas l'action du champ électrique ($\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{\eta} \cdot \vec{j}$). Or on pourrait se poser la question suivante : peut-on déterminer au moyen de la seule équation de Grad-Shafranov le mouvement du plasma lorsque l'on a éliminé la vitesse ? La réponse est évidemment *NON*. Mais on ne veut pas modifier l'équation de Grad-Shafranov qui est parfaitement valable sur les échelles de temps considérées.

En fait, une des difficultés de notre problème est liée au rôle du 'champ du transformateur', avec lequel, dans un Tokamak, on sous-entend la chose suivante : considérons un Tokamak sans plasma ; on peut toujours déterminer des valeurs de courants dans les bobines de champ poloïdal qui produisent un flux magnétique $\psi(r, z)$ sensiblement constant à l'intérieur de la chambre à vide ; il est bien évident que la géométrie du système, c'est-à-dire l'extension de la chambre à vide et la position des bobines de champ poloïdal sont très importantes pour réaliser un tel flux, alors que les structures passives ne font quant à elles qu'introduire un temps de retard. On peut renormaliser les courants dans les bobines de champ poloïdal de façon à avoir un champ de transformateur de flux unitaire à l'intérieur de la chambre à vide et cela au moyen d'une seule constante α . En faisant varier α dans le temps, on peut adapter le champ du transformateur et engendrer ainsi le processus avalanche, en gardant toujours le champ du transformateur nul sur l'axe vertical du tore et à l'infini.

Si l'on considère maintenant l'équation de Grad-Shafranov avec des courants $I_n(t)$ donnés dans les bobines de champ poloïdal, on peut résoudre le problème consistant à déterminer $\psi(r, z, t)$ à chaque instant et on détermine aussi la valeur $\psi_a(t)$ du flux sur l'axe magnétique et de sa dérivée temporelle $\dot{\psi}_a(t)$.

On peut montrer que $\dot{\psi}_a$ est négatif. En effet considérons l'équation de Grad-Shafranov sur l'axe magnétique :

$$\begin{aligned} L(\psi)|_a &= -\frac{1}{\mu_o} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_a} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_a} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] |_{a} \\ &= -\frac{1}{\mu_o r_a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) |_{a} + \frac{1}{\mu_o r_a^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} |_{a} \\ &= j_\varphi(a) \end{aligned}$$

Or sur l'axe magnétique, le flux est maximum et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} |_{a} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) |_{a} &< 0 \end{aligned}$$

En exprimant la composante toroïdale E_φ du champ électrique sur l'axe magnétique à partir des lois de Faraday et d'Ohm, on a :

$$E_\varphi(a) = -\frac{\dot{\psi}_a}{r_a} = \eta_{||}(a) j_\varphi(a)$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_a &= -r_a \eta_{||}(a) j_\varphi(a) \\ &= \frac{\eta_{||}(a)}{\mu_o} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) |_{a} < 0 \end{aligned}$$

Or, en ajoutant aux courants donnés $I_n(t)$ des courants correspondant au champ du transformateur, on peut modifier la valeur du flux magnétique à chaque instant tout en satisfaisant à l'équation de Grad-Shafranov et en ne modifiant pas la forme et la position du plasma. On peut donc obtenir un flux magnétique quelconque sur l'axe magnétique et ne pas satisfaire $\dot{\psi}_a < 0$. Ceci montre donc bien que l'équation de Grad-Shafranov seule ne peut pas modéliser correctement l'évolution du flux magnétique dans le temps et il faut donc compléter le modèle par des équations traduisant la dynamique du système.

Pour justifier ce qui va être fait dans la suite, on peut considérer un exemple extrêmement simple et connu depuis quelques siècles : celui d'une particule de masse élémentaire soumise à une force centrale.

Au lieu de considérer les trois composantes de l'équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f} ,$$

on peut simplifier les équations de la façon suivante :

on observe tout d'abord que dans un tel système, le vecteur de mouvement angulaire est conservé et par conséquent la trajectoire se situe dans un plan ; en réécrivant les équations du mouvement dans ce plan, on élimine déjà une composante.

On peut montrer ensuite que le vecteur de Runge-Lenz (cf S. Weinberg) est conservé, ce qui nous permet d'éliminer encore une composante.

Enfin, en écrivant simplement l'équation de conservation de l'énergie, on peut obtenir une connaissance complète du mouvement.

Dans notre cas, il n'est pas possible de réaliser une procédure aussi simple puisque le milieu est continu et non linéaire, mais on va montrer que l'on est capable d'obtenir tous les renseignements dont on a besoin pour décrire le mouvement tout simplement en écrivant une équation différentielle pour l'évolution du courant plasma.

I. Le modèle physique

Dans cette partie, on va dériver une équation différentielle pour le courant plasma. Pour cela, on va exprimer la puissance totale dissipée dans le plasma :

$$P_p(t) = \int_{V_p(t)} \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV \quad (III.1.1)$$

où V_p désigne le volume occupé par le plasma.

1. Première expression pour P_p

En tout point M du plasma, on définit un système de coordonnées $(C1)$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_\varphi, \vec{e}_p, \vec{e}_\psi$ donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_\psi = \frac{\vec{\nabla}\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} \\ \vec{e}_\varphi = \text{vecteur unitaire dans la direction toroïdale} \\ \vec{e}_p = \vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi = \text{vecteur unitaire dans la direction poloïdale} \end{array} \right.$$

Dans ce système, le champ magnétique \vec{B} et la densité de courant \vec{j} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \frac{f}{r} \vec{e}_\varphi + \frac{|\nabla\psi|}{r} \vec{e}_p \\ \vec{j} = \left[r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu_0 r} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{|\nabla\psi|}{\mu_0 r} \frac{\partial f}{\partial \psi} \vec{e}_p \end{array} \right. \quad (III.1.2)$$

On définit maintenant le système de coordonnées $(C2)$, dont les vecteurs unitaires $\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_\psi$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_\psi = \frac{\vec{\nabla}\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} \\ \vec{e}_\parallel = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \\ \vec{e}_\perp = \vec{e}_\psi \times \vec{e}_\parallel \end{array} \right.$$

Dans ce système, le champ magnétique \vec{B} et la densité de courant \vec{j} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = B \vec{e}_\parallel \\ \vec{j} = \frac{1}{B} \left[f \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right] \vec{e}_\parallel - \frac{|\nabla\psi|}{B} \frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{e}_\perp \end{array} \right. \quad (III.1.3)$$

avec

$$B = \frac{1}{r} \sqrt{f^2 + |\nabla\psi|^2} \quad (III.1.4)$$

En utilisant l'expression du champ électrique donné par la loi d'Ohm, on a :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot [\vec{\eta} \cdot \vec{j} - \vec{v} \times \vec{B}] \quad (III.1.5)$$

Considérons tout d'abord le premier terme du membre de droite de l'équation (III.1.5) ; dans le système de coordonnées (C2), il s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot [\vec{\eta} \cdot \vec{j}] &= [j_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} + j_{\perp} \vec{e}_{\perp}] \cdot [\eta_{\parallel} j_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} + \eta_{\perp} j_{\perp} \vec{e}_{\perp}] \\ &= \eta_{\parallel} j_{\parallel}^2 + \eta_{\perp} j_{\perp}^2 \\ &= \eta_{\parallel} \frac{1}{B^2} \left[f \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right]^2 + \eta_{\perp} \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \psi} \right)^2 \end{aligned} \quad (III.1.6)$$

Exprimons maintenant l'autre terme :

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] &= \vec{v} \cdot [\vec{B} \times \vec{j}] \\ &= \vec{v} \cdot \left[-|\nabla \psi| \frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{e}_{\psi} \right] \\ &= - \frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi \end{aligned} \quad (III.1.7)$$

et donc

$$P_p(t) = \int_{V_p(t)} [\eta_{\parallel} j_{\parallel}^2 + \eta_{\perp} j_{\perp}^2 + \frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi] dV \quad (III.1.8)$$

On cherche maintenant une expression de $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi$; on part de la composante toroïdale du champ électrique donné par la loi de Faraday avec \vec{B} donné par (III.1.2) :

$$E_{\varphi} = \vec{E} \cdot \vec{e}_{\varphi} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (III.1.9)$$

$$\begin{aligned} [\vec{\eta} \cdot \vec{j}] \cdot \vec{e}_{\varphi} &= \eta_{\parallel} j_{\parallel} \vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{e}_{\varphi} + \eta_{\perp} j_{\perp} \vec{e}_{\perp} \cdot \vec{e}_{\varphi} \\ &= \frac{1}{B^2} \left[\frac{1}{r} (\eta_{\parallel} f^2 + \eta_{\perp} |\nabla \psi|^2) \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{B^2}{\mu_0 r} \eta_{\parallel} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \right] \end{aligned} \quad (III.1.10)$$

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_{\varphi} = B_{\varphi} (\vec{v} \times \vec{e}_{\varphi}) \cdot \vec{e}_{\varphi} + B_p (\vec{v} \times \vec{e}_p) \cdot \vec{e}_{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= B_p [\vec{v} \times (\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi)] \cdot \vec{e}_\varphi \\
&= B_p (\vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\psi \cdot \vec{e}_\varphi - B_p (\vec{v} \cdot \vec{e}_\psi) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\
&= -\frac{1}{r} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi \tag{III.1.11}
\end{aligned}$$

En reportant les expressions (III.1.9) – (III.1.11) dans la loi d'Ohm, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{B^2} \left[(\eta_{\parallel} f^2 + \eta_{\perp} |\nabla \psi|^2) \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{B^2}{\mu_o} \eta_{\parallel} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \right] \tag{III.1.12}$$

On réécrit maintenant l'équation (III.1.5) en utilisant les expressions (III.1.6) et (III.1.7) dans laquelle $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi$ est donnée par (III.1.12) :

$$\begin{aligned}
\vec{j} \cdot \vec{E} &= \eta_{\parallel} \frac{1}{B^2} \left[f \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{B^2}{\mu_o} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right]^2 + \eta_{\perp} \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \psi} \right)^2 \\
&\quad - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \psi} - \frac{1}{B^2} (\eta_{\parallel} f^2 + \eta_{\perp} |\nabla \psi|^2) \left(\frac{\partial p}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{1}{\mu_o} \eta_{\parallel} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\
\vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\mu_o} \eta_{\parallel} f \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu_o^2} \eta_{\parallel} B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \psi} \tag{III.1.13}
\end{aligned}$$

On pose :

$$P' = \mu_o \frac{\partial p}{\partial \psi} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\eta_{\parallel}}{\mu_o},$$

et on obtient alors la première expression de la puissance dissipée dans le plasma :

$$P_p(t) = \int_{V_p(t)} \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dV \tag{III.1.14}$$

Remarques

1. Les deux premiers termes de l'équation (III.1.8) représentent la puissance absorbée par le plasma au moyen du chauffage ohmique (puissance qui est toujours positive). Le dernier terme représente la puissance nécessaire pour déformer et faire bouger le plasma dans l'espace.

2. C'est seulement dans la limite $\eta_{\parallel} = 0$ que l'on peut interpréter le dernier terme de (III.1.14) comme étant la puissance nécessaire pour déformer et déplacer le plasma.

3. L'expression (III.1.14) ne fait pas intervenir η_{\perp} mais seulement η_{\parallel} ; cela s'accorde avec les résultats expérimentaux puisque l'on sait expérimentalement que l'évolution dans le temps du courant plasma dépend uniquement de la composante η_{\parallel} du tenseur de résistivité.

2. Seconde expression pour P_p

On peut exprimer en tout point M du plasma, le champ électrique \vec{E} en fonction du potentiel vecteur \vec{A} et du potentiel scalaire Φ :

$$\vec{E}(M) = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M) - \nabla \Phi(M)$$

avec

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{j}(M', t)}{|MM'|} dV'$$

où le volume V_{∞} désigne la région de l'espace dans laquelle circulent des courants. Cette région comprend le plasma V_p , les bobines de champ toroïdal W_q , situées dans un plan poloïdal, et les N_c bobines de champ poloïdal $W_n, n = 1, \dots, N_c$; soit :

$$V_{\infty} = V_p \cup W_q \cup \bigcup_{n=1}^{N_c} W_n$$

L'expression (III.1.1) devient alors :

$$\begin{aligned} P_p(t) = & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M', t)}{|MM'|} dV' \right. \\ & \left. + \int_{W_q} \frac{\vec{j}_q(M', t)}{|MM'|} dV' + \sum_{n=1}^{N_c} \int_{W_n} \frac{\vec{j}_n(M', t)}{|MM'|} dV' \right\} dV \\ & + V_{pl}(t) I_p(t) \end{aligned} \quad (III.1.15)$$

où $V_{pl}(t)$ est la tension appliquée au plasma ; or aucune tension n'est appliquée directement au plasma et le dernier terme de cette équation est nul.

On transforme tout d'abord le terme contenant l'intégrale double sur le volume du plasma en utilisant la formule :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V(t)} f_1 f_2 dV \right) = \int_{V(t)} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) dV + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot \vec{v} f_1 f_2 d\sigma$$

où $\Sigma(t)$ désigne la surface du volume $V(t)$, et \vec{n} est la normale à cette surface selon la direction sortante.

On a donc :

$$\begin{aligned} & \int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' \right\} dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_p} \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \vec{j}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' dV \right\} \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \vec{j}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' d\sigma \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{pl}(M, t) &= \frac{\vec{j}_{pl}(M, t)}{I_p(t)} \\ L_{pp}(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_p} \int_{V_p} \frac{\vec{J}_{pl}(M, t) \cdot \vec{J}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' dV \quad (III.1.16) \\ Q_p(t) &= \frac{\mu_0^2}{8\pi} \int_{\Sigma_p} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \vec{j}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' d\sigma \end{aligned}$$

où L_{pp} est appelée self-inductance du plasma. On a donc :

$$\int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{V_p} \frac{\vec{j}_{pl}(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' \right\} dV = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} I_p^2(t) L_{pp}(t) \right\} - \frac{4\pi}{\mu_0^2} Q_p(t)$$

Dans les bobines de champ poloïdal et de champ toroïdal, la densité de courant \vec{j} peut s'écrire comme le produit de la densité de courant unitaire \vec{J} et de l'intensité I du courant :

$$\vec{j}_n(M', t) = I_n(t) \vec{J}_n(M')$$

$$\vec{j}_q(M', t) = I_q(t) \vec{J}_q(M')$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{W_n} \frac{\vec{j}_n(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' \right\} dV \\ &= \frac{dI_n}{dt} \int_{V_p} \int_{W_n} \frac{\vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \vec{J}_n(M')}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' dV \\ & \int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{W_q} \frac{\vec{j}_q(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' \right\} dV \\ &= \frac{dI_q}{dt} \int_{V_p} \int_{W_q} \frac{\vec{j}_{pl}(M, t) \cdot \vec{J}_q(M')}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' dV \end{aligned}$$

On définit les inductances L_{pn} et L_{pq} comme :

$$L_{pn}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_p} \int_{W_n} \frac{\vec{\mathcal{J}}_{pl}(M,t) \cdot \vec{\mathcal{J}}_n(M')}{|MM'|} dV' dV \quad (III.1.17)$$

$$L_{pq}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_p} \int_{W_q} \frac{\vec{\mathcal{J}}_{pl}(M,t) \cdot \vec{\mathcal{J}}_q(M')}{|MM'|} dV' dV \quad (III.1.18)$$

et on a donc :

$$\int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M,t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{W_n} \frac{\vec{j}_n(M',t)}{|MM'|} dV' \right\} dV = 4\pi I_p(t) \frac{dI_n}{dt} L_{pn}(t)$$

$$\int_{V_p} \vec{j}_{pl}(M,t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{W_q} \frac{\vec{j}_q(M',t)}{|MM'|} dV' \right\} dV = 4\pi I_p(t) \frac{dI_q}{dt} L_{pq}(t)$$

On définit les courants dits 'réduits' :

$$\begin{cases} i_p = \mu_o I_p \\ i_n = \mu_o I_n \\ i_q = \mu_o I_q \end{cases}$$

On peut maintenant réécrire (III.1.15) :

$$P_p(t) = - \frac{1}{\mu_o} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_p^2 L_{pp} \right) - Q_p + i_p L_{pq} \frac{di_q}{dt} + \sum_{n=1}^{N_c} i_p L_{pn} \frac{di_n}{dt} \right] \quad (III.1.19)$$

A partir des expressions (III.1.14) et (III.1.19) pour la puissance dissipée dans le plasma, on obtient l'équation différentielle suivante pour le courant plasma réduit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_p^2 L_{pp} \right) - Q_p + i_p L_{pq} \frac{di_q}{dt} + \sum_{n=1}^{N_c} i_p L_{pn} \frac{di_n}{dt} + \int_{V_p} \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dV = 0 \quad (III.1.20)$$

Remarque

L'équation habituelle pour le courant plasma : $I_p(t) = \int_{\Omega_p} j_{pl,\varphi} dS$ est déjà contenue dans l'équation (III.1.20) sous la forme $1 = \int_{\Omega_p} \mathcal{J}_{pl,\varphi} dS$ dans les expressions des inductances L_{pp} , L_{pn} et L_{pq} . Elle ne peut donc plus être une équation à résoudre ainsi que cela était le cas dans le problème de l'équilibre.

En principe, l'équation (III.1.20) peut être traitée numériquement, mais en pratique elle présente quelques problèmes dûs à l'expression de la self-inductance L_{pp} du plasma. L_{pp} est exprimée au moyen d'une intégrale double sur le volume du plasma et son calcul, réalisé sur une surface dans un plan toroïdal (hypothèse de symétrie axiale) est très coûteux en temps ; en effet pour chaque point de Gauss M dans un élément du maillage à l'intérieur de la région du plasma ($\psi(M) > \psi_b$), on calcule une intégrale sur le plasma en utilisant tous les points de Gauss M' tels que en ces points $\psi(M') > \psi_b$; lorsque le point courant M coïncide avec le point considéré M' , on a une divergence numérique (on doit calculer $1/|\overrightarrow{MM'}|$ dans l'expression (III.1.16) de L_{pp}). On pourrait éliminer cette divergence numérique, au moins d'une façon partielle, en choisissant un nombre de points de Gauss différent pour chacune des deux intégrales, mais il subsiste encore des effets numériques 'presque infinis' lorsque le calcul des deux intégrales se fait sur le même élément.

On a réussi à éliminer ce pseudo-problème (en réalité la self-inductance L_{pp} n'est jamais divergente), en transformant l'expression $i_p^2 L_{pp}$ de façon à n'avoir que des intégrales simples à calculer sans problèmes de divergence numérique.

3. Nouvelle expression pour $i_p^2 L_{pp}$

On part de l'expression de l'énergie magnétique contenue dans le plasma :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{V_p(t)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B} dV$$

où \overrightarrow{H} est l'induction magnétique égale à \overrightarrow{B}/μ_0 . En utilisant cette expression pour \overrightarrow{H} , on obtient immédiatement la première forme pour l'énergie magnétique W_p :

$$W_p = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_p} B^2 dV \quad (III.1.21)$$

On exprime maintenant le champ magnétique \overrightarrow{B} à partir du potentiel vecteur \overrightarrow{A} :

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

d'où

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2} \int_{V_p} \overrightarrow{H} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{A}) dV \\ \Leftrightarrow W_p &= \frac{1}{2} \int_{V_p} [\overrightarrow{A} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{H}) + \nabla \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{H})] dV \end{aligned}$$

Le premier terme peut s'exprimer en utilisant la loi d'Ampère $\overrightarrow{j} = \nabla \times \overrightarrow{H}$.

Pour le second terme on utilise la formule suivante :

$$\int_{V_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} dV = \int_{\Sigma_p} \vec{n} \cdot \vec{Q} d\sigma$$

où \vec{n} est la normale sortante à la dernière surface de flux Σ_p du plasma ; soit $\vec{n} = -\vec{e}_\psi$ par définition de \vec{e}_ψ .

On peut donc écrire :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{V_p} \vec{A} \cdot \vec{j} dV - \frac{1}{2\mu_o} \int_{\Sigma_p} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_\psi d\sigma$$

En reprenant les définitions (III.1.16)–(III.1.18) pour les inductances et la définition du potentiel vecteur \vec{A} , on a :

$$\int_{V_p} \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \mu_o I_p^2 L_{pp} + \mu_o I_p L_{pq} I_q + \mu_o I_p \sum_{n=1}^{N_c} L_{pn} I_n$$

On peut d'autre part transformer l'intégrale de surface :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_\psi d\sigma &= \oint_{\Gamma_p} 2\pi r (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_\psi dl \\ &= 2\pi \oint_{\Gamma_p} r [A_\varphi B_p - A_p B_\varphi] dl \\ &= 2\pi \oint_{\Gamma_p} r \left[\frac{\psi}{r} B_p - A_p \frac{f}{r} \right] dl \end{aligned}$$

Or sur le bord du plasma Γ_p , f est égale à f_o , et le flux est égal à ψ_b . Il reste donc :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_p} B_p dl &= \oint_{\Gamma_p} \vec{B} \cdot \vec{d}l = \int_{\Omega_p} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}S \\ &= \int_{\Omega_p} \mu_o \vec{j} \cdot \vec{d}S = \mu_o I_p = i_p \\ \oint_{\Gamma_p} A_p dl &= \oint_{\Gamma_p} \vec{A} \cdot \vec{d}l = \int_{\Omega_p} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{d}S \\ &= \int_{\Omega_p} \vec{B} \cdot \vec{d}S = \int_{\Omega_p} B_\varphi dS = \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS \end{aligned}$$

La seconde forme pour l'énergie magnétique W_p est alors :

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2\mu_o} i_p^2 L_{pp} + \frac{1}{2\mu_o} i_p L_{pq} i_q + \frac{1}{2\mu_o} i_p \sum_{n=1}^{N_c} L_{pn} i_n \\ &\quad - \frac{\pi}{\mu_o} \psi_b i_p + \frac{\pi}{\mu_o} f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS \end{aligned} \tag{III.1.22}$$

Des expressions (III.1.21) et (III.1.22), on tire l'expression de $i_p^2 L_{pp}$:

$$i_p^2 L_{pp} = - i_p L_{pq} i_q - i_p \sum_{n=1}^{N_c} L_{pn} i_n + 2\pi \psi_b i_p \\ - 2\pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \int_{V_p} B^2 dV$$

d'où la nouvelle équation pour le courant plasma :

$$\frac{d}{dt} \left\{ -\frac{1}{2} i_p L_{pq} i_q - \frac{1}{2} i_p \sum_{n=1}^{N_c} L_{pn} i_n + \pi \psi_b i_p \right. \\ \left. - \pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \frac{1}{2} \int_{V_p} B^2 dV \right\} \\ - Q_p + i_p L_{pq} \frac{di_q}{dt} + \sum_{n=1}^{N_c} i_p L_{pn} \frac{di_n}{dt} \\ + \int_{V_p} \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dV = 0 \quad (III.1.23)$$

L'équation (III.1.23) est l'équation qui décrit l'évolution dans le temps du courant plasma dans le Tokamak en fonction des courants dans les bobines externes, de la position du plasma et des profils P' et ff' .

4. Equations pour beta poloïdal et ψ_a

Revenons maintenant au système d'équations décrivant l'évolution du plasma ; il est constitué de l'équation d'évolution du flux magnétique, des équations pour le flux sur l'axe magnétique et sur la frontière du plasma ainsi que de l'équation pour le courant de plasma que nous venons de dériver. Mais il reste encore deux quantités inconnues dont une est évidente et l'autre est plus cachée.

L'expression de la composante toroïdale de la densité de courant dans le plasma est donnée par l'équation de Grad-Shafranov :

$$j_{pl,\varphi} = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu_o r} f \frac{\partial f}{\partial \psi}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{c_p^*(t)}{\mu_o} \mathcal{F}_p(\bar{\psi}, t) \\ f \frac{\partial f}{\partial \psi} = c_f^*(t) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}, t) \end{cases} \quad (III.1.24)$$

On écrit c_p^* et c_f^* sous la forme :

$$c_p^* = i_p C_p \quad \text{et} \quad c_f^* = i_p C_f$$

On obtient donc :

$$\mu_o j_{pl,\varphi} = i_p \left[r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right] \quad (III.1.25)$$

Les quantités C_p et C_f sont alors à déterminer. Or on ne peut pas utiliser l'expression usuelle du courant plasma I_p d'après la remarque (III.1.1). On va donc chercher d'autres conditions devant être satisfaites dans le plasma.

a. Beta poloïdal

Le coefficient beta poloïdal β_p est défini comme le rapport entre la pression cinétique du plasma et la composante poloïdale de sa pression magnétique :

$$\beta_p = \frac{\int_{V_p} p \, dV}{\frac{1}{2\mu_o} \int_{V_p} B_p^2 \, dV}$$

On exprime la pression p comme une fonction de ψ , puis comme une fonction de $\bar{\psi}$ en utilisant (III.1.24) :

$$\begin{aligned} p(\psi) &= p(\psi_b) + \int_{\psi_b}^{\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi}(y) \, dy \\ \Leftrightarrow \mu_o p(\psi) &= \mu_o p(\psi_b) + \int_{\psi_b}^{\psi} i_p C_p \mathcal{F}_p(y) \, dy \end{aligned}$$

On fait le changement de variable :

$$y \mapsto x = \frac{\psi_a - y}{\psi_a - \psi_b},$$

on obtient :

$$\mu_o p(\psi) = \mu_o p(\psi_b) - i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_1^{\bar{\psi}} \mathcal{F}_p(x) \, dx$$

On pose :

$$\mathcal{G}_p(\bar{\psi}) = \int_1^{\bar{\psi}} \mathcal{F}_p(x) \, dx$$

et on rappelle l'expression de composante poloïdale du champ magnétique :

$$B_p = \frac{|\nabla\psi|}{r}$$

En reportant dans l'expression de beta poloïdal les quantités ci-dessus, on obtient

$$\frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla\psi|^2}{r} dS + \int_{\Omega_p} r \left[i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) - \mu_o p(\psi_b) \right] dS = 0 \quad (III.1.26)$$

b. Evolution du flux sur l'axe magnétique

Il reste maintenant à expliquer ce que l'on sous-entend par quantité cachée. Au début de ce chapitre, nous avons vu qu'il était essentiel de déterminer l'évolution dans le temps du champ du transformateur de façon à ce que la valeur du flux sur l'axe magnétique décroisse au cours de la décharge. Donc en fixant $\dot{\psi}_a$, on fixe de manière unique le champ du transformateur.

On peut obtenir une équation pour $\dot{\psi}_a$ en écrivant que sur l'axe magnétique, la composante toroïdale du champ électrique donné par la loi de Faraday doit être égale à la composante toroïdale du champ électrique donné par la loi d'Ohm. Si (r_a, z_a) désigne la position de l'axe magnétique dans un plan poloïdal, on a :

$$E_\varphi(r_a, z_a) = - \frac{1}{r_a} \frac{\partial\psi}{\partial t}(r_a, z_a) \quad \text{d'après la loi de Faraday}$$

$$E_\varphi(r_a, z_a) = \eta_{\parallel}(r_a, z_a) j_{pl,\varphi}(r_a, z_a) \quad \text{d'après la loi d'Ohm}$$

En écrivant la condition d'égalité des deux champs et en exprimant $j_{pl,\varphi}$ à l'aide de (III.1.25), on obtient :

$$- \frac{\dot{\psi}_a}{r_a} = \eta_{\parallel}(P_a) i_p \left[r_a C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi} = 0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(\bar{\psi} = 0) \right] \quad (III.1.27)$$

Les équations (III.1.26) et (III.1.27) peuvent être interprétées comme des équations permettant de déterminer C_p et C_f où le coefficient β_p et la résistivité η_{\parallel} sont donnés.

