HAL open science

Analyse Dynamique d'Algorithmes Euclidiens et Théorèmes Limites

Aïcha Hachemi

To cite this version:

Aïcha Hachemi. Analyse Dynamique d'Algorithmes Euclidiens et Théorèmes Limites. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007. Français. NNT : . tel-00343537

HAL Id: tel-00343537

https://theses.hal.science/tel-00343537v1

Submitted on 1 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU

Année 2007

THÈSE

présentée par :

Aïcha HACHEMI

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Titre :

ANALYSE DYNAMIQUE D'ALGORITHMES EUCLIDIENS ET THÉORÈMES LIMITES

Soutenue le 09 juillet 2007 devant le jury :

Directrice de thèse :	Mme Viviane BALADI
Rapporteurs :	Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS M. Ian MELBOURNE
Examinateurs :	M. Romain DUJARDIN M. Frédéric HÉLEIN M. Hans-Henrik RUGH Mme Brigitte VALLÉE

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons au comportement asymptotique des distributions de coûts associés à des algorithmes d'Euclide de la classe rapide. Nous commençons dans un premier chapitre par des rappels sur les propriétés dynamiques des systèmes euclidiens et introduisons la propriété de moments forts pour les coûts additifs non-réseau. Nous établissons ensuite la condition de coût fortement diophantien et montrons sa généricité. Dans le deuxième chapitre, nous analysons, en adaptant des techniques de Dolgopyat-Melbourne, des perturbations d'opérateurs de transfert associés à des applications de la bonne classe. Ces résultats sont utilisés dans le troisième chapitre pour obtenir des estimations sur la fonction génératrice des moments où nous montrons sa quasi-décroissance exponentielle.

Le dernier chapitre est consacré aux démonstrations de théorèmes de la limite locale. Le premier théorème est sans vitesse de convergence et concerne tous les coûts non-réseau ayant des moments forts à l'ordre trois. La condition diophantienne nous permet ensuite d'établir un théorème de la limite locale avec contrôle de la vitesse de convergence. Pour des observables suffisament régulières, nous obtenons une vitesse de convergence optimale.

Mots-clés : Système dynamique de l'intervalle, opérateur de transfert, analyse spectrale, série génératrice, probabilité discrète.

Abstract

In this thesis, we study the asymptotic behaviour of distributions of the total cost associated to euclidian fast algorithms. In the first chapter, we recall some dynamical properties of euclidian systems and introduce the property of strong moments for an additive non-lattice cost function. We establish then the strong diophantine cost property and prove its genericity. In the second chapter, using Dolgopyat-Melbourne techniques, we analyse perturbations of a tranfer operator associated to transformations of the good class. These results are used in the third chapter where we get estimations for the moment generating function and obtain that it is quasi-exponentially decreasing.

The last chapter is devoted to proving local limit theorems. The first theorem is without speed of convegence and relates all costs having strong moments up to order three. The diophantine condition enables us to establish a local limit theorem with control of the speed of convergence. For smooth enough observables we attain the optimal speed.

Keywords : Dynamical system of the interval, transfer operator, spectral analysis, generating series, discrete probability.

Table des matières

Introduction **4**

1 Systèmes Euclidiens **15**
1 Introduction 15
2 Systèmes dynamiques de bonne classe : 15
3 Les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$ 17
3.1 Le système $T_{\mathcal{G}}$ 17
3.2 Le système $T_{\mathcal{K}}$ 18
3.3 Le système $T_{\mathcal{O}}$ 19
4 Non-intégrabilité uniforme. 21
4.1 Condition *UNI* 21
4.2 La condition *UNI* et les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$. 23
5 Fonctions coût 26
5.1 Coûts diophantiens 27
5.2 Coûts fortement diophantiens 29

2 Opérateurs de transfert **35**
1 Introduction 35
2 Propriétés spectrales 37
2.1 Apériodicité, convexité 41
3 Estimations sur le quasi-inverse 44
3.1 $R_{s,i\tau}$ dans les régions compactes 45
3.2 $R_{s,i\tau}$ dans les régions libres 46

3 Fonction Génératrice **61**
1 Introduction 61
2 Série de Dirichlet et Opérateur de Transfert 62
3 La formule de Perron 66
4 Lissage 67
5 Série Génératrice du coût lissé 70

4 Démonstrations des Théorèmes de la Limite Locale **77**
1 Démonstration du théorème 0.1 77
2 Démonstration du Théorème 0.2 83
2.1 Cas ψ "lisse" 84
2.2 Le cas de χ_J 87

Appendice **90**

Introduction

Le sujet de cette thèse se situe dans le cadre de l'étude, à travers les systèmes dynamiques de l'intervalle, des algorithmes arithmétiques et en particulier des algorithmes d'Euclide.

La version standard de l'algorithme d'Euclide est apparue vers 300 avant JC et a préservé jusqu'à nos jours son importance. Elle intervient dans la plupart des calculs qu'effectuent les ordinateurs sur les entiers comme dans la cryptographie à clé publique ou le calcul de l'inverse modulaire. Ceci explique l'intérêt que - de Delagny en 1733 [42] à Hensley en 1994 - de nombreux mathématiciens ont donné à l'étude du nombre d'itérations qu'effectue cet algorithme avant de s'arrêter. Ils ont pour cela fait intervenir diverses branches des mathématiques comme la combinatoire, les méthodes probabilistes et l'analyse fonctionnelle. Cependant, de nombreuses questions sur le comportement et l'efficacité de l'algorithme restent ouvertes.

Comme dans l'étude du nombre d'itérations, les questions ouvertes sur les différents paramètres qu'engendrent l'algorithme se traduisent souvent en terme de variables aléatoires appelées *fonctions de coût*. Pour une étude probabiliste de ces fonctions de coût, la méthode classique en analyse d'algorithme, à savoir la *combinatoire analytique* repose, en général, sur l'étude des *séries génératrices* de ces fonctions qui constituent l'outil de base. Le lien étroit qui existe entre les séries génératrices et les fonctions caractéristiques des paramètres mène à une extraction des coefficients de ces séries. C'est en particulier, l'étude des singularités dominantes des séries génératrices qui permet de caractériser le comportement asymptotique moyen de l'algorithme. En revanche, l'analyse des lois limites des fonctions coût mène à les associer aux séries génératrices de Lévy et nécessite des informations précises et difficiles à obtenir, ce qui rend l'analyse en distribution plus délicate.

L'efficacité ou complexité de l'algorithme étant fortement liée à son évolution dans le temps, il est alors naturel de considérer un algorithme et ses données comme un système dynamique. R.P. Brent et D. Hensley ont été les précurseurs de cette approche qui a ensuite été développée et formalisée par B.Vallée dans une série d'articles (voir [39] par exemple). Cette modélisation a permis à B. Vallée de classifier les algorithmes en deux classes principales : la classe des algorithmes *rapides*, où le nombre d'itération est en

moyenne de l'ordre de $\log N$ et la classe des algorithmes *lents* où la complexité est en moyenne de l'ordre de $\log^2 N$ et de pouvoir manipuler ainsi des outils puissants qu'offre l'approche dynamique, comme l'analyse des opérateurs de transfert qui remplace l'étude des séries génératrices et deviennent des *opérateurs générateurs*. Les systèmes dynamiques associés aux algorithmes d'Euclide sont donnés par des transformations de l'intervalle sur des partitions qui peuvent être finies ou infinies, markoviennes ou non. Les systèmes associés à la classe rapide admettent une mesure invariante finie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Cette approche dynamique s'applique également aux algorithmes du texte où on pourra par exemple se rapporter aux travaux de J.Bourdon et B.Vallée [4].

Le travail développé dans cette thèse concerne la classe rapide qui contient les algorithmes euclidiens *Standard* ($\mathcal{G}$), *Centré* ($\mathcal{K}$) et *Impair* ($\mathcal{O}$) que nous allons à présent décrire.

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq q$, la division euclidienne classique donne une unique paire $(m,r) \in \mathbb{N}^2$ telle que

$$p = mq + r, \quad m \geq 1 \quad \text{et} \quad r < q.$$

L'algorithme d'Euclide standard est une succession de divisions euclidiennes classiques et d'échanges qui se terminent avec un reste nul. Ainsi un algorithme effectuant P divisions est de la forme

$$\begin{cases} (p_0, p_1) = (p,q), \\ \\ p_i = m_{i+1}p_{i+1} + p_{i+2}, \quad \forall i \geq 1 \quad \text{avec} \quad m_{i+1} \geq 1 \quad \text{et} \quad p_{i+2} < p_{i+1} < p_i, \end{cases}$$

et s'arrête lorsque $p_P = 0$ où $P := P(p,q)$ est le nombre d'étapes et $pgcd(p,q) = p_{P-1}$.

Les algorithmes *centré* et *impair* sont obtenus en imposant des restrictions sur les quotients et les restes partiels. Ainsi l'algorithme centré est obtenu en imposant au reste d'être inférieur à la moitié du diviseur alors que pour l'algorithme impair s'obtient en imposant au quotient d'être impair (voir le chapitre 1 pour plus de détails).

Dans les trois cas, l'algorithme, appliqué à une entrée (p,q) de l'ensemble $\widetilde{\Omega} := \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ p \geq q\}$, engendre une suite d'entiers $m_i := m_i(p,q)$, qui forment la suite des dénominateurs dans un développement en fractions continues du rationnel q/p.

Considérons maintenant, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\tilde{\Omega}_N := \{(p,q) \in \widetilde{\Omega} \ , p \leq N\},$$

muni de la probabilité uniforme $\tilde{\mathbb{P}}_N$.

Nous appelons une fonction *coût* toute fonction non nulle $c : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}$. Étant donnée une telle fonction, nous associons à l'ensemble $\widetilde{\Omega}_N$ la variable aléatoire suivante, appelée *coût total* :

$$C(p,q) = \sum_{i=1}^{P(p,q)} c(m_i(p,q)). \tag{0.1}$$

Notons que, lorsque la fonction coût est constante de valeur 1, la variable $C(p,q)$ est égale au nombre d'étapes $P(p,q)$.

L'espérance $\sum_{(p,q)\in\tilde{\Omega}_N} \tilde{\mathbb{P}}_N(p,q)C(p,q)$ du coût total $C(\cdot,\cdot)$ sera notée $\tilde{\mathbb{E}}_N(C)$ et sa variance sera notée $\tilde{\mathbb{V}}_N(C) = \tilde{\mathbb{E}}_N(C^2) - (\tilde{\mathbb{E}}_N(C))^2$.

Historique des résultats

Au 18ème siècle G. Lamé [28, page. 343] montre que le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme standard ne peut excéder la taille des entrées. Par des méthodes analytiques, Heilbronn [23] montre que le nombre d'étapes dans l'algorithme standard pour une entrée $(p,q) \in \widetilde{\Omega}_N$ est proche de $(12\log 2/\pi^2)\log N$, précisant ainsi le résultat de G. Lamé. Simultanément et séparément en 1970, J.D. Dixon [15] étudie l'algorithme standard et montre que pour $c \equiv 1$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C_0 > 0$ telle que l'inégalité

$$\big|C(p,q) - (12\pi^{-2}\log 2)\log N\big| < (\log N)^{1/2+\varepsilon} \tag{0.2}$$

soit vérifiée pour toute paire $(p,q) \in \Omega_N$ sauf pour un nombre de paires égal au plus à $N^2 \exp\big[-C_0(\log N)^{\varepsilon/2}\big]$. Puis, dans [16], il montre que la proportion des paires (p,q) telles que $1 \le q \le p \le N$ et que

$$0.5\log p \le C(p,q) \le 2.08(\log p + 1)$$

tend vers 1 lorsque $N \longrightarrow \infty$.

Les premiers théorèmes limites concernant la variable aléatoire $C(\cdot,\cdot)$ ont été obtenus par Hensley [24] en 1994. Il a montré que, pour l'algorithme standard, la distribution du coût total associée à la fonction coût $c \equiv 1$ suit une loi gaussienne dont la vitesse de convergence est de l'ordre de $1/(\log N)^{1/24}$. Il a donné un théorème de la limite locale de même vitesse de convergence. Sa méthode repose sur l'étude de la famille de mesures discrètes sur $\mathbb{R}$: pour tous $P \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{C}$ et $t \in [0,1]$ on pose :

$$\nu_{P,s,t} := \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^P} \frac{\delta\big(\log\big[<\underline{m}>(1+\{\underline{m}^*\}t)\big]\big)}{<\underline{m}>^s\,(1+\{\underline{m}^*\}t)^s},$$

où $< \underline{m} >$ est le dénominateur de la fraction continue ayant pour suite de quotients partiels $\underline{m} := (m_1, \cdots, m_P)$, $\{\underline{m}^*\}$ est la fraction continue associée à la suite $\underline{m}^* := (m_P, m_{P-1}, \cdots, m_1)$ et $\delta(y)$ est la mesure de Dirac en $y \in \mathbb{R}$. L'étude de cette famille de mesures est faite à travers une analyse du spectre de l'opérateur de Gauss-Kuzmin-Wirsing

$$(\mathbf{H}_{s/2} f)(t) := \sum_{n=1}^{\infty} (n+t)^{-s} f\left(\frac{1}{n+t}\right),$$

défini sur un espace de Hilbert de fonctions sur $[0,1]$ approprié, où s est un paramètre complexe. À travers une analyse de Fourier et le théorème de Berry-Esséen, Hensley transforme les résultats spectraux de l'opérateur $\mathbf{H}_{s/2}$ en des estimations sur $\nu_{P,s,t}$. Enfin, en considérant (0.1) comme l'analogue d'une somme de $\log N$ variables aléatoires indépendantes, les théorèmes taubériens interviennent pour estimer les séries génératrices de Lévy de la variable $C(\cdot,\cdot)$ et donner ensuite les théorèmes limites.

Hensley a montré également que l'espérance de $C(\cdot,\cdot)$ est proche de $(12 \log 2/\pi^2) \log N$ et que la variance est proche de $\tilde{C} \log N$ où $\tilde{C}$ est une constante dépendant de la dérivée seconde de la valeur propre maximale de l'opérateur $\mathbf{H}_{s/2}$.

On ne sait pas si cette méthode permet d'étendre ces résultats à des coûts $c \not\equiv 1$. Par ailleurs, vue l'analogie avec la somme de $\log N$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées [20], et le résultat de Heilbronn cité ci-dessus, on pourrait s'attendre à que la vitesse optimale dans les théorèmes limites soit de l'ordre de $1/\sqrt{\log N}$.

Le développement en fractions continues d'une entrée réelle $x \in]0,1]$ donne une suite infinie $(m_i(x))$ de quotients partiels. On a

$$x = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{m_n + \cdots}}}}. \tag{0.3}$$

On définit le coût total de la trajectoire de x tronquée en n par

$$C_n(x) := \sum_{j=1}^{\min(n,P(x))} c(m_j(x)),$$

où $P(x) = \infty$ si x est irrationnel et $P(x)$ est le nombre d'étapes si $x = q/p$ est rationnel : dans ce dernier cas, on a $m_i = 0$ pour tout $i > P(x)$ et la suite finie $(m_1, \cdots, m_P)$ correspond à celle engendrée par l'exécution de l'algorithme d'Euclide standard sur l'entrée (p,q).

Le développement en fractions continues (0.3) est associé à l'application de Gauss $T_{\mathcal{G}}$ (voir le Chapitre 1) dont la trajectoire $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(x) = (x,\ T_{\mathcal{G}}x,\ T_{\mathcal{G}}^2x, \cdots, T_{\mathcal{G}}^n x, \cdots)$ d'un point $x \in]0,1]$ est reliée à la suite $(m_i(x))$ à travers la relation

$$m_i(x) := m_{\mathcal{G}}(T_{\mathcal{G}}^{i-1}(x)) \quad \text{où} \quad m_{\mathcal{G}}(x) = \text{la partie entière de } 1/x.$$

Si l'on note $f_{1,\mathcal{G}}$ la densité de la mesure invariante de $T_{\mathcal{G}}$ qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et si la fonction coût, qui dans ce cas joue le rôle d'observable en physique, vérifie la condition d'intégrabilité :

$$\widehat{\mu}(c) := \int_0^1 c(m_{\mathcal{G}}(y)) f_{1,\mathcal{G}}(y) dy < \infty,$$

les moyennes de Birkhoff $C_n(x)/n$ convergent vers $\widehat{\mu}(c)$ pour presque tout $x \in]0,1]$ au sens de la mesure de Lebesgue. L'étude de la distribution de $C_n(\cdot)$ est relativement aisée puisque l'opérateur de transfert

$$\mathbf{H}_{1,w}[f] := \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp[wc(h)] \cdot |h'| \cdot f \circ h, \quad \text{avec } w \in \mathbb{C},$$

est relié à la fonction génératrice des moments $w \to \mathbb{E}_N[\exp(wC_n)$ par la formule

$$\tilde{\mathbb{E}}_N[\exp(wC_n)] = \int_{\mathcal{I}} \mathbf{H}_{1,w}^n[f](u) du.$$

La décomposition spectrale de l'opérateur $\mathbf{H}_{1,w}$ et la convexité de la pression permettent d'appliquer directement le théorème de quasi-puissance de Hwang [25, 26]. Ceci permet à Baladi et Vallée de donner une autre démonstration [3] du résultat déjà connu de A.Broise [10] qui, dans un cadre plus général que celui des systèmes euclidiens, a d'une part montré que la distribution de $C_n/\sqrt{n}$ est asymptotiquement gaussienne avec une vitesse de convergence optimale et, d'autre part, a prouvé un théorème local limite sans vitesse de convergence.

Dans un cadre géométrique, Guivarc'h et Le Jan [21], relient les fractions continues pour une entrée réelle, aux flots géodésiques sur des surfaces modulaires et utilisent un argument de trou spectral à la Nagaev d'un opérateur de transfert du même type que $\mathbf{H}_{1,w}$.

Rappelons maintenant que l'exécution d'un algorithme d'Euclide à une entrée (p,q) correspond à un développement fini en fraction continue du rationnel $x = q/p$. On est donc dans un cadre discret et la trajectoire rationnelle associée $\mathcal{T}(x)$ est finie et le paramètre n de la somme $C_n(x)$ n'est plus le degré de troncation, il représente ici le nombre d'étapes $P(p,q)$. Dans ce cas, l'opérateur de transfert n'apparaît plus directement dans la formule de la série génératrice des moments de $C(\cdot,\cdot)$. Ceci rend l'étude des trajectoires rationnelles plus complexe.

En s'inspirant des travaux de Hensley et A.Broise, B.Vallée a trouvé une façon élégante de relier des perturbations de l'opérateur de transfert à la série génératrice des moments de $C(\cdot,\cdot)$. Grâce à cette méthode, elle a généralisé les résultats de Hensley aux algorithmes *centré* et *impair* pour des fonctions coût vérifiant une hypothèse de croissance modérée (voir remarque 1.7). Plus précisément, elle montre [41] que, pour chacun des algorithmes $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$, et pour tout coût c à croissance modérée il existe une constante $\mu(c) > 0$ s'exprimant en fonction de l'entropie du système dynamique associé telle que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{\mathbb{E}}_N(C)}{\log N} = \mu(c). \tag{0.4}$$

Une formule similaire pour la variance a été obtenue par Baladi et Vallée dans [3] : si le coût c est à croissance modérée, il existe $\delta(c) \in \mathbb{R}_+^*$, s'exprimant en fonction des dérivées partielles de l'entropie du système, tel que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{\mathbb{V}}_N(C)}{\log N} = (\delta(c))^2. \tag{0.5}$$

L'article [3] contient également le *théorème de la limite centrale* [3, Theorem 3] suivant : Pour tout coût c à croissance modérée, il existe $M_1(c) \geq 1$ tel que, pour tout entier $N \geq 1$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\left| \tilde{\mathbb{P}}_N\left(\frac{C(p,q) - \mu(c)\log N}{\delta(c)\sqrt{\log N}} \leq y \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\, dx \right| \leq \frac{M_1(c)}{\sqrt{\log N}}. \tag{0.6}$$

L'argument du point col utilisé dans la preuve du théorème ci-dessus montre que la vitesse de convergence $(\log N)^{-1/2}$ ne peut être améliorée, ce qui est bien la vitesse de convergence optimale donnée par l'analogie avec le théorème central limite pour une somme de variables aléatoires i.i.d.

Afin d'obtenir (0.6), de nouvelles méthodes ont été introduites. L'essentiel du travail consistait à généraliser les travaux de Dolgopyat [18] pour obtenir des estimations sur le quasi-inverse d'un opérateur de transfert à deux paramètres de perturbation dans des domaines bien précis du plan complexe.

L'hypothèse de croissance modérée [3, pge. 341] implique que le coût admet des moments forts de tout ordre (voir chapitre 3, §5). Comme nous le verrons dans le chapitre 2, cette hypothèse peut être remplacée par une autre plus faible qui demande que le coût ait au plus des moments forts à l'ordre trois. Ainsi, les résultats (0.4, 0.5, 0.6) et (0.8) ci-dessous sont vérifiés pour des coûts ayant seulement des moments forts à l'ordre trois.

Une fonction coût est dite *réseau*, s'il existe $(L, L_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, avec $L_0/L \in [0,1)$ tel que $(c - L_0)/L$ soit à valeurs entières. Si c est réseau, le plus grand réel L est appelé la

profondeur de c et le réel L_0 correspondant est appelé le *shift* de c. Un coût c constant a pour profondeur $L = |c|$ et pour shift $L_0 = 0$.
Une fonction coût est dite *non-réseau* si elle n'est pas réseau.

Si le coût est réseau de shift nul et est à croissance modérée, on a le *théorème de la limite locale* suivant [3, Théorème 4] : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}_+^*$, on pose

$$\mathbf{Q}(x, N) = \mu(c) \log N + \delta(c) x \sqrt{\log N}\,. \tag{0.7}$$

Alors, il existe $M_2(c) \geq 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$,

$$\left| \sqrt{\log N} \cdot \tilde{\mathbb{P}}_N\big((C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)) \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]\big) - L \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{M_2(c)}{\sqrt{\log N}}. \tag{0.8}$$

(Voir [3, §5.4] pour le cas $L_0 \neq 0$). Le même argument que dans le cadre du théorème de la limite centrale précédent, montre que la vitesse de convergence $(\log N)^{-1/2}$ dans le théorème local est optimale. La preuve de ce théorème utilise l'analyse des perturbations d'un opérateur de transfert par rapport à deux paramètres complexes s et $i\tau$ où le paramètre s varie dans un demi plan, et le réel τ dans l'intervalle borné $[-\pi/L, \pi/L)$.

Théorèmes de la limite locale

Le but de ce travail est d'obtenir, dans le cadre des algorithmes $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$, des théorèmes de la limite locale pour des variables aléatoires $C(\cdot,\cdot)$ provenant de fonctions coût non-réseau.

Les résultats de cette thèse sont contenus dans les articles [1] et [22].

Théorème 0.1 (**Théorème de la limite locale**). *[22] Pour les algorithmes euclidiens $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$ et pour toute fonction coût c non-réseau et possédant des moments forts à l'ordre 3 (voir Chapitre 1, Section 5), en notant toujours $\mu(c), \delta^2(c)$ les constantes apparaissant dans (0.4) et (0.5), on a : $\forall J$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ tel que pour tout $N \geq N_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\left| \sqrt{\log N} \tilde{\mathbb{P}}_N \Big[(C(p,q) - \mu(c) \log N - \delta(c) x \sqrt{\log N}) \in J \Big] - |J| \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}} \right| < \varepsilon. \tag{0.9}$$

Remarque 0.1. *L'article [22] contient la démonstration sous l'hypothèse de croissance modérée qui est, dans ce texte, remplacée par l'hypothèse des moments forts d'ordre trois. Notons aussi que l'hypothèse que c est non-réseau a été involontairement omise : en effet, cette hypothèse est nécessaire (voir lemme 3.9 du chapitre 3) comme cela est clair dans la démonstration de la proposition 2.6(iii)b).*

Suivant l'approche de B.Vallée, nous rappelons au Chapitre 1 comment on associe à un algorithme euclidien un système dynamique de l'intervalle dont on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des branches inverses.

Le contrôle de la vitesse de convergence dans les théorèmes de la limite locale nécessitent souvent un contrôle de la fonction génératrice de Lévy $\widetilde{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C(p,q)})$ pour les grandes valeurs de τ. En général, ceci invoque des conditions diophantiennes. Voir [8, 9] pour un contexte probabiliste proche mais différent de celui étudié dans cette thèse.

Définition 0.1. *Soit $\eta \geq 2$. On dit que le coût c est diophantien d'exposant η pour le sous-ensemble fini $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ s'il existe $\beta_0 \geq 1$ tel que, pour toutes suites $(\tau_k) \subset \mathbb{R}$, $(t_k) \subset \mathbb{R}$, $(\theta_k) \subset [0, 2\pi)$, avec $\lim_{k\to\infty} |\tau_k| = \infty$ et $\sup_k |t_k| < \infty$, et pour tous $M \geq 1$ et $\beta \geq \beta_0$, il existe $k \geq 1$ et $x \in \mathcal{I}$ de période minimale $p \geq 1$ tels que, si on note h_x la branche de $\mathcal{H}^p$ vérifiant $x = h_x(x)$ et $[\beta \log |\tau_k|]$ la partie entière de $\beta \log |\tau_k$, on a*

$$dist\big(\tau_k[\beta \log |\tau_k|]c(h_x) + t_k[\beta \log |\tau_k|] \log |h'_x| + p\theta_k, 2\pi\mathbb{Z}\big) \geq \frac{Mp}{|\tau_k|^\eta}\,. \tag{0.10}$$

Remarque 0.2. *Cette définition généralise celle donnée par Dolgopyat [18] qui impose que le système admette deux orbites périodiques dont le quotient des périodes est diophantien. Voir aussi [30].*

Théorème 0.2 (**Théorème de la limite locale avec vitesse de convergence**). *[1] Pour tout coût c diophantien d'exposant η pour un sous-ensemble fini $\mathcal{H}_0$ et ayant des moments forts à l'ordre 3 :*

i) Il existe $\epsilon \in (0, 1/2]$, tel que, pour tout intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $M_J > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\sqrt{\log N}\tilde{\mathbb{P}}_N\big(\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big) \in J\big) - |J|\frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\right| \leq \frac{M_J}{(\log N)^\epsilon}\,.$$

ii) Il existe $r \geq 1$ tel que, pour toute fonction $\psi \in C^r(\mathbb{R})$ à support compact, il existe une constante $M_\psi > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\sqrt{\log N}\tilde{\mathbb{E}}_N\big(\psi\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big)\big) - \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\int \psi(y)\,dy\right| \leq \frac{M_\psi}{\sqrt{\log N}}.$$

Remarque 0.3. *les constantes ϵ et r des assertions i) et ii) dépendent de l'exposant η de la condition diophantienne sur la fonction coût c. Nous verrons dans le deuxième et le quatrième chapitre que pour tout*

$$\alpha > \eta\big(2 + \frac{\log \sup_{\mathcal{H}_0} |h'|^{-1}}{\log(1/\rho)}\big)\big(1 + \frac{\log \sup_{\mathcal{H}_0} |h'|^{-1}}{\log(1/\rho)}\big)$$

où $0 < \rho < 1$ est une constante dépendante du système T, on peut prendre

$$\epsilon < 2(\alpha)^{-1}, \quad et \;\; r > \alpha + 1.$$

Mais ces constantes ne sont probablement pas optimales. La démonstration du théorème 0.2 donne une constante $K(c) = K(\eta, \mathcal{H}_0)$ telle que, si l'observable ψ a son support dans un intervalle J_ψ,

$$M_j \leq K(c)|J|^2, \quad et \; M_\psi \leq K(c)|J_\psi| \|\psi\|_{C^{[r+1]}}. \tag{0.11}$$

La deuxième assertion affirme que, pour des observables ψ à support compact suffisamment régulières, nous obtenons un théorème de la limite dont la vitesse de convergence est optimale. Si le coût est non-réseau et non-diophantien, on pourrait, en s'inspirant de [33], s'attendre à qu'on ait un théorème de la limite locale avec une vitesse de convergence plus faible.

Remarque 0.4. *Nous verrons dans le chapitre 1 une autre condition diophantienne appelée fortement diophantienne qui est suffisante pour que le coût c soit diophantien. Le théorème de la limite locale donné par R.Sharp [34] pour le comptage des géodésiques avec homologie, peut être vu comme l'analogue dans le cas d'un alphabet fini de celui donné par (0.8) pour des coûts réseau. Pour généraliser le théorème de [34] au cas non-réseau, on peut remplacer la variable de comptage par une variable aléatoire donnée en intégrant, sur une géodésique γ, une fonction lipschitzienne c_*. La condition diophantienne suffisante pour le contrôle de la vitesse de convergence devrait ressembler à la condition de fortement diophantien. Elle ferait intervenir essentiellement $\int_{\gamma_j} c_*$ et les temps de retour a_j pour les flots, qui dans le cadre géométrique, correspondent aux longueurs des géodésiques γ_j.*

Résumés des Chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous commençons par donner une description détaillée des algorithmes $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$ et des rappels sur les systèmes dynamiques de l'intervalle associés à ces algorithmes. Nous rappelons quelques unes de leurs principales propriétés dynamiques. Nous vérifions ensuite que ces systèmes vérifient une hypothèse appelée condition de non-intégrabilité uniforme. Cette condition est cruciale pour que le quasi-inverse $(I - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}$ de l'opérateur de transfert pondéré $\mathbf{H}_{s,i\tau} = \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp[i\tau c(h)] \cdot |h'(x)|^s \cdot u \circ h(x)$ soit analytique. Nous établissons ensuite la condition diophantienne introduite dans la définition 0.1 et définissons les coûts fortement diophantiens. Nous montrons à la fin du chapitre que les coûts fortement diophantiens sont diophantiens et qu'ils sont génériques en un certain sens.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à l'étude des opérateurs de transfert pondérés $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ où les paramètres $(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$. . Après quelques rappels sur leurs propriétés spectrales classiques nous citons les résultats de Baladi et Vallée [3] qui, en adaptant les

travaux de Dolgopyat [18] qui sont à l'origine de la condition de non-intégrabilité uniforme, obtiennent un contrôle polynomial d'une norme du quasi-inverse lorsque s appartient à une bande verticale et τ à un compact de $\mathbb{R}$. Ces résultats ne sont pas suffisants pour avoir la vitesse de convergence dans le théorème de la limite locale. Adaptant le travail de I.Melbourne [29] qui généralise un autre travail de Dolgopyat [17], nous sommes donc amené à établir une estimation sur une norme du quasi-inverse pour les grandes valeurs de τ et lorsque les coûts vérifient la condition diophantienne.

Chapitre 3 : Nous nous intéressons dans cette partie à l'outil principal dans l'étude en distribution des variables aléatoires $C(\cdot,\cdot)$, à savoir les séries génératrices des moments $\mathbb{E}_N(e^{i\tau C(\cdot,\cdot)})$. Après avoir fait le lien entre les séries de Dirichlet $S(s,i\tau)$ et l'opérateur de transfert $\mathbf{H}_{s,i\tau}$,nous introduisons, pour des raisons techniques, un modèle probabiliste lissé $(\overline{\Omega}_N(\xi),\overline{\mathbb{P}}_N(\xi))$ proche de $(\tilde{\Omega}_N,\tilde{\mathbb{P}}_N)$. Nous exploitons les résultats obtenus dans le chapitre précédent et nous utilisons deux lissages différents, pour avoir essentiellement une inégalité du type quasi-décroissance exponentielle par rapport à N de $\mathbb{E}_N(i\tau C(\cdot,\cdot))$ pour les grandes valeurs de τ.

Chapitre 4 : Nous commençons ce dernier chapitre par la démonstration du théorème 0.1, en utilisant la méthode de Stone. Nous montrons ensuite le théorème 0.2 en effectuant une régularisation des observables par un produit de convolution. Les deux résultats sont obtenus pour le modèle lissé et se transportent à $(\tilde{\Omega}_N,\tilde{\mathbb{P}}_N)$ par les résultats du chapitre précédent.