II. Résolution numérique du problème évolutif

La résolution numérique du problème de l'évolution utilise la méthode de Newton (ou de quasi-Newton) pour le système discrétisé en temps.

Le problème à résoudre est le suivant : trouver $(\psi, \psi_a, \psi_b, (I_n), C_p, C_f, i_p)$ solution du système :

$$L\psi = -\frac{\sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \sum_{n=1}^{N_c} j_n 1_{S_{c,n}} + \frac{i_p}{\mu_o} \left[r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}(\bar{\psi}) \right] 1_{\Omega_p}$$

$$V_k = 2\pi \int_{S_{c,k}} q_k \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \sum_{n=1}^{N_c} \left[M_{kn} \frac{dI_n}{dt} + R_{kn} I_n \right] \quad k = 1, \dots, N_c$$

$$\psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi$$

$$\psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi$$

$$\frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + \int_{\Omega_p} r \left[i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) - \mu_o p(\psi_b) \right] dS = 0$$

$$\eta_{\parallel}(P_a) i_p \left[r_a C_p \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right] + \frac{\psi_a}{r_a} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{1}{2} i_p L_{pq} i_q - \frac{1}{2} i_p \sum_{n=1}^{N_c} L_{pn} i_n + \pi \psi_b i_p - \pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \pi \int_{\Omega_p} r B^2 dS \right\} \\ - Q_p + i_p L_{pq} \frac{di_q}{dt} + \sum_{n=1}^{N_c} i_p L_{pn} \frac{di_n}{dt} \\ + 2\pi \int_{\Omega_p} r \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dS = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\}$$

$$\mathcal{D} = \{M \in \Omega_{cv} / \overrightarrow{P_a M} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi}(M) < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \overrightarrow{\nabla \psi}(X) = \overrightarrow{0}\}$$

La deuxième équation du système est l'équation des circuits. En fait les circuits peuvent être régis soit en tension (la tension est donnée et l'intensité du courant est inconnue), soit en courant (l'intensité du courant est donnée et la tension est inconnue).

Lorsque le $k^{\text{ième}}$ circuit est régi en courant, l'équation pour ce circuit n'est pas une équation du système à résoudre et elle n'est utilisée que comme sortie pour déterminer la tension.

Lorsque le $k^{\text{ième}}$ circuit est régi en tension, l'équation pour ce circuit est une équation du système et l'intensité du courant I_k est alors une inconnue.

1. Nouvelle expression pour L_{pn}

L'inductance L_{pn} pour le $n^{\text{ième}}$ circuit est :

$$L_{pn} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_p} \int_{W_n} \frac{\overrightarrow{\mathcal{J}}_{pl}(M, t) \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}_n(M', t)}{|\overrightarrow{MM'}|} dV' dV$$

Proposition (III.2.1)

L'inductance L_{pn} , $n = 1, \dots, N_c$ est donnée par :

$$L_{pn} = 2 \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl,\varphi}(M) F_n(M) dS \quad (III.2.1)$$

où $F_n(M)$ est défini à partir des intégrales elliptiques de première et deuxième espèce $K(k)$ et $E(k)$ par :

$$F_n(M) = \int_{S_{c,n}} r' \mathcal{J}_n(M') \frac{1}{\alpha k^2} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)] dS'$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{(r + r')^2 + (z - z')^2} \\ k^2 = \frac{4rr'}{\alpha^2} \end{cases}$$

Démonstration

Dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) , on a :

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = r^2 + (z - z')^2$$

$$|\overrightarrow{OM'}|^2 = r'^2$$

$$|\overrightarrow{MM'}|^2 = r^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \varphi' + r'^2$$

Dans les bobines de champ poloïdal, le vecteur densité de courant est uniquement dirigé selon l'axe toroïdal $\overrightarrow{e}_\varphi$, ce que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathcal{J}}_n(M') = \mathcal{J}_n(M') \overrightarrow{e}_\varphi(M')$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{J}}_{pl}(M) \cdot \overrightarrow{\mathcal{J}}_n(M') &= \mathcal{J}_{pl,\varphi}(M) \overrightarrow{e}_\varphi(M) \cdot \mathcal{J}_n(M') \overrightarrow{e}_\varphi(M') \\ &= \mathcal{J}_{pl,\varphi}(M) \mathcal{J}_n(M') \cos \varphi' \end{aligned}$$

d'où

$$L_{pn} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_p} \int_{W_n} \frac{\mathcal{J}_{pl,\varphi}(M) \mathcal{J}_n(M') \cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \varphi' + r'^2}} dV' dV$$

$$L_{pn} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_p} 2\pi r \int_{S_{c,n}} r' \mathcal{J}_{pl,\varphi}(M) \mathcal{J}_n(M') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \varphi' + r'^2}} d\varphi' dS' dS$$

On définit I par :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \varphi' + r'^2}} d\varphi'$$

Par parité de la fonction sous le signe intégral, on peut se ramener à une intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$. En faisant le changement de variable $\theta = \frac{1}{2}(\pi - \varphi')$ et en utilisant $\cos \varphi' = -(1 - 2 \sin^2 \theta)$, on peut écrire :

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(1 - 2 \cos^2 \theta)}{\sqrt{(r + r')^2 + (z - z')^2 - 4rr' \sin^2 \theta}} d\theta .$$

On pose

$$\begin{cases} \alpha^2 = (r + r')^2 + (z - z')^2 \\ k^2 = \frac{4rr'}{\alpha^2} \end{cases}$$

et on obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{4}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta + \frac{8}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ \Leftrightarrow I &= -\frac{4}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta + \frac{8}{\alpha k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \theta + 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ \Leftrightarrow I &= -\frac{4}{\alpha} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \frac{8}{\alpha k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

En utilisant les intégrales elliptiques de première et deuxième espèce $K(k)$ et $E(k)$ définies par :

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta & -1 \leq k \leq 1 \\ E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta & -1 < k < 1 \end{aligned}$$

on a :

$$I = \frac{4}{\alpha k^2} [(2 - k^2) K(k) - 2 E(k)].$$

On définit $F_n(M)$ comme :

$$F_n(M) = \int_{S_{c,n}} r' \mathcal{J}_n(M') \frac{1}{\alpha k^2} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)] dS'$$

et on obtient alors l'expression (III.2.1) pour L_{pn} .

(cqfd)

L'expression pour $F_n(M)$ ne fait intervenir que la géométrie du système et la densité de courant unitaire dans les bobines de champ poloïdal, qui est supposée uniforme. On peut donc calculer numériquement $F_n(M)$ pour tout point M du maillage une seule fois pour toutes.

2. Formulation faible

On peut négliger l'inductance mutuelle L_{pq} entre le plasma et les bobines de champ toroïdal pour deux raisons. Dans les bobines de champ toroïdal, le vecteur densité de courant est dirigé selon la direction poloïdale ; le produit scalaire entre ce vecteur et le vecteur densité de courant plasma (dans l'expression (III.1.18) pour L_{pq}) ne fait donc intervenir que le courant plasma poloïdal qui est petit par rapport au courant plasma toroïdal. De plus les bobines de champ toroïdal sont les plus éloignées du système et donc la mutuelle L_{pq} est négligeable par rapport aux mutuelles L_{pn} entre le plasma et les bobines de champ poloïdal.

On suppose en outre que la densité de courant plasma \vec{j}_{pl} est nulle sur le bord du plasma ; l'intégrale Q_p - (III.1.16) - est donc nulle.

Grâce à ces hypothèses et à la nouvelle formulation de L_{pn} on peut réécrire l'équation (III.1.23) pour le courant plasma sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ -i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl,\varphi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n i_n dS + \pi \psi_b i_p - \pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \pi \int_{\Omega_p} r B^2 dS \right\} \\ + 2 i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl,\varphi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n i_n \frac{di_n}{dt} dS \\ + 2\pi \int_{\Omega_p} r \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dS = 0 \end{aligned} \quad (III.2.2)$$

Enfin, on suppose que la pression sur le bord du plasma est nulle ; on peut alors réécrire l'équation du beta poloïdal comme :

$$\frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_{\Omega_p} r \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) dS = 0$$

Soit l'espace :

$$L^2(0, T; V(\Omega_i)) = \left\{ \phi \in V(\Omega_i) / \int_0^T (|\phi|_{V(\Omega_i)})^2 dt < \infty \right\} \quad (III.2.3)$$

où $V(\Omega_i)$ est l'espace de Sobolev défini par (II.2.2) et où $|\cdot|_{V(\Omega_i)}$ désigne la norme dans cet espace.

On rappelle l'équation pour le flux magnétique ψ :

$$L\psi = -\frac{\sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \sum_{n=1}^{N_c} j_n 1_{S_{c,n}} + \frac{i_p}{\mu_o} \left[r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}(\bar{\psi}) \right] 1_{\Omega_p}$$

On obtient la formulation faible de l'équation pour le flux magnétique en multipliant l'équation du flux par $\phi \in L^2(0, T; V(\Omega_i))$ et en intégrant sur le domaine Ω . En utilisant les fonctions de Green définies au deuxième chapitre, et en multipliant par μ_o , on obtient :

$$\int_{\Omega_{cv}} \phi \frac{\mu_o \sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \int_{\Omega_i} \frac{\bar{\nabla} \psi \cdot \bar{\nabla} \phi}{r} dS + C(\psi, \phi) - \int_{\Omega_p} \mu_o j_{pl, \phi} \phi dS - \sum_{n=1}^{N_c} \mu_o I_n \int_{S_{c,n}} q_n \phi dS = 0 \quad \forall \phi \in L^2(0, T; V(\Omega_i))$$

On peut maintenant formuler le problème (\mathcal{P}_E) de la façon suivante : étant donnés les courants $I_n(t)$ (si les circuits sont régis en courant) ou les tensions $V_n(t)$ (si les circuits sont régis en tension), les profils $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}, t)$ et $\mathcal{F}_f(\bar{\psi}, t)$, $\beta(t)$, $\eta_{||}$ et σ_v , trouver $(\psi, (I_n), \psi_a, \psi_b, C_p, C_f, i_p) \in L^2(0, T; V(\Omega_i)) \times (R^{N_c} \times [0, T]) \times (R^5 \times [0, T]) \times$ qui vérifie le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_{cv}} \phi \frac{\mu_o \sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \int_{\Omega_i} \frac{\bar{\nabla} \psi \cdot \bar{\nabla} \phi}{r} dS + C(\psi, \phi) \\ - \int_{\Omega_p} \mu_o j_{pl, \phi} \phi dS - \sum_{n=1}^{N_c} \mu_o I_n \int_{S_{c,n}} q_n \phi dS = 0 \quad \forall \phi \in L^2(0, T; V(\Omega_i)) \\ \frac{\mu_o \Delta t}{2\pi} V_k - \mu_o \Delta t \int_{S_{c,k}} q_k \frac{\partial \psi}{\partial t} dS - \sum_{n=1}^{N_c} \frac{\mu_o \Delta t}{2\pi} \left[M_{kn} \frac{dI_n}{dt} + R_{kn} I_n \right] = 0 \quad k = 1, \dots, N_c \\ \psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi \\ \psi_b = \sup_D \psi \\ \frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_{\Omega_p} r \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) dS = 0 \\ \eta_{||}(P_a) i_p \left[r_a C_p \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right] + \frac{\dot{\psi}_a}{r_a} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ -i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl, \phi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n i_n dS + \pi \psi_b i_p - \pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \pi \int_{\Omega_p} r B^2 dS \right\} \\ + 2 i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl, \phi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n \frac{di_n}{dt} dS \\ + 2\pi \int_{\Omega_p} r \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dS = 0 \end{array} \right.$$

(III.2.4)

3. Schéma numérique

Ainsi que cela a été fait dans le cas de l'équilibre, on définit un maillage constitué de triangles courbes, et un espace V_l approximant $V(\Omega_i)$. On peut écrire $\psi(r, z, t)$ en tout point $M \in \Omega_i$:

$$\psi(r, z, t) = \sum_{j=1}^{N_l} \psi_j(t) \phi_j(r, z)$$

où les fonctions $\phi_j, j = 1, \dots, N_l$ constituent une base de V_l et $\psi_j(t)$ désigne la valeur du flux magnétique au $j^{\text{ème}}$ noeud du maillage et à l'instant t .

D'autre part on discrétise en temps de manière implicite ; toutes les équations du système (III.2.3) sont typiquement de la forme :

$$\int Q_1(x, t) \frac{\partial x}{\partial t} dS + \frac{\partial}{\partial t} Q_2(x, t) = Q_3(x, t)$$

et on les discrétise en temps :

$$\int Q_1 \frac{x - \hat{x}}{\Delta t} dS + \frac{Q_2 - \widehat{Q}_2}{\Delta t} = Q_3$$

avec $\hat{y} = y(t)$ et $y = y(t + \Delta t)$, où Δt est le pas de temps du schéma (pas de temps variable).

On suppose qu'à l'instant t toutes les quantités sont connues et on veut calculer $x = (\psi, (I_n), \psi_a, \psi_b, C_p, C_f, i_p)$ à l'instant $t + \Delta t$ comme étant la solution du problème (\mathcal{P}_E).

On écrit le système d'équations (III.2.3) sous forme simplifiée $E(x) = 0$, où E est un opérateur non linéaire.

La méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{cases} x^0 = \hat{x} \\ x^{n+1} = x^n - [E'(x^n)]^{-1} E(x^n) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Les éléments de la matrice $E'(x^n)$ sont donnés par la proposition suivante :

Proposition (III.2.2)

Les éléments $A_{j,k}$ à priori non nuls de la matrice de Newton $E'(x^n)$ sont :

$$\begin{aligned} A_{j,k} = & \int_{\Omega_{cv}} \phi_j \frac{\mu_o \sigma_v}{r \Delta t} \phi_k dS + \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{\nabla} \phi_k}{r} dS + C(\phi_j, \phi_k) \\ & - i_p^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j [r C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n)] k_\psi^n \phi_k dS \quad 1 \leq j, k \leq N_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{j,N_i+i} &= 0 & \Re(i) &= -1 & 1 \leq j \leq N_l \\
&= -\mu_o \int_{S_{c,i}} q_i \phi_j dS & \Re(i) &= +1 & N_l+1 \leq i \leq N_l+N_c
\end{aligned}$$

$$A_{j,N_s+1} = -i_p^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j [r C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n)] k_a^n dS \quad 1 \leq j \leq N_l$$

$$A_{j,N_s+2} = -i_p^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j [r C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n)] k_b^n dS \quad 1 \leq j \leq N_l$$

$$A_{j,N_s+3} = -i_p^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j r \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) dS \quad 1 \leq j \leq N_l$$

$$A_{j,N_s+4} = -i_p^n \int_{\Omega_p^n} \phi_j \frac{1}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) dS \quad 1 \leq j \leq N_l$$

$$A_{j,N_s+2} = - \int_{\Omega_p^n} \phi_j [r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n)] k_b^n dS \quad 1 \leq j \leq N_l$$

$$\begin{aligned}
A_{N_l+i,k} &= 0 & \Re(i) &= -1 & 1 \leq k \leq N_l \\
&= -\mu_o \int_{S_{c,i}} q_i \phi_k dS & \Re(i) &= +1 & N_l+1 \leq i \leq N_l+N_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_l+i,N_l+k} &= 1 & \Re(i) &= -1 \text{ et } i = k \\
&= 0 & \Re(i) &= -1 \text{ et } i \neq k \\
&= -\frac{\mu_o}{2\pi} [M_{ik} + \Delta t R_{ik}] & \Re(i) &= \Re(k) = +1 \\
&& & & N_l+1 \leq i, k \leq N_l+N_c
\end{aligned}$$

$$A_{N_s+1,k} = -\phi_k(P_a^n) \quad 1 \leq k \leq N_l$$

$$A_{N_s+1,N_s+1} = 1$$

$$A_{N_s+2,k} = -\phi_k(P_b^n) \quad 1 \leq k \leq N_l$$

$$A_{N_s+2,N_s+2} = 1$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+3,k} &= \beta_p \int_{\Omega_p^n} \frac{\vec{\nabla} \psi^n \cdot \vec{\nabla} \phi_k}{r} dS + \frac{\beta_p}{2} \oint_{\Gamma_p^n} \frac{|\nabla \psi^n|}{r} \phi_k dl \\
&\quad - i_p^n \int_{\Omega_p^n} r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \phi_k dS \qquad 1 \leq k \leq N_l
\end{aligned}$$

$$A_{N_s+3,N_s+1} = i_p^n \int_{\Omega_p^n} r C_p^n \left[(1 - \bar{\psi}^n) \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \mathcal{G}_p(\bar{\psi}^n) \right] dS$$

$$A_{N_s+3,N_s+2} = i_p^n \int_{\Omega_p^n} r C_p^n \left[\bar{\psi}^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) - \mathcal{G}_p(\bar{\psi}^n) \right] dS - \frac{\beta_p}{2} \oint_{\Gamma_p^n} \frac{|\nabla \psi^n|}{r} dl$$

$$A_{N_s+3,N_s+3} = i_p^n \int_{\Omega_p^n} r (\psi_a^n - \psi_b^n) \mathcal{G}_p(\bar{\psi}^n) dS$$

$$A_{N_s+3,N_s+5} = \int_{\Omega_p^n} r C_p^n (\psi_a^n - \psi_b^n) \mathcal{G}_p(\bar{\psi}^n) dS$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+4,k} &= i_p^n r_a \Delta t \left\{ \frac{\partial \eta_{||}(P_a^n)}{\partial \bar{\psi}} \left[r_a C_p^n \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f^n}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right] \right. \\
&\quad \left. + \eta_{||}(P_a^n) \left[r_a C_p^n \mathcal{F}_p'(0) + \frac{C_f^n}{r_a} \mathcal{F}_f'(0) \right] \right\} k_\psi^n \phi_k(P_a^n) \qquad 1 \leq k \leq N_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+4,N_s+1} &= 1 - i_p^n r_a \Delta t \left\{ \frac{\partial \eta_{||}(P_a^n)}{\partial \bar{\psi}} \left[r_a C_p^n \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f^n}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right] \right. \\
&\quad \left. + \eta_{||}(P_a^n) \left[r_a C_p^n \mathcal{F}_p'(0) + \frac{C_f^n}{r_a} \mathcal{F}_f'(0) \right] \right\} k_\psi^n
\end{aligned}$$

$$A_{N_s+4,N_s+3} = i_p^n r_a^2 \Delta t \eta_{||}(P_a^n) \mathcal{F}_p(0)$$

$$A_{N_s+4,N_s+4} = i_p^n \Delta t \eta_{||}(P_a^n) \mathcal{F}_f(0)$$

$$A_{N_s+4,N_s+5} = r_a \Delta t \eta_{||}(P_a^n) \left[r_a C_p^n \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f^n}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right]$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5,k} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} r \left[r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] k_\psi^n \phi_k \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS \\
&+ \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{(2f^n - f_o)}{r} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \phi_k dS + \frac{2\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{\bar{\nabla} \psi^n \cdot \bar{\nabla} \phi_k}{r} dS \\
&+ \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Gamma_p^n} \frac{|\nabla \psi^n|}{r} \phi_k dl + 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right]^n k_\psi^n \phi_k dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta^n \left\{ (i_p^n)^2 C_p^n C_f^n \left[\mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) + \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) \right] k_\psi^n \phi_k \right. \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \bar{\nabla} \psi^n \cdot \bar{\nabla} \phi_k + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 f \frac{\partial f}{\partial \psi} \phi_k \\
&\quad \left. - 2 \frac{B^2}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^3 \phi_k + 2 B^2 \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) k_\psi^n \phi_k \right\} dS \\
&- 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \left[\frac{P'(\bar{\psi}^n)}{\Delta t} + \frac{\psi^n - \hat{\psi}}{\Delta t} i_p^n C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) k_\psi^n \right] \phi_k dS \quad 1 \leq k \leq N_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5,N_i+i} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} r \left[r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] F_i dS \quad \Re(i) = +1 \\
&= 0 \quad \Re(i) = -1 \\
&\quad 1 \leq i \leq N_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5,N_s+1} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} r \left[r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] k_a^n \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS \\
&+ \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{(2f^n - f_o)}{r} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \left[-\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) - (1 - \bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right]^n k_a^n dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta^n \left\{ (i_p^n)^2 C_p^n C_f^n \left[\mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) + \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) \right] k_a^n \right. \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 i_p^n C_f^n \left[-\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) - (1 - \bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] \\
&\quad + 2 B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \frac{i_p^n C_f^n}{(f^n)^2} \left[\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) + (1 - \bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] \\
&\quad \left. + 2 B^2 \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) k_a^n \right\} dS \\
&- 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\psi^n - \hat{\psi}}{\Delta t} i_p^n C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) k_a^n dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5, N_s+2} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} r \left[r C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) \right] k_b^n \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS \\
&+ \frac{\pi}{\Delta t} i_p^n + \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{(2f^n - f_o)}{r} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \left[\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) - \bar{\psi}^n \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] dS \\
&- \frac{\pi}{\Delta t} \oint_{\Gamma_p^n} \frac{|\nabla \psi^n|}{r} dl + 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right]^n k_b^n dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta^n \left\{ (i_p^n)^2 C_p^n C_f^n \left[\mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) + \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) \right] k_b^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 i_p^n C_f^n \left[\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) - \bar{\psi}^n \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \frac{i_p^n C_f^n}{(f^n)^2} \left[-\mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) + \bar{\psi}^n \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 B^2 \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{i_p^n C_f^n}{f^n} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}^n) k_b^n \right\} dS \\
&- 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\psi^n - \hat{\psi}}{\Delta t} i_p^n C_p^n \mathcal{F}'_p(\bar{\psi}^n) k_b^n dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5, N_s+3} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} r^2 \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta (i_p^n)^2 C_f^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) dS - 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\psi^n - \hat{\psi}}{\Delta t} i_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5, N_s+4} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^n \int_{\Omega_p^n} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS + \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{(2f^n - f_o)}{r} \frac{i_p^n}{k_\psi^n f^n} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta \left\{ (i_p^n)^2 C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \frac{i_p^n}{k_\psi^n} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) \right. \\
&\quad \left. + 2 B^2 \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{i_p^n}{f^n} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \left[1 - \frac{i_p^n C_f^n}{k_\psi^n (f^n)^2} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) \right] \right\} dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{N_s+5, N_s+5} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} r \left[r C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) + \frac{C_f^n}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \right] \sum_{i=1}^{N_c} F_i (I_i - 2\hat{I}_i) dS \\
&+ \frac{\pi}{\Delta t} \psi_b^n + \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^n} \frac{(2f^n - f_o)}{r} \frac{C_f^n}{k_\psi^n f^n} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) dS \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \eta \left\{ 2 i_p^n C_p^n C_f^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \frac{C_f^n}{k_\psi^n} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) \right. \\
&\quad \left. + 2 B^2 \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{C_f^n}{f^n} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}^n) \left[1 - \frac{i_p^n C_f^n}{k_\psi^n (f^n)^2} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}^n) \right] \right\} dS \\
&- 2\pi \int_{\Omega_p^n} r \frac{\psi^n - \hat{\psi}}{\Delta t} C_p^n \mathcal{F}_p(\bar{\psi}^n) dS
\end{aligned}$$

avec $N_s = N_l + N_c$, $\Re(i) = -1$ si le $i^{\text{ème}}$ circuit est régi en courant et $\Re(i) = +1$ si le $i^{\text{ème}}$ circuit est régi en tension.

Démonstration

La démonstration est analogue à la démonstration de la proposition (II.3.1). Les seuls termes 'nouveaux' sont ceux faisant intervenir des intégrales sur le bord du plasma Γ_p , et ceux obtenus à partir des dérivées de f , $\frac{\partial f}{\partial \psi}$ et de η .

Les intégrales sur le bord du plasma sont obtenues en calculant la Gâteaux-dérivée par rapport à ψ dans la direction ϕ et la dérivée par rapport à ψ_b de :

$$Q_1 = \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla\psi|^2}{r} dS$$

$$Q_2 = \int_{\Omega_p} r B^2 dS - f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS$$

En appliquant le lemme (II.3.2) à ces deux intégrales, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \psi}; \phi\right) &= 2 \int_{\Omega_p} \frac{\overline{\nabla\psi} \cdot \overline{\nabla\phi}}{r} dS + \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|^2}{r} \frac{\phi}{|\nabla\psi|} dl \\ &= 2 \int_{\Omega_p} \frac{\overline{\nabla\psi} \cdot \overline{\nabla\phi}}{r} dS + \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|}{r} dl \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \psi_b} &= - \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|^2}{r} \frac{1}{|\nabla\psi|} dl = - \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|}{r} dl \end{aligned}$$

On rappelle que $B^2 = (|\nabla\psi|^2 + f^2)/r^2$;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \psi}; \phi\right) &= 2 \int_{\Omega_p} \frac{1}{r} \left[\overline{\nabla\psi} \cdot \overline{\nabla\phi} + f \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi\right) \right] dS + \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|^2 + f^2}{r} \frac{\phi}{|\nabla\psi|} dl \\ &\quad - f_o \int_{\Omega_p} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi\right) dS - f_o \oint_{\Gamma_p} \frac{f}{r} \frac{\phi}{|\nabla\psi|} dl \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \psi_b} &= 2 \int_{\Omega_p} \frac{1}{r} f \frac{\partial f}{\partial \psi_b} dS - \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|^2 + f^2}{r} \frac{1}{|\nabla\psi|} dl \\ &\quad - f_o \int_{\Omega_p} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi_b} dS + f_o \oint_{\Gamma_p} \frac{f}{r} \frac{1}{|\nabla\psi|} dl \end{aligned}$$

Or sur le bord du plasma, f est égale à f_o et il reste donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \psi}; \phi\right) &= 2 \int_{\Omega_p} \frac{\overline{\nabla\psi} \cdot \overline{\nabla\phi}}{r} dS + \int_{\Omega_p} \frac{2f - f_o}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi\right) dS + \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|}{r} \phi dl \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \psi_b} &= \int_{\Omega_p} \frac{2f - f_o}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi_b} dS - \oint_{\Gamma_p} \frac{|\nabla\psi|}{r} dl \end{aligned}$$

On obtient ainsi les intégrales sur le contour du plasma Γ_p des termes $A_{N_s+3,k}$, $A_{N_s+5,k}$, A_{N_s+3,N_s+2} et A_{N_s+5,N_s+2} .

On calcule maintenant les dérivées de η ; η est une fonction du flux normalisé $\bar{\psi}$ et ses dérivées sont donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}; \phi\right) &= \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi}; \phi\right) = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \frac{-1}{\psi_a - \psi_b} \phi = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} k_\psi \phi \\ \frac{\partial \eta}{\partial \psi_a} &= \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_a} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \frac{1 - \bar{\psi}}{\psi_a - \psi_b} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} k_a \\ \frac{\partial \eta}{\partial \psi_b} &= \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_b} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} \frac{\bar{\psi}}{\psi_a - \psi_b} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} k_b \end{aligned}$$

Il reste enfin à calculer les dérivées de f et $\frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}}$; on va exprimer ces deux quantités en fonction de i_p , C_f , k_ψ et $\bar{\psi}$; on rappelle que :

$$\begin{aligned} f \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}} &= i_p C_f \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f^2}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi} &= i_p C_f \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f^2}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{i_p C_f}{k_\psi} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{cases} f = \left[f_0 + 2 \frac{i_p C_f}{k_\psi} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}_f(\bar{\psi}) = \int_1^{\bar{\psi}} \mathcal{F}_f(x) dx$$

On peut maintenant calculer les dérivées de f :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi\right) &= \frac{1}{2f} \frac{2i_p C_f}{k_\psi} \mathcal{G}'_f(\bar{\psi}) \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi}; \phi\right) = \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \phi \\ \frac{\partial f}{\partial \psi_a} &= \frac{1}{2f} 2 i_p C_f \left[\frac{-1}{k_\psi^2} \frac{\partial k_\psi}{\partial \psi_a} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) + \frac{1}{k_\psi} \mathcal{G}'_f(\bar{\psi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_a} \right] \\ &= \frac{i_p C_f}{f} \left[-\mathcal{G}_f(\bar{\psi}) - (1 - \bar{\psi}) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \psi_b} &= \frac{1}{2f} 2 i_p C_f \left[\frac{-1}{k_\psi^2} \frac{\partial k_\psi}{\partial \psi_b} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) + \frac{1}{k_\psi} \mathcal{G}'_f(\bar{\psi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_b} \right] \\ &= \frac{i_p C_f}{f} \left[\mathcal{G}_f(\bar{\psi}) - \bar{\psi} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_f} = \frac{1}{2f} \frac{2i_p}{k_\psi} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) = \frac{i_p}{k_\psi f} \mathcal{G}_f(\bar{\psi})$$

$$\frac{\partial f}{\partial i_p} = \frac{1}{2f} \frac{2C_f}{k_\psi} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) = \frac{C_f}{k_\psi f} \mathcal{G}_f(\bar{\psi})$$

et les dérivées de $f'_\psi = \frac{\partial f}{\partial \psi}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f'_\psi}{\partial \psi}; \phi \right) &= - \frac{i_p C_f}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}; \phi \right) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi}; \phi \right) \\ &= - \frac{i_p C_f}{f^2} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \phi + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) k_\psi \phi \\ &= - \frac{1}{f} \left(f'_\psi \right)^2 \phi + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) k_\psi \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_\psi}{\partial \psi_a} &= - \frac{i_p C_f}{f^2} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \frac{\partial f}{\partial \psi_a} + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_a} \\ &= - \frac{i_p C_f}{f^2} f'_\psi \left[- \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) - (1 - \bar{\psi}) \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right] + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) k_a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_\psi}{\partial \psi_b} &= - \frac{i_p C_f}{f^2} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \frac{\partial f}{\partial \psi_b} + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi_b} \\ &= - \frac{i_p C_f}{f^2} f'_\psi \left[\mathcal{G}_f(\bar{\psi}) - \bar{\psi} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right] + \frac{i_p C_f}{f} \mathcal{F}'_f(\bar{\psi}) k_b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_\psi}{\partial C_f} &= \frac{i_p}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) - \frac{i_p C_f}{f^2} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \frac{\partial f}{\partial C_f} \\ &= \frac{i_p}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \left[1 - \frac{i_p C_f}{k_\psi f^2} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_\psi}{\partial i_p} &= \frac{C_f}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) - \frac{i_p C_f}{f^2} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \frac{\partial f}{\partial i_p} \\ &= \frac{C_f}{f} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \left[1 - \frac{i_p C_f}{k_\psi f^2} \mathcal{G}_f(\bar{\psi}) \right]\end{aligned}$$

Enfin, dans l'équation de $\dot{\psi}_a$, on calcule les dérivées de façon analogue à ce qui a déjà été fait, mais on évalue ces dérivées sur l'axe magnétique, c'est-à-dire pour $\bar{\psi} = 0$. On a alors $k_\psi(\bar{\psi} = 0) = k_\psi$, $k_a(\bar{\psi} = 0) = -k_\psi$ et $k_b(\bar{\psi} = 0) = 0$.

(cqfd)

III. Résultats

Afin d'illustrer la résolution du problème de l'évolution de l'équilibre du plasma, on a cherché à passer d'une configuration magnétique de type limiter à 50s, à une configuration de type X-point à 60s.

On a d'abord déterminé les courants dans les circuits de telle sorte que les configurations à 50s et à 60s soient celles envisagées. Pour cela, on a utilisé le code inverse statique (deuxième chapitre) avec un profil plat pour la densité de courant plasma : $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}) = \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) = 1 - \bar{\psi}^2$. Les courants dans les circuits à l'instant t ($50 \leq t \leq 60$) sont alors calculés par simple interpolation linéaire.

On a alors tenté de résoudre le problème de l'évolution de l'équilibre du plasma avec ce scénario pour les courants dans les circuits, un profil plat pour la densité de courant plasma et un pas de temps constant ($\Delta t = 1.s$). Mais lorsque la configuration X-point apparaît, c'est-à-dire lorsque le point hyperbolique entre vraiment dans la région du vide accessible au plasma (pour $t \simeq 54$), le volume du plasma varie fortement au cours des itérations de Newton et l'algorithme ne converge pas. En fait, avec le profil choisi ($1 - \bar{\psi}^2$), la densité de courant est très grande au bord du plasma et cet effet n'est pas négligeable dans le terme de la puissance absorbée par le plasma : la fonction ff'_ψ ($\approx \mathcal{F}_f(\bar{\psi})$) est multipliée par la résistivité qui est beaucoup plus grande sur le bord du plasma que sur l'axe magnétique (3 ordres de grandeur).

Afin d'obtenir la transition dans la configuration magnétique, on a procédé de deux manières : la première consiste à augmenter le pas de temps Δt au voisinage de transition (lorsque l'algorithme de Newton ne converge pas) ; la seconde consiste à modifier le profil de la densité de courant plasma et de passer d'un profil plat à 50s ($1 - \bar{\psi}^2$), à un profil piqué à 54s ($(1 - \bar{\psi})^2$) et à garder ce profil jusqu'à l'instant final de la simulation.

Les données sont les suivantes :

Pas de temps : $\Delta t = 1.s$
 Courant plasma à 50s : $I_p = 12 MA$

Coefficients à 50s :	$c_p^* = 0.001228$;	$c_f^* = 4.5258$
Beta poloïdal :	à 50s	$\beta_p = 0.100$
	à 59s	$\beta_p = 0.124$

Courants dans les circuits :	à 50s	à 59s
I_1	0.28 MA	-3.78 MA
I_2	3.39 MA	-3.78 MA
I_3	10.33 MA	8.86 MA
I_4	10.75 MA	10.06 MA
I_5	9.71 MA	12.00 MA
I_6	-3.89 MA	-5.80 MA
I_7	-1.66 MA	-1.79 MA

La résistivité η est donnée par la résistivité de Spitzer (cf L.Jr.Spitzer) :

$$\eta(\bar{\psi}) = k \frac{\ln \Lambda}{T_e^{\frac{3}{2}}(\bar{\psi})}$$

où k est une constante, T_e est la température électronique (en KeV) et Λ est un coefficient dépendant de T_e et de la densité électronique n_e (en m^{-3}).

Dans le premier cas - figures (III.3.1a) à (III.3.1d) - le profil de la densité de courant plasma est $1 - \bar{\psi}^2$. Au temps $t = 55s$, l'algorithme de Newton n'a pas convergé ce qui peut s'expliquer par le fait que le calcul de la matrice de Newton pour les éléments du bord du plasma ne se fait que sur les points de Gauss G à l'intérieur du plasma ($\psi(G) > \psi_b$) mais en ne leur affectant pas le poids correct ; cette manière de procéder est très sensible au voisinage de la transition. Le pas de temps a alors été multiplié par 2 ($\Delta t = 2s$) pour passer au temps $t = 56s$ et l'algorithme de Newton a convergé quadratiquement. Puis le pas de temps a de nouveau été pris égal à 1s jusqu'à la fin de la simulation.

Sur la figure (III.3.2) sont représentés, en fonction du temps, le courant plasma I_p , le volume du plasma V_p , le flux sur l'axe magnétique ψ_a , et la différence de flux entre l'axe magnétique et le bord du plasma $\psi_a - \psi_b$. Avec le profil choisi pour la densité de courant plasma, le courant plasma I_p doit augmenter au cours de la simulation et on peut le constater sur le premier graphique. Le volume du plasma V_p augmente jusqu'à ce que le point hyperbolique entre dans la région accessible au plasma (à 54s), puis diminue lorsque la position de ce point évolue (son ordonnée décroît). Enfin le flux ψ_a sur l'axe magnétique diminue, ce qui est en accord avec la remarque faite dans l'introduction de ce chapitre.

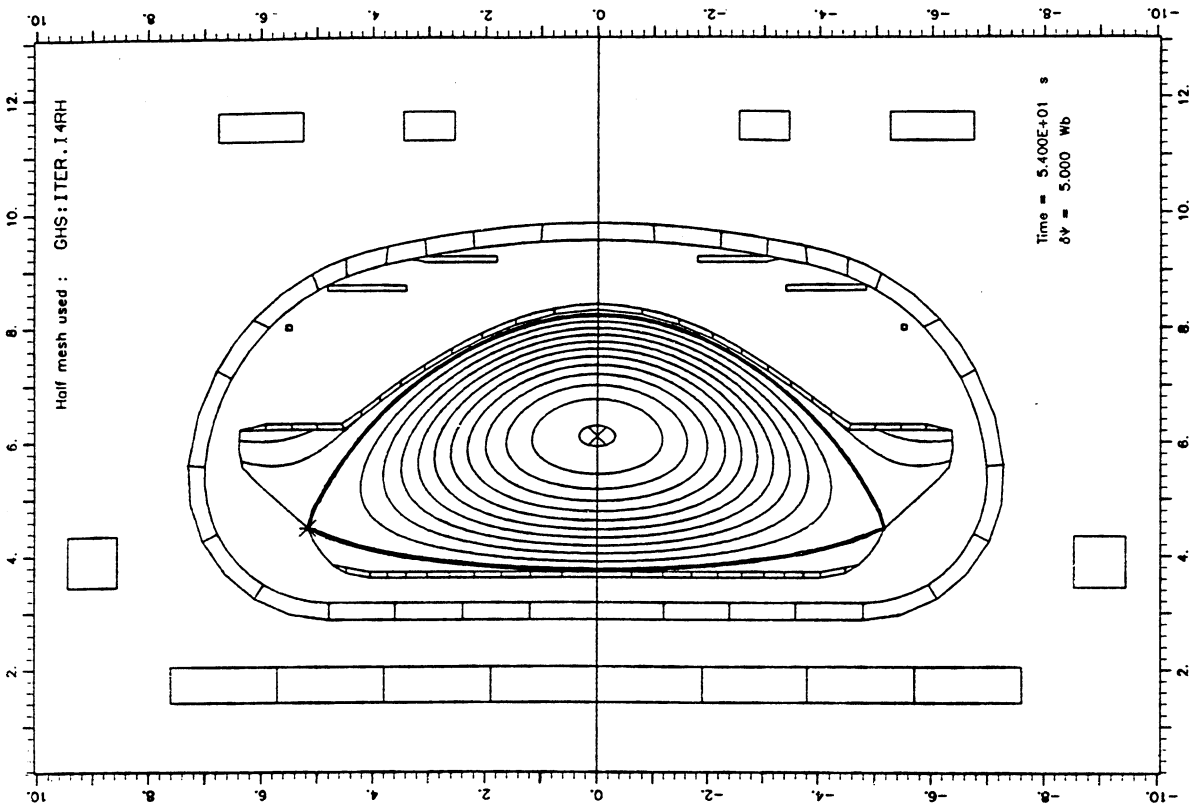


Figure (III.3.1b) : Plasma à 54s

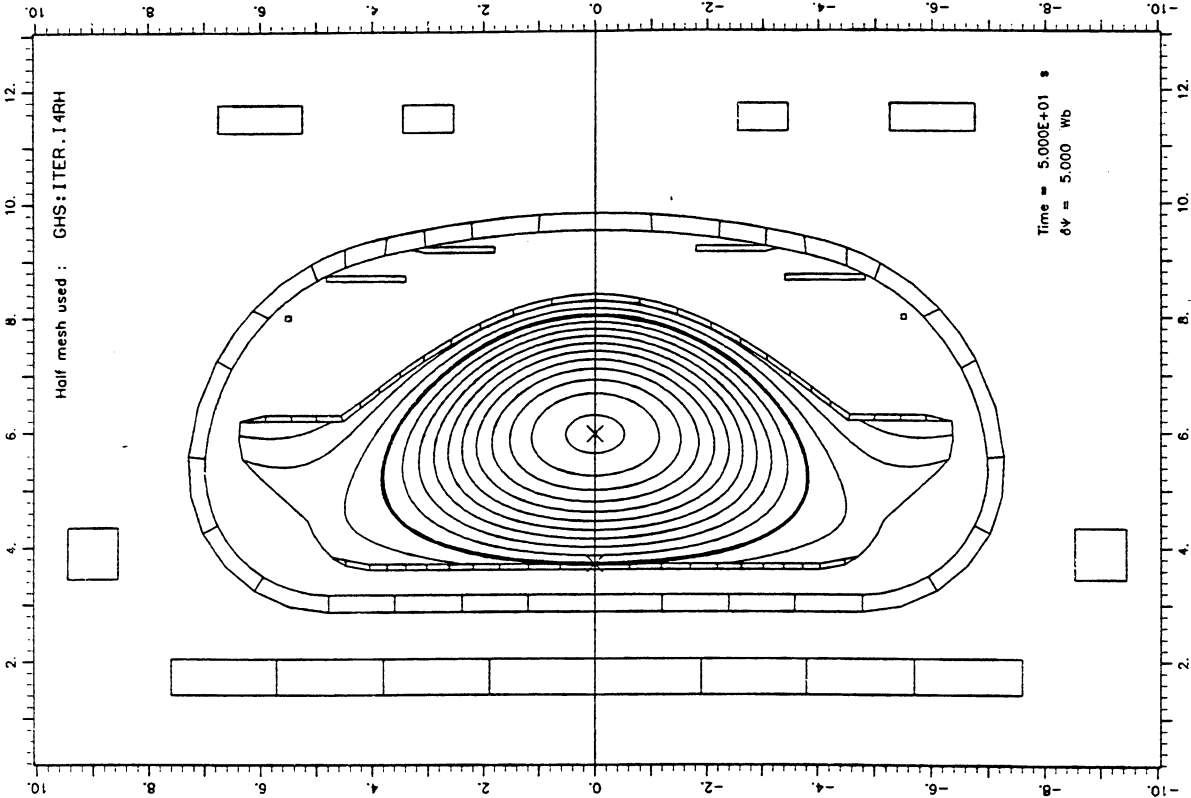


Figure (III.3.1a) : Plasma à 50s

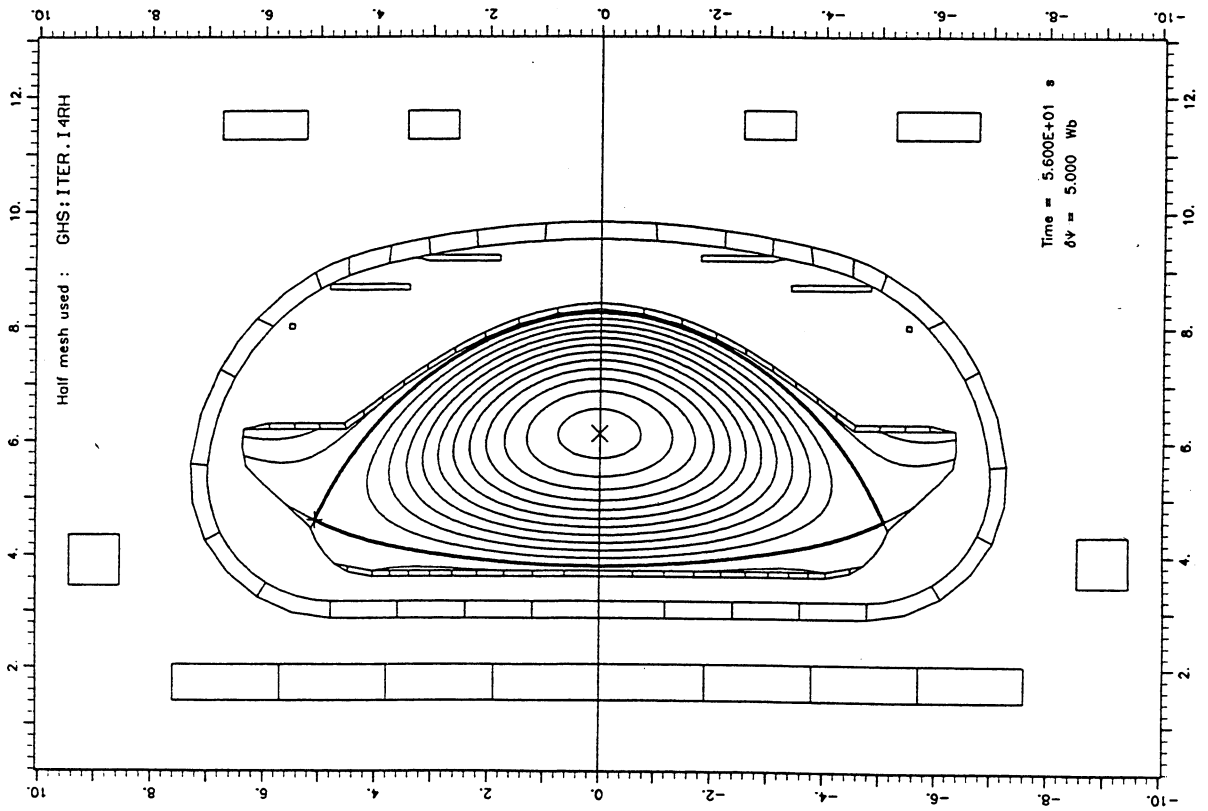
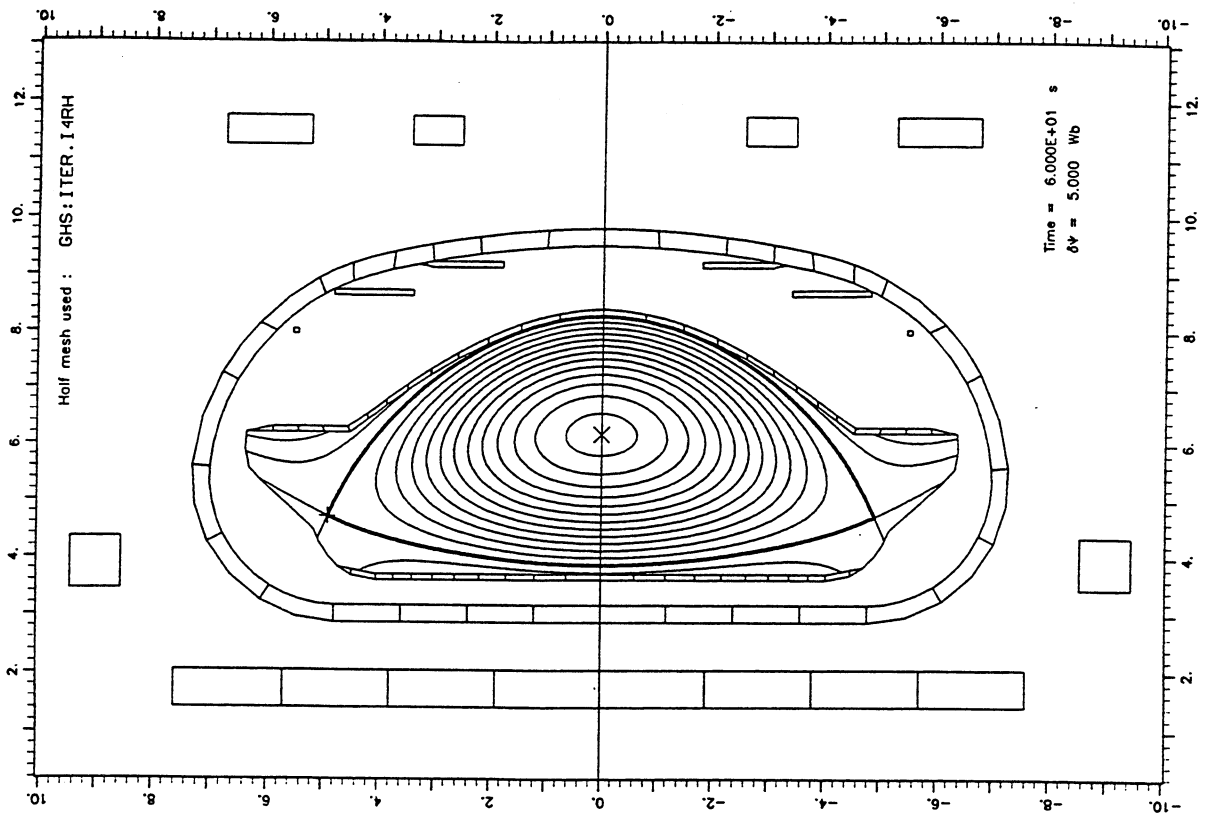
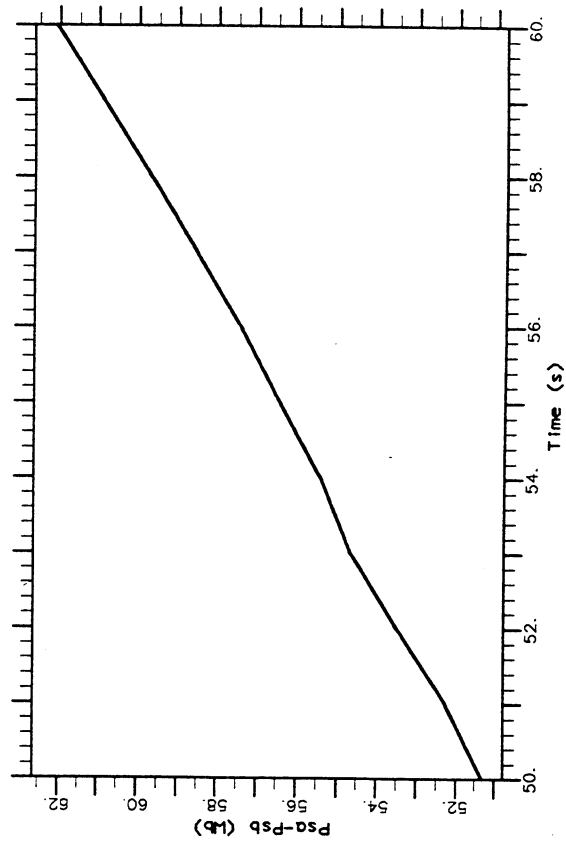
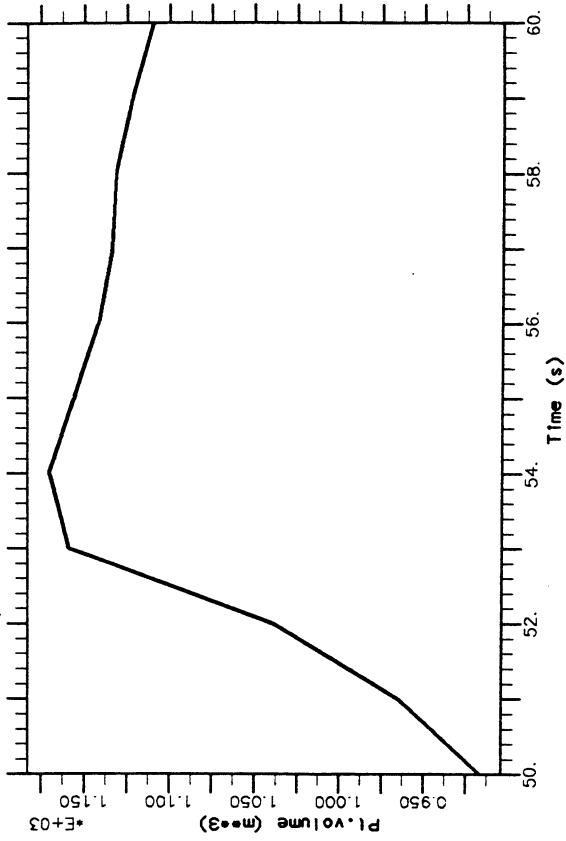
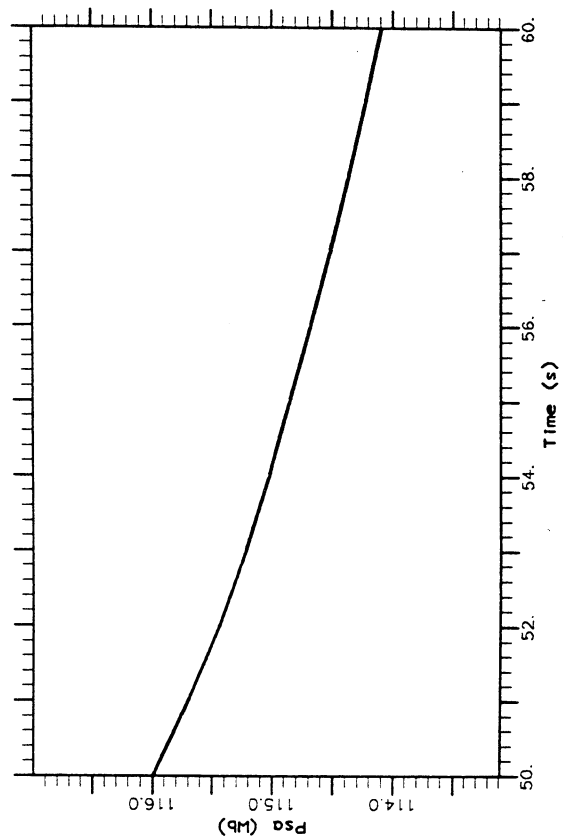
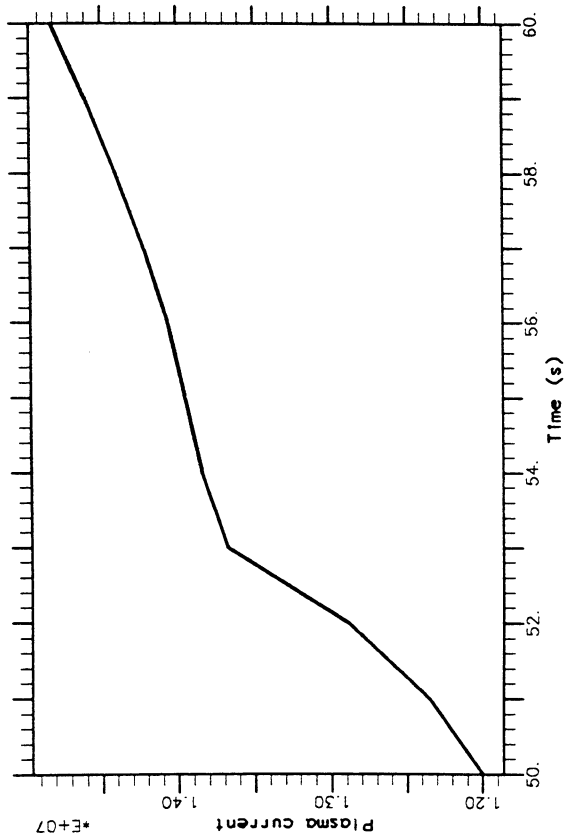


Figure (III 2 1a) - Diagram 2.1a



Volume du plasma $V_p(t)$ (m^3)
 Différence de flux $\psi_a(t) - \psi_b(t)$ (Wb)



Courant plasma $I_p(t)$ (A)
 Flux sur l'axe magnétique $\psi_a(t)$ (Wb)

Dans le second exemple, on fait varier le profil pour la densité de courant plasma de façon linéaire entre 50 et 54s :

$$\mathcal{F}_p(\bar{\psi}) = \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) = \frac{54-t}{4}(1-\bar{\psi}^2) + \left(1 - \frac{54-t}{4}\right)(1-\bar{\psi})^2 \quad 50 \leq t \leq 54$$

En d'autres termes, on passe d'un profil plat à 50s à un profil piqué à 54s, profil que l'on conserve jusqu'à 60s.