Chapitre 1

Systèmes Dynamiques Euclidiens

1 Introduction

Un système dynamique euclidien est un système dynamique de l'intervalle dont la restriction à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ est une application engendrée par un algorithme d'Euclide. Comme il en a déjà été fait mention précédemment, les algorithmes étudiés dans cette thèse appartiennent à la classe rapide. Nous allons donc commencer ce chapitre par des rappels sur les systèmes dynamiques qui correspondent à cette classe. Dans la section 3, nous détaillons comment obtenir les systèmes à partir des algorithmes. Les deux dernières sections seront consacrées à l'étude de deux propriétés qui, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, sont cruciales pour obtenir des estimées sur les perturbations de l'opérateur de transfert.

2 Systèmes dynamiques de bonne classe :

Définition 1.1 (**Application de l'intervalle complète par morceaux**). *Soit $\mathcal{I}$ un intervalle compact. Une application $T : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ est dite complète par morceaux s'il existe un ensemble $\mathcal{M}$ (fini ou dénombrable) et une partition d'intervalles ouverts $\{\mathcal{I}_d\}_{d\in\mathcal{M}}$ (modulo un ensemble dénombrable) de l'intervalle $\mathcal{I}$ tels que la restriction de T à $\mathcal{I}_d$ admette une extension de la clôture de $\mathcal{I}_d$ dans $\mathcal{I}$ qui soit bijective de classe $\mathcal{C}^2$.*

Par la suite, pour toute application complète par morceaux, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des branches inverses de T c'est à dire

$$\mathcal{H} := \{h_d : \mathcal{I} \to \overline{\mathcal{I}}_d \ ; \ d \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad h_d \equiv (T/_{\overline{\mathcal{I}}_d})^{-1}\},$$

et $\mathcal{H}^n$ l'ensemble des branches inverses de T^n. Le semi-groupe $\cup_n \mathcal{H}^n$ engendré par $\mathcal{H}$ sera noté $\mathcal{H}^*$.

Définition 1.2 (Bonne classe). *Une application complète par morceaux appartient à la bonne classe si :*

(i) T est uniformément dilatante par morceaux, c'est à dire, il existe $C > 0$ et $0 < \widehat{\rho} < 1$ tels que $\mid h^{'}(x) \mid \leq C\ \widehat{\rho}^n$ pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, tout entier n et tout $x \in \mathcal{I}$. Le nombre ρ défini par :

$$\rho := \limsup_{n \longrightarrow \infty} (\max\{|h^{'}(x)|;\ h \in \mathcal{H}^n, x \in \mathcal{I}\})^{1/n}$$

est appelé le "taux de contraction" du système T.

(ii) Il existe $\widehat{K} > 0$, appelée constante de distorsion, telle que toute branche inverse h de T vérifie :

$$|h^{''}(x)| \leq \widehat{K}|h^{'}(x)| \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{I}. \tag{1.1}$$

(iii) Il existe $\sigma_0 < 1$ tel que $\sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h^{'}|^{\sigma} < \infty$ pour tout réel $\sigma > \sigma_0$.

Remarque 1.1. *La condition de distorsion (ii) peut s'écrire*

$$1/L \leq \left|\frac{h'(x)}{h'(y)}\right| \leq L, \quad \forall x, y \in \mathcal{I}, \quad \forall h \in \mathcal{H}^*, \tag{1.2}$$

avec $L = e^{\widehat{K}/1-\rho}$.

En effet, on a pour tout $h \in \mathcal{H}^*$ et pour tout $x \in \mathcal{I}$;

$$\frac{h'(x)}{h'(y)} = e^{\pm \int_y^x (h''(z)/h'(z))dz}.$$

D'autre part, la condition (ii) se généralise au semi-groupe $\mathcal{H}^*$: soient $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathcal{H}^n$ et $x \in \mathcal{I}$, alors si on pose $h = h_1 \circ h_2 \circ \cdots h_n$ avec $h_i \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h''(x)}{h'(x)}\right| &= \left|(\log h')'(x)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} (\log h'_{n-j+1}(h_{n-j+2} \circ h_{n-j+3} \circ \cdots \circ h_n))'(x)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{h''_{n-j+1}(h_{n-j+2} \circ h_{n-j+3} \circ \cdots \circ h_n(x))}{h'_{n-j+1}(h_{n-j+2} \circ h_{n-j+3} \circ \cdots h_n(x))} (h_{n-j+1} \circ h_{n-j+2} \circ \cdots \circ h_n)'(x)\right| \\
&\leq \widehat{K} \sum_{j=1}^{n} \rho^j \leq \widehat{K}/1 - \rho.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $K = \widehat{K}/1-\rho$, *on a*

$$|h''(x)| \leq K|h'(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad \forall h \in \mathcal{H}^*,$$

et la remarque en découle.

Remarque 1.2. *D'après le théorème du folklore (voir [6]) les propriétés* (i) *et* (ii) *assurent l'existence d'une mesure invariante* μ_1 *absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui est finie sur* $\mathcal{I}$ *(ce qui justifie la dénomination de bonne classe). De plus de tels systèmes sont topologiquement mélangeants.*

3 Les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$

3.1 Le système $T_{\mathcal{G}}$

L'exécution de chacun des algorithmes d'Euclide appliqué à une entrée (p, q) avec $p \geq q$ engendre un développement en fraction continue du rationnel q/p. Plus précisément, la division euclidienne standard appliquée à une entrée (p, q) donne une unique paire $(m, r) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \geq 1$, $r < q$ telle que

$$p = mq + r.$$

Ceci se traduit par

$$\frac{r}{q} = \frac{p}{q} - m = \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor, \tag{1.3}$$

où $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ est la partie entière de $\frac{p}{q}$.

En itérant (1.3) on obtient

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{m_P}}}}.$$

Posons $\widetilde{\Omega} := \{q/p \in \mathbb{Q}^+ \ ; \ q \leq p\}$. Si on considère l'application $\widetilde{T}_{\mathcal{G}}$ définie sur $\widetilde{\Omega}$ par

$$\widetilde{T}_{\mathcal{G}}(q/p) = r/q,$$

alors $\widetilde{T}$ est la restriction à $\widetilde{\Omega}$ de l'application de Gauss définie sur $[0, 1]$ par

$$T_{\mathcal{G}}(x) := \left| \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right|, \quad x \neq 0, \quad T(0) = 0,$$

qui est complète par morceaux sur la partition donnée par les intervalles

$$\mathcal{I}_m := \left]\frac{1}{1+m}, \frac{1}{m}\right].$$

Ainsi, l'algorithme *Standard* est relié à la trajectoire d'un point $x = q/p \in (0,1]$ sous le système $T_{\mathcal{G}}$ à travers la relation,

$$m_i(x) = \left\lfloor \frac{1}{T_{\mathcal{G}}^{-i}(x)} \right\rfloor \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq P.$$

3.2 Le système $T_{\mathcal{K}}$

La division centrée exige que $p \geq 2q$ et est définie à partir de la division standard comme suit :

$$p = mq + \varepsilon r, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq r < q/2,$$

avec

$$(m, \varepsilon) := \begin{cases} (m, +1) & \text{si} \quad 0 \leq r < q/2 \\ (m+1, -1) & \text{si} \quad q/2 \leq r < q. \end{cases}$$

En procédant comme pour l'algorithme *Standard*, l'exécution de l'algorithme *Centré* donne pour $q/p \in (0,1]$

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{\varepsilon_1}{m_2 + \cfrac{\varepsilon_2}{\ddots + \cfrac{\varepsilon_P}{m_P}}}},$$

et on obtient ainsi, le système $\widetilde{T}_{\mathcal{K}}$ qui est la restriction, à $\widetilde{\Omega}_{\mathcal{K}} = \{q/p \in \mathbb{Q}^+ \ ; 2q \leq p\}$, de l'application

$$T_{\mathcal{K}}(x) := \left| \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rceil \right|, \quad x \in (0,1], \quad T_{\mathcal{K}}(0) = 0,$$

où

$$\lfloor y \rceil = \text{l'entier le proche de } y = \begin{cases} \lfloor y \rfloor & \text{si} \quad \{y\} \leq 1/2 \\ \lfloor y \rfloor + 1 & \text{si} \quad \{y\} > 1/2, \end{cases}$$

et $\{y\}$ est la partie fractionnaire de y.

Le système $T_{\mathcal{O}}$ est complet par morceaux sur l'intervalle $[0, 1/2]$ et pour la partition donnée par les intervalles

$$\mathcal{I}_d := \begin{cases} \left]\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{2}{m+2}\right] & \text{si} \quad d = (m, +1) \\ \\ \left]\dfrac{2}{m+2}, \dfrac{1}{m}\right] & \text{si} \quad d = (m, -1), \end{cases}$$

3.3 Le système $T_{\mathcal{O}}$

La division impaire exige que le reste soit impair et donne par conséquent un triplet (m, r, ε) tel que

$$p = mq + \varepsilon r, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq r < q,$$

avec

$$(m, \varepsilon) := \begin{cases} (m, +1) & \text{si } q \text{ est impair} \\ (m+1, -1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'exécution de l'algorithme *Impair* donne pour $q/p \in (0, 1]$

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{\varepsilon_1}{m_2 + \cfrac{\varepsilon_2}{\ddots + \cfrac{\varepsilon_P}{m_P}}}},$$

qui donne un système $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}$ qui est la restrictions à $\widetilde{\Omega}_{\mathcal{O}}$ de l'application

$$T_{\mathcal{O}}(x) := \left|\frac{1}{x} - \left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\right|, \quad x \in (0, 1], \quad T_{\mathcal{O}}(0) = 0,$$

$$\lceil y \rceil = \text{l'entier impair le plus proche de } y = \begin{cases} \lfloor y \rfloor & \text{si} \lfloor y \rfloor \text{ est impair} \\ \lfloor y \rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, le système $T_{\mathcal{O}}$ est complet par morceaux. sur l'intervalle $[0, 1]$ et par rapport à la partition donnée par les intervalles

$$\mathcal{I}_d := \begin{cases} \left]\dfrac{1}{2m}, \dfrac{1}{2m-1}\right] & \text{si} \quad d = (m, +1) \quad \text{et} \quad m \geq 1 \\ \\ \left]\dfrac{1}{2m-1}, \dfrac{1}{2m-2}\right] & \text{si} \quad d = (m, -1) \quad \text{et} \quad m \geq 2. \end{cases}$$

Voir aussi la Figure 1.1.

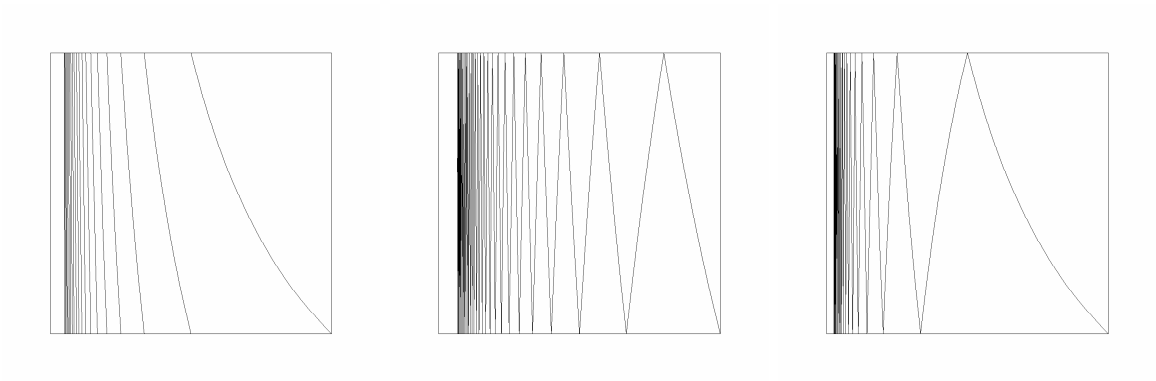

FIG. 1.1 – *De gauche à droite les systèmes : Gauss, Centré et Impair.*

Enfin, pour toute paire d'entiers (p, q), l'exécution des algorithmes $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$ engendre une suite d'homographies $h \in \mathcal{H}$ définies par

$$h_d(x) := h_{(m,\varepsilon)}(x) = \frac{1}{m + \varepsilon x},$$

et vérifie

$$(q/p) = h_{d_1} \circ h_{d_2} \circ ... \circ h_{d_P}(0) = h(0),$$

ce qui donne une bijection entre l'ensemble des digits $(m_i, \varepsilon_i) \in \mathbb{Z}_+^* \times \{\pm 1\}$ et l'ensemble $\mathcal{H}$. De plus, à chaque $q/p \in [0, 1]$ correspond une homographie qui apparaît dans la dernière étape.

Pour chaque algorithme, les branches qui apparaissent dans l'étape finales sont données par les conditions suivantes (voir [3])

$$\begin{cases} m \geq 2 & \text{pour l'algorithme } \mathcal{G} \\ \varepsilon = 1 & \text{pour les algorithmes } \mathcal{K} \text{ et } \mathcal{O}. \end{cases}$$

L'ensemble des homographies finales sera noté $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$.

Notons que l'ensemble $\mathcal{H}^*$ est formé de branches correspondant à deux types de trajectoires : les trajectoires rationnelles (engendrées par des développement de rationnels q/p) et le restes des trajectoires qui sont dites génériques.

Remarque 1.3. *Les branches inverses de chacun des systèmes vérifient :*

$$\sup_{\mathcal{I}} |h'_{m_i,\varepsilon_i}(x)| = O(m_i^{-2}).$$

Ainsi, on vérifie que les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{O}}, T_{\mathcal{K}}$ appartiennent à la bonne classe. La deuxième et la troisième condition découlent directement d'un simple calcul qui utilise la formule

des branches inverses ci-dessus avec une valeur de $\sigma_0 = 1/2$. Pour la première condition, des valeurs explicites de ρ sont données (dans [3], ou [35] pour la preuve) par

$$\rho_{\mathcal{G}} = \rho_{\mathcal{O}} = 1/\phi^2, \quad et \quad \rho_{\mathcal{K}} = 1/(\sqrt{2}+1)^2.$$

avec $\phi = (1+\sqrt{5})/2$.

De plus, les mesures invariantes ont pour densités (appelées aussi densités invariantes)

$$\begin{cases} f_{1,\mathcal{G}}(x) = \dfrac{1}{\log 2}\dfrac{1}{1+x}, \\ f_{1,\mathcal{K}}(x) = \dfrac{1}{\log \phi}\Big[\dfrac{1}{\phi+x} + \dfrac{1}{\phi^2-x}\Big], \\ f_{1,\mathcal{O}}(x) = \dfrac{1}{\phi-1+x} + \dfrac{1}{\phi^2-x}, \end{cases}$$

ce qui donne des valeurs explicites de l'entropie métrique et qui, par conséquent, permet de calculer explicitement les paramètres du théorème central limite (Cf, (0.4) et (0.5)).

Par la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, nous utiliserons la même notation T pour les trois systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$.

4 Non-intégrabilité uniforme.

La condition de non-intégrabilité uniforme *UNI* a été introduite par D.Dolgopyat [18] pour étudier la décroissance des fonctions de corrélation des flots d'Anosov. Intuitivement, la condition *UNI* affirme que, par rapport à une certaine distance bien définie, les branches inverses du systèmes doivent être suffisamment séparées. Nous reprenons dans cette section la formulation que V.Baladi et B.Vallée [3] ont utilisée pour généraliser cette condition à un système ayant un nombre infini de branches.

4.1 Condition *UNI*

Commençons d'abord par introduire quelques notations. Pour toute branche dans $\mathcal{H}^n$, on dira que n est la profondeur de la branche.

Pour deux branches inverses h, k ayant la même profondeur, on pose

$$\Psi_{h,k} := \log \frac{|h'(x)|}{|k'(x)|}, \tag{1.4}$$

et on définit leur quasi-distance par

$$\Delta(h,k) := \inf_{x\in\mathcal{I}} |\Psi'_{h,k}(x)| = \inf_{x\in\mathcal{I}} \left| \frac{h''}{h'}(x) - \frac{k''}{k'}(x) \right| . \tag{1.5}$$

Pour h dans $\mathcal{H}^n$ et $\eta > 0$, on note

$$J(h,\eta) := \bigcup_{k\in\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\eta} k(\mathcal{I})\,. \tag{1.6}$$

La propriété *UNI(a)* affirme que pour tout $0 < \beta < 1$, la probabilité pour que deux branches inverses de $\mathcal{H}^n$ aient une distance inférieur à $\rho^{\beta n}$ est dominée par $\rho^{\beta n}$.

Pour tout sous ensemble J de $\mathbb{R}$, on note $|J|$ la mesure de Lebesgue de J.

La condition *UNI.* *On dit qu'un système dynamique de la bonne classe de taux de contraction ρ vérifie la condition UNI si chaque branche inverse $h \in \mathcal{H}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^3$ et*

(a) Pour tout $0 < \beta < 1$ on a $|J(h,\rho^{\beta n})| \ll \rho^{\beta n}\,, \forall n\,, \forall h \in \mathcal{H}^n$.

(b) $Q := \sup\{|\Psi''_{h,k}(x)|; n \geq 1\,, h,k \in \mathcal{H}^n, x \in \mathcal{I}\} < \infty$.

Faisons quelques remarques avant de vérifier dans la section suivante que les systèmes $T_{\mathcal{G}},\ T_{\mathcal{K}},\ T_{\mathcal{O}}$ vérifient la condition *UNI.*

Remarque 1.4. *Pour un système à branches affines, on a $\Delta(h,k) = 0$ pour toutes $h,k \in \mathcal{H}^*$ de même profondeur. Ce qui donne pour tous $\eta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathcal{H}^n$*

$$J(h,\eta) := \bigcup_{k\in\mathcal{H}^n} k(\mathcal{I}) = \mathcal{I}.$$

Par conséquent la condition UNI(a) ne peut être vérifiée pour un tel système.

Remarque 1.5. *La condition UNI telle qu'elle a été reformulée dans [18, lemme 8] à partir de celle introduite par Chernov [14] exige de plus que, pour deux branches inverses distinctes h_1 et h_2 de profondeur n, la dérivée de la fonction $x \mapsto c(h_1(x)) - c(h_2(x))$ soit bornée. Dans notre contexte, cette condition n'apparaît pas car la fonction c est constante sur les intervalles de la partition.*

Remarque 1.6. *La condition (b) est vérifiée dès qu'il existe $\tilde{Q} < \infty$ tel que*

$$|h'''(x)| \leq \tilde{Q}|h'(x)|\,, \forall h \in \mathcal{H}^*. \tag{1.7}$$

De plus, en suivant le même calcul effectué dans la remarque 1.1, il suffit de vérifier (1.7) pour tout $h \in \mathcal{H}$. Notons que cette condition est toujours vérifiée si le système à un nombre fini de branches de classe $\mathcal{C}^3$.

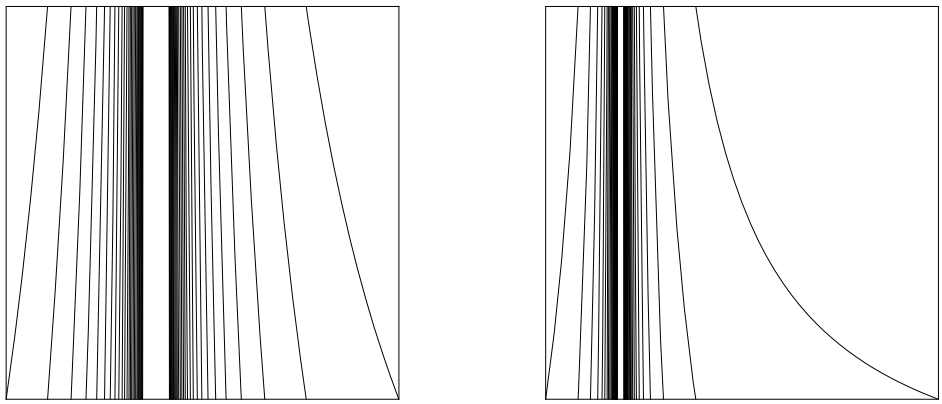

FIG. 1.2 – *De gauche à droite les systèmes :* $T^*_{\mathcal{K}}$ *et* $T^*_{\mathcal{O}}$.

4.2 La condition *UNI* et les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$.

Afin de vérifier que les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$ vérifient la condition *UNI*, on a besoin d'introduire les systèmes auxiliaires $T^*_{\mathcal{G}}, T^*_{\mathcal{K}}, T^*_{\mathcal{O}}$ définis respectivement sur les intervalles

$$\mathcal{I}^*_{\mathcal{G}} = \mathcal{I}_{\mathcal{G}} = [0,1], \quad \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}} = [\phi-2, \phi-1], \quad \mathcal{I}^*_{\mathcal{O}} = [\phi-2, \phi],$$

avec $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$, où sur des partitions appropriées, les branches inverses sont données par

$$h^*_{(m,\varepsilon)} := \frac{\varepsilon}{m+x}$$

Voir aussi [35] pour $T^*_{\mathcal{G}}$ et $T^*_{\mathcal{K}}$, [36] pour $T^*_{\mathcal{O}}$ qui donnent également $(\mathcal{I}^*, T^*) = (\mathcal{I}, T)$.

Ces systèmes sont complets par morceaux et correspondent à des algorithmes dits "non-pliés" (voir [5]) qui, appliqués à une entrée (p,q), donnent la même suite de digits (m_i, ε_i) que $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$ (respectivement).

Notons que ces systèmes T^* admettent des constantes de distorsion L^* bornées et des taux de contraction $\rho^* = \rho$.

On vérifie par un calcul direct que, pour toutes h_{m_i,ε_i}, $h_{m_j,\varepsilon_j} \in \mathcal{H}$, on a

$$h_{(m_i,\varepsilon_i)} \circ h_{(m_j,\varepsilon_j)}(x) = \frac{\varepsilon_j x + m_j}{m_i \varepsilon_j x + m_i m_j + \varepsilon_i},$$

et

$$(h_{(m_i,\varepsilon_i)} \circ h_{(m_j,\varepsilon_j)})^*(x) = \frac{\varepsilon_j x + m_i \varepsilon_j}{m_j x + m_i m_j + \varepsilon_i} = h^*_{(m_j,\varepsilon_j)} \circ h^*_{(m_i,\varepsilon_i)}.$$

D'où la propriété

$$(h \circ k)^* = k^* \circ h^*, \quad \forall\, h, k \in \mathcal{H}. \tag{1.8}$$

D'autre part, pour chacun des systèmes euclidiens $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$, une branche inverse h de profondeur n quelconque, s'écrit

$$h(x) = h_{(m_1,\varepsilon_1)} \circ h_{(m_2,\varepsilon_2)} \circ \cdots \circ h_{(m_n,\varepsilon_n)} = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

En combinant ceci avec la propriété 1.8, on montre par induction que toute branche inverse h^* (appelée aussi "miroir" de h) de profondeur n s'écrira

$$h^*(x) = h^*_{(m_n,\varepsilon_n)} \circ \cdots \circ h^*_{(m_2,\varepsilon_2)} \circ h^*_{(m_1,\varepsilon_1)} = \frac{ax+c}{bx+d}.$$

On dit que les systèmes $T^*_{\mathcal{G}}, T^*_{\mathcal{K}}, T^*_{\mathcal{O}}$ sont respectivement les systèmes duaux de $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$.

La notion de système *Dual* a été utilisée par F.Schweiger [35] et [36] pour calculer les densités invariantes par certaines transformations par des fractions continues plus générales.

Nous verrons dans la suite comment le dual intervient pour montrer que les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$ satisfont la propriété *UNI(a)*. La condition *UNI(b)* étant facile à vérifier par un calcul direct utilisant la propriété de distorsion bornée (1.1) et le fait qu'il existe $\tilde{K} > 0$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}^n$, on a

$$|h'''(x)| \leq \tilde{K}|h'(x)|.$$

Soient h_1 et h_2 deux branches de profondeurs quelconques. On a

$$h_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i},$$

et

$$\Psi'_{h_1,h_2}(x) = \left|\frac{h_1''}{h_1'}(x) - \frac{h_2''}{h_2'}(x)\right| = \frac{2|c_1 d_2 - c_2 d_1|}{|(c_1 x + d_1)(c_2 x + d_2)|}.$$

Par la propriété de distorsion (1.2)

$$\begin{aligned}
\Delta(h_1,h_2) &= 2\left|\frac{c_1}{d_1} - \frac{c_2}{d_2}\right| \cdot \inf_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{d_1}{c_1 x + d_1}\right| \left|\frac{d_2}{c_2 x + d_2}\right| \\
&= 2\left|\frac{c_1}{d_1} - \frac{c_2}{d_2}\right| \cdot \inf_{x\in\mathcal{I}} \left|\frac{h_1'(x)h_2'(x)}{h_1'(0)h_2'(0)}\right|^{1/2} \\
&\geq \frac{2}{L}\left|\frac{c_1}{d_1} - \frac{c_2}{d_2}\right| \\
&= \frac{2}{L}\left|h_1^*(0) - h_2^*(0)\right|.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

On remarque que la distance Δ dépend uniquement de la différence du quotient c_i/d_i des dénominateurs des homographies.

Lemme 1.1. *[3]. Les trois systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$ vérifient la condition UNI(a).*

Démonstration. Fixons $0 < \beta < 1$, $h \in \mathcal{H}^n$, $\eta > 0$ et définissons $J^*(h,\eta)$ par

$$J^*(h,\eta) = \bigcup_{k\in\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\eta} k^*(\mathcal{I}^*) \ . \tag{1.10}$$

En appliquant (1.9) à deux branches h, k telles que $\Delta(h,k) \leq \eta$ on obtient,

$$|h^*(0) - k^*(0)| \leq L\eta/2.$$

Rappelons maintenant que le taux de contraction pour les systèmes duaux $T^*_{\mathcal{G}}, T^*_{\mathcal{K}}, T^*_{\mathcal{O}}$ est égal à ρ et que $0 \in \mathcal{I}^*$. Considérons, pour $h \in \mathcal{H}^n$ et $\eta > 0$, l'ensemble

$$U^*(h,\eta) := \{k^* \ ; \ k \in \mathcal{H}^n \text{ et } \Delta(h,k) \leq \eta\},$$

et notons

$$\begin{cases} k^*_{\max} = \text{l'élément de } U^*(h,\eta) \text{ tel que } k^*_{\max}(0) \geq k^*(0) \text{ pour toute branche } k^* \in U^*(h,\eta), \\ k^*_{\min} = \text{l'élément de } U^*(h,\eta) \text{ tel que } k^*_{\min}(0) \leq k^*(0) \text{ pour toute branche } k^* \in U^*(h,\eta). \end{cases}$$

De telles branches $k^*_{\max}$ et $k^*_{\min}$ vérifient

$$J^*(h,\eta) \subset [k^*_{\min}(0), k^*_{\max}(0)] \cup k^*_{\min}(\mathcal{I}^*). \tag{1.11}$$

Ainsi, la mesure de Lebesgue de l'ensemble $J^*(h,\eta)$ vérifie

$$|J^*(h,\eta)| \ll L\eta/2 + \rho^{\beta n} \ . \tag{1.12}$$

Considérons maintenant pour n quelconque une branche inverse $k \in \mathcal{H}^n$ et soit k^* sa miroir. Remarquons d'abord que

$$|(k^*)'(0)| = |k'(0)|.$$

De plus, comme les trois systèmes et leurs duaux sont définis sur des intervalles $|\mathcal{I}| \leq 1$ et $|\mathcal{I}^*| \leq 1$ respectivement, on a par la propriété de distorsion

$$\frac{1}{(LL^*)^{1/2}} \leq \frac{|k(\mathcal{I})|}{|k^*(\mathcal{I}^*)|} = \frac{|k(\mathcal{I})|}{|k'(0)|}\frac{|(k^*)'(0)|}{|k^*(\mathcal{I}^*)|} \leq (LL^*)^{1/2} \ . \tag{1.13}$$

Ainsi, comme les intervalles $k^*(\mathcal{I}^*)$ sont deux à deux disjoints dans $J^*(h,\eta)$, alors en utilisant (1.13, 1.12) on obtient pour $\eta \leq \rho^{\beta n}$

$$|J(h,\eta)| \leq (LL^*)^{1/2}|J^*(h,\eta)| \ll (LL^*)^{1/2}(L\eta/2 + \rho^{\beta n}) \ll \rho^{\beta n}\,. \tag{1.14}$$

■

5 Fonctions coût

L'étude d'un algorithme mène à lui associer une variable aléatoire $C(\cdot,\cdot)$ appelée "coût total" de l'algorithme qui permettent d'exprimer les différents paramètres qui interviennent dans son exécution comme le nombre d'itérations ou le nombre d'occurrence d'un digit fixé. Nous nous intéressons ici aux coût additifs définis sur les quotients partiels.

Plus précisément : étant donnée une fonction $c : \mathbb{Z}_+^* \times \{-1,+1\} \to \mathbb{R}_+$ si pour une entrée (p,q), lorsque l'algorithme effectue $P(p,q)$ opérations, c'est-à-dire engendre $P(p,q)$ digits, le coût total $C(\cdot,\cdot)$ sera la somme de $P(p,q)$ variables aléatoires discrètes :

$$C(p,q) = \sum_{i=1}^{P(p,q)} c(m_i,\varepsilon_i).$$

Dans le cas de l'algorithme standard, la suite $(m_i,\varepsilon_i) \equiv (m_i,1)$ et les variables c sont définies sur $\mathbb{Z}_+^*$.

Définition 1.3 (**Moment fort d'ordre** k)**.** *on dit que le coût c admet des moments forts d'ordre $k \geq 1$ s'il existe $\nu > 0$ tel que*

$$\sum_{(m,\varepsilon)\in\mathbb{Z}_+^*\times\{-1,+1\}} (c(m,\varepsilon))^k m^{-2+\nu} < \infty.$$

Exemple 1.1. 1) *Si $c(m,\varepsilon) = O(\log(m))$: il est clair que pour ce cas le coût c possède des moments forts de tout ordre.*

2) *Si $c(m,\varepsilon) = O(m^{-\nu'+1/k})$ pour un certain $k \geq 1$ et un certain $\nu' > 0$ alors le coût c admet des moments forts jusqu'à l'ordre k.*

Pour simplifier les notations, nous écrirons $c(m)$ au lieu de $c(m,\varepsilon)$.

La terminologie de moment fort d'ordre k est justifiée par la remarque suivante :

Remarque 1.7. *La condition de croissance modérée définie dans [3] implique qu'il existe $\nu > 0$ tel que*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*} e^{\nu c(m)} m^{-2+\nu} < \infty.$$

Ceci bien sûr entraîne que le coût c admet des moments forts de tous les ordres.

Remarque 1.8. *Rappelons d'abord que les systèmes $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}, T_{\mathcal{O}}$ sont complets par morceaux sur des partitions définies par les digits qu'engendre chaque algorithme correspondant, et que chacun de ses systèmes admet une mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue avec une densité bornée sur $\mathcal{I}$ (voir remarque 1.3).*

Considérons par exemple la partition liée au système $T_{\mathcal{G}}$. posons

$$c(m_{\mathcal{G}}(x)) = c(m) \quad \textit{pour} \quad x \in \mathcal{I}_m = (1/(m+1), 1/m],$$

et notons $\mu_{1,\mathcal{G}}$ la mesure invariante de densité $f_{1,\mathcal{G}}$.
Lorsque le coût c admet des moments forts d'ordre k, on a pour tout $\ell \leq k$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}} \big(c(m_{\mathcal{G}}(x)\big)^{\ell} d\mu_{1,\mathcal{G}(x)} &\leq \sup_{\mathcal{I}} f_{1,\mathcal{G}} \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*} \int_{\mathcal{I}_m} (c(m))^{\ell}\ dx \\ &\leq \sup_{\mathcal{I}} f_{1,\mathcal{G}} \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*} (c(m))^{\ell} |\mathcal{I}_m| \\ &\leq \sup_{\mathcal{I}} f_{1,\mathcal{G}} \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*} (c(m))^{\ell} m^{-2} < \infty.\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la définition usuelle de moment d'ordre k de la variable aléatoire $c(m_{\mathcal{G}}(x))$ par rapport à la mesure de probabilité $\mu_{1,\mathcal{G}}$.

5.1 Coûts diophantiens

Notons comme dans la section 3

$$h_{m,\varepsilon}(x) = \frac{1}{m+\varepsilon x}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \text{ et, } \varepsilon \in \{-1,+1\},$$

les branches inverses des systèmes $T_{\mathcal{G}},\ T_{\mathcal{K}},\ T_{\mathcal{O}}$.

On considérera dorénavant que la fonction coût c est définie sur l'ensemble des branches inverses $\mathcal{H}$ en posant

$$c(h_{(m,\varepsilon)}) := c(m,\varepsilon) \in \mathbb{R}^+.$$

Pour une trajectoire rationnelle $h_1, \cdots, h_P \in \mathcal{H}$ on note c la fonction définie sur $\mathcal{H}^*$ par :

$$c(h_1 \circ \cdots \circ h_P) = \sum_{i=1}^{P} c(h_i).$$

Elle vérifie la propriété d'additivité

$$c(h \circ k) = c(h) + c(k), \forall\ h, k \in \mathcal{H}^*.$$

Nous supposons par la suite que tous les coûts sont additifs et consacrons cette section à l'étude des coûts diophantiens (Cf. Définition 0.1).

Lemme 1.2. *Un coût diophantien est non-réseau.*

Démonstration : Si on suppose que c est diophantien et réseau de profondeur L et de shift L_0. Il existe, d'une part, et par la définition 0.1, un sous-ensemble fini $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ et $\beta_0 \geq 1$ tels que, pour toutes suites $(\tau_k) \subset \mathbb{R}$, $(t_k) \subset \mathbb{R}$, $(\theta_k) \subset [0, 2\pi)$, avec $\lim_{k\to\infty} |\tau_k| = \infty$ et $\sup_k |t_k| < \infty$, et pour tous $M \geq 1$ et $\beta \geq \beta_0$, il existe $k \geq 1$ et $x \in \mathcal{I}$ de période minimale p vérifiant

$$\operatorname{dist}\big(\tau_k[\beta \log|\tau_k|]c(h_x) + t_k[\beta \log|\tau_k|] \log|h'_x| + p\theta_k,\ 2\pi\mathbb{Z}\big) \geq \frac{Mp}{|\tau_k|^\eta}.$$

où $h_x \in \mathcal{H}_0^p$ vérifie $h_x(x) = x$.
Et d'autre part, et par la propriété d'additivité du coût c, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$c(h_x) = c(h_{x,0} \circ h_{x,1} \circ \cdots \circ h_{x,p}) = \sum_{i=1}^{p} c(h_{x,i}) = qL + pL_0.$$

Choisissons (t_k) et (θ_k) les suites identiquement nulles.

Si $c(h_x) = 0$: on obtient une contradiction immédiate pour n'importe quelle suite (τ_k) car

$$\operatorname{dist}\big(0,\ 2\pi\mathbb{Z}\big) = 0.$$

Si $c(h_x) \neq 0$, on pose $\tilde{L} = qL + pL_0$ et on remplace (τ_k) par la suite $2\pi z_k/\tilde{L}$ avec (z_k) une suite d'entiers tendant vers $+\infty$. On obtient une contradiction car $z_k[\beta \log|z_k|] \in \mathbb{Z}$ donc

$$\operatorname{dist}\big(2\pi z_k[\beta \log|z_k|],\ 2\pi\mathbb{Z}\big) = 0.$$

Remarque 1.9. *Contrairement au cas étudié par I.Melbourne [29], nos fonctions poids $|h'|$ ne sont pas des fonctions à valeurs entières et localement constantes, c'est la raison pour laquelle on ne peut les éliminer de la condition diophantienne.*

5.2 Coûts fortement diophantiens

Rappelons qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$ est dit *diophantien* d'exposant $\eta_0 \geq d$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $(q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

$$\inf_{p \in \mathbb{Z}} \left| p - \sum_{k=1}^{d} x_k q_k \right| \geq \frac{M}{(\max_k |q_k|)^{\eta_0}} \,.$$

Pour tout $\eta_0 > d$, l'ensemble des vecteurs diophantiens d'exposant η_0 est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}^d$ (voir par exemple [12]). (Pour $\eta_0 < d$, l'ensemble est vide.)

Définition 1.4 (coût fortement diophantien). *Soit $\eta > 0$. Un coût c est dit fortement diophantien d'exposant η, s'il existe $\eta > \eta_0 \geq 2$ et quatre points périodiques $x_j \in (0,1)$, $j \in \{1,2,3,4\}$ de T avec des orbites deux à deux disjointes et de périodes minimales respectives $p_j \geq 1$ et $h_j(x_j) = x_j$ pour $\in \mathcal{H}^{p_j}$, tels que, si on pose :*

$$c_j := c(h_j), \quad a_j = \log |h_j'|, \quad j \in \{1,2,3,4\},$$

$$L_{1j} := p_j c_1 - p_1 c_j \,, \quad \widehat{L}_{1j} := p_j a_1 - p_1 a_j \,, \quad j = 2,3,4 \,,$$

alors $L_{13} \neq 0$, $\widehat{L}_{12} \neq 0$ et L_{12}/L_{13} est diophantien d'exposant η. Si de plus on définit

$$\widetilde{L}_{jk} := L_{1j}\widehat{L}_{1k} - \widehat{L}_{1j} L_{1k},$$

on a, $\widetilde{L}_{23} \neq 0$ et le vecteur

$$\left(\frac{\widetilde{L}_{34}}{\widetilde{L}_{23}}, \frac{\widetilde{L}_{24}}{\widetilde{L}_{23}} \right)$$

est diophantien d'exposant η_0.

Remarque 1.10. *La définition 1.4 utilise quatre points périodiques, comme dans [29], avec plus de complications dues au fait que les nombres $\widehat{L}_j$ ne sont pas des entiers (voir aussi la remarque 1.9 ci-dessus). Dans le cas le plus simple étudié par Dolgopyat [17] et Naud [30] il est possible de formuler une condition diophantienne faisant intervenir seulement deux points périodiques.*

Remarque 1.11. *Si un point $x_j \in (0,1)$ est de période p_j, il admet un développement en périodique en fractions continues :*

$$x_j = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{\ddots\, m_{p_j} + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{\ddots + m_{p_j} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

D'autre part, comme on l'a vu dans la section 4.2, une branche de profondeur p_j est une homographie $(a_j x + b_j)/(c_j x + d_j)$ avec a_j, b_j, c_j, d_j des entiers qui dépendent des entiers $p_1, \cdots, p_j$.

Ainsi, chaque point x_j dans la définition de coût fortement diophantien n'est autre que le nombre quadratique associé à une répétition infinie d'un p_j-uple $\underline{m} = (m_{1,j}, \cdots, m_{p_j,j})$ d'entiers positifs.

De plus, si h_j est la branche qui fixe le point périodique x_j, on a $h_j = h_{j,1} \circ \cdots \circ h_{j,p_j}$ et

$$|h_j'(x_j)| = \prod_{\ell=0}^{p_j-1} \left|h'_{j,p_j-\ell}(\underline{h}_{\ell-1}(x_j))\right| = \prod_{\ell=0}^{p_j-1} \left(h_{j,p_j-\ell}(\underline{h}_{\ell-1}(x_j))\right)^2,$$

avec $\underline{h}_{\ell-1} = h_{j,p_j-(\ell-1)} \circ \cdots \circ h_{j,p_j}(x_j)$. D'où,

$$|h_j'(x_j)| = \prod_{\ell=0}^{p_j-1} (\underline{h}_\ell(x_j))^2.$$

Ainsi, chaque nombre a_j de la définition 1.4 s'écrit

$$a_j = 2 \sum_{\ell=0}^{p_j-1} \log x_{j,\ell},$$

où les $x_{j,\ell} = \underline{h}_\ell(x_j)$ sont les nombres quadratiques associés aux permutations circulaires de $\underline{m}$.

Finalement, tout nombre c_j de la définition 1.4 est le coût total associé au nombre rationnel dont le développement en fractions continues est donné par $\underline{m}$ et est de profondeur p_j.

Exemple 1.2. *Soit c un coût et supposons qu'il existe quatre entiers $m_j > 0$, tels que, si on pose*

$$a_j = \log(1 + (m_j^2 - m_j\sqrt{m_j^2 + 4})/2),$$

on ait

$$c(m_2) \neq c(m_3), \quad a_1 \neq a_2, \quad (c(m_1) - c(m_2))(a_1 - a_3) \neq (c(m_1) - c(m_3))(a_1 - a_2),$$

et que de plus, le quotient $\dfrac{c(m_1) - c(m_2)}{c(m_1) - c(m_3)}$ *et le vecteur*

$$\left(\frac{(c(m_1) - c(m_4))(a_1 - a_3) - (c(m_1) - c(m_3))(a_1 - a_4)}{(c(m_1) - c(m_2))(a_1 - a_3) - (c(m_1) - c(m_3))(a_1 - a_2)}, \right.$$
$$\left. \frac{(c(m_1) - c(m_4))(a_1 - a_2) - (c(m_1) - c(m_2))(a_1 - a_4)}{(c(m_1) - c(m_2))(a_1 - a_3) - (c(m_1) - c(m_3))(a_1 - a_2)}\right)$$

soient diophantiens d'exposant $\eta_0 < \eta$. *Alors le coût* c *est fortement diophantien d'exposant* η.

Le lemme suivant donne une condition suffisante sur les points x_j pour que le coût c soit diophantien.

Lemme 1.3. *Si le coût* c *est fortement diophantien d'exposant* η *et* $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ *est le plus petit sous-ensemble tel que chaque* $h_j \in \mathcal{H}_0^{p_j}$ *pour* $j = 1, 2, 3, 4$, *le coût* c *est diophantien d'exposant* η.

Faisons quelques commentaires avant de donner la démonstration du lemme. Nous avons d'abord le corollaire suivant qui montre que les coûts diophantiens sont génériques.

Corollaire 1.4. *Fixons* $\eta > 2$ *et choisissons quatre points* $x_j = h_j(x_j) \in (0, 1]$ *de* T, *avec des orbites disjointes deux à deux (et* $h_j \in \mathcal{H}^{p_j}$*). Alors en dehors d'un ensemble négligeable par rapport à Lebesgue on a pour tout* (c_1, c_2, c_3, c_4) *dans* $\mathbb{R}_+^4$, *tout coût* c *tel que* $c(h_j) = c_j$ *est diophantien d'exposant* η. *On peut ainsi, pour* $\eta > 2$, *dire que la condition diophantienne sur le coût* c *est générique.*

Démonstration du corollaire 1.4 : si on suppose que c est non diophantien, par le lemme 1.3 on a : pour tout (c_1, c_2, c_3, c_4) tels que $c_j = c(h_j)$ il existe

$$A(c_1, c_2, c_3, c_4) := L_{12}/L_{13} \quad \text{et} \quad V(c_1, c_2, c_3, c_4) := (\widetilde{L}_{34}/\widetilde{L}_{23}, \widetilde{L}_{24}/\widetilde{L}_{23})$$

tels que ou bien A ou bien V est non diophantien. Or les ensembles de tels A, V sont de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ (respect.)

Posons,

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (c_1, c_2, c_3, c_4) & \longmapsto & A(c_1, c_2, c_3, c_4) := L_{12}/L_{13}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} V: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (c_1, c_2, c_3, c_4) & \longmapsto & V(c_1, c_2, c_3, c_4) := (\widetilde{L}_{34}/\widetilde{L}_{23}, \widetilde{L}_{24}/\widetilde{L}_{23}), \end{array}$$

$$\overline{D}_1 := \{y = A(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4) \in \mathbb{R};\ y \ \text{ est non diophantien}\},$$

$$\overline{D}_2 := \{(y_1, y_2) = V(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4) \in \mathbb{R}^2;\ (y_1, y_2) \ \text{ est non diophantien}\},$$

$$A^{-1}(\overline{D}_1) = \text{l'image inverse de } \overline{D}_1 \quad \text{et} \quad V^{-1}(\overline{D}_2) = \text{l'image inverse de } \overline{D}_2.$$

Il s'agit donc de montrer que $Leb(A^{-1}(\overline{D}_1)) = Leb(V^{-1}(\overline{D}_2) = 0$.
Montrons que $Leb(A^{-1}(\overline{D}_1)) = 0$ (l'idée étant la même pour $Leb(V^{-1}(\overline{D}_2))$

En utilisant le théorème de Fubini et la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad \chi_{A^{-1}(\overline{D}_1)}(x) = \chi_{\overline{D}_1}(A(x))$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
Leb(A^{-1}(\overline{D}_1)) &= \int_{\mathbb{R}^4} \chi_{A^{-1}(\overline{D}_1)}(c_1, c_2, c_3, c_4)\ dc_1\ dc_2\ dc_3\ dc_4 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{A^{-1}(\overline{D}_1)}(c_1, c_2, c_3, c_4)\ dc_2 \right) dc_1\ dc_3\ dc_4 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\overline{D}_1}(A(c_1, c_2, c_3, c_4))\ dc_2 \right) dc_1\ dc_3\ dc_4
\end{aligned}$$

Posons maintenant $y(c_2) = A(c_1, c_2, c_3, c_4)$. Alors

$$dy = \partial A_{c_2}(c_1, c_2, c_3, c_4)\ dc_2$$

avec

$$\partial A_{c_2}(c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{-p_1}{p_3 c_1 - p_1 c_3} \not\equiv 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Leb(A^{-1}(\overline{D}_1)) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\overline{D}_1}(A(c_1, c_2, c_3, c_4))\ dc_2 \right) dc_1\ dc_3\ dc_4 \\
&= \frac{1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\overline{D}_1}(y)\ dy \right) |p_3 c_1 - p_1 c_3|\ dc_1\ dc_3\ dc_4 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Démonstration du Lemme 1.3 : Supposons que le coût c est fortement diophantien et soit $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ le plus petit ensemble contenant tous les points des orbites des quatre points périodiques x_j, et soit $\beta_0 \geq 1$ fixé. Soit $\eta > \eta_0$ et supposons que c n'est pas diophantien d'exposant η. Il en résulte l'existence d'un $\beta \geq \beta_0$, $D \geq 1$, de suites τ_k, θ_k, et t_k, et d'entiers $\ell_{k,j} = \ell_j(t_k, \tau_k)$ tels que, en posant $n_k = [\beta \log |\tau_k|]$,

$$| - t_k n_k \log |h'_j| - \tau_k n_k c(h_j) - p_j \theta_k - 2\pi \ell_{k,j}| < D|\tau_k|^{-\eta}\,,\ j = 1, 2, 3, 4\,,\ \forall k\,. \tag{1.15}$$

Posons pour $j = 2$, 3, 4

$$\tilde{\ell}_{k,j} = p_j \ell_{k,1} - \ell_{k,j} p_1 \in \mathbb{Z}.$$

On trouve en éliminant θ_k de l'équation (1.15) une constante $\widetilde{D} \geq 1$, indépendante de k, telle que

$$|\tau_k n_k L_{1j} + t_k n_k \widehat{L}_{1j} - 2\pi \tilde{\ell}_{k,j}| < \widetilde{D}|\tau_k|^{-\eta}\,,\ j = 2, 3, 4\,,\ \forall k\,. \tag{1.16}$$

Rappelons maintenant que $L_{13} \neq 0$ et séparons deux cas :

I) $t_k = 0$: dans ce cas on peut supposer (quitte à prendre k assez grand, c'est à dire, τ_k plus grand) que $\tilde{\ell}_{k,3} \neq 0$.

De plus, à partir de (1.16) on déduit aisément que

$$\tilde{\ell}_{k,3} = O(|\tau_k| \log |\tau_k|).$$

Par conséquent, l'élimination de $\tau_k n_k$ de (1.16) pour $j = 2$ et $j = 3$ donne $\widetilde{D}$ (indépendant de k) tel que

$$\left| \tilde{\ell}_{k,3} \frac{L_{12}}{L_{13}} - \tilde{\ell}_{k,2} \right| < \widetilde{D}|\tau_k|^{-\eta}\,,\ \forall k\,.$$

En utilisant encore une fois l'argument $\tilde{\ell}_{k,3} = O(|\tau_k| \log |\tau_k|)$ on obtient que la borne ci-dessus contredit l'hypothèse diophantienne sur L_{12}/L_{13} lorsque $k \to \infty$.

II) $t_k \neq 0$: dans ce cas on élimine $t_k n_k$ de (1.16), pour avoir

$$|\tau_k n_k (L_{12} \widehat{L}_{1j} - \widehat{L}_{12} L_{1j}) - 2\pi (\widehat{L}_{1j} \tilde{\ell}_{k,2} - \widehat{L}_{12} \tilde{\ell}_{k,j})| < \widehat{D}|\tau_k|^{-\eta}\,,\ j = 3, 4\,,\ \forall k\,.$$

En éliminant encore $\tau_k n_k$ des inégalités ci-dessus, on trouve une constante $\widehat{D}$ qui ne dépend pas de k et vérifiant

$$|\frac{1}{\widehat{L}_{12}} \big(\widetilde{L}_{24} \widehat{L}_{13} - \widetilde{L}_{23} \widehat{L}_{14}\big) \tilde{\ell}_{k,2} - \widetilde{L}_{24} \tilde{\ell}_{k,3} + \widetilde{L}_{23} \tilde{\ell}_{k,4}| < \widehat{D}|\tau_k|^{-\eta}\,, \forall k\,.$$

Puisque

$$\max(\tilde{\ell}_{k,2}, \tilde{\ell}_{k,3}) = O(|\tau_k| \log |\tau_k|),$$

et

$$\frac{1}{\widehat{L}_{12}}\big(\widetilde{L}_{24}\widehat{L}_{13} - \widetilde{L}_{23}\widehat{L}_{14}\big) = \widetilde{L}_{34},$$

la borne sur $k \to \infty$ contredit notre hypothèse diophantienne sur $\big(\frac{\widetilde{L}_{34}}{\widetilde{L}_{23}}, \frac{\widetilde{L}_{24}}{\widetilde{L}_{23}}\big)$.

■

Chapitre 2

Opérateurs de transfert

1 Introduction

Nous avons exhibé dans le chapitre précédent les différentes propriétés des systèmes euclidiens. Nous nous situons dans ce chapitre dans le cadre plus général des systèmes de bonne classe T sur un intervalle $\mathcal{I}$ où on note toujours $\mathcal{H}$ l'ensemble des branches inverses de T. Afin de pouvoir analyser les perturbations de l'opérateur de transfert, nous aurons souvent besoin d'exiger que le système vérifie la condition *UNI* du chapitre précédent. À la fin du chapitre, nous nous situerons dans le cadre des coûts diophantiens.

L'opérateur de transfert est un opérateur qui décrit l'action du système T sur les densités des mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue : si on se donne une densité initiale $f_0 \in L^1(\mathcal{I})$, on obtient, après l'application de T, une densité f_1. L'opérateur de transfert noté $\mathbf{H}_1$ est l'opérateur défini sur $L^1(\mathcal{I})$ et qui associe, à toute densité initiale f_0, la densité f_1.

La densité invariante (voir remarque 1.3) est un point fixe de l'opérateur $\mathbf{H}_1$:

$$\mathbf{H}_1 \tilde{f} = \tilde{f}.$$

De plus, l'opérateur de Koopman, défini sur L^∞ par $f \mapsto f \circ T$, est l'adjoint de l'opérateur $\mathbf{H}_1$, c'est à dire, pour toutes fonctions $f \in L^1(\mathcal{I})$ et $g \in L^\infty(\mathcal{I})$ on a

$$\int_{\mathcal{I}} g(\mathbf{H}_1 f) dx = \int_{\mathcal{I}} (g \circ T) f \, dx. \tag{2.1}$$

Si on décompose l'intégrale (2.1) en une somme sur la partition $\{\mathcal{I}_m\}_{\mathcal{M}}$ donnée par le système T et en rappelant que T est complet par morceaux, les changements de variables $x = h(y)$ donnent la formule explicite de l'opérateur $\mathbf{H}_1$:

$$\mathbf{H}_1 f(x) = \sum_{h \in \mathcal{H}} |h^{'}(x)| \cdot f \circ h(x), \tag{2.2}$$

qui est conservée pour tous les itérés de $\mathbf{H}_1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{H}_1^n f(x) = \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h^{'}(x)| \cdot f \circ h(x). \tag{2.3}$$

C'est usuellement pour montrer les propriétés ergodiques des mesures invariantes qu'intervient l'opérateur de transfert. Dans le chapitre 3 nous allons voir le rôle de cet opérateur dans la détermination du comportement des fonctions génératrices. Les différentes perturbations nous mènent à faire agir l'opérateur sur deux espaces différents.

Pour toute fonction $u : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{\mathcal{I}} |u|, \ \|u\|_1 = \|u'\|_\infty.$$

La deuxième égalité donne une semi-norme, on définit alors la norme $\|\cdot\|_{1,1}$ par

$$\|u\|_{1,1} = \|u\|_\infty + \|u\|_1.$$

Notons $\mathrm{Lip}(u)$ la plus petite constante de Lipschitz de u. Si u n'est pas Lipschitz, on pose $\mathrm{Lip}(u) = \infty$.

Considérons les espaces :

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_{1,1},$$

$$\mathrm{Lip}(\mathcal{I}) := \{u : \mathcal{I} \to \mathbb{C} \mid \|u\|_{L^\infty} + \mathrm{Lip}(u) < \infty\}.$$

Rappelons que d'après la définition 1.2 de système de bonne classe, il existe $0 < \sigma_0 < 1$ tel que

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h^{'}|^\sigma < \infty \quad \text{pour tout réel } \sigma > \sigma_0. \tag{2.4}$$

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $s = \sigma + it$ et $\sigma > \sigma_0 > 0$, on définit l'opérateur par

$$\mathbf{H}_s[u](x) := \sum_{h \in \mathcal{H}} |h^{'}(x)|^s \cdot u \circ h(x). \tag{2.5}$$

qui est borné sur les deux espaces $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$.

Si on considère un coût additif c (voir Chapitre 1, §6) on peut alors définir l'opérateur pondéré à deux paramètres $(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$ avec $\Re s > \sigma_0$:

$$\mathbf{H}_{s,i\tau}[u](x) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp[i\tau c(h)] \cdot |h^{'}(x)|^s \cdot u \circ h(x). \tag{2.6}$$

Grâce à l'additivité du coût c, les itérés de $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ conservent la même forme. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{H}^n_{s,i\tau}[u](x) = \sum_{h\in\mathcal{H}^n} \exp[i\tau c(h)] \cdot |h^{'}(x)|^s \cdot u \circ h(x).$$

Si bien que le quasi-inverse $\mathcal{R}_{s,i\tau} := (I - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}$ peut, lorsque la norme de l'opérateur $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ est strictement inférieure à 1, être écrit sous-la forme

$$\mathcal{R}_{s,i\tau}[u](x) := \sum_{h\in\mathcal{H}^\star} \exp[i\tau c(h)] \cdot |h^{'}(x)|^s \cdot u \circ h(x),$$

où $\mathcal{H}^*$ est l'ensemble de toutes les branches de toutes profondeurs.

2 Propriétés spectrales des opérateurs de transfert

Nous rappelons dans cette section les propriétés spectrales classiques que vérifie l'opérateur de transfert et ses perturbations. Ainsi dans les preuves des différentes propositions nous insisterons uniquement sur les points qui illustrent l'utilisation des hypothèses sur les moments forts de la fonction coût.

Définition 2.1 (Rayon spectral essentiel). *On appelle rayon spectral essentiel d'un opérateur borné sur un espace de Banach, le plus petit réel positif Re tel que tout élément du spectre de module supérieur est une valeur propre isolée de multiplicité finie.*

Définition 2.2 (Quasi-compacité). *Un opérateur borné sur un espace de Banach est dit quasi-compact si son rayon spectral essentiel est strictement inférieur à son rayon spectral.*

Définition 2.3 (Dualité). *Le dual d'un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continue $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ muni de la topologie de convergence faible : une suite $\mu_n : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ converge faiblement vers $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ si pour tout $u \in \mathcal{B}$, la suite $\mu_n(u)$ converge vers $\mu(u)$ dans $\mathbb{C}$.*

Le dual $\mathcal{L}^* : \mathcal{B}^* \longmapsto \mathcal{B}^*$ d'un opérateur borné $\mathcal{L} : \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}$ est défini par

$$(\mathcal{L}^*\mu)(u) = \mu(\mathcal{L}u), \quad \textit{pour tout} \quad \mu \in \mathcal{B}^* \quad \textit{et} \quad u \in \mathcal{B}.$$

Nous aurons besoin des notations suivantes.

Notations :

• Pour tout $(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$, $Sp(\mathbf{H}_{s,i\tau})$ désignera le spectre de $\mathbf{H}_{s,i\tau}$, $R_{s,i\tau}$ son rayon spectral et $Re_{s,i\tau}$ son rayon spectral essentiel.

• Lorsque $\tau = 0$, on notera $\mathbf{H}_{s,0}$ par $\mathbf{H}_s$. Par la suite on écrira $s = \sigma + it$, avec $\sigma,\ t \in \mathbb{R}$.

• Pour toute fonction $(s, i\tau) \to f_{s,i\tau}$ on notera $f_{s,o} = f_s$ et les dérivées partielles et dérivées secondes partielles seront notées $\partial_s f_{s,i\tau},\ \partial_{i\tau} f_{s,i\tau},\ \partial^2_s f_{s,i\tau}$ et $\partial^2_{i\tau} f_{s,i\tau}$.

La proposition suivante décrit le spectre de l'opérateur $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ lorsqu'il agit sur les deux espaces $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$. Pour plus de détails, voir [3, Proposition 0] où l'opérateur $\mathbf{H}_{s,w}$ agit sur l'espace $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ pour $(s,w) \in \mathbb{C}^2$ et $\Re s > \sigma_0$, $\Re w$ proche de zéro. Les résultats se démontrent de façon analogue pour l'espace $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$.

Proposition 2.1. *Soient $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe et ρ son taux de contraction. Soit $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ l'opérateur de transfert (2.6) agissant sur l'un des espaces $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ ou $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$.*

(1) *Soit $\rho < \hat{\rho} < 1$. Pour tout $(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$ avec $\Re s = \sigma > \sigma_0$, on a $Re_{s,i\tau} < R_{s,i\tau} \leq \hat{\rho} \cdot R_\sigma$. En particulier $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ est quasi-compact uniformément en $\Im s = t$ et τ.*

(2) *Pour $\sigma > \sigma_0$, l'opérateur $\mathbf{H}_\sigma$ admet une unique valeur propre λ_σ de module maximal, qui est réelle et simple. Le reste du spectre est contenu dans un disque de rayon $r_\sigma < \lambda_\sigma$ (on dit dans ce cas que λ_σ est une valeur propre dominante). La fonction propre associée f_σ est strictement positive et le vecteur propre associé $\hat{\mu}_\sigma$ de l'opérateur dual $\mathbf{H}_\sigma^*$ est une mesure de Radon positive. Normalisons $\hat{\mu}_\sigma$ et f_σ par $\hat{\mu}_\sigma[1] = 1$ et $\hat{\mu}_\sigma[f_\sigma] = 1$. Alors, la mesure $\mu_\sigma := f_\sigma \hat{\mu}_\sigma$ est une mesure de probabilité. En particulier, $\hat{\mu}_1$ est la mesure de Lebesgue, avec $\lambda_1 = 1$.*

(3) *Pour $(s, i\tau)$ dans un voisinage de $(1, 0)$ dans $\mathbb{C} \times i\mathbb{R}$, la valeur propre dominante $\lambda_{s,i\tau}$ et la fonction propre associée sont bien définies et analytiques en s, uniformément en $i\tau$ et sont indépendantes du choix des espaces $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ ou $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$.*

Remarque 2.1. *i) La fonction $s \mapsto \mathbf{H}_{s,i\tau}$ est analytique sur l'ensemble $\Re s > \sigma_0$ uniformément en $i\tau$.*

ii) Supposons que le coût c admet des moments forts à l'ordre k pour un certain $k \geq 1$. Il existe $\nu_1 \in (0, 1/2)$ tel que la fonction $i\tau \mapsto \mathbf{H}_{s,i\tau}$ est k-fois différentiable, et ce uniformément par rapport à $s \in \mathcal{U}_1 := \{s \| s-1| < \nu_1\}$.

En effet, pour tout $\ell \leq k$, la dérivée d'ordre ℓ de la fonction $i\tau \mapsto \mathbf{H}_{s,i\tau}$ qui n'est autre que

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} (c(h))^\ell e^{i\tau c(h)} |h'(x)|^s,$$

est un opérateur borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ (respectivement sur $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$) et est continu en $(s, i\tau) \in \mathcal{U} \times \mathbb{C}$.

Notons $r_\sigma := \sup\{|\lambda| | \lambda \in Sp(\mathbf{H}_\sigma) \text{ et } \lambda \neq \lambda_\sigma\}$. Le corollaire suivant donne une décomposition spectrale qui est une conséquence de la proposition 2.1.

Corollaire 2.2 (Décomposition spectrale). *Considérons l'opérateur $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ défini sur l'un des espaces $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ ou $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$. Il existe $\mathcal{W}_1 \subset \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$ un voisinage de $(1, 0)$ tel que, pour tout $(s, i\tau) \in \mathcal{W}_1$, on a*

$$\mathbf{H}_{s,i\tau} = \lambda_{s,i\tau} \mathbf{P}_{s,i\tau} + \mathbf{N}_{s,i\tau},$$

où $\mathbf{P}_{s,i\tau}$ *est la projection spectrale associée à* $\lambda_{s,i\tau}$ *et le rayon spectral de* $\mathbf{N}_{s,i\tau}$ *est* $\leq \theta$*, avec* $r_\sigma < \theta < 1$*.*

De plus, si le coût c *admet des moments forts à l'ordre* k *pour un certain* $k \geq 1$*, les fonctions* $i\tau \mapsto \mathbf{P}_{s,i\tau}$*,* $i\tau \mapsto \log \lambda_{s,i\tau}$ *et* $i\tau \mapsto \partial_s \lambda_{s,i\tau}$ *sont* k*-fois différentiables uniformément en* s*. Leurs dérivées d'ordre* $1 \leq \ell \leq k$*, en tant que fonctions de* s*, sont analytiques et ce uniformément par rapport à tout* τ *fixé.*

Démonstration. Soit λ_1 la valeur propre dominante de $\mathbf{H}_1$. Il existe alors $\tilde{r}_1 > 0$ tel que le cercle $C(\lambda_1, \tilde{r}_1)$ vérifie $C(\lambda_1, \tilde{r}_1) \cap Sp(\mathbf{H}_1) = \varnothing$.

Le projecteur spectral vérifie [27, Chap. III.6]

$$\mathbf{P}_{s,i\tau} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\lambda_1, \tilde{r}_1)} \mathcal{R}_{s,i\tau}(z) dz,$$

où

$$\mathcal{R}_{s,i\tau}(z) := (zI - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}.$$

De plus, pour tout $z \in C(\lambda_1, \tilde{r}_1)$ on a (corollaire 5.4 dans [10])

$$\mathcal{R}_{s,i\tau}(z) = \mathcal{R}_1(z) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left| \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{s,i\tau} \right| \cdot \mathcal{R}_1(z) \right]^n,$$

ce qui, d'après la remarque 2.1.*ii*), montre que la fonction $i\tau \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}(z)$ est k-fois différentiable sur un voisinage de zéro. Par conséquent, la fonction $i\tau \mapsto \mathbf{P}_{s,i\tau}$ est k-fois différentiable.

Soit maintenant f_1 la fonction propre de $\mathbf{H}_1$ associée à λ_1. Pour tout $(s, i\tau)$ dans un voisinage de $(1, 0)$, la valeur propre $\lambda_{s,i\tau}$ est définie par

$$\lambda_{s,i\tau} = \frac{\mathbf{H}_{s,i\tau}[\mathbf{P}_{s,i\tau}(f_1)]}{\mathbf{P}_{s,i\tau}(f_1)}.$$

Ceci est dû au fait que les opérateurs $\mathbf{P}_{s,i\tau}$ et $\mathbf{N}_{s,i\tau}$ vérifient

$$\mathbf{P}_{s,i\tau} \circ \mathbf{N}_{s,i\tau} = \mathbf{N}_{s,i\tau} \circ \mathbf{P}_{s,i\tau} = 0.$$

Ainsi $i\tau \mapsto \lambda_{s,i\tau}$ est k-fois différentiable en tant que compositions de fonctions k-fois différentiables.