Avec un tel profil, on doit s'attendre à ce que le courant plasma diminue entre 50 et 54s car le fait de passer d'un profil plat à un profil piqué a pour conséquence une augmentation de la self inductance L_{pp} du plasma et donc une diminution du courant plasma $i_p(t)$. A partir de 54s le courant plasma doit de nouveau augmenter. On peut voir sur le premier graphique de la figure (III.3.4) que le courant plasma varie de la façon prévue.

Avec le profil piqué, la triangularité et l'ellipticité du plasma doivent être différentes de celles requises dans le code inverse statique lors du calcul des courants dans les circuits (le profil était alors plat). Le plasma à 60s est très peu allongé (figure (III.3.3d)) car les courants dans le cinquième circuit (bobines B_9 et B_{10} sur la figure (I.3.1)), qui sont à l'origine de l'allongement du plasma, sont alors plus éloignés du plasma du fait du profil piqué. Ces courants n'étant pas suffisants pour allonger le plasma, le volume du plasma diminue (figure (III.3.4)).

Sur le dernier graphique de la figure (III.3.4) est représentée l'évolution dans le temps de la différence de flux entre l'axe magnétique et le bord du plasma, $\psi_a - \psi_b$. On remarque que cette différence croît, ce qui correspond bien aux résultats expérimentaux pour le 'start-up' dans un Tokamak.

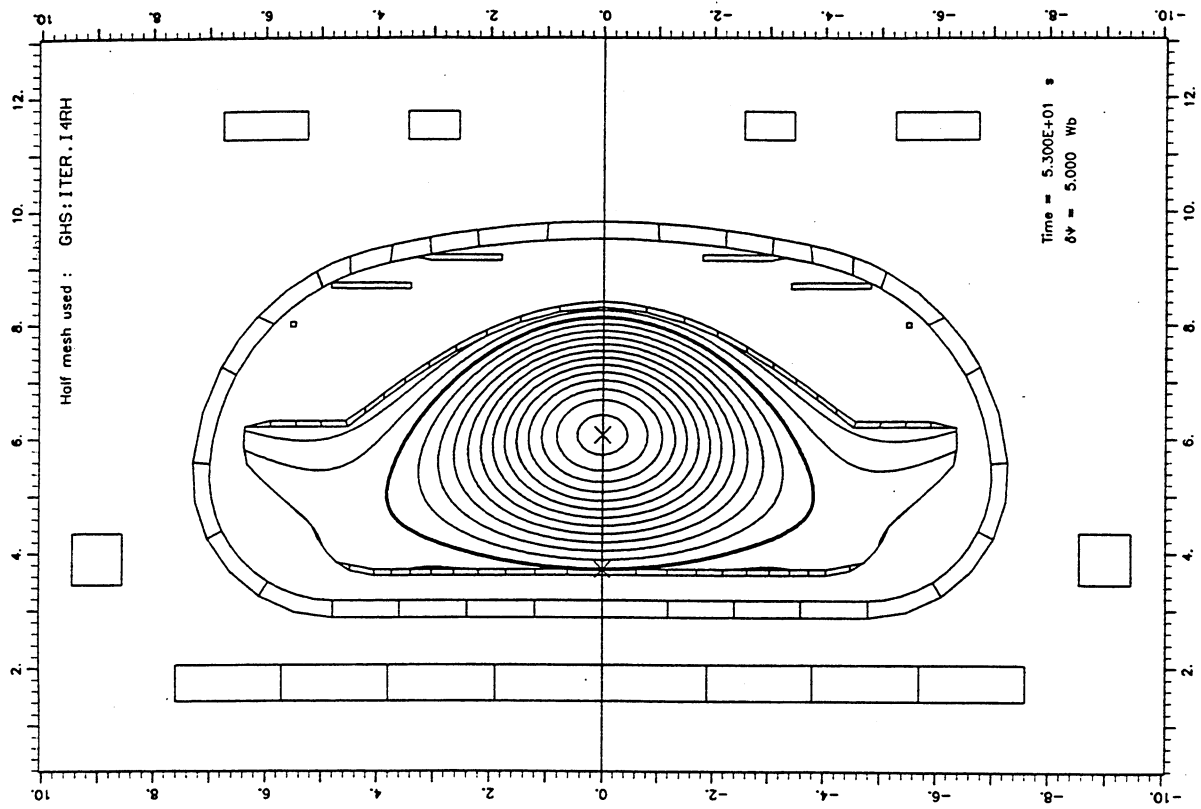


Figure (III.3.3b) : Plasma à 53s

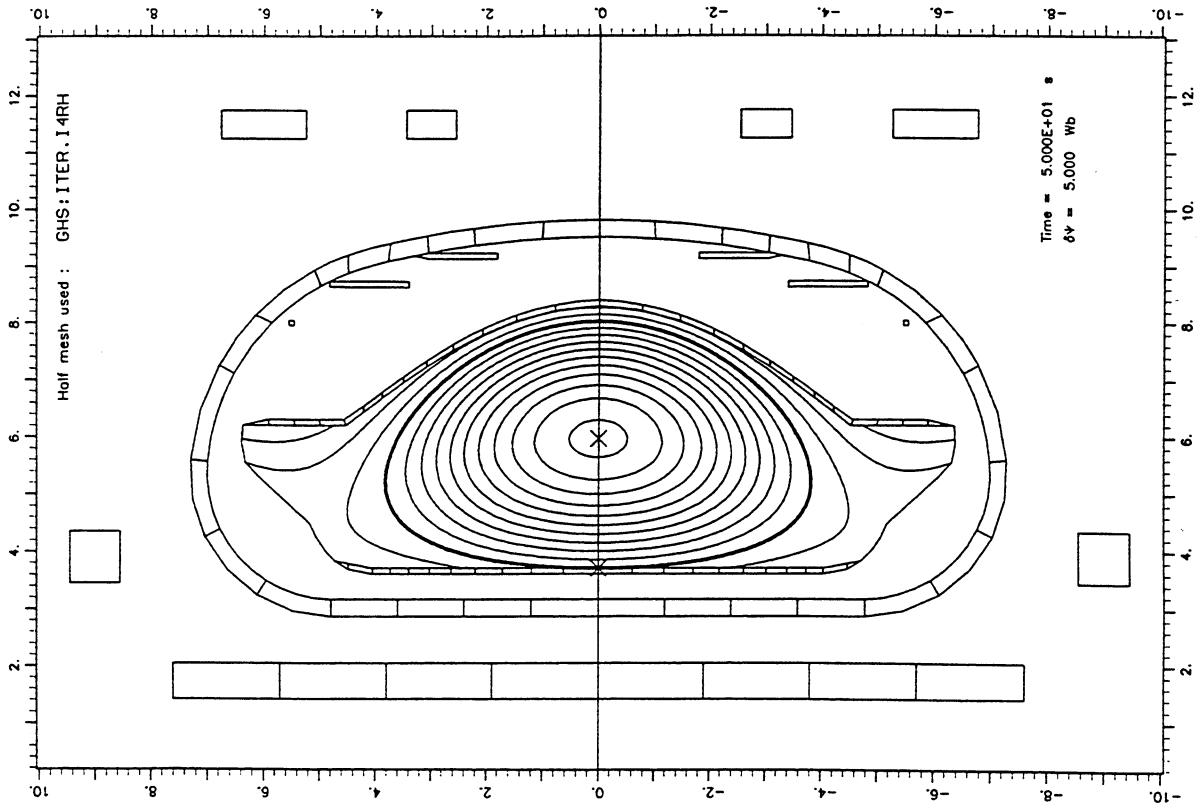
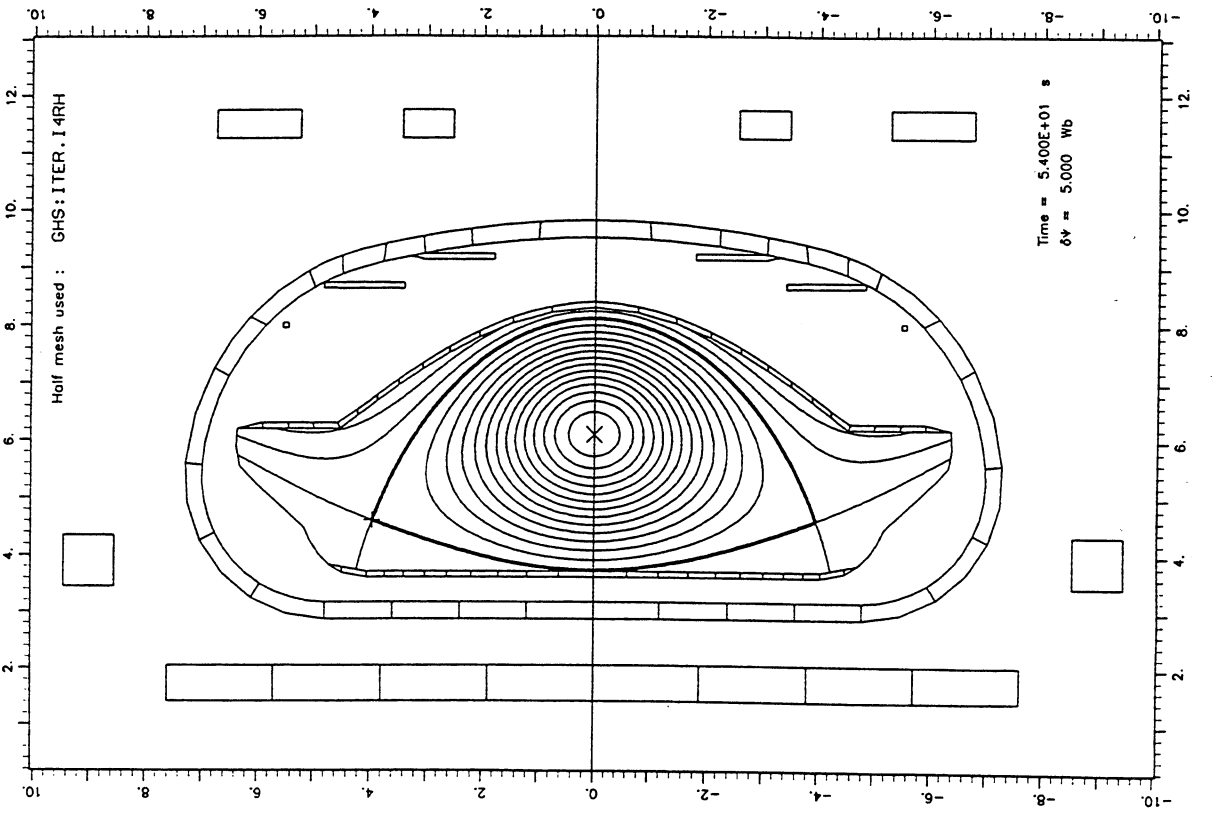
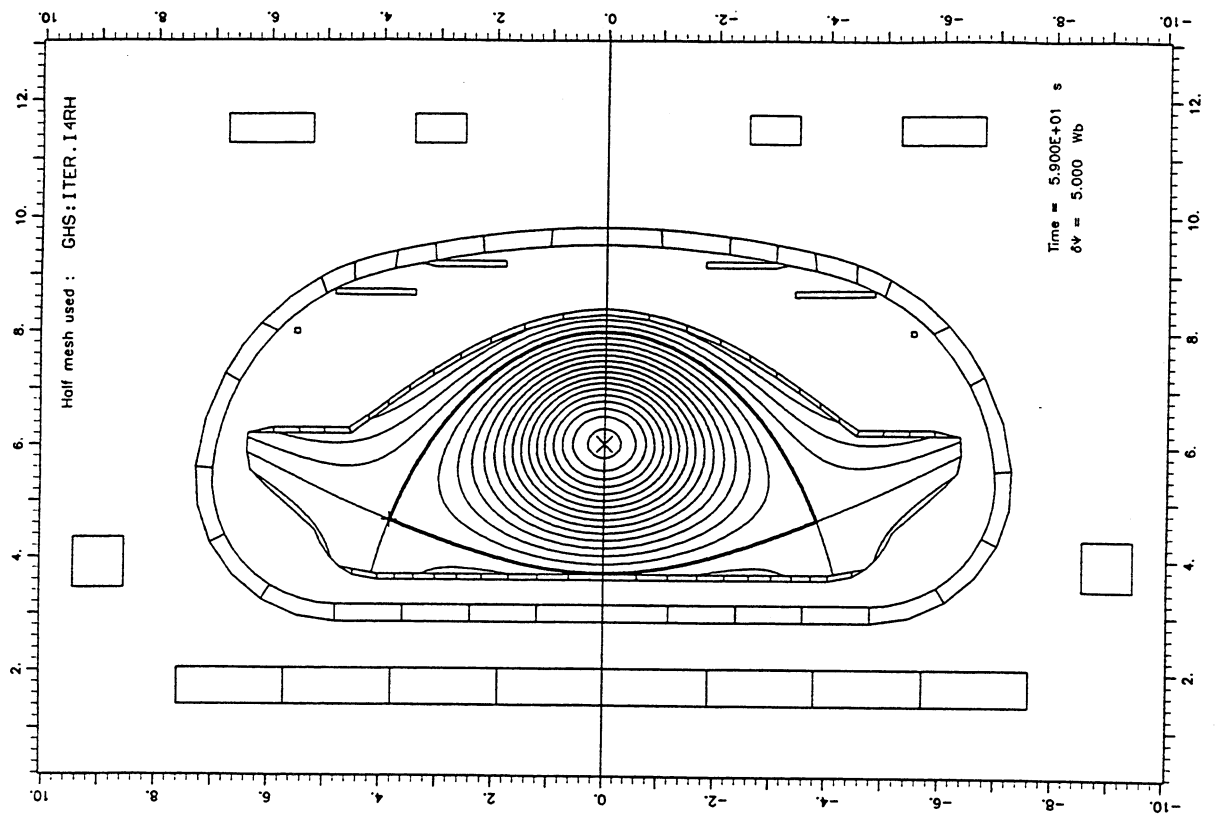
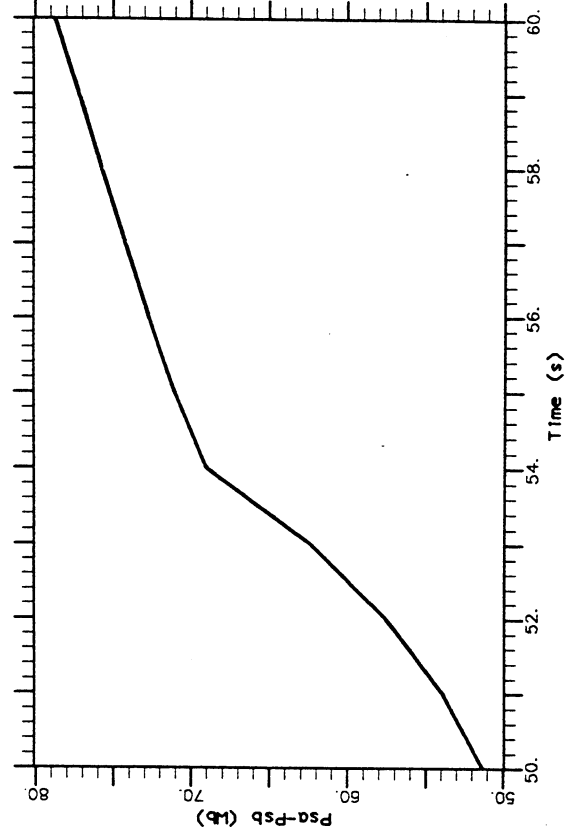
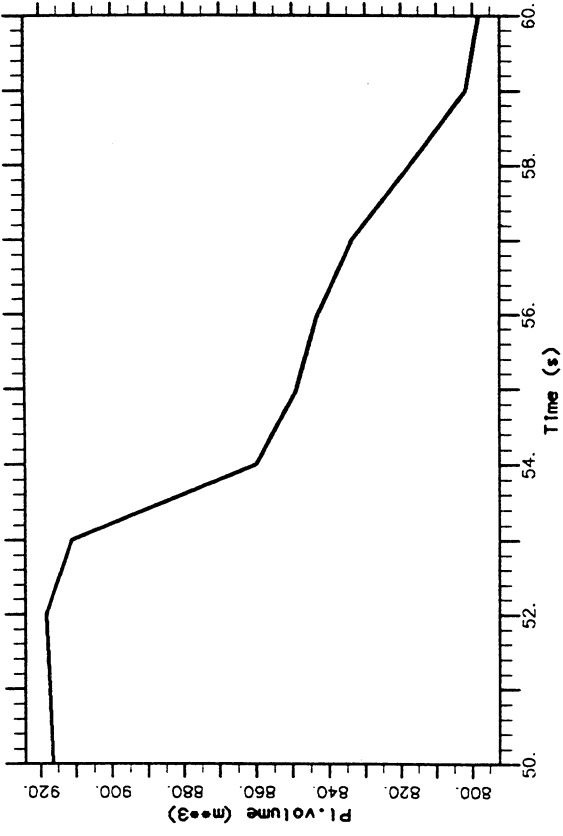


Figure (III.3.3a) : Plasma à 50s

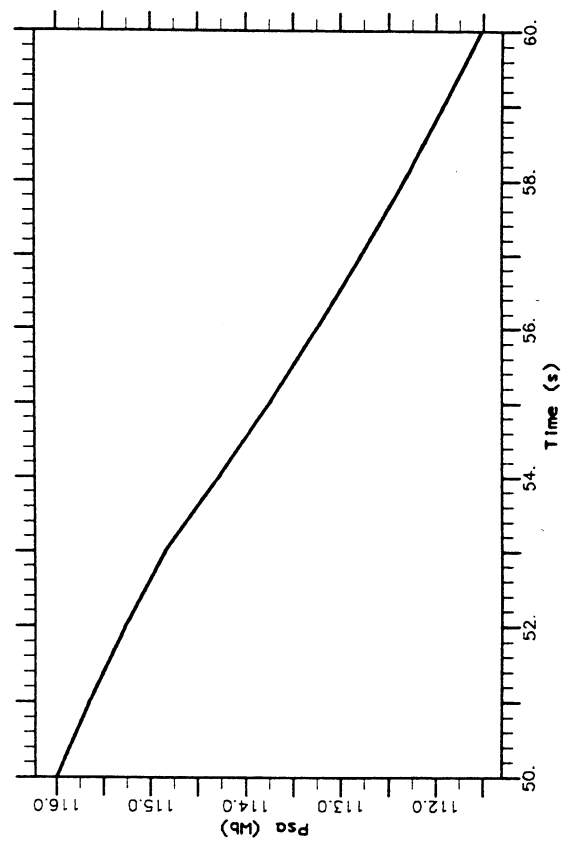
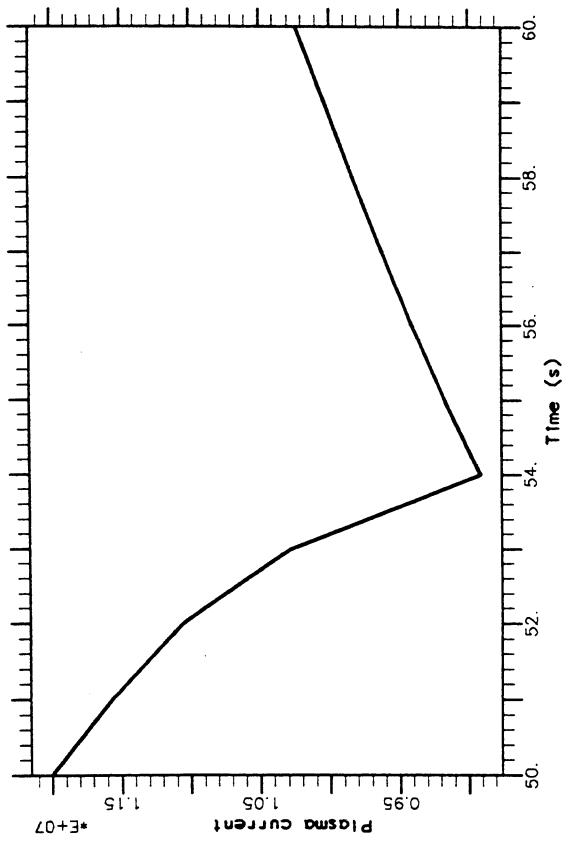


E:\msh\ITER\01\14RH

Figure (III.3.3c) : Plasma à 54s



Volume du plasma $V_p(t)$ (m^3)
 Différence de flux $\psi_a(t) - \psi_b(t)$ (Wb)



Courant plasma $I_p(t)$ (A)
 Flux sur l'axe magnétique $\psi_a(t)$ (Wb)

CHAPITRE IV

CONTROLE DE L'EVOLUTION DE L'EQUILIBRE DU PLASMA

Introduction

Dans le chapitre précédent on calculait la trajectoire du plasma lors d'une décharge avec des courants dans les circuits ou des tensions appliquées aux bornes des circuits donnés selon que les circuits étaient régis en courant ou en tension.

Or il est bien évident qu'avec des courants (ou des tensions) dans les circuits donnés à priori, l'évolution de l'équilibre du plasma est quelconque, ce qui est incompatible avec le fonctionnement réel d'un Tokamak. Il convient donc d'optimiser la trajectoire du plasma tout au long de la décharge en contrôlant les courants ou les tensions des circuits.

La première idée est d'optimiser la trajectoire du plasma en contrôlant les courants dans les bobines de champ poloïdal à chaque instant de la décharge. On a alors à résoudre une suite de problèmes de contrôle où les équations d'état sont les équations d'évolution discrétisées en temps (de manière implicite).

La deuxième idée est d'optimiser la trajectoire du plasma de manière globale en déterminant les lois d'évolution des tensions aux bornes des circuits. On résout alors un problème de contrôle pour des équations d'état paraboliques, les paramètres de contrôle étant les tensions.

L'ensemble des courants ou tensions déterminés par l'une de ces deux méthodes, peut alors être utilisé pour une préprogrammation. Mais lors du fonctionnement réel du Tokamak, un réajustement des courants ou des tensions peut être nécessaire pour assurer la stabilité du système, et on présente, dans la dernière partie de ce chapitre,

un principe de régulation par un feed-back de type *P.I.D* (Proportionnel Intégral et Dérivé).

Les équations d'état sont les équations développées dans le troisième chapitre, à savoir :

$$L\psi = -\frac{\sigma_v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \sum_{n=1}^{N_c} j_n 1_{S_{c,n}} + \frac{i_p}{\mu_o} \left[r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}(\bar{\psi}) \right] 1_{\Omega_p}$$

$$V_k = 2\pi \int_{S_{c,k}} q_k \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \sum_{n=1}^{N_c} \left[M_{kn} \frac{dI_n}{dt} + R_{kn} I_n \right] \quad k = 1, \dots, N_c$$

$$\psi_a = \sup_{\Omega_p} \psi$$

$$\psi_b = \sup_{\mathcal{D}} \psi$$

$$\frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_{\Omega_p} r \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) dS = 0$$

$$\eta_{||}(P_a) i_p \left[r_a C_p \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right] + \frac{\dot{\psi}_a}{r_a} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ -i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl,\varphi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n i_n dS + \pi \psi_b i_p - \pi f_o \int_{\Omega_p} \frac{f}{r} dS + \pi \int_{\Omega_p} r B^2 dS \right\} \\ + 2 i_p \int_{\Omega_p} r \mathcal{J}_{pl,\varphi} \sum_{n=1}^{N_c} F_n i_n \frac{di_n}{dt} dS \\ + 2\pi \int_{\Omega_p} r \left\{ \eta \left[P' f \frac{\partial f}{\partial \psi} + B^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right\} dS = 0 \end{aligned}$$

en faisant les hypothèses que l'inductance mutuelle L_{pq} entre le plasma et les bobines de champ toroïdal est négligeable, que la pression $p(\psi)$ et la densité de courant plasma \vec{j}_{pl} sont nulles sur le bord du plasma. Et avec :

$$\Omega_p = \{ M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi \}$$

$$\mathcal{D} = \{ M \in \Omega_{cv}^i / \vec{P}_a \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \psi(M) < 0 \} \cup \{ X \in \Omega_A, X \neq P_a / \vec{\nabla} \psi(X) = \vec{0} \}$$

I. Contrôle de l'évolution à chaque instant

Ce problème semble à priori redondant avec le problème du contrôle de l'équilibre (deuxième chapitre). Mais il existe deux différences essentielles : la première est le système d'équations ; la seconde réside dans le fait qu'il faut assurer une certaine continuité dans l'évolution des courants . Cette continuité est nécessaire en pratique car on ne peut pas imaginer un dispositif expérimental pour lequel les intensités des courants dans les circuits varient de façon chaotique à chaque instant (action du champ du transformateur).

La manière de procéder reste néanmoins la même que celle pour le contrôle de l'équilibre, avec l'introduction d'une fonction-coût, d'un Lagrangien et d'un adjoint.

On désire optimiser la trajectoire du plasma de l'instant t_0 à l'instant t_f . On définit un ensemble discret d'instant t_1, \dots, t_f auxquels on va définir un problème de contrôle.

1. Le vecteur de contrôle

Soit $I = (I_1(t_j), \dots, I_m(t_j)) \in R^m \times \{t_1, \dots, t_f\}$ le vecteur dont les composantes $I_i(t_j), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, f$ sont les intensités des courants dans les bobines de champ poloïdal ou des courants filamenteux aux différents instants de la discrétisation en temps.

On suppose que les $N_c - m$ circuits restants sont régis en courant et que les lois d'évolution de ces courants sont données.