■

Définition 2.4 (Cohomologie). *Deux fonctions* $f_1 : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *et* $f_2 : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *sont dites cohomologues s'il existe une fonction* $\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $h \in \mathcal{H}$ *on ait :*

$$f_1(x) = f_2(x) + \psi(x) - \psi \circ h(x).$$

Par la suite, on appelle *fonction pression* la fonction $\sigma \to \log \lambda_\sigma$ où λ_σ est la valeur propre dominante de l'opérateur $\mathbf{H}_\sigma$.

La proposition suivante (voir aussi [3]) donne des propriétés supplémentaires sur la valeur propre dominante :

Proposition 2.3. *Soient $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe, $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ l'opérateur de transfert associé avec $(s, i\tau)$ dans un voisinage de $(1,0)$ dans $\mathbb{C} \times i\mathbb{R}$. Soit $\lambda_{s,i\tau} = e^{\Lambda_{s,i\tau}}$ sa valeur propre dominante avec $\Lambda_{s,i\tau}$ sa fonction pression. Lorsque $\tau = 0$, on note $\Lambda_s = \Lambda_{s,o}$.*

1.a) [Dérivées de la pression.] *La dérivée en 1 de la fonction pression $s \mapsto \Lambda_s$ est l'opposé de l'entropie de Kolmogorov du système dynamique (T, μ_1) :*

$$\Lambda'(1) = -\int_{\mathcal{I}} \log |T'(x)| \, f_1(x) \, dx < 0.$$

(1.b) *Si le coût c n'est pas constant et admet des moments forts d'ordre 2, la dérivée seconde $\partial^2_{i\tau}\Lambda_{(s,i\tau)}$ est strictement positive en $(1,0)$.*

2) [La Fonction $i\tau \mapsto \tilde{\sigma}(i\tau)$.] *Il existe $\nu_0 > 0$ proche de 0 et une unique fonction continue $\tilde{\sigma} : [-\nu_0, +\nu_0] \to \mathbb{C}$ tels que $\lambda(\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau) = 1$ et $\tilde{\sigma}(0) = 1$. De plus, si c à des moments forts à l'ordre k pour un certain $k \geq 1$, la fonction $i\tau \longmapsto \tilde{\sigma}(i\tau)$ est k-fois différentiable.*

*Démonstration.*1.a) Résulte directement de la dérivation par rapport à s de l'égalité $\mathbf{H}_{s,i\tau} f_{s,i\tau} = \lambda_{s,i\tau} f_{s,i\tau}$, d'une intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\widehat{\mu}_1$, et de la formule de Rohlin.

(1.b) En faisant agir son opérateur sur l'espace des fonctions à variation bornée, A.Broise [10, Prop.6.1] montre le résultat suivant : la fonction $i\tau \mapsto \Lambda_{s,i\tau}$ est convexe en $(1,0)$ si et seulement si le coût c n'est pas cohomologue à une constante. Les systèmes que nous considérons étant complets par morceaux, la démonstration s'adapte aussi aux espaces $C^1(\mathcal{I})$ et $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$. Ainsi, il existe $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et une constante K telle pour toute branche inverse $h \in \mathcal{H}$ et tout $x \in \mathcal{I}$ on ait

$$c(h) = u(x) - u \circ h(x) + K.$$

En appliquant cette égalité au point fixe de chaque branche h on trouve que c est constante.

2) L'assertion 1.a) assure que $\partial_s \lambda_s(1,0) \neq 0$, et le théorème des fonctions implicites assure l'existence de la fonction $\tilde{\sigma}$.

■

Remarque 2.2. *Comme conséquence directe du corollaire 2.2 on a l'existence de $\widehat{M_1} > 0$ tel que pour tout $(s, i\tau) \in \mathcal{W}_1$*

$$\|(I - \mathbf{N}_{s,i\tau})^{-1}\|_{1,1} \leq \widehat{M}_1.$$

De plus, il existe $a > 0$, $t_2 > 0$ et $\nu_0 > 0$ tels que l'ensemble

$$\mathcal{A}_1 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C}\ ; |\Re s - 1| \leq a,\ |\Im s| \leq t_2,\ |\tau| \leq \nu_0\}$$

est inclus dans $\mathcal{W}_1$. Par conséquent, le quasi-inverse $\mathcal{R}_{s,i\tau}$ de $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ vérifie, pour tout $(s, i\tau) \in \mathcal{A}_1$,

$$\mathcal{R}_{s,i\tau} = \frac{\lambda(s, i\tau)}{1 - \lambda(s, i\tau)}\, \mathbf{P}_{s,i\tau} + (I - \mathbf{N}_{s,i\tau})^{-1}, \tag{2.7}$$

et a pour seule singularité, dans $\mathcal{A}_1$, un pôle simple en chaque point $(s = \tilde{\sigma}(i\tau), i\tau)$, avec comme résidu, l'opérateur non nul

$$\mathbf{R}(i\tau) := \frac{-1}{\partial_s \lambda(\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau)}\, \mathbf{P}_{\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau}.$$

2.1 Apériodicité, convexité

Dans cette section nous expliquons comment la propriété *UNI* permet de montrer l'analyticité de la fonction $(s, i\tau) \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ pour $0 < |\Im s| \leq t_0$ avec $t_0 > 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$.

Commençons d'abord par un premier lemme où quitte à remplacer l'opérateur $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ par son normalisé

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau} u := \mathbf{H}_{s,i\tau}(u \cdot f_\sigma)/(\lambda_\sigma f_\sigma), \tag{2.8}$$

la preuve est donnée dans [3] et est analogue à celle de la Proposition 6.2 dans [31] ou Proposition 9 dans [40].

Lemme 2.4 (Apériodicité). *Soient $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe et $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ l'opérateur de transfert associé agissant sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ ou $\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$. Soit $(t_o, \tau_0) \neq (0, 0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe $\sigma > \sigma_0$ tel que

$$R_\sigma \in \mathrm{Sp}\mathbf{H}_{\sigma + it_0, i\tau_0}.$$

(b) Il existe u avec $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $|u| = 1$, telle que, pour tout n, et tout $h \in \mathcal{H}^n$

$$|h'(x)|^{it_0} \cdot \exp(i\tau_0 c(h)) \cdot u \circ h(x) = u(x), \forall x \in \mathcal{I}\,. \tag{2.9}$$

Le second résultat (voir [10, Prop. 6.1]) donne une condition nécessaire et suffisante sur la pression pour que la fonction poids $(-\log|T'|)$ ne soit pas cohomologue à une constante. On peut aussi se référer à [3, §3.5] pour plus de détails.

Lemme 2.5 (Convexité absolue). *Soient $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe et $q \in \mathbb{R}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) La dérivée seconde de $i\tau \to \Lambda(1+i\tau, 0)$ s'annule en $\tau = 0$.

(b) Il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ strictement positive et une constante $\alpha > 0$ telles que, pour tout entier positif n et tout $h \in \mathcal{H}^n$,

$$|h'(x)| \cdot u \circ h(x) = \alpha^n \cdot u(x).$$

Les deux conditions (b) des deux lemmes ci-dessus sont du même type et fortement liées à la conjugaison du système avec un système affine par morceaux. La proposition suivante nous montre que cette conjugaison ne peut avoir lieu si le système vérifie la condition *UNI* (voir Chapitre 1.4).

Notons que, dans [3] les lemmes 2.4 et 2.5 sont énoncés avec une hypothèse de croissance modérée sur les coûts qui implique que le coût admet des moments forts de tout ordre. Ici, on ne met pas d'hypothèse sur les moments car le deuxième paramètre $i\tau$ est purement imaginaire.

Proposition 2.6. *Soient $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe vérifiant la condition UNI et $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ l'opérateur de transfert associé agissant sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Alors*

(i) L'application T n'est pas $\mathcal{C}^2$ conjuguée à une application affine par morceaux.

(ii) La pression $\Lambda_{1+i\tau,0}$ est absolument convexe en $\tau = 0$, c'est à dire $\Lambda''(1) > 0$. De plus, si la fonction coût a des moments forts à l'ordre 2, pour tous $q \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, la pression $i\tau \mapsto \Lambda_{1+i\tau q, i\tau r}$ est absolument convexe en $\tau = 0$.

(iii) a) Si $\tau \neq 0$ et le coût c est non-réseau, on a, $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{1,i\tau})$

b) Pour tous $t \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, on a, $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{1+it,i\tau})$.

Remarque 2.3. *Nous verrons dans la section suivante comment sont utilisées les assertions (i) et (iii) pour montrer les propriétés analytiques du quasi-inverse $\mathcal{R}_{s,i\tau}$.*

Comme dans la proposition 2.3(1.b), l'hypothèse sur les moments forts dans l'assertion (ii) ci-dessus est nécessaire pour que la dérivée seconde de la pression $i\tau \mapsto \Lambda_{s,i\tau}$ soit bien définie. La convexité de la pression en $i\tau$ implique que, lorsque le coût c a des moments forts à l'ordre 2, la fonction $i\tau \mapsto \widetilde{\sigma}(i\tau)$ est absolument convexe en $\tau = 0$. Ceci, permet de calculer les paramètres de $\tilde{\mathbb{E}}_N$ et $\tilde{\mathbb{V}}_N$ définis dans (0.4) et (0.5) (voir [3, Lemme 12]) avec des constantes $\mu(c)$ et $\delta(c) > 0$ données par

$$\mu(c) = 2\widetilde{\sigma}'(0) \quad \text{et} \quad \delta^2(c) = 2\widetilde{\sigma}''(0).$$

Démonstration de la proposition 2.6. (i) Si T est $\mathcal{C}^2$ conjuguée à une application affine par morceaux, il existe alors $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathcal{H}^n$, il existe deux constantes $d_1 := d_1(h) \neq 0$ et $d_2 := d_2(h)$ telles que

$$u \circ h(x) = d_1 u(x) + d_2,$$

autrement dit, il existe $\hat{d}_1 > 0$, tel que

$$|h^{'}(x)| \cdot |u^{'} \circ h(x)| = \hat{d}_1 |u^{'}(x)|.$$

D'où, en posant $\widehat{u} := \log |u^{'}|$

$$\log |h^{'}(x)| + \widehat{u} \circ h(x) = \log \hat{d}_1 + \hat{u}(x),$$

une dérivation des deux cotés donne

$$\frac{h^{''}(x)}{h^{'}(x)} = -h^{'}(x) \cdot \widehat{u}^{'}(h(x)) + \widehat{u}^{'}(x).$$

Par conséquent,

$$|\Psi^{'}_{h,k}(x)| = \left| h^{'}(x)\widehat{u}^{'}(h(x)) - k^{'}(x)\widehat{u}^{'}(k(x)) \right|,$$

où $\Psi_{h,k}$ la fonction définie dans (1.4).

Rappelons maintenant la définition de $\Delta(h,k)$ dans 1.5. L'égalité ci-dessus implique que pour tout $0 < \rho < \widehat{\rho} < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toutes $h, k \in \mathcal{H}^n$ on a

$$\Delta(h,k) \ll \widehat{\rho}^n,$$

ce qui signifie que l'ensemble $J(h, \widehat{\rho}^n)$ est de mesure de Lebesgue 1 et contredit ainsi la condition *UNI(a)*.

(ii) Si la pression n'était pas convexe en $\tau = 0$, l'assertion du lemme 2.5(b) serait vérifiée, ce qui donnerait une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et une constante $\alpha > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathcal{H}^n$ on ait

$$|h'| \cdot u \circ h = \alpha^n u.$$

Par conséquent le système T serait $\mathcal{C}^2$-conjuguée à une application affine par morceaux, ce qui contredirait l'assertion (i).

De plus, si on suppose que la fonction coût admet des moments forts à l'ordre 2 et que la fonction $i\tau \mapsto \Lambda_{1+i\tau q, i\tau r}$ n'est pas convexe en $\tau = 0$, on obtient (voir [3, lemme 7(ii)]) une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, une constante $\alpha > 0$ telles que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathcal{H}^n$ et $x \in \mathcal{I}$, on a

$$|h'|^q \cdot \exp(rc(h)) \cdot u \circ h = \alpha^n u.$$

Ceci entraîne que

$$q \log |h'| + rc(h) = n \log \alpha - \log u \circ h + \log u.$$

En posant $\hat{u} = u/q$ on obtient

$$\frac{h''(x)}{h'(x)} = \hat{u}'(x) - h'(x)\hat{u}' \circ h(x),$$

ce qui, comme dans la démonstration de (i), contredit la condition *UNI*.

(iii) $a)$ Supposons que la fonction coût c est non-réseau et qu'il existe $\tau_0 \neq 0$ tel que $1 \in Sp(\mathbf{H}_{1,i\tau_0})$. Par le lemme 2.4$(b)$, pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a

$$\exp(i(\tau_0 c(h)) = 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse que c est non-réseau.

$b)$ Supposons qu'il existe $t_0 \neq 0$ et $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tels que la valeur 1 soit dans le spectre de $\mathbf{H}_{1+it_0,i\tau_0}$. D'après le lemme 2.4, ceci revient à dire qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ à valeurs réelles, telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathcal{I}$ on ait

$$t_0 \log |h'(x)| + \tau_0 c(h) = \varphi(x) - \varphi \circ h(x).$$

ce qui, comme dans la démonstration de (i) et (ii), contredit la condition *UNI*.

■

3 Estimations sur le quasi-inverse

Le but de cette section est d'étudier l'analyticité du quasi-inverse $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau} = (I - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}$, lorsque le paramètre τ parcourt la droite réelle. Commençons par décrire les différentes régions de perturbation, puis étudions chacune d'elles séparément. Posons $s = \sigma + it$.

Régions "compactes" :

Commençons d'abord par l'ensemble $\mathcal{A}_1$ défini dans la remarque 2.2 :

$$\mathcal{A}_1 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R} \; ; |\sigma - 1| \leq a \; ; \; |t| \leq t_2 \text{ et } |\tau| \leq \nu_0\},$$

où $a > 0$, $t_2 > 0$ et $\nu_0 > 0$ sont proches de zéro.

On considère également les ensembles

$$\mathcal{A}_2 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R} \; ; |\sigma - 1| \leq a_2 \; ; \; t_2 \leq |t| \leq t_0 \text{ et } |\tau| \leq \nu_0\},$$

$$\mathcal{A}_3 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R} \; ; |\sigma - 1| \leq \tilde{a}_2 \; ; \; |t| \leq t_0 \text{ et } \nu_0 \leq |\tau| \leq 2\},$$

où $a_2 > 0$ et $\tilde{a}_2 > 0$ qui seront définis dans le lemme 2.7 et $t_0 > 0$ qui sera défini dans la proposition 2.8.

Régions "libres" :

$$\mathcal{A}_4 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R} \; ; |\sigma - 1| \leq a_1 \; ; \; |t| \geq t_0 \text{ et } \tau \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{A}_5 := \{(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R} \; ; \; \sigma \geq 1 - \frac{\xi_0}{|\tau|^\alpha} \; ; \; |t| \leq t_0 \text{ et } |\tau| \geq 2\},$$

avec $a_1 > 0$ qui sera défini dans la proposition 2.8 . Les constantes $\xi_0 \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$ qui seront définis dans la proposition 2.13.

3.1 $\mathcal{R}_{s,i\tau}$ dans les régions compactes

Dans cette partie nous utilisons essentiellement les résultats de la section précédente, en particulier, la proposition 2.6 et la perturbation de parties finies du spectre.

Lemme 2.7. *Soit $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe vérifiant la condition UNI.*

(i) [Perturbations dans $\mathcal{A}_1$.] *La fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ est méromorphe sur $\mathcal{A}_1$. Elle admet un seul pôle en $(s = \tilde{\sigma}(i\tau), i\tau)$. De plus, pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, il existe $\tilde{a} \leq a$ tel que, pour $\sigma = 1 \pm \tilde{a}$ et pour tout $|t| \leq t_2$, il existe $\widehat{M_2}$ vérifiant, $\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_{1,1} \leq \widehat{M_2}$.*

(ii) [Perturbations dans $\mathcal{A}_2$.] *Pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, il existe $a_2 > 0$ tel que la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ soit analytique sur l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} \; ; \; |\sigma - 1| \leq a_2, \; |t| \in [t_2, t_0]\}$.*

(iii) [Perturbations dans $\mathcal{A}_3$.] *Si le coût c vérifie l'hypothèse de non-réseau, pour tout $|\tau| \in [\nu_0, 2]$, il existe $\tilde{a}_2 > 0$ tel que la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ soit analytique sur l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} \; ; \; |\sigma - 1| \leq \tilde{a}_2, \; |t| \in [t_2, t_0]\}$.*

Démonstration. (i) Soit $(s, i\tau) \in \mathcal{A}_1$. On a

$$\mathcal{R}_{s,i\tau} = \frac{\lambda_{s,i\tau}}{1 - \lambda_{s,i\tau}} \mathbf{P}_{s,i\tau} + (1 - \mathbf{N}_{s,i\tau})^{-1},$$

qui admet un pôle simple en tout $(s = \tilde{\sigma}(i\tau), i\tau) \in \mathcal{A}_1$.

Fixons $0 < \tilde{a} \leq a$. La fonction $i\tau \longmapsto \tilde{\sigma}(i\tau)$ étant continue et $\tilde{\sigma}(0) = 1$, on peut choisir $\nu_0 > 0$ petit de façon que, pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, on ait $|\Re\tilde{\sigma}(i\tau) - 1| \leq \tilde{a}/2$.

D'autre part, si on pose $\mathcal{B}_1 = \{s \in \mathbb{C}, \Re s = 1 \pm \tilde{a}, \; |t| \leq t_2\}$, et

$$l := \inf_{\mathcal{B}_1} \left| \frac{\lambda_{s,i\tau} - 1}{s - \tilde{\sigma}(i\tau)} \right| > 0,$$

la valeur propre dominante $\lambda_{s,i\tau}$ pour $|\tau| \leq \nu_0$ et $s \in \mathcal{B}_1$, vérifie

$$|\lambda_{s,i\tau} - 1| \geq l|s - \widetilde{\sigma}(i\tau)| \geq l|\Re s - \Re\widetilde{\sigma}(i\tau)| \geq l\tilde{a}/2 > 0.$$

Par conséquent, il existe $\widehat{M_2}$ tel que, pour tout $s \in \mathcal{B}_1$, on a $\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_{1,1} \leq \widehat{M_2}$.

(ii) Soit $t_2 \leq |t| \leq t_0$. La proposition 2.6$(iii.b)$ affirme que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \neq 0$, on a $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{1+it,i\tau})$. Ceci, est en particulier vrai pour tout $|\tau| \leq \nu_0$. L'opérateur $\mathbf{H}_{1+it,i\tau}$ étant quasi-compact, la théorie de perturbation de parties finies du spectre [27, Chapitre III.6] montre qu'il existe $a_2 > 0$ suffisamment petit tel que l'on ait, $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{s,i\tau})$, pour $|\Re s - 1| \leq a_2$. Ce qui, avec la remarque 2.1.i), donne l'analyticité de $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ sur $\mathcal{A}_2$.

(iii) Soit $|\tau| \in [\nu_0, 2]$. La proposition 2.6$(iii.a)$ affirme que pour un coût c non-réseau, la valeur 1 n'appartient pas au spectre de $\mathbf{H}_{1,i\tau}$. Encore une fois, la perturbation de parties finies du spectre assure que, pour $\bar{a}_2$ et t_3 suffisamment petits, on a $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{s,i\tau})$ pour $|\Re s - 1| \leq \bar{a}_2$ et $|t| \leq t_3$.

Pour $t_3 \leq |t| \leq t_0$, on utilise la proposition 2.6$(iii.b)$, qui assure que $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{1+it,i\tau})$. Par la même théorie de perturbation que précédemment, on a l'existence de $\hat{a}_2 > 0$ tel que $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{s,i\tau})$ pour $|\Re s - 1| \leq \hat{a}_2$ et $t_3 \leq |t| \leq t_0$.

On prend finalement, $\tilde{a}_2 = \min(\bar{a}_2, \hat{a}_2)$ pour avoir $1 \notin Sp(\mathbf{H}_{s,i\tau})$ pour $(s, i\tau) \in \mathcal{A}_3$, et par conséquent, l'analyticité de $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ sur le rectangle $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ |\sigma - 1| \leq \tilde{a}_2\ , |t| \leq t_0\}$. ■

3.2 $\mathcal{R}_{s,i\tau}$ dans les régions libres

3.2.1 Perturbation dans $\mathcal{A}_4$

On suppose dans cette partie que l'opérateur $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ défini dans la section agit sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Le résultat suivant a été démontré par V.Baladi et B.Vallée [3, §3]. On se propose ici de rappeler les lemmes principaux et les grandes lignes de la démonstration.

Introduisons d'abord sur $\mathcal{C}^1$ la norme $\|\cdot\|_{1,t}$ qui est équivalente à $\|\cdot\|_{1,1}$

$$\|u\|_{1,t} := \|u\|_\infty + \frac{\|u\|_1}{|t|}.$$

Proposition 2.8. *Soit $(\mathcal{I}, T)$ un système de bonne classe vérifiant la condition UNI, et soit ρ son taux de contraction.*
Il existe $t_0 > 0$, tel que pour tout $0 < r < 1/5$, il existe un voisinage $\Sigma_1 =]1 - a_1, 1 + a_1[$ de 1, et $M > 0$ tels que, pour tout s avec $\Re s \in \Sigma_1$ et $|\Im s| \geq t_0 > 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on ait

$$\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_{1,t} \leq M \cdot |t|^r\,. \tag{2.10}$$

Remarque 2.4. *Dans [3] le théorème est énoncé avec une hypothèse de croissance modérée qui entraîne que le coût admette des moments forts de tout ordre. Ici encore, aucune hypothèse sur les moments forts n'est nécessaire, pour la même raison que précédemment : le deuxième paramètre $i\tau$ est purement imaginaire.*

Remarque 2.5. *Contrairement à ce qui est affirmé dans [3] on ne peut pas poser $t_0 = \rho^{-2}$, or ceci n'est pas exacte. Notons en particulier que la seconde et la troisième inégalité de (2.24), ne sont pas valides si on remplace $M_0(M_1)^k$ par M_0, ce qui implique que t_0 doit être pris suffisamment grand.*

La preuve se fait en deux étapes. La première étape consiste à montrer qu'il existe un certain rang n_0 pour lequel la norme dans $L^2((0,1))$ de l'opérateur normalisé $\widetilde{\mathbf{H}}^{n_0}_{s,i\tau}$, défini dans la section 2.1, décroît exponentiellement en n_0. Dans la deuxième étape, et en utilisant essentiellement la décomposition spectrale de l'opérateur $\mathbf{H}_1$, on transforme cette décroissance en une estimation par rapport à la norme infinie de l'opérateur et sa dérivée qui permettent d'avoir (2.10).

Par la suite, Σ_1 désignera un sous-ensemble compact de $]\sigma_0, +\infty[$ avec σ_0 le réel défini dans 2.4. La notation $A(x) \ll B(x)$ signifie qu'il existe une constante K telle que pour tout x, $A(x) \leq KB(x)$.

Les deux lemmes suivants sont démontrés dans l'appendice.

Lemme 2.9. *i) Pour tout Σ_1, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(s, i\tau)$ tel que $\sigma \in \Sigma_1$ et tout $u \in \mathcal{C}^1$, on ait*

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^n_{s,i\tau} u\|_1 \leq C\left(|s|\,\|u\|_\infty + \rho^n\,\|u\|_1\right), \quad \forall n \geq 1. \tag{2.11}$$

ii) Si, pour $\sigma \in \Sigma_1$, on note

$$A_\sigma := \lambda^{1/2}_{2\sigma-1}/\lambda_\sigma,$$

alors, pour tout $\sigma \in \Sigma_1$, on a

$$\mu_\sigma[J] \ll A^k_\sigma |J|^{1/2}, \quad \forall J = \bigcup_{h\in\mathcal{J}} h(\mathcal{I}), \text{ avec } \mathcal{J} \subset \mathcal{H}^k.$$

De plus, pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et tout entier $k \geq 1$, on a

$$||\widetilde{\mathbf{H}}^k_\sigma[u]||^2_\infty \ll A^{2k}_\sigma\ \|\widetilde{\mathbf{H}}^k_1[|u|^2]\|_\infty\,. \tag{2.12}$$

avec une constante absolue qui ne dépend que de Σ_1.

iii) Pour tout $t_1 > 0$ et tout Σ_1, il existe $M_0 > 0$ tel que pour tout $(s, i\tau)$ avec $\sigma \in \Sigma_1$ et $|t| \geq t_1$ on ait

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}\|_{1,t} \leq M_0.$$

Remarque 2.6. *: D'après la proposition 2.1, la fonction $\sigma \mapsto A_\sigma$ est continue et $A_1 = 1$.*

Rappelons maintenant la fonction $\Psi_{h,k}$ introduite dans (1.4) au chapitre 1 :

$$\Psi_{h,k}(x) := \log \frac{|h'(x)|}{|k'(x)|},$$

pour tout $h, k \in \mathcal{H}^*$ de même profondeur.

Soit $\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}$ l'opérateur normalisé (2.8) de $\mathbf{H}_{s,i\tau}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\widetilde{\mathbf{H}}^n_{s,i\tau}[u](x)\right|^2 = \frac{1}{\lambda_\sigma^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n} \exp(i\tau(c(h)-c(k))) \cdot \exp(it\Psi_{h,k}(x)) \cdot R_{h,k}(x). \tag{2.13}$$

avec

$$R_{h,k}(x) = |h'(x)|^\sigma |k'(x)|^\sigma \frac{1}{f_\sigma^2(x)} (u \cdot f_\sigma) \circ h(x) (\bar{u} \cdot f_\sigma) \circ k(x)\,. \tag{2.14}$$

Rappelons que $\Delta(h,k)$ est la quasi-distance définie dans (1.5) et décomposons la somme (2.13) en deux sommes : pour tous $0 < \beta < 1$, $(s, i\tau) \in \mathcal{A}_3$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, on pose,

$$S_n^-(s, i\tau, u, \beta) := \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n \\ \Delta(h,k)\le\rho^{\beta n}}} \exp(i\tau(c(h)-c(k))) \cdot \exp(it\Psi_{h,k}(x)) \cdot R_{h,k}(x),$$

et

$$S_n^+(s, i\tau, u, \beta) := \sum_{\substack{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n \\ \Delta(h,k)\ge\rho^{\beta n}}} \exp(i\tau(c(h)-c(k))) \cdot \exp(it\Psi_{h,k}(x)) \cdot R_{h,k}(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la notation $\lceil x \rfloor$ désignera le plus petit entier supérieur ou égal à x. Rappelons que Σ_1 est un sous-ensemble compact de $[\sigma_0, \infty[$.

Lemme 2.10. *l'intégrale, par rapport à la mesure de Lebesgue, de la somme (2.13) décroît exponentiellement en n. Plus précisément ;*

1)*Supposons que le système T vérifie l'hypothèse UNI(a) et soit I_n^- l'intégrale de la somme $S_n^-(s, i\tau, u, \beta)$. Pour tous Σ_1, $\sigma \in \Sigma_1$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 < \beta < 1$ on a*

$$|I_n^-| = |I_n^-(s, i\tau, u, \beta)| \ll (\rho^{\beta/2} A_\sigma)^n \|u\|_\infty^2.$$

2) *Supposons que le système vérifie la condition UNI(b). Posons* $n_0 = n_0(t)$ *avec* $n_0(t) = \lceil \log|t|/|\log\rho| \rfloor$. *Pour tous* Σ_1, $\sigma \in \Sigma_1$, $|t| = |\Im s| \geq 1/\rho^2$ *et tout* $0 < \beta < 1/2$, *l'intégrale* $I^+_{n_0}$ *de la somme* $S^+_n(s, i\tau, u, \beta)$ *pour* $n = n_0$, *vérifie*

$$|I^+_{n_0}| = |I^+_{n_0}(s, i\tau, u, \beta)| \ll \rho^{(1-2\beta)n_0} \|u\|^2_{1,t}.$$

Rappelons que $A_1 = 1$ et que la fonction $\sigma \mapsto A_\sigma$ est continue. Il existe alors un voisinage réel Σ_2 tel que, pour tout $2/5 < \beta < 1/2$, on ait

$$A_\sigma \cdot \rho^{\beta/2} \ll \rho^{1-2\beta}. \tag{2.15}$$

Ceci, avec le lemme 2.10 donnent une première estimation sur la norme de l'opérateur $\widetilde{\mathbf{H}}^{n_0}_{s,i\tau}$ dans $L^2(\mathcal{I})$:

Corollaire 2.11. *Pour tout* $|t| > 1/\rho^2$ *fixé, on pose* $n_0 = \lceil \log|t|/\log\rho \rfloor$. *Soit* $2/5 < \beta < 1/2$. *Il existe alors un voisinage réel* Σ *de* 1 *tel que pour tout* $\sigma \in \Sigma$ *on ait*

$$A_\sigma \leq \rho^{1-5\beta/2} \ . \tag{2.16}$$

De plus,

$$\int_{\mathcal{I}} |\widetilde{\mathbf{H}}^{n_0}_{s,i\tau}[u](x)|^2 \, dx \ll \rho^{(1-2\beta)n_0} \|u\|^2_{1,t}. \tag{2.17}$$

Démonstration de la Proposition 2.8 : On commence par estimer la norme infinie. La quasi-compacité de l'opérateur normalisé $\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{1,1}$ donne

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^k_1[|u|^2]\|_\infty = \int_{\mathcal{I}} |u|^2(x) \, dx + O(r^k_1)\|u^2\|_{1,1}. \tag{2.18}$$

où r_1 est le rayon spectral sous-dominant de $\mathbf{H}_1$ ($r_1 := \sup\{\lambda \in Sp\mathbf{H}_1 \ ; \ |\lambda| < 1\}$).

Soit $n \geq n_0 = \lceil \log|t|/|\log\rho| \rfloor$ et posons $u = |\widetilde{\mathbf{H}}^{n_0}_{s,i\tau}[v]|$. En combinant (2.12), (2.18), (2.17) et (2.11) on trouve ;

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{H}}^n_{s,i\tau}[v]\|^2_\infty &\ll \|\widetilde{\mathbf{H}}^{n-n_0}_\sigma[u]\|^2_\infty \\ &\ll A^{2(n-n_0)}_\sigma \|\widetilde{\mathbf{H}}^{n-n_0}_1[|u|^2]\|_\infty \\ &\ll A^{2(n-n_0)}_\sigma \left[\rho^{(1-2\beta)n_0} + r^{n-n_0}_1 \, |t|\right] ||v||^2_{1,t} \, . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Si on prend maintenant $n_1 = (1+\tilde{\eta})n_0$ avec $\tilde{\eta} = (1-2\beta)\log\rho/\log r_1$, on obtient

$$\rho^{(1-2\beta)n_0} = r^{n_1-n_0}. \tag{2.20}$$

Par conséquent,

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n_1}[v]\|_\infty^2 \ll A_\sigma^{2\tilde{\eta}n_0}\rho^{(1-2\beta)n_0}(1+|t|)\|v\|_{1,t}^2,$$

d'où,

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n_1}[v]\|_\infty \ll A_\sigma^{\tilde{\eta}n_0}\rho^{(1-\beta)n_0}\|v\|_{1,t}. \tag{2.21}$$

Pour $2/5 < \beta < 1/2$, on a $(1-2\beta)(5\beta-2) < 2(1-\beta)$. Il est donc possible de choisir $d > 0$ tel que,

$$0 < \tilde{\eta}(5\beta-2) < d < 2(1-\beta).$$

D'autre part, d'après (2.15), pour tout $\sigma \in \Sigma_2$, on a

$$\max(\lambda_\sigma^{1+\tilde{\eta}}, A_\sigma^{\tilde{\eta}}) \ll \rho^{-\tilde{\eta}(5\beta/2-1)} \leq \rho^{-d/2}. \tag{2.22}$$

En substituant (2.22) dans (2.21), on trouve, pour $(s, i\tau) \in \mathcal{A}_4$ avec $\sigma \in \Sigma_2$,

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n_1}[v]\|_\infty \ll \rho^{n_1 b}\|v\|_{1,t}, \qquad \text{avec} \qquad b := \frac{2(1-\beta)-d}{2(1+\tilde{\eta})} > 0.$$

D'où, en utilisant le lemme 2.9(i) on a, pour $n_2 = 2n_1$,

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n_2}\|_{1,t} \ll \rho^{n_2 b/2}\,. \tag{2.23}$$

Soit $t_0 > t_1$ assez grand et fixons $|t| \geq t_0$. Pour tout $n = kn_2 + \ell$ avec $\ell < n_2(t)$, le lemme 2.9.iii) et l'inégalité (2.23) donnent

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n}\|_{1,t} \leq M_0^\ell \|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n_2}\|_{1,t}^k \leq M_2 M_1^k \rho^{bkn_2/2} \leq M_2 M_1^k\ \rho^{bn/2}\ \rho^{-bn_2/2}, \tag{2.24}$$

D'autre part,

$$bn_2/2 = (2(1-\beta)-d)n_0/2,$$

ainsi

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n}\|_{1,t} \leq M_2\ M_1^k\ |t|^{\tilde{r}}\ \gamma^n \tag{2.25}$$

avec $\tilde{r} := \dfrac{2(1-\beta)-d}{2} > 0$, $\ b := \dfrac{\tilde{r}}{1+\tilde{\eta}}$ et $\gamma := \rho^{b/2}$.

Si on prend t_0 suffisamment grand, on obtient

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^{n}\|_{1,t} \leq M_3 \cdot |t|^r \cdot \gamma^n,$$

avec $r = 2\tilde{r} > 0$.

Ce qui signifie que, pour l'opérateur non normalisé, on obtient

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^n_{s,i\tau}\|_{1,t} \leq M_3 \cdot |t|^r \cdot \gamma^n \cdot \lambda^n_\sigma, \qquad \forall n,\ \forall |t| \geq t_0.$$

Finalement, d'après (2.22), pour tout $\sigma \in \Sigma_2$, on a

$$\gamma\lambda_\sigma \leq \rho^{\frac{r}{2(1+\tilde{\eta})}} \cdot \rho^{-\frac{r}{4(1+\tilde{\eta})}} = \rho^{\frac{r}{4(1+\tilde{\eta})}} = \hat{\gamma} < 1\,.$$

Ce qui achève la preuve avec $M := M_3/(1-\hat{\gamma})$.

■

3.2.2 Perturbation dans $\mathcal{A}_5$

Dans cette partie nous considérons que $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ agit sur l'espace $\mathrm{Lip}(I)$.

Par définition, l'opérateur normalisé vérifie

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^m_{1+it,i\tau}(u)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty},$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}^*_+$, et tous réels t et τ.

Le lemme suivant est prouvé dans l'appendice.

Lemme 2.12. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $K(t) \geq 1$ tel que pour tout $m \in \mathbb{Z}^*_+$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$*

$$\mathrm{Lip}(\widetilde{\mathbf{H}}^m_{1+it,i\tau}(u)) \leq K(t)\|u\|_{L^\infty} + K\rho^m \mathrm{Lip}(u). \tag{2.26}$$

Il nous sera plus utile d'utiliser la norme suivante sur $\mathrm{Lip}(I)$:

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}} = \max\big\{\|u\|_{L^\infty}, \frac{1}{2\sup_{|t|\leq t_0} K(t)}\mathrm{Lip}(u)\big\}\,.$$

En effet, en rappelant que pour $h \in \mathcal{H}^m$ on a $\sup|h'| \leq C\widehat{\rho}^m$ et en posant $n_0 = [\log K/\log(1/\rho)] + 1$, on a pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [-t_0, t_0]$

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\mathbf{H}}^m_{1+it,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq K\rho^m + 1\,, \forall m \geq 1\,, \\ &\|\widetilde{\mathbf{H}}^m_{1+it,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1\,, \forall m \geq n_0\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition 2.13. *Supposons que la fonction coût c est diophantienne d'exposant η pour le sous-ensemble $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, et soit*

$$\alpha > \eta\big(2 + \frac{\log\sup_{\mathcal{H}_0}|h'|^{-1}}{\log(1/\rho)}\big)\big(1 + \frac{\log\sup_{\mathcal{H}_0}|h'|^{-1}}{\log(1/\rho)}\big). \tag{2.28}$$

Alors, il existe $M_0 \geq 1$, $\xi_0 \in (0,1)$, *et* $\alpha > 0$ *tels que, pour tous* $|\tau| \geq 2$, $|t| \leq t_0$ *et* $\sigma \geq 1 - \xi_0|\tau|^{-\alpha}$

$$\|\mathcal{R}_{\sigma+it,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq M_0|\tau|^{\alpha}\,. \tag{2.29}$$

Remarque 2.7. *L'hypothèse sur les moments forts de c n'est pas nécessaire. La preuve donne une valeur de* α *plus grande que l'exposant* η *de la condition diophantienne sur c.*

Remarque 2.8. *La démarche que nous allons suivre pour démontrer la proposition 2.13 est celle faite par Melbourne [29, §3] en modifiant l'argument de Dolgopyat [17]. Nous sommes amenés à reprendre toutes les étapes pour la raison suivante : les paramètres* (s', z) *de l'opérateur* $R_{s',z}$ *de [29] ne sont pas de la même nature que* $(s, i\tau)$. *En effet, le paramètre* s' *vérifie* $\Re s' = \Re s$ *et* $\Im s' = \tau$. *De plus, la partie imaginaire du deuxième paramètre* z *est dans* $[0, 2\pi[$, *ceci est dû au fait que dans [29], la fonction du temps de retour est à valeurs entières et localement constante ce qui n'est pas le cas pour les fonctions* $\log|h'|$.

Avant de donner la preuve de la proposition, et cela en modifiant l'argument de Dolgopyat [17], comme il a été adapté par Melbourne [29, §3] pour le cas d'un nombre infini de branches, on aura besoin d'autres notations et de lemmes préliminaires.

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ on pose $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0(\mathcal{H}_0)$ l'ensemble de Cantor invariant par T associé à $\mathcal{H}_0$, c'est à dire,

$$\mathcal{I}_0 = \{x \in \mathcal{I} \mid T^m(x) \in \widetilde{\mathcal{I}}_0\,, \forall m \in \mathbb{Z}_+\},$$

pour $\widetilde{\mathcal{I}}_0 = \cup_{h\in\mathcal{H}_0} h([0,1])$ et

$$\mathrm{Lip}(\mathcal{I}_0) = \{u : \mathcal{I}_0 \to \mathbb{C} \mid \mathrm{Lip}(u) < \infty\}.$$

Le lemme suivant donne une première condition nécessaire sur $\mathcal{I}_0$ pour que (2.29) soit vérifiée.

Lemme 2.14. *Soit* $\mathcal{I}_0(\mathcal{H}_0)$ *associé à l'ensemble fini* $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. *Pour tous* $\alpha_1 > 0$, $\alpha > \alpha_1\big[1 + (\log\sup_{\mathcal{H}_0}|h'|^{-1})/\log(1/\rho)\big]$ *et* $\beta_1 > 0$, *il existe* $M_0 \geq 1$ *tels que ce qui suit a lieu pour tous* $|\tau| \geq 2$ *et* $|t| \leq t_0$ *:*

Supposons que pour chaque $v \in \mathrm{Lip}(I)$ *avec* $\|v\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ *il existe* $x_0 \in \mathcal{I}_0$ *et* $j_0 \leq [3\beta_1 \log|\tau|]$ *tel que*

$$|\widetilde{\mathbf{H}}^{j_0}_{1+it,i\tau}(v)(x_0)| \leq 1 - \frac{1}{|\tau|^{\alpha_1}}\,, \tag{2.30}$$

alors, $\|\mathcal{R}_{1+it,i\tau})\|_{\mathrm{Lip}} \leq M_0|\tau|^{\alpha}$.

Remarque 2.9. *La preuve du Lemme 2.14 utilise fortement le fait que* $s = 1 + it$ *et ne devient plus valide si* $s = \sigma + it$ *avec* $\sigma < 1$.

Démonstration. (Voir Lemme 3.13 dans [29], adapté de [17, Section 7].) Dans cette preuve, on fixe t et τ et on écrit $n = n(\tau) = [3\beta_1 \log|\tau|]$.

Soit $v \in \mathrm{Lip}(I)$ tel que $\|v\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Il suffit de montrer que $(\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})^{-1}(v)$ existe et que $\|(\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})^{-1}(v)\|_{\mathrm{Lip}} \leq M_0|\tau|^{\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$ et $M_0 \geq 1$ qui ne dépendent pas de τ ou t.

Pour $j_0 = j_0(v,\tau) \leq n$ on pose comme dans (2.30),

$$u_0 = \widetilde{\mathbf{H}}^{j_0}_{1+it,i\tau}(v) \text{ et } u = \widetilde{\mathbf{H}}^{n}_{1+it,i\tau}(v)\,.$$

On a

$$\|u_0\|_{L^\infty} \leq 1$$

et (rappelons (2.27))

$$\max\{\|u_0\|_{\mathrm{Lip}}, \|u\|_{\mathrm{Lip}}\} \leq 1 + K\rho.$$

Grâce à (2.30), il existe $x_0 \in \mathcal{I}_0$ (dépendant de v) telle que, en posant $\bar{K} = 2(1 + K\rho)\sup_{|t|\leq t_0} K(t)$, on ait

$$|u_0(x)| \leq 1 - \frac{1}{2|\tau|^{\alpha_1}}\,,\ \forall x \in I_{x_0} := \{x \in I \mid |x - x_0| \leq \frac{1}{\bar{K}|\tau|^{\alpha_1}}\}. \tag{2.31}$$

Rappelons maintenant que μ_1 est la mesure de probabilité absolument continue sur $\mathcal{I}$ de densité f_1 (qui est T-invariante). Par définition, le dual de $\widetilde{\mathbf{H}}_{1,0}$ a pour point fixe μ_1.

Posons

$$m_0 = m_0(\tau) = [\frac{\alpha_1 \log|\tau| + \log(K\bar{K})}{\log(1/\rho)}] + 1,$$

alors, l'élément $h_{x_0} \in \mathcal{H}_0^{m_0}$ tel que $x_0 \in h_{x_0}([0,1))$ vérifie

$$h_{x_0}(I) \subset I_{x_0}.$$

Ainsi,

$$\mu_1(I_{x_0}) \geq \mu_1(h_{x_0}(I)).$$

D'autre part, la définition de μ_1 et la propriété de contraction des branches inverses donnent

$$\mu_1(h_{x_0}(I)) \geq K_8^{-1}|h'_{x_0}(x_0)| \geq K_8^{-1}K_4^{-m_0(\tau)} \geq K_9^{-1}|\tau|^{-\alpha_1\frac{\log(K_4)}{\log(1/\rho)}}\,, \tag{2.32}$$

avec des constantes $K_8 \geq 1$, $K_9 \geq 1$, et $K_4 = \sup_{h\in\mathcal{H}_0}\sup_{\mathcal{I}}|h'_{x_0}|^{-1} \geq 1$ sont indépendantes de τ et t.

En posant

$$\alpha_2 = \alpha_1^2\frac{\log(K_4)}{\log(1/\rho)} > 0,$$

et en décomposant $I = I_{x_0} \cup (I \setminus I_{x_0})$, on déduit de (2.31) et (2.32) que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\mu_1)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mu_1)} &\leq \big(1 - \frac{1}{2|\tau|^{\alpha_1}}\big)\mu_1(I_{x_0}) + 1 - \mu_1(I_{x_0}) \\ &= 1 - \frac{\mu_1(I_{x_0})}{2|\tau|^{\alpha_1}} \\ &\leq 1 - K_9^{-1}|\tau|^{-\alpha_2}\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Pour le reste de la preuve, on transforme d'abord l'estimation (2.33) sur L^1 en une estimation sur L^∞, puis en une estimation sur la semi-norme de Lipschitz.

Posons $n_1 = [\beta_2 \log|\tau|]$. Pour $\beta_2 > 1$ qu'on précisera par la suite, et à partir de la décomposition spectrale

$$\widetilde{\mathbf{H}}^m_{1,0}(w) = \int_{\mathcal{I}} w\, d\mu_1 + \mathbf{N}^m_{1,0}(w),$$

du corollaire 2.2 (avec $\|\mathbf{N}^m_{1,0}\|_{\mathrm{Lip}} \leq K_{10}\hat{\rho}^m$, pour un certain $\hat{\rho} < 1$ et tout $m \geq 1$), on obtient

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{H}}^{n_1(\tau)}_{1+it,i\tau}(u)\|_{L^\infty} \leq \|\widetilde{\mathbf{H}}^{n_1(\tau)}_{1,0}|u|\|_{L^\infty} &\leq \int |u|\, d\mu_1 + K_{10}\hat{\rho}^{n_1}\||u|\|_{\mathrm{Lip}} \\ &\leq 1 - K_9^{-1}|\tau|^{-\alpha_2} + (1 + K\rho)K_{10}\hat{\rho}^{n_1}\,. \end{aligned}$$

Donc, si $\beta_2 > \alpha_2$ est suffisamment grand (dépendant de ρ, $\hat{\rho}$, K_9 et K_{10}, et indépendant de τ) alors

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^{n(\tau)+n_1(\tau)}_{1+it,i\tau}(v)\|_{L^\infty} = \|\widetilde{\mathbf{H}}^{n_1(\tau)}_{1+it,i\tau}(u)\|_{L^\infty} \leq 1 - K_{11}^{-1}|\tau|^{-\alpha_2}\,,$$

pour $K_{11} \geq 1$ indépendant de τ.

En utilisant (2.26), on obtient pour $n_2(\tau) = [\beta_3 \log|\tau|]$ $\beta_3 > 3\beta_1 + \beta_2$ suffisamment grand ;

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}^{n_2(\tau)}_{1+it,i\tau}(v)\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1 - (2K_{11})^{-1}|\tau|^{-\alpha_2}\,.$$

Et comme v est arbitraire on a

$$\|(\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}^{n_2(\tau)}_{1+it,i\tau})^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2K_{11}|\tau|^{\alpha_2}.$$

Remarquons maintenant que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a pour tout opérateur $\mathbf{A}$ quelconque

$$(I - \mathbf{A}^m) = (I - \mathbf{A})\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{A}^k.$$

Ainsi,

$$(\mathrm{Id}-\mathbf{A})^{-1}=(\mathrm{Id}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{n_2-1})(\mathrm{Id}-\mathbf{A}^{n_2})^{-1},$$

Finalement, en utilisant (2.27) et la remarque ci-dessus, on trouve pour tout $\alpha>\alpha_2$ une constante $M_0\geq 1$, indépendante de τ et t, telle que

$$\|(\mathrm{Id}-\widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}\leq M_0|\tau|^{\alpha}.$$

■

Pour $\tau\in\mathbb{R}$, $u\in L^\infty(\mathcal{I})$, et pour $x\in(0,1]$ en notant par h_x l'élément de $\mathcal{H}$ tel que $x\in h_x([0,1))$, on définit l'opérateur de multiplication

$$\mathcal{M}_{t,\tau}u(x)=|T'(x)|^{it}e^{-i\tau c(h_x)}u(T(x)). \tag{2.34}$$

Le lemme suivant donne une condition nécessaire sur l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{t,\tau}$ pour que la condition sur l'ensemble invariant $\mathcal{I}_0$ citée dans le lemme précédent soit vérifiée. Nous verrons dans la démonstration finale de la proposition 2.13 que les coûts diophantiens vérifient cette condition.

Lemme 2.15. *Soit $\mathcal{I}_0(\mathcal{H}_0)$ l'ensemble de Cantor associé au sous-ensemble fini $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$. Soit $\eta_1>0$ et $\beta_0\geq 1$. Alors, pour tout $\alpha_1>\eta_1\big[2+(\log\sup_{\mathcal{H}_0}|h'|^{-1})/\log(1/\rho)\big]$, $\beta_1>\beta_0$ et $K_0\geq 1$ tels que l'assertion suivante soit vraie pour tout $|t|\leq t_0$ et tout $|\tau|\geq 2$, en posant $n(\tau)=[\beta_1\log|\tau|]$:*

Supposons qu'il existe $v_0=v_{0,\tau,t}\in\mathrm{Lip}(\mathcal{I})$ avec $\|v_0\|_{\mathrm{Lip}}\leq 1$ tel que

$$|\widetilde{\mathbf{H}}^{jn(\tau)}_{1+it,i\tau}(v_0)(x)|\geq 1-\frac{1}{|\tau|^{\alpha_1}}\,,\forall x\in\mathcal{I}_0\,,j=0,1,2\,. \tag{2.35}$$

Alors, il existe $\theta_{\tau,t}\in[0,2\pi)$ et $w_{\tau,t}:\mathcal{I}_0\to\mathbb{C}$, avec $|w_{\tau,t}(x)|=1$ pour tout x et

$$\left|\mathcal{M}^{n(\tau)}_{t,\tau}w_{\tau,t}(x)-e^{i\theta_{\tau,t}}w_{\tau,t}(x)\right|\leq\frac{K_0}{|\tau|^{\eta_1}}\,,\quad\forall x\in\mathcal{I}_0\,. \tag{2.36}$$

Démonstration. (Voir Lemme 3.12 et §3.3 dans [29] adapté de [17, §8].) Dans cette preuve, on fixe t et τ (avec $|t|\leq t_0$ et $|\tau|>0$) et on écrit n pour désigner $n(\tau)$. Soit v_0 comme dans (2.35), et posons pour $j=0,1,2$

$$v_j=\widetilde{\mathbf{H}}^{jn}_{1+it,i\tau}(v_0)\,,\qquad s_j=|v_j|.$$

Notre hypothèse (2.35) implique que

$$1-\frac{1}{|\tau|^{\alpha_1}}\leq s_j(x)\leq 1\,,\forall x\in\mathcal{I}_0\,,j=0,1,2\,. \tag{2.37}$$

on définit en particulier,

$$w_j(x) = \frac{v_j(x)}{s_j(x)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{I}_0 \quad \text{et} \quad j = 0, 1, 2,$$

qui vérifie $|w_j| \equiv 1$ sur $\mathcal{I}_0$.

Notons aussi que (2.27) implique qu'il existe une constante $K_1 \geq 1$ (qui ne dépend pas de t ou de τ) telle que $\|w_j\|_{\mathrm{Lip}(\mathcal{I}_0)} \leq K_1$ pour $j = 0, 1, 2$. En effet, $\|v_j\|_{\mathrm{Lip}(I)}$ sont uniformément bornées.

Comme

$$s_1(x) = \frac{1}{w_1(x)} \widetilde{\mathbf{H}}^n_{1+it,i\tau}(s_0 w_0)(x),$$

et

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{1,0}(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

la borne (2.37) pour $j = 1$ implique que pour tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n} \frac{f_1(h(x))}{f_1(x)} |h'(x)| \left(1 - \frac{|h'(x)|^{it}}{w_1(x)} e^{i\tau c(h)} s_0(h(x)) w_0(h(x))\right) \leq \frac{1}{|\tau|^{\alpha_1}}.$$

La partie réelle de chaque terme dans la somme précédente est non-négative. En effet comme $\left|e^{i\tau c(h)} |h'(x)|^{it} w_0(h(x))/w_1(x)\right| = 1$, on a

$$\begin{aligned} &\Re\left[\frac{f_1(h(x))}{f_1(x)} |h'(x)| \left(1 - \frac{|h'(x)|^{it}}{w_1(x)} e^{i\tau c(h)} s_0(h(x)) w_0(h(x))\right)\right] \\ &\qquad = \frac{f_1(h(x))}{f_1(x)} |h'(x)| \left(1 - s_0(h(x)) \Re\left[\frac{|h'(x)|^{it}}{w_1(x)} e^{i\tau c(h)} w_0(h(x))\right]\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que $f_1 \circ h / f_1$ est bornée (supérieurement et inférieurement) uniformément en $h \in \mathcal{H}^n$, on peut trouver une constante K_2 (ne dépendant pas de τ) telle que pour tout $h \in \mathcal{H}^n$ et tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$0 \leq 1 - s_0(h(x)) \Re\left(\frac{|h'(x)|^{it} e^{i\tau c(h)} w_0(h(x))}{w_1(x)}\right) \leq \frac{K_2}{|h'(x)||\tau|^{\alpha_1}}.$$

De plus,

$$s_0(h(x)) \leq 1,$$

d'où pour tout $h \in \mathcal{H}^n$ et tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$0 \leq 1 - \Re\left(\frac{|h'(x)|^{it} e^{i\tau c(h)} w_0(h(x))}{w_1(x)}\right) \leq \frac{K_2}{|h'(x)||\tau|^{\alpha_1}}.$$

En utilisant le fait que pour tout nombre complexe z de module 1 on a $|1-z| = \sqrt{2}(1-\Re z)^{1/2}$, on trouve une constante K_3, indépendante de τ, telle que pour tout $h \in \mathcal{H}^n$ et tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$\left| w_1(x) - |h'(x)|^{it} e^{i\tau c(h)} w_0(h(x)) \right| \leq \frac{K_3}{|h'(x)|^{1/2} |\tau|^{\alpha_1/2}}.$$

Pour le reste de la démonstration, on se restreint aux branches $h \in \mathcal{H}_0^n$. Pour de telles branches, on a pour tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$|h'(x)| \geq K_4^{-n},$$

où $K_4 = \sup_{h_0 \in \mathcal{H}_0} \sup |h_0'|^{-1} > 1$ dépend uniquement de $\mathcal{H}_0$.

Rappelons que $n = [\beta_1 \log |\tau|]$. Si α_1 et $\beta_1 > \beta_0$ vérifient

$$\alpha_1 - \beta_1 \log(K_4) > 2\eta_1 \,, \tag{2.38}$$

alors, existe une constante K_5 (indépendante de τ) telle que pour tout $x \in \mathcal{I}_0$, en posant h_x l'élément de $\mathcal{H}_0^n$ tel que $x \in h_x([0,1))$,

$$\left| w_1(T^n(x)) - |(T^n)'(x)|^{-it} e^{i\tau c(h_x)} w_0(x) \right| \leq \frac{K_5}{|\tau|^{\eta_1}} \,. \tag{2.39}$$

Un argument similaire donne K_6, indépendant de τ, tel que si (2.38) a lieu et $x \in \mathcal{I}_0$ alors

$$\left| w_2(T^n(x)) - |(T^n)'(x)|^{-it} e^{i\tau c(h_x)} w_1(x) \right| \leq \frac{K_6}{|\tau|^{\eta_1}} \,. \tag{2.40}$$

Fixons un élément arbitraire $x_0 \in \mathcal{I}_0$ et définissons $\theta_0 = \theta_0(\tau, t)$ (Rappelons que w_j dépend de τ et t et que $n = n(\tau)$) dans $[0, 2\pi)$ par

$$e^{i\theta_0} = w_0(x_0) |(T^n)'(x_0)|^{-it} e^{i\tau c(h_{x_0})} \,.$$

Soit $h_{x_0} \in \mathcal{H}_0^n$ tel que $x_0 \in h_{x_0}([0,1))$. Remarquons que si pour tout $x \in \mathcal{I}_0$ on note $x_{x_0} = h_{x_0}(T^n(x))$ on a alors

$$T^n(x) = T^n(x_{x_0}) \quad \text{et} \quad h_{x_0} = h_{x_{x_0}}.$$

Ceci, avec l'inégalité (2.39), donne

$$\begin{aligned} &|w_1(T^n(x)) - e^{i\theta_0}| \\ &\quad \leq \frac{K_5}{|\tau|^{\eta_1}} + |w_0(x_{x_0}) - w_0(x_0)| + ||(T^n)'(x_{x_0})|^{-it} - |(T^n)'(x_0)|^{-it}|. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que le système T est de la bonne classe, (c'est à dire. $|h''/h'| \leq \widehat{K}$, avec $|h'| \leq K\rho^n$), $|t| \leq t_0$ et que $|T^n(x) - T^n(x_0)| \leq 1$. Il existe alors une constante K_7 indépendante de τ et h telle que

$$\left||h'_{x_0}(T^n(x))|^{it} - |h'_{x_0}(T^n(x_0))|^{it}\right| \leq K_7 \cdot \rho^{n(\tau)}.$$

De plus, comme $|x_{x_0} - x_0| \leq \rho^n$ et si $x \in \mathcal{I}_0$ on a $x_{x_0} \in \mathcal{I}_0$ alors

$$|w_0(x_{x_0}) - w_0(x_0)| \leq K_1 \cdot \rho^{n(\tau)}\,.$$

Par conséquent, si (2.38) est vérifiée et que de plus

$$\beta_1 > \frac{\eta_1}{\log(1/\rho)}\,, \tag{2.41}$$

alors

$$|w_1(T^n(x)) - e^{i\theta_0}| \leq \frac{K_1 + K_5 + K_7}{|\tau|^{\eta_1}}\,, \quad \forall x \in \mathcal{I}_0\,. \tag{2.42}$$

Ensuite, en définissant $\theta_1 = \theta_1(t,\tau) \in [0, 2\pi)$ par

$$e^{i\theta_1} = w_1(x_0)|(T^n)'(x_0)|^{-it} e^{i\tau c(h_{x_0})},$$

et en reprenant le même argument précédent (en replaçant w_1 par w_2 et θ_0 par θ_1) alors si (2.38) et (2.41) sont vérifiée on obtient

$$\left|w_2(T^n(x)) - e^{i\theta_1}\right| \leq \frac{K_1 + K_6 + K_7}{|\tau|^{\eta_1}}\,, \quad \forall x \in \mathcal{I}_0\,. \tag{2.43}$$

En substituant (2.42) dans (2.43), on trouve pour $\theta_{t,\tau} = \theta_0 - \theta_1$ et tout $x \in \mathcal{I}_0$

$$|e^{-i\theta_{t,\tau}} w_1(T^n(x)) - w_2(T^n(x))| \leq \frac{2K_1 + K_5 + K_6 + 2K_7}{|\tau|^{\eta_1}}\,. \tag{2.44}$$

Puis, en choisissant α_1 et β_1 tels que (2.38) et (2.41) aient lieu, et en substituant (2.44) dans (2.40) on voit que la fonction $w = w_1$ satisfait la conclusion du lemme pour $K_0 = 2K_1 + K_5 + 2K_6 + 2K_7$.

■

On peut enfin démontrer la proposition :

Démonstration de la Proposition 2.13. Le résultat est trivial pour $\sigma > 1$ car dans ce cas, le rayon spectral de $\mathbf{H}_{\sigma+it,i\tau}$ est inférieur à 1. En effet la fonction $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ est décroissante et $R_{s,i\tau} \leq R_\sigma$ (voir Proposition 2.1.(1)). Pour $\sigma \leq 1$, on suit la méthode [29, §3.2, §3.3] :

Considérons d'abord le cas $\sigma = 1$, et procédons par l'absurde.

Soit $\mathcal{I}_0(\mathcal{H}_0)$ le sous-ensemble de $\mathcal{I}$ associé à l'ensemble fini non vide $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Fixons $\eta_1 > \eta$ et $\beta_0 \geq 1$. Choisissons alors α_1, $\beta_1 > \beta_0$, K_0 comme dans le Lemme 2.15. Finalement, prenons α et M_0 du Lemme 2.14 et supposons que pour chaque $M \geq M_0$ la borne

$$\|(\mathrm{Id} - \mathbf{H}_{1+it,i\tau})^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leq M|\tau|^\alpha$$

n'est pas vérifiée pour un certain $\tau = \tau(M)$ et $t = t(\tau)$ avec $|\tau| > 2$ et $|t| \leq t_0$.

En choisissant une suite $M_k \to \infty$ on obtient des suites t_k et τ_k avec $|\tau_k|$ tendant vers l'infini.

Alors le lemme 2.14 implique que l'hypothèse (2.35) du Lemme 2.15 est satisfaite pour chaque $(t, \tau) = (t_k, \tau_k)$ et pour η_1.

Ainsi, il existe $\theta_k = \theta_{\tau_k,t_k} \in [0, 2\pi)$ et $w_k = w_{\tau_k,t_k} : \mathcal{I}_0 \to \mathbb{C}$, avec $|w_k(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{I}_0$ et, en posant $n_k = [\beta_1 \log |\tau_k|]$,

$$\left|\mathcal{M}^{n_k}_{t_k,\tau_k} w_k(x) - e^{i\theta_k} w_k(x)\right| \leq \frac{K_0}{|\tau_k|^{\eta_1}}\,, \quad \forall x \in \mathcal{I}_0\,.$$

Si $x = h_x(x) \in \mathcal{I}_0$ pour $h_x \in \mathcal{H}_0^p$ a comme période minimale $p \geq 1$, alors en posant $c_x = c(h_x)$, on obtient

$$\left||h'_x|^{-it_k n_k} e^{-i\tau_k n_k c_x} w_k(x) - e^{ip\theta_k} w_k(x)\right| \leq \frac{pK_0}{|\tau_k|^{\eta_1}}\,.$$

Puisque $|w_k(x)| = 1$, on trouve des entiers $\ell_k(x) = \ell(t_k, \tau_k, x)$ avec $|\ell_k| = O(|\tau_k| \log |\tau_k|)$ et une constante $D_0 \geq 1$, indépendante de k et x, tels que

$$| - t_k n_k \log |h'_x| - \tau n_k c_x - p\theta_k - 2\pi \ell_k(x)| \leq pD_0 |\tau_k|^{-\eta_k}\,. \tag{2.45}$$

Comme $\eta_1 > \eta$ et β_0 ont été arbitrairement choisis, ceci contredit notre hypothèse diophantienne sur c lorsque $k \to \infty$.

Si $\sigma \in (1 - \xi_0|\tau|^{-\alpha_1}, 1)$, on pose $s = \sigma + it$ et on écrit

$$(\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau})^{-1} = (\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})^{-1}(\mathrm{Id} - \mathbf{A}_{s,i\tau})^{-1}$$

avec

$$\mathbf{A}_{s,i\tau} = (\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})(\mathrm{Id} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau})^{-1}.$$

Rappelons maintenant que le système T est de bonne classe (chapitre 1, section 2). On a donc $0 < \sigma_0 < 1$ vérifiant $\sum_{h\in\mathcal{H}} \sup_{\mathcal{I}} |h'|^\sigma < \infty$ pour tout $\sigma \geq \sigma_0$.
On vérifie alors par un calcul direct qu'il existe une constante $K_{12} \geq 1$ telle que

$$\|\widetilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it,i\tau} - \widetilde{\mathbf{H}}_{1+it,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq K_{12}(1-\sigma)\,, \forall\sigma \in (\sigma_0, 1]\,,\ \forall|t| \leq t_0\,,\ \forall\tau \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, en utilisant le cas $\sigma = 1$ déjà traité, on obtient $\|\mathbf{A}_{s,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq M_0 K_{12}(1-\sigma)|\tau|^\alpha$ pour tout $\sigma > 1$ et tout $|\tau| \geq 2$.

Ceci implique qu'il existe $\xi_0 \in (0,1)$ tel que

$$\|\mathbf{A}_{s,i\tau}\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1/2 \quad \text{pour} \quad \sigma \geq 1 - \xi_0|\tau|^{-\alpha},$$

ce qui achève la preuve.

■

Chapitre 3

Fonction Génératrice des moments

1 Introduction

Considérons les ensembles

$$\widetilde{\Omega} := \{(p,q) \in (\mathbb{Z}_+^*)^2,\ q/p \in (0,1]\}, \quad \Omega := \{(p,q) \in \widetilde{\Omega},\ \mathrm{pgcd}(p,q) = 1\},$$

et munissons les ensembles

$$\widetilde{\Omega}_N := \{(p,q) \in \tilde{\Omega}; p \leq N\} \quad \text{et} \quad \Omega_N := \{(p,q) \in \Omega; p \leq N\}$$

des probabilités uniformes $\widetilde{\mathbb{P}}_N$ et $\mathbb{P}_N$ respectivement.

Dans la suite , on considère la variable aléatoire $C(p,q)$ sur Ω_N (voir section 5 du chapitre 1).