2. La fonction-coût

Notre objectif est de contrôler le déplacement du plasma au cours de la décharge, c'est-à-dire contrôler la forme du plasma aux instants t_1, \dots, t_f de la décharge grâce aux m courants dans les circuits. On doit donc minimiser à chaque instant la fonction-coût suivante :

$$\begin{aligned} J(I(t_j), \psi) = & \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_d(t_j)} \alpha(M, t_j) [\psi(M) - \psi(M_0)]^2 dl + \frac{\alpha_X(t_j)}{2} \int_{\omega_X} \frac{|\overline{\nabla \psi}|^2}{r} dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i(t_j) [I_i(t_j) - I_i(t_{j-1})]^2 \end{aligned} \quad (IV.1.1)$$

où $\Gamma_d(t_j)$ est la frontière du plasma désirée à l'instant t_j et M_0 est un point particulier de cette frontière ; ω_X est un domaine autour du point hyperbolique souhaité dans le cas d'une configuration X-point et la position de ce point peut changer au cours de la décharge ; enfin le dernier terme de la fonction-coût est le coût énergétique d'une telle configuration, $I_i(t_{j-1})$ étant l'intensité du courant dans le $i^{\text{ème}}$ circuit à l'instant t_{j-1} ; cette expression du coût énergétique a l'avantage d'assurer une certaine continuité dans l'évolution des courants au cours de la décharge.

3. Les équations d'état

Les équations considérées sont les équations d'état rappelées au début de ce chapitre (sans l'équation des circuits car ces derniers sont régis en courant) discrétisées en temps.

Afin de simplifier les notations, on va réécrire le système à résoudre et raisonner sur le système simplifié.

On définit $\Upsilon \in R^5$ comme étant le vecteur $(\psi_a, \psi_b, C_p, C_f, i_p)$; on note (ψ, Υ) le vecteur d'état à l'instant t_j et (ψ^*, Υ^*) le vecteur d'état à l'instant t_{j-1} avec $t_j = t_{j-1} + \Delta t$. Le système d'équations à résoudre peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \mu_o L\psi + A_1 \psi = F_1(\psi, \Upsilon) + B_1 I \\ a_2(\psi, \Upsilon) + b_2(\psi, \Upsilon) I + f_2^* = 0 \end{cases} \quad (IV.1.2)$$

où A_1 est une fonction non nulle sur les parois de la chambre à vide, F_1 , a_2 , et b_2 sont des opérateurs non linéaires, B_1 est une fonction non nulle dans les bobines de champ poloidal et f_2^* une fonction de l'état du système à l'instant t_{j-1} . L'expression de ces quantités est donnée en annexe 1.

4. Le problème de contrôle

Le problème (\mathcal{P}_j) à résoudre à l'instant t_j est le suivant : étant connu l'état du système jusqu'à l'instant t_{j-1} et donnés à l'instant t_j les courants I_{m+1}, \dots, I_{N_c} non sujets au contrôle, les fonctions $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}), \mathcal{F}_f(\bar{\psi}), \eta(\bar{\psi})$ et σ_v , trouver $(I, \psi, \Upsilon) \in R^m \times V(\Omega_i) \times R^5$ qui vérifie les équations (IV.1.2) et tel que :

$$\begin{aligned} J(I, \psi) &= \text{Inf } J(I', \psi') \\ I' &\in R^m \\ (\psi', \Upsilon') &\in V(\Omega_i) \times R^5 \end{aligned}$$

où $V(\Omega_i)$ est l'espace de fonctions défini par (II.2.2).

Comme dans le cas du contrôle de l'équilibre du plasma, on veut dériver des équations pour l'adjoint $(\chi, \nu) \in V(\Omega_i) \times R^5$, et on définit pour cela le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I, (\psi, \Upsilon), (\chi, \nu)) &= J(I, \psi) + \int_{\Omega_{ev}} \chi A_1 \psi dS + \int_{\Omega_i} \frac{\overline{\nabla \psi} \cdot \overline{\nabla \chi}}{r} dS \\ &+ C(\psi, \chi) - \int_{\Omega_p} F_1(\psi, \Upsilon) \chi dS - \sum_{i=1}^{N_c} I_i \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \chi dS \\ &+ \nu \left[a_2(\psi, \Upsilon) + \sum_{i=1}^{N_c} b_{2,i}(\psi, \Upsilon) I_i + f_2^* \right] \end{aligned} \quad (IV.1.3)$$

Résoudre le problème (P_j) consiste donc à résoudre le système d'optimalité constitué des équations d'état (IV.1.2), des équations pour l'adjoint et de la condition d'optimalité (cas sans contraintes).

On note δ_M la mesure de Dirac au point $M \in \Omega_i$ et δ_Γ la mesure sur le contour Γ définie comme :

$$(\delta_\Gamma, f) = \oint_\Gamma f \, dl$$

L'adjoint $(\chi, \nu) \in V(\Omega_i) \times R^5$ vérifie le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o L\chi + A_1 \chi \, 1_{\Omega_{ev}} - F'_1 \chi \, 1_{\Omega_p} + \nu \left[A'_2 + \sum_{i=1}^{N_c} B'_{2,i} I_i \right] \\ = - \left(\delta_{\Gamma_d}, \alpha(\psi - \psi(M_o)) \right) + \delta_{M_o} \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) (\psi(M) - \psi(M_o)) \, dl \\ - \alpha_X \mu_o L\psi \, 1_{\omega_X} \\ - \int_{\Omega_p} \frac{\partial F_1}{\partial \Upsilon} \chi \, dS + \nu \left[\frac{\partial a_2}{\partial \Upsilon} + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial b_{2,i}}{\partial \Upsilon} I_i \right] = 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\omega_X \\ \chi_{int} = \chi_{ext} \quad \text{sur } \partial\omega_X \end{array} \right. \quad (IV.1.4)$$

avec F'_1 , A'_2 et $B'_{2,i}$ définis par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} F'_1 \phi \, dS &= \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}; \phi \right) \, dS \\ \int_{\Omega_p} A'_2 \phi \, dS &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial \psi}; \phi \right) \\ \int_{\Omega_p} B'_{2,i} \phi \, dS &= \left(\frac{\partial b_{2,i}}{\partial \psi}; \phi \right) \quad i = 1, \dots, N_c \end{aligned}$$

La condition d'optimalité pour la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de contrôle (courant dans le $i^{\text{ème}}$ circuit) dans le cas sans contraintes est donnée par :

$$k_i(I_i - I_i^*) - \int_{S_{e,i}} B_{1,i} \chi \, dS + \nu b_{2,i}(\psi, \Upsilon) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (IV.1.5)$$

Le système d'équations pour l'adjoint est obtenu en calculant tout d'abord la Gâteaux-dérivée du Lagrangien \mathcal{L} par rapport à ψ dans la direction ϕ et en formulant l'équation ainsi obtenue en termes d'équation aux dérivées partielles, puis en calculant la dérivée de \mathcal{L} par rapport à Υ .

La condition d'optimalité pour la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de contrôle I est obtenue en dérivant \mathcal{L} par rapport à I_i .

On peut montrer que la dérivée de \mathcal{L} par rapport à I_i est égale à la dérivée de la fonction-coût J par rapport à I_i :

$$\frac{\partial J}{\partial I_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_i} = k_i(I_i - I_i^*) - \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \chi \, dS + \nu b_{2,i}(\psi, \Upsilon)$$

On suppose que l'état du système (ψ, Υ) dépend linéairement des courants dans les circuits, ce que l'on peut noter par (ψ_I, Υ_I) .

On calcule tout d'abord la Gâteaux-dérivée de la fonction-coût J par rapport à I dans la direction $I' - I$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J}{\partial I}; I' - I \right) &= \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) (\psi_I(M) - \psi_I(M_o)) (\psi_{I'-I}(M) - \psi_{I'-I}(M_o)) \, dl \\ &+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla} \psi_I \cdot \overline{\nabla} \psi_{I'-I}}{r} \, dS + \sum_{i=1}^m k_i (I_i - I_i^*) (I'_i - I_i) \end{aligned} \quad (IV.1.6)$$

On multiplie la première équation de (IV.1.2) par χ et on intègre sur Ω_i . On écrit cette équation pour $(\psi_{I'}, \Upsilon_{I'})$, puis pour (ψ_I, Υ_I) , et on soustrait. On écrit la seconde équation de (IV.1.2) pour $(\psi_{I'}, \Upsilon_{I'})$, puis pour (ψ_I, Υ_I) , et on soustrait. En sommant les deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{ev}} \chi A_1(\psi_{I'} - \psi_I) \, dS + \int_{\Omega_i} \frac{\overline{\nabla} \chi \cdot (\overline{\nabla} \psi_{I'} - \overline{\nabla} \psi_I)}{r} \, dS + C(\chi, \psi_{I'} - \psi_I) \\ &- \int_{\Omega_p} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) + \frac{\partial F_1}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) \right] \chi \, dS \\ &- \sum_{i=1}^m \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \chi (I'_i - I_i) \, dS \\ &+ \nu \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) + \frac{\partial a_2}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) \right] \\ &+ \nu \left[\left(\frac{\partial b_2}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) I + \frac{\partial b_2}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) I + \sum_{i=1}^m b_{2,i} (I'_i - I_i) \right] = 0 \end{aligned} \quad (IV.1.7)$$

On considère maintenant la première équation pour l'adjoint écrite sous forme faible pour $\phi = \psi_{I'} - \psi_I$. On ajoute la seconde équation de (IV.1.4) multipliée par $(\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I)$, et

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{cv}} \chi A_1(\psi_{I'} - \psi_I) dS + \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla}\chi \cdot (\vec{\nabla}\psi_{I'} - \vec{\nabla}\psi_I)}{r} dS + C(\chi, \psi_{I'} - \psi_I) \\
& - \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) \chi dS + \nu \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) + \left(\frac{\partial b_2}{\partial \psi}; \psi_{I'} - \psi_I \right) I \right] \\
& - \int_{\Omega_p} \frac{\partial F_1}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) \chi dS + \nu \left[\frac{\partial a_2}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) + \frac{\partial b_2}{\partial \Upsilon} (\Upsilon_{I'} - \Upsilon_I) I \right] \quad (IV.1.8) \\
& = - \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) (\psi_I(M) - \psi_I(M_o)) (\psi_{I'-I}(M) - \psi_{I'-I}(M_o)) dl \\
& - \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla}\psi_I \cdot \vec{\nabla}\psi_{I'-I}}{r} dS
\end{aligned}$$

A partir des équations (IV.1.7) et (IV.1.8), on déduit :

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) (\psi_I(M) - \psi_I(M_o)) (\psi_{I'-I}(M) - \psi_{I'-I}(M_o)) dl \\
& + \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla}\psi_I \cdot \vec{\nabla}\psi_{I'-I}}{r} dS \\
& = - \sum_{i=1}^m \int_{S_{c,i}} B_1 \chi (I'_i - I_i) dS + \sum_{i=1}^m b_{2,i} (I'_i - I_i)
\end{aligned}$$

En substituant cette expression dans (IV.1.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial J}{\partial I}; I' - I \right) & = \sum_{i=1}^m k_i (I_i - I_i^*) (I'_i - I_i) \\
& - \sum_{i=1}^m \int_{S_{c,i}} B_1 \chi (I'_i - I_i) dS + \sum_{i=1}^m b_{2,i} (I'_i - I_i)
\end{aligned}$$

On en déduit alors l'égalité désirée.

5. Résolution numérique

On résout le problème d'optimalité (\mathcal{P}_j) de façon identique au problème inverse statique. On discrétise tout d'abord les équations d'état par une méthode d'éléments finis.

L'algorithme décrit ci-dessous utilisera les notations introduites lors de la résolution numérique du problème inverse statique ainsi que celles du chapitre III.

On suppose que toutes les quantités sont connues jusqu'à l'instant t_{j-1} ; à l'instant $t = t_j$, les courants des $N_c - m$ circuits ne faisant pas l'objet du contrôle sont donnés, ainsi que les profils des fonctions $\mathcal{F}_p(\bar{\psi})$, $\mathcal{F}_f(\bar{\psi})$, $\eta(\bar{\psi})$ et la conductivité de la chambre à vide σ_v .

La $n^{\text{ième}}$ itération externe (itération de Newton) est repérée par l'exposant n , et la $j^{\text{ème}}$ itération interne (itération de Gradient Conjugué) est repérée par l'indice j . On note $x = (\psi, \Upsilon)$ et $y = (\chi, \nu)$.

L'algorithme est alors :

$$I_0^n = I^n \quad \text{pour } I \in R^m$$

Calculer x_0^n solution du système (IV.1.2) :

$$x_0^n = x^n - [A(x^n)]^{-1} E(x^n)$$

où la matrice $A(x^n)$ est donnée par la proposition (III.3.2) et $E(x^n)$ est le système d'équations (IV.1.2) (formulation faible).

Commencent alors les itérations de Gradient Conjugué.

Calculer l'adjoint y_j^n solution du système d'équations (IV.1.4) :

$$y_j^n = \left[(A(x^n))^T \right]^{-1} E_1(x_j^n)$$

$$E_{1k} = - \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\psi_j^n(M) - \psi_j^n(M_o)] [\phi_k(M) - \phi_k(M_o)] dl$$

$$- \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla} \psi_j^n \cdot \overline{\nabla} \phi_k}{r} dS \quad 1 \leq k \leq N_l$$

$$E_{1k} = 0 \quad N_l + 1 \leq k \leq N_l + 5$$

Calculer les composantes du gradient G_j^n de la fonction-coût d'après (IV.1.5) :

$$(G_j^n)_i = k_i [(I_j^n)_i - I_i^*] - \int_{S_{e,i}} \chi_j^n B_{1,i} dS + \nu_j^n b_{2,i}(x_j^n)$$

et \widetilde{x}_j^n en résolvant :

$$\widetilde{x}_j^n = [A(x^n)]^{-1} E_2(G_j^n)$$

$$E_{2k} = \sum_{i=1}^m (G_j^n)_i \int_{S_{e,i}} B_{1,i} \phi_k dS \quad 1 \leq k \leq N_l$$

$$E_{2k} = \sum_{i=1}^m b_{2,i}(x_j^n) (G_j^n)_i \quad N_l + 1 \leq k \leq N_l + 5$$

Déterminer la direction de descente ω_j^n (et \widehat{x}_j^n) :

$$\text{si } j = 0 \quad \omega_0^n = G_0^n$$

$$\widehat{x}_0^n = \widetilde{x}_0^n$$

$$\text{si } j > 0 \quad \omega_j^n = G_j^n + \beta_j^n \omega_{j-1}^n$$

$$\widehat{x}_j^n = \widehat{x}_j^n + \beta_j^n \widehat{x}_{j-1}^n$$

$$\beta_j^n = - \frac{\beta_{num}}{\beta_{den}}$$

$$\beta_{num} = \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_0)] [\widehat{\psi}_{j-1}^n(M) - \widehat{\psi}_{j-1}^n(M_0)] dl$$

$$+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\psi}_{j-1}^n}{r} dS$$

$$\beta_{den} = \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\widehat{\psi}_{j-1}^n(M) - \widehat{\psi}_{j-1}^n(M_0)]^2 dl + \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{|\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_{j-1}^n|^2}{r} dS$$

Calculer le pas de descente ρ_j^n :

$$\rho_j^n = \frac{\rho_{num}}{\rho_{den}}$$

$$\rho_{num} = \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\psi_j^n(M) - \psi_j^n(M_0)] [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_0)] dl$$

$$+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{\widehat{\nabla} \psi_j^n \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n}{r} dS + \sum_{i=1}^m k_i (I_j^n)_i (\omega_j^n)_i$$

$$\rho_{den} = \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_0)]^2 dl$$

$$+ \alpha_X \int_{\omega_X} \frac{|\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n|^2}{r} dS + \sum_{i=1}^m k_i (\omega_j^n)_i^2$$

En déduire les nouveaux courants et le nouvel état :

$$\begin{cases} I_{j+1}^n = I_j^n - \rho_j^n \omega_j^n \\ x_{j+1}^n = x_j^n - \rho_j^n \widehat{x}_j^n \end{cases}$$

Si $j \neq m$ alors continuer les itérations internes.

Si $j = m$ alors :

$$\begin{cases} I^{n+1} = I_{m+1}^n \\ x^{n+1} = x_{m+1}^n \end{cases}$$

Si la fonction-coût n'est pas minimum continuer les itérations externes ; sinon calculer les courants à l'instant suivant $t + \Delta t$ tant que $t + \Delta t \leq t_f$.

6. Résultats

L'exemple choisi est celui de l'évolution de l'équilibre du plasma entre 40 et 50s pour une configuration limiter et avec le profil $1 - \bar{\psi}^2$ pour la densité de courant plasma. La configuration reste de type limiter au cours de l'évolution mais le volume du plasma augmente.

Les figures (IV.1.1a) et (IV.1.1b) représentent le plasma dans la chambre à vide aux temps 40 et 50s.

Le premier graphique de la figure (IV.1.2) représente l'évolution dans le temps du courant plasma. On constate que celui-ci augmente régulièrement au cours de la décharge, tout comme le volume du plasma.

Les graphiques (IV.1.3a) à (IV.1.3g) représentent l'évolution des courants dans les circuits, lesquels sont les paramètres du contrôle. L'évolution de ces courants est régulière, satisfaisant en cela le critère introduit dans la fonction-coût (IV.1.1).

Les données sont les suivantes :

Pas de temps :	$\Delta t = 1.s$
Courant plasma à 40s :	$I_p = 10 MA$
Coefficients à 40s :	$c_p^* = 0.01795 ; c_f^* = 6.3752$
Beta poloïdal :	à 40s $\beta_p = 0.96$
	à 50s $\beta_p = 0.100$

Fonction-coût :	à 40s	à 50s
Nombre de points sur Γ_d :	9	9
Poids $\alpha(M)$:	1.0	1.0
Ellipticité $e_s = e_i$:	1.41	1.77
Triangularité $t_s = t_i$:	0.14	0.31
Rayon maximum R_o :	5.63	5.87
Rayon minimum a_o :	1.91	2.16

Courants initiaux	Poids $k_i(t)$, $40 < t \leq 50$
$I_1 = 3.97 MA$	$k_1 = 10^{-3}$
$I_2 = 6.18 MA$	$k_2 = 10^{-3}$
$I_3 = 13.07 MA$	$k_3 = 10^{-3}$
$I_4 = 9.07 MA$	$k_4 = 10^{-3}$
$I_5 = 10.76 MA$	$k_5 = 4.10^{-3}$
$I_6 = -4.44 MA$	$k_6 = 36.10^{-3}$
$I_7 = -0.98 MA$	$k_7 = 36.10^{-3}$

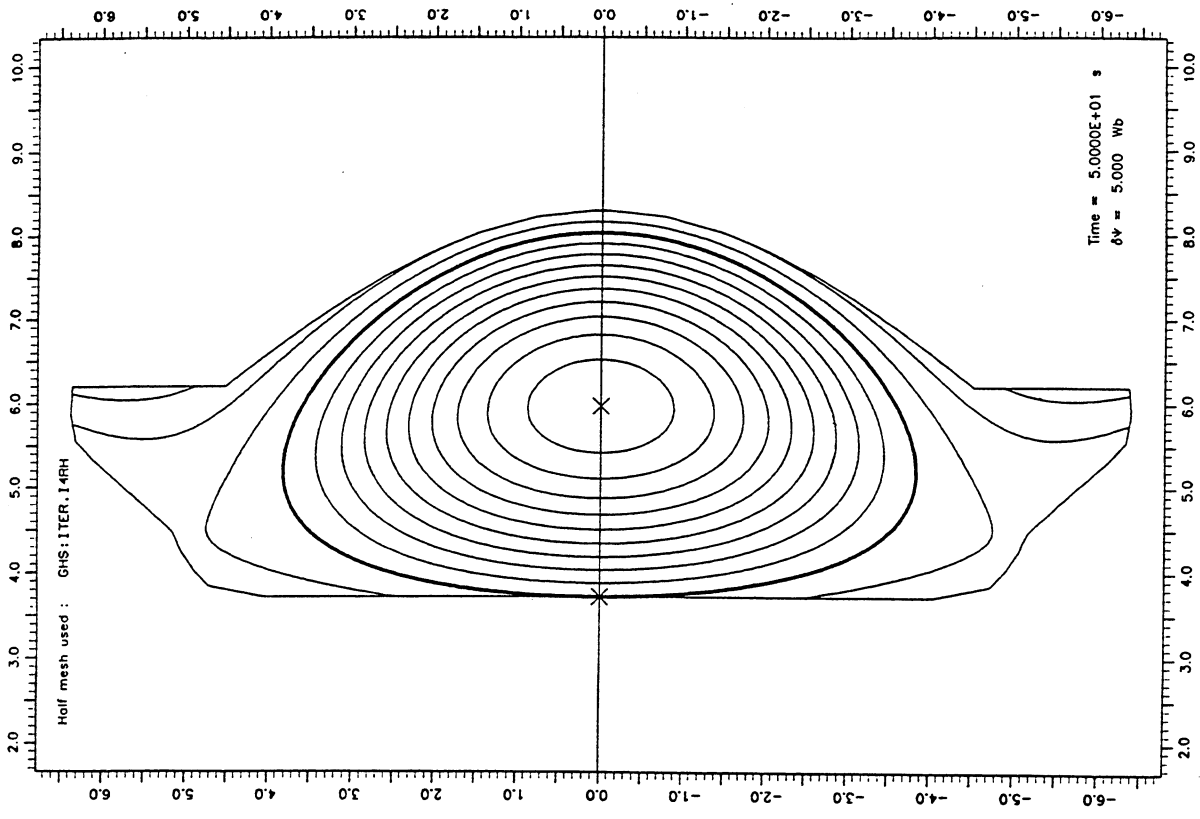


Figure (IV.1.1b) : Plasma à 50s

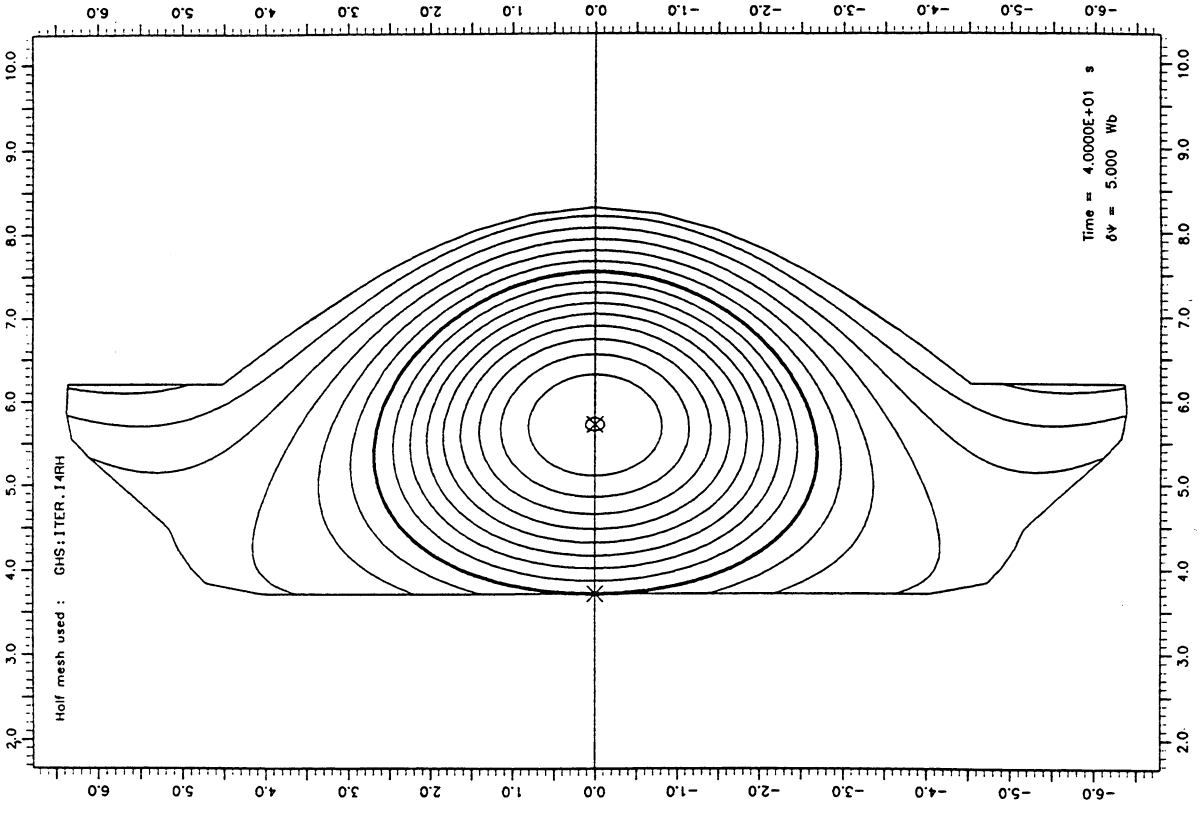


Figure (IV.1.1a) : Plasma à 40s

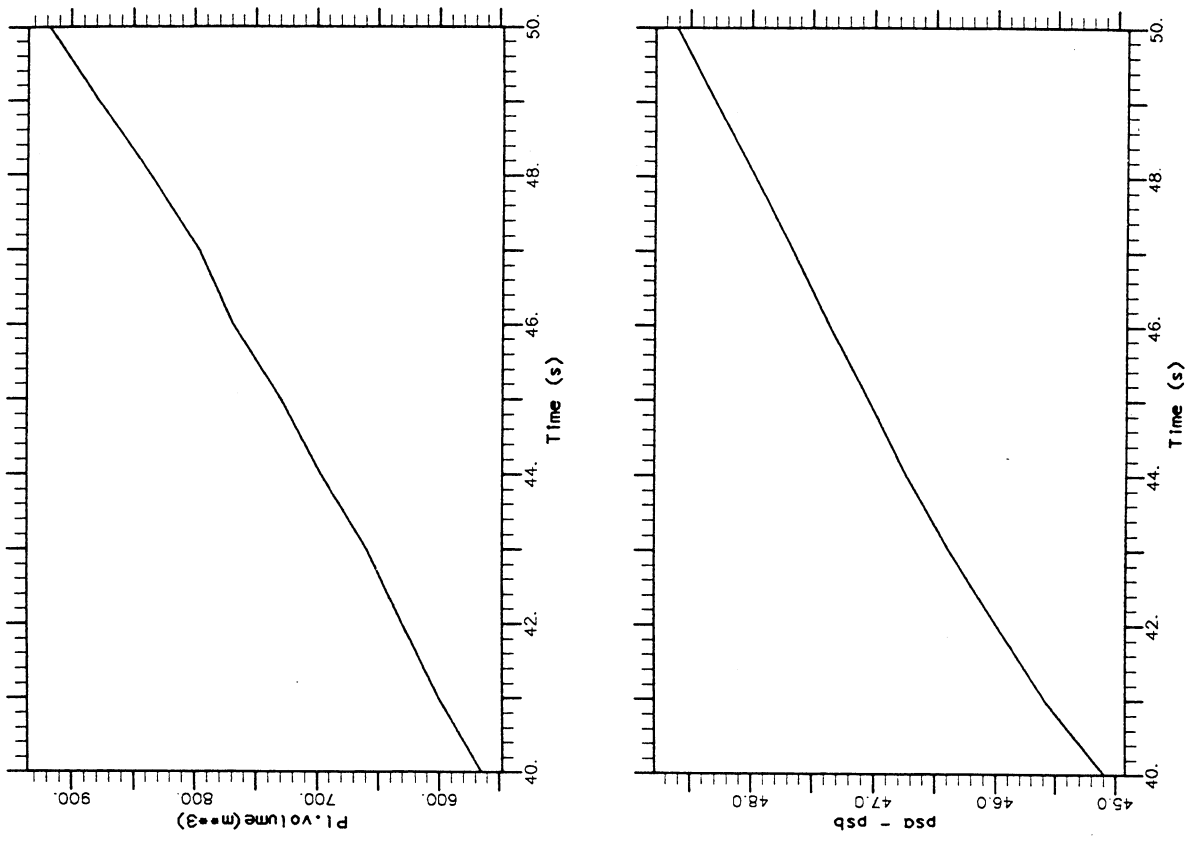
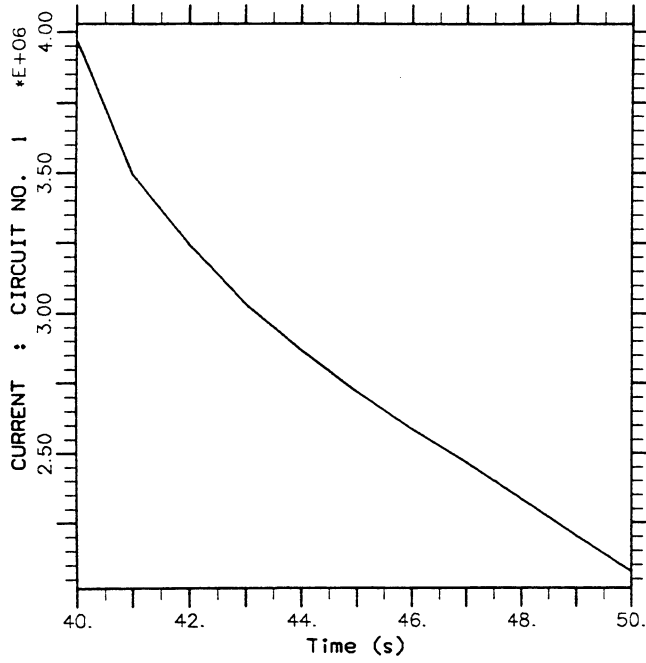
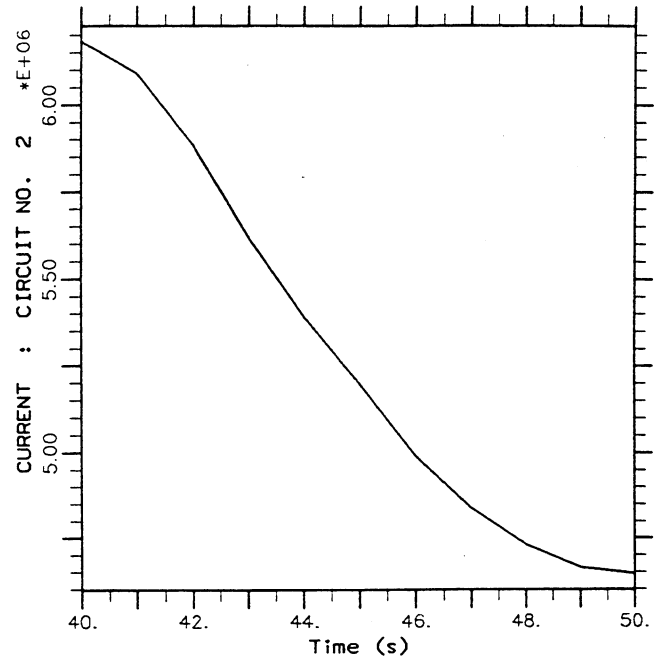