Remarque 3.1. *Tout élément $(p^{'}, q^{'})$ de $\widetilde{\Omega}$ s'écrit de façon unique sous la forme (dp, dq) avec $d = \mathrm{pgcd}(p,q)$ et $(p,q) \in \Omega$. Par conséquent, l'exécution de l'un des algorithmes $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$ sur les deux paires $(p^{'}, q^{'})$ et (p,q) donne le même développement en fractions continues, et les deux coûts $C(p^{'}, q^{'})$ et $C(p,q)$ sont égaux. Ainsi, dans toute la suite nous allons restreindre notre étude à l'ensemble Ω_N. Voir aussi la remarque 3.2 dans la section suivante.*

Il est classique, pour étudier la distribution d'une variable aléatoire, de considérer sa *fonction génératrice des moments* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tau \mapsto \mathbb{E}_N[\exp(i\tau C)] := \sum_{(p,q)\in\Omega_N} e^{i\tau C(p,q)}\, \mathbb{P}_N(p,q). \tag{3.1}$$

Notons $\Phi_{i\tau}(N) = \Phi_{c,i\tau}(N)$ la valeur cumulée de $\exp(i\tau C)$ sur Ω_N, c'est-à-dire,

$$\Phi_{i\tau}(N) := \sum_{(p,q)\in\Omega_N} \exp[i\tau C(p,q)]\,, \quad \Phi_0(N) = |\Omega_N|\,. \tag{3.2}$$

D'où

$$\mathbb{E}_N[\exp(i\tau C)] = \frac{\Phi_{i\tau}(N)}{\Phi_0(N)}. \tag{3.3}$$

Nous suivons ici la méthode que B.Vallée a développée et qui consiste (voir [39]) à remplacer l'étude de la fonction génératrice des moments par celle d'une série génératrice de Dirichlet, qui est reliée comme nous le verrons dans la section suivante à des perturbations de l'opérateur de transfert.

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(s, i\tau) := \sum_{(p,q)\in\Omega} \frac{1}{p^s} \exp[i\tau C(p,q)] = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n(i\tau)}{n^s}, \tag{3.4}$$

où $c_n(i\tau) := \sum_{(p,q)\in\Omega_n, p=n} \exp[i\tau C(p,q)]$.

Il est clair que la somme partielle des coefficients des séries $S(s, i\tau)$ vérifie

$$\sum_{n\leq N} c_n(i\tau) = \Phi_{i\tau}(N). \tag{3.5}$$

On voit alors que étudier le comportement asymptotique par rapport à N de la fonction génératrice des moments $\mathrm{E}_N[\exp(i\tau C)]$ associée à un coût total sur Ω_N, revient à analyser la fonction de Dirichlet $S(s, i\tau)$.

2 Série de Dirichlet et Opérateur de Transfert

Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 1, les trois systèmes euclidiens appartiennent à la bonne classe. Pour les branches inverses de profondeur k de la forme $h_{[q_1]} \circ \cdots \circ h_{[q_k]}$, l'intervalle $h(\mathcal{I})$ contient tous les réels x pour lesquels les k premiers digits du développement en fractions continues sont $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$(voir section 3 du chapitre 1). De plus, chaque branche inverse d'une profondeur quelconque est une homographie $h(x) = (ax+b)/(cx+d)$, avec a, b, c, d des entiers premiers entre eux, un déterminant $ad - bc = \pm 1$, et un dénominateur $D[h]$ relié à $|h'|$ à travers :

$$D[h](x) := |cx + d| = |\det h|^{1/2} |h'(x)|^{-1/2} = |h'(x)|^{-1/2}. \tag{3.6}$$

Le dénominateur $D[h]$ vérifie également la propriété : pour toutes h_1 et h_2 deux branches de $\mathcal{H}^*$, on a

$$D[h_1 \circ h_2](0) = D[h_1](0) \cdot D[h_2](0). \tag{3.7}$$

De plus, si $x = q/p \in \Omega_N$, on a $q/p = h_{[q_1]} \circ \cdots \circ h_{[q_k]} = h(0)$, d'où la relation

$$p = D[h](0) \tag{3.8}$$

Ainsi, et d'après (3.6), les opérateurs de transfert associés aux systèmes euclidiens $T_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{K}}$ et $T_{\mathcal{O}}$ vérifient l'identité suivante :

$$\mathbf{H}_{s,i\tau}[f](x) = \sum_{h\in\mathcal{H}} \exp[i\tau c(h)] \frac{1}{D[h](x)^{2s}}\ f(h(x))\,. \tag{3.9}$$

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ l'ensemble des branches finales (voir chapitre 1, § 3). On associe à $\mathcal{F}$ l'opérateur de transfert

$$\mathbf{F}_{s,i\tau}[f](x) := \sum_{h\in\mathcal{F}} \exp[i\tau c(h)] \frac{1}{D[h](x)^{2s}} f(h(x)) = \mathbf{H}_{s,i\tau}[f\cdot 1_{\cup_{h\in\mathcal{F}} h(\mathcal{I})}](x)\,. \tag{3.10}$$

Il est clair que, pour $\sigma \in \Sigma_0$, l'opérateur $\mathbf{F}_{s,i\tau}$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, de plus, les énoncés de la proposition 2.1 s'étendent aisément à $\mathbf{F}_{s,i\tau}$.

Si on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{I}$, on a la relation suivante qui relie les opérateurs $\mathbf{H}_{s,i\tau}$ et $\mathbf{F}_{s,i\tau}$, associés aux systèmes euclidiens, à la série de Dirichlet : les égalités (3.8) et (3.7) donnent pour $(s, i\tau) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$ avec $\Re s > 1/2$:

$$\begin{aligned}
S(2s, i\tau) &= \sum_{(p,q)\in\Omega} \frac{e^{i\tau C(p,q)}}{p^{2s}} = \sum_{P\geq 1} \sum_{h_i\in\mathcal{H}} \frac{e^{i\tau \sum_{i=1}^{P} c(h_i)}}{D[h](0)^{2s}} \\
&= \sum_{P\geq 1} \sum_{h_P\in\mathcal{F}} \frac{e^{i\tau c(h_P)}}{D[h_P](0)^{2s}} \sum_{h\in\mathcal{H}^{P-1}} \frac{e^{i\tau c(h)}}{D[h](0)^{2s}} \\
&= \sum_{P(p,q)\geq 1} \sum_{h_P\in\mathcal{F}} \frac{e^{i\tau c(h_P)}}{D[h_P](0)^{2s}} \mathbf{H}_{s,i\tau}^{P-1}[\mathbf{1}](0) \\
&= \mathbf{F}_{s,i\tau} \circ \sum_{P\geq 1} \mathbf{H}_{s,i\tau}^{P-1}[\mathbf{1}](0).
\end{aligned}$$

On a ainsi, une relation qui joue un rôle clef dans la suite :

$$S(2s, i\tau) = \mathbf{F}_{s,i\tau} \circ (\mathrm{Id} - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}[\mathbf{1}](0). \tag{3.11}$$

Remarque 3.2. *La relation (3.11) relie l'opérateur de transfert à la série de Dirichlet associée à l'ensemble Ω_N. on peut définir la fonction génératrice des moments de Dirichlet $\tilde{S}(s, i\tau)$ associée à l'ensemble $\tilde{\Omega}_N$, pour obtenir*

$$\widetilde{S}(2s, i\tau) = \zeta(2s)\, \mathbf{F}_{s,i\tau} \circ (I - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}[\mathbf{1}](0), \tag{3.12}$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Comme la fonction ζ est analytique sur le domaine $\{s|\ \Re s > 1/2\}$, tous les résultats obtenus sur Ω_N se transportent aisément à $\tilde{\Omega}$.

La relation (3.11) nous permet d'exploiter l'étude des opérateurs de transfert faite dans le chapitre précédent. Nous obtenons ainsi, comme conséquences du lemme 2.7, des propositions 2.8 et 2.13, les trois corollaires suivants :

Rappelons que la fonction $i\tau \mapsto \tilde{\sigma}(i\tau)$ est la fonction définie dans la proposition 2.3 du chapitre précédent.

Corollaire 3.1. *Considérons un système euclidien $T_{\mathcal{G}}$, $T_{\mathcal{K}}$, $T_{\mathcal{O}}$. Alors, pour tout $0 < r < 1/5$, il existe $a_3 > 0$ tel que, pour tout $\widehat{a}_3$ avec $0 < \widehat{a}_3 < a_3$, il existe deux constantes $M'' > 0$ et $\nu_2 > 0$ (petites) telles que, pour tout $|\tau| \leq \nu_2$, on a*

(i) $\Re\tilde{\sigma}(i\tau) > 1 - (a_3 - \widehat{a}_3)$.

(ii) Les fonctions méromorphes $s \longmapsto S(2s, i\tau)$ et $s \longmapsto \widetilde{S}(2s, i\tau)$ admettent un seul pôle en $s = \tilde{\sigma}(i\tau)$ dans la bande $|\Re s - 1| \leq a_3$, ce pôle est simple.

(iii) $\max(|S(2s, i\tau)|, |\widetilde{S}(2s, i\tau)|) \leq M'' \max(1, |t|^r),\ \forall s, \Re s = 1 \pm a_3$.

Démonstration. Rappelons la relation (3.11). On a

$$S(2s, i\tau) = \mathbf{F}_{s,i\tau} \circ (\mathrm{Id} - \mathbf{H}_{s,i\tau})^{-1}[\mathbf{1}](0).$$

La fonction $s \mapsto \mathbf{F}_{s,i\tau}$ est analytique sur $\Re s > 1/2$, il suffit alors d'étudier la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$. Nous allons utiliser les résultats du chapitre 2. Pour cela, nous allons décomposer, pour tout $\sigma > 1/2$, la droite verticale $\Re s = \sigma$ en trois parties :

Rappelons les ensembles $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ du lemme 2.7 du chapitre 2.

<u>*$\Im s$ proche de zéro.*</u> Soit $\nu_0 > 0$ comme dans la proposition 2.3. D'après le lemme 2.7(i) du chapitre 2 , pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ est méromorphe avec un seul pôle en $s = \tilde{\sigma}(i\tau)$ sur le rectangle $\{s \in \mathbb{C}\ ; |\Re s - 1| \leq a, |\Im s| \leq t_2\}$. De plus, il existe $0 < \tilde{a} < a$ tel que, pour $\Re s = 1 \pm \tilde{a}$, la fonction $s \mapsto \|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_\infty$ est bornée par un constante $\widehat{M}_3$.

$\Im s$ dans un ensemble compact. D'après le lemme 2.7(ii), pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ est analytique. Par conséquent $\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_\infty$ est bornée par une constante $\widehat{M}_4 > 0$, sur l'ensemble $\{s \in \mathbb{C},\ |\Re s - 1| \leq a_2,\ |\Im s| \in [t_2, t_0]\}$.

$|\Im s| \geq t_0$. Fixons $0 < r < 1/5$. La proposition 2.8 donne $a_1 > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout τ arbitraire, la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ est analytique sur l'ensemble $\{s\ : |\Re s - 1| \leq a_1,\ |\Im s| \geq t_0\}$ et vérifie $\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_\infty \leq M|t|^r$.

Finalement, on pose $a_3 := \min(\tilde{a}, a_2, a_1)$ et $\nu_1 > 0$ de façon que, pour tout $|\tau| < \nu_1$, on ait, $\Re\tilde{\sigma}(i\tau) > 1 - (a_3 - \widehat{a}_3)$. On choisit ensuite $\nu_2 := \min(\nu_0, \nu_1)$ et on pose $M'' = \max(\widehat{M}_3, \widehat{M}_4, M)$.

■

Corollaire 3.2. *Considérons l'un des systèmes euclidiens $T_{\mathcal{G}}$, $T_{\mathcal{K}}$, $T_{\mathcal{O}}$ et un coût c non-réseau. Pour tout $\nu_0 > 0$, il existe $\gamma_1 > 0$ et $M_2 > 0$ tels que, pour tout $|\tau| \in [\nu_0, L]$,*

(i) *Les fonctions $s \mapsto \widetilde{S}(s, i\tau)$ et $s \mapsto S(s, i\tau)$ sont analytiques sur la bande $|\Re s - 1| \leq \gamma_1$.*

(ii) *On a,* $\max\left(\left|S(2s, i\tau)\right|, |\widetilde{S}(2s, i\tau)|\right) \leq M_2, \quad \forall s, \Re s = 1 \pm \gamma_1.$

Démonstration. Soit $|\tau| \in [\nu_0, 2]$. On procède comme dans le lemme précédent. Pour tout $\sigma > 1/2$ on décompose la droite verticale $\Re s = \sigma$ en deux parties : on commence par le cas $|\Im s| > t_0$ où, comme dans la démonstration du lemme précédent, l'affirmation est donnée par la proposition 2.8.

Le lemme 2.7iii) affirme que, pour $|\Im s| \leq t_0$, la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_s, i\tau$ est analytique, et donc bornée, sur l'ensemble $\{s \in \mathbb{C}\ ; |\Re s - 1| \leq \tilde{a}_2,\ |t| \leq t_0\}$.

On prend finalement, $\gamma_1 = \min(a_1, \tilde{a}_2)$.

■

Corollaire 3.3. *Considérons l'un des systèmes euclidiens $T_{\mathcal{G}}$, $T_{\mathcal{K}}$, $T_{\mathcal{O}}$ et un coût c diophantien. Soient $\alpha > 0$, $\xi_0 \in (0, 1)$ et $M_0 > 0$ comme dans la proposition 2.13. Pour tous $\mathcal{T} > 0$, $D > 1$ et $|\tau| \geq 2$, les fonctions $s \mapsto \widetilde{S}(s, i\tau)$ et $s \mapsto S(2s, i\tau)$ sont holomorphes sur l'ensemble*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}} := \{\sigma + it \mid |t| \leq \mathcal{T}\,, \quad \sigma \in [1 - \xi_0|\tau|^{-\alpha}, D]\}\,.$$

De plus, pour tous $|\tau| > 2$, $|t| \leq t_0$, et $\sigma \geq 1 - \xi_0|\tau|^{-\alpha}$, on a

$$\max(|S(2s, i\tau)|, |\widetilde{S}(2s, i\tau)|) \leq M_0\ |\tau|^\alpha.$$

Démonstration : D'après la proposition 2.13, pour tout $|\tau| \geq 2$, la fonction $s \mapsto \mathcal{R}_{s,i\tau}$ est analytique sur l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ et vérifie $\|\mathcal{R}_{s,i\tau}\|_\infty \leq M_0|\tau|^\alpha$. La suite de l'argument découle en appliquant la relation (3.11).

3 La formule de Perron

Dans [32, §3], M. Pollicott et R. Sharp étudient le terme de reste dans le comptage des orbites fermées des flots géodésiques sur des surfaces à courbure négative. Pour cela, ils utilisent des estimations sur la norme de la résolvante d'opérateurs de transfert fournies par D.Dolgopyat [18]. Comme il est coutume de relier l'opérateur de transfert à la fonction zêta dynamique, ces estimations leurs permet d'obtenir un contrôle sur la dérivée logarithmique de la fonction zêta. Finalement, pour revenir sur le nombre de géodésiques fermées, ils utilisent la formule d'inversion de Perron [19, Théorème 2.7(b)] qui, contrairement aux théorèmes taubériens, fournit des termes de reste plus précis. À noter également que les flots géodésiques à courbures négatives sont codés par un sous-shift de type fini.

Inspirées par le travail de Pollicott et Sharp, et dans le cadre des systèmes euclidiens qui sont codés par $\mathbb{N}^*$, V. Baladi et B.Vallée [3], utilisent la formule de Perron pour transformer les estimations obtenues sur les séries de Dirichlet $S(2s, i\tau)$ à des estimations sur les séries génératrices des moments $\mathbb{E}_N(\exp(i\tau C(\cdot)))$.

Théorème 3.4 (**Formule de Perron d'ordre 2**). *[19, Théorème 2.7(b)]. Soit $\{a_n\}$ une fonction arithmétique et $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ la série de Dirichlet correspondante. Alors, pour toute droite verticale $\Re s = D > 0$ à l'intérieur du domaine de convergence de F et pour tout $T \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{n\leq T} a_n(T-n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D-i\infty}^{D+i\infty} F(s)\frac{T^{s+1}}{s(s+1)}\,ds\,. \tag{3.13}$$

Soient $c_n(i\tau)$ les coefficients définis dans (3.4). En appliquant (3.13) à la série de Dirichlet $S(2s, i\tau)$, on trouve

$$\sum_{n\leq T} c_n(i\tau)(T-n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D-i\infty}^{D+i\infty} S(2s, i\tau)\frac{T^{2s+1}}{s(2s+1)}\,ds\,. \tag{3.14}$$

Posons

$$\Psi_{i\tau}(T) := \sum_{n\leq T} c_n(i\tau)(T-n).$$

La formule de Perron nous donne des informations sur $\Psi_{i\tau}(N)$, qui n'est autre que la somme de Cesáro de $\Phi_{i\tau}(Q)$:

$$\Psi_{i\tau}(N) = \sum_{Q<N}\sum_{n\leq Q} c_n(i\tau) = \sum_{Q<N}\Phi_{i\tau}(Q). \tag{3.15}$$

Cependant, transporter les résultats obtenus sur les sommes $\Psi_{i\tau}(N)$ à $\Phi_{i\tau}(N)$ ne semble pas évident, nous aurons donc besoin d'introduire un nouveau modèle auxiliaire $(\overline{\Omega}_N(\xi), \overline{P}_N(\xi))$ appelé *modèle lissé*.

4 Lissage

En théories de probabilités, la notion de lissage est en général utilisée pour désigner la régularisation, à travers le produit de convolution, des densités de distributions. Ce type de régularisation intervient par exemple dans l'approximation par des distributions connues, comme il est le cas dans la démonstration du théorème de Berry-Esséen (voir par exemple [20, Chp. XV.3]). Le lissage utilisé dans notre contexte ne s'obtient pas en régularisant les lois des variables aléatoires $C(p,q)$, mais en introduisant un nouveau modèle probabiliste.

Nous allons reprendre ici le modèle donné par E.Cesaratto [13] pour remplacer celui introduit par Baladi et Vallée dans [3, Section 4.2] dont la fonction génératrice des moments ne conserve par la formule (3.3). Il faut notamment remplacer les lemmes 13 et 14 dans [3] par le lemme 3.5 ci-dessous.

Pour une fonction $\xi : \mathbb{Z}_+^* \to [0,1]$ et un entier $N \geq 1$, on note $[N\xi(N)]$ la partie entière de $N\xi(N)$ et on considère

$$\overline{\Omega}_N(\xi) = \bigcup_{N-[N\xi(N)] \leq Q \leq N} \Omega_Q \times \{Q\},$$

muni de la probabilité uniforme $\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)$. Notons que $\Omega_0 = \emptyset$).

Posons

$$\Pi(p,q,Q) = (p,q) \ , \quad \text{pour } (p,q,Q) \in \overline{\Omega}_N(\xi),$$

On appelle *coût lissé* la variable aléatoire $C(p,q,Q)$ sur $\overline{\Omega}_N(\xi)$ définie par

$$C(p,q,Q) = C \circ \Pi(p,q,Q) = C(p,q).$$

La valeur cumulée du coût total sur $\overline{\Omega}_N(\xi)$ est définie par

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{i\tau}(\xi,N) = \overline{\Phi}_{i\tau}(N) &:= \sum_{(p,q,Q)\in\overline{\Omega}_N(\xi)} e^{i\tau C(\Pi(p,q,Q))} \\ &= \sum_{Q=N-[N\xi(N)]}^{N} \sum_{(p,q)\in\Omega_Q} e^{i\tau C(p,q)} = \sum_{Q=N-[N\xi(N)]}^{N} \Phi_{i\tau}(Q). \end{aligned} \tag{3.16}$$

On peut alors voir facilement que la fonction génératrice des moments du coût lissé conserve la formule (3.3) :

$$\overline{\mathbb{E}}_N(\xi, e^{i\tau C}) := \overline{\mathbb{E}}_N(\xi, e^{i\tau C\circ\Pi}) = \frac{\overline{\Phi}_{i\tau}(N)}{\overline{\Phi}_0(N)}. \tag{3.17}$$

De plus, on déduit de (3.16) et (3.15) la relation

$$\overline{\Phi}_{i\tau}(N) = \Psi_{i\tau}(N) - \Psi_{i\tau}(N - [N\xi(N)] - 1). \tag{3.18}$$

Le lemme suivant montre que, en un certain sens, la probabilité $\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)$ est proche de la probabilité initiale $\mathbb{P}_N$. C'est une version corrigée du Lemme 14 dans [3].

Lemme 3.5. *[13]. Il existe $\widehat{M}_0 > 0$ et $\widehat{M} \geq 1$ tels que pour tout ξ avec $(\xi(N))^{-1} \leq \widehat{M}_0 N/\log N$ on ait*

$$\left|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(E)) - \mathbb{P}_N(E)\right| \leq \widehat{M} \cdot \xi(N)\,,\ \forall\, E \subset \Omega_N\,,\ \forall N \in \mathbb{Z}_+^*\,.$$

Démonstration. Posons $N' = N - [N\xi(N)]$ et décomposons Ω_N en $\Omega_{N'}$ et $\Xi_{N'} := \Omega_N \setminus \Omega_{N'}$.

Alors, pour tout $E \subset \Omega_N$, on a

$$\begin{aligned}\left|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(E)) - \mathbb{P}_N(E)\right| &\leq \left|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(E \cap \Omega_{N'})) - \mathbb{P}_N(E \cap \Omega_{N'})\right| \\ &\quad + \left|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(E \cap \Xi_{N'})) - \mathbb{P}_N(E \cap \Xi_{N'})\right|.\end{aligned}$$

Pour contrôler le premier terme, montrons qu'il existe $\widetilde{M} \geq 1$ tel que, pour tous N et $(p,q) \in \Omega_{N'}$, on ait

$$\left|\frac{\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(p,q))}{\mathbb{P}_N(p,q)} - 1\right| \leq \widetilde{M} \cdot \xi(N). \tag{3.19}$$

Notons maintenant que les ensembles Ω_N ne dépendent pas des algorithmes $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$. Cependant, en utilisant la fonction indicatrice d'Euler (voir [38, chapitre I, §3.4]), et en approximant N/p par la partie entière qui dépend de l'algorithme, on trouve une constante $K > 0$ (avec $K = 3/\pi^2$ pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{O}$ et $K = 3/(4\pi^2)$ pour $\mathcal{K}$) telle que

$$\left|\Omega_N\right| = KN^2\big(1 + O(\log N/N)\big)\ ,\quad \left|\widetilde{\Omega}_N\right| = \widetilde{K}N^2\big(1 + O(1/N)\big).$$

D'où, pour tout $(p,q) \in \Omega_N$, on a

$$\mathbb{P}_N((p,q)) = \frac{1}{KN^2}(1 + O(\log N/N)).$$

Ainsi, par définition de $\overline{\Omega}_N(\xi)$, on a

$$\left|\overline{\Omega}_N(\xi)\right| = \sum_{Q=N'+1}^{N} |\Omega_Q| = \sum_{Q=N'+1}^{N} KQ^2\big(1 + O(\log Q/Q)\big).$$

D'autre part, comme $N^{'} \leq Q \leq N$ et en rappelant l'hypothèse sur $\xi(N)$ qui vérifie

$$\xi(N) \leq (\tilde{M}_0 \log N)/N,$$

on a

$$\frac{\log Q}{Q} \leq \frac{\log N}{N'} \leq \frac{\log N}{N}(1 + O(\xi(N))) = O(\xi(N)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|\overline{\Omega}_N(\xi)\right| &= \frac{K}{3}(N^3 - N^{'3})(1 + O(\xi(N))) \\ &\geq K(N - N^{'})N^2(1 + O(\xi(N)))\ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ainsi, pour tout $(p, q) \in \Omega_{N'}$ on a

$$\frac{\overline{\mathbb{P}}(\Pi^{-1}(p,q))}{\mathbb{P}_N(p,q)} = \frac{N - N' + 1}{(N - N')N^2} N^2(1 + O(\xi(N))) = (1 + O(\xi(N))).$$

ce qui prouve (3.19).

Il reste à montrer que le deuxième terme $\left|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(E \cap \Xi_{N'})) - \mathbb{P}_N(E \cap \Xi_{N'})\right|$ est dominé par $\xi(N)$. Rappelons que $\Xi_{N'} = \Omega_N \setminus \Omega_{N'}$. On a

$$\mathbb{P}_N(\Xi_{N'}) = \frac{\left|\Xi_{N'}\right|}{|\Omega_N|} = O\left(\frac{N^2 - N'^2}{N^2}\right) = O(\xi(N))\ .$$

De même,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}_N(\xi)(\Pi^{-1}(\Xi_{N'})) &= \frac{[N - N' + 1]\left|\Xi_{N'}\right|}{|\overline{\Omega}_N(\xi)|} \\ &= O\left(\frac{N^2 - N'^2}{N^2}\right) = O(\xi(N))\ . \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.6. *Si $\xi(N)$ vérifie les conditions du lemme 3.5, pour toute fonction F : $\Omega_N \to \mathbb{C}$ on a*

$$|\overline{\mathbb{E}}_N(\xi, F \circ \Pi) - \mathbb{E}_N(F)| \leq \max|F| \cdot \widehat{M} \cdot \xi(N). \tag{3.21}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour toute fonction $F : \Omega_N \to \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}_N(\xi, F\circ\Pi(\cdot)) &= \sum_{(p,q,Q)\in\overline{\Omega}_N} F\circ\Pi(p,q,Q)\cdot\overline{\mathbb{P}}_N(p,q,Q)\\ &= \sum_{(p,q)\in\Omega_N} F\circ\Pi^{-1}(p,q)\cdot\overline{\mathbb{P}}_N(\Pi^{-1}(p,q)),\end{aligned}$$

et la conclusion suit du lemme 3.5.

5 Estimations sur la série génératrice des moments pour le coût lissé

Nous aurons besoin de deux lissages. Le premier, associé à la fonction $\xi_1(N) = N^{-\gamma_0}$ pour un $\gamma_0 \in (0,1)$, a été introduit dans [3] et sera utilisé dans les lemmes 3.8 et 3.9 ci-après. Le deuxième, associé à la fonction $\xi(N^{-1/|\tau|^\alpha})$, où $\alpha > 0$ comme dans le corollaire 3.3, apparaît seulement dans la preuve du lemme 3.10 pour obtenir un contrôle sur $\tau \mapsto \overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C})$ pour les valeurs de $|\tau| \geq 2$.

Avant d'énoncer la première estimation sur $\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C})$, nous aurons besoin du lemme suivant qui est démontré dans l'appendice.

Lemme 3.7. *Soit $\nu_0 > 0$ un réel proche de 0 et pour tout $|\tau| \leq \nu_0$, soit $c_n(i\tau)$ une suite de fonctions de $[\nu_0, \nu]$ dans $\mathbb{C}$.*
Supposons que la somme $\Psi_{i\tau}(T) := \sum_{n\leq T} c_n(i\tau)(T-n)$ vérifie

$$\Psi_{i\tau}(T) = F_{i\tau}(T)\left[1 + O\left(G(T)\right)\right], \quad \textit{lorsque} \quad T\to\infty\,, \tag{3.22}$$

avec un O-terme uniforme par rapport ν_0, et $F_{i\tau}(T) = B(i\tau)T^{a(i\tau)}$, pour $B(i\tau)$, $a(i\tau)$ des fonctions holomorphes bornées avec $\Re a(i\tau) > 1$, $B(i\tau) \neq 0$ pour $|\tau| \leq \nu_0$. Supposons de plus que $G(T) \to 0$ pour $T \to \infty$ et est à variation modérée, c'est à dire, qu'il existe $K > 0$ tel que $|G(cT)| \leq K|G(T)|$ pour tout c avec $1/2 \leq c \leq 2$.
Alors, si $G(T)^{-1} = O(T)$ pour $T \to \infty$, on a

$$\frac{1}{\lfloor TG(T)^{1/2}\rfloor}\left[\Psi_{i\tau}(T) - \Psi_{i\tau}\big(T - \lfloor TG(T)^{1/2}\rfloor\big)\right] = F'_{i\tau}(T)\left[1 + O\big(G(T)^{1/2}\big)\right] \tag{3.23}$$

avec un O-terme uniforme par rapport à ν_0.

Le lemme suivant est une petite modification du lemme 11 dans [3].

Lemme 3.8. *Considérons l'un des trois algorithmes euclidiens $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$ associé à un coût c ayant des moments forts d'ordre $k \geq 1$. Soient $\mathbf{P}_{s,i\tau}$ le projecteur spectral défini dans le corollaire 2.2, $i\tau \mapsto \tilde{\sigma}(i\tau)$ la fonction définie dans la proposition 2.3, a_3 et ν_2 comme dans le corollaire 3.1.*

Alors, il existe $\gamma_1 \in (0, 1/2)$ et $\widehat{a}_3 \in (0, a_3)$ tels que, pour tout $\gamma_0 \in (0, \widehat{a}_3)$, en posant $\xi_1(N) = N^{-\gamma_0}$, on ait

$$\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C}) = \frac{E(i\tau)}{E(0)\tilde{\sigma}(i\tau)} N^{2(\tilde{\sigma}(i\tau)-\tilde{\sigma}(0))}\big(1 + O(N^{-\gamma_1})\big), \quad \forall \mathbb{N} \in \mathbb{Z}_+^*, \quad \forall |\tau| < \nu_2\,, \tag{3.24}$$

où le terme $O(N^{-\gamma_1})$ est uniforme par rapport à τ, et $i\tau \mapsto E(i\tau)$ est la fonction de classe C^k définie par

$$E(\xi, e^{i\tau}) = \frac{-1}{(\partial_s \lambda)(\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau)} \mathbf{F}_{\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau} \circ \mathbf{P}_{\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau}(\mathbf{1})(0)\,.$$

Démonstration : Rappelons d'abord que la série génératrice du coût lissé vérifie :

$$\overline{\mathbb{E}}_N(\xi, e^{i\tau}) = \frac{\overline{\Phi}_{i\tau}(N)}{\overline{\Phi}_0(N)},$$

et qu'on a

$$\overline{\Phi}_{i\tau}(N) = \Psi_{i\tau}(N) - \Psi_{i\tau}(N - [N\xi(N)] - 1).$$

L'idée est alors, d'exploiter les propriétés de la série de Dirichlet dans le corollaire 3.1 pour pouvoir appliquer le lemme 3.7 à la somme $\Psi_{i\tau}(N)$ associée à l'algorithme.

Soit a_3 comme dans le corollaire 3.1 et considérons le rectangle

$$\mathcal{U}(i\tau) = \{s\ ;\ \Re s = 1 \pm a_3 \text{ et } \Im s = \pm U\}.$$

Le corollaire 3.1 affirme que l'application $s \longmapsto S(s, i\tau)$ est méromorphe sur la bande $|\Re s - 1| \leq \widehat{a}_3$ et admet, rappelons le, un seul pôle en $s = \widetilde{\sigma}(i\tau)$.

Le théorème des résidus de Cauchy donne alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\mathcal{U}(i\tau)} S(2s, i\tau) \frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}\, ds = \frac{E(i\tau)}{\tilde{\sigma}(i\tau)(2\tilde{\sigma}(i\tau)+1)} N^{2\tilde{\sigma}(i\tau)+1}\,, \tag{3.25}$$

où

$$E(i\tau) = \mathbf{F}_{\tilde{\sigma}(i\tau), i\tau} \circ \mathbf{R}(i\tau)[1](0),$$

avec $\mathbf{R}(i\tau)$ l'opérateur résidu apparu dans la remarque 2.2. De plus, d'après le corollaire 2.2, la fonction $i\tau \mapsto E(i\tau)$ est de classe C^k.

En particulier on a,

$$E(0) = -\frac{1}{\lambda'(1)}\mathbf{F}_1 \circ \mathbf{P}_1[1](0) \neq 0. \tag{3.26}$$

En faisant tendre U vers l'infini, d'après le corollaire 3.1(iii), l'intégrale sur la droite verticale $\Re s = 1 - a_3$ existe et vérifie

$$\int_{1-a_3-i\infty}^{1-a_3+i\infty} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}\, ds = O\left(N^{3-2a_3}\right), \tag{3.27}$$

(avec un O-terme uniforme par rapport $|\tau| \leq \nu_2$ et $N \to \infty$).

Les intégrales sur les droites horizontales de $\mathcal{U}(i\tau)$ tendent vers zéro pour $U \to \infty$.

Il reste maintenant à estimer l'intégrale sur la droite verticale $\Re s = 1 + a_3$ qui, d'après la formule Perron (3.14), vaut $\Psi_{i\tau}(N)$.

En combinant ceci avec (3.25) et (3.27) et le fait que, d'après le corollaire 3.1, la fonction implicite $\tilde{\sigma}$ vérifie $\Re(\tilde{\sigma}(i\tau)) > 1 - (a_3 - \widehat{a}_3)$ pour tout $0 < \widehat{a}_3 < a_3$, on obtient

$$\Psi_{i\tau}(N) = \frac{E(i\tau)}{\tilde{\sigma}(i\tau)(2\tilde{\sigma}(i\tau)+1)} N^{2\tilde{\sigma}(i\tau)+1} \left[1 + O\left(N^{-2\widehat{a}_3}\right)\right]. \tag{3.28}$$

Par conséquent la somme $\Psi_{i\tau}(N)$ satisfait l'hypothèse du lemme 3.7 avec $G(N) = N^{-2\widehat{a}_3}$.

Rappelons qu'on pose toujours $N' = N - [N\xi(N)]$. Pour tout $\gamma_0 \leq \widehat{a}_3$, en posant $\xi(N) = N^{-\gamma_0}$, la somme cumulée du modèle lissé vérifie :

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_{i\tau}(N) &= \Psi_{i\tau}(N) - \Psi_{i\tau}(N'-1) \\
&= \Psi_{i\tau}(N) - \Psi_{i\tau}(N') + \Big[\Psi_{i\tau}(N') - \Psi_{i\tau}(N'-1)\Big] \\
&= [N\xi(N)]\frac{E(i\tau)}{\tilde{\sigma}(i\tau)} N^{2\tilde{\sigma}(i\tau)}\left[1 + O\left(N^{-\gamma_0}\right)\right] + O(N'^2).
\end{aligned}$$

Le passage entre la deuxième et la troisième ligne est dû au fait ,

$$\Psi_{i\tau}(N') - \Psi_{i\tau}(N'-1) = \Phi_{i\tau}(N') = O\big(|\Omega_{N'}|\big) = O(N'^2).$$

D'autre part, en rappelant que $\tilde{\sigma}(0) = 1$, on a

$$\overline{\Phi}_0(N) = [N\xi(N)]E(0)N^2\big(1 + O(N^{-\gamma_0})\big). \tag{3.29}$$

Ce qui achève la preuve.

■

Le lemme suivant est une modification du lemme 15 dans [3].

Lemme 3.9. *Considérons l'un des algorithmes $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{O}$ associé à un coût c non-réseau et $\widehat{a}_3 > 0$ comme dans le lemme 3.8. Pour tout $L > \nu_2 > 0$, il existe $\gamma_0 \in (0, \widehat{a}_3)$, $\gamma_2 \in (0, 1/2)$ et $\widetilde{M} \geq 1$ tels que si on pose $\xi_1(N) = N^{-\gamma_0}$, on a pour tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$*

$$|\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C})| \leq \frac{\widetilde{M}}{N^{\gamma_2}}, \quad \forall |\tau| \in [\nu_2, L]. \tag{3.30}$$

Démonstration : D'après le corollaire 3.2, lorsque le paramètre $|\tau|$ appartient à un compact $[\nu_2, L]$, la fonction $s \to S(2s, i\tau)$ est analytique sur la bande $|\Re s - 1| \leq \gamma_1$.

Ainsi, sur le rectangle $\tilde{\mathcal{U}}(i\tau) := \{s\ ; \Re s = 1 \pm \gamma_1\} \times \{s\ ; \Im s = \pm U\}$, on a

$$\int\limits_{\tilde{\mathcal{U}}(i\tau)} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}ds = 0.$$

De plus,

$$\Psi_{i\tau}(N) = \int\limits_{\Re s = 1+\gamma_1} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}ds,$$

$$\int\limits_{\Re s = 1-\gamma_1} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}ds = O(N^{3-2\gamma_1}),$$

et

$$\int\limits_{\Im s = \pm U} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}ds \to 0 \quad \text{lorsque} \quad U \to \infty.$$

Finalement,

$$\Psi_{i\tau}(N) = O(N^{3-2\gamma_1}).$$

La suite du calcul ressemble à celle du lemme précédent.

■

Passons maintenant aux grandes valeurs de τ. Nous allons montrer que le corollaire 3.3 implique l'estimation :

Lemme 3.10. *Considérons l'un des trois algorithmes $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$ et un coût c diophantien. Soit $\alpha > 0$ comme dans la Proposition 2.13 et soit $\xi_1(N) = N^{-\gamma_0}$ pour γ_0 comme dans les lemmes 3.8 et 3.9.*

Pour tous $\alpha'' > \alpha' > \alpha$, il existe $K' \geq 1$ tel que

$$|\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C})| \leq K' N^{-|\tau|^{-\alpha'}}\,,\ \forall N \in \mathbb{Z}_+^*\,,\ \forall |\tau| \in [2, (\log N)^{1/\alpha''}]. \tag{3.31}$$

Démonstration : Fixons $|\tau| \geq 2$ et $\alpha'' > \alpha' > \alpha$, et introduisons un lissage auxiliaire (utilisé seulement dans cette preuve).

$$\xi_2(N) = N^{-|\tau|^{-\alpha'}}\,. \tag{3.32}$$

Par le corollaire 3.6 et l'inégalité du triangle on a pour tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$

$$|\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C}) - \overline{\mathbb{E}}_N(\xi_2, e^{i\tau C})| \leq \widehat{M_1} N^{-\gamma_0} + \widehat{M_2} N^{-|\tau|^{\alpha'}}\,,$$

où $\widehat{M_1}$ et $\widehat{M_2}$ sont uniformes par rapport à $|\tau| \geq 2$.

Il est ainsi suffisant de montrer l'inégalité (3.31) pour $\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_2, e^{i\tau C})$.

Comme il a déjà été expliqué dans les deux derniers lemmes, le but est d'obtenir l'estimation sur $\Psi_{i\tau}(N)$ puis la transformer à $\overline{\mathbb{E}}_N$.

Rappelons qu'on écrit $s = \sigma + it$ et posons $\xi_0 \in (0,1)$ de la Proposition 2.13.

Nous avons vu dans le corollaire 3.3 que pour tout $\mathcal{T} > 0$ et tout $D > 1$ la fonction $s \mapsto S(2s, i\tau)$ est holomorphe sur l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}} := \{\sigma + it \mid |t| \leq \mathcal{T}\,, \quad \sigma \in [1 - \xi_0 |\tau|^{-\alpha}, D]\}\,.$$

D'autre part, il existe $t_0 > 0$ indépendant de c tel que si $|t| \geq t_0$, alors la proposition 2.8 donne $M \geq 1$ et $\bar{\alpha} \in (0, 1/5)$ (tous les deux indépendants de t, τ, et σ) tels que

$$\sup \left|S(s, i\tau)\right| \leq M |t|^{\bar{\alpha}}\,,$$

et en particulier $s \mapsto S(s, i\tau)$ est analytique sur $\{s \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}} \mid |t| \geq t_0\}$.

Si $|t| \leq t_0$, la proposition 2.13 et par conséquent le corollaire 3.3 donne $s \mapsto S(s, i\tau)$ analytique sur $\{s \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}} \mid |t| \leq t_0\}$.

Notons maintenant que $|\tau|^{-\alpha} - |\tau|^{-\beta} \geq |\tau| - \alpha(1 - 2^{\alpha-\beta})$.

Ainsi, en utilisant le fait que $\alpha'' > \alpha$, on obtient pour tout N suffisamment grand dépendant de $\alpha < \beta < \alpha''$;

$$\frac{\alpha}{\alpha''} \log\log(N) \leq 2(1 - 2\alpha - \beta) \log N^{1-\alpha/\alpha''}.$$

D'où, en suivant le même calcul que celui des deux lemmes précédents, on trouve que pour tout $\beta > \alpha$, il existe $K_{13} \geq 1$ (dépendant de α'', α et β) tel pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $|\tau| \in [2, (\log N)^{1/\alpha''}]$

$$\big|\Psi_{i\tau}(N)\big| = \left| \int\limits_{\partial\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, \Re s = 1-\xi_0|\tau|^{-\alpha}} S(2s, i\tau)\frac{N^{2s+1}}{s(2s+1)}ds \right| \leq 4M_0|\tau|^{\alpha}N^{3-2|\tau|^{-\alpha}}$$
$$\leq K_{13}N^{3-2|\tau|^{-\beta}}.$$

Par conséquent, en rappelant (3.18) et que les hypothèses du lemme 3.7 ($G(N) := \xi_2(N) = N^{-|\tau|^{-\alpha'}}$ sont toujours vérifiées on obtient une constante $K_{14} \geq 1$ telle que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $|\tau| \in [2, (\log N)^{1/\alpha''}]$,) on a

$$|\overline{\Phi}_{i\tau}(N)| \leq K_{14}N^{3-|\tau|^{-2\beta}},$$

où $\overline{\Phi}_{i\tau}(N)$ est la valeur cumulée associée de (3.16) pour $\xi(N) = \xi_2(N) = N^{-|\tau|^{-\alpha'}}$.

Finalement, on retournant sur la définition du modèle $\overline{\Omega}_N(\xi_2)$ et d'après (3.20), il existe $K_{15} > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\overline{\Phi}_0(\xi_2, N) = |\overline{\Omega}_N(\xi_2)| \geq K\big(N - (N - [N\xi_2(N)])\big)N^2(1 + O(\xi_2(N)) \geq K_{15}N^{3-|\tau|^{-\alpha'}}.$$

Ce qui, en prenant $\alpha' > \beta > \alpha$ et en combinant avec (3.17), achève la preuve.

■

Chapitre 4

Démonstrations des Théorèmes de la Limite Locale

Nous allons procéder dans ce chapitre aux démonstrations des théorèmes 0.1 et 0.2.

Rappelons qu'on a introduit dans le chapitre précédent le modèle lissé $(\overline{\Omega}_N(\xi), \overline{\mathbb{P}}_N(\xi))$ qui vérifie $|\overline{\mathbb{P}}_N(\xi) - \mathbb{P}_N| = O(\xi(N))$. Ainsi, pour $\xi(N) = N^{-\gamma_0}$ avec $\gamma_0 > 0$ comme dans le lemme 3.8, il suffit de démontrer les théorèmes de la limite locale pour la distribution de $\overline{\mathbb{P}}_N(\xi)$.

Rappelons également (voir l'historique de l'introduction) qu'il existe des constantes $\mu(c) > 0$ et $\delta(c) > 0$ telles que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{\mathbb{E}}_N}{\log N} = \mu(c) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{\mathbb{V}}_N}{\log N} = (\delta(c))^2$$

Posons

$$\mathbf{Q}(x, N) = \mu(c) \log N - \delta(c) x \sqrt{\log N}.$$

Nous allons donc démontrer les deux théorèmes

1 Démonstration du théorème 0.1

Nous démontrons dans cette section le théorème suivant :

Théorème 0.1(Théorème de la limite locale)[22] *Pour les algorithmes euclidiens $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$ et pour toute fonction coût c non-réseau et possédant des moments forts à l'ordre 3 (voir Chapitre 1, Section 5), on a : pour tout J intervalle*

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\log N} \tilde{\mathbb{P}}_N\big[(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)) \in J\big] = |J| \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}.$$

Démonstration : Nous utilisons ici la méthode de Stone : Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ on pose

$$\widetilde{J} := \{(p,q) \in \Omega_N \ ; \ C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N) \in J\},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $\overline{m}_N = \overline{m}_{x,N}$ de mesures boréliennes de $\mathbb{R}$ par :

$$\overline{m}_N(J) := \overline{\mathbb{P}}_N(\Pi^{-1}(\widetilde{J})).$$

Soit la mesure $m := m_x$ définie par :

$$m(J) := \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}|J|.$$

On suit la méthode de Stone ([7], Chp.10.2) : pour montrer que $\sqrt{\log N}\ \overline{m}_N \xrightarrow{w} m$, il suffit de montrer que, pour toute fonction ψ non-négative continue et dont la transformée de Fourier $\widehat{\psi}$ est à support compact, on a :

$$\sqrt{\log N} \int_{\mathbb{R}} \psi \ d\overline{m}_N \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi \ dm.$$

ou en d'autres termes, que pour tout ε fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (N_0 indépendant de x) tel que pour tout $N \geq N_0$;

$$\left| \sqrt{\log N}\ \overline{E}_N\big[\psi\big(C(p,q) - Q(x,N)\big)\big] - \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\delta(c)} \int_{\mathbb{R}} \psi(y)dy \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $L > 0$ tel que $[-L, +L]$ contienne le support de $\widehat{\psi}$. On a

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\log N}\ \overline{E}_N\big[\psi\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big)\big] \\
&\qquad = \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \widehat{\psi}(\tau)\overline{E}_N\big[\exp\big(i\tau\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big)\big)\big]\ d\tau \\
&\qquad = \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\overline{E}_N\big[\exp\big(i\tau\big(C(p,q)\big)\big]\ d\tau
\end{aligned}$$

Soit $0 < \tilde{\nu}_2 < \nu_2 < L$ avec ν_2 assez petit (comme dans le lemme 3.8) et décomposons l'intervalle $[-L, +L]$ en $|\tau| \leq \tilde{\nu}_2$ et $|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, L]$.

Posons

$$I(N) = \int_{-L}^{+L} \widehat{\psi}(\tau)\, e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{E}_N \big[\exp\big(i\tau\big(C(p,q)\big)\big] \, d\tau$$

qui se décompose en $I_0(N) + I_1(N)$ respectivement par rapport à $|\tau| \leq \tilde{\nu}_2$ et $|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, L]$.

Montrons d'abord que $I_1(N) \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow \infty$.

Nous utilisons ici la décroissance exponentielle du lemme 3.9, on obtient (rappelons que $\gamma_0 = \gamma_0(L, \widetilde{\nu}_2)$),

$$\begin{aligned} |I_1(N)| &\leq \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\, \widetilde{M}\, N^{-\gamma_2} \int_{|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, L]} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big| \, d\tau \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{2\pi} \sqrt{\log N}\, e^{-\gamma_2 \log N} \int_{|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, L]} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big| \, d\tau \\ &\leq \frac{\widetilde{K}}{\log N} \int_{|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, L]} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big| \, d\tau = \frac{\widetilde{C}}{\log N} < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

où $\widetilde{C} = \widetilde{C}(L,\ \widetilde{\nu},\ \psi)$ et $\widetilde{C}$ est indépendant de x. Ainsi le terme $I_1(N) \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Revenons à $I_0(N)$ et notons que le coût c est supposé avoir des moments forts à l'ordre 3.
Alors, d'après la proposition 2.3, la fonction $i\tau \mapsto \widetilde{\sigma}(i\tau)$ est de classe C^3 avec $\widetilde{\sigma}(0) = 1$, $\widetilde{\sigma}'(0) = \mu(c)/2$, et $\widetilde{\sigma}''(0) = \delta(c)^2/2 \neq 0$ (voir commentaire après le corollaire 2.3).

Posons

$$\delta_0 := \inf\{|\Re\tilde{\sigma}''(\tau)|;\ \tau \in [-\tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_2]\} > 0,$$

et

$$\tau_N = \left(\frac{\log\log N}{\delta_0 \log N} \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Le choix de τ_N sera justifié plus bas.

Nous allons écrire $I_0(N)$ comme une somme de deux termes : une intégrale sur l'ensemble $|\tau| \leq \tau_N$ qui donnera le terme dominant (densité de Gauss) et une deuxième intégrale sur l'ensemble $|\tau| \in [\tau_N, \tilde{\nu}_2]$ qui est un terme négligeable.

$$I_0(N) = \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int\limits_{|\tau|\leq \tau_N} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau$$
$$+ \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int\limits_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau.$$

Montrons que le 2ème terme est dominé par $1/\sqrt{\log N}$. D'après le lemme 3.8, on a

$$\overline{\mathbb{E}}_N(\xi_1, e^{i\tau C}) = \frac{E(i\tau)}{E(0)\tilde{\sigma}(i\tau)} N^{2(\tilde{\sigma}(i\tau)-\tilde{\sigma}(0))}\big(1 + O(N^{-\gamma_1})\big), \quad \forall \mathbb{N} \in \mathbb{Z}_+^*, \quad \forall |\tau| < \nu_2\,,$$

avec $E(i\tau)$ et $\tilde{\sigma}(i\tau)$ qui sont trois fois différentiable.

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \left| \int\limits_{|\tau|\in[\tau_n,\tilde{\nu}_2]} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau \right|$$

$$= \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \left| \int\limits_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}} N^{-i\tau\mu(c)} \overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau \right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \sup_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \left| N^{-i\tau\mu(c)} \overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))] \right| \left| \int\limits_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\ d\tau \right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \sup_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \left| e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\tau)-1-i\tau\tilde{\sigma}'(0))} \frac{E(i\tau)}{E(0)\ \tilde{\sigma}(i\tau)} (1 + O(e^{-\widehat{\alpha}_0 \log N})) \right| \int\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tau)|\ d\tau.$$

On applique ici la méthode du point col : la fonction qui à τ associe $\tilde{\sigma}(i\tau) - 1 - i\tau\tilde{\sigma}'(0)$ admet un point col en $\tau = 0$. On vérifie, par un développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $i\tau \to \widetilde{\sigma}(i\tau)$, que les fonctions :

$$f_1^{(N)} : \tau \longmapsto \exp\left[2\log N\big(\tilde{\sigma}(i\tau) - 1 - i\tau\tilde{\sigma}'(0)\big)\right]$$

et

$$f_2^{(N)} : \tau \longmapsto \frac{E(i\tau)}{E(0)\sigma(i\tau)}\big(1 + O(e^{-\widehat{\alpha}_0 \log N})\big)$$

vérifient pour tout $|\tau| \leq \tilde{\nu}_2$:

$$\left|f_1^{(N)}(\tau)\right| = O\big(e^{-\tau^2\delta_0\log N}\big) \tag{4.2}$$

et

$$\left|f_2^{(N)}(\tau)\right| = 1 + O\big(|\tau| + e^{-\widehat{\alpha}_0\log N}\big). \tag{4.3}$$

De plus, pour tout $|\tau| \in [\tau_N, \tilde{\nu}_2]$ on a

$$|f_1^{(N)}(\tau_N)\cdot f_1^{(N)}(\tau)| = O(e^{-2\delta_0\tau^2\log N}) = O(1/\log N). \tag{4.4}$$

La dernière égalité (4.4) justifie le choix de τ_N. Notons que cet argument fait que τ_N ne peut être amélioré.

En utilisant (4.2), (4.3) et (4.4) on obtient,

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\left|\int\limits_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau Q(x,N)}\overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau\right| \\
&\qquad \le \widetilde{D}(\psi)\frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\sup_{|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]}\left|e^{-\tau^2\delta_0\log N}(1+|\tau|+e^{-\widehat{\alpha}_0\log N})\right| \\
&\qquad \le \sqrt{\log N}\ M\ e^{-\log N\tau_N^2\delta_0} \\
&\qquad = \sqrt{\log N}\ \frac{M}{\log N} = O\big(1/\sqrt{\log N}\big),
\end{aligned}$$

avec M dépendant de ψ, $\tilde{\nu}_2$ et indépendant de x.

Il reste maintenant à estimer l'intégrale sur l'ensemble $|\tau| \le \tau_N$. On a toujours, d'après la formule de quasi-puissance dans le lemme 3.8

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_0(N) &:= \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\int\limits_{|\tau|\le\tau_N} \widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau Q(x,N)}\overline{E}_N[\exp(i\tau C(p,q))]\ d\tau \\
&= \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\int\limits_{|\tau|\le\tau_N}\widehat{\psi}(\tau)e^{-i\tau Q(x,N)}e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\tau)-1)}\frac{E(i\tau)}{E(0)\tilde{\sigma}(i\tau)}\big(1+O(e^{-\widehat{\alpha}_0\log N})\big)d\tau \\
&= \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\int\limits_{|\tau|\le\tau_N}\widehat{\psi}(\tau)\ e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\ e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\tau)-1-i\tau\tilde{\sigma}'(0))}\frac{E(i\tau)}{E(0)\tilde{\sigma}(i\tau)}\big(1+O(e^{-\widehat{\alpha}_0\log N})\big)\ d\tau.
\end{aligned}$$

Nous allons approcher $\widetilde{I}_0(N)$ par l'intégrale $J_0(N)$ définie par

$$J_0(N) := \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int\limits_{|\tau|\leq\tau_N} \widehat{\psi}(\tau)\, e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\, e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\tau)-1-i\tau\tilde{\sigma}'(0))} d\tau.$$

Grâce aux développements de (4.2) et (4.3), on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\big|\widetilde{I}_0(N) - J_0(N)\big| &\leq \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{|\tau|\leq\tau_N} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big||\tau|e^{-\tau^2\delta_0\log N}\, d\tau \\
&\qquad + e^{-\widehat{\alpha}_0\log N}\int\limits_{|\tau|\leq\tau_N} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big|e^{-\tau^2\delta_0\log N} d\tau\Bigg] \\
&\leq K_1\frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{|\tau|\leq\tau_N} |\tau|e^{-\tau^2\delta_0\log N}\, d\tau + \frac{1}{\log N\widehat{\alpha}_0}\int\limits_{|\tau|\leq\tau_N} \big|\widehat{\psi}(\tau)\big|\, d\tau\Bigg] \\
&\leq \frac{K_2}{\sqrt{\log N}} + \frac{K_3}{\sqrt{\log N}} = O\big(1/\sqrt{\log N}\big),
\end{aligned}$$

où K_2, K_3 dépendent de ψ.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_0(N) = \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi} \int\limits_{|\upsilon|\leq\tau_N\sqrt{\log N}} \widehat{\psi}(\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}})\, e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\, e^{2n(\tilde{\sigma}(i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}})-1-i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}}\tilde{\sigma}'(0))} d\upsilon \\
+ O\big(1/\sqrt{\log N}\big).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $2\tilde{\sigma}''(0) = \delta^2(c)$ et

$$2\log N\Big[\tilde{\sigma}\big(i\upsilon/\sqrt{\log N}\big) - \tilde{\sigma}(0) - i\upsilon\tilde{\sigma}'(0)/\sqrt{\log N}\Big] = -\upsilon^2\frac{\delta^2(c)}{2} + O\bigg(\frac{\upsilon^3}{\sqrt{\log N}}\bigg).$$

Alors,

$$\bigg|e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}})-1-i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}}\tilde{\sigma}'(0))} - e^{\frac{-\delta^2(c)\upsilon^2}{2}}\bigg| = O\bigg(\frac{\upsilon^3}{\sqrt{\log N}}\bigg),$$

Finalement, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, appliqué à la suite de fonctions

$$\widehat{\psi}(\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}})\, e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\, e^{2n(\tilde{\sigma}(i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}})-1-i\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}}\tilde{\sigma}'(0))},$$

donne, pour tout N suffisamment grand et indépendant de x :

$$\left|\widetilde{I}_0(N) - \widehat{\psi}(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-i\delta(c)xv}e^{-\delta^2(c)v^2/2}dv\right| < \varepsilon/2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui signifie que, pour tout ε fixé et n suffisamment grand,

$$\left|I_0(N) - \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\int \psi(y)dy\right| < \varepsilon/2,$$

uniformément en x.

■

2 Démonstration du Théorème 0.2

Rappelons que nous démontrons dans cette section le théorème suivant

Théorème 0.2(Théorème de la limite locale avec vitesse de convergence)[1] *Pour tout coût c diophantien d'exposant η pour un sous-ensemble fini $\mathcal{H}_0$ et ayant des moments forts à l'ordre 3 :*

i) Il existe $\epsilon \in (0, 1/2]$, tel que pour tout intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $M_J > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\sqrt{\log N}\tilde{\mathbb{P}}_N\big(\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big) \in J\big) - |J|\frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\right| \leq \frac{M_J}{(\log N)^\epsilon}\,.$$

ii) Il existe $r \geq 1$ tel que, pour toute fonction $\psi \in C^r(\mathbb{R})$ à support compact , il existe une constante $M_\psi > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\sqrt{\log N}\tilde{\mathbb{E}}_N\big(\psi\big(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N)\big)\big) - \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\int \psi(y)\,dy\right| \leq \frac{M_\psi}{\sqrt{\log N}}.$$

Démonstration : Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on note χ_J sa fonction caractéristique. On a

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{P}}_N(\Pi^{-1}(\widetilde{J})) &= \overline{\mathbb{P}}_N((C\circ\Pi(\cdot) - \mathbf{Q}(x,N)) \in J) \\
&= \sum_{(p,q,Q)\in\overline{\Omega}_N} \chi_J(C(p,q) - \mathbf{Q}(x,N))\cdot\overline{\mathbb{P}}_N(p,q,Q) \\
&= \sum_{(p,q,Q)\in\Omega_N} \overline{\mathbb{P}}_N((p,q,Q))\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau(C(p,q)-\mathbf{Q}(x,N))}\hat{\chi}_J(\tau)\,d\tau \qquad (4.5)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}_J(\tau)e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\,d\tau.
\end{aligned}$$

Nous utilisons : $(2\pi)\psi(y) = \int \hat{\psi}(\tau)e^{i\tau y}\,d\tau$, où $\hat{\psi}(\tau) = \int e^{-i\tau x}\psi(x)\,dx$ est la transformée de Fourier de la fonction ψ à support compact.

De manière similaire, pour la deuxième affirmation du théorème nous utilisons

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}_N(\psi(C\circ\Pi(\cdot)-\mathbf{Q}(x,N))) &= \sum_{(p,q,Q)\in\overline{\Omega}_N} \psi(C\circ\Pi(\cdot)-\mathbf{Q}(x,N))\cdot\overline{\mathbb{P}}_N(p,q,Q)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\tau)e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\cdot\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C\circ\Pi(\cdot)})\,d\tau. \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Comme $\hat{\chi}_J(\tau)$ ne décroît pas rapidement lorsque $|\tau|\to\infty$, il sera nécessaire de régulariser χ_J. Pour cette raison, il est plus facile de démontrer la seconde affirmation du théorème 0.2 par laquelle nous allons commencer.

2.1 Cas ψ "lisse"

Par (4.6) il suffit d'analyser

$$I(N) = \sqrt{\log N}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\tau)e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\cdot\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C(\cdot)})\,d\tau\,.$$

Soit $\tilde{\nu}_2\in(0,1)$ comme dans le lemme 3.8. Décomposons l'axe réel en

$$|\tau|<\tilde{\nu}_2\,,\quad |\tau|\in[\tilde{\nu}_2,2]\,,\quad |\tau|\in[2,L_N]\quad |\tau|>L_N\,, \qquad (4.7)$$

où $L_N>2$, vérifiant $L_N\to\infty$, lorsque $N\to\infty$, sera déterminé ultérieurement.

La décomposition (4.7) produit, respectivement, quatre intégrales $I(N) = I_1(N) + I_2(N) + I_3(N) + I_4(N)$.

Nous allons montrer que $I_1(N)\simeq\sqrt{2\pi}\widehat{\psi}(0)\frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)} + O(\frac{1}{\sqrt{\log N}})$ et que $I_2(N)$, $I_3(N)$ et $I_4(N)$ sont négligeables devant $I_1(N)$.

Commençons par étudier l'intégrale $I_1(N)$. Nous utilisons le même argument que celui effectué pour l'étude de l'intégrale $I_0(N)$ dans le section précédente.

Plus précisément, en reprenant l'argument du point col utilisé dans la section précédente, on décompose l'ensemble $|\tau|\le\widetilde{\nu}_2$ en $|\tau|\le\tau_N$ et $|\tau|\in[\tau_N,\tilde{\nu}_2]$, et on pose

$$J_0(N) := \frac{\sqrt{\log N}}{2\pi}\int\limits_{|\tau|\le\tau_N} \widehat{\psi}(\tau)\;e^{-i\tau\delta(c)x\sqrt{\log N}}\;e^{2\log N(\tilde{\sigma}(i\tau)-1-i\tau\tilde{\sigma}'(0))}d\tau.$$

Considérons de plus les trois intégrales suivantes :

$$J_1(N) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|\upsilon|\leq \tau_N\sqrt{\log N}} \hat{\psi}(\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}}) e^{-i\delta(c)x\upsilon} e^{-\frac{\delta^2(c)\upsilon^2}{2}} d\upsilon,$$

$$J_2(N) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\frac{\upsilon}{\sqrt{\log N}}) e^{-i\delta(c)x\upsilon} e^{-\frac{\delta^2(c)\upsilon^2}{2}} d\upsilon,$$

$$J_3(N) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\psi}(0) \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\delta(c)x\upsilon} e^{-\frac{\delta^2(c)\upsilon^2}{2}} d\upsilon = \hat{\psi}(0) \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}.$$

Le développement limité de $\tilde{\sigma}$ et le fait que ψ est suffisamment régulière donnent

$$|J_0(N) - J_1(N)| = O(1/\sqrt{\log N}).$$

La régularité de ψ donne également

$$\begin{aligned} |J_1(N) - J_2(N)| \leq \widetilde{C} \int\limits_{|\tau|\geq \tau_n\sqrt{n}} \left|e^{-\frac{\delta^2(c)\upsilon^2}{2}}\right| d\upsilon &= \tilde{C}_2 e^{-(\tau_N\sqrt{\log N})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{(\log N)^2}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log N}}\right). \end{aligned}$$

Ici, les termes O dépendent de ψ.

Finalement,

$$\begin{aligned} |J_2(N) - J_3(N)| &\leq M_1 \int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\upsilon/\sqrt{\log N}) - \hat{\psi}(0)| e^{-\delta^2\upsilon^2/2} d\upsilon \\ &\leq \frac{\tilde{M}_{1,\psi}}{\sqrt{\log N}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\upsilon e^{-\delta^2\upsilon^2/2}\right| d\upsilon = \frac{M_{1,\psi}}{\sqrt{\log N}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu $M_{1,\psi} \geq 1$ dépendant de $\sup_\tau |\hat{\psi}(\tau)| \leq \sup|\psi| \cdot |J|$, où $J = supp(\psi))$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$, en posant $\hat{\psi}(0) = \int \psi(y)\, dy$,

$$\left| \frac{I_1(N)}{2\pi} - \hat{\psi}(0) \frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{M_{1,\psi}}{\sqrt{\log N}}\,.$$

Pour contrôler l'intégrale $I_2(N)$ nous allons utiliser la décroissance exponentielle de l'espérance $\overline{E}N_N$ pour $|\tau| \in [\tilde{\nu}_2, 2]$. On a d'après le Lemme 3.9,

$$|\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})| \leq \frac{\widetilde{M}}{N^{\gamma_2}}.$$

les mêmes calculs effectués sur $I_1(N)$ de la section précédente, donnent, pour tout $\gamma_3 \in (0, \gamma_2)$, une constante $M_{2,\psi} \geq 1$ (dépendant de $\sup_\tau |\hat{\psi}(\tau)|$) telle que, pour tout x et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} |I_2(N)| &= \sqrt{\log N} \Big| \int_{|\tau| \in [\nu_0, 2]} \hat{\psi}(\tau) e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\, d\tau \Big| \\ &\leq M_{2,\psi} N^{-\gamma_3}\,. \end{aligned}$$

Il est bien clair que le terme d'erreur ci-dessus est de l'ordre de $O((\log N)^{-d})$ pour $d \geq 1/2$ arbitrairement grand.

Il reste maintenant à contrôler les deux dernières intégrales.
Supposons que

$$r > \alpha + 1\,,$$

avec $\alpha > 0$ comme dans la Proposition 2.13 (rappelons qu'à cause de la condition diophantienne α dépend de η).

Soit $\alpha'' \in (\alpha, r-1)$ et posons

$$L_N := (\log N)^{1/\alpha''}\,. \tag{4.8}$$

Le lemme 3.10 implique que, pour chaque $\alpha' \in (\alpha, \alpha'')$, il existe $M_{3,\psi} \geq 1$, tel que pour tout x et tout entier non nul N

$$\begin{aligned} |I_3(N)| &= \sqrt{\log N} \Big| \int_{|\tau| \in [2, L_N]} \hat{\psi}(\tau) e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C(\cdot)})\, d\tau \Big| \\ &\leq M_{2,\psi} \sqrt{\log N} L_N N^{-L_N^{-\alpha'}} \\ &\leq M_{2,\psi} (\log N)^{1/2 + 1/\alpha''} e^{-(\log N)^{1-\alpha'/\alpha''}} \leq \frac{M_{3,\psi}}{(\log N)^{1/2}}\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où le terme d'erreur est dominé par $(\log N)^{-d}$ pour $d \geq 1/2$ arbitrairement grand.