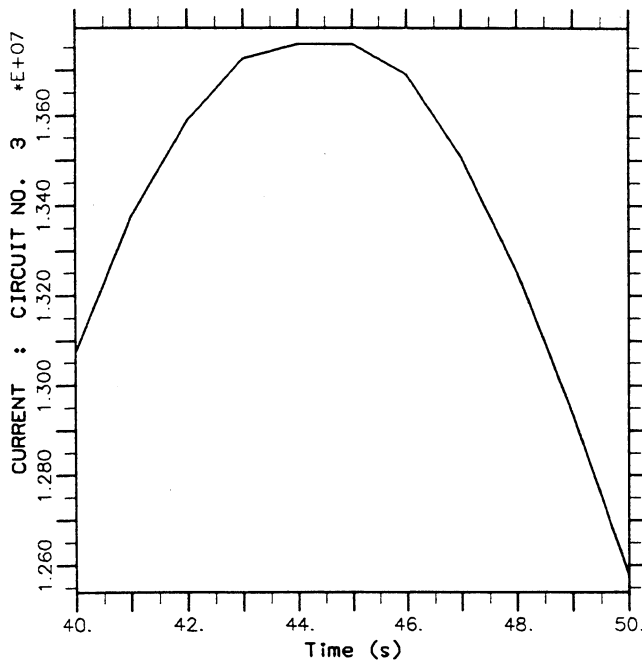
Figure (IV.1.2) : Courant plasma $I_p(t)$ (A)
 Flux sur l'axe magnétique $\psi_a(t)$ (Wb)
 Volume du plasma $V_p(t)$ (m^3)
 Différence de flux $\psi_a(t) - \psi_b(t)$ (Wb)



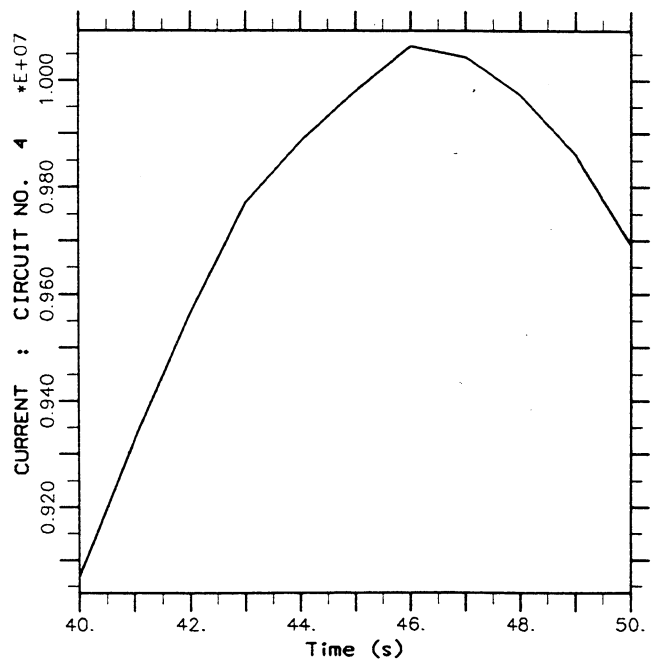
Graphique (IV.1.3a) : Courant $I_1(t)$



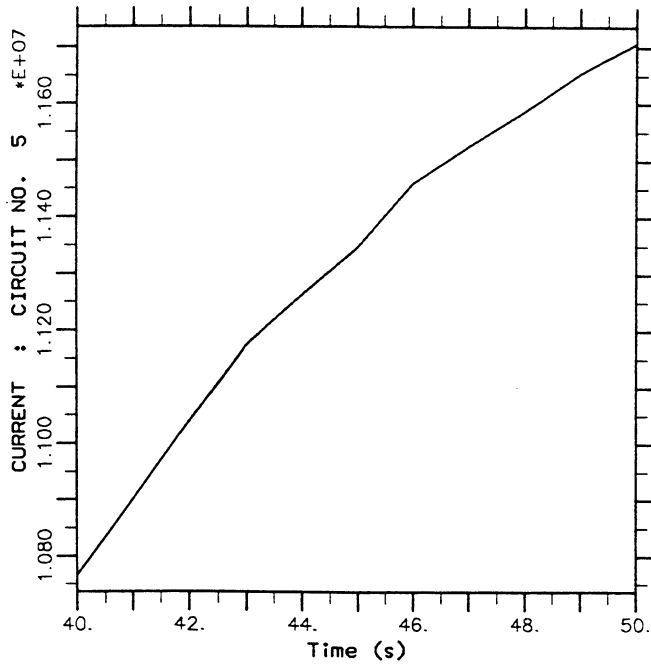
Graphique (IV.1.3b) : Courant $I_2(t)$



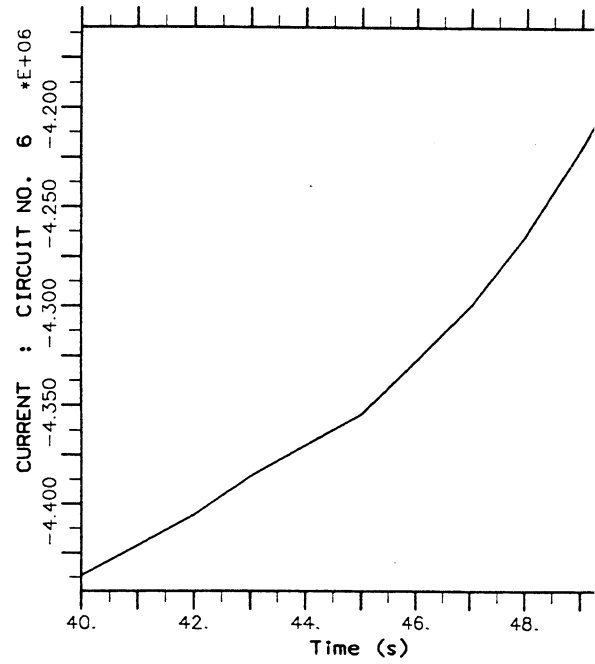
Graphique (IV.1.3c) : Courant $I_3(t)$



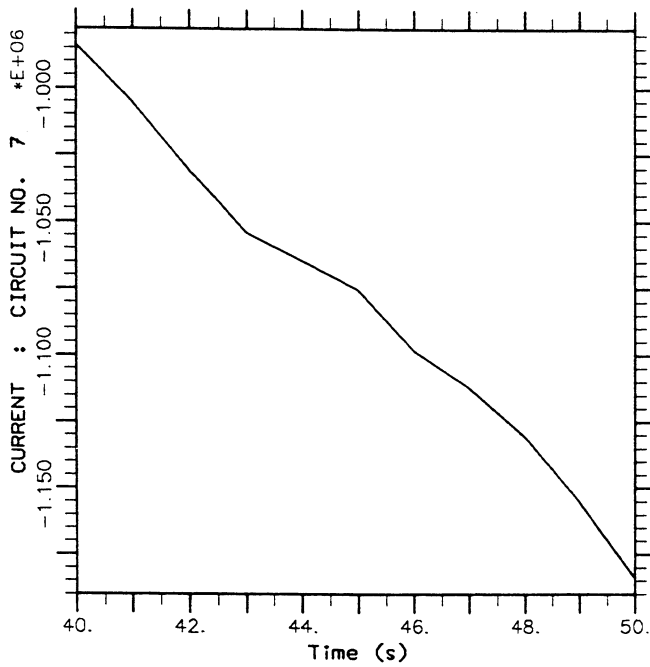
Graphique (IV.1.3d) : Courant $I_4(t)$



Graphique (IV.1.3e) : Courant $I_5(t)$



Graphique (IV.1.3f) : Courant $I_6(t)$



Graphique (IV.1.3g) : Courant $I_7(t)$

II. Contrôle d'une décharge

On veut maintenant optimiser globalement la trajectoire du plasma et réaliser ainsi une évolution donnée. On va résoudre un problème de contrôle pour des équations d'état évolutives, où les paramètres de contrôle sont les tensions aux bornes des circuits.

On note $t = 0$ l'instant initial de la décharge et $t = T$ l'instant final.

1. Le vecteur de contrôle

On suppose que les m circuits sujets à un contrôle sont régis en tension et que les $N_c - m$ circuits restant sont indifféremment régis en tension ou en courant ; on notera E_v l'ensemble des circuits régis en tension et N_v son cardinal ($N_v \geq m$).

Soit $V = (V_1(t), \dots, V_m(t))$ le vecteur de $R^m \times [0, T]$ dont les composantes sont les tensions aux bornes des bobines de champ poloïdal à tout instant de la décharge.

2. La fonction-coût

La forme désirée du plasma est donnée de façon analogue au cas statique, à savoir qu'à tout instant on donne la frontière et la configuration du plasma.

La fonction-coût à minimiser est la suivante :

$$J(V, \psi) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) [\psi(M) - \psi(M_o)]^2 dl + \frac{\alpha_X(t)}{2} \int_{\omega_X} \frac{|\vec{\nabla} \psi|^2}{r} dS + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i(t) V_i^2(t) \right\} dt$$

où $\Gamma_d(t)$ est le contour désiré du plasma à l'instant t , et M_o un point de ce contour. ω_X est une région autour du point hyperbolique si la configuration désirée à l'instant t est de type X -point. Enfin le dernier terme représente le coût énergétique de la configuration.

$\alpha(M, t)$, $\alpha_X(t)$, $k_i(t)$ sont des poids permettant de moduler l'importance des différents termes.

3. Les équations d'état

Les équations d'état sont les équations évolutives du chapitre III.

On définit les espaces :

$$U_{ad} = R^m \times [0, T] \tag{IV.2.1}$$

$$S^2(0, T) = L^2(0, T; \Omega_i) \times (R^{N_v} \times [0, T]) \times (R^5 \times [0, T]) \quad (IV.2.2)$$

où $L^2(0, T; \Omega_i)$ est l'espace de fonctions défini par (III.2.3) et N_v est le nombre de circuits régis en tension et pour lesquels les intensités des courants sont inconnues.

Le vecteur d'état $(\psi, I, \Upsilon) \in S^2(0, T)$ vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \mu_o L\psi = F_1(\psi, \Upsilon) 1_{\Omega_p} + \sum_{i=1}^{N_c} B_{1,i} I_i 1_{S_{c,i}} \\ A_2 V_k - \int_{S_{c,k}} \Delta t B_{1,k} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS - \sum_{i=1}^{N_c} [D_{ki} \frac{dI_i}{dt} + D'_{ki} I_i] = 0 \quad k \in E_v \\ \frac{d}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) + f_3(\psi, \Upsilon) + b_3(\psi, \Upsilon) \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \quad (IV.2.3)$$

avec

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_D \psi\}$$

$$D = \{M \in \Omega_{cv}^i / \overline{\nabla \psi}(M) \cdot \overline{P_a M} < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \overline{\nabla \psi}(X) = \overline{0}\}$$

où A_1, B_1, A_2, D et D' sont fonction de la géométrie du système ; F_1, a_3, f_3 , et b_3 sont des opérateurs non linéaires. On trouvera en annexe 2 l'expression de ces différentes quantités.

4. Le problème de contrôle

Le problème de contrôle (\mathcal{P}_e) à résoudre est le suivant : étant donnés les voltages (ou les courants) aux bornes des $N_c - m$ circuits non sujets à un contrôle, les fonctions $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}), \mathcal{F}_f(\bar{\psi})$, la composante $\eta_{||}(\bar{\psi}, t)$ de la résistivité et la conductivité de la chambre à vide σ_v , trouver $(V, \psi, I, \Upsilon) \in U_{ad} \times S^2(0, T)$ qui vérifie le système d'équations (IV.2.3) et tel que :

$$J(V, \psi) = \text{Inf } J(V', \psi')$$

$$V' \in U_{ad}$$

$$(\psi', I', \Upsilon') \in S^2(0, T) \text{ lié à } V' \text{ par (IV.2.3)}$$

Les équations d'état n'étant pas linéaires, on résout le problème (\mathcal{P}_e) par la méthode du Lagrangien de manière similaire à ce qui a été fait pour les problèmes de contrôle précédents.

Soit $(\lambda, \gamma, \nu) \in S^2(0, T)$ l'adjoint du système. On définit le Lagrangien \mathcal{L} comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(V, (\psi, I, \Upsilon), (\chi, \gamma, \nu)) &= J(V, \psi) \\
&+ \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_{cv}} \chi A_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \chi}{r} dS + C(\chi, \psi) \right. \\
&- \int_{\Omega_p} F_1(\psi, \Upsilon) \chi dS - \sum_{i=1}^{N_c} I_i \int_{S_{c,i}} \chi B_{1,i} dS \\
&+ \sum_{j=1}^{N_v} \gamma_j \left[A_2 V_j - \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS - \sum_{i=1}^{N_c} \left(D_{ji} \frac{dI_i}{dt} + D_{ji} I_i \right) \right] \\
&\left. + \nu \left[\frac{d}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) + f_3(\psi, \Upsilon) + \sum_{i=1}^{N_c} b_{3,i}(\psi, \Upsilon) \frac{dI_i}{dt} \right] \right\} dt
\end{aligned} \tag{IV.2.4}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(V, (\psi, I, \Upsilon)) \in U_{ad} \times S^2(0, T)$ soit solution du problème (\mathcal{P}_e) est que $(V, (\psi, I, \Upsilon), (\chi, \gamma, \nu))$ soit point-selle pour le Lagrangien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(V, (\psi, I, \Upsilon), (\chi', \gamma', \nu')) &\leq \mathcal{L}(V, (\psi, I, \Upsilon), (\chi, \gamma, \nu)) \leq \mathcal{L}(V', (\psi', I', \Upsilon'), (\chi, \gamma, \nu)) \\
\forall (V', (\psi', I', \Upsilon'), (\chi', \gamma', \nu')) &\in U_{ad} \times S^2(0, T) \times S^2(0, T)
\end{aligned}$$

En développant l'inégalité de gauche, on retrouve que (ψ, I, Υ) satisfait les équations d'état (IV.2.3).

En développant l'inégalité de droite, on obtient les équations satisfaites par l'adjoint (χ, γ, ν) , ainsi que la condition d'optimalité.

On rappelle que δ_M désigne la mesure de Dirac au point $M \in \Omega_i$ et que δ_Γ est la mesure sur le contour Γ .

Proposition (IV.2.1)

L'adjoint $(\chi, \gamma, \nu) \in S^2(0, T)$ satisfait le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{aligned}
&- A_1 \frac{\partial \chi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} + \mu_o L \chi - F'_1(\psi, \Upsilon) \chi 1_{\Omega_p} + \Delta t B_1 \frac{d\gamma}{dt} \\
&- \frac{d\nu}{dt} A'_3(\psi, I, \Upsilon) + \nu F'_3(\psi, \Upsilon) + \nu B'_3(\psi, \Upsilon) I \\
&= - \left(\delta_{\Gamma_d}, \alpha(\psi - \psi(M_o)) \right) + \delta_{M_o} \oint_{\Gamma_d} \alpha(M) (\psi(M) - \psi(M_o)) dl \\
&- \alpha_X \mu_o L \psi 1_{\omega_X}
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S_{e,i}} B_{1,i} \chi \, dS + \sum_{j=1}^{N_v} \left(D_{ij} \frac{d\gamma_j}{dt} - D'_{ij} \gamma_j \right) \\ \quad - \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial a_3}{\partial I_i} - \frac{d}{dt} (\nu b_{3,i}(\psi, \Upsilon)) = 0 \quad i \in E_v \\ \int_{\Omega_p} \frac{\partial F_1}{\partial \Upsilon} \chi \, dS - \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial a_3}{\partial \Upsilon} + \nu \frac{\partial f_3}{\partial \Upsilon} + \nu \frac{\partial b_3}{\partial \Upsilon} \frac{dI}{dt} = 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{sur } \partial \omega_X \\ \chi_{int} = \chi_{ext} \quad \text{sur } \partial \omega_X \\ \chi(T) = 0 \\ \gamma(T) = 0 \\ \nu(T) = 0 \end{array} \right.$$

La condition d'optimalité pour le $j^{\text{ème}}$ circuit est :

$$k_j(t) V_j(t) + A_2 \gamma_j(t) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Démonstration

L'inégalité de droite de la condition de point-selle peut aussi s'écrire :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}; \phi \right) = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_i} = 0 \quad i \in E_v \quad (ii)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Upsilon} = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_j} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (iv)$$

En développant les trois premières identités on obtient les équations pour l'adjoint. En développant la quatrième identité on obtient la condition d'optimalité.

On considère l'identité (i). Avant de calculer la Gâteaux-dérivée du Lagrangien par rapport à ψ dans la direction ϕ , on effectue les intégrations par parties suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_{cv}} \chi A_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dS \, dt &= - \int_0^T \int_{\Omega_{cv}} \psi A_1 \frac{\partial \chi}{\partial t} \, dS \, dt \\ &+ \int_{\Omega_{cv}} A_1 [\psi(T) \chi(T) - \psi(0) \chi(0)] \, dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sum_{j=1}^{N_v} \gamma_j \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS dt &= - \int_0^T \sum_{j=1}^{N_v} \frac{d\gamma_j}{dt} \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} \psi dS dt \\
&+ \sum_{j=1}^{N_v} \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} [\psi(T)\gamma_j(T) - \psi(0)\gamma_j(0)] dS \\
\int_0^T \nu \frac{d}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) dt &= - \int_0^T \frac{d\nu}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) dt \\
&+ \nu(T)a_3(T) - \nu(0)a_3(0)
\end{aligned}$$

On développe l'égalité (i) :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}; \phi\right) &= \int_0^T \left\{ \int_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) (\psi(M) - \psi(M_o)) (\phi(M) - \phi(M_o)) dl \right. \\
&+ \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{\overline{\nabla \psi} \cdot \overline{\nabla \phi}}{r} dS - \int_{\Omega_{cv}} \phi A_1 \frac{\partial \chi}{\partial t} dS + \int_{\Omega_i} \frac{\overline{\nabla \chi} \cdot \overline{\nabla \phi}}{r} dS \\
&+ C(\chi, \phi) - \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}; \phi\right) \chi dS + \sum_{j=1}^{N_v} \frac{d\gamma_j}{dt} \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} \phi dS \\
&- \frac{d\nu}{dt} \left(\frac{\partial a_3}{\partial \psi}; \phi\right) + \nu \left(\frac{\partial f_3}{\partial \psi}; \phi\right) + \nu \left(\frac{\partial b_3}{\partial \psi}; \phi\right) \frac{dI}{dt} \left. \right\} dt \\
&+ \int_{\Omega_{cv}} \phi(T) A_1 \chi(T) dS - \sum_{j=1}^{N_v} \gamma_j(T) \int_{S_{c,j}} \Delta t B_{1,j} \phi(T) dS \\
&+ \nu(T) \left(\frac{\partial a_3}{\partial \psi}; \phi(T)\right) = 0
\end{aligned}$$

On définit F'_1 et Q'_3 (Q'_3 désignant A'_3 , B'_3 ou F'_3) :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_p} F'_1(\psi, \Upsilon) \phi dS &= \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}; \phi\right) dS \\
\int_{\Omega_p} Q'_3(\psi, \Upsilon) \phi dS &= \left(\frac{\partial q_3}{\partial \psi}; \phi\right)
\end{aligned}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{D}([0, T]; V(\Omega_i))$; on obtient alors la première équation pour l'adjoint, et l'équation sur le bord du domaine ω_X (formulation en termes d'équation aux dérivées partielles).

On multiplie la première équation pour l'adjoint par $\phi \in S^2(0, t)$, on intègre en temps entre 0 et T , et on soustrait à $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}; \phi\right) = 0$. On obtient ainsi qu'à l'instant final l'adjoint est nul.

Les deux autres équations pour l'adjoint sont simplement obtenues en développant (ii) et (iii) après avoir fait les intégrations par parties nécessaires.

Enfin, en écrivant l'identité (iv), on obtient la condition d'optimalité.

(cqfd)

Remarque

L'adjoint (χ, γ, ν) est solution d'un problème rétrograde. Afin de résoudre les équations évolutives satisfaites par l'adjoint (proposition (IV.2.1)), on part de l'instant final T (l'adjoint est nul à cet instant) et on remonte dans le temps jusqu'à l'instant initial.

5. Résolution numérique

On résout le problème de contrôle (\mathcal{P}_e) de la façon suivante : on calcule l'état du système à l'instant initial. On itère jusqu'à satisfaire un critère de convergence; ces itérations consistent à calculer l'état (ψ, I, Υ) de l'instant initial à l'instant final (algorithme de Newton) et à ensuite minimiser la fonction-coût $J(V, \psi)$ grâce à un algorithme de gradient conjugué. Plus précisément chaque itération de gradient conjugué, ou itération interne, consiste à déterminer l'adjoint (χ, γ, ν) de l'instant final à l'instant initial (problème rétrograde), puis à calculer les directions et le pas de descente pour le vecteur de contrôle $V(t)$ et l'état du système.

On suppose que les profils $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}), \mathcal{F}_f(\bar{\psi})$, la composante parallèle $\eta_{\parallel}(\bar{\psi}, t)$ de la résistivité et la conductivité σ_v de la chambre à vide sont donnés, ainsi que les lois d'évolution des $N_c - N_v$ courants dans les circuits régis en courant et des $N_v - m$ tensions aux bornes des circuits régis en tension (tensions qui ne sont pas des paramètres de contrôle).

On discrétise en temps les équations d'état (IV.2.3) (écrites sous la forme faible), ainsi que les équations pour l'adjoint. On définit alors une triangulation \mathcal{T}_l du domaine Ω_i , et une approximation V_l de $V(\Omega_i)$. Le nombre de noeuds du maillage est N_l .

On pose $x = (\psi, I, \Upsilon)$ et $y = (\chi, \gamma, \nu)$.

On note $f(m)$ le nombre maximal d'itérations de gradient conjugué ($f(m)$ est une fonction du nombre de paramètres de contrôle).

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} x(t=0) \text{ donné} \\ V(t=0) = 0 \end{cases}$$

Commencent alors les itérations externes repérées par l'exposant n :

$$\text{Initialisation de } V^1(t). \quad t = 0, \dots, T$$

Calcul de l'état $x^n(t)$ par des itérations de Newton (repérées par l'indice l) :

$$\begin{cases} x_0(t) = x^n(t - \Delta t) = x^* \\ x_{l+1}(t) = x_l(t) - [A(x_l(t))]^{-1} E_1(x_l(t)) \end{cases}$$

où la matrice $A(x_l(t))$ est donnée par la proposition (III.3.2) et $E_1(x_l(t))$ est le vecteur

$$\begin{aligned} E_{1,k} = & - \int_{\Omega_{ev}} A_1 \frac{\phi_k - \psi^*}{\Delta t} dS - \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla} \phi_k \cdot \vec{\nabla} \psi_l}{r} dS - C(\phi_k, \psi_l) \\ & + \int_{\Omega_p} F_1(\psi_l, \Upsilon_l) \phi_k dS + \sum_{i=1}^{N_c} (I_l)_i \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \phi_k dS \quad 1 \leq k \leq N_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{1,N_l+k} = & - A_2 (V_k)^n + \int_{S_{c,k}} B_{1,k} (\psi_l - \psi^*) dS \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} \left(D_{ki} \frac{(I_l)_i - I_i^*}{\Delta t} + D'_{ki}(I_l)_i \right) \quad k \in E_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{1,N_l+k} = & - \frac{a_3(\psi_l, I_l, \Upsilon_l) - a_3(\psi^*, I^*, \Upsilon^*)}{\Delta t} - f_3(\psi_l, \Upsilon_l) \\ & - b_3(\psi_l, \Upsilon_l) \frac{I_l - I^*}{\Delta t} \quad 1 \leq k \leq 5 \end{aligned}$$

A convergence, on pose :

$$\begin{cases} x^n(t) = x_{l+1}(t) \\ A^n(t) = A(x_l(t)) \end{cases}$$

Les itérations internes, repérées par l'indice j débutent :

$$\begin{cases} x_1^n(t) = x^n(t) \\ V_1^n(t) = V^n(t) \end{cases} \quad t = 0, \dots, T$$

Calcul de l'adjoint $y_j^n(t), t = T, \dots, 0$:

$$y_j^n(T) = 0$$

$$y_j^n(t) = [(A^n(t))^T]^{-1} E_2(x_j^n, y_j^n(t + \Delta t))$$

$$\begin{aligned}
E_{2,k} &= \int_{\Omega_{ev}} \phi_k A_1 \frac{\chi_j^n(t + \Delta t)}{\Delta t} dS - \sum_{i=1}^{N_v} (\gamma_j^n)_i(t + \Delta t) \int_{S_{e,i}} B_{1,i} \phi_k dS \\
&+ \frac{\nu_j^n(t + \Delta t)}{\Delta t} \left(\frac{\partial a_3}{\partial \psi}; \phi_k \right) - \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{\vec{\nabla} \psi_j^n \cdot \vec{\nabla} \phi_k}{r} dS \\
&- \oint_{\Gamma_p(t)} \alpha(M, t) [\psi_j^n(M) - \psi_j^n(M_o)] [\phi_k(M) - \phi_k(M_o)] dl \quad 1 \leq k \leq N_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2, N_l+k} &= \frac{\nu_j^n(t + \Delta t)}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial a_3}{\partial I_k} \right. \\
&\quad \left. + b_{3,k}(\psi_j^n(t + \Delta t), \Upsilon_j^n(t + \Delta t)) \right\} \quad k \in E_v
\end{aligned}$$

$$E_{2, N+k} = \frac{\nu_j^n(t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{\partial a_3}{\partial \Upsilon} \quad 1 \leq k \leq 5$$

Calcul des composantes du gradient $G_j^n(t)$ de la fonction-coût :

$$(G_j^n)_i(t) = k_i(t)(V_j^n)_i(t) + A_2 (\gamma_j^n)_i(t) \quad i = 1, \dots, m ; 0 < t \leq T$$

et du vecteur d'état $\widetilde{x}_j^n(t)$ correspondant :

$$\widetilde{x}_j^n(t) = [A^n(t)]^{-1} E_3(G_j^n(t))$$

$$E_{3,k} = 0 \quad 1 \leq k \leq N_l ; N \leq k \leq N + 5$$

$$E_{3, N_l+k} = -A_2 (G_j^n)_k(t) \quad k \in E_v$$

Calcul de la direction de descente $\omega_j^n(t)$ (et $\widehat{x}_j^n(t)$) :

$$\text{si } j = 1 \quad \omega_1^n(t) = G_1^n(t)$$

$$\widehat{x}_1^n(t) = \widetilde{x}_1^n(t)$$

$$\text{si } j > 1 \quad \omega_j^n(t) = G_j^n(t) + \beta_j^n \omega_{j-1}^n(t)$$

$$\widehat{x}_j^n(t) = \widetilde{x}_j^n(t) + \beta_j^n \widehat{x}_{j-1}^n(t) \quad t = 0, \dots, T$$

avec :

$$\beta_j^n = -\beta_{num}/\beta_{den}$$

$$\beta_{num} = \int_0^T \left\{ \oint_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_o)] [\widehat{\psi}_{j-1}^n(M) - \widehat{\psi}_{j-1}^n(M_o)] dl + \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\psi}_{j-1}^n}{r} dS \right\} dt$$

$$\beta_{den} = \int_0^T \left\{ \oint_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) [\widehat{\psi}_{j-1}^n(M) - \widehat{\psi}_{j-1}^n(M_o)]^2 dl + \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{|\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_{j-1}^n|^2}{r} dS \right\} dt$$

Calcul du pas de descente ρ_j^n :

$$\rho_j^n = \rho_{num}/\rho_{den}$$

$$\rho_{num} = \int_0^T \left\{ \oint_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) [\psi_j^n(M) - \psi_j^n(M_o)] [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_o)] dl + \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{\widehat{\nabla} \psi_j^n \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n}{r} dS + \sum_{i=1}^m k_i(t) (V_j^n)_i(t) (\omega_j^n)_i(t) \right\} dt$$

$$\rho_{den} = \int_0^T \left\{ \oint_{\Gamma_d(t)} \alpha(M, t) [\widehat{\psi}_j^n(M) - \widehat{\psi}_j^n(M_o)]^2 dl + \alpha_X(t) \int_{\omega_X} \frac{|\widehat{\nabla} \widehat{\psi}_j^n|^2}{r} dS + \sum_{i=1}^m k_i(t) (\omega_j^n)_i^2(t) \right\} dt$$

En déduire les nouveaux voltages et le nouvel état du système :

$$\begin{cases} V_{j+1}^n(t) = V_j^n(t) - \rho_j^n \omega_j^n(t) \\ x_{j+1}^n(t) = x_j^n(t) - \rho_j^n \widehat{x}_j^n(t) \end{cases} \quad t = 0, \dots, T$$

Si $j < f(m)$ alors continuer les itérations internes.

Si $j = f(m)$ alors

$$\begin{cases} V^{n+1}(t) = V_{j+1}^n(t) \\ x^{n+1}(t) = x_{j+1}^n(t) \end{cases} \quad t = 0, \dots, T$$

Continuer les itérations externes jusqu'à satisfaire le critère de convergence. On note ϵ la tolérance (ou erreur maximale autorisée) ; la convergence est atteinte si :

$$|V^{n+1} - V^n| < \epsilon$$

6. Résultats

L'algorithme décrit ci-dessus est coûteux en temps de calcul et nécessite une grande place mémoire pour le stockage de la matrice de Newton à chaque pas de la discrétisation en temps. On ne peut donc pas réaliser une optimisation sur un intervalle de temps trop grand ($\sim 10s$) car il faudrait alors stocker un nombre important de matrices. On se limite pour l'instant à des intervalles de temps de l'ordre de $1s$, et à des pas de temps de quelques dizaines de millisecondes.

On traite le cas d'une configuration limiter entre 50 et $50.9s$. On optimise, sur cet intervalle de temps, la trajectoire du plasma de sorte que la configuration soit de type limiter et que le plasma augmente de volume.

Les données sont les suivantes :

Pas de temps :	$\Delta t = 5.10^{-2} s$
Courant plasma à $50s$:	$I_p = 12 MA$
Coefficients à $50s$:	$c_p^* = 0.01228$; $c_f^* = 4.5258$
Beta poloïdal :	à $50s$ $\beta_p = 0.100$
	à $50.9s$ $\beta_p = 0.102$

Courants initiaux :	$I_1 = 0.28 MA$
	$I_2 = 3.38 MA$ $I_3 = 10.33 MA$
	$I_4 = 10.75 MA$ $I_5 = 9.71 MA$
	$I_6 = -3.39 MA$ $I_7 = -1.66 MA$

Fonction-coût :	à $50s$	à $50.9s$
Nombre de points sur Γ_d :	9	9
Poids $\alpha(M)$:	1.0	1.0
Ellipticité $e_s = e_i$:	1.77	1.87
Triangularité $t_s = t_i$:	0.31	0.36
Rayon maximum R_o :	5.87	5.89
Rayon minimum a_o :	2.16	2.18
Poids $k_i(t)$, $1 \leq i \leq m$:	2.10^{-2}	2.10^{-2}

Les figures (IV.2.1a) et (IV.2.1b) représentent le plasma dans la chambre à vide aux temps 50 et 50.9s.

Les graphiques (IV.2.3a) à (IV.2.3g) représentent l'évolution des tensions aux bornes des circuits, lesquelles sont les paramètres du contrôle. Le brusque saut entre 50 et 50.05s s'explique par le fait qu'à l'instant initial les tensions sont nulles par définition.

Pour réaliser cette simulation, le nombre d'itérations internes de gradient conjugué a été fixé égal à 7 (nombre de circuits indépendants). L'algorithme a convergé en 8 itérations externes et l'erreur à la convergence est de $1.4 \cdot 10^{-5}$ (tolérance $\epsilon = 10^{-4}$). Le temps de calcul sur *CRAY* est de 1000s.CPU.

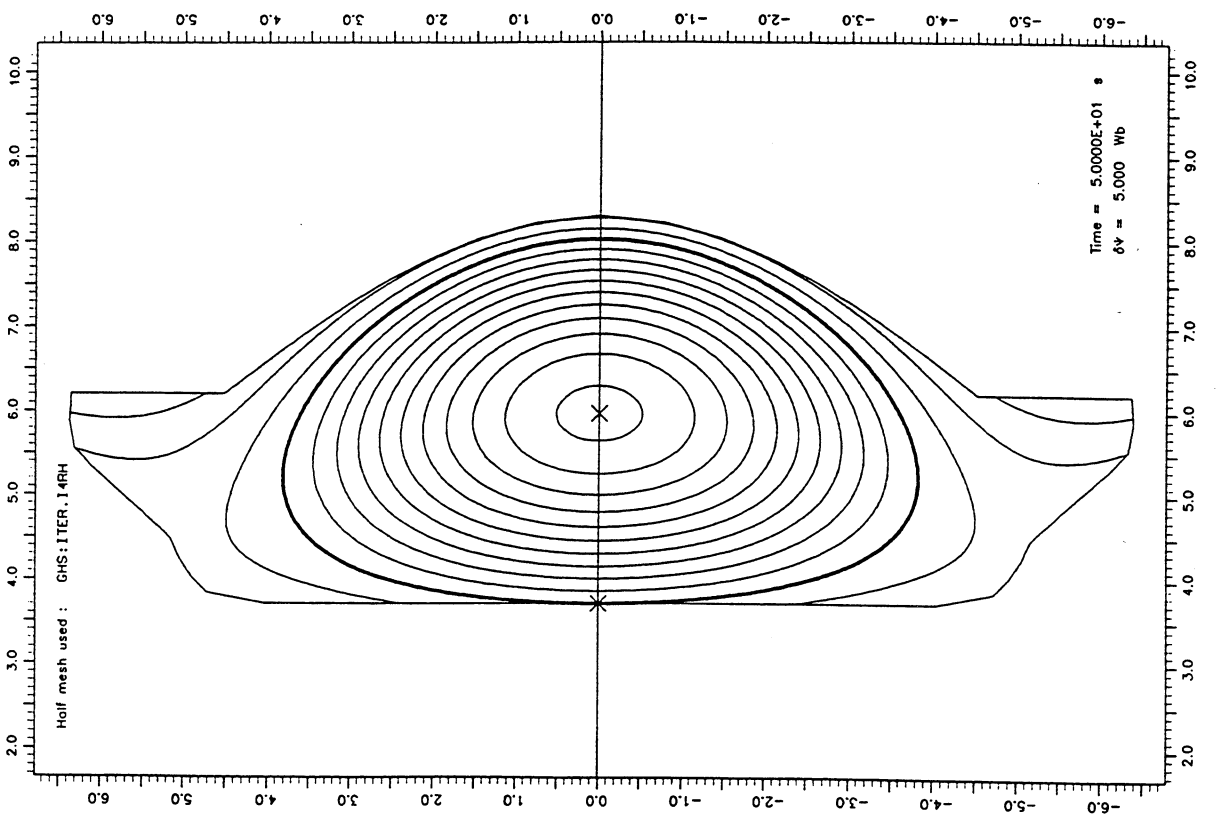
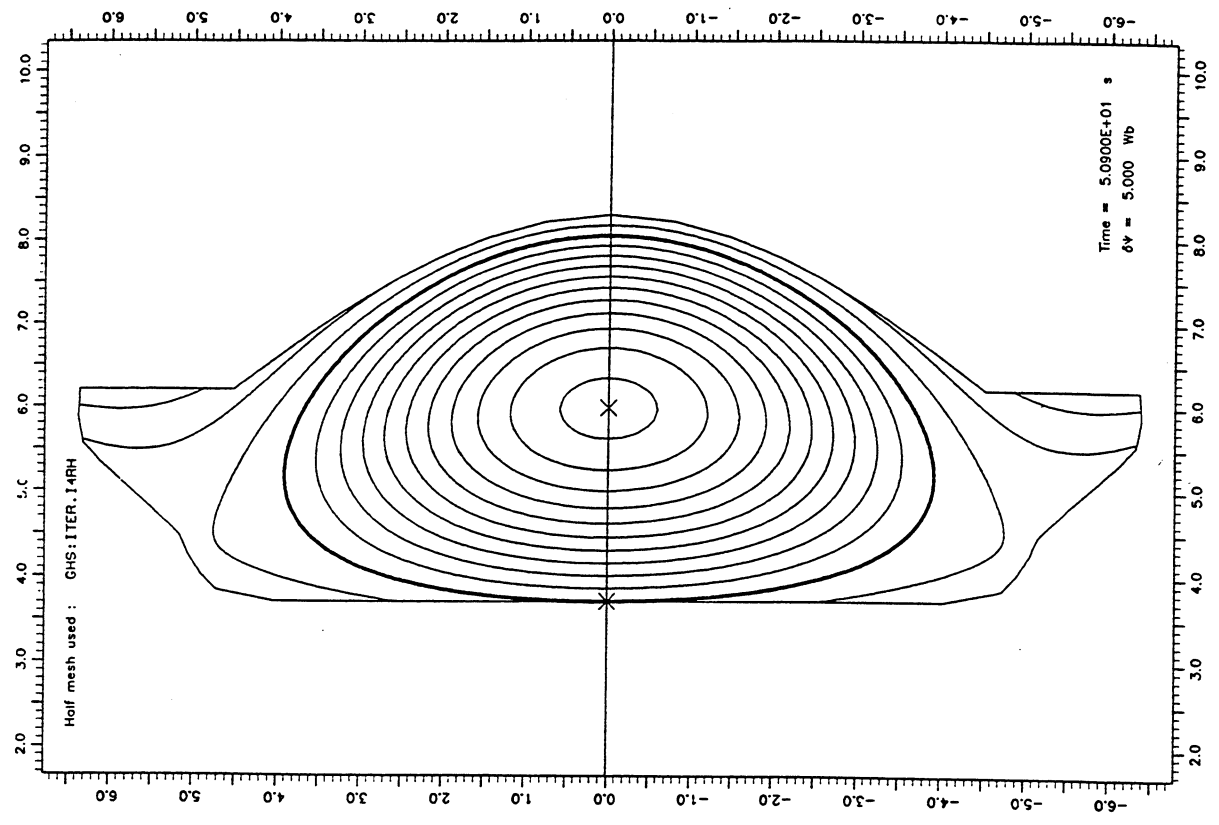


Figure (IV.2.1a) : Plasma à 50e

Figure (IV.2.1a) : Plasma à 50e

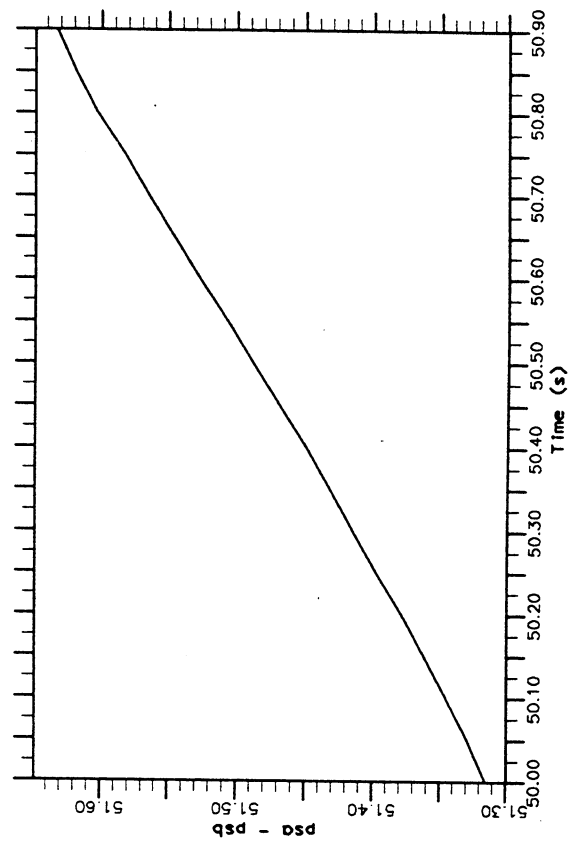
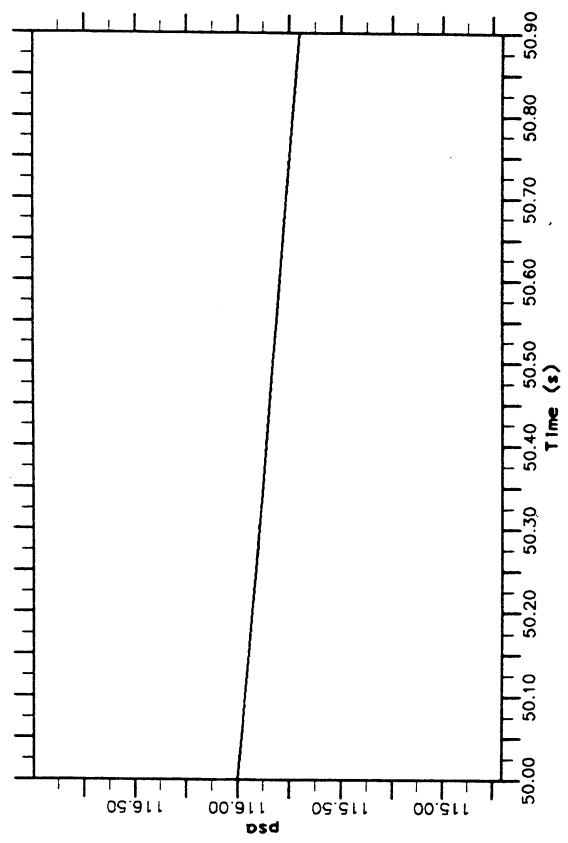
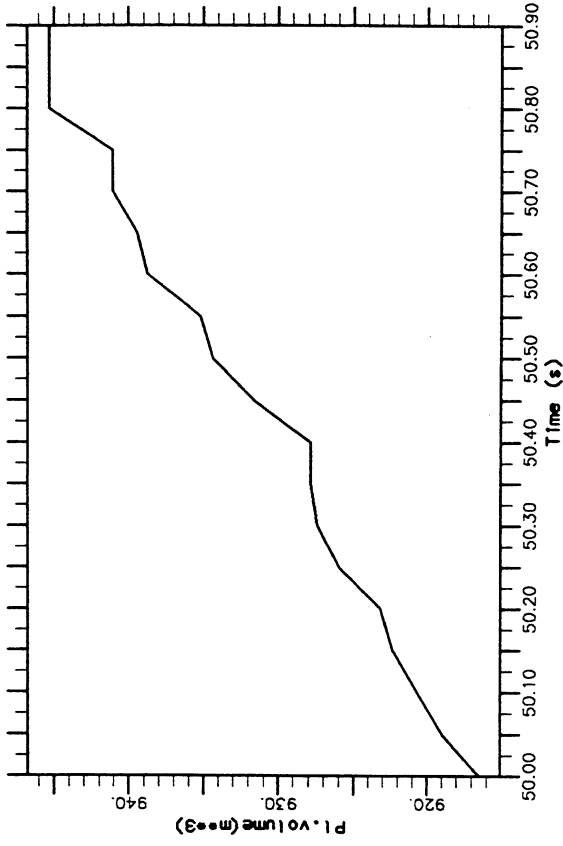
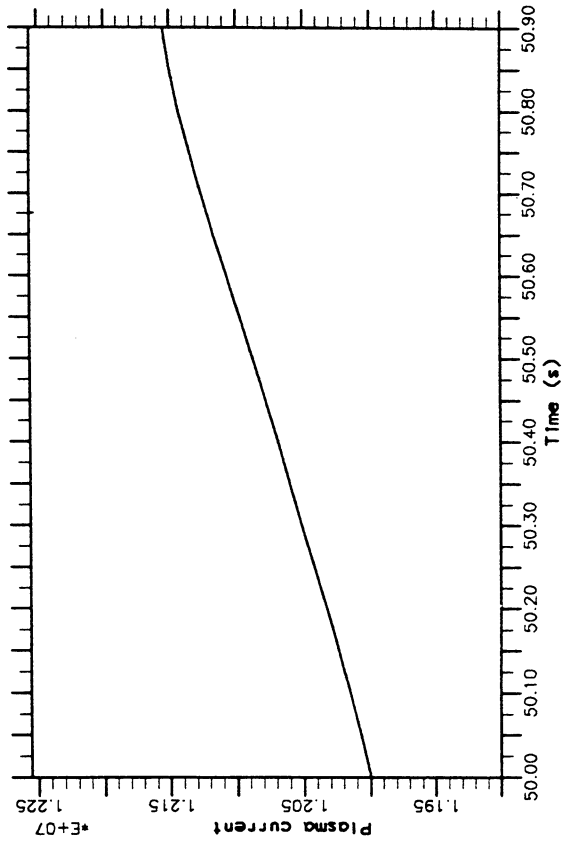
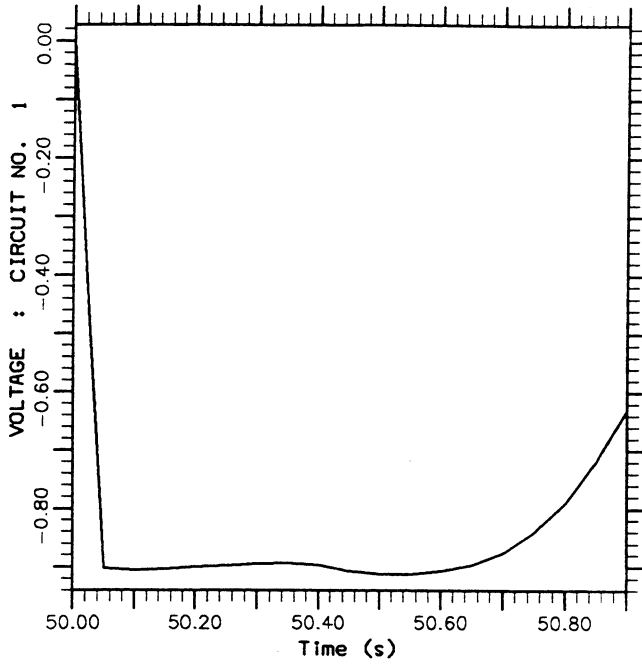


Figure (IV.2.2) : Courant plasma $I_p(t)$ (A)

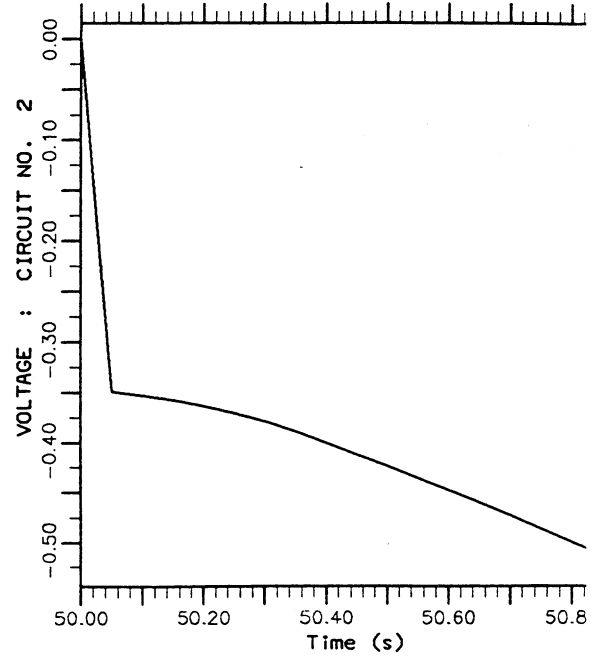
Flux sur l'axe magnétique $\psi_a(t)$ (Wb)

Volume du plasma $V_p(t)$ (m^3)

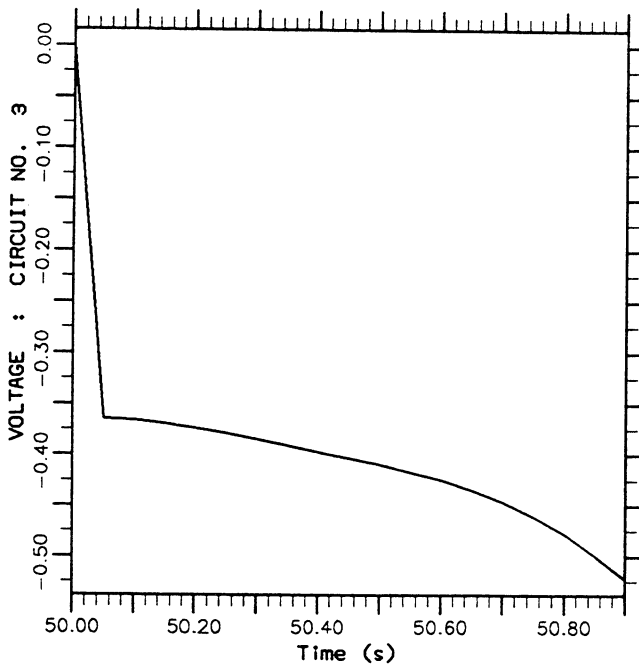
Différence de flux $\psi_a(t) - \psi_b(t)$ (Wb)