En effectuant une intégration par parties, on a pour tout entier $m \leq r$, il existe $M_\psi^{(m)}$ tel que $|\hat{\psi}(\tau)| \leq M_\psi^{(m)} |\tau|^{-m}$, pour tout $|\tau| \geq 2$.

Finalement, comme $r \geq \alpha' + 1$ et de plus

$$|e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})| \leq 1,$$

on trouve, pour tout entier $m \in (\alpha'' + 1, r]$, une constante $M_{4,\psi} \geq 1$ telle que pour tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$

$$\begin{aligned} |I_4(N)| &= \sqrt{\log N}\Big|\int_{|\tau|\geq L_N} \hat{\psi}(\tau)e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\,d\tau\Big| \\ &\leq M_\psi^{(m)}\sqrt{\log N}(\log N)^{-(m-1)/\alpha''} \leq \frac{M_{4,\psi}}{(\log N)^{1/2}}\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Les estimations obtenues sur I_1, I_2, I_3 et I_4 établissent la deuxième assertion du Théorème 0.2.

Enfin, quitte à prendre une valeur de m plus grande (si r est suffisamment grand) le terme d'erreur dans (4.10) peut être rendu de l'ordre de $O((\log N)^{-d})$ pour $d \geq 1/2$ arbitrairement grand.

■

2.2 Le cas de χ_J

L'idée de base ici est de se ramener au cas d'observable lisse. On va devoir régulariser, à travers un produit de convolution, la fonction caractéristique χ_J.

Commençons d'abord par une approximation de la fonction de Dirac par la distribution Gaussienne.

Pour tout $\delta > 0$, on pose

$$\Delta_\delta(x) = \delta^{-1}\Delta(x/\delta) \quad \text{avec} \quad \Delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,.$$

Posons pour toute fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R})$

$$\psi_\delta = \psi * \Delta_\delta,$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 4.1. *Il existe $D_0 \geq 1$ tel que pour tout $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $y\psi(y) \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de ψ_δ vérifie :*

$$|\hat{\psi}_\delta(\tau)| \leq D_0\int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|\,dy \cdot e^{-\delta^2\tau^2} \leq D_0\int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|\,dy\,,\ \forall\delta > 0\,, \tau \in \mathbb{R}\,, \tag{4.11}$$

$$\mathrm{Lip}(\hat{\psi}_\delta) \leq D_0\Big(\int_{\mathbb{R}} |y\psi(y)|\,dy + \int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|\,dy\Big)\,,\ \forall\delta > 0\,. \tag{4.12}$$

De plus, si ψ est Lipschitzienne, alors

$$\sup_x |\psi(x) - \psi_\delta(x)| \leq D_0 \operatorname{Lip}(\psi) \cdot \delta\,, \ \forall \delta > 0\,. \tag{4.13}$$

Preuve. Pour montrer (4.11–4.12), il suffit d'utiliser $\hat{\psi}_\delta(\tau) = \hat{\psi}(\tau) \cdot \widehat{\Delta}_\delta(\tau)$, et le fait que la transformée de Fourier $\widehat{\Delta}_\delta(\tau)$ de Δ_δ est

$$\widehat{\Delta}_\delta(\tau) = e^{-\delta^2\tau^2}\,.$$

Montrer (4.13). Du fait que $\int \Delta_\delta(y)\,dy = 1$, on déduit

$$|\psi(x) - \psi_\delta(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} \Delta_\delta(y)(\psi(x) - \psi(x-y))\,dy\Big| \leq \operatorname{Lip}(\psi)\int_{\mathbb{R}} \Delta_\delta(y)|y|\,dy\,,$$

Or, par le changement de variables $z = y/\delta$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{y^2}{\delta^2}}\,dy = O(\delta),$$

et le résultat en découle.

■

Posons $J = [a, b]$. Pour $\delta \in (0, (b-a)^2/4)$ suffisamment petit, afin de pouvoir appliquer le lemme ci-dessus, la régularisation de χ_J commence d'abord par son approximation par deux fonctions de Lipschitziennes à supports compacts

$$\psi^+ = \psi_J^{+,\delta} : \mathbb{R} \to [0,1] \quad \text{et} \quad \psi^- = \psi_J^{-,\delta} : \mathbb{R} \to [0,1].$$

Plus précisément ;

La fonction ψ^+ est égale à 1 sur l'intervalle $[a - \sqrt{\delta}, b + \sqrt{\delta}]$, elle est nulle en dehors de $[a - 2\sqrt{\delta}, b + 2\sqrt{\delta}]$, et est affine avec une pente égale à $\pm\delta^{-1/2}$ sur les reste des intervalles.

De même, ψ^- est égale à 1 sur $[a+2\sqrt{\delta}, b-2\sqrt{\delta}]$ elle est nulle en dehors de $[a+\sqrt{\delta}, b-\sqrt{\delta}]$, et affine avec une pente égale à $\pm\delta^{-1/2}$ sur le reste des intervalles.

On a, avec cette construction

$$\int \psi^\pm(y)\,dy = |J| + O(\sqrt{\delta}) \quad \text{et} \quad \int |y|\psi^\pm(y)\,dy \leq 4|J|^2,$$

de plus ;

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}_N(\psi^-(C \circ \Pi(\cdot) - \mathbf{Q}(x,N))) &\leq \overline{\mathbb{P}}_N((C \circ \Pi(\cdot) - \mathbf{Q}(x,N)) \in J) \\ &\leq \overline{\mathbb{E}}_N(\psi^+(C \circ \Pi(\cdot) - \mathbf{Q}(x,N)))\,.\end{aligned}$$

On procède ensuite à une régularisation par un produit de convolution

$$\psi_\delta^\pm = \psi_J^{\pm,\delta} * \Delta_\delta\,, \text{ avec } \delta = \delta_N = (\log N)^{-2\epsilon}\,,$$

où $\epsilon > 0$ sera défini plus tard.

Comme $\mathrm{Lip}(\psi^\pm) = \delta^{-1/2}$, la majoration (4.13) du Lemme 4.1 donne

$$\begin{aligned}\left|\overline{\mathbb{E}}_N(\psi^\pm(C\circ\Pi(\cdot)-\mathbf{Q}(x,N)))-\overline{\mathbb{E}}_N(\psi_\delta^\pm(C\circ\Pi(\cdot)-\mathbf{Q}(x,N)))\right| &\le D_0\sqrt{\delta}\\ &\le D_0(\log N)^{-\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (4.5), il suffit de contrôler

$$I_\delta^\pm(N) = \sqrt{\log N}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_\delta^\pm(\tau) e^{-i\tau\mathbf{Q}(x,N)}\overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\,d\tau\,.$$

Considérons la décomposition (4.7) de $\mathbb{R}$, où L_N sera défini par la suite, et les quatre intégrales associées $I_\delta^\pm(N) = I_{\delta,1}^\pm(N) + I_{\delta,2}^\pm(N) + I_{\delta,3}^\pm(N) + I_{\delta,4}^\pm(N)$.

Pour les mêmes raisons que dans la section précédente, on introduit τ_N comme dans (4.1) et on utilise la borne uniforme (4.12) sur la constante de Lipschitz de $\hat{\psi}_\delta^\pm(\tau)$ afin d'avoir

$$\sup_{|\tau|\le\tau_N} |\hat{\psi}_\delta^\pm(0) - \hat{\psi}_\delta^\pm(\tau)| \le M_J\cdot\tau_N.$$

On utilise ensuite l'assertion (4.11) pour majorer $\sup|\hat{\psi}^\pm|$ et on trouve ainsi, une constante $M_{1,J}\ge 1$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $N\in\mathbb{Z}_+^*$ on a

$$\left|\frac{I_{\delta,1}^\pm(N)}{2\pi} - \hat{\psi}_\delta^\pm(0)\frac{e^{-x^2/2}}{\delta(c)\sqrt{2\pi}}\right| \le \frac{M_{1,J}}{(\log(N))^{1/2}}\,. \tag{4.14}$$

Notons que le terme $O((\log N)^{-1/2})$ dans l'expression ci-dessus ne peut être amélioré.

Notons de plus que $\psi_\delta^\pm(0)$ est proche de la longueur de l'intervalle J :

$$\hat{\psi}_\delta^\pm(0) = \int \psi_\delta^\pm(y)\,dy = \int \psi_\delta^\pm(y)\,dy = |J| + O(\sqrt{\delta_N}) = |J| + O((\log N)^{-\epsilon})\,. \tag{4.15}$$

Le contrôle de $I^{\pm\delta,2}(N)$ se fait comme dans le cas régulier. En effet, en utilisant la borne faible de (4.11) et le fait qu'un coût diophantien est non-réseau, on a, pour chaque $\gamma_3\in(0,\gamma_2)$, il existe $M_{2,J}\ge 1$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $N\in\mathbb{Z}_+^*$

$$|I_{\delta,2}^\pm(N)| \le M_{2,J}N^{-\gamma_3}\,. \tag{4.16}$$

Considérons $\alpha'' > \alpha$, avec α comme dans le lemme 3.10, et posons $L_N = (\log N)^{1/\alpha''}$. (On supposera que $\alpha'' > 2$.)

D'après le lemme 3.10 et la borne faible de (4.11), en raisonnant comme en (4.9), on a, pour chaque $\alpha' \in (\alpha, \alpha'')$, il existe $M_{3,J} \geq 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$\begin{aligned} |I_{\delta,3}^{\pm}(N)| &= \sqrt{\log N} \left| \int_{|\tau| \in [2, L_N]} \hat{\psi}_\delta^{\pm}(\tau) e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\, d\tau \right| \\ &\leq \frac{M_{3,J}}{(\log N)^{1/2}}\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Finalement si

$$2\epsilon < (\alpha'')^{-1},$$

alors [1]

$$\delta_N L_N > \log\log N,$$

et comme,

$$|e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})| \leq 1,$$

on trouve en utilisant la borne forte de (4.11), des constantes $\widetilde{M}_{4,J} \geq 1$ et $M_{4,J} \geq 1$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$\begin{aligned} |I_{\delta,4}^{\pm}(N)| &= \sqrt{\log N} \left| \int_{|\tau| \geq L_N} \hat{\psi}_\delta^{\pm}(\tau) e^{-i\tau \mathbf{Q}(x,N)} \overline{\mathbb{E}}_N(e^{i\tau C})\, d\tau \right| \\ &\leq \widetilde{M}_{4,J} \sqrt{\log N} L_N e^{-(\delta L_N)^2} \leq \widetilde{M}_{4,J} \sqrt{\log N} L_N e^{-(\log\log N)^2} \\ &\leq \frac{M_{4,J}}{(\log N)^{1/2}}\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

En regroupant (4.14–4.16–4.17–4.18) on achève la démonstration de la première assertion du Théorème 0.2, pour $\epsilon \in (0, 1/(2\alpha''))$.

■

[1] On pourrait prendre une valeur de δ_N plus petite, mais notre argument exige que $\inf_N(\delta_N L_N) > 0$.

Appendice

Notation : Nous rappelons que $A(T) = \Theta(B(T))$ lorsque $T \to \infty$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de T telle que $C^{-1}|B(T)| \leq |A(T)| \leq C|B(T)|$.

Démonstration du lemme 2.9 : i) La démonstration se fait par un calcul direct qui repose sur la propriété de distorsion bornée et le fait que la partie réelle du paramètre s est dans un ensemble compact (on peut voir le détail du calcul dans [3, lemme 12]).

ii) Par définition de la mesure μ_σ, on a pour tout entier positif k et pour tout $h \in \mathcal{H}^k$, si on note χ_h la fonction caractéristique de l'intervalle fondamentale $h(\mathcal{I})$

$$\mu_\sigma[h(\mathcal{I})] = \mu_\sigma[\widetilde{\mathbf{H}}_\sigma^k[\chi_h]],$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \mu_\sigma[h(\mathcal{I})] &= \frac{1}{\lambda_\sigma^k f_\sigma^k(x)} \int_{\mathcal{I}} \sum_{g \in \mathcal{H}^k} |g'(x)|^\sigma \chi_h(g(x))\, d\mu_\sigma(x) \\ &\ll \lambda_\sigma^k \int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma d\mu_\sigma(x). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Considérons les quantités $a_1(h)$, $a_2(h)$, $a_3(h)1$ suivantes

$$a_1(h) := \int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma \, d\mu_\sigma(x)\,; \quad a_2(h) := |h(\mathcal{I})|^\sigma\,; \quad a_3(h) := \int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma \, dx\,.$$

Une application simple de la propriété de distorsion donne les relations

$$a_i(h) = \Theta\big(a_j(h)\big) \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3\},$$

avec des constantes indépendantes de la branche h.

Fixons maintenant $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}^k$ et posons $J = \bigcup_{h \in \mathcal{J}} h(\mathcal{I})$. Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\widetilde{\mathbf{H}}_{2\sigma-1}\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$, on obtient

$$\mu_\sigma[J] = \sum_{h\in\mathcal{J}} \mu_\sigma(h(\mathcal{I})) \leq \frac{1}{\lambda_\sigma^k}\Big(\sum_{h\in\mathcal{H}^k} |h(\mathcal{I})|^{2\sigma-1}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{h\in\mathcal{J}} |h(\mathcal{I})|\Big)^{1/2}$$
$$\ll \frac{\lambda_{2\sigma-1}^{k/2}}{\lambda_\sigma^k}\cdot |J|^{1/2}.$$

ce qui démontre la première assertion de *ii*).

La deuxième affirmation provient directement d'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $\|\widetilde{\mathbf{H}}_\sigma^k\|_\infty^2$ avec la même décomposition ($2\sigma-1$ et σ).

iii) C'est une conséquence directe de l'inégalité $\|\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}\|_\infty \leq 1$ et de la définition de la norme $\|\cdot\|_{1,t}$.

■

Démonstration du lemme 2.10 : 1) Rappelons que

$$I_n^- := \frac{1}{\lambda_\sigma^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\rho^{\beta n}} \exp(i\tau(c(h)-c(k))\cdot \int_{\mathcal{I}} \exp(it\Psi_{h,k}(x))\cdot R_{h,k}(x)\ dx.$$

En utilisant la propriété de distorsion on a

$$\int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma |k'(x)|^\sigma dx \leq L^\sigma \left(\int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma dx\right)\cdot\left(\int_{\mathcal{I}} |k'(x)|^\sigma dx\right)$$

D'où l'existence d'une constante $M_3 = M_3(\Sigma_1)$ telle que

$$|I_n^-| \leq \frac{\|u\|_0^2}{\lambda_\sigma^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\rho^{\beta n}} \int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma |k'(x)|^\sigma\ dx$$
$$\leq M_3 \frac{\|u\|_0^2}{\lambda_\sigma^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\rho^{\beta n}} \left(\int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma dx\right)\cdot\left(\int_{\mathcal{I}} |k'(x)|^\sigma dx\right)$$

Considérons maintenant les quantités

$$a_1(h) := \frac{1}{\lambda_\sigma^n}\int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma\ dx \qquad a_2(h) := \frac{1}{\lambda_\sigma^n}\int_{\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma d\mu_\sigma(x)$$
$$a_3(h) := \mu_\sigma[h(\mathcal{I})] \qquad a_4(h) := \frac{1}{\lambda_\sigma^n}|h(\mathcal{I})|^\sigma.$$

Comme μ_σ est un point fixe pour l'opérateur normalisé $\widetilde{\mathbf{H}}_\sigma$ et qu'elle est équivalente à la mesure de Lebesgue, on a

$$a_i(h) = \Theta\big(a_j(h)\big), \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

avec des constantes absolues qui ne dépendent que de l'ensemble compact Σ_1.

Il est alors suffisant d'étudier la somme

$$\sum_{h\in\mathcal{H}^n} \mu_\sigma[h(\mathcal{I})] \left(\sum_{k\in\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\leq\rho^{\beta n}} \mu_\sigma[k(\mathcal{I})] \right) = \sum_{h\in\mathcal{H}^n} \mu_\sigma[h(\mathcal{I})]\ \mu_\sigma[J(h, \rho^{an})]\,.$$

La deuxième assertion du lemme 2.9 appliquée à l'ensemble $J(h, \rho^{\beta n})$ donne

$$\mu_\sigma(J(h, \rho^{\beta n})) \ll A_\sigma^n |J(h, \rho^{\beta n})|.$$

Finalement , grâce à la condition *UNI(a)*

$$|I_n^-| \ll (\rho^{\beta/2} A_\sigma)^n \|u\|_0^2.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$|I_n^+| \leq \frac{1}{\lambda(\sigma)^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n, \Delta(h,k)\geq\rho^{\beta n}} \left|\hat{I}(h,k)\right|\,, \tag{5.20}$$

où

$$\hat{I}(h,k) := \int_{\mathcal{I}} \exp[it\Psi_{h,k}(x)]\, R_{h,k}(x) dx$$

si on décompose $u = \Re u + i\Im u$ et que l'on pose

$$r_{h,k}(x) = e^{i\omega} |h'(x)|^\sigma |k'(x)|^\sigma \frac{1}{f_\sigma^2(x)} (u_1 \cdot f_\sigma) \circ h(x) (u_2 \cdot f_\sigma) \circ k(x)\,, \tag{5.21}$$

avec $u_1, u_2 \in \{\Re u, \Im u\}$ et $\exp i\omega \in \{\pm 1, \pm i\}$, l'intégrale $\hat{I}(h,k)$ se décomposera en quatre intégrale oscillantes de la forme

$$I(h,k) := \int_{\mathcal{I}} \exp[i\tau\Psi_{h,k}] r_{h,k}(x)\ dx.$$

Lemme 5.2 (Lemme de Van der Corput)**.** *(Voir [37]) Pour tout intervalle $\mathcal{I}$ et tout $Q > 0$, il existe $C(Q)$, tel que, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\Psi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I})$ avec $|\Psi''(x)| \leq Q$, $|\Psi'(x)| \geq \Delta$ avec $|t|^{-1} \leq \Delta \leq 1$, et $r \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$ avec $||r||_0 \leq R$, $||r||_{1,1} \leq RD$, l'intégrale $I(t) = \int_{\mathcal{I}} \exp[it\Psi(x)]\, r(x)\, dx$ satisfait*

$$|I(t)| \leq R\, C(Q) \left[\frac{D+1}{|t|\Delta} + \frac{1}{|t|\Delta^2} \right]\,.$$

Considérons (t,n) avec $1/|t| \leq \rho^{\beta n}$. En posant

$$M(h,k) := \sup_{x\in\mathcal{I}} |h'(x)|^\sigma |k'(x)|^\sigma \frac{1}{f_\sigma^2(x)} f_\sigma \circ h(x) f_\sigma \circ k(x)\,, \tag{5.22}$$

la norme infinie $\|r_{h,k}\|_\infty$ satisfait

$$\|r_{h,k}\|_\infty \leq M(h,k)\|u_1\|_\infty\ \|u_2\|_\infty \leq M(h,k)\|u_1\|_{1,t}\ \|u_2\|_{1,t}\,.$$

et un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\|r_{h,k}\|_{1,1} &\ll M(h,k)\left[\|u_1\|_\infty\left(\|u_2\|_\infty + \rho^n\,\|u\|_1\right) + \|u_2\|_\infty\left(\|u_1\|_\infty + \rho^n\,\|u_1\|_1\right)\right] \\ &\ll M(h,k)\|u_1\|_{1,t}\|u_2\|_{1,t}\left[1+\rho^n|t|\right]\,.\end{aligned}$$

Ce qui, avec la propriété *UNI.(b)* nous permet d'appliquer le lemme de Van Der Corput aux intégrales $I(h,k)$ pour avoir

$$|I(h,k)| \ll M(h,k)\ ||u_1||_{1,t}||u_2||_{1,t}\ \left[\frac{2+|t|\rho^n}{|t|\rho^{\beta n}} + \frac{1}{|t|\rho^{2\beta n}}\right]\,.$$

Considérons $n = n_0 = \lceil \log|t|/|\log\rho| \rfloor$. Comme $\beta < 1/2$, pour $|t| \geq 1/\rho^2$, on a, $n_0 \geq 2$ et $\rho^{-\beta n_0} \leq \rho^{-(n_0-1)} \leq |t|$, si bien que l'inégalité ci-dessus devient

$$|I(h,k)| \ll M(h,k)\ \|u_1\|_{1,t}\|u_2\|_{1,t}\ \rho^{(1-2\beta)n_0}\,. \tag{5.23}$$

Ce qui, sur $\hat{I}(h,k)$, se traduit par

$$|\hat{I}(h,k)| \ll M(h,k)\ \rho^{(1-2\beta)n_0}\ \|u\|_{1,t}^2\,.$$

Fixons x_0 dans $\mathcal{I}$. Alors par la propriété de distorsion bornée et la définition de $M(h,k)$ in (5.22),

$$M(h,k) \ll |h'(x_0)|^\sigma |k'(x_0)|^\sigma \frac{1}{f_\sigma^2(x_0)} f_\sigma \circ h(x_0) f_\sigma \circ k(x_0)\,.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\lambda_\sigma^{2n}} \sum_{(h,k)\in\mathcal{H}^n\times\mathcal{H}^n} M(h,k) \ll \left(\widetilde{\mathbf{H}}_\sigma^n[1](x_0)\right)^2 = 1\,. \tag{5.24}$$

Finalement, (5.23, 5.24, 5.20) donnent $|I_{n_0}^+| \ll \rho^{(1-2a)n_0}\ \|u\|_{1,t}^2$.

■

Démonstration du lemme 2.12 : Soient $u \in \mathrm{Lip}(\mathcal{I})$ et x, y dans $\mathcal{I}$. Rappelons qu'on veut montrer qu'il existe une constante positive K telle que, pour $|t| \leq t_0$, il existe $K(t)$ tel que, pour tous $m \in \mathbb{N}$, et $\tau \in \mathbb{R}$ on ait

$$\mathrm{Lip}(\widetilde{\mathbf{H}}_{s,i\tau}^m[u]) \leq K(t)\|u\|_{L^\infty} + K\rho^m \mathrm{Lip}(u). \tag{5.25}$$

$$\left|\widetilde{\mathbf{H}}^m_{s,i\tau}[u](x) - \widetilde{\mathbf{H}}^m_{s,i\tau}[u](y)\right| \leq \sum_{h\in\mathcal{H}^m} \left||h'(x)|^{1+it}\frac{(f_1\cdot u)\circ h(x)}{f_1(x)} - |h'(y)|^{1+it}\frac{(f_1\cdot u)\circ h(y)}{f_1(y)}\right|$$
$$\leq S_1 + S_2,$$

avec

$$S_1 = \sum_{h\in\mathcal{H}^m} |h'(x)|\left|\frac{(f_1\cdot u)\circ h(x)}{f_1(x)} - \frac{(f_1\cdot u)\circ h(y)}{f_1(y)}\right|,$$

et

$$S_2 = \sum_{h\in\mathcal{H}^m} \left||h'(x)|^{1+it} - |h'(x)|^{1+it}\right|\frac{(f_1\cdot u)\circ h(y)}{f_1(y)}.$$

Rappelons que l'opérateur normalisé $\widetilde{\mathbf{H}}_1$ vérifie $\widetilde{\mathbf{H}}_1[\mathbf{1}] \equiv 1$, et que les branches inverses d'un système de bonne classe vérifient la propriété (1.1) de distorsion bornée. Les sommes S_1 et S_2 vérifient :

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \sum_{h\in\mathcal{H}^m} |h'(x)|\frac{f_1\circ h(y)}{f_1(y)}\big|u(h(x)) - u(h(y))\big| + \sum_{h\in\mathcal{H}^m} |h'(x)|\left|\frac{f_1\circ h(x)}{f_1(x)} - \frac{f_1\circ h(y)}{f_1(y)}\right|u(h(y)) \\
&\leq \mathrm{Lip}(u)\sum_{h\in\mathcal{H}^m} |h'(x)|\big||h'(x)| - |h'(y)|\big|\frac{f_1\circ h(x)}{f_1(x)} + \|u\|_{L^\infty}\sum_{m\in\mathbb{N}}\rho^m \\
&\leq \mathrm{Lip}(u)\ \rho^m\ \widetilde{\mathbf{H}}_1[\mathbf{1}] + \|u\|_{L^\infty}/(1-\rho) \\
&= \mathrm{Lip}(u)\ \rho^m + K_1\ \|u\|_{L^\infty}, \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{h\in\mathcal{H}^m} |h'(y)|\left||h'(x)|^{it} - |h'(y)|^{it}\right|\frac{(f_1\cdot u)\circ h(y)}{f_1(y)} + \sum_{h\in\mathcal{H}^m}\left||h'(x)| - |h'(y)|\right|\frac{(f_1\cdot u)\circ h(y)}{f_1(y)} \\
&\leq |t|\ K_2\ \widehat{K}\rho^m\widetilde{\mathbf{H}}_1[\mathbf{1}]\|u\|_{L^\infty} + \widehat{K}\ \widetilde{\mathbf{H}}_1[\mathbf{1}]\ \|u\|_{L^\infty} \\
&\leq K_3(t)\|u\|_{L^\infty}. \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

Finalement, (5.26) et (5.27) donnent (5.25).

■

Démonstration du lemme 3.7. Considérons la quantité

$$W_{i\tau}(T) := \frac{1}{TG(T)^{1/2}}\big[\Psi_{i\tau}(T) - \Psi_{i\tau}(T - TG(T)^{1/2})\big]$$

et notons que les hypothèses sur $F_{i\tau}(T)$ et $a(i\tau)$ impliquent que l'on a

$$F'_{i\tau}(T) = \Theta\left(T^{-1}F_{i\tau}(T)\right), \tag{5.28}$$

où les constantes Θ sont uniformes par rapport à $|\tau| \leq \nu_0$.

En utilisant l'hypothèse (3.22) et la propriété (5.28) et le fait que $G(T)^{-1} = O(T)$, on montre que, lorsque T est assez grand, la différence entre le premier terme de (3.23) et $W_{i\tau}(T)$ est de l'ordre de

$$F'_w(T) \cdot O\left(\frac{1}{TG(T)^{1/2}}\right) = F'_{i\tau}(T) \cdot O\big(G(T)^{1/2}\big).$$

Il suffit alors de démontrer (3.23) pour $W_{i\tau}(T)$. La formule (3.22) et l'hypothèse de variation modérée sur G entraînent

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{TG(T)^{1/2}}[\Psi_{i\tau}(T) - \Psi_{i\tau}(T - TG(T)^{1/2})] \\
&\quad = \frac{1}{TG(T)^{1/2}}\left(F_{i\tau}(T) - F_{i\tau}(T - TG(T)^{1/2})\right) + \frac{1}{TG(T)^{1/2}} O\left(F_{i\tau}(T)G(T)\right) \\
&\quad = F'_{i\tau}(T)\left[1 + O\left(\frac{F_{i\tau}(T)G(T)}{TG(T)^{1/2}F'_{i\tau}(T)}\right)\right] \\
&\quad = F'_{i\tau}(T)\left[1 + O\left(G(T)^{1/2}\right)\right].
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] V. Baladi, A. Hachemi, *A local limit theorem with speed of convergence for euclidean algorithms and diophantine costs,* preprint (2006).

[2] V. Baladi, G. Keller, *Zeta Functions and Transfer Operators for Piecewise Monotone Transformations,* Comm. Math. Phys., **127** (1990) 459-477.

[3] V. Baladi, B. Vallée, *Euclidean Algorithms are Gaussian,* J. Number Theory **110** (2005) 331-386.

[4] J. Bourdon, B.Vallée, *Pattern matching statistics on correlated sources.* n LATIN 2006, pages 224–237, Lecture Notes in Computer Science, 3887, Springer.

[5] J. Bourdon, B. Daireaux, B. Vallée, *Dynmaical analysis of α-Euclidean Algorithms,* J. Algorithms **69** (2002) 246–285.

[6] R. Bowen, *Invariant measures for Markov maps of the interval,* Comm. Math. Phys. **69** (1979) 1–17.

[7] L. Breiman, *Probability,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1968.

[8] E. Breuillard, *Distributions diophantiennes et théorème limite local sur $\mathbb{R}^d$,* Probab. Theory Relat. Fields **132** (2005) 39–73.

[9] E. Breuillard, *Local limit theorems and equidistribution of random walks on the Heisenberg group,* Geom. funct. anal. **15** (2005) 35–82.

[10] A. Broise, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites,* Astérisque **238**, Société mathématique de France, (1996) 5–109.

[11] H. Carlsson, *Remainder term estimates of the renewal function,* Ann. Probab. **11** (1983) 143–157.

[12] J.W.S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 45. Cambridge University Press, New York, 1957.

[13] E. Cesaratto, *Remarks and extensions on "Euclidean algorithms are Gaussian" by Baladi-Vallée,*, Personal Communication.

[14] N.I. Chernov, *Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows,* Ann. of Math. **147** (1998) 269-324.

[15] J.D. Dixon, *The number of Steps in the Euclidean Algorithm,* Journal of number theory **2** (1970) 414-422.

[16] J.D. Dixon, *A simple estimate for the number of steps in the Euclidean Algorithm,* Amer. Math. Monthly **78** (1971) 374-376.

[17] D. Dolgopyat, *Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows,* Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998) 1097–1114.

[18] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows,* Ann. Math. **147** (1998) 357–390.

[19] W. Ellison, F. Ellison, *Prime Numbers,* John Wiley & Sons, Inc., New York, Hermann, Paris (1985).

[20] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney (1971).

[21] Y. Guivarc'h, Y. Le Jan, *Asymptotic winding of geodesic flow on modular surfaces and continuous fractions,* Annales scient. École Normale Sup.

[22] A. Hachemi, *Un théorème de la limite locale pour des algorithmes Euclidiens,* Acta Arithm. **117** (2005) 265–276.

[23] H. Heilbronn, *On the average lenght og a class of continued fractions,* P. Turan (Ed.) Number Theory and Analysis, Plenum, New York, 1969, pp. 87–96.

[24] D. Hensley, *The number of steps in the Euclidean algorithm,* J. Number Theory **49** (1994) 142–182.

[25] H-K. Hwang, *Théorèmes limite pour les structures combinatoires et les fonctions arithmétiques,* Ph.D. Thesis, Ecole Plytechnique, Décembre 1994.

[26] H-K. Hwang, *On convergence rates in the central limit theorems for combinatorial structures,* European J. Combin. **19** (1998) 329-343.

[27] C. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer, Berlin, 1980.

[28] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming,* vol 2, 2and Edition, Addison-Wesley (1981).

[29] I. Melbourne, *Rapid decay of correlations for nonuniformly hyperbolic flows,* preprint (2005) to appear Trans. Amer. Math. Soc.

[30] F. Naud, *Analytic continuation of a dynamical zeta function under a Diophantine condition,* Nonlinearity **14** (2001) 995–1009.

[31] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics,* Astérisque, 1990.

[32] M. Pollicott, R. Sharp, Exponential error terms for growth functions on negatively curved surfaces, *Amer. J. Math.* **120** (1998) 1019–1042.

[33] D. Ruelle, *Flots qui ne mélangent pas exponentiellement,* C.R. Acad. Sci. Paris **296** (1983) 191–193.

[34] R. Sharp, *A local limit theorem for closed geodesics and homology,* Trans. American Math. Society **356** (2004) 4897-4908.

[35] F. Schweiger, *Ergodic Theory of fibred systems and Metric Number Theory,* Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[36] F. Schweiger, *On the approximation by continued fractions with odd and even partial quotients,* Math. Inst. Univ. Salzburg, Arbeitsbericht **1-2** (1984) 105–114.

[37] E. Stein, *Harmonic analysis : Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory integrals,* Princeton University Press, Princeton, 1993.

[38] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory,* Cambridge University Press, 1995.

[39] B. Vallée, *Euclidean Dynamics*, Discrete Continuous Dynam. Systems **15** (2006) 281-352.

[40] B. Vallée, Dynamical sources in information theory : fundamental intervals and word prefixes, *Algorithmica* **29** (2001) 262–306.

[41] B. Vallée, *Digits and continuants in Euclidean algorithms. Ergodic versus Tauberian theorems,* Colloque International de Théorie des Nombres (Talence, 1999). J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000) 531–570.

[42] B. Vallée, *A Unifying Framework for the Analysis of a class of Euclidean Algorithms,* Proceedings of LATIN'2000, Lecture Notes in Computer Science **1776**, Springer, 343-354.