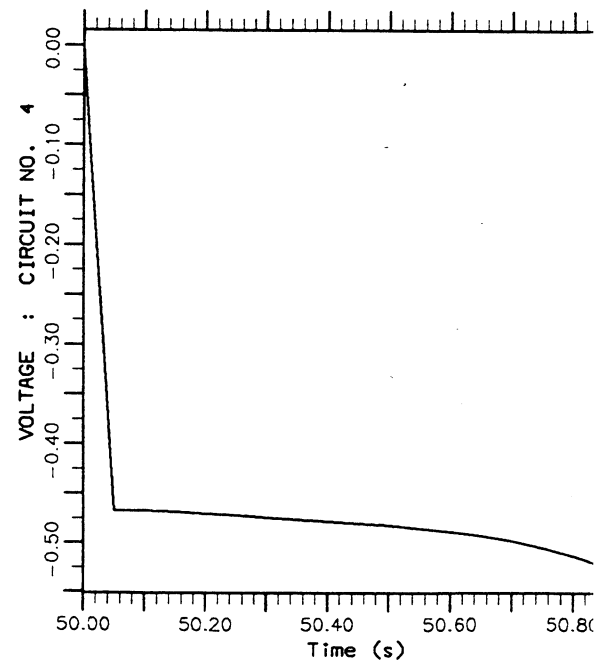
Graphique (IV.2.3a) : Tension $V_1(t)$



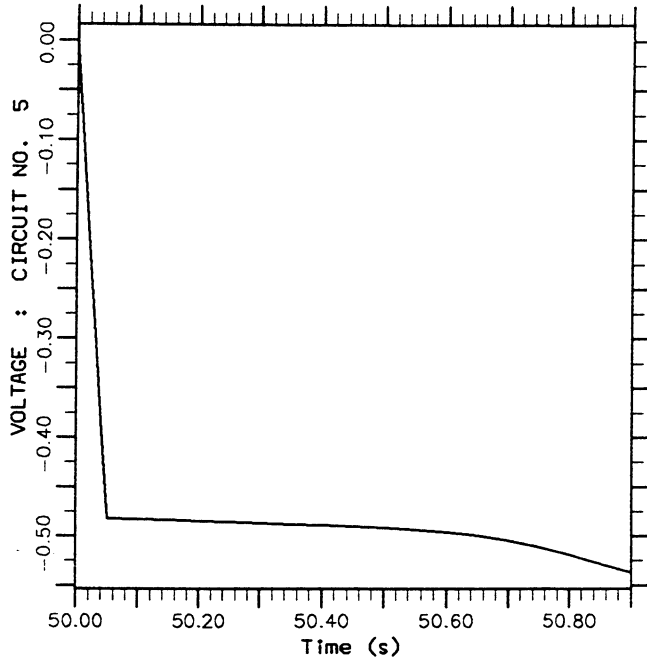
Graphique (IV.2.3b) : Tension $V_2(t)$



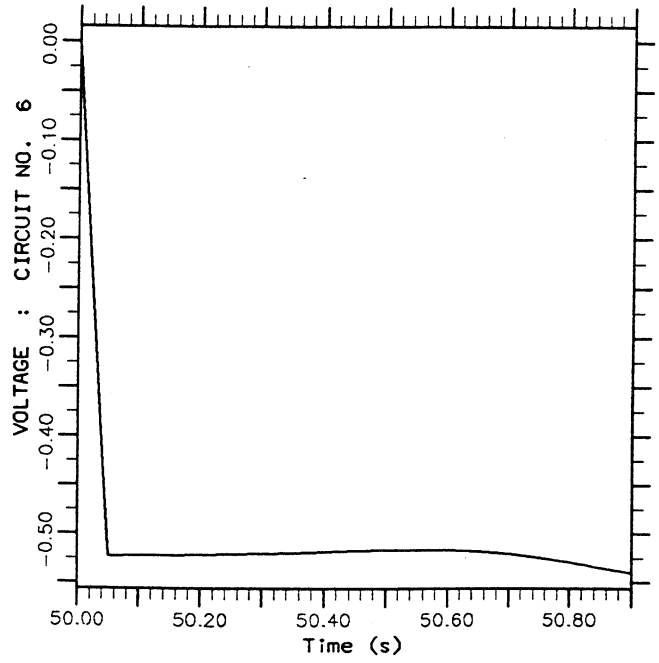
Graphique (IV.2.3c) : Tension $V_3(t)$



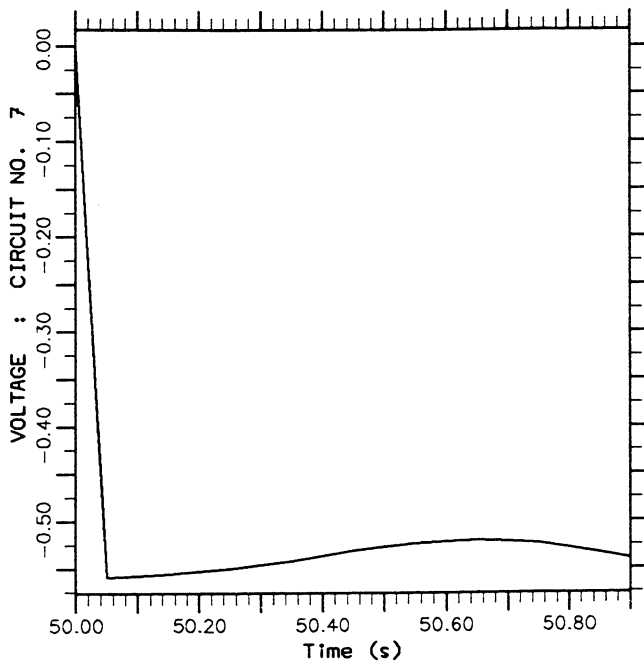
Graphique (IV.2.3d) : Tension $V_4(t)$



Graphique (IV.2.3e) : Tension $V_5(t)$



Graphique (IV.2.3f) : Tension $V_6(t)$



Graphique (IV.3.3g) : Tension $V_7(t)$

III. Commande feed-back

Dans les paragraphes précédents, une méthode pour déterminer les intensités des courants dans les circuits ou les tensions aux bornes de ces circuits a été mise en oeuvre. Ces intensités ou tensions ont été calculées de façon à réaliser au mieux une évolution désirée de l'équilibre du plasma et elles peuvent alors être utilisées pour une préprogrammation. Mais lors du fonctionnement réel du Tokamak, il peut être nécessaire de réajuster la valeur de ces intensités ou tensions afin d'assurer la stabilité du système et de compenser les imprécisions de la préprogrammation. Ce contrôle de la forme du plasma est réalisé grâce à un feed-back dont le principe va être décrit dans ce paragraphe.

L'idée est la suivante : à partir de mesures du flux magnétique sur les parois de la chambre à vide, adapter les tensions aux bornes des circuits de façon à amener le système que constitue le plasma dans la chambre à vide, à un état d'équilibre.

Il faut pour cela établir des lois de comportement des tensions en fonction des mesures du flux magnétique. On s'intéresse à un modèle de régulation par contre-réaction, ou feed-back, dit PID pour Proportionnel Intégral et Dérivé.

1. La commande PID

Soit un contour Γ_d dans la région accessible au plasma, correspondant à une ligne de flux magnétique. Il est impossible de mesurer directement le flux magnétique sur un tel contour car aucune sonde ne peut résister aux températures auxquelles est soumis le plasma. On peut par contre extrapoler la valeur du flux sur Γ_d à partir des mesures du flux et de sa dérivée normale sur les parois de la chambre à vide (cf J.Blum /2/).

Soient $N_d + 1$ points du contour Γ_d . On définit le vecteur $\Delta\psi \in R^{N_d}$ par :

$$(\Delta\psi)_i = \psi(M_i) - \psi(M_o) \quad 1 \leq i \leq N_d$$

où M_o, M_1, \dots, M_{N_d} sont les points du contour Γ_d .

On définit la tension aux bornes des circuits à l'instant t à partir des mesures du flux aux $N_d + 1$ points de Γ_d à l'instant $t - \tau$:

$$\begin{cases} V(t) = 0 & \text{si } t \leq \tau \\ V(t) = G \Delta\psi(t - \tau) + G' \frac{d}{dt} \Delta\psi(t - \tau) + G'' \int_0^{t-\tau} \Delta\psi(t') dt' & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (IV.3.1)$$

τ est le retard correspondant au temps nécessaire pour les mesures du flux ou de quantités dérivées, et pour leur analyse.

G, G', G'' sont des matrices à déterminer.

Les trois termes de cette loi de feed-back ont tous une signification propre : le premier terme signifie que la tension est proportionnelle au flux magnétique ψ ; le deuxième terme fait intervenir la dérivée des mesures du flux magnétique et son rôle est d'anticiper sur les variations brutales de $\Delta\psi$; le troisième terme est une intégrale et son rôle est de ramener $\Delta\psi$ égal à 0 afin que le feed-back puisse être efficace (si $\Delta\psi$ est petit, le feed-back n'agit pas).

Ainsi que cela a déjà été précisé, les matrices G, G', G'' sont à déterminer et on va exposer une méthode théorique permettant de calculer les coefficients de ces trois matrices, et qui consiste à résoudre un problème de contrôle dont les paramètres de contrôle sont ces coefficients.

2. Le problème de contrôle

Dans cette partie, on va expliquer ce que sont les paramètres de contrôle, expliciter la fonction-coût à minimiser et rappeler les équations devant être satisfaites par le flux magnétique.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, on perturbe le système et on étudie l'effet de cette perturbation jusqu'à l'instant $t = T$.

a. Les paramètres de contrôle

On cherche à déterminer les coefficients des matrices G, G', G'' et ce seront donc eux les paramètres de contrôle.

Deux idées sont possibles : les matrices sont constantes sur des sous-intervalles de temps de $[0, T]$ dont la longueur dépend de la physique du problème, ou au contraire sont des fonctions du temps. La seconde idée peut s'avérer plus réaliste mais elle présente l'inconvénient de devoir déterminer un très grand nombre de paramètres de contrôle et risque d'être coûteuse en temps de calcul.

On choisit donc de s'intéresser uniquement au cas où les coefficients sont constants sur des sous-intervalles de $[0, T]$. Soit $[t_0, t_1]$ un de ces intervalles de temps tel que $t_0 \geq 0$, $t_1 \leq T$ et $t_1 - t_0 > \tau$. On va développer la théorie du feed-back sur cet intervalle de temps, l'extension au cas général sur $[0, T]$ étant triviale. On définit \underline{t}_0 :

$$\begin{cases} \underline{t}_0 = 0 & \text{si } t_0 = 0 \\ \underline{t}_0 = t_0 - \tau & \text{si } t_0 \neq 0 \text{ (} t_0 > \tau \text{)} \end{cases}$$

On suppose que les N_c circuits sont régis en tension et que ces tensions satisfont la loi de feed-back (IV.3.1) qui sur l'intervalle $[t_o, t_1]$ devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(t) = 0 & \text{si } t_o = 0 \text{ et } t \leq \tau \\ V(t) = G \Delta\psi(t - \tau) + G' \frac{d}{dt} \Delta\psi(t - \tau) \\ \quad + G'' \int_{t_o}^{t-\tau} \Delta\psi(t') dt' & \text{si } t > \tau \end{array} \right. \quad (IV.3.2)$$

Les paramètres de contrôle étant les coefficients des matrices G, G', G'' , on a donc $3 \times (N_c \times N_d)$ paramètres de contrôle pouvant être sujets à des contraintes (paramètres positifs, borne supérieure pour certains paramètres,...) ; on note U_{ad} le sous-ensemble de $R^{3 \times (N_c \times N_d)}$ des coefficients admissibles.

b. La fonction-coût

La ligne de flux Γ_d sur laquelle est mesurée le flux magnétique est choisie comme étant la frontière désirée du plasma. On cherche donc à satisfaire le critère d'optimisation :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_1} \oint_{\Gamma_d} [\psi(M) - \psi(M_o)]^2 dl dt + \frac{K}{2} \int_{t_o}^{t_1} \sum_{i=1}^{N_c} V_i(t)^2 dt$$

où K est un coefficient ayant un rôle pondérateur dans la fonction-coût, et la tension $V_i(t)$ est donnée par la loi de feed-back (IV.3.2).

Afin de simplifier les notations pour n'avoir qu'une seule expression de la tension $V(t)$ sur l'intervalle $[t_o, t_1]$, on pose :

$$\begin{array}{ll} \underline{t} = 0 & \text{pour } t_o = 0 \text{ et } t \leq \tau \\ \underline{t} = t - \tau & \text{pour } t > \tau \\ \underline{\Delta\psi} = 0 & \text{pour } t_o = 0 \text{ et } t \leq \tau \\ \underline{\Delta\psi} = \Delta\psi(\underline{t}) & \text{pour } t > \tau \end{array}$$

Si on note \mathcal{G} un vecteur de U_{ad} , on peut alors réécrire la la fonction-coût sous la forme :

$$\begin{aligned} J(\mathcal{G}, \psi) = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_1} \left\{ \oint_{\Gamma_d} [\psi(M) - \psi(M_o)]^2 dl + K \sum_{i=1}^{N_c} \left[\sum_{j=1}^{N_p} G_{ij} (\underline{\Delta\psi})_j \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_p} G'_{ij} \frac{d}{dt} (\underline{\Delta\psi})_j + \sum_{j=1}^{N_p} G''_{ij} \int_{t_o}^{\underline{t}} (\underline{\Delta\psi})_j(t') dt' \right]^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (IV.3.3)$$

c. Les équations d'état

Les équations d'état sont les équations de l'évolution données dans le troisième chapitre. En utilisant l'expression (IV.3.2) pour la tension aux bornes des circuits et les notations précédemment introduites, on peut réécrire les équations d'état pour $t \in [t_0, t_1]$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o L\psi + A_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} 1_{\Omega_{cv}} = \sum_{n=1}^{N_c} B_{1,n} I_n 1_{S_{c,n}} + F_1(\psi, \Upsilon) \\ \frac{2\pi}{\mu_o} \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \sum_{n=1}^{N_c} \left[M_{in} \frac{dI_n}{dt} + R_{in} I_n \right] \\ = G_i \underline{\Delta\psi} + G'_i \frac{d}{dt} \underline{\Delta\psi} + G''_i \int_{t_0}^t \underline{\Delta\psi}(t') dt' \quad i = 1, \dots, N_c \\ \frac{d}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) + b_3(\psi, \Upsilon) I + f_3(\psi, \Upsilon) = 0 \end{array} \right. \quad (IV.3.4)$$

avec

$$\Omega_p = \{M \in \Omega_A / \psi(M) > \sup_{\mathcal{D}} \psi\}$$

$$\mathcal{D} = \{M \in \Omega_{cv}^i / \overline{\nabla\psi}(M) \cdot \overrightarrow{P_a M} < 0\} \cup \{X \in \Omega_A, X \neq P_a / \overline{\nabla\psi}(X) = \overrightarrow{0}\}$$

et où (ψ, I, Υ) est le vecteur d'état, G_i, G'_i, G''_i désignent les $i^{\text{èmes}}$ lignes des matrices G, G', G'' , et les quantités A_1, B_1, F_1, a_3, b_3 et f_3 sont définies en annexe 2.

d. Le problème de contrôle

On définit l'espace $S^2(t_0, t_1)$ par :

$$S^2(t_0, t_1) = L^2(t_0, t_1; V(\Omega_i)) \times (R^{N_c} \times [t_0, t_1]) \times (R^5 \times [t_0, t_1])$$

Le problème de contrôle à résoudre est le suivant : étant donnés les fonctions $\mathcal{F}_p(\bar{\psi}), \mathcal{F}_f(\bar{\psi})$, la résistivité $\eta_{||}(\bar{\psi})$, la conductivité de la chambre à vide σ_v et le coefficient β_p , trouver $(\mathcal{G}, \psi, I, \Upsilon) \in \mathcal{U}_{ad} \times S^2(t_0, t_1)$ qui vérifie les équations (IV.3.4) et tel que :

$$J(\mathcal{G}, \psi) = \text{Inf } J(\mathcal{G}', \psi')$$

$$\mathcal{G}' \in \mathcal{U}_{ad}$$

$$(\psi', I', \Upsilon') \in S^2(t_0, t_1) \text{ lié à } \mathcal{G}' \text{ par (IV.3.4)}$$

3. Résolution du problème de contrôle

Les équations d'état étant non linéaires, on définit le Lagrangien \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathcal{G}, (\psi, I, \Upsilon), (\chi, \gamma, \nu)) &= J(\mathcal{G}, \psi) \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\Omega_{cv}} \chi A_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} dS + \int_{\Omega_i} \frac{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \chi}{r} dS + C(\chi, \psi) \right. \\
 &- \int_{\Omega_p} \chi F_1(\psi, \Upsilon) dS - \sum_{n=1}^{N_c} I_n \int_{S_{c,n}} B_{1,n} \chi dS \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} \gamma_i \left[A_2 (G_i \underline{\Delta \psi} + G'_i \frac{d}{dt} \underline{\Delta \psi} + G''_i \int_{t_0}^t \underline{\Delta \psi}(t') dt') \right. \\
 &\quad \left. - \Delta t \int_{S_{c,i}} B_{1,i} \frac{\partial \psi}{\partial t} dS - \sum_{n=1}^{N_c} (M_{in} \frac{dI_n}{dt} + R_{in} I_n) \right] \\
 &\left. + \nu \left[\frac{d}{dt} a_3(\psi, I, \Upsilon) + b_3(\psi, \Upsilon) I + f_3(\psi, \Upsilon) \right] \right\} dt
 \end{aligned} \tag{IV.3.5}$$

En calculant la Gâteaux-dérivée de \mathcal{L} par rapport à ψ dans la direction ϕ , et les dérivées de \mathcal{L} successivement par rapport à I et Υ , on obtient le système d'équations satisfaites par l'adjoint. Ce système est celui donné dans la proposition (IV.2.1).

En dérivant \mathcal{L} successivement par rapport à chacun des coefficients des matrices G, G', G'' , on obtient l'expression des composantes du gradient de la fonction-coût :

$$J'_k = \int_{t_0}^{t_1} (\underline{\Delta \psi})_j (K + \gamma_i A_2) V(t) dt$$

$$\text{avec } k = N_p \times (i - 1) + j$$

$$J'_k = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\underline{\Delta \psi})_j (K + \gamma_i A_2) V(t) dt$$

$$\text{avec } k = N_c \times N_p + N_p \times (i - 1) + j$$

$$J'_k = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t (\underline{\Delta \psi})_j(t') dt' (K + \gamma_i A_2) V(t) dt$$

$$\text{avec } k = 2 \times N_c \times N_p + N_p \times (i - 1) + j$$

4. Résolution numérique et idées d'investigation

Le but du contrôle feed-back est de déterminer les matrices G, G' et G'' afin de pouvoir ensuite les utiliser en temps réel pour adapter les tensions aux bornes des circuits à partir des mesures du flux magnétique en des points de la paroi de la chambre à vide.

A partir du système d'optimalité obtenu ci-dessus, et en appliquant un algorithme de gradient conjugué comme cela a été fait dans le paragraphe précédent, on peut résoudre ce problème de contrôle et obtenir ainsi les coefficients des matrices G, G' et G'' . Cela n'a pas été implémenté dans le code de calcul *PROTEUS* et reste donc une voie de développement possible.

Le modèle présenté dans ce chapitre est un modèle construit à partir d'un feed-back Proportionnel Intégrale et Dérivé, et on pourrait utiliser d'autres type de commandes feed-back.

En utilisant le modèle proposé, il serait intéressant d'effectuer plusieurs perturbations différentes du système et de déterminer les matrices G, G', G'' pour chacune de ces perturbations afin de mesurer la stabilité, ou la non-stabilité, du modèle, et éventuellement de changer de commande en fonction des résultats obtenus.

On pourrait envisager un modèle où les matrices G, G' et G'' seraient dépendantes du temps. On serait peut-être amené à simplifier le modèle, d'une part pour ne pas avoir trop de paramètres de contrôle à déterminer (les coefficients des matrices à chaque instant), et d'autre part parce que la dépendance temporelle pourrait permettre de simuler la réalité simplement avec par exemple un feed-back Proportionnel.

Enfin, il reste le problème de la localisation de points de mesure du flux magnétique qui permettraient de rendre compte au mieux de la position et de la forme du plasma et donc d'avoir un modèle assez précis et efficace.

ANNEXE 1

Le couple (ψ, Υ) désigne le vecteur d'état à l'instant t , avec $\Upsilon = (\psi_a, \psi_b, C_p, C_f, i_p)$; (ψ^*, Υ^*) est le vecteur d'état à l'instant $t - \Delta t$.

Les fonctions A_1, B_1 et les opérateurs F_1, a_2, b_2 et f_2^* introduits dans le paragraphe I du chapitre IV sont définis comme :

$$A_1 = \frac{\mu_o \sigma_v}{r \Delta t} 1_{\Omega_{cv}}$$

$$B_{1,n} = \mu_o q_n 1_{S_{c,n}} \quad 1 \leq n \leq N_c$$

$$F_1(\psi, \Upsilon) = \frac{\mu_o \sigma_v}{r \Delta t} \psi^* 1_{\Omega_{cv}} + i_p \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) 1_{\Omega_p}$$

$$a_2(\psi, \Upsilon)_{|1} = \psi_a - \sup_{\Omega_p} \psi$$

$$a_2(\psi, \Upsilon)_{|2} = \psi_b - \sup_{\mathcal{D}} \psi$$

$$a_2(\psi, \Upsilon)_{|3} = \frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_{\Omega_p} r \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) dS$$

$$a_2(\psi, \Upsilon)_{|4} = \eta_{||}(P_a) i_p r_a \Delta t \left(r_a C_p \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right) + \psi_a$$

$$\begin{aligned} a_2(\psi, \Upsilon)_{|5} &= \frac{\pi}{\Delta t} \psi_b i_p + \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p} \left(r B^2 - f_o \frac{f}{r} \right) dS \\ &+ 2\pi \int_{\Omega_p} r \left[\eta \left(P' f f'_\psi + B^2 (f'_\psi)^2 \right) - \frac{\psi - \psi^*}{\Delta t} P' \right] dS \\ &+ 2 \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p \int_{\Omega_p} r \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) \sum_{n=1}^{N_c} F_n I_n^* dS \end{aligned}$$

$$b_{2,n}(\psi, \Upsilon)|_j = 0 \quad 1 \leq j \leq 4; 1 \leq n \leq N_c$$

$$b_{2,n}(\psi, \Upsilon)|_5 = -\frac{\mu_o}{\Delta t} i_p \int_{\Omega_p} r \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) F_n dS \quad 1 \leq n \leq N_c$$

$$f_{2|j}^* = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

$$f_{2|4}^* = -\psi_a^*$$

$$\begin{aligned} f_{2|5}^* &= \frac{\mu_o}{\Delta t} i_p^* \int_{\Omega_p^*} r \left(r C_p^* \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f^*}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) \sum_{n=1}^{N_c} F_n I_n^* dS \\ &\quad - \frac{\pi}{\Delta t} \psi_b^* i_p^* - \frac{\pi}{\Delta t} \int_{\Omega_p^*} \left(r(B^*)^2 - f_o \frac{f^*}{r} \right) dS \end{aligned}$$

ANNEXE 2

Le triplet (ψ, I, Υ) désigne le vecteur d'état à l'instant t , avec $\Upsilon = (\psi_a, \psi_b, C_p, C_f, i_p)$.

Les fonctions A_1, B_1, A_2, D, D' , et les opérateurs F_1, a_3, b_3 et f_3 introduits dans le paragraphe II du chapitre IV sont définis comme :

$$A_1 = \frac{\mu_o \sigma_v}{r}$$

$$B_{1,i} = \mu_o q_i \quad 1 \leq i \leq N_c$$

$$A_2 = \frac{\mu_o \Delta t}{2\pi}$$

$$D_{k,i} = \frac{\mu_o \Delta t}{2\pi} M_{ki} \quad 1 \leq k \leq N_v ; 1 \leq i \leq N_c$$

$$D'_{k,i} = \frac{\mu_o \Delta t}{2\pi} R_{ki} \quad 1 \leq k \leq N_v ; 1 \leq i \leq N_c$$

où les matrices M et R sont les matrices des inductions mutuelles entre les parties non axisymétriques et des résistances mutuelles.

$$F_1(\psi, \Upsilon) = i_p \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right)$$

$$a_3(\psi, I, \Upsilon)_{|j} = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

$$a_3(\psi, I, \Upsilon)_{|4} = \Delta t \psi_a$$

$$a_3(\psi, I, \Upsilon)_{|5} = -\mu_o i_p \int_{\Omega_p} r \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) \sum_{i=1}^{N_c} F_i I_i dS$$

$$+ \pi \psi_b i_p + \pi \int_{\Omega_p} \left(r B^2 - f_o \frac{f}{r} \right) dS$$

$$b_{3,i}(\psi, \Upsilon)_{|j} = 0 \quad 1 \leq j \leq 4; 1 \leq i \leq N_c$$

$$b_{3,i}(\psi, \Upsilon)_{|5} = 2 \mu_o i_p \int_{\Omega_p} r \left(r C_p \mathcal{F}_p(\bar{\psi}) + \frac{C_f}{r} \mathcal{F}_f(\bar{\psi}) \right) F_i dS \quad 1 \leq i \leq N_c$$

$$f_3(\psi, \Upsilon)_{|1} = \psi_a - \sup_{\Omega_p} \psi$$

$$f_3(\psi, \Upsilon)_{|2} = \psi_b - \sup_{\mathcal{D}} \psi$$

$$f_3(\psi, \Upsilon)_{|3} = \frac{\beta_p}{2} \int_{\Omega_p} \frac{|\nabla \psi|^2}{r} dS + i_p C_p (\psi_a - \psi_b) \int_{\Omega_p} r \mathcal{G}_p(\bar{\psi}) dS$$

$$f_3(\psi, \Upsilon)_{|4} = \eta_{||}(P_a) i_p r_a \Delta t \left(r_a C_p \mathcal{F}_p(0) + \frac{C_f}{r_a} \mathcal{F}_f(0) \right)$$

$$f_3(\psi, \Upsilon)_{|5} = 2\pi \int_{\Omega_p} r \left[\eta \left(P' f f'_\psi + B^2 (f'_\psi)^2 \right) - \frac{\partial \psi}{\partial t} P' \right] dS$$

BIBLIOGRAPHIE

- R.Albanese - J.Blum - O.De Barbieri
On the Solution of the Magnetic Flux Equation in an Infinite Domain
EPS. 8th Europhysics Conference on Computing in Plasma Physics (1986)
- J.Blum /1/
Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics
Wiley - Gauthiers-Villars (1989)
- J.Blum /2/
Identification et contrôle de l'équilibre du plasma dans un Tokamak
Le Courier du CNRS (1990)
- P.Faure - M.Robin
Eléments d'automatique
Dunod (1986)
- H.Flanders
Differential Forms with Applications to the Physical Sciences
Academic Press (1963)
- G.H.Golub - C.F.Von Loan
Matrix Computations
North Oxford Academic . Oxford (1983)
- A.Jennings
Matrix Computation for Engineers and Scientists
J.Wiley & sons . Chichester (1977)
- M.D.Kruskal - R.M.Kulsrud
Physics of Fluids vol.1 , p.265 (1958)
- E.N.Shaw
Europe's Experiment in Fusion - The JET Joint Undertaking
North-Holland (1990)

L.Jr.Spitzer

Physics of Fully Ionized Gases

Interscience Publishers, Inc . New-York (1956)

G.Strang - G.J.Fix

An Analysis of the Finite Element Method

Prentice - Hall, Inc (1973)

S.Weinberg

Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory
of Relativity

J.Wiley & sons . New-york (1972)

J.Wesson

Tokamaks

Clarendon Press . Oxford (1987)

Résumé

La présente thèse traite de la modélisation, de la simulation numérique et du contrôle optimal de l'équilibre et de l'évolution de la configuration du plasma dans un Tokamak.

Dans le premier chapitre, on établit les équations aux dérivées partielles régissant le comportement du plasma dans un Tokamak.

Dans le deuxième chapitre, on résout tout d'abord le problème de l'équilibre du plasma par la méthode des éléments finis et un algorithme de Newton. On s'intéresse ensuite au problème du contrôle de l'équilibre : il s'agit de déterminer des courants dans les circuits du Tokamak de façon à ce que le plasma ait une configuration donnée. On introduit pour cela un Lagrangien, et on dérive un système d'optimalité que l'on résout par un algorithme de gradient conjugué. Trois exemples typiques illustrent cette deuxième partie.

Dans le troisième chapitre, on développe un modèle pour l'évolution de la configuration du plasma au cours d'une décharge. On résout ce problème par un algorithme de Newton; deux exemples de simulation numérique sont présentés.

Enfin dans le quatrième chapitre, on traite le problème du contrôle de l'évolution de la configuration du plasma. Il s'agit de déterminer des lois d'évolution pour les courants ou les tensions dans les circuits du Tokamak de manière à réaliser une évolution donnée de la configuration du plasma. Ce problème est résolu en introduisant un Lagrangien de manière analogue à ce qui est fait dans le deuxième chapitre. Enfin, on cherche une loi de feed-back de type PID qui asservisse la forme du plasma.

Mots clefs

Physique des plasmas - Fusion nucléaire

Tokamak

Contrôle optimal - Optimisation

Lagrangien